CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE GENERALIZADAS

EM SISTEMAS LINEARES MULTIVARIÁVEIS

Roosevelt José Dias

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

Aprovada por:

Shankar P. Bhattacharyya

Biswa Nath Datta

Paulo Augusto Silva Veloso

Paulo Roberto Oliveira

Nelson Maculan Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO 1980

DIAS, ROOSEVELT JOSÉ

Controlabilidade e Observabilidade Generalizadas em Sistemas Lineares Multivariáveis |Rio de Janeiro| 1980.

p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1980)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Fac. Engenharia.

1. Sistemas de controle

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

Dedico esta tese à minha esposa
Ivone e à minha filha Flávia.

AGRADECIMENTOS

Quero deixar aqui meus sinceros agradecimentos, ao Professor S. P. Bhattacharyya por sua orientação; ao CNPq pelo suporte financeiro, sem o qual jamais teria iniciado esta pesquisa; a Daisy pelo excelente trabalho de datilografia; à COPPE e a todos aqueles que direta ou indiretamente me incentivaram nesta árdua jornada.

RESUMO

Nesta tese são apresentadas algumas propriedades estruturais relacionadas com a Teoria dos Sistemas Lineares.

Controlabilidade e Observabilidade generalizadas e o problema de Rejeição de Perturbações, em sua nova versão, constituem a principal parte da dissertação.

O método para se encontrar bases mínimas em espaços vetoriais sobre o corpo das funções racionais é bastante atrativo; de fato, os métodos existentes, além de complicados, envolvem operações com funções racionais, as quais não podem ser efetuadas diretamente por computador digital.

Esta pesquisa é uma generalização dos conceitos existentes de controlabilidade e observabilidade, que podem ser trazidos para o mundo físico para serem aplicados em muitos problemas práticos.

ABSTRACT

In this thesis some structural problems concerning with Linear System Theory, are presented.

Generalized Controllability and Observability and the Disturbance Rejection Problem, in its new version, represent the fundamental part of the dissertation.

The method for finding minimal basis in vector spaces over the field of rational functions, is very attractive; in fact, the existing methods are in general complicated and involve operations over the field of rational functions, which can not be directly performed by a digital computer.

This research is a generalization of the existing concepts of controllability and observability which can be brought to physical world to be applied to many practical problems.

ÍNDICE

Pág.

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - INTRODUÇÃO GERAL

Esta dissertação compreende basicamente duas partes; na primeira, abordamos alguns problemas estruturais decorrentes de sistemas, nos quais, alguns parâmetros da planta não são exatamente conhecidos em virtude de erros de modelagem, envelhecimento de componentes, ou ainda daqueles sistemas para os quais uma determinada lei de controle deve ser projetada, com finalidades específicas, independente de eventuais variações em alguns de seus parâmetros. A interpretação de um sistema com variações em alguns de seus parâmetros, como uma família infinita de sistemas, nos permitiu redefinir os conceitos clássicos de Controlabilidade e Observabilidade, estabelecidos por Kalman |[1]| há aproximadamente duas décadas.

Com estes novos conceitos, pudemos, através de seus resultados, estabelecer conexões básicas entre Controlabilidade e Observabilidade generalizadas e o problema de rejeição de perturbações, problema este, de grande aplicabilidade prática.

Na segunda parte, aparentemente independente da primeira, nosso interesse voltou-se para o problema de "bases mínimas em espaços vetoriais de funções racionais", objetivando resultados relacionados com a primeira parte. Embora não tenhamos cumprido esta tarefa, dada à exiguidade do tempo, os fundamentos necessários para um estudo e desenvolvimento posteriores estão bem alicerçados pela teoria apresentada. O método para se encontrar uma base mínima em espaços vetoriais de funções racionais, apresentado, e bastante simples, embora, não tenha sido avaliada, sua eficiência em termos de computador digital.

Finalmente, na resolução dos problemas pertinentes à primeira parte, fizemos uso da Teoria Geométrica, recentemente introduzida na literatura por Wonham & Morse |17| e, na segunda parte, Teoria das Matrizes |5|.

1.2 - ORGANIZAÇÃO DA TESE

No Capítulo II apresentamos os conceitos de Controlabilidade e Observabilidade generalizadas. As várias seções que o compreendem encerram alguns teoremas fundamentais, algoritmos, bem como considerações numéricas envolvendo todo o conjunto. No Capítulo III, generalizamos o conceito de (A, B)-invariância introduzido por Wonham & Morse. A existência e unicidade de um elemento maximal V_M^* contido em um dado subespaço e sua determinação são apresentadas.

O Capítulo seguinte, o quarto, trata do problema de rejeição de perturbação com variações nos parâmetros do sistema, consoante os seguintes casos:

(i) sem estabilidade

(ii) com estabilidade.

O Capítulo V, que constitui a segunda parte da dissertação, estuda o problema referente a determinação de "bases mínimas em espaços vetoriais de funções racionais". Uma analise comparativa entre o método apresentado pelo autor e o empregado por D. J. Forney, é estabelecida, assim como algumas aplicações imediatas.

Por fim, o Capítulo VI incorpora conclusões e direções para futuras pesquisas.

1.3 - NOTAÇÃO

C	: corpo dos números complexos
R	: corpo dos números reais
	: conjunto de n-uplas de números reais
X, U, Z, ...	: espaços vetoriais de dimensão finita sobre R com elementos x, u, z, ...
$d(X)$	: dimensão de X
A, B, D, ...	: mapeamentos lineares, matrizes

$A\|\mathcal{V}$	:	restrição da transformação linear A ao subespaço $\mathcal{V} \subset X$
B ou ImB	:	imagem da transformação linear B
Ker A	:	espaço nulo ou núcleo de uma transformação linear
$\mathcal{V}/\mathcal{R}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}$	:	espaço fatorial V módulo R
Spec(A)	:	espectro complexo de A
$\mathcal{R}^*$	:	subespaço de controlabilidade |ver |17|, seção 4| maximal em V*
$\mathcal{V}^*$	:	subespaço maximal (A, B)-invariante em Ker C
$\#(\Omega)$	:	cardinalidade do conjunto Ω
Sup $\underline{\mathcal{V}}$	:	supremo da classe $\underline{\mathcal{V}}$
inf $\underline{\mathcal{V}}$	:	ínfimo da classe $\underline{\mathcal{V}}$
$A^{-1}\mathcal{V}$, $\mathcal{V} \subset X$	:	por definição $\{x \in X \| Ax \in \mathcal{V}\}$
Posto$_{R\|\alpha\|}$ $P(\alpha)$	:	posto da matriz $P(\alpha)$ sobre o anel $R[\alpha]$

CAPÍTULO II

CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE GENERALIZADAS

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, os conceitos fundamentais de Kalman |1| sobre controlabilidade e observabilidade de um sistema linear e invariante no tempo, são estendidos de maneira natural a uma família infinita de sistemas. Tais famílias resultam de sistemas cujos parâmetros nominais não são exatamente conhecidos em virtude de erros de modelagem, ou ainda, em problemas de síntese nos quais seja desejável projetar um sistema cujo desempenho independa de possíveis variações estruturais.

A redefinição dos conceitos de controlabilidade e observabilidade vem tornar possível a solução de muitos problemas de controle onde eventuais perturbações paramétricas estão presentes.

Investigaremos primeiramente a observabilidade de uma dada família, cabendo a controlabilidade seu resultado dual.

2.2 - CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE GENERALIZADAS

As primeiras investigações sobre subespaços generalizados foram feitas independentemente por Carlson & Hill |2| e Roosevelt & Bhattacharyya |15|. Embora alguns de nossos resultados guardem ligeira semelhança com aqueles encontrados em [2] o enfoque é bem diferente. É conveniente salientar, contudo, que essa semelhança advém da equivalência entre a estrutura proposta por Carlson & Hill e a por nós encontrada em termos de Teoria de Sistemas.

Trataremos inicialmente do problema referente a observabilidade generalizada; os resultados obtidos serão então utilizados para definir controlabilidade generalizada.

2.2.1 - Observabilidade de um Sistema Linear e Invariante no Tempo

Consideremos o sistema descrito por:

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = A\, x(t) \\ z(t) = C\, x(t);\ x(0) = x_0,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

onde o vetor $x(t) \in X$, o espaço de estado, com $d(X) = n$; o vetor $z(t) \in Z$, o espaço das safdas, com $d(Z) = p$; (C, A) são transformações lineares associadas aos espaços correspondentes. Identificaremos, de maneira biunívoca, cada sistema do tipo (1) pelo par (C, A) que o caracteriza.

Definição 2.1

Seja $S = (C, A)$. Diremos que S é inobservável, se existe $x_0 \neq 0$, tal que $z(t) = 0$, $\forall\, t \geq 0$. Em caso contrário, S será dito observável.

Decorre imediatamente da definição acima que se $S = (C, A)$ é inobservável, o subconjunto de X dado por

$$\Theta^* \triangleq \{x_0 \in X \mid z(t) = 0, \forall\, t \geq 0\}$$

define claramente um subespaço, denominado subespaço inobservável de S.

Proposição 2.1

Seja $S = (C, A)$. Então,

$$\Theta^* = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} CA^i \tag{2}$$

Demonstração

($\rightarrow$) Tomemos $x \in \Theta^*$. Pela definição de Θ^*, temos que

$$\begin{cases} z(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = 0 \\ \\ z^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}, \forall\ t \geq 0, \quad \text{i.e,} \quad \begin{cases} C\ e^{At}x = 0 \\ CA^2 e^{At}x = 0 \\ CA\ e^{At}x = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{At}x = 0 \end{cases}, \forall\ t \geq 0$$

em particular, no ponto $t = \Theta$,

$$\begin{cases} Cx = 0 \\ CAx = 0 \\ CA^2x = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}x = 0 \end{cases} \quad \text{ou ainda, } x \in \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} CA^i .$$

$(\leftarrow)$

Seja $\psi(\lambda) = h^n + \alpha_1\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}\lambda+ a_n$ o polinômio característico de A. Pelo teorema de Cayley-Hamilton, $A^j = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A^i$ para todo $j \geq n$; se $y \in \bigcap_{i=0}^{n-1} \operatorname{Ker} CA^i$,

$$\begin{cases} Cy = 0 \\ CAy = 0 \\ CA^2y = 0 \\ \\ CA^{n-1}y = 0 \end{cases} \quad \text{e para } j \geq n,$$

$$CA^j y = C(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A^i)y = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i CA^i y = 0 .$$

Agora, como $CA^i y = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$C(\frac{A^i t^i}{i!})y = 0, \forall t \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

resultando

$$C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!})y = C e^{At} y = 0, \forall t \geq 0$$ e portanto $y \in \Theta^*$.

Proposição 2.2

$$\Theta^* = \sup\{\Theta \quad X | A \Theta \subset \Theta \;\&\; \Theta \subset \text{Ker } C\} \tag{3}$$

Demonstração

A classe de subespaços de X definida por

$$\underline{\Theta} \triangleq \{\Theta |\; A \quad \Theta \subset \Theta \;\&\; \Theta \subset \text{Ker } C\}$$

é não vazia $(0 \in \Omega)$ e fechada em relação a operação de adição de subespaços $(A(\Theta_1 + \Theta_2) \subset \Theta_1 + \Theta_2, \Theta_1 + \Theta_2 \subset \text{Ker}C); \Theta_1, \Theta_2 \in \underline{\Theta})$ assim, Ω possui um único elemento maximal $\hat{\Theta} \triangleq \sup \Omega$. É claro que as relações

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\Theta} \subset \text{Ker } C \\ A\hat{\Theta} \subset \hat{\Theta} \subset \text{Ker } C \\ A^2\hat{\Theta} \subset \hat{\Theta} \subset \text{Ker } C \\ \vdots \\ A^{n-1}\hat{\Theta} \subset \hat{\Theta} \subset \text{Ker } C \end{array}\right. \quad \text{implicam} \quad \left\{\begin{array}{l} C\hat{\Theta} = 0 \\ CA\hat{\Theta} = 0 \\ CA^2\hat{\Theta} = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}\hat{\Theta} = 0 \end{array}\right. , \text{ ou}$$

$\hat{\Theta} \subset \Theta^*$.

Novamente, pelo teorema de Cayley-Hamilton,

$C(A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A + \alpha_n I)y = 0$ e se $y \in \Theta^*$,

$$\begin{array}{lcl} CAy = 0 & & Ay \in \text{Ker } C \\ CA^2y = 0 & & Ay \in \text{Ker } CA \\ \vdots & \text{, i.e.,} & \vdots \\ CA^{n-1}y = 0 & & Ay \in \text{Ker } CA^{n-2} \\ CA^{n-1}y = 0 & & Ay \in \text{Ker } CA^{n-1} \end{array} \quad \text{ou } Ay \in \Theta^*$$

e portanto, $A\Theta^* \subset \Theta^* \subset \text{Ker } C$ resultando $\Theta^* \subset \hat{\Theta}$

<u>Corolário 2.1</u>

O sistema $S = (C, A)$ é observável se e somente se $\Theta^* = 0$.

2.2.2 - Observabilidade Generalizada

Generalizaremos agora o conceito de observabilidade de um sistema linear e invariante no tempo estendendo-o a uma família infinita de sistemas. Para tanto, seja $\mathcal{S}$ a família de sistemas definida por

$$\mathcal{S} \triangleq \{ S | S = (C,A); (C,A) \in \mathcal{C} \times \mathcal{A}\} \tag{4}$$

onde

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} | A = A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1};\ \underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}\},$$

$$\mathcal{C} = \{C \in \mathbb{R}^{Pn} | C = C_0 + \gamma_1 C_1 + \ldots + \gamma_{N_2} C_{N_2};\ \underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}\},$$

Definição 2.2

A família $\mathcal{S}$ será dita inobservável, se existe $x_0 \neq 0$, tal que $Z_S(.) \equiv 0$ para todos $\in \mathcal{S}$. Em caso contrário, $\mathcal{S}$ é dita observável.

Convém notar que, a partir da definição, a condição necessária para uma família $\mathcal{S}$ ser inobservável é que cada $S \in \mathcal{S}$ seja inobservável; entretanto, esta condição não é geral suficiente já que existem famílias, as quais, embora possuam cada um de seus elementos inobservável, são observáveis. O exemplo 2.4.3 mostra claramente tal situação. Os teoremas que enunciaremos a seguir constituem os resultados principais desta seção.

Primeiramente, para cada $(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, defina

$$O^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})} \triangleq \sup\{\Theta \mid \Theta \subset \mathrm{Ker}(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2}) \;\&\; (A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})\Theta \subset \Theta\}$$

e se $\mathcal{S}$ é inobservável, seja

$O^*_g \triangleq \{x_0 \in X \mid z_S(.) \equiv 0, \; \forall \; S \in \mathcal{S}\}$. O^*_g define claramente um subespaço, o subespaço. inobservável da família $\mathcal{S}$.

Teorema 2.3

$$\Theta^*_g = \bigcap_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_1} \\ \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_2}}} \Theta^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})} \tag{5}$$

Demonstração

$(\rightarrow)$

Se $x \in \Theta^*_g$, então $z_S(.) \equiv 0, \forall S \in$, i.e., para cada $(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}) \in R^{N_1} \times R^{N_2}$, pela proposição 2.1, $x \in O^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})}$ e por conseguinte $x \in \bigcap_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_1} \\ \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_2}}} O^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})}$

(←)

$$\bigcap_{\substack{\underline{\alpha} \in R^{N_1} \\ \underline{\gamma} \in R^{N_2}}} \Theta^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})} \subset \Theta^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})} \text{ para cada } (\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$$

e se $y \in \bigcap_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_1} \\ \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_2}}} e^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})}$ então, y pertence ao conjunto de condições iniciais para as quais $z(t) \equiv 0$, para cada $S=(C,A) \in \mathcal{C} \times \mathcal{A}$. Fazendo agora $(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$ percorrer todo o produto cartesiano $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, temos finalmente que $y \in \{x_0 | z_S(\cdot) \equiv 0, \forall S \in$ e portanto $y \in e^*_g$.

Antes de demonstrarmos os teoremas seguintes necessitaremos de algumas considerações preliminares.

Se $\Omega = \{0, 1, \ldots, N_1\}$ denotaremos por Ω^r o produto cartesiano $\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega$ (r-vezes); com $\mathfrak{P}(\underline{\mu})$ o conjunto de todas as permutações de $\underline{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \Omega^r$; com $\overline{\Omega}_r$, denotaremos o subconjunto de Ω^r definido por

$$\overline{\Omega}_r \triangleq \{\underline{\mu} | \underline{\mu} \in \Omega^r \text{ e tais que } \underline{\mu}, \underline{\eta} \in \Omega, \underline{\mu} \neq \underline{\eta} \rightarrow \mathfrak{P}(\underline{\mu}) \cap \mathfrak{P}(\underline{\eta}) = \phi\}$$

Lema 2.1

$$(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^r = \sum_{\underline{\mu} \in \overline{\Omega}_r} \alpha_{\mu_1} \ldots \alpha_{\mu_r} \Big(\sum_{\mathfrak{P}(\underline{\mu})} A_{\mu_1} \ldots A_{\mu_r} \Big), \quad \alpha_0 \equiv 1 \tag{6}$$

Demonstração

A prova por ser simples fica omitida.

