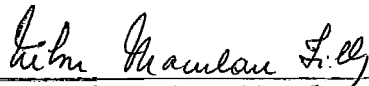


CORTES DISJUNTIVOS PARA O
PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO

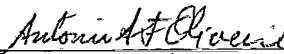
Ruy Eduardo Campello

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE pós-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D. Sc.)

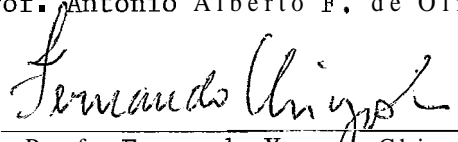
Aprovada por:



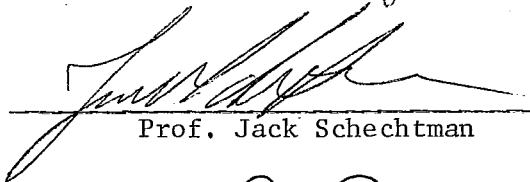
Prof. Nelson Maculan Filho
Presidente



Prof. Antonio Alberto F. de Oliveira




Prof. Fernando Yassuo Chiyoshi



Prof. Jack Schechtman



Prof. Eduardo Modiano



Prof. Carlos Humes Jr.

CAMPELLO, RUY EDUARDO

CORTES DISJUNTIVOS PARA O PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO [Rio de Janeiro]

1980.

XVIII, 156 p., 29,7 cm (COPPE-UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1980).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.

1. Programação Matemática I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

(iii)

A Ana e Eduardo

AGRADECIMENTOS

Meu particular agradecimento ao Prof. Nelson Maculan Filho que, com seu apoio, criou algumas das condições indispensáveis à realização desta pesquisa.

Ao Prof. Egon Balas, de Carnegie-Mellon University, pelo tema da tese e pelas sugestões dadas ao longo do desenvolvimento do trabalho.

A Raquel Mellman, pelo excelente trabalho de ~~datilografia.~~

A todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a conclusão desta pesquisa.

RESUMO

Diversos problemas de programação matemática, incluindo o de particionamento, podem ser formulados como Problemas de Programação Disjuntiva. Esta abordagem oferece um meio eficaz de gerar novos e poderosos planos de corte com propriedades convenientes, tirando proveito da estrutura particular do problema.

Para problemas gerais de programação inteira, metodologias baseadas em planos de cortes mostraram-se menos eficientes do que técnicas de enumeração; entretanto, para certas classes de problemas como o de particionamento, planos de corte são considerados eficientes. Visto que os cortes disjuntivos são mais fortes, podemos esperar que sejam mais promissores.

Esta dissertação trata do desenvolvimento teórico e aspectos computacionais dos cortes $B(\cdot)$, para o problema do particionamento, avaliados em termos de recursos computacionais e medidas independentes requeridas para a resolução de problemas teste gerados aleatoriamente sob condições controladas. Estes planos de corte são gerados a partir do Princípio Básico da Programação Linear Disjuntiva desenvolvido por Balas e Jeroslow.

Mostra-se que os cortes $B(\cdot)$, particularmente os novos, $B(4)$ e sua versão aprofundada $B(5)$, são não somente computacionalmente promissores, mas oferecem linhas novas e produtivas para futuras pesquisas.

ABSTRACT

Several mathematical programming problems, including the set partitioning, can be formulated as Disjunctive Programming Problems. This approach offers a powerful procedure for the generation of new and strong cutting planes with desirable properties, taking advantage of particular problem structure.

For general integer programs, the traditional cutting plane methodologies proved less efficient than enumerative techniques; however, on certain classes of problems, such as set partitioning, cutting planes are known to be efficient. Since the disjunctive cuts are stronger, they can be expected to be more promising.

This dissertation deals with the theoretical development and computational aspects of the disjunctive $B(\cdot)$ cuts, for the set partitioning problem, evaluated in terms of computer sources and independent measures required to solve specific randomly generated test problems under controlled conditions. These cutting planes are generated from the Basic Principle of Disjunctive Linear Programming posed by Balas and Jeroslow.

It is shown that $B(\cdot)$ cuts, especially the new $B(4)$ and its deeper version $B(5)$, are not only computationally promising but offer new and fruitful lines for future research.

ÍNDICE

CAPÍTULO	I	-	<u>INTRODUÇÃO</u>	1
CAPÍTULO	II	-	<u>CONCEITOS BÁSICOS E TERMINOLOGIA</u>		
	2.1	-	Programação Linear Disjuntiva	4
	2.2	-	Condições Lógicas	6
	2.3	-	Definições	7
	2.4	-	Formas Normais	8
	2.5	-	Alguns Exemplos	12
CAPÍTULO	III	-	<u>PRINCÍPIO BÁSICO DA PROGRAMAÇÃO DISJUNTIVA</u>		
	3.1	-	Caracterização da Família	15
	3.2	-	O Corte de Gomory	21
	3.3	-	O Corte Convexo de Glover	25
	3.4	-	O Problema da Degenerescência Dual	39
CAPÍTULO	IV	-	<u>APROFUNDAMENTOS DE CORTES DISJUNTIVOS</u>		
	4.1	-	Aspectos Preliminares	46
	4.2	-	Geração de Faces de CONV(F)	53
	4.3	-	Aspectos Preliminares do Princípio Geral de Aprofundamento	59
	4.4	-	Princípio Básico	62
	4.5	-	Algoritmo para o Cálculo dos β_j , $j \in J_1$	66

CAPÍTULO V	-	<u>CORTES DISJUNTIVOS PARA O PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO</u>	
5.1	-	Cortes $B(j)$, $j = 1, 2, 3$	75
5.2	-	Corte $B(4)$	82
5.3	-	Corte Aprofundado $B(5)$	85
5.4	-	Critérios de Escolha da Linha Geradora do Corte	87
5.5	-	Aplicação Numérica	91
CAPÍTULO VI	-	<u>EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL</u>	
6.1	-	comentários Gerais	99
6.2	-	Planejamento do Experimento	102
6.3	-	Resultados	107
CAPÍTULO VII	-	<u>RESUMO E CONCLUSÕES</u>	113
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>		116
<u>ANEXOS</u>			

INTRODUÇÃO

Problemas de programação matemática não convexa como o da complementaridade linear e o de programação quadrática, bem como todos os de programação inteira e mista, podem ser formulados como problemas lineares sujeitos a condições lógicas adicionais.

Esta abordagem possui considerável poder e flexibilidade, já que, ao contrário das formulações tradicionais, explora a estrutura formal particular de cada problema, tornando possível incorporar aos algoritmos informações relevantes na busca das soluções Ótimas globais.

Os fundamentos teóricos da programação disjuntiva são discutidos nos trabalhos de Balas [2, 3, 4], Jeroslow [20], Glover [9], e Owen [10]; porém, os resultados mais importantes são devidos aos dois primeiros. Estes resultados fornecem a base para a unificação da teoria de planos de corte e, além disso, uma forma de examinar esta teoria a partir de um novo ponto de vista.

