

CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL DE SISTEMAS
DE CONTROLE INVARIANTES

Afonso Celso Del Nero Gomes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Aprovada por:


Shankar Prashad Bhattacharyya


Celso Pascoli Bottura


Clovis Caesar Gonzaga


Paulo Augusto Veloso


Plinio Benedito L. Castrucci

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
AGOSTO DE 1980

RESUMO

Desenvolve-se nesta tese uma nova abordagem para o problema de rejeição de perturbações, o PRP, tradicionalmente apresentado e resolvido em termos geométricos. Este novo enfoque permite uma explicação estrutural dos mecanismos envolvidos e duas de suas mais importantes consequências são analisadas.

Demonstra-se, em primeiro lugar, a possibilidade de se passar a encarar o PRP de uma maneira totalmente frequencial, através das matrizes de transferencia do sistema. Isto mostra que a descrição interna via equações de estado não é a única ferramenta capaz de formular e resolver o PRP, como se acreditava.

A mencionada visão estrutural inédita também sugere um novo método para resolução do PRP. Todas as possíveis variações dos algoritmos que constituem este novo método caracterizam-se por trabalharem com dimensões reduzidas. Outra óbvia vantagem dos procedimentos propostos é a possibilidade de se obter informações precoces sobre o problema. Muitas vezes uma simples inspeção das matrizes do sistema pode decidir sobre a existência ou não de soluções.

Além do PRP este trabalho estuda outro problema que envolve a teoria da invariância: o de encontrar todas as coberturas de um dado subespaço. E trata, finalmente, de um aspecto relacionado com a própria essência da teoria da invariância: a caracterização de todos os subespaços (A, B) invariantes.

ABSTRACT

A new treatment of the disturbance decoupling problem, DDP, which is traditionally formulated and solved by geometric means, is given in this thesis. This new presentation allows an structural explanation of disturbance rejection and two of its most important consequences are studied.

In the first place the possibility of viewing the DDP entirely in the frequency domain context, through the system's transfer matrices, is established. This fact shows that the internal description of the system using the state equations is not the unique tool capable of formulating and solving the DDP as is generally believed.

The new structural approach to DDP also suggests a new procedure for solving it. A common aspect of the algorithms that constitute this new method is the fact that they deal with dimensions smaller than n . Another obvious advantage of the proposed procedures lies in the possibility of obtaining a rapid verification of solvability. Often a simple inspection of the matrices can decide the existence of solutions.

Besides DDP this thesis studies another problem related to invariance: that of finding all covers of a given subspace. And, finally, it deals with an aspect closely related to the essence of invariance: the complete characterization of all (A, B) invariant subspaces.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....</u>	1
1.1 - Pequeno Histórico.....	1
1.2 - Panorama Atual.....	4
1.3 - Estrutura da Tese.....	6
<u>CAPITULO II - O PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES....</u>	8
II.1 - Preliminares.....	8
11.2 - Visão Estrutural do PRP.....	16
11.3 - Novo Método para Resolução do PRP.....	22
11.4 - Aspectos Freqüenciais do PRP.....	29
<u>CAPÍTULO III - NOVOS MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DO PRP.....</u>	44
III.1 - Generalidades.....	44
111.2 - Algoritmo Matricial.....	53
111.3 - Algoritmo Geométrico.....	59
111.4 - Algoritmo na Forma Fechada.....	83
111.5 - Informações Adicionais.....	92
111.6 - Conclusões.....	97

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO IV - O PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES E</u> <u>A TEORIA DA INVARIÂNCIA.....</u>	100
IV.1 - Objetivos.....	100
IV.2 - Método de Obtenção dos Geradores.....	107
IV.3 - Modificação do Filtro Inicial.....	117
IV.4 - Conclusões.....	124
<u>CAPÍTULO V - ASPECTOS DA TEORIA DA INVARIÂNCIA.....</u>	126
V.1 - Objetivos.....	126
V.2 - Determinação da Família \underline{I}_1	127
V.3 - Determinação dos Divisores Irredutíveis.....	139
V.4 - Conclusões.....	146
<u>CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES.....</u>	151
<u>REFERENCIAS.....</u>	155

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - PEQUENO HISTÓRICO

O convencionalmente chamado Controle Moderno, onde estudamos os sistemas dinâmicos através das várias possíveis técnicas do espaço de estados, não pode ter suas bases iniciais creditadas com exclusivismo aos conceitos de controlabilidade e observabilidade introduzidos por Kalman. Ele também não é tão novo como seu nome pretensiosamente sugere: já era empregado, não em seu aspecto atual, é lógico, pelos pesquisadores que tentaram, a partir do século XVIII, entender de uma maneira mais racional e matemática o funcionamento dos primeiros mecanismos usados para controle automático. Os problemas eram sempre de natureza mecânica pois desejava-se basicamente manter dentro de limites a velocidade de máquinas e motores. A essência dos métodos era estabelecer, empregando leis da mecânica, as equações diferenciais que regiam o comportamento dos sistemas em estudo. Já se sabia que essas equações podiam ser consideravelmente simplificadas ao se supor que as variáveis não se afastavam muito de determinados valores de operação. Descobriu-se também que a solução dos problemas de regular velocidades estava intimamente relacionada com as raízes de determinados polinômios associados às equações diferenciais.

Tentando resumir a situação podemos dizer que: plantas mecânicas tinham suas velocidades reguladas por dispositivos

automáticos que empregavam realimentação; os sistemas eram matematicamente estudados através de equações diferenciais que descreviam a evolução no tempo das grandezas mecânicas envolvidas; os conceitos de linearização já eram conhecidos e utilizados. Este quadro retrata, em brevíssimas palavras, o que pode ser considerado como primeira fase histórica do Controle. Todo o acervo de conhecimentos adquiridos nessa época é a base do que se costuma chamar estudo dos sistemas "no domínio do tempo" ou "técnicas temporais".

Uma verdadeira revolução nas técnicas de abordagem de problemas de controle ocorreria em fins da segunda década do século XX. Um dos problemas práticos intensamente pesquisados nessa época referia-se à transmissão telefônica a longa distância. Esta transmissão era feita por meio de cabos e isto atenuava sobremaneira os sinais enviados. Os amplificadores que se colocavam ao longo da linha para compensar estas perdas apresentavam sérios inconvenientes: comportavam-se de uma maneira não linear na alta faixa de ganhos em que deveriam trabalhar. Este problema só foi resolvido com a invenção do amplificador com realimentação negativa. Este novo dispositivo apresentava características lineares para uma faixa de ganhos bem maior que as anteriores. Entretanto sua efetiva aplicação aos problemas práticos só aconteceu quando Nyquist equacionou e resolveu seus problemas de estabilidade. A repercussão do critério de estabilidade assim nascido foi enorme e imediata. A engenharia de comunicações, favoravelmente abalada, começou a pesquisar mais e mais nesta área e não demoraram a aparecer novos resultados. Pouco custou para que técnicos de outras áreas, notadamente a mecânica, perce-

bessem a aplicabilidade destas novas idéias aos seus próprios problemas. A essência, tanto de controle como do amplificador recém inventado, era a realimentação negativa, e a descoberta de novas técnicas deveria trazer vantagens, como realmente trouxe.

Baseada em fundamentos matemáticos devidos a Fourier e Laplace começa esta segunda fase histórica do Controle: o estudo dos fenômenos no domínio das frequências ou simplesmente técnicas frequenciais. Os sistemas são descritos por meio de funções de transferência e a estabilidade é analisada através de varios critérios, todos eles gráficos e sem qualquer necessidade de se calcular raízes de polinômios. Devemos notar que a grande motivação para o surgimento destas técnicas de resposta em frequência foi um problema essencialmente prático e de natureza não mecânica. A apropriação destes métodos por outros ramos da engenharia permite antever a futura caracterização de Controle como uma materia essencialmente multidisciplinar. Permite também entender porque se emprega uma terminologia frequencial a problemas onde aparentemente ela não se aplicaria, como por exemplo os mecânicos. O predomínio dos métodos frequenciais foi absoluto até após a 2.^a guerra mundial.

Nã década de 50 os problemas de controle tornavam-se mais complexos. As plantas apresentavam várias entradas e várias saídas e desejava-se não apenas controla-las, mas fazê-lo de uma maneira ótima. As primeiras generalizações das técnicas frequenciais não se revelaram satisfatórias para estes novos problemas que podem ser agrupados sob os nomes de Controle Multivariável, Controle Ótimo e Controle Estocástico. Tentou-se então os velhos métodos temporais e os resultados foram melhores. A

generalização de técnicas antigas revelou-se capaz de cuidar da crescente complexidade das novas plantas. No começo da década de 1960 Kalman, através dos conceitos de controlabilidade e observabilidade e principalmente através de seu filtro, deu o impulso final de que necessitava o Controle "Moderno" para se estabelecer de uma maneira absoluta como a única ferramenta suficientemente poderosa para atacar e resolver os novos problemas.

Datas, nomes e maiores detalhes sobre esta fascinante história podem ser encontrados em MacFarlane [14] ou [15].

1.2 - PANORAMA ATUAL

Com o advento das técnicas do espaço de estados características do Controle "Moderno" e o aumento no poderio das armas disponíveis para atacar o caso multivariável houve uma tendência de os pesquisadores nesta área se tornarem um tanto quanto teóricos, cada vez mais preocupados com os aspectos matemáticos da formulação e resolução dos problemas. Ainda que tenues, houve uma "matematização" da área e não é raro atualmente encontrarmos nas revistas especializadas artigos escritos por elementos ligados aos departamentos de matemática de suas universidades.

Um dos pontos culminantes dessa tendência teorizante foi sem dúvida alguma alcançado por Wonham com seu enfoque geométrico dos fenômenos de Controle, Os problemas são descritos, formulados e solucionados através de um tratamento matemático belo e rigoroso, baseado profundamente em Álgebra Linear. Até o lançamento de seu livro [25] em 1974 as mentes de Controle es-

tavam acostumadas a um ferramental matemático não tão sofisticado, embora também eficiente: álgebra matricial, principalmente, para os adeptos das técnicas de estado, e variáveis complexas para os ainda existentes seguidores do controle "clássico". Compreende-se o surgimento de uma impedância inicial bastante grande com relação às novíssimas técnicas. Pearson [19] comenta que embora a familiarização com os conceitos geométricos seja um tanto longa e difícil, qualquer esforço nesse sentido será recompensado com a capacidade de visualizar os aspectos essenciais dos problemas.

Devemos notar que muitos pesquisadores não se renderam totalmente ao renovado fascínio das técnicas temporais. Rosenbrock, Wolowich, e outros, continuaram pesquisando o método de resposta em frequências e também conseguiram a sua generalização para as situações mais complexas apresentadas pelos problemas atuais. As ferramentas utilizadas são matrizes de transferência, matrizes polinomiais, extensões do critério de Nyquist, do método do lugar das raízes etc.

Até bem pouco tempo atrás podíamos dizer que o estudo de controle localizava-se em compartimentos estanques, não por acaso os mesmos que desde os primórdios se sucediam na preferência da comunidade: as técnicas temporais e as frequenciais. Procura-se recentemente acabar com essa polarização, tentando estabelecer conexões entre os dois métodos. Reunificação é uma palavra que sintetiza bem o comportamento atual dos pesquisadores da teoria de controle linear. É grande o número de artigos relacionando descobertas de Konham a conceitos de Rosenbrock e vice-versa. Várias entidades muito empregadas no enfoque geomé-

trico como por exemplo os subespacos (A, B) invariantes, tem tido suas existências profundamente analisadas por pesquisadores que tentam interpretá-las em termos frequenciais. A idéia básica é traduzir os utilísimos conceitos de Algebra Linear introduzidos pelo enfoque geométrico em uma linguagem a que, talvez, os homens de controle estejam mais acostumados: as matrizes de transferência.

1.3 - ESTRUTURA DA TESE

No enfoque geométrico para o controle de sistemas lineares multivariáveis a chamada teoria da invariância tem desempenhado um papel preponderante. Esta teoria estuda os chamados subespacos (A, B) invariantes. Até a presente data esse estudo tem se restringido a V^* , o elemento maximal da classe dos subespacos (A, B) invariantes e a alguns outros elementos particulares dessa classe, como por exemplo os subespaços de controlabilidade. Dentre o grande número de problemas já resolvidos por invariância podemos citar os de rejeição de perturbações, desacoplamento, zerar a saída, do servomecanismo e outros, que podem ser encontrados em [25].

Esta tese tenta estudar a teoria da invariância de uma maneira mais completa, sem a restrição aos elementos maximais. Tenta também entender os mecanismos da invariância de um modo estrutural, se possível em termos de matrizes de transferência.

No capítulo II, após emitirmos alguns conceitos b

sicos, apresentamos uma explicação estrutural inédita para um problema tradicionalmente formulado e resolvido pela teoria da invariância: o de rejeição de perturbações. De uma maneira também inédita este problema é formulado em termos frequenciais.

No capítulo III apresentamos um novo método de resolução do problema de rejeição de perturbações sem a necessidade de se calcular o elemento maximal V^* .

O capítulo IV é inteiramente devotado à procura de cobertura não maximais para um dado subespaço E . Mostramos também como vários problemas, inclusive o tratado nos capítulos anteriores, podem ser considerados como casos particulares deste problema de coberturas.

Finalmente o capítulo V procura estudar da maneira mais geral possível a família de todos os subespaços (A, B) invariantes. Sucesso é alcançado apenas para uma determinada classe deles. É descoberta uma interessante conexão com o conceito de controlabilidade. O ferramental usado, matrizes polinomiais, permite que se especule sobre a possibilidade de se explicar um conceito puramente geométrico em termos frequenciais.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES

II.1 - PRELIMINARES

Seja o sistema linear invariante no tempo

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \\ y(t) = C x(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.1.a) \\ (2.1.b) \end{array}$$

$$x(0) = x_0 ; t \geq 0$$

onde $A: X \rightarrow X$; $B: U \rightarrow X$; $C: X \rightarrow Y$ representam transformações lineares, bem como as matrizes a elas associadas. X , Y , U são os espaços vetoriais de estados, saídas e entradas, com dimensões n (estados), r (saídas) e m (entradas). Por hipótese $\text{rank } C = r$.

$\text{Ker } C \subset X$ será o espaço nulo de C ; $B \subset X$ será a imagem de B e $\langle A|B \rangle \subset X$ o subespaço controlável do sistema:

$$\langle A|B \rangle = B + A B + \dots + A^{n-1} B$$

onde empregamos a soma usual de subespaços. O símbolo $M W$ representa a imagem do subespaço W pela transformação linear M .

Dizemos que $V \subset X$ é A invariante quando $A V \subset V$. Para um sistema autônomo ($u(t) = 0 \forall t$ em 2.1) se $x(0) \in V$ e V

é A invariante então $x(t) \in V \forall t$ como seria fácil mostrar. É muito importante ter em mente esta interpretação física, em termos de sistemas dinâmicos, das propriedades dos subespaços invariantes.

Uma realimentação de estados aplicada ao sistema 2.1 será representada por $u(t) = F x(t)$ onde a matriz F ($m \times n$) representa uma transformação linear $F: X \rightarrow U$. O sistema de malha fechada torna-se

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + B F) x(t) & (2.2.a) \\ y(t) = C x(t) & (2.2.b) \end{cases}$$

DEFINIÇÃO 2.1

" \mathcal{H} é o conjunto de todos os subespaços de X contidos no espaço nulo de C e que podem ser tornados invariantes por meio de realimentação de estados:

$$\underline{\mathcal{H}} = \{V \subset X \mid V \subset \text{Ker } C \text{ e } (A + B F) V \subset V \text{ para alguma } F\}$$

LEMA 2.1

"Existe uma realimentação de estados que torna invariante um dado subespaço $V \subset X$ se e somente se $A V \subset B + V$:

$$\exists F(m \times n) \ni (A + B F) V \subset V \leftrightarrow A V \subset B + V''$$

Um subespaço com a propriedade descrita no lema acima será chamado (A, B) invariante. A caracterização de \underline{H} fica

$$\underline{H} = \{V \subset X \mid V \subset \text{Ker } C \text{ e } A V \subset B + V\}$$

Este conjunto dos subespaços (A, B) invariantes contidos no espaço nulo de C contém o subespaço nulo e é fechado sob a operação de soma de subespaços. Desta maneira \underline{H} contém um único elemento máximo V^* .

As considerações e resultados acima podem ser encontrados em Wonham [24] ou [25] e são ferramentas básicas do encaminhamento geométrico para controle linear multivariável.

Na interpretação seguinte dos fatos acima descritos V^* pode ser substituído por um elemento genérico da classe \underline{H} . V^* é o maior subespaço que pode ser tornado não observável e invariante por meio de realimentação de estados. Em linguagem corriqueira, qualquer movimento que se inicie ou ocorra dentro de V^* pode, por meio de uma realimentação de estados adequada, ser mantido lá, porque $(A + B F) V^* \subset V^*$ e qualquer movimento ocorrendo em V^* não será detectado pela saída y , porque $V^* \subset \text{Ker } C$,

A importancia de V^* justifica a existencia de algoritmo~para sua obtenção. Antes de apresentar um deles consideremos que, dado um subespaço $M \subset X$ define-se

$$A^{-1} M = \{x \in X \mid A x \in M\}$$

e prova-se que $A^{-1}M$ é também um subespaço vetorial de X .

ALGORITMO 2.1 [25]

$$V_0 = \text{Ker } C$$

$$V_1 = V_0 \cap A^{-1}(B + V_0)$$

\vdots

$$V_{i+1} = V_i \cap A^{-1}(B + V_i)$$

$$V_\mu = V^* \quad \text{onde } \mu = \dim(\text{Ker } C) = n - r$$

Podemos encontrar em [25] ou [1] outras maneiras de calcular V^* . Devemos notar que todos esses procedimentos são razoavelmente trabalhosos. Para o caso especial de sistemas com uma Única saída ($r = 1$) as dificuldades diminuem [18].

O problema de Rejeição de Perturbações, PRP é uma interessante aplicação de V^* e ilustra bastante bem o uso da teoria da invariância na formulação e solução de problemas de controle.

Seja um sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + E z(t) \\ y(t) = C x(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.3.a) \\ (2.3.b) \end{array}$$

$$x(0) = x_0 ; t \geq 0$$

onde a perturbação $z(t)$ pertence ao espaço vetorial de perturbações Z , com $\dim Z = q$; $E: Z \rightarrow X$ e $\text{rank } E = q$.

Desejamos controlar o sistema de tal maneira que as perturbações, quaisquer que sejam elas, não influenciem o comportamento da saída.

Não é difícil [25] concluirmos que, com $u(t) = F x(t)$ em (2.3.a) a saída y não será afetada por qualquer z possível se e somente se $\langle A + B F | E \rangle \subset \text{Ker } C$, onde $E \subset X$ é o subespaço gerado pelas colunas de E e $\langle A + B F | E \rangle$ é o subespaço controlável associado às matrizes $A + BF$ e E (parte do espaço de estados diretamente contaminada pelas perturbações). Esta terminologia geométrica significa que, no sistema de malha fechada, a matriz de transferencia $G_p(s)$ relacionando z e y deve ser identicamente nula. O problema é: sob que condições existe uma realimentação de estados F tal que o efeito das perturbações se localize no espaço nulo de C ?

Wonham e Morse [24] deram a primeira solução para este problema.

TEOREMA 2.1

"Para um sistema dado por (2.3) existe $F(m \times n)$ tal que $\langle A + BF | E \rangle \subset \text{Ker } C$ se e somente se $E \subset V^*$ ".

Este resultado nos diz que é possível rejeitar as perturbações se e somente se pudermos encontrar uma realimentação de estados que mude a estrutura do sistema de tal maneira que as perturbações nele penetre através de V^* . Isto as aprisionaria em V^* e, como pode ser visto na interpretação intuitiva deste, dada acima, tornaria seu efeito não observável pela saída como se deseja.

Deve ser notado que mesmo sendo as perturbações completamente desconhecidas devemos saber em que partes do sistema elas atuam, isto é, a matriz E .

Uma solução para o PRP seria uma matriz F tal que $(A + BF)V^* \subset V^*$. Todo esse raciocínio permanece válido ao usarmos um elemento V genérico de \mathcal{H} . O Capítulo IV tratara disso.

EXEMPLO 2.1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

Usemos o algoritmo 2.1 para calcular V^*

$$V_0 = \text{Ker } C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_1 = V_0 \cap A^{-1}(B + V_0) = V_0 \cap A^{-1}V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_2 = V_1 \cap A^{-1}(B + V_1) = V_1 \cap A^{-1}V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_3 = V_2 \cap A^{-1}(B + V_2) = V_2 \cap A^{-1}V_2 = \{0\} = V^*$$

Obviamente o PRP não será solúvel. Vejamos o que aconteceria se a matriz B passasse a ser $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$V_0 = \text{Ker } C$$

$$V_1 = V_0 \cap A^{-1}(B + V_0) = V_0 \cap A^{-1}X$$

$$= V_0 \cap X = V_0$$

$$\text{Como } V_1 = V_0 \text{ temos } V^* = V_1 = V_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

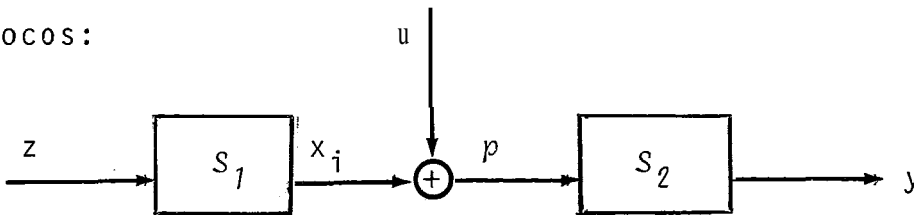
Como $E \subset V^*$ o PRP tem solução. Para encontrarmos uma F faremos $F = [f_1, f_2, f_3, f_4]$ e imporíamos a condição $(A + BF)V^* \subset V^*$ encontrando, após algum trabalho, $f_2 = -1$; $f_3 = f_4 = 0$. Logo $F = [f_1 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$ onde f_1 é arbitrário é uma solução.

Os resultados acima podem ser considerados clássicos em termos do enfoque geométrico e o PRP tem sua importância assegurada na medida em que aplicações da teoria da invariância a outros problemas, como por exemplo o de desacoplamento [25], sempre se farão seguindo as mesmas diretrizes expostas acima. Assim quaisquer esclarecimentos e explicações sobre a natureza do relativamente simples e primitivo PRP serão na realidade tentativas de uma visão mais profunda da essência mesmo da teoria da invariância.

É esse objetivo que perseguiremos: explicar em termos acessíveis aos homens de controle os meandros geométricos da invariância.

II.2 - VISÃO ESTRUTURAL DO PRP

Consideremos, apenas para fixar as idéias, um sistema perturbado extremamente simples com o seguinte diagrama de blocos:



Uma maneira intuitiva de rejeitarmos a perturbação z , ou seja, isolarmos a variável contaminada x_i da saída y seria usar a particularíssima realimentação de estados $u = -x_i$. Com isso tornaremos zero a variável p e teremos confinado a influência da perturbação.

Passaremos agora a mostrar que a solução clássica do PRP mostrada na seção anterior encerra, em Última análise, a ingenua simplicidade do procedimento acima.

Com efeito, o PRP será solúvel para um dado sistema se e somente se for possível colocar seu diagrama de blocos na seguinte forma:

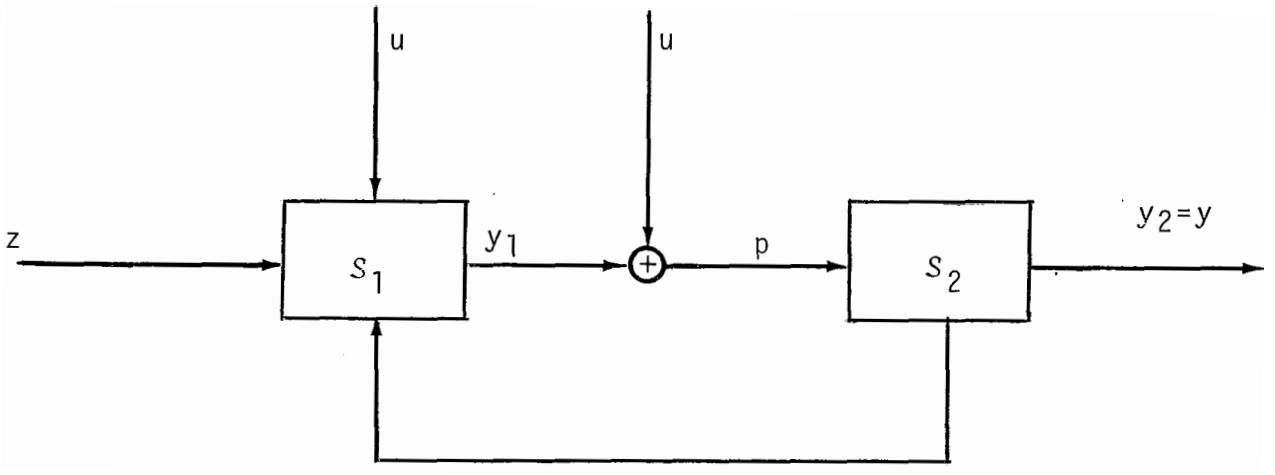


Figura 2.1

onde a saída y_1 do subsistema S_1 tem o mesmo tamanho da entrada u .

A solução será $u = -y_1$

Sendo \hat{x}_i o estado do subsistema S_i podemos escrever as equações para o diagrama de blocos acima

$$\dot{\hat{x}}_1 := \tilde{A}_{11} \hat{x}_1 + \tilde{A}_{12} \hat{x}_2 + \tilde{B}_1 u + \tilde{E}_1 z \quad (2.4.a)$$

$$y_1 = \tilde{c}_1 \hat{x}_1 \quad (2.4.b)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 =: \tilde{A}_{22} \hat{x}_2 + \tilde{B}_2 p = \tilde{A}_{22} \hat{x}_2 + \tilde{B}_2 (u + y_1) \quad (2.4.c)$$

$$y = y_2 = \tilde{c}_2 \hat{x}_2 \quad (2.4.d)$$

Agrupando as equações encontramos a formulação de estados para o sistema como um todo:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{B}_2 \hat{C}_1 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (2.5.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \quad (2.5.b)$$

Uma solução para o PRP será $u = F \hat{x}$ onde

$$F = [-\hat{C}_1 \quad 0] \quad e \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

É interessante notar que em (2.5) a porção inferior esquerda de \hat{A} é múltipla da porção inferior de \hat{B} e que há porções estratégicas de \hat{E} e \hat{C} compostas por zeros.

A forma canônica representada por (2.5), bem como o diagrama de blocos da figura 2.1., a ela associado, são indicadores característicos da solubilidade do PRP. Com efeito, o resultado principal desta seção diz que o problema de rejeição de perturbações é solúvel para um sistema dado por (2.3) se e somente se existir uma mudança de bases $x = Q \hat{x}$ que coloque as matrizes do sistema na forma (2.5).

TEOREMA 2.2

"O PRP \bar{e} solúvel para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, C, E \rangle$ se e somente se existir um número real v , $q \leq v \leq n - r$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{F} \rangle$ do sistema satisfazem

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \overbrace{\hat{A}_{11}}^v & \dots & \overbrace{\hat{A}_{12}}^{n-v} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}_{21} & \dots & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \dots \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} v \\ \\ \} n-v \end{matrix} \quad (2.6.a)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \quad (2.6.b)$$

$$\text{e onde } \hat{A}_{21} = \hat{B}_2 \hat{C}_1 \text{ para algum } \hat{C}_1" \quad (2.6.c)$$

PROVA:

a) A condição \bar{e} suficiente

Na nova base, fazendo $u = \hat{F} \hat{x}$ com $\hat{F} = \begin{bmatrix} -\hat{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$ te

remos

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} - \hat{B}_1 \hat{C}_1 & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \hat{C}_2 \end{bmatrix} \hat{x}$$

onde vemos claramente que a perturbação z não afeta a saída y pois a matriz de transferencia $G_p(s)$ que relaciona z e y é identicamente nula.

Como estes fatos são uma propriedade do sistema e independem de particular base usada se, na base original fizéssermos $u = F x$ com $F = \hat{F} Q^{-1}$ onde Q é a transformação de equivalencia para mudança de bases ($x = Q \hat{x}$) teríamos achado uma solução para o PRP.

b) A condição é necessária

Sendo $\dim V^* = v$ e como $E \subset V^* \subset \text{Ker } C$ teremos $q \leq v \leq n - r$

Seja V uma matriz $(n \times v)$ cujas colunas formem uma base para o subespaço V^* e seja R uma matriz $(n \times n - v)$ tal que $R = Q$ seja não singular.

Fazendo $x = Q \hat{x}$ teremos

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} z$$

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \hat{x}$$

onde \hat{A}_{11} é uma matriz $(v \times v)$ etc...

Como $\begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} = C Q = C \begin{bmatrix} V & R \end{bmatrix}$ e $V^* \subset \text{Ker } C$ temos $\tilde{C}_1 = 0$ ou seja, (2.6.b) é verdadeira.

$$\text{Como } \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = Q^{-1} E \text{ ou, } E = \begin{bmatrix} V & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix}$$

e $E \subset V^*$ temos $\hat{E}_2 = 0$ ou seja, (2.6.a) é verdadeira.

