RECOBRIMENTO CONTÍNUO ÓTIMO

Antonio Alberto Fernandes de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

Aprovada por:

Prof. Clóvis Caesar Gonzaga
(Presidente)

Prof. Ronaldo C.Marinho Persiano

Prof. Carlos Humes Júnior

Prof. Pedro Nowosad

Prof. Claudio T. Bornstein

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1979

DE OLIVEIRA, ANTONIO ALBERTO FERNANDES

RECOBRIMENTO CONTÍNUO ÓTIMO (RIO DE JANEIRO) 1979.

viii,234p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1979)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Otimização I. COPPE/UFRJ II.Título (série).

Antonio Alberto Fernandes de Oliveira, que considera absolutamente desnecessária essa "biografia", nasceu no Rio de Janeiro a 7 de maio de 1949. Em 1973 formou-se em Engenharia Eletrônica pela UFRJ porém nunca exerceu essa profissão. Nesse mesmo ano entrou para a COPPE mas foi no IMPA em 1974 que obteve o Mestrado. Começou o doutorado na COPPE em 1975 quando ingressou no seu quadro docente e se mais não fez digno de registro, atribua-se a falta de tempo, dinheiro e aptidão.

A meus pais e tia,
a Ana Maria e a Me
mória de minha Avó.

AGRADECIMENTOS

- As pessoas que me suportaram nos momentos de insegurança e frustração que caracterizam as crises inerentes aos trabalhos de tese.

- Ao Professor Cláudio T. Bornstein que suportou resignado a sobrecarga de trabalho na linha de Planejamento Agropecuário que lhe trouxe meu envolvimento com esta tese.

- Aos Professores Clóvis C. Gonzaga e Ronaldo C. Marinho Persiano que aceitaram minha proposta de tese, aguentaram minhas preleções e ainda contribuiram com sugestões relevantes para o trabalho.

- Ao Professor Nelson Maculan Filho que propiciou minha vinda para a COPPE que acabou dando nesta tese.

- Ao Professor Carlos Humes Júnior cuja tarefa de ser membro da banca começou efetivamente seis meses antes do dia da defesa.

- Ao Professor Pedro Nowosad e outros docentes do IMPA pela colaboração que me prestaram no decorrer deste trabalho.

- A datilografia muito boa da Angela principalmente e da Daisy.

RESUMO

São tratados neste trabalho os problemas de otimização que podem ser colocados no formato de I e II dados abaixo.

$$\min \sum_{i=1}^{k} c(y_i)$$

(I) $$\text{suj.a} : G(y) = \sup_{x\varepsilon X}\{ \min_{i\varepsilon \overline{1,k}} \{g_i(x,y)\}\} \leq 0$$

$$\text{e} \quad y \varepsilon Y$$

(II) $$\min_{y\varepsilon Y}\{\max_{x\varepsilon X}\{ \min_{i\varepsilon \overline{1,k}} \{g_i(x,y)\}\}\}$$

onde X é um conjunto compacto e c e g são funções contínuas.

Inicialmente são obtidas expressões para as derivadas unidirecionais de função G dada acima, considerando-se cinco situações distintas. A partir dessas expressões se obtem então condições necessárias de otimalidade para os problemas I e II.

Adicionalmente é apresentado ainda um teorema de função implícita seguindo-se uma de suas aplicações.

ABSTRACT

Here we give an analytical treatment to the optimization problems which can be formulated as I or II as follows:

$$\min \sum_{i=1}^{k} c(y_i)$$

(I) subject to: $G(y) = \sup_{x \varepsilon X}\{ \min_{i \varepsilon \overline{1,k}} \{g_i(x,y)\}\} \leq 0$

and $y \varepsilon Y$

(II) $\min_{y \varepsilon Y}\{\max_{x \varepsilon X}\{ \min_{i \varepsilon \overline{1,k}}\{g_i(x,y)\}\}\}$

In both cases X is a compact set and c and g are continuous functions.

First we develop expressions for the directional derivatives of the function G, given above considering five distinct cases. From these expressions necessary otimality criteria for the problems I and II are then obtained.

In addition an implicit function theorem is also presented followed by one of its applications.

ÍNDICE

Notação Utilizada

A seguir se encontram listadas todas as notações empregadas que se considerou passíveis de causar alguma espécie de dúvida. Convém lembrar ainda que parte da notação empregada será introduzida no decorrer do texto.

1. $f'(x,v)$ = derivada unidirecional de função f em x segundo o vetor v
2. $f(\bar{x},.)$ = restrição de função f a $x = \bar{x}$.
3. S' = fronteira do conjunto S.
4. $\dot{S}'$ = interior relativo do conjunto S.
5. $[S]'$ = variedade linear gerada pelo conjunto S.
6. $\underline{\lim}\, a_n$ = limite inferior da sequência a_n
7. $\overline{\lim}\, a_n$ = limite superior da sequência a_n

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1.

Chamam-se problemas de determinação do recobrimento ótimo aqueles que podem ser colocados na forma:

$$\min f(y)$$
$$\text{sujeito a: } \sup_{\substack{x\varepsilon X \\ y\varepsilon Y}} \{\inf_{z\varepsilon Z} \{g(z,x,y)\}\} \leq 0 \qquad (1)$$

Entre esses problemas se pode incluir mediante uma simples adaptação o de recobrimento mínimo que é expresso por:

$$\min \{\sup_{x\varepsilon X} \{\inf_{z\varepsilon Z} \{g(z,x,y)\}\}\}$$
$$\text{sujeito a: } y \; \varepsilon \; Y \qquad (2)$$

Se todos os conjuntos que aparecem nesses problemas forem finitos então eles podem ser tratados diretamente por uma série de algoritmos combinatórios já bastante desenvolvidos. Os mais conhecidos desses algoritmos são aqueles que empregam técnicas de programação inteira bivalente.

Suponha agora que apenas a variável y é contínua mantendo-se X e Z finitos. Nesse caso o problema 2 quando g e $\partial g/\partial y$ são contínuas e $Y = \mathbb{R}^q$ pode ser tratado pelo método apresentado por Demyanov em | 1 |. Esse método é do tipo "steepest descent" podendo ser descrito mais detalhadamente da seguinte forma: Assuma que na k^{a} iteração do algoritmo se te nham obtido o vetor $y_k \in Y$ e dois parâmetros do algoritmo $\varepsilon_k > 0$ e $\delta_k > 0$. Considere então

$$G: Y \to \mathbb{R} \,|\, G(y) = \max_{x \in X} \{\min_{z \in Z} g(z,x,y)\}$$

chamada função de recobrimento de X em y e os mapeamentos

$$M_\varepsilon: Y \to X \,|\, M_\varepsilon(y) = \{x \in X \,|\, \min_{z \in Z} g(z,x,y) \geq$$

$$G(y) - \varepsilon\} \; \cancel{\forall}\varepsilon \geq 0 \quad \text{e} \quad m_o: X \times Y \to \overline{1,K} \;|$$

$$m_o(x,y) = \{z \in Z \quad \text{que resolvem}$$

$$\min_{z \in Z} \{g(z,x,y)\}\}$$

Se y_k satisfaz a uma condição de otimalidade como por exemplo: "Existem famílias ($z_x \in m_o(x,y)$, $x \in M_o(y)$) e ($\lambda_x \geq 0$; $x \in M_o(y)$) tais que

$$\sum_{x \in M_o(y)} \lambda_x > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{x \in M_o(y)} \lambda_x \frac{\partial g}{\partial y} (z_x, x, y_k) = 0\text{"} \tag{3}$$

então pare.

Em caso contrário resolva

$$\max_{d \in S(0,1)} G'_{\varepsilon_k} (y_k, d) \tag{4}$$

onde

$$G'_{\varepsilon_k}(y_k,d) = \max_{x \varepsilon M_\varepsilon(y)} \{ \min_{z \varepsilon m_0(x,y)} \{\frac{\partial g}{\partial y}(z_x, x, y_k).\ d\}\}.$$

$G'_{\varepsilon_k}(y_k,d)$ é uma superestimativa da derivada unidirecional $G'(y_k,d)$ que pode ser obtida substituindo-se na expressão acima $M_\varepsilon(y)$ por $M_0(y)$. Usando-se $G'_{\varepsilon_k}(y_k,d)$, que inclui na sua expressão avaliações efetuadas nos pontos de X ditos ε-ativos , ao invés da própria derivada unidirecional se procura garantir que se o algoritmo gerar uma sequência infinita (y_k) qualquer ponto de acumulação dessa sequência satisfará a condição 3. Observe entretanto que essa condição é necessária mas não suficiente para garantir a otimalidade local.

Se

$$\max_{d \varepsilon S(0,1)} G'_{\varepsilon_k}(y_R,d) > \delta_k \tag{5}$$

faça $\varepsilon_k = \varepsilon_k/2$, $\delta_k = \delta_k/2$ (6) e resolva 4 para o novo valor de ε. Se 5 ainda se verificar devida outra vez ε_k e δ_k por 2 resolva de novo 4 e assim por diante. Pode ser verificado que 5 não se repete uma infinidade de vezes.

Quando 5 não ocorrer tome um vetor d_k ótimo para 4 e determine uma solução λ_k de

$$\min_{\lambda \varepsilon [0,\infty)} \{\max_{x \varepsilon X} \{\min_{z \varepsilon Z} \{g(z,x,y_k + \lambda_k\ d_k)\}\}\} \tag{7}$$

ou verifique que esse problema é ilimitado inferiormente. Nesse último caso o mesmo acontecerá com 2.

Existindo λ_k como dado anteriormente, faça $y_{k+1} = y_k + \lambda_k d_k$ e repita todo o processo indicado com $k+1$ no lugar de k. Sob certas condições a determinação de λ_k como solução exata de 7 pode ser substituida por um passo do método de Armijo.

Imagine agora que além de y, x também é contínua (Z continua finito). Suponha ainda que além das condições já estabelecidas (g e $\frac{\partial g}{\partial y}$ contínuas e $Y = \mathbb{R}^q$) se tenha X compacto $\subseteq \mathbb{R}^p$ para evitar que G(y) seja $+\infty$ ou M_0 perca a semicontinuidade superior.

Para se poder pensar em construir um algoritmo tipo "steepest descent" como o método de Demyanov para o problema 2 com essas especificações as seguintes dificuldades precisam ser contornadas.

A) Determinar que condições sobre a função g e o conjunto X precisam ser impostas de forma a garantir a existência de derivadas unidirecionais para G e expressar essas derivadas como função apenas de y e da direção. A expressão

$$\max_{x \varepsilon M_0(y)} \{ \min_{z \varepsilon m_0(x,y)} \{(\frac{\partial g}{\partial y}(z_x, x, y_k).d\}\} \tag{8}$$

que dava G'(y,d) no caso anterior e que era aproximada de forma conveniente no método de Demyanov não é mais válida.

B) Estabelecer algum tipo de condição de otimalidade para pôr no lugar de 3 que deixa de ser condição necessária para caracterizar um ótimo local uma vez que 8 não expressa mais G'(y,d).

Este trabalho tem por objetivo exatamente dar tratamento analítico aos problemas de recobrimento ótimo em que y, x e g são contínuas, X é compacto e Z finito de forma a levantar esses elementos indicados em A e B.

Inicialmente o problema de determinação de derivadas unidirecionais é tratado sob diferentes conjuntos de hipóteses. Cada um deles corresponde em geral, a um par de grupos de condições: um de condições sobre g e outro sobre X. Esses grupos de condições se complementam de forma a assegurar a existência das G'(y,d).

As expressões obtidas para essas derivadas generalizam, dentro do contexto em que se aplicam, um resultado clássico sobre diferenciação de funções extremas em que se indica como expressar as derivadas unidirecionais da função $\max_{x \in X} \{f(x,y)\}$ num ponto $\bar{y}$ se X é compacto e f satisfaz determinados requisitos (ver Pshenichnyi | 2 |).

Com base numa das fórmulas obtidas para G'(y,d) e com a ajuda de um teorema de otimalidade para problemas convexos são obtidas condições necessárias para caracterizar a otimalidade local nos problemas 1 e 2. Para o caso do problema 2 as condições obtidas podem ser consideradas uma extensão de 3.

Os problemas de recobrimento em que todas as variáveis são contínuas com X e Z compactos não serão abordados nesse trabalho. Embora uma parte dos resultados obtidos para o caso em que Z é finito sejam extensíveis sem maiores complicações a esse caso mais geral existem algumas situações de interesse (por exemplo: no caso em que g(•,•,z) é convexa $\forall y \in Y$ e $\forall z \in Z$ e X é um politopo) em que se precisa impor mais do que simples condições adicionais pouco restritivas para que se possa obter os elementos pretendidos. O algoritmo randômico proposto por Vachnadze e Propoi em |[3]| pode ser aplicado a esse caso.

I.2 - Duas Aplicações

Dois problemas de otimização que se enquadram dentro das formulações gerais dadas em 1 e 2 são os seguintes.

1º - Considere um sistema que possui duas espécies de controle (um inicial $y \in Y$ e outro permanente $z \in Z$) e imagine também que existe um parâmetro aleatório x que também influencia o desempenho (g) do sistema. O controle permanente Z é aplicado após a realização do evento aleatório representado por x enquanto a aplicação do controle inicial y é feita logicamente antes dessa realização.

Suponha ainda que a distribuição da variável x fixado y não seja conhecida mas que se tenha informações sobre o conjunto X dos possíveis valores de x. Nessas condições um tratamento em que dado y se considere a realização mais desfavorável de x se justifica e nessas condições o problema de otimizar o desempenho do sistema pode ser posto na forma

$$\max_{y \in Y} \{\min_{x \in X} \{\max_{z \in Z} g(x,y,z)\}\}$$

que é análoga a forma expressa em 2.

2º - Deseja-se instalar ou ampliar uma rede de facilidades (ambulatórios, grupos escolares, guarnições do corpo de bombeiros, etc) em uma região de forma que qualquer localidade dentro dessa região possa ser atendida por um posto assistencial localizado a uma distância menor que um determinado limite considerado razoável para o deslocamento de um usuário. De uma forma mais geral incluindo na medida do padrão de atendimento, outros fatores além da distância se pode dizer que se objetiva localizar e dimensionar os postos da rede de forma a garantir um nível de atendimento mínimo a qualquer ponto da região segundo um determinado critério (h).

Se a rede que se pretende obter é entre as que atendem a condição apresentada acima, aquela de custo de instalação (ou ampliação, ou manutenção, etc) mínimo então o problema pode ser colocado no seguinte formato

$$\min \sum_{i \in \overline{1,K}} c(y_i)$$

sujeito a:

$$\max_{x \in X} \{ \min_{i \in \overline{1,K}} \{h(x, y_i)\}\} \leq 0 \qquad (1)$$

$$y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_K) \in X^K \qquad \text{onde}$$

K é um limite superior para o número de componentes da rede , X é a região dada, y_i representa a localização e as dimensões da iª componente da rede e c é o custo de instalação (ou manutenção) de uma unidade.

Este problema se encaixa na formulação ge ral dada em I.1-1. Entretanto devido ao fato que uma discretização eficiente de X pode ser facilmente obtida (basta possuir um mapa da região) ele se presta mais a um tratamento inteiramente combinatório sendo apresentado aqui em especial porque se constitui numa concretização bastante imediata do problema apresentado em I.1-1.

Parte da terminologia empregada neste trabalho, provem desta aplicação.

Por exemplo os elementos do conjunto $M_0(y)$ como foi definido em I.1. são por vezes chamados de pontos pior atendidos.

Uma aplicação da teoria de diferenciação de funções max-min em teoria dos jogos é apresentado por Matsumoto |4|.

I.3 - Descrição do Trabalho

Como neste trabalho Z será sempre considerado finito vai-se substituí-lo daqui em diante por $\overline{1,K}$ e ao invés de se considerar no problema I.1-2 uma única função g dependente de três variáveis vai-se tomar um conjunto de funções g_i, $i \in \overline{1,K}$ que se aplicam a (x,y) apenas.

O problema I.1-1 será tratado especialmente na forma apresentada em I.2-1 só que não necessariamente se considera $Y = X^K$.

Tendo em vista essas considerações os problemas de recobrimento que serão abordados neste trabalho serão os que podem assumir uma das seguintes formas:

Problema I:

$$\min \sum_{i=1}^{K} c(y_i)$$

sujeito a:

$$\max_{x \varepsilon X} \{\min_{i \varepsilon \overline{1,K}} \{h(x,y_i)\}\} \leq 0$$

$$y = (y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_K) \ \varepsilon \ Y_1^K$$

Problema II:

$$\min_{y \varepsilon Y} \{\max_{x \varepsilon X} \{\min_{i \varepsilon \overline{1,K}} \{g_i(x,y)\}\}\}$$

As condições gerais sobre X as g_i, c e h comuns a todos os casos tratados são:

X compacto $\subseteq X_0$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^p$, $Y \subseteq Y_0$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^q$, p e q inteiros, g_i: $X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ contínua $\forall i \ \varepsilon \ \overline{1,K}$, Y_1 fechado $\subseteq Y_{1,0}$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^m$, c: $Y_{1,0} \to \mathbb{R}$ contínua e h: $X_0 \times Y_{1,0} \to \mathbb{R}$ também contínua.

O desenvolvimento do trabalho é efetuado da seguinte forma:

Inicialmente no Capítulo II se apresentam alguns resultados básicos que serão utilizados nesse capítulo e em posteriores nos processos de obtenção de derivadas unidi direcionais de G sob três conjuntos de hipóteses diferentes. Além disso é mostrado que sob um conjunto de condições comumente atendidas, as $G'(y,d)$ existem e são dadas por uma expressão $(\hat{G}'(y,d))$ análoga a apresentada por Demyanov em |5|.

No Capítulo III se estabelece que essa expressão análoga a de Demyanov dá o valor da $G'(y,d)$ em dois casos correlatos. No primeiro as restrições $g_i(\cdot,y)$ são côncavas e X é uma união finita de conjuntos convexos. Essa propriedade é exigida do complementar de X no segundo caso quando as $g_i(\cdot,y)$ são convexas. Em ambos os casos é requerido ainda que $g_i(x,\cdot)'(y,d)$ possa ser obtida por um limite uniforme em X(1).

Ao contrário do Capítulo III, no Capítulo IV são dados exemplos de classes de problemas de recobrimento em que as derivadas unidirecionais de G existem mas não são indicadas por $\hat{G}'(y,d)$.

Na parte inicial é estudado o caso em que $X \subseteq \mathbb{R}$ atende a uma condição de regularidade e as $g_i(\cdot,y)$ que sejam não-nulas possuem uma derivada de alguma ordem diferente de zero em todo ponto de $M_0(y)$.

Usando os resultados obtidos no estudo desse caso se mostra a seguir a existência das $G'(y,d)$ quando as g_i satisfazem 1, suas restrições $g_i(\cdot,y)$ são analíticas e $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é dado por um número finito de restrições também analíticas.

No Capítulo V condições de otimalidade para os problemas I e II são apresentadas. Essa apresentação também é dividida em duas partes. No caso tratado na primeira parte a exigência fundamental é que $G'(y,d) = \hat{G}(y,d)$ para qualquer direção d viável em Y no ponto y. Na outra parte se procura obter resultados mais específicos para quando as $g_i(\cdot,y)$ forem convexas ou, precisando melhor, para quando se verificarem as condições do segundo caso tratado no Capítulo III.

Finalmente no Capítulo VI é apresentado um teorema de função implícita seguindo-se uma aplicação dele dentro do contexto de problemas de recobrimento. Esste teorema se aplica a sistemas homogêneos, em que cada equação é dada por uma função convexa ou pela diferença de duas delas.

A continuação natural desse trabalho se dará com a construção de um algoritmo do tipo descrito em I.1 aproveitando parte do ferramental levantado aqui.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTOS

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados preliminares que serão utilizados posteriormente na determinação de derivadas unidirecionais para a função do recobrimento e de condições de otimalidade para os problemas dados no capítulo anterior. Os resultados iniciais se constituem basicamente no estabelecimento de limitações a direita e a esquerda para o quociente $\dfrac{G(y+h) - G(y)}{\|h\|}$ quando $h \to 0$ e G é a função de recobrimento. Um exemplo extremamente simples e apresentado com o intuito de mostrar que é necessário existir pelo menos um tipo de convexidade local nos pontos do conjunto a ser coberto para que se possa garantir, que o quociente acima tende para um único valor quando $h \to 0$ e $h/\|h\| \to d$. Além disso, é claro, determinadas condições de regularidade sobre as funções g_i devem ser requeridas para assegurar esse fato. Uma dessas condições é indicada ao final da seção. Ela permite assegurar uma espécie de estabilidade para um subconjunto dos pontos onde o atendimento é mais crítico quando se efetuam perturbações na variável cobertora. Os pontos pior cobertos que não se incluem nesse subconjunto são melhor atendidos por apenas uma das g_i podendo ser tratados separadamente utilizando-se um conhecido resultado sobre derivadas direcionais de uma função máximo (ver Pshenichnyi | 2 |).

Sob as condições estabelecidas neste capítulo é válida uma expressão para as derivadas unidirecionais da função de recobrimento que consiste na aplicação de um operador max-min sobre um argumento linear. Essa expressão se repetirá com pequenas alterações quando se tratar proximamente de casos um pouco mais complexos. Não é possível entretanto generalizá-la para todas as classes de problemas que serão abordados neste trabalho.

II.1 - Notação

Para uma série de conceitos já introduzidos no capítulo anterior se utilizará uma notação concisa. Essa notação bem como a terminologia empregada para referenciar cada um desses conceitos pode ser encontrada na lista abaixo:

1. $g(x,y) = \min\limits_{i=1,\dots,k} \{g_i(x,y)\}$ é a função melhor recobrimento de $\{x\}$ em y

2. $G(y) = \max\limits_{x \in X} \{g(x,y)\}$. G é chamada de função melhor recobrimento de X em y ou simplesmente função de recobrimento de X

3. $M_0(y) = \{x \in X \mid G(y) = g(x,y)\}$ $M_0(y)$ é referenciado por conjunto de pontos pior cobertos ou pior atendidos em y.

4. $m_0(x,y) = \{i \in \overline{1,k} \mid g(x,y) = g_i(x,y)\}$, $\overline{1,k} = \{1,\dots,k\}$ ..

   $m_0(x,y)$ é o conjunto de melhores coberturas de x em y ou das funções (coberturas) ativas em (x,y)

5. $L(y,d) = \{\ell \in R \mid \exists\,(h_n),\ h_n > 0\ \ \forall n,$

$$, \; h_n \to 0 \;\left|\; \frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell\right\}$$

II.2)

Com relação aos quatro conceitos indicados em II.1 existe uma série de resultados básicos que serão usados constantemente no decorrer deste estudo. Os que dizem respeito a algum tipo de continuidade foram reunidos na proposição a abaixo. Essa proposição será apresentada sem prova por-se considerar que as afirmações nela contidas são de simples constatação.

Proposição 1

Nas condições indicadas em I é verdade que:

a) As funções g e G são contínuas

b) Os mapeamentos m_o: X x Y $\to \overline{1,k}$ e M_o: Y $\to$ X são semi-contínuos superiormente.

c) Seja $H_{y,d} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$h \to \frac{G(y + hd) - G(y)}{h}$$

então $H_{y,d}$ é contínua e portanto L(y,d) é um intervalo fechado em $\bar{R}$

II-3)

Num exemplo simples em que a função G não tem derivadas unidirecionais devido a irregularidade do conjunto a ser coberto

Ex. 1:

Sejam

a) $X = \{1/_2 n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$

b) $g_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x, y_1, y_2) \to y_1 - x$

c) $g_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x, y_1, y_2) \to x - y_2$

d) $\tilde{y} = (4, -4)$

e) $d = (-1, +3)$

f) $h \geq 0$

Pode-se provar que com esses elementos o quociente $\dfrac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h}$ não tende a um único valor quando $h \to 0$ conforme mostra a figura a seguir.

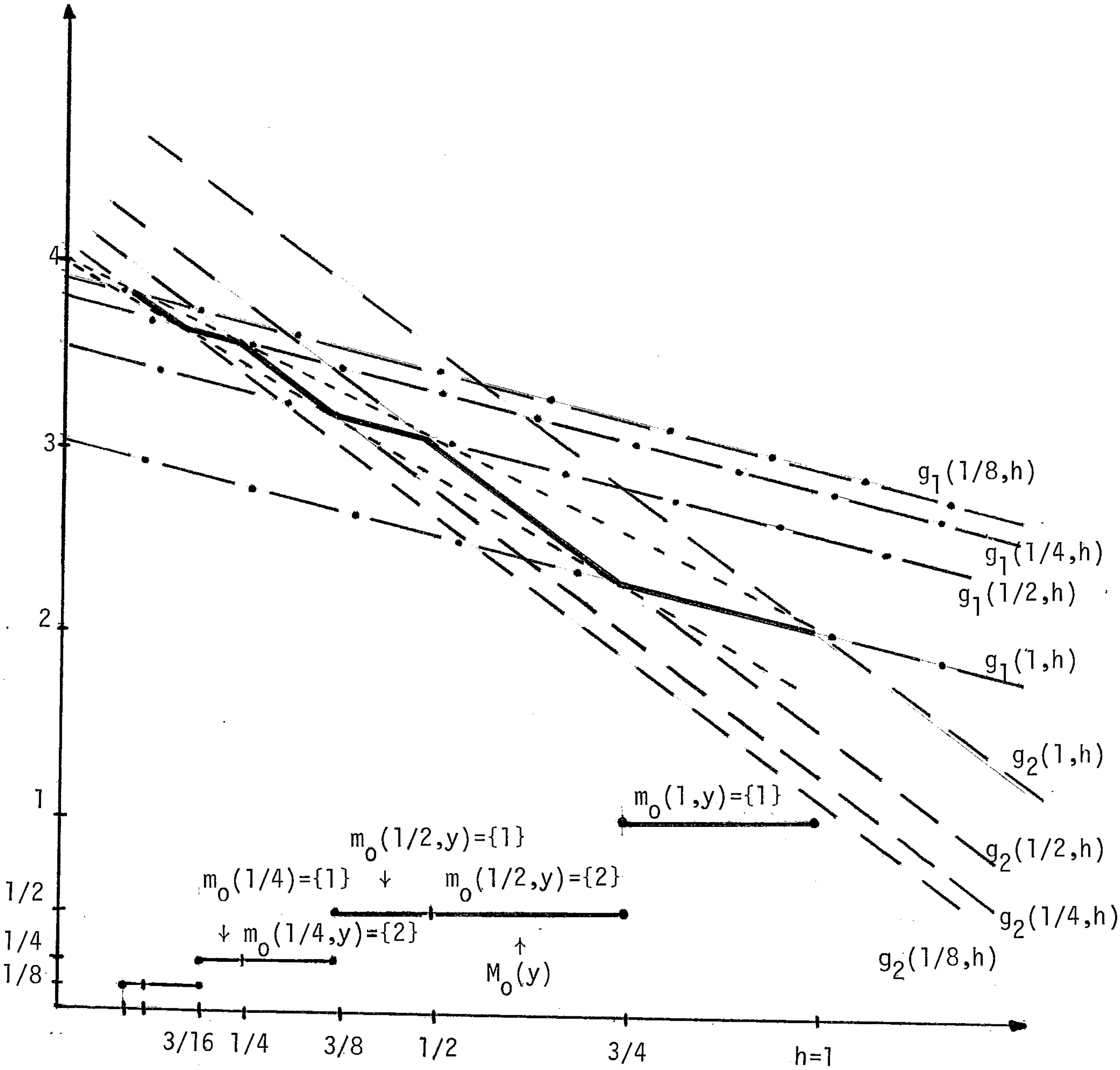


FIGURA 1

A figura 1 permite observar as oscilações que ocorrem na inclinação dos segmentos que constituem o gráfico de $G(\tilde{y} + hd)$ impedindo que a aproximação do ponto (0,4) se faça segundo uma única tangente. Essas oscilações resultam da alternância entre g_1 e g_2 como função ativa nos pontos de $M_o(\tilde{y} + hd)$ o que é ocasionado pela própria descontinuidade do conjunto X.

Para expressar precisamente em termos numéricos esse comportamento irregular de G pode-se tomar duas sequências

$h_n^1 = 2^{-n}$ e $h_n^2 = 3 \quad 2^{-(n+1)}$ $n \in N$ e

computar $H_{\tilde{y},d}\ (h_n^1) = \dfrac{G(\tilde{y} + h_n^1\ d) - G(\tilde{y})}{h_n^1}$ $i = 1,2$

Para (h_n^1) teremos $M_o(\tilde{y} + h_n^1\ d) = \{h_n^1\}$ e

$g_1(h_n^1,\ \tilde{y} + h_n^1\ d) = g_2(h_n^1,\ \tilde{y} + h_n^1\ d)$

$G\ (\tilde{y} + h_n^1\ d)$ valerá nesse caso

$(4 - 2\ h_n^1)$ e portanto $H_{\tilde{y},d}\ (h_n^1) = -2\ \forall n \in N$

Para (h_n^2) ficaremos $M_o(\tilde{y} + h_n^2\ d) = \{2^{-(n-1)},\ 2^{-n}\} =$

$\{\frac{2}{3}\ h_n^2,\ \frac{4}{3}\ h_n^2\}$ $m_o(\ \frac{2}{3}\ h_n^1,\ h_n^2) = \{2\}$, $m_o\ (\frac{4}{3}\ h_n^2\ ,\ h_n^2) =$

$= \{1\}$ e $G(\tilde{y} + h_n^2\ d) = (4 - 7/3\ h_n^2)$. Assim $H_{\tilde{y},d}(h_n^2) = -7/3$

Verifica-se assim que $H(\tilde{y},d)$ pode-se aproximar de valores distintos quando se tende ao ponto zero de maneiras diferentes. Não existe portanto $\lim H_{y,d}(h)$. Os valores -2 e -7/3 são na realidade extremos do conjunto $L\ (\tilde{y},d)$

II-4)

Suponha que $\forall\ x \in X$ e $\forall\ i \in \overline{1,k}$ as derivadas unidirecionais das funções $g_i(x,.)$ segundo um dado vetor d existem em $\tilde{y}$ e satisfazem condições que assegurem a convergência uniforme em X de $\dfrac{g_i(x,\tilde{y} + hd) - g_i(x,y)}{h}$ quando $h \to 0$. Então é possível concluir que $L(\tilde{y},d)$ caberá entre os valores extremos do conjunto dessas derivadas. Esse resultado será precisamente formalizado no Teorema abaixo

Teorema 1

Suponha satisfeitas as condições gerais dadas em I.3 sobre X e as g_i

a) Se $x \in M_0(\tilde{y})$ é tal que $\forall$ i existe $g_i(x, .)'(\tilde{y},d)$

Então $\exists\, i_x \in m_0(x,y)$

$$g_i(x, .)'(\tilde{y},d) \leq \ell^- = \min(L(\tilde{y},d))$$

b)

b.1) Se $\forall$ $x \in X$ e $\forall$ $i \in \overline{1,k}$ $\exists$ $g_i(x, .)'(\tilde{y},d)$

e se

$$\forall \in \overline{1,k},\ r_i(x,h) \triangleq \frac{g_i(x,\tilde{y} + hd) - g_i(x,\tilde{y})}{h} \underset{h \to 0}{\to}$$

$g_i(x, .)'(\tilde{y},d)$ uniformemente em X

ou

b.2) Se $g_i(x, .)$ é convexa $\forall$ $x \in X$ e $1 \in \overline{1,k}$

Então:

$\exists x' \in M_0(\tilde{y})$ e $i' \in m_0(x',\tilde{y}) \mid g_{i'}(x', .)'(\tilde{y},d) \geq$

$\ell^+ = \max (L(\tilde{y},d))$

Prova:

a) Seja $x \in M_0(\tilde{y}) \mid \forall i \in m_0(x,\tilde{y})$ existe $g_i(., x)'(\tilde{y},d)$ e $(h_n) \mid$

$$h_n > 0,\ h_n \to 0 \quad \text{e} \quad \frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell^-$$

Seja $i_n \in (x,\tilde{y} + h_n d)$. Passando se necessário a uma subsquência podemos fazer $i_n = i_x$ constante $\forall n$; $i_x \in m_0\ (x,\tilde{y})$ pois m_0 é semi-contínuo superiormente.

Assim: $G(\tilde{y} + h_n d) \geq g_{i_x}(x,\tilde{y} + h_n d)$

e $G(\tilde{y}) = g_{i_x}(x,\tilde{y})$

Dessa forma:

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \geq \frac{g_{i_x}(x,\tilde{y} + h_n d)}{h_n} - \frac{g_{i_x}(x,y)}{h_n}$$

Passando aos limites quando $h_n \to 0$ obtem-se:

$$\ell^- \geq g_{i_x}(x, .)'(\tilde{y},d)$$

b) Considere $(h_n') \mid h_n' > 0$, $h'_n \to 0$

e $\dfrac{G(\tilde{y} + h_n' d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell^+$.

Seja agora $(x_n) \mid x_n \in M_0(\tilde{y} + h_n' d)$. Passando se necessário a uma subsequência pode-se fazer $x_n \to x'$ (X compacto). $x' \in M_0(\tilde{y})$ (M_0 semi-contínuo superiormente). Tome então $i_n \in m_0(x_n,\tilde{y})$. Como $\forall n\ m_0(x_n,\tilde{y}) \leq \overline{1,k}$ pode-se, considerando-se apenas se necessário uma subsequência, fazer $i_n = i'$ constante $\forall n. i' \in m_0(x',\tilde{y})$ (m_0 semi-contínuo superiormente).

Assim:

$$G(\tilde{y} + h_n' d) = g_{i'}(x_n, \tilde{y} + h_n' d)$$

$$G(\tilde{y}) \geq g_{i'}(x_n, \tilde{y})$$

e
$$\frac{G(\tilde{y} + h_n' d) - G(\tilde{y})}{h_n'} \leq r_{i'}(x_n, h_n')$$

Fazendo $h_n' \to 0$ em ambos os lados da desigualdade obtem-se:

$$\ell^+ \leq \overline{\lim}\ r_{i'}(x_n, h_n') \qquad (1)$$

Pela primeira hipótese do item b

$\forall\ \varepsilon > 0 \qquad \exists\ \delta(\varepsilon) \mid \forall\ i \in \overline{1,k} \quad$ e $\quad \forall\ x \in X$

se $h < \delta(\varepsilon)$ $| r_i (x,h) - g_i(x, .)' (y,d) | < \varepsilon$

Assim dado $\varepsilon > 0$, se n for feito suficientemente grande para que $h_n < \delta(\varepsilon)$ então

$$r_{i'} (x_n, h'_n) \leq g_{i'} (x_n, .)'(\tilde{y},d) + \varepsilon$$

o que permite afirmar que

$$\overline{\lim}\ r_{i'} (x_n, h'_n) \leq \overline{\lim}\ g_{i'} (x_n, .)' (\tilde{y}, d) \tag{2}$$

Além disso como $R_{i'}: X \to \mathbb{R}$

$x \to g_{i'} (x, .)' (\tilde{y}, d)$

é limite uniforme das funções contínuas $r_{i'} (. , h)$ tem-se $R_{i'}$ contínua e portanto $g_{i'} (x_n, .)' (\tilde{y}, d) \to g_{i'}(x', .)'(\tilde{y}, d)$ (3)

Juntanto os resultados de (1), (2) e (3) completamos a demonstração considerando a primeira hipótese do item b. Para se provar b a partir da segunda hipótese é necessário o seguinte resultado:

<u>Lema 1</u>: Seja $F: X \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ contínua e $|\ \forall\ x \in X$ $F(x, .)$ é convexa. Nesse caso $\hat{F}: X \times [0,\infty) \to R$

$(x, z) \to F(x, .)'(z,1)$

é semi-contínua superiormente.

Prova:

Sejam $(\hat{x},\hat{z}) \in X \times [0, \infty)$ e $(x_n, z_n) \in X \times [0, \infty)$ | $(x_n, z_n) \to (\hat{x}, \hat{z})$ e que $F(x_n, .)' (\hat{z}_n, 1) \to \ell \in \bar{R}$

Suponha por absurdo que $\ell > F(\hat{x}, .)' (\hat{z}, 1)$.

Pela convexidade de $F(x, .)$ é verdade que $\forall \varepsilon\ 0 \quad \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 \mid$ se $\delta(\varepsilon) > z - \hat{z} > 0$

$F(\hat{x}, z) < F(\hat{x}, \hat{z}) + (F(\hat{x}, .)'(\hat{z},1) + \varepsilon)\cdot(z-\hat{z})$

Tomando então $\hat{\varepsilon}$ suficientemente pequeno e z' qualquer $\in [0, \delta(\hat{\varepsilon}))$ tem-se, lembrando que como $z' - \hat{z} \neq 0$ não há perigo de indeterminações, que $F(\hat{x},z') < F(\hat{x}, \hat{z}) + \ell(z' - \hat{z})$ (4)

Fazendo agora, n grande o bastante para que $z_n < z'$ se terá pela própria convexidade de $F(x_n, .)$, que

$F(x_n, z) \geq F(x_n, z_n) + F(x_n, ..)'((z_n, 1),(z' - z_n))$

Tomando os limites dos dois lados usando a continuidade de F fica-se com:

$F(\hat{x}, z') \geq F(\hat{x}, \hat{z}) + \ell(z' - \hat{z})$ em flagrante contradição com (4)

Fazendo então $F \equiv (x, h) \to g_{i'}(x,\tilde{y} + hd)$ e usando o lema 1 pode-se ver tomando novamente a sequência (h_n') como definida anteriormente, que: $\overline{\lim}\ g_{i'}(x_n, .) (\tilde{y} + h_n' d) \leq g_{i'} (x, .)' (\tilde{y},d)$ (2')

Além disso a convexidade de $g_i'(x, .)$ assegura que:

$$\overline{\lim}\ r_{i'}\ (x_n,\ h'_n\ ) \leq \overline{\lim}\ g_{i'}(x_n,\ .)'(\tilde{y} + h'_n d) \qquad (3)$$

As inequações 1, 3' e 2' tomadas nessa ordem permitem se chegar de novo ao resultado pretendido.

Observações:

A) Do item a e da desigualdade da demonstração acima pode-se concluir que sendo

$$L_{i,x}(\tilde{y},d) \overset{\Delta}{\equiv} \{\ell \mid \quad (h_n) \mid h_n \to 0,\ h_n > 0\ \forall$$

e $\dfrac{g_i(x,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_i(x,\ y)}{h_n} \to \ell\ \}$ uniformemente limitado a

direita em X $\forall$ i ε $\overline{1,k}$ então $L(\tilde{y},\ d)$ será limitado. Essa limitação superior uniforme não será satisfeita por exemplo se uma das g_i for a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to -\sqrt{x}\ e^{\left|\frac{y}{x}\right|},\ x \neq 0$$

$$(0,y) \to\ 0 \qquad ,$$

d for positivo e x for qualquer conjunto contendo uma vizinhança de 0. Não obstante F é contínua e F(x, .) possui derivadas laterais em todos os pontos.

B) Usando o teorema do valor médio é fácil verificar que a primeira hipótese do item b é satisfeita se as funções

$$S_{i,d} : \mathbb{R}^{n\ x\ m} \to \mathbb{R}$$

$$(x,\ y)\ \to g_i(x,\ .)'\ (y,\ d)$$

são contínuas $\forall$ i.

II-5)

Um outro limite inferior para o conjunto $L(y, d)$ é apresentado a seguir na proposição 2. Ele é mais eficiente que o dado no teorema anterior e na presença de condições apropriadas sobre X e as funções g_i será o próprio valor de $G'(\tilde{y}, d)$. Na presença de quasi-diferenciabilidade cujo conceito é precisado a seguir é possível tornar a expressão desse limite um pouco mais simples.

Definição:

Diz-se que uma função $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é quasi-diferenciável em x quando existe um conjunto convexo fechado $\partial F(x)$ chamado subdiferencial de F em x $\mid \forall\, v \in R^n$ $F'(x,v)$ existe e é dado por $\max\limits_{w \in \partial F(x)} w.v.$.

Neste trabalho para eliminar os casos em que existem derivados unidirecionais infinitas, que são de pouco interesse, se exigirá que $\partial F(x)$ seja de fato, compacto. Qualquer referência futura a quasi-diferenciabilidade subentenderá essa exigência adicional. Na realidade o conceito de quasidiferenciável servirá aqui, principalmente, para englobar numa mesma categoria os funcionais diferenciáveis e os convexos.

Proposição 2:

Se além das condições expressas em I.3 se verificar que:

a) $\forall\ i \in \overline{1,k}$ e $\forall\ x \in M_o(\tilde{y})$ $g_i(.\ ,\ y)'\ (x,\ v)$ $\forall\ v \in \overline{CR(x,\ X)}$

onde $CR(x, X)$ representa o cone radial de X em x

b) Se, como no item b do teorema 1, $\forall\ x \in X$ e, $\forall\ i \in \overline{1,k}$

$g_i(x,\ .)'\ (\tilde{y},\ d)$ e se $r_i(x,\ h) = \dfrac{g_i(x,\tilde{y} + hd) - g_i\ (x,\ \tilde{y})}{h} \to$

$g_i\ (x,\ .)'\ (\tilde{y},\ d)$ uniformemente em X. Então:

$$\ell^- = \lim_{h \to 0} \frac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h} \geq \hat{G}' \triangleq \sup_{x \in M_o(\tilde{y})} \{$$

$$\{ \sup_{v \in \overline{CR(x,\ X)}} \{ \min_{i \in m_o(x,\ y)} \{ g(.\ ,\ \tilde{y})\ (x,\ v) +$$

$$g(x,\ .)'\ (y,\ d)\}\}\} \tag{1}$$

Se as $g_i'((x,\tilde{y}),(v,d))$ exitirem $\forall\ x \in M_o(y)$ e $v \in \overline{CR(x,X)}$ então

$$\ell^- \leq \hat{G}'(\tilde{y},d) = \{\sup_{x \in M_o(\tilde{y})} \{\sup_{v \in \overline{CR(x,X)}} \{\min_{i \in m_o(x,y)} g_i'((x,y),(v,d))\}\}\} \tag{1'}$$

Prova

Seja $x \in M_o(y)$ e $v \in CR(x,\ X)$

Seja ainda $\hat{h}\ |\ \forall\ h \in [0,\ \hat{h}]\ \ x + hv \in X$

Considere como anteriormente $(h_n)\ |\ h_n > 0\ \forall\ n$,

$$h_n \to 0 \text{ e } \frac{G(\tilde{y} + h_n\ d) - G(\tilde{y})}{h_n} \geq \min_{i \in \overline{1,k}} \frac{g_i\ (\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\ d)}{h_n} -$$

$$\frac{\min\limits_{i \in \overline{1,k}} \quad g_i(\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} \qquad (x \in M_o(\tilde{y})\,) \tag{2}$$

Passando se necessário uma subsequência de h_n podemos escolher $i' \mid i' \in m_o\ (\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\ d)$. i' pertencerá também a $m_o(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Assim o lado direito de (2) é igual a

$$\frac{g_{i'}(\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_{i'}\ (\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} =$$

$$\frac{g_{i'}\ (\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_{i'}\ (\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y})}{h_n} +$$

$$\frac{g_{i'}\ (\tilde{x} + h_n v,\ \tilde{y}) - g_{i'}\ (\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} \tag{3}$$

Pela condição (b) quando $h_n \to 0$ o primeiro termo de (3) tenderá para $g_{i'}(\tilde{x}, .)'\ (\tilde{y}, d)$. O limite do segundo termo é por definição $g_{i'}(.\ ,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x}, v)$.

Assim juntanto (2) e (3) e tomando os limites quando $h_n \to 0$ encontra-se que:

$$\ell^- \geq g_{i'}(\cdot,\tilde{y})'(\tilde{x},v) + g_{i'}(\tilde{x},\cdot)(\tilde{y},d) =$$

$$= \min_{i \in m_0(\tilde{x},\tilde{y})} \{ g_{i'}(\cdot,\tilde{y})'(\tilde{x},v) + g_{i'}(\tilde{x},\cdot)(\tilde{y},d)\} \triangleq$$

$$= g'((\tilde{x},\tilde{y}),(v,d)).$$

Como x é qualquer em $M_0(y)$ e v qualquer em $CR(x, X)$ é possível escrever:

$$\ell^- \geq \sup_{x \in M_0(y)} \{ \sup_{v \in CR(x,X)} \{ \min_{i \in m_0(\tilde{x},\tilde{y})} \{ g_i(\cdot,\tilde{y})'(\tilde{x},v) + g_i(\tilde{x},\cdot)'(\tilde{y},d)\}\}\}$$

Pela continuidade de $v \to g'((\tilde{x},\tilde{y}),(v,d)$ pode-se extender o domínio do maximando interno para $\overline{CR(x, X)}$ completando a primeira parte da demonstração.

Para provar que se as $g_i'((x,\tilde{y}),(v,d)$ existirem $\forall x \in M_0(\tilde{y})$ e $v \in \overline{CR(x,X)}$ se pode usar a expressão 1' basta verificar que dados $\tilde{x},v,h_n,i'$ como na primeira parte da prova se terá:

$$\ell^- = \lim \frac{G(\tilde{y}+h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \geq \lim \frac{g_i'(\tilde{x}+h_n v, \tilde{y}+h_n d)}{h_n} - \frac{g_i'(\tilde{x},\tilde{y})}{h_n} =$$

$$= g_i'((\tilde{x},\tilde{y}),(v,d)) = \min_{i \in m_0(\tilde{x},\tilde{y})} \{g_i'((\tilde{x},\tilde{y}),(v,d))\}$$

Observação C:

Se as $g_i(\cdot,y)$ forem quasi-diferenciáveis em $\bar{y}$ e X for o complementar de uma união finita de convexos abertos então se terá que o

$\sup_{v \in \overline{CR(x,X)}}$ que aparece em 1(1') será realmente atingido por algum $v \in \overline{CR(x,X)}$.

II-6)

Sob determinadas condições com respeito a X e as g_i e quando se puder garantir que o conjunto de pontos pior cobertos não se afasta infinitamente rápido de $M_0(\tilde{y})$ se a variável cobertora é perturbada, então é possível assegurar que as $G'(y, d)$ existem e podem ser obtidas resolvendo-se o problema expresso no lado direito da desigualdade (1) da proposição anterior. As condições sobre X relacionam os cones: tangente sequencial (CTS), como definido em Cannon, Cullun e Pollak | 6 | e o cone radial (CR). Sobre cada uma das $g_i(. , y)$ será exigido em especial que elas sejam localmente de Lipschutz além de, é claro, possuirem derivadas unidirecionais. Todas essas condições são, entretanto, corriqueiramente atendidas nos casos de maior interesse. Ao contrário, a propriedade que será requerida das g_i conjuntamente de forma a assegurar a estabilidade do mapeamento M_0 em $\tilde{y}$[1] citada acima é uma exigência bastante forte podendo não ser atendida em casos triviais.

---

[1] Considera-se aqui que um mapeamento $M: Y \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \mid M(y)$ é limitado $\forall y$ é estável em $\tilde{y}$ se $\exists K > 0 \mid \forall y \in Y, \sup_{x \in M_0(y)} d(x, M_0(\tilde{y})) \leq K \| y - \tilde{y} \|$, ou seja a função $y \to \sup_{x \in M_0(y)} d(x, M_0(\tilde{y}))$ é estável em $\tilde{y}$ segundo definição encontrada em Varaya | 7 |

Teorema 2:

Se além das condições indicadas em II.1 e nos itens a) e b) da proposição 2 se der que:

a) $\forall x \in M_0(y)$ e | $\# m_0(x, y) > 1$ $\quad CTS(x, X) = \overline{CR(x, X)}$

b) $\forall i \in \overline{1,k}$, $\forall x \in M_0(\tilde{y})$, $g_i(. , \tilde{y})'$ $(\tilde{x}, d)$ existe e $g_i(. , y)$ é localmente de Lipschutz

c) $\forall x \in M_0(\tilde{y})$ | $\# m_0(x, y) > 1$ e $\forall$ $v \in \overline{CR(x, X)}$ $\exists$ $i_v \in m_0(x, y)$|

$g_{i_v}(. , \tilde{y})$ $(\tilde{x}, v) < 0$ então:

G'(y) existe e é igual a

$$G'(y,d) = \sup_{x \in M_0(\tilde{y})} \{ \sup_{v \in \overline{CR(x, X)}} \{ \min_{i \in m_0(x, y)} \{ g_i(. , \tilde{y})' (\tilde{x}, v) + g_i(\tilde{x}, .)' (\tilde{y}, d)\}\}\} \qquad (1)$$

Prova:

A proposição 2 mostra que

$\underline{\lim}_{h \to o} \dfrac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h} \geq \hat{G}'(\tilde{y})$. Basta portanto provar que

$\ell^+ = \overline{\lim}_{h \to o} \dfrac{G(\tilde{y} + hd) - G(\tilde{y})}{h} \leq \hat{G}'(\tilde{y})$ para se completar a prova-

Seja então mais uma vez

$(h_n) \mid h_n > 0,\ h_n \to 0$ e

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \to \ell^+ .$$

Seja ainda (x_n) com $x_n \in M_o(\tilde{y} + h_n d)$. Passando a uma subsequência pode-se fazer com que $x_n \to \tilde{x} \in M_o(\tilde{y})$. Suponha inicialmente que $\# m_o(\tilde{x}, \tilde{y}) > 1$. Considere-se também o que sempre é possível, que $x_n - x / \| x_n - \tilde{x} \| \to u$ em $CTS(\tilde{x}, X) = \overline{CR(x, X)}$ por a.