Dentre todos os problemas de programação inteira com estrutura especial, o de particionamento, denominado algumas vezes de problema do recobrimento com restrições de igualdade, está provavelmente entre os de maior relevância prática.

Em se tratando de problemas gerais de programação inteira, os algoritmos tradicionais de plano de corte são menos eficientes que os métodos de enumeração; entretanto, para certas classes de problemas como o de particionamento, os algoritmos duais de corte têm mostrado sua eficiência no

que concerne a pequeno e médio porte. A medida, porém, que as dimensões vão aumentando, exigindo um número maior de cortes para atingir o Ótimo global, a eficiência desta técnica se reduz sensivelmente devido, principalmente, a presença maciça de degenerescência dual.

~través de procedimentos disjuntivos, é possível gerar cortes válidos mais profundos que os tradicionais para o problema, os quais, reque-
rendo pequeno esforço computacional adicional, possuem a desejável proprieda
de de poderem ter coeficientes negativos, o que frequentemente elimina o pro-
blema da degenerescência dual, verificada ao empregarmos cortes tradicionais
com coeficientes não negativos.

No que se refere à organização e apresentação do trabalho, con-
sideramos que a contribuição deveria ser vista não somente em termos dos as-
pectos originais, mas como um meio didático de divulgação científica. Par-
tindo desta premissa, a conceituação da família de cortes disjuntivos $B(\cdot)$ é
apresentada de modo a facilitar a leitura do texto. Certas definições, exem-
plos e algumas demonstrações são incluídas, visando unicamente assegurar o
aspecto didático.

Desta forma, após este primeiro capítulo de cunho meramente in-
trodutório, procura-se estabelecer alguns conceitos básicos e a terminologia
a ser utilizada ao longo do texto.

No terceiro capítulo, o princípio básico da família de cortes
disjuntivos é formalizado como um teorema, sendo explorados alguns corolá-
rios e extensões. Mostra-se como ficará claro que cortes como os de Glover
[9] e Gomory [11] pertencem a esta família exaustiva. O problema da degene-
rescência dual é interpretado geometricamente, confrontando-se os cortes dis-

juntivos com os tradicionais, de coeficientes não-negativos.

As condições sob as quais é possível aprofundar os cortes $B(i)$, podendo obter-se o corte mais profundo implicado pela disjunção, são explicitadas no capítulo quatro, sendo posteriormente aplicadas.

No capítulo cinco, são deduzidos e comentados os cinco cortes disjuntivos $B(i)$, que serão alvo de nossa experiência computacional no capítulo seis. Os três primeiros cortes foram desenvolvidos por Balas [7, 8]; porém até a data não existe nenhuma experiência computacional realizada [6]. Os cortes $B(4)$ e $B(5)$ são mais recentes, tendo sido idealizados por Balas em 1977, pouco antes do curso por ele ministrado na COPPE/UFRJ, do qual participamos. Sua consolidação, discussão e desenvolvimento computacional são a principal contribuição deste trabalho.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS E TERMINOLOGIA

Neste capítulo, procuramos enfocar o problema geral da programação disjuntiva, colocando ao longo do mesmo alguns exemplos, com o intuito de tornar mais claras estas definições iniciais.

2.1 - Programação Linear Disjuntiva

Seja o seguinte problema de programação matemática:

$$(PD) \quad \left[\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \quad A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \quad \underline{x} \geq \underline{0} \\ \quad \underline{x} \in \psi \end{array} \right]$$

onde

A é uma matriz $m \times n$

$\underline{a}_0 \in R^m$

é o *Conjunto de Condições Lógicas*

Diremos que o problema acima é de Programação Linear Disjuntiva ou, simplesmente, um Problema Disjuntivo (PD). A razão desta denominação tornar-se-á mais clara adiante.

Tomemos, a título de ilustração, um exemplo trivial.

$$\begin{array}{l}
 \text{(PD)} \quad \left[\begin{array}{l}
 \text{minimizar} \quad x_1 + 2x_2 \\
 \text{sujeito a:} \\
 x_1 + x_2 \leq 4 \\
 x_1, x_2 \geq 0 \\
 x_1 \geq 2 \quad \text{e/ou} \quad x_2 \geq 2
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Neste caso, teríamos o conjunto de condições lógicas dado por:

$$\psi = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 2 \quad \text{e/ou} \quad x_2 \geq 2\}$$

Geometricamente, o conjunto não-convexo de soluções viáveis para (PD) \tilde{E} é representado na Figura II-1, onde verificamos que a solução ótima $\tilde{x}^* = (2,0)$ pode ser, para este caso simples, obtida, resolvendo-se dois problemas de programação linear contínua.

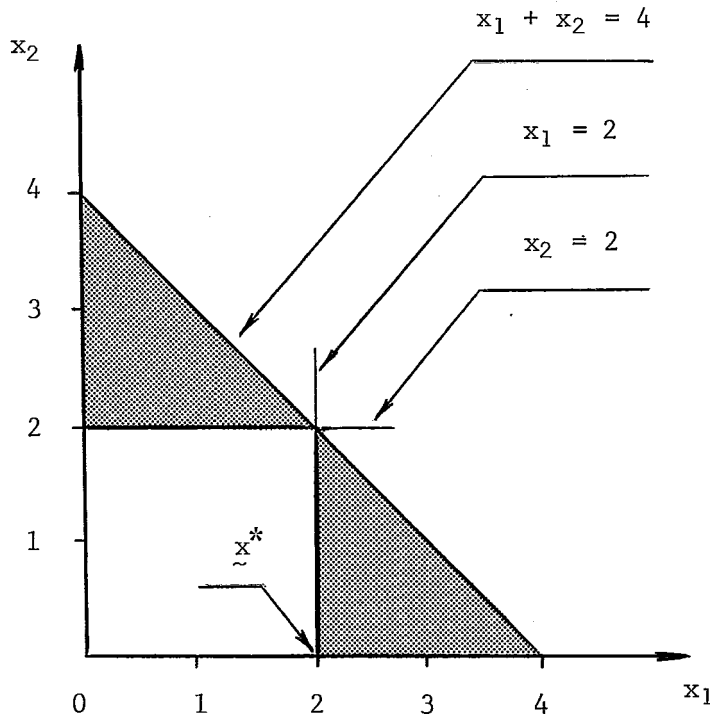


Figura II-1

2.2 - Condições Lógicas

Nesta abordagem, devemos entender por Condições Lógicas declarações envolvendo restrições lineares, através dos seguintes operadores:

- e \wedge , conjunção ou justaposição
- e \vee , disjunção
- e \neg , complemento de, ou negação

Para nosso melhor posicionamento, julgamos oportuno mencionar algumas propriedades conhecidas.

Os operadores lógicos \wedge e \vee são distributivos, isto é, sendo A, B e C restrições lineares, teremos:

- $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
- $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

O operador lógico \neg obedece às Leis de Morgan, ou seja:

- e $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
- $\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$

Cumpramos notar que os operadores lógicos \wedge e \neg , quando aplicados a restrições lineares, como no caso presente, dão origem a conjuntos poliédricos convexos e, portanto, o problema de otimizar uma forma linear sujeita a estas restrições pertence ao escopo da programação linear contínua. São as disjunções que introduzem as não-linearidades e, portanto, por serem elementos críticos, dão nome ao problema em questão.