Teorema 2.4

$$\Theta_g^* = (\text{Ker}\ \hat{C}) \cap \left\{ \bigcap_{r=1}^{n-1} \left[\bigcap_{\underline{\mu} \in \bar{\Omega}_r} \text{Ker}\left(\hat{C} \sum_{\mathcal{P}(\underline{\mu})} A_{\mu_1} \cdots A_{\mu_r}\right)\right]\right\} \qquad (7)$$

onde $\hat{C} \triangleq \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N_2} \end{bmatrix}$

Demonstração

($\rightarrow$) Por (5) vem que

$$\begin{bmatrix} (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2}) \\ (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1}) \\ \vdots \\ (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^{n-1} \end{bmatrix} \Theta_g^* \equiv 0 \qquad (8)$$

ou

$$(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})\ \theta_g^* \equiv 0$$

$$(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})\ \theta_g^* \equiv 0 \tag{9}$$

$$\vdots$$

$$(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^{n-1}\ \theta_g^* \equiv 0$$

De (9) decorre as seguintes relações

$$\hat{C}\ \theta_g^* = 0$$

$$\hat{C}(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})\ \theta_g^* \equiv 0$$

$$\vdots \tag{10}$$

$$\hat{C}(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^{n-1}\ \theta_g^* \equiv 0$$

$$\text{com} \triangleq \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N_2} \end{bmatrix}$$

Aplicando (6) em (10) teremos

$$\hat{C}\ \theta_g^* = 0$$

$$\hat{C}\Big[\sum_{\underline{\mu}\in\overline{\Omega}_r} \alpha_{\mu_1}\ldots\alpha_{\mu_r}\Big(\sum_{\mathfrak{p}(\underline{\mu})} A_{\mu_1}\ldots A_{\mu_r}\Big)\Big]\ \theta_g^* \equiv 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1$$

implicando

$$\Theta_g^* \subset \operatorname{Ker} \hat{C}$$

$$\Theta_g^* \subset \bigcap_{\underline{\mu}\in\bar{\Omega}_r} \operatorname{Ker}(\hat{C} \sum_{\wp(\underline{\mu})} A_{\mu_1} \cdots A_{\mu_r}); \ r = 1, 2, \ldots, n-1$$

donde finalmente

$$\Theta_g^* \subset (\operatorname{Ker} \hat{C}) \cap \{\bigcap_{r=1}^{n-1} [\bigcap_{\underline{\mu}\in\bar{\Omega}_r} \operatorname{Ker} (\hat{C} \sum_{\wp(\underline{\mu})} A_{\mu_1} \cdots A_{\mu_r})]\}.$$

$(\leftarrow)$

É fácil mostrar que

se $y \in (\operatorname{Ker} \hat{C}) \cap \{\bigcap_{r=1}^{n-1} [\bigcap_{\underline{\mu}\in\bar{\Omega}_r} \operatorname{Ker}(\hat{C} \sum_{\wp(\underline{\mu})} A_{\mu_1} A_{\mu_2} \cdots A_{\mu_r})]\}$, então

$$\left.\begin{aligned} &(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})y = 0 \\ &(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})y = 0 \\ &\vdots \\ &(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^{n-1} y = 0 \end{aligned}\right\} ,\forall(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$$

i.e.,

$y \in \Theta^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})}$, $\forall (\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, e finalmente

$$y \in \bigcap_{\substack{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_1} \\ \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_2}}} \Theta^*_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})} = \Theta^*_g$$

Teorema 2.5

$$\Theta^*_g = \sup\{\Theta \mid \Theta \subset \text{Ker } \hat{C} \mid A_i \; \Theta \subset \Theta \; ; \; i = 0, 1, 2, \ldots, N_1\}$$

Lema 2.2

Seja $\hat{\Theta}^*_g \triangleq \sup\{\Theta \mid \Theta \subset \bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k \mid A_i \; \Theta \subset \Theta; \; i = 0, 1, \ldots, N_1\}$.

Então

$$\hat{\Theta}^*_g = (\text{Ker } \hat{C}) \cap \{\bigcap_{r=1}^{n-1} [\bigcap_{\underline{\mu} \in \Omega^r} \text{Ker}(\hat{C} \; A_{\mu_1} \ldots A_{\mu_r})]\} \tag{11}$$

Demonstração

Seja $\underline{\Omega} \triangleq \{\Theta \mid \Theta \subset \text{Ker } \hat{C} \mid A_i \; \Theta \subset \Theta \; ; \; i = 0, 1, 2, \ldots, N_1\}$.

$\underline{\Omega}$ é não vazia e fechada em relação a adição de subespaços; possui portanto um único elemento maximal $\hat{\Theta}^*_g \triangleq \sup \underline{\Omega}$.

Consideremos agora a sequência de subespaços em Ker $\hat{C}$ dada por

$$\Theta_0 = \operatorname{Ker} \hat{C}$$
$$\Theta_{\nu+1} = \operatorname{Ker} \hat{C} \cap A_0^{-1}\, \Theta_\nu \cap \ldots \cap A_{N_1}^{-1}\, \Theta_\nu \tag{12}$$

observe primeiramente que $\Theta_\nu \downarrow$, i.e., a sequência é não crescente; além disso, $\Theta_1 \subset \Theta_0$ e se $\Theta_\nu \subset \Theta_{\nu-1}$, então

$$\Theta_{\nu+1} = \operatorname{Ker} \hat{C} \cap A_0^{-1}\, \Theta_\nu \cap \ldots \cap A_{N_1}^{-1}\, \Theta_\nu \subset \operatorname{Ker} \hat{C} \cap A_0^{-1}\, \Theta_{\nu-1} \cap \ldots \cap A_{N_1}^{-1}\, \Theta_{\nu-1} = \Theta_\nu;$$

por conseguinte, para algum $\nu \leq d(\operatorname{Ker} \hat{C})$, $\Theta_\nu = \hat{\Theta}_g^*$. Aplicando recursivamente as relações estabelecidas em (12) para $\nu = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$, resulta

$$\hat{\Theta}_g^* = (\operatorname{Ker} \hat{C}) \cap \{\bigcap_{r=0}^{n-1} [\bigcap_{\underline{\mu} \in \Omega^r} \operatorname{Ker}(\hat{C}\, A_{\mu_1} \ldots A_{\mu_r})]\}$$

Demonstração do Teorema 2.5

Seja $\underline{\tilde{\Theta}}$ a classe de subespaços de X definida por

$$\underline{\tilde{\Theta}} \triangleq \{\tilde{\Theta} \subset X \mid (A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1})\tilde{\Theta} \subset \tilde{\Theta} \;\&\; \tilde{\Theta} \subset \operatorname{Ker}(C_0 + \gamma_1 C_1 + \ldots + \gamma_{N_2} C_{N_2}),$$
$$\forall (\underline{\alpha}, \underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}\}$$

Se $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2 \in \underline{\tilde{\Theta}}$, então

$$(C_0 + \gamma_1 C_1 + \ldots + \gamma_{N_2} C_{N_2})(\tilde{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_2) =$$
$$(C_0 + \gamma_1 C_1 + \ldots + \gamma_{N_2} C_{N_2})\tilde{\Theta}_1 + (C_0 + \gamma_1 C_1 + \ldots + \gamma_{N_2} C_{N_2})\tilde{\Theta}_2 = 0, \; \forall\, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_2}$$

e portanto,

$$\tilde{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_2 \subset \mathrm{Ker}(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2}), \quad \forall\, \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_2}$$

Agora,

$$(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})(\tilde{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_2) =$$

$$(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})\tilde{\Theta}_1+(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})\tilde{\Theta}_2 \subset \tilde{\Theta}_1 + \tilde{\Theta}_2$$
$$\forall\, \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^{N_1}.$$

Logo, $\underline{\tilde{\Omega}}$ é fechada em relação a adição de subespaços e como $\underline{\tilde{\Theta}} \neq \emptyset$ $(0 \in \underline{\tilde{\Theta}})$, $\underline{\tilde{\Theta}}$ possui um supremo.

De (7) e (11) resulta que

$$\tilde{\Theta}^*_g \subset \Theta^*_g \tag{13}$$

e se $x \in \Theta^*_g$,

$$(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^j x = 0,$$
$$\forall (\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \;;\; j = 0, 1, \ldots, n-1$$

e $\Theta^*_g \in \underline{\tilde{\Theta}}$, i.e.,

$$\Theta^*_g \subset \sup \underline{\tilde{\Theta}} \tag{14}$$

Como sup $\tilde{\underline{\Omega}}$ é $(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})$-invariante para todo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_1}) \in R^{N_1}$, em particular, fazendo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_1})$ assumir os valores $(0, 0, \ldots, 0)$, $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$ temos que sup $\tilde{\underline{\Omega}}$ é A_i-invariante, $i = 0, 1, \ldots, n-1$; também

$$\sup \tilde{\underline{\Theta}} \subset \mathrm{Ker}(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2}),\ \forall\ \underline{\gamma} \in R^{N_2}$$

implica em sup $\tilde{\underline{\Omega}} \subset \mathrm{Ker}\ \hat{C}$.

logo,

$$\sup \tilde{\underline{\Theta}} \in \underline{\Theta}$$

i.e.,

$$\sup \tilde{\underline{\Omega}} \subset \sup \underline{\Theta} = O_g^* \tag{15}$$

De (13), (14) e (15) concluímos finalmente que $O_g^* = \tilde{\Theta}_g^*$.

Decorre imediatamente a partir de definição 2.2 que a família é observável, se e somente se $O_g^* = \Theta$.

2.2.3 - <u>Controlabilidade de um Sistema Linear e Invariante no Tempo</u>

Seja T o sistema descrito por

$$T : \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ x(0) = x_0,\ t \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

onde o vetor $x(t) \in X$, o espaça de estado, com $d(X) = n$;$u(t) \varepsilon U$, o espaço das entradas, com $d(U) = m$; (A, B) são transformações lineares associadas aos espaços correspondentes. De maneira análoga ao que fizemos para a observabilidade, identificaremos de forma única todo sistema do tipo (16) pelo par (A, B) que o representa.

Diremos que o estado $x(t) \in X$ é alcançável a partir de x_0 se existe $0 < t < \infty$ e $u(t) \in U$ tal que

$$x = e^{At}\,x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)d\tau$$

Seja R o conjunto dos estados alcançáveis a partir da origem, i.e.,

$$R \triangleq \{x(t) \in X | x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)d\tau,\ \text{para algum} \quad 0 \leq t < \infty \ \text{ e } u(\tau) \varepsilon U\} \tag{17}$$

Verifica-se facilmente a partir de (17) que R é um subespaço linear de X, denominado subespaço de controlabilidade do par (A, B).

Definição 2.3

Seja $T = (A, B)$. Diremos que T é controlável se dado $x \in X$, $x \in R$. Em caso contrário, o sistema T é dito ser não controlável. Além disso, se $T = (A, B)$ então,

$$\mathcal{R} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \mathcal{B} \ . \tag{18}$$

Proposição 2.3

$$\mathcal{R} = \inf\{\mathcal{V} \subset \mathcal{X} \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} \ \& \ \mathcal{V} \supset \mathcal{B}\}$$

Por (3) e (18)

$\mathcal{R}^{\perp} = \sup\{\mathcal{V}^{\perp} \quad \mathcal{X}' \mid A'\mathcal{V}^{\perp} \subset \mathcal{V}^{\perp} \ \& \ \mathcal{V}^{\perp} \subset \text{Ker } B'\}$, onde $\mathcal{X}'$ representa o espaço dual de X sobre $\mathbb{R}$, e portanto,

$$\mathcal{R} = \inf\{\mathcal{V} \quad \mathcal{X} \mid A\mathcal{V} \quad \mathcal{V} \ \& \ \mathcal{V} \quad \mathcal{B}\}$$

É claro que o sistema $T = (A, B)$ é controlável se e somente se $\mathcal{R} = \mathcal{X}$

2.2.4 - Controlabilidade Generalizada

Consideremos a família de sistemas descrita por

$$\mathcal{T} \triangleq \{T / T = (A, B); (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$$

onde

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid A = A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1};\ \underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}\}$$

$$\mathcal{B} = \{B \in R^{nm} \mid B = B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3};\ \underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_3},\}$$

Para cada $(\underline{a}, \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N1} \times \mathbb{R}^{N_3}$ definamos $R_{(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$ como

$$\mathcal{R}_{(\underline{\alpha},\underline{\beta})} \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} (A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1})^i (B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3}).$$

Definição 2.4

A família é dita controlável, se dado $x \in X$, existe $(\underline{a}, \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$ tal que $x \in R_{(\underline{a}, \underline{\beta})}$. Em caso contrario, é não controlável.

Teorema 2.6

Seja $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ e $V(\underline{\lambda})$ uma matriz polinomial $n \times R$ de posto $R (R < n)$ sobre $R[\underline{\lambda}]$, o domínio dos polinômios nas N indeterminadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$; $\mathcal{V}(\underline{\lambda})$ o submódulo gerado por $V(\underline{\lambda})$; e $\Lambda = R^N$ |9|, |11|, |14|.

$$\mathcal{V}(\underline{\lambda}) = \sum_{\underline{\gamma} \in \Omega} \mathcal{V}(\underline{\lambda}) \qquad (19)$$

$\underline{\lambda} \in \Lambda$

Lema 2.3

Seja $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ e $V(\underline{\lambda})$ uma matriz polinomial $n \times R$ $(R < n)$ sobre $\mathbb{R}[\underline{\lambda}]$, o domínio dos polinomios nas N indeterminadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$; $\tilde{V}(\underline{\lambda})$ uma representação mínima* de $V(\underline{\lambda})$ sobre $\mathbb{R}[\underline{\lambda}]$; $\mathcal{V}(\underline{\lambda})$ o submodulo gerado por $V(\underline{\lambda})$ e $\Lambda = \mathbb{R}^N$. Então, se

$$\sum_{\underline{\lambda}\varepsilon\Lambda} \mathcal{V}(\underline{\lambda}) \subset \bigcup_{\underline{\lambda}\varepsilon\Lambda} \mathcal{V}(\underline{\lambda}) \text{ se e somente se, } \forall\, x \;\varepsilon \sum_{\underline{\lambda}\varepsilon\Lambda} \mathcal{V}(\underline{\lambda})$$

$$\underline{Z}(x) \triangleq \{\underline{\lambda} \;\varepsilon\; \mathbb{R}^N \,|\, \delta_i(\underline{\lambda}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, t\} \neq \emptyset$$

onde $\{\delta_1(\underline{\lambda}), \ldots, \delta_t(\underline{\lambda})\}$ é o conjunto dos menores não nulos de ordem $(R + 1)$ da matriz $[\tilde{V}(\underline{\lambda}) \,\vdots\, x]$.

Demonstração

É claro que $\bigcup_{\underline{\lambda}\varepsilon\Lambda} \mathcal{V}(\underline{\lambda}) \subset \sum_{\underline{\lambda}\varepsilon\Lambda} \mathcal{V}(\underline{\lambda})$. Agora, se

$$V(\underline{\lambda}) = V_0 + f_1(\underline{\lambda})V_1 + \ldots + f_p(\underline{\lambda})V_p,$$

* sobre bases mínimas o leitor deve se reportar ao capítulo V.

$$\bigcap_{\underline{\lambda}\in\Lambda} \text{Ker } V'(\underline{\lambda}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} V'_0 \\ \vdots \\ V'_p \end{bmatrix}, \text{ isto é,}$$

$$\sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda}) = [\bigcap_{\underline{\lambda}\in\Lambda} \text{Ker } V'(\underline{\lambda})]^{\perp} = [\text{Ker} \begin{bmatrix} V'_0 \\ \vdots \\ V'_p \end{bmatrix}]^{\perp} = \text{Im}[V_0, \ldots, V_p];$$

portanto, $\sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$ é finitamente gerada.

Seja $\tilde{V}(\underline{\lambda}) = [V_1(h), \ldots, V_\ell(\underline{\lambda})]$, onde

$$V_i(\underline{\lambda}) = \omega_{i,0} + g_{i,1}(\underline{\lambda})\, \omega_{i,1} + \ldots + g_{i,r_i}(\underline{\lambda})\, \omega_{i,r_i}, \qquad (19)$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell ;$$

se $\{z_1, z_2, \ldots, z_s\}$ é uma base para $\sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$ e

$n = k_1 z_1 + \ldots + k_s z_s \in \sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$, então, $x \in \bigcup_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$ se e somente se para algum $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^N$,

$$k_1 z_1 + \ldots + k_s z_s = \bar{k}_1 V_1(\underline{\lambda}) + \ldots + \bar{k}_\ell V_\ell(\underline{\lambda}), \text{ ou de (19)}$$

$(\bar{k}_1 h_{11}(\underline{\lambda}) + \ldots + \bar{k}_\ell h_{1,\ell}(\underline{\lambda}) - k_1) z_1 + \ldots + (\bar{k}_1 h_{s,1}(\underline{\lambda}) + \ldots +$
$+ \bar{h}_\ell h_{s,\ell}(\underline{\lambda}) - k_s) z_s = 0$ e como $z_1, \ldots, z_s$ são linearmente independentes,

$$\bar{k}_1 h_{11}(\underline{\lambda}) + \ldots + \bar{k}_\ell h_{1,\ell}(\underline{\lambda}) = k_1$$

$$\vdots$$

$$\bar{k}_1 h_{s,1}(\underline{\lambda}) + \ldots + \bar{k}_\ell h_{s,\ell}(\underline{\lambda}) = k_s \qquad \text{, isto é}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11}(\underline{\lambda}) & \cdots & h_{1,\ell}(\underline{\lambda}) \\ \vdots & & \vdots \\ h_{s,1}(\underline{\lambda}) & \cdots & h_{s,\ell}(\underline{\lambda}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \\ \vdots \\ \bar{k}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_s \end{bmatrix} \tag{20}$$

Pré-multiplicando (20) por $[z_1 \; \ldots \; z_s]$ resulta que

$$\tilde{V}(\underline{\lambda}) \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \\ \vdots \\ \bar{k}_\ell \end{bmatrix} = x \tag{21}$$

Assim, o sistema (21) tem solução se e somente se para algum $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^N$, $x \in \operatorname{Im} \tilde{V}(\underline{\lambda})$, i.e., se e somente se os menores não nulos de $[\tilde{V}(\underline{\lambda}) \; \vdots \; x]$ de ordem $L + 1$ fornecem $\mathcal{I}$ não vazio.

<u>Demonstração do Teorema 2.6</u>

Suponha que $\sum_{\underline{\lambda} \in \Lambda} V(\lambda) \not\subset \bigcup_{\underline{\lambda} \in \Lambda} V$) Então, existe $x \in \sum_{\lambda \in \Lambda} V(\underline{\lambda})$ tal que $x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V(\underline{\lambda})$, para todo $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^N$.

Seja $\underline{\lambda}_0 \in \mathbb{R}^N$; como $x \notin \bigcup_{\underline{\lambda}} V(\underline{\lambda})$, $x \notin V(\underline{\lambda}_0)$ e portanto $x \in \mathcal{W}$ para algum $\mathcal{W} \subset \sum_{\underline{h}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$ tal que $\sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda}) = V(\underline{\lambda}_0) + \mathcal{W}$.
assim, pelo lema 2.3, o submodulo $\{\tilde{V}(\underline{\lambda}) : z_{\ell+1} \ldots z_s\}$ constitue uma representação mínima para a matriz polinomial $[\tilde{V}(\underline{\lambda})\ z_{\ell+1} \ldots z_s]$. Porém $\tilde{V}(\underline{\lambda}) \subset \sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$ e daí concluimos que

$$\tilde{V}(\underline{\lambda}) \oplus z_{\ell+1} \oplus \ldots \oplus z_s$$

é uma representação mínima para $\sum_{\underline{\lambda}\in\Lambda} V(\underline{\lambda})$.

Contradição !

Teorema 2.7

O subconjunto de X dado por

$$\mathcal{R}_g \triangleq \{x \in X \mid x \in \mathcal{R}(\underline{\alpha},\underline{\beta}) \text{ para algum } (\underline{\alpha},\underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}\}$$

é um subespaço linear de X.