A projeção ortogonal de x_n sobre u será chamada z_n. Seja agora i_u satisfazendo a condição c em x. Para i_u se obterá o seguinte.

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} \leq \frac{g_{i_u}(x_n, \tilde{y} + h_n d)}{h_n} -$$

$$- \frac{g_{i_u}(\tilde{x}, \tilde{y})}{h_n} = \frac{g_{i_u}(x_n, \tilde{y} + h_n d) - g_{i_u}(x_n, \tilde{y})}{h_n} +$$

$$\frac{\| z_n - \tilde{x} \|}{h_n} \left\{ \frac{g_{i_u}(x_n, \tilde{y}) - g_{i_u}(z_n, \tilde{y})}{\| z_n - \tilde{x} \|} + \right.$$

$$\left. \frac{g_{i_u}(z_n - \tilde{y}) - g_{i_u}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\| z_n - \tilde{x} \|} \right\} \qquad (2)$$

Suponha agora que $\dfrac{\| z_n - \tilde{x} \|}{h_n} \to \infty$. O último quociente na expressão acima converge a $g_{i_u}(\cdot\ ,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},\ u)$ enquanto que como $g_{i_u}(\cdot\ ,\ \tilde{y})$ é localmente de Lipschutz em $\tilde{x}$ então para algum $k > 0$ vale que

$$\frac{g_{i_u}(x_n,\ \tilde{y}) - g_{i_u}(z_n,\ \tilde{y})}{\|\ z_n - x\|} \leq K \frac{\|x_n - z_n\|}{\|z_n - \tilde{x}\ \|} \rightarrow 0$$

Portanto o limite da expressão entre chaves é $g_{i_u}(\cdot,\ \tilde{y})'\ (\tilde{x},u) < 0$. Assim como pelas hipóteses efetuadas sobre $g_{i_u}(\tilde{x},\ .)$ a primeira parcela tende para $g_{i_u}(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d)$, valor limitado, se obtem o absurdo $\ell^+ = \infty$. Dessa maneira $\dfrac{z_n - \tilde{x}}{h_n}$ é limitada se podendo fazer portanto $\dfrac{\|z_n - \tilde{x}\|}{h_n} \rightarrow \tilde{a} < \infty$. Tomando agora $i' \in m_o(x_n,\ \tilde{y} + h_n\ d)\ \forall n$, o que é sempre viável vem que:

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n\ d) - G(\tilde{y})}{h_n} = \frac{g_{i'}(x_n,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_{i'}(\tilde{x},\ \tilde{y})}{h_n}$$

$$\leq \frac{g_i(z_n,\ \tilde{y} + h_n\ d) - g_i(\tilde{x},\ \tilde{y})}{h_n} \quad \forall i \in m_o(\tilde{x},\ \tilde{y})$$

Tratando os dois últimos quocientes de forma inteiramente análoga a que foi feita em (2) e passando aos limites verifica-se que:

$$\ell^+ = g_{i'}(\cdot\ ,\ \tilde{y})\ (\tilde{x},\ \tilde{a}u) + g_{i'}(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d) \leq g_i(\cdot\ ,\ y)\ (\tilde{x},\ \tilde{a}u) +$$

$$+\ g_i(\tilde{x},\ .)'\ (\tilde{y},\ d)\ \forall i \in m_o(\tilde{x},\ \tilde{y})$$

Assim,

$\ell^+ = g'((\tilde{x}, \tilde{y}), (\tilde{a}u, d)) \leq \hat{G}'(\tilde{y})$ pois $\tilde{a}.u \in \overline{CR(\tilde{x}, X)}$

completando-se a prova.

Considere agora que $m_0(\tilde{x}, \tilde{y}) = \{i^*\}$

Então numa vizinhança V de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ o mesmo acontece e assim $\forall n \mid (x_n, \tilde{y} + h_n d)$ esteja em V é verdade que:

$$\frac{G(\tilde{y} + h_n d) - G(\tilde{y})}{h_n} = \frac{g_{i^*}(x_n, \tilde{y} + h_n d) - g_{i^*}(x, \tilde{y})}{h_n} \leq$$

$$\frac{g_{i^*}(x_n, \tilde{y} + h_n d) - g_{i^*}(x_n, \tilde{y})}{h_n}$$

que pelo teorema 1 tende $g_{i^*}(\tilde{x}, .)'(y, d)$

Portanto $\ell^+ \leq g_{i^*}(\tilde{x}, .)'(y, d) \leq \hat{G}'(y, d)$ encerrando a prova.

Observação D:

A condição b.1 do enunciado do teorema 1 é chamada "condição de desacoplamento" por permitir que, a exemplo do que ocorreu no teorema 2, condições adicionais para garantir a existência de $G'(\tilde{y},d)$ precisem ser impostas apenas sobre as restrições $g_i(.,y)$ ao invés de sobre as próprias g_i.

CAPÍTULO III

A COMPLEMENTARIDADE DOS CASOS CÔNCAVO E CONVEXO

O objetivo deste capítulo é mostrar sob que condições sobre o conjunto a ser coberto (X), a expressão $\hat{G}(y,d)$ dada na seção anterior se aplica para a determinação de $G'(y,d)$ quando as $g_i(\cdot,y)$ são primeiro côncavas e depois convexas. As condições indicadas para isso nesta seção na realidade visam simplesmente excluir a ocorrência de concordâncias entre a fronteira de X e as "superfícies" $\{x|g_i\ (x,y) = G(y)\}$ que poderiam ocasionar oscilações em $H_{y,d}(h)$. Tendo em mente essa finalidade não é difícil entender que se as condições exigidas sobre X quando as $g_i(\cdot,y)$ são côncavas forem requeridas de seu complementar quando elas são convexas se possa garantir também nesse segundo caso a existência de $G'(y,d)$. Entretanto convém esclarecer que os dois casos não são de forma nenhuma equivalentes. Por motivos simples e que serão indicados no decorrer desse capítulo o caso em que as g_i são convexas é bem mais complicado.

As condições que serão indicadas não são, de fato, extremamente gerais sendo tarefa relativamente simples conseguir exemplos em que elas não são atendidas e as derivadas existem. Em contrapartida, casos bastante simples podem ser apresentados em que as $G'(y,d)$ não existem. Dois deles serão indicados a seguir.

III.1. Dois Contra-Exemplos

Não é verdade que a função de recobrimento sempre possua derivadas unidirecionais quando as g_i, $i \in \overline{1,K}$ e o conjunto X são todos convexos. O caso do exemplo 1 esclarece esse ponto. Nele as g_i, $i \in \overline{1,K}$ e X são convexos e não existem uma derivada unidirecional para G.

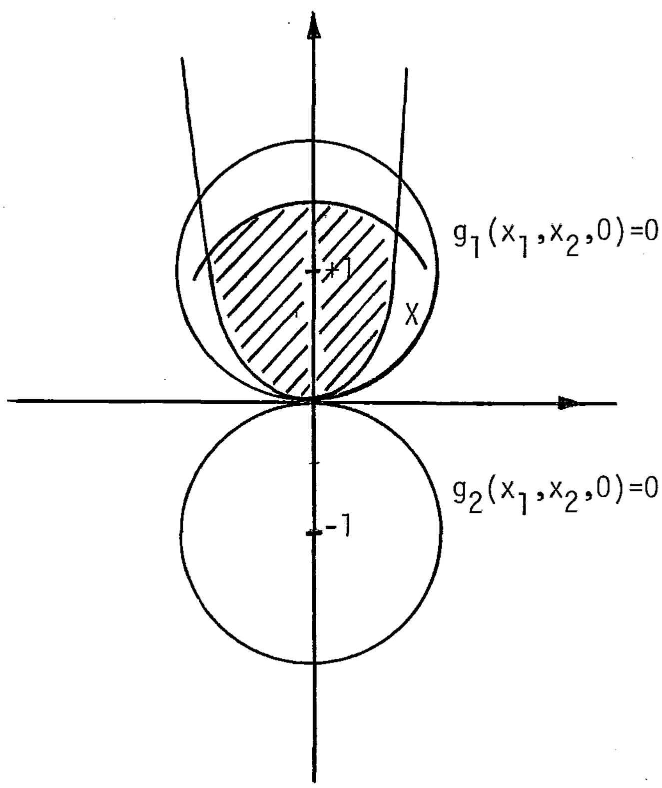


Figura 2

Exemplo 1 : Sejam como na figura ao lado.

a) $y = 0$, $d = 1$

b) $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $i = 1,2|$

$$g_1(x_1,x_2,y) = x_1^2 + (x_2-1)^2-1$$

$$g_2(x_1,x_2,y) = x_1^2 + (x_2+1-y)^2-1.$$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, diferenciável e par com:

1) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$

2) $\nexists \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{f(x_1)}{x_1^2}$ em $\mathbb{R}$

(o mesmo acontecendo é claro quando $x_1 \to 0^-$).

3) $\exists\ \delta > 0 \mid \forall x_1 \in |-\delta,\delta| - \{0\}$ e $f(x_1) > 1 - \sqrt{1-x_1^2}$.

d) X = hipergrafo (f) $\{x \mid \| x_1 \| \leq \delta$ e $x_2 \leq 0,5 + \sqrt{1-x_1^2}\}$. X e $\{g_i(x_1,x_2,0) \leq 0\}$ se acham representados na figura 2.

Pela própria maneira como X foi construído e por que $g_i(0,0,y) = 0$ $i \in \overline{1,2}$ se tem que $G(0) = 0$. Vai se mostrar agora que G não tem derivada a direita em 0.

Inicialmente a condição c-3 assegura que numa vizinhança da origem a fronteira de X é dada pelo gráfico de f.

Além disso como as $g_i(\cdot, y)$, $i = 1,2$ são estritamente convexas, $x \in M_0(y) \Longleftrightarrow \forall\, d \in CR(x,X)\ \exists\, i \in m_0(x,y) \mid \nabla g_i(\cdot, y)(x) \cdot d < 0$ e se tem que:

a) $M_0(y) \not\subset \dot{X}$

b) Se $x \in M_0(y)$ e $\#(m_0(x,y)) < 2$ então $x = (0,0)$.

Como para $y > 0$ a origem $\notin M_0(y)$ pelas condições acima incluíndo c-3 além da própria semi-continuidade superior da M_0 se verifica que:

$$\exists\ T > 0 \mid \forall\ y \in [0,T]\ :$$

a) $M_0(y) \in$ gráfico de f

b) $\forall x \in M_0(y)$, $m_0(x,y) = \{1,2\}$.

Neste caso de a e b se tira que $\forall y \in (0,T]$ $\forall x \in M_0(y)$ $x_2 = y/2$ e $x_2 = f(x_1)$ sendo portanto nesse intervalo $M_0(y)$ constituído de dois pontos $(x_1^y, f(x_1^y) = y/2)$ e $(-x_1^y, f(x_1^y) = y/2)$.

Para $y > 0$ tomando um qualquer desses pontos se pode escrever:

$$\frac{G(y) - G(0)}{y} = \frac{(x_1^y)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2 - 1}{y} =$$

$$\frac{(x_1^y)^2}{y} + \frac{y}{4} - 1 = \frac{(x_1^y)^2}{2f(x_1^y)} + \frac{f(x_1^y)}{2} - 1 \qquad (1)$$

e fazendo $y \to 0^+$ $x_1 \to 0$ também pela semicontinuidade superior de M_0 e se verifica que o segundo termo tende a se anular enquanto o primeiro oscila por não existir uma derivada segunda a direita de f pela condição c-2. Portanto não existe a derivada a direita de G. É claro que como $(x_1^y)^2$ e $f(x_1^y)$ são não negativos $\lim_{y\to 0^+} (G(y) - G(0))/y > -1$ que é o valor indicado para o problema por $\hat{G}(0,1)$.

Faça agora as g_i i = 1,2 serem as funções simétricas das anteriores. Como essas novas g_i são côncavas e X é convexo, conforme será indicado pelo Teorema 3, G terá derivadas laterais. No caso em questão é fácil verificar que $G'(0,1) = 1$ uma vez que $G(0) = 0$ e $M_0(y) = \{(0,y/2)\}$.

Também pode ocorrer a situação oposta a apresentada no exemplo anterior, isto é, dados as g_i convexas e X $G'(0,y)$ existe mas se essas g_i forem substituídas por suas simétricas côncavas $\frac{G(y) - G()}{y}$ não tem limite quando $y \to 0$.

Um caso bastante similar ao do exemplo 1 em que essa nova situação ocorre é o seguinte.

<u>Exemplo 2</u>: Sejam y, g_i i = 1,2 e f como no exemplo anterior, só que agora será exigido de f que no intervalo $[-\delta,\delta]$ $f(x_1) > 2x_1^2$ (2). Seja ainda $X = \{(x_1,x_2) | 2x_1^2 \leq x_2 \leq f(x_1),\ x_1 \in [-\delta,\delta]\} \cap \{x | g_i(x_1,x_2,0) \leq 0\}$.

Como pode ser observado na figura 3 onde X é a região hachurada $G(0) = 0$ e $M_0(0) = \{\bar{0}\}$. Quando se faz y

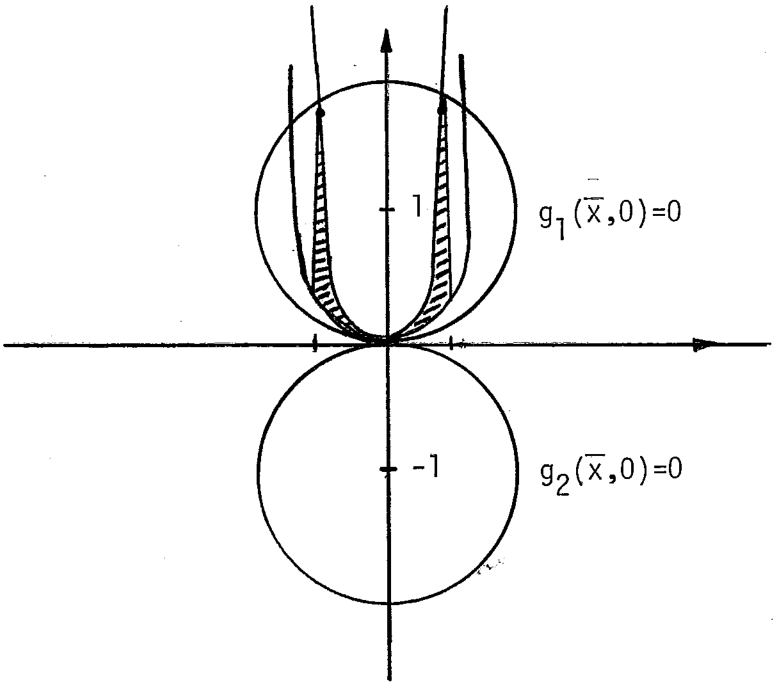


Figura 3

crescer a partir de 0 por causa de 2 o conjunto $M_0(y)$ começa a percorrer ambos os ramos da curva duas vezes diferenciável $x_2 = 2x_1^2$. Considerando que nesse caso $M_0(y) = \{((-1)^j (\sqrt{y}/2),\ y/2),\ j = 1,2\}$ e procedendo de forma análoga ao desenvolvimento efetuado no exemplo anterior se obtém $G'(0,1) = -3/4$.

Entretanto se no lugar das g_i forem tomadas as suas simétricas quando se aumentar y a partir de 0 o conjunto $M_0(y)$ se locomoverá não mais seguindo $x_2 = 2x_1^2$ mas agora o gráfico de f. Então, devido as oscilações de segunda ordem de f nas proximidades de zero pode-se mostrar que deixará de haver um limite para $\frac{G(y) - G(0)}{y}$ (3) quando $y \to 0^+$. Para ver isso, aliás, basta lembrar que 3 pode ser expresso pelo simétrico de 1.

III.2. O Caso Côncavo-Convexo

Um resultado de obtenção relativamente simples garante a validade do uso de $\hat{G}(y,d)$ no cômputo de $G'(y,d)$, quando as g_i são côncavas e X é convexo.

Essa simplicidade, conforme será visto na demostração do teorema a seguir, é, acima de tudo decorrente do fato de que para uma função côncava f $f(y) \leq f(x) + f'(x,y-x)$.

Teorema 3:

Sejam:

1) $X \subseteq \mathbb{R}^p \mid \exists \{C_\ell \subseteq \mathbb{R}^p, \ell \in \overline{1,L}\}$ onde os C_ℓ são convexos, compactos e $X = \bigcup_{\ell=1}^{\ell} C_\ell$.

2) U aberto $\subseteq$ E espaço de Banach sobre os reais, $X \subseteq X'$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^p$.

3) $y \in U$ e $d \in E$.

4) $g_i : X' \times U \to \mathbb{R} \quad i \in \overline{1,K}|$

a) $g_i(\cdot,y)$ é côncava,

b) $\forall x \in X \ \exists g_i(x,\cdot)'(y,d)$ e $r_i(x,h) = (g_i(x,y + hd) - g_i(x,y))/h - g_i(x,\cdot)'(y,d) \to 0$ uniformemente em $x \in X$ quando $h \to 0$.

Então:

$$G'(y,d) = \hat{G}'(y,d) = \max_{x \in M_0(y)} \{ \sup_{\overline{v \in CR(x,X)}}$$

$$\{ \min_{i \in \overline{1,K}} \{g_i(\cdot,y)'(x,v) + g_i(x,\cdot)'(y,d\}\}\}$$

Mais que isso, se verifica que $\forall x \in M_{o,d}(y) \triangleq \bigcap_{\varepsilon>0} (\bigcup_h (M_0(y + hd), h \leq \varepsilon)$ se tem:

$$G'(y,d) = g'(x,y,d) \triangleq \sup_{v \in \overline{CR(x,X)}}$$

$$\{ \min_{i \in \overline{1,K}} \{g_i(\cdot,y)'(x,v) + g_i(x,\cdot)'(y,d)\}\}$$

Prova:

Pela proposição 2 se sabe que $\underline{\lim}_{h\to 0} \frac{G(y+hd)-G(y)}{h} \geq \hat{G}'(y,d)$, (1).

Falta demonstrar portanto que $\ell^+ = \overline{\lim}_{h\to 0} \frac{G(y + hd) - G(y)}{h} \leq \hat{G}'(y,d)$ e que o supremo em $M_o(y)$ de $\hat{g}'(x,y,d)$ é de fato atingido em um posto de $M_{o,d}(y)$.

Seja então $(h_n) | h_n > 0$, $h_n \to 0$ e $\frac{G(y + h_n d) - G(y)}{h_n} \to \ell^+$. Considere-se então $(x_n) | x_n \in M_o(y+h_n d)$. Passando-se, se preciso, a subsequências pode-se imaginar que:

1) $\exists\, \ell' | x_n \in C_{\ell'}$ $\forall n$.

2) $x_n \to x \in C_{\ell'}$, $x \in M_{o,d}(y)$.

Agora como, devido a convexidade de $C_{\ell'}$, $x_n - x \in CR(x,X)$ e pela concavidade de $g(\cdot,y)$ se tem a sequência de relações abaixo:

$$\frac{G(y + h_n d) - G(y)}{h_n} \leq \min_{i\in m_o(x,y)} \{(g_i(x_n,y+h_n d) -$$

$$- G(y))/h_n\} = \min_{i\in m_o(x,y)} \{\frac{g_i(x_n,y) - g_i(x,y)}{h_n} +$$

$$+ \frac{g_i(x_n,y + h_n d) - g_i(x_n,y)}{h_n}\} \leq \min_{i\in m_o(x,y)}$$

$$\{g(\cdot,y)'(x, (x_n - x)/h_n) + g_i(x_n,\cdot)'(y,d) +$$

$$+ r_i(x_n, h_n)\}\} \leq \sup_{v\in\overline{CR(x,X)}} \{ \min_{i\in m_o(x,y)} \{g(\cdot,y)'$$

$$(x,v) + g_i(x_n,\cdot)'(y,d)\}\} + \max_{i\varepsilon m_o(x,y)}$$

$$\{|r_i(x_n,h_n)|\}$$

Passando agora aos limites, como em função de 4.b $r_i(x_n,h_n) \to 0$ e $g_i(x_n,\cdot)'(y,d) \to g_i(x,\cdot)'(y,d)$, se consegue então:

$$\ell^+ \leq \max_{v\varepsilon \overline{CR(x,X)}} \{ \min_{i\varepsilon m_o(x,y)} \{g_i(\cdot,y)'(x,\ ) +$$

$$g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \triangleq g'(y,x,d) \leq \sup_{z\varepsilon M_o(y)}$$

$$\{g'(y,z,d)\} \triangleq \hat{G}'(y,d).$$

Não esquecendo 1 se tem que obrigatoriamente as relações de $\leq$ acima são de fato igualdades e portanto o $\sup_{x\varepsilon M_o(y)} \{g'(y,x,d)\}$ é atingido em $M_{\ddot{o},d}(y)$ completando a prova.

III.3. <u>O Caso Convexo-Côncavo</u>

$\hat{G}'(y,d) = G'(y,d)$ também quando as g_i são convexas e o complementar de X é a união de convexos (ou existem $g_j': \mathbb{R}^p \supseteq X \to \mathbb{R}$ côncavas $\forall j \in J \mid X = \{x|g_j'(x) \leq 0,\ \forall j \in J\}$ de onde se tirou a denominação do caso).

Esse resultado é expresso no Teorema 4 dado a seguir. Ao final da seção é feita uma abordagem rápida a respeito da diferença da complexidade de tratamento do caso estudado aqui e do anterior.

Teorema 4:

Sejam

1) X compacto $\subseteq \mathbb{R}^p \mid \exists \{C_\ell \subseteq \mathbb{R}^p,\ \ell \in \overline{1,K}\} \mid$ os C_ℓ são abertos, convexos e $\mathbb{R}^p - X = \bigcup_{\ell=1}^{L} C_\ell$.

2) U aberto $\subseteq E$ espaço de Banach sobre os reais, $X \subseteq X'$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^p$.

3) $y \in U$ e $d \in E$.

4) $g_i\colon X' \times U \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,K} \mid$

a) $g_i(\cdot,y)$ é convexa

b) $\exists\ g_i(x,\cdot)'(y,d)$ e $\dfrac{g_i(x,y + hd - g_i(x,y)}{h} - g_i(x,\cdot)'(y,d) \to 0$ uniformemente em $x \in X$ quando $h \to 0$.

Então:

$$G'(y,d) = \hat{G}'(y,d) \triangleq \sup_{x \in M_o(y)} \{ \max_{v \in \overline{CR(x,X)}} \{ \min_{i \in \overline{1,K}} \{g_i(\cdot,y)'(x,v) + g_i(x,\cdot)'(y,d)\}\}\}.$$

Prova:

A proposição 2 garante que

$$\underline{\lim}_{h \to 0} \frac{G(y + hd) - G(y)}{h} \geq \hat{G}'(y,d)$$

Para se completar a prova resta mostrar portanto que $\ell^+ = \overline{\lim_{h \to 0}} \dfrac{G(y + hd) - G(y)}{h} \leq \hat{G}'(y,d)$.

Seja então, outra vez $(h_n) \mid h_n > 0$, $h_n \to 0$ e $\dfrac{G(y + h_n d) - G(y)}{h_n} \to \ell^+$. Considere-se então $(x_n) \mid x_n \in M_o(y+h_n d)$.

Passando quantas vezes for necessário a subsequências pode-se supor que:

a) $x_n \to x \in M_o(y)$..

b) $x_n = x\ \forall n$ ou $x_n \neq x\ \forall n$ e nesse caso $u(x_n - x) \to u_1$.

c) Se para $m \in \overline{2,p}$, u_j está definido $\forall j \in \overline{1,m-1}$ e $w_n^{m-1} = \sum_{j=1}^{m-1} ((x_u - x).u_j)u_j$ então:

$x_n = x + w_n^{m-1}\ \forall n$ ou $x_n \neq x + w_n^{m-1}\ \forall n \to$

e nesse caso:

$u(x_n - (x + w_n^{m-1})) \to u_m$. (1)

Se $x_n = x\ \forall n$ então $\ell^+ = \min_{i \in m_o(x,y)} \{g_i(x,)'(y,d)\} \leq \hat{G}'(y,d)$ e se terá completado a demonstração.

Caso isso não ocorra seja $r = \max\{m \in \overline{1,p} \mid u_m$ está definido$\}$. Pela própria maneira pela qual são obtidos os u_m se verifica que

$$\forall m \in \overline{1,r}\ (x_n - (x + w_n^m)).u_j = 0\ \forall j \in \overline{1.m-1}.$$

Como

$$u(x_n - (x + w_n^m)) \to u_{m+1} \quad \forall m \in \overline{1,r-1}$$

o conjunto $\{u_m,\ m \in \overline{1,r}\}$ será ortonormal. Além disso como

$$x_n = x + w_n^r\ \forall n \in \mathbb{N}$$

então

$$\{x\} + [\{u_m,\ m \in \overline{1,r}\}] = [\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}]'$$

sendo portanto o conjunto dos u_m uma base ortonormal para esse subespaço de $\mathbb{R}^p$. Também se terá então que:

$$(x_n - (x + w_n^m)/(x_n - x).u_m) \to 0 \ \forall m \in \overline{1,r} \ (2)$$

Isso porque:

$$\frac{x_n - (x + w_n^m)}{(x_n - x).\ u_m} = \frac{x_n - (x + w_n^{m-1})}{(x_n - x).\ u_m} - u_m =$$

$$= \frac{x_n - (x + w_n^{m-1})}{(x_n - (x + w_n^{m-1})).u_m} - u_m \text{ (pois } u_m \text{ e } w_n^{m-1} \text{ são ortogonais)}$$

$$=\left(\frac{x_n - (x + w_n^{m-1})}{\| x_n - (x + w_n^{m-1}) \|} \Big/ \left(\frac{x_n - (x + w_n^{m-1})}{\| x_n - (x + w_n^{m-1}) \|} \right).\ u_m\right) - u_m.$$

De novo pelo próprio modo como foram gerados os u_m essa última expressão tende a 0.

Em vista de (2) e como pela ortonormalidade dos u_m é verdade que

$$\| w_n^{m+1} - w_n^m \| \leq \| x_n - (x + w_n^m) \| \ \forall m \in \overline{1,r-1}$$

se terá também que

$$(w_n^{m+1} - w_n^m)/(\| w_n^m - w_n^{m-1} \| = |(x_n - x).u_m|) \to 0$$

$\forall m \in \overline{2,r-1}$. (3)

Se passa agora a apresentar uma série de resultados que possibilitarão completar a prova do teorema.

Lema 4-1:

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^p | \mathbb{R}^p - X$ é a união finita de convexos abertos e (x_n) uma sequência em X satisfazendo a:

a) $x_n \to x \in X$.

b) Fazendo $w_n^0 = 0 \; \forall n$ então

$\forall m \in \overline{1,r-1}$, $r \leq p$ e $\forall n$, $x_n \neq x + w_n^{m-1}$ e

$u(x_n - (x + w_n^{m-1})) \to u_m$ (4) onde

$w_n^m = \sum_{j=1}^{m} ((x_n - x).u_j) \, u_j \; \forall m \in \overline{1,r}$.

c) $x_n = x + w_n^r \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Então existe uma família de conjuntos

$A_0 = \{0\}, A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^m, \ldots, A_r \subseteq \mathbb{R}^r |$:

a) $\forall m \in \overline{1,r}$

$f_m: A_{m-1} \to (0,\infty) | A_m = \{a_{m-1} + \alpha_m \, c_m$ onde

$a_{m-1} \in A_{m-1}$ e $0 < \alpha_m < f_m(a_{m-1})\}$ (5)

b) Definindo $Z_m = \{z | z = x + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, u_j$ onde

$a_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A_m\}$ então:

$$Z_m \subseteq X \quad \forall m \in \overline{1,r} \ . \quad (6)$$

Prova:

Essa prova se apoiará em algumas afirmações que são apresentadas a seguir. Antes de passar a elas entretanto é preciso definir os operadores P_m, $m \in \overline{1,r}$ que aparecem nesses resultados.

Definição:

Sejam u_m, $m \in \overline{1,r}$ como dados em (4) e $S \subseteq \mathbb{R}^p$ então $P_m(S) = \{x \mid \exists (t_n),\ t_n > 0,\ t_n \to 0\ x + t_n u_m \in S\ \forall n\}$.

Afirmação 4-1:

Considere $x \in X$ fechado e $\{u_m,\ m \in \overline{1,r}\} \subseteq \mathbb{R}^p$. Então, se não existir uma família de conjuntos $A_m \subseteq \mathbb{R}^m$ $m \in \overline{0,r}$ satisfazendo simultaneamente a 5 e 6 para esses x e u_m, é verdade que $x \in (P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X)$ (7).

Prova:

Vai ser mostrado que se $x \notin (P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X)$ então se pode encontrar um grupo de conjuntos $A_m \subseteq \mathbb{R}^m$, $m \in \overline{0,r}$ atendendo ao mesmo tempo a (5) e (6). Mostrar a veracidade dessa proposição equivale evidentemente a provar 4-1. Antes de se passar a demonstração propriamente dita convém notar que como $\mathbb{R}^n - X$ é aberto então, $\forall m \in \overline{1,r}$ $(P_m \circ P_{m+1} \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X) \supseteq \mathbb{R}^n - X$ (8).

Suponha agora que $x \notin (P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X)$. Nesse caso $\exists\ b_1 > 0$ tq $\forall\ a_1 \in [0, b_1]$, $x + a_1 u_1 \notin (P_2 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X)$. Fazendo então $f_1 : A_0 = \{0\} \to \mathbb{R} \mid f_1(0)=$

$= b_1$, definindo A_1 como em 5 e Z_1 como em 6 se tem que

$$Z_1 \cap (P_2 \circ P_3 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X) = \phi \overset{8}{\Longrightarrow}$$

$$Z_1 \cap (\mathbb{R}^n - X) = \phi.$$

Em vista disso $\forall\ \alpha_1 \in A_1\ \ \exists\, b_2(\alpha_1) > 0 \mid$ se $\alpha_2 \in [0, b_2(\alpha_1)]$ então

$$x + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \notin (P_3 \circ P_4 \circ \ldots \circ P_r)$$
$$(\mathbb{R}^n - X).$$

Definindo então $f_2 : A_1 \to (0,\infty)$, A_2 e Z_2 como em 5 e 6 respectivamente se observa que $Z_2 \cap (P_3 \circ P_4 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X) = \phi$ $\Longrightarrow Z_2 \subseteq X$.

Efetuando esse mesmo procedimento r vezes se terá ao final uma família de conjuntos $A_m, m \in \overline{1,r}$ satisfazendo a 5 e 6.

<u>Afirmação 4-2</u>:

Se $\mathbb{R}^p - X$ e a união finita de abertos C_ℓ, $\ell \in \overline{1,L}$, $\{u_m, m \in \overline{1,r}\} \subseteq \mathbb{R}^p$ e $x \in (P_1 \circ P_2 \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^n - X)$ então $\exists\, a_r = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0$ e $\ell \in \overline{1,L} \mid$ se $z_m = x + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, m \in \overline{1,r}$ então $x, z_m, m \in \overline{1,r-1} \in \overline{C_\ell}$ e $z_r \in C_\ell$.

<u>Prova</u>:

Nesta demonstração $(P_{m+1} \circ P_{m+2} \circ \ldots \circ P_r)(\mathbb{R}^p - X)$ será chamada de $V_m\ \forall\ m \in \overline{0,r-1}$.

Pela própria definição de P_m $V_o \subseteq \overline{V_1}$ ... $\subseteq \overline{V_m}$ ... $\subseteq (\mathbb{R}^p - X)$ (9) e portanto $x \in \overline{(\mathbb{R}^p - X)} = \bigcup_{\ell \in \overline{1,L}} \overline{C_\ell}$. Para $v \in \mathbb{R}^p$ referencie por $L(v) = \{\ell \in \overline{1,L} \mid v \in \overline{C_\ell}\}$ e para cada $\ell \in \overline{1,L} - L(v)$ e $m \in \overline{1,r}$ chame de $b_{m,\ell}(v) = \min \{b \geq 0 \mid v + b\, u_m \in \overline{C_\ell}\}$. Claramente $b_{m,\ell}(v)\ \forall\ \ell \in \overline{1,L} - L(v)$ e $b_m(v) = \min \{b_{m,\ell}(v),\ \ell \in \overline{1,L} - L(v)\}$ serão > 0 devendo se recordar apenas que quando $L(v) = \overline{1,L}$ se considera $b_m(v) = \infty\ \forall\ m \in \overline{1,r}$.

Tome-se agora $\alpha_1 \mid 0 < \alpha_1 < b_1(x)$ e $z_1 = x + \alpha_1 u_1 \in V_1$ o que e possível uma vez que $x \in V_o = P_1(V_1)$. Por 9, $z_1 \in \overline{\mathbb{R}^p - X}$ e pela própria expressão de $b_1(x)$ se tem que $L(z_1) \subseteq L(x)$.

Escolha-se agora $\alpha_2 \mid 0 < \alpha_2 < b_2(z_1)$ e $z_2 = z_1 + \alpha_2 u_2 \in V_2$. Isto pode ser feito porque $z_1 \in P_2(V_2)$. Novamente se terá $z_2 \in \overline{\mathbb{R}^p - X}$ e $L(z_2) \subseteq L(z_1) \subseteq L(x)$.

Repetindo o processo se acaba por obter $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}) \mid$:

a) x e os $z_m = x + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\ \forall m \in \overline{1,r-1} \in \overline{\mathbb{R}^p - X}$.

b) $L(z_{r-1}) \subseteq L(z_{r-2}) \subseteq \ldots \subseteq L(z_1) \subseteq L(x)$.

c) $z_{r-1} \in P_r\ (\mathbb{R}^p - X)$

Em vista de c é possível achar $\alpha_r \in (0, b_r(z_{r-1})) \mid z_r = z_{r-1} + \alpha_r u_r \in (\mathbb{R}^p - X)$. Logicamente $L(z_r) \subseteq L(z_{r-1})$ e portanto juntando agora os α_i, $i \in \overline{1,r}$ obtidos durante o processo inteiro e tomando $\ell \mid z_r \in C_\ell$ as condições indicadas na proposição serão atendidas já que $L(x) \supseteq L(z_1) \supseteq \ldots \supseteq L(z_r)$.

Observação:

Note que como $z_r \in C_\ell$ e x e $z_i, i \in \overline{1,r-1} \in \overline{C_\ell}$ então qualquer combinação convexa com coeficiente não nulo em C_ℓ e portanto se $S_r = \overline{co}$ $(\{x, z_i \; i \in \overline{1,r}\})$ então $\dot{S}'_r$ estará contido em C_ℓ.

Afirmação 4-3:

Seja (x_n) uma sequência satisfazendo as condições a) e b) do lema 4-1 e convergindo a x. Sejam também u_m, $m \in \overline{1,r}$, como indicados nessa condição b.

Dado então $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) > 0$ faça novamente

$Z_m = x + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \; \forall m \in \overline{1,r}$ e considere

$S_r = \overline{C_o}$ $(\{x, x_m, m \in \overline{1,r}\})$ $\quad n' | \forall n > n' \; x_n$

está no interior relativo de $S_r(\dot{S}'_r)$.

Prova:

Se iniciará mostrando que

$$x = \sum_{m=1}^{r} c_m u_m + x \in \dot{S}'_r \iff 0 < c_1 < \alpha_1 \quad (10)$$

e

$$0 < \frac{c_{m+1}}{c_m} < \frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m} \; \forall m \in \overline{1,r-1} \qquad (11).$$

Caso valham as duas condições acima se obterá que $c_m > 0 \; \forall m \in \overline{1,r}$ e portanto $t_r = \dfrac{c_r}{\alpha_r} \geq 0$. Faça agora

$$\forall j \in \overline{1,r-1} \quad t_{r-j} = \frac{c_{r-j}}{\alpha_{r-j}} - \frac{c_{r-(j-1)}}{\alpha_{r-(j-1)}} \qquad (12).$$

Por (11) os t_{r-j} serão positivos e $\sum_{j=0}^{r} t_m = \frac{c_1}{\alpha_1}$ que é < 1 por 10.

Dessa última desigualdade se tira também que

$t_m < 1 \ \forall m \in \overline{1,r}$ e que fazendo

$$t_o = 1 - \sum_{m=1}^{\hat{}} t_m, \ t_o \in (0,1).$$

Finalmente verificando que

$$z = \sum_{m=1}^{r} c_m u_m + x = \sum_{m=1}^{r} t_m (x + \alpha_m u_m) + t_o x$$

se mostra que $z \in \dot{S}'_r$ já que $0 < t_m < 1 \ \forall m \in \overline{0,r}$ e $\sum_{m=0}^{r} t_m = 1$. Fica demonstrada, por conseguinte a suficiência das condições indicadas. Para mostrar que essas condições são também necessárias basta observar que

$$z = \sum_{m=1}^{r} c_m u_m \in \dot{S}'_r \iff \exists \{t_m, m \in \overline{1,r}\} \ |$$

$$0 < t_m < 1$$

$$\sum_{m=0}^{r} t_m = 1 \text{ e } z = t_o x + \sum_{m=1}^{r} t_m (x + \alpha_m u_m)$$

Sendo a última igualdade equivalente a:

$$\frac{c_m}{\alpha_m} = \sum_{j=0}^{r-m} t_{r-j} \ \forall m \in \overline{1,r}.$$

Dessa expressão se pode retirar que como $t_m > 0$

$$\frac{c_m}{\alpha_m} > \frac{c_{m+1}}{\alpha_{m+1}} \; \forall m \in \overline{1,r}$$

o que é equivalente a 11. Além disso $\frac{c_1}{\alpha_1} = 1 - t_0 \in (0,1)$ se satisfazendo também 10 já que $\alpha_1 > 0$.

Verificado esse fato e lembrando que pela própria forma de obtenção dos

$$u_j \quad \exists \; n'' | \forall n > n'' (x_n - x).u_j > \forall j \in \overline{1,r}$$

e que

$$\frac{(x_n - x).u_{j+1}}{(x_n - x).u_j} = \frac{\| w_n^{j+1} - w_n^j \|}{\| w_n^j - w_n^{j-1} \|} \to 0 \text{ por} \qquad (3)$$

se tira que

$$\exists \; n' | \forall n > n' (x_n - x).u_j > 0 \; \forall j \in \overline{1,r} \qquad \text{e}$$

$$\frac{(x_n - x).u_{j+1}}{(x_n - x).u_j} < \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} \; \forall j \in \overline{1,r-1} \text{ e portanto}$$

$x_n \in \dot{S}'_r \; \forall n > n'$ tendo em vista o resultado demonstrado inicialmente.

Retomando a demonstração do lema 4-1 se tem que o caso 5 e 6 não se verifiquem simultaneamente então tomando os $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ e z_m, $m \in \overline{1,r}$ indicados na afirmação 4-2 e fazendo S ser o fecho convexo de x e z_m, $m \in \overline{1,r}$ se tem pela afirmação 4-3 que:

$$n' | \forall n > n' \; x_n = x + w_n^r \in \dot{S}'_r \subseteq C_\ell \subseteq \mathbb{R}^p - X$$

o que é absurdo pois por hipótese $(x_n) \subseteq X$.

A preocupação do lema 4-1 é assegurar que determinados conjuntos Z_m $m \in \overline{1,r}$ estão em X. Um outro resultado assegura que sob a condição

$$\frac{\| x_n - w_n^{m-1} \|}{h_n} \to \infty$$

então mantendo a sua lei de formação os Z_j $j \in \overline{1,m}$ podem ser feitos de forma a ficarem contidos em $M_0(y)$. Este é o assunto do lema 4-2.

Lema 4-2:

Sejam $w_0^n = 0$ e $(x_n), x$, u_m, $(w_m^n), m \in \overline{1,r}$ e r como anteriormente. Sejam ainda $T_m = [\{u_j, j \in \overline{1,m}\}]$ e A_m e Z_m como no lema 4-1. Suponha então que para $q \in \overline{1,r}$ $\frac{\| x_n - (w_n^{q-1}+x) \|}{h_n}$ $\to \infty$. Nesse caso existe uma família de conjuntos

$$A_0' = \{0\},\ A_1' \subseteq A_1,\ \dots\ ,\ A_q' \subseteq A_q \ |:$$

a) $\forall m \in \overline{1,q} \quad \exists\, f_m' : A_{m-1}' \to (0,\infty) \,|$

$$A_m' = \{a_{m-1} + \alpha_m e_m \,|\, a_{m-1} \in A_{m-1}' \text{ e }$$

$$0 < \alpha_m < f_m' (a_{m-1})\}.$$

b) Se $Z_0' = \{x\}$ e $Z_m' = \{x | z = x + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j$,

$a_m = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in A_m'\}$ $\forall m \in \overline{1,q}$ então

$\forall m \in \overline{0,q}$ é verdade que:

1) $Z'_m \subseteq M_o(y)$ (13)

2) $\exists \ m_o^m \subseteq \overline{1,K}$ tq $\forall z \in Z'_m$, $m_o(z,y) = m_o^m$ e se

$\mu_m = \{z \in T'_m \mid g_i(z,y) = G(y) \ \ \forall i \in m_o^m\}$

onde $T'_m = T_m + \{x\}$ então:

$Z'_m \subseteq \dot{\mu}'_m \triangleq$ interior de μ_m em T'_m. (14)

3) $\exists \ n_m | \forall n > n_m \ g_i(x + w_{n,y}^m) = G(y) \ \forall i \in m_o^m$

(15)

Prova:

Suponha que para $q \in \overline{1,r}$ $\dfrac{\| x_n - (x + w_n^{q-1})\|}{h_n}$ $\to \infty$ e repare que para $m = 0$ a condição a não tem influência e b é trivialmente satisfeita. Imagine agora que se tenha conseguido obter conjuntos A_j, $j \in \overline{1,m}$, $m < q$ atendendo a e b. Vai se mostrar que nessas condições é possível encontrar um conjunto A_{m+1} que junto com os outros A_j já determinados satisfaçam também a) e b). Feito isso estará completa a prova.

Sejam então A_j $j \in \overline{0,m}$ satisfazendo a e b e $a_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in A_m$, $m < q$. Será usada a seguinte notação: $z_o = x$, $z_m = x + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j \ \forall j \in \overline{1,m}$ e $S_{a_m} = \overline{co}\ (\{z_j, \ j \in \overline{0,m}\})$. Como se $j < m$ então $Z_j \subseteq \overline{Z}_m$ tem-se que $m_o^m \subseteq m_o^j$ e assim $g_i(x,y) \leq G(y) \ \forall i \in m_o^m$, $\forall x \in S_{a_m}$. (16). Além disso é possível encontrar $x' \in \dot{S}'_{a_m} \cap Z_m$ o que é suficiente para provar que $g_i(z,y) = G(y) \ \forall z \in S_{a_m}$ e $\forall i \in m_o^m$ pela própria convexidade das

$g_i(\cdot,y)$. Portanto $S_{a_m} \subseteq \mu_m$ e como $[S_{a_m}]' = [\mu_m]' = T_m'$ se tem que $\mu_m = \bigcap_{i \in m_o^m} \{\bar{z} | g_i(\bar{z},y) = \min_{z \in T_m'} g_i(z,y)\}$ (17) sendo por isso convexo. Assim pode-se mostrar que:

Afirmação 4-4:

$\forall z \in Z_m'$ $\partial g_i(\cdot,y)(z) = \partial g_i(\ ,y)(x) \cap T_m^{\perp}$

$\forall i \in m_o^m$. Isso também é verdade

$\forall z \in \dot{S}_{a_m}'$ $\forall a_m \in A_m$.

Prova:

A demonstração desse fato é simples bastando apenas lembrar que:

a) Por hipótese $Z_m \subseteq \dot{\mu}_m'$ e como $S_{a_m} \subseteq \mu_m$ e $[S_{a_m}]' = [\mu_m]' = T_m'$ então $\dot{S}_{a_m}' \subseteq \dot{\mu}_m'$ (18)

b) $\partial g_i(\cdot,y)(z) \subseteq T_m^{\perp}$ (19) $\forall z \in \dot{}_m'$ por 17.

c) Se f é uma função convexa, x_1 e x_2 $|f(x_1) = f(x_2)$ e $v_1 \in \partial f(x_1) | v_1 \perp (x_1 - x_2)$ então $v_1 \in \partial f(x_2)$. (20).

Outro resultado que será necessário é o seguinte:

Afirmação 4-5:

Sejam $a_m \in A_m$ e (x_n), x, (w_m^n), u_m e S_{a_m} (co mo anteriormente e

$$\hat{z} = \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_j u_j + x.$$

Defina $D_k : \dot{S}'_m \to (0,\infty)$ $k \in \overline{-m,-1} \cup \overline{1,m}$, $m \leq r$ de tal modo que:

$$D_k(\hat{z}) = \max\{c - \hat{c}_k | x + \hat{c}_1 u_1 + \dots + c_k u_k +$$

$$\dots + \hat{c}_m u_m \in S_{a_m}\} \;\forall k \in \overline{1,m} \qquad \text{e}$$

$$D_k(\hat{z}) = \max\{\hat{c}_k - c | x + \hat{c}_1 u_1 + \dots + c_k u_k +$$

$$\dots + \hat{c}_m u_m \in S_{a_m}\} \;\forall k \in \overline{-m,-1}.$$

Então, lembrando que $x + w_n^m \in \dot{S}'_{a_m}$ para n suficientemente grande, se verifica que

$$\lim \frac{\| x_n - (x + w_n^m) \|}{D_k(x + w_n^m)} = 0 \;\forall k \in \overline{-m,1} \cup \overline{1,m}. \tag{21}$$

Prova:

Se

$$w_n^m + x = \sum_{j=1}^{m} \hat{c}_n^j u_j + x$$

então das condições 10 e 11 da afirmação 4-3 pode-se extrair que:

$$D_1(x + w_n^m) = \alpha_1 - \hat{c}_n^1$$

$$D_k(x + w_n^m) = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \hat{c}_n^{k-1} - \hat{c}_n^k, k \in \overline{2,m} \tag{22}$$

$$D_{-k}(x + w_n^m) = \hat{c}_n^k - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} \hat{c}_n^{k+1}, k \in \overline{1,m-1}$$

$$D_{-m}(x + w_n^m) = \hat{c}_n^m .$$

Levando em conta

$$\hat{c}_n^k = (x_n - (x + w_n^{k-1}).u_k \ \forall k \in \overline{1,m}$$

e 3 se retira que

$$\frac{\hat{c}_n^{k-1}}{\hat{c}_n^k} \to 0 \ \forall k \in \overline{2,m}.$$

Usando esse fato se cada uma das expressões de D_k for dividida por $\| x_n - (x + w_n^m) \|$ e se fizer o limite desse quociente será obtido usando 2 que:

$$\frac{D_k (x + w_n^m)}{\| x_n - (x+w_n^m) \|} \to \infty \ \forall k \in \overline{-m,-1} \ \cup \ \overline{1,m}$$

o que é equivalente a afirmação acima.

4-4 e 4-5 permitem provar que:

<u>Afirmação 4-6</u>:

Sejam ainda $a_m \in A_m$ e (x_n), (w_n^m), u_m e S_{a_m} como anteriormente. Então:

$$\forall i \in m_o^m, \ \forall j \in \overline{1,m} \ \ \overline{\lim} \ g_i(\cdot,y)'(x_n,u_j) \leq 0$$

e

$$\overline{\lim} \ g_i(\cdot,y)'(x_n, -u_j) \leq 0.$$

<u>Prova</u>:

Considere-se $i \in m_o^m$, $j \in \overline{1,m}$, n grande o bastante para que $x + w_n^m \in S_{a_m}$ e a identidade:

$$0 \equiv (g_i(x + w_n^m + \frac{D_j(x + w_n^m)u_j}{2}, y) -$$

$$g_i(x_n,y)) + (g_i(x + w_n^m, y) - g_i(x + w_n^m +$$

$$+ \frac{D_j(x + w_n^m)u_j}{2}, y)) + (g_i(x_n,y) -$$

$$g_i(x + w_n^m, y)) \quad (23).$$

Observe agora que como

$$x + w_n^m + \frac{D_j(x + w_n^m)u_j}{2} \in \dot{S}'_{a_m} \subseteq \dot{\mu}'_m$$

se tem por 4-4 que

$$g_i(\cdot,y)'(x + w_n^m + \frac{D_j(x + w_n^m)u_j}{2}, u_j) = 0.$$

Usando esse resultado e a convexidade de g_i se obtém que:

$$0 \geq g_i(\cdot,y)'(x_n, (x + w_n^m - x_n) + \frac{D_j(x + w_n^m)u_j}{2})$$

$$+ g_i(\cdot,y)'(x + w_n^m, x_n - (x + w_n^m)) \quad (24).$$

Dividindo ambas as parcelas por $D_j(x + w_n^m)/2$ e fazendo $n \to \infty$ se fica com:

$$0 \geq \overline{\lim}\; g_i(\cdot,y)'(x_n, \frac{2(x + w_n^m - x_n)}{D_j(x + w_n^m)} + u_j) \quad (25)$$

pois o segundo termo tende a se anular por 4-5.

Minorando o termo em 25 por

$$g_i(\ ,y)'(x_n,\ u_j) + v_n^i . \frac{2(x + w_n^m) - x_n}{D_j(x + w_n^m)} \qquad (26)$$

onde

$$v_n^i \in \partial g_i(\cdot,y)(x_n,\ u_j) \triangleq \{v \in \partial g_i(\cdot,y)(x_n) |$$

$$g_i(\cdot,y)'(x_n,\ u_j) = v\ .\ u_j\}$$

pode-se concluir finalmente que

$$0 \geq \overline{\lim}\ g_i(\cdot,y)'(x_n,\ u_j)$$

pois a segunda parcela em (26) também $\to 0$.