Como a solubilidade do PRP não é afetada por mudanças de bases, sendo $u = \hat{F} \hat{x}$ com $\hat{F} = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 & \hat{F}_2 \end{bmatrix}$ uma solução teremos

$$(\hat{A} + \hat{B} \hat{F}) \hat{V}^* \subset \hat{V}^*$$

Como, por construção da nova base, \hat{V}^* pode ser nela representado pela matriz $\begin{bmatrix} I_v & 0 \end{bmatrix}^T$ a expressão acima pode

ser escrita

$$\begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} + \widehat{B}_1 \widehat{F}_1 & \widehat{A}_{12} + \widehat{B}_1 \widehat{F}_2 \\ \widehat{A}_{21} + \widehat{B}_2 \widehat{F}_1 & \widehat{A}_{22} + \widehat{B}_2 \widehat{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_v \\ 0 \end{bmatrix} N \quad \text{para alguma matriz } N.$$

Obviamente $\widehat{A}_{21} + \widehat{B}_2 \widehat{F}_1 = 0$, logo, para $\widehat{C}_1 = -\widehat{F}_1$ teremos $\widehat{A}_{21} = \widehat{B}_2 \widehat{C}_1$ ou seja, (2.6.c) é verdadeira.

Q.E.D.

Uma das contribuições deste teorema é uma visão estrutural inédita do clássico problema de rejeição de perturbações, sempre formulado e resolvido de uma maneira puramente geométrica.

Outra importante e interessante consequência é que o teorema 2.2 sugere um novo método para a resolução do PRP.

II.3 - NOVO MÉTODO PARA RESOLUÇÃO DO PRP

O uso do teorema 2.1 para resolução do PRP requer o cálculo de V^* . Este subespaço também representa um papel chave em outros campos de controle, principalmente nos importantes problemas que envolvem a teoria da invariância.

Como a obtenção de V^* pelo algoritmo fornecido na seção II.1 é muitas vezes trabalhosa muito se tem pesquisado no sentido de encontrar métodos mais simples. Para determinadas classes de sistemas, com efeito, V^* pode ser obtido de uma maneira bastante direta como se pode ver em [1] ou [24] por exemplo. Para o caso geral, entretanto, ainda esbarramos nas dificuldades operacionais inerentes ao algoritmo original.

Os resultados da seção anterior sugerem uma maneira alternativa de atacarmos o PRP: usando os resultados do teorema 2.2, se conseguirmos encontrar uma base do espaço de estados na qual as matrizes que caracterizam o sistema exibam a estrutura particular de (2.5) então e só então $E \subset V^*$. Note-se que chegaríamos a esta conclusão sem calcular V^* .

Desta maneira devemos verificar a existência de uma matriz não singular Q tal que a mudança de bases ocasionada pela transformação de similaridade $x = Q \tilde{x}$ coloque as matrizes do sistema na forma dada por (2.5).

O seguinte resultado, consequência imediata do teorema 2.2 fornece algumas restrições iniciais que devem ser satisfeitas pela matriz Q .

COROLÁRIO 2.1

"O PRP é solúvel para um sistema descrito pelas matrizes $\langle A, B, C, E \rangle$ se e somente se existir um número real

$v, q \leq v \leq n - r$ e uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E} \rangle$ do sistema satisfazem (2.6) e ainda

$$\tilde{C}_2 =: \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{E}_1 =: \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}.$$

PROVA:

Dadas $\langle \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E} \rangle$ na forma (2.5) sejam P_1 ($v \times v$) e P_2 ($(n-v) \times (n-v)$) matrizes não singulares tais que $\tilde{C}_2 P_2 = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}$ e $P_1^{-1} \tilde{E}_1 = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$

A existencia de tais matrizes \bar{e} assegurada pois

$$\text{rank } \tilde{C}_2 =: \text{rank } C = r$$

$$\text{rank } \tilde{E}_1 = \text{rank } E = q$$

$$\text{Fazendo } \hat{x} = P \tilde{x} \text{ com } P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

seria imediato verificarmos que teremos matrizes $\langle \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E} \rangle$ com as características pedidas.

Q.E.D.

Como previsto este resultado auxilia na busca de Q pois a matriz procurada deve satisfazer, a priori, a seguinte

condição: $Q \in Q$ onde

$$\underline{Q} = \{Q(n \times n) \mid C \ Q = \begin{bmatrix} \bar{0} & : & I_r \end{bmatrix} \text{ e } Q^{-1}E = \begin{bmatrix} \bar{I}_q & : & \bar{0} \end{bmatrix}^T\}$$

Neste ponto podemos, sem perda de generalidade, supor que o sistema $\langle A, B, C, E \rangle$ em estudo (equações (2.3)) é descrito, na base original, por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \bar{I}_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (2.7.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & I_r \end{bmatrix} x \quad (2.7.b)$$

onde as dimensões das submatrizes são: A_{11} ($q \times q$), A_{22} ($(n-q-r) \times (n-q-r)$), A_{33} ($r \times r$); B_1 ($q \times m$) etc.

Se isso não acontecer podemos providenciar uma transformação de equivalência inicial, caracterizada por qualquer matriz $Q_1 \in \underline{Q}$, cuja conseqüente mudança de bases coloque o sistema na forma descrita pelas equações (2.7). A inexistência de uma base inicial com tais propriedades, ou seja $\underline{Q} = \emptyset$, indicaria imediatamente, pelo corolário 2.1, a não solubilidade do PRP.

A partir deste momento, tendo ou não havido uma mudança inicial de bases, o sistema a ser analisado será sempre expresso na forma (2.7). Devido às particularidades dessa forma, e ainda ao corolário 2.1, é fácil verificarmos que de agora em diante a matriz Q procurada é da forma

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A busca de Q reduz-se, desta maneira, à busca de uma matriz $M(n-q-r \times n-q-r)$ não singular. Pode-se dizer que ao utilizar as equações (2.7) adquirimos o direito de trabalhar apenas no "miolo" do sistema sem perder as informações pertinentes ao PRP.

Apresentamos a seguir três resultados, também com seqüências imediatas do corolário 2.1 e das equações (2.7).

Corolário 2.2

'Se existir uma matriz $C_1(m \times n-r)$ tal que $\begin{bmatrix} A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} = B_3 C_1$ então o PRP é solúvel para (2.7) usando $u = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \end{bmatrix} x$. Teremos ainda $V^* = \text{Ker } C$ ".

PROVA: Óbvio.

COROLÁRIO 2.3

'Se não existir uma matriz C_1 ($m \times q$) tal que $A_{31} = B_3 C_1$ então o PRP não é solúvel para (2.7) isto é, $E \notin V^*$."

COROLÁRIO 2.4

'Se existir uma matriz C_1 ($m \times q$) tal que

$$\begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} C_1 \text{ então o PRP é solúvel para (2.7) usando}$$

$u = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \end{bmatrix} x$. Teremos ainda $A \in \mathcal{C} B + E$, ou seja, E será (A, B) invariante".

Estes resultados, duas condições suficientes e uma necessária, permitem, através de uma simples inspeção das matrizes em (2.7) a indicação prematura e praticamente imediata da solubilidade ou não do PRP.

EXEMPLO 2.2

Representando o sistema usado no exemplo 2.1 na forma das equações (2.7) teremos:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & -2 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix} x$$

onde, usando o corolário 2.3, a verificação de que o PRP não tem solução é imediata, pois para toda C_1 teremos $B_3 C_1 = 0 \neq A_{31} = 1$.

O outro sistema tratado no exemplo 2.1 admite como representação

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & -2 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & -1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Agora $\begin{bmatrix} A_{31} & : & A_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B_3 C_1$ desde que $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Pelo corolário 2.2 o PRP será solúvel com $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_4 \end{bmatrix}$ onde f_4 é arbitrário, e ainda teremos $V^* = \text{Ker } C$. Obviamente estes resultados estão de acordo com os anteriores.

A facilidade de aplicação dos corolários acima para alguns casos e a importancia das informações deles provenientes são animadoras.

O novo método para resolução do PRP prometido no título desta seção, baseado na equação (2.8) e para o qual os tres últimos resultados são apenas casos particulares será apresentado em detalhes no Capítulo III.

Enquanto ainda estamos no Capítulo II continuemos estudando alguns aspectos teóricos do PRP, aplicando sempre que possível as possibilidades estruturais inéditas trazidas pelo teorema 2.2.

A questão das bases será irrelevante pois a partir de agora lidaremos com matrizes de transferencia, ou seja:

11.4 - ASPECTOS FREQUENCIAIS DO PRP

Sejam as equações (2.3), representantes do sistema para o qual o PRP é definido e estudado. Usando o principio da superposição podemos escrever

$$Y(s) = G_c(s) U(s) + G_p(s) Z(s) \quad (2.9)$$

onde $Y(s)$, $U(s)$, $Z(s)$ são as transformadas de Laplace dos vetores que representam, respectivamente, a saída $y(t)$, a entrada $u(t)$ e a entrada de perturbação $z(t)$. Seria imediato verificarmos que a matriz de transferencia de comando, $G_c(s)$ e a matriz de transferencia de perturbação $G_p(s)$, de dimensões respectivamente (rxm) e (rxq) são dadas por:

$$G_c(s) = C(sI-A)^{-1}B \quad (2.10.a)$$

$$G_p(s) = C(sI-A)^{-1}E \quad (2.10.b)$$

Desde a sua introdução, acredita-se que por Wonham e Morse [24], o PRP foi tradicionalmente formulado e resolvido de uma maneira geométrica ($E \subset V^*$), sendo para isto necessária a representação dos sistemas pelas equações do espaço de estados, (2.3). Acreditava-se que o PRP envolvesse mecanismos que não seriam traduzidos por representações do tipo externas, como por exemplo a representação frequencial via matrizes de transferencia sintetizada pela equação (2.9). Haveria uma perda essencial de informações, acontecendo algo assim como o que acontece com os fenômenos de não controlabilidade e/ou não observabilidade, incapazes de detecção pelas representações tipo entrada-saída. O PRP seria então de aplicação exclusiva das representações internas, das representações no espaço de estados, tornando-se impossível a sua formulação e resolução em termos das matrizes $G_c(s)$ e $G_p(s)$.

Em alguns casos específicos, porém, verificou-se que essas idéias não eram verdadeiras. Em [16], por exemplo, viu-se que para sistemas com entradas, saídas e perturbações escalares ($m = r = q = 1$) o PRP era bem caracterizado pelas funções de transferencia G_c e G_p .

Houve um grande avanço em [2] onde a classe de sistemas para os quais o PRP é tratável em termos frequenciais

foi dilatada: sistemas onde apenas a saída \bar{e} é escalar ($r=1$) e ainda sistemas multivariáveis satisfazendo uma restrição suave. Para o caso geral, entretanto, nada se havia provado e a crença de que o PRP não era um problema freqüencialmente caracterizável, embora abalada, persistia.

Vamos considerar o diagrama chave para o PRP, figura 2.1 e supor que os subsistemas admitem como equações

$$Y_1(s) = C(s) U(s) + D(s) Z(s) + L(s) X_2(s) \quad (2.11)$$

onde

$$C(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} B_1 \quad (2.12.a)$$

$$D(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} E_1 \quad (2.12.b)$$

$$L(s) = C_1 (sI - A_{11})^{-1} A_{12} \quad (2.12.c)$$

e também

$$X_2(s) = K(s) P(s) \quad (2.13)$$

$$Y(s) = H(s) P(s) \quad (2.14)$$

onde

$$K(s) = (sI - A_{22})^{-1} B_2 \quad (2.15.a)$$

$$H(s) = C_2 (sI - A_{22})^{-1} B_2 \quad (2.15.b)$$

Note-se que o sinal foi omitido, por simplicidade.

Vamos encontrar a relação entre $Y(s)$, $U(s)$ e $Z(s)$, sempre que possível desprezando o s para evitar formalismo desnecessariamente carregados.

Lembrando que $P = Y_1 + U$ (figura 2.1) podemos eliminar X_2 usando (2.11) e (2.13):

$$Y_1 = C U + D Z + L K(Y_1 + U) \quad \text{ou}$$

$$(I - L K)Y_1 = (C + L K)U + D Z$$

Usando essa expressão em (2.14) teremos

$$Y = H P = H(Y_1 + U)$$

$$Y = H\{(I - L K)^{-1} [(C + L K)U + D Z] + U\}$$

$$Y = H(I - L K)^{-1} \{(C + L K)U + D Z + (I - L K)U\}$$

$$Y = H(I - L K)^{-1} \{(C + I)U + D Z\}$$

o que nos permite reescrever a equação 2.9:

$$Y = G_c U + G_p Z$$

onde, identificando G_c e G_p em termos dos parâmetros de (2.5) ou, equivalentemente, da figura 2.1 :

$$G_c = H(I - L K)^{-1}(C + I) \quad (2.16.a)$$

$$G_p = H(I - L K)^{-1}D \quad (2.16.b)$$

Estamos em condições de estabelecer o resultado principal desta seção.

TEOREMA 2.3

"O PRP sera solúvel para um sistema descrito por $\langle A, B, C, E \rangle$ se e somente se existirem matrizes racionais estritamente próprias $H(s)$, $L(s)$, $K(s)$, $C(s)$, $D(s)$ com dimensões respectivamente (rxm) , $(mxn-v)$, $(n-vxm)$, (mxm) , (mxq) onde $q \leq v \leq n-r$, tais que as matrizes $G_c(s)$ e $G_p(s)$ definidas em (2.9) e (2.10) satisfazem as relações (2.16), isto é:

$$G_c = H(I - L K)^{-1}(C + I)$$

$$G_p = H(I - L K)^{-1}D \quad "$$

PROVA:

a) A condição é necessária

Já apresentada no raciocínio imediatamente ante-

rior, quanto partimos do diagrama indicativo da solubilidade do PRP e chegamos às relações (2.16). Deve-se apenas notar que as equações (2.12) e (2.15) definem matrizes estritamente próprias.

b) A condição é suficiente

Podemos escrever (2.9) como

$$Y = H(I - L K)^{-1} \{(C + I)U + D Z\}$$

definindo a variável \tilde{p} como

$$\tilde{p} = (I - L K)^{-1} \{(C + I)U + D Z\}$$

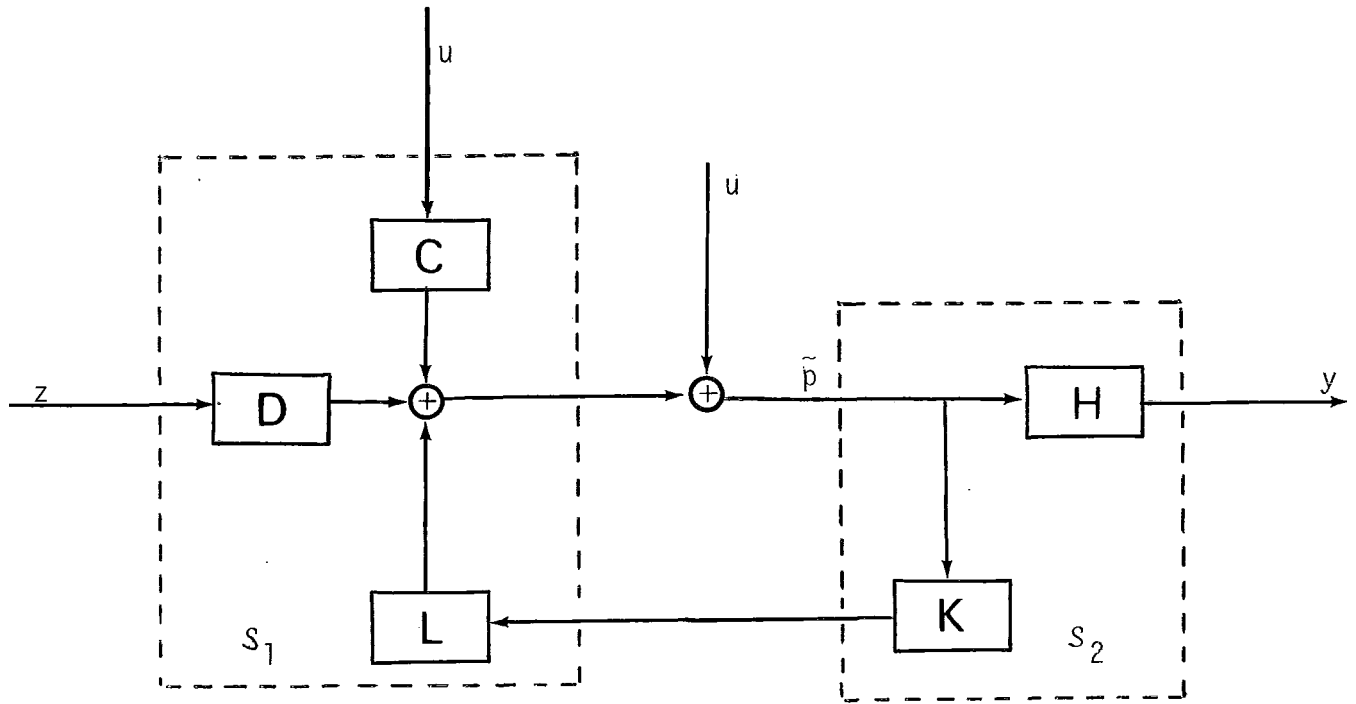
temos

$$(I - L K) \tilde{p} = (C + I) U + D Z$$

$$\tilde{p} = U + C U + D Z + L K \tilde{p}$$

Usando a equação acima e o fato de que $Y = H \tilde{p}$ podemos construir o seguinte diagrama de bloco que se encontra na forma do diagrama da figura 2.1 mostrando assim a solubilidade do PRP.

Q.E.D.



A primeira consequência importante deste resultado é a resposta negativa às conjecturas mencionadas no início desta seção. Para o caso geral é teoricamente possível caracterizar e solucionar o PRP levando-se em conta apenas a descrição externa fornecida pelas matrizes $G_p(s)$ e $G_c(s)$ e pela relação (2.9). Desta maneira, rejeição de perturbações não é um problema formulável e solúvel exclusivamente pelas supostamente mais poderosas técnicas de estado.

COROLÁRIO 2.5

"Se dois sistemas A, B_1, C_1, E_1 e A_2, B_2, C_2, E_2 possuem as mesmas matrizes de transferência, isto é, $G_{c1}(s) = G_{c2}(s)$ e $G_{p1}(s) = G_{p2}(s)$ então eles serão idênticos no que diz respeito ao PRP".

PROVA: Obvia

Na situação do corolário acima os dois sistemas diferem por causa de modos não controláveis e/ou não observáveis adicionados a uma mesma representação mínima comum a ambos.

Desta maneira, estes últimos resultados realçam o fato de que as descrições entrada-saída via matrizes de transferência, apesar de incapazes de detectar falhas de propriedades como a controlabilidade e/ou observabilidade, ainda guardam em si as informações necessárias e suficientes a respeito de problemas como o PRP. Por serem as matrizes de transferência mais densas e compactas, essas informações não se apresentam em uma forma clara, cristalina e facilmente visualizável como por exemplo $E \subset V^*$. Ao invés disso temos relações do tipo (2.16) onde é difícil interpretamos o cerrado formalismo em termos intuitivos e acessíveis.

Outra aplicação do teorema 2.3 é a explicação do que ocorre no já citado caso de entradas, saídas e perturbações escalares. Ao fazermos isso teremos também uma interpretação mais suave das equações (2.16).

Entremos com a hipótese de que $m = r = q = 1$. Analisando (2.15.b) chegamos à conclusão de que $H(s)$ é uma função de transferência estritamente própria:

$$H(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$$

onde $d_2(s) = \det(sI - A_{22})$ e $\text{gr}(n_2(s)) < \text{gr}(d_2(s))$. O símbolo $\text{gr}(x(s))$ indica grau do polinômio $x(s)$.

De (2.12.c) e (2.15.a) vem

$$L(s)K(s) = C_1(sI - A_{11})^{-1} A_{12}(sI - A_{22})^{-1} B_2 = \frac{n_3(s)}{d_1(s)d_2(s)}$$

que também é uma função de transferência estritamente própria: $\text{gr}(n_3(s)) < \text{gr}(d_1(s)d_2(s))$ onde $d_1(s) = \det(sI - A_{11})$.

As mesmas considerações valem para $C(s)$ e $D(s)$ com novidade adicional de que seus denominadores são idênticos:

$$C(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} ; D(s) = \frac{n_4(s)}{d_1(s)}$$

Usando as informações acima nas equações (2.16) obtemos

$$G_c(s) = \frac{n_2(s)(n_1(s) + d_1(s))}{d_1(s)d_2(s) - n_3(s)} \quad (2.17.a)$$

$$G_p(s) = \frac{n_2(s)n_4(s)}{d_1(s)d_2(s) - n_3(s)} \quad (2.17.b)$$

Como $C(s)$ e $D(s)$ são estritamente próprias temos $\text{gr}(d_1(s) + n_1(s)) = \text{gr}(d_1(s)) > \text{gr}(n_4(s))$ e como consequência final a função de transferência de comando $G_c(s)$ apresentará um número maior de zeros do que a função de transferência de perturbações $G_p(s)$. Na contagem dos zeros deve-se levar em conta suas multiplicidades.

Com isto provamos uma das partes do

COROLÁRIO 2.6

"O PRP será solúvel para um sistema com $m=q=r=1$ se e somente se a função de transferência de comando $G_c(s)$ tiver mais zeros do que a função de transferência de perturbação, $G_p(s)$, levando em conta as multiplicidades".

PROVA:

a) A condição é necessária: já apresentada.

b) A condição é suficiente:

Colocando $G_c = \frac{n_c}{d}$ e $G_p = \frac{n_p}{d}$ seja m_2 o máximo divisor comum dos polinômios n_c e n_p . Poderemos escrever

$$G_c = \frac{m_2 q_c}{d} \quad ; \quad G_p = \frac{m_2 q_p}{d} \quad (2.18)$$

onde, como G_c tem mais zeros do que G_p , teremos

$$\text{gr}(q_c) > \text{gr}(q_p) \quad (2.19)$$

É sempre possível encontrarmos polinômios d_c e d_p tais que

$$\text{gr}(d_c) = \text{gr}(q_c) \quad (2.20.a)$$

$$\text{gr}(d_c d_p) = \text{gr}(d) \quad (2.20.b)$$

Por estarmos considerando G_c e G_p estritamente próprias temos

$$\text{gr}(d_p) > \text{gr}(m_2) \quad (2.21)$$

A partir de (2.20.b) podemos escrever

$$d = d_c d_p - m_3 \quad (2.22)$$

onde

$$\text{gr}(m_3) < \text{gr}(d) \quad (2.23)$$

Substituindo (2.22) em (2.18) vem

$$G_c = \frac{m_2 q_c}{d_c d_p - m_3} ; \quad G_p = \frac{m_2 q_p}{d_c d_p - m_3}$$

ou equivalentemente,

$$G_c = \frac{m_2 d_c d_p q_c}{d_p (d_c d_p - m_3) d_c} ; \quad G_p = \frac{m_2 d_c d_p q_p}{d_p (d_c d_p - m_3) d_c}$$

$$G_c = \frac{m_2}{d_p} \left(\frac{d_c d_p^{-m_3}}{d_c d_p} \right)^{-1} \frac{q_c}{d_c}; \quad G_p = \frac{m_2}{d_p} \left(\frac{d_c d_p^{-m_3}}{d_c d_p} \right)^{-1} \frac{q_p}{d_c}$$

Mas (2.21) garante que $\frac{m_2}{d_p} = H$ é estritamente própria; (2.23) e (2.20.b) idem para $\frac{m_3 d_p}{d_c d_p} = L K$; (2.19) e (2.20.a) idem para $\frac{q_p}{d_c} = D$; finalmente (2.20.a) acarreta que $\frac{q_c}{d_c} = 1 + C$ onde C é estritamente própria.

Neste ponto podemos aplicar o lema 2.2 e concluir que o PRP é solúvel.

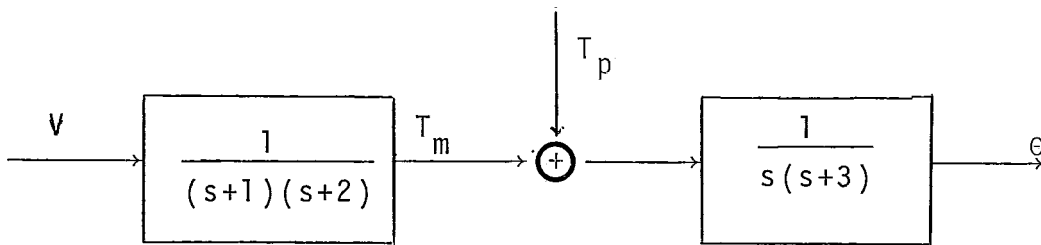
Q.E.D.

Apresentamos uma prova inédita para um fato já conhecido desde [16] onde foi tratado em um contexto diferente.

Esta interpretação das equações (2.16), ou seja, do critério frequencial para a solubilidade do PRP, é extremamente útil e interessante pois o conceito de zeros de funções de transferências é familiar ao pessoal de controle e a sua obtenção é bastante simples e direta.

EXEMPLO 2.3

Um sistema constituído por um motor DC acionando uma carga pode ser representado pelo seguinte modelo:



onde V é a tensão de alimentação do motor; T_m é o torque produzido por ele; T_p é um torque de perturbação e θ é a posição da carga.

Facilmente obtemos

$$G_c(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+3)} = \frac{(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

e vemos que o PRP não tem solução. Conclusão esta, aliás, ã que já havíamos chegado nos exemplos 2.1 e 2.2 onde estudávamos o mesmo sistema no espaço de estados.

Na outra referencia citada ^[2], onde o PRP é caracterizado frequencialmente para certas classes de sistemas, também aparece a intrigante conexão entre $E \subset V^*$ e os zeros das agora matrizes de transferencia. De uma maneira geral a con

dição de solubilidade para o PRP continua a ser que o "número de zeros de comando" deve ser maior do que o "número de zeros de perturbação". É lógico que agora estes "zeros de comando" e "zeros de perturbação" são definidos sob novas condições podendo não ter a mesma interpretação familiar do caso $m=r=q=1$ onde eram as raízes dos polinômios numeradores das funções de transferência.

Esta visão do PRP autoriza uma análise, em termos bastante corriqueiros e intuitivos, sobre o papel dos zeros de uma matriz de transferência. Vamos associá-los com a "agilidade" do sistema. Em um sistema sem zeros a "inércia" seria predominante. Esta iria diminuindo à medida que adicionamos zeros, pois a "agilidade" aumentaria. Nestes termos o PRP é solúvel quando a malha de comando for mais "ágil" que a de perturbações.

Todas estas idéias são úteis e importantes na medida em que ajudam a clarear dois aspectos muito em evidência atualmente. Um deles refere-se ao conceito ainda bastante nebuloso de zeros, principalmente no caso multivariável. Para sistemas escalares os zeros são as raízes do numerador da função de transferência, mas para o caso multivariável as definições se multiplicam: [23] [4] etc. Embora alguns autores tenham tratado do assunto [11], a literatura também se ressentete, ainda, da falta de explicações em termos palpáveis e intuitivos do significado físico dos zeros.

O outro t̄opico muito pesquisado atualmente ẽ o da interpretaçãõ de V^* ou, de uma maneira mais geral, da família \mathcal{H} , em termos nãõ geométricos.

A esperança de se poder caminhar nessas direções usando resultados provenientes dos teoremas 2.2 e 2.3 ẽ grande.

CAPÍTULO 111

NOVOS MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DO PRP

III.1 - GENERALIDADES

Este capítulo tratara detalhadamente da aplicação do teorema 2.2 na obtenção de um novo método de ataque ao PRP.

Os procedimentos tradicionais para isso envolvem o cálculo de V^* por meio de algoritmos apropriados (um deles é mostrado na seção 11.1) e a posterior verificação da inclusão $E \subset V^*$. Esta maneira, totalmente baseada na interpretação geométrica dos fatos dada pelo teorema 2.1, muitas vezes esbarra em dificuldades computacionais. Para superá-las muito se pesquisou, e ainda se pesquisa [8][13][22] etc., no sentido de caracterizar V^* de um modo diferente do originalmente proposto por Wonham. Ao lado dos óbvios interesses em simplificar as manipulações associadas ao PRP e a todos os problemas que envolvem V^* está o fato de que qualquer interpretação desse importantíssimo subespaço em termos menos abstratos e mais intuitivos seria extremamente bem-vinda. Nota-se mesmo uma preocupação constante na literatura em explicar as propriedades geométricas de V^* em termos frequenciais, ou seja, matrizes de transferência. Mais uma vez lembramos que o subespaço V^* tem emprego importante e generalizado nos assuntos tratados pela teoria da invariância, não se restringindo, em absoluto, ao problema ora em estudo.

Como já notávamos na seção II.3 a visão estrutural e inédita do PRP proporcionada pelo teorema 2.2 e pela figura 2.1 sugere a possibilidade de se pesquisar um método de resolução do PRP sem o cálculo de V^* .

Revisiternos, de uma maneira abreviada, as primeiras seções do capítulo anterior, onde as idéias acima eram lançadas. Para isso consideremos o sistema linear e invariante no tempo que se deseja estudar descrito da maneira usual por

$$\begin{cases} \dot{x} = A x + B u + E z & (3.1.a) \\ y = C x & (3.1.b) \end{cases}$$

O teorema 2.2 assegura que as perturbações serão rejeitadas para tal sistema se e somente se for possível colocar o seu diagrama de blocos na forma da figura 2.1 ou, equivalentemente, se e somente se existir uma base no espaço de estados, dada pela transformação de similaridade $x = Q \bar{x}$, na qual o sistema \bar{e} descrito pelas equações

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \hat{A} \bar{x} + \hat{B} u + \hat{E} z \\ y = \hat{C} \bar{x} \end{cases}$$

onde \hat{A}_{21} , a porção inferior esquerda de \hat{A} formada pelas $n-v$ últimas linhas e v primeiras colunas, é um múltiplo de \hat{B}_2 , a porção inferior de \hat{B} formada por suas $n-v$ últimas linhas, e a porção inferior de \hat{E} bem como as primeiras colunas de \hat{C} deve ser nula, ou seja:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \vdots & \hat{A}_{12} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{B}_2 \hat{c}_1 & \vdots & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \dots \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (3.2.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \hat{c}_2 \end{bmatrix} \hat{x} \quad (3.2.b)$$

onde \hat{A}_{11} é uma matriz $(v \times v)$, \hat{A}_{22} $(n-v \times n-v)$, \hat{B}_1 $(v \times m)$, \hat{E}_1 $(v \times q)$, \hat{c}_2 $(r \times n-v)$ etc.