Demonstração

Se $x_1, x_2 \in R_g$, existem $(\underline{n}_1, \underline{\omega}_1)$ e $(\underline{n}_2, \underline{\omega}_2)$ tais que $x_1 \in R_{(\underline{n}_1, \underline{\omega}_1)}$ e $x_2 \in \mathcal{R}_{(\underline{n}_2, \underline{\omega}_2)}$; suponha agora que $x_1 + x_2 \notin R_g$. Então, $x_1 + x_2 \notin \bigcup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1} \\ \underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_3}}} \mathcal{R}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$;

$$\bigcup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1}\\ \underline{\beta}\in\mathbb{R}^{N_3}}} \mathcal{R}_{(\underline{\alpha},\underline{\beta})} = \sum_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1}\\ \underline{\beta}\in\mathbb{R}^{N_3}}} \mathcal{R}(\underline{\alpha},\underline{\beta}).$$

Assim, $x_1 + x_2 \notin \bigcup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1}\\ \underline{\beta}\in\mathbb{R}^{N_3}}} \mathcal{R}_{(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$ implica que

$$x_1 + x_2 \notin \sum_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1}\\ \underline{\beta}\in\mathbb{R}^{N_3}}} \mathcal{R}_{(\underline{\alpha},\underline{\beta})}$$, ou seja,

$x_1 + x_2 \notin \mathcal{R}_{(\underline{n}_1,\, \underline{\omega}_1)} + \mathcal{R}_{(\underline{n}_2,\, \underline{\omega}_2)}$. Contradição, já que

$x_1 + x_2 \in \mathcal{R}_{(\underline{n}_1,\, \underline{\omega}_1)} + \mathcal{R}_{(\underline{n}_2,\, \underline{\omega}_2)}$.

O subespaço $R_g = \bigcup_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1}\\ \underline{\beta}\in\mathbb{R}^{N_3}}} \mathcal{R}(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ define portanto o subespaço controlável da família.

É importante notar que o teorema 2.12 nos permite dualizar todos os resultados, válidos para um sistema, para uma família infinita de sistemas.

Os teoremas que enunciaremos a seguir constituem os resultados fundamentais sobre controlabilidade generalizada:

Teorema 2.8

(a) $\mathcal{R}_g = \hat{\mathcal{B}} + \{\sum_{r=1}^{n-1} [\sum_{\underline{\mu}\in\Omega_r} (\sum_{(\underline{\mu})} A_{\mu_1} \ldots A_{\mu_r})\hat{\mathcal{B}}]\}$, $\hat{\mathcal{B}} = \sum_{j=0}^{N_3} \mathcal{B}_j$

(b) $\mathcal{R}_g = \hat{\mathcal{B}} + [\sum_{r=1}^{n-1} (\sum_{\underline{\mu}\in\Omega_r} A_{\mu_1} \ldots A_{\mu_r})\hat{\mathcal{B}}]$, $\hat{\mathcal{B}} = \sum_{j=0}^{N_3} \mathcal{B}_j$

(c) $\mathcal{R}_g = \inf \{\mathcal{R} | \mathcal{R} \supset \hat{\mathcal{B}}$ & $A_i \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$, $i = 0, 1, \ldots, N_1\}$

Demonstração

Seja $\mathcal{S}$ a família de sistemas definida por $\mathcal{S} = \{S/S = (B', A), (B', A') \in \mathcal{B}' \times \mathcal{A}'\} = \mathcal{T}'$, a família dual de $\mathcal{T}$. Aplicando os teoremas 2.3, 2.4, 2.5 e o lema 2.2 e tomando o ortogonal dos resultados obtidos, chegamos aos resultados desejados.

Carlson & Hill em |2| definem R_g na forma do teorema 2.8b como o subespaço de controlabilidade generalizado associado ao conjunto de transformações lineares $(A_0, \ldots, A_{N_1}, B_0, B_1,$

Os teoremas 2.8a e 2.8b mostram a equivalência entre a estrutura proposta por Carlson & Hill e a estrutura por nós estabelecida em termos de famílias infinitas de sistemas.

Corolário 2.4

$\mathcal{T}$ é controlável se e somente se $R_g = X$.

2.3 - CONSIDERAÇÕES COMPUTACIONAIS SOBRE O_g^* e R_g

Embora saibamos como determinar o subespaço generalizado de uma família infinita de sistemas, uma análise mais profunda do problema nos permite concluir que, usando por, exemplo o lema 2.2 ou os teoremas 2.8a - 2.8b, tanto a computação de O_g^* quanto a de R_g tornam-se inviáveis para n e/ou N_1 suficientemente grandes.

Os resultados abaixo mostram, comparativamente, como evoluem o número de colunas da estrutura proposta por Carlson & Hill e da estrutura estabelecida pelo autor para'o caso onde $n = 10$, $1 \leq N_1 \leq 4$, $m = 3$ e $N_3 = 1$, $\hat{B}$ é neste exemplo, uma matriz 10 x 6.

N_1	$\# \Omega$	$\# \Omega^2$	$\# \Omega^3$	$\# \Omega^4$	$\# \Omega^5$	$\# \Omega^6$	$\# \Omega^7$	$\# \Omega^8$	$\# \Omega^9$	Total
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	6.138
2	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	177144
3	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	2097150
4	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	14648436*

N_1	$\#\bar{\Omega}_1$	$\#\bar{\Omega}_2$	$\#\bar{\Omega}_3$	$\#\bar{\Omega}_4$	$\#\bar{\Omega}_5$	$\#\bar{\Omega}_6$	$\#\bar{\Omega}_7$	$\#\bar{\Omega}_8$	$\#\bar{\Omega}_9$	Total
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	330
2	3	6	10	15	21	28	36	45	55	1320
3	4	10	20	35	56	84	120	165	220	4290
4	5	15	35	70	126	210	330	495	715	12.012*

TABELA 2 - Total de colunas presentes na computação de R_g usando o teorema 2.8a

Este simples exemplo nos mostra claramente a impraticabilidade da utilização dos teoremas 2.8a e 2.8b na determinação de R_g, o mesmo acontecendo, naturalmente, para O_g^*.

O objetivo desta seção é viabilizar a computação dos subespaços O^*_g e R_g a partir do conceito topológico de "generalidade" de uma propriedade π em relação a uma variedade $\mathbb{V}$ introduzido por Wonham & Fabian em |4|.

Consideremos uma propriedade $\pi(\lambda)$, dependente do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}^N$, a qual pode ser falsa ou verdadeira em λ. Uma propriedade π é uma função de $\mathbb{R}^N$ em {0, 1} onde $\pi(\lambda) = 0$ (ou 1) se π falha (ou ocorre) em $\lambda \in \mathbb{R}^N$. Com $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ seja $R[\lambda]$ o domínio dos polinômios nas N indeterminadas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$.

Uma variedade $\underline{V} \subset \mathbb{R}^N$ é o conjunto de zeros comuns de um número finito de polinomios $\psi_i(\underline{\lambda}) \in \mathbb{R}[\underline{\lambda}]$, $i = 1, 2, .$ R, isto é,

$$\underline{V} = \{\underline{\lambda} | \psi_i(\underline{\lambda}) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, R).$$

$\underline{V}$ é própria se $\underline{V} \neq \mathbb{R}^N$ e não-trivial se $\underline{V} \neq \emptyset$. Com $\underline{V}$ uma variedade própria, π é genérica em relação a $\underline{V}$ se

$$\text{Ker } \pi = \{\underline{\lambda} | \pi(\underline{\lambda}) = 0\} \subset \underline{V}$$

e π é genérica se uma tal variedade $\underline{V}$ existe.

Seja $\mathbb{R}^N$ com sua topologia usual. Se $\underline{V}$ é uma variedade, é claro que, devido a continuidade dos polinômios que a definem, $\underline{V}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^N$. Assim, se π é genérica em relação a $\underline{V}$,

$$\underline{V}^c = \{\underline{\lambda} | \pi(\underline{\lambda}) = 1\}$$

é aberto em $\mathbb{R}^N$.

Procederemos agora a computação genérica dos subespaços generalizados.

2.3.1 - computação de Θ_g^*

Sejam

$$P(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}) \triangleq \begin{bmatrix} (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2}) \\ (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+ {}_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1}) \\ \vdots \\ (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^{n-1} \end{bmatrix}$$

$(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, se

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A_0 \\ \bar{C}A_1 \\ \vdots \\ \bar{C}A_{N_1} \\ \bar{C} \displaystyle\sum_{\mathcal{P}(\underline{\mu}\in\bar{\Omega}_2)} A_{\mu_1} A_{\mu_2} \\ \vdots \\ \bar{C} \displaystyle\sum_{\mathcal{P}(\underline{\mu}\in\bar{\Omega}_{n-1})} A_{\mu_1}\ldots A_{\mu_{n-1}} \end{bmatrix} \qquad (22)$$

a matriz de observabilidade da família , **isto é,**

Ker $Q = \bigcap_{\substack{\underline{\alpha}\in\mathbb{R}^{N_1} \\ \underline{\gamma}\in\mathbb{R}^{N_2}}}$ **Ker** $P(\underline{\alpha}, \underline{\gamma})$; como **para cada** $(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in (\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

$P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \equiv \hat{T}(\underline{\alpha},\underline{\gamma})\, Q$, para algum $\hat{T}(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$, posto $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \leq$ posto Q, $\forall(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$.

<u>Definição 2.5</u>

Seja $\mathcal{S} = \{S \mid S = (C, A);\ (C, A) \in \mathcal{C} \times \mathcal{A}\}$. Diremos que é fortemente observável

$$\underset{\mathbb{R}[\underline{\alpha},\underline{\gamma}]}{\text{posto}}\ P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) = \underset{\mathbb{R}}{\text{posto}}\ Q \qquad (23)$$

Se é fortemente observável e posto $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) = \sigma_0$, seja $\{\delta_1 P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}), \ldots, \delta_{N_4} P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})\}$ o conjunto $\mathbb{R}[\underline{\alpha},\underline{\gamma}]$ de todos os menores não nulos de ordem σ_0 extraídos de $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$. O subconjunto de $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ dado por

$$\underline{V} = \{(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \mid \sum_{i=1}^{N_4} \delta_i^2\, P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) = 0\}$$

define claramente uma variedade própria em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ e portanto, para todo $(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \underline{V}^c$,

$$\underset{\mathbb{R}}{\text{posto}}\ P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) = \underset{\mathbb{R}}{\text{posto}}\ Q \quad ,$$

e como

Ker $Q \subset$ Ker $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$ sobre $\mathbb{R}$, para todo $(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$,

$\Theta_g^* = \underset{\mathbb{R}}{\text{Ker}}\ P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$, $\forall(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \underline{V}^c$.

Em outras palavras, se uma dada família $\mathcal{S}$ é fortemente observável, então, O_g^* é genericamente igual $\underset{\mathbb{R}}{\text{Ker}}\ P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$, i.e., para quase todo $(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, $\Theta_g^* = \underset{\mathbb{R}}{\text{Ker}}\ P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$.

Consideremos o seguinte exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

neste caso,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 3 & 2 & \alpha+2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}}_{T(\alpha)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q}$$

$\underset{\mathbb{R}[\alpha]}{\text{posto}}\ P(\alpha) = 3$, já que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \\ 3 & 2\alpha & \alpha+2 \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha$,

e posto $Q = 3$. Portanto, $\forall\ a \notin \{0, -1\}$, $\underset{\mathbb{R}}{\text{Ker}}\ P(\alpha) = O_g^* = 0$; neste exemplo, a variedade $\underline{V}$ é a variedade discreta $\{0, -1\}$. É fácil verificar que para $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -1$, Ker $P(0) \neq 0$ e Ker $P(-1) \neq 0$.

Observe que se toda família de sistemas fosse compatível para a observabilidade, teríamos nosso problema de computação completamente solucionado, pois, o conjunto dos pontos para os quais a propriedade de compatibilidade falha, é seguramente um conjunto de medida nula. Para o exemplo apresentado no início da seção 2.3, teríamos que escalonar uma matriz com apenas 120 linhas contra 14.648.346 (Teorema 2.8b) e 12.012 (Teorema 2.8a).

Entretanto, nem toda família é fortemente observável; o exemplo abaixo nos mostra tal situação:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & -2 \\ 1+\alpha^2 & 2\alpha & -\alpha^2-3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \alpha & -2 \\ 1+\alpha^2 & 2\alpha & -\alpha^2-3 \end{bmatrix} \equiv 0 \text{ e portanto } \underset{\mathbb{R}[\alpha]}{\text{posto}}\ P(\alpha) < 3; \text{ porém,}$$

$\underset{\mathbb{R}}{\text{posto}}\ Q = 3$ e assim (23) falha. Embora Ker $P(\alpha)$ não seja genericamente igual a $\theta_g^* = $ Ker Q no sentido descrito anteriormente (neste caso não existe variedade própria: $\underset{\sim}{V} = \mathbb{R}$), θ_g^* é genericamente igual Ker $P(\alpha_1) \cap$ Ker $P(\alpha_2)$, i.e., para quase qualquer par (α_1, α_2), $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\theta_g^* = $ Ker $P(\alpha_1) \cap$ Ker $P(\alpha_2)$. Escolhamos por exemplo $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -1$;

$$\text{Ker } P(1) \cap \text{Ker } P(-1) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cap \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} = 0$$

O objetivo desta seção está concentrado exatamente em como viabilizar a computação de θ_g^*. O teorema que enunciaremos a seguir nos permitir; computar θ_g^* em um número finito de iterações, no máximo igual a $n - \sigma_0 + 1$.

Teorema 2.12

Seja $\mathcal{S}$ uma família de sistemas. Então, para quase todo conjunto Γ de no máximo $n - \sigma_n + 1$ pontos em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$,

$$\Theta_g^* = \bigcap_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \Gamma} \operatorname{Ker} P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$$

Lema 2.4

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto em $\mathbb{R}$. Então, $f(x) = 0$ sobre Λ se e somente se $a_0 = a_1 - \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$.

Demonstração

$(\rightarrow)$

Tomemos $\tau_1, \ldots, \tau_{n+1} \in \Lambda$ tais que $\tau_i \# \tau_j$ $(i \neq j)$ e $\tau_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ (é sempre possível escolher tais pontos uma vez que, por hipótese, Λ é aberto), como $f(x) \equiv 0$ sobre Λ, $f(\tau_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Assim,

$$\begin{cases} a_0 \tau_1^n + a_1 \tau_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \tau_1 + a_n = 0 \\ a_0 \tau_2^n + a_1 \tau_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \tau_2 + a_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_0 \tau_{n+1}^n + a_1 \tau_{n+1}^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \tau_{n+1} + a_n = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \tau_1^n & \tau_1^{n-1} & \cdots & \tau_1 & 1 \\ \tau_2^n & \tau_2^{n-1} & \cdots & \tau_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \tau_{h+1}^n & \tau_{n+1}^{n-1} & \cdots & \tau_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0 \qquad (24)$$

agora,

$$\begin{vmatrix} \tau_1^n & \tau_1^{n-1} & \cdots & \tau_1 & 1 \\ \tau_2^n & \tau_2^{n-1} & \cdots & \tau_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tau_{n+1}^n & \tau_{n+1}^{n-1} & \cdots & \tau_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (\tau_i - \tau_j) \neq 0$$

(o determinante em questão é o determinante de Vandermonde) e de (24) concluímos que $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$.

($\Leftarrow$) Se $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n+1} = a_n$ (= 0, então, $a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ e, em particular, para todo $x \in A$.

Lema 2.5

Seja F: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função de N variáveis definida por $F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_N=n} a_i x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_N^{p_3}$ e A um conjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ Então, $F(x_1, \ldots, x_N) \equiv 0$ sobre Λ se e somente se $a_i = 0$.

Demonstração

Escolhendo $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ não nulos em A, temos que $F(x_1, x_2, \ldots, x_N) = a_0\ b_0\ x^N + a_1\ b_1\ xN-1 + \ldots + a_{k-1}x + a_k\ b_k$; como $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k$ são todos não nulos, pelo lema 2.3, obtem-se o resultado desejado.

Lema 2.6

$$
\text{Seja } P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \triangleq \begin{bmatrix} (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2}) \\ (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1}) \\ \vdots \\ (C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})^{n-1} \end{bmatrix}
$$

e A uma região aberta em $R^{N_1} \times R^{N_2}$. Então,

$$
\Theta_g^* = \bigcap_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})\in\Lambda} \operatorname{Ker} P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})
$$

Demonstração

($\rightarrow$)

Se $x \in \Theta_g^*$, então, de (5) decorre que $P(\underline{\alpha}, \underline{\gamma})x = 0$ para todo $(\underline{a}, \underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ e portanto, em particular para $(\underline{\alpha}, \underline{\gamma}) \in \Lambda$.

($\leftarrow$)

Seja $y \in \bigcap_{(\underline{\alpha},\underline{\gamma})\in\Lambda} \operatorname{Ker} P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$ i.e., $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})y = 0$, $\forall(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) \in \Lambda$; como Λ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, por hipótese, e cada linha do sistema de equações $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})y = 0$ é um polinômio nas $N_1 + N_2$ variáveis $\alpha_1, a_2, \ldots, \alpha_{N_1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{N_2}$, identicamente nulo sobre Ω, pelo lema 2.5,

$$\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}A_0 \\ \vdots \\ \hat{C}A_{N_1} \\ \hat{C} \sum\limits_{\wp(\underline{\mu}\in\overline{\Omega}_2)} A_{\mu_1} A_{\mu_2} \\ \vdots \\ \hat{C} \sum\limits_{\wp(\underline{\mu}\in\overline{\Omega}_{n-1})} A_{\mu_1} A_{\mu_2} \cdots A_{\mu_{n-1}} \end{bmatrix} y=0, \text{ ou finalmente } y \in \Theta_g^*$$

Demonstração do teorema 2.12

sejam, $\underline{\lambda} \in (\lambda_1, \ldots, \lambda_{N_1}, \lambda_{N_1+1}, \ldots, \lambda_{N_2})$

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{N_2})$; $\sigma_0 = \underset{R[\underline{\alpha},\underline{\gamma}]}{\text{posto}} P(\underline{\alpha},\underline{\gamma}) = \underset{R[\underline{\lambda}]}{\text{posto}} P(\underline{\lambda})$;

$\underline{V} = \{\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_1+N_2} | \sum_{i=1}^{N_4} \delta_i^2 P(\underline{\lambda}) = 0\}$, onde com $\delta_i P(\underline{\lambda})$ estamos denotando os menores não nulos de ordem σ_0 em $P(\underline{\lambda})$. Sendo $P(\underline{\lambda})$ uma matriz polinomial sobre $R[\underline{\lambda}]$ sempre podemos eleger uma base polinomial para her $P(\underline{\lambda})$ | 5 |, tal que

$$\underset{R[\underline{\lambda}]}{\text{Ker}} P(\underline{\lambda}) = \Theta_g^* + V_{\underline{\lambda}}$$

onde $V_{\underline{\lambda}}$ é um $R[\underline{\lambda}]$-módulo, com $\Theta_g^* + V_{\underline{\lambda}}$ entenderemos uma soma na qual $\Theta_g^* \quad V_{\underline{\lambda}} = 0$ para todo $\underline{h}$. É fácil verificar que $\forall \underline{h} \in V^c$, $d(\ker P(\underline{\lambda})) = d(\Theta_g^*) + d(V_{\underline{\lambda}})$; assim, para todo $\underline{\lambda} \in V^c$, Ker $P(\underline{\lambda})$ é unicamente determinado pela soma direta $\Theta_g^* + V_{\underline{\lambda}}$.

Mostraremos agora se $\underline{\lambda}_0 \in V^c$, o conjunto $\underline{W}_{\underline{\lambda}_0}$,

$\underline{W}_{\underline{\lambda}_0} \triangleq \{\underline{\lambda} \in V^c, \underline{\lambda} \neq \lambda_0 | d[\text{Ker } P(\underline{\lambda}_0) \cap \text{Ker } P(\underline{\lambda})] = n-\sigma_0\}$ define uma sub-variedade própria em V^c.