Para mostrar que $\overline{\lim}\, g_i(\cdot,y)'(x_n,\ -u_j) \leq 0$ basta proceder de maneira idêntica apenas tornando os pontos $w_n^m + \frac{D_{-j}(x + w_n^m)}{2}\ (-u_j)$ em lugar de $w_n^m + \frac{D_j(x + w_n^m)}{2}\ .\ u_j$.

Assim como i e j são quaisquer em m_o^m e $\overline{1,m}$ a proposição está demonstrada.

Uma consequência imediata dessa afirmativa é a seguinte:

Se para (s_n), $s_n \to x$ for definido $\partial g_i(\cdot,y)(x,\ s_n) \triangleq \{v \in \partial g_i(\cdot,y)(x) |\ \exists$ uma subsequência s_{n_k} e vetores $v_{n_k} \in \partial g_i(\cdot,y)(s_{n_k}) | v_{n_k} \to v\}$ então

$$\forall i \in m_o^m\ \partial g_i(\cdot,y)(x,\ x_n) \subseteq \partial g_i(\cdot,y)(z)$$

$$\forall z \in \dot{\mu}'_m \qquad (27).$$

Isto porque por 4-6

$$\partial g_i(\cdot,y)(x,\ x_n) \subseteq T_m^{\perp}$$

enquanto por 4-4

$$\partial g_i(\cdot,y)(x) = \partial g_i(\cdot,y)(x) \cap T_m^{\perp} \quad \forall x \in \dot{\mu}'_m .$$

Desse modo

$$\overline{\lim}\ g_i(x_n,\ u(x_n - (x + w_n^m)) = \max_{v \in \partial g_i(\cdot,y)(x,x_n)}$$

$$v \cdot u_{m+1} \leq \max_{v \in \partial g_i(\cdot,y)(x) \cap T_m} \{v \cdot u_{m+1}\} =$$

$$g_i(\cdot,y)'(z,\ u_{m+1}) \ \forall z \in \dot{\mu}'_m \text{ e } \forall i \in m_o^m. \qquad (28)$$

Note agora que $\forall i \in m_o^m$ se tem usando a condição c:

$$\frac{G(y + h_n d) - G(y)}{h_n} \leq \frac{g_i(x_n,\ y + h_n d) - G(y)}{h_n} =$$

$$= \frac{g_i(x_n,\ y + h_n d) - g_i(x_n,y)}{h_n} +$$

$$+ \frac{g_i(x_n,y) - g_i(x + w_n^m,\ y)}{h_n} \leq$$

$$\leq \frac{g_i(x_n,y + h_n d) - g_i(x_n,y)}{h_n} + g_i(\cdot,y)'(x_n,$$

$$u(x_n - (x + w_n^m)) \quad \frac{\| x_n - (x + w_n^m) \|}{h_n} .$$

Passando aos limites se tem

$$\ell^+ \leq g_i(x,\cdot)'(y,d) + \overline{\lim}\ (g_i(\cdot,y)'(x_n,u$$

$$(x-(x_n + w_n^m))) . \ \frac{\| x_n - (x + w_n^m) \|}{h_n} \} \qquad (29)$$

e como

$$\frac{\| x_n - (x + w_n^m) \|}{h_n} \geq \frac{\| x_n - (x + w_n^q) \|}{h_n} \to \infty$$

e $\ell^+ > -\infty$ se fica com:

$$\overline{\lim}\ g_i(\cdot, y)'(x_n, u(x_n - (x + w_n^m)) \geq 0$$

o que por (28) implica em se ter:

$$g_i(\cdot, y)'(z, u_{m+1}) \geq 0 \ \forall z \in \dot{Z}_m' \subseteq \dot{\mu}_m' \quad \text{e}$$

$$\forall i \in m_o^m . \quad (30)$$

Assim como $A_m' \subseteq A_m$ se tem que $Z_m' \subseteq Z_m$ e portanto pelo lema 4-1 $\forall z' \in Z_m'$ o segmento

$$[z', z' + f_{m+1}(z') u_{m+1}] \subseteq X. \quad (31)$$

Além disso 30 indica que

$$\forall z' \in Z_m \ \exists \delta_1(z') > 0 | \forall i \in m_o^m \quad \text{e}$$

$$z \in [z', z' + \delta_1(z') u_{m+1}] \quad \text{se tem}$$

$$g_i(x, y) \geq G(y). \ (32).$$

Pela condição 2-b $\forall z' \in Z_m'$ se pode indicar ainda

$$\delta_2(z') > 0 | \forall i \in \overline{1, K} - m_o^m \quad \text{se tem que}$$

$$\forall z \in [z', z' + \delta_2(z') u_{m+1}] \quad \text{é verdade que}$$

$g_i(x,y) > G(y)$ (33). Fazendo então

$$\varepsilon(x') = \min \{f_{i+1}(z'), \delta_1(z'), \delta_2(z')\}$$

31 a 33 e a própria definição de G(y) indicam que

$$\forall z' \in Z'_m \ \forall z \in [z', z' + \varepsilon(z')\, u_{m+1}]\ z' \in M_o(y)$$

e $$m_o(z\ ,y) \subseteq m_o^m \qquad (34).$$

Defina agora $\forall i \in m_o^m$ e $\forall z' \in Z'_m$

$$\varepsilon_i(z') = \max_{0 \leq \lambda \leq \varepsilon(z')} \{t \mid g_i(z' + tu_{m+1}, y) = G(y)\}$$

e faça $$F'_{m+1}(z') = \min_{i \in m_o^{m+1}(z')} \{\varepsilon_i(z')\}$$ onde

$$m_o^{m+1}(z') = \{i \in m_o^m \mid \varepsilon_i(z') > 0\}$$ e

arbitrando que $F'_{m+1}(z') = 0$ se $m_o^{m+1}(z') = \phi$.

Essa convenção não precisa ser utilizada pois 34 assegura que $\forall z' \in Z'_m \ m_o^{m+1}(z') \neq \phi$ e portanto $F'_{m+1}(z') > 0$.

É lógico que dado $z' \in Z'_m$ $\forall z \in (z', z' + F'_{m+1}(z')\, u_{m+1})$, $m_o(z,y)$ será o próprio $m_o^{m+1}(z')$.

Tome agora z'_1 e $z'_2 \in Z'_m$ e $i \in m_o^{i+1}(z'_1)$. Como $Z'_m \subseteq \dot{\mu}'_m$ existe $\gamma > 0 \mid z_2 + \gamma(z'_2 - z'_1) \in \mu_m$. Escolhendo agora $\hat{z}$ qualquer em $(z'_1, z'_1 + f'_{m+1}(z'_1)\, u_{m+1})$ a convexidade de $g_i(\cdot, y)$ e o fato de

$$g_i(z,y) = g_i(z'_2 + \gamma(z'_2 - z'_1), y) = G(y)$$

garantem que

$$g_i(z_2' + \frac{\gamma}{1+\gamma} \| \hat{z} - z_1' \| u_{m+1}, y) \leq G(y)$$

o mesmo devendo ocorrer $\forall z$ no segmento que vai de

$$z_2' \text{ a } z_2' + \frac{\gamma}{1+\gamma} \| \hat{z} - z_1' \| u_{m+1}$$

A desigualdade estrita entretanto não pode ocorrer em nenhum ponto desse segmento pois $g_i(\cdot, y)'(z_2', u_{m+1}) \geq 0$ por 30 além de se ter é claro que $g_i(z_2', y) = G(y)$. Dessa forma vale a igualdade

$$g_i(x,y) = G(y) \ \forall z \in [z_2', z_2' + \frac{\gamma}{1+\gamma} \| \hat{z} - z_1' \| u_{m+1}]$$

e portanto $i \in m_o^{m+1}(z_2')$.

Como z_1' e z_2' são elementos quaisquer em Z_m' e i é qualquer em $m_o^{m+1}(z_1')$ se pode concluir que $\forall z' \in Z_m'$ $m_o^{m+1}(z')$ é o mesmo subconjunto de m_o^m. Este conjunto será então referenciado por m_o^{m+1} enquanto que μ_o^{m+1} será

$$\{z \in T'_{m+1} | g_i(z,y) = G(y) \ \forall i \in m_o^{m+1}\}.$$

Defina agora $f'_{m+1} = A'_m \to (0,\infty)$

$$a_m = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \to F'_{m+1}(x + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j u_j) \quad \text{e}$$

$$A'_{m+1} = \{a_m + \alpha_{m+1} \bar{e}_{m+1} | a_m \in A'_m \quad \text{e}$$

$$0 < \alpha_{m+1} < f'_{m+1}(a_m)\}$$

$$A'_{m+1} \subseteq A_{m+1} \text{ pois } A'_m \subseteq A_m \text{ e } f'_{m+1}(a) \leq f_{m+1}(a_m).$$

$$Z'_{m+1} = \{z \mid z = x + \sum_{j=1}^{m+1} \alpha'_j u_j \text{ com } (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m+1})$$

$$\varepsilon A'_{m+1}\} = \{z \mid z = z'_m + \alpha'_{m+1} u_{m+1} \text{ com } z'_m \in Z'_m \text{ e}$$

$$0 < \alpha'_{m+1} < F'_{m+1}(z'_m)\} \subseteq M_o(y)$$

pela própria definição de $F'_{m+1}(z'_m)$.

$\forall z \in Z'_{m+1}$ $m_o(z,y) = m_o^{m+1}$ conforme foi visto antes e finalmente para provar que $Z'_{m+1} \subseteq \dot{\mu}'_{m+1} \triangleq$ interior de μ_{m+1} em T_{m+1} considere

$$z = z'_m + \alpha_{m+1} u_{m+1} \text{ em } Z'_{m+1} \text{ com } z'_m \text{ em } Z'_m.$$

Como $Z'_m \subseteq \dot{\mu}'_m$ $\exists$ $\delta' > 0 \mid \overline{B}_\delta(z'_m) \cap T'_m \subseteq \mu_m$ e fazendo

$$C = \overline{co}\,((\overline{B}_\delta(z'_m) \cap T'_m) \cup \{z'_m + F'_{m+1}(z'_m) u_{m+1}\})$$

como $\alpha_{m+1} < F'_{m+1}(z'_m)$ se tem que $z \in \dot{C}'$. Repetindo o raciocínio já efetuado anteriormente como $\forall i \in m_o^{m+1}$ $g_i(\cdot,y) \equiv G(y)$ em $\overline{B}_\delta(z'_m) \cap T'_m$ e $g_i(z'_m + F'_{m+1}(z'_m)u_{m+1},y) = G(y) = g_i(z,y)$ com $z \in \dot{C}'$ então $C \subseteq \mu_{m+1}$ e dado que $[C]' = T'_{m+1}$ $z \in \dot{C}' \subseteq \dot{\mu}_{m+1}$. Como z é qualquer em Z'_{m+1} completa-se a extensão de 14 a m + 1.

Tomando agora $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1}) \in A'_{m+1}$ se tem efetuando um desenvolvimento analógo ao realizado na prova da afirmação 4-3 que

$$\exists\, n' \,|\, \forall n > n',\ x_n \in \dot{S}'_{a_{m+1}} \triangleq \overline{co}(\{x, x + \sum_{i=1}^{j} \alpha_i\, u_i,\ j \in \overline{1,m+1}\}).$$

Como é fácil ver $\dot{S}'_{a_{m+1}} \subseteq \dot{\mu}'_{m+1}$ extendendo-se assim também 15 e completando-se a prova.

Retomando a demonstração do teorema 4 propriamente dito seja $m \in \overline{1,r}\ |$:

$$(\|\, x_n - (x - w_n^m) \| / h_n) \to \lambda < \infty \qquad \text{e}$$

$$(\|\, x_n - (x + w_n^{m-1}) \| / h_n) \to \infty .$$

Pelo lema 2 existe $Z'_m \subseteq T_m \cap M_o(y)\ |\ \forall z' \in Z'_m\ m_o(x',y) = m_o^m$ e como $Z'_m \subseteq Z_m$ o lema 1 garante que u_{m+1} é uma direção viável $\forall z' \in Z'_m$.

Além disso, $x \in \overline{Z}'_m$ e desse modo lembrando da observação C do capítulo II:

$$\hat{G}'(y,d) = \sup_{x \in M_o(y)} \{ \max_{v \in \overline{CR(x,X)}} \{ \min_{i \in m_o(x,y)}$$

$$\{g_i(\cdot,y)'(x,v) + g_i(x,\cdot)'(y,d)\}\}\} \geq \lim_{\varepsilon \to 0}$$

$$\{ \sup_{z \in Z_m \cap B_\varepsilon(\overline{x})} \{ \min_{i \in m_o^m} \{g_i(\cdot,y)'(z, \lambda\, u_{i+1}) +$$

$$+ g_i(z,\cdot)'(y,d)\}\}\} = \min_{i \varepsilon m_o^m} \{\lambda \max_{\delta_i \varepsilon \partial g_i(\cdot,y)(x)}$$

$$\cap T_m^{\perp} \{\delta_i u_{m+1} + g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \qquad (35).$$

Essa última igualdade é válida por 4-4 e pela condição 4-b do teorema.

Tomando novamente 29 $\forall i \varepsilon m_o^m$ pode-se escrever

$$\ell^+ \leq \min_{i \varepsilon m_o^m} \{\overline{\lim}\ g_i(\cdot,y)'(x_n, u(x_n - w_n^m)).$$

$$\frac{\| x_n - w_n^m \|}{h_n} + g_i(x,\cdot)(y,d)\} =$$

$$\min_{i \varepsilon m_o^m} \{\lambda \max_{\delta_i \varepsilon \partial g_i(\cdot,y)(x,x_n)} \{\delta_o \cdot u_{m+1}\} +$$

$$+ g_i(x,\cdot)(y,d)\} \qquad (36).$$

Finalizando como por 27

$$\partial g_i(\cdot,y)(x,x_n) \subseteq \partial g_i(\cdot,y)(x) \cap T_m^{\perp} \forall i \varepsilon m_o^m$$

e assim se tem a expressão 35 é a maior que a 36 e portanto:

$$\hat{G}(y,d) \geq \ell^+$$

encerrando a prova.

Observações:

A) Da própria demonstração do teorema 4 se pode deprender que devido ao mapeamento m_o não ser semi-contínuo inferiormente pode acontecer que nas condições desse teorema $\forall h \in [0,h']$ se possa tomar $x_h \in M_o(y+hd)$ com $x_h \to x$ e

$$G'(y,d) > \hat{g}'(x,y,d) \triangleq \max_{v \in CR(x,X)} \{ \min_{i \in m_o(x,y)}$$

$$\{g_i(\cdot,y)'(x,v) + g_i(x,\cdot)'(y,d)\}\} \qquad (37).$$

Um exemplo extremamente simples em que isso acontece é o seguinte:

$$g_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad i = 1,2 \ ; \ X = [a,-a]$$

$$g_1(x,y) = x^2 + \frac{x^3}{\|x\|} + 2y, \ z \neq 0; \ g_i(0,y) = 2y.$$

$$g_2(x,y) = x^2 - \frac{x^3}{\|x\|} + y, x \neq 0; \ g_2(0,y) = y.$$

Nesse caso $M_o(h) = \{- \ \ y\} \to \{0\}$ quando $h \to 0$ e $G'(0,1) = 2 > 1 = \hat{g}(0,0)$ conforme pode ser visualizado na figura 4.

É interessante notar que também da própria demonstração do teorema 3 quando as g_i são côncavas se verifica que nas condições desse teorema a situação descrita em 37 não pode ocorrer.

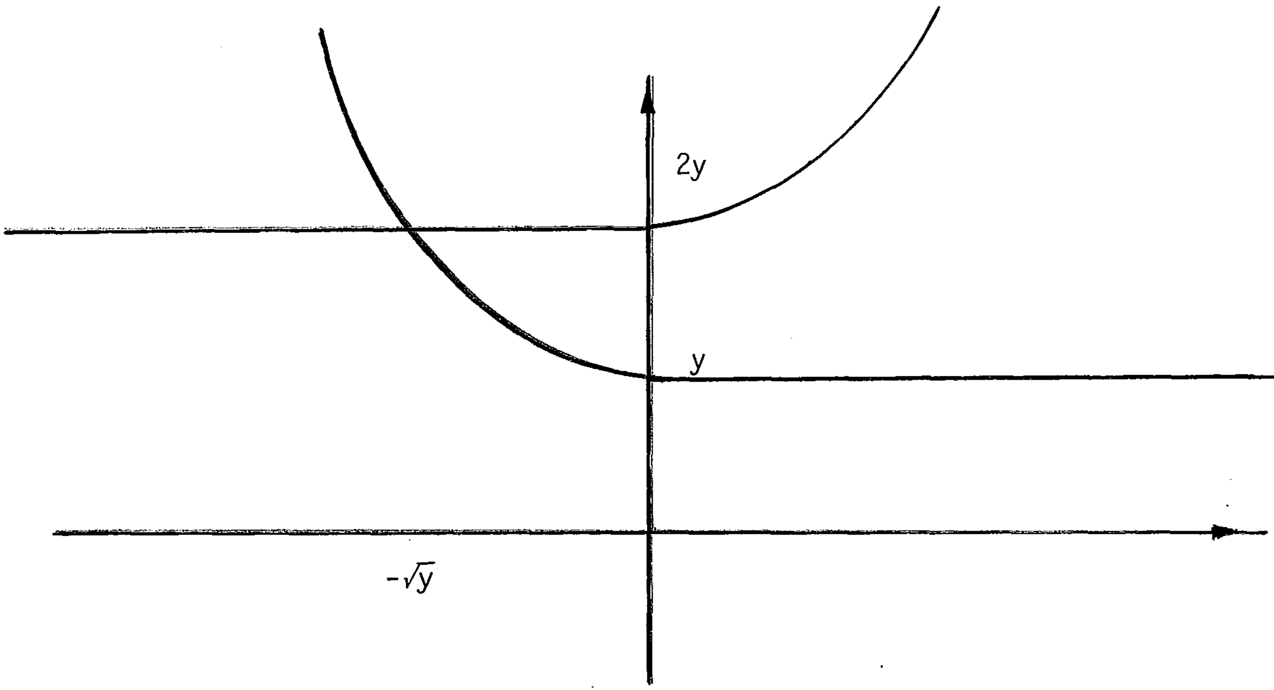


Figura 4

É essa diferença principalmente que acarreta o maior grau de dificuldade do teorema 4.

B) Convém notar que se no exemplo 2 X for substituído por $\{(x_1, x_2) | -\delta \leq x_1 \leq \delta$ e $0 \leq x_2 \leq f(x_1)\}$ cujo complementar pode ser obtido pela união de quatro conjuntos convexos e se mantiver as funções g_i que são côncavas então pelos mesmos motivos já indicados na discussão do exemplo 2 também não haverá derivada a direita para G. Portanto o teorema 4 não funciona quando meramente se troca a exigência sobre as g_i de serem côncavas para serem convexas em X.

C) É fácil ver que se os domínios das funções f e f'dadas nos lemas 4.1 e 4.2, forem reduzidos convenientemente elas podem ser feitas contínuas. Esse fato entretanto não tem a menor importância para a demonstração do teorema 4.

D) Se as condições exigidas das g_i na hipótese do teorema 4 forem substituídas por: "g_i é convexa $\forall i \in \overline{1,K}$", então efetuando um desenvolvimento análogo ao utilizado na prova desse teorema e lembrando dos resultados expressos na segunda parte da proposição 2 e no lema 1.1 se terá que:

$$G'(y,d) = \sup_{x \in M_0(y)} \{ \max_{v \in \overline{CR(x,X)}} \{ \min_{i \in m_0(x,y)} \{g_i'(x,y),(v,d))\}\}\}.$$

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA EM $\mathbb{R}$ E O CASO ANALÍTICO

Se é possível utilizar a expressão dada por $\hat{G}'(y,d)$ para se derivar unidirecionalmente a função de recobrimento de X, então como ficou claro na proposição 2 achar $G'(y,d)$ equivale a maximizar em $x \in M_0(y)$ e $v \in \overline{CR(x,X)}$ as derivadas em 0 das funções $\hat{g}_{x,v}(h) = \min_{i \in \overline{1,K}} g_i(x + hv, y + hd)$.

Nos casos indicados no capítulo anterior acontecia isso mas em geral não basta levar em conta apenas as $\hat{g}_{x,v}(h)$ em cuja expressão as g_i são avaliadas apenas em pontos que variam linearmente com h.

Por exemplo, quando $X \subseteq \mathbb{R}$, as g_i satisfazem à condição de desacoplamento e suas restrições $g_i(\cdot,y)$ ou possuem em todos os pontos de $M_0(y)$ a derivada de alguma ordem diferente de zero ou são identicamente nulas as $G'(y,d)$ existem e nem sempre serão dadas por $\hat{G}'(y,d)$. Na maioria dos casos será preciso considerar não propriamente as $\hat{g}_{x,v}$ mas para um determinado valor natural m, as funções de recobrimento de $\{x + \sqrt[m]{h}\, v\}$ em $y + hd$, onde de novo $x \in M_0(y)$ e $v \in \overline{CR(x,X)}$.

Esse resultado é estabelecido precisamente no decorrer desta seção, a partir de dois conceitos que são definidos inicialmente. Também é apresentado um exemplo na reta em que G não tem derivadas laterais para um dado y.

Outra consequência do fato de ser possível a identificação $\hat{G}'(y,d) \equiv G'(y,d)$ é que pelo menos para efeito de se determinar as derivadas unidirecionais de sua função de recobrimento, dada uma tolerância ε qualquer, o problema de se cobrir X é equivalente ao de cobrir com as mesmas g_i um segmento de reta com extremidade em um ponto de $M_0(y)$.

Novamente convém ressaltar que, nem sempre isso ocorre. Considerando o caso em que $X = \{x | S_j(x) \leq 0, j \in \overline{1,L}\}$ com as S_j analíticas reais o mesmo acontecendo com as g_i se tem uma classe ampla de problemas em que as $G'(y,d)$ existem mas onde geralmente para obtê-las é necessário computar as derivadas unidirecionais das funções de recobrimento de curvas partindo de $M_0(y)$.

Para essa classe de problemas quando $X \subseteq \mathbb{R}^2$ é demonstrada a validade de uma expressão para $G'(y,d)$ similar aquela apresentada para o problema na reta. Nessa demonstração são utilizados elementos da teoria de Puiseux para a caracterização dos zeros e de uma função analítica de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

Ainda para caracterizar a não generalidade da equivalência, nos termos já indicados, entre se cobrir X ou um segmento de reta partindo de $M_0(y)$ é dado um exemplo onde de $M_0(y) = \{x\} \in \dot{X}$ e as funções de recobrimento de qualquer semi-reta com origem em x tem derivada a direita negativa enquanto $G'(y,d) > 0$.

IV.1. o e q

O operador o e o mapeamento q relacionam sequências de números reais convergindo a zero e serão repetidas vezes utilizados neste capítulo.

Definições de o e q:

Dadas duas sequências de números reais (a_n) e (b_n) convergindo a zero se representa por $o(b_n, a_n)$ o $\sup_{s\varepsilon|0,\infty|}$ $\{s|\overline{\lim}\ |\frac{b_n}{a_n^s}| = 0\}$ e se $o(v_n, a_n) < \infty$ $q(b_n,a_n) = \{\ell\ \varepsilon\ \overline{\mathbb{R}}|\ \exists$ (a_{n_R}, b_{n_R}) subsequência de $(a_n,b_n)|\lim b_{n_R}/\ a_{n_R}^{o(b_n,a_n)} = \ell\}$.

o só pode tomar valores não negativos porque a_n e $b_n \to 0$ e com relação a q convém observar que $q(a_n,b_n)$ pode conter os valores 0 e $\pm\ \infty$ como acontece nos casos que se seguem.

a) $b_n = n^{-2} \log n$

$a_n = n^{-1}$

Nesse caso

$o(b_n,a_n) = 2$ pois dado $\varepsilon > 0$

$\frac{b_n}{a_n^{(2-\varepsilon)}} = \frac{\log n}{n^\varepsilon}$ e fazendo

$n^\varepsilon = m$ se tem $m \to \infty$ e

$\frac{\log n}{n^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\ \frac{\log m}{m} \to 0$ (1). Além disso:

$\lim \frac{b_n}{a_n^2} = \lim \log n = \infty \xRightarrow{1} q(b_n,a_n) = \{\infty\}$.

b) $b_n = n^{-(n+1)}$, $a_n = n^{-n}$

Aqui $o(b_n, a_n) = 1$ porque $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\frac{b_n}{a_n^{1+\varepsilon}} = n^{n\varepsilon - 1} \to \infty \qquad \text{e}$$

$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim n^{-1} = 0 \Longrightarrow q(b_n, a_n) = \{0\}.$$

Se no lugar das sequências se tivesse duas funções f_1 e f_2: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}|$ para um determinado $x \in \mathbb{R}^n$ $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f_1(x) = \lim\limits_{x \to \bar{x}} f_2(x) = 0$ se pode definir analogamente:

$$o_{\bar{x}}(f_2, f_1) = \sup_{s \in [0,\infty]} \{s | \overline{\lim_{x \to \bar{x}}} |f_2(x)/f_1(x)^s| = 0\}$$

e se $O_{\bar{x}}\ (f_2, f_1) < \infty$:

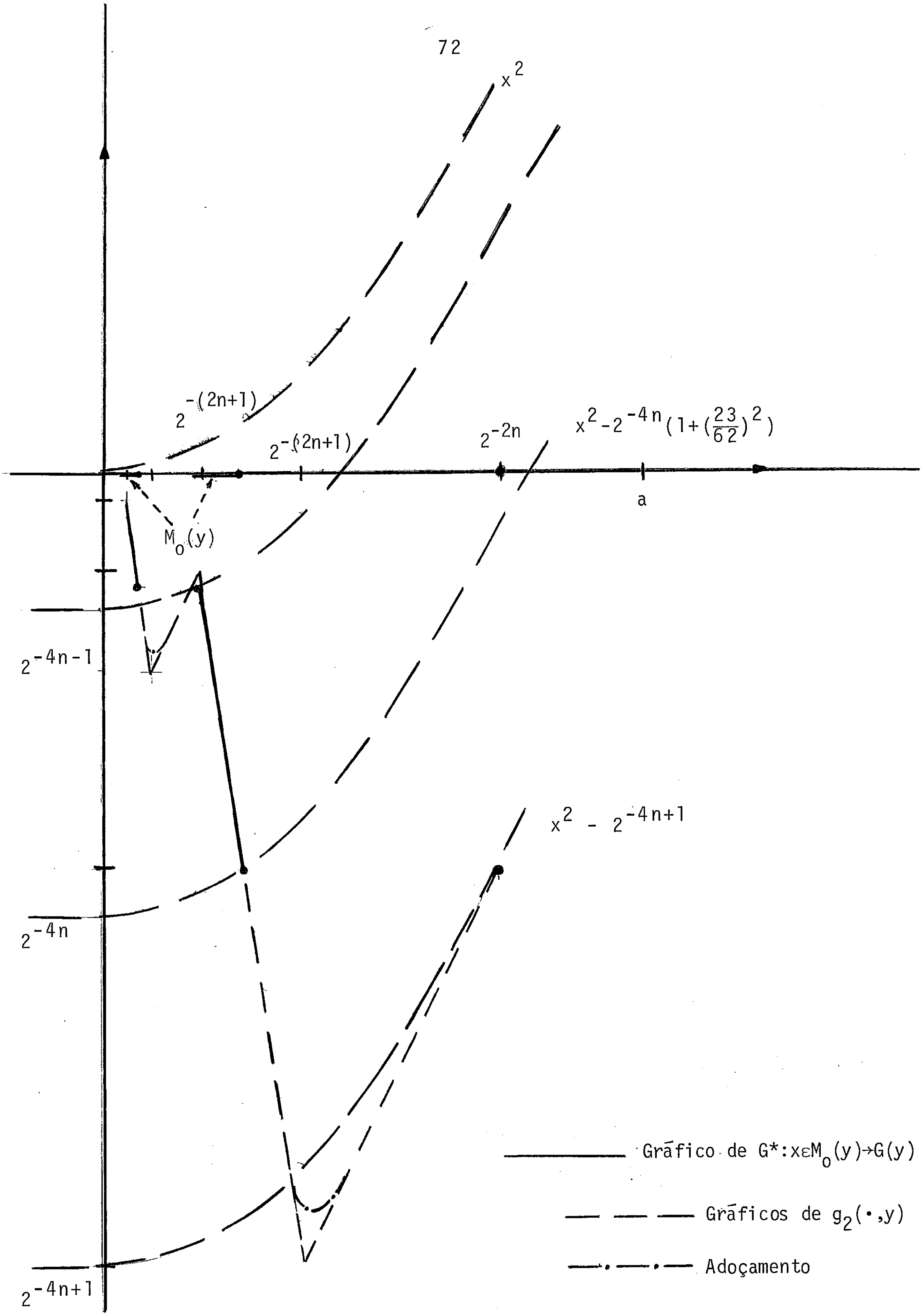
$$q_x(f_2, f_1) = \{\ell \in \mathbb{R} |\ \exists\ x_n \to x |$$

$$(f_2(x_n)/f_1(x_n))^{o_x(f_2, f_1)} \to \ell\}$$

IV.2. Um exemplo na Reta

Não é verdade que se possa garantir a existência de $G'(y,d)$ se as $g_i(\cdot, y)$ são diferenciáveis nos pontos de $M_o(y)$ ainda que X seja um intervalo na reta. A existência de $G'(y,d)$ pode depender também de haverem derivadas de ordem superior das $g_i(\cdot, y)$ nesses pontos.

Um exemplo que pode ajudar a esclarecer essa questão é o seguinte:



x^2
2^-(2n+1)
2^-(2n+1)
2^-2n
x^2-2^-4n(1+(23/62)^2)
a
M_o(y)
2^-4n-1
x^2 - 2^-4n+1
2^-4n
2^-4n+1
Gráfico de G*:xεM_o(y)→G(y)
Gráficos de g_2(•,y)
Adoçamento

FIGURA 5

Exemplo 1:

Sejam como na figura 5

I) $X = [-a,a]$ com $a > 0$.

II) $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to x^2 - y \text{ se } x \geq 0$$

$$(x,y) \to \quad - y \text{ se } x < 0$$

III) $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \mid g_2(x,y) = g_2'(x)$ e $g_2' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid$

a) $g_2'(x) = 0$ se $x \leq 0$

b) $g_2'(2^{-2n}) = -2^{-4n}$

c) $g_2'(2^{-2n+1}) = -8.2^{-2(2n+1)}$

d) g_2' é linear em $[2^{-(2n+1)}, 2^{-2n}]\ \forall n$

Considere então o problema de cobrir X com g_1 e g_2. Tem-se logo que:

$$M_0(0) = [-a,0] \text{ e } G(0) = 0.$$

Além disso, como pode ser observado na figura 5 $M_0(y)$ permanece em $1/2^{2n}$ enquanto y varia de

$$2^{-4n}\left[1 + \left(\frac{23}{62}\right)\right]^2 \quad \text{a} \quad 2^{-4n+1}.$$

Calculando então para os valores extremos desses intervalos

$$H_{y,d}(h) = \frac{G(y+h) - G(y)}{h}$$

se pode mostrar que ele oscila entre $1/2$ e $1/(1 + (23/62)^2)$ quando $h \to 0$ não existindo portanto limite.

É fácil verificar que g_2' é diferenciável em 0 podendo se tornar diferenciável em todos os pontos se os cantos de seu gráfico forem "adoçados". Se isso for feito convenientemente, pode-se garantir que $H_{y,d}(h)$ não deixa de oscilar. É simples verificar que essas oscilações acontecem porque $g_2'(0) = g_2'(0,0) = 0$ e $g_2' \equiv g_2(\cdot,0)$ não tem derivada segunda em 0.

IV-3. Condições para Existir G'(y,d) quando $X \subseteq \mathbb{R}$.

Condições suficientes para que $G'(y,d)$ exista quando $X \subseteq \mathbb{R}$ são dadas a seguir.

Elas exigem, como já foi comentado, que haja uma derivada qualquer não nula para as g_i ativas nos pontos de $M_0(y)$. A finalidade dessa exigência é supondo (x_n) uma sequência qualquer de pontos em $M_0(y + h_n d)$ convergindo para um ponto x de $M_0(y)$, obrigar que os valores de $q(g_i(x_n,y) - G(y), x_n - x)$ $i \in m_0(x,y)$ não sejam nem zero nem $\pm\infty$ ou então garantir que existem os limites quando $h_n \to 0$ dos quocientes

$$\frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{g_j(x_n,y) - G(y)} .$$

Essa segunda justificativa será melhor esclarecida na observação A após o teorema 5.

Se existir a j^a derivada de $g_i(\cdot,y)$ em x (que será notada $g_i(\cdot,y)^j(x)$) então $a_{ji}(x)$ representará $g_i(\cdot,y)^j(x)/j\,!$ Definindo agora $\forall x \in M_0(y)$ e $i \in m_0(x,y)$:

$$O(x,y,i) = o_x(g_i(\cdot,y)(x') - G(y),\ x' - x) \quad e$$

$$Q(x,y,i) = q_x(g_i(\cdot,y)(x' - G(y),\ x' - x)$$

é de fácil verificação que

$$O(x,y,i) = \min \{j \mid a_{ji}(x,y) \neq 0\} \quad e$$

$$Q(x,y,i) = \{a_{O(x,y,i),i}(x,y)\} \text{ se } O(x,y,i)$$

é finito . $a_{O(x,y,i),i}(x,y)$ será escrito abreviadamente $a(x,y,i)$.

<u>Teorema 5</u>:

Sejam:

a) $X \subseteq \mathbb{R} \mid CTS(x,X) = CR(x,X)$

b) $X \subseteq X_o \subseteq \mathbb{R}$, X_o aberto

$U \subseteq B$, U aberto, B espaço de Banach sobre os reais

c) $y \in U$ e $d \in B$

d) $g_i : X_o \times U \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,K}|$

1) Em todo $x \in M_o(y)$ $g_i(\cdot,y)$ possui a derivada de alguma ordem não nula ou $g_i \equiv 0$ em X_o.

2) $\exists$ $g_i(x,\cdot)(y,d)$ $\forall x \in X$ e

$$\frac{g_i(x,y+hd) - g_i(x,y)}{h} - g_i(x,\cdot)'(y,d) \to 0$$

quando $h \to 0$ uniformemente em x.

Então:

$G'(y,d)$ e

$$G'(y,d) = \tilde{G}'(y,d) \triangleq \sup_{x\varepsilon M_0(y)} \{ \sup_{v\varepsilon CR(x,X)}$$

$$\{ \min_{i\varepsilon m_0'(x,y,v)} \{|v|u(v)^{J(x,y,v)} . a_{J(x,y,v),i} +$$

$$+ g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \text{ se } J(x,y,v) < \infty \quad \text{ou}$$

$$\min_{i\varepsilon m_0'(x,y,v)} \{g_i(x,\cdot)'(y,d), \text{ se } J(x,y,v) = \infty$$

onde:

1) $u(v) = v/\|v\|$ se $v \neq 0$, $u(0)$ = real qualquer

2) $J(x,y,v) = \min \{0(x,y,i) | i \ \varepsilon \ m_0(x,y)$ e se $0(x,y,i) < \infty$ então $a(x,y,i).v^{0(x,y,i)} < 0\}$

3) $m_0'(x,y,v) = \{i \ \varepsilon \ m_0(x,y) | 0(x,y,i) \geq J(x,y,v)\}$

Prova:

Nesta demonstração $\tilde{g}'(x,y,v)$ representará

$$\min_{i\varepsilon m_0(x,y,v)} \{|v| . u(v)^{J(x,y,v)} . a_{J(x,y,v),i} +$$

$$g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \text{ se } J(x,y,v) < \infty \quad \text{ou}$$

$$\min_{i\varepsilon m_0(x,y,v)} \{g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \text{ se } J(x,y,v) = \infty.$$

Sejam mais uma vez

$$\ell^- = \underline{\lim}_{h\to 0} H_{y,d}(h) = \frac{G(y + hd) - G(y)}{h}$$

e (h_n) uma sequência $|h_n > 0\ \forall n$, $h_n \to 0$ e $H_{y,d}(h_n) \to \ell^-$. Sejam ainda, $x \in M_o(y)$ $v \in CR(x,X)$ e $m = J(x,y,v)$. Suponha inicial - mente que $m < \infty$. Eliminando então um número finito de termos de (h_n), por a,

$$x + \sqrt[m]{h_n.|v|}\ .\ u(v) \in X.$$

Considere então

$$i_n \in m_o(x + \sqrt[m]{h_n|v|}\ .\ U(v), y + h_n d).$$

Passando se necessário a uma subsequência se pode supor $i_n = i'$ e é claro que $i' \in m_o(x,y)$. Assim se pode escrever:

$$H(y + hd) \geq \frac{g_{i'}(x + \sqrt[n]{h_n|v|}.u(v), y+h_n d) - G(y)}{h_n}$$

$$= \frac{(x + \sqrt[m]{h_n|v|}.u(v), y) - G(y)}{h_n} +$$

$$\frac{g_{i'}\quad (x + \sqrt[m]{h_n\ |v|}.u(v), y + h_n d)}{h_n} -$$

$$\frac{-g_{i'}\quad (x + \sqrt[m]{h_n|v|}.u(v), y)}{h_n}. \qquad (1)$$

Passando aos limites fazendo uso de d.2 e supondo que $(x, y, i') < \infty$ vem:

$$\ell^- \geq \lim \frac{g_{i'}(x + \sqrt[m]{h_n . |v|} . u(v), y) - G(y)}{(u(v) . \sqrt[m]{h_n |v|})^{0(x,y,i')}} .$$

$$. \lim \frac{h_n^{\frac{0(x,y,i')}{m}}}{h_n} . (|v|^{1/m} . u(v))^{0(x,y,i')} +$$

$$+ g_i'(x,\cdot)'(y,d) \qquad (2)$$

A fatoração no produto de dois limites foi possível porque por d.1 o primeiro vale $a(x,y,i')$ que não é zero nem infinito e assim 2 pode ser escrita:

$$\ell^- \geq a(x,y,i') . (|v|^{1/m} . u(v))^{0(x,y,i')} .$$

$$\lim h_n^{\frac{0(x,y,i')}{m}} -1) + g_{i'}(x,\cdot)'(y,d) \qquad (3)$$

Se $i' \notin m'(x,y,v)$ então pela própria definição desse conjunto $a(x,y,i')(\alpha . u(v))^{0(x,y,i')} > 0 \; \forall \alpha > 0$ e $0(x,y,i') < m$. Nessas condições o primeiro termo de 3 vale $+ \infty$ se estabelecendo uma contradição uma vez que ℓ^- pelo teorema 1 e $g_i'(x,\cdot)'(y,v)$ são limitados. Portanto $i' \varepsilon m'(x,y,v)$.

Desse modo se tem que (3) = $a_{mi} . |v| . u(v)^m + g_i'(x,\cdot)(y,d)$ se $0(x,y,i')$ for m e $g_{i'}(x,\cdot)'(y,d)$ se $0(x,y,i')$ for $> m$. Mas nesse último caso $a_{mi'} = 0$ também e assim sempre se tem:

$$\ell^- \geq a_{mi'} . |v| . u(v)^m + g_{i'}(x,\cdot)'(y,d) \geq$$

$$\geq \min_{i\in m_0'(x,y,v)} \{a_{mi}\cdot|v|.u(v)^m + g_i(x,\cdot)'(y,d)\} =$$

$$= \tilde{g}'(x,y,v) \qquad (4)$$

Se $O(x,y,i') = \infty$ então de novo por d.1 $g_{i'}(x,y) = G(y)\ \forall x \in X_0$ eliminando-se o primeiro termo em 1.

Fazendo então $h \to 0$, como é claro que $i' \in m_0'(x,y,v)$, se fica com:

$$\ell^- \geq g_{i'}(x,\cdot)'(y,d) = a_{mi'}\cdot|v|.u(v)^m +$$

$$+ g_{i'}(x,\cdot)'(y,d) \geq \min_{i\in m_0'(x,y,v)} (a_{mi}|v|.u(v)^m +$$

$$+ g_i(x,\cdot)'(y,d)) = \tilde{g}'(x,y,v) \qquad (4')$$

Imagine agora que $m = \infty$. Seja então

$$m^+ = \max\{O(x,y,i)\,|\,O(x,y,i) < \infty \text{ e } v^{O(x,y,i)}.$$

$$a(x,y,i) > 0\}$$

e tome um inteiro positivo $p > m^+$. Novamente tirando um número finito de termos se pode fazer $x + \sqrt[p]{h_n}\ v \in X$ e repare que se $i' \in m_0(x + \sqrt[p]{h_n}\ v,\ y + h_n d)\ \forall n$ o que pode ser assumido, então $i \in m_0(x,y)$ e $O(x,y,i') = \infty$ porque se isso não acontece, como $m = \infty$, $O(x,y,i') \leq m^+$. Nessas condições efetuando um desenvolvimento análogo ao que levou a obtenção de 3 se consegue:

$$\ell^- \geq a(x,y,i').v^{0(x,y,i')} \lim h_n^{\frac{0(x,y,i')}{p}-1} +$$

$$g_i'(x,\cdot)'(y,d)$$

onde a primeira parcela é de novo $+\infty$ o que como já foi visto, gera um absurdo. Assim $0(x,y,i') = \infty$ e outra vez por d.1 $g_{i'}(\cdot,y) = G(y)$ em X_0. Assim é simples ver que

$$\ell^- \geq \lim g_{i'}(x + \sqrt[p]{h_n}\, v,\ y + h_n d) -$$

$$g_{i'}(x + \sqrt[p]{h_n}.v,y)/h_n = g_{i'}(x,\cdot)'(y,d) \geq$$

$$\min_{i\varepsilon m_0'(x,y,v)} g_i(x,\cdot)'(y,d)(i' \ \varepsilon\ m_0'(x,y,v)) =$$

$$= \tilde{g}'(x,y,v) \qquad (4")$$

(4), (4') e (4") mostram que em qualquer dos casos possíveis $\ell^- \geq \tilde{g}'(x,y,v)$. Como x e v são quaisquer em $M_0(y)$ e $CR(x,X)$ respectivamente se tem $\ell^- \geq \tilde{G}'(y)$.

Sejam por outro lado,

$$\ell^+ = \overline{\lim_{h\to 0}}\ H_{y,d}(h) \text{ e } (h_n')|h_n' > 0\ \forall n,\ h_n' \to 0 \text{ e}$$

$$H_{y,d}(h_n') \to \ell^+.$$

Considere também

$$(x_n')\ x_n' \ \varepsilon\ M_0(y + h_n'd),\ x_n' \to x\ \varepsilon\ M_0(y).$$

Passando se necessário a subsequências pode-se pensar que $x_n' = x$ $\forall n$ ou $x_n' \neq x$ $\forall n$.

No primeiro caso se estabelece com facilidade de que $\ell^+ = \min_{i\varepsilon m_0(x,y)} g_i(x,\cdot)'(y,d)$ e como

$m_0(x,y) = m_0'\ (x,y,0)$ se tem logo que

$\ell^+ \leq \tilde{G}'(y,d)$ completando a prova.

No outro caso pode-se assumir que $\dfrac{x_n' - x}{|x_n' - x|} \to u$.

Vai se verificar agora que $o' = o(h_n',\ x_n' - x) \leq J(x,y,u)$. Se isso não acontece então $J(x,y,u) < \infty$ e se pode escolher

$i' | O(x,y,i') = J(x,y,u)$ e $a' = u^{J(x,y,u)}$

$a\ (x,y,i') < 0.$

Como se pode assumir que

$$h_n'/(x_n' - x)^s \to 0\ \forall s < o', \qquad (5)$$

para esse i' é verdade que:

$$H_{y,d}(h_n') \leq (g_{i'}(x_n',\ y + h_n'd) - g_{i'}(x,y))/h_n' =$$

$$= \frac{g_{i'}(x_n',\ y + h_n'd) - g_{i'}(x_n',y)}{h_n'} \quad +$$

$$+ \frac{g_i' (x_n',y) - g_i'(x_n',y) - g_i'(x,y)}{|(x_n' - x)|^{J(x,y,u)}} \frac{|(x_n' - x)^{J(x,y,u)}|}{h_n'}$$

(6)

Quando $h_n' \to 0$ se verifica que a primeira parcela do lado direito permanece limitada enquanto os dois termos que constituem a segunda tendem a: a' < 0 e $+\infty$(o' > J(x,y,u)). Se obtêm assim $\ell^+ = -\infty$ em contradição com o que afirma o teorema 1. Portanto o' $\leq$ J(x,y,u). (7).

Utilizando o mesmo raciocínio se pode mostrar também que não é possível se ter o' = J(x,y,u) < ∞ e ao mesmo tempo $0 \in q' = q(h_n', |x_n' - x|)$ pois nesse caso identificando x_n' com uma de suas subsequências se poderia fazer

$$\lim \frac{h_n'}{|x_n' - x|^{J(x,y,u)}} = 0$$

e assim se teria que todos os limites do lado direito 6 continuariam os mesmos chegando-se ao mesmo absurdo: $\ell^+ = -\infty$.

Feitas essas constatações, retoma-se a prova propriamente dita escrevendo que é sempre verdade que:

$$\ell^+ = \lim H(y,d)(h_n') = \min_{i \in m_0(x,y)} \{\overline{\lim}(g_i(x_n',$$

$$y + h_n'd) - G(y)/h_n'\} \leq \min_{i \in m_0'(x,y,u)}$$

$$\{\overline{\lim}(g_i(x_n', y + h_n'd) - G(y))/h_n'\} \qquad (8)$$

Suponha agora ou que $o' < J(x,y,u) < \infty$ e nesse caso repita a suposição realizada em 5 ou que $o' = J(x,y,u) < < \infty$ e $\infty \in q'$ identificando então x_n com uma subsequência de forma que $(h_n'/|x_n - x'|^{o'}) \to \infty$.

Nessas duas situações vê-se que:

$$(8) = \min_{i \in m_0'(x,y,u)} \{\overline{\lim} \frac{g_i(x_n',y) - g_i(x,y)}{|x_n - x|^{J(x,y,u)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{|x_n - x|^{J(x,y,u)}}{h_n} + g_i(x,\cdot)'(y,d)\} =$$

$$= \min_{i \in m_0'(x,y,u)} \{g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \qquad (9)$$

uma vez que $\dfrac{|x_n - x|^{J(x,y,u)}}{h_n} \to 0$ e o outro termo do produto permanece limitado. Mas

$$(9) = \lim_{t \to 0^+} \{ \min_{i \in m_0'(x,y,tu)} \{a_{J(x,y,tu),i}\, t^{J(x,y,tu)}\, u^{J(x,y,tu)} + g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \,(J(x,y,tu) =$$

$$= J(x,y,u)$$

e portanto se pode dizer que $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists t|$

$$\ell^+ \leq \tilde{g}'(x,y,tu) + \varepsilon \qquad (10)$$

Imagine a seguir que $o' = J(x,y,u) < \infty$, $\infty \notin q'$. Nesse caso se pode fazer

$$\frac{h'_n}{|x'_n - x|^{J(x,y,u)}} \to s \in (0,\infty)$$

(já foi mostrado que s não pode ser 0). Assim:

$$\frac{(x'_n - x)^{J(x,y,u)}}{h'_n} \to \frac{1}{s} \; u^{J(x,y,u)} \qquad \text{e}$$

$$\ell^+ \leq (8) = \min_{i\in m'_0(x,y,u)} \{a_{J(x,y,u),i} \cdot \frac{1}{s}$$

$$u^{J(x,y,u)} + g_i(x,\cdot)'(y,d)\} = \tilde{g}'(x,y,\frac{1}{s}\,u)$$

$$(10')$$

Finalmente se $J(x,y,u) = \infty$ de novo por d.1

$$\ell^+ \leq (8) = \min_{i\in m'_0(x,y,u)} \{g(x,\cdot)'(y,d)\} =$$

$$\tilde{g}'(x,y,u) \qquad (10'')$$

10, 10' e 10" podem ser englobados em uma única afirmativa: $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\; x \in M_0(y)$ e $v \in CR(x,X) | \ell^+ \leq$ $\leq \tilde{g}'(x,y,v) + \varepsilon$ e por conseguinte

$$\ell^+ \leq \sup_{x\varepsilon M_o(y)} \{ \sup_{v\varepsilon CR(x,X)} \{\tilde{g}'(x,y,v)\}$$

finalizando a demonstração.

Um exemplo de aplicação do teorema 5.

- Exemplo: Sejam

$g_i(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ |

$g_1(x,y) = 2y$

$g_2(x,y) = 5(x + y)$

$g_3(x,y) = 5x^3 + 8y$

$g_4(x,y) = 2(x(x - 1))^3 + 3y$

$g_5(x,y) = -(x - 1)^3$ e

$X = [-1,1]$.

As $g_i(\cdot,0)$ estão representadas na figura 6.