Resolver o PRP seria então procurar uma matriz não singular Q tal que $Q^{-1} A$, $Q^{-1} B$, $Q^{-1} E$ e $C Q$ apresentem as particularidades explicitadas por (3.2). O corolário 2.1 especifica ainda mais essas particularidades, mostrando que \hat{c} e \hat{E} podem ser consideradas igual a

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_r \end{bmatrix}; \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} I_q & \vdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Desta maneira, a matriz procurada Q deve satisfazer, além das condições impostas por (3.2), estas outras restrições adicionais. Se, porém, na base originalmente usada para descrever o sistema as matrizes C e E já apresentarem a forma $\begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}^T$ é de se esperar que Q tenha uma estrutura bastante especial e camarada. Assim, consideremos que o sistema $\langle A, B, C, E \rangle$ é descrito, na base original, por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (3.3.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} x \quad (3.3.b)$$

onde A_{11} é uma matriz $(q \times q)$, A_{22} $(n-q-r \times n-q-r)$, A_{33} $(r \times r)$, B_1 $(q \times m)$ etc.

A validade dessa hipótese é sustentada pelo corolário 2.1: se não for possível encontrar uma base inicial onde as matrizes do sistema se apresentem como em (3.3) não haverá solução para o PRP. Seria fácil verificar que a matriz Q desejada exibe a forma

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & Q_{12} & Q_{13} \\ 0 & M & Q_{23} \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

Como ficará claro mais adiante podemos considerar nulas as submatrizes Q_{12} , Q_{13} e Q_{23} , resultando

$$Q = \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e a nossa tarefa reduz-se, desta maneira, à busca de uma matriz M $(n-q-r \times n-q-r)$ não singular.

O problema pode ser formulado da seguinte maneira: dado um sistema $\langle A, B, C, E \rangle$ como em (3.3) desejamos estudar a solubilidade do PRP sem calcular V^* . Para isso devemos verificar se é possível colocá-lo na forma (3.2) usando matrizes Q como em (3.4). A incapacidade de se achar tais matrizes indi-

caria a não solubilidade do PRP. O objetivo então é elaborar um algoritmo, isto é, uma busca ordenada, um conjunto de regras que seguidas repetidas vezes levem a uma posição definida sobre a existencia ou não de uma solução.

EXEMPLO 3.1

No sistema dado abaixo omitimos as variáveis x , u , y , z apresentando apenas as matrizes $\langle A, B, C, E \rangle$

$$\begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 & 0 & \bar{0} \\ \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{0} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 \\ \bar{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & 0 \\ \bar{0} & 0 \\ \bar{0} & -\bar{1} \\ \bar{0} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \bar{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & 0 & 0 & \bar{1} \end{bmatrix}$$

As transformações de equivalencia que preservam a particular forma das matrizes C e E são dadas por

$$Q = \begin{bmatrix} \bar{1} & \dots & 0 & \dots & \bar{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & M & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{1} \end{bmatrix} \quad e \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \dots & 0 & \dots & \bar{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & P & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \bar{1} \end{bmatrix}$$

onde M e P são matrizes (3×3) não singulares tais que $PM=MP=I_3$

Estaremos interessados em partes específicas das matrizes $\hat{A} = Q^{-1} A Q$ e $\hat{B} = Q^{-1} B$: a porção inferior esquerda de \hat{A} , \hat{A}_{21} $(n-VXV)$ e a porção inferior de \hat{B} , \hat{B}_2 $(n-vxm)$. Desejaría-

mos encontrar um valor de v para o qual

$$A_{21} = \widehat{B}_2 \widehat{C}_1 \text{ para algum } \widehat{C}_1 \quad (3.5)$$

Como, pelo teorema 2.2, $q \leq v \leq n-r$ começaremos com

1º Passo: $v = n - r = 4$

$$\widehat{A}_{21}(4) = L_1 Q^{-1} A Q R^4; \widehat{B}_2(4) = L_1 Q^{-1} B$$

onde os operadores L_i e R^j são definidos da seguinte maneira:

$L_i X \rightarrow$ matriz composta pelas i últimas linhas de X .

$Y R^j \rightarrow$ matriz composta pelas j primeiras colunas de Y

$$\widehat{A}_{21}(4) = [0 : 0 : 1] A \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \widehat{B}_2(4) = [0 : 0 : 1] B$$

Desenvolvendo vem

$$\widehat{A}_{21}(4) = \begin{bmatrix} 0 & m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix}; \widehat{B}_2(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde os m_{ij} são os elementos da segunda linha de M .

Para (3.5) ser verdadeira devemos ter $m_{21} = m_{22} = m_{23} = 0$ o que viola a hipótese de não singularidade de M . Portanto, jamais chegaremos à forma (3.2) com $v = 4$.

2º Passo: $v = n-r-1 = 3$

$$\widehat{A}_{21}(3) = L_2 Q^{-1} A Q R^3; \widehat{B}_2(3) = L_2 Q^{-1} B$$

$$\tilde{A}_{21}(3) = \begin{bmatrix} \bar{0} & :L_1P & :0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & : 0 & :1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & : 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & : MR^2 \\ \dots & \dots \\ 0 & : 0 \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(3) = \begin{bmatrix} \bar{0} & :L_1P & :0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & : 0 & :1 \end{bmatrix}$$

Antes de prosseguir notemos que

$$\tilde{A}_{21}(3) = \begin{bmatrix} - & - & - \\ 0 & m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(3) = \begin{bmatrix} - & - \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e uma condição necessária para que (3.5) se verifique e o processo possa continuar é $m_{21} = m_{22} = 0$. Esta restrição, juntamente com o fato de que $L_1PMR^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ nos leva à conclusão de que $L_1P = \begin{bmatrix} 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix}$ permitindo finalmente escrever

$$\tilde{A}_{21}(3) = p_{32} \begin{bmatrix} \bar{0} & m_{11}+m_{31} & m_{12}+m_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(3) = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para (3.5) se verificar devemos ter $m_{11}+m_{31} - m_{12}+m_{32} = 0$ ou $p_{32} = 0$. Como qualquer destas possibilidades afetaria a não singularidade de M , não haverá solução (forma (3.2)) com $v = 3$.

3º Passo: $v = n-r-2 = 2$

$$\tilde{A}_{21}(2) = L_3 Q^{-1} A Q R^2 ; \tilde{B}_2(2) = L_3 Q^{-1} B$$

$$\tilde{A}_{21}(2) = \begin{bmatrix} \bar{0} & :L_2P & :0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & : 0 & :1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & : 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & : MR^1 \\ \dots & \dots \\ 0 & : 0 \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(2) = \begin{bmatrix} \bar{0} & :L_2P & :0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & : 0 & :1 \end{bmatrix} B$$

Usando, ainda, a restrição $m_{21} = m_{22} = 0$ é fácil notar que

$$\tilde{A}_{21}(2) = \begin{bmatrix} - & - \\ 0 & p_{32}(m_{11}+m_{31}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(2) = \begin{bmatrix} - & - \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e uma condição necessária para (3.5) valer é $m_{11} + m_{31} = 0$. Esta restrição e mais o fato de que $L_2 P M R^{-1} = |0 \quad 0|^T$ levam a

$$L_2 P = \begin{bmatrix} p_{21} & p_{22} & p_{21} \\ 0 & p_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo mais acima virã

$$\tilde{A}_{21}(2) = \begin{bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(2) = \begin{bmatrix} p_{21} & -p_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste terceiro passo, para $v = 2$ a equação (3.5) é finalmente satisfeita desde que usemos

$$\tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} \gamma+1 & \delta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

onde γ e δ são número reais quaisquer.

O PRP tem solução para o sistema do exemplo, e a matriz Q responsável pela mudança de bases que o coloca na forma (3.2) pode ser obtida a partir de

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11} & m_{12} & m_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{23} & 0 \\ 0 & -m_{11} & m_{32} & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Embora tenhamos resolvido o PRP sem calcular explicitamente V^* , este pode ser extraído de qualquer uma das matrizes Q acima usando as idéias apresentadas na prova do teorema 2.2. Obteríamos

$$V^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

valor idêntico ao obtido por qualquer dos métodos existentes e que obviamente satisfaz a condição $V^* \subset E$.

Não obstante alguns aspectos deste exemplo possam parecer um tanto quanto obscuros esperamos que ele possa sugerir uma maneira suave, natural e pouco forçada de encontrar um procedimento sistemático. Podemos também ser bem mais ambiciosos ao pensar, em termos de simplicidade, no algoritmo desejado: no exemplo acima trabalhamos basicamente com dimensões $n=5$, ao passo que a equação (3.4) autoriza a esperança de trabalharmos na dimensão reduzida $n-q-r$. O exemplo 3.1 é, em suma, ape-

nas uma maneira de mostrar como nasceram os algoritmos que serão propostos nas seções seguintes.

III.2 - ALGORITMO MATRICIAL

Tentemos encarar de uma maneira mais geral as manobras usadas no exemplo 3.1.

Se ao sistema representado por (3.3) aplicarmos uma transformação caracterizada por (3.4) as matrizes C e E não se alterarão, mas as restantes passarão a ser

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12}^M & A_{13} \\ PA_{21} & PA_{22}^M & PA_{23} \\ A_{31} & A_{32}^M & A_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ PB_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$

onde $P = M^{-1}$ e as partições apresentam os mesmos tamanhos anteriores: $A_{11}(q \times q)$ etc.

Ao considerarmos $v = v_0 = n-r = \dim \text{Ker } C$ temos

$$\hat{A}_{21}(v_0) = \begin{bmatrix} A_{31} \\ \vdots \\ A_{32}^M \end{bmatrix} ; \quad \hat{B}_2(v_0) = B_3$$

Como M é uma matriz inversível seria fácil mostrar que (3.5) se verifica neste passo se e somente se $\begin{bmatrix} A_{31} \\ \vdots \\ A_{32}^M \end{bmatrix} = B_3 C_1$ para alguma C_1 . Assim provamos o corolário 2.2.

Ao considerarmos um passo genérico $v = v_j < n-r$ temos

$$\tilde{A}_{21}(v_i) = \begin{bmatrix} L_i P A_{21} & \vdots & L_1 P A_{22} M R^j \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{31} & \vdots & A_{32} M R^j \end{bmatrix} ; \tilde{B}_2(v_i) = \begin{bmatrix} L_i P B_2 \\ \dots \\ B_3 \end{bmatrix}$$

Como A_{31} estará sempre "dentro" de $\tilde{A}_{21}(v_i)$ vemos que uma condição necessária para (3.5) valer é a existencia de uma matriz C_1 tal que $A_{31} = B_3 C_1$. Acabamos de provar o corolário 2.3.

A lembrança da não singularidade de P ajudaria a provar o corolário 2.4.

Apenas estes tres resultados, pela importancia e acessibilidade das informações que encerram, já seriam suficientes para conferir às equações (3.3) a categoria de formas especialmente talhadas para o estudo do PRP. As verificações feitas de uma maneira extremamente rápida, por uma simples inspeção das matrizes.

Neste ponto é conveniente fornecer uma maneira mais cômoda para representar a condição (3.5) e todas as que lhe são equivalentes. Com efeito, dadas as matrizes A e B existiria uma matriz C tal que $A = B C$ se e somente se $\{A\} \subset \{B\}$ ou seja, o subespaço gerado pelas colunas de A está contido no subespaço gerado pelas colunas de B . Outra notação equivalente para esta inclusão seria o uso de símbolo manuscrito para representar subespaços: $A \subset B$. A condição (3.5) seria então representada por

$$\{\tilde{A}_{21}\} \subset \{\tilde{B}_2\} \quad \text{ou} \quad \tilde{A}_{21} \subset \tilde{B}_2 \quad (3.6)$$

Com isto em vista vamos recapitular as conclusões a que podemos chegar no primeiro passo,

19 Passo: $v = n - r$

Pergunta: $\{A_{31}\} \subset \{B_3\}$?

Se a resposta é não, podemos parar o algoritmo pois $E \notin V^*$ e o PRP não tem solução. Se a resposta é sim passamos a outra

Pergunta: $\{A_{31} : A_{32}\} \subset \{B_3\}$?

Se a resposta é sim podemos parar o algoritmo pois o PRP é solúvel e temos $E \in V^* = \text{Ker } C$. Se a resposta é não, podemos garantir apenas que $V^* \neq \text{Ker } C$ e devemos passar ao

20 Passo: $v = n - r - 1$

A visão adquirida em exemplos como 3.1 auxilia bastante. Sendo $\bar{n} = n - q - r$ devemos perguntar

Existe $M(\bar{n} \times \bar{n})$ tal que $\{A_{32} M^{\bar{n}-1}\} \subset \{B_3\}$?

Se a resposta é não podemos apenas garantir que $\dim V^* < n - r - 1$ e devemos passar a outras etapas do algoritmo. Se existir tal matriz então há chance (não certeza) de se responder afirmativamente à questão principal deste passo. Para isso precisaríamos de outras perguntas. Sendo P a inversa de M teremos

$\{L_1 P A_{21}\} \subset \{L_1 P B_2\}$?

Se a resposta \bar{e} não podemos parar o algoritmo pois $E \notin V^*$. Se a resposta \bar{e} afirmativa prosseguimos com

$$\left\{ \begin{array}{c|c} L_1 P A_{21} & L_1 P A_{22} M R^{\bar{n}-1} \\ \hline A_{31} & A_{32} M R^{\bar{n}-1} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} L_1 P B_2 \\ \hline B_3 \end{array} \right\} ?$$

onde uma resposta sim garante solubilidade do PRP, com $\dim V^* = n - q - r - 1$ e uma resposta negativa conduziria a outros passos.

Os aspectos já mostrados e também os passos seguintes do algoritmo podem ser sumarizados no diagrama da figura 3.2.

As setas horizontais encimadas por um "não" representam condições necessárias para a solubilidade do PRP e podem ser usadas para abortar o processo a qualquer momento. Isto representa uma economia em relação ao processo tradicional quando se faz necessário calcular V^* usando todos os passos de algum algoritmo e são então verificar a inclusão $E \subset V^*$.

As setas verticais encimadas por um "sim" representam condições suficientes. A importancia de suas informações é evidente.

No sentido vertical o diagrama se desenvolveria por $\bar{n} = n - q - r$ passos ao fim dos quais, se nenhuma conclusão positiva ou negativa (seta horizontal) fosse atingida chegaríamos a um fim com

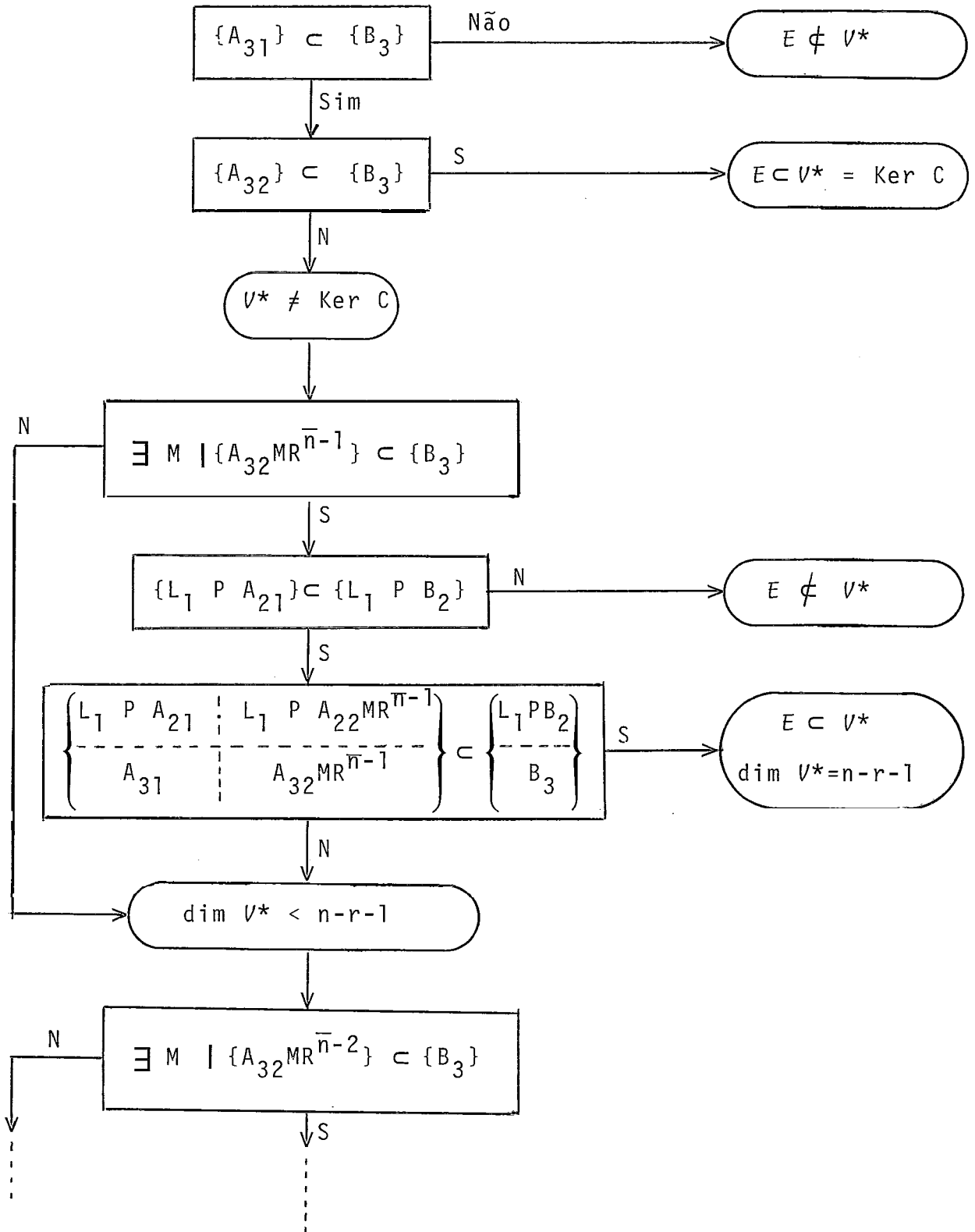
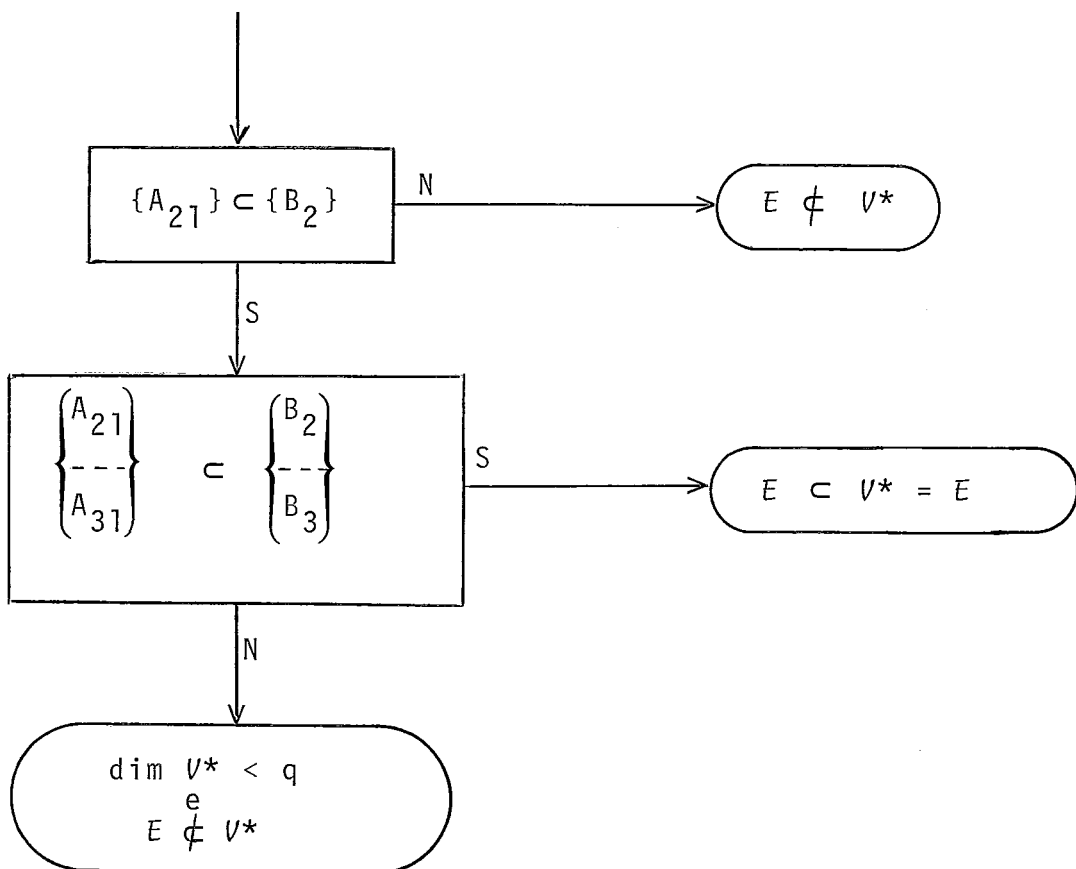


Figura 3.2 - Diagrama do algoritmo matricial



Os fatos que garantem a validade da estrutura acima serão provados apenas mais tarde quando o algoritmo estiver em uma forma mais densa.

Ainda uma vez chamamos a atenção para as detecções prematuras de impossibilidades tornadas possíveis pelo algoritmo em sua forma matricial.

111.3 - ALGORITMO GEOMÉTRICO

Usando uma notação geométrica conseguiremos colocar o algoritmo acima em uma forma mais compacta e elegante. Sem prejudicar os aspectos de generalidade, simplicidade e clara visualização das situações a geometrização será responsável por um aumento das informações que se pode extrair do algoritmo. Farã também com que as provas sejam bem mais diretas e abrangentes e permitirá, finalmente, a evolução do processo para um algoritmo em forma fechada, maneira extremamente rápida, embora pouco descritiva, de resolver o PRP.

Apresentemos em um exemplo as idēias básicas do método, que aliás não são novas: são os mesmos conceitos anteriores em nova roupagem apenas.

EXEMPLO 3.2

$$\begin{bmatrix}
 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 & \dots & 1 \\
 1 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & -1 \\
 \dots & \dots \\
 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 \dots \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1
 \end{bmatrix}$$

Nos passos do algoritmo matricial procurávamos uma matriz M tal que suas primeiras colunas fossem mapeadas por A_{32} na imagem de B_3 . Vamos considerar o subespaço de $\mathbb{R}^{\bar{n}}$ que tenha exatamente essa propriedade:

$$M_0 = \{m \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \mid A_{32} m \in B_3\}$$

$A_{31} \subset B_3$ continua sendo uma condição necessária para haver solução. Supondo que ela é satisfeita, $M_0 = \mathbb{R}^{\bar{n}}$ significaria que $A_{32} \subset B_3$ e $E \subset V^* = \text{Ker } C$ ou seja, usando a nomenclatura matricial, o algoritmo seria solúvel no 1º passo, com $v = n-r$. No caso do nosso exemplo temos

$$M_0 = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}$$

É interessante notar que o 2º passo geométrico será condicionado por $\dim M_0$ e não necessariamente por $v = n-r-1$ como anteriormente.

No caso matricial, a partir deste ponto passávamos a verificar inclusões do tipo $\{L_i P A_{21}\} \subset \{L_i P B_2\}$. Agora isto será feito usando uma matriz aniquiladora de M_0 : uma matriz P_0 tal que $P_0 M_0 = 0$. Em uma interpretação mais rigorosa diríamos que, sendo N_0 um subespaço tal que $M_0 \oplus N_0 = \mathbb{R}^{\bar{n}}$ a projeção em N_0 ao longo de M_0 seria representada por P_0 :

$$P_0: \mathbb{R}^{\bar{n}} \rightarrow N_0$$

Da maneira definida, P_0 não é única. Isso será corrigido mais tarde, embora não seja crucial. Por ora, qualquer matriz aniquiladora (ou projetora) serve aos nossos propósitos. Sendo $P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ teremos

$$P_0 A_{21} = \{0\} \subset P_0 B_2 = \{0 \quad 0\}$$

o que garante a possibilidade de continuarmos. A próxima questão seria

$$\begin{bmatrix} P_0 & & A_{22} \\ \dots & \dots & \dots \\ & & A_{32} \end{bmatrix} M_0 \subset \left\{ \begin{matrix} P_0 & B_2 \\ \dots & \dots \\ & B_3 \end{matrix} \right\} ?$$

que em nosso exemplo fornece

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \not\subset \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mostrando não haver solução neste passo. A próxima medida seria, obviamente, a procura de uma parte de M_0 capaz de satisfazer a relação acima:

$$M_1 = \{m \in M_0 \mid \tilde{A}_0 m \in \tilde{B}_0\}$$

onde

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & A_{22} \\ \dots & \dots \\ & A_{32} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & B_2 \\ \dots & \dots \\ & B_3 \end{bmatrix}$$

Isto permite o início do próximo passo, para o qual também definiríamos uma matriz P_1 de uma maneira totalmente análoga à anterior

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Viria então a verificação das inclusões

$$\left\{ \begin{array}{c} P_1 \quad A_{21} \\ \dots \\ A_{31} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{c} P_1 \quad B_2 \\ \dots \\ B_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

A não validade desta inclusão indicaria a insolubilidade do PRP. A próxima relação a ser pesquisada, decisiva para este passo é:

$$\left[\begin{array}{cc} P_1 & A_{22} \\ \dots & \\ A_{32} & \end{array} \right] M_1 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right\} = \{0\} \quad \left\{ \begin{array}{c} P_1 \quad B_2 \\ \dots \\ B_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Poderíamos finalmente concluir que o PRP é solúvel e em adição diríamos que $V^* = E + M_1$. Esta última expressão diz apenas que podemos obter V^* a partir de M_1 e de E lembrando que $E = \{E\} = \{|I_q \quad 0|^T\}$:

$$V^* = \left\{ \begin{array}{ccc} I_q & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & M_1 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{array} \right\} \quad V^* = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

O que foi feito para um exemplo pode ser expandido para o caso geral, como mostra o diagrama da página seguinte:

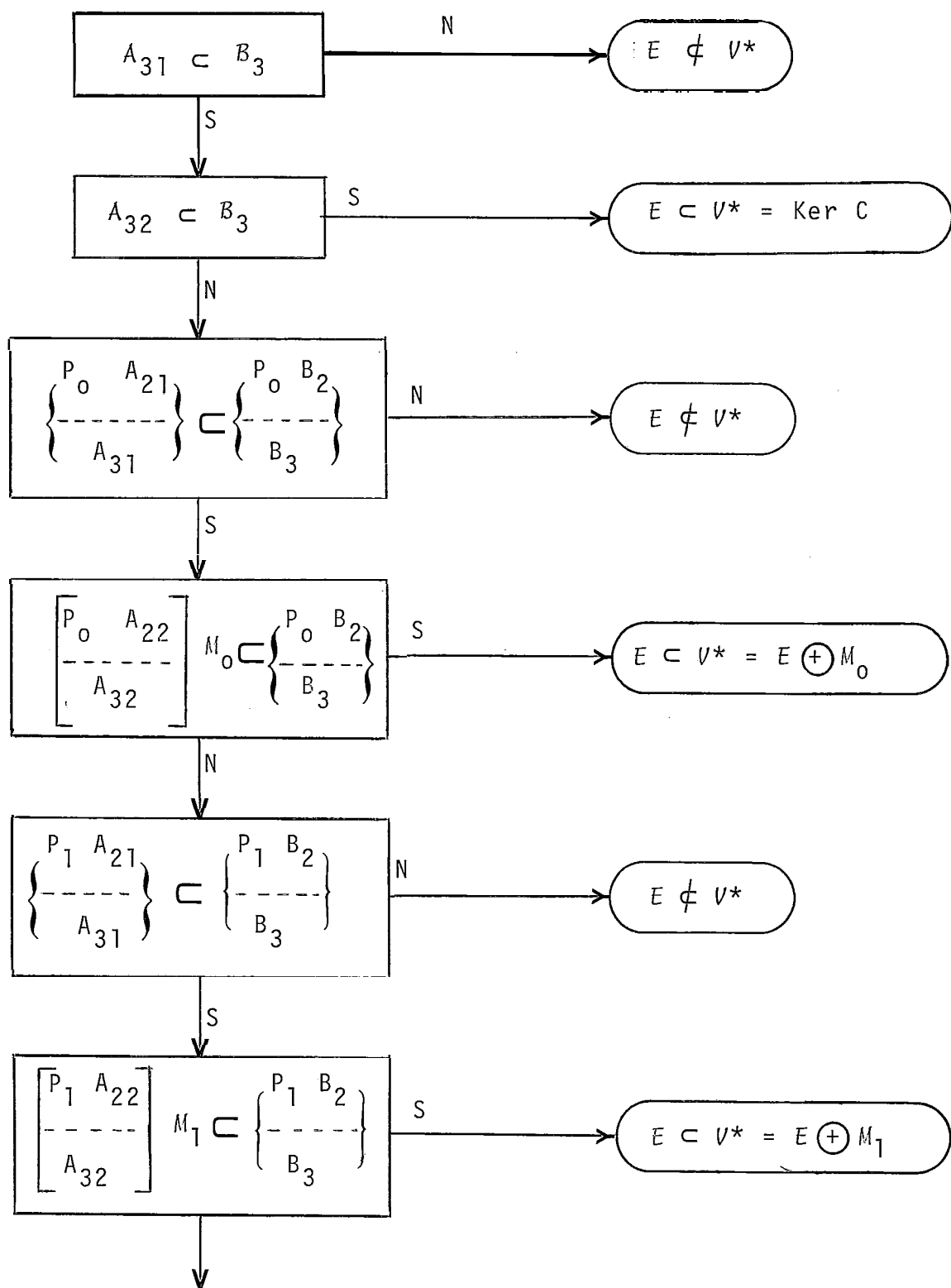


Figura 3.3 - Diagrama do algoritmo geométrico

As matrizes e subespaços do diagrama anterior são calculadas da maneira sugerida no exemplo.

