

OPERAÇÃO ÓTIMA DE SISTEMAS DE  
GERAÇÃO HIDRO-TÉRMICA

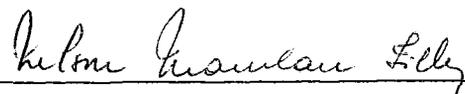
Ronaldo Cesar Marinho Persiano

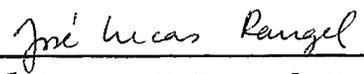
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS  
GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
DOUTOR EM CIÊNCIA (D.Sc.)

Aprovada por:

  
Clovis C. Gonzaga

  
Hilton Vieira Machado

  
Nelson Maculan Filho

  
José Lucas M. Rangel Neto

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL  
JANEIRO DE 1976

À Célia  
e Cecília

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Clovis C. Gonzaga que como pesquisador estimulou-me a enveredar pelos caminhos que originaram este trabalho ; como orientador deu-me as bases fundamentais da sua intuição e não poupou dedicação nas longas e múltiplas discussões que nos envolvemos; e como amigo incentivou-me sempre a enfrentar as dificuldades que me ocorreram.

Ao Prof. Nelson Maculan Filho pela compreensão que criou condições necessárias à conclusão desta tese.

Ao Prof. Alberto Luiz Coimbra que já em 1970, quando da minha vinda para a COPPE, promoveu em mim o estímulo indispensável à realização dos meus estudos de Doutorado no Brasil.

BIOGRAFIA DO AUTOR

RONALDO CESAR MARINHO PERSIANO nasceu em 14 de junho de 1945 em Belo Horizonte, Minas Gerais. Formado em Engenharia Eletrônica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica, em São José dos Campos, em 1968, permaneceu nesta Escola durante o ano seguinte como Auxiliar de Ensino. Ingressou na COPPE em 1970, completando o Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação em 1971. Faz parte do Corpo docente da COPPE desde esse ano, onde vem trabalhando na área de otimização e áreas correlatas.

RESUMO

Sistemas hidrotérmicos de geração são constituídos de um sistema termoelétrico e um sistema hidroelétrico. Cada um desses sistemas é formado por uma ou várias usinas. Considera-se o problema de operar o sistema de forma a atender uma demanda de energia dada, com o mínimo custo de operação do sistema termoelétrico. A afluência aos reservatórios hidroelétricos e o mercado são dados deterministicamente.

O problema formulado inclui restrições de turbina e dos reservatórios além de custos não necessariamente diferenciáveis. Permitem-se alterações de estrutura no sistema através da dependência no tempo do custo e das restrições.

São deduzidas condições necessárias e suficientes de otimalidade considerando-se o sistema com usinas individualizadas. Obtêm-se ainda expressões para o cálculo do valor e custo da água nos reservatórios do sistema.

Um estudo mais detalhado para sistemas com um reservatório é desenvolvido e são propostos tópicos para pesquisa futura.

## ABSTRACT

Hydrothermal power system consist of a thermal system and a hydroelectric system. Each one of these **systems** is composed of one or **several** plants. The problem of system operation **satisfy-**ing a specified load with a minimum operation cost is considered. The supply of water to the hydroelectric reservoir and the energy demand are given deterministically.

The problem formulated considers plants and reservoir constraints as **well** as not necessarily differentiable costs. A evolution of the system structure is allowed by a **time.dependent** costs and constraints.

Necessary and sufficient optimality conditions are developed considering **the** system with **separate** plants. Expressions for the value and cost of water in the system reservoirs are obtained.

A more detailed study of one-reservoir system is presented and topics for future research are proposed.

INDI'CE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO II - O MODELO DO SISTEMA E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA ...	5
Seção 1 - O Sistema Hidrotérmico .....	5
Seção 2 - Formulação do Problema .....	17
Seção 3 - Valor e Custo da Água .....	22
CAPÍTULO III - REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA E CONDIÇÕES DE OTIMALI DADE .....	26
Seção 1 - Reformulação do Problema .....	26
Seção 2 - Condições de Otimalidade para o Problema (10)	38
Seção 3 - Condições de Otimalidade para o Problema (11.25) e Cálculo do Valor e Custo da Água	55
CAPÍTULO IV - SISTEMAS COM UM RESERVATÓRIO .....	63
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES .....	87
BIBLIOGRAFIA .....	90
APÊNDICE .....	92

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Um sistema hidrotérmico de geração é composto de dois sistemas: um sistema de geração termoelétrica e um sistema de geração hidroelétrica, O primeiro sistema é constituído de uma ou mais usinas térmicas que geram energia elétrica através da queima de material combustível ou fissão de materiais radioativos. A operação de sistemas térmicos é bastante onerosa devido ao consumo daqueles bens escassos, Por outro lado, a capacidade geradora desses sistemas é pouco sujeita a incertezas o que garante uma produção bastante regular.

As características de um sistema hidroelétrico são distintas, É composto, em geral, de várias hidroelétricas localizadas em uma ou várias bacias com regimes hidrológicos diferentes ou não. A geração de uma usina hidroelétrica se faz pela descarga da água armazenada em um reservatório através de um grupo turbina-gerador. Os reservatórios coletam a água de rios, chuvas e provenientes de outros reservatórios.

O custo de operação de uma usina hidroelétrica é relativamente baixo quando comparado ao de uma usina térmica, Contudo, a capacidade geradora depende não somente de características técnicas mas também de um fator não controlável e sujeito a incerteza que é a afluência natural. Apesar dos reservatórios permitirem uma

regularização das descargas, o potencial gerador da usina  $\bar{e}$  reduzido em longos períodos secos.

O objetivo básico do sistema de geração elétrica  $\bar{e}$  atender um mercado de energia que também  $\bar{e}$  sujeito a incertezas embora admita previsões aceitáveis para o planejamento a longo prazo. A utilização simultânea dos dois sistemas térmico e hidroelétrico conduz a uma maior garantia do suprimento do mercado. Pela escolha da fração do mercado que será atendida por cada um dos sistemas e possível reduzir-se a probabilidade de um deficit de energia devido a uma escassez de afluência.

Como a utilização excessiva de usinas térmicas  $\bar{e}$  dispendiosa a decisão de quanto produzir em cada um dos sistemas deve considerar, além do atendimento da demanda, uma redução do custo total de produção, Esses custos são tão mais importantes quando se analisa longos períodos de planejamento,

O problema estudado busca determinar os níveis de produção de cada usina durante um período de planejamento com horizonte finito, de forma a atender a demanda de energia a um custo de produção mínimo. A afluência e a demanda são supostas dadas deterministicamente e o custo de produção  $\bar{e}$  descontado pela atribuição de uma taxa fixa,

O problema exposto tem sido objeto de muitos estudos e vários métodos de solução vem sendo propostos (Little[55], Koopmans [57], Guillaumin [69], Arvanitidis [70]). As abordagens mais comumente adotadas são resultado da aplicação do princípio do mínimo de Pontryagin e de Programação Dinâmica através da discretiza -

ção do problema. A limitação básica dessas abordagens reside na exigência de diferenciabilidade da função custo de operação térmica e funções de restrição do problema.

O objetivo deste trabalho é obter condições de otimalidade para o problema, com vistas a construção de algoritmos para a sua resolução. Busca-se também calcular o valor e custo da água, conceitos que são usados extensamente em métodos eficientes de resolução (Fernandes [75], Lima [76]). Condições de otimalidade necessárias, porém não suficientes, partindo de custos não diferenciáveis foram desenvolvidas em Araújo [74].

No segundo capítulo, é apresentado o modelo adotado, formulando-se o problema básico de operação ótima e conceituando-se o valor e custo da água. O capítulo seguinte concentra a teoria que conduz aos resultados desejados. Na primeira seção do capítulo o problema é reformulado como um problema de Programação Convexa em  $L^2[0, T]$ . Nas seções seguintes, é aplicado um teorema de otimalidade de Pshenichnyi do que resultam as condições de otimalidade e cálculo do valor da água,

No Capítulo IV, os resultados gerais desenvolvidos anteriormente são analisados e aplicados a alguns casos de interesse. No último capítulo são expostas algumas conclusões e no apêndice apresentam-se resultados gerais de Programação Matemática úteis ao longo do capítulo III.

### Notação

O espaço euclidiano  $n$ -dimensional é representado por

$\mathbb{R}^n$ . Se  $x \in \mathbb{R}^n$ , denota-se por  $x_i$  a  $i$ -ésima componente desse vetor,

O produto escalar de vetores  $x, z \in \mathbb{R}^n$  é denotado  $x'z$  ou  $\langle x, z \rangle$ . Os conjuntos dos naturais, reais e inteiros são denotados  $N$ ,  $R$  e  $Z$ . A medida e a integral adotadas são a medida e a integral de Lebesgue. utiliza-se a notação  $(L^2[0, T])^n$  para representar o espaço de funções  $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tais que  $y_i \in L^2[0, T]$ .

As expressões, parágrafos e teoremas importantes de cada capítulo são numerados a esquerda da página, sendo a numeração continua ao longo de um capítulo.

Referências a itens do mesmo capítulo são feitas pelo número da expressão ou teorema entre parênteses, Referências a expressões de outro capítulo são apresentadas pelo número do capítulo em algarismos romanos seguido do número da expressão. A bibliografia é referenciada pelo nome do primeiro autor seguida do ano de publicação entre barras. Referências a resultados do apêndice são precedidas da letra A.

## CAPÍTULO II

### O MODELO DO SISTEMA E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

#### Introdução

A modelagem de um sistema hidrotérmico é muito complexa se é exigida uma precisão muito grande do modelo. No planejamento diário ou semanal do sistema várias não-linearidades e interdependências entre variáveis necessitam ser consideradas. No planejamento a longo prazo pode-se contudo sacrificar parte da precisão do modelo pois o interesse consiste em determinar-se estratégias de operação que em seguida devem ser minuciosamente estudadas através de modelos mais refinados.

A primeira seção do capítulo trata da modelagem do sistema que será utilizada na seção seguinte onde o problema de planejamento a longo prazo é enunciado,

A última seção é dedicada a conceituação e discussão de valor e custo da água.

A referência básica para esse capítulo é Lima [76] onde o modelo adotado é estudado em detalhe.

#### Seção 1, O Sistema Hidrotérmico

Um sistema hidrotérmico objetiva suprir uma demanda de

energia elétrica através de duas fontes básicas de geração: o sistema hidroelétrico e o sistema termoelétrico. Cada um desses dois sistemas é estudado a seguir.

## 1 0 Sistema Hidroelétrico

Um sistema hidroelétrico é constituído de uma ou mais usinas hidroelétricas, Essas usinas podem, em geral, ser decompostas em: um reservatório de acumulação da afluência, uma turbina e um gerador, A função do reservatório é coletar e armazenar a água afluente para utilização futura. A geração elétrica se faz pela transformação de energia cinética em energia elétrica no gerador, obtida pelo fluxo da água descarregada do reservatório através da turbina, Cada um desses componentes de uma usina hidroelétrica possui suas características e restrições próprias que são enunciadas a seguir,

## 2 Equação do Gerador

Basicamente a potência instantânea gerada pelo gerador é dada por:

$$3 \quad P = \rho \cdot v$$

onde  $v$  é a vazão fluindo pela turbina e  $\rho$  é um coeficiente de rendimento, Diversos fatores dependentes da operação do sistema podem influir no rendimento do gerador sendo o mais importante a altura de queda do reservatório, Supõe-se neste trabalho que o rendimento do sistema turbina-gerador é constante, pela adoção de um va

lor médio.

#### 4 Restrição de Turbina

A vazão turbinada por uma usina hidroelétrica é restrita superiormente pela capacidade de engolimento da turbina e inferiormente pelo seu engolimento mínimo. No modelo adotado, o engolimento mínimo é nulo e o engolimento máximo independe da operação do sistema,

Assim, a vazão turbinada  $v$  é restrita por

$$5 \quad 0 \leq v \leq r$$

onde  $r$  será referenciada como restrição da turbina, e será uma função do tempo,

#### 6 Restrição do Reservatório

O reservatório de acumulação de uma usina hidroelétrica é fisicamente limitado em capacidade de armazenagem tanto superior como inferiormente. A adoção de critérios utilizando curva limite (ver Lima [76]) ou mesmo a possibilidade de ampliação da barragem de um reservatório durante o período de planejamento, justificam a possibilidade de restrições de operação diferentes das restrições físicas iniciais bem como limites variantes no tempo.

Dessa forma, o volume de água no reservatório no instante  $t$ , denotado  $w(t)$ , é restrito por:

$$7 \quad N(t) \leq w(t) \leq W(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

onde  $T$  é o horizonte de planejamento e  $N(t)$  e  $W(t)$  são respectivamente os limites inferior e superior do reservatório no instante  $t$ . Supõe-se que  $N$  e  $W$  são limitadas e respectivamente semicontínua superiormente e semicontínua inferiormente.

## 8 Afluência no Reservatório

Denomina-se afluência total no reservatório ao fluxo de água que chega ao reservatório devido a rios, chuvas e descarga de reservatórios a montante. A afluência própria do reservatório é a parte da afluência total não proveniente de descarga de reservatórios a montante. Denota-se a afluência total no reservatório por  $y: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  onde  $y(t)$  é o fluxo de água afluente no reservatório no instante  $t$ , e a afluência própria é denotada por  $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

A afluência própria de um reservatório é uma variável essencialmente aleatória pois depende de fatores meteorológicos. O estudo de históricos de afluência de anos anteriores pode, contudo fornecer estimativas e previsões de afluências próprias futuras. Neste trabalho, supõe-se a afluência dada deterministicamente por essas previsões, objetivando com isso estabelecer tendências de comportamento e informação qualitativa sobre as soluções. Além disso, o estudo de problemas determinístico é um passo necessário ao tratamento do problema estocástico. Um estudo do problema discreto estocástico com uma usina hidroelétrica é encontrado em Lima [76].

## 9 Dinâmica de um Reservatório

O volume de água presente em um reservatório no instante  $t$  é igual à diferença entre o volume de água afluente ao reservatório até esse instante e o volume de água descarregado até esse instante, somada ao volume de água inicial do reservatório. O volume de água descarregado pode ser decomposto em duas partes: volume de água vertido e volume de água turbinado.

Considerem-se as funções  $y, v, q: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  que representam respectivamente:

$y(t)$  vazão afluente total ao reservatório em  $t$

$v(t)$  vazão turbinada em  $t$

$q(t)$  vazão vertida em  $t$

Então, pelo exposto, a dinâmica do reservatório fica expressa pela equação integral:

$$10 \quad w(t) = h + \int_0^t y - v - q$$

onde  $w(t)$  é o volume de água no reservatório no instante  $t$  e  $h$  é o volume de água inicial no reservatório.

Em (10) a variável  $y$  pode depender da operação do sistema caso existam usinas a montante do reservatório considerado. Em um sistema com vários reservatórios em uma mesma bacia esta dependência não pode ser desprezada.

## 11 Sistema a n Reservatórios

Considera-se a seguir um sistema hidroelétrico cons-

tituído de  $n$  usinas hidroelétricas. Estas usinas podem estar localizadas em uma ou mais bacias com regimes hidrológicos distintos, Busca-se uma representação para a interligação hidrológica das usinas, resultante da acumulação de água em um reservatório a jusante devida à descarga de reservatórios a montante e da afluência própria,

Suponha-se que as usinas são numeradas de 1 a  $n$ . Diz-se que a usina  $j$  está imediatamente a montante da usina  $i$  se não existe nenhuma usina a montante de  $i$  e a jusante de  $j$ . A usina  $i$  está imediatamente a jusante da usina  $j$  se  $j$  está imediatamente a montante de  $i$ . Consideram-se apenas sistemas em que cada usina admite no máximo uma usina imediatamente a jusante e um número finito de usinas a montante.

Dessa forma, não se admite que a água descarregada por uma usina seja distribuída por duas ou mais usinas assim como impede-se que haja um circuito fechado de usinas (situação impossível em sistemas reais exceto com bombeamento),

Com essas hipóteses o fluxo de água entre usinas pode ser caracterizado pela matriz de interligação  $A$ ,  $n \times n$ , definida por:

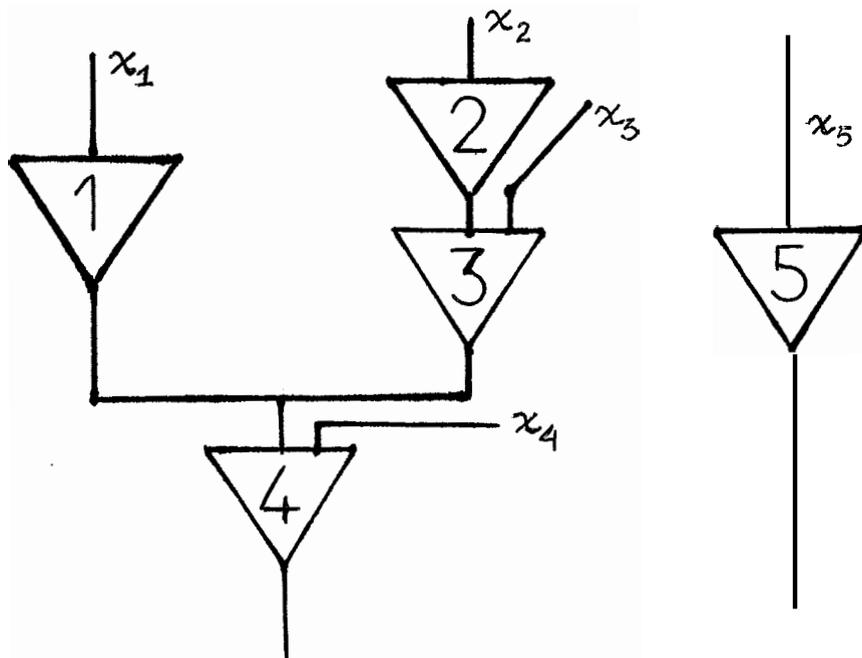
$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se a usina } j \text{ está imediatamente a montante da usina } i \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

Note-se que se o sistema hidroelétrico é constituído de usinas localizadas em bacias independentes então a matriz  $A$  é a matriz identidade.



A título de ilustração da interligação hidrológica de um sistema de geração hidroelétrica considere-se o sistema com 5 usinas representado na figura abaixo, No diagrama, as usinas são representadas por triangulos e os fluxos de água por linhas, supondo-se os fluxos no sentido descendente. As matrizes de interligação e sua inversa para esse exemplo são respectivamente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 15 Políticas Admissíveis de Operação

Uma política de operação do sistema a  $n$  reservatórios consiste nas funções vazão turbinada e vazão vertida em cada reservatório. Para a definição de política admissível de operação, considere-se a seguinte notação que será adotada no restante do trabalho:

- $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$       afluência própria  
 $x_i(t)$  é a afluência própria do reservatório  $i$  no instante  $t$ .
- $v: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$       vazão turbinada  
 $v_i(t)$  é a vazão turbinada pelo reservatório  $i$  no instante  $t$ .
- $q: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$       vazão vertida  
 $q_i(t)$  é a vazão vertida pelo reservatório  $i$  no instante  $t$ .
- $r: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$       restrição de turbina  
 $r_i(t)$  é a restrição de turbina da usina  $i$  no instante  $t$ .
- $\rho \in \mathbb{R}^n$       rendimento  
 $\rho_i$  é o rendimento do grupo turbina-gerador na usina  $i$ ,
- $w: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$       volume dos reservatórios  
 $w_i(t)$  é o volume do reservatório  $i$  no instante  $t$ .
- $N, W: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$       limites inferior e superior dos reservatórios  
 $N_i(t)$  e  $W_i(t)$  são respectivamente os limites inferior e superior do reservatório  $i$  no instante  $t$ .
- $h \in \mathbb{R}^n$       volume inicial  
 $h_i$  é o volume de água Inicial do reservatório  $i$ ,

Como algumas das funções listadas acima devem ser integradas ou comparadas com funções integráveis, algumas hipóteses devem ser adotadas para preservar-se a consistência da dinâmica dos reservatórios. Supõe-se, portanto, que as funções  $x$  e  $r$  são integráveis e essencialmente limitadas, ou seja, pertencem a  $(L^\infty[0, T])^n$ , enquanto  $w$ , em consequência da dinâmica do reservatório, será necessariamente uma função absolutamente contínua.

Ainda no sentido de manter a consistência do modelo deve-se supor:

$$\begin{aligned} r &\leq 0 & \rho &\geq 0 \\ N &\leq W & \text{e} & N(0) \leq h \leq W(0) \end{aligned}$$

16 Dado  $h \in \mathbb{R}^n$ , uma política de operação  $(v, q)$  é uma política  $h$ -admissível de operação se:

$$17 \quad 0 \leq v \leq r \quad q \geq 0$$

$$18 \quad w(t) = h + \int_0^t x - A(v+q) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$19 \quad N(t) \leq w(t) \leq W(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$20 \quad v, q \in (L^2[0, T])^n$$

Na definição acima a desigualdade (17) corresponde à restrição de turbina (4); a equação (18) exprime a dinâmica dos reservatórios exposta em (9), considerando a equação de interligação (14). As restrições dos reservatórios são caracterizadas em (19).