Para tanto, suponha $\mathcal{S}$ não fortemente observável; se

$$d(\text{Ker } P(\underline{\lambda}_0) \cap \text{Ker } P(\underline{\lambda})) = n-\sigma_0 \quad ,\forall \underline{\lambda} \;, \underline{\lambda} \neq \underline{\lambda}_0$$

$$\text{Ker } P(\underline{\lambda}_0) \cap \text{Ker } P(\underline{\lambda}) = \text{Ker } P(\underline{\lambda}_0)$$

i.e.,

$$\operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) \subset \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda})$$

ou ainda

$$\operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) \subset \left(\bigcap_{\underline{\lambda} \neq \underline{\lambda}_0} \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda})\right) \cap \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) = \bigcap_{\underline{\lambda} \in V^c} \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda})$$

e pelo lema 2.6,

$$\operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) \subset \Theta_g^* \quad \text{ou} \quad V_{\lambda_0} \subset \Theta_g^* \quad \text{Contradição !}$$

Portanto, a cada $\underline{\lambda}_0 \in V^c$ esta associada uma variedade $W_{\underline{\lambda}_0}$ tal que se $\underline{\lambda} \in W_{\underline{\lambda}_0}$, $\operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) \cap \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}) = \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0)$. Vejamos agora o que acontece se tomando um ponto $\underline{\lambda}_0 \in V^c, \underline{\lambda} \in W_{\underline{\lambda}_0}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) \cap \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}) &= (\Theta_g^* \oplus V_{\underline{\lambda}_0}) \cdot (\Theta_g^* \oplus V_{\underline{\lambda}}) \\ &= \Theta_g^* \oplus (\Theta_g^* \oplus V_{\underline{\lambda}}) \cap V_{\underline{\lambda}_0} \end{aligned} \tag{25}$$

Por outro lado,

$$d(\operatorname{Ker} P(\underline{\lambda}_0) \cap \operatorname{Ker} P(\underline{\lambda})) < n - \sigma_0 \qquad \forall \underline{\lambda} \notin W_{\hat{\lambda}_0},$$

$$d(\Theta_g^* \oplus (\Theta_g^* \oplus V_{\underline{\lambda}}) \cap V_{\underline{\lambda}_0}) = d(\Theta_g^*) + d((\Theta_g^* \oplus V_{\underline{\lambda}}) \cap V_{\underline{\lambda}_0}) < n - \sigma_0$$

implicando $d((\Theta_g^* \oplus V_{\underline{\lambda}}) \cap V_{\underline{\lambda}_0}) < d(V_{\underline{\lambda}_0})$.

Seja $\mathcal{W}1 \neq (\theta_g^* \oplus \mathcal{V}_{\underline{\rho}_1}) \cap V_{\underline{\lambda}_0}$, $\rho 1 \notin W_{\underline{\lambda}_0}$ e $\lambda \in \underline{V}^c$.

$$\mathrm{Ker}\, P(\underline{\lambda}_0) \cap \mathrm{Ker}\, P(\underline{\rho}_1) \cap \mathrm{Ker}\, P(\underline{\lambda}) = (\theta_g^* \oplus \mathcal{W}_1) \cap (\theta_g^* \oplus \mathcal{V}_{\underline{\lambda}})$$
$$= \theta_g^* \oplus (\theta_g^* \oplus \mathcal{V}_{\underline{\lambda}}) \cap \mathcal{W}_1 \;;$$

se $\lambda \notin W_{\underline{\lambda}_0}$, $d((\theta_g^* \oplus \mathcal{V}_{\underline{\lambda}}) \wedge \mathcal{W}_1) < d(\mathcal{W}_1)$, usando o mesmo argumento anterior.

Prosseguindo de maneira análoga, tomando sempre pontos em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ fora da variedade $W_{\underline{\lambda}_0}$, obteremos uma cadeia descendente de subespaços que convergirá para o_g^* em no máximo $n-\sigma_0$ iterações, cada iteração correspondendo a uma interseção. Temos assim o seguinte algoritmo:

1. Seja $M_1 = P(\underline{\rho}_1)$

2. Compute posto de M_1

3. Faça $k = 2, 3, \ldots, n$

4. Seja $M_k = \left[\dfrac{M_{k-1}}{P(\underline{\rho}_k)}\right]$, $\forall \underline{\rho}k \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

5. Compute posto de M_k

6. Se posto M_k = posto M_{k-1} vá para 8

7. Vá para 3.

8. Compute Ker M_{k-1}

Quando o passo 6 for verificado, Ker $M_{k-1} = \Theta_g^*$.

2.3.2 - Computação de $\mathcal{R}_g$

Sejam

$$N(\underline{\alpha},\underline{\beta}) \triangleq \begin{bmatrix} (B_0 + \beta_1 B_1 + \dots + \beta_{N_3} B_{N_3})' \\ (B_0 + \beta B_1 + \dots + \beta_{N_3} B_{N_3})'(A_0+\alpha_1 A_1+\dots+\alpha_{N_1} A_{N_1})' \\ \vdots \\ (B_0 + \beta B_1 + \dots + \beta_{N_3} B_{N_3})'(A_0+\alpha_1 A_1+\dots+\alpha_{N_1} A_{N_1})'^{\,n-1} \end{bmatrix}'$$

$(\underline{\alpha},\underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$,

$$U \triangleq \begin{bmatrix} \hat{B}' \\ \hat{B}'A_0' \\ \vdots \\ \hat{B}'A_{N_1}' \\ \hat{B}' \sum\limits_{\mathcal{P}(\underline{\mu}\in\overline{\Omega}_2)} A_{\mu_1}' A'_{\mu_2} \\ \vdots \\ \hat{B}' \sum\limits_{\mathcal{P}(\underline{\mu}\in\overline{\Omega}_{n-1})} A_{\mu_1}' \dots A_{\mu_{n-1}}' \end{bmatrix}'$$

e $\hat{\sigma}_0 \triangleq$ posto $N(\underline{\alpha},\underline{\beta})$ sobre $R[\underline{\alpha}, \underline{\beta}]$.

Dualizando o teoreoa 2.12, obteremos para a controlabilidade o seguinte resultado fundamental:

Teorema 2.13

Seja $\mathcal{T}$ uma família de sistemas. Então, para quase todo conjunto $\hat{\underline{\Gamma}}$ de no máximo $n-\sigma_0 + 1$ pontos em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$,

$$R_g = \sum_{(\underline{\alpha},\underline{\beta}) \in \hat{\underline{\Gamma}}} N(\underline{\alpha},\underline{\beta})$$

O algoritmo para este caso será portanto,

1. Seja $H_1 = N(\underline{q}_1)$
2. Compute posto de H_1
3. Faça $k = 2, 3, \ldots, n$
4. Seja $H_k = [H_{k-1} \vdots N(\underline{q}_k)]$, $\underline{q}_k \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$
5. Compute posto de H_k
6. Se posto H_k = posto H_{k-1} vá para
7. Vá para 3

8. Compute Im H_{k-1}.

Observações:

(i) Embora $\sigma_0(\hat{\sigma}_0)$ seja o posto da matriz $P(\underline{\alpha},\underline{\gamma})$ $(N(\underline{\alpha},\underline{\beta}))$ sobre $R[\underline{\alpha},\underline{\gamma}]$ $(R[\underline{\alpha},\underline{\beta}])$, $\sigma_0(\hat{\sigma}_0)$ pode ser facilmente obtido tomando-se aleatoreamente um ponto $(\underline{\alpha}^*, \underline{\gamma}^*)$ $((\underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*)$ em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ $(\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3})$ e achando-se o posto de $P(\underline{\alpha}^*, \underline{\gamma}^*)$ $(P(\underline{\alpha}^*, \underline{\beta}^*))$ sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Como Ker $P(\underline{\lambda}_0) = \Theta_g^* + V_{\underline{\lambda}_0}$, para todo $\underline{\lambda}_0 \in \underline{V}^c$

$d(\text{Ker } P(\underline{\lambda}_0)) = d(\Theta_g^*) + d(V_{\underline{\lambda}_0})$, i. e,

$$n - \sigma_0 = n - \text{posto } Q + d(V_{\underline{\lambda}_0})$$

$$d(V_{\lambda_0}) = \text{posto } Q - \sigma_0, \ \forall \ \underline{\lambda}_0 \in \underline{V}^c$$

Agora, se $\lambda \in (\underline{V} \cup W_{\underline{\lambda}_0})^c$, então

$d(\text{Ker } P(\underline{\lambda}_0) \cap \text{Ker } P(\underline{\lambda})) < d(V_{\underline{\lambda}_0})$ e. no máximo, em posto $Q - \sigma_0$ iterações, a sequência de subespaços

$$V_0 = \text{Ker } P(\underline{\lambda}_0)$$

$$V_1 = \text{Ker } P(\underline{\lambda}_0) \cap \text{Ker } P(\underline{\rho}_1)$$

$$\vdots$$

$$V_k = \text{Ker } P(\underline{\lambda}_0) \cap \text{Ker } P(\underline{\rho}_1) \cap \ldots \cap \text{Ker } P(\underline{\rho}_k)$$

$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_k = \Theta_g^*$, $k \leq$ posto $Q - \sigma_0$; portanto, embora não possamos computar posto Q, na realidade a sequência acima converge para O_g^* no máximo em posto Q - σ_0 iterações, em geral, menor do que n - σ_0.

2.4 - EXEMPLOS

2.4.1 - Computação de O_g^* Usando Estrutura Matricial para n=4, $N_1 = 1$

Seja a família $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \alpha A_1)\, x(t) \\ z(t) = C\, x(t) \end{cases}$$

$\Omega = \{0,\ 11$:

$$\Omega^2 = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$$

$$= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

$$\Omega^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (0,1,1)$$
$$(1,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1,)\}$$

Usando a estrutura de Carlson & Hill, O_g^* é dado por

$$\text{Ker}\begin{bmatrix} C \\ CA_0 \\ CA_1 \\ CA_0^2 \\ CA_1^2 \\ CA_0A_1 \\ CA_1A_0 \\ CA_0^3 \\ CA_0^2A_1 \\ CA_0A_1A_0 \\ CA_0A_1^2 \\ CA_1A_0^2 \\ CA_1A_0A_1 \\ CA_1^2A_0 \\ CA_1^3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Omega} = \{0,\ 1\}$$

$$\bar{\Omega}_2 = \{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)\}$$

$$\mathcal{P}(0,\ 0) = \{(0,\ 0)\}$$

$$\mathcal{P}(0,\ 1) = \{(0,\ 1),\ (1,\ 0)\}$$

$$\mathcal{P}(1,\ 1) = \{(1,\ 1)\}$$

$\bar{\Omega}_3 = \{(0,0,0),\ (0,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1)\}$

$\mathcal{F}(0,0,0) = \{(0,0,0)\}$

$\mathcal{F}(0,0,1) = \{(0,0,1),\ (1,0,0),\ (0,1,0)\}$

$\mathcal{F}(0,1,1) = \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\}$

$\mathcal{F}(1,1,1) = \{(1,1,1)\}$

Usando a estrutura do autor, Θ_g^* é dado por

$$\mathrm{Ker}\begin{bmatrix} C \\ CA_0 \\ CA_1 \\ CA_0^2 \\ CA_1^2 \\ C(A_0A_1+A_1A_0) \\ CA_0^3 \\ CA_0^3 \\ C(A_0^2A_1+A_1A_0^2+A_0A_1A_0) \\ C(A_1^2A_0+A_0A_1^2+A_1A_0A_1) \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.2 - Computação de Θ_g^* usando o teorema 2.12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\alpha) \triangleq \begin{bmatrix} C \\ C(A_0+A_1) \\ C(A_0+A_1)^2 \\ C(A_0+A_1)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

Tomemos aleatoreamente dois valores para a ; 1 e -1, por exemplo. Então,

$$P(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Posto } P(1) = 3$$

$$P(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{posto}\begin{bmatrix} P(1) \\ P(-1) \end{bmatrix} = \text{posto}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Assim, $\Theta_g^* = \text{Ker } P(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. A família dada é claramente fortemente observável.

Computemos agora os menores não nulos de ordem 3 em $P(\alpha)$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha^2 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2$$

. Estes menores só se anulam simultaneamente se a = 0; a variedade é portanto $\underline{V} = \{0\}$.

<u>Exemplo 2.4.3</u> - Computação de 0_g^* usando o teorema 2.12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Neste caso, $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tomemos inicialmente $\alpha_1 = 1$ **e** $\alpha_2 = -1$

$$P(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

portanto, $P(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **e posto** $P(1) = 3$

$$\begin{bmatrix} P(1) \\ P(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e posto } \begin{bmatrix} P(1) \\ P(-1) \end{bmatrix} = 4$$

e $\theta_g^* = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} P(1) \\ P(-1) \end{bmatrix} = 0.$

Computemos agora Ker $P(\alpha)$ sobre $R|\alpha|$.

$$\text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Note que, $\forall$ a, $\text{Ker} \begin{bmatrix} C \\ C(A_0+\alpha A_1) \\ C(A_0+\alpha A_1)^2 \\ C(A_0+\alpha A_1)^3 \end{bmatrix} \neq 0.$

Embora cada sistema seja inobservável individualmente, a família é observável. Vejamos agora o problema da variedade. Computemos todos os menores de ordem 3 não identicamente nulos em $P(\alpha)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ l & l & a \end{vmatrix} = \alpha; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 \quad \text{e então, } \underline{V} = \{0\}.$$

$d(\text{Ker } P(l) \quad \text{Ker } P(\alpha)) = d(\text{Ker } P(1))$ se e somente se

posto $\left[\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{array}\right]$ = 1; esta condição somente é verificada quando a = 1. Tomando então qualquer $a \neq 1$,

$d(\mathrm{Ker}\ P(1)\ \ \mathrm{Ker}\ P(\alpha)) < d(\mathrm{Ker}\ P(1))$; neste caso, não existe em $\underline{V}^c$ a variedade $\underline{W}_1$.

Exemplo 2.4.4 - Ilustração do teorema 2.6

Seja $V_{(\alpha,\beta)} = \left\{\begin{matrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1-\beta \\ \beta & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\}$ e suponhamos que dado um $x \in \sum_{\Lambda} V_{(\alpha,\beta)}$, $\Lambda = \mathbb{R}^2$.

queiramos determinar (α,β). Pelo teorema 2.6, os menores não nulos de ordem 3 da matriz $[\tilde{V}_{(\alpha,\beta)} \vdots x]$ devem ser todos nulos. Primeiramente, verifiquemos se $\tilde{V}_{(\alpha,\beta)} = V_{(\alpha,\beta)}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1-\beta \\ \beta & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

admitirá uma base mínima se existir algum vetor independente de (α,β) que pertença a $V_{(\alpha,\beta)}$, já que cada coluna tem grau 1. Seja $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in R^4$ tal que $Y \in V_{(\alpha,\beta)}\ \forall (\alpha,\beta)$, então, todos os menores são nulos de ordem 3 da matriz $[V_{(\alpha,\beta)} \ .\ Y]$ devem se anular para todo (α,β).

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & Y_1 \\ \alpha & 1-\beta & Y_2 \\ \beta & 0 & Y_3 \\ 1 & 1 & Y_4 \end{bmatrix} = [V_{(\alpha,\beta)} \vdots Y] \ , \ Y \neq 0$$

Os menores não nulos são

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1-\beta & Y_2 \\ \beta & 0 & Y_3 \\ 1 & 1 & Y_4 \end{vmatrix} = Y_3(1-\beta) + \beta Y_2 - \beta Y_4(1-\beta) - \alpha Y_3 = \\ \beta(Y_2 - Y_3 - Y_4) + Y_4\beta^2 - \alpha Y_3 + Y_3 \ .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & Y_1 \\ \beta & 0 & Y_3 \\ 1 & 1 & Y_4 \end{vmatrix} = Y_3\alpha + Y_1\beta - \alpha\beta Y_4 - Y_3 \ .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & Y_1 \\ \alpha & 1-\beta & Y_2 \\ 1 & 1 & Y_4 \end{vmatrix} = Y_4(1-\beta) + \alpha Y_2 + \alpha Y_1 - Y_1(1-\beta) - \alpha^2 Y_4 - Y_2 = \\ \beta(Y_1 . Y_4) + \alpha(Y_2 + Y_1) - \alpha^2 Y_4 + Y_4 - Y_1 - Y_2 .$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & Y_1 \\ \alpha & 1-\beta & Y_2 \\ \beta & 0 & Y_3 \end{vmatrix} = (1-\beta)\ Y_3 + \alpha\beta Y_2 - \beta(1-\beta)\ Y_1 - \alpha^2 Y_3 = \\ \beta(Y_3 + Y_1 + + \alpha\beta Y_2 + \beta^2 Y_1 + Y_3 \ .$$

anulando os menores para todo (α,β), teremos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{e portanto } Y = 0.$$

Tomemos agora $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, por exemplo, pois,

$$\sum_{\mathbb{R}^2} V_{(\alpha,\beta)} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \mathbb{R}^4$$

Então,

$$\beta^2 - 3\beta - \alpha + 1 = 0$$
$$\alpha + \beta - \alpha\beta - 1 = 0$$
$$1 - \alpha^2 = 0$$
$$\beta^2 - \alpha\beta - 2\beta + 1 = 0$$

tem que ser compatível para algum $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

Dos pares candidatos, $\{(1, 0), (1, 3), (-1, 2), (-1, -1)\}$ apenas $(1, 3)$ soluciona o problema. É interessante notar que a soma é finalmente gerada em qualquer aberto de $\mathbb{R}^N$, porém, o teorema 2.6 somente é verdadeiro quando a região aberta é o próprio $\mathbb{R}^N$.

CAPITULO III

O CONCEITO DE (A, B)-INVARIÂNCIA GENERALIZADA

III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo introduziremos o conceito generalizado de (A, B)-invariância o qual servirá de base para o desenvolvimento dos problemas a serem apresentados no capítulo seguinte. Este conceito, por sua vez, se impõe de maneira natural em se tratando de sistemas cujos modelos que os representam, possuem parâmetros que podem variar independentemente em todo um espaço paramétrico $\mathbb{R}^N$.

Assim, a idéia de (A, B)-invariância como a definiremos na seção III.2 tem como objetivo principal, solucionar problemas de síntese para sistemas cujos parâmetros possuam eventualmente certo grau de incerteza ou cujos parâmetros devam ser projetados de tal sorte que o sistema resultante venha a se comportar de forma robusta.

O problema de rejeição de perturbação com variação nos parâmetros nominais de um dado sistema, o qual abordaremos no capítulo seguinte, é um dentre muitos outros problemas de interesse prático, onde a idéia de (A, B)-invariância generalizada pode ser aplicada.

Os tópicos tratados neste capítulo estão assim distribuídos: na seção III.2 recapitularemos o conceito de (A, B)-invariância associado a um sistema linear e invariante no tempo T = (A, B), na seção III.3 definiremos (A, B)-invariância generalizada: uma extensão do conceito de (A, B)-invariância a uma família infinita de sistemas, bem como um algoritmo para computar o elemento maximal (A, B)-invariante generalizado contido em um subespaço dado; finalmente, na seção 111.4 apresentaremos um exemplo ilustrativo referente à seção 111.3.