2.3 - Definições

2.3.1 - Suponhamos que f e g são duas funcionais definidas em $S \subseteq \mathbb{R}^n$,

tais que: $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $\forall \underline{x} \in S, f(\underline{x}) > 0 \implies g(\underline{x}) \geq 0$

Em termos disjuntivos, teríamos:

$$\bigwedge_{\underline{x} \in S} ([f(\underline{x}) \leq 0] \vee [g(\underline{x}) \geq 0])$$

Portanto, sendo A e B duas restrições, são equivalentes às seguintes condições:

$$\bullet A \text{ — } \equiv B \text{ (} \overline{A} \vee B \text{)}$$

Diremos, de modo informal, que a restrição B é uma "consequência de" ou "implícada por" A .

Um "plano de corte" é uma desigualdade linear válida, em relação a algum conjunto de restrições. Sendo:

$$\left[\begin{array}{l} D \text{ matriz } m \times n \\ \underline{a}_0, \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathbb{R}^m \\ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_0 \in \mathbb{R} \\ X = \{ \underline{x} / D\underline{x} \geq \underline{a}_0 \} \end{array} \right.$$

$\underline{\alpha}\underline{x} \geq \alpha_0$ é um plano de corte válido ou implicado por $X \iff$ a disjunção $(\underline{x} \notin X) \vee (\underline{\alpha}\underline{x} \geq \alpha_0)$ é verdadeira $\forall \underline{x} \in X$.

A seguir, colocamos outro conceito que, como o anterior, será repetidamente utilizado.

2.3.2 - Sejam $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$ e $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$ dois cortes válidos para X . Diremos que $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$ é mais "profundo" que $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0 \iff$

$$\left[\bigvee_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} (\beta_j < \alpha_j ; \beta_h \leq \alpha_h, h \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{j\}) \right] \wedge \left[\beta_0 \geq \alpha_0 \right]$$

Pela mesma argumentação, $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$ é um "enfraquecimento" de $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$.

Note-se que, sendo $\underline{x} \geq \underline{0}$, qualquer enfraquecimento de $\underline{\beta} \underline{x} \geq \beta_0$ também será um corte válido para X , já que: $(\alpha - \beta) \underline{x} \geq \underline{0}$, $\underline{x} \geq \underline{0}$; ou seja, um corte 'contém' todos os seus enfraquecimentos.

2.4 - Formas Normais

Há mais de uma maneira de representar um problema disjuntivo, sendo que duas serão fundamentais.

Diremos que (PD) está na forma normal disjuntiva (conjuntiva) se for definido por uma disjunção (conjunção) cujos termos não contêm disjunções (conjunções) adicionais.

2.4.1 - Forma Normal Disjuntiva

$$(PD) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar} \\ \text{sujeito a:} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \underline{c} \underline{x} \\ \bigvee_{h \in H} \left(\begin{array}{l} A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Seja $X_h = \{ \underline{x} / A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h, \underline{x} \geq \underline{0} \}$, $\forall h \in H$. Para que (PD) tenha solução viável, devemos ter, pelo menos, um $\neq \phi$, ou seja,

$$\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \emptyset).$$

O conceito de viabilidade para (PD) é formalizado na proposição a seguir, cuja prova decorre, trivialmente, da aplicação do Lema de Minkowski-Farkas [13].

2.4.1.1 - Proposição

$$\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \emptyset) \iff \bigvee_{h \in H} (\Theta_h = \emptyset), \text{ onde:}$$

$$\Theta_h = \{\tilde{\theta}^h \in \mathbb{R}_+^{m_h} / \tilde{\theta}^h A^h \leq \tilde{0} \text{ e } \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h > 0\}, \forall h \in H$$

Prova:

Consideremos o seguinte par de problemas lineares duais:

$$(P)^h: \text{ minimizar } \{ \tilde{0} \tilde{x} / A^h \tilde{x} \geq \tilde{a}_0^h, \tilde{x} \geq \tilde{0} \}$$

$$\text{e } (D)^h: \text{ maximizar } \{ \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h / \tilde{\theta}^h A^h \leq \tilde{0}, \tilde{\theta}^h \geq \tilde{0} \}$$

(i) (\implies) Suponhamos que $\exists h \in H$ tal que $\Theta_h \neq \emptyset$. Então $(P)^h$ tem uma solução viável \tilde{x} que será ótima, já que $\tilde{0} \tilde{x} = 0, \forall \tilde{x}$. Pela teoria da dualidade da programação linear contínua [16], $(D)^h$ terá uma solução ótima $\tilde{\theta}^h$ tal que $\tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h = 0$. Logo, $\tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h \leq 0, \forall \tilde{\theta}^h \in U_h = \{\tilde{\theta}^h / \tilde{\theta}^h A^h \leq \tilde{0}, \tilde{\theta}^h \geq \tilde{0}\}$; assim, $\nexists \tilde{\theta}^h \in U_h$ tal que $\tilde{\theta}^h \tilde{a}_0^h > 0$, caso contrário, $\tilde{\theta}^h$ não seria solução ótima de $(D)^h$. Portanto, $\Theta_h = \emptyset$.

(ii) (\implies) Por outro lado, supondo que $\exists h \in H$ tal que $\Theta_h = \emptyset$, então

$\bar{\theta}^h = \underline{0}$ é uma solução ótima para $(D)^h$, já que $\underline{0} \in U_h$ e $e^h \in U_h$
 $\iff \theta^h \underline{a}_0^h \leq 0$; caso contrário, $\theta_h \neq \phi$, contrariando a suposição.
 Então, pela teoria da dualidade, $(P)^h$ tem solução Ótima e, portanto,
 $X_h \neq \phi$.

Assim, (i) e (ii) completam a prova. \blacksquare

Adicionalmente, definamos os seguintes conjuntos, que serão utilizados no capítulo três:

$$F = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / \forall_{h \in H} (A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h, \underline{x} \geq \underline{0}) \}$$

$$e \quad H^* = \{ h \in H / X_h \neq \phi \}$$

A condição de viabilidade anteriormente mencionada resume-se, portanto, em:

$$H^* \neq \phi \quad \text{ou} \quad F \neq \phi$$

2.4.2 - Forma Normal Conjuntiva

$$(PD) \left[\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \quad \left(\begin{array}{l} A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{array} \right) \\ \quad \quad \quad \forall_{i \in H_j} (d_j^i \underline{x} \geq d_{i0}^j), \quad j \in S \end{array} \right]$$

Alternativamente, podemos escrever:

$$\text{(PD)} \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{x} \\ \text{sujeito a:} \\ \left(\begin{array}{l} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{a_0} \\ \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{array} \right) \\ \wedge \left[\underset{\sim}{V}_{i \in H} \left(\underset{\sim}{d}^i \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{d}_{i0} \right) \right] \wedge \dots \wedge \left[\underset{\sim}{V}_{i \in H_{\#(S)}} \left(\underset{\sim}{d}^i \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{d}_{i0} \right) \right] \end{array} \right.$$

onde

$$\underset{\sim}{d}^i \in \mathbb{R}^n$$

$$\underset{\sim}{d}_{i0} \in \mathbb{R}$$

$$H, H_j, j \in S$$

são conjuntos que podem, em tese, ser finitos ou não.