Os mesmos comentários já feitos para o algoritmo em sua forma matricial valem agora. As setas horizontais sempre levam a conclusões que podem parar com o processo. Quando temos duas respostas negativas a perguntas consecutivas a decisão é sempre pela não solubilidade do PRP. Como anteriormente isto pode ser atingido em um estágio bastante prematuro. A existência de uma solução é garantida por duas respostas afirmativas a perguntas consecutivas. Neste caso temos a possibilidade, inédita, de computar V^* .

De uma maneira geral o algoritmo em sua forma geométrica é mais conciso e direto. O que se poderia argumentar que é perdido em termos intuitivos seria facilmente contrabalançado, uma vez que nos acostumemos ao formalismo novo, por uma maior rapidez, simplicidade e facilidade nas manipulações.

Vamos iniciar os esforços no sentido de provar que as estruturas mostradas até agora são realmente verdadeiras. Para evitar problemas de ambiguidade, como por exemplo na definição das P_i , será empregado um tratamento geométrico rigoroso. Sempre que possível será fornecida a interpretação em termos matriciais pois ela é, via de regra, mais intuitiva.

Seja sistema em estudo

$$\dot{x} = A x + B u + E z \quad (3.7.a)$$

$$y = c x \quad (3.7.b)$$

Sendo X , U , Z , Y os espaços vetoriais de estados, entradas, perturbações e saídas, com dimensões respectivamente n , m , q , r , as matrizes A , B , C , E passarão a ser encaradas como transformações lineares:

$$A: X \rightarrow X; \quad B: U \rightarrow X; \quad E: Z \rightarrow X; \quad C: X \rightarrow Y$$

Vamos repetir e renumerar as equações (3.3), muito importantes para o desenvolvimento dos algoritmos e sobre as quais temos trabalhado exclusivamente.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (3.8.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} x \quad (3.8.b)$$

Considerar uma base original na qual o sistema \bar{e} descrito na forma acima significa decompor o espaço de estados em uma soma direta:

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \dim X_1 = q \\ \dim X_2 = n - q - r = \bar{n} \\ \dim X_3 = r \end{cases}$$

Como a matriz E tem rank completo o espaço X_1 pode ser associado (\bar{e} isomorfo) tanto a E quanto a Z . X_3 seria associado a Y e X_2 \bar{e} o espaço no qual trabalharemos.

As matrizes A_{ij} e B_i oriundas da partição induzida por (3.8) serão vistas como transformações lineares

$$A_{ij}: X_j \rightarrow X_i ; B_i: U \rightarrow X_i \quad i, j = 1, 2, 3$$

Muitas vezes será necessário associar estas transformações lineares "induzidas" às transformações lineares "globais" A e B. Para isso vamos definir uma série de projeções e de mapas de inserção.

Seja Q_1 a projeção em X_1 ao longo de $X_2 \oplus X_3$

$$Q_1: X \rightarrow X_1$$

$$x \rightarrow Q_1 x = x_1$$

Para essa definição devemos nos lembrar de que para todo $x \in X$, $x = x_1 + x_2 + x_3$ de uma maneira Única, onde $x_i \in X_i$. Analogamente definiríamos

$$Q_2: X \rightarrow X_2 \quad e \quad Q_3: X \rightarrow X_3$$

Seja V_1 o mapa de inserção de X_1 em X

$$V_1: X_1 \rightarrow X$$

$$x_1 \rightarrow V_1 x_1 = x_1 + 0 + 0 \in X$$

Analogamente teríamos:

$$V_2: X_2 \rightarrow X \quad e \quad V_3: X_3 \rightarrow X$$

Em vista disso podemos definir rigorosamente as transformações lineares A_{ij} :

$$A_{ij}: X_j \rightarrow X_i$$

$$x_j \rightarrow A_{ij} x_j = Q_i \circ A \circ V_j x_j$$

ou seja, $A_{ij} = Q_i \circ V_j$, uma composição entre um mapa de inserção, a transformação original e uma projeção.

Em termos matriciais um mapa de inserção, V_2 por exemplo, pode ser representado por $V_2^T = [0 \quad : \quad I_n \quad : \quad 0]$. A interpretação das projeções também é imediata sendo, por exemplo, $Q_3 = [0 \quad : \quad 0 \quad : \quad I_r]$. Com estas informações fica óbvio verificarmos que $A_{32} = Q_3 \circ V_2$ e o sentido das transformações lineares acima definidas é visualizado de uma maneira clara.

De um modo análogo definiríamos

$$B_i: U \rightarrow X_i$$

$$u \rightarrow B_i u = Q_i \circ B u$$

ou seja $B_i = Q_i \circ B$.

Providenciemos agora a caracterização rigorosa dos subespaços M_i e dos P_i .

DEFINIÇÃO 3.1.0

$$"M_0 = \{m \in X_2 \mid A_{32} m \in B_3\} = A_{32}^{-1} B_3"$$

onde B_3 é a imagem da transformação linear B_3 . Seria trivial a verificação de que M_0 é um subespaço vetorial de X_2 .

Seja \bar{X}_0 o espaço quociente de X_2 módulo M_0 definido da maneira usual como um conjunto de classes laterais e seja P_0 a projeção canônica

$$P_0: X_2 \rightarrow X_2/M_0 = \bar{X}_0$$

Esta é uma maneira simples e elegante [25] de acabar com as ambiguidades que envolviam o conceito matricial das P_i . Lembrando que as transformações

$$P_0 A_{22}: X_2 \rightarrow \bar{X}_0 \quad \text{e} \quad P_0 B_2: U \rightarrow \bar{X}_0$$

tem existência assegurada podemos usá-las para construir os seguintes mapas

DEFINIÇÃO 3.2.0

$$" \tilde{B}_0: U \rightarrow \bar{X}_0 \oplus X_3$$

$$u \rightarrow \tilde{B}_0 u = P_0 B_2 u + B_3 u$$

$$\tilde{A}_0: X_2 \rightarrow \bar{X}_0 \oplus X_3$$

$$m \rightarrow \tilde{A}_0 m = P_0 A_{22} m + A_{32} m "$$

Os mapeamentos acima estão bem definidos pois $P_0 B_2 u, P_0 A_{22} m \in \bar{X}_0$; $B_3 u, A_{32} m \in X_3$ e cada elemento de $\bar{X}_0 \oplus X_3$ pode ser expresso de uma maneira única como uma soma de um elemento de \bar{X}_0 e outro de X_3 .

O relacionamento entre os mapas e espaços acima é muito bem explicitado por um diagrama comutativo

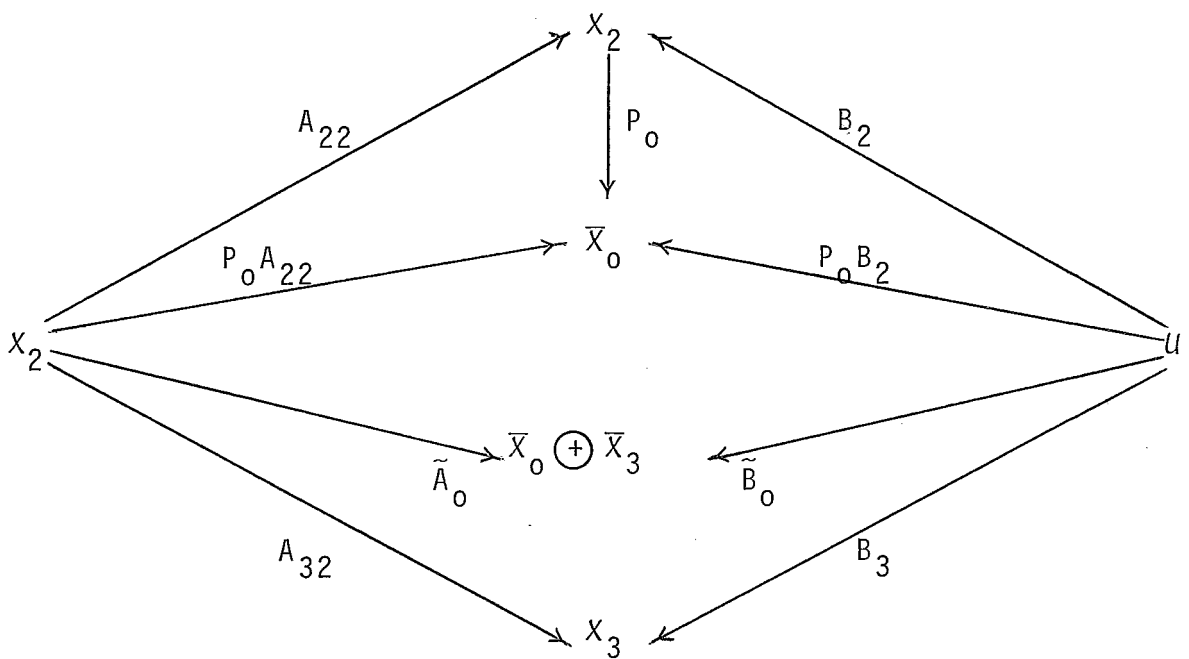


Figura 3.4 - Definição de \tilde{A}_0 e \tilde{B}_0

A interpretação matricial de \tilde{A}_0 e \tilde{B}_0 deve ser clara:

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & A_{22} \\ \dots & \dots \\ & A_{32} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} P_0 & B_2 \\ \dots & \dots \\ & B_3 \end{bmatrix}$$

Vejamos agora como exprimir rigorosamente e sem ambiguidade a matriz

$$\begin{bmatrix} P_0 & A_{21} \\ \dots & \dots \\ & A_{31} \end{bmatrix}$$

DEFINIÇÃO 3.3.0

$$" \hat{A}_0: X_1 \rightarrow \bar{X}_0 \oplus X_3 "$$

$$x_1 \rightarrow \hat{A}_0 x_1 = P_0 A_{21} x_1 + A_{31} x_1 "$$

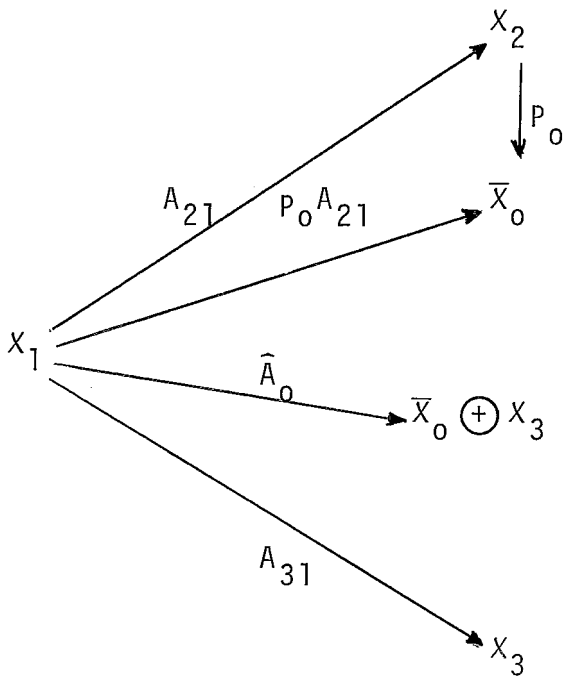


Figura 3.5 - Definição de \hat{A}_0

Agora continuaremos:

DEFINIÇÃO 3.1.1

$$" M_1 = \{ m \in X_2 \mid \tilde{A}_0 m \in \tilde{B}_0 \} = \tilde{A}_0^{-1} \tilde{B}_0 "$$

$$P_1: X_2 \rightarrow X_2/M_1 = \bar{X}_1 "$$

DEFINIÇÕES 3.2.1 e 3.3.1

$$" \tilde{B}_1: u \rightarrow \bar{X}_1 \oplus X_3$$

$$u \rightarrow \tilde{B}_1 u = P_1 B_2 u + B_3 u$$

$$\tilde{A}_1: X_2 \rightarrow \bar{X}_1 \oplus X_3$$

$$m \rightarrow \tilde{A}_1 m = P_1 A_{22} m + A_{32} m$$

$$\hat{A}_1: X_1 \rightarrow \bar{X}_1 \oplus X_3$$

$$x_1 \rightarrow \hat{A}_1 x_1 = P_1 A_{21} x_1 + A_{31} x_1 "$$

Levando adiante este procedimento podemos, de um modo geral, definir uma seqüência de subespaços e uma seqüência paralela de projeções canônicas:

DEFINIÇÃO 3.1

$$" M_{i+1} = \{ m \in X_2 \mid \tilde{A}_i m \in \tilde{B}_i \} = \tilde{A}_i^{-1} \tilde{B}_i \quad (3.9)$$

$$P_{i+1}: X_2 \rightarrow X_2 / M_{i+1} = \bar{X}_{i+1}$$

$$i = -1, 0, 1, 2, \dots \text{ e } \begin{cases} \tilde{A}_{-1} = A_{32} \\ \tilde{B}_{-1} = B_3 \end{cases} "$$

Para o perfeito conhecimento da seqüência $M_0, P_0; M_1, P_1; \dots, M_i, P_i; \dots$ ainda é necessária a

DEFINIÇÃO 3.2

$$" \tilde{A}_i: X_2 \rightarrow \bar{X}_i \oplus X_3$$

$$m \quad \tilde{A}_i^m = P_i A_{22}^m + A_{32}^m$$

$$\tilde{B}_i: U \rightarrow \bar{X}_i \oplus X_3$$

$$u \rightarrow \tilde{B}_i u = P_i B_2 u + B_3 u$$

$$i = -1, 0, 1, 2, \dots "$$

Podemos convencionar $P_{-1} = 0$ o que acarreta $\bar{X}_{-1} = 0$,
 $\tilde{A}_{-1} = A_{32}$ e $\tilde{B}_{-1} = B_3$

A definição 3.2 pode ser visualizada por meio de um diagrama comutativo

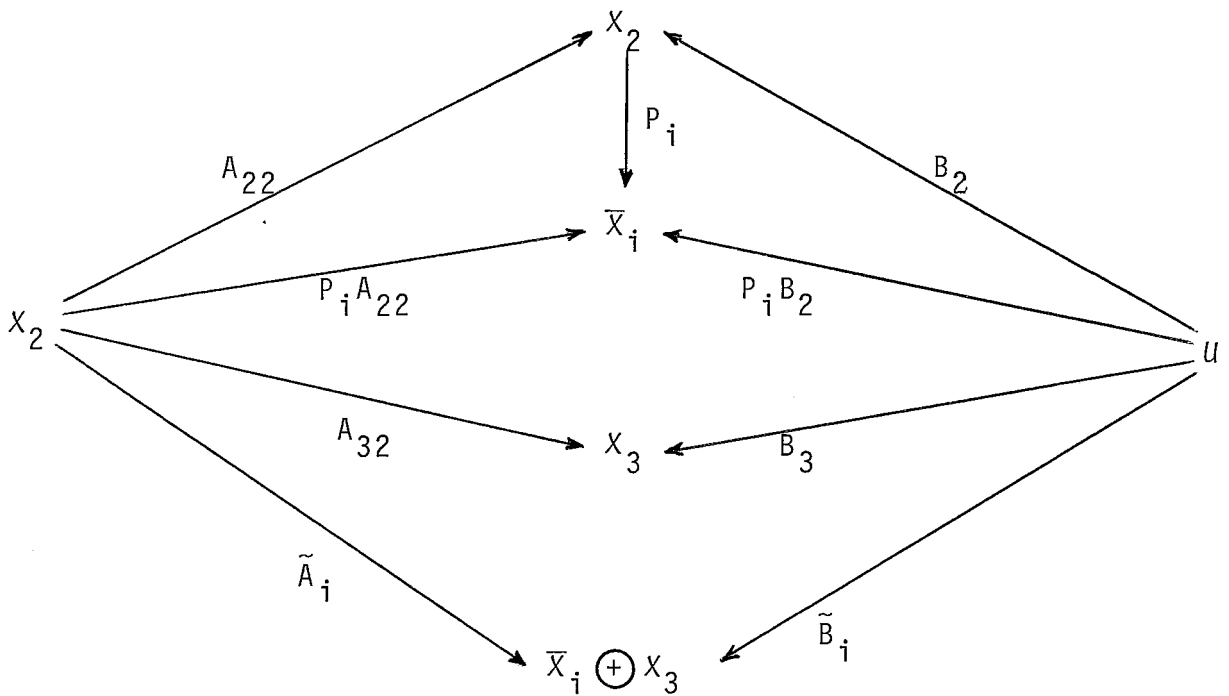


Figura 3.6 - Definição de \tilde{A}_i e \tilde{B}_i

DEFINICAO 3.3

$$" \hat{A}_i: X_1 \rightarrow \bar{X}_i \oplus X_3$$

$$x_1 \rightarrow \hat{A}_i x_1 = P_i A_{21} x_1 + A_{31} x_1$$

$$i = -1, 0, 1, 2, \dots \quad \hat{A}_{-1} = A_{31} \quad "$$

Esta formalização nos coloca em condições de reescrever o diagrama de blocos do algoritmo geométrico (figura 3.3) em uma forma mais concisa e elegante. É sobre essa versão final que trabalharemos a partir de agora, no sentido de provar as suas implicações.

Ver figura 3.7 da página seguinte.

Podemos finalmente enunciar o

LEMA 3.1

"Uma condição necessária para o PRP ser solúvel é $\hat{A}_i \subset \tilde{B}_i$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots$ "

PROVA:

Pela própria definição de V^* e pela decomposição feita no espaço de estados ternos

$$V^* \subset \text{Ker } C = V_1 X_1 + V_2 X_2 \quad (3.10)$$

Note-se que usamos a nomenclatura $V_1 X_1 + V_2 X_2$ ao invés de $X_1 \oplus X_2$ para enfatizar a idéia de que os X_i serão enca

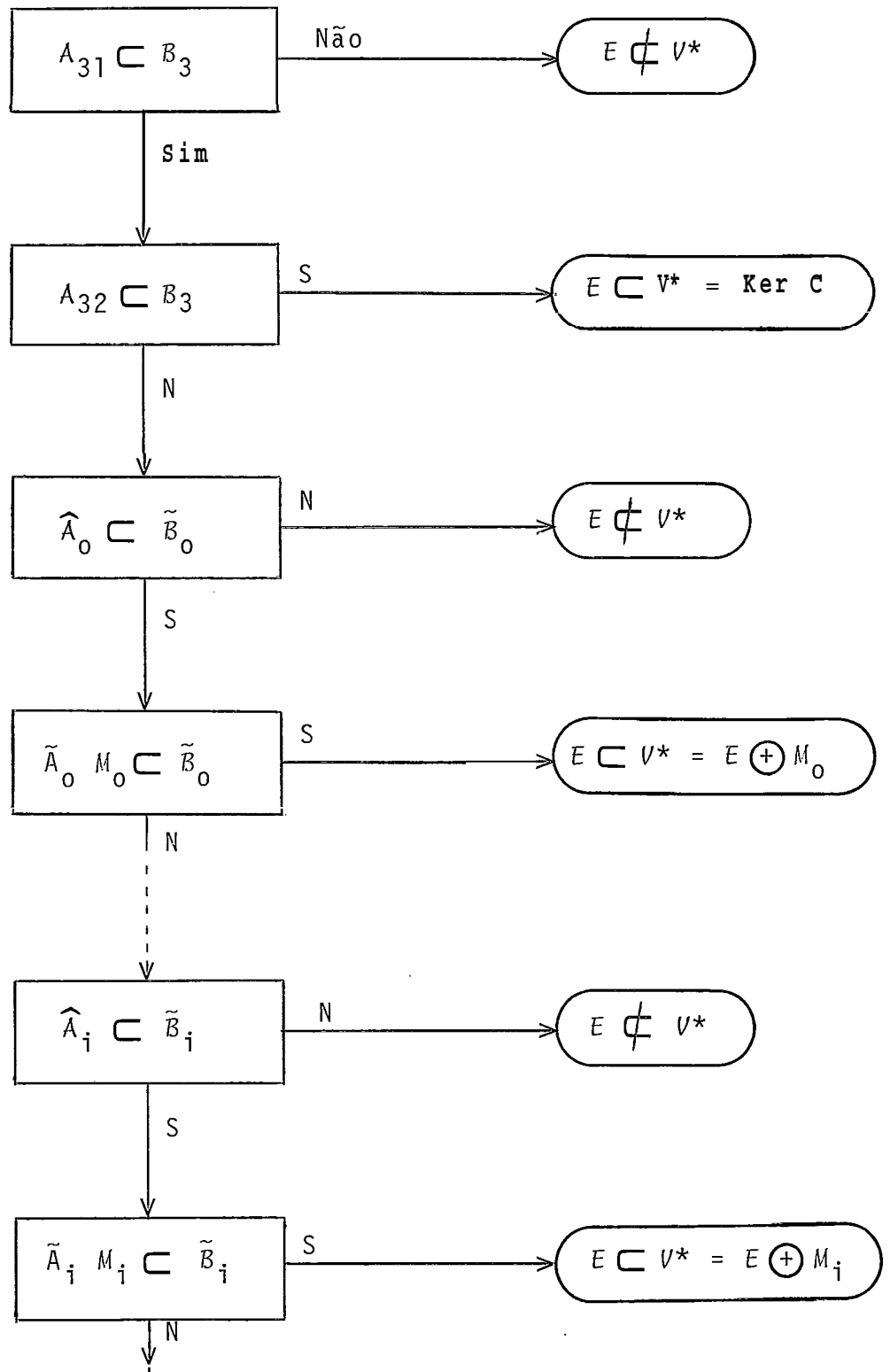


Figura 3.7 - Diagrama do algoritmo geométrico

rados mais como subespaços de X do que como espaços vetoriais autônomos. Ao escrever X_1 pensamos em um espaço vetorial com dimensão q ; ao escrever $V_1 X_1$ estamos considerando o subespaço q -dimensional de X .

A solubilidade do PRP implica

$$E = V_1 X_1 \subset V^*$$

Esta expressão, considerada em conjunto com a anterior traz

$$V^* = V_1 X_1 \cup V_2 V \quad \text{onde } V = Q_2 V^* \subset X_2 \quad (3.11)$$

A (A, B) invariância de V^* garante a existência de uma transformação linear $F: X \rightarrow U$ tal que $(A+BF)V^* \subset V^*$. Aplicando (3.10) e (3.11) vem

$$\begin{aligned} Q_3(A + BF) V^* &= 0 \\ Q_3(A \cup BF)(V_1 X_1 + V_2 V) &= 0 \\ Q_3(A + BF)V_1 X_1 + Q_3(A + BF)V_2 V &= 0 \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade distributiva da multiplicação sobre uma soma de subespaços [25]. Chamando $F V_i = F_i$ temos

$$(A_{31} + B_3 F_1) X_1 + (A_{32} + B_3 F_2) V = 0$$

Como para a soma de dois subespaços ser nula é necessário que cada um deles o seja, e com $\dim X_1 = q$ vem

$$A_{31} + B_3 F_1 = 0 \quad (3.12.a)$$

$$(A_{32} + B_3 F_2) V = 0 \quad (3.12.b)$$

Sendo P a projeção canônica definida da maneira usual

$$P: X_2 \rightarrow X_2/V$$

$$m \rightarrow Pm = \bar{m} = m + V$$

onde $\bar{m} = m + V$ representa a classe lateral de m módulo V e usando novamente a (A, B) invariância de V^* :

$$P Q_2(A+BF)V^* \subset P Q_2 V^*$$

$$\subset P Q_2(V_1 X_1 + V_2 V)$$

$$\subset P Q_2 V_1 X_1 + P Q_2 V_2 V = 0$$

pois $Q_i V_j = 0$ para $i \neq j$; $Q_i V_j = I$ para $i = j$ e $PV = 0$ por definição. Usando (3.11) e desenvolvendo temos

$$P Q_2(A+BF)V^* = 0$$

$$P Q_2(A+BF)(V_1 X_1 + V_2 V) = 0$$

$$P Q_2(A+BF)V_1 X_1 + P Q_2(A+BF)V_2 V = 0$$

$$P(A_{21} + B_2 F_1)X_1 + P(A_{22} + B_2 F_2)V = 0$$

$$P(A_{21} + B_2 F_1) = 0 \quad (3.13.a)$$

$$P(A_{22} + B_2 F_2)V = 0 \quad (3.13.b)$$

Agora mostraremos que $V \subset M_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ onde a sequência de subespaços M_i é definida por (3.9). Para todo v em V temos $A_{32}v = B_3 F_2(-v)$ (3.12.b) ou, e equivalentemente, $A_{32}V \subset B_3$ ou ainda $V \subset M_0$ (3.9).

Supondo que $V \subset M_k$ e P_k é a projeção canônica

$$P_k: X_2 \rightarrow X_2/M_k$$

definida como sempre, podemos estabelecer o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X_2 & \xrightarrow{P} & X_2/V \\
 P_k \downarrow & & \searrow \bar{P} \\
 X_2/M_k & &
 \end{array}$$

Figura 3.8

Como $V \subset M_k =: \text{Ker } P_k$ garante-se [25] a existencia de \bar{P} tal que $P_k = \bar{P} P$. Sendo v um elemento genérico de V usaremos (3.12.b) e (3.13.b) pré-multiplicada por \bar{P} para obter

$$A_{32}v = B_3(-F_2v)$$

$$P_k A_{22}v = P_k B_2(-F_2v)$$

Somando as igualdades membro a membro e usando a definição 3.2 vem

$$P_k A_{22}v + A_{32}v = P_k B_2(-F_2v) + B_3(-F_2v)$$

$$\tilde{A}_k v = \tilde{B}_k(-F_2v) \rightarrow v \in M_{k+1} \rightarrow V \subset M_{k+1}$$

Assim, usando o princípio da indução finita provamos o desejado: $V \subset M_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Com isto podemos substituir k por i no diagrama da figura 3.8 e no arrazoado que lhe segue e garantir a existencia de \bar{P}_i tal que $P_i = \bar{P}_i P$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Sendo x_1 um elemento genérico de X_1 usaremos (3.12.a) e (3.13.a) pré-multiplicada por \bar{P}_i para obter

$$A_{31}x_1 = B_3(-F_1x_1)$$

$$P_i A_{21}x_1 = P_i B_2(-F_1x_1)$$

Somando membro a membro e usando as definições 3.3 e 3.2

$$P_i A_{21}x_1 + A_{31}x_1 = P_i B_2(-F_1x_1) + B_3(-F_1x_1)$$

$$\tilde{A}_i x_1 = \tilde{B}_i (-F_1 x_1)$$

$$\text{E finalmente } \tilde{A}_i \subset \tilde{B}_i \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Q.E.D.

Este resultado torna válidas as setas horizontais do diagrama encimadas por um não e terminando em $E \notin V^*$. A grande utilidade delas é a possibilidade de se detectar prematuramente a não existência de soluções para o PRP.

É interessante notar que há outras condições necessárias para solubilidade do PRP mais fáceis de serem verificadas do que as condições descritas no lema. Com efeito, é quase trivial verificar que

$$\tilde{A}_i \subset \tilde{B}_i \rightarrow P_i A_{21} \subset P_i B_2$$

Se estamos interessados em rapidez a condição acima ($P_i A_{21} \subset P_i B_2$) pode ser incorporada ao algoritmo como a primeira pergunta a se fazer no i -ésimo passo. A previsão de insolubilidade seria feita de uma maneira quase imediata. Essa condição necessária, tão facilmente checável, não faz parte do algoritmo por não se prestar ao próximo resultado.

LEMA 3.2

"Uma condição suficiente para o PRP ser solúvel é a existencia de um inteiro não negativo k tal que

$$\widehat{A}_k \subset \widetilde{B}_k \quad (3.14)$$

e

$$\widetilde{A}_k M_k \subset \widetilde{B}_k \quad (3.15)$$

PROVA:

$$(3.14) \rightarrow \forall x_1 \in X_1, \exists u_1 \in U \mid \widehat{A}_k x_1 = \widetilde{B}_k u_1$$

Seja o mapa

$$F_1: X_1 \rightarrow U$$

$$x_1 \rightarrow F_1 x_1 = -u_1$$

É bom notar que nada garante a unicidade da transformação linear acima definida. Ela será única apenas quando \widetilde{B}_k for um monomorfismo, isto é, $\text{Ker } \widetilde{B}_k = 0$.