Todos os elementos satisfazem as condições do teorema 5 e assim pode-se encontrar $G'(0,1)$ pela expressão a partir dos elementos:

$M_o(0) = \{0,1\}$

$m_o(0,0) = \{1,2,3,4\}$, $CR(0,X) = \mathbb{R}$

$m_o(1,0) = \{1,4,5\}$, $CR(1,X) = (-\infty,0)$

$$J(0,0,v) = \infty \quad \text{se} \quad v > 0$$

$$J(0,0,v) = 1 \quad \text{se} \quad v < 0$$

$$J(1,0,v) = 3 \quad \text{se} \quad v < 0$$

$$J(0,0,0) = J(1,0,0) = 0.$$

De posse desses elementos usando a expressão vem:

$$G'(0,1) = \max\{2; \max_{\lambda>0} \{\min \{2,5-5\lambda,8\}\};$$

$$\max_{\lambda>0} \{\min \{2,3-2\lambda,\lambda\}\};\min \{2,5,8,3,0\}\}$$

(cada um dos quatro termos corresponde a um valor diferente de J) igual a

$$\max \{2;2;1;0\} = 2.$$

Observações:

A) Considere mais uma vez as sequências

(h_n) e (x_n), $h_n > 0$, $h_n \to 0$ e $x_n \in M_o(y+h_nd) |$

$\# (m_o (x_n, y + h_nd) \geq 2.$

Passando se necessário a uma subsequência pode-se supor que

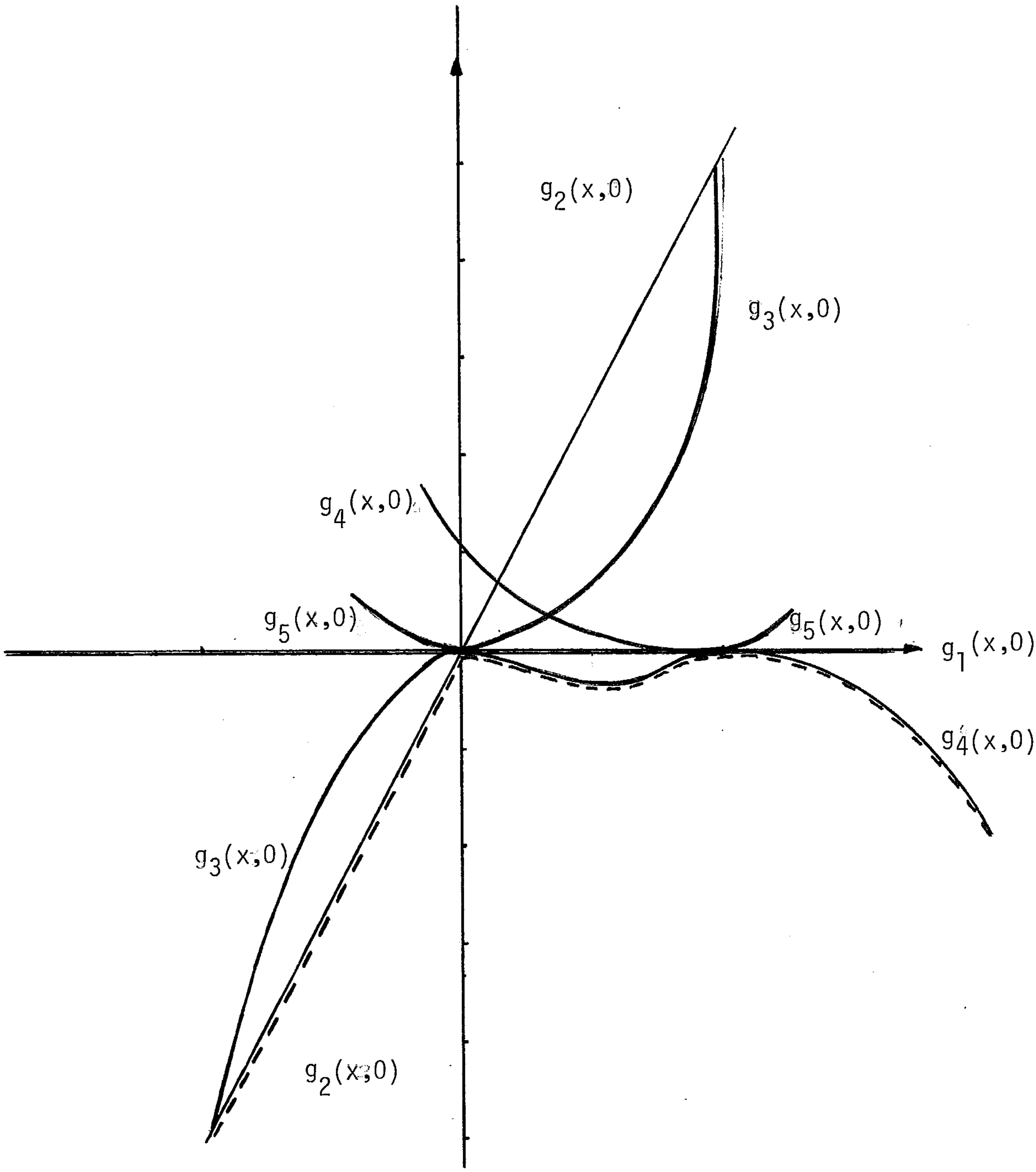


Figura 6

$$i \text{ e } j \in m_o(x_n, y + h_n d) \ \forall n \quad \text{e} \quad x_n \to x \ .$$

$$g_i(x_n, y + h_n d) = g_j(x_n, y + h_n d) \iff$$

$$\frac{g_i(x_n, y + h_n d)}{h_n} - \frac{g_i(x_n, y)}{h_n} + \frac{g_i(x_n, y) - G(y)}{h_n} =$$

$$= \frac{g_i(x_n,y + h_n d) - g_j(x_n,y)}{h_n} - (g_i(x_n,y) -$$

$$- G(y))/h_n \Longrightarrow (g_i(x_n,y) - G(y))/h_n =$$

$$= \frac{\dfrac{g_j(x_n,y+h_n d) - g_j(x_n,y)}{h_n} \qquad \dfrac{g_i(x_n,y+h_n d)-g_i(x_n,y)}{h_n}}{1 - \dfrac{g_j(x_n,y) - G(y)}{g_i(x_n,y) - G(y)}}$$

Assim como

$$G'(y,d) = g_i(x,\cdot)'(y,d) + \lim \frac{g_i(x_n,y+h_n d)-G(y)}{h_n}$$

e o numerador de tende para $g_j(x,\cdot)'(y,d) - g_i(x,\cdot)'(y,d)$ para que $G'(y,d)$ exista é necessário que haja o limite em $\mathbb{R}$ de $g_j(x_n,y) - G(y)/(g_i(x_n,y) - G(y))$ o que pode ser assegurado se as g_i satisfizerem a condição d.1 do teorema. Pode-se então de certa forma justificar essa condição em termos de se procurar garantir a existência do limite desse quociente pela aplicação da regra de L'Hospital.

B) É possível mostrar também que nas condições do teorema $G'(y,d)$ pode ser dada por um limite quando $\varepsilon \to 0$ de uma expressão como a dada por $\hat{G}'(y,d)$ diferindo apenas porque se irá considerar pontos em uma ε-vizinhança de $M_0(y)$ e para cada um desses pontos (x) as g_i que são ativas em elementos de $M_0(y) \cap B(x,\varepsilon)$.

Formalmente essa nova expressão é a seguinte:

$$G'(y,d) = \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \sup_{x \in M_\varepsilon(y)} \{ \max_{v \in CR(x,X)} \{ \min_{i \in m_\varepsilon(x,y)} \{ \frac{\partial g_i}{\partial x}(x,y) \, . \, v + g(x,\cdot)'(y,d) \} \} \quad \text{onde:}$$

$$M_\varepsilon(y) = \{ x \mid M_0(y) \cap B(x,\varepsilon) \neq \phi \} \quad \text{e}$$

$$m_\varepsilon(x,y) = \{ i \mid \exists \; x' \in M_0(y) \cap B(x,\varepsilon) \mid$$

$$\mid i \in m_0(x',y) \}.$$

4-3 O Caso Analítico no $\mathbb{R}^2$

Vai se abordar agora o caso em que as $g_i(\cdot,y)$ são funções analíticas em um aberto contendo X que, por sua vez também é dado por restrições analíticas.

O objetivo desta apresentação é mais o de fornecer um exemplo de uma classe relativamente vasta de casos em que a determinação de $G'(y,d)$ não é equivalente a maximizar as derivadas das funções de cobertura de segmentos de reta viáveis com extremidade em um ponto de $M_0(y)$. Por esse motivo se optou por tratar o problemas apenas no $\mathbb{R}^2$ onde inegavelmente os resultados podem ser demonstrados de forma menos trabalhosa. Entretan to não é difícil extender esses resultados que serão expostos aqui a dimensões maiores usando o mesmo tipo de approaching . Isso será matéria de trabalho que se seguirá a este.

4.3.1 - Um Contra-Exemplo

Considere

$$G_{x,v}(y) = \max_{X \quad \{x+\lambda v . \lambda>0\}} \{ \min_{i\varepsilon \overline{1,K}} \{g_i(x+\lambda v, y)\}$$

e suponha que X é tal que

$$\forall x \in M_0(y) \text{ e } v \in CR(x,X) \text{ exista } G'_{x,v}(y,d)$$

para dados y e d. O exemplo abaixo mostra que nem sempre

$$G'(y,d) = \sup_{x\varepsilon M_0(y)} \{ \sup_{v\varepsilon CR(x,X)} \{G'_{x,v}(y,d)\}\}$$

ainda que $M_0(y)$ esteja em $\dot{X}$.

Exemplo: Sejam:

a) X uma vizinhança da origem como a apresentada na figura 7.

b) $g_i: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad i = 1,2,3$

$g_1(x_1,x_2,y): - x_1^5 \qquad\qquad +10y$

$g_2(x_1,x_2,y): - x_1^3 + x_1x_2 - \ y$

$g_3(x_1,x_2,y): +2x_1^3 - x_1x_2$

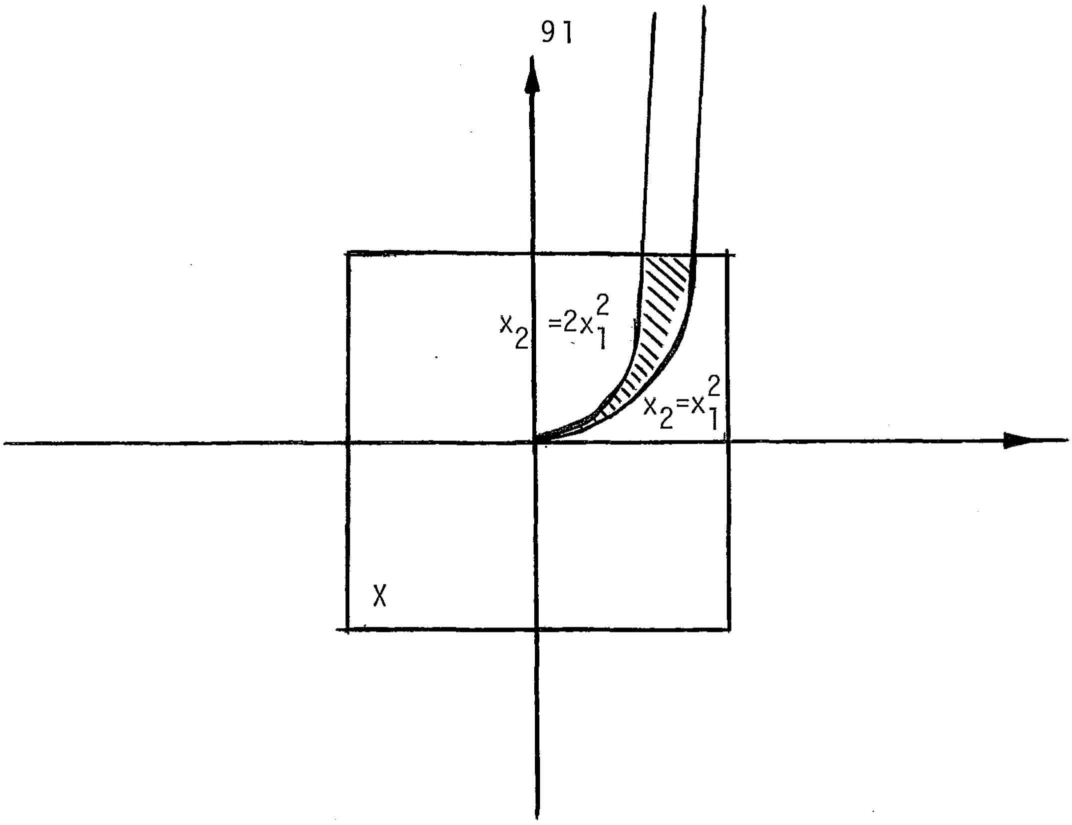


Figura 7

É simples verificar que $M_0(0) = \overline{0}$. Considerando inicialmente os segmentos que saem da origem, a exceção do horizontal e do vertical, isto é, fazendo $x_2 = k\, x_1$; $k \neq 0$ vai se obter que $o_0(g_i(x_1, kx_1, 0))$ para $i = 1,2,3$ vale 5, 2 e 2 respectivamente. O termo de mais baixa ordem com coeficiente negativo aparecerá na expressão de $g_3(x_1, x_2, 0)$ valendo $-kx_1^2$ se $k > 0$ ou de $g_2(x_1, x_2, 0)$ se $k < 0$ sendo então kx_1^2. Em ambos os casos considerando $d = 1$ e utilizando o teorema 5 se terá fazendo

$$(v = (1,k)), G'_{0,v}(0,1) = \max_{\lambda \geq 0} \{\min\{10, k\lambda - 1, -k\lambda\}$$

$$= -1/2.$$

Para o segmento vertical $v = (0, \pm 1))$ se terá

$$g_i(x_1, 0, 0)) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1,2,3 \qquad \text{e}$$

$$G'_{o,v}(0,1) = \min\{10, -1, 0\} = -1$$

enquanto que para o eixo dos x_1 ($v=(\pm 1,0)$) o teorema 5 indicará

$$-1 = \max_{\lambda \geq 0} \{\min\{10, -1-\lambda, 2\lambda\}\} \text{ se } v=(1,0)$$

e

$$-\frac{2}{3} = \max_{\lambda \geq 0} \{\min\{10, -1+\lambda, -2\lambda\}\} \text{ se } v=(-1,0)$$

para valor de $G'_{o,v}$. Nesse último caso seguindo ainda a notação do teorema 5 se tem que $J(0,0,\pm 1) = 3$.

$G'_{o,o}(0,1) = -1$ também e juntando todos os casos se tem finalmente:

$$\max_{v \in \mathbb{R}^2} \{G'_{o,v}(0,1)\} = -1/2.$$

Considere agora

$$X_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, 3/2\, x_1^2) \in X$$

e as funções $g_i^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$g_i^1(x_1) = g_i^1(x_1, 3/2\, x_1^2, y),\ i \in \overline{1,3} \quad \text{e}$$

$$G_1(y) = \max_{x \in X_1} \{\min_{i \in \overline{1,3}} g_i^1(x,y)\}.$$

Pelo teorema 5

$$G_1'(0,1) = \max_{\lambda > 0} \{10 - \lambda\} = 10.$$

$G_1'(0,1)$ é claramente $\leq G'(0,1)$ mas como pela proposição 1

$$G'(y) \leq \max_{i=1,2,3} g'(x,\cdot)(y,d) = 10$$

se tem $G_1'(0,1) = G'(0,1) = 10$.

A diferença entre os dois valores encontrados (10 e -1/2) pode ser explicada da seguinte forma. A parte hachurada na figura 7 representa a região de X em que o recobrimento em $y = 0$ cabe a g_1(isto é, essa região não pode ser coberta em $y = 0$ apenas por g_2 e g_3 sem que o valor de G aumente). Entretanto nenhum segmento de reta pode atingir $\overline{0}(= M_0(y))$ se mantendo nessa região. Pode-se então dentro de um segmento, próximo de $\overline{0}$ dispensar a participação de g_1. Como

$$\frac{\partial g_1(0,0)}{\partial y} > \frac{\partial g_i(0,0)}{\partial y} \qquad i = 2,3$$

e as g_i são analíticas o mesmo pode ser feito para $y < \delta$ suficientemente pequeno.

4.3.2. Sejam X, y, d, g_i; $i \in \overline{1,k}$, G como nas seções anteriores:

Dada uma função analítica

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0$, $s \in \{0,1,-1\}$, $m \in \mathbb{N}$ e

$x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ defina

$$\phi_{x,s,m,f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$\lambda \mapsto (x_1 + s\,\lambda^m,\ x_2 + f(\lambda)).$$

Considere então

$$\tilde{G}(x,s,m,f)(y) = \max_{\phi_{x,s,m,f}(\mathbb{R}) \quad X} \{ \min_{i\varepsilon\overline{1,K}} g_i(z,y)\}.$$

Se X for como sempre, compacto e dado por um número finito de restrições analíticas $s_j, j \in \overline{1,L}$ (mais precisamente

$$\{s_j(x) \leq 0,\ j \in \overline{1,L}\}) \qquad \text{então}$$

$$X_\lambda(x,s,m,f) \triangleq \{\lambda\} \ \phi_{x,s,m,f}(\lambda) \in X\}$$

será constituído por um número finito de intervalos. Caso contrário existiria $j \in \overline{1,L}$ e uma sequência convergente $\lambda_n | s_j \cdot \phi_{x,s,m,f}(\lambda_{2n}) > 0$ e $s_j \cdot \phi_{x,s,m,f}(\lambda_{2n+1}) \leq 0 \ \forall n$ o que não é possível pois $s_j \cdot \phi_{x,s,m,f}$ é analítica. Portanto $X_\lambda(x,s,m,f)$ satisfaz a condição a do teorema 5.

Suponha agora que as $g_i(\cdot,y)$ também sejam analíticas. Nesse caso as $g_i(\phi_{x,s,m,f}(\cdot),y)$ também o serão e se a condição de desacoplamento também for satisfeita $\forall g_i, i \in \overline{1,K}$, então todas as exigências desse teorema serão atendidas. Assim como $\tilde{G}(x,s,m,f)(y)$ também pode ser escrita

$$\max_{\lambda\varepsilon X_\lambda(x,s,m,f)} \{ \min_{i\varepsilon\overline{1,K}} g_i\,(\phi_{x,s,m,f}(\lambda),y)\}$$

se garante a existência de $\tilde{G}(x,s,m,f)'(y,d)$.

Vai ser mostrado a seguir que as $G'(y,d)$ existem podendo ser exatamente expressas por:

$$\sup_{x \varepsilon M_o(y)} \{ \sup_{\substack{s \varepsilon \{1,0,-1\} \\ m \varepsilon \mathbb{N} \\ f \varepsilon F_o}} \{\tilde{G}(x,s,m,f)'(y,d)$$

onde

$$F_o = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ analíticas e } | f(0) = 0\}$$

Antes porém se deve apresentar uma proposição que permitirá dar tratamento a certos casos em que o fato de se ter que $\exists h_n \to 0 |$

$$\forall x_n = (x_n^1, x_n^2) \varepsilon M_o(y + h_n d), \; o(x_n^2, x_n^1) = \infty$$

pode trazer dificuldades.

4.3.3. <u>Teorema 6</u>

Sejam $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analítica e uma sequência $((a_n, b_n))$ tal que:

$$(a_n, b_n) \to 0, \; a_n > 0, \; b_n \geq 0, \; \frac{b_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{e}$$

$$F(a_n, b_n) a_n^K \to 0 \quad \forall k \varepsilon \mathbb{N} \qquad (1)$$

Então $\exists\ \delta > 0$ e $f:(-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ analítica com $f(0) = 0$, $m \in \mathbb{N}$ e uma subsequência

$$(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}) \mid F(a, f(\sqrt[m]{a})) = 0 \ \forall a \in [0, \delta^m)$$

e

$$(b_n - f(\sqrt[m]{a_{n_\ell}}))/a^k_{n_\ell} \to 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \qquad (2)$$

Uma consequência imediata desse fato é que se para essa mesma sucessão (a_n, b_n) existe outra função analítica

$$F^*: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{tal que}$$

$$F^*(a_n, b_n)/a_n^k \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \text{então}$$

$$F^*(a, f(\sqrt[m]{a})) = 0 \ \forall a \in [0, \delta^m] \qquad (3)$$

Prova:

Se F é nula a proposição expressa em 1 é trivial e se $\exists$ uma subsequência $(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}) \mid F(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}) = 0$ $\forall n_\ell$ então como F é analítica e $b_{n_\ell}/a_{n_\ell} \to 0$ o teorema de Puiseux (ver teorema A do Apêndice) garante a existência de uma função f e de um inteiro m | $b_{n_\ell} = f(\sqrt[m]{a_{n_\ell}})$ encerrando a demonstração.

Se não existe tal subsequência então $F(a_n, b_n) \neq 0$ $\forall n$ e se pode supor se preciso eliminando termos que $F(a_n, b_n) > 0$ (ou $F(a_n, b_n) < 0$) $\forall n$. Além disso pode se imaginar que $F(a_n, \cdot)$ é não-crescente em b_n (ou não-decrescente em b_n) $\forall n$.

Feitas essas considerações se tem três possibilidades:

a) existe uma raiz b_n^1 de $F(a_n,\cdot)|b_n^1 > b_n$ e $F(a_n,\cdot)$ é decrescente em $[b_n, b_n^1]$.

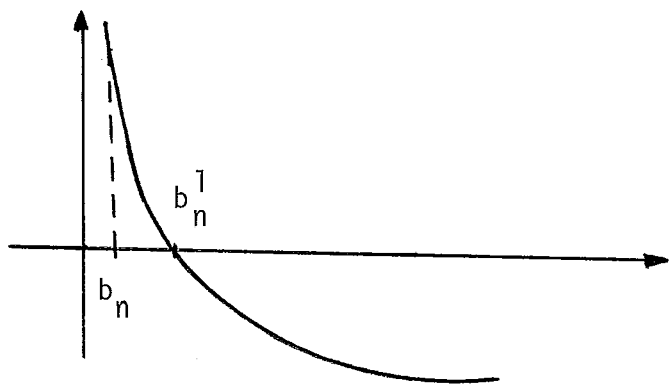


Figura 8.1.

b) existe pelo menos uma raiz de $F'(a_n,\cdot)$ a direita de b_n e se b_n^2 é menor raiz de $F'(a_n,\cdot)$ a direita de b_n então $0 \leq F(a_n, b_n^1) \leq F(a_n, b_n)$.

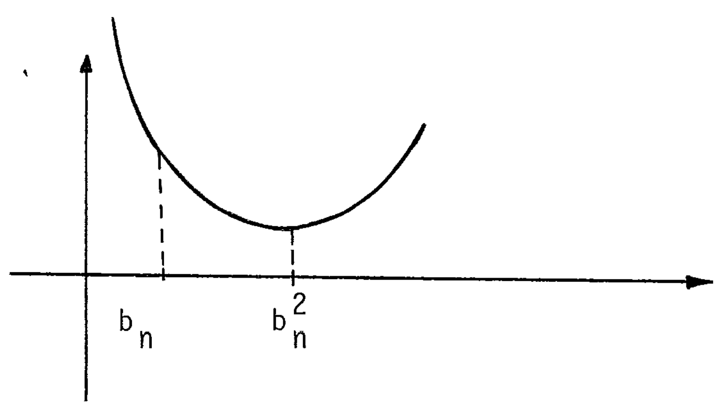


Figura 8.2.

c) $F(a_n,\cdot)$ decresce a direita de b_n sem se anular.

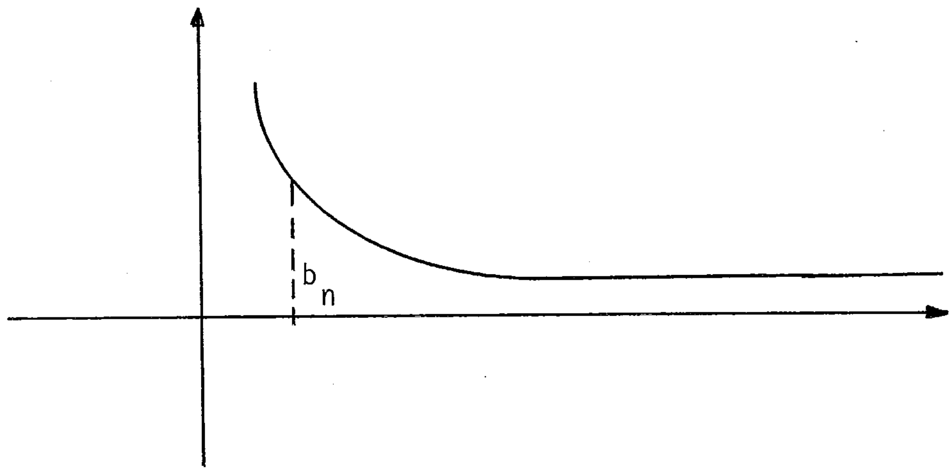


Figura 8.3.

Vai se mostrar inicialmente que o caso c não pode se repetir uma infinidade de vezes. Se isso acontecesse tomando então uma curva analītica qualquer $b = \hat{f}(a)$ com $\hat{f}(0) > 0$ se terā que para n suficientemente grande $b_n < \hat{f}(a_n)$ e portanto $0 < F(a_n, \hat{f}(a_n)) < F(a_n, b_n)$. Assim:

$$\frac{F(a_n, \hat{f}(a_n))}{a_n^k} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

e como F e $\hat{f}$ são analīticas $F(a_n, \hat{f}(a_n)) = 0$. Chega-se assim a uma contradição. Procedendo de maneira idêntica se pode descartar também as hipōteses $b_n^i \to \infty$ $i = 1,2$ quando a ou b ocorrerem infinitamente.

Assim se o caso b se repete infinitas vezes pode-se tomar uma subsequência de b_n^2 convergindo a um valor não negativo $b^2 < \infty$. Passando a considerar apenas essa subsequência se tem que, como

$$F(a,\cdot) = \frac{\partial F}{\partial b}(a,\cdot) \qquad \text{ē analītica}$$

$$\forall a \in \mathbb{R},\ F'(a_n, b_n^2) = 0 \text{ e } (a_n, b_n^2) \to (0, b^2)$$

existem $\hat{f}: (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$ também analítica, $m \in \mathbb{N}$

e uma subsequência

$$(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}, b^2_{n_\ell}) \quad \text{tais que:}$$

$$F'(a, \hat{f}(\sqrt[m]{a}) = 0 \ \forall a \in [0,\delta] \quad \text{e}$$

$$b_n^2 = \hat{f}(\sqrt[m]{a_{n_\ell}})$$

para n suficientemente grande (ver de novo teorema A do apêndice).

Como $0 \leq F(a_{n_\ell}, b^2_{n_\ell}) \leq F(a_{n_\ell}, b_{n_\ell})$ se tem que

$$F(a_{n_\ell}, b^2_{n_\ell})/a^k_{n_\ell} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Chame agora $\hat{z} = a^{1/\hat{m}}$, $\hat{z}_n = a_n^{1/\hat{m}}$ e defina

$$E: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R} \atop \hat{z} \to F(\hat{z}^{\hat{m}}, \hat{f}(\hat{z})) .$$

E é analítica por ser composição de analíticas e além disso se tem:

$$E(\hat{z}_{n_\ell} / \hat{z}^{\hat{m}.k}_{n_\ell} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{e para}$$

$$n \ \Big| \ \| \hat{z}_{n_\ell} \| < \varepsilon .$$

Isso acarreta que $E \equiv 0$ e desse modo

$$0 = E(\hat{z}_{n_\ell}) = F(a_{n_\ell}, b^2_{n_\ell}) \text{ e assim passando a}$$

$(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}, b^2_{n_\ell})$ se cai no caso a. Pode-se ficar portanto apenas com o caso a.

Assuma, então, como já se viu ser possível fazer que $b^1_n \to b^1 \in [0,\infty)$. Efetuando um raciocínio análogo ao que se acabou de realizar se pode concluir que

$$\exists \ f: (-\delta,\delta) \to \mathbb{R} \quad \text{analítica e um natural}$$

$$m \mid F(a, f(\sqrt[m]{a})) = 0$$

e para uma subsequência de (a_n, b_n, b^1_n) se tem

$$b^1_{n_\ell} = f(\sqrt[m]{a_{m_\ell}}).$$

Chame agora de novo $z = a^{1/m}$ e $z_n = a_n^{1/m}$ e imagine que uma subsequência de $(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}, b^1_{n_\ell})$ (que será identificada com ela para simplificar a notação) e $k_o \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\lim \frac{b^1_{n_\ell} - b_{n_\ell}}{a^{k_o}_{n_\ell}} = \alpha > 0 \ (4) \ (\alpha \in [0,\infty$$

obrigatoriamente).

Defina então:

$$f_M: (-\varepsilon', \varepsilon') \to \mathbb{R}$$
$$z \to f(z) - z^{Mm}$$

com M inteiro qualquer $> k_o$. É fácil observar que a partir de um determinador n

$$b_{n_\ell} < f_M(z_{n_\ell}) < b^1_{n_\ell} = f(z_{n_\ell}) \ (a_n > 0).$$

Pela própria definição de $b^1_{n_\ell}$ se tem que

$$F(a_{n_\ell}, b_{n_\ell}) > F(a_{n_\ell} = z^m_n, F_M(z_{n_\ell})) > 0 \quad (5)$$

e por conseguinte

$$\frac{F(a_{n_\ell}, b_{n_\ell})}{a^k_{n_\ell}} > \frac{F(a_{n_\ell}, f_M(z_{n_\ell}))}{a^k_{n_\ell}} =$$

$$= \frac{F(z^m_{n_\ell}, f_M(z_{n_\ell}))}{z^{km}_{n_\ell}} > 0 \ \forall n \text{ e } k \in \mathbb{N}. \quad \text{Assim}$$

$$\frac{F(z^m_{n_\ell}, f_M(z_{n_\ell}))}{z^{k.m}_{n_\ell}} \to 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

e como F e f_M são analíticas é verdade mesmo que $F(z^m_{n_\ell}, f_M(z_{n_\ell}))=0$ $\forall n$. Chega-se assim a uma contradição com 5. Portanto a suposição expressa em 4 não é verdadeira e dessa forma:

$$\lim \frac{b^1_{n_\ell} - b_{n_\ell}}{a^k_{n_\ell}} \to 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

tendo-se assim já mostrado a primeira afirmação.

Procedendo agora, de maneira analóga para F^* e (a_{n_ℓ}, b_{n_ℓ}) no lugar de F e (a_n, b_n) respectivamente pode-se mostrar que existem

$$f^*: (-\delta^*, \delta^*) \to \mathbb{R} \quad \text{e} \quad m^* \in \mathbb{N} \,|\, F^*(a^{1/m^*}, f^*(a^{1/m^*}))=0$$

$$\forall\, a \in |0, \delta^{*m}) \quad \text{e} \quad \frac{b_{n_r} - f^*(a^{1/m^*}_{n_r})}{a^k_{n_r}} \to 0 \quad (6)$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

e para uma subsequência (a_{n_r}, b_{n_r}) de (a_{n_ℓ}, b_{n_ℓ}).

Para essa subsequência se tem:

$$\lim \frac{f^*(a^{1/m^*}_{n_r}) - (b^1_{n_r} = f(a^{1/m}_{n_r}))}{a^k_n} =$$

$$\lim \{ \left(\frac{f^*(a_{n_r}^{1/m^*}) - b_{n_r}}{a_{n_r}^k} \right) + \left(\frac{b_{n_r} - b_{n_r}^1}{a_{n_r}^k} \right) \} = 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Fazendo agora $w = a^{1/m.m^*}$, $w_n = a_n^{1/m.m^*}$, $\|w\| < \delta' = \min \{\delta^{1/m.m^*}, \delta^{*1/m.m^*}\}$ se fica com

$$\frac{f^*(w_{n_r}^m) - f(w_{n_r}^{m^*})}{w_{n_r}^{(m.m^*.k)}} \to 0 \quad \forall k.$$

Como f, f* e as funções m e m*-ésimas potência são analíticas vem que

$$f^*(w^m) = f(w^{m^*}) \ \forall\ w \in (-\delta', \delta') \quad \text{ou seja}$$

$$f^*(a^{1/m^*}) = f(a^{1/m}) \ \forall\ a \mid \|a\| < \delta'^{mm^*}.$$

Assim

$$F^*(a, f(\sqrt[m]{a})) = F^*(a, f^*(\sqrt[m^*]{a})) = 0$$

completando-se a prova.

4.3.4.

Se tem agora os elementos necessários para enunciar e demonstrar o teorema abaixo:

Teorema 7:

Se:

a) X_o aberto em $\mathbb{R}^2$, $S_j: X_o \to \mathbb{R}$; $j \in \overline{1,J}$ analíticas.

b) $X = \{x \in X_o | S_j(x) \leq 0 \ \ \forall j \in \overline{1,J}\}$

c) U aberto $\subseteq$ B espaço de Banach real

d) $y \in U$ e $d \in B$

e) $g_i: X_o \times U \to \mathbb{R}$ |

1. $g_i(\cdot,y)$ é analítica e

2. $\forall x \in X \quad \exists \ g_i(x,\cdot)'(y,d)$ e

$$\frac{g_i(x,y+hd) - g_i(x,y)}{h} \to g_i(x,\cdot)'(y,d)$$

uniformemente em x.

Então:

$$G'(y,d) \text{ e } \hat{G}(y,d) \triangleq \sup_{x \in M_o(y)} \{ \sup_{\substack{s \in \{0,1-1\} \\ m \in \mathbb{N} \\ f \in F_o}} \{\tilde{g}(x,s,m,f)'(y,d)\}\} \tag{1}$$

Prova:

Sejam $\ell^- = \underline{\lim}_{h \to 0} \dfrac{G(y+hd) - G(y)}{h}$ e

$(h'_n) | h'_n > 0,\ h'_n \to 0$ e $\dfrac{G(y + h'_n d) - G(y)}{h'_n} \to \ell^-$. Sejam agora $x \in M_o(y)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in \{0,1,-1\}$, $f: (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}_o$ quaisquer nesses conjuntos. Pelas definições de $\tilde{g}(x,s,m,f)$ e $\psi_{x,s,m,f}$ se tem que:

$$G(y + h'_n d) \geq \max_{x \in \psi_{x,s,m,f}(-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \cap X} \{ \min_{i \in \overline{1,K}} \{g_i(x, y + h'_n d)\}\} = \tilde{G}(x,s,m,f)(y + h'_n d)$$

$$G(y) = \max_{x \in \psi_{x,s,m,f}(-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \cap X} \{ \min_{i \in \overline{1,K}} \{g_i(x,y)\}\} = \tilde{G}(x,s,m,f)(y) \quad \text{pois}$$

$$x \in M_o(y) \quad \text{e} \quad f(0) = 0.$$

Subtraindo, dividindo por h'_n e tomando os limites se fica com:

$$\ell^- \geq \underline{\lim} \frac{\tilde{G}(x,s,m,f)(y + h'_n d) - \tilde{G}(x,s,m,f)(y)}{h'_n}$$

$$= \tilde{G}(x,s,m,f)'(y).$$

A existência de $\tilde{G}(x,s,m,f)'(y)$ está assegurada como foi mostrado em 4.3.2.

Como x,s,m e f são quaisquer em $M_o(y)$, $\{0,1,-1\}$, $\mathbb{N}$ e $\mathcal{F}_o$ respectivamente se tem o mesmo que:

$$\ell^- \geq \tilde{G}'(y,d) = \sup_{x \varepsilon M_o(y)} \{ \sup_{\substack{m \varepsilon \mathbb{N} \\ \{s \varepsilon \{0,1,-1\}\} \\ f \varepsilon F_o}} \{\tilde{G}(x,s,m,f)'(y)\}\} \qquad (2)$$

Para completar a prova resta mostrar que se $\ell^+ = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{G(y + hd) - G(y)}{h}$ então $\ell^+ \leq \tilde{G}'(y,d)$ (3).

Para isso considere outra vez (h_n), $h_n > 0$, $h_n \to 0 | \dfrac{G(y + h_n d) - G(y)}{h_n} \to \ell^+$. Seja $x_n \varepsilon M_o(y + h_n d)$, $x_n \to \overline{x} \varepsilon M_o(y)$ e $z_n = (z_{n,1}, z_{n,2}) = x_n - \overline{x}$.

Suponha inicialmente que $o(h_n, \| z_n \|) < 1$. Nesse caso como $o(g_i(x_n,y) - G(y), \| z_n \|) \geq 1 \ \forall i \ \varepsilon \ m_o(\overline{x},y)$ se tem passando se necessário a considerar somente uma subsequência que

$$\frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{h_n} \to 0 \qquad \forall i \ \varepsilon \ m_o(\overline{x},y) \qquad (4)$$

e portanto

$$\ell^+ = \lim (\min_{i \varepsilon \overline{1,K}} \{ \frac{g_i(x_n,y + h_n d) - G(y)}{h_n} \}) \leq$$

$$\lim (\min_{i \varepsilon m_o(\overline{x},y)} \{ \frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{h_n} +$$

$$\frac{g_i(x_n,y + h_n d) - g_i(x_n,y)}{h_n})\}) = \min_{i \varepsilon m_o(\overline{x},y)}$$

$$\{g_i(x,\cdot)'(y,d)\} \qquad (5)$$

por 4 e pela condição e.2. Mas $\min_{i\varepsilon m_0(\overline{x},y)} \{g_i(x,\cdot)'(y,d)\}$ =

= $g(x,\cdot)'(y,d) = \tilde{G}(x,0,0_f,m)'(y,d)$ para m qualquer (0_f é a função identicamente nula) e assim $\ell^+ \leq \tilde{G}(x,0,0_f,m)'(y,d)$. Completa-se para esse caso a demonstração.

O mesmo procedimento se aplica se $\forall i \; \varepsilon \; m_0 (\overline{x},y)$ $g_i(\cdot,y)$ é constante.

Imagine agora que $o(h_n, \| z_n \|) \geq 1$ e que exista $i \; \varepsilon \; m_0(\overline{x},y)$ tal que $g_i(\cdot,y)$ não é constante (6). Então se necessário passando a uma subsequência de z_n se pode assumir que:

a) $o(z_{n,2}, z_{n,1}) \geq 1$ (7) ou $o(z_{n,1}, z_{n,2}) \leq 1$ (8)

b) Se $o(z_{n,2}, z_{n,1}) = 1$ então $q(z_{n,2}, z_{n,1})$ é limitado (9) ou $q(z_{n,1}, z_{n,2})$ é limitado (10).

c) $z_{n,1} > 0$ e $z_{n,2} > 0$ $\forall n$ (11) ou qualquer uma das outras possibilidades em que o sinal de $z_{n,1} - z_{n,2}$ é constante.

Considere agora que ocorrem as primeiras hipóteses de cada ítem (7 ou 9 e 11) e que passando se houver necessidade também a uma subsequência de (x_n, h_n) existam $f \varepsilon F_0$, $m \; \varepsilon \; \mathbb{N}$ e $(h'_n) | h'_n > 0$, $h'_n \to 0$ tais que $\forall i \; \varepsilon \; m_0 \; (\overline{x},y)$

$$\lim \frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{h_n} = \lim (g_i(\overline{x}_1 + z_{n,1} ,$$

$$\bar{x}_2 + f(\sqrt[m]{z_{n,1}})) - G(y))/h_n' \qquad (12)$$

e

$$(\bar{x}_1 + w, \bar{x}_2 + f(\sqrt[m]{w})) \in X \quad \forall w \in [0, \bar{w}] \qquad (13)$$

Nesse caso se terá:

$$\ell^+ = \min_{i \in m_o(x,y)} \{\lim \left(\frac{g_i(x_n, y) - G(y)}{h_n} + \right.$$

$$\left. \frac{g_i(x_n, y + h_n d) - g_i(x_n, y)}{h_n} \right)\} = \min_{i \in m_o(x,y)}$$

$$\{\lim \left(\frac{g_i(x_n, y) - G(y)}{h_n} \right) + g_i(\bar{x}, \cdot)'(y, d)\} =$$

$$= \min_{i \in m_o(x,y)} \{\lim \frac{g_i(\bar{x}_1 + z_{n,1}, \bar{x}, + f(\sqrt[m]{z_{n,1}}), y) - G(y)}{h_n'}$$

$$+ g_i(\bar{x}, \cdot)'(y, d) = \lim \left(\min_{i \in m_o(x,y)} \{((g_i(\bar{x}_1 + \right.$$

$$+ z_{n,1}, \bar{x}_2 + f(\sqrt[m]{z_{n,1}}), y + h_n' d) -$$

$$\left. - G(y))/h_n' \right) \qquad (14)$$

Fazendo então $\lambda = \sqrt[m]{z_{n,1}}$ e levando em conta 13 pode-se constatar que (14) $\leq$

$$\lim \frac{\tilde{G}(\overline{x},\ 1,\ m,f)(y + h'_n d) - \tilde{G}(x,1,m,f)(y)}{h'_n}$$

$$= \tilde{G}(\overline{x},1,m,f)'(y,d) \qquad (15)$$

Portanto para completar a prova do caso que se está tratando basta mostrar que existem uma subsequência de (x_n, h_n), $f \in F_o$, $m \in \mathbb{N}$ e (h'_n) como indicada satisfazendo 12 e 13.

É lógico que se precisa considerar em 12 apenas as $g_i(\cdot,y)$, $i \in m_o(\overline{x},y)$ que não são constantes. Chame então o conjunto de índices dessas g_i, que está sendo suposto não vazio, de $\overline{m}_o(\overline{x},y)$.

Assuma agora que $1 \leq o(h_n, z_{n,1}) \overset{7,9}{=} o(h_n, z_n||) < \infty$. Considerando esta hipótese se vai desenvolver um processo de obtenção dos elementos acima com as propriedades desejadas. Esse processo se apoia numa série de fatos que estão reunidos na afirmação seguinte:

<u>Afirmação 7.1</u>:

Sejam $\overline{x} = (\overline{x}^1, \overline{x}^2) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$, $F: B_\varepsilon(\overline{x}) \to \mathbb{R}$ analitíca expressa por

$$F(x^1,x^2) - F(\overline{x}) = \sum_{m,p \in \mathbb{N}} a_{mp}(x^1 - \overline{x}^1)^m\ (x^2 - \overline{x}^2)^p$$

e uma sequência

$$(\alpha_n, \beta_n) \to \overline{0} \mid 1 \leq o = o(\beta_n, \alpha_n) < \infty\ ,$$

$$\lim \mid \beta_n/\alpha_n^s \mid = \infty \qquad \forall s > \overline{o} \qquad\qquad e$$

$q(\beta_n, \alpha_n) = \{\bar{q}\} \quad \mathbb{R}$.

Seja ainda

$\bar{v} = v(F, \bar{x}, \bar{o}) \triangleq$

$\triangleq \min m + p.\bar{o}$

sujeito a: $a_{mp} \neq 0$; $m, p \in \mathbb{N}$

e também: $\bar{V} = V(F, \bar{x}, o) \triangleq \{m, p) | m + p\bar{o} = \bar{v}$,

$a_{mp} \neq 0$ e m e $p \in \mathbb{N}\}$.

Então,

A) Se $\bar{q} = \infty$, $\lim \dfrac{F(\bar{x} + (\alpha_n, \beta_n)) - F(\bar{x})}{\alpha_n^{m'} \ \beta_n^{p'}} = a_{m'p'}$

onde $m' + \bar{o}p' = \bar{v}$ e $p' = \max\limits_{(m,p)\in\bar{V}} \{p\}$ e

$\exists \ \bar{\delta} > 0 | \forall \delta \in (0, \bar{\delta})$ se β_n é substituído por $\alpha_n^{o-\delta}$ em 16 o resultado aí indicado continua válido.

B) Se $\bar{q} = 0$, $\lim \dfrac{F(\bar{x} + (\alpha_n, \beta_n)) - F(\bar{x})}{\alpha_n^{m*} \ \beta_n^{p*}} = a_{m*p*}$

onde $m* + \bar{o}\ p* = \bar{v}$ e $p* = \min\limits_{(m,p)\in\bar{V}} \{p\}$ e

$\exists \ \delta' > 0 | \forall \delta \in (0, \delta')$ se β_n é substituído por $\alpha_n^{\bar{o}-\delta}$ em 17 o resultado aí indicado continua valendo.

C) Se $0 < |\overline{q}| < \infty$ e $\overline{o} \notin Q$ então $\overline{V}$ possui um único elemento $a_{\overline{m}\ \overline{p}}\ \overline{q}^{\overline{p}}$ e $q(F(\overline{x} + (\alpha_n, \beta_n)), \alpha_n) = \{a_{\overline{m}\ \overline{p}}\ \overline{q}^{\overline{p}}\}$. Se terá ainda que

$$\exists\ \hat{\delta} > 0 | \forall \delta \in (-\hat{\delta}, \hat{\delta}) \{a_{\overline{m},\overline{p}} \cdot \overline{q}^{\overline{p}}\} = q(F(\overline{x} + (\alpha_n, \overline{q}\ \alpha_n^{\overline{o}+\delta}), \alpha_n)$$ também.

Prova:

Um resultado conhecido garante que

$$\forall n \in \mathbb{N}((\sum_{m+p>n} a_{mp}(x^1 - \overline{x}^1)^m (x^2 - \overline{x}^2)^p)/ \| (x - \overline{x}) \|^n) \to 0 \qquad (18)$$

(Ver Lima | 8 | página).

O mesmo se dá, é claro, se n é substituído por $r \in \mathbb{R}$. Assim fazendo $r = \overline{v}$ se tem que

$$\lim \frac{F(\overline{x} + (\alpha_n, \beta_n)) - F(\overline{x})}{\alpha_n^{m'}\ \beta_n^{p'}} = \lim$$

$$(\sum_{m+p \leq \overline{v}} a_{mp}\ \alpha_n^m\ \beta_n^p) / \alpha_n^{m'}\ \beta_n^{p'} \qquad (19)$$

pois

$$o(\| (\alpha_n, \beta_n) \|^{\overline{v}}, \alpha_n) = o(\alpha_n^{m'}\ \beta_n^{p'}, \alpha_n) .$$

Se $m + \overline{o}p > \overline{v}$ então $o(\alpha_n^m\ \beta_n^p, \alpha_n) > o(\alpha_n^{m'}\ \beta_n^{p'},$

α_n) e portanto $\alpha_n^m \beta_n^p / \alpha_n^{m'} \beta_n^{p'} \to 0$.

Assim como em 19 se tem um somatório finito vem que:

$$(19) = \lim \sum_{(m,p)\varepsilon \overline{V}} a_{mp} \alpha_n^m \beta_n^p / \alpha_n^{m'} \beta_n^{p'} \quad (20)$$

Suponha agora que $(m",p") \varepsilon \overline{V}$ com $p" < p'$. Nesse caso como $m' - m" = o(p" - p')$ se verifica que

$$\lim (\alpha_n^{m"} \beta_n^{p"} / \alpha_n^{m'} \beta_n^{p'}) = \lim \frac{\beta_n^{(p"-p')}}{\alpha_n^{(m'-m")}} =$$

$$= \lim (\beta_n / \alpha_n^o)^{(p"-p')} = 0 \text{ pois } \overline{q} = \infty \text{ e } p"<p'.$$

Pela própria definição de p' se obtêm que $(20) = a_{m'p'}$.

Seja agora $v^+ = \min \{v > \overline{v} | \exists (m,p) \varepsilon \mathbb{N}^2 | m + op = v^+ \text{ e } a_{m'p} \neq 0\}$. Faça agora $\overline{\delta} = (1 - v/v^+) \overline{o}$. Nesse caso se m,p são tais que $a_{m,p} \neq 0$ e $m + \overline{o}p > v$ e $0 < \delta < \overline{\delta}$ se tem que

$$m + (\overline{o} - \delta)p > m + \overline{o}p - \delta\left(\frac{m + \overline{o}p}{\overline{o}}\right) =$$

$$= m + \overline{o}p \left(1 - \frac{\delta}{\overline{o}}\right) > v^+ \left(1 - \frac{\overline{\delta}}{\overline{o}}\right) = v^+ \cdot \frac{v}{v^+} = v$$

$$> m' + (o - \delta)\, p' \quad (21)$$

Além disso se $(m,p) \varepsilon \overline{V}$ e $p < p'$ então

$$m + (o - \delta)p = v - \delta p > v - \delta p' = m' + (o-\delta)p'$$

(22)

Desse modo usando 18 outra vez, 21 e 22 se tem que

$$\forall\delta \in (0,\bar{\delta})\ F(\bar{x} + (\alpha_n, \alpha_n^{o-\delta})) - F(\bar{x}) =$$

$$a_{m'p'}\ \alpha_n^{m'+(o-\delta)p'} + \rho(\alpha_n) \qquad \text{onde}$$

$$o(\rho(\alpha_n), \alpha_n) > m' + (o-\delta)p' \qquad \text{e assim}$$

$$\lim \frac{F(\bar{x} + (\alpha_n, \alpha_n^{o-\delta})) - F(\bar{x})}{\alpha_n^{m'+(o-\delta)p'}} = a_{m'p'}$$

completando a prova do item A.