III.2 - SUBESPAÇOS (A, B)-INVARIANTES

Sejam X, U espaços lineares sobre o corpo R, com $d(X) = n$, $d(U) = m$; $A: X \to X$, $B: U \to X$ transformações lineares associadas aos espaços correspondentes; V X um subespaço linear de X.

Definição 3.1

Diremos que o subespaço $V \subset X$ é (A, B)-invariante se

$$A\,V \subset B + V \tag{1}$$

A família dos subespaços (A, B)-invariantes de X será denotada por $\mathcal{Q}(A, B; X)$. A importante propriedade relacionada com os subespeçoas (A, B)-invariantes é que se $V \in \mathcal{Q}(A,B;X)$, então, V pode ser tornado (A + BF)-invariante para alguma matriz

F escolhida de maneira conveniente e denominada síntese de V. Para um dado $V \in \mathcal{Q}(A, B; X)$ existe sempre uma classe de matrizes F que sintetizam V |17|. É claro que todo subespaço A-invariante é automaticamente (A, B)-invariante.

Seja agora $K \subset X$ um subespaço de X com $d(K) = q$. A família

$$\mathcal{Q}(A, B; K) \triangleq \{V | V \in \mathcal{Q}(A, B; X) \ \& \ V \subset K\} \tag{2}$$

de subespaços (A, B)-invariantes de K tem as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{Q}(A, B; K)$ é não vazia $(0 \in \mathcal{Q}(A, B; K))$

(ii) $(A, B; K)$ é fechada em relação a adição de subespaços, pois para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{Q}(A, B; K)$

$$V_1 + V_2 \subset K \ \& \ A(V_1 + V_2) \subset \mathcal{B} + (V_1 + V_2);$$

e portanto $\mathcal{Q}(A, B; K)$ possui um Único elemento maximal

$$V_M \triangleq \sup \mathcal{Q}(A, B; K)$$

O seguinte algoritmo |17| nos permite computar V_M em um número de passos no máximo igual a $d(K) = q$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_0 &= \mathcal{K} \\
\mathcal{V}_1 &= \mathcal{K} \quad A^{-1} \; (\mathcal{B} + \mathcal{V}_0) \\
&\;\vdots \\
\mathcal{V}_\mu &= \mathcal{K} \quad A^{-1} \; (\mathcal{B} + \mathcal{V}_{\mu-1})
\end{aligned}
\tag{3}
$$

e para algum $\mu \leq q$, $\mathcal{V}_\mu = \mathcal{V}_M$.

Consideremos agora o sistema $\Sigma = (A, B, C)$ descrito por

$$
\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0, \; t \geq 0 \end{cases}
$$

onde Z é um espaço linear de dimensão finita sobre R, $d(Z) = p$ e $C: X \to Z$ uma transformação linear de X em Z.

Seja $\mathcal{V}^* \triangleq \sup \mathfrak{I}(A, B; \operatorname{Ker} C)$. Então,

(i) $(A + BF)\, \mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$ para algum $F: \mathcal{X} \to \mathcal{U}$

(ii) $\mathcal{V}^* \subset \operatorname{Ker} C$

Assim,

$$C \; \mathcal{V}^* = 0$$

$$C(A + BF) \; \mathcal{V}^* = 0$$

$$\vdots$$

$$C(A + BF)^{n-1} \; \mathcal{V}^* = 0$$

isto é,

$$\mathcal{V}^* \subset \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} C \\ C(A + BF) \\ \vdots \\ C(A + BF)^{n-1} \end{bmatrix} = \Theta^*_{\mathcal{S}} \; , \quad \mathcal{S} = (C, \; A + BF)$$

Logo, $\mathcal{V}^*$ é o maior subespaço em Ker C que pode ser sintetizado de modo a tornar-se inobservável na saída do sistema realimentado $\mathcal{S} = (C, \; A + BF)$.

III.3 - O CONCEITO GENERALIZADO DE (A, B)-INVARIÂNCIA

Seja $\mathcal{T}$ a família de sistemas dada por

$$\mathcal{T} \triangleq \{T \mid T = (A, B), \; (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$$

onde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ representam famílias infinitas de operadores lineares definidas por

$$\mathcal{A} \triangleq \{A \in \mathbb{R}^{n^2} \mid A = A_0 + \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_{N_1} A_{N_1} \; , \; \underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}) \in \mathbb{R}^{N_1}\}$$

$\mathcal{B} \triangleq \{B \in \mathbb{R}^{nm} | B = B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3},\ \underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_3}\}$

Definição III.2

O subespaço $V \subset X$ é dito ser $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-invariante generalizado se

$$A\,V \subset \mathcal{B} + V\ ,\ \forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \qquad (4)$$

Com $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$ denotaremos a família de subespaço (A, B)-invariantes generalizados de X. Mostraremos agora que todo $V \in \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$ é sintetizável.

Teorema III.1

Seja V um subespaço de X. Então, $V \in \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$ se e somente se para cada $(A, B) \in \mathcal{T}$, existe F tal que $(A + BF)\,V \subset V$.

Demonstração:

($\rightarrow$)

Suponha que $V \in \mathcal{D}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$. Então,

$A\,V \subset \mathcal{B} + V$, $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Seja $X = V \oplus W$ para algum $W \subset X$ e $Q: X \rightarrow X$ a projeção ortogonal sobre W ao longo de V;

$$Q\,\mathcal{A}\,V \subset Q\,\mathcal{B}\,,\ \forall (A,\ B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

ou

$Q(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1})V = Q(B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})Z$ para alguma matriz $Z(\underline{\alpha},\ \underline{\beta})$ e V: $V \to X$ é a inserção de V em X.

Assim, para cada $(\underline{a},\ \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$, $Z(\underline{\alpha},\ \underline{\beta}) = -F(\underline{\alpha},\ \underline{\beta})V$, isto é,

$$Q(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1})V = -Q(B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})FV=0$$

ou

$Q[(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1}) + (B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})F]V = 0$
e portanto,

$$[(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + a_{N_1} A_{N_1}) + (B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})F]V \subset \operatorname{Ker} Q = V,$$

$$\forall (\underline{\alpha},\ \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}.$$

$(\leftarrow)$

Se $[(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1}) + (B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})F]\ V \subset V$, para algum $F(\underline{\alpha},\ \underline{\beta})$ $\forall (\underline{\alpha},\ \beta) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$, então

$(A_0 + a_1 A_1 + \ldots + \alpha_1 N_1)V = -(B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})FV + V\Gamma$ para alguma matriz Γ; assim,

$$(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_{N_1} A_{N_1}) V \subset \mathrm{Im}(B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3}) + V,$$
$$\forall(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$$

e finalmente

$$A V \subset \mathcal{B} + V, \forall(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

É importante notar que se $V \in \underline{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$ e $\underline{F}^*(V) \triangleq \{F \mid \text{para cada } (A, B) \in \mathcal{T}, (A + BF) V \subset V; (A,B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ denota a classe das matrizes F que sintetizam V, em geral, $F \in \underline{F}^*(V)$ depende de $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$. Tomemos o seguinte exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$AV = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{matrix} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \mathrm{Im}B + V$$

e portanto $V \in \underline{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$. Seja $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix}$;

$$(A+BF)V = \begin{bmatrix} 1+f_{11} & f_{12} & f_{13} & 1+f_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha+f_{21}+\beta f_{11} & f_{22}+\beta f_{12} & f_{23}+\beta f_{13} & f_{24}+\beta f_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} f_{12} & 1+f_{11} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ f_{22}+\beta f_{12} & \alpha+f_{21}+\beta f_{11} \end{bmatrix}$$

Agora,

$$(A + BF)V = Vr \text{ implica}$$

$$\begin{bmatrix} f_{12} & 1+f_{11} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ f_{22}+\beta f_{12} & \alpha+f_{21}+\beta f_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \\ \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\Gamma_{21} = f_{12},\ \Gamma_{22} = 1+f_{11},\ \Gamma_{11} = 1,\ \Gamma_{12} = 0,\ f_{22}+\beta f_{12} = 0$$

$f_{21}+\alpha+\beta f_{11} = 0$. As duas Últimas equações mostram claramente como F depende de α e β.

Entretanto, em problemas de controle estaremos interessados em sínteses que independam de $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$. O teorema que enunciaremos a seguir nos permitirá decidir quando, dado $V \in \underline{\mathcal{D}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}; X)$ existe $F \in \underline{E}^*(V)$ tal que F independe de $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$.

Teorema III.2

Seja $V \in \underline{\mathcal{D}}(\mathcal{A},\mathcal{B}; X)$. Existe $F \in \underline{E}^*(V)$ tal que F é independente de $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$ se e somente se

$$\begin{aligned} &(i) \quad A_0 V \subset \operatorname{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_0} \operatorname{Ker} P B_j) + V \\ &(ii) \quad A_i V \subset V, \qquad i = 1, 2, \ldots, N_1 \end{aligned} \qquad (5)$$

onde $P: X \to X/V$ é a projeção canônica de X sobre o espaço quociente X/V.

Demonstração

$(\to)$

Suponha $F \in \underline{E}^*(V)$, F independente de $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ e $V \in \underline{\mathcal{D}}(\mathcal{A},\mathcal{B}; X)$. Então,

$$[(A_0 + \alpha_1 A_1 + \ldots \alpha_{N_1} A_{N_1}) + (B_0 + \beta_1 B_1 + \ldots + \beta_{N_3} B_{N_3})F]V \subset V,$$
$$\forall (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$$

Em particular, tomando a origem e a base canônica de $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$.

$$(A_0 + B_0 F)V \subset V$$

$$B_j F V \subset V \quad , j = 1, 2, \ldots, N_3 \tag{6}$$

$$A_i V \subset V \; , \; i = 1, 2, \ldots, N_1$$

Seja $P\colon X \to X/V$ a projeção canônica de X sobre X/V. De (5) temos que

$$PB_j F V = \overline{0} \quad , j = 1, 2, \ldots, N_3$$

ou

$$F V \subset \bigcap_{j=1}^{N_3} \operatorname{Ker} PB_j$$

e como $(A_0 + B_0F)V \subset V$ segue-se que

$$A_0 V \subset \operatorname{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \operatorname{Ker} PB_j) + V$$

($\leftarrow$)

Se $A_0 V \subset \operatorname{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \operatorname{Ker} PB_j) + V$

Seja $Q: X \to X$ a projeção ortogonal sobre W ao longo de V para algum $W \quad X$ tal que $X = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

$$QA_0 \mathcal{V} \subset Q \operatorname{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \operatorname{Ker} PB_j)$$

e a equação

$$QA_0 V = Q B_0 U^*Z, \quad U^* : \bigcap_{j=1}^{N_3} \operatorname{Ker} PB_j \to X/\mathcal{V}$$

tem solução em Z; agora, com $V: V \to X$ monico, $Z = - K V'$ para alguma matriz K e portanto, escolhendo $F = U^*K$, resulta primeiramente que

$$(A_0 + B_0F) \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \tag{7}$$

Também,

$$PB_j FV = PB_j U^*K = \overline{0}, \quad j = 1, 2, \ldots, N_3 \tag{8}$$

ou seja

$$B_j F\mathcal{V} \subset \operatorname{Ker} P = V, \quad j = 1, 2, \ldots, N_3$$

Como $A_i V \subset V$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$, combinando os resultados obtidos em (7) - (8) resulta finalmente que

$$\left[(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1}) + (B0+\beta 1 B1+\ldots+\beta_{N_3} B_{N_3})F\right]\mathcal{V} \subset \mathcal{V},$$
$$\forall(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$$

e $V \in \underline{\cap}(\mathcal{A}, \mathcal{B}\,; X)$, claramente, F independe de $(\underline{\alpha}\,, \beta)\ \forall\ F \in \underline{F}^*(V)$.

Consideremos o exemplo anterior:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}. \text{ Neste caso, } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\operatorname{Im}(B_0 | \operatorname{Ker} PB_1) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

$$A_0 V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} =$$

$\operatorname{Im}(B_0/\operatorname{Ker} PB_1) + V$; porém,

$$A_1 V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\} \not\subset \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} = V \quad \text{e a}$$

propriedade (5-11) não ē satisfeira. Tomemos agora

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ē fácil verificar que (5-i) e (5-ii) são satisfeitas. Se

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix}$$

$(A + BF)\, V = V\Gamma$ implica

$$\begin{bmatrix} f_{12} & 1+\alpha+f_{11} \\ \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta f_{12}+f_{22} & \beta f_{11}+f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} f_{12} & 1+\alpha+f_{11} \\ 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ \beta f_{12}+f_{22} & \beta f_{11}+f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{21} & P_{22} \\ P_{11} & P_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, qualquer F do tipo $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{13} & f_{14} \\ 0 & 0 & f_{23} & f_{24} \end{bmatrix}$ torna V um subespaço (A, B)-invariante generalizado. Agora, se $K \subset X$ é um subespaço linear de X, é natural questionar:

(i) Se uma dada família de subespaços (A, B)-invariantes generalizados contidos em K e para os quais toda síntese independe de (α, β), possui um Único elemento maximal;

(ii) Em caso afirmativo, como determinar este elemento supremo ?

No que se segue, provaremos não somente a existência e unicidade deste elemento, como também apresentaremos um algoritmo para sua determinação.

Seja $\mathcal{D}^*(\mathcal{A},\mathcal{B};K) \triangleq \{V \subset K \mid V \in \mathcal{D}(\mathcal{A},\mathcal{B};X)$ e para os quais $F \in F^*(V)$ independente de $(\underline{a},\underline{\beta})$, $\forall (A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}\}$ a família de subespaços cujos elementos são sintetizáveis a partir de uma síntese independente de $(\underline{a},\underline{\beta}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_3}$. Pelo Teorema III.2, $V \in \underline{\mathcal{D}}^*(\mathcal{A},\mathcal{B};K)$ se e somente se $V \subset K$ e V satisfaz as condições (5-i) e (5-ii).

Assim,

$$\underline{\mathcal{D}}^*(\mathcal{A},\mathcal{B};K = \{V \subset K \mid A_0 V \subset \mathrm{Im}(B_0 \mid \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\, P B_j) + V,\ A_i V \subset V,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N\}$$

<u>Lema III.1</u>

A família $\underline{\mathcal{D}}^*(\mathcal{A},\mathcal{B};K)$ possui um único elemento maximal

$$V_M \triangleq \sup \underline{\mathcal{D}}^*(\mathcal{A},\mathcal{B};K)$$

<u>Demonstração</u>

(i) $0 \in \underline{\mathcal{D}}^*, (\mathcal{A},\mathcal{B};K)$ e portanto $\underline{\mathcal{D}}^* \neq \emptyset$.

(ii) Sejam V_1, $V_2 \in \underline{\mathcal{D}}^*(\mathcal{A},\mathcal{B};K)$. Então,

$$A_0 V_1 \subset \mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_1 B_j) + V_1;\ P_1 : X \to X/V_1$$

$$A_0 V_2 \subset \mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_2 B_j) + V_2;\ P_2\ X \to X/V_2$$

Seja $u \in \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_1 B_j$ e $P: X \to X/V_1 + V_2$

$$P_1 B_j u = \overline{0}\ ,\quad j = 1, 2, \ldots, N_3$$

ou

$B_j u \in \mathrm{Ker}\ P_1 = V_1 \subset V_1 + V_2$, $j = 1, 2, \ldots, N_3$, assim

$$PB_j u = \overline{0}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, N_3$$

implicando

$\mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_1 B_j) \subset \mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_2 B_j)$; portanto

$$A_0(V_1 + V_2) \subset \mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ PB_j) + V_1 + V_2 \tag{3.17}$$

Por outro lado,

$$V_1 + V_2 \subset K \text{ e } A_i(V_1 + V_2) \subset V_1 + V_2, \quad i = 1, 2, \ldots, N_1 \tag{3.18}$$

$\mathcal{D}^*(\mathcal{A},\mathcal{B}\ ;\ K)$ é fechada em relação a adição de subespaços; logo de (3.17) - (3.18) $\mathcal{D}^*(\mathcal{A},\mathcal{B}\ ;\ K)$ possui um único elemento maximal $\hat{V}_M$

O seguinte algoritmo nos permite computar $\hat{V}_M$ em um número de passo no máximo igual a $d(K)$.

III.3.1 - computação de $\hat{V}_M$

Consideremos a sequência de subespaços em K:

$$V_0 = K$$

$$V_\mu = K \cap A_0^{-1}\left[\mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_{\mu-1}B_j + V_{\mu-1})\right] \cap A^{-1}\ V_{\mu-1} \cap \cdots \cap A_{N_1}^{-1} V_{\mu-1}$$

$$P_r : X \to X/V_r \quad , \ r = 0,\ 1,\ \ldots$$

Esta sequência é claramente não crescente, pois,

$V_1 \subset V_0$ e se $V_\mu \subset V_{\mu-1}$

$$V_{\mu+1} = V_0 \cap A_0^{-1}\left[\mathrm{Im}(B_0 | \bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_\mu B_j) + V_\mu\right] \cap \left(\bigcap_{i=1}^{N_1} A_i^{-1}\ V_\mu\right);$$

'Como

$$\mathrm{Im}(B_0|\bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_\mu B_j) \subset \mathrm{Im}(B_0|\bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_{\mu-1}B_j) \text{ e } A_i^{-1}V_\mu \subset A_i^{-1}V_{\mu-1},$$

temos que

$$V_{\mu+1} \subset V_0 \cap A_0^{-1}[\mathrm{Im}(B_0|\bigcap_{j=1}^{N_3} \mathrm{Ker}\ P_{\mu-1}B_j) + V_{\mu-1}] \cap (\bigcap_{i=1}^{N_1} A_i^{-1}V_{\mu+1}) = V_\mu$$

Assim, para algum $\mu \leq d(K)$,

$$V_\mu = \tilde{V}_M.$$

III.4 - EXEMPLO ILUSTRATIVO

Sejam

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } K = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}.$$

Aplicando o algoritmo da seção III.3.3.

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \bigcap X \bigcap \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$$

onde, $A_0^{-1}(\mathcal{B}_0+\mathcal{V}_0) = A_0^{-1}\ X=X$ e $A_1^{-1}\ \mathcal{V}_0 = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$,

Portanto, $\mathcal{V}_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \bigcap \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0 \bigcap A_0^{-1}(B_0 \text{ Ker } P_1B_1 + \mathcal{V}_1) \bigcap A_1^{-1}\ \mathcal{V}_1$$

onde $P_1 \colon X \to X/\mathcal{V}_1$ é dada por $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$P_1B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto, $\text{Ker}P_1B_1 = \left\{ 0 \right\}$.