Aplicando a definição 3.3 teremos

$$\widehat{A}_k x_1 = \widetilde{B}_k (-F_1 x_1) \quad \forall x_1 \in X_1$$

$$P_k A_{21} x_1 + A_{31} x_1 = P_k B_2 (-F_1 x_1) + B_3 (-F_1 x_1) \quad \forall x_1 \in X_1$$

Como as parcelas pertencem a subespaços bem definidos podemos reagrupá-las:

$$(P_k A_{21} x_1 + P_k B_2 F_1 x_1) + (A_{31} x_1 + B_3 F_1 x_1) = 0 \quad \forall x_1 \in X_1$$

A primeira parcela representa um vetor de \bar{X}_k e como $\bar{X}_k \cap X_3 = 0$ temos que a única maneira de a igualdade acima se verificar é

$$\left. \begin{aligned} P_k(A_{21} + B_2 F_1)x_1 &= 0 \\ (A_{31} + B_3 F_1)x_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall x_1 \in X_1$$

ou, equivalentemente,

$$P_k(A_{21} + B_2 F_1)x_1 = 0 \quad (3.16.a)$$

$$(A_{31} + B_3 F_1)x_1 = 0 \quad (3.16.b)$$

$$(3.15) \rightarrow \forall m \in M_k, \exists u_2 \in U \mid \tilde{A}_k m = \tilde{B}_k u_2$$

Podemos construir o mapa

$$F_2: X_2 \rightarrow U$$

$$x_2 \rightarrow F_2 x_2 = \begin{cases} -u_2 & \text{se } x_2 = m \in M_k \\ \text{qualquer} & \text{se } x_2 \notin M_k \end{cases}$$

para o qual são válidas as mesmas considerações feitas acima. Usando a definição 3.2 e seguindo uma linha de raciocínio análoga chegaríamos a

$$P_k(A_{22} + B_2 F_2)M_k = 0 \quad (3.17.a)$$

$$(A_{32} + B_3 F_2)M_k = 0 \quad (3.17.b)$$

É sempre possível encontrar uma transformação linear satisfazendo a

$$F: X \rightarrow U \quad \begin{cases} FV_1 = F_1 \\ FV_2 = F_2 \end{cases}$$

Isto, juntamente com (3.16) e (3.17) fornece

$$P_k Q_2(A + BF)V_1X_1 = 0$$

$$Q_3(A + BF)V_1X_1 = 0$$

$$P_k Q_2(A + BF)V_2M_k = 0$$

$$Q_3(A + BF)V_2M_k = 0$$

Chamando

$$V_1X_1 + V_2M_k = \omega \subset X \quad (3.18)$$

as equações acima podem ser condensadas:

$$P_k Q_2(A + BF)\omega = 0 \quad (3.19.a)$$

$$Q_3(A + BF)\omega = 0 \quad (3.19.b)$$

$$(3.19.b) \rightarrow (A + BF)\omega \subset \text{Ker } Q_3 =: V_1X_1 + V_2X_2$$

Considerando $N \subset X_2$ tal que $M_k \oplus N = X_2$ temos

$$(A+BF)\omega \subset V_1X_1 + V_2M_k + V_2N \quad (3.20.a)$$

ou seja, $\forall w \in \omega, \exists x_1 \in X_1, m \in M_k, n \in N$ tais que

$$(A+BF)w = V_1x_1 + V_2m + V_2n \quad (3.20.b)$$

Premultiplicando por Q_2 e usando as propriedades dos mapas Q_i e V_j :

$$Q_2(A+BF)w = Q_2V_1x_1 + Q_2V_2m + Q_2V_2n =: m+n$$

Mas

$$(3.19.a) \rightarrow Q_2(A+BF)\omega \subset \text{Ker } P_k = M_k$$

Logo $Q_2(A+BF)w = m+n \in M_k \rightarrow n = 0$

Este fato, levado às equações (3.20) acarreta

$$(A+BF)w \subset V_1 X_1 + V_2 M_k = w$$

ou seja, w é um subespaço (A, B) invariante.

$$(3.18) \rightarrow w \subset V_1 X_1 + V_2 X_2 = \text{Ker } C$$

ou seja, w é um elemento de \mathcal{H} (vide seção 11.1) e $w \subset V^*$.

Finalmente

$$E = V_1 X_1 \subset w \subset V^* \text{ e o PRP é solúvel}$$

Q.E.D.

Esta é uma prova construtiva para as setas horizontais encimadas por um sim no diagrama de blocos do algoritmo em sua forma geométrica. Falta apenas provar a afirmação de que V^* pode ser expresso como indicado.

COROLÁRIO 3.1

"Se existe um inteiro não negativo k tal que (3.14) e (3.15) se verificam então $V^* = V_1 X_1 + V_2 M_k$ ".

PROVA

Pelo lema anterior concluímos que $E \subset V^*$ e usando (3.11) $V^* = V_1 X_1 + V_2 V$. Como $V_1 X_1 \cap V_2 V = 0$ temos $\dim V^* = q + \dim V$. Ainda da prova do lema 3.1 temos $V \subset M_k$ donde $\dim V \leq \dim M_k$ e portanto

$$\dim V^* \leq q + \dim M_k \quad (3.21)$$

(3.18) e a prova do lema 3.2 mostram que $\omega = V_1 X_1 + V_2 M_k \subset V^*$ logo

$$q + \dim M_k \leq \dim V^* \quad (3.22)$$

(3.21) e (3.22) $\Rightarrow \dim V^* = q + \dim M_k = \dim \omega$ e como $\omega \subset V^*$ temos finalmente $V = V_1 X_1 + V_2 M_k$ Q.E.D.

Este resultado completa a prova da validade do algoritmo quer seja ele apresentado em sua forma matricial quer o seja na forma geométrica.

Algumas questões podem surgir. Até que passo devemos aplicar o algoritmo? Algo nos garante a existência de um passo onde haja respostas conclusivas?

A próxima seção tratará de responder essas perguntas.

111.4 - ALGORITMO NA FORMA FECHADA

Diremos que o algoritmo, tanto em sua roupagem matricial da figura 3.2 quanto no formato geométrico equivalente da figura 3.7, se encontra em forma aberta. Com isso desejamos dizer que a estrutura do PRP é analisada passo a passo. Em cada estágio é feito um inquérito profundo, e somente após responder às questões $\tilde{A}_i \subset \tilde{B}_i$ e $\tilde{A}_i M_i \subset \tilde{B}_i$ podemos prosseguir. Esta "parada em todas as etapas" é boa em alguns casos pois pode permi-

tir a interrupção do processo em um estágio eventualmente prematuro. Se, entretanto, pudermos prescindir de um conhecimento antecipado sobre a solubilidade do PRP seria lícito esperarmos por um algoritmo mais rápido. A forma fechada seria este procedimento mais direto. Partindo de algum lugar e seguindo uma rotina pré-estabelecida de operações chegaremos a um subespaço que deve ter certas propriedades para podermos garantir a existência de solução.

Vamos estudar a sequência dos subespaços M_i definida na seção anterior por (3.9)

$$M_{i+1} = \{m \in X_2 \mid \tilde{A}_i m \in \tilde{B}_i\} = \tilde{A}_i^{-1} \tilde{B}_i$$

$$i = -1, 0, 1, 2, \dots \quad \tilde{A}_{-1} = A_{32} ; \tilde{B}_{-1} = B_3$$

Em primeiro lugar mostremos que a sequência é "não crescente".

LEMA 3.3

$$"M_{i+1} \subset M_i \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots "$$

PROVA:

Para $i = 0$ temos

$$M_0 = \{m \in X_2 \mid A_{32} m \in B_3\}$$

$$M_1 = \{m \in X_2 \mid \tilde{A}_0 m \in \tilde{B}_0\}$$

Usando a definição 3.2 dos \tilde{A}_i e \tilde{B}_i vem

$$m_1 \in M_1 \rightarrow \exists u_1 \in U \mid \tilde{A}_0 m_1 = \tilde{B}_0 u_1$$

ou,

$$P_0 A_{22} m_1 + A_{32} m_1 = P_0 B_2 u_1 + B_3 u_1$$

Como cada elemento de $\bar{X}_0 \oplus X_3$ pode ser expresso de uma Única maneira como uma soma de elementos de \bar{X}_0 e de X_3 temos

$$P_0 A_{22} m_1 = P_0 B_2 u_1 \quad \text{e}$$

$$A_{32} m_1 = B_3 u_1$$

donde

$$A_{32} m_1 \in B_3 \rightarrow m_1 \in M_0 \rightarrow M_1 \subset M_0 \quad (3.23)$$

Suponhamos que $M_{k+1} \subset M_k$. Sendo $m' \in M_{k+2}$ temos, usando (3.9):

$$\exists u' \in U \mid \tilde{A}_{k+1} m' = \tilde{B}_{k+1} u'$$

ou

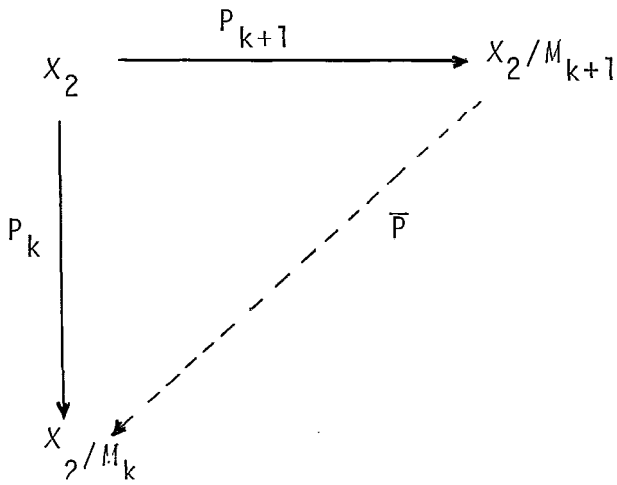
$$P_{k+1} A_{22} m' + A_{32} m' = P_{k+1} B_2 u' + B_3 u'$$

ou

$$P_{k+1} (A_{22} m' - B_2 u') = 0 \quad (3.24.a)$$

$$(A_{32} m' - B_3 u') \quad (3.24.b)$$

Usemos um diagrama comutativo para ilustrar o relacionamento entre os espaços e projeções em estudo.



Como por hipótese $M_{k+1} \subset M_k = \text{Ker } P_k$ podemos assegurar [25] a existencia de \bar{P} tal que $P_k = \bar{P} P_{k+1}$. Premultiplicando (3.24.a) por \bar{P} obteríamos equações idênticas a (3.24) a menos de P_{k+1} que seria substituído por P_k . Voltando com o raciocínio encontraríamos $A_k m' = \tilde{B}_k u'$ ou seja, $m' \in M_{k+1}$ ou seja, $M_{k+2} \subset M_{k+1}$.

Desta maneira, lembrando de (3.23), pelo princípio da indução finita temos provado o que desejávamos.

O.E.D.

LEMA 3.4

"Se $M_i = M_{i+1}$ então $M_{i+j} = M_{i+j+1}$

$\forall j = 1, 2, \dots$ "

PROVA:

Para verificar a validade da expressão quando $j = 1$ seja $m_1 \in M_{i+1}$.

Por definição, $\exists u_1 \in U$ tal que $\tilde{A}_i m_1 = \tilde{B}_i u_1$ ou,

$$P_i A_{22} m_1 + A_{32} m_1 = P_i B_2 u_1 + B_3 u_1$$

Mas $M_i = M_{i+1}$ logo $P_i = P_{i+1}$ e a expressão acima passa a indicar que $\tilde{A}_{i+1} m_1 = \tilde{B}_{i+1} u_1$ ou seja, $m_1 \in M_{i+2}$ ou ainda $M_{i+1} \subset M_{i+2}$. Aplicando o lema anterior vem $M_{i+1} = M_{i+2}$.

Supondo que a expressão vale para $j = k$ temos $M_{i+k} = M_{i+k+1}$. Usando um raciocínio idêntico ao anterior teríamos $M_{i+k+1} = M_{i+k+2}$.

Assim, pelo princípio da indução finita, temos provado o que queríamos.

Q.E.D.

COROLÁRIO 3.2

'Se $M_i = M_{i+1}$ então $M_i = M_{i+k}$

$$\forall k = 2, 3, 4, \dots "$$

Estes resultados, simples mas úteis, garantem que a sequência M_i converge para um subespaço que passaremos a chamar de M^* . Este elemento pode ou não ser nulo.

Supondo $M_k = M^*$ chamaremos $\tilde{A}_k = \tilde{A}^*$, $P_k = P^*$, $\tilde{A}_k = \tilde{A}^*$ etc. O importante papel de M^* na forma fechada do algoritmo vem do

TEOREMA 3.1

"Uma condição necessária e suficiente para o PRP ser solúvel é $\hat{A}^* \subset \tilde{B}^*$

$$E \subset V^* \leftrightarrow \hat{A}^* \subset \tilde{B}^* \quad "$$

PROVA:

a) a condição é necessária, basta usar o lema 3.1

b) a condição é suficiente

Supondo que encontramos M^* na k -ésima posição da sequência definida por (3.9) temos

$$M^* = M_k = M_{k+1} = \{m \in X_2 \mid \tilde{A}_k m \in \tilde{B}_k\}$$

Logo $\tilde{A}^* M^* \subset \tilde{B}^*$ e podemos aplicar o lema 3.2 para concluir pela solubilidade do PRP. Também poderíamos usar o corolário 3.1 e obter $V^* = V_1 X_1 + V_2 M^*$

Q.E.D.

Desta maneira, a forma fechada consiste em calcular M^* , o elemento para o qual converge a sequência dos M_i , e a partir dele verificar a inclusão $\hat{A}^* \subset \tilde{B}^*$. Este procedimento para se determinar a solubilidade do PRP é, sem dúvida, mais rápido e direto do que as formas abertas.

Há uma semelhança grande com o método clássico de se estudar o PRP, quando empregamos um algoritmo para obter V^* e posteriormente verificamos a inclusão $E \subset V^*$. Entretanto o procedimento mostrado nesta seção representa um salto considerável

vel em direção à simplicidade, pois trabalhamos em X_2 , um subespaço com dimensão $n-q-r$ ao invés da tradicional dimensão n do espaço de estados X .

Antes de terminar esta seção é interessante exibir algumas propriedades do subespaço M^* .

LEMA 3.5

"O subespaço M^* tem as seguintes propriedades:

$$A_{22} M^* \subset B_2 + M^* \quad (3.25.a)$$

e
$$A_{32} M^* \subset B_3 \quad (3.25.b)$$

PROVA:

Vamos supor que M^* é atingido no k -ésimo passo da sequência dos M_i : $M^* = M_k = M_{k+1}$. Aplicando a definição de M_{k+1} temos

$$M^* = M_{k+1} \rightarrow \tilde{A}_k M^* \subset \tilde{B}_k$$

$$\rightarrow \forall m \in M^* \quad u \in U \quad \tilde{A}_k m = \tilde{B}_k u$$

Usando a definição de \tilde{A}_k e \tilde{B}_k :

$$P_k A_{22} m + A_{32} m = P_k B_2 u + B_3 u$$

$$\rightarrow \begin{cases} P_k (A_{22} m - B_2 u) = 0 & (3.26.a) \\ A_{32} m - B_3 u = 0 & (3.26.b) \end{cases}$$

$$(3.26.a) \rightarrow A_{22} m - B_2 u \in \text{Ker } P_k = M_k = M^*$$

Logo, $\forall m \in M^*, \exists u \in U, m' \in M^* \mid A_{22} m = B_2 u + m' \rightarrow A_{22} M^* \subset B_2 + M^*$

Como (3.26.b) implica trivialmente (3.25.b) o resultado está provado.

Q.E.D.

As semelhanças com V^* são impressionantes. Recordemos que V^* é o elemento maximal da classe \mathcal{H} composta pelos subespaços (A, B) invariantes contidos em $\text{Ker } C$. M^* por sua vez é um subespaço (A_{22}, B_2) invariante contido em $A_{32}^{-1} B_3$. Aparentemente acontecem com M^* , em escala reduzida pois estamos agora trabalhando em $X_2 \subset X$, as mesmas coisas que acontecem com V^* . Consideremos, inspirados em \mathcal{H} , a classe

$$\underline{\mathcal{H}} = \{M \subset X_2 \mid A_{22} M \subset B_2 + M \text{ e } M \subset A_{32}^{-1} B_3\}$$

Tudo nos leva à conjectura $M^* = \sup \underline{\mathcal{H}}$ ou seja, M^* seria para $\langle A_{22}, B_2, A_{32}^{-1} B_3 \rangle$ exatamente o que V^* é para $\langle A, B, \text{Ker } C \rangle$. Se isso for verdade poderemos, ao invés de usar a sequência dos subespaços M_i , obter M^* aplicando o algoritmo tradicional de V^* às dimensões reduzidas de A_{22} e B_2 . A existência ou não de vantagens computacionais advindas de tal fato é uma questão que se apequena diante do interesse teórico que seria levantado.

Infelizmente, porém, a conjectura é falsa como mostra o

CONTRA-EXEMPLO 3.1

$$A = \begin{bmatrix} \underline{0} & :1 & 0 & 0 & :0 & \underline{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & :0 & 0 & 0 & :0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & :0 & 0 & 1 & :0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & :0 & 0 & 1 & :0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & :0 & 0 & 1 & :1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & :1 & 0 & 0 & :0 & \underline{0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \underline{1} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \underline{0} & .0 & 0 & 0 & .1 & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & :0 & 0 & 0 & :0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

Calculemos M^* usando (3.9)

$$M_0 = \{m \in X_2 \mid A_{32} m \in B_3\} \rightarrow M_0 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$P_0: M_0 \rightarrow X_2/M_0 \rightarrow P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \{m \in X_2 \mid \begin{bmatrix} P_0 & A_{22} \\ \dots & \dots \\ A_{32} \end{bmatrix} m \in \begin{bmatrix} P_0 & B_2 \\ \dots & \dots \\ B_3 \end{bmatrix}\} \rightarrow M_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$P_1 \text{ pode ser representada por } P_1 = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \{m \in X_2 \mid \begin{bmatrix} P_1 & A_{22} \\ \dots & \dots \\ A_{32} \end{bmatrix} m \in \begin{bmatrix} P_1 & B_2 \\ \dots & \dots \\ B_3 \end{bmatrix}\} \rightarrow M_2 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\text{Logo } M^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right\}$$

É muito fácil verificar que, se aplicássemos o algoritmo de V^* para $\langle A_{22}, B_2, A_{32}^{-1} B_3 \rangle$ encontraríamos

$$V_r^* = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\} \neq M^*$$

Este exemplo mostra que, de uma maneira geral $M^* \subset V_r^* = \sup \mathcal{H} r$. Talvez M^* seja o subespaço de controlabilidade maximal [25] contido em $\mathcal{H} r$. Esta área de interessantes indagações teóricas ainda se acha aberta.

111.5 - INFORMAÇÕES ADICIONAIS

Os métodos apresentados nas seções anteriores foram criados com a finalidade de resolver o PRP a partir das novas idéias levantadas pelo teorema 2.2. Eles cumprem essa missão sem calcular explicitamente V^* . Devemos porém observar que esse elemento é obtido como subproduto sempre que chegamos a uma solução positiva para o problema. Quando, por qualquer processo aberto ou fechado, concluimos pela solubilidade do PRP teremos automaticamente a caracterização de V^* . As setas horizontais de qualquer diagrama encimadas por um sim sempre conduzem a $E \subset V^*$ e $V^* = V_1 X_1 + V_2 M_k$. De uma maneira geral, obtemos informações a respeito de V^* somente quando $EC V^*$.

Esta seção trata basicamente do seguinte problema: que se pode dizer do subespaço V^* quando o PRP não é solúvel?

Os algoritmos detectam a impossibilidade $E \notin V^*$ por rêm nada afirmam sobre V^* nessas condições. As setas horizontais com um não conduzem apenas e tão somente a $E \notin V^*$. Agora procuraremos extrair do algoritmo, em qualquer de suas versões, dados sobre a estrutura de V^* mesmo quando $E \notin V^*$. Poderíamos afirmar, por exemplo, que $V_2 M^* \subset V^*$?

LEMA 3.6

"Se $\tilde{A}_i \subset \tilde{B}_i$ então $Q_2 V^* \subset M_{i+1} \forall i = 0, 1, 2, \dots$ "

PROVA:

Seria imediato verificar que o mapa $V_1 Q_1 \times V_2 Q_2$ funciona como a identidade no subespaço $V_1 X_1 \times V_2 X_2$ isto é, $(V_1 Q_1 + V_2 Q_2)x = x \forall x \in V_1 X_1 + V_2 X_2$

Sendo $F \mid (A \times BF)V^* \subset V^*$ e como $V^* \subset \text{Ker } C = V_1 X_1 \times V_2 X_2$ temos $(A + BF)(V_1 Q_1 + V_2 Q_2)V^* \subset V^*$. Esta última expressão, prermultiplicada primeiramente por A_2 e depois por A_3 fornece

$$\begin{aligned} \left[(A_{21} + B_2 F_1)Q_1 + (A_{22} + B_2 F_2)Q_2 \right] V^* &\subset Q_2 V^* = V_2 \\ \left[(A_{31} + B_3 F_1)Q_1 + (A_{32} + B_3 F_2)Q_2 \right] V^* &= 0 \end{aligned}$$

onde $F_1 = FV_1$; $F_2 = FV_2$ e $V_2 = Q_2 V^* \subset X_2$

Assim, sendo v um elemento genérico de V^* podemos escrever

$$(A_{21} + B_2 F_1) Q_1 v + (A_{22} + B_2 F_2) Q_2 v \in V_2 \quad (3.27.a)$$

$$(A_{31} + B_3 F_1) Q_1 v + (A_{32} + B_3 F_2) Q_2 v = 0 \quad (3.27.B)$$

Vamos supor que $\tilde{A}_0 \subset \tilde{B}_0$. Então, dado x_1 genérico em X_1 existe u_1 em U tal que $\tilde{A}_0 x_1 = \tilde{B}_0 u_1$. Para o elemento particular $Q_1 v$ em X_1 temos

$$\exists u \in U \mid \tilde{A}_0 Q_1 v = \tilde{B}_0 u \rightarrow \begin{cases} P_0 A_{21} Q_1 v = P_0 B_2 u & (3.28.a) \\ A_{31} Q_1 v = B_3 u & (3.28.b) \end{cases}$$

$$(3.27.b) \text{ e } (3.28.b) \rightarrow A_{32} Q_2 v = B_3 (-u - F_1 Q_1 v - F_2 Q_2 v) \quad (3.29.a)$$

Lembrando a definição dos M_i e como v é genérico, $V_2 = Q_2 V^* \subset M_0$ o que acarreta $P_0 V_2 = 0$. Multiplicando (3.27.a) por P_0 pela esquerda, usando (3.28.a) e $P_0 V_2 = 0$ vem

$$P_0 B_2 (u + F_1 Q_1 v + F_2 Q_2 v) + P_0 A_{22} Q_2 v \in P_0 V_2 = 0$$

$$P_0 A_{22} Q_2 v = P_0 B_2 (-u - F_1 Q_1 v - F_2 Q_2 v) \quad (3.29.b)$$

As equações (3.29) e a definição dos M_i mostram que $\tilde{A}_0 Q_1 v \in \tilde{B}_0$, logo $Q_1 v \in M_1$ e como v é genérico, $V_2 = Q_2 V^* \subset M_1$.

Desta maneira a implicação é válida para $i = 1$. Suponhamos que ela também o seja para $i = k + 1$, isto é, $\tilde{A}_{k-1} \subset \tilde{B}_{k-1} \rightarrow V_2 \subset M_k$.

Partindo agora de $\tilde{A}_k \subset \tilde{B}_k$ temos

$$\exists u' \in u \mid \tilde{A}_k Q_1 v = \tilde{B}_k u' \rightarrow \begin{cases} P_k A_{21} Q_1 v = P_k B_2 u' & (3.30.a) \\ A_{31} Q_1 v = B_3 u' & (3.30.b) \end{cases}$$

mas é trivial a verificação de que $\tilde{A}_k \subset \tilde{B}_k \rightarrow \tilde{A}_{k-1} \subset \tilde{B}_{k-1}$. Logo $V_2 \subset M_k$ e $P_k V_2 = 0$. Multiplicando (3.27.a) por P_k pela esquerda, usando (3.30.a) e $P_k V_2 = 0$ vem

$$P_k A_{22} Q_2 v = P_k B_2 (-u' - F_1 Q_1 v - F_2 Q_2 v) \quad (3.31.a)$$

$$(3.37.b) \text{ e } (3.30.b) \rightarrow A_{32} Q_2 v = B_3 (-u' - F_1 Q_1 v - F_2 Q_2 v) \quad (3.31.b)$$

$$(3.31) \rightarrow \tilde{A}_k Q_2 v \in \tilde{B}_k \rightarrow Q_2 v \in M_{k+1} \rightarrow V_2 = Q_2 V^* \subset M_{k+1}$$

Pelo princípio da indução finita a implicação é válida $\forall i = 0, 1, 2, \dots$

Q.E.D.

Este resultado não tem aplicação imediata para o que desejamos, apenas auxilia na prova do

LEMA 3.7

$$\text{"Se } \tilde{A}_i \subset \tilde{B}_i \text{ então } V^* \subset V_1 X_1 + V_2 M_{i+1} \\ \forall i = -1, 0, 1, \dots \text{"}$$

PROVA

$$V^* = (V_1 Q_1 + V_2 Q_2) V^* \subset V_1 Q_1 V^* + V_2 Q_2 V^*$$

mas $Q_1 V^* \subset X_1$ e $Q_2 V^* \subset M_{i+1}$ pelo lema anterior, logo

$$V^* \subset V_1 X_1 + V_2 M_{i+1} \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots$$

Lembrando que $\tilde{A}_{-1} = A_{31}$ e $\tilde{B}_{-1} = B_3$ a extensão para $i = -1$ fica elementar.

Estes resultados, além de servirem para o caso do PRP falho, tem um outro significado teórico. Eles estabelecem limites superiores ao tamanho de V^* . Esta limitação é independente de E e de sua possível inclusão em V^* .

A solubilidade do PRP, $E \subset V^*$ representa um limite inferior para V^* . Como acabamos de estabelecer que sempre há um limite superior está explicado porque neste caso V^* fica perfeitamente determinado por $V_1 X_1 + V_2 M^*$.

Outro detalhe interessante: a inclusão de subespaços ($V^* \subset V_1 X_1 + V_2 M_{i+1}$) e a consequente desigualdade de dimensões ($\dim V^* \leq q + \dim M_{i+1}$) não são estritas, isto é, pode haver igualdades. Obviamente a igualdade $V^* = V_1 X_1 + V_2 M_{i+1}$ indicaria $E \subset V^*$, solubilidade do PRP.

A mais imediata das consequências destes resultados é a sua aplicabilidade no caso do PRP falho pois eles fornecem meios de obter informações sobre V^* mesmo quando este não contém E . Para isto,

COROLÁRIO 3.3

"Sendo d o menor inteiro para o qual $\tilde{A}_d \not\subset \tilde{B}_d$ temos $V^* \subset V_1 X_1 + V_2 M_d$ "

Esta inclusão é estrita, não admitindo igualdade pois se assim fosse teríamos $E \subset V^*$.

É interessante notar que a conjectura $V_2 M^* \subset V^*$ formulada no início desta seção não é verdadeira, como poderia ser mostrado em exemplos.

111.6 - CONCLUSOES

Conforme inicialmente prometido, este capítulo apresentou métodos inéditos de ataque ao PRP. Eles são baseados na visão estrutural possibilitada pelo teorema 2.2 e não necessitam do cálculo do subespaço V^* , embora este elemento seja sempre obtido, quase como um subproduto.

Ainda não se pode dizer se estes novos procedimentos são ou não mais eficientes do que o antigo (usar o algoritmo 2.1 ou equivalente para calcular V^* e verificar a inclusão $E \subset V^*$) pois os aspectos computacionais requeridos para isso fogem ao escopo desta tese.

De qualquer maneira, o Único possível inconveniente prático dos novos métodos seria a necessidade de se colocar o sistema na forma canônica representada por (3.3) para poder iniciar os trabalhos. Isso não nos parece, de modo algum, um obstáculo difícil. E, que o fosse, as facilidades advindas do uso da forma (3.3) são extremamente animadoras e não encontram correspondentes no método tradicional. Somente isto justificaria qualquer hipotética dificuldade para inicialmente colocar as matrizes do sistema em estudo na forma 3.3.

Estudar o PRP a partir de matrizes colocadas nessa forma apresenta uma série enorme de vantagens. Já os corolários 2.2, 2.3, 2.4 permitem que uma simples inspeção visual forneça informações preciosas e muitas vezes conclusivas sobre a solubilidade do PRP. E isto seria feito sem necessidade de qual

quer cálculo. Apenas este fato, sem ainda comentar os novos algoritmos tornados possíveis por ela, já seria suficiente para garantir às equações (3.3) a categoria de "Forma Canônica do PRP". Assim como certas formas ajudam a explicitar e visualizar determinadas propriedades, a forma (3.3) facilita sobremaneira o estudo do PRP.

Um aspecto interessante e certamente distintivo dos novos algoritmos é o fato de trabalharem com dimensão reduzida, $n-q-r$, ao passo que o método antigo lida com dimensão n . A maneira direta de encontrar a solução F também seria uma vantagem dos métodos sugeridos.

A análise das semelhanças entre a forma fechada do algoritmo (cálculo de M^* e verificação de $\hat{A}^* \subset \tilde{B}^*$) e o método tradicional (cálculo de V^* e verificação de $E \subset V^*$) permite novas conclusões sobre a forma (3.3). Ela permite que o PRP seja encarado em seu âmago, em sua essência, concentrando no espaço X_2 todas as informações realmente pertinentes e "enconstando ao lado o que não interessa". O "tamanho" das coisas importantes é $n-q-r$.

O papel do subespaço M^* ainda não está totalmente esclarecido. Ele tem propriedades intrigantes e curiosas que devem ser pesquisadas mais profundamente. Suas relações com V^* , por exemplo, ainda não estão bem explicadas. Aparentemente $\dim V^* = q + \dim M^*$ mesmo que $E \not\subset V^*$. O papel de M^* em H^r também merece investigação. Em suma, as características teóricas de M^* são mais desconhecidas do que conhecidas.

Falando ainda dos campos abertos devemos notar que para algumas classes de sistemas os algoritmos mostrados neste capítulo podem ser bastante simplificados. Para sistemas com uma única saída, por exemplo, pode-se provar que $\hat{A}_i \subset \tilde{B}_i \leftrightarrow P_i A_{21} \subset P_i B_2$. Este fato aumentaria bastante a rapidez e a simplicidade dos procedimentos. Essa classe de sistemas deveria ser mais bem estudada e, se possível, expandida.

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÕES
E A TEORIA DA INVARIÂNCIA

IV.1 - OBJETIVOS

A diretriz geral deste capítulo é aplicar os algoritmos desenvolvidos anteriormente, ou qualquer versão modificada deles, para descobrir fatos sobre \mathcal{H} , a família de todos os subespaços (A, B) invariantes contidos no espaço nulo de C . A importância dessa classe de subespaços foi vista e enfatizada no capítulo II.