Uma política  $h$ -admissível corresponde portanto a um esquema de operação do sistema hidroelétrico que satisfaz às res -

trições dos reservatórios e restrições das turbinas, Se  $(v, q)$  é uma política h-admissível, denomina-se trajetória associada a essa política a função  $w$  definida por (18). Ou seja, a trajetória associada é a função do tempo que associa a cada instante de tempo os volumes de água presentes nos reservatórios naquele instante.

A toda política h-admissível  $(v, q)$  está associada uma geração elétrica que pode ser calculada por (3). Por essa equação, verifica-se que a potência instantânea obtida pela operação  $(v, q)$  é:

$$P(t) = \rho'v(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

## 21 Sistema de Geração Termoelétrica

Um sistema de geração termoelétrica é constituído de uma ou mais usinas termoelétricas. Basicamente, uma usina deste tipo opera pela transformação de energia térmica em energia elétrica. Em geral, a energia térmica é obtida pela queima de material combustível (carvão, Óleo, gás, etc) ou pela fissão de materiais físseis. Este consumo de material não renovável faz com que o custo de operação de um sistema térmico represente a parcela mais importante do custo de produção de energia elétrica em um sistema hidrotérmico.

A operação de um sistema termoelétrico é portanto planejada de forma a minimizar o seu custo. Embora, o parque gerador de energia termoelétrica seja limitado, é possível, pela atribuição de um custo elevado ao deficit de energia, considerá-lo capaz

de atender qualquer demanda (ver Lima [76]), Dessa forma, o custo de operação é a Única característica relevante desse sistema em um planejamento a longo prazo,

A determinação dos níveis de operação de cada usina termoelétrica do sistema de forma a atender a um dado requisito a custo mínimo, é um problema de otimização. A resolução deste problema é bastante complexa quando os requisitos são variantes no tempo pois envolve decisões de ativar ou não cada usina (ligar uma usina termoelétrica importa em um consumo não produtivo de combustível). Contudo, Lima [76] sugere um esquema simples para a avaliação do custo de operação do sistema em aplicações a planejamento a longo prazo.

Segundo esse esquema pode-se supor que o custo de operação do sistema termoelétrico é uma função convexa do requisito de energia. Assim o custo de produzir uma potência  $\mu$  pelo sistema seria  $C(\mu)$  onde  $C$  é convexa crescente. Atribuindo-se uma taxa de desconto  $\beta \geq 0$  na atualização dos custos, o custo total de operação para a produção de  $\bar{\mu}(t)$  em cada  $t \in [0, T]$  seria dado por:

$$\int_0^T C(\bar{\mu}(t)) e^{-\beta t} dt$$

A possibilidade de alterações na estrutura do parque gerador termoelétrico sugere uma dependência do tempo direta do custo de operação. Essas alterações de estrutura podem ser resultado da paralização ou introdução de usinas no sistema durante o período de planejamento, Portanto, admite-se que o custo de operação é calculado através de uma função  $C: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $C(\cdot, t)$  se

ja convexa e crescente para cada  $t \in [0, T]$ , por meio da expressão:

$$22 \quad \int_0^T C(\bar{\mu}(t), t) e^{-\beta t} dt$$

Mais adiante no texto, serão adotadas hipóteses adicionais pouco restritivas sobre a função  $C$  de forma a garantir propriedades convenientes do funcional calculado por (22).

## Seção 2. Formulação do Problema

O objetivo dos sistemas hidroelétrico e termoelétrico é atender a uma demanda de energia. Embora, a rigor o mercado energético seja uma variável aleatória, estudos do crescimento industrial e urbano permitem uma previsão bastante aceitável do mercado em aplicações a planejamento a longo prazo e mesmo a curto prazo.

Em nosso modelo a demanda de energia será caracterizada por uma função  $d: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$  integrável e essencialmente limitada. Então, diz-se que a geração hidroelétrica  $P$  e a geração termoelétrica  $\mu$  satisfazem a demanda quando

$$23 \quad \mu(t) + P(t) = d(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

O problema estudado neste trabalho é o de encontrar uma política de operação do sistema termoelétrico e uma política admissível de operação do sistema hidroelétrico de forma a satisfazer a demanda de energia, minimizando o custo de operação termoelétrico. Ou seja,

24 Encontrar, se existirem,  $\bar{\mu} \in L^2[0, T]$  e uma política admissível de operação do sistema hidroelétrico  $(\bar{v}, \bar{q})$  satisfazendo

$$\bar{\mu}(t) + \rho' \bar{v}(t) = d(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

e minimizando o custo (22) entre todos os  $y, v$  e  $q$  satisfazendo as condições acima,

O problema (24) pode ser formulado no formato padrão de um problema de controle Ótimo, isto é:

$$25 \quad (P) \quad \text{Minimizar} \quad \int_0^T C(\mu(t), t) e^{-\beta t} dt$$

sujeito a

$$\mu(t) + \rho' v(t) = d(t)$$

$$0 \leq v(t) \leq r(t) \quad q(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

$$w(t) = \bar{h} + \int_0^t x - A(v+q)$$

$$N(t) \leq w(t) \leq W(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$\mu \in L^2[0, T] \quad v, q \in (L^2[0, T])^n$$

Este problema é um problema clássico de controle Ótimo com restrição no espaço de estado. Entretanto, a não diferenciabilidade da função  $C$  e das restrições do espaço de estado, impedem a aplicação imediata do princípio do mínimo de Pontryagin a este problema.

Uma observação deve ser feita em relação às restrições do controle térmico. Não se incluiu no problema (25) nenhuma restrição de positividade do controle térmico apesar do sistema ter sido um gerador de energia. Valores negativos da variável  $\mu$  tem contudo o significado de um excedente de energia que pode ser ven-

dido a componentes exógenas ao sistema, o valor da venda dessa energia excedente pode ser computado através da função objetivo fazendo com que  $C$  admita valores não positivos para níveis negativos de  $\mu$ .

A dependência do tempo da função custo  $C$ , como já foi notado, objetiva considerar alterações na estrutura do sistema térmico. Alguma hipótese sobre  $C$  como função de  $t$  é necessária para a obtenção de resultados futuros utilizáveis. A hipótese apresentada em seguida satisfaz os objetivos citados e garante propriedades convenientes para a função objetivo de (25).

Basicamente, supõe-se que a função custo varia no tempo somente em um número finito de instantes. Ou seja, o período de planejamento pode ser subdividido em um número finito de intervalos e a função  $C(\alpha, t)$  é constante em cada um desses intervalos para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Estes intervalos representam obviamente períodos de tempo onde a estrutura do sistema térmico mantém-se inalterada enquanto as extremidades desses intervalos caracterizam instantes de mudança de estrutura do sistema.

26 Formalmente, as hipóteses sobre a função custo  $C: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  são as seguintes:

- a) existem uma partição  $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$  do período de planejamento  $[0, T]$ , constituída de intervalos, e funções convexas  $C_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $i = 1, 2, \dots, k$  tais que:

$$C(\alpha, t) = C_i(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I_i \\ i = 1, 2, \dots, k$$

- b) existem constantes  $M > 0$  e  $a \in \mathbb{R}$  tais que:

$$C_i(\alpha) \leq M \alpha^2 + a \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

Na condição a) a função  $c_i$  representa a função custo de operação da estrutura do sistema térmico existente no intervalo de tempo  $I_i$ . A condição b) impõe restrições ao crescimento do custo com a geração térmica. Esta restrição não é significativa pois a geração térmica é necessariamente menor ou igual à demanda que por sua vez é essencialmente limitada. A finalidade da condição b) é garantir um custo total de operação finito para qualquer política de operação do sistema térmico,

As propriedades da matriz de interligação A apresentadas no teorema seguinte são de extrema utilidade na dedução das condições de otimalidade para o problema (25). Essas propriedades são imediatas para sistemas hidroelétricos compostos por usinas hidrologicamente independentes pois nesse caso a matriz A é a matriz identidade.

27 Teorema A matriz de interligação A definida em (12) é inversível e sua inversa é positiva, isto é,

$$A^{-1} x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

Prova Considerem-se as funções

$$J : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{P}(\{1, 2, \dots, n\})$$

$$IJ: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

dadas por:

$$IJ(i) = \text{Índice da usina imediatamente a jusante da usina } i \text{ (zero caso não haja nenhuma)}$$

$$J(i) = \text{conjunto dos índices das usinas a jusante da usina } i, \text{ incluindo o próprio } i.$$

Para cada  $\bar{i}$ ,  $J(i)$  é finito graças a hipótese de inexistência de circuitos no sistema hidrológico.

A matriz  $A$  foi definida por:

$$A_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ -1 & \text{se } \bar{i} = IJ(k) \\ 0 & \text{demais casos} \end{cases}$$

Considere-se a matriz  $B$ ,  $n \times n$ , definida por:

$$B_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \in J(j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mostra-se que  $B$  é a inversa de  $A$ .

De fato, observa-se que:

$$A_{ik} B_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } i \in J(j) \\ -1 & \text{se } \bar{i} = IJ(k), k \in J(j) \\ 0 & \text{demais casos} \end{cases}$$

Note-se que se  $A_{ik} B_{kj} = -1$  então  $\bar{i} \in J(j)$ .

Então, se  $\bar{i} \notin J(j)$ , tem-se que:

$$28 \quad \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = 0$$

pois todos os termos do somatório são nulos,

Se  $\bar{i} \in J(j)$  mas  $\bar{i} \neq j$ , então  $A_{ik} B_{kj}$  será não nulo para somente dois valores de  $k$ : quando  $k = \bar{i}$  assume valor 1 e quando  $\bar{i} = IJ(k)$ ,  $k \in J(j)$  assume valor -1. Logo, nesse caso, o vale (28). Finalmente, se  $\bar{i} = j$  então,  $A_{ij} B_{ji} = 1$  e  $A_{ik} B_{ki} = 0$  para  $k \neq \bar{i}$  logo:

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{ki} = 1$$

provando que  $B$  é a inversa de  $A$ .

A positividade de  $B$  é imediata pois essa matriz só possui componentes não negativas. ||

### Seção 3. Valor e Custo da Água

Devido à transformação de energia no grupo turbina-gerador, um certo volume de água no reservatório de uma usina hidroelétrica pode ser identificado a uma quantidade de energia. Essa energia seria aquela obtida pela descarga daquele volume de água através das turbinas da usina. Nesse sentido, pode-se identificar água à energia e visualizar um reservatório como um armazenador de energia.

Dessa forma, é de se esperar que um aumento do volume inicial de água em um ou mais reservatórios implique em uma redução do custo mínimo de operação do sistema. De fato, este aumento de "energia armazenada" no sistema levaria a uma maior utilização de geração hidroelétrica com uma conseqüente redução de geração termoelétrica. Pode-se esperar também uma redução do custo mínimo de operação do sistema quando se reduz a quantidade de energia demandada ao sistema.

Tão importante quanto resolver-se o problema (25) é determinar-se a redução do custo mínimo de operação do sistema devido pequenas perturbações na demanda de energia. Pelo raciocínio acima, uma perturbação na demanda é aproximadamente equivalente a

uma perturbação do volume nos reservatórios em termos de economia de combustível para termoelétricas. Estuda-se, portanto, a variação incremental do custo mínimo de operação devida a uma variação incremental dos níveis iniciais dos reservatórios.

O valor da água em um reservatório do sistema no instante inicial do planejamento corresponde a razão entre a economia no custo de operação e o aumento incremental do nível inicial do reservatório que provocou aquela economia. Nas mesmas condições, o custo da água seria o valor daquela razão quando da redução do nível inicial do reservatório.

29 Para a formalização dessas idéias, é conveniente introduzir-se uma função custo que associa a cada conjunto de valores dos níveis iniciais dos reservatórios o menor custo de operação do sistema partindo desses níveis. Seja  $h \in \mathbb{R}^n$  um vetor caracterizando os níveis iniciais dos  $n$  reservatórios. A função:  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  dada por:

$$30 \quad G(h) = \text{Inf} \left\{ \int_0^T C(u(t), t) e^{-\rho t} \left| \begin{array}{l} u + \rho'v = d \\ (v, q)h\text{-admissível} \end{array} \right. \right\}$$

corresponde ao custo mínimo de operação do sistema hidroelétrico partindo-se dos níveis iniciais  $h_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , nos reservatórios. Para que (30) seja consistente faz-se a convenção de que o ínfimo do conjunto vazio é infinito, podendo portanto obter-se valores não finitos para  $G$ . Apesar da expressão que define  $G$  ser bastante complexa, prova-se no capítulo III que  $G$  é uma função convexa e crescente.

A partir da função  $G$  pode-se definir precisamente

o valor e custo da água em um reservatório. Seja  $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$  um nível inicial para os reservatórios tal que exista uma política  $\bar{h}$ -admissível. Sejam  $e^i \in \mathbb{R}^n$  a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade e  $\lambda$  um real positivo. Então,  $G(\bar{h})$  é o custo mínimo de operação do sistema a nível  $\bar{h}$  e  $G(\bar{h} + \lambda e^i)$  é o custo mínimo de operação do sistema com um aumento de  $\lambda$  no nível inicial do reservatório  $i$ . Portanto, a razão

$$31 \quad \frac{G(\bar{h}) - G(\bar{h} + \lambda e^i)}{\lambda}$$

representa a economia incremental de combustível devida ao incremento  $\lambda$  no nível inicial do reservatório  $i$ . O valor da água nesse reservatório seria o limite de (31) com  $\lambda$  tendendo a zero.

Define-se, portanto, o valor da água no reservatório  $i$  no instante inicial com nível inicial  $\bar{h}$ ,  $N(0) \leq \bar{h} < W(0)$ , como:

$$32 \quad g_i(\bar{h}) = - \frac{\partial G(\bar{h})}{\partial h_i^+} = - \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{G(\bar{h} + \lambda e^i) - G(\bar{h})}{\lambda}$$

Da mesma forma, o custo da água no reservatório  $i$  no instante inicial com nível inicial  $\bar{h}$ ,  $N(0) < \bar{h} \leq W(0)$ , é:

$$33 \quad g_i^*(\bar{h}) = \frac{\partial G(\bar{h})}{\partial h_i^-} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{G(\bar{h} - \lambda e^i) - G(\bar{h})}{\lambda}$$

O estudo da teoria de valor e custo da água tem várias aplicações. Entre elas ressalta a construção de métodos numéricos de resolução do problema (23). Em Fernandes [75] e Lima [76] são apresentados algoritmos para a resolução do problema de planejamento da operação de sistemas constituídos por uma usina hidroelétrica e um sistema térmico. Em ambos, o cálculo do valor da

água é a base dos métodos.

No capítulo seguinte, o problema (25) é reformulado como um problema de programação convexa em espaço de Banach, e são deduzidas condições necessárias e suficientes de otimalidade. Em seguida, são demonstrados alguns resultados associados ao valor e custo da água nesse problema. No capítulo IV esses resultados serão discutidos e aplicados a alguns casos importantes.

## CAPITULO III

### REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA E CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE

#### Introdução

O problema enunciado em (11.25) pode ser abordado por diversas técnicas. Como esse problema pode ser formulado como um Problema de Programação Convexa em  $L^2[0, T]$ , optou-se pela utilização de resultados bastante fortes devidos a Pshenichnyi [71]. Embora poderoso, o tratamento adotado exige um ferramental matemático sofisticado,

A primeira seção busca uma reformulação do Problema (11.25) pela sua imersão em um problema mais complexo. Dessa forma pretende-se obter as condições de otimalidade e o cálculo do valor e custo da água por um procedimento utilizado, o desenvolvimento teórico das condições de otimalidade é exposto na seção seguinte. Finalmente, a última seção lista os resultados finais importantes.

Em uma primeira leitura do capítulo podem ser dispensadas as seções 1 e 2 passando-se diretamente à seção 3. Nesse caso as demonstrações da última seção devem ser ignoradas por estarem referidas ao material das seções anteriores.

#### Seção 1. Reformulação do Problema

O Problema (11.25) é reformulado em seguida como um

problema de Programação Convexa em  $L^2[0, T]$ , A dedução de condições de otimalidade para esse problema pode ser então abordada pela aplicação de resultados de Pshenichnyi [71] (ver (A.21)). Contudo, buscam-se também meios de calcular o valor e custo da água definidos em (11.32) e (11.33).

As definições de valor e custo da água envolvem uma perturbação do nível inicial dos reservatórios. O valor da água representa a variação do custo total de operação Ótima do sistema de vida a variações no nível inicial dos reservatórios. A partir das motivações intuitivas e formais sugerem a imersão do problema (II.25) em um problema onde os níveis iniciais dos reservatórios é uma variável de decisão,

O Problema (11.25) possui basicamente o formato:

1 Minimizar  $F(\mu)$

Sujeita a  $\mu \in U(\bar{h})$ ,  $\mu \in L^2[0, T]$

onde  $F(\mu)$  é o custo total de operação do sistema térmico ao nível  $\mu$ , e  $U(h)$  representa o conjunto de todos os controles térmicos admissíveis. A dependência em  $h$  do conjunto  $U(h)$  é explicitada por facilitar considerações acerca do valor e custo da água, Estuda-se contudo, o problema abaixo onde  $h$  aparece como variável de decisão com um custo  $\gamma \in \mathbb{R}^n$ :

2 Minimizar  $F(\mu) - \gamma'h$

Sujeita a  $\mu \in U(h)$

$\mu \in L^2[0, T]$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$

Ver-se-a mais adiante que pela escolha judiciosa de  $\gamma$  é possível

que uma solução do problema (1) resolva (2) e vice-versa,

Na seção seguinte determinam-se condições de otimalidade para o problema (2) através de aplicações do Teorema (A.21) devido a Pshenichnyi, As condições de otimalidade para o problema (1) são essencialmente as mesmas do problema (2), a menos de uma condição sobre  $y$  que fornecerá meios para o cálculo do valor e custo da água. Estes Últimos resultados são deduzidos na seção 3 do capítulo.

### 0 Problema (1)

O funcional objetivo do Problema (II.25) foi definido em (11.22) e pode ser expresso por  $F: L^2[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo valor é:

$$v = \int_0^T C(\mu(t), t) e^{-\beta t} dt$$

onde  $\beta > 0$  e  $C$  é uma função satisfazendo as condições (II.26), Essas condições implicam em um valor finito para a integral além de outras propriedades para o funcional listadas a seguir,

**3 Teorema** Suponha que  $C$  satisfaça às condições (11.26). Então, o funcional  $F$  é convexo, limitado superiormente em subconjuntos limitados de  $L^2[0, T]$ , contínuo e a subdiferencial

$$\partial F: L^2[0, T] \rightarrow \mathbb{P}(L^2[0, T])$$

de  $F$  existe e pode ser expressa por:  $\forall \mu \in L^2[0, T]$

$$\partial F(\mu) = \{p \in L^2[0, T] \mid p(t) \in \partial C(\mu(t), t) e^{-\beta t}, \forall t \in [0, T]\}$$

Prova Se  $\mu^1, \mu^2 \in L^2[0, T]$  e  $\lambda \in [0, 1]$  então, pela convexidade de  $C_i$  e por (II.26a) decorre:

$$\begin{aligned} F(\lambda\mu^1 + (1-\lambda)\mu^2) &= \sum_{i=1}^k \int_{I_i} C_i(\lambda\mu^1(t) + (1-\lambda)\mu^2(t)) e^{-\beta t} dt \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{I_i} [\lambda C_i(\mu^1(t)) + (1-\lambda) C_i(\mu^2(t))] e^{-\beta t} dt \\ &= \lambda F(\mu^1) + (1-\lambda) F(\mu^2) \end{aligned}$$

Logo,  $F$  é convexa.

Se  $X \subset L^2[0, T]$  é limitado, então existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|\mu\| \leq \delta \quad (\forall \mu \in X)$$

Então, devido a (11.26) resulta:  $(\forall \mu \in X)$

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \sum_{i=1}^k \int_{I_i} C_i(\mu(t)) e^{-\beta t} dt \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{I_i} [M(\mu(t))^2 + a] e^{-\beta t} dt \\ &\leq M \int_0^T [\mu(t)]^2 dt + aT \\ &\leq M \delta + aT \end{aligned}$$

provando que  $F$  é limitado superiormente em  $X$ . A continuidade de  $F$  é consequência imediata de (A.17).