Por outro lado, B_0 Ker $P_1B_1 = 0$. e teremos:

$$V_2 = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \cap \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \cap \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} = V_1$$

e portanto, como $V_2 = V_1$, $V_1 = \widehat{V}_M = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$

CAPÍTULO IV

REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO COM VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DO SISTEMA

IV.1 - INTRODUÇÃO

Trataremos neste capítulo do problema de rejeição de perturbação para uma planta linear multivariável e invariante no tempo, cujos parâmetros podem sofrer variações em uma classe previamente especificada. Em seguida, abordaremos o mesmo problema porém, neste caso, estaremos interessados em projetar uma lei de controle que além de rejeitar a perturbação, torne o sistema de malha fechada estável, fato este que em geral, não ocorre para o primeiro caso. Estes dois problemas básicos são generalizações daqueles tratados em |17| por Wonham & Morse nos quais os parãmetros da planta são supostos completamente fixos. Na seção IV.2 apresentaremos a versão original do problema de rejeição de perturbação; nas seções IV.3 e IV.4, formularemos e solucionaremos completamente os problemas, (i) rejeição de perturbação com variação nos parãmetros do sistema, (ii) rejeição de perturbação com variação nos parâmetros do sistema e estabilidade, respectivamente; na seção IV.5, finalmente, daremos alguns exemplos ilustrativos.

IV.2 - O PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO

O problema de rejeição de perturbação consiste em usar o controle, se possível, para anular o efeito de perturbações externas, na saída. Wonham & Morse |17| mostraram que este problema tem solução usando realimentação de estado, se e somente se,

$$\mathrm{Im}\ D_0 \subset \mathcal{V}^*$$

onde

$$\mathcal{V}^* \triangleq \sup\{\mathcal{V} \mid A_0\mathcal{V} \quad \mathcal{B}_0 + \mathcal{V}\ \ R\ \ V \quad \mathrm{Ker}\ C_0\}$$

e (A_0, B_0, C_0, D_0) são parâmetros nominais do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + B_0u(t) + D_0w(t) \\ z(t) &= C_0x(t) \qquad\qquad (4.1) \\ x(0) &= x_0, \ t \geq 0 \end{aligned}$$

no qual $A_0: X \to X$, $B_0: U \to X$, $C_0: X \to Z$, $D_0: \mathcal{W} \quad X$ com $d(X) = n$ e $w(t)$ representando uma perturbação externa não-mensurável diretamente pelo controlador, $w(.)$ pertencente à uma classe arbitrária Ω de perturbações.

Definição 4.1

Diremos que o sistema (4.1) é invariante sob perturbações em relação ao par (w(.), z(.)) se para cada estado inicial $x_0 \in X$, a saída z(t) é a mesma para todo $w(.) \in \Omega$.

Em outras palavras, a resposta forçada devida a perturbação

$$Z_w(t) = C_0 \int_0^t e^{(t-\tau)A_0} D_0\, w(\tau)d\tau \qquad (4.2)$$

é nula $\forall w(.) \in \Omega$

Supondo agora que $||w(.)||$ cresce exponencialmente rápido quanto $t \to \infty$, então $z_w(t)$ tem a transformada de Laplace

$$Z_w(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, Z_w(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\Big[C_0 \int_0^t e^{(t-\tau)A_0} D_0\, W(\tau)d\tau\Big]dt$$

$$= C_0 \int_0^\infty e^{-st}\Big[\int_0^t e^{(t-\tau)A_0} D_0\, W(\tau)d\tau\Big]dt$$

$$= C_0(sI - A_0)^{-1} D_0\, W(s).$$

Como $Z_w(t) = 0$, $\forall\, w(t) \in \Omega$, resulta que $Z_w(s) = 0$, $\forall\, s \in [C - spec(A_0)]$ e a condição 4.2 é portanto equivalente a

$$C_0(sI - A_0)^{-1}D_0 = 0, \ \forall s \ \varepsilon [\mathbb{C} - spec(A_0)] \qquad (4.3)$$

Em termos de realização de estado, o problema de rejeitar perturbações fica reduzido a encontrar $F: X \to U$ tal que

$$C_0[sI-(A_0 + B_0F_0)]^{-1}D_0 = 0, \ \forall s \ \varepsilon \ [\mathbb{C} - spec(A_0 + B_0F_0)]$$

isto é, a matriz de transferência do sistema de malha fechada deve ser identicamente nula sobre o corpo das funções racionais.

IV.3 - PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO COM VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DO SISTEMA

Consideremos o sistema dado por (4.1)

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + D_0w(t)$$

$$z(t) = C_0x(t)$$

$$x(0) = x_0, \ t \geq 0$$

com $d(X) = n$, $d(U) = m$, $d(W) = q$ e $d(Z) = p$.

Sejam agora

$$\mathcal{A} \triangleq \{A \ \varepsilon \ \mathbb{R}^{N^2} \,|\, A = A_0+\alpha_1A_1+\ldots+\alpha_{N_1}A_1, \ \underline{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{N_1}) \ \varepsilon \ \mathbb{R}^{N_1}\}$$

$$\mathcal{B} \triangleq \{B \ \varepsilon \ \mathbb{R}^{Nm} \,|\, B=B_0+\beta_1B_1+\ldots+\beta_{N_3}B_{N_3}, \ \underline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_{N_3}) \ \varepsilon \ \mathbb{R}^{N_3}\}$$

$$\mathcal{C} \triangleq \{C \in \mathbb{R}^{\bar{p}n} \mid C = C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2},\ \underline{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{N_2}) \in \mathbb{R}^{N_2}\}$$

$$\mathcal{D} \triangleq \{D \in \mathbb{R}^{nq} \mid D = D_0+\delta_1 D_1+\ldots+\delta_{N_4} D_{N_4},\ \underline{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_{N_4}) \in \mathbb{R}^{N_4}\}$$

as classes de variações introduzidas em (A_0, B_0, C_0, D_0) respectivamente.

Podemos agora formular nosso problema como:

"Dados $(A_0,\ldots,A_{N_1};\ B_0,\ldots,B_{N_2};\ C_0,\ldots,\ C_{N_2};\ D_0,\ldots,D_{N_4})$, encontrar condições necessárias e suficientes para a existência de um F_0: $X \to U$ tal que

$$C[sI-(A+BF)]^{-1}D = 0, \quad A\ \ ,\ B,\ C,\ D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D} \text{ e}$$

$$\forall s \in [\mathbb{C} - \quad \text{spec}(A + BF)]\text{"} \tag{4.4}$$

IV.3.1 - <u>Resultado Principal</u>

O resultado principal desta seção reside no teorema que enunciaremos a seguir:

<u>Teorema 4.1</u>

Existe F_0 tal que a condição (4.4) é verificada se e somente se

$$\sum_{i=0}^{N_4} \mathcal{D}_i \subset \tilde{\mathcal{V}}^* \tag{4.5}$$

onde

$$\tilde{V}^* = \sup\{V \mid A_0 V \subset \operatorname{Im} B_0 \mid \bigcap_{j=1}^{N_3} \operatorname{Ker}_J PB_\cdot + V;\ A_i V \subset V,$$

$$i = ,\ 2, \ldots, N_1 \ \&\ V \subset \bigcap_{k=0}^{N_2} \operatorname{Ker} C_k\}$$

e P: X → X/V representa a projeção canônica de X sobre X mod V.

<u>Demonstração</u>

<u>Necessidade</u>: Seja F_0 tal que (4.4) é satisfeita. A condição (4.4) é equivalente a

$$C(A + BF_0)^j D = 0,\ \forall\ (A, B, C, D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D};$$
$$j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

isto é,

$$(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})[(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})+(B_0+\beta_1 B_1+\ldots+\beta_{N_3} B_{N_3})F_0]^j$$

$$(D_0+\delta_1 D_1+\ldots+\delta_{N_4} D_{N_4}) = 0,\ \forall\ (\underline{\alpha}, \underline{\gamma}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} \times \mathbb{R}^{N_4}$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

e portanto.

$$\mathcal{D}_0+\mathcal{D}_1+\ldots+\mathcal{D}_{N_4} \subset \bigcap_{(A,B,C)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\times\mathcal{C}} \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} C \\ C(A+BF_0) \\ \vdots \\ C(A+DF_0)^{n-1} \end{bmatrix} \triangleq \mathcal{V}_{F_0} \qquad (4.6)$$

pelo teorema 11.5,

$\mathcal{V}_{F_0} \in \{\mathcal{V} \mid (A_0+B_0F_0)\mathcal{V} \subset V,\ B_jF_0V \subset V,\ A_1\ \mathcal{V} \subset V;\ i = 1, 2, \ldots, N_1,$ $j = 1, 2, \ldots, N_3\ \&\ V \subset \bigcap_{k=0}^{N_2} \operatorname{Ker} C_k\}$ e portanto, pelo lema III.1

$$\mathcal{V}_{F_0} \subset \sup \underline{\mathcal{Q}}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}\ ; \bigcap_{k=0}^{N_2} \operatorname{Ker} C_k) \triangleq \tilde{\mathcal{V}}^*$$

e de (4.6)

$$\sum_{i=0}^{N_4} \mathcal{D}_i \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$$

<u>suficiência</u>: Seja $F \in \mathcal{F}^*(\tilde{\mathcal{V}}^*)$. Então, pelo teorema 111.2

$$(A + BF_0)\tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$$

$$B_jF_0\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^*, \quad j = 1, 2, \ldots, N_3 \qquad (4.7)$$

$$A_i\ \tilde{\mathcal{V}}^* \subset \tilde{\mathcal{V}}^*, \quad i = 1, 2, \ldots, N_1$$

$$\tilde{V}\ * \bigwedge_{k=0}^{N_2} \operatorname{Ker} C_k$$

É claro que de (-4.7) resulta

$$(C_0+\gamma_1 C_1+\gamma_{N_2} C_{N_2})\left[(A_0+\alpha_1 A_1+\dots+\alpha_{N_1} A_{N_1})+(B_0+\beta_1 B_1+\dots+\beta_{N_2} B_{N_2})F_0\right]^j$$
$$(D_0+\delta_1 A_1+\dots+\delta_{N_4} D_{N_4}) = 0, \ \forall\, (\underline{a}, \underline{y}, \underline{\beta}, \underline{\gamma}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} \times \mathbb{R}^{N_4}$$
$$j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ou

$$C(A + BF)^{-1}D = 0, \quad \forall (A, B, C, D) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D}$$

<u>Exemplo</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Suponha } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}'$$

Para este caso,

$$C\,A^j\,D = \begin{cases} 0; \; j = 0,\,1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}; \; j = 2,\,3,\,4 \end{cases}$$

Aplicando o algoritmo da seção III.3.3, temos que

$$\tilde{\mathcal{V}}^* = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\}$$ e como $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$, o problema tem solução.

Agora, com F_0 E $\underline{F}^*(\mathcal{V}^*)$ dada por

$$F_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$CD = 0$

$$C(A+BF)D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$C(A+BF)^j D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \ , \ j = 2, 3, 4$$

* indicando a presença da perturbação a.

Suponha agora $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}'$

Neste caço, $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{V}}^*$. Se $F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha & 0 & 0 \\ (1+\beta)f_{21} & 1+f_{22}(1+\beta) & f_{23}(1+\beta) & f_{24}(1+\beta) & f_{25}(1+\beta) \\ f_{11} & f_{12} & f_{13} & 1+f_{14} & f_{15} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$CD = 0$

$$C(A+BF)D = \begin{bmatrix} (1+\beta)f_{21} & 1+f_{22}(1+\beta) & f_{23}(1+\beta) & f_{24}(1+\beta) & f_{25}(1+\beta) \\ 1 & 0 & 1+\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{23}(1+\beta) & f_{25}(1+\beta) \\ 1+\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

e assim, não existe F que anula C(A+BF)D para todo a.

IV.4 - PROBLEMA DE REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO COM VARIAÇÃO NOS PARÂMETROS DO SISTEMA E ESTABILIDADE

Estudaremos primeiramente a versão original do problema admitindo que os parâmetros nominais são exatamente conhecidos. Considerando o sistema 4.1, sejam $\tilde{V}^* \triangleq \sup\{V | A_0 V \subset B_0 + V \ \& \ V \subset \text{Ker } C_0\}$ e R^* o subespaço de controlabilidade de V^*. Se $\mathbb{C} = \mathbb{C}_g \dot{\cup} \mathbb{C}_b$, é uma partição simétrica do plano complexo, $\mathbb{C}_g$ representando a 'parte boa' e $\mathbb{C}_b$ a 'parte ruim', o problema de rejeição de perturbação com estabilidade pode ser assim formulado:

''Dados (A_0, B_0, C_0, D_0) achar $F_0: X \to U$, se possível, tal que

(i) $C_0[sI-(A_0+B_0F_0)]^{-1}D_0=0, \ \forall s \in [\mathbb{C}-\text{spec}(A_0+B_0F_0)]$

(ii) $\text{Spec}(A_0 + B_0F_0) \subset \mathbb{C}_g$''

Seja

$$\underline{V} \triangleq \{V \mid V \in \mathcal{S}(A_0, B_1, \mathrm{Ker}\, C_0), \ \& \quad F \in \underline{F}(V),$$

$$\mathrm{spec}[(A_0+B_0F) \mid V \subset C_g\} \quad .$$

$\underline{V}$ possui um Ünico elemento maximal V_g^* que pode ser determinado através do seguinte esquema:

(i) Tome $F_0 \in \underline{E}(V^*)$ e seja $P: X \to X/R^*$

(ii) Fatore o polinomio mínimo de $\overline{A_0+B_0F_0} \mid V^*/R^*$

a qual independe da escolha de $F_0 \in \underline{E}(V^*)$ em

$\beta(\lambda) = \beta_g(\lambda).\beta_b(\lambda)$ onde os zeros de β_g (resp. β_h) em C pertencem a C_g (respo. C_b).

(iii) Escreva $\overline{X}_g^* = (\frac{V^*}{R^*}) \cap \mathrm{Ker}\ \beta_g(\overline{A_0+B_0F_0})$ e

$$\overline{X}_g^* \triangleq (\frac{V^*}{R^*}) \cap \mathrm{Ker}\ \beta_b(\overline{A_0+B_0F_0})$$

(iv) $V_g^* \triangleq P^{-1}\ \overline{X}_g^*$

Assim, o problema de rejeição de perturbação com estabilidade tem solução se e somente se

$$\mathrm{Im}\ D_0 \subset V_g^*$$

Estamos agora aptos a formular nosso problema geral.

IV.4.1 - Formulação do Problema de Rejeição de Perturbação nos Parâmetros do Sistema e Estabilidade

"Dados $(A_0, \ldots, A_{N_1};\ B_0, \ldots,\ B_{N_3};\ C_0, \ldots, C_{N_2};\ D_0, \ldots,\ D_{N_4})$ achar, se possível, F_0: $X \to U$ tal que

(i) $(C_0+\gamma_1 C_1+\ldots+\gamma_{N_2} C_{N_2})[(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots\alpha_{N_1} A_{N_1})+(B_0+\beta_1 B_1+\ldots+\beta_{N_3} B_{N_3})F.$

$$(D_0+\delta_1 D_1+\ldots+\delta_{N_4} D_{N_4}) = 0,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \tag{4.8}$$

(ii) $\mathrm{Spec}[(A_0+\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_{N_1} A_{N_1})+(B_0+\beta_1 B_1+\ldots+\beta_{N_3} B_{N_3})F_0] \subset C_g$

$\forall(\underline{\alpha},\ \underline{\gamma},\ \underline{\beta},\ \underline{\delta})$ em uma pequena vizinhança de origem em $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} \times \mathbb{R}^{N_4}$".

IV.4.2 - Resultado Principal

Teorema 4.2

Existe F: $X \to U$ tal que as condições (4.8) são satisfeitas se e somente se

$$\sum_{i=0}^{N_4} \mathrm{Im}\ \mathcal{D}_i \subset \tilde{V}_g^* \ \&\ R_0 + \tilde{V}_g^* = X \tag{4.9}$$

onde

$$\tilde{V}_g \triangleq \sup \underline{\mathcal{D}}^*[\mathcal{A}, \mathcal{B} \; ; \; V_g^* \cap (\bigcap_{k=0}^{N_\ell} \text{Ker } C_k)]$$

e

$$\mathcal{R}_0 \triangleq \mathcal{B}_0 + A_0\mathcal{B}_0 + \ldots + A_0^{n-1} \mathcal{B}_0$$

É claro que para pequenas variações em torno da origem a condição (4.8) e equivalente a

(i) $C(A+BF)^j D = 0, \forall (A,B,C,D,) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C} \times \mathcal{D}$

$j = 0, 1, \ldots, n-1$

(ii) $\text{Spec}(A_0+B_0F) \subset C_g$

Seja

$$\underline{V}^* \triangleq \{V | V \in \underline{\mathcal{D}}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B} \; ; \bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k \;\; \& \;\; F \in \underline{F}^*(V) \text{ com}$$

$$\text{spec}|(A_0+B_0F)|V \subset C_g\}$$

Demonstraremos agora o seguinte lema:

Lema IV.1

$$\underline{V}^* = \underline{\mathcal{D}}^* (\mathcal{A}, \dot{\mathcal{B}} \; ; \; V_g^* \cap (\bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k)$$

Demonstração

Consideremos $V \in \underline{V}^*$. Então,

(i) $\mathcal{V} \in \underline{\mathcal{Q}}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k)$

(ii) Como $\underline{\mathcal{Q}}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k) \subset \underline{\mathcal{Q}}(A_0, B_0, \text{Ker } C_0)$ e

$F \in \underline{F}(\mathcal{V})$ tal que $\text{spec}[(A_0+B_0F)/\mathcal{V}] \subset C_g . V \in \underline{V}$ e portanto

$V \subset \mathcal{V}_g^*$. Logo,

$\mathcal{V} \in \underline{\mathcal{Q}}^*[\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{V}_g^* \cap (\bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k)]$

Seja agora $\mathcal{V} \in \underline{\mathcal{Q}}^*[\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{V}_g^* \cap (\bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k)]$.

E claro que

(i) $\mathcal{V} \in \underline{\mathcal{Q}}^*(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \bigcap_{k=0}^{N_2} \text{Ker } C_k)$

(ii) Como $V \subset V_g^*$ e $V \in \underline{\mathcal{Q}}(A_0, B_0, \text{Ker } C_0)$, tomando

$F \in \underline{F}(\mathcal{V}) \cap \underline{F}(\mathcal{V}_g^*)$, $F \in \underline{F}^*(\mathcal{V})$ já que

$\underline{F}(\mathcal{V}) \cap \underline{F}(\mathcal{V}_g^*) \subset \underline{F}^*(\mathcal{V})$.

Demonstração do teorema 4.2

Suponha que (4.9) ocorre. Então, existe $F_0 \in \underline{F}^*(\tilde{\mathcal{V}}_g^*)$

tal que

spec$[(A_0+B_0F_0)/\tilde{V}^*_g] \subset C_g$. Por outro lado, por $|^{1*}|$ $\mathcal{R}_0 + \tilde{V}^* = X$ se e somente o par $(\overline{A_0+B_0F_0}, \overline{B}_0)$ $(\overline{A_0+B_0F_0}: \frac{X}{\tilde{V}^*} \to \frac{X}{\tilde{V}^*}$ é o mapeamento induzido no espaço quociente $X/\tilde{V}^*$, tal que $P(A_0+B_0F_0) = (\overline{A_0+B_0F_0})\, P$, $P: X \to X/\tilde{V}^*)$ é controlável. Portanto, existe $\overline{F}: X/V^*_g \to U$ tal que spec$(\overline{A_0+B_0F_0} + \overline{B}\,\overline{F}) \subset C_g$. Assim F definida por $F = F_0 + \overline{F}\, P$ satisfaz (4.8).