Devido à distributividade dos operadores \wedge e \vee , as duas formas estarão relacionadas, podendo uma ser obtida a partir da outra. Assim, no exemplo inicial, teríamos:

FORMA NORMAL DISJUNTIVA	FORMA NORMAL CONJUNTIVA
minimizar $x_1 + 2x_2$ sujeito a: $\left(\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right) \vee \left(\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right)$	minimizar $x_1 + 2x_2$ sujeito a: $\left(\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right) \wedge \underset{\sim}{V}_{j \in \{1,2\}} (\underset{\sim}{x}_j \geq 2)$

2.5 - Alguns Exemplos

A título de ilustração, são colocados na forma disjuntiva alguns problemas e restrições de ocorrência frequente.

2.5.1 - Programação Bivalente

Seja o seguinte problema de programação inteira a n variáveis:

$$(PI): \text{ minimizar } \{ \underline{c} \underline{x} / A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \text{ e } \underline{x} \in \{0,1\}^n \}$$

A forma normal disjuntiva será dada por:

$$(PD) \left[\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \\ \forall \\ h \in H \quad \left(\begin{array}{l} A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \underline{x} = \underline{x}^h \end{array} \right) \end{array} \right]$$

onde $H = \{x^1, x^2, \dots, x^{\#(H)}\}$ é o conjunto de todos os elementos 0-1, sendo $\#(H) = 2^n$.

A forma normal conjuntiva será:

$$(PD) \left[\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \underline{c} \underline{x} \\ \text{sujeito a:} \\ A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \bigwedge_{j \in \{1,2,\dots,n\}} \left[(x_j = 0) \vee (x_j = 1) \right] \end{array} \right]$$

Do exemplo anterior, nota-se que, uma vez estabelecidas as restrições correspondentes às conjunções e disjunções, as respectivas formas são únicas.

Sendo esta formulação suficientemente geral, nela se enquadram problemas clássicos, tais como: caixeiro viajante, mochila, particionamento, recobrimento, escolha de projetos de investimento alternativos, alocação, seqüenciamento e outros.

2.5.2 - Considerações Adicionais

De importância prática será representarmos (PD) em mais de uma forma. Seja, por exemplo, o sistema:

$$\left[\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad j=1,2,3 \end{array} \right]$$

que, quando colocado na forma disjuntiva, terá $2^3 = 8$ termos. Enquanto que, se for escrito como a seguir, é uma disjunção com 4 termos.

$$\left[\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \leq 1 \\ \left[\bigvee_{i \in \{1,2,3\}} (x_i = 1, x_j = 0, j \neq i) \right] \vee \left[(x_j = 0, \forall j) \right] \end{array} \right]$$

Restrições do tipo:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{j \in Q} x_j = 1 \\ x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in Q \end{array} \right]$$

podem ser expressas na forma disjuntiva, como:

$$\bigvee_{i \in Q} \left(\begin{array}{l} x_i = 1 \\ x_j = 0, \quad j \in Q \setminus \{i\} \end{array} \right)$$

Vemos que condições lógicas podem, de várias maneiras, ser convertidas em restrições lineares envolvendo variáveis bivalentes; porém, a geração de cortes a partir destas condições, sem o concurso destes artifícios, trará, em muitos casos, algumas vantagens, como ver-se-á no caso específico do problema do particionamento.

CAPÍTULO IIIPRINCÍPIO BÁSICO DA PROGRAMAÇÃO DISJUNTIVA

Procuramos, neste capítulo, caracterizar a família de todos os cortes válidos para um problema disjuntivo. Os resultados aqui apresentados são, na realidade, generalizações e extensões de proposições clássicas no terreno de inequações lineares.

3.1 - Caracterização da Família

Estaremos interessados na família de restrições lineares implicadas pelo conjunto de restrições de um (PD), F . Todos os cortes válidos para (PD) devem pertencer a esta família.

Note-se que o conjunto de pontos satisfazendo todas as restrições lineares desta família será a envoltória convexa de (PD), a qual tem sua estrutura e propriedades devidamente caracterizadas em [3, 4]. Para o exemplo dado no capítulo II, teríamos a envoltória dada a seguir, na Figura III-1

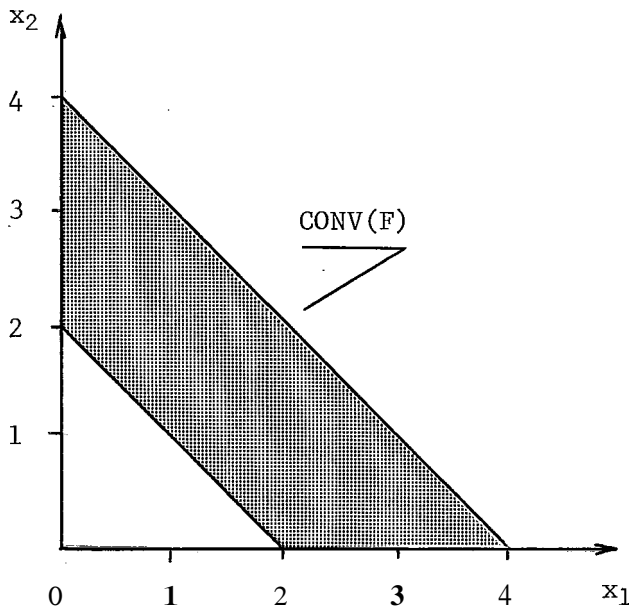


Figura III-1

Vejamos, agora, alguma notação adicional necessária ao desenvolvimento formal do *Teorema Fundamental da Família de Cortes Disjuntivos*.

$$\text{Sejam: } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\alpha} , \underline{x} \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_0 \in \mathbb{R} \\ N = \{1, 2, \dots, n\} \\ h \in H \quad (\text{n\~ao necessariamente finito}) \\ \underline{a}_0^h , \underline{\theta}^h \in \mathbb{R}^{m_h} \\ A^h = (a_j^h) \quad \text{matriz } (m_h \times n) , \quad h \in H \quad \text{e} \quad j \in N \\ \text{onde } \underline{a}_i^h \text{ \u00e9 a } j\text{-\u00e9sima coluna de } A^h \end{array} \right.$$

3.1.1 - Teorema Fundamental da Fam\u00edlia de Cortes Disjuntivos

O corte $\underline{a} \underline{x} \geq \alpha_0$ \u00e9 uma consequ\u00eancia da disjun\u00e7\u00e3o

$$\forall_{h \in H} (A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h , \underline{x} \geq 0) \iff \exists \underline{\theta}^h \geq 0 \quad \text{satisfazendo a } \underline{a} \geq \underline{\theta}^h A^h \quad \text{e}$$

$$\alpha_0 \leq \underline{\theta}^h \underline{a}_0^h , \quad \forall h \in H^* \subseteq H.$$

Prova:

(\implies) Suponhamos que o corte em quest\u00e3o seja implicado pela disjun\u00e7\u00e3o; vale dizer que:

$$\forall \underline{x} \in F \iff \underline{a} \underline{x} \geq \alpha_0$$

Portanto, $\forall h \in H^* \subseteq H$ tem-se $\min_{\substack{x \in X_h \\ \tilde{x} \geq \alpha_0}} a \tilde{x} \geq \alpha_0$.