Sejam  $\bar{p} \in L^2[0, T]$  e  $\bar{\mu} \in L^2[0, T]$  tais que

$$\bar{p}(t) \in \partial C(\bar{\mu}(t), t) e^{-\beta t} \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

Então, pela definição de subdiferencial de  $C(\cdot, t)$  resulta:

$$(\forall v \in L^2[0, T]) \quad (\forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.})$$

$$C(\mu(t), t)e^{-\beta t} - C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t} \geq \bar{p}(t) (\mu(t) - \bar{\mu}(t))$$

Logo, integrando ambos os membros deduz-se:

$$F(\mu) - F(\bar{\mu}) \geq \int_0^T \bar{p}(\mu - \bar{\mu})$$

ou seja  $\bar{p} \in \partial F(\bar{\mu})$ . A prova da implicação inversa é menos trivial,

Sejam  $p^1, p^2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  caracterizadas por:

$$\begin{aligned} p^1(t) &= \bar{C}_i(\bar{\mu}(t))e^{-\beta t} & \forall t \in I_i \\ p^2(t) &= \underline{C}_i(\bar{\mu}(t))e^{-\beta t} & i=1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

onde  $\bar{C}_i$  e  $\underline{C}_i$  são respectivamente as derivadas à direita e a esquerda de  $C_i$ . Como  $C_i$  é convexa, então  $\bar{C}_i$  e  $\underline{C}_i$  são funções crescentes em  $I_i$  e portanto  $\bar{C}_i(\bar{\mu}(\cdot))$  e  $\underline{C}_i(\bar{\mu}(\cdot))$  são mensuráveis em  $I_i$ . Daí resulta que  $p^1$  e  $p^2$  são mensuráveis.

Como  $\partial C_i(a) = [\underline{C}_i(a), \bar{C}_i(a)]$  então:

$$\partial C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t} = [p^2(t), p^1(t)] \quad \forall t \in [0, T]$$

Seja  $\bar{p} \in \partial F(\bar{\mu})$  e considerem-se os conjuntos:

$$A = \{t \in [0, T] \mid \bar{p}(t) > p^1(t)\}$$

$$B = \{t \in [0, T] \mid \bar{p}(t) < p^2(t)\}$$

A e B são mensuráveis pois  $p^1, p^2$  e  $\bar{p}$  são mensuráveis. Mostra-se em sequência que A e B possuem medida nula o que implica

$$\bar{p}(t) \in \partial C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t} \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

completando a prova.

Seja  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$  e defina-se

$$A_n = \{t \in [0, T] \mid C(\bar{\mu}(t) + \frac{1}{n}, t)e^{-\beta t} - C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t} < \bar{p}(t) \frac{1}{n}\}$$

$A_n$  é mensurável pois  $C$  é contínua e  $\bar{p}$  e  $\bar{\mu}$  são mensuráveis,

Mas se  $t \in A$  ( $t \in B$ ) então, como  $\bar{p}(t) \notin \partial C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t}$ , existe  $\delta > 0$  ( $\delta < 0$ ) tal que:

$$C(\bar{\mu}(t) + \delta, t)e^{-\beta t} - C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t} < \bar{p}(t)\delta$$

Então,  $t \in A_n$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ . Logo,

$$A \cup B = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} A_n$$

Suponha por absurdo que  $A \cup B$  possua medida positiva.

Então, existe  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , tal que  $A_n$  possui medida positiva. Defina-se  $\mu \in L^2[0, T]$  por:

$$\mu(t) = \begin{cases} \bar{\mu}(t) + \frac{1}{n} & \text{se } t \in A_n \\ \bar{\mu}(t) & \text{se } t \notin A_n \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} F(\mu) - F(\bar{\mu}) &= \int_{A_n} [C(\bar{\mu}(t) + \frac{1}{n}, t) - C(\bar{\mu}(t), t)] e^{-\beta t} dt \\ &< \int_{A_n} \bar{p}(t) \frac{1}{n} dt \\ &= \int_0^T \bar{p}(t) [\mu(t) - \bar{\mu}(t)] dt \end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese inicial de  $\bar{p} \in \partial F(\bar{\mu})$ . Logo,  $A \cup B$  possui medida nula.  $\parallel$

A convexidade e subdiferenciabilidade das funções ob.

jetivo de (1) e (2) abre a possibilidade de aplicação de resultados bastante fortes da teoria de Programação Matemática. Isto é particularmente verdadeiro devido a convexidade do conjunto  $U(\bar{h})$  que será demonstrada mais tarde,

As restrições do Problema (II.25) podem ser enfeixadas no conjunto  $U(\bar{h})$  através da definição:

4            Seja  $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$ . O conjunto  $U(\bar{h})$  é o conjunto das funções  $\mu \in L^2[0, T]$  tais que existe uma política hidroelétrica  $\bar{h}$ -admissível  $(v, q)$  satisfazendo

$$\mu + \rho'v = d$$

Como foi comentado anteriormente a dependência em  $\bar{h}$  do conjunto  $U$  é explicitada de forma a facilitar o cálculo do valor e custo da água.

### Valor e Custo da Água: Problema (2)

As definições de valor e custo da água partem da função  $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definida em (11.30). Por intermédio das definições de  $F$  e  $U$  pode-se reescrever aquela definição como:

5             $G(h) = \text{Inf} \{F(\mu) \mid \mu \in U(h)\}$

lembrando-se que, por convenção, o ínfimo do conjunto vazio é  $+\infty$ . O domínio efetivo dessa função (aquele em que  $G(h) < +\infty$ ) é contido o conjunto:

6             $H = \{h \in \mathbb{R}^n \mid U(h) \neq \emptyset\}$

e pode-se restringir  $G$  a esse domínio. Prova-se ao fim da seção que

a função  $G$  é convexa e na seção 3 que  $G$  é decrescente.

O valor e o custo da água para o Problema  $h$  correspondem a derivadas direcionais da função  $G$  no ponto  $\bar{h}$  nas direções dos eixos coordenados (ver (II.32) e (II.33)). Como  $G$  é convexa, essas derivadas direcionais podem ser expressas por (Rockafellar [70]):

$$7 \quad \frac{\partial G(\bar{h})}{\partial h_i^+} = \sup\{\gamma_i \mid \gamma \in \partial G(\bar{h})\}$$

$$8 \quad \frac{\partial G(\bar{h})}{\partial h_i^-} = -\inf\{\gamma_i \mid \gamma \in \partial G(\bar{h})\} \quad i=1,2,\dots,n$$

onde  $\partial G(\cdot)$  é a subdiferencial de  $G$ .

Portanto, a caracterização da subdiferencial de  $G$  estabelece um meio de cálculo  $g_i$  e  $g_i^*$ . Pela definição de subgradiente,  $\gamma \in \partial G(\bar{h})$  se e somente se:

$$9 \quad G(h) - y'h \geq G(\bar{h}) - \gamma'\bar{h} \quad (\forall h \in \mathbb{R}^n)$$

ou seja se e somente se  $\bar{h}$  resolve o problema

$$10 \quad \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad G(h) - y'h \\ h \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

O problema acima sugeriu a formulação do problema (2) onde  $h$  surge como variável de decisão. O Lema seguinte caracteriza a relação entre as soluções dos problemas (1) e (2) e a subdiferencial de  $G$ .

11 ~~Lema~~ O par  $(\bar{h}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times L^2[0, T]$  resolve (2) se e somente se  $\bar{\mu}$  resolve (1) e  $\gamma \in \partial G(\bar{h})$ ,

Prova O par  $(\bar{h}; \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^n \times L^2[0, T]$  é solução de (2) se e somente se  $\bar{\mu} \in U(\bar{h})$  e

$$F(\mu) - \gamma'h > F(\bar{\mu}) - \gamma'\bar{h} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \\ \mu \in U(h)$$

Ou seja, se e somente se

12  $\bar{\mu} \in U(\bar{h})$  e

$$G(h) - \gamma'h \geq F(\bar{\mu}) - \gamma'\bar{h} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Por outro lado,  $\bar{\mu}$  resolve (1) e  $\gamma$  é  $\partial G(\bar{h})$  se e somente se

$$G(\bar{h}) = F(\bar{\mu}) \quad \bar{\mu} \in U(\bar{h})$$

e  $G(h) - \gamma'h \geq G(\bar{h}) - \gamma'\bar{h}$

o que comparado com (12) completa a prova. ||

O Lema (11) justifica uma abordagem unificada para a dedução de condições de otimalidade para (1) e da subdiferencial de  $G$ . Buscam-se na próxima seção condições de otimalidade para o problema (2) resultando daí simultaneamente condições de otimalidade para (1) e uma caracterização de  $\partial G(\cdot)$ .

### Conjunto de Restrição do Problema (2)

O conjunto de pontos viáveis para o Problema (2) será denotado  $\hat{\mathbf{i}}$ . Esse conjunto pode ser definido por meio do conjunto  $U(h)$  como:

13  $\hat{U} = \{(h, \mu) \in \mathbb{R}^n \times L^2[0, T] \mid \mu \in U(h)\}$

A abordagem indicada depende da convexidade do conjunto  $\hat{U}$  e de uma representação mais operacional para esse conjunto. A aplicação do Teorema (A.21) exige o cálculo do cone dual de  $\hat{U}$ . A obtenção direta desse cone é extremamente trabalhosa o que sugere uma decomposição de  $\hat{U}$  em conjuntos mais simples. O cone dual de  $\hat{U}$  pode ser obtido então pela aplicação de resultados gerais constantes do apêndice.

Os conjuntos que fazem parte da decomposição de  $\hat{U}$  representam uma ou mais restrições do Problema (II,25). As restrições dos reservatórios são caracterizadas por:

$$14 \quad \Omega_i = \{(h_i, z_i) \in \mathbb{R} \times L^2[0, T] \mid N_i(t) \leq h_i + \int_0^t x_i - z_i \leq W_i(t), \forall t \in [0, T]\}$$

$$15 \quad \Omega = \{(h, z) \in \mathbb{R}^n \times (L^2[0, T])^n \mid (h_i, z_i) \in \Omega_i\}$$

$$= \bigtimes_{i=1}^n \Omega_i$$

O conjunto  $\Omega_i$  representa o conjunto de níveis iniciais e descargas do reservatório  $i$  que respeitam os limites desse reservatório.

As restrições de turbina e positividade do vertimento são consideradas através dos conjuntos:

$$16 \quad Q = \{q \in (L^2[0, T])^n \mid q \geq 0\}$$

$$17 \quad V = \{v \in (L^2[0, T])^n \mid 0 \leq v \leq r\}$$

A representação de  $\hat{U}$  pelos conjuntos  $\Omega$ ,  $Q$  e  $V$  é obtida por meio das matrizes abaixo que consideram o rendimento das tur

binas e a interligação hidrológica do sistema (11.12):

$$18 \quad B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \rho' \end{bmatrix} \quad \text{matriz } (n+1) \times 2n$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 2n \times 2n$$

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 2n \times 2n$$

Acima  $I$  representa a matriz identidade,

19 Teorema O conjunto  $\hat{U}$  é convexo e satisfaz

$$20 \quad \hat{U} = B[X \cap Y] + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

onde  $X = D, Q + S, \Omega$  e  $Y = \mathbb{R}^n \times V$

Além disso,  $U(h)$  é convexo para todo  $h \in \mathbb{R}^n$ .

Prova Por definição de  $V$ ,  $Q$  e  $\Omega$ ,  $(v, q)$  é uma política hidroelétrica  $h$ -admissível se e somente se (ver 11.16)

$$v \in V \quad , \quad q \in Q$$

$$e \quad z = A(v+q)$$

$$\text{satisfaz} \quad (h, z) \in \Omega$$

Então, pela definição  $U(h)$  resulta que  $\mu \in U(h)$  se e somente se:

$$\mu = d - \rho'v \quad (h, z) \in \Omega$$

$$z = A(v+q) \quad v \in V, \quad q \in Q$$

ou seja

$$\mu = d - \rho'v$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v+q \end{pmatrix} \in S, \Omega$$

$$v \in V \quad q \in Q$$

Mas, nesse caso, pela definição das matrizes B e D decorre:

$$\begin{pmatrix} h \\ \mu \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \in X \cap Y$$

provando (20).

A convexidade de  $\hat{U}$  é consequência de (20). Por inspeção, Q, V e Y são convexos, A convexidade de  $\Omega$  é resultado da linearidade do operador integral, Como, a imagem de um conjunto convexo por uma transformação linear é convexo, então X é convexo. Finalmente, pelo mesmo resultado, U é convexo devido a (20). A convexidade de  $U(\bar{h})$  é decorrência imediata da identidade:

$$U(\bar{h}) = [0, I] [\hat{U} \cap (\{\bar{h}\} \times L^2[0, T])] \quad ||$$

A convexidade de G já pode ser deduzida pois resulta da convexidade de  $\hat{U}$ .

21 Teorema A função G é convexa.

Prova Sejam  $h^i, h^2 \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in [0, 1]$ . Então, por definição de  $\hat{U}$  tem-se que  $\mu^i \in U(h^i)$ ,  $i=1, 2$  se e somente se

$$(h^i, \mu^i) \in \hat{U} \quad i=1,2.$$

Mas, pelo Teorema (19),  $\hat{U}$  é convexo, logo:

$$(\lambda h^1 + (1-\lambda)h^2, \lambda \mu^1 + (1-\lambda)\mu^2) \in \hat{U}$$

ou seja

$$22 \quad \lambda \mu^1 + (1-\lambda)\mu^2 \in U(\lambda h^1 + (1-\lambda)h^2)$$

Como, pelo Teorema (3),  $F$  é convexa, então:

$$23 \quad \lambda F(\mu^1) + (1-\lambda)F(\mu^2) > F(\lambda \mu^1 + (1-\lambda)\mu^2) \\ \geq G(\lambda h^1 + (1-\lambda)h^2) \quad \text{por (22)} \\ \forall \mu^i \in U(h^i) \quad i=1,2.$$

Tomando o ínfimo do membro esquerdo de (22) com  $\mu^i \in U(h^i)$  obtem-se finalmente:

$$\lambda G(h^1) + (1-\lambda)G(h^2) \geq G(\lambda h^1 + (1-\lambda)h^2)$$

provando a convexidade de  $G$ .  $\quad ||$

## Seção 2. Condições de Otimalidade para o Problema (10)

Através da definição do conjunto  $\hat{U}$  dada em (13), o problema (2) pode ser enunciado como

$$24 \quad \text{Minimizar } F(\mu) - y'h \\ (h, \mu) \in \hat{U}$$

Este é um problema convexo pois provou-se em (3) que sua função objetivo é convexa e em (19) demonstrou-se a convexidade de  $\hat{U}$ .

A dedução das condições de otimalidade para (24) por meio do Teorema (A.21) consiste de duas etapas: obtenção da subdiferencial da função objetivo e cálculo do cone dual do conjunto  $\widehat{U}$ . A primeira dessas etapas foi parcialmente realizada em (3). Na obtenção do cone dual de  $U$  concentra-se toda a dificuldade do processo indicado.

Na execução dessa segunda etapa serão de grande utilidade a representação do conjunto  $\widehat{U}$  fornecida pelo teorema (19) e os resultados apresentados em apêndice (A.2) - (A.6). Os três lemas que se seguem cumprem esta etapa: o primeiro caracteriza o cone dual de  $\widehat{U}$  por meio do cone dual de  $R$ , a partir de uma hipótese; o segundo estabelece condições para a verificação da hipótese; e o último caracteriza o cone dual de  $R$ ,

25 Lema Sejam  $(\bar{h}, \bar{\mu}) \in \widehat{U}$  e  $\bar{v} \in V$ ,  $\bar{q} \in Q$  tais que

$$\begin{aligned}\bar{\mu} + \rho' \bar{v} &= d \\ (\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})) &\in \Omega\end{aligned}$$

e suponha que o interior de  $X$  intercepta  $Y$ .

Então,  $(\alpha, p) \in K(\widehat{U}, (\bar{h}, \bar{\mu}))$  se e somente se  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in (L^2[0, T])^n$  e existe  $\bar{p} \in [L^2[0, T]]^n$  tal que

- a)  $(\alpha, \bar{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})))$
- b)  $A^* \bar{p} \geq 0$ ,  $\bar{p} \geq 0$   $\langle A^* \bar{p}(t), \bar{q}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T]$  q.t.p.
- c)  $A^* \bar{p} - \rho p \in K(V, \bar{v})$

Prova Pelo Teorema (19), tem-se

$$\widehat{U} = B[X \cap Y] + \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}$$

Então, pelo Teorema (A.2), resulta que

$$(\alpha, p) \in K(\widehat{U}, (\bar{h}, \bar{\mu}))$$

se e somente se

$$B^*((\alpha, p)) \in K(X \cap Y, (\bar{h}, \bar{v}))$$

ou seja, pela definição de B,

$$(\alpha, -\rho p) \in K(X \cap Y, (\bar{h}, \bar{v}))$$

Mas, como o interior de X intercepta Y, então, pelo Teorema (A.6), segue:

$$26 \quad (\alpha, -\rho p) \in K(X, (\bar{h}, \bar{v})) + K(Y, (\bar{h}, \bar{v}))$$

Por definição de Y e pelo Teorema (A.3) tem-se

$$27 \quad \begin{aligned} K(Y, (\bar{h}, \bar{v})) &= K(\mathbb{R}^n, \bar{h}) \times K(V, \bar{v}) \\ &= \{0\} \times K(V, \bar{v}) \end{aligned}$$

Por definição de X, e pelo Corolário (A.4) e Teorema (A.2) tem-se:

$$28 \quad \begin{aligned} K(X, (\bar{h}, \bar{v})) &= K(D, Q, (0, -\bar{q})) \cap K(S, \Omega, (\bar{h}, \bar{v} + \bar{q})) \\ &= [D^{*-1}K(Q, \bar{q})] \cap [S^{*-1}K(\Omega, (\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})))] \end{aligned}$$

Mostra-se em seguida que  $(\alpha, \hat{p}) \in K(X, (\bar{h}, \bar{v}))$  se e somente se  $\bar{p} = -A^{*-1}\hat{p}$  satisfaz a) e b),

De fato, por (28), resulta que:

$$(\alpha, \hat{p}) \in K(X, (\bar{h}, \bar{v}))$$

se e somente se:

$$D^*(\alpha, \hat{p}) \in K(Q, \bar{q})$$

e 
$$S^*(\alpha, \hat{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})))$$

ou seja, por definição de D e S, se e somente se:

29 
$$-\hat{p} \in K(Q, \bar{q})$$

30 
$$(\alpha, A^{*-1}\hat{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})))$$

Mas, como

$$Q = \{q \in (L^2[0, T])^n \mid q(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}\}$$

então, pelo Teorema (A.5) resulta que:

$$-\hat{p} \in K(Q, \bar{q})$$

se e somente se

$$-\hat{p}(t) \in K(\mathbb{R}_+^n, \bar{q}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

ou seja se e somente se

31 
$$\langle \hat{p}(t), z - \bar{q}(t) \rangle \leq 0 \quad \begin{array}{l} \forall z \in \mathbb{R}^n, z \geq 0 \\ \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.} \end{array}$$

Em particular, fazendo, para cada  $t \in [0, T]$ ,  $z$  respectivamente igual a 0 e  $2\bar{q}(t)$  tem-se

$$\langle \hat{p}(t), -\bar{q}(t) \rangle < 0$$

$$\langle \hat{p}(t), \bar{q}(t) \rangle \leq 0$$

ou seja

32 
$$\langle \hat{p}(t), \bar{q}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

Além disso, tomando-se  $z = \bar{q}(t) + e^i$  onde  $e^i$  é o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ , obtem-se:

$$33 \quad \bar{p}_i(t) \leq 0 \quad \begin{array}{l} \forall t \in [0, T] \\ \forall i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Pode-se verificar facilmente que (32) e (33) são também suficientes para a validade de (31).

Seja  $\bar{p} = p$ . Então, como  $A^{-1}$  é uma matriz positiva (ver II.27), (33) equivale a

$$34 \quad \bar{p} \geq 0 \quad \text{e} \quad A^* \bar{p} \geq 0$$

enquanto (32) equivale a:

$$35 \quad \langle A^* \bar{p}(t), \bar{q}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

Logo, (34) e (35) equivalem a

$$A^* \bar{p} \in K(Q, \bar{q})$$

Então, (29) e (3Q) valem se e somente se

$$36 \quad p \geq 0 \quad A^* p \geq 0 \quad \langle A^* p, \bar{q} \rangle = 0$$

$$\text{e} \quad (\alpha, -\bar{p}) \in K(\Omega, A(\bar{v} + \bar{q})),$$

ou seja se a) e b) são verificadas, Mostra-se em seguida que p e  $\bar{p}$  satisfazem c).

De (26), (27) e (28) resulta que  $(\alpha, p) \in K(\hat{U}, (\bar{h}, \bar{\mu}))$  se e somente se existe

$$(\alpha, \bar{p}) \in K(X, (\bar{h}, \bar{v}))$$

tais que

$$(\alpha, -\rho p) - (\alpha, \bar{p}) \in \{0\} \times K(V, \bar{v})$$

ou seja se existe  $\bar{p} \in (L^2[0, T])^n$  satisfazendo (36) e

$$37 \quad -\rho p + A^* \bar{p} \in K(V, \bar{v})$$

que  $\bar{e}$  a condição c) da tese do Lema, ||

A hipótese utilizada no Lema (25), do interior de  $X$  interceptar  $Y$ , é difícil de ser verificada em geral, o Lema seguinte fornece uma condição simples que garante esta hipótese.