A demonstração de que 17 é válido sob a hipótese do item B e a do item A levando em conta agora que $\bar{q} = 0$ e a definição de p*. Para mostrar que

$$\exists\ \bar{\delta} > 0 | \forall\delta \in (0,\bar{\delta})\ \beta_n$$

pode ser substituído por $\alpha_n^{o+\delta}$ em 17 basta fazer $\bar{\delta} = (v^+ - v)/p^*$ se $p^* \neq 0$. Em caso contrário faça $\bar{\delta} = \infty$. Se terá então que se

$$m + op > v \quad \text{e} \quad \delta < \bar{\delta} \qquad \text{então}$$

$$m + (o+\delta)\ p > v^+ = v + \frac{(v^+ - v)}{p^*} p^* > v + \delta p^* =$$

$$= m^* + (\bar{o} + \delta)\ p^* \tag{23}$$

Além disso, se $(m,p) \in \bar{V}$ e $p > p^*$ então

$$m + (o+\delta)\ p > m^* + (o+\delta)\ p^* \tag{24}$$

23 e 24 permitem chegar ao resultado pretendido repetindo raciocínio usado no caso anterior.

Se $\overline{o} \notin Q$ então $\# (\overline{v}) = 1$ pois se existem (m^1,p^1) e $(m^2,p^2) \in \overline{v}$ com $p^2 \neq p^1$ então $\overline{o} = \dfrac{m^2 - m^1}{p^2 - p^1}$ seria racional.

Repetindo então o raciocínio já efetuado na demonstração do item A e que levou a obtenção da igualdade 20 se tem imediatamente que:

$$\lim \frac{F(\overline{x} + (\alpha_n, \beta_n)) - F(\overline{x})}{\alpha_n^{\overline{m}} \quad \beta_n^{\overline{p}}} = a_{\overline{m}\ \overline{p}} \quad \text{e daí}$$

$$\lim \frac{F(\overline{x} + (\alpha_n, \beta_n)) - F(\overline{x})}{\alpha_n^{\overline{m} + \overline{o}\ \overline{p}}} = a_{\overline{m}\ \overline{p}} \quad \overline{q}^{\overline{p}} .$$

Se $0 < |\overline{q}| < \infty$ então $a_{\overline{m}\ \overline{p}} \ \overline{q}^{\overline{p}} \neq 0$ ou ∞ e portanto $q(F(\overline{x} + (\alpha_n, \beta_n)) - F(\overline{x}), \alpha_n)$ é igual a esse valor. Fazendo então

$$\overline{\delta} = \min \{1 - (v/v^+)\ \overline{o},\ (v^+ - v)/\overline{p}\ \}$$

e repetindo os raciocínios que levaram a obtenção de 21 ou 23 conforme δ seja $\leq$ 0 ou $\geq$ 0 se tem que se

$$|\delta| < \overline{\delta} \quad q(F(\overline{x} + (\alpha_n,\ \overline{q}\ \alpha_n^{o+\delta})) - F(\overline{x}), \alpha_n) =$$

$$= a_{\overline{m}\ \overline{p}} \ \overline{q}^{\overline{p}} \qquad \text{também.}$$

O algoritmo I apresentado a seguir é uma formalização do processo mencionado para tratar do caso em que $1 \leq o(h_n, z_{n,1}) < \infty$.

Nesse algoritmo e no restante dessa prova $B_\varepsilon(\overline{x})$ será uma bola aberta inteiramente contida em X_o e se considerará $g_i(\overline{x} + (z_1, z_2), y) = \sum_{m,p} a_{mp}(\overline{x}, y, i)\, z_1^m z_2^p \;\forall (z_1, z_2) \in \overline{B}_\varepsilon(0)$.

<u>Algoritmo I</u>:

Passo 0: Identifique $(z_{n,1}, h_n)$ com uma subsequência dela de forma que se tenha

$$\underline{\lim}\, |h_n/z_{n,1}| = \infty \;\forall s > \hat{o} = o\,(h_n, z_{n,1})$$

e que $q(h_n, z_{n_1}) = \{\hat{q}\}$. Faça ainda

$$z_{n,2}^o = z_{n,2}\;,\; z_n^o = (z_{n,1}, z_{n,2}^o),\; a_{mp}^o(i) = a_{mp}(\overline{x}, y, i)$$

$$\forall m, p \in \mathbb{N},\; g_{i,o}(\cdot, \overline{y}): \hat{X}_o = B_\varepsilon(0) \to \mathbb{R} \,|\, g_{i,o}(z^o, y) =$$

$$= \sum_{m,p} a_{mp}^o(i)\, z_1^m (z_2^o)^p = g_i(\overline{x} + z, y)\;\; i \in I_o = M_o(y) \;\; \text{e}$$

$\ell = 0$.

Passo 1: Identifique $z_n^\ell = (z_{n,1}, z_{n,2})$ com uma subsequência dela de forma que se tenha

$$\underline{\lim}\, |z_{n,2}^\ell / z_{n,1}^s| = \infty \;\; \forall s > o(z_{n,2}^\ell, z_{n,1}) \text{ e que}$$

$$q(z_{n,2}^\ell, z_{n,1}) = \{\overline{q}_\ell\} \quad \mathbb{R}.$$

Chame ainda de $\overline{o}_\ell$ a $o(z_{n,2}^\ell, z_{n,1})$.

Se $\overline{q}_\ell = \infty$ (25), $\overline{q}_\ell = 0$ (26) ou $0 < |\overline{q}_\ell| < \infty$ e

$\overline{o}_\ell \notin Q$ (27) pare indicando $\overline{o}_\ell$, $\overline{q}_\ell$, que

$$z_2^\ell = z_2 - \sum_{r=0}^{\ell-1} q_r \, z_1^{\overline{o}_r} \qquad (28) \qquad e$$

$$g_{i,\ell}(z^\ell,y) = \sum_{m,p} a_{mp}^\ell(i)\, z_1^m \, (z_2^\ell)^p \ \forall i \in \overline{m}_o(\overline{x},y) \qquad (29)$$

Se nenhuma dessas condições se verifica vã para o passo 2.

Passo 2: Faça $z_2^{\ell+1} = z_2^\ell - \overline{q}_\ell \, z_1^{\overline{o}_\ell}$ (30), $z^{\ell+1} = (z_1, z_2^{\ell+1})$ e seja

$\overline{o}_{\ell+1} = o(z_2^{\ell+1}, z_1)$.

Além disso sejam

$$T_{\ell+1}: \mathfrak{X}_\ell \to \mathbb{R}^2 \mid T_{\ell+1}(z^\ell) \to z^{\ell+1} \ \mathfrak{X}_{\ell+1} = T_{\ell+1}(\mathfrak{X}_\ell),$$

$$\forall i \in \overline{m}_o(\overline{x},y) \ g_{i,\ell+1}: \mathfrak{X}_{\ell+1} \to \mathbb{R} \ \text{ e } \ \forall m,p \in \mathbb{N} \ \text{ e}$$

$$\forall i \in \overline{m}_o(x,y) \ a_{m,p}(i) \mid g_{i,\ell+1}(z^{\ell+1},y) = \sum a_{mp}^{\ell+1}(i)$$

$$z_1^m \, (z_2^{\ell+1})^p = g_{i,\ell}(z^\ell,y) \qquad (31)$$

Faça

$$I_{\ell+1} = I_\ell - \{i \in I_\ell \mid o_o(g_{i,\ell+1}(z_1,0,y) - G(y), z_1) =$$

$$= v(g_{i,\ell}(\cdot,y), \overline{x}, \overline{o}_\ell)\} \qquad (32)$$

Veja também observação C.

Se $\forall i \in I_{\ell+1}$ $v(g_{i,\ell+1}(\cdot,y) - G(\overline{y}), \overline{x}, \overline{o}_{\ell+1}) > \hat{o}$ ou $I_{\ell+1} = \phi$ pare indicando 30 e 31. Caso contrário faça $\ell = \ell+1$ e volte para o passo 1.

Observação C:

Para comprovar que o algoritmo dado termina em um número finito de iterações convém constatar o seguinte fato: Se $\bar{o}_\ell \in Q$, $0 < |\bar{q}_\ell| < \infty$ e se $v_{i,\ell} = v(g_{i,\ell}(\cdot,y), \bar{x}, \bar{o}_\ell)$ e $V_{i,\ell} = \{(m,p) \in \mathbb{N} \mid a^\ell_{mp}(i) \neq 0 \text{ e } m + \bar{o}_\ell p = v_{i,\ell}\}$ então é simples verificar que

$$a^{\ell+1}_{v_{i,\ell},0}(i) = \sum_{(m,p)\in V_{i,\ell}} a^\ell_{mp}(i)\, \bar{q}^p_\ell .$$

Se

$$v_{i,\ell} = o_0(g_{i,\ell+1}(z_1,0,y) - G(y),z_1)$$

como acontece para os $i \in I_\ell$ por 32 então $a^{\ell+1}_{v_{i,\ell},0}(i) \neq 0$. Em caso contrário esse termo é nulo.

Para mostrar que as saídas do algoritmo I possibilitam encontrar os elementos requeridos é preciso observar ainda o resultado a seguir. Ele mostrará como satisfazer a condição 13.

Afirmação 7.2:

Sejam $S(\bar{x}) = \{j | S_j(\bar{x}) = 0\}$, X como no enunciado do teorema e conforme a teoria de Puiseux, (ver teorema A do apêndice) $\varepsilon_{jk} > 0$, $\phi_{jk}: [0, \varepsilon_{jk}] \to \mathbb{R}$ analítica e

$$m_{jk} \in \mathbb{N};\ j \in S(\bar{x}),\ k \in \overline{1,K_j}$$

as curvas tais que

$$S_j(\overline{x} + (z_1, \phi_{jk}(z_1^{1/m_{jk}}))) = 0 \ \forall z_1 \in |0, \varepsilon_{jk}^{m_{jk}}).$$

Sejam também μ_r, η_r; $r \in \overline{0,\ell-1}$ inteiros positivos tais que

$$\overline{o}_r = \mu_r/\eta_r \quad \text{irredutível},$$

$$\widehat{m}_{jk\ell} = \text{m.m.c.}\ (m_{jk}, \eta_r;\ r \in \overline{0,\ell-1}) \quad \text{e}$$

$$\phi_{jk}^{\ell}: [0, \varepsilon_{jk}^{\widehat{m}_{jk\ell}/m_{jk}}] \to \mathbb{R} \quad \text{analítica} \quad \text{e} \mid$$

$$\phi_{jk}^{\ell}\ (z_1^{1/\widehat{m}_{jk\ell}}) = \phi_{jk}\ (z_1^{1/m_{jk}}) - \sum_{r=0}^{\ell-1} \overline{q}_r\ z_1^{\overline{o}_r} \tag{33}$$

Faça então $\tilde{o}_{jk\ell} = o(\phi_{jk}^{\ell}\ (z_1^{1/\widehat{m}_{jk\ell}}), z_1)$ e $\tilde{q}_{jk\ell} = q(\phi_{jk}^{\ell}\ (z_1^{1/\widehat{m}_{jk\ell}}), z_1)$ e defina $\tilde{o}_{\ell}^{-} = \max \{\tilde{o}_{jk\ell} \mid \tilde{o}_{jk\ell} < \overline{o}_{\ell}\}$ $\tilde{o}_{\ell}^{+} = \min \{\tilde{o}_{jk\ell} \mid \tilde{o}_{jk\ell} > \overline{o}_{\ell}\}$. Nessas condições:

A) Se $|q_{\ell}| = \infty$ então

$$\forall \delta \in (0, \overline{o}_{\ell} - \tilde{o}_{\ell}^{-}) \quad \varepsilon(\delta) > 0 \mid \forall z_1 \in |0, \varepsilon(\delta))$$

$$\overline{x} + (z_1, \sum_{r=0}^{\ell-1} \overline{q}_r\ z_1^{\overline{o}_r} + z_1^{\overline{o}_{\ell}-\delta}) \in X \tag{34}$$

B) Se $\overline{q}_{\ell} = 0$ então

$$\forall \delta \in (\tilde{o}_{\ell}^{+} - \overline{o}_{\ell}) \quad \exists \varepsilon'(\delta) > 0 [\forall z_1 \in |0, \varepsilon'(\delta))$$

$$\overline{x} + (z_1, \sum^{\ell-1} \overline{q}_r\, z_1^{\overline{o}_r} + z_1^{\tilde{o}_{\ell+\delta}}) \in X \qquad (35)$$

C) Se $\overline{o}_\ell \notin Q$ então

$\forall\delta \in (\tilde{o}_\ell^- - \overline{o}_\ell, \tilde{o}_\ell^+ - \overline{o}_\ell^-)$ $\quad \hat{\varepsilon}(\delta) > 0 | \forall z_1 \in$

$$[0, \hat{\varepsilon}(\delta)), \overline{x} + (z_1, \sum_{1=0}^{\ell-1} \overline{q}_r\, z_1^{\overline{o}_r} + z_1^{\overline{o}_{\ell+\delta}}) \in X \qquad (36)$$

D) Se $\overline{o}_\ell \in Q$,

$0 < |\overline{q}_\ell| < \infty$ e $\overline{x} + \sum_{1=0}^{\ell} \overline{q}_r\, z_1^{\overline{o}_r} \notin X\ \forall z_1 \varepsilon(0,\varepsilon^*)$

então existe $j' \in S(\overline{x})$ e

$$k' \in \overline{1,K_j} \mid \phi_{j'k'}(z_1^{1/m_{j'k'}}) = \sum_{r=1}^{\ell} \overline{q}_\ell\, z_1^{\overline{o}_\ell} +$$

$$\phi_{j'k'}^{\ell+1}(z_1^{1/\hat{m}_{j'k'(\ell+1)}}), o_0(\phi_{j'k'}^{\ell+1}(z_1^{1/\hat{m}_{j'k'(\ell+1)}}, z_1)$$

$$\geq \overline{o}_{\ell+1} \qquad (37)$$

e

$$S_j(\overline{x} + (z_1, \phi_{j'k'}(z_1^{1/m_{j'k'}})) \leq 0 \qquad (38)$$

$\forall j \in \overline{1,J}$.

<u>Prova</u>:

Passando se preciso a uma subsequência se pode assumir que $z_{n,2}^{\ell} \geq 0$ ou ≤ 0. Vai se ficar com a primeira hipótese.

Suponha que a afirmação do item A não se verifica para algum $\delta < \overline{o}_\ell - \tilde{o}_\ell^-$. Nesse caso pela analiticidade das S_j se tem considerando se preciso apenas uma nova subsequência

$$(z_{n,1}) \text{ que } \exists\ n_\delta | \forall n > n_\delta\ \overline{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell-1} \overline{q}_r z_{n,1}^{\overline{o}_r} + z_{n,1}^{\overline{o}_\ell - \delta}) \notin X.$$

Nesse caso pela própria definição de $z_{n,2}^\ell$ e por que

$$\overline{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell-1} \overline{q}_r z_{n,1}^{\overline{o}_r} + z_{n,2}^\ell) \in X \tag{39}$$

então tomando uma subsequência de $(z_{n,1}, z_{n,2}^\ell)$ se tem que:

1. $z_{n,2}^\ell < z_{n,1}^{\overline{o}_\ell - \delta}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Existem $w_n \in |z_{n,2}^\ell, z_{n,1}^{\overline{o}_\ell - \delta})$ e $j \in \overline{1,J}|$

$$S_j(z_{n,1}, \sum_{l=0}^{\ell-1} \overline{q}_l z_{n,1}^{\overline{o}_r} + w_n) = 0.$$

Se restringindo o interesse a uma outra subsequência se pode achar

$$k \in \overline{1,K_j}|\ \forall n\ w_n + \sum_{r=0}^{\ell-1} \overline{q}_r z_{n,1}^{\overline{o}_r} = \phi_{jk}(z_{n,1}^{1/m_{jk}})$$

que é equivalente a

$$w_n = \phi_{jk}^\ell (z_{n,1}^{1/\hat{m}_{jk\ell}}).$$

Como $0 < z^{\ell}_{n,2} < w_n$ como $q_{\ell} := \infty$ pois se está supondo $z^{\ell}_{n,2} > 0$ e como

$$q_{jk\ell} = q_o\ (\phi^{\ell}_{jk}\ (z_1^{1/\hat{m}_{jk\ell}}),\ z_1) < \infty$$

se tem ainda que

$$o_{jk\ell} = o_0\ (\phi^{\ell}_{jk}\ (z_1^{1/\hat{m}_{jk\ell}}),\ z_1) < \bar{o}_{\ell} \qquad (40)$$

Por outro lado como $w_n < z_{n-1}^{o_{\ell}-\delta}$

$$o_{jk\ell} \geq o_{\ell} - \delta > \bar{o}^{-}_{\ell} \qquad (41)$$

Juntando 40 e 41 e comparando com a definição de $\tilde{o}^{-}_{\ell}$ se chegar a um absurdo. Portanto a afirmação dada em A é verdadeira.

Assuma agora que B é falsa. Se isso aconte ce então de forma análoga a verificada no caso anterior

$$\exists\ \delta < \tilde{o}^{+}_{\ell} - \bar{o}_{\ell} \qquad e$$

$$n_{\delta} | \forall n > n_{\delta}\ \bar{x} + (z_{n,1},\ \sum_{r=0}^{\ell-1} z_{n,1}^{\bar{o}_r} + z_{n,1}^{\bar{o}_{\ell+\delta}}) \notin X.$$

Isso acarreta devido a 39 que passando se preciso a uma subsequência se pode ter que

$$z^{\ell}_{n,2} > z_{n,1}^{\bar{o}_{\ell+\delta}}, \forall n\ w_n \in (z_{n,1}^{\bar{o}_{\ell+\delta}},\ z^{\ell}_{n,2}|,\ j \in \overline{1,J}$$

e

$$k \in \overline{1,K_j}\ |\ w_n + \sum_{1=0}^{\ell-1} \bar{q}_1\ z_{n,1}^{\bar{o}_r} = \phi_{jk}(z_{n,1}^{1/m_{jk}})$$

ou

$$w_n = \phi^{\ell}_{jk}\,(z_{n,1}^{1/\hat{m}_{jk\ell}}).$$

Como $w_n < z_{n,2}$, $\bar{q}_\ell = 0$ e $q_{jk\ell} > 0$ se tem que $o_{jk\ell} > \bar{o}_\ell$ (42).

Por outro lado como $w_n > z_{n,1}^{\bar{o}_{\ell+\delta}}$, $o_{jk\ell} \leq o_\ell + \delta < \tilde{o}^+_\ell$ (43) o que é absurdo e portanto a afirmação do ítem B é verdadeira.

Para demonstrar o ítem C basta lembrar que $\forall j \in \overline{1,J}$, $\forall k \in \overline{1,K_j}$ e $\forall \ell$ $o_{jk\ell}$ é racional e portanto $\bar{o}_\ell \neq o_{jk\ell}$. $\forall j$ e $\forall k \in \overline{1,K_j}$.

Efetuando então os mesmos raciocínios que levaram a obtenção de 40 e 41 no tratamento do caso A se $\delta > 0$ e de 42 e 43 na prova B se $\delta > 0$ se obterá a afirmação expressa em 36.

Finalmente imagine que como indicado no item D

$$\bar{x} + (z_1, \sum_{r=0}^{\ell} \bar{q}_r\, z_1^{\bar{o}_r}) \notin X\ \forall z_1 \in (0,\varepsilon^*).$$

Isso é equivalente a dizer que existe

$$n_o \in \mathbb{N} | \forall n > n_o\ \bar{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell} \bar{q}_r\, z_{n,1}^{\bar{o}_r}) \notin X.$$

Nesse caso como

$$\bar{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell} \bar{q}_r\, z_{n,1}^{\bar{o}_r} + z_{n,2}^{\ell+1}) \in X\ \forall n$$

se tem definindo

$$w_n = \min \{\overline{z}_2^{\ell+1} \mid \forall z_2^{\ell+1} \in [\overline{z}_2^{\ell+1}, z_{2,n}^{\ell+1}]$$

$$\overline{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell} \overline{q}_r \, z_{n,1}^{\overline{o}_r} + z_2^{\ell+1}) \in X\} \qquad (43)$$

e passando se preciso a subsequências que

$$j' \in S(x) \text{ e } k' \in \overline{1,K_{j'}} \mid w_n = \phi_{j'k'}^{\ell+1}$$

$$(z_{n,1}^{1/m_{j'k'(\ell+1)}}).$$

Como

$$0 \le \phi_{j'k'}^{(\ell+1)}(z_{n,1}^{1/\widehat{m}_{j'k'(\ell+1)}}) \le z_{n,2}^{\ell+1}$$

se tem que

$$o_0(\phi_{j'k'}^{(\ell+1)}(z_{n,1}^{1/\widehat{m}_{j'k'(\ell+1)}}), z_{n,1}) \ge \overline{o}_{\ell+1} \qquad (44)$$

e assim para esses j' e k' se tem que 37 e 38 são satisfeitos por 44 e 43 respectivamente.

Passa-se agora a analisar cada uma das saídas do algoritmo I.

Considere então inicialmente que o algoritmo para em um dado estágio ℓ porque $\overline{q}_\ell = \infty$.

Nesse caso $\forall i$ em $\overline{m}_0(\overline{x},y)$ pelo ítem A da afirmação 7.1 se terá que

$$\lim \frac{g_{i,\ell}(\overline{x} + z_{n,y}^{\ell}) - G(y)}{z_{n,1}^{m_i^{\prime}} \, (z_{n,2}^{\ell})^{p_{i^{\prime}}}} = a_{m_i^{\prime} p_i^{\prime}}^{\ell}(i) \text{ onde}$$

$$(m_i', p_i') \in V(g_{i,\ell}(\cdot,y),\ \overline{x},\ \overline{o}_\ell) \text{ e } p_i' =$$

$$\max_{(m,p)\in V(g_{i,\ell}(\cdot,y),\overline{x},\overline{o}_\ell)} p.$$

Ainda segundo esse ítem o mesmo deve acontecer com o

$$\lim\ ((g_{i,\ell}(\overline{x} + (z_{n,1}, z_{n,1}^{\overline{o}_\ell - \delta_i}), y) - G(y))/$$

$$z_{n,1}^{m_i' + p_i'(o - \delta_i)})\ \forall \delta_i \text{ em } (0, \overline{\delta}_i)$$

para um dado $\overline{\delta}_i$ positivo.

Mas já levando em conta as identificações de (z_n^r), $r \in \overline{1,\ell}$ com subsequências que o algoritmo faz

$$g_{i,\ell}(\overline{x} + (z_1,\ z_1^{\overline{o}_\ell - \delta_i}), y) = g_i(\overline{x} + z_1, \sum_{r=0}^{\ell-1}$$

$$q_r\ z_1^{\overline{o}_r} + z_1^{\overline{o}_\ell - \delta_i}), y) \text{ e } g_{i,\ell}\ (\overline{x} + z_{n}^{\ell}, y) =$$

$$g_i(x_n, y) \quad \text{ por 30 e 31.}$$

Assim,

$$a^{\ell}_{m_i' p_i'}(i) = \lim\ ((g_i(\overline{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell-1} q_r\ z_{n,1}^{\overline{o}_r}$$

$$+ z_{n,1}^{\overline{o}_\ell - \delta_i}),\ y) - G(y))/z_{n,1}^{m_i' + p_i'(\overline{o}_\ell - \delta_i)}) =$$

$$\lim\ \left(\frac{g_i(x_n, y) - G(y)}{z_{n,1}^{m_i'} (z_{n,2}^{\ell})^{p_i'}} \right) \neq 0 \text{ ou } \infty$$

$$\forall i \in \overline{m}_o(\overline{x},y) \text{ e } \delta_i \in (0,\overline{\delta}_i) \tag{45}$$

Defina agora

$$T = \{t|\ u + t\ o(z^{\ell}_{n,2},\ z_{n,1}) = \hat{o},\ u \geq 0,$$

$$t \geq 0 \text{ e } ((z^{u}_{n,1}\ z^{t}_{n,2})/h_n) \to 0\} \tag{46}$$

e faça $\gamma = \sup_{t \in T} \{t\}$ se $T \neq \phi$ e $\gamma = 0$ em caso contrário. Faça ainda

$$\delta^{+} = \min\{(m'_i + \overline{o}_{\ell} p'_i - \hat{o})/p'_i,\ i \in \overline{m}_o(\overline{x},y)|$$

$$m'_i + \overline{o}_{\ell} p'_i > \hat{o} \text{ e } p'_i > 0\}$$

e se $\gamma \neq 0$ obtenha

$$\delta^{-} = \min\{(\hat{o}-1)/\gamma,\ (\hat{o}-(m'_i + \overline{o}_{\ell} p'_i))/\gamma,\ i \in$$

$$\overline{m}_o(\overline{x},y)|m'_i + \overline{o}_{\ell} p'_i < \hat{o}\}.$$

Se $\gamma = 0$ faça $\delta^{-} = \infty$.

Seja também $\tilde{o}^{-}_{\ell}$ como estabelecido no ítem A da afirmação 7.2.

Escolha então δ positivo e |

$$\delta < \min\{\overline{o}_{\ell} - \tilde{o}^{-}_{\ell},\ \delta^{+},\delta^{-},\ \overline{\delta}_i;\ i \in m_o(\overline{x},y)\} \tag{47}$$

e $\overline{o}_{\ell} - \delta$ seja racional (48) e sejam $\forall r \in \overline{0,\ell}$ μ_r e η_r inteiros positivos tais que $\overline{o}_r = \mu_r/\eta_r$ irredutível (49) $\forall r \in \overline{0,\ell-1}$ e $\overline{o}_\ell - \delta = \mu_\ell/\eta_\ell$. Tomando então $m = \text{m.m.c.} \{\eta_r,\ r \in \overline{0,\ell}\}$ (50) e

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \to \sum_{l=0}^{\ell-1} q_r\ \lambda^{\overline{o}_r . m} + \lambda^{(\overline{o}_\ell - \delta)m} \tag{51}$$

se satisfaz 13 por 47 e pelo ítem A da afirmação 7.2.

Para que 12 também se verifique deve-se fazer

$$h_n' = h_n\ z_{n,1}^{(\overline{o}_\ell - \delta)\gamma} / (z_{n,2}^{\ell})^{\gamma} \tag{52}$$

Para mostrar que essa escolha para h_n' é adequada observe inicialmente que

$$h_n' > 0\ \forall n \tag{53}$$

e

$$\lim h_n' = \lim(h_n / z_{n,1}^{\delta\gamma}).\ \lim(z_{n,1}^{\overline{o}_\ell . \gamma} / (z_{n,2}^{\ell})^{\gamma}) = 0 \tag{54}$$

pois $\delta < \delta^-$ e $q_\ell = \infty$. Além disso como $\forall i \in \overline{m}_0(\overline{x},y)$ se tem que

$$g_i(\overline{x} + (z_{n,1},\ \sum_{r=0}^{\ell-1} q_r\ z_{n,1}^{\overline{o}_r} + z_{n,1}^{\overline{o}_\ell - \delta}),y) =$$

$$= g_i(\overline{x} + (z_{n,1}, f(z_{n,1}^{1/m})),y)$$ e por 45, 53 e 54

para que os f,m e (h_n') indicados satisfaçam 12 basta verificar se $\forall i \in \overline{m}_0(\overline{x},y)$

$$\Pi_i' = \lim \frac{z_{n,1}^{m_i' + p_i'(\overline{o}_\ell - \delta)}}{h_n'} = \lim \frac{z_{n,1}^{m_i'}(z_{n,2}^{\ell})^{p_i'}}{h_n} = \Pi_i \quad (55)$$

Com esse objetivo $\forall i \in \overline{m}_0(\overline{x},y)$ compare

$m_i' + op_i'$ com $\hat{o}$ e p_i' com γ.

Serão obtidos assim os seguintes casos possíveis:

A) $m_i' + \overline{o}_\ell p_i' > \hat{o}$ e portanto $\Pi_i = 0$

B) $m_i' + \overline{o}_\ell p_i' = \hat{o}$ e $p_i' < \gamma$. Nesse caso pela definição de γ e como $\overline{q}_\ell = \infty$: $\Pi_i = 0$

C) $m_i' + \overline{o}_\ell p_i' = \hat{o}$, $p_i' = \gamma$

D) $m_i' + \overline{o}_\ell p_i' = \hat{o}$, $p_i' > \gamma$. Nessas condições por analogia ao que se dá em B: $\Pi_i = \infty$.

E) $m_i' + \overline{o}_\ell p_i < \hat{o}$ e portanto $\Pi_i = \infty$.

Imagine então que ocorre a possibilidade A. Nesse caso se tem que:

$$o(h_n', z_{n,1}) = \hat{o} - \delta\gamma < \hat{o} < m_i' + p_i'(\overline{o}_\ell - \delta)$$

pois $\delta < \delta^+$. Assim $\Pi_i' = 0 = \Pi_i$.

De forma análoga no caso E se tem

$$o(h_n', z_{n,1}) = \hat{o} - \delta\gamma > m_i' + p_i' \,\overline{o}_\ell \quad \text{pois } \delta < \delta^-$$

e $\Pi_i' = \infty = \Pi_i$.

No caso B se tem

$$o(h_n^{\prime}, z_{n,1}) = \bar{o} - \delta\gamma = m_i^{\prime} + p_i^{\prime}\ \bar{o}_{\ell} - \delta\gamma < m_i^{\prime} +$$

$$+ p_i^{\prime}(\bar{o}_{\ell} - \delta)$$ e desse modo $\Pi_i^{\prime} = 0 = \Pi_i$.

O caso D é idêntico ao B trocando-se apenas o sinal da última desigualdade para > e portanto $\Pi_i^{\prime} = \infty = \Pi_i$.

Na possibilidade C se tem que

$$\frac{z_{n,1}^{m_i^{\prime} + p_i^{\prime}(\bar{o}_{\ell}-\delta)}}{h_n^{\prime}} = \frac{z_{n,1}^{m_i^{\prime}}(z_{n,2}^{\ell})^{p_i^{\prime}}}{h_n}\ \forall n$$

terminando assim a prova de que 12 também é válida para os elementos indicados.

O tratamento do caso em que o algoritmo para porque $\bar{q}_{\ell} = 0$ pode ser feito de forma inteiramente análoga a do que se acabou de estudar. Se obterá então com auxílio dos ítens B das afirmações 7.1 e 7.2 que 12 e 13 poderão ser atendidas se:

a) $m = \text{m.m.c. } \{\eta_r,\ r \in \overline{0,\ell}\}$ onde:

μ_r, η_r inteiros positivos (56)|:

$\bar{o}_r = \mu_r/\eta_r$ irredutível $\forall r \in \overline{0,\ell-1}$ (57),

$\bar{o}_{\ell} + \delta = \mu_{\ell}/\eta_{\ell}$ irredutível (58),

δ positivo$|\delta > \min\{\tilde{o}_{\ell}^{+} - \bar{o}_{\ell},\ \delta^{+}, \delta^{-}, \delta_i^{*};$

$i \in \bar{m}_o(\bar{x},y)\}$ e $\bar{o}_{\ell} + \delta$ seja racional,

$\tilde{o}_\ell^+$ como definido no item B da afirmação 7.2,

$\delta^+ = \min\{(m_i^* + \bar{o}_\ell p_i^* - \hat{o})/\gamma,\ i \in \bar{m}_0(\bar{x},y) \mid m_i^* + \bar{o}_\ell p_i^* > \hat{o}\}$ se $\gamma > 0$ e $\delta^+ = \infty$ em caso contrário,

$\delta^- = \min\{(\hat{o}-(m_i^* + \bar{o}_\ell p_i^*))/p_i^*,\ i \in \bar{m}_0(\bar{x},y) \mid m_i^* + \bar{o}_\ell p_i^* < \hat{o}$ e $p_i^* > 0\}(m_i^*,p_i^*) \in v(g_i(\cdot,y),\bar{x},\bar{o}_\ell)$ e $p_i^* = \min\limits_{(m,p)\in V(g_i(\cdot,y),\bar{x},\bar{o}_\ell)} p$,

$\gamma = \inf\limits_{t\in T}\{t\}$ se $T \neq \phi$, T como definido em 46,

$\gamma = \hat{o}/o\ (z_{n,2}^\ell,\ z_{n,1})$ se $T = \phi$

$$\delta_i^* > 0 \mid \lim \frac{g_{i,\ell}(\bar{x} + (z_{n,1}, z_{n,1}^{\bar{o}_\ell + \delta_i}),y) - G(y)}{z_{n,1}^{m_i^* + p_i^*(o + \delta_i)}}$$

$= a^\ell_{m_i^* p_i^*}(i)\ \forall \delta_i$ em $(0,\delta_i^*)$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lambda \to \sum_{r=0}^{\ell-1} q_r\, \lambda^{\bar{o}_r m} + \lambda^{(\bar{o}_\ell + \delta)m}.$$

c) $h_n' = h_n\, z_{n,1}^{(\bar{o}_\ell + \delta)\gamma} / (z_{n,2}^\ell)^\gamma$.

Se o algoritmo termina porque $0 < \bar{q}_\ell < \infty$ e $\bar{o}_\ell \notin Q$ então pelos ítens C das afirmações 7.1 e 7.2 se tem que

que existe

$\tilde{\delta} > 0 | \forall \delta$ tal que $|\delta| < \bar{\delta}$:

a) $\exists\ \hat{\varepsilon}(\delta) > 0 | \bar{x} + (z_1, \sum_{r=0}^{\ell-1} \bar{q}_r\, z_1^{\bar{o}_r} + z_1^{\bar{o}_\ell+\delta}) \varepsilon\ X$

$\forall z_1\ \varepsilon\ [0,\hat{\varepsilon}(\delta))$ (59) e

b) $\forall i\ \varepsilon\ \bar{m}_0(\bar{x},y)\ \lim\{|g_i(\bar{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell-1} \bar{q}_r$

$z_{n,1}^{\bar{o}_r} + \bar{q}_\ell\, z_{n,1}^{\bar{o}_\ell+\delta}),y) - G(y)]/z_{n,1}^{\tilde{m}_i+(\bar{o}_\ell+\delta)\tilde{p}_i}\bar{q}_\ell^{-\tilde{p}_i}\} =$

$$= \lim \frac{g_{i,\ell}(z_{n,1}, \bar{q}_\ell\, z_{n,1}^{\bar{o}_\ell-\delta}, y) - G(y)}{z_{n,1}^{\tilde{m}_i+(\bar{o}_\ell+\delta)\tilde{p}_i}\ .\ \bar{q}_\ell^{-\tilde{p}_i}} = a_{\tilde{m}_i\tilde{p}_i}(i)$$

$$= \lim \frac{g_{i,\ell}(z_{n,1}, z_{n,2}^{\ell}, y) - G(y)}{z_{n,1}^{\tilde{m}_i}\ .(z_{n,2}^{\ell})^{\tilde{p}_i}} =$$

$$= \lim \frac{g_i(x + (z_{n,1}, z_{n,2}), y) - G(y)}{z_{n,1}^{\tilde{m}_i}\ (z_{n,2}^{\ell})^{\tilde{p}_i}} \neq 0 \text{ onde}$$

$$V(g_{i,\ell}(\cdot,y),\ 0, \bar{o}_\ell) = \{(\tilde{m}_i, \tilde{p}_i)\} \qquad (60)$$

Seja agora $(\tilde{m},\tilde{p})$ a única solução inteira, se houver, de $m + p\ \bar{o}_\ell = \hat{o}$.

Faça então se $\tilde{p}$ estiver definido faça

$\delta^+ = \min\{(\tilde{m}_i + \bar{o}_\ell\tilde{p}_i - \hat{o})/\tilde{p},\ i\ \varepsilon\ \bar{m}_0(x,y) |$

$$\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \, \tilde{p}_i > \hat{o}\}$$

em caso contrário faça $\delta^+ = \infty$. Seja ainda

$$\delta^- = \min\{(o-(\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \tilde{p}_i))/\tilde{p}_i, \; i \in \overline{m}_o(x,y) |$$

$$\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \tilde{p}_i < \hat{o}, \; \tilde{p}_i > 0\}.$$

Escolha então δ entre 0 e $\min\{\delta^+, \delta^-, \tilde{\delta}\}$ de forma que $\overline{o}_\ell + \delta \in Q$. Sejam novamente μ_r e η_r; $r \in \overline{0,\ell}$ como definidos em 56, 57 e 58, m = m.m.c. $\{\eta_r, \; r \in \overline{0,\ell}\}$ e

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \to \sum_{r=0}^{\ell-1} \overline{q}_r \, \lambda^{\overline{o}_r m} + \overline{q}_\ell \, \lambda^{(\overline{o}_\ell + \delta)m}$$

Faça também $h_n' = h_n \, z_{n,1}^{\delta \tilde{p}}$ se $\tilde{p}$ estiver definido e $h_n' = h_n$ em caso contrário. É lógico que $h_n' > 0$ e $h_n' \to 0$ e com esses m, f e (h_n') se tem, por 59, que 13 é satisfeita. Para verificar que 12 também é atendida, levando em conta 60, basta provar que

$$\forall i \in \overline{m}_o(\overline{x},y): \Pi = \lim \frac{z_{n,1}^{\tilde{m}_i} \, z_{n,2}}{h_n} =$$

$$= \overline{q}_\ell \lim \frac{z_{n,1}^{\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \tilde{p}_i}}{h_n} = \overline{q}_\ell \lim \frac{z_{n,1}^{\tilde{m}_i + (o_\ell + \delta)\tilde{p}_i}}{h_n'} = \Pi' \qquad (61)$$

Para isso compare $\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \tilde{p}_i$ com $\hat{o}$ e analise cada uma das possibilidades:

1a.) $\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \tilde{p}_i > \hat{o}$. Se isso acontece, como $\delta < \delta^+$, $\tilde{m}_i + (o_\ell + \delta)\tilde{p}_i > \tilde{m}_i + \overline{o}_\ell\tilde{p}_i > \hat{o}$

$$+ \delta\tilde{p} = o(h'_n, z_{n,1}) \qquad (62)$$

se $\tilde{p}$ está definido. Se $\tilde{p}$ não está $h'_n = h_n$ e como $\tilde{m}_i + (o_\ell + \delta)\tilde{p}_i > \hat{o}$ se terá em qualquer caso que $\Pi = \Pi' = 0$.

2a.) $\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell\tilde{p}_i = \hat{o}$. Nesse caso $\tilde{p}$ está definido, $\tilde{p}_i = \tilde{p}$ e portanto $(z_{n,1}^{\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell \tilde{p}_i}/h_n) = (z_{n,1}^{\tilde{m}_i + (\overline{o}_\ell + \delta)\tilde{p}_i}/h'_n)\ \forall n$.

3a.) $\tilde{m}_i + \overline{o}_\ell\tilde{p}_i < \hat{o}$. Nesse caso, como $\delta < \delta^-$ $\tilde{m}_i + (o_\ell + \delta)\tilde{p}_i < \hat{o}(= o(h'_n, z_{n,1})$, se $\tilde{p}$ não é definido) $< \hat{o} + \delta\tilde{p}(= o(h'_n, z_{n,1})$, se $\tilde{p}$ estiver definido). Em qualquer situação portanto $\Pi = \Pi' = \infty$.

Completa-se dessa forma o tratamento do caso em que a condição de parada é $0 < \overline{q}_\ell < \infty$ e $\overline{o}_\ell \notin Q$.

Considere agora que o algoritmo para porque em um dado estágio $\forall i \in I_{\ell+1}$ $v(g_{i,\ell+1}(\cdot,y),\overline{x},\overline{o}_{\ell+1}) > \hat{o}$ (62)
Nesse caso $\forall m' \in \mathbb{N}$ e $\forall$ função analītica

$$\rho:(-\varepsilon_\rho,\varepsilon_\rho) \to \mathbb{R} \mid o_0(\rho(z_1^{1/m'}), z_1) \geq o_{\ell+1}$$

(63)

se tem que $\forall i \in I_{\ell+1}$: e

$$\lim \frac{|g_i(\overline{x} + (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell} q_r z_{n,1} + \rho(z_{n,1}^{1/m'})),y) - G(y)|}{h_n}$$

$$= \lim \frac{|g_{i,\ell+1}(z_{n,1},\rho(z_{n,1}^{1/m'}),y) - G(y)|}{h_n} = 0 \tag{64}$$

pois

$$o_0(g_{i,\ell+1}(z_{n,1},0,y),z_1) \leq v(g_{i,\ell+1}(\cdot,y),\overline{x},\overline{o}_{\ell+1}) > \hat{o}$$

e também por 63.

Usando o mesmo raciocínio se tira que

$$\lim \frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{h_n} = \lim (g_{i,\ell+1}$$

$$(z_{n,1},z_{n,2}^{\ell+1}, y)-G(y))/h_n = 0 \tag{65}$$

Além disso $\forall i \notin I_{\ell+1}$ se tem, já levando em conta as identificações de (z_n) com subsequências feitas pelo algoritmo, que

$$\tilde{o}_i = o(g_i(x_n,y)-G(y),z_{n,1} = o(g_{i,\ell+1}(z_{n,1} ,$$

$$z_{n,2}^{\ell+1}, y)- G(y), z_{n,1}) \overset{i\notin I_{\ell+1}}{=} o_0(g_{i,\ell+1}(z_1,0 ,$$

$$y) - G(y),z_1) \overset{(63)}{=} o_0(g_{i,\ell+1}(z_1,\rho(z_1^{1/m}),y) -$$

$$- G(y),z_1) = o_0(g_i(\overline{x} + (z_1, \sum_{r=0}^{\ell} q_r\, z_1^{\overline{o}_r} +$$

$$+ \rho(z_1^{1/m'}),y) - G(y),z_1) \qquad (66)$$

O mesmo se dá se nas expressões acima o e o_0 forem substituídos por q e q_o e se puser $a^{\ell+1}_{\tilde{o}_i,0}(i)$ no lugar de $\tilde{o}_i$. (67).

Assim $\forall i \in I_{\ell+1}$:

$$\lim \frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{z_{n,1}^{\overline{o}_i}} \cdot \frac{z_{n,1}^{\tilde{o}_i}}{h_n} = \lim[(g_i(\overline{x} +$$

$$+ (z_{n,1}, \sum_{r=0}^{\ell} q_r\, z_1^{\overline{o}_r} + \rho(z_1^{1/m'}),y)-G(y))/z_{n,1}^{\tilde{o}_i})$$

$$.(z_{n,1}^{\tilde{o}_i}/h_n)| = a^{\ell+1}_{\tilde{o}_i,0} \cdot \lim (z_{n,1}^{\tilde{o}_i}/h_n) \qquad (68)$$

pois $a^{\ell+1}_{\tilde{o}_i,0} \neq 0$ ou ∞ e considerando a identificação feita pelo algoritmo no passo 0 que permite garantir que $\lim (z_{n,1}^{\tilde{o}_i}/h_n)$ existe.

Sejam agora mais uma vez μ_r, η_r inteiros positivos tais que $\overline{o}_r = \mu_r/\eta_r$ irredutível $\forall r \in \overline{0,\ell}$.

Juntando então 64, 65 e 68 se tem que fazendo para quaisquer $m' \in \mathbb{N}$ e $\rho:(-\varepsilon_\rho,\varepsilon_\rho) \to \mathbb{R}$ analítica que satisfaça 63, m = m.m.c. $(m, \eta_r;\ r \in 1,\ell)$ e

$$f: (-\varepsilon_\rho,\varepsilon_\rho) \to \mathbb{R} \mid f(\lambda) = \sum \overline{q}_r\, \lambda^{\overline{o}_r m} + \rho(\lambda^{m/m'})$$

além de se conservar $h_n' = h_n$ se consegue atender 12. O ítem D da afirmação 7.2 garante que m' e ρ podem ser escolhidos de forma que obtendo f e m como indicado acima para esses m e f e xista $\varepsilon^* > 0 | x + (z_1, f(z_1^m))$ seja viável $\forall z_1 \in (0,\varepsilon^*)$. Atende - se assim também a 13.

Para verificar que se o algoritmo termina porque $I_{\ell+1} = \phi$ então é possível obter os elementos desejados a partir das indicações por ele fornecidas basta reproduzir o raciocínio realizado acima para $i \notin I_{\ell+1}$.

Falta apenas para encerrar o tratamento do caso em que $1 \leq \hat{o} = o(h_n, z_{n,1}) < \infty$ mostrar que o algoritmo I realmente termina.

Suponha então que isso não acontece. Nesse caso seria gerada uma sequência $(\overline{o}_\ell, g_{i,\ell}(\cdot,y)'$ para algum $i \in m_o(\overline{x},y)$ tal que $\forall \ell \in \mathbb{N}$:

$$\overline{o}_\ell \in Q,\ 0 < |\overline{q}_\ell| < \infty,\ o_0(g_{i,\ell+1}(z_1,0,y),z_1)$$

$$> v(g_{i,\ell}(\cdot,y),\overline{x},\overline{o}_\ell) = v_{i,\ell} \tag{69}$$

e
$$v_{i,\ell} \leq \hat{o} \tag{70}$$

69 indica pela observação C que

$$a^{\ell+1}_{v_{i,\ell},0}(i) = \sum_{(m,p)\in V_{i,\ell}} a^{\ell}_{m,p}(i)\ \overline{q}^{p}_{\ell} = 0\ \forall \ell \in \mathbb{N}$$

Como

$$a^{\ell}_{m,p}(i) \neq 0\ \forall (m,p) \in v_{i,\ell} \quad \text{e} \quad \ell \in \mathbb{N} \text{ se tem}$$

que

$$\# (v_{i,\ell}) \geq 2 \ \forall \ell \in \mathbb{N} \ .$$

Isso significa que $\forall \ell \in \mathbb{N}$ existem (m_1^ℓ, p_1^ℓ) e

$$(m_2^\ell, p_2^\ell) \in \mathbb{N}^2 | m_1^\ell + \bar{o}_\ell \ p_1^\ell = m_2^\ell + \bar{o}_\ell \ p_2^\ell = v_{i,\ell} \tag{71}$$

com $m_1^\ell > m_2^\ell$.

Faça agora ϕ_ℓ e ψ_ℓ inteiros positivos tais que $\hat{o}_\ell = \phi_\ell/\psi_\ell$ irredutível $\forall \ell \in \mathbb{N}$. Assim $m_1^\ell \geq m_1^\ell - m_2^\ell = k_\ell \cdot \psi_\ell$ para algum k_ℓ inteiro e > 0 (72) pois

$$(m_1^\ell - m_2^\ell)\psi_\ell = (p_2^\ell - p_1^\ell) \quad \phi_\ell \quad \text{e } \phi_\ell \text{ e } \psi_\ell$$

são primos entre si.

Por 70 $\bar{o}_\ell \leq v_{i,\ell} \leq \hat{o}$. Além disso $\bar{o}_{\ell+1} > \bar{o}_\ell > 0$ e portanto $(\bar{o}_\ell)$ é uma sequência positiva crescente e limitada tendo assim um ponto de acumulação não nulo. Desse modo se pode dizer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \ \ell(n) | \phi_{\ell(n)} \text{ e } \psi_{\ell(n)}$$

são maiores que n. Fazendo então n qualquer > $\hat{o}_\ell$ se tem por 72 que:

$$v_{i,\ell(n)} = m_1^{\ell(n)} + \bar{o}_\ell \ p_1^{\ell(n)} > m_1^{\ell(n)} \geq k_{\ell(n)}$$

$$\phi_{\ell(n)} \geq \phi_{\ell(n)} > n > \hat{o}_\ell$$

contrariando 70. Portanto a sequência $(\bar{o}_\ell, q_{i,\ell}(\cdot,y))$ gerada pelo algoritmo é finita.

Assuma de agora até o final desta prova que $\hat{o} = o(h_n, z_{n,1}) = \infty$. Nesse caso o procedimento que será desenvolvido se apoiará no teorema 6 e no seguinte resultado:

<u>Afirmação 7.3</u>:

Sejam:

S_j: X_o aberto $\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ analíticas $\forall j \in \overline{1,J}$,

$X = \{x \in X_o \mid S_j(x) \leq 0 \quad \forall j \in \overline{1,J}\}$

como dado no enunciado do teorema,

$\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in X$, $\varepsilon > 0$, $F: B_\varepsilon(\overline{x}) \to \mathbb{R}$

analítica expressa por

$$F(x^1, x^2) - F(\overline{x}) = \sum_{m,p \in \mathbb{N}} a_{mp}(x^1 - \overline{x}^1)^m (x^2 - \overline{x}^2)^p$$

e uma sequência

$((\alpha_n, \beta_n)), (\alpha_n, \beta_n) \to \overline{0}$, α_n e $\beta_n > 0$,

$o(\beta_n, \alpha_n) = \infty$ e $\exists\, n_o \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_o \ \overline{x} + (\alpha_n, \beta_n) \in X$.

Sejam ainda

$\overline{v}' = v'(F, \overline{x}) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists\, m \in \mathbb{N} \mid a_{mp} \neq 0\}$ e

$\overline{w}' = w'(F, x) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_{m\overline{v}'} \neq 0\}$

Nesse caso,

$$A)\ \lim \frac{F(\overline{x} + (\alpha_n,\beta_n)) - F(\overline{x})}{\alpha_n^{\overline{w}'}\ \beta_n^{\overline{v}'}} = a_{\overline{w}'\overline{v}} \qquad (73)$$

e se β_n é substituído por α_n^r com $r > \overline{w}'$ o resultado continua válido.