Definamos, adicionalmente, o seguinte par de problemas duais:

$$\begin{array}{l|l}
 (P^h): \text{ minimizar } a \tilde{x} & (D^h): \text{ maximizar } \tilde{u}^h a_0^h \\
 \text{sujeito a:} & \text{sujeito a:} \\
 A^h \tilde{x} \geq a_0^h & \tilde{u}^h A^h \leq \alpha \\
 \tilde{x} \geq 0 & \tilde{u}^h \geq 0
 \end{array}$$

Como estamos assumindo a hipótese verdadeira, temos que $a \in R^n$ é tal que (P^h) tem solução Ótima finita e, portanto, (D^h) também o terá.

Sendo $\tilde{\theta}^h$ a solução Ótima de (D^h) , segue-se que:

$$\left. \begin{array}{l}
 \tilde{\theta}^h A^h \leq \alpha \\
 \tilde{\theta}^h a_0^h \geq \alpha_0 \\
 \tilde{\theta}^h \geq 0
 \end{array} \right\} \forall h \in H^* \subseteq H \quad \textcircled{i}$$

Assim:

$$\alpha_j^h = \tilde{\theta}^h a_j^h, \quad \forall j \in N \quad \text{e} \quad \alpha_j \geq \alpha_j^h, \quad \forall h \in H^* \quad \text{e} \quad j \in N$$

Ou de forma equivalente:

$$\bullet \quad \alpha_0 \leq \inf_{h \in H^*} \{ \tilde{\theta}^h a_0^h \}$$

$$a_j \geq \sup_{h \in H^*} \{\theta_{\sim j}^h a_{\sim j}^h\}, \quad j \in N$$

(\Leftarrow) Suponhamos agora que $\exists \delta_{\sim}^h \geq 0$ tal que $a_{\sim} \geq \theta_{\sim}^h A^h$ e $\alpha_0 \leq \theta_{\sim}^h a_{\sim}^h \quad \forall h \in H^* \subseteq H$.

Se escolhermos um dado $h \in H^*$ e tomarmos $\underline{x} \in X_h$, tem-se imediatamente que:

$$\alpha_{\sim} \underline{x} \geq \theta_{\sim}^h A^h \underline{x} \geq \theta_{\sim}^h a_{\sim}^h \geq \alpha_0, \quad \forall \underline{x} \in X_h \quad \textcircled{ii}$$

Logo, $\forall \underline{x} \in F$ teremos $a_{\sim} \underline{x} \geq \alpha_0$.

Assim, **a** e \textcircled{ii} completam a prova. **a**

Evidentemente, como $H^* \subseteq H$, o teorema permanece válido se $H^* \equiv H$.

Observamos, então, que todos os planos de corte válidos para (PD) podem ser obtidos a partir destas relações, escolhendo-se adequadamente os multiplicadores δ_i^h , $i = 1, 2, \dots, m_h$. Na realidade, Jeroslow [19, 20, 21] mostrou que a família de cortes definida pelo Teorema Fundamental (3.1.1) é exaustiva, no sentido que todos os cortes válidos para (PD) estão aí contidos. Inclusive os mais profundos, isto é, as faces de $\text{CONV}(F)$.

Em algumas situações, poderemos ter restrições de igualdade fazendo parte das disjunções. As modificações necessárias são estabelecidas na proposição a seguir.

3.1.1.1 - Proposição

Se para algum $h \in H^*$, $\exists i \in \{1, 2, \dots, m_h\}$ tal que $(a_{i1}^h, \dots, a_{in}^h)_{\tilde{x}} = a_{0i}^h$, então a i -ésima componente de \tilde{x}^h no Teorema (3.1.1) é irrestrita.

Prova:

Basta lembrar que, sendo $H^* \neq \emptyset$, para um certo $h \in H^*$, temos $X_h \neq \emptyset$ e, em particular para a i -ésima restrição de $A_{\tilde{x}}^h \geq a_0^h$, vem que:

$$\theta_i^h (a_{i1}^h, \dots, a_{in}^h)_{\tilde{x}} = \theta_i^h a_{0i}^h, \quad \forall \theta_i^h \in \mathbb{R}$$

Portanto, o Teorema (3.1.1) se verifica para $\theta_p^h \geq 0$, $p \in \{1, 2, \dots, m_h\} \setminus \{i\}$ e $\theta_i^h \in \mathbb{R}$, $\forall h \in H^*$. ■

Adicionalmente, como estaremos admitindo $a_0^h > 0$, $\forall h \in H$, vemos que $0 \notin X_h \quad \forall h \in H$. Por outro lado, como nosso interesse é utilizar os resultados do Teorema (3.1.1) para gerar cortes válidos que eliminem a solução Ótima do problema de programação linear contínuo associado a (PD), então um corte válido da forma $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$ eliminará a solução contínua Ótima se e somente se $\alpha_0 > 0$. Portanto, α_0 deverá ser fixado em um valor positivo. Desigualdades com $\alpha_0 \leq 0$ podem cortar partes do conjunto de soluções viáveis do programa linear associado, mas não cortam a solução contínua Ótima.

Merece tratamento especial o caso em que cada disjunção consiste em uma Única desigualdade, ou seja:

$$X_h = \{x / \sum_{j=1}^n a_j^h x_j \geq a_0^h, x_j \geq 0 \quad j=1,2,\dots,n\}, \quad h \in H$$

Neste caso, podemos obter, com certa facilidade, o conjunto H'' porquanto como por hipótese $a_0^h > 0 \quad \forall h \in H$ devemos ter $a_j^h > 0$ para algum $j \in \{1,2,\dots,n\}$, caso contrário $X_h = \phi$ e deve ser descartado. Calculado H^* , podemos aplicar o Teorema (3.1.1) à disjunção $\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \phi)$.

3.1.2 - Corolário

Seja H finito e $H'' \neq \phi$. O corte $C = \text{máximo}_{j \in N} \{a_j^h / a_0^h\} \cdot x_j \geq 1$ é uma consequência da disjunção: $\bigvee_{h \in H} (C = \text{máximo}_{j \in N} \{a_j^h \cdot x_j \geq a_0^h, x_j \geq 0)$.