38 Lema Suponha que existam  $\tilde{v} \in V$ ,  $\tilde{q} \in Q$  e  $\tilde{h} \in \mathbb{R}^n$  tais que  $W(0) > \tilde{h}$  e

$$W(t) \geq \tilde{h} + \int_0^t x - A(\tilde{v} + \tilde{q}) > N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Então,  $(R, ?) \in Y$   $\bar{e}$  ponto interior de  $X$ , e  $\tilde{h}$   $\bar{e}$  ponto interior de  $H$ .

Prova Sejam  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{q}$  e  $\tilde{h}$  satisfazendo as hipóteses do Lema e defina -  
-se

$$\tilde{z} = A(\tilde{v} + \tilde{q})$$

Então,  $(\tilde{h}, \tilde{z}) \in \Omega$  e satisfaz

$$W(t) \geq \tilde{h} + \int_0^t x - \tilde{z} > N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Prova-se em seguida, que com uma conveniente modificação do vertimento  $\tilde{q}$  é possível satisfazer estritamente as duas desigualdades acima.

Por continuidade da integral e semicontinuidade de  $N$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$39 \quad \bar{h} + \int_0^t x - \bar{z} - \delta y > N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

onde  $y \in \mathbb{R}^n$  é o vetor com todas as componentes unitárias.

Seja  $\hat{q} = \tilde{q} + \delta A^{-1}y$ . Como  $A^{-1}$  é uma matriz positiva então  $\hat{q} \succ \tilde{q}$ . Além disso se  $\hat{z} = A(\tilde{v} + \hat{q})$  resulta:  $(\forall t \in [0, T])$

$$\begin{aligned} W(t) &\geq \bar{h} + \int_0^t x - \bar{z} \\ &= \bar{h} + \int_0^t x - \bar{z} + \delta y \\ &> \bar{h} + \int_0^t x - \hat{z} \\ &> N(t) \end{aligned} \quad \text{por (39)}$$

ou seja

$$W(t) > \bar{h} + \int_0^t x - \bar{z} > N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

pois por hipótese  $W(0) > \bar{h} > N(0)$ .

Mostra-se em seguida que  $(L, ?)$  é ponto interior de  $\Omega$  e por consequência,  $L$  é ponto interior de  $H$ .

Pela continuidade da integral e semicontinuidade de  $W$  e  $N$ , existe  $\sigma > 0$  tal que  $(\forall \delta \in [0, \sigma]) (\forall t \in [0, T]) (\forall i=1, 2, \dots, n)$

$$W_i(t) - \delta > \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i > N_i(t) + \delta$$

Então, se  $(h, z) \in \mathbb{R}^n \times (L^2[0, T])^n$  e

$$\|h - \bar{h}\| + \|z - \bar{z}\| < \sigma$$

obtem-se

$$W_i(t) > \sigma + \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i$$

$$\begin{aligned}
&\geq |h_i - \bar{h}_i| + \|z_i - \bar{z}_i\| + \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i \\
&\geq (h_i - \bar{h}_i) + \int_0^t \bar{z}_i - z_i + \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i \\
&= h_i + \int_0^t x_i - z_i
\end{aligned}$$

assim como

$$\begin{aligned}
N_i(t) &> -\sigma + \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i \\
&\geq |h_i - \bar{h}_i| + \|z_i - \bar{z}_i\| + \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i \\
&\leq h_i + \int_0^t x_i - z_i \\
&(\forall t \in [0, T]) \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

ou seja  $(h, z) \in R$ . Logo,  $(\bar{h}, \bar{z})$  é ponto interior de  $\Omega$ ,

Mas, como  $S$  é inversível, então:

$$(\bar{h}, \bar{v} + \bar{q}) = S((\bar{h}, \bar{z})) \in \overset{0}{S \cdot \Omega}$$

e por fim conclui-se que  $(\bar{h}, \bar{v})$  é ponto interior de  $X = D \cdot Q + S \cdot \Omega$ .

A caracterização do cone dual do conjunto  $U$  dada pelo Lema (25) depende da determinação dos cones duais de  $R$  e  $V$ . Verificar-se-á na prova do teorema de otimalidade que é dispensável uma caracterização do cone dual de  $V$ . A dedução do cone dual de  $\Omega$  é contudo essencial e bastante trabalhosa. O lema apresentado a seguir caracteriza o cone dual do conjunto  $\Omega_i$  definido em (14), o que será suficiente para a prova do Teorema (60).

40 Lema. Suponha que as hipóteses do Lema (38) são satisfeitas e se

ja  $(\bar{h}_i, \bar{z}_i) \in \Omega_i$ . Então,  $-(\alpha_i, p_i) \in \mathbb{R} \times L^2[0, T]$  pertence a

$$K(\Omega_i, (\bar{h}_i, \bar{z}_i))$$

se e somente se:

existe  $\bar{p}_i \in L^2[0, T]$  contínua em 0 e T, satisfazendo  $\|p_i - \bar{p}_i\|_2 = 0$  tal que:

$$41 \quad \bar{h}_i > 0 \rightarrow -\alpha_i \leq \bar{p}_i(0)$$

$$\bar{h}_i < W_i(0) \rightarrow -\alpha_i \geq \bar{p}_i(0)$$

$$42 \quad [a, b] \subset [0, T], \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i > N_i(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$\rightarrow \bar{p}_i$  crescente em  $[a, b]$

$$43 \quad [a, b] \subset [0, T], \bar{h}_i + \int_0^t x_i - \bar{z}_i < W_i(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$\rightarrow \bar{p}_i$  decrescente em  $[a, b]$

$$44 \quad \bar{h}_i + \int_0^T x_i - \bar{z}_i > N_i(T) \rightarrow \bar{p}_i(T) \leq 0$$

$$45 \quad \bar{h}_i - \int_0^T x_i - \bar{z}_i < W_i(T) \rightarrow \bar{p}_i(T) \geq 0$$

Prova: Para facilidade de not a o, serão suprimidos em toda a prova os sub-índices  $i$ . Dessa forma,  $\Omega$  representar  o conjunto  $\Omega_i$ ,  $\bar{p}$  representar   $\bar{p}_i$ , etc. Considerem-se inicialmente os conjuntos:

$$Z_1 = \{t \in [0, T] \mid \bar{w}(t) = N(t)\}$$

$$Z_2 = \{t \in [0, T] \mid \bar{w}(t) = W(t)\}$$

$$Z = [0, T] / Z_1 \cup Z_2$$

$$\text{onde } \bar{w}(t) = \bar{h} + \int_0^t x - \bar{z} \quad \forall t \in [0, T].$$

Por continuidade de  $\bar{w}$  e semicontinuidade de  $N$  e  $W$ , os

conjuntos  $Z_1$  e  $Z_2$  são fechados e  $Z$  é aberto em  $[0, T]$ . Logo, esses conjuntos podem ser expressos pela união enumerável de intervalos disjuntos. Sejam  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(I'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(I''_n)_{n \in \mathbb{N}}$  as famílias de intervalos tais que  $I'_n$  e  $I''_n$  são fechados,  $I_n$  é aberto em  $[0, T]$  e

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad Z_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I'_n \quad Z_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I''_n$$

Note-se ainda que os conjuntos  $Z$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$  são disjuntos dois a dois pois da hipótese do Lema (38), tem-se  $W > N$ .

Prova-se inicialmente a suficiência das condições (41)-(45). Sejam  $(\alpha, \bar{p})$  satisfazendo (41)-(45) e  $(h, z) \in \Omega$ . Então, tem-se

$$46 \quad (h - h) - \int_0^t z - \bar{z} = h + \int_0^t x - z - \bar{w}(t) \quad \forall t \in Z_1$$

$$= h + \int_0^t x - z - N(t) \geq 0$$

$$47 \quad (h - \bar{h}) - \int_0^t z - \bar{z} = h + \int_0^t x - z - \bar{w}(t) \\ = h + \int_0^t x - z - W(t) \leq 0 \quad \forall t \in Z_2$$

Devido às condições (42) e (43), pode-se verificar que  $\bar{p}$  é uma função de variação limitada pois é constante nos intervalos  $I_n$ , decrescente nos intervalos fechados  $I'_n$ , e crescente nos intervalos fechados  $I''_n$ . Pode-se ainda supor que  $\bar{p}$  é contínua à direita (isto não altera os valores das integrais pois  $\bar{p}$  sendo de variação limitada, admite um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade).

Definindo-se  $(\beta, \eta) = (h - \bar{h}, z - \bar{z})$ , pelo Lema (A-22) de integração por partes resulta:

$$\begin{aligned}
 48 \quad -\bar{p}(0)\beta + \int_0^T \bar{p}\eta &= -\bar{p}(0)\beta + \bar{p}(T) \int_0^T \eta - \int_0^T \left( \int_0^t \eta \right) d\bar{p}(t) \\
 &= -\bar{p}(T) \left[ \beta - \int_0^T \eta \right] + \int_0^T \left[ \beta - \int_0^t \eta \right] d\bar{p}(t)
 \end{aligned}$$

Mas  $\bar{p}$  é constante em  $Z$ , logo:

$$\int_{I_n} \left[ \beta - \int_0^t \eta \right] d\bar{p}(t) = 0$$

Além disso,  $\bar{p}$  é decrescente em  $I_n^1$  e crescente em  $I_n^2$  valendo (46) e (47) nesses intervalos.

Portanto:

$$\int_{I_n^1} \left[ \beta - \int_0^t \eta \right] d\bar{p}(t) \leq 0$$

$$\int_{I_n^2} \left[ \beta - \int_0^t \eta \right] d\bar{p}(t) \leq 0$$

Então, de (48), deduz-se:

$$49 \quad -\bar{p}(0)\beta + \int_0^T \bar{p}\eta \leq \bar{p}(T) \left[ \beta - \int_0^T \eta \right]$$

Se  $T \notin Z$ , então, de (44) e (46) conclui-se

$$-\bar{p}(T) \left[ \beta - \int_0^T \eta \right] \leq 0$$

Se  $T \in Z_2$ , de (45) e (47) obtêm-se a mesma desigualdade. Por raciocínio equivalente ao anterior, a partir de (41), (46) e (47), deduz-se

$$\bar{p}(0)\beta \leq -\alpha\beta$$

Logo, de (49) resulta

$$\alpha\beta + \int_0^T \bar{p}_n \leq 0$$

provando que  $-(\alpha, \bar{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, \bar{z}))$ .

A prova da necessidade  $\bar{e}$  mais complexa. Seja  $-(\alpha, p) \in K(\Omega, (h, z))$ . Então, por definição de cone dual

$$\alpha(h - \bar{h}) + \int_0^T p(z - \bar{z}) \leq 0 \quad \forall (h, z) \in \Omega.$$

Prova-se inicialmente (42). Sejam  $t_1, t_2 \in [a, b] \subset [0, T]$  tais que  $t_1 < t_2$  e  $\bar{w}(t) > N(t) \quad \forall t \in [a, b]$ .

Dado  $\delta, \nu > 0$ , defina-se  $h = h$  e

$$50 \quad z(t) = \begin{cases} \bar{z}(t) & \text{se } t \notin (t_1, t_1 + \nu) \cup (t_2, t_2 + \nu) \\ \bar{z}(t) + \delta/\nu & \text{se } t \in (t_1, t_1 + \nu) \\ \bar{z}(t) - \delta/\nu & \text{se } t \in (t_2, t_2 + \nu) \end{cases}$$

Pode-se verificar que  $\forall t \in [a, b + \nu]$

$$51 \quad (h + \int_0^t x - z) - \bar{w}(t) = \int_0^t \bar{z} - z \in [-\delta, 0]$$

e para  $t \in ]0, T[$ ,  $t \notin ]a, b + \nu[$  tem-se

$$52 \quad (h + \int_0^t x - z) - \bar{w}(t) = 0$$

Portanto,

$$h + \int_0^t x - z \leq W(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Por outro lado, por continuidade de  $w$  e semicontinuidade de  $N$  verifica-se que para  $a$  e  $\nu$  suficientemente pequenos,

$$\bar{w}(t) - \delta_1 > N(t) \quad \forall t \in [a, b + \nu]$$

Logo, de (51) e (52) conclui-se

$$h + \int_0^t x-z \geq N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

o que garante  $(h, z) \in \Omega$ .

Mas nesse caso, como  $-(\alpha, p) \in K(\Omega, (\bar{h}, \bar{z}))$  e  $(h, z) \in \Omega$  definido por (50), deduz-se

$$0 \geq \alpha [h - \bar{h}] + \int_0^T p(z - \bar{z}) = \frac{\delta}{v} \left[ - \int_{t_1}^{t_1+v} p + \int_{t_2}^{t_2+v} p \right]$$

ou seja,

$$53 \quad \frac{1}{v} \left[ \int_{t_1}^{t_1+v} p - \int_{t_2}^{t_2+v} p \right] \leq 0$$

Mas,  $\forall t \in [0, T]$  q.t.p.

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \int_t^{t+v} p = p(t)$$

logo, tomando-se o limite em (53) resulta

$$p(t_1) - p(t_2) \leq 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [a, b] \quad q.t.p. \\ t_1 < t_2$$

o que prova (42).

A condição (43) é simétrica a (42) e sua prova é equivalente, sendo dispensada. Verifica-se em seguida a condição (41). Como  $p$  pode ser identificada com uma função  $\bar{p}$  satisfazendo (42) e (43), por argumento já exposto,  $\bar{p}$  é uma função de variação limitada e pode ser suposta contínua em  $0$  e  $T$ ,

Suponha que  $\bar{h} > N(0)$  e dados  $\delta, v > 0$ , defina-se  $h = \bar{h} - \delta$

e

$$z(t) = \begin{cases} \bar{z}(t) - \frac{\delta}{v} & \text{se } t \in [0, v] \\ \bar{z}(t) & \text{se } t \in [v, T] \end{cases}$$

Então,

$$h + \int_0^t x-z = \begin{cases} \bar{w}(t) - \delta + \int_0^t \delta/v & \text{se } t \in [0, v] \\ \bar{w}(t) & \text{se } t \in [v, T] \end{cases}$$

Logo, como  $\bar{h} > N(0)$ , pela continuidade de  $\bar{w}$  e semicontinuidade de  $N$  verifica-se, para  $\delta$  e  $v$  suficientemente pequenos:

$$53 \quad N(t) \leq h + \int_0^t x-z \leq W(t)$$

ou seja  $(h, z) \in R$ .

Mas, de  $(\alpha, \bar{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, \bar{z}))$  resulta:

$$0 \geq \alpha(h - \bar{h}) + \int_0^T \bar{p}(z - \bar{z}) = -\alpha\delta - \frac{\delta}{v} \int_0^v \bar{p}$$

ou seja

$$54 \quad \frac{1}{v} \int_0^v \bar{p} \geq -\alpha$$

Como  $\bar{p}$  é contínua em 0, tomando o limite de (54) deduz-se

$$55 \quad \bar{p}(0) = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} \int_0^v \bar{p} \geq -\alpha$$

A prova da segunda parte de (41) pode ser feita por procedimento equivalente.

Para provar (44) suponha que  $\bar{w}(T) > N(T)$  e dado  $\delta > 0$  e  $v > 0$  defina-se  $h=Q$  e

$$56 \quad z(t) = \begin{cases} \bar{z}(t) & \text{se } t \in [0, T-v] \\ \bar{z}(t) + \delta/v & \text{se } t \in [T-v, T] \end{cases}$$

A continuidade de  $\bar{w}$  e semicontinuidade de  $N$  garantem  $(h, z) \in \Omega$ .  
Então, como  $-(\alpha, \bar{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, \bar{z}))$  obtem-se :

$$0 \geq \alpha(h - \bar{h}) + \int_0^T \bar{p}(z - \bar{z}) = \frac{\delta}{v} \int_{T-v}^T \bar{p}$$

ou seja

$$57 \quad \frac{1}{v} \int_{T-v}^T \bar{p} \geq 0$$

Como  $\bar{p}$  é contínua em  $T$ , tomando-se o limite de (57) resulta:

$$58 \quad -p(T) = \lim_{v \rightarrow 0} \int_{T-v}^T \bar{p} \geq 0$$

o que prova (44). A prova de (45) pode ser realizada por procedimento equivalente. ||

### 59 Teorema de Otimalidade

Suponha que existam  $\bar{v} \in V$ ,  $\bar{q} \in Q$  e  $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$  tais que  $W(0) > \bar{h}$  e

$$60 \quad W(t) \geq \bar{h} + \int_0^t x - A(\bar{v} + \bar{q}) \ni N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

sejam  $(\bar{h}, \bar{\mu}) \in \bar{U}$  e  $\bar{v} \in V$ ,  $\bar{q} \in Q$  tais que

$$(\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})) \in \Omega$$

$$\bar{\mu} + \rho' \bar{v} = d$$

$$\bar{w}(t) = \bar{h} + \int_0^t x - A(\bar{v} + \bar{q})$$

Então,  $(\bar{h}, \bar{\mu})$  resolve o problema (2) se e somente se existe  $\bar{p} \in (L^2[0, T])^n$  contínua em  $0$  e  $T$ , tal que:

$$61 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

$$\bar{v}(t) \text{ minimiza } C(d(t) - \rho'v, t)e^{-\beta t} + \langle A^* \bar{p}(t), v \rangle$$

$$\text{sujeita a } 0 \leq v \leq r(t)$$

$$62 \quad \bar{p} \geq 0 \quad A^* \bar{p} \geq 0, \quad \langle A^* \bar{p}(t), \bar{q}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

$$63 \quad \bar{h}_i > N_i(0) \rightarrow -\gamma_i \leq \bar{p}_i(0)$$

$$\bar{h}_i < W_i(0) \rightarrow -\gamma_i \geq \bar{p}_i(0)$$

$$64 \quad [a, b] \subset [0, T], \quad \bar{w}_i(t) > N_i(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\rightarrow \bar{p}_i \text{ é crescente em } [a, b]$$

$$65 \quad [a,b] \subset [0,T] \quad , \quad \bar{w}_i(t) < W_i(t) \quad \forall t \in [a,b] \\ \rightarrow \bar{p}_i \text{ é decrescente em } [a,b]$$

$$66 \quad \bar{w}_i(T) > N_i(T) \rightarrow \bar{p}_i(T) = 0$$

Prova Pelo Teorema (A.21),  $(\bar{h}, \bar{\mu})$  resolve o Problema (2) se e somente se existe

$$67 \quad p \in \partial F(\bar{\mu})$$

tal que

$$68 \quad (-\gamma, p) \in K(\hat{U}, (\bar{h}, \bar{\mu}))$$

A condição (60) e o Lema (38) garantem que as hipóteses do Lema (25) são preenchidas, Logo, por este último Lema, (68) equivale à existência de  $\bar{p} \in (L^2[0,T])^n$  tal que

$$69 \quad -(\gamma, \bar{p}) \in K(\Omega, (\bar{h}, A(\bar{v} + \bar{q})))$$

$$70 \quad A^* \bar{p} - \rho p \in K(V, \bar{v})$$

$$71 \quad \bar{p} \geq 0 \quad A^* \bar{p} \geq 0 \quad \langle A^* \bar{p}(t), \bar{q}(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{q.t.p.}$$

E pelo Teorema (3), (67) equivale a

$$72 \quad p(t) \in \partial C(\bar{\mu}(t), t) e^{-\beta t} \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{q.t.p.}$$

Como  $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$  (ver (14) e (15)) então, pelo Teorema (A.3), (69) equivale a

$$73 \quad -(\gamma_i, \bar{p}_i) \in K(\Omega_i, (\bar{h}_i, \bar{z}_i)) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

onde  $\bar{z} = A(\bar{v} + \bar{q})$ . Então, pelo Lema (40),  $\bar{p}_i$  pode ser identificada com uma função contínua em 0 e T satisfazendo (63), (64), (65) e

$$\bar{w}_i(T) > N_i(T) \rightarrow \bar{p}_i(T) \leq 0$$

$$\bar{w}_i(T) < W_i(T) \rightarrow \bar{p}_i(T) \geq 0$$

Mas, como por (71) tem-se  $\bar{p} \geq 0$  então (73) equivale a  $\bar{p}$  satisfazer (63) - (66), enquanto (71) corresponde a (62).

Mostra-se em seguida que (61)  $\bar{e}$  equivalente a (70) e (72) completando-se a prova.