Além de V^* , de importância capital no PRP, no problema de estabilização da saída, no problema do desacoplamento, na versão geométrica do problema do servomecanismo etc., há ainda outros elementos notáveis na família \mathcal{H} . Dentre esses podemos citar, infelizmente sem maiores detalhes, os subespaços de controlabilidade R , de grande importância teórica no problema da designabilidade arbitrária de polos. O conjunto $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$ de tais subespaços apresenta um único elemento maximal $R^* \subset V^*$. Este subespaço R^* desempenha um papel preponderante nos problemas acima citados, com exceção do PRP.

Outro membro importante da classe \mathcal{H} é o subespaço $V_{\mathcal{Q}}^*$, essencial para a solução do problema de rejeição de perturbações com estabilidade, o PRPE. A idéia básica deste problema é muito clara: trata-se do PRP com o requerimento adicional de es-

tabilidade da malha fechada. Devemos encontrar uma realimentação de estados F que acarrete, além da rejeição de perturbações, o posicionamento de todos os autovalores de $(A + BF)$ no semiplano esquerdo aberto do plano complexo. As soluções para o PRP não tem, em geral, essa propriedade estabilizadora. O PRPE é solúvel se e somente se $E \subset V_g^*$ e F seria uma solução se $(A+BF)V_g^* \subset V_g^*$

Todos os tópicos acima mencionados, de uma maneira rápida, infelizmente, encontram-se bem desenvolvidos e explicados em [25]. É interessante reparar que, na opinião do próprio Wonham, os métodos atuais para obtenção tanto de R^* como de V_g^* não são muito práticos pois envolvem a computação previa de V^* .

Embora o estudo sobre H agora iniciado seja feito em um contexto ainda bastante ligado ao PRP deve ser dito que as metas são bem mais ambiciosas. Como esperamos ter dado a entender acima, a aplicabilidade da teoria da invariância a um vasto e importante campo de problemas de controle é enorme e qualquer informação sobre H é extremamente desejável. Como o conhecimento sobre essa família não é muito grande, restringindo-se quase que tão somente a V^* , R^* e V_g^* é lícito esperar que a abordagem estrutural e inédita de um problema tipicamente tratado pela teoria da invariância, como é o caso do PRP, seja capaz de lançar alguma luz sobre o assunto.

Seja o sistema linear invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + E z(t) & (4.1.a) \\ y(t) = c x(t) & (4.1.b) \end{cases}$$

onde as matrizes e variáveis satisfazem os requisitos habituais. A partir de agora desejaremos verificar se $E \subset V$ onde $V \in \mathcal{H}$ um elemento genérico de \mathcal{H} . Este problema pode ser formulado de uma maneira diferente ao considerarmos a

DEFINIÇÃO 4.1

"Dado um subespaço W no espaço de estados X diremos que $V \in \mathcal{H}$ é uma cobertura para W quando $V \in \mathcal{H}$ e $V \supset W$ ".

Desta maneira o nosso problema se resume a encontrar coberturas, se possível todas, para um dado subespaço $E \subset X$. Tanto o PRP como o PRPE podem ser considerados casos particulares do problema de se encontrar coberturas genéricas para E . Desejamos coberturas que satisfaçam determinadas restrições, como por exemplo a maximalidade de V^* no caso do PRP. Uma ligeira generalização do teorema 2.2 aplica-se a este novo problema.

TEOREMA 4.1

"Existe um elemento $V \in \mathcal{H}$, com $\dim V = v$, tal que $V \supset E$ se e somente se existir uma base do espaço de estados na qual as matrizes $\langle \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{E} \rangle$ que representam o sistema em estudo apresentarem a seguinte forma:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{B}_2 \hat{C}_1 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix}$$

onde \hat{A}_{11} é $(v \times v)$; \hat{A}_{22} é $(n-v \times n-v)$; \hat{B}_1 é $(v \times m)$ etc., e

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \quad ; \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}^T \quad "$$

A prova será omitida por seguir as mesmas linhas já vistas no capítulo II.

Assim a existencia de coberturas está associada à existencia de uma matriz Q não singular tal que a transformação de similaridade dada por $x = Q \hat{x}$ coloque o sistema em uma base onde suas matrizes apresentem a particular estrutura exibida acima.

No capítulo anterior o fato de considerarmos o problema formulado em uma base onde as matrizes $\langle A, B, C, E \rangle$ satisfazem a priori as condições $C = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}^T$ revelou-se bastante favorável pois permitiu o trabalho em espaços com dimensões reduzidas. Faremos o mesmo agora e para isso o sistema sob estudo será descrito por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z \quad (4.2.a)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (4.2.b)$$

onde, como anteriormente, há uma decomposição do espaço de estados: $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ com $\dim X_1 = q$, $\dim X_2 = n-q-r$, $\dim X_3 = r$; X_1 é isomorfo a E ; os mapas $A_{ij}: X_j \rightarrow X_i$ são definidos por $Q_i A V_j$ etc. Ainda uma vez lembramos que a hipótese de uma base inicial onde o sistema seja representado por equações como (4.2)

não é restritiva pois se tal base não existisse então $V^* \not\subseteq E$ e consequentemente não haveria coberturas para E .

Sendo $M \subset X_2$ um subespaço e $X_2/M = \bar{X}$ o espaço quociente definido da maneira usual temos a projeção canônica

$$\begin{aligned} P: X_2 &\rightarrow X_2/M \\ x_2 &\rightarrow Px_2 = \bar{x}_2 = x_2 + M \end{aligned}$$

onde $x_2 + M$ é a classe lateral de x_2 módulo M .

Consideremos, sempre baseados na experiência anterior, os mapas

$$\begin{aligned} \hat{A}_m: X_1 &\rightarrow \bar{X} \oplus X_3 \\ x_1 &\rightarrow \hat{A}_m x_1 = P A_{21} x_1 + A_{31} x_1 \\ \hat{A}_m: X_2 &\rightarrow \bar{X} \oplus X_3 \\ x_2 &\rightarrow \hat{A}_m x_2 = P A_{22} x_2 + A_{32} x_2 \\ \tilde{B}_m: &\rightarrow \bar{X} \oplus X_3 \\ u &\rightarrow \tilde{B}_m u = P B_2 u + B_3 u \end{aligned}$$

Já podemos enunciar o

TEOREMA 4.2

"Existe um elemento V em \mathcal{H} , com $\dim V = v$ e tal que $V \supset E$ se e somente se existir um subespaço $M \subset X_2$ tal que $\dim M = v - q$; $\tilde{A}_m M \subset \tilde{B}_m$ e $\hat{A}_m \subset \tilde{B}_m$ "

$$\exists V \in \mathcal{H} \mid V \supset E \leftrightarrow \exists M \subset X_2 \mid \begin{cases} \dim M = \nu - q \\ \tilde{A}_m \subset M \subset \tilde{B}_m \\ \tilde{A}_m \subset \tilde{B}_m \end{cases}$$

$$\dim V = \nu$$

Embora mais geral do que o caso tratado no capítulo anterior a prova deste resultado segue pari-passu os raciocínios já apresentados, bastando substituir V^* por V , M^* por M etc, e por esta razão será omitida.

Mais uma vez a forma (4.2) revela-se Útil pois este Último teorema garante que as coberturas de E apresentam a particular estrutura

$$V = V_1 X_1 + V_2 M \quad (4.3)$$

e a nossa busca novamente se restringirá a um subespaço M em X_2 , com as Óbvias vantagens decorrentes da dimensão reduzida deste espaço.

Como V^* é o elemento maximal de \mathcal{H} , para haver coberturas V é necessário que $V^* \supset E$, ou seja, em (4.3) devemos ter $M \subset M^*$. E deste momento em diante o paralelismo com o capítulo III cessa, e uma simples generalização dos algoritmos já desenvolvidos já não funciona, pois eles convergem para M^* mas não conseguem ultrapassá-lo e atingir elementos $M \subset M^*$ como é agora o nosso intuito.

O objetivo básico deste capítulo, obter as coberturas de E , pode ser formulado da seguinte maneira: encontrar um

método capaz de gerar todos os subespaços $M \subset M^* \subset X_2$ tais que $A_m M \subset \tilde{B}_m$ e $\tilde{A}_m \subset \tilde{B}_m$.

Sem usar os resultados do teorema 4.2 e lembrando que, se $V = V_1 X_1 + V_2 M$ então $E \subset V \subset \text{Ker } C$ e V será uma cobertura para E desde que seja (A, B) invariante, podemos estabelecer nosso problema em outros termos: encontrar um método capaz de gerar todos os subespaços $M \subset X_2$ tais que, sendo $V = V_1 X_1 + V_2 M$, tenhamos $A V \subset B + V$.

DEFINIÇÃO 4.2

"O subespaço $M \subset X_2$ é chamado gerador quando $V = V_1 X_1 + V_2 M$ é uma cobertura para E "

Desta maneira o nosso objetivo passa a ser o de encontrar todos os geradores. Em outras palavras devemos delimitar perfeitamente a classe \mathcal{M} de todos os geradores:

$$\underline{\mathcal{M}} = \{M \subset M^* \subset X_2 \mid V = V_1 X_1 + V_2 M \text{ é uma cobertura para } E\}$$

Para facilitar a análise a família \mathcal{M} será particionada como

$$\underline{\mathcal{M}} = \underline{\mathcal{M}}_0 \cup \underline{\mathcal{M}}_1 \cup \dots \cup \underline{\mathcal{M}}_i \dots$$

onde $\underline{\mathcal{M}}_i$ é o conjunto dos geradores com dimensão i . A partir de (4.3) vemos que a um gerador i -dimensional corresponde uma cobertura $(q+i)$ -dimensional. A classe $\underline{\mathcal{M}}_0$ pode ser interpretada da seguinte maneira: ela é constituída apenas pelo subespaço nulo

$M = 0$ quando $V = V_1 X_1 = E$ for (A, B) invariante e será vazia no caso contrário, quando $A E \not\subset B + E$.

IV.2 - MÉTODO DE OBTENÇÃO DOS GERADORES

Antes de provar rigorosamente a validade do método apresentaremos suas características básicas, procurando introduzi-las e justificá-las da maneira mais natural e intuitiva possível.

A primeira providencia será, sempre, usar os algoritmos do capítulo anterior para saber se $E \subset V^*$ pois se tal não acontecer, ou seja, o PRP não for solúvel, não haverá coberturas para E . Outra importante consequência desta medida preliminar é a obtenção de M^* pois qualquer dos geradores procurados deve estar contido neste subespaço.

O passo seguinte, a delimitação da classe \underline{M}_0 , é bastante simples pois para isso necessitamos apenas saber se $E \bar{e} (A, B)$ invariante ou não. Isto pode ser feito através da verificação de $A E \subset B + E$, ou pelo uso de um resultado que ainda provaremos, o corolário 4.2, que torna a operação praticamente imediata.

Para a obtenção dos geradores i -dimensionais, a delimitação de \underline{M}_i em outras palavras, devemos encontrar todos os subespaços $M \subset M^*$, de dimensão i , e tais que $V = V_1 X_1 + V_2 M$ seja (A, B) invariante, isto é, $A V \subset B + V$. Impondo esta condição às matrizes do nosso sistema como dadas em (4.2) encontra-

ríamos, entre outras, duas relações que nos interessam:

$$\begin{bmatrix} A_{22} \\ \dots \\ A_{32} \end{bmatrix} M \subset \begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} M + \begin{Bmatrix} B_2 \\ \cdot \\ B_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4.a)$$

$$\begin{Bmatrix} A_{21} \\ \dots \\ A_{31} \end{Bmatrix} \subset \begin{bmatrix} I \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} M + \begin{Bmatrix} B_2 \\ \cdot \\ B_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4.b)$$

onde o símbolo $\{N\}$ representa, como de costume, o subespaço gerado pelas colunas da matriz N .

A equação (4.4.a) tem duas consequências imediatas. A primeira delas, $A_{32} M \subset B_3$, significa que $M \subset M^*$, o primeiro elemento da sequência de subespaços que converge para M^* . Este fato não nos traz qualquer informação, pois já temos um limite mais restritivo para os geradores procurados: $M \subset M^* \subset M_0$. A outra consequência de (4.4.a) será de capital importância. Ela diz que $A_{22} M \subset M + B_2$ ou seja, qualquer gerador $\bar{e} (A_{22}, B_2)$ invariante. Desta maneira, o universo onde devemos procurar as nossas soluções está definido: \bar{e} o conjunto de todos os subespaços (A_{22}, B_2) invariantes de dimensão i . Chamemos esta classe de $\bar{I}_i (A_{22}, B_2)$.

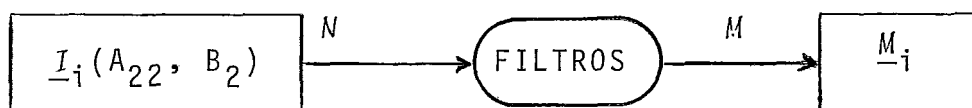
$$\bar{I}_i (A_{22}, B_2) = \{N \subset X_2 \mid \dim N = i \text{ e } A_{22} N \subset N + B_2\}$$

O capítulo V será inteiramente devotado à procura de um método ordenado e eficiente para a obtenção de tais subespaços. Para as presentes necessidades devemos supor que dispomos de uma maneira para caracterizar claramente um elemento qualquer

de $\underline{I}_i (A_{22}, B_2)$.

De uma maneira também imediata podemos extrair da equação (4.4.b) dois fatos. O primeiro deles, $\{A_{31}\} \subset \{B_3\}$, e uma decorrência óbvia (corolário 2.3) da nossa hipótese inicial de solubilidade do PRP e não apresentará qualquer interesse. A outra consequência, $A_{21} \subset M + B_2$ é importante na medida em que impõe restrições que devem ser satisfeitas pelos geradores procurados.

A estrutura básica do método proposto para obtenção dos geradores i -dimensionais consiste em tomarmos um elemento genérico de $\underline{I}_i (A_{22}, B_2)$ e verificarmos se ele satisfaz uma série de restrições, como por exemplo, as restrições oriundas de (4.4). Os subspaços que passarem por esta "filtragem" serão os elementos de \underline{M}_i . De uma maneira esquemática temos



Repetimos que os filtros são constituídos por restrições que necessariamente devem ser satisfeitas por um gerador M , como por exemplo $M \subset M^*$. O filtro mais poderoso e que deve ser sempre o teste final é constituído pelas próprias equações (4.4). A grande vantagem deste sistema de filtros é que em muitos casos uma condição de aplicação simples pode ser tão restritiva a ponto de deixar passar um número muito pequeno, ou mesmo nulo, de elementos de $\underline{I}_i (A_{22}, B_2)$.

EXEMPLO 4.1

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & &
 \end{array}$$

a) Verificação da solubilidade do PRP

$$M^* = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad V^* = V_1 X_1 + V_2 M^* \supset E$$

b) A família $\underline{I}_1 (A_{22}, B_2)$ é constituída por todos os vetores $v \in X_2$ tais que $A_{22} v \in B_2 + \{v\}$. Aplicando técnicas que veremos no capítulo seguinte um vetor genérico com essas propriedades pode ser descrito por

$$v = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

onde k_1, k_2, a são números reais quaisquer. Uma maneira mais elegante de fornecer esse elemento seria através da eliminação de k_1 e k_2 . Para isso, diríamos que v deve pertencer a um "subespaço parametrizado" $S(\alpha)$

$$v \in S(\alpha) = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 \\ -2 & 2 \end{array} \right\}$$

onde $S(\alpha)$ deve ser interpretado como uma família de infinitos subespaços de X_2 , cada um deles correspondendo a um valor real do parâmetro α . Se v pertencer a qualquer um destes subespaços então, e somente então, v pertencerá a I , (A_{22}, B_2) . É fácil constatar a abundância de soluções possíveis.

Um filtro inicial de aplicação muito simples e direta e quase sempre capaz de reduzir a riqueza de soluções encontrada no passo acima é a imposição que os candidatos a geradores devem estar contidos em M^* . Para isto efetuaremos a interseção $M^* \cap S(\alpha)$ que no nosso exemplo fornece

$$M^* \cap S(\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} 1-\alpha \\ \alpha-1 \\ 2\alpha \end{array} \right\}$$

Facilmente verificaríamos que esta família passaria por qualquer outro filtro, especialmente o filtro final representado pelas equações (4.4). Disto poderíamos concluir que a cada valor real de α a família parametrizada $M_1(\alpha) = M^* \cap S(\alpha)$ fornece um subespaço de X_2 que é um dos geradores procurados. Assim a solução será dada por

$$\underline{M}_1 = \{M(\alpha)\} \text{ onde } M(\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} 1-\alpha \\ \alpha-1 \\ 2\alpha \end{array} \right\}$$

É interessante notar que o conjunto de retas de X_2 obtidas a partir de $M(\alpha)$ forma uma superfície bastante peculiar no espaço. Elas se espalham por um plano do qual apenas uma de suas retas não é ocupada. Obviamente este plano é o M^* e a sua única reta que não pode ser um gerador corresponde ao subespaço $M^* \cap B_2$.

d) A obtenção dos geradores bidimensionais é trivial pois eles se reduzem a M^* .

Baseados neste exemplo e nas considerações imediatamente anteriores vamos esquematizar a sequência de operações que permite a obtenção dos geradores i -dimensionais na figura 4.1.

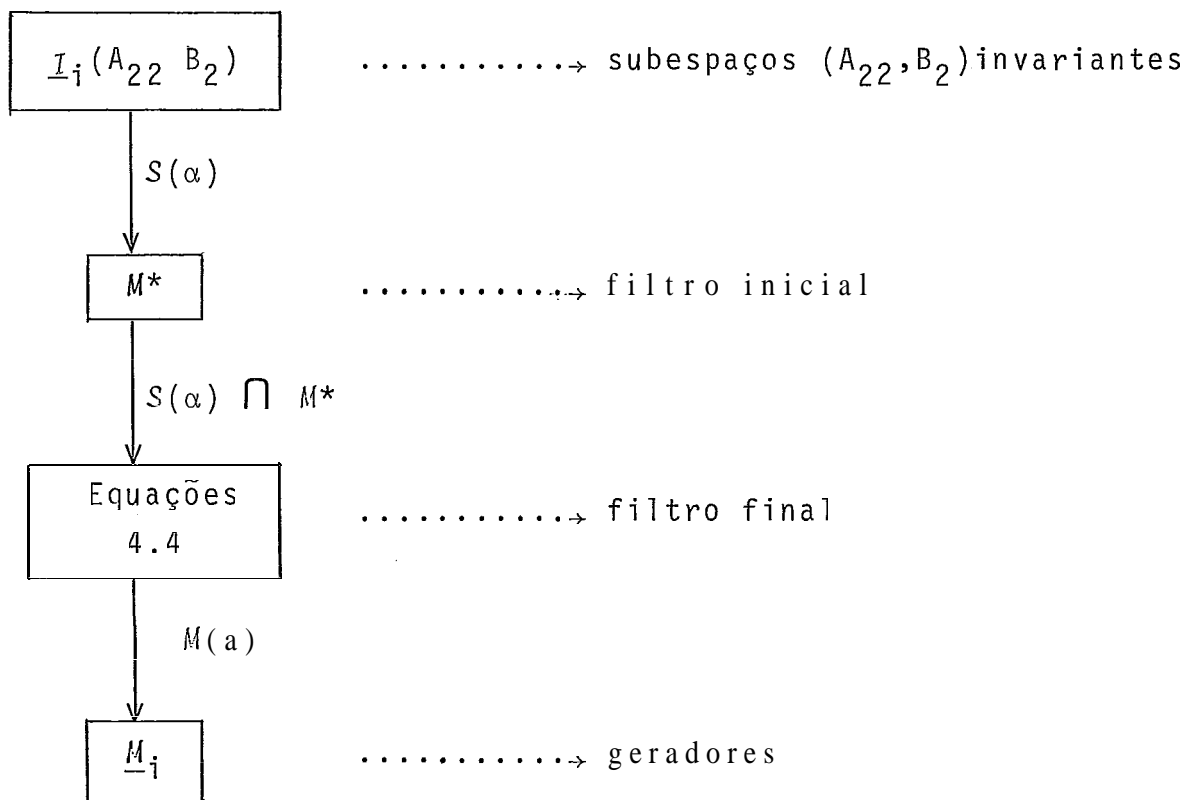


Figura 4.1 - Obtenção dos geradores i -dimensionais

Para estabelecer a validade dessa estrutura devemos provar tres fatos: a) I_i é realmente o "universo" de onde sairão as soluções; b) um gerador deve necessariamente estar contido em M^* ; c) a satisfação das equações (4.4) é uma condição necessária e suficiente para que um determinado subespaço seja gerador.

O item b é uma decorrência Óbvia da forma geral das coberturas V (equação (4.3)) e da maximalidade de V^* . Para trabalharmos no item c) consideremos as equações (4.2), representativas do sistema em estudo e definamos as seguintes transformações lineares:

$$\bar{A}: X_1 \rightarrow X_2 \oplus X_3$$

$$x_1 \rightarrow \bar{A}x_1 = A_{21}x_1 + A_{31}x_1$$

$$\tilde{A}: X_2 \rightarrow X_2 \oplus X_3$$

$$x_2 \rightarrow \tilde{A}x_2 = A_{22}x_2 + A_{32}x_2$$

$$\tilde{B}: u \rightarrow X_2 \oplus X_3$$

$$u \rightarrow \tilde{B}u = B_2u + B_3u$$

$$A_{23}: X \rightarrow X_2 \oplus X_3$$

$$x \rightarrow Q_{23}x = Q_2x + Q_3x$$

O intuito desta formalização é reescrever as equações (4.4) em uma forma mais concisa. Isto será feito ao repararmos que os mapas acima representam as matrizes:

$$\tilde{A} \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{21} \\ \cdots \\ A_{31} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A} \leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{22} \\ \cdots \\ A_{32} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} \leftrightarrow \begin{bmatrix} B_2 \\ \cdots \\ B_3 \end{bmatrix}; \quad Q_{23} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

TEOREMA 4.3

"O subespaço $M \subset X_2$ é um gerador se e somente se ele satisfizer as equações (4.4):

$$\tilde{A} M \subset \tilde{B} + Q_{23} V_2 M \quad (4.4.a)$$

$$A \subset \tilde{B} + Q_{23} V_2 M \quad " \quad (4.4.b)$$

PROVA:

Como obviamente $\text{Ker } C \supset V = V_1 X_1 + V_2 M \supset E$, M será um gerador se e somente se V for (A, B) invariante, ou seja,

$$A(V_1 X_1 + V_2 M) \subset B + V_1 X_1 + V_2 M$$

Para provar a necessidade premultiplicamos a equação acima por Q_{23} e, notando que $Q_{23} A V_1 = \tilde{A}$, $Q_{23} A V_2 = \tilde{A}$, $Q_{23} B = \tilde{B}$, $Q_{23} V_1 = 0$, escrevemos

$$\tilde{A} X_1 + \tilde{A} M \subset \tilde{B} + Q_{23} V_2 M$$

de onde extraímos (4.4.a) e (4.4.b)

Para provar a suficiencia tomamos um vetor $x_1 \in X_1$ genérico. (4.4.b) garante a existencia de $u \in U$ e $m \in M$ tais que

$$A x_1 = \tilde{B} u + Q_{23} V_2 m \quad \text{ou}$$

$$Q_{23} A V_1 x_1 = Q_{23} B u + Q_{23} V_2 m \quad \text{ou}$$

$$Q_{23} (A V_1 x_1 - B u - V_2 m) = 0 \quad \text{donde}$$

$$A V_1 x_1 - B u - V_2 m \in \text{Ker } Q_{23} = V_1 X_1 \quad \text{ou}$$

$$\exists x'_1 \in X_1 \mid A V_1 x'_1 - B u - V_2 m = V_1 x'_1 \quad \text{ou}$$

$$A V_1 x_1 = B u + V_1 x'_1 + V_2 m \quad \text{donde}$$

$$A V_1 X_1 \subset B + V_1 X_1 + V_2 M$$

Partindo de (4.4.a) um raciocínio idêntico nos conduziria a $A V_2 M \subset B + V_1 X_1 + V_2 M$ que em conjunto com a relação precedente fornece $A(V_1 X'_1 + V_2 M) \subset B + V_1 X_1 + V_2 M$

Q.E.D.

Este resultado legitima o uso das equações (4.4) como um filtro final e decisivo para o processo. Deve ser dito que este teorema 4.3 é uma variação do teorema 4.2 obtida pela eliminação da projeção canônica P usada naquele resultado. A primeira consequência importante será

COROLÁRIO 4.1

"Uma condição necessária para um subespaço $M \subset X_2$ ser um gerador é que M seja (A_{22}, B_2) invariante"

PROVA

Sendo m um elemento genérico de M (4.4.a) garante a existencia de $u \in U$ e $m' \in M$ tais que $\tilde{A} m = \tilde{B} u + Q_{23} V_2 m'$.
Aplicando as definições temos

$$A_{22} m + A_{32} m = B_2 u + B_3 u + m' + 0$$

Como $A_{22} m$, $B_2 u$, m' pertencem a X_2 e as demais parcelas são vetores de X_3 a equação acima acarreta

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{22} m = B_2 u + m' \end{array} \right. \quad (4.5.a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{32} m = B_3 u \end{array} \right. \quad (4.5.b)$$

Como m é genérico (4.5.a) implica $A_{22} M \subset B_2 + M$
Q.E.D.

Este resultado, que torna válido o uso de $I_i(A_{22}, B_2)$ como ponto de partida do processo, completa a prova de que podemos usar o método mostrado no diagrama da figura 4.1 para obter M_i , o conjunto de todos os geradores i -dimensionais.

Terminaremos esta seção mostrando uma outras consequência do teorema 4.3 que auxilia na verificação de (A, B) invariância do subespago E .

COROLÁRIO 4.2

"O subespago E será (A, B) invariante se e somente se $\hat{A} \subset \tilde{B}$ "

PROVA

Lembrando que E será (A, B) invariante se e somente se o subespago nulo $M = 0$ for um gerador a aplicação de (4.4) conduz imediatamente ao resultado.

Q.E.D.

Estando o sistema em estudo na forma (4.2), a extrema facilidade de se verificar a condição $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ faz com que este corolário encontre uso na delimitação rápida da classe \underline{M}_0 . Outra aplicação deste resultado será vista na próxima seção.

IV.3 - MODIFICAÇÃO DO FILTRO INICIAL

Nesta seção veremos que em alguns casos o filtro inicial, até agora representado pela intersecção com M^* , pode ser tornado mais poderoso.

Baseados em (4.4.b) encontraremos condições que podem chegar a ser tão restritivas a ponto de deixarem passar um número muito pequeno, ou mesmo nulo, de elementos de $\tilde{x}_i (A_{22}, B_2)$. Às vezes os filtros iniciais modificados serão tão exigentes que o exato conhecimento de todos os subespaços (A_{22}, B_2) invariantes - a etapa mais delicada do método - tornar-se-á praticamente desnecessário.

EXEMPLO 4.2

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & \cdot & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 1 & & 0 & 1 & & 0 & & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdot & 1 & 0 & & 1 & 0 & & 1 & & 0 \\
 0 & \cdot & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 1 & 1 & & -1 & & & & & 0 \\
 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & & 0 & & & & & 0 \\
 -2 & \cdot & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 0 & & 0 & & & & & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & & 0 & & & & & 0 \\
 0 & \cdot & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & & 0 & & & & & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & & & & & & & \\
 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & & & & & & &
 \end{array}$$

Apliquemos primeiramente o método proposto pela figura 4.1, onde M^* é o filtro inicial.

$$a) M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; V^* = V_1 X_1 + V_2 M^* \supset E; \underline{M}_0 = \phi$$

b) A família J , (A_{22}, B_2) será formada por todos os vetores $v \in X_2$ pertencentes ao subespaço parametrizado

$$S(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 2\alpha \\ \alpha^2 - 3\alpha \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 \\ \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

A passagem pelo primeiro filtro pode ser representada por $S(\alpha) \cap M^*$ que forneceria como soluções $S(2)$ ou $S(1/2)$:

$$S(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(1/2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A filtragem final seria feita pelas equações (4.4) onde substituiríamos M por $S(2)$ e $S(1/2)$. Começemos com (4.4.a).

$$\tilde{A} S(2) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} = Q_{23} V_2 S(2) + \tilde{B}$$

$$\tilde{A} S(1/2) = \left\{ \begin{array}{c} 14 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \not\subset \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & -3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\} = Q_{23} V_2 S(1/2) + \tilde{B}$$

Usemos agora (4.4.b) no Único candidato possível,
 $S(2)$:

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \not\subset Q_{23} V_2 S(2) + \tilde{B}$$

Assim concluiríamos pela não existencia de geradores unidimensionais: $\underline{M}_1 = \phi$.

Procuremos outro caminho para chegar a este resultado, com a ajuda da equação (4.4.b). Uma de suas consequências diz que um gerador deve necessariamente satisfazer a relação

$A_{21} \subset M + B_2$, como já foi visto. Supondo que o nosso gerador unidimensional procurado \bar{e} é obtido a partir do vetor $m \in X_2$, a expressão acima pode ser escrita como $A_{21} = m y + B_2 \delta$, onde y e δ são matrizes de dimensões apropriadas. Ainda devemos ter $\gamma \neq 0$ pois o contrário acarretaria $A_{21} = B_2 \delta$ o que uma simples inspeção revela ser impossível. Podemos, portanto, escrever $m = A_{21} y^{-1} - B_2 \delta y^{-1}$ ou seja, $m \in A_{21} + B_2$ e conseqüentemente $M \subset M^* \cap (A_{21} + B_2)$. Este limite superior para os geradores unidimensionais \bar{e} , no nosso exemplo:

$$M^* \cap (A_{21} + B_2) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\}$$

Como este subespaço não satisfaz (4.4.a) concluímos que $\underline{M}_1 = \phi$ sem calcular qualquer elemento de $\underline{I}_1(A_{21}, B_2)$.

Os mecanismos simplificadores que atuaram neste exemplo são, em última análise, decorrentes da existencia de um filtro inicial mais poderoso: $M^* \cap (A_{21} + B_2)$ e não mais M^* apenas. Vejamos sob que condições poderemos empregar este filtro modificado.