Reciprocamente, pela definição de $\underline{V}^*$, se (4.8) é verdade, então

$\sum_{i=0}^{N_4} \text{Im}\, D_i \subset V$ para algum $V \in \underline{V}^*$; portanto $\sum_{i=0}^{N_4} \text{Im}D_i \subset V^*_g$ garantindo assim a estabilização em $(A_0+B_0F_0)/\tilde{V}^*_g$. Por outro lado, $(\overline{A_0+B_0F}, \overline{B}_0)$ é estabilizável se e somente $\mathcal{R}_0 + \tilde{V}^* = X$.

IV.5 - EXEMPLO ILUSTRATIVO

Nesta seção mostraremos como o problema de rejeição de perturbação abordado em IV.4.1 admite solução.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1+\beta \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 0 & \gamma & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{C}_b = \mathbb{C}^-$

Neste caso, $V_g^* = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$ e $\tilde{V}^* = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}$.

(i) Análise para V_g^*

Tomemos $T = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$, uma b se para X.

$$A_0 + B_0F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix}$$

Agora, $T^{-1}(A_0+B_0F)T = \left[\begin{array}{cc:ccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{array}\right]$

e $\underline{F}(V_g^*) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & 0 & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix}.$

Observe que se f_{11} c 0,

$$\operatorname{spec}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \subset \mathbb{C} \;, \forall f_{12} \;.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{R}_0 = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\}, \text{ em como } V_g^* = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\},$$

segue-se que

$$\mathcal{R}_0 + V_g^* = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} = X \text{ , ou seja}$$

o par $\overline{(A_0 + B_0F,\ B_0)}$ é controlável para algum $F \in \underline{F}(V_g^*)$;

$$\text{matriz } \overline{B}_0 \,\vdots\, \overline{A_0+B_0F}\ \overline{B}_0 \,\vdots\, \overline{A_0+B_0F^2}\ \overline{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & f_{25} \\ 1 & f_{25} & f_{24}f_{25} + f_{25}^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{tem posto 3, já que } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & f_{25} \\ 1 & f_{25} & f_{25}f_{24} + f_{25}^2 \end{vmatrix} = 1.$$

Entretanto, $V_g^* \not\subset \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}$

(ii) **Análise para $\tilde{V}^*$**

$$\textbf{Tomemos } T = \left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = T^{-1}$$

$$T^{-1}(A_0+B_0F)T = \left[\begin{array}{cc:ccc} f_{11} & f_{13} & f_{12} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{23} & f_{22} & f_{24} & f_{25} \end{array}\right]$$ **. Neste caso,**

$\underline{F}^*(\tilde{V}^*)$,

$\mathrm{Spec}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{\subset}$ $\mathbb{C}_r$, **independente de f_{11} e f_{13}, já que**

$$\underline{\quad} \;=\; \begin{bmatrix} f_{11} & f_{13} & f_{12} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & f_{22} & 0 & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix}.$$ É fácil verificar que como $\mathcal{R}_0 + \mathcal{V}^* \neq \mathcal{X}$, o par $(\overline{A_0+B_0F}, \overline{B}_0)$ é não controlável. O problema novamente não possui solução.

(iii) Análise para $\tilde{\mathcal{V}}_g^*$

Primeiramente, seguindo o algoritmo da seção anterior,

$$\tilde{\mathcal{V}}_g^* = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}. \text{ Se } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T^{-1},$$

$$T^{-1}(A_0+B_0F)T = \begin{bmatrix} f_{11} & \vdots\; f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\underline{F}^*(\mathcal{V}_g^*) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} \end{bmatrix}$$

Notemos que $\mathrm{spec}(A_0 + B_0F(\tilde{V}_g^*) \subset \bar{\mathbb{C}}$ é sempre garantido, bastando para tanto tomar $f_{11} < 0$. Como $\mathcal{R}_0 + \tilde{V}_g^* = X$, os polos de $\overline{A_0+B_0F}$ podem ser posicionados de forma arbitrária, já que

$$\text{Posto}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f_{25} \\ 0 & 1 & f_{25} & f_{24}+f_{25} \\ & f_{25} & f_{24}+f_{25}^2 & f_{23}+f_{23}+f_{25}+(f_{24}+f_{25}^2)f_{25} \end{bmatrix} = 4.$$

É fácil verificar então que, se $\sum_{i=0}^{N_4} \mathcal{D}_i \subset \tilde{V}_{\bar{g}}^*$, o problema sempre terá solução.,

CAPÍTULO V

COMPUTAÇÃO DE BASES MÍNIMAS EM ESPAÇOS VETORIAIS DE FUNÇÕES RACIONAIS

5.1 - INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento conceitual da Teoria de Sistemas nas últimas décadas, alguns pesquisadores tiveram sua atenção voltada para o problema de estabelecer conexões básicas entre o método do espaço de estado e o domínio da frequência. Intimamente relacionado com este problema esta o conceito de bases mínimas em espaços vetoriais de funções racionais desenvolvido por Forney recentemente em |19|.

O algoritmo apresentado em |19| para computar bases mínimas, embora eficiente, é bastante tedioso, devido ao tratamento algébrico ao qual o algoritmo se submete. Além disto, é presuposto em |19| que uma tal base mínima sempre existe, não havendo portanto um critério para decidir <u>a priori</u> se uma dada base para algum subespaço no corpo das funções racionais prescinde de computação, isto é, já é mínima ou não !

Nosso trabalho tem por objetivo:

5.2 - O CONCEITO DE BASE MÍNIMA

Sejam, F um corpo (números reais ou complexos, corpo finito); $F[s]$ o anel dos polinomios na indeterminada $\underline{s}$ com coeficientes em F; $F(s)$ o corpo das funções racionais sobre F, isto é, o conjunto de todas as funções racionais do tipo $n(s)/d(s)$, $d(s) \neq 0$ com $n(s)$ e $d(s)$ em $F[s]$. Agora, se V é algum subespaço vetorial sobre $F(s)$, existe sempre uma base na qual V tem uma representação puramente polinomial, bastando para tal multiplicar seus elementos pelo m. m. c. de seus denominadores.

Definição 1

O grau de uma n-dupla $g = (g_1, \ldots, g_n)'$, $g_i \varepsilon F[s]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ é o maior grau de suas componentes.

Definição 2

Se $G(s)$ é uma matriz polinomial n x k com colunas g^i, o i-ésimo índice de $F(s)$ é definido como ν_i = grau de g^i, $1 \leq i \leq k$, e a ordem de $G(s)$ é definida como $\sigma(g) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i = V$.

Daremos agora a definição de base mínima.

(i) fornecer um critério que nos permita saber a priori se uma dada base é mínima.

(ii) em caso negativo, estabelecer um método simples e eficiente para a obtenção de bases mínimas polinomiais, implementáveis em computador digital.

Além das aplicações já existentes citadas no próprio de Foney, daremos outros os quais julgamos ser importantes e bastante originais:

- determinação do m.d.c. de uma família finita de polinômios.
- computação de pseudo-inverso de matrizes.
- inversão de matrizes polinomiais.
- decomposição de matrizes racionais na forma $Z(S)=N(S)D^{-1}(S)$

Estas aplicações constituem a matéria da seção 5.5.

A distribuição dos assuntos neste capítulo seguirá a seguinte ordem de apresentação: na seção 5.2 definiremos o que é uma base mínima; a redução de uma base racional a uma base mínima polinomial (algoritmo de Forney) será apresentada na seção 5.3; na seção 5.4, que constitui a parte principal deste capítulo, daremos um algoritmo para a obtenção de uma base mínima polinomial, estendendo-o a uma base no domínio dos polinomios a $\mathbb{N}$ indeterminadas; finalmente, na seção 5.5 daremos as aplicações mencionadas anteriormente.

Definição 3

Se V é um subespaço vetorial de n-uplas sobre $F(s)$ de dimensão k, uma base mínima de V é uma matriz polinomial $G(s)$ $n \times k$ tal que

(i) $G(s)$ é uma base para V.

(ii) $G(s)$ tem menor ardem dentre todas as possíveis bases polinomiais para V.

Uma condição necessária é suficiente para que uma dada base $G(s)$ seja mínima é que sejam cumpridas as seguintes condições:

(i) o m.d.c. dos menores não nulos de ordem k de $G(s)$ é 1.

(ii) a ordem de $G(s)$ é igual ao máximo grau de seus menores de ordem k.

5.3 - REDUÇÃO DE UMA BASE A UMA-BASE MÍNIMA

Seja W um espaço vetorial de n-uplas sobre $F(s)$ e denotemos por M_W o $F[s]$-módulo associado a W, isto é, o conjunto de todas as n-uplas cujos elementos são polinomios em $F[s]$. Supondo que alguma base $G(s)$ possa ser encontrada para W, o algoritmo proposto por Forney consiste dos seguintes passos:

PASSO 1: Se $G(s)$ não for polinomial, multiplique cada linha de $G(s)$ pelo m.m.c. de seus denominadores.

PASSO 2: Reduza a base polinomial obtida no Passo 1 a uma base para o módulo M_{ω}.

PASSO 3: Reduza a base resultante a uma base na qual a matriz associada seja coluna própria, ou seja, os coeficientes dos termos de maior grau formem uma matriz de posto completo.

O segundo passo, considerado o mais complicado deve ser acompanhado do seguinte procedimento:

Compute todos os menores de ordem k de $G(s)$ e determine seu m.d.c. $\delta(s)$. Se $\delta(s) \# 1$, seja $p(s)$ um fator irredutível de $\delta(s)$. Módulo $p(s)$, $G(s)$ não tem posto completo e portanto, existe alguma combinação linear das colunas de $G(s)$ que é congruente a zero mod $p(s)$:

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^{k} f_i \, g^i \equiv 0 \mod p(s)$$

e onde os f_i's podem ser tomados como polinomios de grau estritamente menor que o grau de $p(s)$. Como $\tilde{g} \equiv 0$ mod $p(s)$, $\tilde{g}$ é divisível por $p(s)$. Tome agora a coluna de maior grau para a qual $f_i \neq 0$ e substitua esta coluna por $\tilde{g}/p(s)$ obtendo assim uma base de menor ordem e com $\delta'(s) = \delta(s)/p(s)$. Prossiga até que $\delta'(s)=1$. .Pare.

Basicamente, o alçoritmo é constituído de 3 etapas:

(i) Reduzir uma base racional a uma base polinomial equivalente.

(ii) Reduzir a base polinomial obtida no Passo 1 a uma base na qual o m.d.c. de todos os menores não nulos de maior ordem é 1. Isto é, conseguido pela subsequente substituição de uma dada coluna por uma equivalente de menor grau.

(iii) Reduzir a matriz resultante a uma matriz coluna própria.

É interessante notar que o algoritmo presupõe que uma base mínima pode ser calculada. Como decidir então se uma dada base já é mínima ou não ? Isto será objeto da próxima seção. Antes porém, ilustraremos o algoritmo acima para posteriormente compará-lo com o que iremos apresentar.

Exemplo:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Menores são $(s+1)(s-1)$, 0, 0, $(s-1)^2(s+1)$ m.d.c. dos menores é $(s+1)(s-1)$. Escolhendo o fator irredutível $s-1$. Agora,

$f_1[0\ -1\ s-1\ 0] + f_2[0\ s+1\ 0\ 0] + f_3[s-1\ 0\ 0\ 0] \equiv 0 \mod(s-1)$ sugere os valores para f_1, f_2 e f_3:

$f_1 = 2;\ f_2 = 1,\ f_3 = 0$

A linha resultante será $|0\quad s-1\quad 2(s-1)\quad 0|$. Podemos substituir tanto a terceira linha quanto a segunda por $|0\quad 1\quad 2\quad 0|$ já que ambas tem grau 1 e $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$. Escolhamos a terceira. Logo, teremos:

$$\begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Menores: $2(s+1)$, 0, 0, $2(s-1)(s+1)$
m.d.c. dos menores $= 2(s+1)$.

Claramente que com $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $f_3 = 0$,

$f_1[s-1\quad 0\quad 0\quad 1] + f_2[0\quad s+1\quad 0\quad 0] + f_3[0\quad 1\quad 2\quad 0] \equiv 0 \mod (s+1)$ e portanto resulta

$$\begin{bmatrix} s-7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ com m.d.c. dos menores $= 2$ e daí

$$\begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ é coluna própria. Pare !

5.4 - COMPUTAÇÃO DE BASES MÍNIMAS SOBRE F

Antes de iniciarmos propriamente o método de obtenção de uma base mínima para um dado subespaço vetorial sobre F(s) utilizando apenas elementos do corpo F, necessitaremos de alguns resultados preliminares.

5.4.1 - Computação de uma Base Mínima para o Espaço Nulo de uma Matriz Polinomial

Seja P(s) uma matriz polinomial kxn (k < n) de posto k sobre F[s].

$$\text{Ker } P(s) \triangleq \{x(s) | P(s)\ x(s) \equiv 0\}$$

Agora, se x(s) pertence a alguma base mínima de Ker P(s) então:

(i) x(s) sempre pode ser escolhido de modo a que cada uma de suas componentes seja um elemento de F[s].

(ii) grau de x(s) é no máximo igual ao maior dos graus dos menores de ordem k de P(s).

Assim, dado $x(s) = x_0 + sx_1 + \dots + s^m x_m$, expandindo $P(s)$ na forma $P(s) = P_0 + sP_1 + \dots + s^r\ P_r$,

$P(s)\ x(s) \equiv 0$ se e somente se

$(P_0 + sP_1 + \dots + s^r P_r)(x_0 + sx_1 + \dots + s^m x_m) = 0,\ \forall\ s,$ ou equivalentemente,

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
P_0 & & \\
P_1 & P_0 & \\
\vdots & P_1 & P_0 \\
P_{r-1} & & P_1 \\
 & P_{r-1} & \\
 & P_r & \\
 & & P_{r-1} \\
 & & P_r
\end{bmatrix}}_{(m+1)\ \text{blocos}}
\begin{bmatrix}
x_0 \\
x_1 \\
\vdots \\
x_m
\end{bmatrix}
$$

Portanto, uma base mínima para Ker $P(s)$ admite um vetor $x(s)$ de grau $\underline{m}$, se e somente se (2) é satisfeita. Este fato nos induz a formular o seguinte algoritmo para computar uma base mínima para $P(s)$:

PASSO 1: Escreva $P(s)$ na forma $P(s) = P_0 + sP_1 + \ldots + s^n P_r$.

PASSO 2: Defina M_ℓ como

$$M_\ell \triangleq \begin{bmatrix} P_0 & \\ & P_0 \\ P_1 & \\ & P_1 \\ P_{r-1} & \\ & P_{r-1} \\ & P_r \end{bmatrix}$$

Compute posto de M_ℓ, $\ell = 1.\ 2, \ldots,$ até que para algum $\underline{L}$ posto $M_\ell \geq n(\ell-1)+k$.

PASSO 3: Compute Ker M_ℓ arbitrando valores apenas para as n-k primeiras variáveis livres, mantendo nulas as variáveis livres restantes.

PASSO 4: Construa $G(s)$ como $G_0 + sG_1 + \ldots + s^{\ell-1} G_{\ell-1}$ onde

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{\ell-1} \end{bmatrix}$$

tem posto n-k e é uma base para Ker M_ℓ. Pare.

Teorema 1

G(s) obtida no Passo 4 é uma base mínima para o espaço nulo de P(s).

Demonstração:

Por construção, G(s) tem a menor ordem possível. Para G(s) ser uma base mínima é suficiente mostrar que G(s) é uma base. Suponha então que posto de G(s) sobre F|x| é menor que n-k. Como posto $M_\ell \geq (\ell-1) + k$, posto $M_{\ell+j} \geq n(\ell-1)+k$, j = 1, 2, ...; e portanto, pelo Passo 3,

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \vdots \\ G_{\ell-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

já que todas as variáveis livres da forma linha escalonada de M_R são também variáveis livres da forma linha escalonada de $M_{\ell+j}$.

Assim, não existe base para Ker P(s). Contradição.

O algoritmo proposto possui as seguintes particularidades:

(i) a cada passo são armazenados os vetores que posteriormente irão constituir a base mínima.

(ii) suponha posto $M_1 = \eta_1 < n$ e denotemos por η_ℓ o posto de M_ℓ; se $2n - \eta_2 = n - \eta_1$, $\eta_2 = n + \eta_1$ e como $\eta_2 \leq 2\eta_1$ resulta que $n + \eta_1 \leq 2\eta_1$, isto é $\eta_1 \geq n$. Assim, se Ker P(s) admite vetores constantes também admitirá vetores que são funções de $\underline{s}$, e por indução, vetores em s^2, s^3, ...

Exemplo:

Considerando o exemplo anterior:

$$P(s) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s-1 & 0 \end{bmatrix}$$

PASSO 1:

$$\text{posto}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 4 \text{ e } 4 - 4 = 0 < 1.$$

$$\left[\begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & -1 & 0 & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\operatorname{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & -1 & 0 & & & & \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hdashline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right\} \quad \text{e portanto}$$

PASSO 3:

$$\operatorname{Ker} P(s) = \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1-s \end{matrix}\right\}$$

5.4.2 - Computação de Bases Mínimas para Subespaços Sobre F(s)

Sabendo como computar uma base mínima para o espaço nulo de uma matriz polinomial, estamos aptos a computar uma base mínima para um subespaço V sobre $F(s)$. O método de obtenção de uma base mínima é baseado no seguinte lema |[19]|.

Lema 2: Sejam $H_1(s)$ e $H_2(s)$ bases polinomiais mínimas para V e $V^{\perp}$ respectivamente. Então, $O(H_1) = O(H_2)$.

O Lema 2, entretanto, é equivalente ao seguinte lema;

<u>Lema 3</u>

Seja V um subespaço vetorial sobre $F(s)$ e $G(s)$ uma base polinomial para V. Então, $G(s)$ é uma base mínima se e somente se

$$O(H) = O(G)$$

onde $H(s)$ é uma base polinomial mínima para V^1.

O Lema 3 nos dá portanto um critério que nos permite saber <u>a priori</u> de uma dada base polinomial já é mínima. Temos finalmente o seguinte algoritmo para a determinação de uma base mínima:

<u>PASSO 1</u>: Compute uma base mínima para $V^{\perp}$. Se $O(H) = O(G)$. Pare. Em caso contrário,

<u>PASSO 2</u>: Compute uma base mínima para $(V^{\perp})^{\perp}$. Pare.

<u>Exemplo</u>:

Consideremos o exemplo apresentado na seção anterior.