Para cada  $t \in [0, T]$  considere-se o problema em  $\mathbb{R}^n$ , que aparece em (61):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & C(d(t) - \rho'v, t)e^{-\beta t} + \langle A^*\bar{p}(t), v \rangle \\ v \in \mathbb{R}^n & v \in \tilde{V}(t) \end{array}$$

onde

$$\tilde{V}(t) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq v \leq r(t)\}$$

Então, pelo Teorema (A.21),  $\bar{v}(t)$  resolve este problema se e somente se existe um subgradiente da função objetivo no cone dual de  $\tilde{V}(t)$ . Mas,  $y \in \mathbb{R}^n$   $\bar{e}$  subgradiente da função objetivo se e somente se

$$y \in -\rho \partial C(d(t) - \rho'\bar{v}(t), t)e^{-\beta t} + A^*\bar{p}(t)$$

(confronte com o Teorema (A.19)). Ou seja,  $\bar{v}(t)$  resolve este problema se e somente se existe  $p \in \partial C(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}$  tal que

$$-\rho p(t) + A^*\bar{p}(t) \in K(\tilde{V}(t), \bar{v}(t))$$

Mas, pela definição de  $V$  e pelo Teorema (A.5) estas condições equivalem a (70) e (72). ||

A condição de otimalidade apresentada no Teorema (59) possui similaridades com o Princípio do Mínimo de Pontryagin. As condições (61) e (62) representam o próprio Princípio do Mínimo; as

condições (64) e (65) estão associadas às equações do sistema adjunto; (63) e (66) correspondem a condições de contorno,

Na seção que se segue mostra-se que a Condição de otimalidade do Teorema (59) é uma condição de otimalidade para o problema (II.25). Apresenta-se também um resultado envolvendo o valor e custo da água baseado no Teorema (59).

### Seção 3. Condições de Otimalidade para o Problema (11.25) e Cálculo do Valor e Custo da Água

Os resultados desenvolvidos aqui são consequência da teoria construída nas duas seções anteriores, mais especificamente do Teorema (59). Inicialmente, define-se o que seja controle térmico minimal e em seguida mostra-se que um controle térmico admissível para o Problema (11.25) é Ótimo se e somente se é minimal. A teoria de valor e custo da água também parte do conceito de controle térmico minimal.

**73 Definição** Seja  $\bar{\mu} \in L^2[0, T]$  um controle térmico admissível para o Problema (11.25) e seja  $(\bar{v}, \bar{q})$  uma política  $\bar{h}$ -admissível tal que

$$\bar{\mu} + \rho' \bar{v} = d$$

Considere-se a trajetória

$$\bar{w}(t) = \bar{h} + \int_0^t x - A(\bar{v} + \bar{q}) \quad \forall t \in [0, T]$$

gerada pela política  $(\bar{v}, \bar{q})$ . Então,  $\bar{\mu}$  é um controle minimal para o Problema (II.25) se existe  $\bar{p} \in (L^2[0, T])^n$  contínuo em 0 e T, tal que

a)  $\forall t \in [0, T]$  q.t.p.

$$\bar{v}(t) \text{ Minimiza } C(d(t) - \rho'v, t)e^{-\beta t} + \langle A^*\bar{p}(t), v \rangle$$

$$\text{Sujeita a } 0 \leq v \leq r(t)$$

b)  $[a, b] \subset [0, T]$  ,  $\bar{w}_i(t) > N_i(t) \quad \forall t \in [a, b]$   
 $\rightarrow \bar{p}_i$  crescente em  $[a, b]$

c)  $[a, b] \subset [0, T]$  ,  $\bar{w}_i(t) < W_i(t) \quad \forall t \in [a, b]$   
 $\rightarrow \bar{p}_i$  decrescente em  $[a, b]$

d)  $\bar{w}_i(T) > N_i(T) \rightarrow \bar{p}_i(T) = 0$

e)  $\bar{p} \geq 0 \quad A^*\bar{p} \geq 0 \quad \langle A^*\bar{p}(t), \bar{q}(t) \rangle = 0$   
 $\forall t \in [0; T] \quad \text{q.t.p.}$

Como foi observado na seção anterior, as condições a) b), c), d) e e) da definição acima estão estreitamente ligadas ao Princípio de Mínimo de Pontryagin. Apresentar-se-ão mais tarde duas condições alternativas à condição a).

Para a demonstração de que as condições minimais são necessárias e suficientes para a otimalidade de  $\bar{u}$ , faz-se a seguinte hipótese sobre o Problema (11.25):

74) existe uma política  $\bar{h}$ -admissível  $(v, q)$  para o Problema (II.25), tal que:

$$\bar{h} + \int_0^t x - A(v+q) > N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

e  $\bar{h} < W(0)$

A condição (74) corresponde a supor-se que o sistema

hidroelétrico possui uma capacidade de armazenagem não nula em todos os seus reservatórios.

Teorema de Otimalidade para o Problema (II,25)

~~75 Teorema~~ Suponha que o Problema (II,25) satisfaz a condição (74). Então,  $\bar{\mu} \in L^2[0,T]$  resolve (II,25) se e somente se  $\bar{i}$  é um controle minimal para (II,25),

Prova Pela condição (74) e pelo Lema (38),  $\bar{h}$  é ponto interior de  $H$ . Logo, existe  $\gamma \in \partial G(\bar{h})$ . Mas nesse caso, pelo Lema (11),  $\bar{\mu} \in L^2[0,T]$  resolve (11.25) se e somente se  $(\bar{h}, \bar{\mu})$  resolve o Problema (2). Portanto, através do Teorema (59), conclue-se que  $\bar{\mu} \in L^2[0,T]$  resolve (11.25) se e somente se  $\bar{\mu}$  é um controle minimal com  $\gamma = -\bar{p}(0)$ . ||

A otimalidade das condições minimais está restrita, pelo Teorema (75), a problemas em que a hipótese (74) é satisfeita. Esta hipótese elimina casos em que os níveis iniciais de um ou mais reservatórios igualem as restrições superiores ou inferiores dos reservatórios. Embora o Teorema (75) pareça ser verdadeiro sem essa hipótese, a sua demonstração no caso geral aparenta muitas dificuldades não superadas.

Desenvolvem-se a seguir algumas condições equivalentes à condição a) das condições minimais.

76 Teorema Nas condições minimais, são equivalentes:

a)  $\forall t \in [0,T] \quad q, t, p,$

$$\bar{v}(t) \text{ Minimiza } C(d(t) - \rho'v, t)e^{-\beta t} + \langle A^* \bar{p}(t), v \rangle$$

sujeita a  $0 \leq v \leq r(t)$

$$b) (\bar{\mu}, \bar{v}) \text{ Minimiza } \int_0^T [C(\mu(t), t)e^{-\beta t} + \langle A^* \bar{p}(t), v(t) \rangle] dt$$

$$\text{sujeita a } 0 \leq v \leq r \quad v \in (L^2[0, T])^n$$

$$\mu + \rho' v = d \quad \mu \in L^2[0, T]$$

$$c) \text{ existe } p \in L^2[0, T] \text{ tal que: } \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

$$p(t) \in \partial C(\bar{\mu}(t), t)e^{-\beta t} \quad e$$

$$\bar{v}(t) \text{ Minimiza } \langle A^* \bar{p}(t) - p(t), v \rangle$$

$$0 \leq v \leq r(t)$$

Prova Suponha v\u00e1lido a). Ent\u00e3o, como

$$\bar{\mu} + \rho' \bar{v} = d$$

resulta que  $\forall t \in [0, T]$  q.t.p.

$$(\bar{\mu}(t), \bar{v}(t)) \text{ Minimiza } C(\mu, t)e^{-\beta t} + \langle A^* \bar{p}(t), v \rangle$$

$$\text{sujeita a } 0 \leq v \leq r(t)$$

$$\mu + \rho' v = d(t)$$

Logo, integrando vale b),

Se vale b) ent\u00e3o vale:

$$\bar{v} \text{ Minimiza } \int_0^T [C(d(t) - \rho' v(t), t)e^{-\beta t} + \langle A^* \bar{p}(t), v(t) \rangle] dt$$

$$\text{sujeita a } v \in V$$

onde  $V$  foi definido em (17). Ent\u00e3o, pelo Teorema (A.21) existe um subgradiente da fun\u00e7\u00e3o objetivo do problema acima em  $\bar{v}$  que pertence a  $K(V, \bar{v})$ . Logo, pelo Teorema (A.19), existe  $\tilde{p} \in L^2[0, T]$  tal que

$$\tilde{p} \in -\rho \partial F(d - \rho' \bar{v})$$

tal que  $\bar{p} + A^*\bar{p} \in K(V, \bar{v})$

ou seja existe  $p \in \partial F(\bar{\mu})$  tal que

$$-\rho p + A^*\bar{p} \in K(V, \bar{v})$$

Mas nesse caso, pelo Teorema (3) vale:

$$p(t) \in \partial C(\bar{\mu}(t), t) e^{-\beta t} \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

e pelo Teorema (A. 5) vale  $\forall t \in [0, T]$  q.t.p.

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) \text{ Minimiza } \langle A^*\bar{p}(t) - \rho p(t), v \rangle \\ \text{sujeita a } 0 \leq v \leq r(t) \end{aligned}$$

Se vale c) então,  $\forall t \in [0, T]$  q.t.p.

$$\bar{p}(t) \in -\rho \partial C(d(t) - \rho' \bar{v}(t), t) e^{-\beta t}$$

e 
$$\bar{p}(t) + A^*\bar{p}(t) \in K(V(t), \bar{v}(t))$$

onde 
$$V(t) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq v \leq r(t)\}$$

Mas, nesse caso, pelo Teorema (A.21), tem-se que  $\bar{v}(t)$  satisfaz a).||

As condições do Teorema (76), alternativas à condição (73a) permitem uma interpretação das funções  $\bar{p}$  nas condições mínimas. Por (76b) observa-se que  $(\bar{\mu}, \bar{v})$  é a política de operação que minimiza o custo da geração térmica somado a um custo de geração hidroelétrica, respeitadas as restrições de turbina e demanda do sistema. Esse custo de geração hidroelétrica é medido por meio de  $A^*\bar{p}$  que pelas condições mínimas é positivo. No caso particular em que  $A$  é a matriz identidade (sistema a reservatórios hidrologicamente independentes) nota-se que  $\bar{p}_i(t)$  representa o custo marginal (medido em cruzeiros/m<sup>3</sup>/seg) de geração no reservatório  $i$  no

instante  $t$ . Ver-se-á mais tarde que  $\bar{p}_i(0)$  é em geral o valor da água no reservatório  $i$  no instante inicial.

Na condição c), a função  $p$  pode ser interpretada como um custo marginal de geração térmica. Note-se que se

$$0 < \bar{v}_i(t) < r_i(t)$$

então deve-se ter

$$A_i^* \bar{p}(t) = \rho_i p(t)$$

ou seja o custo marginal de geração hidroelétrica é igual ao custo marginal de geração térmica.

### Valor e Custo da Água

O cálculo do valor e do custo da água a serem desenvolvidos em seguida estão intimamente relacionados à função  $\bar{p}$  constante das condições minimais. As expressões obtidas aqui para o valor e custo da água, apesar de complexas, são utilizáveis para a construção de algoritmos de resolução do Problema (II.25). Fernandes [75] desenvolve um algoritmo de programação dinâmica, baseado no resultado demonstrado aqui, o qual permite a obtenção das curvas de valor da água em problemas de operação ótima de sistemas com uma única usina hidroelétrica. O resultado principal obtido é o seguinte.

**77 Teorema** Suponha que  $\bar{h}$  satisfaça a condição (74) e considere-se o conjunto  $\bar{\mathcal{P}}$  das funções  $\bar{p}$  que satisfazem as condições minimais (73) com algum  $\bar{\mu} \in L^2[0, T]$ . Então,

$$78 \quad g_i(\bar{h}) = \min\{\bar{p}(0) \mid \bar{p} \in \bar{\mathcal{P}}\}$$

$$79 \quad g_i^*(\bar{h}) = \max\{\bar{p}(0) \mid \bar{p} \in \bar{P}\}$$

Prova Por (74) e pelo Lema (38),  $\bar{h}$  é ponto interior do domínio efetivo de  $G$ . Portanto, como  $G$  é convexa,  $\partial G(\bar{h}) \neq \emptyset$  e tem-se (ver Rockafellar [70]):

$$80 \quad \frac{\partial G(\bar{h})}{\partial h_i^+} = \max\{\gamma_i \mid \gamma \in \partial G(\bar{h})\}$$

$$81 \quad \frac{\partial G(\bar{h})}{\partial h_i^-} = -\min\{\gamma_i \mid \gamma \in \partial G(\bar{h})\}$$

pois  $\partial G(\bar{h})$  é compacto.

Mas, pelo Teorema (75) e Lema (11), resulta que

$$\gamma \in \partial G(\bar{h})$$

se e somente se  $(\bar{h}, \bar{\mu})$  resolve o problema (10). Logo, pelo Teorema (59), tem-se que  $\gamma \in \partial G(\bar{h})$  e  $\bar{\mu}$  satisfaz as condições minimais se e somente se  $\gamma = -\bar{p}(0)$  e  $\bar{p} \in \bar{P}$ . Portanto, pela definição de  $g_i$  e  $g_i^*$  e por (80) e (81) conclui-se (78) e (79). ||

82 Corolário A função  $G$  é decrescente e as funções  $g_i$  e  $g_i^*$  são positivas no interior de  $H$ .

Prova A positividade de  $g_i$  e  $g_i^*$  é consequência imediata de (78), (79) e da positividade de  $\bar{p}$ . Na prova do Teorema (77) mostrou-se que

$$\partial G(\bar{h}) = \{-\bar{p}(0) \mid \bar{p} \in \bar{P}\}$$

Logo, pelas condições minimais, resulta que se  $\gamma \in \partial G(\bar{h})$  então  $\gamma \leq 0$ . Se  $h^1$  e  $h^2$  pertencem ao interior de  $H$ ,  $h^1 \geq h^2$  e  $\gamma \in \partial G(h^1)$  então, por

definição de subgradiente, conclue-se

$$G(h^2) - G(h^1) \geq \gamma^1 (h^2 - h^1)$$

$$\geq 0$$

pois  $\gamma \leq 0$  e  $(h^2 - h^1) \leq 0$  ||

As definições de valor e custo da água caracterizam apenas esses valores no instante inicial. Contudo, pode-se definir o valor e custo da água em qualquer instante  $t$  do período de planejamento. Basta, para tanto, considerar o planejamento iniciando no instante  $t$  a níveis iniciais  $\bar{w}(t)$ . A solução do problema original restrita ao intervalo  $[t, T]$  será solução desse segundo problema. O cálculo do valor e custo da água nos demais instantes do planejamento pode ser efetuado por meio do Teorema (77) mas não será desenvolvido aqui.

O capítulo seguinte aplica os resultados obtidos nesta seção ao problema de operação de sistemas com um Único reservatório buscando uma maior caracterização das soluções.

CAPÍTULO IV

SISTEMAS COM UM RESERVATÓRIO

O problema de operação Ótima de sistemas de geração hidro-térmica com somente um reservatório possui interesse pois um sistema hidroelétrico pode ser representado, dentro de certas limitações, por um Único reservatório através do modelo composto (Lima |76|). Além disso, o problema de operação desses sistemas é menos complexo que o caso mais geral tratado anteriormente, permitindo que sejam obtidos resultados mais fortes que conduzam a uma maior compreensão do comportamento do sistema.

A grande simplificação resultante de se considerar sistemas com um reservatório consiste na unicidade da geração hidroelétrica quando é fixada a geração térmica e vice-versa. De fato, pela equação de demanda, a geração hidroelétrica é definida por:

$$v = \frac{1}{\rho} (d-u)$$

onde naturalmente supõe-se  $\rho > 0$ . Dessa forma o controle térmico "gera" a trajetória do sistema e pode-se tratar o problema com somente duas variáveis em lugar de três:  $u$  e  $q$ .

Reformula-se aqui o problema, com as características próprias ao sistema com um reservatório. Nesse caso, todas as funções envolvidas, exceto a função custo, são funções de  $[0, T]$

em  $R$ , satisfazendo as hipóteses já firmadas no Capítulo II. Para facilidade de notação, supõe-se aqui  $\rho = 1$ .

O problema consiste em :

$$1 \quad \text{Minimizar} \quad \int_0^T C(u(t), t) e^{-\beta t} dt \quad t \in [0, T]$$

sujeito a

$$2 \quad \bar{w}(t) = \bar{h} + \int_0^t x + u - d - q$$

$$3 \quad N(t) \leq \bar{w}(t) \leq W(t)$$

$$4 \quad d-r \leq u \leq d \quad q \geq 0$$

$$u, q \in L^2[0, T]$$

Um controle térmico  $u \in L^2[0, T]$  é h-admissível para o Problema (1) se existe  $q \in L^2[0, T]$  tal que as condições (2)-(4) são satisfeitas.

As condições minimais para o Problema (1) são bastante semelhantes às já obtidas para o Problema (II-25), podendo, por rém, ser simplificadas. Para tanto, torna-se útil a introdução de notações para as derivadas ã esquerda e ã direita da função  $C$ .

Define-se  $\bar{c}, \underline{c} : R \times [0, T] \rightarrow R$  por :

$$\bar{c}(\alpha, t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{C(\alpha + \lambda, t) - C(\alpha, t)}{\lambda}$$

$$\underline{c}(\alpha, t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{C(\alpha - \lambda, t) - C(\alpha, t)}{-\lambda}$$

Como  $C(\cdot, t)$  é convexa para cada  $t \in [0, T]$  então  $\bar{c}(\cdot, t)$  e  $\underline{c}(\cdot, t)$  são crescentes, e :

$$\bar{c}(\alpha, t) = \underline{c}(\alpha, t) \quad : \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, T]$$

Para um sub-conjunto enumerável de pontos  $(\alpha, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$  pode valer:

$$\bar{c}(\alpha, t) > \underline{c}(\alpha, t)$$

(aqueles em que  $\bar{c}$  é descontínua).

5 Definição : Seja  $\bar{u} \in L^2[0, T]$  um controle  $\bar{h}$ -admissível para (1) e sejam  $\bar{q}$  e  $\bar{w}$  satisfazendo (2), (3) e (4). O controle  $\bar{u}$  é minimal se existe  $\bar{p} \in L^2[0, T]$ , contínuo em 0 e T tal que :

a)  $t \in [0, T]$  q.t.p.

$$\bar{u}(t) < d(t) \longrightarrow \bar{p}(t) \leq \bar{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}$$

$$\bar{u}(t) > d(t) - r(t) \longrightarrow \bar{p}(t) \geq \underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}$$

b)  $[a, b] \subset [0, T]$  ,  $\bar{w}(t) > N(t) \quad \forall t \in [a, b]$

$$\longrightarrow \bar{p} \text{ crescente em } [a, b]$$

c)  $[a, b] \subset [0, T]$  ,  $\bar{w}(t) < W(t) \quad \forall t \in [a, b]$

$$\longrightarrow \bar{p} \text{ decrescente em } [a, b]$$

$$d) \quad \bar{w}(T) > N(T) \longrightarrow \bar{p}(T) = 0$$

$$e) \quad \bar{p}(t) \cdot \bar{q}(t) = 0, \quad \bar{p}(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

Uma comparação entre as condições acima e as condições apresentadas em (III-73) mostra que somente as condições a) diferem nas duas condições. O teorema seguinte garante a otimalidade das condições minimais.

6 **Teorema:** Suponha que  $h < W(0)$  e exista  $\bar{q} \in L^2[0, T]$  tal que:

$$W(t) \geq h + \int_0^t x - \bar{q} > N(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

Então,  $\bar{u} \in L^2[0, T]$  resolve o Problema (1) se e somente se  $\bar{u}$  é um controle minimal para (1).

Prova : Em vista do Teorema (III-75), basta mostrar-se que (5a) equivale a:  $\forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$

$$\bar{u}(t) \text{ Minimiza } C(u, t)e^{-\beta t} + \bar{p}(t)\{d(t)-u\}$$

$$\text{sujeito a } d(t) - r(t) \leq u \leq d(t)$$

A condição acima equivale a: se  $\bar{u}(t) < d(t)$ , então a derivada à direita da função objetivo em  $\bar{u}(t)$  é positiva; e se  $\bar{u}(t) > d(t) - r(t)$  então a derivada à esquerda da função objetivo em  $\bar{u}(t)$  é positiva. Mas isto é equivalente a (5a).  $\parallel$

As condições minimais, sendo condições de otimalidade para o problema (1), são bastante úteis no teste e construção de soluções do problema. Contudo a verificação da validade das condições minimais para um dado controle admissível  $Z$  dificultada pela necessidade de construir uma função  $\bar{p}$  satisfazendo (5a)-(5e). Apresenta-se, em sequência, um método de construção de  $\bar{p}$  que permite a verificação da otimalidade de um controle térmico admissível.

## 7 Teste de Otimalidade

Seja  $\bar{u} \in L^2[0, T]$  um controle  $\bar{h}$ -admissível. Considerem-se  $\bar{w}$  e  $\bar{q}$  satisfazendo (2), (3) e (4). Defina-se as funções  $a, b : [0, T] \rightarrow [0, T]$  por :

$$8 \quad a(t) = \inf \{ \tau | \tau = t \text{ ou } \bar{w}(\alpha) > N(\alpha), \forall \alpha \in (\tau, t] \}$$

$$9 \quad b(t) = \sup \{ \tau | \tau = t \text{ ou } \bar{w}(\alpha) < W(\alpha), \forall \alpha \in [t, \tau) \}$$

Em geral, os valores  $a(t)$  e  $b(t)$  representam respectivamente o último instante  $\tau \leq t$  em que  $\bar{w}$  iguala  $N$  e o primeiro instante  $\tau \geq t$  em que  $\bar{w}$  iguala  $W$ .