COROLÁRIO 4.3

"Supondo que $\tilde{A} \not\subset \tilde{B}$ os geradores M devem necessariamente satisfazer a relação $M \cap (A_{21} + B_2) \neq 0$ "

PROVA

Sendo M um gerador o teorema 4.3 garante que $\hat{A} X_1 \subset \tilde{B} + Q_{23} V_2 M$ e portanto, para todo $x_1 \in X_1$ encontraremos $u \in U$ e $m \in M$ tais que $\hat{A} x_1 = \tilde{B} u + Q_{23} V_2 m$. Seja x_1 tal que $\hat{A} x_1 \notin \tilde{B}$. Isto é possível devido à hipótese $\hat{A} \not\subset \tilde{B}$. Temos em consequência

$$Q_{23} V_2 m = \hat{A} x_1 - \tilde{B} u \neq 0$$

Lembrando a particular forma das matrizes Q_{23} , V_2 , \hat{A} e \tilde{B} esta relação pode ser traduzida por

$$0 \neq m = A_{21} x_1 - B_2 u \quad (4.6.a)$$

$$0 = A_{31} x_1 - B_3 u \quad (4.6.b)$$

De (4.6.a) segue $0 \neq \{m\} \subset A_{21} + B_2$ e assim

$$M \cap (A_{21} + B_2) \neq 0$$

Q.E.D.

Este resultado não tem aplicação imediata no problema que estamos tratando. Ele diz que em todo gerador i -dimensional existe pelo menos um vetor não nulo que pertence também ao subespaço $A_{21} + B_2$. Não podemos, baseados nesta informação, constituir o filtro mais poderoso que andamos procurando, a não ser que nos contentemos com a classe \underline{M}_1 . Com efeito, ao considerarmos um gerador M unidimensional a intersecção não nula de que fala o corolário 4.3 se transforma em uma inclusão e obtemos o desejado fortalecimento do filtro inicial. Podemos inclusive torná-lo ainda mais restritivo do que é sugerido no

resultado anterior se considerarmos o seguinte subespaço de U :

$$F = \{u \in U \mid B_3 u \in A_{31}\}$$

A existencia de tal subespaço é assegurada porque a hipótese inicial de solubilidade do PRP acarreta $A_{31} \subset B_3$ pelo corolário 2.3.

COROLÁRIO 4.4

"Supondo que $\hat{A} \# \tilde{B}$ os geradores unidimensionais M devem necessariamente satisfazer a relação $M \subset M^* \cap (A_{21} + B_2 F)$ "

PROVA

Basta continuar a prova anterior notando que nas equações (4.6) devemos ter $u \in F$.

Q.E.D.

Vemos assim que a existencia de um filtro inicial mais poderoso pode ser assegurada para a delimitação de \underline{M}_1 apenas quando $\hat{A} \not\# \delta$. A situação pode ser esquematizada na figura 4.2.

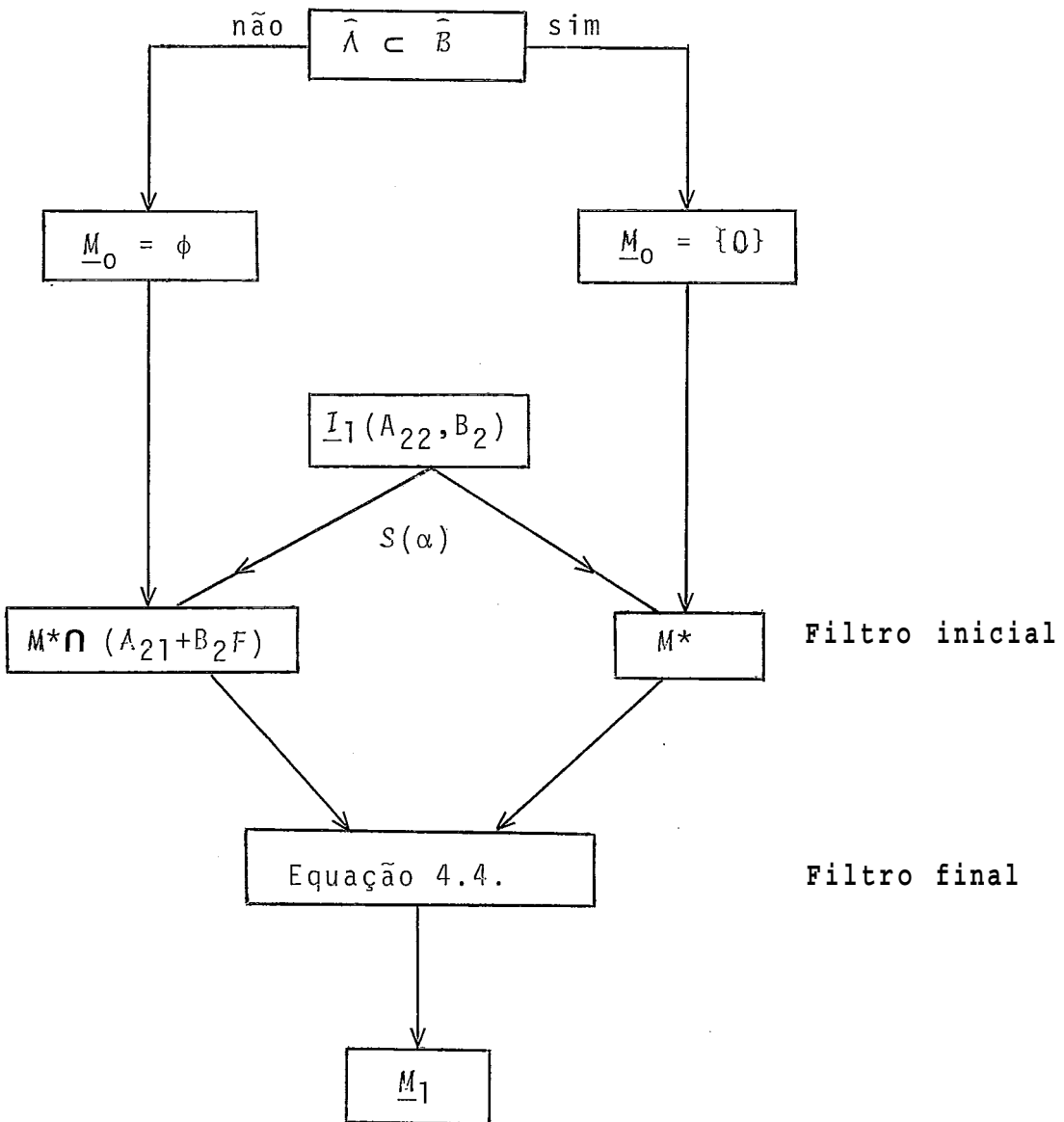


Figura 4.2 - Obtenção dos geradores unidimensionais

Uma consequência imediata do corolário 4.3 pode ser utilizada na obtenção dos geradores i -dimensionais.

COROLÁRIO 4.5

"Supondo que $\hat{A} \notin \tilde{B}$ e $\dim (M^* \cap (A_{21} + B_2 F)) = 1$ os geradores M devem necessariamente satisfazer a relação $(M^* \cap (A_{21} + B_2 F)) \subset M$ "

IV.4 - CONCLUSOES

Neste capítulo analisamos o problema de se determinar todas as coberturas de um dado subespaço E do espaço de estados. A grande vantagem do método apresentado é a transformação do problema de procurar coberturas em um espaço n -dimensional X em um problema de procurar geradores no espaço X_2 de dimensão reduzida $(n-q-r)$. O método se baseia fortemente no conhecimento de uma certa classe de subespaços invariantes: $\mathcal{I}_i(A_{22}, B_2)$. Embora isso possa ser considerado um obstáculo, pois a determinação dessa família é muitas vezes problemática e trabalhosa, devemos levar em conta que na essência mesmo do conceito de cobertura está a idéia de (A, B) invariância. Esse relacionamento é tão estreito que parece ser impossível haver um método de estudo de coberturas que ignore a invariância. E já que ela deve ser utilizada, antes o seja para o par (A_{22}, B_2) com sua dimensão reduzida $n-q-r$ que para o par original (A, B) com dimensão n . Não podemos nos esquecer de que a idéia dos filtros torna algumas vezes desnecessário o conhecimento da família $\mathcal{I}_i(A_{22}, B_2)$. Devemos ainda lembrar que a forma canônica representada pelas equações (4.2) que tão útil havia sido no estudo do PRP continua sendo importante agora, pois ela é a responsável

direta pelas características fundamentais do método.

Terminamos este capítulo notando que parece haver mais coisas a fazer do que as já feitas.

A existencia de filtros iniciais mais poderosos, por exemplo, sō foi assegurada para uma classe razoavelmente restrita de situações. Pesquisa pode e deve ser feita no sentido de encontrar filtros mais polivalentes. Outro aspecto a merecer estudo ē o das coberturas mīnimas de E. Kimura [10] determina a dimensāo e a unicidade ou nāo de tais coberturas. Tudo leva a crer que o método proposto neste capítulo ē capaz de chegar a tais conclusōes de uma maneira, se nāo mais simples, ao menos diferente. Deve-se investigar esses rumos e providenciar as inevitāveis comparaçōes. Finalmente, o método proposto pode gerar todas as coberturas de E mas parece incapaz de distinguir dentre elas as coberturas notāveis como por exemplo V_g^* e R^* . Seria extremamente interessante um método de encontrar os geradores associados a esses importantes elementos. Deve-se, sem divida, pesquisar nesse sentido.

CAPÍTULO VASPECTOS DA TEORIA DA INVARIÂNCIAV.1 - OBJETIVOS

Seja o sistema linear invariante no tempo cujo estado \bar{x} é governado pela equação

$$\dot{\bar{x}} = A \bar{x} + B u \quad (5.1)$$

onde \bar{x} é um vetor do espaço de estados n -dimensional X ; u pertence ao espaço m -dimensional das entradas U ; A e B representam tanto as transformações lineares envolvidas como as matrizes a elas associadas.

Wonham [25] chamou de (A,B) invariante todo subespaço $V \subset X$ para o qual $(A + BF) V \subset V$ para algum mapa $F: X \rightarrow U$ ou, equivalentemente, para o qual $A V \subset B + V$. Seja $\underline{I}(A,B)$ ou simplesmente \underline{I} a família de todos os subespaços (A,B) invariantes de X :

$$\underline{I} = \underline{I}(A,B) = \{V \subset X \mid A V \subset B + V\} \quad (5.2)$$

Atã agora os subespaços (A,B) invariantes apareceram em nossos problemas sempre restringidos de alguma maneira: ora pela inclusão em $\text{Ker } C$, quando originavam a família \underline{I} , ora pela necessidade de conterem E , gerando as coberturas. A importância dessas classes já foi explicada e discutida em capítulos anteriores. Neste que agora se inicia estudaremos a teoria da invariância em seu aspecto mais puro, totalmente desprovido de

qualquer restrição e representado pela própria família \mathcal{I} . Nossa meta será encontrar todos os subespaços (A,B) invariantes associados a uma equação como (5.1). Uma aplicação evidente disto seria a delimitação da família $\mathcal{I}(A_{22}, B_2)$, uma peça chave para o problema das coberturas visto no capítulo IV.

Para um estudo sistemático da família \mathcal{I} será conveniente particioná-la, como

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \dots \cup \mathcal{I}_{n-1}$$

onde \mathcal{I}_i representa o conjunto dos subespaços (A,B) invariantes i -dimensionais.

V.2 - DETERMINAÇÃO DA FAMÍLIA \mathcal{I}_1

Cada subespaço (A,B) invariante unidimensional é representado por uma reta em X e para caracterizá-la basta determinar um de seus vetores. Isto será feito de uma maneira bastante particular, como passamos a ver agora.

DEFINIÇÃO 5.1

"Dadas $A: X \rightarrow X$ e $B: U \rightarrow X$ o vetor não nulo $v \in X$ é chamado supervetor de A com relação a B se existir um número real α tal que $(A - \alpha I)v \in B$. Tal escalar será chamado supervalor de A com relação a B "

Estes conceitos formam obviamente uma extensão da idéia de autovetores e autovalores. Estes seriam os supervetores e supervalores de A com relação a $B = 0$. No caso mais geral

de $B \neq 0$ os autovetores v e os autovalores λ serão sempre supervetores e supervalores, pois $(A - \lambda I)v = 0 \in B \forall B$, mas não necessariamente os Únicos.

Seria imediato verificarmos que cada supervetor de A com relação a B pertence a um subespaço (A, B) invariante de dimensão 1 e, reciprocamente, todos os vetores de um elemento genérico em \underline{I}_1 serão supervetores. Desta maneira fica estabelecida uma conexão entre os supervetores de A com relação a B e os subespaços (A, B) invariantes unidimensionais. Podemos finalmente dizer que o problema de encontrar os membros da família \underline{I}_1 , reduz-se a uma procura de supervetores.

O primeiro passo no problema de se encontrar os autovetores de uma matriz \tilde{e} sempre o cálculo de seus autovalores λ que são os números (nem todos reais) que satisfazem a equação $\det(A - \lambda I) = 0$. Devemos notar que os autovalores formam um conjunto finito chamado espectro e designado por $\sigma(A)$ ou simplesmente σ . Os supervalores não formam um conjunto finito \emptyset , como veremos.

PROPRIEDADE 5.1:

"Dadas A e B , para todo α real existe um vetor não nulo $v \in X$ tal que $(A - \alpha I)v \in B$ "

PROVA:

Se $\alpha \notin \sigma$ o mapa $(A - \alpha I)$ é inversível e podemos usar $v \in (A - \alpha I)^{-1}B$. Se $\alpha \in \sigma$ podemos usar um autovetor $v \in \text{Ker}(A - \alpha I)$.

Esta propriedade mostra que qualquer real α é um supervalor de A com relação a B . A busca α que nos propomos agora fica, desta maneira, mais complexa que a busca de autovetores pois devemos procurar os supervetores associados a cada número real. O conjunto de todos os supervetores associados a um real α será designado por $V(\alpha)$:

$$V(\alpha) = \{v \in X \mid (A - \alpha I)v \in B\} \quad (5.3)$$

A verificação de que $V(\alpha)$ é um subespaço de X para todo α real é direta. Chamando $A - \alpha I = A_\alpha$, por simplicidade, se $\alpha \notin \sigma(A)$ então A_α é inversível e o subespaço $V(\alpha)$ tem a mesma dimensão de B . Se $\alpha \in \sigma(A)$ então $\dim V(\alpha) \geq \dim B$ como se provaria facilmente, e com a igualdade ocorrendo sob determinadas condições bem definidas que serão vistas oportunamente.

Lembrando que o objetivo básico desta seção, delimitar a família \underline{I}_1 , passou a ser encontrar o conjunto de todos os supervetores de A com relação a B vamos designar esse conjunto por SV :

$$SV = \{\text{supervetores de } A \text{ com relação a } B\}$$

ou
$$SV = \{v \in X \mid A\{v\} \subset B + \{v\}\}$$

ou
$$SV = \{v \in X \mid (A - \alpha I)v \in B \text{ para algum real } \alpha\} \quad (5.4)$$

A caracterização de SV por meio de (5.4) pode levar a confusões com a definição simbólica de $V(\alpha)$. Em (5.3) o α é um parâmetro fixo.

Em (5.4) a não \bar{e} fixo e deve ser considerado como percorrendo todo o corpo real. Note-se ainda que (5.3) define um "subespaço parametrizado" no sentido de que, a cada valor de α , $V(\alpha)$ será um subespaço de X . Já a família SV não tem necessariamente a estrutura de subespaço vetorial como pode ser visto no

EXEMPLO 5.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad m_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad m_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $B + \{m_1\} = B + \{m_2\} = X$ temos que $A\{m_i\} \subset B + \{m_i\}$; $i = 1, 2$ e tanto m_1 como m_2 pertence a SV, o que não aconteceria com $m_3 = m_1 + m_2$ pois $A\{m_3\} \not\subset B + \{m_3\}$.

Dentre todos os valores reais que podem ser assumidos por α em (5.4) os autovalores de A são especialmente críticos pois tornam não singular a matriz $(A - \alpha I)$ e por esta razão merecem um tratamento especial. O conjunto de todos os supervetores associados a autovalores reais de A será designado por $SV(\alpha \in \mathbb{R})$

$$SV(\alpha \in \mathbb{R}) = \{v \in X \mid (A - \alpha I)v \in B \text{ para algum } \alpha \in \sigma_r\}$$

onde $\sigma_r = \mathbb{R} \cap \mathbb{C}$ é o conjunto dos autovalores reais de A . Obviamente temos $SV(\alpha \in \mathbb{R}) = \emptyset$ se e somente se $\sigma_r = \emptyset$. Sendo

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, $0 \leq r \leq n$ os elementos de σ_r teremos

$$SV(\alpha \in \sigma) = V(\lambda_1) \cup V(\lambda_2) \dots \cup V(\lambda_r) \quad (5.5)$$

onde as dimensões dos subespaços $V(\lambda_i)$ não são necessariamente iguais a m , a dimensão de B . De uma maneira análoga poderíamos definir $SV(\alpha \neq 0)$ como sendo o conjunto de todos os supervetores associados a números reais que não sejam autovalores de A e estabelecer a decomposição

$$SV = SV(\alpha \in \sigma) \quad \cup \quad SV(\alpha \notin \sigma) \quad (5.6)$$

$SV(\alpha \neq 0)$ é claramente constituída pela união de todos os subespaços $V(\alpha)$ obtidas quando a percorre o conjunto $R - \sigma_r$. Nestas condições a matriz $(A - \alpha I)^{-1}$ tem sentido e podemos escrever

$$V(\alpha) = \text{Im} [(A - \alpha I)^{-1} B] = \{(A - \alpha I)^{-1} B\} \quad \forall \alpha \in R - \sigma_r$$

Temos assim uma expressão onde a entra como parâmetro e que serve para caracterizar a família $SV(\alpha \neq 0)$ quando se faz a percorrer $R - \sigma_r$. A possível extensão desse método para tentar englobar o caso $a \in \sigma$, conseguindo portanto gerar toda a classe SV , fica, infelizmente, comprometida pois a matriz $(A - \alpha I)^{-1} B$ é geralmente constituída de expressões racionais em a e isto causa problemas quando a assume valores que anulam denominadores, o que decerto ocorrerá quando $a \in \sigma$. O ideal seria encontrar uma forma dependente do parâmetro a e que tenha significado para qualquer valor real de a . A eliminação dos denominadores com a consequente obtenção de matrizes puramente polinomiais em a pode resolver esse inconveniente e será a ideia básica do que segue. Seja $M(\alpha)$ a matriz adjunta de A definida como

$$M(\alpha) = \Delta(\alpha) (A - \alpha I)^{-1} \quad (5.7)$$

onde $\Delta(\alpha) = \det(A - \alpha I)$ é o polinômio característico de A . $M(\alpha)$ é uma matriz polinomial ($n \times n$). Sendo $V_0(\alpha)$ a matriz polinomial ($n \times m$) definida como $V_0(\alpha) = M(\alpha) B$ temos

PROPRIEDADE 5.2

"Se $a \notin \sigma_r$ então $V(\alpha)$ é o subespaço gerado pelas colunas de $V_0(\alpha)$ ou seja: $V(\alpha) = \{V_0(\alpha)\}$ "

PROVA

Como $a \notin \sigma_r$, $V(\alpha) = \{(A - \alpha I)^{-1} B\} = \left\{ \frac{1}{\Delta(\alpha)} M(\alpha) B \right\} = \left\{ \frac{1}{\Delta(\alpha)} V_0(\alpha) \right\} = \{V_0(\alpha)\}$ pois $\frac{1}{\Delta(\alpha)} \in \mathbb{R}$ ($\Delta(\alpha) \neq 0$)

Q.E.D.

Este resultado garante a existência de uma forma geral $V(\alpha) = \{V_0(\alpha)\}$ válida para qualquer $a \notin \sigma_r$. Como $V_0(\alpha)$ é agora uma matriz polinomial, a expressão $V_0(\lambda_i)$ onde $\lambda_i \in \sigma_r$ tem sentido matemático assegurado. Resta apenas saber se $\{V_0(\lambda_i)\} = V(\lambda_i)$ como seria de se desejar. A resposta é: nem sempre.

PROPRIEDADE 5.3

"Se $\lambda_i \in \sigma_r = \mathbb{R} \cap \sigma_r$ então a imagem da matriz $V_0(\lambda_i)$ estará contida em $V(\lambda_i)$ "

PROVA

Para um a real e genérico temos $(A - \alpha I)V_0(\alpha) = (A - \alpha I)M(\alpha)B = \Delta(\alpha)B$ (usando (5.7)) e portanto $(A - \alpha I)\{V_0(\alpha)\} \subset B$. C.Q.D.

mo esta expressão vale $\forall a \in R$ temos,

diretamente,

$$\{V_0(\lambda_i)\} \subset V(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i \in \sigma_r$$

Q.E.D.

É muito fácil encontrarmos casos onde $\{V_0(\lambda_i)\} \neq V(\lambda_i)$. Se, por exemplo, A for cíclica haverá um único autovetor associado a cada $\lambda_i \in \sigma_r$ e as colunas da matriz $M(\lambda_i)$ serão todas constituídas exatamente desse autovetor [6]. Desta maneira $\dim \{V_0(\lambda_i)\} = \dim \{M(\lambda_i)B\} = 1$. Mas como foi visto no raciocínio imediatamente posterior a (5.4) $\dim V(\alpha) \geq \dim B = m$ $\forall a \in R$ e assim se monta o caso.

Este arrazoado mostra que precisamos substituir $V_0(\alpha)$ por alguma outra matriz polinomial $V(\alpha)$ isenta dos inconvenientes da propriedade 5.3. Desejaríamos que $V(\alpha) = \{V(\alpha)\}$ $\forall a \in R$. Tal matriz $V(\alpha)$ existe e para bem caracterizá-la precisaremos de algumas propriedades sobre matrizes polinomiais (m.p.).

DEFINIÇÃO 5.2

"Dada a m.p. $N(\alpha)$ ($n \times m$), se for possível escrever

$$N(\alpha) = D(\alpha) Q(\alpha)$$

onde $D(\alpha)$ é uma m.p. ($n \times m$) e $Q(\alpha)$ é uma m.p. ($m \times m$) diremos que $D(\alpha)$ é um divisor de $N(\alpha)$ e $Q(\alpha)$ é um quociente"

Lembremos que uma m.p. $U(\alpha)$ ($m \times m$) será chamada unimodular quando o seu determinante for um escalar não nulo

independente de a . Uma matriz unimodular será sempre inversível e sua inversa será também uma m.p. unimodular.

DEFINIÇÃO 5.3

"Dada a matriz polinomial $N(\alpha)$ ($n \times m$) se sô for possível fatorá-la em

$$N(\alpha) = D(\alpha) Q(\alpha)$$

quando $Q(\alpha)$ ($m \times m$) é unimodular diremos que $N(\alpha)$ é irredutível. Se $Q(\alpha)$ não for unimodular $N(\alpha)$ será redutível".

Na seção V.3 mostraremos que dada uma m.p. qualquer $N_0(\alpha)$ ($n \times m$) é sempre possível fatorá-la em $N_0(\alpha) = N(\alpha) Q(\alpha)$ onde $N(\alpha)$ ($n \times m$) é irredutível e será chamada de divisor irredutível (d.i.) de $N_0(\alpha)$. Os d.i. de uma dada $N_0(\alpha)$ não são únicos mas esse fato não nos atrapalhará. Na seção seguinte apresentaremos um algoritmo para obtenção dos d.i. e investigaremos as consequências de sua não unicidade.

A aplicação desses conceitos de matrizes polinomiais ao problema de determinação dos supervetores através da classe SV começa a ser visto através do

LEMA 5.1

"Séndo $V(\alpha)$ um divisor irredutível qualquer de $V_0(\alpha) = M(\alpha)B$ teremos $\{V(\alpha)\} \subset V(\alpha)$ para todo a real".

PROVA:

Sendo $V(\alpha)$ um divisor de $V_0(\alpha)$ temos $V_0(\alpha) = V(\alpha) Q(\alpha)$. Como pela definição de $V_0(\alpha)$ o seu rank (no anel dos polinômios) é m devemos ter $\text{rank } Q(\alpha) = m$ e portanto $Q^{-1}(\alpha)$ existe e é uma matriz racional pois $Q(\alpha)$ não é necessariamente unimodular. Assim temos $V(\alpha) = V_0(\alpha) Q^{-1}(\alpha) = M(\alpha) B Q^{-1}(\alpha)$. Premultiplicando esta igualdade por $(A - \alpha I)$ e lembrando (5.7) vem

$$(A - \alpha I)V(\alpha) = (A - \alpha I)M(\alpha)B Q^{-1}(\alpha) = \Delta(\alpha) B Q^{-1}(\alpha)$$

$$(A - \alpha I)V(\alpha) = B \Delta(\alpha) Q^{-1}(\alpha)$$

Como $V(\alpha)$ e $(A - \alpha I)$ são matrizes polinomiais, a matriz $\Delta(\alpha) Q^{-1}(\alpha)$ também o será e a expressão acima passa a poder ser encarada não apenas como uma relação entre matrizes polinomiais mas também, e principalmente, como uma relação entre matrizes numéricas que tem validade para todo valor real do parâmetro α (nao há mais o perigo de se anular denominadores). Desta maneira a expressão acima acarreta

$$(A - \alpha I) \{V(\alpha)\} \subset B \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou} \quad \{V(\alpha)\} \subset V(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Q.E.D.

Em nenhum lugar da prova foi necessário usar a irreduzibilidade do divisor. Assim este resultado pode ser tornado mais forte ao ser provado para divisores quaisquer. A necessidade dos d.i. aparecerá em breve.

Antes de provar o teorema final precisamos estabelecer algumas propriedades do subespaço $V(\alpha)$ definido por (5.3).

Sendo $W \subset X$ um subespaço e $M: X \rightarrow X$ uma transformação linear podemos definir

$$M^{-1}W = \{x \in X \mid Mx \in W\}$$

O conjunto $M^{-1}W$ é um subespaço e tem existência assegurada independentemente de M ser ou não inversível. Aplicando esta notação para o caso de $V(\alpha)$ como definido em (5.3) teremos $V(\alpha) = A_\alpha^{-1}B$ onde $A_\alpha = A - \alpha I$. De [25] página 6, e usando $\{A_\alpha\} = \text{Im } A_\alpha = A_\alpha$ temos

$$\begin{aligned} \dim V(\alpha) &= \dim A_\alpha^{-1}B = \dim (\text{Ker } A_\alpha) + \dim (B \cap A_\alpha) \\ &= \dim (\text{Ker } A_\alpha) + \dim(A_\alpha) + \dim B - \dim(B + A_\alpha) \\ \dim V(\alpha) &= n + \dim B - \dim (B + A_\alpha) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Como $\dim (B + A_\alpha) \leq n$ temos $\dim V(\alpha) \geq \dim B$ e provamos a

PROPRIEDADE 5.4

"Para todo α real, $\dim V(\alpha) \geq \dim B$ "

É interessante saber sob que condições haverá igualdade de dimensões.

PROPRIEDADE 5.5

"Uma condição necessária e suficiente para que

$$\dim V(\alpha) = \dim B \quad \forall \alpha \in R \quad \bar{B} + A_\alpha = X \quad \forall \alpha \in \sigma_r = R \cap \mathfrak{o}'$$

PROVA

Se $\dim V(\alpha) = \dim B \quad \forall \alpha \in R$ então, por (5.8), $\dim (B + A_a) = n$ para todo a real e em particular para os autovalores reais de A .

Se $B + A_\alpha = X$ para $a \in \sigma_r$ então, por (5.8), $\dim V(\alpha) = \dim B \quad \forall \alpha \in R \cap \mathfrak{o}$. Mas se $a \notin \mathfrak{o}$ então $\text{Ker } A_\alpha = 0$, $A_a = X$ e $\dim V(\alpha) = \dim B$

Q.E.D.

Estamos finalmente em condições de estabelecer o resultado mais importante desta seção:

TEOREMA 5.1

"Sendo $V(\alpha)$ um divisor irreduzível qualquer de $V_0(\alpha) = M(\alpha) B$ uma condição necessária e suficiente para $\{V(\alpha)\} = V(\alpha) \quad \forall \alpha \in R \quad \bar{A}_\alpha + B = X \quad \forall \alpha \in \sigma_r$ "

PROVA

Sendo $V(\alpha)$ um divisor de $V_0(\alpha)$ o lema 5.1 diz que $\{V(\alpha)\} \subset V(\alpha)$. Sendo $V(\alpha)$ uma m.p. irreduzível $(n \times m)$ temos, por [20] página 71, $\text{rank } V(\alpha) = m \quad \forall \alpha \in R$ logo $\dim \{V(\alpha)\} = m \quad \forall \alpha \in R$. Desta maneira, $\{V(\alpha)\} = V(\alpha)$ se e somente se $\dim V(\alpha) = m = \dim B$ para todo a real. Usando a propriedade 5.5 temos provado o que queríamos.

Q.E.D.

Vamos resumir a situação. Se os dados do sistema em estudo são tais que $A_\alpha + B = X$ quando $\alpha \in \sigma_r$, ou seja quando α é qualquer um dos autovalores reais de A , então o subespaço $V(\alpha)$ pode ser sempre obtido a partir da matriz $V(\alpha)$: $V(\alpha) = \dots \{V(\alpha)\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Isto significa que podemos proceder sempre da mesma maneira para calcular os supervetores associados a um dado número real, seja este um autovetor de A ou não. Em outras palavras, as famílias $SV(\alpha \in 0)$ e $SV(\alpha \notin 0)$ podem ser obtidas de maneira idêntica e isto acarreta a existência de um modo uniforme de se caracterizar todos os elementos da família SV , os procurados supervetores. Obviamente SV será constituída pela união de todos os subespaços $V(\alpha)$ obtidos quando α percorre o corpo dos reais: $SV = \bigcup V(\alpha)$.