<u>PASSO 1</u>: Computação de $V^{\perp}$ com base mínima.

$$\text{Ker } P(s) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1-s \end{matrix} \right\}$$

$$0 \left\{ \begin{matrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = 3 \text{ e } 0(V^{\perp}) = 1$$

e portanto a base dada não é mínima. Assim,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2 \text{ e } 4 - 2 = 2 < 3$$

$$\text{posto} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] = 3 \text{ e } 8-3 = 5 > 3$$

$$\text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

e portanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & s-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ é uma base mínima.

O algoritmo dado em (3) para a computação de uma base mínima para o espaço nulo de uma matriz $P(s)$ sobre $F|s|$, pode extendido facilmente a uma matriz polinomial sobre o domínio dos polinomios nas N indeterminada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$. Seja $P(\lambda_1, \ldots, A_N)$ uma matriz polinomial de posto k sobre $F[\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$ e $\bar{\Omega}_4$ o subconjunto do produto cartesiano Ω^r, $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ como definido no capítulo II.

PASSO 1: Escreva $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ na forma

$$P_0 + f_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)P_1 + \ldots + f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)P_r$$

PASSO 2: Defina N_ℓ como a matriz obtida da seguinte maneira: seja

$$x(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = x_0 + \sum_{\underline{\mu} \varepsilon \bar{\Omega}_p} x_i(\lambda_{\mu_i}, \ldots, \lambda_{\mu_p}), \quad p=1,2,\ldots,\ell-1$$

Agora, $P(\lambda_1, \ldots \lambda_N)\, x(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \equiv 0$ se e somente se

$$[Q] \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix} = 0. \text{ Faça } Q = N_\ell$$

Compute posto de N_ℓ, L = 1, 2, ... até que para algum L, posto $N_\ell \geq n(\ell-1)+k$.

PASSO 3: Compute Ker N_ℓ arbitrando valores apenas para as n-k primeiras variáveis livres, mantendo nulas as variáveis livres restantes.

PASSO 4: Construa $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ como.

$$G_0 + \sum_{\mu\varepsilon\bar{\Omega}_r} G_i(\lambda_{\mu_1}, \ldots, \lambda_{\mu_r}), \quad r = i, 2, \ldots, e-i$$

Usando o mesmo argumento estabelecido para o caso anterior, conclufmos que $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ dada no Passo 4, constitui uma base mínima para Ker $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ sobre $F|\lambda_1, \ldots, \lambda_N|$. É claro que $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ é uma base mfnima se e somente se:

(i) O conjunto de hipersuperffcieâ determinado pelos menores de maior ordem em $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ tem interseção vazia.

(ii) Ordem de $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ é igual ao maior dos graus de seus menores de maior ordem.

Neste caso, a ordem de $G(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ é definida como a soma dos fndices de cada coluna e onde cada fndice é o maior dos graus dos polinomios que se apresentam na referida coluna.

5.5 - APLICAÇÕES DE BASES MÍNIMAS

5.5.1 - Computação do m.d.c. de uma Família Finita de Polinômios Sobre F[s]

Sejam $f_1(s)$, ..., $f_r(s)$ polinômios mônicos na indeterminada s e V o submódulo gerado por $g(s) = (f_1(s), f_2(s), \ldots, f_r(s))$. Se $h(s)$ representa uma base mínima para V^1, pela Lema 3, a família $\{f_1, f_2, \ldots, f_r\}$ admite um m.d.c. $\delta(s) \neq 1$ se e somente se

$$O(h) < O(g) \tag{5}$$

Se a condição (5) for verificada, seja $\tilde{g}(s) = (\tilde{f}_1(s), \ldots, \tilde{f}_r(s))$ uma base mínima para V. É claro que

$$\delta(s)\,\tilde{f}_i(s) = f_i(s),\ i = 1, 2, \ldots, r \tag{6}$$

Escolhendo $f_i(s)$ de menor grau, de (6) resulta que

$$\left[f_i(s) \ \ -\tilde{f}_i(s)\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \delta(s) \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

Aplicando o algoritmo 3 para computar o espaço nulo de $\left[f_i(s) \ \ -\tilde{f}_i(s)\right]$ chegamos a $\delta(s)$.

Exemplo:

Sejam, $f_1(s) = s^2-1$; $f_2(s) = s^2+2s+1$; $f_3(s) = s+1$.

(i) $$g(s) = \begin{bmatrix} s^2-1 \\ s^2+2s+1 \\ s+1 \end{bmatrix}$$

(ii) $$[s^2-1 \quad s^2+2s+1 \quad s+1] = [-1 \quad 1 \quad 1] + s[0 \quad 2 \quad 1] +$$
$$+ s^2[1 \quad 1 \quad 0].$$

$$\text{posto} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2; \; 3 - 2 = 1 < 2$$

$$\text{posto} \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = 3; \; 6 - 3 = 3 > 2$$

Fazendo $x_0 = 0$, $h(s) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1-s \\ -1/2 & \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e claramente

$\partial(h) < \partial(g)$.

(iii)

$$\text{posto}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3;\ 3 - 3 = 0 < 1$$

$$\text{posto}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = 5;\ 6 - 5 = 1$$

portanto, $\tilde{g}(s) = \begin{bmatrix} s-1 \\ s+1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e claramente $\delta(s) = s+1$.

5.5.2 - Computação de Pseudo-Inversa de Matrizes, no Sentido de Penrose

Primeiramente, seja A uma matriz não-singular sobre $\mathbb{R}$ e $\psi(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + \alpha_n$ o polinômio característico de A. Se $b \neq 0$ é um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$, seja $\psi_b(\lambda) = s^r + \beta_1 s^{r-1} + \ldots + \beta_r$ o polinômio mínimo de b em relação a A. Então, a matriz polinomial

$$[sI - A \,\vdots\, b]$$

tem um vetor **solução** $x(s) = x_0 + sx_1 + \ldots + s^r x_r$ de **grau** $\underset{\sim}{r}$.
Assim,

$$\begin{bmatrix} -A & b & & & & & & \\ I & 0 & -A & b & & & & \\ & & I & 0 & & & & \\ & & & & -A & b & & \\ & & & & I & 0 & & \\ & & & & & & -A & b \\ & & & & & & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{bmatrix} -A & b & & & & & & \\ I & 0 & & & & & & \\ & & -A & b & & & & \\ & & I & 0 & & & & \\ & & & & -A & b & & \\ & & & & I & 0 & & \\ & & & & & & -A & b \\ & & & & & & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ \\ x_{0,n-1} \\ \cdots\cdots \\ \beta_r \\ \cdots\cdots \\ x_{11} \\ \\ x_{1,n-1} \\ \cdots\cdots \\ \beta_{r-1} \\ \cdots\cdots \\ x_{r1} \\ \\ x1,n-1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad (8)$$

De (8) resulta que

$$\begin{vmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0,n-1} \end{vmatrix} = -\left(A^{r-1} + \beta_1 A^{r-2} + \ldots + \beta_{r-1} I\right) b \qquad (9)$$

Por outro lado,

$A^r + \beta_1 A^{r-1} + \ldots + \beta_r I = 0$ e portanto,

$A^{r-1} + \beta_1 A^{r-2} + \ldots + \beta_{r-1} I + \beta_r A^{-1} = 0$. Logo,

$\beta_r A^{-1} = -A^{r-1} - \beta_1 A^{r-2} - \ldots - \beta_{r-1} I$

De (9)' teremos que

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0,n-1} \end{bmatrix} = \beta_r A^{-1} b \text{ e finalmente,}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\beta_r} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0,n-1} \end{bmatrix} b \qquad (10)$$

<u>1º Caso</u>: Agora, seja H uma matriz nxk $(k < n)$ de posto k sobre IR. A pseudo-inversa de H no sentido de Penrose |[12]| será dada por

$$H^+ = (H'H)^{-1} H'$$

Logo, fazendo $A = H'H$, a i-ésima coluna da inversa generalizada será obtida fazendo-se f igual a i-ésima coluna de H'. Além disto,

$$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{bmatrix} \text{ é } \operatorname{Ker}\left[sI - A \;\vdots\; b\right] \text{ no ponto } s = 0.$$

Temos assim o seguinte algoritmo:

<u>Passo I</u>: Compute H'H

<u>Passo II</u>: Para cada coluna h'^{i} de H' ache $\operatorname{Ker}\left[-H'H \;\vdots\; h'^{i}\right]$.

<u>Passo III</u>: Divida o vetor formado pelas k-1 primeiras componentes, pela última componente. Pare.

<u>Exemplo</u>: Achar a pseudo-inversa de

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) $H'H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Bigg| \qquad = \qquad \Bigg|$

$$(2)\quad \text{Ker}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Ker}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \left\{\begin{matrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\text{Ker}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

Portanto, $H^t = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

<u>2º Caso</u>: A matriz a ser invertida não tem posto completo.

Seja H uma matriz nxk (k < n) sobre R, com posto H < k. Neste caso não poderemos aplicar o raciocínio anterior, já que J'J é singular. Vamos usar do seguinte artifício:

$$H^{+} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[H'H + \varepsilon^2 I\right]^{-1} H'.$$

Agora, como no caso anterior, para cada coluna de H' devemos computar uma base mínima para

$$\mathrm{Ker}\left[-(H'H + \varepsilon^2 I) \;\vdots\; h'^{i}\right] \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

e em seguida fazer ε tender para zero.

Exemplo:

$$\text{Seja} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H'H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[H'H + \varepsilon^2 I\right] = \begin{bmatrix} 2+\varepsilon^2 & 0 & 2 \\ 0 & H\varepsilon^2 & 1 \\ 2 & 1 & 3+\varepsilon^2 \end{bmatrix}.$$

$$\mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2+\varepsilon^2 & 0 & 1 \\ 0 & 1+\varepsilon^2 & 1 \\ 2 & 1 & 3+\varepsilon^2 \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} \varepsilon^2 + 2 \\ -1 \\ 1 + \varepsilon^2 \\ -6-6\varepsilon^2-\varepsilon^4 \end{matrix}\right\}$$

$$\mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2+\varepsilon^2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon^2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3+E^2 & 1 \end{bmatrix} = \left\{\begin{matrix} -2 \\ 4+\varepsilon^2 \\ 2+\varepsilon^2 \\ -6-6\varepsilon^2 \quad \varepsilon^4 \end{matrix}\right\}$$

Portanto,

$$H^{+}(\varepsilon) = -\frac{1}{6+6\varepsilon^2+\varepsilon^4}\begin{bmatrix} \varepsilon^2+2 & -2 & \varepsilon^2+2 & 0 \\ -1 & 4+\varepsilon^2 & -1 & 0 \\ 1+\varepsilon^3 & 2+\varepsilon^2 & 1+\varepsilon^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} H^{+}(\varepsilon) = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.5.3 - Inversão de Matrizes Polinomiais

A inversão de uma matriz polinomial P(s) torna-se uma simples aplicação do exemplo anterior. Para exemplificar, seja inverter a matriz polinomial $P(s) = sI - A$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(sI - A')(sI - A) = s^2 - s(A' + A) + A'A$$

$$= \begin{bmatrix} (s-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (s-1)^2 & 1-s \\ 0 & -(s-1) & s^2-2s+2 \end{bmatrix}$$

$$-(sI-A')(sI-A) = \begin{bmatrix} -(s-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -(s-1)^2 & s-1 \\ 0 & s-1 & -s^2+2s-2 \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } (sI - A') = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 0 \\ 0 & -1 & s-1 \end{bmatrix} ; \ (sI-A) = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 \\ 0 & s-1 & 1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(i) Ker} \left[\begin{array}{ccc:c} -(s-1)^2 & 0 & 0 & s-1 \\ 0 & -(s-1)^2 & s-1 & 0 \\ 0 & s-1 & -(s^2-2s+2) & 0 \end{array}\right] = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ s-1 \end{array} \right\}$$

$$\text{(ii) Ker} \left[\begin{array}{ccc:c} -(s-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(s-1)^2 & s-1 & s-1 \\ 0 & s-1 & -(s^2-2s+2) & -1 \end{array}\right] = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ s-1 \end{array} \right\}$$

$$\text{(iii) Ker} \left[\begin{array}{ccc:c} -(s-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(s-1)^2 & s-1 & 0 \\ 0 & s-1 & -(s^2-2s+2) & s-1 \end{array}\right] = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ s-1 \\ \cdots\cdots \\ (s-1)^2 \end{array} \right\}$$

Portanto, teremos de acordo com a seção anterior,

$$P(s)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

5.5.4 - <u>Decomposição de uma Matriz-Racional $Z(s)$ na forma $Z(s) = N(s)D^{-1}(s)$</u>

Uma outra importante aplicação de bases mínimas, refere-se à decomposição de uma matriz racional na forma $N(s)D^{-1}(s)$ onde $N(s)$ e $D(s)$ são polinomiais. Esta decomposição é frequentemente encontrada na teoria das realizações e em outros problemas nas quais o método do domínio da frequência é utilizado.

Sejam então $Z(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{s}{s-1} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$. Como

$Z(s) = N(s)D^{-1}(s)$, $Z(s)D(s) = N(s)$ ou ainda,

$$\left[Z(s) \ \vdots\ -I\right]\begin{bmatrix} D(s) \\ \cdots \\ N(s) \end{bmatrix} = 0.$$ Basta portanto encontrar uma base míni ma $\mathrm{Ker}\left[Z(s) \ \vdots\ -I\right]$. Vejamos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} & -1 & 0 \\ \frac{s}{s-1} & \frac{1}{s} & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} s+1 & s & -s^2-s & 0 \\ s^2 & s-1 & 0 & -s^2+s \end{bmatrix}$$

Neste caso, $P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Devemos encontrar R tal que 4ℓ - posto $M_\ell \geq 2$. Assim,

$$\text{posto } M_1 = \text{posto} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = 4, \ 4 - 2 = 0 < 2$$

$$\text{Posto } M_2 = \text{posto} \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ P_1 & P_0 \\ P_2 & P_1 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = 8,\ 8 - 8 = 0 < 2$$

$$\text{Posto } M_3 = \text{posto} \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_0 & 0 \\ p_2 & P_1 & P_0 \\ 0 & P_2 & P_1 \\ 0 & 0 & P_2 \end{bmatrix} = 10,\ 12 - 10 = 2\ !$$

$$
\operatorname{Ker} M_3 = \operatorname{Ker}
\left[\begin{array}{cccc:cccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & -1 & 0 & 0 & & 0 & & & & 0 & & \\
\hdashline
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & 0 & & \\
\hdashline
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hdashline
& & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
& 0 & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hdashline
& & & & & & & & 0 & 0 & -1 & 0 \\
& 0 & & & & 0 & & & 1 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right]
$$

$$
= \left\{\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & -1 \\
1 & 0 \\
\hdashline
0 & -1 \\
1 & 0 \\
1 & 1 \\
1 & 0 \\
\hdashline
0 & 1 \\
1 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 1
\end{array}\right\}
$$

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s^2-s \\ s+s^2 & 0 \\ s & s-1 \\ 1+s & s^2 \end{bmatrix} .$$

Verificação:

$$ND^{-1} = \begin{bmatrix} s & s-1 \\ 1+s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{s+s^2} \\ \dfrac{1}{s^2-s} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2-s} & \dfrac{s}{s+s^2} \\ \dfrac{s^2}{s^2-s} & \dfrac{1+s}{s(s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{s}{s-1} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO VI

CONCLUSÃO E DIREÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Desenvolvemos nesta pesquisa o conceito generalizado de controlabilidade e observabilidade, já conhecidos para um sistema. Mostramos também como computar os subespaços generalizados de maneira viável, usando o conceito topológico de "genericidade". Um dos resultados mais importantes deste trabalho é o teorema 2.6.

Com este teorema, provamos que, para uma família infinita de sistemas, permanece ainda o conceito de dualidade já estabelecido para o caso de um sistema.

Graças ao desenvolvimento do conceito de observabilidade generalizada, nos foi possível generalizar a primeira versão do problema de rejeição de perturbações, fechando-o completamente.

No que tange à determinação de bases mínimas, o processo seguido por D. J. Forney depende da computação de máximo divisor comum e outras operações algébricas. Bastante tedioso ! Nosso método, entretanto, compreende apenas operações com elementos de um corpo numérico.

Como direções para futuras pesquisas , podemos citar:

(i) definição de "modos" de uma família infinita de sistemas: controláveis, observaveis, etc...

(ii) como determinar tais "modos" de forma viável.

(iii) estabelecimento de conexões entre o método do espaço de estado no domínio da frequência e contralidade e observabilidade generalizadas.

(iv) determinar condições de solubilidade para o problema de rejeição de perturbações com variações nos parâmetros do sistema, no domínio da frequência.

BIBLIOGRAFIA

|1| KALMAN, R. E. - On the General Theory of Control Systems. Automatic and Remote Control (Proc. First Internat. Comgr. Ted. Aut. Control, Moscow, 1960), London, Butterwrths, 1961.

|2| CARLSOM, D., HILL, R. - Generalized Controllability and the Inertia Theory, Linear Algebra and its Applications, Vol. 15, pp. 177-187, 1976.

|3| KALMAN, R. E., FALB, P. L., ARBIB, M. A. - Topics in Mathematical Systems Theory, New York, McGraw-Hill,1969.

|4| FABIAN, E. - Decoupling, Disturbance Rejection and Sensitivity, Ph, D. Thesis, Dept. of Electrical Engrg., Univ. of Toronto, 1974,

|5| GAUTMACHER, F. R. - The Theory of Matrices, New York, Chelsa, 1959.

|6| GREUB, W. - Linear Algebra, New York, Springer-Verlag , 1975.

|7| HAUTUS, M. L. J. - Controllability and Observability Conditions of Linear Autonomous Systems, Proc. Kor. Ned. Akad. Wetensh. Ser. A, Vol. 72, pp. 443-448, 1969.

|8| JACOBSON, N. - Lectures in Abstract Algebra, Vol. 2, New Jersey, Van Nostrand, 1963.

|9| MACLANE, S., BIRKHOFF, G. - Algebra, New York, MacMillan, 1967.

|10| FULTON, W. - Curvas Algebraicas, Barcelona, Reverte, 1971.

|11| BOURBAKI, N. - Éléments de Matématique, Algèbre Linéaire, Paris, Herman, 1967.

|12| ALBERT, A. - Regression and the Moore-Pensose Pseudoinverse, New York, Academic Press, 1972.

|13| DIEUDONNÉ, J. - Foundations of Modern Analysis, New York, Academic Press, 1970.

|14| CHOW, Y. - Modern Abstract Algebra, New York, Gordon and Brach, 1976.

|15| DIAS, R. J. - Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1976.

|16| DIAS, R. J., BHATTACHARYYA, S. P. - Disturbance Rejection in Linear Systems with Variations in the System Parameters, JACC (Journal Automatic Control Conference), São Francisco, USA, 1977.

|17| WONHAM, W. M. - Linear Multivariable Control, a Geometric Approach, New York, Springer-Verlag, 1974.

|18| BHATTACHARYYA, S. P.; PEARSON, J. B. - On Error Systems and the Servomechanism Problem, Int. J. Control, Vol. 15, Nº 6, 1041-1062, 1972.

|19| FORNEY, D. J. - Siam J. Control, Vol. 13, Nº 3, 1975.