Considere-se agora a função  $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:  $(\forall t \in [0, T])$

$$10 \quad c(t) = \begin{cases} \underline{c}(\bar{u}(t), t) e^{-\beta t} & \text{se } \bar{u}(t) > d(t) - r(t) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Define-se, a partir de (8), (9) e (10), a função  $p^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  por meio de :

$$(11) \quad p^*(t) = \sup \text{ess} \{c(\tau) \mid a(t) \leq \tau \leq b(t)\} \quad \forall t \in [0, T]$$

onde  $\sup \text{ess}$  representa supremo essencial. Como  $\bar{u}$  é integrável, então a função  $c$  é integrável e portanto a consistência de (11) depende apenas da desigualdade  $a \leq b$ . O lema seguinte garante essa desigualdade além de outras propriedades de  $a$ ,  $b$  e  $p^*$ .

(12) Lema : As funções  $a$  e  $b$  são crescentes e  $a \leq b$ . Além disso, a função  $p^*$  definida por (11) satisfaz (5b) e (5c).

Prova: Se  $t_1 < t_2$  então, por (8),  $a(t_1) \leq t_1$ . Se  $a(t_2) \geq t_1$ , então  $a(t_2) \geq a(t_1)$ . Se  $a(t_2) < t_1$  então, como por (8) tem-se

$$\bar{w}(\alpha) > N(\alpha) \quad \forall \alpha \in (a(t_2), t_2)$$

em particular vale

$$\bar{w}(\alpha) > N(\alpha) \quad \forall \alpha \in (a(t_2), t_1)$$

Mas pela definição de  $a(t_1)$  esta última condição implica em  $a(t_1) \leq a(t_2)$ .

A prova para a função  $b$  é equivalente.

Por outro lado, se  $t \in [0, T]$  então por (8) e (9) tem-se  $a(t) \leq t \leq b(t)$  e portanto  $a \leq b$ . Seja agora  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  tal que  $\bar{w}(t) \geq N(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2]$ .

Mostra-se que  $a$  é constante em  $[t_1, t_2]$ . De fato, por hipótese e por (8), tem-se

$$a(t) < t_1 \leq t \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

Então, se  $t, \tau \in [t_1, t_2]$   $\tau < t$ , vale :

$$\bar{w}(\alpha) > N(\alpha) \quad \forall \alpha \in (a(t), \tau)$$

Logo,  $a(t) \leq a(\tau)$  e como  $a$  é crescente

$$a(t) = a(\tau) .$$

Como  $b$  é crescente e  $a$  é constante em  $[t_1, t_2]$  então da definição de  $p^*$  pode-se concluir que  $p^*$  é crescente em  $[t_1, t_2]$ . A prova de (5c) é equivalente, bastando mostrar-se que se  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  e  $\bar{w}(\alpha) < W(\alpha)$ ,  $\forall a \in [t_1, t_2]$ , então  $b$  é constante em  $[t_1, t_2]$ . ||

O resultado básico que justifica o teste de otimalidade é o que se segue.

13 **Teorema:** Suponha que  $c$  é positiva, ou seja,  $C$  é crescente. Então, um controle  $\bar{h}$ -admissível  $\bar{u}$  é solução do Problema (1) se e somente se a função  $p^*$  construída em (11) satisfaz as condições (5a), (5d) e (5e). Além disso, se  $(\bar{u}, \bar{p})$  satisfaz as condições mínimas então  $\bar{p} \geq p^*$ .

Prova: Seja  $p^*$  construído como em (1). Pelo Lema (12),  $p^*$  satisfaz (5b) e (5c). Se  $p^*$  satisfaz as condições (5a), (5H) e (5e) com  $\bar{u}$ , então, pelo Teorema (6),  $\bar{u}$  resolve (1)<sub>0</sub> se  $\bar{u}$  é uma solução de (1) então, pelo Teorema (6) existe  $\bar{p}$  tal que  $(\bar{u}, \bar{p})$  satisfaz as condições minimais.

Se  $t \in [0, T]$  então por (5b), (5c), (8) e (9) tem-se que  $\bar{p}$  é crescente em  $(a(t), t]$  e  $\bar{p}$  é decrescente em  $[t, b(t))$ . Logo, por (5a),

$$(t, b(t)) \text{ q.t.p. } | \bar{u}(\tau) > d(\tau) - r(\tau)$$

$$\bar{u}(\tau) \geq \bar{p}(\tau) \geq c(\tau), \tau] e^{-\beta \tau}$$

$$e \quad \forall \tau \in (a(t), t) \text{ q.t.p. } | \bar{u}(\tau) > d(\tau) - r(\tau)$$

$$\bar{p}(\tau) \geq \bar{p}(\tau) \geq c(\tau), \tau] e^{-\beta \tau}$$

Portanto,  $\forall \tau \in (a(t), b(t))$  q.t.p.

$$\bar{p}(t) \geq c(\tau)$$

o que garante  $\bar{p} \geq p^*$ .

Então,  $(\forall t \in [0, T])$  q.t.p.  $| \bar{u}(t) < d(t)$

$$\bar{c}(\bar{u}(t), t) e^{-\beta t} \geq \bar{p}(t) \quad \text{por (5a)}$$

$$\geq p^*(t)$$

Por outro lado, de (11) pode-se deduzir

$$\forall t \in [0, T] \text{ q.t.p. } | \bar{u}(t) > d(t) \quad r(t)$$

$$p^*(t) \geq c(t) = \underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}$$

completando a prova de que  $p^*$  satisfaz (59).

Devido ao Lema (12),  $p^*$  satisfaz (5b) e (5c). Como por hipótese  $\underline{c}$  é positiva, então  $p^* \geq 0$ . Se  $\bar{w}(T) > N(T)$  então

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{p}(T) && \text{por (5d)} \\ &\geq p^*(T) \geq 0 \end{aligned}$$

e portanto  $p^* = 0$ , e satisfaz (5d). Como  $\bar{q} \geq 0$  e  $\bar{p} - p^* \geq 0$  então,  $(\bar{p} - p^*) \cdot \bar{q} \geq 0$ .

Mas nesse caso  $p^* \cdot \bar{q} = 0$  pois, por (5e)  $\bar{p}\bar{q} = 0$ , e  $p^* \cdot \bar{q} \geq 0$ .

||

O teste de otimalidade sugerido pelo Teorema (13) é imediato. Dado um controle térmico  $h$ -admissível,  $\bar{u}$ , constrói-se a função  $p^*$  a partir de (11). Se  $p^*$  satisfizer as condições (5a), (5d) e (5e), então  $\bar{u}$  resolve o problema (1). Se não, então  $\bar{u}$  não é solução de (1). Além disso, a partir da função  $p^*$  será possível calcular-se o valor inicial da água para o Problema (1), resultado que é desenvolvido mais tarde.

Controle Térmico Gerado por,  $\bar{p}$

Uma questão que é sugerida por uma observação das condições minimais é a seguinte: sabendo-se que  $\bar{p}$  satisfaz as condições minimais com algum  $\bar{u}$ , pode-se afirmar que exista somente um controle térmico satisfazendo essas condições com  $\bar{p}$ ? Ou ainda: nas condições minimais,  $\bar{p}$  "gera" ou determina univocamente o controle  $\bar{u}$ ? Ver-se-á que se pode responder afirmativamente a estas questões no sentido enunciado a seguir.

14 Suponha que  $N$  é absolutamente contínua e considerem-se as funções  $\Gamma^*, \Gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por :

$$\forall t \in [0, T], \quad p \in \mathbb{R}^+, \quad h \in \mathbb{R}$$

$$15 \quad \Gamma^*(t, p, h) = \begin{cases} \text{Max } \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \underline{c}(\alpha, t) e^{-\beta t} \leq p, \alpha \leq d(t) \} & \text{se } N(t) < h \leq W(t) \\ \text{Max } \{ \alpha \in \mathbb{R} \mid \underline{c}(\alpha, t) e^{-\beta t} \leq p, \alpha \leq d(t) + \dot{N}(t) - X(t) \} & \text{se } h = N(t) \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases}$$

onde  $\dot{N}(t)$  é a derivada no tempo de  $N$ , e

$$16 \quad \Gamma(t, p, h) = \text{Max} \{ \Gamma^*(t, p, h), d(t) - r(t) \}$$

Mostrar-se-á, sob certas condições, que se  $\bar{u}$  e  $\bar{p}$  satisfazem as condições minimais, então

$$17 \quad \bar{u}(t) = \Gamma(t, \bar{p}(t), \bar{w}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad \left| \begin{array}{l} \bar{p}(t) > 0 \quad \text{ou} \\ \bar{u}(t) > 0 \quad \text{q.t.p.} \end{array} \right.$$

Note-se que nas definições de  $r$  e  $r^*$  a dependência em  $h$  é lógica, alterando os valores dessas funções somente se  $h = N(t)$ .

Na definição de  $r$ , busca-se essencialmente o maior controle térmico com um custo marginal menor ou igual a  $p$ . Como esse valor pode não respeitar as restrições de demanda e de turbina, são necessárias as limitações que aparecem na definição de  $r^*$ .

Uma terceira limitação surge quando o nível do reservatório iguala o limite inferior. A prova de (17) g apresentada a seguir.

18 Teorema: Suponha que  $\underline{c}$  é positiva,  $\beta > 0$  e considerem-se  $\bar{u}, \bar{p} \in L^2[0, T]$  satisfazendo as condições minimais. Então,

$$19 \quad \bar{u}(t) = r(t, \bar{p}(t), \bar{w}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \quad \left| \begin{array}{l} \bar{p}(t) > 0 \quad \text{ou} \\ \bar{u}(t) > 0 \quad \text{q.t.p.} \end{array} \right.$$

Prova: Considerem-se as funções:

$$u^*(t) = r^*(t, \bar{p}(t), \bar{w}(t))$$

$$\bar{u}(t) = r(t, \bar{p}(t), \bar{w}(t))$$

Se  $t \in [0, T]$  e  $\bar{q}(t) > 0$  então, pela condição (5e),  $\bar{p}(t) = 0$ . Se  $\bar{u}(t) \leq 0$ , nada há a provar. Se  $\bar{u}(t) > 0$  então  $\bar{p}(t) < \underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}$  pois  $\underline{c}$  é positiva; e nesse caso, por (5a) tem-se  $\bar{u}(t) = d(t) - r(t) > 0$ . Mas,  $\bar{p}(t) = 0$  implica em  $u^*(t) = 0$  devido a (15) e portanto em  $\bar{u}(t) = d(t) - r(t)$  devido a (16) e  $d(t) > r(t)$ . Logo, se  $\bar{q}(t) > 0$  tem-se  $\bar{u}(t) = \bar{u}(t)$ . Sem perda

de generalidade, pode-se considerar no restante da prova que  $\bar{q}=0$ .

Defina-se

$$Z = \{t \in [0, T] \mid \bar{w}(t) = N(t)\}$$

onde

$$\bar{w}(t) = \bar{h} + \int_0^t x - d + \bar{u} \quad \forall t \in [0, T]$$

O conjunto  $Z$  é fechado pois  $\bar{w}$  e  $N$  são contínuas; pode portanto ser representado pela união enumerável de intervalos fechados disjuntos de  $[0, T]$ . Seja  $[t_1, t_2] \subset Z$ . Então,

$$\dot{\bar{w}}(t) - \dot{N}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \text{q.t.p.}$$

ou seja,

$$\bar{u}(t) = d(t) + \dot{N}(t) - x(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad \text{q.t.p.}$$

Portanto, se  $t \in [t_1, t_2]$  e  $\bar{u}(t) > u^*(t)$  então de (15) pode-se afirmar que

$$\underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t} > \bar{p}(t)$$

Mas nesse caso, por (5a), deduz-se

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= d(t) - x(t) \\ &= \tilde{u}(t) \end{aligned}$$

devido a (16). Se  $\bar{u}(t) = u^*(t)$  então como  $\bar{u}$  é  $\bar{h}$ -admissível, obtem-se  $u^*(t) \geq d(t) - r(t)$  e daí resulta novamente  $\bar{u}(t) = \tilde{u}(t)$  devido a (16). Em resumo, vale (19) em  $Z$  :

O complementar  $\tilde{Z}$  de  $Z$  é aberto relativamente a  $[0, T]$ . Pode portanto ser representado pela união enumerável de intervalos abertos de  $[0, T]$ . Seja  $[t_1, t_2] \subset \tilde{Z}$ . Se  $t \in [t_1, t_2]$  e  $\underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t} > \bar{p}(t)$  então, por (15) e (5a) respectivamente, obtem-se:

$$u^*(t) < \bar{u}(t) = d(t) - r(t)$$

Logo, de (16) conclui-se que  $\tilde{u}(t) = \bar{u}(t)$ . Se  $t \in [t_1, t_2]$  e  $\underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t} \leq \bar{p}(t)$  então, por (15) e pela admissibilidade de  $\bar{U}$ :

$$u^*(t) \geq \bar{u}(t) \geq d(t) - r(t)$$

Logo, de (16) conclui-se que  $\tilde{u}(t) \geq \bar{u}(t)$ .

Suponha por absurdo que  $\tilde{U} \neq \bar{U}$  em  $[t_1, t_2]$ . Então, o conjunto:

$$X = \{t \in [t_1, t_2] \mid \tilde{u}(t) > \bar{u}(t)\}$$

possui medida positiva. Note-se que :

$$20 \quad d(t) \geq \tilde{u}(t) > \bar{u}(t) \geq d(t) - r(t) \quad \forall t \in X \quad \text{q.t.p.}$$

Então,  $\forall t \in X$  q.t.p.

$$\begin{aligned} \underline{c}(\tilde{u}(t), t) &\geq \bar{c}(\bar{u}(t), t) && \text{pois } \tilde{u}(t) > \bar{u}(t) \\ &\geq \bar{p}(t) e^{\beta t} && \text{por (5a) e (20)} \\ &\geq \underline{c}(\bar{u}(t), t) && \text{por (15), (16) e (20)} \end{aligned}$$

ou seja,

$$21 \quad \underline{c}(\tilde{u}(t), t) = \bar{c}(\bar{u}(t), t) = \bar{p}(t)e^{\beta t} \quad \forall t \in X \quad \text{q.t.p.}$$

Como  $X \subset \tilde{Z}$  então, por (5b),  $\bar{p}$  é crescente em  $X$ . Como  $\beta > 0$  então  $\bar{p}(t) e^{\beta t}$  é estritamente crescente em  $X$ .

Para cada  $t \in X$  defina-se :

$$I_t = (\bar{u}(t), \underline{u}(t))$$

Como  $I_t \neq \emptyset$  para  $t \in X$  e  $X$  é não enumerável, então existem  $t, \tau \in X$ ,  $t > \tau$  tais que:

$$I_t \cap I_\tau \neq \emptyset$$

Seja  $\alpha \in I_t \cap I_\tau$ . Então, por propriedades de  $\underline{c}$  e  $\bar{c}$  tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{c}(\gamma, t) &\leq \underline{c}(\bar{u}(t), t) && \text{pois } \gamma < \bar{u}(t) \\ &= \bar{c}(\bar{u}(t), t) && \text{por (21)} \\ &\leq \bar{c}(\gamma, t) && \text{pois } \gamma > \bar{u}(t) \end{aligned}$$

e por prova equivalente,

$$\bar{c}(\gamma, \tau) = \underline{c}(\bar{u}(\tau), \tau)$$

Mas, nesse caso, como  $\bar{c}(\gamma, \cdot)$  é constante em  $X$  :

$$\underline{c}(\bar{u}(t), t) = \underline{c}(\bar{u}(\tau), \tau)$$

o que contradiz (21) pois  $\bar{p}(t) e^{\beta t}$  é crescente em  $X$  e  $t > \tau$ . ||

### Exemplo Ilustrativo

As figuras 1 e 2 ilustram um exemplo de operação Ótima de um sistema com um reservatório. Supõe-se o limite superior do reservatório constante enquanto o limite inferior  $\bar{e}$  é constante.

Na figura 1 aparecem as funções custo  $C$  e custo marginal  $\underline{c}$ .  $C$  é independente do tempo e linear por parte em  $u$ , exceto no intervalo  $(u_1, u_2)$ , onde é diferenciável e estritamente convexa. Na figura 2 exibem-se a trajetória Ótima, a função  $\bar{p}$  e o custo marginal na operação ótima e a geração térmica  $\bar{o}$  ótima. No diagrama de custo marginal, as linhas contínuas representam a função  $\bar{p}$  e as linhas tracejadas, o custo marginal  $\underline{c}$  do controle Ótimo usado. No diagrama de geração térmica, a curva contínua mostra a evolução da geração térmica enquanto que as linhas tracejadas caracterizam  $d$  e  $d-r$ . Analisa-se em seguida alguns intervalos de tempo numerados de 1 a 8.

No intervalo 1, o custo marginal é constante: opera-se sobre a região diferenciável de curva de custo  $C$ . No intervalo 4, a restrição  $\bar{u}(t) \geq d(t) - r(t)$  é satisfeita com igualdade e o custo marginal pode superar  $\bar{p}$ . Em 6, a trajetória coincide com o limite inferior ao que permite um controle térmico menor que o máximo controle a custo marginal menor ou igual a  $p$ . Note-se que as funções  $\bar{u}$  e  $\bar{p}$  satisfazem as condições minimais.