Analisemos o que ocorre quando a condição do teorema 5.1 falha. Se existir um autovalor real λ_i tal que $A_{\lambda_i} + B \neq X$ teremos, por (5.8), $\dim V(\lambda_i) > \dim B$ e $V(\lambda_i)$ não poderá ser obtido a partir de $\{V(\lambda_i)\}$, devendo ser calculado separadamente. Os subespaços $V(\alpha)$ correspondentes aos números reais que não estejam em σ podem continuar a ser calculados através da matriz $V(\alpha)$ e a família $SV(\alpha \neq 0)$ seria a união de todos eles. Para $\alpha \in \sigma_r$ teríamos $SV(\alpha \in 0) = V(\lambda_1) \cup V(\lambda_2) \dots \cup V(\lambda_r)$.

Vejamos agora duas propriedades que se encarregarão de traduzir a condição $A_a + B = X$ em termos mais familiares. Suas provas são adaptações muito simples e diretas de um resultado de [25], página 45, usado em um outro contexto e por isso serão omitidas.

PROPRIEDADE 5.6

"Uma condição suficiente para que $B + A_{\alpha} = X$
 $\forall a \in \mathbb{O}_r$ é que o par $\langle A, B \rangle$ seja controlável"

PROPRIEDADE 5.7

"Uma condição suficiente para que $\dim V(\alpha) = \dim B$
 $\forall a \in \mathbb{R}$ é que $\langle A, B \rangle$ seja controlável. Se $\sigma_r = 0 \in \mathbb{R}$
 a condição será também necessária".

Esta insuspeita conexão com controlabilidade realmente traz a análise do problema para um terreno conhecido e permite a elaboração de um diagrama onde todas as informações nascidas destes últimos resultados sejam explicitadas de uma maneira clara. (Ver figura 5.1 na página seguinte).

Resta comentar que para a obtenção da adjunta $M(\alpha)$ podemos aplicar os algoritmos de Fadeev [6] ou o do Leverrier [26] ou ainda qualquer outro. A determinação dos divisores irreduzíveis $V(\alpha)$ será estudada em V.3. E finalmente, quando a não controlabilidade do sistema for causada por autovalores complexos o cálculo dos supervetores não se complica e pode ser feito pela união de todos os $V(\alpha)$.

V.3 - DETERMINAÇÃO DOS DIVISORES IRREDUTÍVEIS

Começaremos mencionando de uma maneira breve alguns fatos sobre matrizes polinomiais. Maiores detalhes podem ser encontrados em Gantmacher [6] capítulo VI ou Rosenbrock

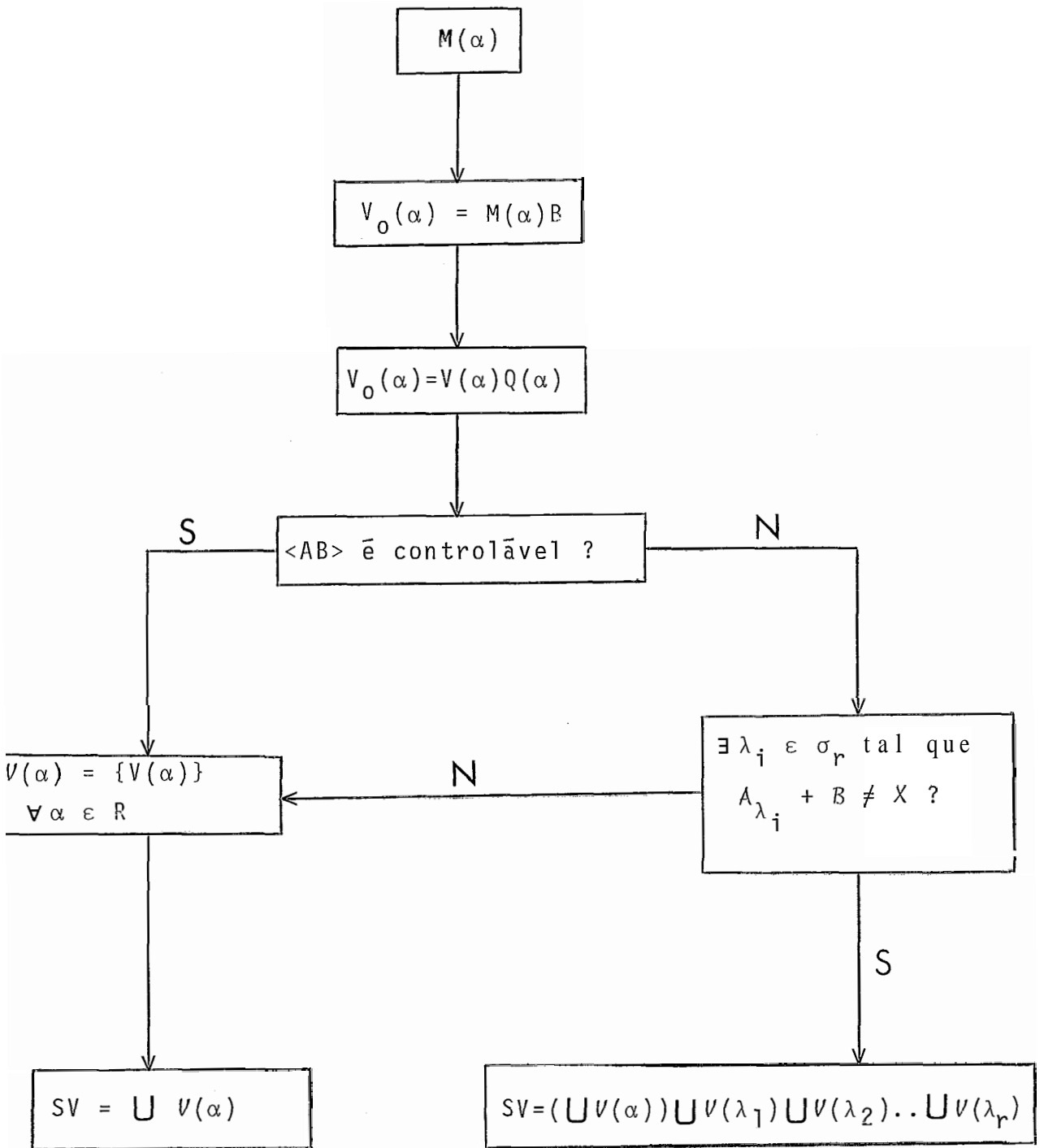


Figura 5.1 - Método para obtenção dos supervetores

|20| seção 1.1 por exemplo. Sempre que possível representaremos a m.p. $M(\alpha)$ simplesmente por M .

DEFINIÇÃO 5.4 |6|

"As m.p. M e N com dimensões $(n \times m)$ são chamadas
1) coluna equivalentes; 2) linha equivalentes 3) equivalentes; se

$$1) M = N D$$

$$2) M = E N$$

$$3) M = E N D$$

respectivamente, onde E e D são m.p. unimodulares com dimensões apropriadas".

TEOREMA 5.2 |20|

"Dada a m.p. $M(n \times m)$ com $n \geq m$ existem matrizes unimodulares E e D tais que a matriz $S(M) = E(\alpha) M(\alpha) D(\alpha)$, chamada forma de Smith da m.p. M , tem as seguintes propriedades:

$$a) S(M) = H(\alpha) \text{ se } n = m$$

$$b) S(M) = \begin{bmatrix} H(\alpha) \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ se } n > m$$

onde $H(\alpha)$ é uma matriz diagonal tendo como elementos da diagonal principal os chamados polinômios invariantes de M , $p_i(\alpha)$; se $\text{rank } M(\alpha) = r$ haverá r polinômios invariantes não nulos que serão mônicos e ocuparão as r primeiras posições da diagonal principal; os $m-r$ últimos elementos dessa diagonal serão nulos; cada $p_i(a)$ divide $p_{i+1}(a)$ para $i = 1, 2, \dots, r-1$; cada $p_i(a)$ é dado por:

$$p_i(\alpha) = \frac{D_i(\alpha)}{D_{i-1}(\alpha)} \quad i = 1, 2, \dots, r$$

onde $D_0(\alpha) = 1$ e $D_i(\alpha)$ é o máximo divisor comum dos menores de ordem i de M

Vemos assim que a toda m.p. podemos associar sua forma de Smith, que lhe é equivalente e que pode ser encarada como uma forma canônica onde a estrutura de M é apresentada de maneira mais simples. por outro lado, se duas m.p. M e N são equivalentes elas apresentarão a mesma forma de Smith que passa a ser assim a característica comum entre todas as matrizes equivalentes. Este último resultado é assegurado por

TEOREMA 5.3 [6]

"Duas m.p. M e N são equivalentes se e somente se tiverem os mesmos polinômios invariantes".

Passemos agora a aplicar estas idéias às m.p. vistas na seção anterior, com o intuito de encontrar divisores irredutíveis para uma dada m.p. $M_0(\alpha)$ ($n \times m$)

LEMA 5.1

"Sendo $M(\alpha)$ uma m.p. ($n \times m$), as seguintes condições são equivalentes:

- a) $M(\alpha)$ é irredutível
- b) $\text{rank } M(\alpha) = m \quad \forall a \in R$
- c) $S(M) = [I_m : 0]^T$

$$d) \exists N(\alpha) (n \times n-m) \mid S[M : N] = Im$$

$$e) \exists P(\alpha) (m \times n) \mid P(\alpha) M(a) = Im "$$

Uma prova para este resultado pode ser encontrada em [20] página. 71 onde o assunto é tratado em um outro contexto.

Apresentaremos agora uma série de resultados sobre as m.p. irredutíveis $(n \times m)$. Alguns destes resultados virgo sem as provas, quer por serem elas óbvias, quer por não serem eles cruciais para o desenvolvimento do que queremos.

COROLÁRIO 5.1

"Todas as m.p. irredutíveis são equivalentes e seus polinômios invariantes são unidades".

COROLÁRIO 5.2

"Toda a m.p. irredutível é sempre linha equivalente à sua forma de Smith, i.e., sendo M irredutível, existe E unimodular tal que $E M = S(M) = [Im : 0]^T$ ".

TEOREMA 5.4

"Dada a m.p. $M_0(n \times m)$ é sempre possível fatorá-la como

$$M_0(\alpha) = M(\alpha) Q(\alpha)$$

onde o divisor $M(n \times m)$ é irredutível e o quociente A tem os mesmos polinômios invariantes que M_0 ".

PROVA:

Sejam as matrizes unimodulares E e D tais que

$$S(M_0) = E M_0 D = \begin{bmatrix} H \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obviamente é possível escrevermos $S(M_0) = X Y$ on $X = [\text{Im} : 0]^T$ e $Y = H$. Desta maneira $M_0 = F^{-1} X Y D^{-1}$. Dada a forma particular de X e sendo F^{-1} unimodular temos que $E^{-1} X$ é irredutível. Como os polinômios invariantes de Y são claramente os mesmos de M_0 , se chamarmos $E^{-1} X = M$ e $Y D^{-1} = Q$ temos prova do o que queríamos.

Q.E.D.

Este resultado assegura a existencia dos d.i. mas não garante a sua unicidade. De fato, como há diversos caminhos para se colocar uma m.p. em sua forma de Smith, haverá vários E e D , e conseqüentemente vários possíveis pares M e Q . Em exemplos pode-se encontrar d.i. de uma mesma M_0 que tem até graus diferentes !

O problema se complica ao constatarmos, através de exemplos, que o teorema 5.4 não fornece a única maneira de se encontrar os d.i. para um dada m.p. Trocando em miúdos isto significa que podemos encontrar d.i. e respectivos quocientes que não podem ser expressos como $E^{-1} X$ e $Y D^{-1}$ onde X e Y são definidos na prova acima. O corolario 5.2 diz que um d.i. será sempre linha equivalente a X , logo o que pode falhar é a coluna equivalencia entre o quociente Q e $Y = H$. Mas deve continuar

havendo um v̄nculo entre elas.

COROLÁRIO 5.3

"Dada a m.p. M_0 e uma fatoraçaõ $M_0 = M Q$ o divisor M será irredutível se e somente se Q tiver os mesmos polinômios invariantes de M_0 ".

A situaçaõ pode ser resumida dizendo que existem d.i. de uma dada M_0 e sabemos um meio de chegar até eles, o teorema 5.4, que certamente não é o nico. Podemos, por exemplo, adaptar facilmente o método proposto em [3] para os nossos propósitos, o que aliás pode ser feito com qualquer método de estudo e obtençaõ de máximos divisores comuns de matrizes polinomiais: Rosenbrock [20], Wolowich [23] etc. Além da linha equivalencia entre todos os possíveis d.i. há outra propriedade comum a todos eles.

TEOREMA 5.5

"Os divisores irredutíveis de uma dada $M_0(\alpha)$ são coluna equivalentes. Sendo $M_1(\alpha)$ e $M_2(\alpha)$ dois quaisquer desses d.i. teremos $\{M_1(a)\} = \{M_2(a)\}$ para todo a real".

Embora de interesse teórico para a perfeita compreensão das propriedades dos d.i. os resultados desta seçaõ - excetuando-se o teorema 5.4 - não são cruciais para o problema de se encontrar os supervetores. Na seçaõ anterior, dada $V_0(\alpha)$ previsvamos de um d.i. qualquer, não importando por que método ele fosse obtido. Ali provamos que, independentemente de sua origem, o subespaço gerado pelas colunas de um d.i. $V(\alpha)$ tinha

certas propriedades desejáveis. O teorema 5.5 apenas corrobora o fato de que, se estamos interessados em $\{V(\alpha)\}$ então a origem do d.i. $V(\alpha)$ é irrelevante.

Podemos concluir esta seção dizendo que ainda não existe uma comparação sobre a eficiência dos possíveis métodos de obtenção dos d.i.: o aqui proposto e os citados. Isto teria um interesse prático muito grande, pois como já foi comentado anteriormente os d.i. de uma dada matriz podem diferir bastante entre si podendo até mesmo apresentar graus diferentes. Seria assim muito útil encontrar uma maneira que, além de eficiente no aspecto computacional, fosse capaz de fornecer o d.i. de menor grau ou os que de algum modo facilitem os importantes procedimentos de cálculo dos elementos de \underline{I}_1 .

V.4 - CONCLUSOES

Embora o objetivo deste capítulo fosse o estudo e a delimitação completa da classe \underline{I} os resultados mais importantes obtidos restringem-se à subfamília \underline{I}_1 .

Esta classe dos subespaços (A, B) invariantes unidimensionais foi analisada de uma maneira completa através da idéia de supervetores. O conceito destes elementos pode ser encarado como uma generalização do conceito de autovetores e autovalores. As seções 5.2 e 5.3 foram devotadas a estudá-los da maneira mais profunda possível, sempre com a atenção ligeiramente mais voltada para o aspecto de cálculo, obtenção, busca rápida e 'fácil de todos os supervetores do que para as característi

cas puramente teóricas do assunto. Sob este ângulo teórico verificamos que a família SV de todos os supervetores pode ser decomposto em duas subclasses básicas: a dos supervetores associados a autovalores reais de A (quando os hã) e a dos associados aos outros valores reais. Fornecemos um meio de se caracterizar convenientemente estas classes, utilizando a idéia de subespaços parametrizados. Encontramos também as condições sob as quais esta maneira de se caracterizar os supervetores pode ser aplicada indistintamente a cada uma das subfamílias da classe SV . Hã neste ponto uma insuspeita conexão com o conceito de controlabilidade, muito Útil por poder esclarecer em termos mais familiares a estrutura de SV .

Para obtenção dos subespaços parametrizados, que em última análise contêm todas as informações desejadas sobre os supervetores de SV , precisamos usar a idéia de divisores irredutíveis de uma matriz polinomial. Apesar de aparentemente nova esta idéia está intimamente ligada a conceitos já conhecidos dos pesquisadores especialistas em matrizes polinomiais, como foi mencionado na seção 5.3.

Se combinarmos k supervetores distintos teremos certamente um elemento k -dimensional da família \mathcal{I} , pois esta é fechada sob a operação soma de subespaços [25]. Disto nasceu uma conjectura que auxiliaria a determinação da família \mathcal{I} : em um elemento k -dimensional genérico de \mathcal{I} sempre haveria, forçosamente, k supervetores distintos. Exemplos mostraram a falsidade dessa conjectura e assim os elementos "complexos" de \mathcal{I} nem sempre são compostos a partir dos "simples". É interessante no-

tar que a conjectura é válida em certas situações ainda não muito bem esclarecidas. Seria de muito utilidade, tanto teórica como prática, descobrir que condições devem ser satisfeitas para que a mencionada conjectura seja verdadeira. Há uma forte intuição de que essas condições seriam suaves, mas somente a continuação da pesquisa poderia dar respostas conclusivas a estes quesitos.

Para atacarmos a família \mathcal{L} começamos então a analisar \mathcal{I}_2 tentando generalizar as idéias empregadas para o conjunto de \mathcal{I}_1 por meio dos supervetores. Já há alguns resultados, que vamos apenas mencionar, omitindo as provas, por estarem eles em um estágio ainda bastante primitivo e pouco operacional. Um deles diz que se V é um elemento de \mathcal{I}_2 então existem reais α e β tais que $(A^2 - \beta A - \alpha I) V \subset B + AB$. Este resultado pode ser expandido facilmente para o caso de um elemento de \mathcal{I}_j e vemos de uma maneira óbvia que os supervetores podem ser incluídos como um caso particular dele. A diferença crucial é que a partir da expressão $(A - \alpha I) V \subset B$ podemos determinar todos os supervetores, como já vimos, mas usando $(A^2 - \beta A - \alpha I) V \subset B + AB$ não conseguiremos gerar todos os elementos de \mathcal{I}_2 pois eles não são os únicos subespaços que satisfazem a expressão acima. Sob condições bastante restritivas (sistema controlável e com apenas uma entrada) provou-se que a existência de escalares α e β tais que $(A^2 - \beta A - \alpha I) V \subset B + AB$ implica a (A, B) invariância do subespaço bidimensional V . Obviamente este resultado não apresenta grandes atrativos e pesquisas devem ser feitas no sentido de ampliar o seu alcance até poder abranger toda a classe \mathcal{I}_2 ,

e posteriormente \mathcal{L} . Nas considerações acima transparece o fato de que o "ainda a ser feito" excede muito o "já feito".

É indispensável terminar estas conclusões e este capítulo com um rápido apanhado da literatura atual concernente ao enfoque geométrico de controle. Além de pesquisadores preocupados em estudá-lo mais profundamente e em aplicá-lo a novos problemas, como por exemplo [7], [9], a maior tendência parece ser a dos que procuram entendê-lo traduzindo a sua terminologia característica para um jargão frequencial. A teoria da invariância, ferramenta básica do enfoque geométrico, tem sido exaustivamente estudada como por exemplo em [8], [12], [13], [17], [21] [22] e em outros mais. Há uma preocupação constante e indisfarçável em relacionar a família \mathcal{L} ou as famílias nela contidas \mathcal{H} e \mathcal{C} (dos subespaços de controlabilidade) com outros conceitos que já se revelaram importantes em enfoques não geométricos dos problemas de controle. Desta maneira conceitos puramente geométricos são relacionados a zeros de matrizes de transferência [11], espaços nulos de matrizes polinomiais [8], etc.

Nos artigos acima citados procura-se interpretar apenas os elementos notáveis de \mathcal{L} em outros termos. Apenas V^* , V_g^* e R^* tem suas propriedades encaradas em termos frequenciais. Dos poucos artigos onde há preocupação em analisar e interpretar elementos genéricos da classe \mathcal{L} podemos citar [21] e principalmente [5]. Fessas [5], com efeito, explica os elementos (A, B) invariantes genéricos em termos de matrizes polinomiais. Em outras palavras isto significa a existência de uma maneira de se delimitar completamente a classe \mathcal{L} com a consequente pos-

sibilidade de se obter quaisquer subespaços (A, B) invariantes de quaisquer dimensões: exatamente o que desejávamos (e conseguimos apenas parcialmente) obter neste capítulo. O importante problema das coberturas visto no capítulo IV já pode ser resolvido de uma maneira completa. O método proposto por Fessas é de aplicação simples e não se restringe a determinadas dimensões, o que é sem dúvida uma vantagem. Apresenta no entanto dois inconvenientes básicos. Em primeiro lugar as matrizes A e B do sistema em estudo precisam apresentar uma determinada estrutura particular representada por uma das formas canônicas de Luenberger. Em segundo lugar, e mais grave, apenas sistemas controláveis podem ser estudados por este processo de Fessas. O método proposto neste capítulo, apesar de bastante restrito, ainda, pelo problema das dimensões, não apresenta esses inconvenientes indicados. Os problemas de não controlabilidade são perfeitamente explicados e resolvidos, pelo menos em I_1 . Estamos diante de um caso típico de procura de um terceiro método que some vantagens e elimine desvantagens.

CAPÍTULO VICONCLUSÕES

Uma das principais contribuições desta tese é a visão estrutural do problema de rejeição de perturbações apresentada no capítulo II. Tanto o mecanismo básico do PRP ou seja, o uso de realimentação de estados para tornar não observáveis determinadas parcelas contaminadas do espaço de estados como a descrição geométrica das condições do sistema através dos subespaços E e V^* são explicados de uma maneira extremamente simples por meio de diagramas de blocos.

Esta nova visualização sugere, de um modo muito natural, um novo método para a resolução do PRP. Apresentado ainda no segundo capítulo e desenvolvido completamente no terceiro, este novo método chega a conclusões sobre o PRP sem calcular o subespaço V^* e sem verificar se E está nele contido, como acontece no procedimento tradicional. Ainda não se pode dizer se os novos algoritmos são ou não mais eficientes do que o antigo, pois as experiências computacionais necessárias para isso fogem ao escopo desta tese. De qualquer maneira, alguns resultados são bastante animadores, e o uso da forma canônica (2.7) permite, entre muitas outras coisas, resultados como os corolários 2.2, 2.3, 2.4. Pode-se dizer que as facilidades advindas destes resultados não encontram correspondentes no método tradicional. Outra importante consequência simplificadora da forma (2.7) é a possibilidade de se trabalhar com a dimensão reduzida $n-q-r$ ao invés de n . A maneira direta de encontrar uma

solução F e a chance de obter V^* são também vantagens do novo método sugerido. Comentários e conclusões adicionais podem ser encontrados no final do capítulo II.

Não podemos ignorar uma importante possibilidade aberta pelo teorema 2.2 e totalmente inexplorada neste trabalho: a análise da sensibilidade do PRP com relação a variações nos parâmetros. A forma (2.6) sugere que os únicos parâmetros realmente críticos e cuja variação pode arruinar completamente a solubilidade do PRP concentram-se nas partições A_{21} e B_2 . Esta conjectura, é óbvio, precisa ser criteriosamente pesquisada. A se confirmarem suas promessas a solução do PRP seria insensível a variações paramétricas em A_{11} , A_{12} , A_{22} , B_1 , E_1 , C_2 e a forma canônica representada por (2.6) adquiriria uma importância muito grande, pela sua capacidade de isolar e concentrar as partes criticamente sensíveis do sistema.

Considerações sobre sensibilidade são oportunas e necessárias porque exatamente por causa dela as aplicações práticas do PRP não são, em geral, bem sucedidas. Este inconveniente leva-nos a pensar no PRP como sendo, talvez, muito pretensioso em sua essência. Com efeito, querer que a influência de quaisquer perturbações seja zero para todo valor de $t \geq 0$ parece ser querer demais, e o preço a ser pago por essa ambição seria a impossibilidade prática de implementar soluções teoricamente viáveis. Uma formulação mais suave para o PRP constituiria um possível remédio para essa situação. Poderíamos, por exemplo, restringir a classe de perturbações admissíveis ou então exigir que o efeito das perturbações, restritas ou não, se

ja nulo apenas em regime, isto é, quando $t \rightarrow \infty$. A formulação e resolução destes interessantes e inéditos problemas teóricos, os "PRP modificados", constitui um campo de pesquisa completamente aberto. Devemos frisar que, embora com sua aplicabilidade prática um tanto quanto prejudicada, o PRP como o conhecemos continua a ocupar um papel de destaque, pois quaisquer informações e explicações sobre a teoria da invariância são sempre desejáveis e necessárias e ele parece estar a fornecer-las em um ritmo apropriado. Apenas este motivo já seria suficiente para avaliar a continuação dos trabalhos com o PRP,

Os importantes resultados sobre a teoria da invariância constituintes dos capítulos IV e V são lá mesmo comentados. E lá também se fornecem conclusões e indicações dos campos abertos para futuras pesquisas nessas áreas.

Terminaremos esta seção, e com ela a tese, analisando os resultados expostos no final do capítulo II. Ali interpretávamos o PRP em termos das matrizes de transferencia $G_c(S)$ e $G_p(S)$. Deve ter ficado bem claro que essas importantes interpretações frequenciais estão em um estágio bastante primitivo, restando ainda muitas coisas a serem feitas. O resultado do teorema 2.3, por exemplo, pode, e deve, ser burilado e traduzido para um linguajar mais ameno. Isto é feito pelo corolário 2.6 para uma classe muito restrita de sistemas, os com apenas uma entrada e uma saída. A generalização para o caso multivariável seria extremamente Útil. A intrigante conexão existente entre V^* e os zeros de matrizes ou funções de transferencia também merece um estudo profundo na tentativa de esclarecer convenientemente

mente a natureza e o papel dos zeros em sistemas de controle invariantes. O conteúdo da seção II.4 autoriza ainda a esperança de algo mais ambicioso. A inédita visão estrutural de um problema classicamente formulado e resolvido de uma maneira puramente geométrica poder; ser estendida a outros problemas similares como os de desacoplamento, do servomecanismo, etc. Fornecer; uma nova maneira de atacarmos os importantes problemas que envolvem a teoria da invariância numa tentativa de interpretamos seus resultados geométricos em termos estruturais. Tornando acessíveis aos adeptos frequenciais as idéias geométricas contribuiríamos para a sonhada ligação entre as teorias "moderna" e "clássica" de controle.

REFERENCIAS

1. BHATTACHARYYA, S. P. - "On calculating maximal (A, B) invariant subspaces" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-20(2) April 1975.
2. BHATTACHARYYA, S. P. - "Frequency domain conditions for disturbance rejection" IEEE Trans. Aut. Contr. to appear in Dec. 1980.
3. BITMEAD, R. R.; KUNG, Y. et al - "Greatest common divisors via generalized Sylvester and Bezout matrices" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-23(6) December 1978.
4. DAVISON, E. J.; WANG, S. H. - "Properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable systems" Automatica Vol. 10, pp. 643-658, 1974.
5. FESSAS, P. - "An analytic determination of the (A, B) invariant and controllability subspaces" Int. J. Control, 1979, Vol. 30, no. 3, 491-512.
6. GANTMACHER, F. R. - The theory of matrices, New York, Chelsea, 1960.
7. HEYMAN, M. - "Controllability subspaces and feedback..." SIAM J. Contr. & Optim. 14(4) 1976, pp. 769-789.
8. KARCANIAS, N.; LOUVARITAKIS, B. - "The output zeroing problem and its relationship to the invariant zero structure: a matrix pencil approach" Int. J. Control

- trol, 1979, Vol. 30, no. 3, 395-415.
9. KIMURA, H. - "Pole assignment by gain output feedback" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-20(4), Aug. 1975, pp. 509-516.
 10. KIMURA, H. - "Geometric structure of observers for linear feedback control laws" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-22(5), Oct. 1977, pp. 846-854.
 11. KOUVARITAKIS, B.; MACFARLANE, A. G. J. - "Geometric approach to analysis and synthesis of system zeros. Part 1: Square Systems" Int. J. Control, 1976, Vol. 23, no. 2, 149-166.
 12. KOUVARITAKIS, B.; SHAKED, U. - "Asymptotic behaviour of root-loci of linear multivariable systems" Int. J. Control, 1976, Vol. 23, no. 3, 297-340.
 13. LAUB, A. J.; MOORE, B. C. - "Calculation of transmission zeros using Q Z techniques" Automatica, Vol. 14, pp. 557-567, Nov. 1978.
 14. MACFARLANE, A. G. J. - "The development of frequency-response methods in automatic control" IEEE Trans. Aut. Contr., Vol. AC-24(2), Apr. 1979.
 15. MACFARLANE, A. G. J. - Frequency-response methods in control systems New York, Wiley, 1980.
 16. MITA, T. - "On necessary and sufficient conditions for disturbance localization in single input-single output

- systems" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-21(4), 1976, pp. 606-607.
17. MOORE, B. C.; LAUB, A. J. - "Computation of supremal (A,B) invariant and controlability subspaces" IEEE Trans. Auto. Contr. Vol. AC-23(5), Oct. 1978, pp. 783-793.
18. WONHAM, W. M.; MORSE, S. - "Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach" SIAM J. Contr., Vol. 8, no. 1, Feb. 1970.
19. PEARSON, J. B. - "A book review" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. AC-22(6), Dec. 1977, pp. 1000.
20. ROSENBROCK, H. H. - State space and multivariable theory, London, Nelson, 1970.
21. STOYLE, P. N. R.; VARDULAKIS, A. I. G. - "On certain connections between the geometric and the polynomial matrix approaches to linear system theory" Int. J. Control, 1979, Vol. 29, no. 4, 565-588.
22. VARDULAKIS, A. I. G. - "On the structure and computation of maximal (A, B) invariant subspaces" IEEE Trans. Aut. Contr. to appear.
23. WOLOWICH, W. A. - "Linear multivariable systems" New York, Springer-Verlag, 1974.
24. MORSE, S.; WONHAM, W. M. - "Status of non-interacting control" IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. 12(6), Dec. 1967.

25. WONHAM, W. M. - "Linear multivariable control" New York, Springer-Verlag, 1974.
26. FOSSARD, A. - "Commande des systèmes multidimensionnels" Paris, Dunod, 1972.