Prova:

Do Teorema Fundamental (3.1.1), temos que:

$$C = \text{supremo}_{h \in H''} \{a_j^h \cdot x_j\} \geq \text{infimo}_{h \in H''} \{a_0^h\} \quad \text{para } \theta^h \geq 0, \forall h \in H'' \subseteq H.$$

Assim, a família de cortes válidos é da forma:

$$\sum_{j \in N} \alpha_j \cdot x_j \geq \alpha_0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha_j \geq \text{supremo}_{h \in H''} \theta^h \cdot a_j^h \\ \alpha_0 \leq \text{infimo}_{h \in H''} \theta^h \cdot a_0^h \end{cases}$$

Escolhendo multiplicadores $\theta^h = 1/a_0^h$, $\forall h \in H'' \subseteq H$ e lembrando que H é finito, temos:

$$\sum_{j \in N} \alpha_j \cdot x_j \geq \alpha_0 \quad \text{com} \quad \begin{cases} \alpha_j \geq \max_{h \in H^*} \{a_j^h / a_0^h\} \\ \alpha_0 \leq 1 \end{cases}$$

Assim, obtemos o resultado desejado, ou seja:

$$\sum_{j \in N} \max_{h \in H} \{a_j^h / a_0^h\} \cdot x_j \geq 1 \quad \blacksquare$$

Desnecessário lembrar que o resultado permanece válido para $H^* \equiv H$.

Como observação complementar, devemos notar que, se os coeficientes do corte obtido a partir do Corolário (3.1.2) forem positivos, este será o corte mais poderoso implicado na disjunção; por outro lado, se houver coeficientes negativos, poderemos, em tese, aprofundar o corte. No capítulo 4, voltaremos a discutir o problema.

3.2 - O Corte de Gomory

Vamos, agora, mostrar como o corte de Gomory para o algoritmo fracionário pode ser obtido através do corte definido pela proposição anterior.

Seja o seguinte problema de programação linear mista na forma completada:

(PI): minimizar x_0

 sujeito a: $x_k = 0 + \sum_{j \in I_N} c_{kj} (-\delta_{kj}) (-x_j)$, $k \in I_N$

$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in I_N} c_{ij} (-x_j)$, $i \in I_B \cup \{0\}$

$x_i \geq 0$, $\forall i \in N = I_B \cup I_N$

x_i inteiro, $\forall i \in J_1$

$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$, $k, j \in I_N$

onde:

$$N = \{1, 2, \dots, n\} = I_B \cup I_N, \quad I_B \cap I_N = \phi$$

I_B é o conjunto de variáveis básicas

I_N é o conjunto de variáveis não-básicas

$J_2 = N \setminus J_1$ é o conjunto de variáveis contínuas

Suponhamos que, para uma base do programa linear associado, a variável x_i , nesta solução, é não inteira.

Podemos escrever que:

$$y_i = f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* \cdot (-x_j), \quad y_i \text{ inteiro}$$

onde:

$$f_{ij}^* = \begin{cases} f_{ij} & , j \in J_1^+ = \{j \in J / f_{i0} \geq f_{ij}\} \\ f_{ij} - 1 & , j \in J_1^- = \{j \in J / f_{i0} < f_{ij}\} \\ a_{ij} & , j \in J_2 \end{cases}$$

$$f_{ij} = a_{ij} - [a_{ij}] \quad , j \in I_N \cup \{0\}$$

$$I_N = J_1^+ \cup J_1^- \cup J_2$$

Jã que cada y_i ê inteiro, podemos colocar esta condiçãõ na forma normal conjuntiva, ou seja:

$$\left[\begin{array}{l} y_i = f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* (-x_j) \\ [y_i \leq 0] \vee [y_i \geq 1] \end{array} \right]$$

o que equivale a:

$$\left[f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* \cdot (-x_{ij}) \leq 0 \right] \vee \left[f_{i0}^* + \sum_{j \in I_N} f_{ij}^* (-x_j) \geq 1 \right] \quad \therefore$$

$$\therefore \left[\sum_{j \in I_N} f_{ij}^* x_j \geq f_{i0}^* \right] \vee \left[\sum_{j \in I_N} f_{ij}^* (-x_j) \geq (1 - f_{i0}^*) \right] \quad \therefore$$

$$\therefore \left[\sum_{j \in J_1^+} f_{ij}^* x_j + \sum_{j \in J_1^-} (f_{ij}^* - 1) x_j + \sum_{j \in J_2} a_{ij} \cdot x_j \geq f_{i0}^* \right] \vee$$

$$\left[\sum_{j \in J_1^+} (-f_{ij}) x_j + \sum_{j \in J_1^-} (f_{ij} - 1) x_j + \sum_{j \in J_2} -a_{ij} \cdot x_j \geq (1 - f_{i0}) \right]$$

Aplicando a proposição com multiplicadores: $\theta^1 = 1/a_0^1 = 1/f_{i0}$
e $\theta^2 = 1/a_0^2 = 1/(1 - f_{i0})$, vem que:

$$\text{máximo} \left\{ \frac{f_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-f_{ij}}{1 - f_{i0}} \right\} = \frac{f_{ij}}{f_{i0}} \quad j \in J_1^+$$

$$\text{máximo} \left\{ \frac{f_{ij} - 1}{f_{i0}}, \frac{1 - f_{ij}}{1 - f_{i0}} \right\} = \frac{1 - f_{ij}}{1 - f_{i0}} \quad , \quad j \in J_1^-$$

$$\text{máximo} \left\{ \frac{a_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-a_{ij}}{1 - f_{i0}} \right\} = \begin{cases} \frac{a_{ij}}{f_{i0}} & , \quad j \in J_2^+ \\ \frac{-a_{ij}}{1 - f_{i0}} & , \quad j \in J_2^- \end{cases}$$

sendo $J_2^+ = \{j \in J / a_{ij} \geq 0\}$ e $J_2^- = \{j \in J / a_{ij} < 0\}$.

Substituindo, temos:

$$\sum_{j \in J_1^+} \frac{f_{ij}}{f_{i0}} \cdot x_j + \sum_{j \in J_1^-} \frac{1 - f_{ij}}{1 - f_{i0}} \cdot x_j + \sum_{j \in J_2^+} \frac{a_{ij}}{f_{i0}} \cdot x_j + \sum_{j \in J_2^-} \frac{-a_{ij}}{1 - f_{i0}} \cdot x_j \geq 1,$$

que é o corte de Gomory para o algoritmo fracionário obtido via restrições disjuntivas.

O resultado acima não nos deve surpreender, já que o Teorema Fundamental caracteriza todos os cortes válidos para (PD) e, como foi mostra

do no capítulo II, o problema de programação linear mista pode ser colocado na forma disjuntiva. Assim, o corte de Gomory é um membro da família caracterizada.

3.3 - O Corte Convexo de Glover

A idéia de utilizar os raios vetores que emanam de um vértice do conjunto de soluções viáveis para gerar um hiperplano que corte este vértice não é restrita a problemas de programação inteira, podendo ser aplicado a qualquer problema de programação matemática cujas restrições se reduzam ou impliquem em:

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 - \sum_{j \in J} \tilde{a}_j \cdot x_j, \quad \tilde{x}_j \geq 0 \quad \forall j \in J$$

Os fundamentos deste corte, proposto por Glover [9] são oriundos dos trabalhos de Balas [1] e Young [22], sendo vantajoso em certas aplicações, devido ao pequeno esforço computacional requerido em sua obtenção.