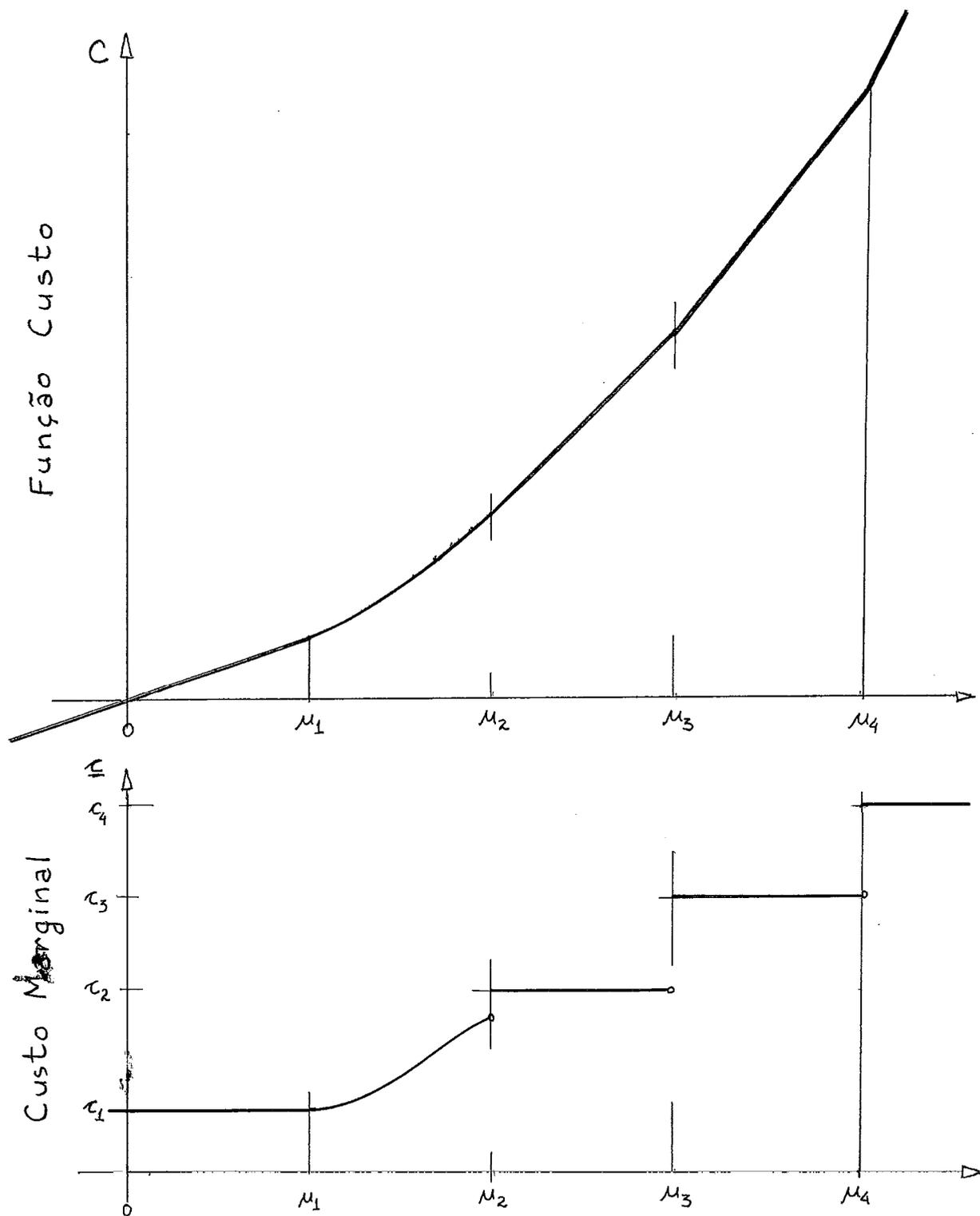


Fig. 1

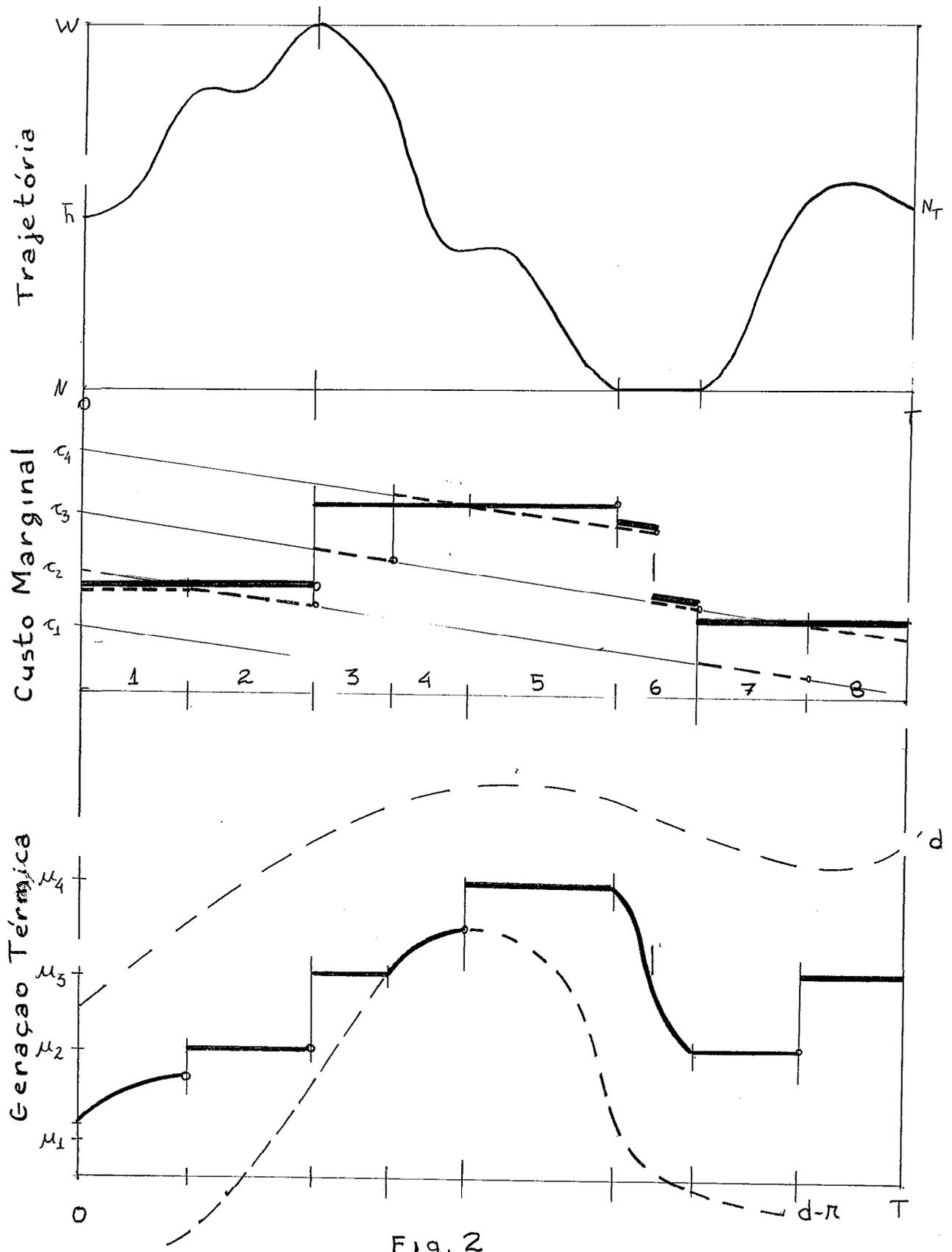


Fig. 2

## Valor da Água

O resultado do **cálculo** do valor da água no problema com um reservatório pode ser obtido por uma **análise** da figura 2. Posteriormente, este resultado **será** provado.

Suponha-se que no problema ilustrado nas figuras 1 e 2 eleva-se ligeiramente o **nível** inicial do **reservatório**. Este volume adicional de **água**, se não utilizado para geração **hidroelétrica**, deverá ser vertido no fim do intervalo de tempo 2, pois a trajetória atinge o **limite** nesse ponto. Portanto, esse **incremento** de **água** deve ser utilizado **até** o primeiro instante em que a trajetória **Ótima** toca o **limite superior** do reservatório.

Se o volume adicional de água **é** utilizado para **geração hidroelétrica** em certo instante, então nesse instante a **térmica** **poderá** gerar **menos**, **mantendo** apesar disso, o atendimento da demanda. Portanto, o volume de água adicionado no **início** deve ser usado no instante em que o custo marginal da **térmica** em uso seja máximo, pois nesse caso obtem-se a maior economia **possível** de **combustível**.

No exemplo da figura 2, a utilização da água **excedente** deve ser feita dentro do intervalo 1, pois no intervalo 2 o custo marginal cai com o tempo. Verifica-se portanto que a **economia** obtida **será** o custo marginal no intervalo 1, ou seja, o **valor** inicial de  $\bar{p}$ .

22 **Teorema:** Suponha que  $\underline{c}$  é positiva, as hipóteses do Teorema (6) são satisfeitas, e seja  $\bar{u}$  uma solução do Problema (1). Então, o valor da água no instante inicial é o valor de  $p^*(0)$  onde  $p^*$  é calculado por (11). Ou seja,

$$23 \quad g(\bar{h}) = \sup \text{ess} \{ \underline{c}(\bar{u}(\tau), \tau) e^{-\beta\tau} \mid \begin{array}{l} u(\tau) > d(\tau) - r(\tau) \\ 0, \quad \bar{w}(\tau') < w(\tau') \end{array} \}$$

onde  $\sup \text{ess } A = 0$  se medida de  $A$  é nula.

Prova : Pelo Teorema (III-77),  $g(\bar{h})$  é o ínfimo dos valores de  $\bar{p}(0)$  sujeito a  $\bar{p}$  a satisfazer as condições minimais. Mas, pelo Teorema (13),  $p^* \leq \bar{p}$  para todo  $\bar{p}$  nessas condições. Logo,  $g(\bar{h}) = p^*(0)$ . Pela definição de  $p^*$ , dada em (11), verifica-se (23). ||

Vale ressaltar que, embora o cálculo do valor da água tenha sido desenvolvido para o instante inicial, ele pode ser estendido a qualquer instante do período de planejamento.

O restante do capítulo é dedicado a sistemas com vários reservatórios. A complexidade desses sistemas prejudica contudo uma análise tão detalhada como a desenvolvida no problema recém estudado. Apresentam-se contudo algumas conclusões de caráter qualitativo.

## Sistemas com Vários Reservatórios

Em sistemas hidrotérmicos com um reservatório, a geração hidroelétrica fica determinada univocamente pela geração térmica por meio da equação de demanda. Em sistemas com vários reservatórios, isto já não é verdadeiro. Ainda que fixada a produção térmica, a demanda não atendida pode vir a ser suprida por várias combinações possíveis das gerações hidroelétricas. Essa não-unicidade da distribuição da geração é causa de muitas dificuldades na análise dessa classe de sistemas.

Essas dificuldades decorrem também da possibilidade de, na solução Ótima, parte do sistema hidroelétrico operar esgotando a sua capacidade de turbinamento, enquanto o restante do sistema está abaixo desse limite ou mesmo não gerando. Em sistemas com um reservatório, a restrição de turbina pode ser traduzida em uma restrição de controle térmico, mas em sistemas com vários reservatórios isto já não é realizável.

No estudo de sistemas com um reservatório são da maior importância aqueles instantes de tempo em que a trajetória da solução atinge o limite inferior ou superior do reservatório. Esses instantes são contudo bastante difíceis de serem caracterizados em sistemas a vários reservatórios. De fato, existem exemplos onde somente em alguns reservatórios as trajetórias tocam a restrição superior ou inferior. Em alguns desses exemplos essa condição pode ser eliminada por uma mudança na distribuição da geração hidroelétrica, porém em outros casos isto é impossível.

Torna-se portanto, de grande importância a caracterização daqueles instantes em que se tem uma "limitação essencial" da trajetória, ou seja, de instantes em que com qualquer distribuição da geração hidroelétrica (geração térmica fixa) a trajetória toca um dos limites do reservatório. Essa caracterização é porém dificultada pela existência de uma quantidade enorme de casos "patológicos" ou pelo menos complexos que resistem a uma unificação ou sistematização.

Embora as condições minimais definidas em (III-73) sejam condições necessárias e suficientes para a otimalidade de uma política admissível, as dificuldades apontadas prejudicam o estabelecimento de características tão fortes quanto as obtidas para sistemas com um reservatório. Contudo, algumas observações qualitativas podem ser feitas em relação a esses sistemas mais complexos.

Considere-se inicialmente sistemas com reservatórios hidrologicamente independentes, ou seja, em que  $A = \mathbf{I}$ . Seja  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{q})$  uma solução para o Problema (II-25) e suponha satisfeitas as hipóteses do Teorema (III-75). Nesse caso, são válidas as condições minimais e pelo Teorema (III-76), a condição (III-73a) pode ser expressa por: existe  $p \in L^2[0, T]$  tal que

$$25 \quad p(t) \in [\underline{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}, \bar{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}]$$

$$26 \quad \bar{v}(t) \underset{v \in \mathbf{R}^n}{\text{minimiza}} \langle \bar{p}(t) - \rho p(t), v \rangle$$

sujeito a  $0 \leq v \leq r(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$

onde  $\bar{p}$  satisfaz as demais condições minimais.

Suponha-se que a política hidroelétrica nesse problema satisfaça a condição

$$0 < \bar{v}(t) < r(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$$

e que os rendimentos  $\rho_i$  são iguais nos diversos reservatórios.

Então, de (26), resulta que:

$$\bar{p} = \rho p$$

ou seja, as diversas funções  $\bar{p}_i$  são iguais pois os rendimentos são iguais. Nessas condições, os diversos reservatórios comportam-se como se fossem um só e os valores da água nos diversos reservatórios serão iguais. No caso em que os rendimentos são diferentes, as conclusões são similares sendo os valores da água proporcionais aos rendimentos de cada máquina.

Esse comportamento unificado do sistema pode deixar de ocorrer caso a geração de alguma hidroelétrica iguale uma de suas restrições. Nesse caso, os diversos  $\bar{p}_i$  podem ser distintos e uma análise de (26) sugere a conclusão:  $\forall t \in [0, T] \quad \text{q.t.p.}$

$$\bar{p}_i(t) > \bar{p}_j(t) \longrightarrow \bar{v}_i(t) = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{v}_j(t) = r_j(t) .$$

Esta conclusão indica que na solução Ótima é dada preferência à geração de energia nas hidroelétricas de menor valor de  $\bar{p}$ , ou seja, de menor valor da água. Poupa-se assim a água de reservatórios em que o valor da água é elevado; gera-se ao máximo

em reservatórios de água a valor muito baixo.

O termo de comparação para o valor da água é a função  $p$  que aparece em (25) e (26). Essa função pode ser interpretada como o valor da energia do sistema, sendo ela o indicador para a utilização de água por meio de (26). Contudo, nas condições minimais, essa função não tem um comportamento tão bem definido como as funções  $\bar{p}$ .

Conclusões semelhantes podem ser obtidas para sistemas hidrologicamente interligados. Nesse caso, a primeira condição minimal pode ser escrita como:  $\forall t \in [0, T] \quad q.t.p.$

$$27 \quad p(t) \in [c(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}, \bar{c}(\bar{u}(t), t)e^{-\beta t}]$$

$$28 \quad \bar{v}(t) \text{ Minimiza } \langle \hat{p}(t) - \rho p(t), v \rangle$$

$$\text{sujeito a } 0 \leq v \leq r(t)$$

$$29 \quad \hat{p}(t) = A * \bar{p}(t)$$

onde  $\bar{p}$  satisfaz as demais condições minimais. No caso em que  $0 < \bar{v} < r$  e os rendimentos são iguais, pode-se deduzir que todas as componentes de  $A * \bar{p}$  são iguais. Em sistemas em "cascata", isto é, em que cada reservatório possui no máximo uma usina a montante e uma a jusante, essa condição implica em que o valor da água cresce à medida que passamos de um reservatório a jusante para um reservatório a montante. Mais especificamente, o valor da água em uma usina da "cascata" é  $j+1$  vezes o valor da água no reservatório mais a jusante, onde  $j$  é o número de reservatórios a jusante da usina considerada.

A análise de situações em que os limites da geração (0 e  $r$ ) são atingidos é bastante mais complexa em sistemas hidrológicamente interligados e não será feita aqui.

CAPÍTULO VCONCLUSÕES

O Problema (II-25) possui uma formulação suficientemente geral para englobar casos já estudados na literatura especializada. Além disso, as condições de otimalidade desenvolvidas no Capítulo III permitem deduzir as condições propostas por Koopmans [57] e Araujo [74].

Koopmans [57] estuda o problema contínuo com um reservatório, invariante no tempo, sem desconto no custo, que é suposto estritamente convexo e diferenciável. Sob essas hipóteses, mostra-se aí que existe uma solução com geração constante em intervalos de tempo onde a trajetória Ótima não toca nos limites dos reservatórios (supostos constantes). Esta observação de Koopmans é válida pois nessas condições trabalha-se a custo marginal constante. Tais condições podem ser provadas a partir de resultados do Capítulo IV.

Araujo [74] considera o mesmo problema de Koopmans [57] com hipóteses mais fracas sobre o custo que é convexo, e com desconto. Desenvolve então uma condição necessária de otimalidade bastante semelhante às condições (IV-5). Esta condição não é porém suficiente,

Basicamente, na condição de Araujo, a função  $\bar{p}$  é constante por partes e gera o controle  $\bar{u}$  por meio de uma expres-

são similar a (IY-18). Esta condição também poderia ser provada por meio das condições de otimalidade do **Capítulo IV**.

A teoria desenvolvida no **Capítulo IV** já foi usada por Fernandes [74] na construção de **algoritmos implementáveis** para a resolução do problema de operação **ótima** de sistemas com um **reservatório**. Isto mostra a potencialidade das condições obtidas e sugere o desenvolvimento de uma pesquisa nesta linha visando a **resolução** de problemas de operação de sistemas com vários reservatórios. O estudo dessa **última** classe de problemas ainda tem muitas questões em aberto, algumas apontadas ao término do capítulo anterior.

A maior limitação do modelo adotado está na **consideração** de afluências **determinísticas**. De fato, a estocacidade do mercado pode ser evitada por meio de previsões de crescimento do consumo de energia, previsões estas bastante **aceitáveis** em um planejamento a longo prazo. Contudo, a aleatoriedade da **afluência**, **especialmente** no caso brasileiro, deve ser considerada **em** um estudo mais realista.

Lima [76] expõe um método de geração das curvas de valor esperado da água em problemas de operação de sistemas discretizados com um **reservatório**, que admite estocacidade da afluência e conduz a uma resolução do problema. O problema de operação de sistemas mais complexo com afluência **estocástica** não recebeu **porém**, um tratamento adequado e conclusivo.

O Último ponto a ressaltar-se envolve a estrutura do mercado. Nos modelos comumente **adotados** para o problema de o-

peração a longo prazo, admite-se uma aglomeração do mercado de energia, isto é, não se consideram mercados localizados e nem a estrutura do sistema de transmissão. Dessa forma, a produção de energia por hidroelétricas distantes dos centros de consumo é equivalente à produção daquelas mais próximas a esses centros. Despreza-se com tal procedimento perdas de energia devidas à transmissão a longa distância.

BIBLIOGRAFIA

1. Araujo, Maria Helena T.: "Condições de Otimalidade para Sistemas de Geração Hidrotérmicos", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Dez/74.
2. Arvanitidis, N.V. and Rosing, J.: "Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System", IEEE Transaction on PAS , Fev/70, p. 319-327.
3. Arvanitidis, N.V. and Rosing, J.: "Optimal Operation of a Multi-reservoir System Using a Composite Representation", IEEE Transaction on PAS , Fev/70, p. 327-335.
4. Fernandes, Solange: "Discretização do Problema de Operação de Sistemas de Geração Hidrotérmicos" , Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Dez/75.
5. Guillaumin, P. et Arabeybe, M.L.: "Modèle de Gestion d'un Ensemble Hydraulic et Yhermique avec Aléas de Consomation et Disponibilitê des Groups (Modèle GRETA)", Power System Conference III Jun/69.
6. Koopmans, T.C. : "Water Storage Policy in a Simplified Hydroelectric System", First International Conference on Operational Research,

- p. 193-227. 1957. In : "Scientific Papers of T.C. Koopmans"  
Springer-Verlag, New York, 1970.
7. Lima, Wellington: "Operação Ótima de um Sistema Hidrotérmico pelo Método das Esperanças Marginais", Tese de Mestrado, COPPE / UFRJ, Programa de Engenharia de Produção, 1976.
8. Little, J.D.C.: "The Use of Storage Water in a Hydroelectric System", J. of the Operations Research of America , n.3  
p. 187-197, 1955.
9. Luenberger, D.G.: "Optimization by Vector Space Methods", John Wiley and Sons Inc., New York, 1969.
10. Munroe, M. E. : "Measure and Integration", Addison-Wesley Publ.Co.  
1971.
11. Pshenichnyi : "Necessary conditions for an Extremum", Academic Press, 1971.
12. Rockaffellar, R.T.: "Convex Analysis" , Princeton University Press, 1970.

## APÊNDICE

O objetivo desse apêndice é formular alguns conceitos e enunciar resultados gerais úteis em demonstrações ao longo do texto. Alguns resultados foram extraídos das duas referências básicas para o apêndice: Pshenichnyi [71] e Luenberger [69]. Os demais teoremas não constam da bibliografia pesquisada e são provados aqui.

A primeira parte do apêndice desenvolve resultados acerca de cones duais de conjuntos convexos. Na segunda estudam-se funcionais convexos e subdiferenciais. Um teorema de otimalidade para problemas convexos, devido a Pschenichnyi, e um teorema de integração por partes são expostos nas duas últimas partes. Este último teorema é baseado em um resultado de Munroe [71].

### Conjuntos e Cones Convexos

Sejam  $E$  um espaço de Banach sobre o corpo dos reais,  $E^*$  o seu espaço dual e  $C \subset E$  um conjunto. O conjunto  $C$  é convexo se  $\forall x^1, x^2 \in C \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in C$$

Um conjunto  $K \subset E$  é um cone se para  $x \in K$  e  $\lambda > 0$  resulta  $\lambda x \in K$ .

Sejam  $C \subset E$  convexo e  $\bar{x} \in C$ . O cone radial de  $C$  em  $\bar{x}$ , denotado  $D(C, \bar{x})$ , é o conjunto:

$$D(C, \bar{x}) = \{\eta \in E \mid (\forall \lambda > 0) \bar{x} + \lambda \eta \in C\}$$

O cone dual de  $C$  em  $\bar{x}$ , denotado  $K(C, \bar{x})$  é o conjunto:

$$K(C, \bar{x}) = \{p \in E^* \mid (\forall x \in C) p(x - \bar{x}) \geq 0\}$$

Pode-se verificar a identidade

$$K(C, \bar{x}) = K(D(C, \bar{x}), 0)$$

Pshenichuyi [71] apresenta as seguintes propriedades de  $D(C, \bar{x})$  e  $K(C, \bar{x})$ .

1 Lema Sejam  $C \subset E$  convexo e  $\bar{x} \in C$ , Então:

- a)  $D(C, \bar{x})$  e  $K(C, \bar{x})$  são cones convexos em  $E$  e  $E^*$  respectivamente,
- b)  $\eta \in \overline{D(C, \bar{x})}$  se e somente se  

$$p(\eta) \geq 0 \quad \forall p \in K(C, \bar{x})$$
- c) se  $\eta$  é ponto interior de  $D(C, \bar{x})$  então  

$$p(\eta) > 0 \quad \forall p \in K(C, \bar{x}), p \neq 0$$
- d)  $K(C, \bar{x})$  é fracamente fechado.

Em aplicações a Programação Matemática são bastante Úteis resultados envolvendo cones duais de conjuntos obtidos pela soma, interseção e operação de outros conjuntos, O primeiro teorema apresentado é devido a Luenberger [69].