B) $\exists\ N(X) \in \mathbb{N} | \forall r > N(X)\ \exists\ \varepsilon_r > 0 \,|\, \forall \alpha \in |0,\varepsilon_r)$

$x + (\alpha,\alpha^r) \in X.$

Prova:

Pela própria definição de v' se tem que

$$F_1:\ B_\varepsilon(\overline{x}) \to \mathbb{R} \qquad\qquad \text{é analítica.}$$
$$(\alpha,\beta) \to (F(\overline{x} + (\alpha,\beta)) - F(\overline{x}))/\beta^{\overline{v}'}$$

Usando então o resultado que se indica em 18 com $n = \overline{w}'$ se tem imediatamente que

$$\lim((F(\overline{x} + (\alpha_n,\beta_n)) - F(\overline{x}))/\alpha_n^{\overline{w}'}\ \beta_n^{\overline{v}'}) =$$

$$= \lim(F_1(\alpha_n,\beta_n)/\alpha_n^{\overline{w}'}) = a_{\overline{w}'\overline{v}'}$$

Repare agora que se $r > \overline{w}'$ e $(m,p) \neq (\overline{w}'\overline{v}')$ é tal que $p > \overline{v}'$ então $m + pr > pr > \overline{w}' + \overline{v}'r$ (74). Se $p = \overline{v}'$ então $m > \overline{w}'$ e portanto $m + pr > \overline{w}' + \overline{v}'r$ do mesmo jeito (75). 74 e 75 mostram que

$$o_0\ (F(\overline{x} + \alpha,\alpha^r)) - F(\overline{x}),\alpha) = \overline{w}' + \overline{v}'r \text{ e que}$$

$$q_0\ (F(\overline{x} + \alpha,\alpha^r)) - F(\overline{x}),\alpha) = a_{\overline{w}'\overline{v}'}.$$

Esta última igualdade mostra que a substituição no ítem A é possível encerrando a demonstração desse ítem.

Sejam agora

$$\varepsilon_{jk},\ m_{jk},\ \phi_{jk}$$

como dados na afirmação 7.2 e

$$T^{+}(\overline{x}) = \{(j,k),\ j \in S(\overline{x}),\ k \in \overline{1,K_j} \mid$$

$$q(\phi_{jk}\ (\alpha_n^{1/m_{jk}}),\ \alpha_n) > 0\}.$$

Faça ainda

$$\overline{o} = \max_{(j,k)\in T^{+}(\overline{x})} o(\phi_{jk}(\alpha_n^{1/m_{jk}},\ \alpha_n))$$

Para todo $r > \overline{o}$ $\exists$ $n_r \mid \forall n > n_r$ se tem que

$$\overline{x} + (\alpha_n, \alpha_n^r) \in X \tag{76}$$

pois em caso contrário como $\overline{x} + (\alpha_n, \beta_n)$ é viável e

$$\exists\ n_r' \mid \forall n > n_r'\ \beta_n < \alpha_n^r$$

se teria passando se houvesse necessidade a uma subsequência de (α_n, β_n) que para algum $j \in \overline{1,J}$ existiriam $k \in \overline{1,K_j}$ e

$$\gamma_n \in [\beta_n, \alpha_n^r) \mid \gamma_n = \phi_{jk}\ (\alpha_n^{1/m_{jk}})\ \forall n.$$

Como $\gamma_n \to 0$ e $\gamma_n > 0$ $\forall n (j,k) \in T^{+}$.

Além disso como $\gamma_n < \alpha_n^r$ se tem que

$$o(\phi_{j,k}(\alpha_n^{1/m_{jk}}),\ \alpha_n) \geq r > \overline{o}$$

o que é um absurdo.

Assim 76 é válida e pela analiticidade das S_j, $j \in \overline{1,J}$ ela é equivalente a garantir a existência de $\varepsilon_r > 0 |$ $\forall \alpha \in [0, \varepsilon_r)$ $x + (\alpha, \alpha^r) \in X$.

Demonstrado esse resultado se vai introduzir agora o operador op cuja ação é a seguinte. Dadas duas sequên - cias α_n e β_n de números reais, $\alpha_n \neq 0$ $\forall n$

$$op(\beta_n, \alpha_n) = \sup \{s \in \mathbb{R} | \overline{\lim} |\beta_n / \alpha_n^s| = 0\}.$$

$$\text{Se } \overline{\lim} |\beta_n / \alpha_n^s| = \infty \ \forall s \in \mathbb{R}$$

então de acordo com convenção adotada neste trabalho

$op(\beta_n, \alpha_n) = -\infty$. Esse operador op é uma generalização do operador o a sequências que não tem necessariamente limite nulo e terá utilidade no tratamento do caso que se está considerando.

Chame agora

$$\overline{m}_o^{\infty}(\overline{x},y) \text{ a } \{i \in \overline{m}_o(\overline{x},y) | o(g_i(x_n,y) - G(y), z_{n,1}) = \infty\}.$$

Se tem necessariamente $\overline{m}_o^{\infty}(\overline{x},y) \neq \phi$ (77) pois em caso contrário

$$\forall i \in m_o(\overline{x},y), \left|\lim \frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{h_n} + g_i(x,\cdot)'(y,d)\right| =$$

$$= \lim |(g_i(x_n, y + h_n d) - G(y))/h_n| = \infty$$

o que é um absurdo pelo teorema 1 pois $x_n \in M_0(y + h_n d)$.

77 indica pelo teorema 6 que passando se for preciso a uma subsequência de x_n existe $m \in \mathbb{N}$, $\hat{\varepsilon} > 0$ e

$$\hat{f}: (-\hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}) \to \mathbb{R} | g_i(\overline{x} + (z_{n,1}, \hat{f}(z_{n,1}^{1/m})), y) = 0$$

$$\forall i \in \overline{m}_0^{\infty}(x, y) \tag{78}$$

e se

$$z_{n,2}^{\infty} = z_{n,2} - \hat{f}(z_{n,1}^{1/m}) \text{ então } o(z_{n,2}^{\infty}, z_{n,1}) = \infty \tag{79}$$

Se existe então, uma subsequência $(z_{n_k,2}) \mid z_{n_k,2} = 0$ considerando apenas os termos (x_{n_k}, h_{n_k}) e fazendo $m = \hat{m}$, $f = \hat{f}$ e $h_n' = h_n$ se satisfaz 12 e 13. Em caso contrário eliminando se preciso um número finito de termos se pode supor que $z_{n,2} \neq 0$. Faça então

$$z_2^{\infty} = z_2 - \hat{f}(z_1^{1/m}),\ z^{\infty} = (z_1, z_2^{\infty}),\ T_{\infty}: B_{\varepsilon}(\overline{x})$$

$$\to \mathbb{R}^2 |\ T_{\infty}(x_1, x_2) = z^{\infty},\ \hat{X}_{\infty} = T_{\infty}(B_{\varepsilon}(\overline{x})) \qquad \text{e}$$

$$\forall i \in \overline{m}_0(\overline{x}, y)\ g_{i,\infty}(\cdot, y): \hat{X}_{\infty} \to \mathbb{R} | g_{i,\infty}(x^{\infty}, y) =$$

$= g_i(\overline{x} + z, y)$. $g_{i,\infty}(\cdot, y)$ é analítica por ser a composição de analíticas. Sejam então

$$\forall m \text{ e } p \in \mathbb{N}\ a^{\infty}_{mp}(i) \in \mathbb{R} | \forall z^{\infty} \in \hat{X}_{\infty}\ g_{i,\infty}(z^{\infty},y) =$$

$$= \sum_{m,p} a^{\infty}_{mp}(i)\ z^{m}_{1}\ (z^{\infty}_{2})^{p}.$$

Faça também

$$\forall i \in \overline{m}_{o}^{\infty}\ (\overline{x},y)\ \overline{v}'_{i} = v'(g_{i,\infty}(\cdot,y),\overline{0}) \quad \text{e}$$

$$\overline{w}'_{i} = w'(g_{i,\infty}(\cdot,y),\overline{0}).\ v' \text{ e } w'$$

como definidos na afirmação 7.3.

Seja agora $\hat{o}_{\infty} = o(h_n,\ z^{\infty}_{n,2})$. Suponha inicialmente que $\hat{o}_{\infty} < \infty$. Passando então se houver necessidade a considerar apenas uma subsequência de $(h_n,\ z^{\infty}_{n,2})$ se pode obter que

$$\lim\ (h_n/(z^{\infty}_{n,2})^{s}) = \infty\ \forall s > \hat{o}_{\infty}.$$

Feito isso chame de $\hat{o}_1$ a $op(h_n/(z^{\infty}_{n,2})^{\hat{o}_{\infty}},\ z_{n,1})$. Se $\hat{o}_1 < \infty$ novamente a identificação agora de $(h_n,\ z^{\infty}_{n,2}, z_{n,1})$ com uma subsequência permitirá que

$$\lim\ (h_n/((z^{\infty}_{n,2})^{\hat{o}_{\infty}}\ z^{t}_{n,1})) = \infty\ \forall t > \hat{o}_1.$$

Seja agora $N(X)$ como apresentado no ítem B da afirmação 7.3 com $F = g_{i,\infty}(\cdot,y)$ e considere que $|\hat{o}_1| < \infty$. Defina então

$$N^{+} = \max\{\hat{o}_1/(\overline{v}'_{i} - \hat{o}_{\infty}) \forall i \in \overline{m}_{o}(\overline{x},y) | \overline{v}'_{i} > \hat{o}_{\infty}\}$$

e

$$N^{-} = \max\{(\overline{w}'_{i} - \hat{o}_1)/(\hat{o}_{\infty} - \overline{v}'_{i}) \forall i \in \overline{m}_{o}(\overline{x},y) |$$

$\overline{v}_i' < \hat{o}_\infty \}$

Faça agora m como dado em 78,

$$N \text{ natural} | N > \max\{N(X), N^+, N^-, \overline{w}_i'; \ i \ \varepsilon \ \overline{m}_o(\overline{x},y),$$

$$, -\hat{o}_1 / \hat{o}_\infty\} , \quad f:(\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}) \to \mathbb{R} \qquad (80)$$
$$\lambda \to \hat{f}(\lambda) + \lambda^{Nm}$$

e $$h_n' = h_n \, z_{n,1}^{N.\hat{o}_\infty} / (z_{n,2}^\infty)^{\hat{o}_\infty} \quad h_n' > 0 \ \forall n$$

e como $N > -\hat{o}_1/\hat{o}_\infty$ se verifica que $h_n' \to 0$.

Além disso como $N > N(X)$ se tem usando o ítem B da afirmação 7.3. que 13 é atendida. Para verificar que 12 também o é observe que como $N > \overline{w}_i' \ \forall i \ \varepsilon \ \overline{m}_o(\overline{x},y)$, por 7.3-A

$$\lim(g_i(x_n,y) - G(y)/z_{n,1}^{\overline{w}_i} \ (z_{n,2}^\infty)^{\overline{v}_i}) =$$

$$\lim((g_{i,\infty}(z_n^\infty,y) - G(y))/z_{n,1}^{\overline{w}_i}(z_{n,2}^\infty)^{\overline{v}_i'}) = a_{\overline{w}_i'\overline{v}_i'} =$$

$$\lim((g_{i,\infty}(z_{n,1}, z_{n,1}^N, y) - G(y))/z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N\overline{v}_i'}) =$$

$$\lim((g_i(\overline{x} + (z_{n,1}, \hat{f}(z_{n,1}^{1/m}) + z_{n,1}^N, y) - G(y))/$$

$$z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N\overline{v}_i'}) \neq 0 \qquad (81)$$

Em vista disso se for provado que

$$\forall i \ \varepsilon \ \overline{m}_o(\overline{x},y) \ \Pi' = \lim(z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N\overline{v}_i'}/h_n') =$$

$$\lim z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N(\overline{v}_i'-\hat{o}_\infty)}((z_{n,2}^{\infty})^{\hat{o}_\infty}/h_n) = \lim \cdot z_{n,1}^{\overline{w}_i} \cdot$$

$$(z_{n,2}^{\infty})^{\overline{v}_i}/\ h_n = \Pi \tag{82}$$

se terá completado o tratamento desse caso.

Considere então inicialmente que $\overline{v}_i' < \hat{o}_\infty$.

Nesse caso $\Pi = \infty$ e

$$op(z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N(\overline{v}_i'-\hat{o}_\infty)}\ (z_{n,2}^{\infty})^{\hat{o}_\infty}/h_n,\ z_{n,1}) =$$

$$\overline{w}_i' + N(\overline{v}_i' - \hat{o}_\infty) - \hat{o}_1 < 0$$

pois $N > N^-$ e assim $\Pi' = \infty$.

Se $\overline{v}_i' > \hat{o}_\infty$ se tem $\Pi = 0$ e

$$op(z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N(\overline{v}_i'-\hat{o}_\infty)}((z_{n,2}^{\infty})^{\hat{o}_\infty}/h_n),z_{n,1}) > 0$$

pois $N > N^+$ e portanto também Π' é nulo.

Quando

$$\overline{v}_i' = \hat{o}_\infty(z_{n,1}^{\overline{w}_i'+N\overline{v}_i'}/h_n') = z_{n,1}^{\overline{w}_i'}(z_{n,2}^{\infty})^{\overline{v}_i'}/h_n$$

e então logicamente $\Pi = \Pi'$.

Suponha agora que $\hat{o}_1 = -\infty$. Nesse caso $\hat{o}_\infty > 0$ pois $h_n \to 0$. Faça então m como em 78,

$$N^- = \max\{\overline{w}_i' + 1/(\hat{o}_\infty - \overline{v}_1')\ \forall i\ \varepsilon\ \overline{m}_0(\overline{x},y)|$$

$\hat{o}_\infty > \overline{v}_i^!\}$

e escolha um natural

$$N > \max\{N(X),\ N^-, \overline{w}_i^!;\ i \in \overline{m}_0(\overline{x},y), 1/\hat{o}_\infty\}$$

Usando esse N faça f como em 80 e $h_n^! = z_{n,1}^{N.\hat{o}_\infty}$. $h_n^! \to 0$ pois $N > 1/\hat{o}_\infty$.

De novo esses elementos satisfazem logicamente 13 e mostrar que 12 também vale fica de novo, pelo ítem A da afirmação 7.3, na dependência de provar que a igualdade

$$\Pi' = \lim(z_{n,1}^{\overline{w}_i^! + N\overline{v}_i^!}/h_n^!) = \lim(z_{n,1}^{\overline{w}_i^!}.(z_{n,2}^\infty)^{\overline{v}_i^!} / h_n) = \Pi \quad \text{se verifica.}$$

Para ver isso basta notar que como $\hat{o}_1 = -\infty$ então se $\overline{v}_i^! \geq \hat{o}_\infty$ se tem $\Pi = 0$ sendo $\Pi = \infty$ em caso contrário. É simples verificar que o mesmo se dá com

$$\Pi' = \lim z_{n,1}^{\overline{w}_i^! + N\overline{v}_i^!}/h_n^! = \lim(z_{n,1}^{\overline{w}_i^! + N(\overline{v}_i^! - \hat{o}_\infty)+1})$$

pois $N > N^-$ e $\overline{w}_i^! \geq 0$.

Se $\hat{o}_1 = +\infty$ escolha

$$P \in \mathbb{R} | P > \max\{\overline{w}_i^!;\ i \in \overline{m}_0(\overline{x},y)\} \qquad \text{e}$$

$$N^+ = \max\{P - \overline{w}_i^! / (\overline{v}_i^! - \hat{o}_\infty);\ i \in \overline{m}_0(\overline{x},y) | \overline{v}_i^! > \hat{o}_\infty\}.$$

Faça agora N natural tal que

$$N > \{N(X),\ N^{+}, \overline{w}_i';\ i \in m_o(\overline{x},y)\},$$

m e f como nos dois últimos casos e $h_n' = z_{n,1}^{N.\hat{o}_\infty + P}$. $h_n' \to 0$ claramente.

A prova de que 12 e 13 se verificam para esses elementos é inteiramente análoga a efetuada no tratamento do caso em que $\hat{o}_1 = -\infty$.

Finalmente se $\hat{o}_\infty = \infty$ se tem que

$$\lim\left(\frac{g_i(x_n,y) - G(y)}{h_n}\right) = +\infty \text{ se } a^{\infty}_{\overline{w}_i'\overline{v}_i'} > 0 \text{ e } -\infty$$

se $a^{\infty}_{\overline{w}_i'\overline{v}_i'} < 0$. Por 7.3-A esses mesmos limites serão obtidos se x_n é substituído por

$$x + (z_{n,1}, \hat{f}(z_{n,1}^{1/m}) + z_{n,1}^{N})$$

para qualquer

$$N > \max\{\overline{w}_i';\ i \in \overline{m}_o(\overline{x},y)\} \qquad (83)$$

m e $\hat{f}$ como dados em 80 . Se N > N(X) como definido no ítem B da afirmação 7.2, 13 é satisfeita. Assim esse

$$\begin{aligned} f:\ (-\hat{\varepsilon},\hat{\varepsilon}) &\to \mathbb{R} \\ \lambda &\to f(\lambda) + \lambda^{Nm} \end{aligned}$$

com N atendendo a 83 e maior que N(X) e $h_n' = h_n$ atendem as condições requeridas.

Completa-se assim a prova do teorema, assumida as hipóteses dadas em 7, 9 e 11. Se ao invés ocorrer uma outra combinação das possibilidades indicadas de 7 a 11' então um procedimento inteiramente análogo poderá ser empregado para efetuar a demonstração.

CAPÍTULO V

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS DE OTIMALIDADE

Este capítulo se constitui de dois resultados. No primeiro (Teorema 8) são apresentadas simplesmente condições necessárias de otimalidade para os problemas I e II dados no capítulo I e que valem sempre que as funções envolvidas forem continuamente diferenciáveis e $G'(y,d)$ puder ser dada por $\hat{G}'(y,d)$. Essas condições são análogas as de Fritz-John para problemas de programação matemática no seu formato clássico (ver Mangasarian (1)) e, como era de se esperar, no caso do problema I a presença de uma condição de qualificação conveniente faz com que se possa "explicitar" o gradiente da função custo obtendo-se dessa forma "condições de Kuhn-Tucker".

Esse resultado assegura apenas a existência de um subconjunto de $M_0(y)$ ao qual é possível associar alguns elementos satisfazendo determinadas propriedades quando y é ótimo. Entretanto, por se constituir basicamente na simples aplicação de um critério geral de otimalidade equivalente a um teorema de alternativas, ele não é nada esclarecedor no que diz respeito a determinação desse subconjunto.

Por isso, numa segunda parte se procura fornecer para o caso em que valem as hipóteses do teorema 4 um critério de otimalidade em que se especifica melhor os pontos de $M_0(y)$ que devem ser escolhidos. Esse critério será obtido a partir de uma divisão de $M_o(y)$ em subconjuntos adequados e que nas condições dadas sobre X e as $g_i(\cdot,y)$ possuem apenas um número finito de pontos extremos.

5.1.

É dada a seguir uma condição necessária de otimalidade para os problemas I e II do capítulo I válida sempre que houver diferenciabilidade e se puder fazer a identificação $G'(y,d) \equiv \hat{G}'(y,d)$. O fato de $CR(\cdot,X)^*$ não ser semi-contínuo superiormente traz problemas que são em parte contornados se utilizando o mapeamento

$$x \in M_o(y) \to \bigcap_{\varepsilon>0} (\overline{\bigcup_{z} CR(z,X)}^* \; ;$$

$$z \in M_o(y) \cap B_\varepsilon(x))$$

Teorema 8:

A) Sejam:

α) $y' \in Y$ convexo $\subseteq$ U aberto $\subseteq \mathbb{R}^q$

β) X compacto $\subseteq$ X' aberto $\subseteq \mathbb{R}^p$ e as

$g_i: X' \times U \to \mathbb{R}$ C^1 $\forall i \in \overline{1,K}$ tais que:

β.1) $\forall d \in CR(y',Y)$, $G'(y,d)$ existe e é

igual a $\hat{G}'(y',d)$

$\beta.2)$ $\forall x \in M_o(y')$, $\overline{co}\ (\frac{\partial g_i}{\partial x}\ (x,y');\ i \in m_o(x,y'))$

$\bigcap\ CR(x,X)^* \neq \phi.$

Então se y' é ótimo local para o problema $\min_{y \in Y} G(y)$ (*) existe um número finito $J \leq q + 1$ de:

a) elementos de $M_o(y)$: x_j, $j \in \overline{1,J}$.

b) vetores de $\mathbb{R}^K$, $u_j = (u_{j1},\dots,u_{jK}) \mid$

b.1) $u_{ji} \geq 0\ \forall i \in m_o(x_j,y)$, $\sum_{i \in m_o(x_j,y)} u_{ji} = 1$ e

b.2) $\sum_{i \in m_o(x_j,y')} u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_j,y') \in$

$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{(\bigcup_z CR(z,X)^*;\ z \in M_o(y) \cap B_\varepsilon(x_j))}$

$\forall j \in \overline{1,J}$

c) números reais $\lambda_j < 0\ \ \forall j \in \overline{1,J}$ tais que:

d) $\sum_{j=1}^{J} \sum_{i \in m_o(x_j,y)} \lambda_j\ u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial y}(x_j,y') \in CR(y';Y)^*$

B) Considere agora X, X' e p como anteriormente, $q = Km$. $y' = (y'_1,\dots,y'_K)$ com

$y'_i \subseteq Z$ convexo $\subseteq V$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^n$

$\forall i \in \overline{1,K}$, $Y = Z^K$ e $U = V^K$.

Além disso sejam:

c: $V \to \mathbb{R}$ C^1, as projeções $p_i: U \subseteq \mathbb{R}^{q=Km} \to \mathbb{R}^m$
e $(y_1,\dots,y_K) \to y_i$

h: $X' \times V \to \mathbb{R}$ C^1 e tal que $g_i(x,y) =$

$= h(x,p_i(y))$ $\forall (x,y) \in X \times Y$. Então se

$\forall d = (d_1,\dots,d_K)$ com $d_i \in CR(y_i',Z)$ existe

$G'(y',d)$ é verdade que:

B.1) Se $y' = (y_1',\dots,y_K')$ é um ponto de ótimo local para o problema

$$\min \sum_{i=1}^{K} c\,(y_i)$$

sujeito a:

$$G(y) \leq 0 \qquad (**)$$
$$y \in Y$$

tal que $G(y') = 0$ e valendo em y' a condição $\beta.2$ então:

Existem J, x_j, $u_j = (u_{j1},\dots,u_{jK})$ como em A e $\lambda_j \leq 0$, $\forall j \in \overline{0,J}$ nem todos nulos tais que:

d) $\lambda_o \nabla c(y_i') + \sum_{\{j \mid i \in m_o(x_j,y')\}} \lambda_j\, u_{ji}$.

$$\cdot \frac{\partial h}{\partial y_i}(x_j, y_i') \in CR(y_i', Z)^* \quad \forall i \in \overline{1,K}.$$

Suponha que nesse y' vale ainda a condição de qualificação:

$\exists \quad i^* \in \overline{1,K} \mid y_{i^*}'$ não é ótimo local para o problema:

$$\min_{y_{i'} \in Z} \{\max\{ \max_{x \in \mu_0(y', i^*)^1} h(x, y_{i^*}') - G(y'),$$

$$\max_{x \in \mu_0(y', i^*)^2} \frac{\partial h}{\partial y_{i^*}}(x, y_{i^*}') \cdot (y_{i^*} - y_{i^*}')\}\}$$

onde

$\mu_0(y', i^*) = \{x \in M_0(y) \mid i^* \in m_0(x, y')\}$,

$\mu_0(y', i^*)^1 = \{x \in \mu_0(y', i^*) \mid h(x, \cdot)$ é convexa em $y_{i^*}'\}$ e

$\mu_0(y', i^*)^2 = \mu_0(y', i^*) - \mu_0(y', i^*)^1$ (CQ1).

Ou de forma ligeiramente mais <u>forte</u>, imagine que para y' é verdade que:

$$\exists \quad i^* \in \overline{1,K} \text{ e } z \in CR(y_{i^*}, Z) \mid \frac{\partial h}{\partial y_{i^*}}(x, y_{i^*}') \cdot z < 0$$

$$\forall x \; \varepsilon \; \mu_0(y', i^*) \; (CQ2).$$

Em ambos os casos λ_0 pode ser feito -1.

$\mathcal{B}$.2) Se y' é ótimo local de (2) mas $G(y')<0$ se terá simplesmente:

$$- \nabla c(y_i') \; \varepsilon \; CR(y_i', Z)^* \; \forall i \; \varepsilon \; \overline{1,K}$$

<u>Prova</u>:

Para que y' seja um ótimo local do problema $\min_{y \varepsilon Y} G(y)$ é necessário que:

$$\forall d \; \varepsilon \; CR(y', Y) \quad G'(y', d) = \hat{G}'(y', d) \geq 0 \qquad (1)$$

ou explicitando $\hat{G}'(y,d)$:

$$\forall d \; \varepsilon \; \overline{CR(y', Y)} \quad \sup_{x \varepsilon M_0(y')} \{ \sup_{v \varepsilon \overline{CR(x, X)}} \{ \min_{i \varepsilon m_0(x, y')} \{\frac{\partial g_i}{\partial x}(x, y').v + \frac{\partial g_i}{\partial y}(x, y').d\}\}\} \geq 0 \qquad (2)$$

(Devido a continuidade de $\hat{G}'(y', \cdot)$ pode-se extender 1 a $\overline{CR(y', Y)}$).

Colocando agora o problema de encontrar o

$$\sup_{v \varepsilon \overline{CR(x, X)}} \{ \min_{i \varepsilon m_0(x, y')} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x, y').v \quad +$$

$$+ \frac{\partial g_i}{\partial y}(x,y').d\}$$ no formato:

$$\max \delta$$

$$(3) \qquad \delta \leq \frac{\partial g_i}{\partial x}(x,y').v + \frac{\partial g_i}{\partial y}(x,y').d$$

$$\forall i \in m_0(x,y') \quad v \in \overline{CR(x,X)}$$

é simples obter seu dual:

$$\min \sum_{i \in m_0(x,y')} u_i \frac{\partial g_i}{\partial y}(x,y') \,.\, d \qquad (5)$$

$$(4) \qquad \sum_{i \in m_0(x,y')} u_i = 1,\ u_i \geq 0\ \forall i \in m_0(x,y') \qquad (6)$$

$$\sum_{i \in m_0(x,y')} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x}(x,y') \in CR(x,X)^* \qquad (7)$$

Para unificar a dimensão da variável dual $\forall x \in M_0(y')$ assuma que ela é K dimensional. Feito isso, acrescente a 4 as restrições $u_i = 0$ se $i \notin m_0(x,y')$ que em nada modificam o problema. Chame agora de $A_x: \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^q$ a transformação linear expressa na base canônica pela matriz cuja iª coluna é $\frac{\partial g_i}{\partial y}(x,y')$ se $i \in m_0(x,y')$ e 0 em caso contrário. Faça também D_x representar o conjunto viável de 4 já levando em conta a consideração feita sobre a dimensão da variável e as restrições adicionais. 4 pode então ser escrito simplesmente:

$$\min w.d$$

$$\text{suj. a: } w \in A_x \,.\, D_x \qquad (8)$$

Utilizando agora a dualidade fraca (ver Varaya | |) pode-se tirar de 5 que:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \quad \sup_{x \in M_o(y')} \{ \min_{w \in A_x(D_x)} w.d \} \geq 0 \qquad (9)$$

Uma afirmação mais fraca do que essa devido ao fato de que pela condição $\beta.2$ D_x ser $\neq \phi$ $\forall x \in M_o(y')$, é a seguinte:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \; \sup \{w.d;\ w \in \bigcup_{x \in M_o(y')} A_x \ (D_x)\} \geq 0$$

Para simplificar no restante dessa prova $\bigcup_{x \in M_o(y)} A_x\ (D_x)$ será referenciado apenas por A.

É fácil verificar que A é limitado bastando para isso observar que $\forall x \in M_o(y)$:

a) $D_x \subseteq S = \{v = (v_1, \ldots, v_K) \mid v \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{K} v_i = 1\}$.

b) $\| A_x \| \leq \| B_x \|$ onde $B_x : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^q$

$$u = (u_1, \ldots, u_K) \to \sum_{i=1} u_i \frac{\partial g_i}{\partial y} (x,y) \ .$$

Além disso, como as g_i são C_1

$$LB: \mathbb{R}^p \to L\ (\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^q)$$
$$x \to B_x$$

também o será e como $M_o(y)$ é compacto sai que:

$\exists\ M > 0 |\ \forall x \in M_o(y)\ \|B_x\| < M$ e assim

$A \subseteq M.S$

Considerando então que $\bar{A}$ é compacto 10 torna-se equivalente a:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)}\ \max_{w \in \bar{A}} \{w.d\} \geq 0 \qquad (11)$$

Fazendo:

$$F: \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$$
$$d \to \max_{w \in \bar{A}} \{w.d\}$$

11 fica a mesma coisa que:

$$0 \text{ é uma solução de } \min_{d \in \overline{CR(y',Y)}} F(d) \qquad (12)$$

F é convexa o mesmo acontecendo com $\overline{CR(y',Y)}$ pois Y pe convexo. Devido a isso pode ser provado que 12 equivale a:

$$\partial F(0) \cap CR(y',Y)^* \neq \phi \qquad (13)$$

(ver teorema B do apêndice).

Mas $\partial F(0) = \overline{co}\ (\bar{A})$ que pelo teorema de Casa theodory é o conjunto das combinações de até q + 1 elementos de $\overline{A}$ e desse jeito 13 pode ser expressa pela afirmação:

$$\exists\ J \leq q + 1,\ \{w_j,\ j \ \varepsilon\ \overline{1,J}\} \quad \overline{A} \quad \text{e}$$

$$\{\lambda_j < 0,\ j \ \varepsilon\ \overline{1,J}\} \mid$$

$$\sum_{j=1}^{J} \lambda_j\, w_j \ \varepsilon\ CR(y',Y)^* \tag{14}$$

Tome agora

$$\forall j \ \varepsilon\ \overline{1,J}\ (x_{j,n}, u_{j,n}) \mid x_{j,n} \ \varepsilon\ M_o(y'),\ x_{j,n} \to x_j,$$

$$u_{j,n} \ \varepsilon\ D_{x_{j,n}},\ u_{j,n} \to u_j \ \text{e}\ A_{x_{j,n}}\ u_{j,n} \to w_j . \tag{15}$$

$$u_j = (u_{j1}, \ldots, u_{ji}, \ldots, u_{jK}) \ \text{é} \mid :$$

$$u_j \geq 0 \ \ (16),\ \sum_{i=1}^{K} u_{ji} = 1 \ \text{e}\ u_{ji} = 0 \quad \text{se}$$

$i \notin m_o(x_j, y)$ pela semi-continuidade superior de m_o. Assim

$$\sum_{i \varepsilon m_o(x_j,y)} u_{ji} = 1 \tag{17}$$

Além disso, como as g_i são C_1 se tem que:

$$A_{xj} \cdot u_j = \sum_{i \varepsilon m_o(x_j,y')} u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial y}(x_j, y') \quad =$$

$$= \lim \Big| \sum_{i \in m_0(x_j, y')} u_{ji,n} \frac{\partial g_i}{\partial g} (x_{j,n}, y')) =$$

$$= \lim \Big(\sum_{i \in m_0(x_{j,n}, y')} u_{ji,n} \frac{\partial g_i}{\partial y} (x_{j,n}, y'))$$

(pela própria definição de $D_{x_{j,n}}$) $=$

$$= \lim A_{x_{j,n}} \cdot u_{j,n} = w_j \qquad (18)$$

Finalmente como $u_{j,n} \in D_{x_{j,n}}$ e usando outra vez que as g_i são C_1 vem:

$$\sum_{i \in m_0(x_j, y')} u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial x} (x_j, y') = \lim\Big(\sum_{i \in m_0(x_{j,n}, y')}$$

$$u_{ji,n} \frac{\partial g_i}{\partial x} (x_{j,n}, y')) \in \overline{\bigcup_{n>m} CR(x_{j,n}, X)^*} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

$$(19)$$

16, 17 e 19 mostram que os u_j, $j \in \overline{1,J}$ satisfazem b.

$x_j \in M_0(y)$ e $\lambda_j < 0 \ \forall j \in \overline{1,J}$.

Finalmente 14 e 18 garantem a validade de d encerrando a demonstração de A.

Para provar **B** pode-se começar escrevendo o problema ** no formato

$$\min \sum_{i=1}^{K} (c \cdot p_i)(y)$$

sujeito a: (11')

$$G(y) \leq 0$$

$$y \in Y$$

Imagine então que y' é ótimo para (11') e $G(y') = 0$. Nesse caso pode-se afirmar que:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \max \{\nabla \left(\sum_{i=1}^{K} (c \cdot p_i)\right)(y').d ,$$

$$G'(y,d)\} \geq 0 \qquad (20)$$

Procedendo de forma análoga a efetuada na demonstração de A e preservando a definição de A vem que:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \max \{w.d,\ w \in \overline{A} \cup \{\nabla(\sum_{i=1}^{K} (c.p_i))$$

$$(y')\}\} \geq 0 \qquad (21)$$

semelhante a 11.

Pelos mesmos motivos que levaram a obtenção de 14 a partir de 11 na prova de A se extrai de 21 que

$$\exists\ J \leq q + 1,\ \{w_j,\ j \in \overline{1,J}\} \subseteq A \qquad e$$

$$(\lambda_j,\ j \in \overline{0,J}) \mid (\lambda_0, \ldots, \lambda_j) \leq 0 \qquad e$$

$$\lambda_o \; \nabla(\sum_{i=1}^{K} (co \; p_i))(y') + \sum_{i=1}^{j} \lambda_j \; w_j \; \varepsilon \; CR(y',Y)^* \tag{22}$$

Como $w_j \; \varepsilon \; \overline{A}$, $\forall j \; \varepsilon \; \overline{1,J}$ pode-se repetindo o mesmo raciocínio usado anteriormente encontrar

$$\forall j \; \varepsilon \; \overline{1,J}, \; x_j \; \varepsilon \; M_o(y') \quad e \quad u_j$$

satisfazendo c tais que

$$w_j = A_{x_j} \cdot u_j \tag{23}$$

Observando que como

$$\frac{\partial g_i}{\partial y}(x_j,y') = \frac{\partial h}{\partial y_i}(x_j,y'_i) \cdot p_i = (\overline{0}, \ldots,$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_i}(x_j,y'_i), \; \ldots, \; \overline{0})(\overline{0} \; \varepsilon \; \mathbb{R}^m) \qquad \text{se tem}$$

$$A_x \; u_j = u_{j1} \cdot a_1, \ldots, \; u_{j1} \cdot a_i, \ldots, u_{jK} \cdot a \tag{24}$$

onde

$$a_i = \frac{\partial h}{\partial y_i}(x_j,y'_i) \text{ se } i \; \varepsilon \; m_o(x_j,y')$$

$$a_i = 0 \qquad \text{em caso contrário.} \tag{25}$$

Além disso

$$\nabla(\sum_{i=1}^{K} c.\ p_i)(y') = (\nabla_c(y_1'),\ldots,\ \nabla_c(y_K'))\qquad(26)$$

e

$$CR(y',Y)^* = \mathop{X}_{i=1}^{K}\ CR(y',Z)^*\qquad(27)$$

Dessa forma usando 23 a 27, 22 se torna idêntica a: $\forall i\ \varepsilon\ \overline{1,K}$

$$\lambda_o(\nabla_c(y_i')) + \sum_{\{j\,|\,i\varepsilon m_o(x_j,y')\}}(\lambda_j\ u_{ji}\ \frac{\partial h}{\partial y_i}$$

$$(x_j,y_i'))\ \varepsilon\ CR(y_i',Z)^*\qquad(28)$$

Pense agora que para y' vale a condição CQ1 seja i^* como mencionado nessa condição. É lógico que se ao invés de todo conjunto $\mu_o(y',i^*)$ mencionado em CQ1 forem considerados apenas os x_j, $j\ \varepsilon\ \overline{1,J}$ tais que $i^*\ \varepsilon\ m_o(x_j,y')$ a condição continua valendo. Aplicando então de novo o teorema B do apêndice, uma vez que a função a ser minimizada e Z são convexos, se assegura que:

$$\nexists\ \{\beta_j \leq 0;\ j\ |\ i^*\ \varepsilon\ m_o(x_j,y')\}|$$

$$\sum_{\{j\,|\,i^*\varepsilon m_o(x_j,y')\}} \beta_j\ \frac{\partial h}{\partial y_{i^*}}\ (x_j,y_{i^*}')\varepsilon\ CR(y_{i^*}',Z)^*\qquad(29)$$

Supondo então que $\lambda_o = 0$, fazendo $\beta_j = \lambda_j$ u_{ji*} se terá uma contradição entre 28 e 29. Assim se CQ1 ou CQ2, pois CQ2 implica em CQ1, vale em y' então $\lambda_o < 0$ podendo evidentemente ser feito igual a -1.

Se $G(y') < 0$ então y' é ótimo local para o problema "clássico" de programação matemática

$$\min \sum_{i=1}^{K} c\ (p_i(y)) \qquad \text{e assim}$$

sujeito a: $y \in Y$

$$-\ (\nabla c(y_1'), \ldots, \nabla c(y_K')) \in CR(y', Y)^* \ \therefore\ \forall i \in \overline{1,K}$$

$$-\ \nabla c(y_i') \in CR(y', Z)^* \quad \text{completando a prova.}$$

<u>Observações</u>:

A) quando X e y' forem tais que o mapeamento $x \to CR(x, X)^*$ for semi-contínuo superiormente em $M_o(y')$ como quando X é convexo ou dado por um número finito de restrições diferenciáveis, então se pode fazer

$$\sum_{i \in m_o(x_j, y')} \left(u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_j, y')\right) \in CR(x_j, X)^*$$

na condição b.2 do teorema

B) Se a condição β.2 não se verificar seja

$$S = \{x \in M_0(y') \mid \overline{co}\,(\{\frac{\partial g_i}{\partial x}(x,y');$$

$$i \in m_0(x,y')\}) \cap CR(x,X)^* = \phi\}.$$

Então as condições a, b, c e d continuam válidas se y' é ótimo apenas com a seguinte modificação: se alguns dos x_j citados em a estiverem em $\overline{S}$ então para esses j em lugar de b.2 se pode garantir somente que:

$$\exists\ v_j \in \bigcap_{\varepsilon>0} (\overline{\bigcup_z CR(z,X)};\ z \in M_0(y) \cap B_\varepsilon(x_j)) \mid$$

$$\sum_{i \in m_0(x_j,y')} u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial x}(x_j,y').\ v_j \leq 0$$

Esse resultado pode ser obtido se procedendo de maneira quase idêntica a efetuada na prova do teorema 8 apenas utilizando para os pontos

$$x \in S \text{ e } \forall \upsilon \in \overline{CR(x,X)} \cap B_1\ (0)$$

o dual do problema

$$\max_{\lambda \geq 0} \{ \min_{i \in m_0(x,y')} \nabla g_i(x,y')(\upsilon,d)\}$$

ao invés do dual dado em 4. Esse novo dual será sempre viável se $x \in M_0(y)$ e $\upsilon \in \overline{CR(x,X)}$ o que não acontece com 4 nos pontos de S. Para $M_0(y)$ - S pode-se continuar utilizando 4.

C) Quando as g_i forem quasi-diferenciáveis e os mapeamentos: $x \to \partial g_i\ (x,y')$ forem semi-contínuos superiormente em $M_0(y')$ $\forall i$ então mantidas as demais condições se terá que nas condições do teorema 8 se y' é ótimo para 1 então mantendo a,b.1 e c se terá em lugar de b.2 que:

$$\sum_{i \varepsilon m_0(x_j,y')} u_{ji}\ \partial g_i(\cdot,y')(x_j) \cap (\bigcap_{\varepsilon>0}$$

$$(\overline{\bigcup_z CR(z,X)^*}\ ;\ z\ \varepsilon\ M_0(y) \cap B_\varepsilon(x_j)) \neq \phi$$

$$\forall j\ \varepsilon\ \overline{1,J}$$

enquanto que a condição d ficará:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i \varepsilon m_0(x_j,y)} \lambda_j\ u_{ji}\ \partial(x_j,\cdot)(y') \cap$$

$$CR(y',Y)^* \neq \phi.$$

D) Seja

$$\mathcal{U} = \{u\colon M_0(y') \to \mathbb{R}^K \mid \forall x\ \varepsilon\ M_0(y')\ u(x)\ \varepsilon\ D_x\}.$$

Não se pode fazer os u_j elementos quaisquer de D_{x_j} no ítem b da parte A do teorema 8 mas se pode obter uma versão fortalecida dessa parte que é a seguinte:

"Nas condições do teorema 8 se y' é ótimo local para (1) então $\forall u \in U$ existe um número $J \leq q + 1$ de:

a') elementos $x_j \in M_o(y')$, $\forall j \in \overline{1,J}$

b') u_j satisfazendo b e $u_j \in \bigcap_{\varepsilon>0} \{\overline{\bigcup_z u(z)}$,

$z \in M_o(y') \cap B_\varepsilon(x_j)\}$

c') $\lambda_j < 0$, $\forall j \in \overline{1,J}$.

tais que d é satisfeita".

Para verificar isto basta substituir

$A = \bigcup A_x D_x$ por $A' = \bigcup_{x \in M_o(y)} A_x u(x)$

na prova de A.

E) Sejam

$g_i: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad i = 1,2$

$(x, y_1, y_2) \to h(x, y_i) = \| x - y_i \| - 1$ e

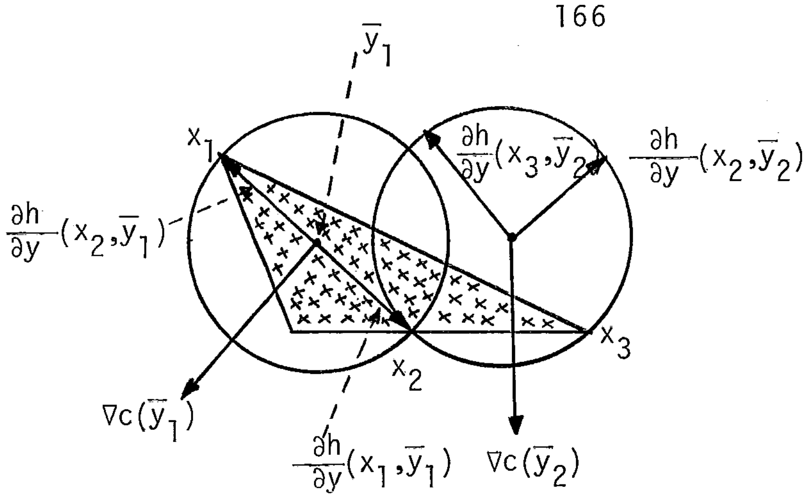
$c: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável.

X, $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, $\nabla c\,(\bar{y}_i)$ $\quad i = 1,2$

como apresentados na figura 8 . Nessa figura aparecem ainda

$M_o(\bar{y}) = \{x_j,\ j = 1,2,3\}$, os $\nabla h(x_j, y_i) \forall j \in \overline{1,3}$

e $i \in \overline{1,2}$ e as curvas de nível $h(y_i) = 0$.



Constate-se então que como $\bar{y}$ satisfaz CQ1 e é impossível expressar $\nabla c(\bar{y}_1)$ como combinação linear de

$$\frac{\partial h}{\partial y_1}(\bar{y}_1, x_i), \quad i = 1,2$$

$\bar{y}$ não é ótimo para

$$\min \sum_{i=1}^{2} c(y_i)$$

$$\text{sujeito a: } G(y) \leq 0$$

F) Uma condição suficiente de otimalidade local para os problemas * e ** pode ser expressa da seguinte maneira:

"Suponha que nas condições requeridas pelo teorema 8 se tenha $y'|$:

a) $\nexists\ d \in CR(y',Y) \,|\, CR(y',Y)^* \subseteq [d]^{\perp}$

$(\forall i \in \overline{1,K},\ \nexists\ d_i \in CR(y_i', Z) \,|\, CR(y_i',Z)^* \subseteq [d_i]^{\perp}$ no caso do problema **).

b) $\#(D_x) = 1 \; \forall x \in M_o(y')(\forall x \in M_o(y')$ se $G(y') = 0$ no caso do problema **).

c) $\exists \; \{x_j \in M_o(y)$ e u_j satisfazendo b, $j \in \overline{1,J}\}$ e $\lambda_j < 0 \; \forall j \in \overline{1,J}$ ($\lambda_j \leq 0 \; \forall j \in \overline{1,J}$ no caso do problema **)|:

Sendo $S = CR(y' \; Y)^*$,

$$\sum_{j=1}^{J} \; \sum_{i \in m_o(x_j, y)} \lambda_j \, u_{ji} \frac{\partial g_i}{\partial y} (x_j, y') \in \dot{S}'$$

(Sendo $R_i = CR(y_i', Z)^*$

$$- \nabla c(y_i') + \sum_{\{j \mid i \in m_o(x_j, y')\}} \lambda_j \, u_{ji} \frac{\partial h}{\partial y_i} (x_j, y_i')$$

$$\in \dot{R}_i'$$

no caso do problema II quando $G(y') = 0$. Ou

$$- \nabla c(y') \in \dot{R}_i' \quad \text{se } G(y') < 0).$$

Nessas condições y' é ótimo para * (ou **)".

Se as g_i (ou h) forem convexas pode-se descartar a condição a e substituir S' por S em c. Em vista disso pode-se constatar por observação direta que $\overline{y} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2)$ é ótimo local para os problemas

$$\min \sum_{i=1}^{2} c(y_i)$$

$$\text{sujeito a: } G(y) \leq 0$$

representados pelas figuras 10 e 11 abaixo.

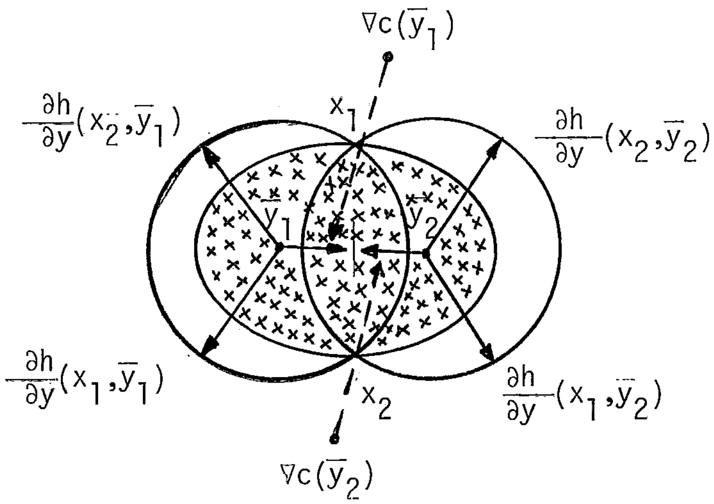


Figura 10

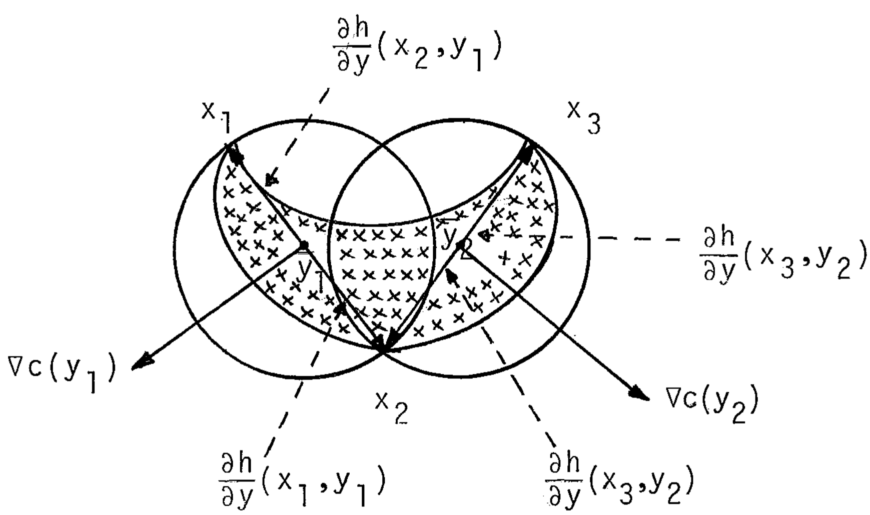


Figura 11

G) Quando h não é diferenciável mas é quasi diferenciável CQ1 e CQ2 podem ser escritas:

$$\exists\ i^* \in \overline{1,K} \,|\, y'_{i^*}$$

não é ótimo local para o problema:

$$\min_{y_{i^*}\in Z} \{\max \{ \max_{x\in\mu_0(y' i^*)^1} h(x,y'_{i^*}) - G(y'),$$

$$\max_{x\in\mu_0(y',i^*)^2} h(x,\cdot)(y'_{i^*},(y_{i^*} - y'_{i^*}))\}\} \quad (CQ'1)$$

e

$$\exists\ \ i^* \in \overline{1,K} \quad e \quad z \in CR(y_{i^*},Z) \ |\ h(x,\cdot)'$$

$$(y'_{i^*},z) < 0 \ \forall x \in \mu_0(y',i^*) \qquad (CQ'2).$$

$\mu_0(y',i^*)$ e $\mu_0(y',i^*)^i$; $i = 1,2$

continuam como definidas no enunciado do teorema 8.

5.2.

Como já foi ventilado na introdução do Capítulo 5 as condições de otimalidade expressas no teorema 8 não exigem dos x_j mais do que serem pontos pior cobertos (ver teo rema 8-a).

Critérios mais específicos nesse sentido e que levem mesmo a estabelecer, a priori, um subconjunto finito de $M_0(y)$ de onde os x_j devem ser extraídos, podem ser encontrados para problemas particulares. Entre esses problemas estão os que satisfazem as condições indicadas no teorema 4 para qualquer y. Com esse objetivo se inicia agora um estudo em que basicamente se procura mostrar como recobrir $M_0(y)$ por uma quantidade finita de politopos com propriedades convenientes. Esse estudo levará ao estabelecimento de um teste de otimalidade com a especificação citada para os "x_j".