Mostraremos, a seguir, em rápida digressão, que o tradicional Corte Convexo de Glover pertence à família disjuntiva definida pelo Teorema (3.1. 1), aplicando-o, a seguir, à resolução de um Problema Linear com Custos Fixos na Origem através de um algoritmo dual de cortes.

3.3.1 - O Algoritmo de Taha [23]

Basicamente, o algoritmo é válido para qualquer problema de minimização de funções côncavas sobre poliedros convexos. É da família "Branch and Bound", utilizando uma "solução local" para gerar um corte legítimo, construído com o intuito de eliminar aquela solução de considerações

futuras.

Os cortes poderão gerar novos vértices e devem ser computados de tal forma a não multiplicarem-se indefinidamente.

Neste ponto, o objetivo será formalizar gradualmente as idéias do algoritmo facilitando, a nosso ver, o entendimento global do mesmo.

Seja o seguinte Problema Linear com Custos Fixos na Origem, na forma normal conjuntiva:

$$(PD) \quad \left[\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad f(\underline{x}) \\ \text{sujeito a:} \\ \quad \left(\begin{array}{l} A \underline{x} \geq \underline{a}_0 \\ \underline{x} \geq 0 \end{array} \right) \\ \quad \bigwedge_{j \in N} \left[(x_j = 0, y_j = 0) \vee \right. \\ \quad \left. (x_j > 0, y_j = 1) \right] \end{array} \right]$$

onde:

$$\#(N) = n$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{tal que} \quad y_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in N$$

$$\underline{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \quad \text{tal que} \quad k_j \geq 0 \quad \forall j \in N$$

$$e \quad f(\underline{x}) = \underline{c} \underline{x} + \underline{k} \underline{y}$$

Cabem, neste ponto, algumas observações de ordem geral. Sendo

F e \bar{F} , respectivamente, os conjuntos de soluções viáveis para (PD) e para o problema linear relaxado, vemos que existe uma correspondência bi-unívoca entre os elementos de F e os de \bar{F} . Por outro lado, sabemos que o mínimo da função côncava f sobre \bar{F} , caso exista, será um vértice deste.

Como detalhe complementar, se $k_j = m \quad \forall j \in N$ e o problema for não degenerado, a solução Ótima para (PD) pode ser obtida diretamente, resolvendo-se o problema linear contínuo minimizar $\{c \underline{x} / \underline{x} \in \bar{F}\}$.

Assim surge; naturalmente, a idéia de enumerar de modo eficiente os pontos extremos de \bar{F} na busca da solução Ótima de (PD).

A idéia central se resume em utilizar um algoritmo dual de planos de corte gerando uma seqüência $S = \{\underline{x}^0, \underline{x}^1, \dots, \underline{x}^k\}$ de elementos de \bar{F} de modo que:

- $c \underline{x}^i \leq c \underline{x}^{i+1}$, onde $c \underline{x}^i = \text{mínimo} \{c \underline{x} / \underline{x} \in X^i\}$
 $i = 0, 1, \dots, k-1$
- $X^{i+1} \subset X^i$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) é o conjunto de soluções viáveis para o problema de programação linear, obtido a partir de \bar{F} , pela introdução de $(i+1)$ cortes sucessivos do tipo $\sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geq 1$ onde J^i é o conjunto de índices das variáveis não-básicas no ótimo local \underline{x}^i e que aplicado a X^i só elimina um Único de seus vértices, o Ótimo local \underline{x}^i . Obviamente, $X^0 \equiv \bar{F}$ e $X^{i+1} = X^i \cap \{\underline{x} \geq 0 / \sum_{j \in J^i} \beta_j x_j > 1\}$.

Cumpre notar que alguns dos elementos de S podem não ser vérti

ces efetivos de \bar{F} , surgindo como resultado da aplicação dos cortes convexos.

Desta forma, podemos garantir a enumeração dos vértices do polítopo básico até que a regra de parada se verifique ou, então, em casos mais desfavoráveis, até a enumeração completa.

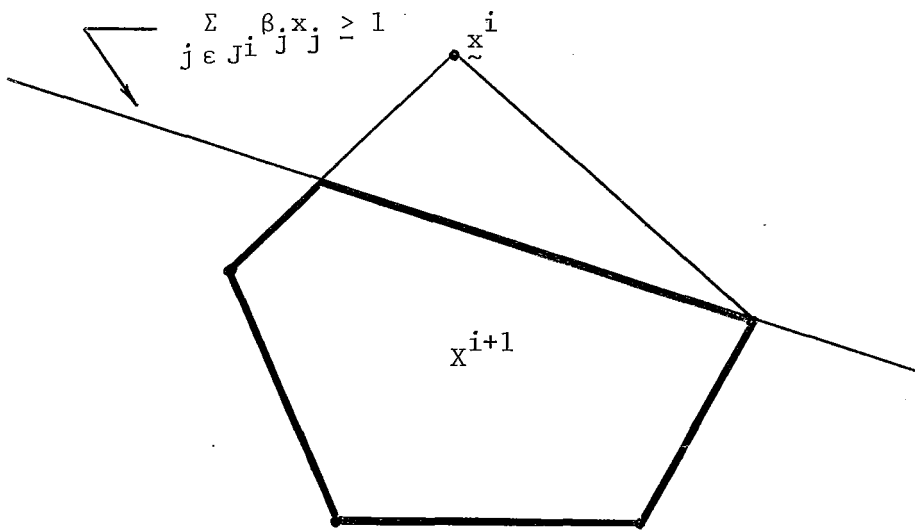


Figura III-2

Passemos, agora, à construção desta regra de parada para a qual necessitaremos de um limite inferior e um limite superior para o valor da solução Ótima global. Estes limites serão dados por:

e $\underline{f} = \underline{c} \tilde{x}^0$, limite inferior inicial para (PD), atualizado a cada iteração para $\underline{f} = \underline{c} \tilde{x}^{i+1}$

e \bar{f} , limite superior, atualizado sempre que $(\underline{c} \tilde{x}^{i+1} + k \tilde{y}^{i+1}) < \bar{f}$ na iteração anterior.

A regra de parada, cuja prova formal encontra-se logo após o detalhamento do algoritmo, será:

- e Se $\underline{c} \underline{x}^{i+1} >$ paramos com $(\underline{x}^i, \underline{y}^i)$ sendo a solução ótima para (PD).

O algoritmo listado a seguir formaliza as idéias colocadas de forma natural, determinando o Ótimo global para (PD) em um número finito de iterações.

Passo 0

Inicialização

- e Resolver o seguinte programa linear:

$$(P^0): \text{ minimizar } \{ \underline{c} \underline{x} / \underline{x} \in \bar{F} \}$$

- e Testar

- se (P^0) for ilimitado termine, (PD) não tem solução ótima finita.
 - se (P^0) for inviável termine, (PD) não tem solução ótima viável.
- Sendo \underline{x}^0 a solução Ótima de (P^0) , fazer:

$$\begin{cases} \underline{f} = \underline{c} \underline{x}^0 \\ \bar{f} = \underline{c} \underline{x}^0 + \underline{k} \underline{y}^0 \text{ onde } y_j^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j^0 > 0 \\ 0, & \text{se } x_j^0 = 0 \end{cases} \quad \forall j \in N \\ \underline{x}^* = \underline{x}^0, y^* = \underline{y}^0 \text{ e } i = 0 \end{cases}$$

Vã para o Passo 1.