2 Teorema Sejam  $E, F$  espaços normados e  $A: E \rightarrow F$  uma transformação linear contínua. Então, se  $C \subset E$  é convexo,  $\bar{y} = A\bar{x}$  onde  $\bar{x} \in C$ , tem-se:

$$K(A[C], \bar{y}) = A^{*-1}(K(C, \bar{x}))$$

onde  $A^*$  é a adjunta de  $A$  e  $A^{*-1}$  representa a sua imagem inversa.

Prova Por definição de cone dual,  $p \in K(A[C], \bar{y})$  se e somente se  $(\forall x \in C)$

$$0 \leq p(A(x) - \bar{y})$$

$$= p(A(x - \bar{x}))$$

$$= A^*(p)(x - \bar{x}) \text{ por definição de adjunta, Ou seja, se}$$

e somente se

$$A^*(p) \in K(C, \bar{x}) \quad ||$$

O teorema seguinte estabelece o cone dual de um produto cartesiano,

**3 Teorema** Sejam  $E, F$  espaços normados e  $C \subseteq E, D \subseteq F$  convexos.

Se  $\bar{x} \in C$  e  $\bar{y} \in D$  então,

$$K(C \times D, (\bar{x}, \bar{y})) = K(C, \bar{x}) \times K(D, \bar{y})$$

Prova Seja  $(p, q) \in E^* \times F^*$ . Então, por definição de cone dual

$(p, q) \in K(C \times D, (\bar{x}, \bar{y}))$  se e somente se:  $(\forall x \in C) (\forall y \in D)$

$$p(x - \bar{x}) + q(y - \bar{y}) \geq 0$$

Como  $\bar{x} \in C$  e  $\bar{y} \in D$ , então a expressão acima equivale a:

$$p(x - \bar{x}) \geq 0$$

$$q(y - \bar{y}) \geq 0$$

ou seja

$$p \in K(C, \bar{x})$$

$$q \in K(D, \bar{y}) \quad ||$$

O próximo resultado é consequência imediata dos Teoremas (2) e (3).

4 Corolário Sejam  $E$  espaço normado e  $B, C \subset E$  convexos e  $\bar{x} \in C$ ,  $\bar{y} \in D$ . Então,

$$K(C+D, \bar{x}+\bar{y}) = K(C, \bar{x}) \cap K(D, \bar{y})$$

Prova Seja  $A: E \times E \rightarrow E$  a função soma em  $E$ . Evidentemente,  $A$  é linear e contínua. Além disso,  $A^*: E^* \rightarrow E^* \times E^*$  é a função

$$A^*(p) = (p, p)$$

Tem-se que:

$$C + D = A(C \times D)$$

Logo, pelo Teorema (2), resulta

$$\begin{aligned} K(C+D, \bar{x}+\bar{y}) &= K(A(C \times D), \bar{x}+\bar{y}) = \\ &= A^{*-1} K(C \times D, (\bar{x}, \bar{y})) \end{aligned}$$

Ou seja,  $p \in K(C+D, \bar{x}+\bar{y})$  se e somente se

$$(p, p) = A^*(p) \in K(C \times D, (\bar{x}, \bar{y}))$$

Mas, pelo Teorema (3), pode-se concluir que

$$K(C \times D, (\bar{x}, \bar{y})) = K(C, \bar{x}) \times K(D, \bar{y})$$

Logo,  $p \in K(C+D, \bar{x}+\bar{y})$  se e somente se

$$p \in K(C, \bar{x}) \quad \text{e} \quad p \in K(D, \bar{y})$$

provando o corolário, ||

O teorema seguinte caracteriza o cone dual de uma clas

se de subconjuntos convexos de  $(L^2[0, T])^n$ , o resultado pode contudo ser generalizado para outros espaços de funções,

5 Teorema Seja  $\Gamma: [0, T] \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$  um operador ponto conjunto tal que  $\Gamma(t)$  é convexo  $\forall t \in [0, T]$  q.t.p. e considere-se o conjunto:

$$X = \{x \in (L^2[0, T])^n \mid x(t) \in \Gamma(t), \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}\}$$

Se  $\bar{x} \in X$  então,  $p \in K(X, \bar{x})$  se e somente se

$$p(t) \in K(\Gamma(t), \bar{x}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

Prova: Se

$$p(t) \in K(\Gamma(t), \bar{x}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

e  $x \in X$ , então:

$$\langle p(t), x(t) - \bar{x}(t) \rangle \geq 0 \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$$

pois  $x(t) \in \Gamma(t) \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p.}$

Logo, integrando, resulta:

$$\langle p, x - \bar{x} \rangle = \int_0^T \langle p(t), x(t) - \bar{x}(t) \rangle dt \geq 0$$

provando que  $p \in K(X, \bar{x})$ .

Sejam  $p \in K(X, \bar{x})$  e  $x \in X$ . Defina-se

$$Z = \{t \in [0, T] \mid \langle p(t), x(t) - \bar{x}(t) \rangle < 0\}$$

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \in Z \\ \bar{x}(t) & \text{se } t \notin Z \end{cases}$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^T \langle p(t), \hat{x}(t) - \bar{x}(t) \rangle dt \\ &= \int_Z \langle p(t), x(t) - \bar{x}(t) \rangle dt \end{aligned}$$

o que implica que a medida de  $Z$  é nula, Logo,

$$p(t) \in K(F(t), \bar{x}(t)) \quad \forall t \in [0, T] \text{ q.t.p. } \parallel$$

Um resultado dos mais difíceis de ser deduzido envolve o cálculo do cone dual da interseção de dois conjuntos convexos. Intuitivamente, o cone dual da interseção de dois convexos seria a soma dos cones duais dos conjuntos. Contudo, o contraexemplo abaixo destrói esta conjectura.

Sejam  $C, B \subset \mathbb{R}^2$  dados por:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0\}$$

$C$  e  $B$  são convexos e sua interseção é constituída pela origem, Portanto,

$$K(C \cap B, 0) = \mathbb{R}^2$$

Contudo, tem-se:

$$K(C, 0) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \geq 0, p_2 = 0\}$$

$$K(B, 0) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \leq 0, p_2 = 0\}$$

e portanto

$$K(C, 0) + K(B, 0) = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid p_2 = 0\}$$

Poder-se-ia garantir a conjectura feita acima com a hipótese dos interiores dos conjuntos possuírem interseção não vazia. A hipótese adotada no teorema abaixo é mais fraca dificultando porém a prova,

6 Teorema Sejam  $C$  e  $B$  subconjuntos convexos de um espaço de Banach  $E$ , tais que  $C$  intercepta o interior de  $B$ . Então, se  $\bar{x} \in C \cap B$ , tem-se

$$K(C \cap B, \bar{x}) = K(C, \bar{x}) + K(B, \bar{x})$$

Prova Se  $p^1 \in K(C, \bar{x})$  e  $p^2 \in K(B, \bar{x})$  então:

$$p^1(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in C$$

$$p^2(y - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall y \in B$$

Portanto,  $\forall x \in C \cap B$

$$0 \leq p^1(x - \bar{x}) + p^2(x - \bar{x}) = (p^1 + p^2)(x - \bar{x})$$

Logo,

$$K(C, \bar{x}) + K(B, \bar{x}) \subset K(C \cap B, \bar{x})$$

Prova-se a inclusão inversa em duas partes, Inicialmente mostra-se que  $X = K(C, \bar{x}) + K(B, \bar{x})$  é fracamente fechado, Na parte b), a hipótese de absurdo  $K(C \cap B, \bar{x}) \neq K(C, \bar{x}) + K(B, \bar{x})$  é convertida por meio de um teorema de separação, em

$$\overline{D(C \cap B, \bar{x})} \neq \overline{D(C, \bar{x})} \cap \overline{D(B, \bar{x})}$$

A partir daí, manipulam-se apenas os cones radiais.

Parte a) Por absurdo, suponha que  $\bar{p}$  é fracamente aderente a  $X$

mas  $\bar{p} \notin X$ . Então existem  $p_1^k \in K(C, \bar{x})$  e  $p_2^k \in K(B, \bar{x})$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tais que  $p_1^k + p_2^k$  converge fracamente a  $\bar{p}$ . Como  $K(C, \bar{x})$  e  $K(B, \bar{x})$  são fracamente fechados (ver Lema (1)), então, se  $p_1^k$  ou  $p_2^k$  admitirem subsequências fracamente convergentes, resulta que:

$$\bar{p} = \lim_k p_1^k + p_2^k \in K(C, \bar{x}) + K(B, \bar{x})$$

Logo,  $(p_1^k)$  e  $(p_2^k)$  não admitem subsequências fracamente convergentes, podendo-se afirmar

$$\lim_{k \in \mathbb{N}} \|p_i^k\| = +\infty$$

e que essas sequências possuem um número finito de termos nulos,

Sejam  $\tilde{p}_1^k, \tilde{p}_2^k \in E^*$  dados por:

$$\tilde{p}_i^k = v^k p_i^k \quad i = 1, 2 \quad k \in \mathbb{N}$$

onde

$$v^k = \text{Min}\{1/\|p_1^k\|, 1/\|p_2^k\|\}$$

Então, como  $v^k > 0$  tem-se:

$$p_1^k \in K(C, \bar{x}) \quad \text{e} \quad \tilde{p}_2^k \in K(B, \bar{x})$$

Além disso, como  $(p_i^k)$  é não limitada então  $\lim_{k \in \mathbb{N}} v^k = 0$ .

Como  $\forall k \in \mathbb{N} \quad i=1, 2$  tem-se:

$$\|\tilde{p}_i^k\| = v^k \|p_i^k\| \leq 1$$

então, as sequências  $(\tilde{p}_i^k)$   $i=1, 2$ . são limitadas e portanto admitem subsequências fracamente convergente. Sem perda de generalidade pode-se supor portanto que  $(\tilde{p}_i^k)$  converge fracamente a  $\tilde{p}_1 \in K(C, \bar{x})$  e  $(\tilde{p}_2^k)$  converge fracamente a  $\tilde{p}_2 \in K(B, \bar{x})$ . Mas, nesse caso

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 &= \lim_{k \in \mathbb{N}} (\tilde{p}_1^k + \tilde{p}_2^k) \\
&= \lim_{k \in \mathbb{N}} v^k (p_1^k + p_2^k) \\
&= \lim_{k \in \mathbb{N}} v^k \cdot \lim_{k \in \mathbb{N}} (p_1^k + p_2^k) \\
&= 0 \cdot \bar{p} = 0
\end{aligned}$$

Mas,  $\|\tilde{p}_1\| + \|\tilde{p}_2\| \neq 0$  pois para cada  $k \in \mathbb{N}$

$$\|\tilde{p}_1^k\| = 1 \quad \text{ou} \quad \|p_2^k\| = 1$$

Seja  $x \in C$ ,  $x$  pertencente ao interior de  $B$ . Então, pelo Lema 1, vale

$$\tilde{p}_2(x - \bar{x}) > 0$$

o que por (7) implica

$$\tilde{p}_1(x - \bar{x}) < 0$$

contradizendo  $\tilde{p} \in K(C, \bar{x})$ . Logo,  $X$  é fracamente fechado.

Parte b) Suponha por absurdo que existe  $\bar{p}$  em  $K(C \cap B, \bar{x})$  não pertencente a  $X$ . Então, como  $X$  é convexo e fracamente fechado, existe (ver Pshenichnyi [71], pg. 26)  $\eta \in E$  tal que:

$$\bar{p}(\eta) < p^1(\eta) + p^2(\eta)$$

$$\forall p^1 \in K(C, \bar{x}) \quad \forall p^2 \in K(B, \bar{x})$$

Como  $0 \in K(C, \bar{x}) \cap K(B, \bar{x})$  então:

$$\bar{p}(\eta) < 0$$

Como  $K(C, \bar{x})$  e  $K(B, \bar{x})$  são cones, então:

$$9 \quad p^1(\eta) \geq 0 \quad p^2(\eta) \geq 0 \quad \begin{array}{l} \forall p^1 \in K(C, \bar{x}) \\ \forall p^2 \in K(B, \bar{x}) \end{array}$$

Logo,

$$10 \quad \eta \in \overline{D(C, \bar{x})} \cap \overline{D(B, \bar{x})}$$

Sejam  $x \in C$ ,  $x$  no interior de  $B$  e  $\bar{\eta} = x - \bar{x}$ . Então, como  $\bar{\eta} \in D(C \cap B, \bar{x})$ , tem-se:

$$\bar{p}(\bar{\eta}) \geq 0$$

o que devido a (8) implica

$$11 \quad \eta \neq \bar{\eta}$$

Mostra-se em seguida que

$$12 \quad \eta \in \overline{D(C \cap B, \bar{x})}$$

contradizendo (8).

Seja  $\nu > 0$  tal que:

$$13 \quad y \in B \quad \forall y \in E / \|y - x\| < \nu$$

Sejam  $r > 0$  e

$$\delta = \frac{r \nu}{\nu + 2 \|\bar{\eta} - \eta\|} > 0$$

Devido a (10), existem

$$\eta^1 \in D(C, \bar{x}) \quad \text{e} \quad \eta^2 \in D(B, \bar{x})$$

tais que

$$14 \quad \|\eta - \eta^1\| \leq \delta$$

$$\|\eta - \eta^2\| \leq \delta$$

Defina-se

$$15 \quad \lambda = \frac{\|\eta^2 - \eta^1\|}{v + \|\eta^2 - \eta^1\|}$$

Então,  $\lambda \in [0, 1]$ ,

Devido a (13),

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \bar{\eta} + (\eta^1 - \eta^2) \frac{v}{\|\eta^1 - \eta^2\|} \in D(B, \bar{x}) \\ &= \bar{\eta} + \frac{1-\lambda}{\lambda} (\eta^1 - \eta^2) \end{aligned}$$

e como este cone  $\bar{e}$  é convexo e  $\eta^2 \in D(B, \bar{x})$  então:

$$\lambda \bar{\eta} + (1-\lambda) \eta^2 \in D(B, \bar{x})$$

Mas:

$$\begin{aligned} \lambda \bar{\eta} + (1-\lambda) \eta^2 &= \eta^2 + \lambda (\bar{\eta} - \eta^2) \\ &= \eta^2 + \lambda \left( \bar{\eta} + \frac{1-\lambda}{\lambda} (\eta^1 - \eta^2) - \eta^2 \right) \\ &= \lambda \bar{\eta} + (1-\lambda) \eta^1 \\ &\in D(C, \bar{x}) \end{aligned}$$

pois este cone também é convexo e  $\bar{\eta}, \eta^1 \in D(C, \bar{x})$ .

Portanto,

$$\lambda \bar{\eta} + (1-\lambda) \eta^1 \in D(C, \bar{x}) \blacksquare D(B, \bar{x})$$

Contudo, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\eta - (\lambda \bar{\eta} + (1-\lambda) \eta^1)\| &= \|\lambda(\bar{\eta} - \eta) + (1-\lambda)(\eta^1 - \eta)\| \\ &\leq \|\bar{\eta} - \eta\| + (1-\lambda) \|\eta^1 - \eta\| \\ &< \|\bar{\eta} - \eta\| + 6 \text{ devido a (14)} \\ &= \frac{2\delta}{v} \|\bar{\eta} - \eta\| + 6 \text{ por (14) e (15)} \\ &= r \text{ por def. de } \delta \end{aligned}$$

Logo,  $(\forall r > 0) (\exists \hat{\eta} \in D(C, \bar{x}) \cap D(B, \bar{x}))$

tal que

$$\|\eta - \hat{\eta}\| < r$$

provando que

$$\eta \in \overline{D(C, \bar{x}) \cap D(B, \bar{x})}$$

Mas esta condição implica em (12) pois:

$$D(C, \bar{x}) \cap D(B, \bar{x}) \subset D(C \cap B, \bar{x})$$

De fato, se  $\tilde{\eta} \in D(C, \bar{x}) \cap D(B, \bar{x})$  então existem  $\lambda, \beta > 0$

tais que:

$$\bar{x} + \lambda \tilde{\eta} \in C$$

$$\bar{x} + \beta \tilde{\eta} \in B$$

Logo, pela convexidade de C e B resulta que  $v = \min\{\lambda, \beta\}$

satisfaz

$$\bar{x} + v \tilde{\eta} \in C \cap B$$

provando a inclusão acima. ||

### Funcionais Convexos em um Espaço de Banach

Sejam E um espaço de Banach sobre o corpo dos reais e  $E^*$  o seu espaço dual, Um funcional  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  é convexo se  $\forall x^1, x^2 \in E, \forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$$

O funcional f é limitado superiormente em E se para todo conjunto limitado X de E o conjunto  $f(X)$  é limitado superiormente, O epigrafo

de  $f$ , denotado  $\text{Epi } f$ ,  $\bar{e}$  o conjunto

$$\text{Epi } f = \{(\alpha, x) \in \mathbb{R} \times E \mid \alpha \geq f(x)\}$$

O resultado seguinte encontra-se provado em Luenberger [69].

**16 Teorema** Se  $f$   $\bar{e}$  um funcional convexo em  $E$  então,  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$   $\bar{e}$  um ponto do interior relativo de  $\text{Epi } f$  se e somente se  $f$   $\bar{e}$  contínua em  $\bar{x}$ ,

O corolário seguinte fornece outra caracteriza o de funcionais convexos contínuos em  $E$ ,

**17 Corolário** Se  $f$   $\bar{e}$  um funcional convexo em  $E$  então  $f$   $\bar{e}$  contínuo em  $E$  se e somente se  $f$   $\bar{e}$  limitado superiormente em  $E$ .

Prova A primeira implica o  $\bar{e}$  imediata pois se  $f$   $\bar{e}$  contínua e  $X \subset E$   $\bar{e}$  limitado então  $f(X)$   $\bar{e}$  limitado.

Suponha agora  $f$  limitado superiormente e considere-se  $\bar{x} \in E$ . Através do teorema (16) basta mostrar-se que existe  $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$  tal que  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$   $\bar{e}$  ponto do interior relativo de  $\text{Epi } f$ , Seja:

$$X = \{x \in E \mid \|x - \bar{x}\| \leq 1\}$$

então, como  $X$   $\bar{e}$  limitado, existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\beta \geq f(x) \quad \forall x \in X$$

ou seja  $(\beta, x) \in \text{Epi } f \quad \forall x \in X$

Seja  $\bar{\alpha} = \beta + 1$ , Então,

$$\forall \alpha \in [\bar{\alpha} - 1, \bar{\alpha} + 1] \quad \forall x \in X$$

$$\alpha \geq \beta \geq f(x)$$

provando que  $(\bar{\alpha}, \bar{x})$  é ponto interior de  $\text{Epi } f$ . ||

### Subdiferenciais de Funcionais Convexos

Seja  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional;  $p \in E^*$  é subgradiente de  $f$  em  $\bar{x} \in E$  se  $\forall x \in E$

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + p(x - \bar{x})$$

A subdiferencial de  $f$  é a aplicação ponto conjunto  $\partial f: E \rightarrow P(E^*)$  que associa a cada  $\bar{x} \in E$  o conjunto de todos os subgradientes de  $f$  em  $\bar{x}$ . Em particular, a subdiferencial de  $f$  pode ser vazia em pontos de  $E$ . Pshenichnyi [71] provou que funcionais convexos contínuos admitem subdiferenciais com propriedades relevantes.

**18 Teorema** Se  $f$  é um funcional convexo contínuo então para cada  $\bar{x} \in E$ ,  $\partial f(\bar{x})$  é não vazio, convexo e fracamente compacto,

Funcionais que admitem subdiferenciais não vazias em todo  $E$  são ditos subdiferenciáveis. O teorema seguinte caracteriza a subdiferencial da composição de funcionais convexos e transformações lineares,

**19 Teorema** Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach,  $A: E \rightarrow F$  uma transformação linear contínua e  $f: F \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional convexo contínuo. Então, o funcional  $g: E \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$g(x) = f(A(x)) \quad \forall x \in E$$

é convexo contínuo e

$$\partial g(\bar{x}) = A^*[\partial f(A(\bar{x}))]$$

Prova Ver Pshenichnyi [71] pg. 51.

Uma Condição de Otimalidade para Problemas Convexos

Sejam  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional convexo contínuo e  $X \subset E$  um conjunto convexo. Considere-se o problema:

$$20 \quad \begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) \\ x \in X \end{array}$$

Pshenichnyi [71] demonstrou a seguinte condição de otimalidade para o problema (20).

21 Teorema Um ponto  $\bar{x} \in X$  resolve o problema (20) se e somente se

$$\partial f(\bar{x}) \cap K(X, \bar{x}) \neq \emptyset$$

Integração por Partes

O teorema seguinte é uma consequência imediata de um resultado de Munroe [71], pg. 211; consiste no teorema de integração por partes para a integral de Lebesgue-Stieltjes,

22 Teorema Sejam  $T > 0$ ,  $p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  função de variação limitada contínua a direita e  $\eta \in L^2[0, T]$ . Então,

$$\int_0^T p(t) \eta(t) dt + \int_0^T \int_0^t \eta dp(t) = p(T) \int_0^T \eta$$