O caso mais importante onde se poderá empregar esse teste é o do problema de se encontrar o melhor recobrimento de uma "aproximação linear" de um conjunto por funções g_i tais que $g_i(\cdot,y)$ é convexa.

5.2.1.

As propriedades de funções e conjuntos convexos que serão utilizadas neste estudo se encontram reunidas na proposição 3 dada a seguir.

<u>Proposição 3</u>:

A) Sejam

$y' \in \mathbb{R}^q$, S convexo $\subseteq \mathbb{R}^p$ e $F: \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} |$:

α) $F(\cdot,y)$ é convexa $\forall y \in \mathbb{R}^q$.

β) $F(\cdot,y')$ é constante em S,

γ) $\forall x \in S \quad \exists\ F(x,\cdot)'(y',d) \quad \forall d \in \mathbb{R}^q$

Então: $f_d: S \to \mathbb{R}$

$$x \to F(x,\cdot)'(y',d)$$

convexa $\forall d \in \mathbb{R}^q$ e nesse caso se x_1 e x_2 estão em S

$$\forall \lambda \in [0.1] \quad \partial F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\cdot)(y') \subseteq$$

$$\lambda \quad \partial F(x_1,\cdot)(y') + (1-\lambda) \quad \partial F(x_2,\cdot)(y') \qquad (1)$$

Se

$\forall x \in X \quad \exists \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y')$ então

$f_1: S \to \mathbb{R}^q$ é a restrição a S de um

$$x \to \frac{\partial F}{\partial y}(x,y')$$

funcional linear afim.

B) Sejam

$F_1 : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ e S convexo $\subseteq W$ convexo $\subseteq \mathbb{R}^p$ |

α) F_1 é convexa

β) F_1 é constante em S

Então:

1) ∂F_1 é constante em $\dot{S}'$ e

$\forall x \in S \; \partial F_1(\dot{S}') = \partial F_1(x) \cap [S]^{\perp}$.

Se F_1 é diferenciável então, é claro, ∇F_1 é constante em S.

2) $CR(\cdot,W)^*$ é constante em $\dot{S}'$ e

$\forall x \in S \; CR(\dot{S}',W)^* = CR(x,W)^* \cap [S]^{\perp}$ onde

$CR(\dot{S}',W)^* \triangleq CR(y,W)^* \; \forall y \in \dot{S}'$.

<u>Prova</u>:

Sejam x_1 e $x_2 \in S$ e $d \in \mathbb{R}^q$. Como

$F(\cdot,y' + hd)$ é convexa

$\forall h \in \mathbb{R}$ e $F(x_1,y') = F(x_2,y') = F(\lambda x_1, +$

$+ (1-\lambda)\, x_2,\, y') \; \forall \lambda \in [0,1]$ vem que

$$\frac{F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,y'+hd) - F(\lambda x_1 +(1-\lambda)x_2,y')}{h} \leq$$

$$\lambda \; \frac{F(x_1,y' + hd)- F(x_1,y')}{h} + (1-\lambda)$$

$$\frac{F(x_2,y' + hd) - F(x_2,y')}{h} \; \forall \lambda \in [0,1] \text{ e } \forall h > 0.$$

Tomando então os limites quando $h \to 0$ em ambos os lados da desigualdade fica-se com:

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\cdot)'(y',d) \leq \lambda F(x_1,\cdot)'(y',d) +$$

$$+ (1-\lambda)\ F(x_2,\cdot)'(y',d) \qquad (2)$$

o que mostra a convexidade de f_d. Como 2 é válida $\forall d \in \mathbb{R}^q$ e

$$\partial F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\cdot)(y')$$

$$\lambda\ \partial F(x_1,\cdot)(y') + (1-\lambda)\ \partial F(x_2,\cdot)(y')$$

são convexos obter 1 se torna uma simples aplicação de um teorema de separação.

Suponha agora que

$$\forall d \in \mathbb{R}^q \quad \exists \frac{\partial F}{\partial d}(x,y')\ \forall x \in S.$$

Nesse caso se tem que dado

$$d \in \mathbb{R}^q\ F(x,\cdot)'(y',-d) = -F(x,\cdot)'(y',d)$$

e portanto de 2 se tira que:

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\cdot)'(y',-d) \geq \lambda\ F(x_1,\cdot)'(y',-d)$$

$$+ (1-\lambda)\ F(x_2,\cdot)'(y',-d) \qquad (3)$$

Por outro lado se for repetido com - d no lugar de d, o desenvolvimento feito até 2 se terá evidentemente:

$$F(\lambda x_1, +(1-\lambda)x_2,\cdot)'(y',-d) \leq \lambda\ F(x_1,\cdot)'(y',-d)$$

$$+ (1-\lambda)\ F(x_2,\cdot)'(y',-d) \qquad (4)$$

Vale portanto a igualdade o que significa que - f_d é a restrição a S de uma função linear afim o mesmo acontecendo com f_d $\forall d \in \mathbb{R}^q$. Como $f_1 = (f_{e_1},\ldots,f_{e_q})$, f_1 também será a restrição a S de uma linear afim encerrando a prova de A.

O item 1 da parte $\mathcal{B}$ pode ser mostrado considerando-se os elementos indicados na prova da afirmação 4-4 ao qual ele é extremamente similar. O item 2 torna-se equivalente a $\mathcal{B}.1$ quando se faz $F_1 \equiv d(\cdot,W)$ convexa e identicamente nula em S.

5.2.2.

O critério de otimalidade que será apresentado no item seguinte se baseia na possibilidade de se decompor $M_o(y)$ em subconjuntos com propriedades convenientes nas condições mencionadas no início desta seção. Para indicar como será feita a própria decomposição e caracterizar essas "propriedades convenientes" se necessita de alguns elementos que são definidos a seguir.

Para issso imagine novamente

$$X = \mathbb{R}^p - \bigcup_{\ell=1}^{L} C_\ell \quad \text{onde os } C_\ell \text{ são abertos} (1)$$

Considere então:

a) $r_o(x) \triangleq \{\ell \in \overline{1,L} | x \in \overline{C_\ell}\}$. Se $x \in X$ se pode substituir $\overline{C_\ell}$ por C'_ℓ.

b) $\eta_o(y) \triangleq \{S \subseteq \overline{1,K+L} | \exists\ x \in M_o(y) | m_o(x,y) \cup (r_o(x) + \{K\}) = S\} \subseteq P(\overline{1,K+L})$.

c) Dado $S \in \eta_o(y)$ seja $N(S,y) \triangleq \{x \in M_o(y) | m_o(x,y) \cup (r_o(x) + \{k\}) = S\}$. É claro que em $N(S,y)$ $m_o(x,y)$ e $r_o(x)$ são conjuntos constantes. Chame esses conjuntos de $m_o(S,y)$ e $r_o(S,y)$.

d) $P(S,y) \triangleq N(S,y) - \bigcup_{T \subsetneq S} \overline{co}(N(T,y))$. Se S é minimal em $\eta_o(y)$ (isto é, $\nexists$ Tem $\eta_o(y)$ | $T \subsetneq S$) então, é claro, $P(S,y) = N(S,y)$.

Utilizando esses novos elementos é possível estabelecer o resultado seguinte no qual se apoia principalmente o desenvolvimento que se fará a seguir e que levará ao critério citado.

Proposição 4:

Sejam:

α) X como em 1 com os C_ℓ convexos

β) $g_i: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^q \mid g_i(\cdot,y)$ é convexa $\forall i \in \overline{1,K}$.

Então:

a) $\overline{P(S,y)}$ tem um número finito de pontos extremos $\forall S \in \eta_0(y)$.

b) $P(S,y)' = P(S,y)$ e por isso $\forall i \in m_0(S,y)$ $g_i(\cdot,y) \equiv G(y)$ em $\overline{co}(P(S,y))$ e $\overline{co}(P(S,y)) \subseteq \bigcap_{\ell} (C_\ell,\ \ell \in r_0(S,y))$.

c) $CR(\cdot,X)$ é constante em $P(S,y)$ e se $Z_S = \overline{co}(P(S,y)$ então dados $z \in \dot{Z}_S \cap X$ e $x \in P(S,y)$ $CR(z,X) \subseteq CR(x,X)$.

<u>Prova</u>:

Escolha $S \in \eta_0(y)$ e considere então os conjuntos:

$$A_1 = \cup\ (C_\ell;\ \ell \in r_0(S,y)),$$

$$A_2 = \cup\ (\overline{C_\ell};\ \ell \notin r_0(S,y)),$$

$$A_3 = \cup\ (\{x \mid g_i(x,y) < G(y)\};\ i \in m_0(S,y)) \quad \text{e}$$

$$A_4 = \cup\ (\{x \mid g_i(x,y) \leq G(y)\};\ i \notin m_0(S,y)) .$$

A_i, $i \in \overline{1,4}$ são todos união finita de conjuntos convexos (2) e é simples verificar que x não está na $\bigcup_{i=1}^{4} A_i$ se e só se

$x \in M_0(y)$, $m_0(x,y) \subseteq m_0(S,y)$ e $r_0(x) \subseteq$

$r_0(S,y)$. Assim

$$\bigcup_{i=1}^{4} A_i = \mathbb{R}^q - \bigcup_{T\subseteq S} N(T,y). \quad \text{e}$$

$$\mathbb{R}^q - N(S,y) = \bigcup_{i=1}^{4} A_i \cup \Big(\bigcup_{T\subsetneq S} N(T,y)\Big) \qquad (3)$$

Assim,

$$\mathbb{R}^q - P(S,y) = (\mathbb{R}^q - N(S,y)) \cup \Big(\bigcup_{T\subsetneq S} \overline{co}(N(T,y))\Big)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{4} A_i \cup \Big(\bigcup_{T\subsetneq S} \overline{co}(N(T,y))\Big) \qquad \text{por (3).}$$

E vista dessa igualdade e de 2 a demonstração do item a estará terminada se for verificada a afirmação seguinte.

Afirmação:

Se $\mathbb{R}^n - S = \bigcup_{\ell=1}^{L} C_\ell$, C_ℓ convexos então $\overline{S}$ tem apenas um número finito de pontos extremos.

Prova:

Suponha que $\overline{S}$ tenha mais de um ponto extremo e sejam então x_1 e x_2 dois deles. Faça novamente

$$r_0(x) = \{\ell \mid x \in \overline{C_\ell}\}.$$

Como os x_i são pontos extremos de $\overline{S}$ então logicamente

$$r_0(x_i) \neq \phi, \; i = 1,2 \qquad \text{e a semi-reta}$$

$$\{x_1 + t(x_1 - x_2);\; t > 0\}$$

não pode interceptar $\overline{S}$. Portanto

$$\forall t > 0 \; \exists \; \varepsilon(t) > 0 | B_{\varepsilon(t)}\,(x_1 + t(x_1 - x_2)) \subseteq$$

$$\mathbb{R}^n - S.$$

Considere agora

$$s(t) = \{\ell \; \varepsilon \; \overline{1,L} | C_\ell \cap B_{\varepsilon(t)}(x_1 + t(x_1 - x_2)) \neq \phi\}$$

e

$$T(\ell) = \inf\{t > 0 | \ell \; \varepsilon \; s(t)\}.$$

Defina então

$$T_1 = \min_{\ell | T(\ell) > 0} \{T(\ell)\}.$$

É fácil ver que

$$\forall t \; \varepsilon \; (0, T_1) \; s(t) \subseteq r_0(x_1)$$

Imagine agora que $r_0(x_1) = r_0(x_2)$ (4) e portanto $s(T_1/2) \subseteq r_0(x_2)$ (5).

Tomando então

$$\varepsilon' = \frac{1}{1 + T_1/2} \, \varepsilon(T_1/2)$$

se pode constatar que

$$B_{\varepsilon'}(x_1) \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{L} C_\ell \qquad \text{pois se}$$

$$x_2 + (1 + T_1/2)(x - x_2) \in B_{\varepsilon(T_1/2)}(x_1 +$$

$$+ (T_1/2)(x_1 - x_2)) \cap C_\ell, \qquad \text{então}$$

$$x \in B_{\varepsilon'}(x_1) \cap C_\ell,$$

por 5 e pela convexidade dos C_ℓ. Assim admitindo 4 chega-se ao absurdo: $x_1 \in \mathbb{R}^n - S$.

Dessa forma $r_0(x_1) \neq r_0(x_2)$ para quaisquer pares de pontos extremos de $\overline{S}$ e como $r_0(x) \subseteq P(\overline{1,L})\ \forall x$ completa-se a prova.

Para demonstrar a parte b imagine $P(S,y) \neq \phi$. Seja então $x \in P(S,y)$. Se $P(S,y) = \{x\}$ a parte b está provada. Caso contrário, sejam

$$x' \in P(S,y),\ x' \neq x \text{ e } \varepsilon > 0 \mid \forall z \in \overline{B_\varepsilon(x)}$$

$$g_i(z,y) > G(y),\ \forall i \in \overline{1,K} - m_0(S,y) \qquad (6),$$

$$z \notin C_\ell\ \forall \ell \in \overline{1,L} - r_0(S,y) \qquad (7) \qquad \text{e}$$

$$z \notin \bigcup_{T \subsetneq S} \overline{co}\,(N(T,y)) \qquad (8).$$

Devido a convexidade das g_i e dos conjuntos $C_\ell\ \forall\ z = x + \lambda(x-x')$ com $\lambda > 0$ é verdade que:

$$\forall i \in m_o(S,y),\ g_i(z,y) \geq G(y) \qquad (9) \qquad e$$

$$\forall \ell \in r_o(S,y) \quad z \notin C_\ell \qquad (10)$$

Fazendo agora $\lambda' \in [0,\varepsilon]$ se tem que por 7 e 10

$$z' = x + \lambda' u(x-x') \in X \qquad e$$

$$r_o(z') \subseteq r_o(S,y) \qquad (11)$$

Acrescentando-se 6 e 9 sai que z' está mesmo em $M_o(y)$ (12) e que $m_o(z',y) \subseteq m_o(S,y)$ (13). 8, 11, 12, 13 mostram que

$$\forall \lambda' \in [0,\varepsilon]\ z' = x + \lambda' u(x-x') \in P(S,y) \quad (14)$$

o que em particular significa que

$$\forall i \in m_o(S,y)\ g_i(\cdot,y) \equiv G(y) \qquad em$$

$$[x,\ x + \varepsilon\, u(x-x')]$$

devendo essa constância se manter em todo o segmento

$$[x', x + \varepsilon\, u(x-x')] \qquad (15)$$

uma vez que $g_i(x',y) = G(y)\ \forall i \in m_o(S,y)$. Da mesma forma se pode extrair de 14 que

$$[x', x + \varepsilon\, u(x-x')] \subseteq \bigcap_{\ell} (C'_{\ell},\ \ell \in r_0(S,y) \quad (16).$$

Juntando 6, 7, 8, 14, 15 e 16 se tem que

$$[x - \varepsilon\, u(x-x'),\ x + \varepsilon\, u(x-x')]$$

está contido em P(S,y) para qualquer

$$x' \in P(S,y).$$

$$[P(S,y)]' = \{x\} + [\{x'-x,\ \text{com}\ x' \in P(S,y)\}]$$

e portanto é possível construir uma vizinhança A de x em P(S,y) tomando uma base B da forma

$$\{u(x'_j - x),\ x'_j \in P(S,y),\ j \in \overline{1,\dim([P(S,y)]')}\}$$

para o espaço

$$[\{x'-x;\ x' \in P(S,y)\}]$$

e fazendo

$$A = co((\{x\} + \varepsilon\, B)\ U\ (\{x\} - \varepsilon\, B)). \qquad (17)$$

$$\{x\} \pm \varepsilon\, \mathbb{B} \subseteq P(S,y)$$

e assim pela convexidade das $g_i(\cdot,y)$ e dos C_{ℓ} se tem que

$$\forall i \in m_0(S,y),\ \forall w \in A\ g_i(w,y) \leq G(y) \qquad (18)$$

e que

$$\forall \ell \in r_0(S,y) \ A \subseteq C_\ell \qquad (19)$$

Além disso

$$x \in \dot{A}', \forall i \in m_0(S,y) \ g_i(x,y) = G(y) \qquad e$$

$$x \in C_\ell' \ \forall \ell \in r_0(S,y).$$

Juntando esses fatos a 18 e 19 se tem, por que as g_i, os C_ℓ e A são convexos, que

$$\forall i \in m_0(S,y) \ g_i(\cdot,y) \equiv G(y) \quad \text{em } A (20) \qquad e$$

$$A \subseteq \bigcap_\ell (C_\ell', \ \ell \in r_0(S,y)) \qquad (21)$$

Como $A \subseteq B_\varepsilon(x)$ se tem pela própria maneira pela qual ε foi determinado, 20 e 21 que $A \subseteq P(S,y)$.

Desse modo $x \in P(\dot{S},y)'$ e como x é qualquer em P(S,y) vem que

$$P(S,y) = P(\dot{S},y)'.$$

Concluindo a prova do item b se tem pelos seguintes fatos:

A) $\forall i \in m_0(S,y)$, $g_i(\cdot,y) \equiv G(y)$ em $P(S,y)$,

B) $\forall \ell \in r_0(S,y)$, $P(S,y) \subseteq C_\ell$,

C) $\overline{co}(\dot{P}(S,y)) \supseteq (P(\dot{S},y))' \neq \phi$,

D) $g_i(\cdot,y), C_\ell$ convexos e as propriedades A e B são válidas com $\overline{co}(P(S,y))$ substituindo $P(S,y)$. Completa-se assim a prova.

Para demonstrar C defina $CR^o(a,A)$ para $A \subseteq \mathbb{R}^p$ e $a \in \bar{A}$ sendo

$$\{v \in \mathbb{R}^p \mid \exists \bar{t} > 0 \mid \forall t \in (0,\bar{t})\ a + tv \in A\}$$

Observe que pela própria definição de X e como os C_ℓ são abertos é verdade que

$$\forall x \in X' \quad CR(x,X) = \mathbb{R}^p - CR^o(x, \mathbb{R}^p - X) =$$

$$= \mathbb{R}^p - \bigcup_{\ell \in r_0(x)} CR^o(x,C_\ell).$$

$$CR^o(x,C_\ell) = CR(x,\overline{C_\ell})$$ e portanto se $CR(\cdot,\overline{C_\ell})$ for constante em $\dot{Z}_S' \ \forall \ell \in r_0\ (S,y)$ (22) se terá:

$$\forall x \in P(S,y) \subseteq \dot{Z}_S' \quad CR(x,X) = \mathbb{R}^p - \bigcup_{\ell \in r_0(S,y)}$$

$$CR(x,\overline{C_\ell}) = CR(S,X) \text{ e } \forall z \in \dot{Z}_S' \cap X, CR(z,X) =$$

$$CR(S,X) - \cup(XR(z,\overline{C_\ell}), \ell \in r_0(x,y) - r_0(S,y))$$

$$(r_0(x,y) \supseteq r_0(S,y) \quad \text{pelo item 4.b})$$

e portanto o item C estará provado. Mas a afirmação 22 decorre do item β.2 da proposição 3 uma vez que Z_S e os C_ℓ são convexos,

$$Z_S \subseteq \overline{C_\ell} \text{ e } CR(\cdot,\overline{C_\ell}) = CR(\cdot,C_\ell)^{**} \ \forall \ell \in \overline{1,L}$$

encerrando a prova da proposição 4.

5.2.3.

Vai-se desenvolver agora um processo cujo objetivo é obter um recobrimento de $M_0(y)$ pelos interiores relativos de uma coleção finita de poliedros cujos pontos extremos estão em $M_0(y)$.

Para isso, tome x qualquer em $M_0(y)$. Se

$$x \varepsilon \overline{co}(P(\hat{S}_1, y))^{\cdot\prime}$$

para algum

$$\hat{S}_1 \varepsilon \eta_0(y)$$

então já se pelo item a da preposição 4 que esteja no interior relativo de um poliedro

$$\overline{co}(P(\hat{S}_1, y))$$

cujos pontos extremos estão todos em $M_0(y)$. Caso contrário como

$$M_0(y) \subseteq \bigcup_{S \varepsilon \eta_0(y)} \overline{co}(P(S, y))$$

escolha

$$S_1 \varepsilon \eta_0(y) \quad \text{tal que } x \varepsilon \overline{co}(P(S_1, y)).$$

Considere então

$$X_{S_1} = X \cap [P(S_1, y)]' - \dot{co}(P(S_1, y))'.$$

Restringindo-se o interesse a $[P(S_1, y)]'$ se tem que X_{S_1}

é o complementar de uma união finita de convexos abertos

$$C_{\ell,S_1} \quad \ell \in \overline{1,L+1}$$

se fazendo

$$C_{\ell,S_1} = C_\ell \cap [P(S_1,y)] \qquad \forall \ell \in \overline{1,L}$$

$$C_{L+1,S_1} = \mathrm{co}(\dot{P}(S_1,y))'.$$

Faça então

$$M_{S_1}(y) = M_0(y) \cap X_{S_1} \quad \text{e } \forall x \in X_{S_1} \quad r_{S_1}(x) =$$

$$= \{\ell \in \overline{1,L+1} \mid x \in C_{\ell,S_1}\}.$$

Com esses novos elementos no lugar de $M_0(y)$ e $r_0(x)$ defina

$\eta_{S_1}(y)$ como $\eta_0(y)$ foi definido e $\forall S \in N_{S_1}(y)$

caracterize

$$N_{S_1}(S,y),\ r_{S_1}(S,y) \quad \text{e} \quad P_{S_1}(S,y)$$

do mesmo modo que

$$N(S,y),\ r_0(S,y) \text{ e } P(S,y)$$

foram obtidos.

Como pensando apenas em $[P(S_1,y)]'$ X_{S_1} satisfaz a condição α da proposição 4 ela será verdadeira com $P_{S_1}(S,y)$ no lugar de $P(S,y)$, $\eta_{S_1}(y)$ no de $\eta_0(y)$ e $r_{S_1}(S,y)$ no de $r_0(S,y)$ No item c se pode manter $CR(\cdot,X)$.

Se existe

$$\hat{S}_2 \; \varepsilon \; \eta_{S_1} \; (y) | x \; \varepsilon \; co(P_{S_1}(\hat{S}_2, y)'$$

então de novo por a da proposição 4 se obtém o desejado poliedro com pontos extremos em $M_o(y)$ e contendo x em seu interior relativo. Se isso não ocorre então observando que

$$M_{S_1}(y) \subseteq \bigcup_{S \varepsilon \eta_{S_1}(y)} \overline{co}(P_{S_1}(S,y))$$

escolha

$$S_2 | x \; \varepsilon \; \overline{co}(P_{S_1} \; (S_2, y)).$$

Defina então

$$X_{S_1,S_2} = X_{S_1} \cap [P_{S_1}(S_2,y)]' - co(P_{S_1}(S_2,y))'$$

cujo complementar é uma união de convexos abertos em

$$[P_{S_1}(S_2,y)]' \; (1).$$

Defina então

$$M_{S_1,S_2}(y), \; r_{S_1,S_2}(x). \; \eta_{S_1,S_2}(y), \; N_{S_1,S_2}(S,y)$$

$$r_{S_1,S_2}(S,y) \text{ e } P_{S_1,S_2}(S,y)$$

de forma análoga a que levou a obtenção de $M_{S_1}(y)$, $r_{S_1}(x)$, etc. Por 1 se terá novamente que a proposição 4 será válida também com P_{S_1,S_2} , η_{S_1,S_2} e r_{S_1,S_2} no lugar de P, η_o e r_o.

Procedendo dessa maneira vai se gerando uma sequência:

$$Z_1 = \overline{co}(P(S_1,y)),\ Z_2 = \overline{co}(P_{S_1}(S_2,y),\ \ldots\ ,$$

$$Z_t = \overline{co}(P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t-1}}(S_t,y)),\ \ldots$$

enquanto não se encontrar um termo da sequência (Z_T), que então será o último, tal que $x \in \dot{Z}_T$.

A possibilidade de tal termo não ser encontrado e se gerar uma sequência infinita pode ser descartada a partir da afirmação seguinte.

<u>Proposição 5</u>:

Se, dada a sequência

$$Z_1 = \overline{co}(P(S_1)),\ \ldots\ ,\ Z_{t_1} = \overline{co}(P_{S_1,S_2\ldots S_{t_1-1}}$$

$$(S_{t_1},y)),\ldots,Z_{t_2} = \overline{co}(P_{S_1,S_2\ldots,S_{t_1},\ldots,S_{t_2-1}}$$

$$(S_{t_2},\ y),\ldots,S_{t_2} = S_{t_1} \text{ com } t_2 > t_1 \text{ então:}$$

$$\dim([Z_{t_2}]') < \dim([Z_{t_1}]') \qquad (2)$$

<u>Prova</u>:

Suponha por absurdo que 2 não acontece. Então como

$$[Z_{t_2}]' \subseteq [Z_{t_1}]'$$

eles devem ser mesmo iguais o que implica que $[Z_t]$'se mantém constante em $\overline{t_1, t_2}$ (3). Sejam agora

$$W_{t_2} = P_{S_1, S_2, \dots, S_{t_2-1}}(S_{t_2}, y) \qquad (4).$$

É claro que

$$W_{t_2} \not\subseteq \dot{Z}'_{t_1}$$

pela própria forma de geração dos Z_t (5). Nesse caso como

$S_{t_2} = S_{t_1}$ por 4 e 5 e como $\eta_{S_1, S_2, \dots, S_{t_1-1}}$

é finito além de 3

$$\exists \ \hat{S}_{t_1} \in \eta_{S_1, S_2, \dots, S_{t_1-1}}, \ \hat{S}_{t_1} \subseteq S_{t_1} | W_{t_2} \cap$$

$$\overline{co}(P_{S_1, S_2, \dots, S_{t_1-1}}(\hat{S}_{t_1}, y)) \neq \phi \qquad (6)$$

Suponha agora que

$$\exists \ t_3 | t_1 < t_3 < t_2 \ S_{t_3} = \hat{S}_{t_1} \ \forall t \in \overline{t_1, t_3 - 1} \ S_t$$

$$\neq \hat{S}_{t_1} \qquad (7)$$

então como

$$\overline{co}(P_{S_1, S_2, \dots S_{t_3-1}}(\hat{S}_{t_1}, y))$$

é retirado do conjunto em consideração ao se passar para o está gio $t_3 < t_2$ então

$$\overbrace{\overline{co}\ (P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t_{3-1}}}(\hat{S}_{t_1},y))}\ \cap\ W_{t_2} = \phi \quad (8)$$

Por outro lado por 3, 7 e pela própria manei ra pela qual são obtidos os

$$P_{S_1,S_2,\ldots,S_t}$$

se tem que:

$$P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t_1}}(\hat{S}_{t_1},y) \subseteq P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t_3-1}} \cdot (\hat{S}_{t_1},y) \quad (9)$$

8 e 9 geram uma contradição com 6 se podendo eliminar a hipótese de existência de um t_3 como definido anteriormente.

Feita essa eliminação se fica com

$$\hat{S}_{t_1} \neq S_t \quad \forall t \in \overline{t_1,t_2}$$

e portanto:

$$P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t_1}}(\hat{S}_{t_1},y) \subseteq P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t_2-1}} (\hat{S}_{t_1},y) \quad (10)$$

Em vista disso de 6 se tira que

$$W_{t_2} \cap \overline{co}(P_{S_1,S_2,\ldots,S_{t_2-1}}(\hat{S}_{t_1},y)) \neq \phi$$

o que é um absurdo uma vez que $\hat{S}_{t_1} \subsetneq S_{t_2}$. Completa-se assim a prova.

Seja agora $n_0 = \# \eta_0(y)$. Fazendo então uso da afirmação 5 se verifica que se $x \not\in \dot{Z}_t^{\prime}$ $\forall t \in \overline{1,n_0(q-1)}$ então se terá $\dim([Z_{n_0(q-1)+1}]) = 0$ e como x deve pertencer a $Z_{n_0(q-1)+1}$ pela própria lei de formação dos Z_t se obtém

$$Z_{n_0(q-1)+1} = \{x\}$$

podendo encerrar aí a sequência.

Assim como x é qualquer em $M_0(y)$ se encontrou uma família de poliedros com vértices em $M_0(y)$ cujos interiores relativos cobrem esse conjunto. Essa família $(F(y))$ é constituída dos conjuntos

$$\overline{co}(P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t,\ldots,\gamma_{T-1}}(\gamma_T,y) \qquad \text{com}$$

$$T \in \overline{1,n_0(q-1)+1} \qquad \text{e}$$

$$\gamma_{t+1} \in \eta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t}(y) \qquad \forall t \in \overline{0,T-1}$$

onde

$$P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}}(\gamma_t,y) = N_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}}(\gamma_t,y) -$$

$$- U\ (\overline{co}(P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}}(\gamma,y)),\ \gamma \in$$

$$\eta_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{t-1}}(y),\ \gamma \subsetneq \gamma_t)$$

$$N_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}}(\gamma_t,y) = \{x \in X_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}}$$

$$\cap \quad M_o(y) \mid m_o(x,y) = m_o(\gamma_t,y) \qquad \text{e}$$

$$r_o(x) = r_o(\gamma_t,y)\},\ X_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}} = X \cap$$

$$[P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-2}}(\gamma_{t-1},y)] - \overline{co}(P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-2}}$$

$$(\gamma_{t-1})),\ \eta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t}(y) = \{\gamma \in \mathcal{P}(\overline{1,K+L}) \mid$$

$$\exists \quad x \in X_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{t-1}} \mid m_o(x,y) \quad (r_o(x) +$$

$$+ \{K\}) = \gamma\} \ \forall t \in \overline{1,T}.$$

O número de elementos de $\mathcal{F}(y)$ é logicamente limitado pois

$$\eta_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t}(y) \subseteq \mathcal{P}(\overline{1,K+L}) \ \forall t \in \overline{1,n_o(q-1)-1}$$

obtendo-se assim para essa família todas as propriedades indicadas no início de 5.2.3.

Defina agora o mapeamento

$$m_{\mathcal{F}}(\cdot,y): M_o(y) \to \mathcal{F} = \mathcal{F}(y)$$

$$x \to \{\phi \in \mathcal{F}(y) \mid x \in \dot{\phi}'\}$$

É claro que

$$m_{\mathcal{F}}(x,y) \neq \phi \ \forall x \ \varepsilon \ M_o(y).$$

Também se

$$\phi = \overline{co}(P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{T-1}}(\gamma_T,y)$$

faça

$$\gamma_T \triangleq \Gamma(\phi) \ .$$

Com relação a esses elementos se pode mostrar que

<u>Proposição 6</u>:

Dados

$x \ \varepsilon \ M_o(y)$ e $\phi \ \varepsilon \ m_{\mathcal{F}}(x,y)$ então

a) $\forall i \ \varepsilon \ m_o(\Gamma(\phi),y) \ g_i(\cdot,y) \equiv G(y)$ em ϕ ,

$\phi \subseteq \bigcap_{\ell} (C_\ell, \ \ell \ \varepsilon \ r_o(\Gamma(\phi),y)$ e

b) $\forall v \ \varepsilon \ \overline{CR(x,X)} \quad \min\limits_{i \varepsilon m_o(\Gamma(\phi),y)} g_i(\cdot,y)'(x,v) \leq 0$

(11)

<u>Prova</u>:

Seja

$$\phi = \overline{co}(P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{T-1}}(\gamma_T = \Gamma(\phi),y)).$$

Como o ítem b da proposição 4 continua válido com

$$P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{T-1}}(\Gamma(\phi),y)$$

no lugar de P(S,y) obtem-se a imediatamente.

Para mostrar b tome Z em

$$\psi = P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{T-1}}(\Gamma(\phi),y).$$

Como

$$m_0(z,y) = m_0(\Gamma(\phi),y) \quad e \quad z \in M_0(y) \quad \text{então:}$$

$$\forall v \in \overline{CR(z,X)} \quad \min_{i \in m_0(\Gamma(\phi),y)} g_i(\cdot,y)'(z,v) \leq 0 \tag{12}$$

Além disso como o ítem b da proposição 4 também vale com

$$P_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{T-1}}(\Gamma(\phi),y)$$

no lugar de P(S,y) se tem $z \in \dot{\psi} \subseteq \dot{\phi}$.

Aplicando agora os ítens b e c da proposição 4 e $\mathcal{B}_1$ da proposição 3 se extrai que:

A) $\partial g_i(\cdot,y)(x) = \partial g_i(\cdot,y)(z) \; \forall i \in m_0(\Gamma(\phi),y)$

e portanto

$$g_i(\cdot,y)'(x,v) = g_i(\cdot,y)'(z,v) \; \forall v \in \mathbb{R}^p \quad e$$

$$\forall i \in m_0(\Gamma(\phi),y).$$

B) $CR(x,X) \subseteq CR(z,X)$ pois é lógico que 4-c vale também para $P_{\gamma_1,\ldots,\gamma_{T-1}}(\Gamma(\phi),y)$.

Esses ítens A e B junto com 12 permitem obter 11.

Finalmente para cada poliedro ϕ de $F(y)$ seja

$$E(\phi,y) = \{x_{\phi,1},\ldots,x_{\phi,o(\phi)}\}$$

o conjunto de pontos extremos de ϕ(13) e faça

$$\bar{E}(y) = \bigcup_{\phi\varepsilon F(y)} E(\phi,y) \qquad (14)$$

É lógico que $\bar{E}(y)$ é finito e a partir do ítem a da proposição 3 se pode afirmar que $\forall x \,\varepsilon\, \phi$ e $\forall i \,\varepsilon\, m_o(\Gamma(\phi),y)$ se tem que, se $t_1,\ldots,t_{o(\phi)}$ são coeficientes da combinação convexa dos $x_{\phi,o}$ que expressa x então:

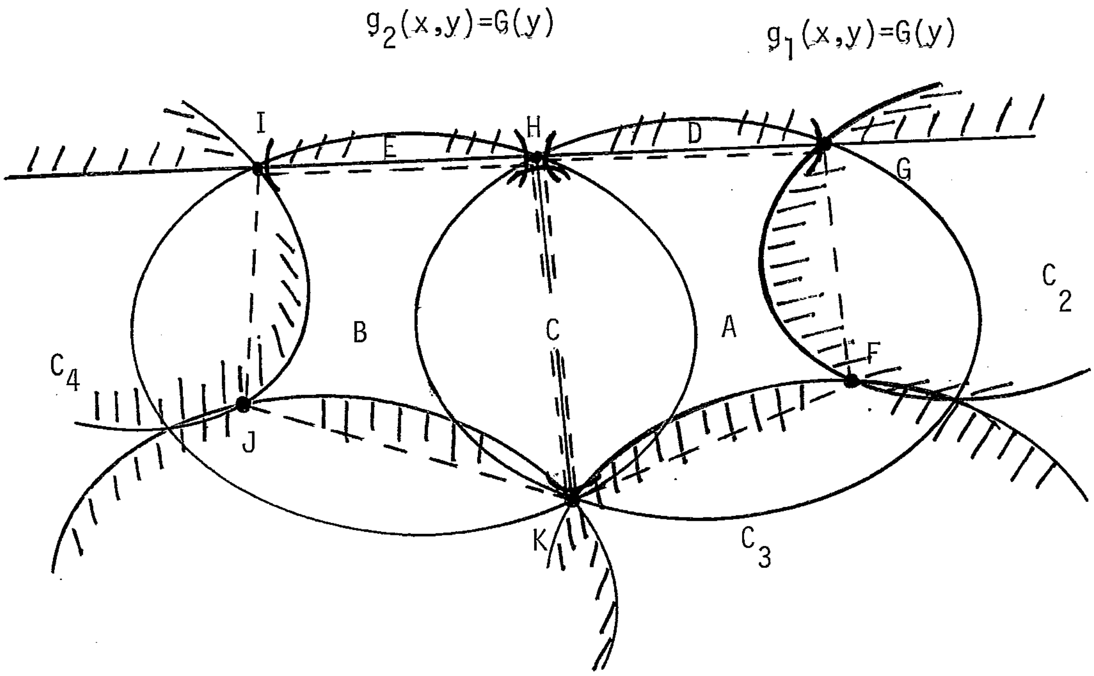
$$\partial g_i(x,\cdot)(y) \subseteq \sum_{q=1}^{o(\phi)} t_q \; \partial g_i(x_{\phi,q},\cdot)(y) \qquad (15)$$

O processo utilizado para a obtenção de $F(y)$ pode ser visualizado no exemplo da figura na página seguinte.

5.2.4.

Se está agora em condições de propor um teste de otimalidade nas condições indicadas no início do capítulo 5. Esse teste é apresentado no Teorema 9.

FIGURA 12



$$Z_{S_1,S_2,\ldots,S_p} = \overline{co}(P_{S_1,S_2,\ldots,S_p})$$

$A = \dot{Z}'_{\{1\}}$

$B = \dot{Z}'_{\{2\}}$

$C = \dot{Z}'_{\{1\},\{2\},\{12\}}$

$D = \dot{Z}'_{\{1\},\{1,3\}}$

$E = \dot{Z}'_{\{2\}\ \{2,5\}}$

$F = \dot{Z}'_{\{1\},\{1,5,6\}}$

$G = \dot{Z}'_{\{1\},\{1,3\},\{1,3\}}$

$H = \dot{Z}'_{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\}}$

$I = \dot{Z}'_{\{2\},\{2,3\},\{2,3,4\}}$

$J = \dot{Z}'_{\{2\},\{2,4,5\}}$

$K = \dot{Z}'_{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,5\}}$

Teorema 9

Sejam:

α) $y' \varepsilon Y$ convexo $\subseteq U$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^q$

β) X compacto $\subseteq X'$ aberto $\subseteq \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p - X = \bigcup_{\ell=1}^{L} C_\ell$,

C_ℓ convexo aberto; $\forall \ell \ \varepsilon \ \overline{1,L}$.

γ) $g_i : X' \times U \to \mathbb{R}$, $i \ \varepsilon \ \overline{1,K} \ |$:

γ.1) $g_i(\cdot,y)$ é convexa $\forall y \ \varepsilon \ U$ e $g_i(x,\cdot)$ é quasidiferenciável $\forall x \ \varepsilon \ X'$.

γ.2) $\forall x \ \varepsilon \ X$ e $\forall d \ \varepsilon \ \mathbb{R}^q$

$$\frac{g_i(x,y + hd) - g_i(x,y)}{h} - g_i(x,\cdot)'(y',d) \to 0$$

quando $h \to 0$ uniformemente.

δ) Seja $E(y) = \{x_1',\ldots,x_{J'}'\}$.

Então:

A) Se y é ótimo local para o problema

$\min_{y \varepsilon Y} G(y)$ (I) existe $\lambda' = (\lambda_1',\ldots,\lambda_{J'}') \leq 0$

e uma coleção de vetores

$u_j' = (u_{j1}',\ldots,u_{jK}')$, $j \ \varepsilon \ \overline{1,J'} \ |$

$$\sum_{i \varepsilon m_o(x_j,y')} u'_{ji} = 1 \tag{1}$$

$$u'_{ji} \geq 0 \quad \forall i \; \varepsilon \; m_o(x_j,y') \tag{2}$$

que satisfazem a:

$$\sum_{j=1}^{J'} \sum_{i \varepsilon m_o(x_j,y)} \lambda_j \, u_{ji} \, \partial g_i(x'_j,\cdot)(y') \cap$$

$$CR(y',Y)^* \neq \phi. \tag{3}$$

$\mathcal{B}$) Considere X, X', p e C_ℓ; $\ell \; \varepsilon \; \overline{1,L}$ como em A e q, m, $y' = (y'_1,\ldots,y'_K)$, Z, V, Y e p_i; i $\varepsilon \; \overline{1,K}$ como na parte $\mathcal{B}$ do teorema 8. Além disso suponha

$c: V \to \mathbb{R}$ quasidiferenciável,

$h: X' \times V \to \mathbb{R}$ convexa e

$g_i(x,y) = h(x,p_i(y)) \; \forall (x,y) \; \varepsilon \; X \times Y.$

Então se

$$y' = (y'_1,\ldots,y'_K)$$

é um ponto de ótimo local para o problema

$$\min \sum_{i=1}^{K} c(y_i)$$

$$\text{suj. a: } G(y) \leq 0 \qquad y \; \varepsilon \; Y \tag{**}$$

e tal que $G(y') = 0$ é verdade que:

$$\exists \quad \lambda = (\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_{J'}) \leq 0$$

e uma coleção de vetores

$$u_j = (u_{j1}, \ldots, u_{jK}), \quad j \in \overline{1,J'}$$

satisfazendo 1 e 2 tais que:

$$\lambda_o \ \partial c(y_i') + \sum_{\{j | i \in m_o(x_j, y')\}} \lambda_j \ u_{ji}$$

$$\partial h(x_j, \cdot)(y') \cap CR(y_i', Z)^* \neq \phi. \ \forall i \in \overline{1,K} \qquad (3')$$

Se valem as condições CQ'1 e CQ'2 apresentadas na observação G λ_o pode ser feito = -1 e se G(y') < 0 se terá tão somente:

$$- \partial c(y_i') \cap CR(y_i', Z)^* \neq \phi \quad \forall i \in \overline{1,K} \qquad (4)$$

<u>Prova:</u>

Nas condições dadas o teorema 4 garante a existência de $G'(y,d) = \hat{G}'(y,d) \ \forall y \in U$ e $d \in \mathbb{R}^q$.

Devido a essa última consideração se pode escrever novamente que para y' ser ótimo local de * é ncessário que:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \ \hat{G}'(y,d) = \sup_{x \in M_o(y)} \{ \max_{v \in \overline{CR(x,X)}}$$

$$\{ \min_{i \in m_o(x,y')} \{g(\cdot,y')'(x,v) + g_i(x,\cdot)'$$

$$(y,d)\}\}\} \geq 0 \qquad (5)$$

$\hat{G}(y,d)$ pode ser reescrito na forma

$$\sup_{x\varepsilon M_o(y)} \{ \max_{s\varepsilon \overline{CR(x,X)} \cap S_1(0)} \tilde{g}'(x,y',s)\} \qquad (6)$$

onde

$$\tilde{g}'(x,y',s) = \max_{\lambda \geq 0} \{ \min_{i\varepsilon m_o(x,y')} \{g_i(\cdot,y')'(x,s)\lambda +$$

$$+ g_i(x,\cdot)'(y',d)\}\} \qquad (7)$$

como já foi mencionado na observação B, após o teorema 8.

Escolha agora para cada $x \varepsilon M_o(y')$ um elemento de $m_F(x,y')$ e chame esse elemento de $\phi(x)$. Do ítem b da proposição 4 se pode tirar que

$$m_o(\Gamma(\phi(x)), y') \subseteq m_o(x,y')$$

e portanto $\hat{G}(y',d)$ é majorado quando se troca em (6) $\tilde{g}(x,y',s)$ por

$$\tilde{g}_F'(x,y',s) = \max_{\lambda \geq 0} \{ \min_{i\varepsilon m_o\Gamma(\phi(x),y)} \{g_i(\cdot,y')'$$

$$(x,s)\ \lambda + g_i(x,\cdot)'(y,d)\}\} \qquad (7)$$

Assim de 5 se tira que:

$$\forall d\ \varepsilon\ \overline{CR(y',Y)};\ \sup_{x\varepsilon M_o(y)} \{ \max_{s\varepsilon \overline{CR(x,X)} \cap S_1(0)}$$

$$\tilde{g}_F'(x,y',s)\} \geq 0 \qquad (8)$$

Colocando o problema que dá $\tilde{g}_F'(x',y',s)$, expresso em 7, no formato:

$$\max \delta$$

$$\text{suj.a: } \delta \leq g(\cdot,y)'(x,s)\ \lambda + g_i(x,\cdot)'(y',d)$$

$$\forall i \in m_o(\Gamma(\phi(x)),y) \qquad (9)$$

$$\lambda \geq 0$$

é simples se obter seu dual

$$\min \sum_{i\in m_o(\Gamma(\phi(x)),y)} u_i\ g_i(x,\cdot)'(y,d) \qquad (11)$$

$$(10) \qquad \text{suj.a: } \sum_{i\in m_o(\Gamma(\phi(x)),y)} u_i = 1,$$

$$u_i \geq 0 \quad \forall i \in m_o(\Gamma(\phi(x))y'), \qquad (12)$$

$$\sum_{i\in m_o(x,y')} u_i\ g(\cdot,y')'(x,s) \leq 0 \qquad (13)$$

Considere novamente a variável dual com dimensão K(14) e também de forma análoga e realizada na prova do teorema 8 acrescente a 10 as restrições

$$u_i = 0\ \forall i \notin m_o(\Gamma(\phi(x)),y) \qquad (15)$$

Chame agora de $D_{x,s}$ o conjunto viável de 10 já levando em conta 14 e 15.

$D_{x,s} \neq \phi$ pois 9 é um problema de programação linear que pelo ítem b da proposição 6 é limitado. Seja também $a_{x,d}$ um vetor K dimensional cujas coordenadas $a_{x,d,i}$ são tais que:

$$a_{x,d,i} = \delta_{d,i} \in \partial g_i(x,\cdot)(y',d) \text{ se}$$

$$i \in m_o(\Gamma(\phi(x)),y') \tag{16}$$

$$a_{x,d,i} = 0 \quad \text{em caso contrário}$$

10 já considerando 14 e 15 pode ser colodado na forma compacta.

$$\begin{array}{l} \min w.d \\ \text{suj.a: } w \in a_{x,d} \cdot D_{x,s} \end{array} \tag{17}$$

Aplicando então o teorema de dualidade forte de programação linear se pode verificar que 8 é equivalente a:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \quad \sup_{x \in M_o(y')} \left\{ \max_{s \in \overline{CR(x,X)} \cap S_1(0)} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \min w.d \\ \text{suj.a: } w \in a_{x,d} \cdot D_{x,s} \end{array} \right. \geq 0 \tag{18}$$

Esse resultado pode ser enfraquecido para:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \quad \sup \{w.d;\ w \in \bigcup_{x \in M_o(y')}$$

$$(\bigcup_s a_{x,d} \cdot D_{x,s} \ ,\ s \in \overline{CR(x,X)} \cap S_1(0))\} \geq 0 \tag{19}$$

Seja agora A_x o conjunto de vetores

$\overline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_K)$

que satisfazem a:

$$\delta_i \in \partial g_i(x,\cdot)(y') \text{ se } i \in m_0(\Gamma(\phi(x)),y')$$

$$0 \qquad\qquad \text{se } i \notin m_0(\Gamma(\phi(x)),y') \tag{20}$$

Considerando então que $\forall d \in \mathbb{R}^q$ $a_{x,d} \in A_x$ e fazendo

$$S = CR(x,X) \cap S_1(0) \tag{19}$$

ainda implica que:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \sup \{w.d;\ w \in A_1 = \bigcup_{x \in M_0(y')} (\bigcup_{s \in S} (\bigcup_{\overline{\delta} \in A_x} \overline{\delta} \cdot D_{x,s}))\} \geq 0 \tag{21}$$

A_x é uniformemente limitado em $M_0(y)$ pois da condição $\gamma.2$ resulta que $\forall i \in \overline{1,K}$ e $\forall d \in \mathbb{R}^q$ a função

$$x \in X' \to g_i(x,\cdot)'(y',d)$$

e continua (22). Além disso

$$D_{x,s} \subseteq B_1(0)\ \forall x \in M_0(y')$$

e se $s \in S$ e portanto se pode verificar que $\overline{A}_1$ é compacto. Desse modo 21 pode ser escrito:

$$\forall d \in \overline{CR(y',Y)} \quad \max_{w \in \overline{A_1}} \{w.d\} \geq 0 \tag{23}$$

Utilizando então os teoremas B do apêndice e de Caratheodory se mostra, a exemplo do que aconteceu na demonstração do teorema 8, que existem

$J \leq q+1$, $\lambda_j < 0$; $j \in \overline{1,J}$ (24),

$w_j \in \overline{A_1}$; $j \in \overline{1,J}$ (25) $|: \sum_{j=1}^{J} \lambda_j w_j \in CR(y',Y)^*$

(26)

Como $w_j \in \overline{A_1}$ se pode mostrar que $\forall j \in \overline{1,J}$ existem:

A) Uma sequência $(x_{j,n}) \subseteq M_o(y')$ $\phi(x_{j,n}) = \phi_j$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pois F é finita e $x_{j,n} \to x_j \in \phi_j$.

B) $\delta_{ji} \in \partial g_i(x_j,\cdot)(y')$ $\forall i \in m_o(\Gamma(\phi_j),y')$ (27)

C) $u_{ji} \in \mathbb{R}^K | u_{ji} \geq 0$ $\forall i \in \overline{1,K}$ (28), $u_{ji} = 0$ se $i \notin m_o(\Gamma(\phi_j),y')$ (29) $\sum_{i=1}^{K} u_{ji} = 1$ (30) e

$w_j = \sum_{i \in m_o(\Gamma(\phi_j),y')} u_{ji}\, \delta_{ji}$ (31).

Pode-se então substituir 25 por 26 a 30 e , empregando 31, 26 por:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i \varepsilon m_o(\Gamma(\phi_j),y')} \lambda_j \, u_{ji} \, \delta_{ji} \; \varepsilon \; CR(y',Y)^* \tag{32}$$

Elimina-se assim a participação dos w_j. Para retirar também os δ_{ji} se pode reescrever 32 no formato:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i \varepsilon m_o(\Gamma(\phi_j),y')} \lambda_j \, u_{ji} \, \partial g_i(x_j,\cdot)(y')$$

$$CR(y',Y)^* \neq \phi. \tag{33}$$

Adaptando a notação indicada em 13 da seção 5.2.3. se tem:

$$x_j = \sum_{q=1}^{o(\phi_j)} t_{q,j} \, x_{\phi_j,q} \tag{34}$$

com

$$\sum_{q=1}^{o(\phi_j)} t_{q,j} = 1 \tag{35}$$

$$t_{q,j} \geq 0 \quad \forall q \; \varepsilon \; \overline{1,o(\phi_j)} \tag{36}$$

e portanto segundo 15 dessa mesma seção se tem:

$$\partial g_i(x_j,\cdot)(y') \subseteq \sum_{q=1}^{o(\phi_j)} t_{q,j} \, \partial g_i(x_{\phi_{j,q}},\cdot)(y')$$

$$\forall i \; \varepsilon \; m_o(\Gamma(\phi_j),y') \text{ e } \forall j \; \varepsilon \; \overline{1,J} \tag{37}$$

Aplicando esse último resultado a 33 se tira que:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i\varepsilon m_o(\Gamma(\phi_j),y')} \sum_{q=1}^{o(\phi_j)} \lambda_j\ u_{ji}\ t_{q,j}$$

$$\partial g_i(x_{\phi_{j,q}},\cdot)(y') \cap CR(y',Y)^* \neq \phi \qquad (38)$$

Devido a 29 e ao fato de $m_o(\Gamma(\phi_j),y')$ estar contido em $m_o(x_{\phi_{j,q}},y)\ \forall q\ \varepsilon\ 1,o(\phi(j))$ se pode tomar o segundo somatório em $m_o(x_{\phi_{j,q}},y')$.

Feito isso chame $E(y) = \{j'\ \varepsilon\ \overline{1,J'}\,|\,x'_{j'}\ \varepsilon \bigcup_{j=1}^{J} E(\phi_j)\}$ e $q_j(j')$ ao elemento $\hat{q}$ de $\overline{1,o(\phi_j)}\ |\ x'_{j'} = x_{\phi_j,\hat{q}}$. Pode-se agora escrever de forma equivalente a 38 que:

$$\sum_{j'\varepsilon E(y)} \sum_{j|x'_{j'}\varepsilon\phi_j} \sum_{i\varepsilon m_o(x'_{j'},y')} (\lambda_j.u_{ji}.t_{q_j(j'),j}$$

$$\partial g_i(x'_{j'},\cdot)(y')) \cap CR(y',Y)^* = \phi \qquad (39)$$

Trocando a ordem dos somatórios interiores e fazendo então

$$\lambda'_{j'} = \sum_{i\varepsilon m_o(x'_{j'},y')} \sum_{j|x'_{j'}\varepsilon\phi_j} \lambda_j.u_{ji}.t_{o_j(j'),j} \qquad (40)$$

e

$$u'_{j'i} = (\sum_{j|x'_{j'}\varepsilon\phi_j} \lambda_j.u_{ji}.t_{o_j(j'),j})/\lambda'_{j'}, \text{se } \lambda'_{j'}$$

é não nulo. (41)

Se $\lambda'_{j'} = 0$ faça os $u'_{j'i}$, $i \in m_0(x'_{j'},y')$ serem coeficientes convexos quaisquer (42).

$$\sum_{j'\in E(y)} \sum_{i\in m_0(x'_{j'},y')} \lambda_{j'} u'_{j'i} \partial g_i(x'_{j'},\cdot)(y')$$

$$\cap CR(y',Y)^* = \phi \qquad (43)$$

Além disso se tem que $\lambda'_j \leq 0$ pois os λ_j o são e os $u_{ji} \cdot t_{o_j(j'),j}$ são não negativos. Também os $u'_{j'i}$ satisfazem 1 e 2 como é imediato mostrar. Dessa forma fazendo

$$\forall j' \notin E(y),\ \lambda'_j = 0$$

e os $u'_{j'i}$, $i \in m_0(x'_{j'},y')$ como em 42 e tomando então em E(y) o primeiro somatório em 43 se obtém todas as condições de otimalidade indicadas na parte A.

A parte B poderá ser demonstrada como a parte B do teorema 8 se adaptando para as condições de B o desenvolvimento realizado na prova de A e lembrando que para os elementos definidos em B se tem que

$$\partial\ \left(\sum_{i=1}^{K} c.p_i\right)(y') = \mathop{X}_{i=1}^{K}\ \partial c\ (y'_i)$$

$$\partial g_i(x,\cdot)(y') = \{0\} \times \{0\} x \ldots x\ \partial h(x,\cdot)(y'_i) x \ldots x\{0\} \text{ e}$$

$$CR(y',Y)^* = \mathop{X}_{i=1}^{K}\ CR(y'_i,Z)^*.$$

Finalmente o fato de CQ'1 ou CQ'2 acarretarem $\lambda_0 < 0$ pode ser mostrado de forma análoga a empregada no teorema 8 para provar que CQ1 (ou CQ2) levaram o idêntico resultado nas condições tratadas lá.

<u>Observação H</u>:

Quando além das condições requeridas no teorema 9 as $g_i(\cdot,y)$ são diferenciáveis e X é um politopo então se pode exigir a exemplo do que foi apresentado na observação A que

$$\sum_{i\varepsilon m_0(x_j,y')} (u_{ji}\ \nabla g_i(\cdot,y')(x_j)) \ \varepsilon\ CR(x_j,X)^*$$

Assim por 41 e por que se pode fazer $u_{ji} = 0$ se $i \notin m_0(x_j,y')$ se tem $\forall j' | \lambda'_{j'} \neq 0$:

$$\sum_{i\varepsilon m_0(x'_{j'},y')} u'_{j'i}\ \nabla g_i(\cdot,y')(x'_{j'}) = \sum_{i\varepsilon m_0(x'_{j'},y')}$$

$$\Big(\sum_{j|x^{r}_{j'}\varepsilon\phi_j} a_{jj'}\ u_{ji}\Big)\ \nabla g_i(\cdot,y')(x'_{j'})\ \text{(onde}$$

$$a_{jj'} = \frac{1}{\lambda'_{j'}}\ \lambda_j\ t_{q_j(j'),j} \geq 0) = \sum_{j|x^{r}_{j'}\varepsilon\phi_j}$$

$$\sum_{i\varepsilon m_0(x'_{j'},y')} a_{jj'}\ u_{ji}\ \nabla g_i(\cdot,y')(x'_{j'}) \qquad (44)$$

Agora, como

$$\nabla g_i(\cdot,y')(x'_{j'}) = \nabla g_i(\cdot,y')(x_j) \qquad \text{e}$$

$$a_{jj'} \geq 0 \quad \forall j \mid x'_{j'} \varepsilon \phi_j$$

e se tira de 44 que:

$$\sum_{i\varepsilon m_o(x'_{j'},y')} u'_{j'i} \nabla g_i(\cdot,y')(x'_{j'}) \quad \sum_j$$

$$(CR(x_j,X)^*,j \mid x'_{j'} \varepsilon \phi_j \text{ e } a_{jj'} \neq 0) = \overline{co}$$

$$(\bigcup_j CR(x_j,X)^*;\ j|x'_{j'} \varepsilon \phi_j \text{ e } a_{jj'} \neq 0)$$

$$CR(x'_{j'},X)^*.$$

<u>Observação I</u>:

O resultado do Teorema q deriva do fato que nas condições em que ele é válido $G'(y,d) = \hat{G}'(y,d)$ pode ser obtido fazendo avaliações apenas nos pontos de $E(y)$.

CAPÍTULO VI

UM TEOREMA DE FUNÇÃO IMPLÍCITA

Neste capítulo será apresentado um Teorema de função implícita. Este teorema se aplicará aos sistemas

$$g_i(x,y) = g_1(x,y) \qquad \forall i \in \overline{2,s+1}$$
$$g_i(x,y) = 0 \qquad \forall i \in \overline{s+2,p+1}$$

quando as funções g_i: $\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$ forem convexas ou quando as restrições $g_i(\cdot,y)$ forem convexas $\forall y \in \mathbb{R}^q$, $g_i(x,\cdot)$ tiver derivadas direcionais $\forall d \in \mathbb{R}^q$ e for satisfeita uma condição de limite uniforme análoga a "condição de desacoplamento".

No teorema de função implícita usual aplicado a equação $H(x,y) = 0$ se exige que $\frac{\partial H}{\partial x}(\bar{x},\bar{y})$ seja não-singular para que se possa escrever as soluções dessa equação em uma vizinhança de $(\bar{x},\bar{y})$na forma $x = h(y)$. No resultado apresentado nesta seção essa exigência é substituída pela seguinte:

$$\forall v \in \mathbb{R}^p \quad \exists\, i \in \overline{1,p+1} \quad g_i(\cdot,\bar{y})'(\bar{x},v) < 0.$$

Essa última condição é logicamente mais forte que a do teorema usual.

Uma consequência do teorema que será indicado aqui e que motivou sua apresentação dentro deste trabalho também será dada. Ela consiste no fato de se poder garantir que em casos convexos comuns e onde as condições do teorema se aplicam imediatamente o conjunto dos pontos pior cobertos em y+hd evolui sobre um número finito de curvas.

$$x = s_j(h) \text{ onde } s_j: (-\varepsilon_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{R}^p, \; j \in \overline{1,J}$$

tais que s_j é diferenciável lateralmente nesse intervalo.

6.1.

<u>Teorema 10</u>:

Sejam

a) $(\bar{x},\bar{y}) \in U \times V \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, U e V abertos.

b) $g_i: U \times V \to \mathbb{R} \quad i \in \overline{1,p+1} \mid$

$g_i(\bar{x},\bar{y}) = g_1(\bar{x},\bar{y}) \; \forall i \in \overline{2,s+1}$

$g_i(\bar{x},\bar{y}) = 0 \qquad \forall i \in \overline{s+2,p+1}$

c.1) $\forall i \in \overline{1,p+1} \quad g_i(\cdot,y)$ é convexa $\forall y \in \mathbb{R}^q$ e $\exists$ uma vizinhança U_1 de $\bar{x}$ em $\mathbb{R}^p \mid \forall x \in U_1$ e $\forall d \in \mathbb{R}^q \; \exists \; g_i(x,\cdot)'(\bar{y},d)$ e $H(x,d) =$

$$\frac{g_i(x,\bar{y}+hd) - g_i(x,\bar{y})}{h} \underset{h\to 0^+}{\to} g_i(x,\cdot)'$$

$(\bar{y},d)$ uniformemente em $V \times S_1(0)$ ou simplesmente

c.2) $\forall i \in \overline{1,p+1} \quad g_i$ é convexa.

Além disso suponha que:

d) $\forall v \in \mathbb{R}^p \quad \exists\, i \in \overline{1,p+1} \mid g_i(\cdot,\bar{y})'(\bar{x},v) < 0.$

Nessas condições $\exists$ uma vizinhança de $\bar{y}$ $V' \subseteq V$ e uma função $F: V' \to U$ contínua e |

$$\forall y \in V' \quad g_i(F(y),y) = g_1(F(y),y) \quad \forall i \in \overline{1,s+1},$$

$$g_i(F(y),y) = 0 \qquad \forall i \in \overline{s+2,p+1} \qquad \text{e}$$

$$\forall d \in \mathbb{R}^q \ \forall y \in V' \quad \exists\, F'(y,d).$$

Prova:

Deve-se começar observando o seguinte fato:

Afirmação 10.1:

Se valem as condições c.1 ou c.2 do teorema 10 então

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \mid \text{se } \|(x,y) - (\bar{x},\bar{y})\| < \delta$$

então $$\partial g_i(\cdot,y)(x) \subseteq (\partial g_i(\cdot,\bar{y})(\bar{x})) + B_\varepsilon(0),$$

$$\forall i \in \overline{1,p+1}.$$

Prova:

Considerando a hipótese c.2 este resultado é obtido do teorema C do Apêndice encontrado em Rockafellar| |.

Suponha agora que vale a hipótese c.1 e a afirmação é falsa. Nesse caso existem

$$i \in \overline{1,p+1},\ ((x_n,y_n))\,|\,(x_n,y_n) \to (\bar{x},\bar{y}) \qquad e$$

$$(s_n)\,|\,s_n \in \partial g_i(\cdot,y_n)(x_n) \qquad e$$

$$s_n \to s \notin \partial g_i(\cdot,\bar{y})(\bar{x}) \qquad (1)$$

1 e o fato de $\partial g_i(\cdot,\bar{y})(\bar{x})$ ser convexo fechado acarretam que por separação

$$\exists \quad e \in S_1(0)\,|\,s.e > \max_{r\in\partial g_i(\cdot,\bar{y})(\bar{x})} r.e =$$

$$g_i(\cdot,\bar{y})(\bar{x},e) \qquad (2)$$

Tomando então esse h se tem que:

$$s_n.e \le g_i(\cdot,y_n)'(x_n,e) \le (g_i(x_n + \|y_n-\bar{y}\|$$

$$e,y_n) - g_i(x_n,y_n))/\|y_n-\bar{y}\| \le \frac{1}{\|y_n-\bar{y}\|}$$

$$\{g_i(x_n + \|y_n-\bar{y}\| e,\cdot)'(\bar{y},y_n-\bar{y}) + o(x_n +$$

$$\|y_n-\bar{y}\| e,\ y_n-\bar{y}) + g_i(\cdot,\bar{y})'(x_n + \|y_n-\bar{y}\| e,$$

$$\|y_n-y\| e) - g_i(x_n,\cdot)'(\bar{y},y_n-\bar{y}) - o(x_n,\ y_n-\bar{y})\}$$

$$(3)$$

onde $\qquad o(x,d) = g_i(x,\bar{y}+d) - (g_i(x,\bar{y}) + g_i(x,\cdot)'(\bar{y},d))$

Devido a condição imposta sobre $H(x,d)$ se tem que

$$\lim\{g_i(x_n + \|y_n-y\| e,\cdot)'(\bar{y},u(y_n-\bar{y}) -$$

$$g_i(x_n,\cdot)'(\bar{y},u(y_n-\bar{y}))\} = 0 \qquad \text{e}$$

$$\lim \frac{o(x_n,y_n-\bar{y})}{\|y_n-\bar{y}\|} = \lim \frac{o(x_n + \|y_n-\bar{y}\| h,y_n-\bar{y})}{\|y_n - \bar{y}\|}=0$$

Assim por 3 se tem que

$$s.e = \lim s_n.e \leq \lim g_i(\cdot,\bar{y})'(x_n +$$

$$\|y_n-\bar{y}\| e,e) \leq g_i(\cdot,\bar{y})'(\bar{x},e)$$

em contradição com 2.

Desse modo valendo qualquer das hipóteses em c se pode afirmar a partir de d que

$$\exists \hat{\delta} > 0 | \forall (x,y) \in B_{\hat{\delta}}(\bar{x}) \times B_{\hat{\delta}}(\bar{y}) \text{ e } \forall v \in \mathbb{R}^p$$

$$\exists i \in \overline{1,p+1} \mid g_i(\cdot,y)'(x,v) < 0 \qquad (4)$$

Pode-se mostrar agora que não existe $y \in B_{\hat{\delta}}(\bar{y})$ (5), x e z $\in$ $B_{\hat{\delta}}(y)$ (6)|:

$$\Delta_i(x,y) = g_i(x,y) - g_1(x,y) = g_i(z,y) -$$

$$g_1(z,y) \; \forall i \in \overline{2,s+1} \qquad (7)$$

$$g_i(x,y) = g_i(z,y) \ \forall i \in \overline{s+2,p+1} \qquad (8)$$

Suponha que isso não seja verdade. Sejam então y, x e z satisfazendo a 5-8 e tais que $g_1(z,y) \geq g_1(x,y)$. Nesse caso por 7, se tem que

$$g_i(z,y) \geq g_i(x,y) \ \forall i \in \overline{2,s+1} \qquad (9)$$

Tome agora, o que é possível segundo 4, $i | g_i(\cdot,y)'(z,z-x) < 0$. Se tem então que

$$g_i(x,y) \geq g_i(\cdot,y)'(z,x-z) + g_i(z,y) > g_i(z,y)$$

encontrando-se uma contradição com 9 ou 8 conforme $i \in \overline{1,p+1}$ ou $\overline{p+2,s+1}$.

Em vista desse último fato se pode afirmar que nas condições do teorema a função:

$$\psi\colon B_\delta(\overline{x}) \times B_\delta(\overline{y}) \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$$

$$(x,y) \to (g_2(x,y)-g_1(x,y),\ldots,g_{s+1}(x,y)-$$

$$-g_1(x,y),\ g_{s+2}(x,y),\ldots,g_{p+1}$$

$$(x,y),y) \ \text{é 1-1} \qquad (10)$$

Como ψ é logicamente contínua 10 permite a firmar pelo teorema da invariância do domínio (ver teorema D do apêndice) que $\psi(B_\delta(\overline{x}) \times B_\delta(\overline{y}))$ é um aberto em $\mathbb{R}^{p+q}$ contendo

$$(0,\dots,0,\bar{y}).\psi_\delta\colon B_\delta(\bar{x}) \times B_\delta(\bar{y}) \to \psi(B_\delta(\bar{x}) \times B_\delta(\bar{y}))$$

$$(x,y) \to \psi(x,y)$$

será então um homeomorfismo e tomando

$$\delta' > 0 \mid \forall y \in B_{\delta'}(\bar{y})(0,\dots,0,y) \in \psi(B_\delta(\bar{x}) \times B_\delta(\bar{y}))$$

se poderá definir $F\colon V' = B_{\delta'}(y) \to U$ dada por $F = P_1.\psi_\delta^{-1}.I_2$ onde

$$I_2\colon V' \to \psi(B_\delta(\bar{x}) \times B_\delta(\bar{y})) \qquad \text{e}$$

$$y \to (0,\dots,0,y)$$

$$P_1\colon B_\delta(\bar{x}) \times B_\delta(\bar{y}) \to U$$

$$(x,y) \to x$$

Pela própria maneira como foi construída F é contínua e chamando de p_j a j-ésima projeção de $\mathbb{R}^{p+q}$ se tem $\forall i \in \overline{2,s+1}$ que

$$g_i(F(y),y) - g_1(F(y),y) = p_{i-1}(\psi((P_1.\psi_\delta^{-1}.I_2)$$

$$(y),y)) = p_{i-1}(\psi.\psi_\delta^{-1}.I_2(y)) = p_{i-1}(I_2(y)) = 0.$$

De forma análoga se verifica que

$$g_i(F(y),y) = 0 \ \forall i \in \overline{s+2,p+1}$$

restanto apenas mostrar que $F'(y,d)$ existe $\forall y \in V'$ e $\forall d \in \mathbb{R}^q$. Para verificar isso será necessário antes de mais nada o seguinte resultado:

Afirmação 10.2:

Dados $y \in V'$ e $x = F(y)$ se tem que:

A) Se valem as condições do teorema 10, então $\forall\, b = (b_1,\ldots,b_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$, o sistema

$$g_i(\cdot,y)'(x,v) - g_1(\cdot,y)'(x,v) = b_{i-1}, i \in \overline{2,s+1}$$

$$g_i(\cdot,y)'(x,v) = b_{i-1} \quad i \in \overline{s+2,p+1}$$

admite uma solução única.

B) Se vale a condição c.2 então $\forall b \in \mathbb{R}^{p+1}$ e $\overline{w} \in \mathbb{R}^q$ o sistema:

$$g_i'((x,y),(v,\overline{w})) - g_1'((x,y),(v,\overline{w}) = b_{i-1} \quad i \in \overline{2,s+1}$$

$$g_i'((x,y),(v,\overline{w})) = b_{i-1}; \quad i \in \overline{s+2,p+1}$$

tem uma única solução.

Prova: Como já foi visto anteriormente a condição d do teorema 10 continua válida quando se substitui $\overline{x}$ e $\overline{y}$ por quaisquer $x \in B_\delta(\overline{x})$ e $y \in B_\delta(\overline{y})$.

Suponha então por absurdo que para um determinado $b \in \mathbb{R}^{p+1}$ existam v_1 e $v_2 \in \mathbb{R}^p$, $v_1 \neq v_2$ satisfazendo ao sistema dado em A. Isso significa que:

$$g_1(\cdot,y)'(x,v_1) - g_1(\cdot,y)'(x,v_2) =$$

$$= g_i(\cdot,y)'(x,v_1) - g_i(\cdot,y)'(x,v_2) \ \forall i \in \overline{2,s+1} \tag{11}$$

e
$$g_i(\cdot,y)'(x,v_1) - g_i(\cdot,y)'(x,v_2) = 0$$

$$\forall i \in \overline{s+2,p+1} \tag{12}$$

Imagine então que

$$g_1(\cdot,y)'(x,v_1) - g_1(\cdot,y)'(x,v_2) \geq 0 \tag{13}$$

Neste caso por 11 e 12 o mesmo ocorre para

$$g_i(\cdot,y)'(x,v_1) - g_i(\cdot,y)'(x,v_2)$$

com $i \in \overline{2,p+1}$. Escolha então $\forall i \in \overline{1,p+1}$,

$$s_i \in \partial g_i(\cdot,y)(x,v_1).$$

Pela própria definição de $\partial g_i(\cdot,y)(x,v_1)$,

$$g_i(\cdot,y)'(x,v_1) = s_i \cdot v_1 \tag{14}$$

e pelas convexidades das $g_i(\cdot,y)$,

$$g_i(\cdot,y)'(x,v_2) \geq s_i \cdot v_2 \tag{15}$$

Aplicando então 14 e 15 se tem que:

$$0 \leq g_i(\cdot,y)'(x,v_1) - g_i(\cdot,y)'(x,v_2) \leq s_i \cdot$$

$$\cdot (v_1 - v_2) \leq g_i(\cdot,y)'(x,v_1 - v_2) \ \forall i \in \overline{1,p+1}$$

contrariando d que por 4 vale em (x,y).

Se 13 não se verifica então

$$g_i(\cdot,y)'(x,v_2) - g_1(\cdot,y)'(x,v_1) > 0$$

e de novo por 11 e 12 se terá

$$g_i(\cdot,y)'(x,v_2) - g_i(\cdot,y)'(x,v_1) \geq 0 \quad \forall i \in \overline{1,p+1}$$

Nesse caso tomando $s_i' \in \partial g_i(\cdot,y)(x,v_2)$ e procedendo de forma análoga a efetuada para o caso anterior se consegue provar que

$$g_i(\cdot,y)'(x,v_2 - v_1) \geq 0 \ \forall i \in \overline{1,p+1}$$

de novo em desacordo com d. Mostra-se assim que a função:

$$\phi'_{x,y}: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$$

$$v \to (g_2(\cdot,y)'(x,v) - g_1(\cdot,y)'(x,v),\ldots,$$

$$g_{s+1}(\cdot,y)'(x,v) - g_1(\cdot,y)'(x,v),\ g_{s+2}(\cdot,y)'$$

$$(x,v),\ldots,g_{p+1}(\cdot,y)'(x,v))$$

é biunívoca. Como ela é também contínua, de novo pelo teorema de invariância do domínio, se tem que $\phi'_{x,y}(\mathbb{R}^p)$ é um aberto contendo $\overline{0}$. Como $\phi'_{x,y}$ é positiva homogênea ela deve ser sobre $\mathbb{R}^p$ completando a prova de A.

Para demonstrar B basta observar que dados

$$i \in \overline{1,p+1},\ \overline{w} \in \mathbb{R}^q,\ v_j \in \mathbb{R}^p \text{ e } s_j \in \mathbb{R}^{p+q} \mid$$

$$s_j \in \partial g_i(x,y)(v_j,\bar{w}),\ j = 1,2 \qquad \text{então}$$

$$g_i'((x,y),(v_1,\bar{w})) - g_i'((x,y),(v_2,\bar{w})) =$$

$$= s_1 \cdot (v_1,\bar{w}) - s_2 \cdot (v_2,\bar{w}) \leq s_1((v_1,\bar{w}) -$$

$$- (v_2,\bar{w})) \leq s_1 \cdot ((v_1 - v_2, 0)) = P_1(s_1) \cdot v_1 - v_2$$

$$\leq g_i(\cdot,y)'(x, v_1 - v_2) \qquad (14)$$

uma vez que

$$\partial g_i(\cdot,y)(x) = P_1(\partial g_i(x,y)).$$

Partindo-se então novamente da negação da tese e procedendo analogamente a maneira efetuada na prova do caso A chega-se, com o auxílio de 14 e da condição d, a demonstrar que não pode existir mais de uma solução para o sistema dado em B. A prova da existência obrigatória dessa solução $\forall b \in \mathbb{R}^p$ é idêntica a do caso A.

Seja agora $y \in V' \subseteq B_\delta(\bar{y})$ e $d \in \mathbb{R}^q$. Seja ainda

$$(t_n) \mid t_n > 0,\ t_n \to 0,\ u((F(y+t_n d) - F(y))/t_n) \to \bar{a}$$

e

$$\| (F(y + t_n d) - F(y)) \| / t_n \to \bar{\ell} \in \bar{\mathbb{R}}$$

Considere primeiro o caso em que vale a condição c.1 e para mostrar que $\bar{\ell} < \infty$ assuma inicialmente que existe

$$i \in \overline{2,s+1} \mid g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{a}) - g_1(\cdot,y)'$$

$$(F(y),\bar{a}) \neq 0 \qquad (15)$$

Nesse caso se terá que:

$$0 = \lim \frac{1}{t_n} |g_i(F(y + t_n d),y + t_n d) -$$

$$- g_1(F(y + t_n d),y + t_n d)| = \lim \frac{1}{t_n} \{|g_i(F(y +$$

$$+ t_n d),y + t_n d) - g_1(F(y + t_n d),y + t_n d)| -$$

$$|g_i(F(y + t_n d),y) - g_1(F(y + t_n d),y)|\} +$$

$$+ \lim \frac{1}{t_n} \{|g_i(F(y + t_n d),y) - g_1(F(y + t_n d),$$

$$y)| - |g_i(F(y),y) - g_1(F(y),y)|\} = g_i(F(y),\cdot)'$$

$$(y,d) - g_1(F(y),\cdot)'(y,d) + \bar{\ell}(g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{a})$$

$$- g_1(\cdot,y)'(F(y),\bar{a})). \qquad (16)$$

Essa igualdade mostra que $\bar{\ell} < \infty$ por 15 e pór $g_i(F(y),\cdot)'(y,d) - g_1(F(y),\cdot)'(y,d)$ ser limitado.

Se 15 não se verifica então fazendo uso da condição d para $\bar{a}$ se $g_1(\cdot,y)'(F(y),\bar{a}) \geq 0$ ou $-\bar{a}$ se $g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{a}) \leq 0$, se encontra que

$$i \in \overline{s+2,p+1} \mid g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{a}) \neq 0.$$

Nesse caso procedendo como na situação anterior se tem para esse i que:

$$0 = g_i(F(y),\cdot)'(y,d) + \bar{\ell}\; g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{a}) \tag{17}$$

o que novamente assegura que $\bar{\ell}$ é finito.

Seja então $\bar{v} = \overline{\ell a} = \lim\,(F(y + t_n d)-F(y))/t_n$. Efetuando $\forall i \in \overline{2,s+1}$ o mesmo procedimento realizado para a obtenção de 16 se tem:

$$g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{v}) - g_1(\cdot,y)'(F(y),\bar{v}) =$$

$$= g_1(F(y),\cdot)'(y,d) - g_i(F(y),\cdot)'(y,d) \quad \forall i \in \overline{2,s+1} \tag{18}$$

Além disso se terá $\forall i \in \overline{s+2,p+1}$

$$g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{v}) = - g_i(F(y),\cdot)'(y,d) \tag{19}$$

Pelo ítem A da afirmação 10.2, $\bar{v}$ está bem definido por 18 e 19. Isto quer dizer que $\lim\,(F(y + t_n d)-F(y))/t_n$ é dado por $\psi'_{x,y}(b')$ onde

$$b' = (g_1(F(y),\cdot)'(y,d) - g_2(F(y),\cdot)'(y,d),\ldots,$$

$$g_i(F(y),\cdot)'(y,d) - g_{s+1}(F(y),\cdot)'(y,d),\ -$$

$$- g_{s+2}(F(y),\cdot)'(y,d),\ldots,-g_{p+1}(F(y),\cdot)'(y,d)).$$

Como qualquer sequência (λ_n), $\lambda_n > 0 \; \forall n$, $\lambda_n \to 0$ possui uma subsequência com as propriedades requeridas para t_n se tem que

$$F'(y,d) = \lim_{\lambda \to 0^+} F(y + \lambda d) - F(y))/\lambda$$

existe e é igual a $\psi'^{-1}_{x,y}(b')$ com b' como indicado no parágrafo anterior. Termina-se assim a prova para o caso em que vale c.1.

Suponha agora que c.2 é verdadeira e imagine que $\mathcal{L} = \infty$. Nesse caso

$$u((F(y + t_n d) - F(y))/t_n,\ d) \to (\bar{a},0)$$

e assim se existe $i \in \overline{2,s+1}$ tal que

$$\Delta_i'(\bar{a},0) \triangleq \{g_i'((F(y),y),(\bar{a},0)) - g_1'((F(y),y),$$

$$(\bar{a},0))\} \neq 0 \qquad (20)$$

se terá $\mathcal{L}.\Delta_i'(\bar{a},0) = \pm\infty$. Mas

$$\mathcal{L}.\Delta_i'(\bar{a},0) = \lim \frac{1}{t_n} \{\Delta_i(F(y + t_n d),\ y + t_n d)) -$$

$$- \Delta_i(F(y),y)\} = 0.$$

Se chegando então a um absurdo.

Se 20 é falsa, como $g_i'((F(y),y),(\bar{a},0)) = g_i(\cdot,y)'(F(y),\bar{a})$, então se poderá usar novamente a condição d para $\bar{a}$ ou $-\bar{a}$ conforme for conveniente e dessa forma conseguir mostrar que

$$\exists \quad i \in \overline{s+2,p+1} \,|\, g_i'((F(y),y),(\bar{a},0)) \neq 0$$

Para esse i se terá

$$0 = \lim \frac{1}{t_n} |g_i(F(y + t_n d), y + t_n d) -$$

$$g_i(F(y),y)| = \ell \; g_i'((F(y),y),(\bar{a},0)) = \pm \infty.$$

Absurdo e portanto $\bar{\ell} < \infty$.

Seja outra vez então $\bar{v} = \bar{\ell}\;\bar{u} = \lim \dfrac{F(y+t_n d)-F(y)}{t_n}$

$\bar{v}$ é solução do sistema indicado no ítem B da afirmação 10.2 com $b = \bar{0}$ e pelo resultado indicado nesse ítem solução única.

Dessa maneira o $\lim \dfrac{F(y+t_n d) - F(y)}{t_n}$ está determinado de uma forma que independe da sequência (t_n) escolhida. Daí se mostrar que existe o $\lim_{\lambda \to 0^+} (F(y + \lambda d) - (y))/\lambda$ também nesse segundo caso é tarefa simples.

<u>Observação A</u>:

Não é verdade que se apenas as $g_i(\cdot,\bar{y})$ forem convexas os resultados do teorema 10 se verifiquem ainda que valha c.1. Isto pode ser constatado no exemplo em que

$$g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; i = 1,2 \quad \text{e} \quad (\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$$

$$(x,y) \to (-1)^i (x+y^2) \text{ se } x \leq -y^2$$

$$(x,y) \to 0 \qquad \text{se } \|x\| \leq y^2$$

$$(x,y) \to (-1)^i (x-y^2) \text{ se } x \geq y^2$$

Observe que as $g_i(\cdot,0) = \pm$ identidade são convexas e que

$$\forall x \in \mathbb{R} \left| \frac{g_i(x,y) - g_i(x,0)}{y} - \frac{\partial g_i}{\partial y}(x,0) \right| \leq |y|$$

valendo portanto c.1.

6.2.

Vai-se apresentar agora um exemplo de aplicação do teorema 10 dentro do contexto de problemas de recobrimento. O resultado que será apresentado aqui é uma consequência imediata desse teorema sendo válido apenas na presença de algumas condições de regularidade. Casos mais complexos em que o teorema 10 não se aplique diretamente serão estudados em trabalhos posteriores.

Sejam então $X \subseteq \mathbb{R}^p$, $Y \subseteq \mathbb{R}^q$ e as g_i, $i \in \overline{1,K}$ como dadas na seção I.3, $\overline{y} \in Y$ e $\overline{x} \in M_0(\overline{y})$. Diz-se que $S \subseteq m_0(\overline{x},\overline{y})$ é latente em $(\overline{x},\overline{y})$ se:

A) $\forall \varepsilon > 0 \quad G_{S,\varepsilon}(\overline{y}) = \max\limits_{x \in B_\varepsilon(\overline{x}) \cap X} \{\min\limits_{i \in S} g_i(x,\overline{y})\}$

$> G(\overline{y})$ (1)

B) Existem sequências (y_n), (x_n) e (ε_n) tais que:

1) $y_n \in Y$, $x_n \in M_0(y_n)$ e $\varepsilon_n > 0$.

2) $y_n \to \overline{y}$, $x_n \to \overline{x}$ e $\varepsilon_n \to 0$.

3) $\max\limits_{x \in B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap X} \{\min\limits_{i \in S} g_i(x,y_n)\} = G(y_n)$ (2)

Exemplo 1:

Considere $X = [0,1]$, $g_i: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2,3|$ $g_1(x,y) = x^2$, $g_2(x,y) = (x-y)^2$, $g_3(x,y) = 5y - x$. É simples ver que $S = \{1,2\}$ é latente em $(0,0)$. As sequências (y_n), (x_n) e (ε_n) indicadas no item B podem ser feitas $(1/n)$, $(1/2n)$ e $(1/2n)$ respectivamente.

Se $S \subseteq m_0(\bar{x},\bar{y})$ é tal que 1 não se verifica então se diz que S e $m_0(\bar{x},\bar{y})$ são equivalentes em $(\bar{x},\bar{y})$.

Suponha a partir de agora que as $g_i(\cdot,\bar{y})$, $i \in \overline{1,K}$ possuem derivadas unidirecionais em qualquer direção . Nessas condições será necessário para que $S \subseteq m_0(\bar{x},\bar{y})$ seja equivalente a $m_0(\bar{x},\bar{y})$ em $(\bar{x},\bar{y})$, $\bar{x} \in M_0(\bar{y})$ que $\forall v \in \overline{CR(x,X)}$ exista

$$i \in S | g_i(\cdot,\bar{y})'(\bar{x},v) \leq 0 \tag{3}$$

Para que S seja dito regular em $(\bar{x},\bar{y})$ se exigirá um pouco mais. Se obrigará que a condição 3 seja satisfeita mesmo com < 0 (4).

Considere daqui por diante que

$$X = \mathbb{R}^p - \bigcup_{\ell-1}^{L} C_\ell$$

onde os C_ℓ são convexos abertos $\forall j \in \overline{K+1,K+L}$ defina:

$$\begin{aligned} g_j:\ & \mathbb{R}^n \times Y \to \mathbb{R} \\ & (x\ ,\ y) \to d(x,C_{j-K}) \text{ se } x \notin C_{j-K} \\ & (x\ ,\ y) \to -d(x,\mathbb{R}^n - C_{j-K}) \text{ se } x \in C_{j-K} \end{aligned} \tag{5}$$

Pode-se verificar que essas g_j são funções convexas (6) e que nas condições que se está assumindo dizer que S é regular em $(\bar{x},\bar{y})$ equivale a afirmar que fazendo

$$r_0(x) \quad \{\ell \in \overline{1,L} \mid x \in \overline{C_\ell}\} \qquad (7)$$

se verifica que

$$\forall v \in \mathbb{R}^p \quad \exists\; j \in S \cup (r_0(x) + \{K\})$$

tal que

$$g_j(\cdot,\bar{y})'(\bar{x},v) < 0 \qquad (8)$$

É simples constatar também que se $T \subseteq m_0(x, y) \cup (r_0(x) + \{K\})$ é tal que

$$\forall v \in \mathbb{R}^p \;\exists\; j \in T \mid g_j(\cdot,\bar{y})'(\bar{x},v) < 0 \qquad (9)$$

então $\#(T) \geq p + 1$. Para poder usar o teorema 10, entretanto, se precisará assumir que todo $T \subseteq m_0(x,y) \cup (r_0(x) + \{K\})$ satisfazendo 9 e minimal com respeito a essa propriedade (isto é, $T \mid T$ atende 9 mas qualquer $T' \subsetneq T$ não o faz) tenha mesmo cardinal $p + 1$.

Se além das condições que se está considerando se impuser que as g_i sejam convexas então a proposição 7 dada a seguir estabelece uma condição suficiente para impedir que exista $S \subseteq m_0(\bar{x},\bar{y})$ latente em $(\bar{x},\bar{y})$.

<u>Proposição 7</u>:

Sejam

a) X complementar da união de convexos abertos C_ℓ, $\ell \in \overline{1,L}$, X compacto $\subseteq X_0$ aberto.

b) $\bar{y} \in Y_0$ aberto.

c) $g_i: X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ convexa $\forall i \in \overline{1,K}$.

d) g_j, $j \in \overline{K+1,K+L}$ como definidas em 5.

e) $\bar{x} \in M_0(\bar{y}) |$ se S não é regular em $(\bar{x},\bar{y})$ então

$$0 \notin \overline{co}(\{\partial g_j(\cdot,\bar{y})(\bar{x}),\ j \in S \cup r_0(\bar{x})\}) \quad (10).$$

$r_0(\bar{x})$ como definido em 7.

Nessas condições não existem subconjuntos de $m_0(\bar{x},\bar{y})$ que sejam latentes em $(\bar{x},\bar{y})$.

Prova:

Suponha que exista um conjunto $S \subsetneq m_0(\bar{x},\bar{y})$ e latente em $(\bar{x},\bar{y})$. Sejam então (y_n) e (x_n) como indicadas no item B da definição de conjunto latente. Passando se necessário a uma subsequência se pode obter que

$$r_0(x_n) = \{\ell \in \overline{1,L} | x_n \in C_\ell\}$$

é constante e igual a R. Como $x_n \in M_0(y_n)$ e vale a condição a, se pode dizer que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \ \exists\ j \in S \cup (R + \{K\}) | g_j(\cdot,y_n)'(x_n,v) \leq 0 \quad (11)$$

Como as g_j, $j \in \overline{1,K+L}$ são convexas se $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall j \in \overline{1,K+L}$ for escolhido um vetor $w_{jn} \in \partial g_j(\cdot,y_n)(x_n)$ 11 acarreta que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall v \in \mathbb{R}^n\ \exists\ j \in S \cup (R + \{K\})|$$

$$w_{jn} \cdot v \leq 0 \quad (12)$$

Considerando-se novamente se necessário apenas uma subsequência de (y_n,x_n) se pode fazer devido a con vexidade das g_j

$$w_{jn} \to w_j \in \partial g(\cdot,\bar{y})(\bar{x}) \ \forall j \in \overline{1,K+L}.$$

Em vista de 12 se tem então que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \ \exists \ j \in S \cup (R + \{K\}) | \bar{w}_j \, . \, v \leq 0$$

ou

$$\nexists \ v \in \mathbb{R}^n | \bar{w}_j . v > 0 \ \forall j \in S \cup R + \{K\}$$

que pelo lema de Gordan é equivalente a

$$0 \in \overline{co}(w_j, \ j \in S \cup (R + \{K\})) \qquad (13)$$

Como r_0 é semi-contínuo superiormente se tem que

$$0 \in \overline{co}(\partial g_j(\cdot,\bar{y})(\bar{x}), \ j \in S \cup r_0(\bar{x})).$$

Por 10 se tem então que S é regular não podendo portanto a tender a condição A da definição de conjunto latente. Estabelece-se assim uma contradição.

<u>Exemplo 2</u>:

Se

$$X = \{(x_1,x_2) | \max\{|x_i|, \ i = 1,2\} \leq 1\}$$

$$g_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \to \max_{v \in B_1(x_i)} (v.x) + iy, \ i \in \overline{1,3}$$

onde

$$x_1 = (\cot g(\Pi/12),1), \ x_2 = (-1,-\cot g(\Pi/12)),$$

$$x_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).(\text{cossec}(\Pi/12))$$

as condições da proposição 7 são satisfeitas em $(\overline{0},0)$.

Uma condição um pouco mais abrangente que a indicada no item e da proposição 7 permitirá obter afinal a aplicação do teorema 10 mencionada no início desta seção. Essa aplicação será apresentada na proposição 8. Além da condição citada se exigirá que se T for minimal satisfazendo 9 em $(\overline{x},\overline{y})$, $\overline{x} \in M_0(\overline{y})$ então o $\#(T)$ deve ser p + 1.

Proposição 8:

Considere válidos os itens a, c e d da proposição 7 e seja $\overline{y} \in Y_0 | \forall x \in M_0(\overline{y})$ se tenha que:

α) Se $T \subseteq m_0(\overline{x},\overline{y}) \cup (r_0(\overline{x}) + \{K\}$ em $(\overline{x},\overline{y})$ não satisfaz 9, $0 \not\in \overline{co}(\{\partial g_j(\cdot,y)(\overline{x}), i \in T\})$

β) Se $T \subseteq m_0(\overline{x},\overline{y}) \cup r_0(\overline{x}) + \{K\})$ atende 9 em $(\overline{x},\overline{y})$ e é minimal com relação a essa propriedade então $\#(T) = p + 1$. Nessas condições $M_0(\overline{y})$ é finito. Fazendo então $M_0(y) = \{\overline{x}_1,\ldots,x_M)$, se tem que $\forall m \in \overline{1,M}$ $\forall T \in m_0(\overline{x}_M,\overline{y}) \cup (r_0(\overline{x}_m) + \{K\})$ satisfazendo 9 e minimal com relação a essa propriedade existe uma função $F_{m,T}: V_{m,T} \to X_0$, onde $V_{m,T}$ é uma vizinhança de $\overline{y}$, tal que:

$$F_{m,T}(\overline{y}) = \overline{x}_m \quad \text{e} \tag{13}$$

$$\forall y \in V_{m,T} \quad g_i(F_{m,T}(y),y) = g_j(F_{m,T}(y),y)$$

para qualquer i e j em

$T \cap m_o(\overline{x},\overline{y})$ e $g_j(F_{m,T}(y),y) = 0 \ \forall j \ \varepsilon (T -$

$- \{K\}) \cap r_o(\overline{x})$. (14)

Com relação a essas $F_{m,T}$ se tem ainda que existe uma vizinhança V' de

$$\overline{y} | \forall y \ \varepsilon \ V', M_o(y) \subseteq \bigcup_{\substack{T \varepsilon \mathcal{T}_m \\ m \varepsilon \overline{1,m}}} F_{m,T}(y) \quad (15)$$

onde

$\mathcal{T}_m = \{T \subseteq m_o(\overline{x}_m,\overline{y}) \cup r_o(\overline{x}_m)$

satisfazendo 9 em $(\overline{x}_m,\overline{y})$ e minimal com essa propriedade$\}$ (16)

Prova:

α implica que $m_o(\overline{x},\overline{y})$ U $(r_o(\overline{x}) + \{K\})$ atende de 9 em $(\overline{x},\overline{y})$ $\forall x \ \varepsilon \ M_o(\overline{y})$. Assim todo x de $M_o(y)$ é ponto isolado desse conjunto e dessa forma $M_o(y)$ é finito. Além disso a existência das funções $F_{m,T}$ satisfazendo 13 e 14 está assegurada por β e pelo teorema 10.

Resta mostrar que 15 ocorre. Para verificar isso pode-se começar observando que se 15 não é verdadeira então existem sequências (y_n) e (x_n) tais que:

a) $y_n \ \varepsilon \ Y$, $x_n \ \varepsilon \ X$ $\forall n \ \varepsilon \ \mathbb{N}$

b) $x_n \ \varepsilon \ M_o(y_n)$, $m_o(x_n,y_n) = \overline{S}$ (17),

$r_o(x_n) = \overline{R}$ (18) $\forall n \ \varepsilon \ \mathbb{N}$.

c) $y_n \to \overline{y}$ e $x_n \to \overline{x}_{\overline{m}} \ \varepsilon \ M_o(\overline{y})$

$$d)\ x_n \notin \bigcup_{T \varepsilon T_{\overline{m}}} F_{\overline{m},T}\,(y_n) \qquad (19)$$

Desenvolvendo então raciocínio análogo ao utilizado na prova da proposição 7 se tem, usando α, que $\overline{S}\ U(\overline{R} + \{K\})$ satisfaz 9 em $(\overline{x}_{\overline{m}},\overline{y})$. Seja então $\overline{T}$ um elemento minimal com relação a essa propriedade e contido em $\overline{S}\ U(\overline{R}\ \ U\ \{K\})$. De β $\#(\overline{T}) = p + 1$ (20). Além disso

$$g_i(x_n,y_n) = g_j(x_n,y_n) = G(y_n)\ \forall i,j\ \varepsilon\ \overline{T} \cap \overline{\overline{1,K}}$$

$$\subseteq\ \overline{S} \qquad (21)$$

e

$$g_j(x_n,y_n) = 0\ \forall j\ \varepsilon\ \overline{T}\ \cap\ \overline{\overline{K+1,K+L}} \subseteq (\overline{R}+\{K\})$$

$$(22)$$

9, 20, 21 e 22 garantem pelo teorema 10 que

$$\exists\ \ \overline{n}\ \varepsilon\ \mathbb{N} |\ \forall n > \overline{n}\quad x_n = F_{\overline{m},T}(y_n)$$

contrariando 19. Portanto 15 é válida.

APÊNDICE

Quatro teoremas referenciados no decorrer do texto e que serviram de base para a demonstração dos cinco últimos teoremas são enunciados nesta seção. Junto a cada um deles se especifica onde êle pode ser encontrado com demonstração.

Teorema A:

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função analítica em Ω vizinhança de $\overline{0}$ e $f(\overline{0})=0$. Se Ω for suficientemente pequeno então a curva $f(x,y) = 0$ tem em Ω apenas um número finito de ramos reais que são de um dos dois tipos:

a) $x \equiv 0$

b) $y = a_K\, x^{K/n} + a_{K+1}\, x^{(K+1)/n} + \ldots$

onde K,n são inteiros positivos e os coeficientes a_j são todos reais. Mais ainda para Ω pequeno o bastante esses ramos se interceptam em Ω apenas na origem (Lefschetz,S.;| |; 2ª edição ; capítulo X; páginas: 209 e 210).

O teorema A é uma aplicação do teorema de Puiseux que pode ser encontrado em Eichler | |, capítulo III , páginas: 118 a 120.

Teorema B:

Um funcional convexo e limitado μ tem um ponto de mínimo em um conjunto X também convexo em x_0 se e somente se:

$$- \partial\mu(x_0) \cap CR(x_0, X)^* \neq \phi.$$

(Pshenichnyi, | |, capítulo II, páginas: 56 a 59).

Observação: Todo o funcional convexo de $\mathbb{R}^n$ é limitado.

Teorema C:

Se f é uma função convexa própria definida em U $\mathbb{R}^n$ então f'(x,y) é uma função semi-contínua superiormente em $\dot{U} \times \mathbb{R}^n$. Mais precisamente dados quaisquer $x \in \dot{U}$ e $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que:

$$\partial f(z) \subset \partial f(x) + B_\varepsilon(0) \ \forall z \in (x + B_\delta(0)).$$

(Rockafellar, R.T., | |, parte V, seção 24, página 234). Esse resultado é dado na referência como um corolário do teorema 24.5 encontrado na página anterior.

Observação: Uma função $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ é dita própria se $f(U) \subseteq \mathbb{R}$. As funções tratadas neste trabalho são todas próprias.

Teorema D: (Da Invariância do Domínio)

Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\phi: U \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e injetiva. Então ϕ é uma função aberta (| |, capítulo III, páginas: 77-78).

Este teorema é um corolário do teorema de Jordan que pode ser encontrado nessa mesma fonte nas páginas 75 a 77).

BIBLIOGRAFIA

|1| DEMYANOV, V.F.: "On the Maximization of a Certain Nondifferentiable Function", Journal of Optimization and Applications: vol. 7.

|2| PSHENICHNYI, : "Necessary Conditions for an Extremum", Academic Press, 1971.

|3| PROPOI, A.I. e VACHNADZE, R.G.: "On the Solution of Some Max-Min Problems", Journal of Optimization Theory and Applications: vol. 10, nº 5, 1972.

|4| MATSUMOTO, T.: "On Some Properties of Min-Max Functions", SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 14, nº 1, 1976.

|5| DEMYANOV, V.F. e RUBINOV, A.M.: "Approximate Methods in Optimization Problems", American Elsevier, 1970.

|6| CANNON, M.D., CULLUN, C.D. e POLAK, E.: "Theory of Optimal Control and Mathematical Programming", Mc Graw-Hill, 1970.

|7| VARAYA, P.P.: "Notes on Optimization", Van Nostrand Reinhold, 1972.

|8| LIMA, E.L.: "Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$", Edgar Blucher, 1970.

|9| MANGASARIAN, O.L.; "Nonlinear Programming", Mc Graw-Hill, 1969.

|10| ROCKAFELLAR, R.J.; "Convex Analysis", Princeton University Press, 1970.

|11| LEFSCHETZ, S.; "Differential Equations: Geometric Theory", John Wiley & Sons.

|12| EICHLER, M.: "Algebraic Numbers and Functions", Academic Press, 1966.