Passo 1

Iteração Padrão

e Resolver o seguinte programa linear:

(P^{i+1}) . minimizar $\{c \tilde{x} / \tilde{x} \in X^{i+1}\}$ onde

$$X^{i+1} = X^i \cap \{ \tilde{x} \geq 0 / \sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geq 1 \}$$

e Aproximar o limite inferior, ou seja, sendo \tilde{x}^{i+1} a solução ótima de (P^{i+1}) fazer $\underline{f} = c \tilde{x}^{i+1}$

Vá para o Passo 2.

Passo 2

Regra de Parada

e Teste de Otimalidade Global

- se $c \tilde{x}^{i+1} \geq \bar{f}$ termine, $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ é o ótimo global.

- se $c \tilde{x}^{i+1} + k \tilde{y}^{i+1} < \bar{f}$, aproximar o limite superior fazendo:

$$\bar{f} = c \tilde{x}^{i+1} + k \tilde{y}^{i+1}$$

$$\tilde{x}^* = \tilde{x}^{i+1} \quad \text{e} \quad \tilde{y}^* = \tilde{y}^{i+1}$$

- incrementar: $i \leftarrow i+1$

Vá para o Passo 1.

3.3.2 - Teorema

Se $\exists \underline{x}^p \in S$ tal que $f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k$, $0 \leq p \leq k-1$, então $\underline{x}'' \in S$ onde $(\underline{x}'', \underline{y}^*)$ é o Ótimo global de (PD).

Prova:

Por hipótese temos que $f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k$, $0 \leq p \leq k-1$, portanto:

$$f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k \leq c \underline{x} \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X^k \subset \bar{F}$$

já que $k \geq 0$ e $\underline{y} \in \{0,1\}^n$.

Sendo $f(\underline{x}^*)$ o valor da função objetivo de (PD) no Ótimo, temos que:

$$f(\underline{x}^*) \leq f(\underline{x}^p) \leq c \underline{x}^k \leq c \underline{x} \leq f(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in X^k \subset \bar{F}$$

Por outro lado: $f(\underline{x}'') \leq f(\bar{\underline{x}}) \leq f(\underline{x}^p)$ onde:

$$f(\bar{\underline{x}}) = \text{mínimo} \{f(\underline{x})/\underline{x} \in S\}.$$

Se $\underline{x}^* \neq \bar{\underline{x}}$ então $\underline{x}^* \notin S$; isto implica em $c \underline{x}^k \leq f(\underline{x}^*)$ já que $\text{mínimo} \{f(\underline{x})/\underline{x} \in X^k\} \leq \text{mínimo} \{f(\underline{x})/\underline{x} \in X^i\}$, $i > k$ o que contraria o desenvolvimento inicial.

Logo, $\underline{x}^* = \bar{\underline{x}}$ e $\underline{x}^* \in S$ ■

3.3.3 - Corte de Glover Via Disjunção

Sem perda de generalidade, consideremos a solução do problema linear associado, escrita em termos das variáveis não básicas.

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I$$

Eliminar a solução contínua corrente, equivale a resolver o problema a seguir na forma normal conjuntiva:

$$\left[\begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \forall_{h \in I} (a_{h0} + \sum_{j \in J} a_{hj}(-x_j) \leq 0) \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \forall_{h \in I} (\sum_{j \in J} a_{hj} x_j \geq a_{h0}) \end{array} \right]$$

Aplicando o Corolário (3.1.2), com multiplicadores

$$\theta^h = \begin{cases} 1/a_{h0}, & \text{se } a_{h0} > 0 \\ \infty, & \text{se } a_{h0} = 0 \end{cases}, \quad \forall h \in I$$

obtemos a seguinte equivalência:

$$\left[\begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \forall_{h \in I} (\sum_{j \in J} a_{hj} x_j \geq a_{h0}) \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{l} x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \\ \sum_{j \in J} \alpha_j x_j \geq \alpha_0 \end{array} \right]$$

onde:

$$\begin{cases} \alpha_j = \underset{i \in I}{\text{m\u00e1ximo}} \{ \theta^i \cdot a_{ij} \} , & j \in J \\ \alpha_0 = 1 \end{cases}$$

Reescrevendo os coeficientes na forma:

$$\beta_j^! = \underset{i \in I}{\text{m\u00ednimo}} \{ (e^i \cdot a_{ij})^{-1} , a_{ij} \neq 0 \}$$

A equival\u00eancia se mant\u00e9m ao substituirmos $\sum_{j \in J} \alpha_j \cdot x_j \leq \alpha_0$ por $\sum_{j \in J} x_j / \beta_j^! \geq 1$.

Se impusermos a condi\u00e7\u00e3o adicional de apenas um v\u00e9rtice ser eliminado quando do corte, o que pode ser interpretado como um enfraquecimento, obtemos o Corte Convexo de Glover [9], $\sum_{j \in J} x_j / \beta_j \leq 1$, onde:

$$\beta_j = \begin{cases} \underset{i \in I}{\text{m\u00ednimo}} \left[(\theta^i \cdot a_{ij})^{-1} \right], & a_{ij} > 0 \\ \infty & , a_{ij} \leq 0 \end{cases} , \quad j \in J$$

Note-se que, sendo $\bigvee_{i \in I} (a_{i0} = 0)$ \u00e9 poss\u00edvel que o corte convexo fique indeterminado. Para superarmos esta indetermina\u00e7\u00e3o, fruto da degeneresc\u00eancia, usaremos o procedimento devido a Balas [1].

Ocorrer\u00e1 degeneresc\u00eancia, sempre que o v\u00e9rtice correspondente, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, est\u00e1 determinado por mais do que n hiperplanos.

Balas prova que, ignorando cada restrição para a qual a variável associada \bar{e} é nula no quadro do Simplex, o politopo convexo resultante associa necessariamente n arestas distintas \hat{a} quele vértice. Assim, podemos determinar rapidamente os valores de β_j e quando adicionarmos o corte ao quadro para a fase de pós-otimização, reativamos as restrições ignoradas no cálculo dos coeficientes do corte, a menos que estas sejam completamente redundantes com respeito ao problema atual, podendo, neste caso, ser definitivamente eliminadas.

Geometricamente, conforme ilustrado na Figura III-3, para o \mathbb{R}^2 , ao utilizarmos este corte, estaremos interceptando os raios vetores $\underline{r}_j, j \in J$ do cone envoltório convexo T , definido a partir de \underline{a}_0 , onde:

$$T = \{ \underline{x} / \underline{x} = \underline{a}_0 + \sum_{j \in J} \underline{a}_j (-x_j), x_j \geq 0 \quad \forall j \in J \}$$

$$\underline{r}_j = \underline{a}_0 - \beta_j \underline{a}_j, \quad \beta_j \geq 0 \quad j \in J$$

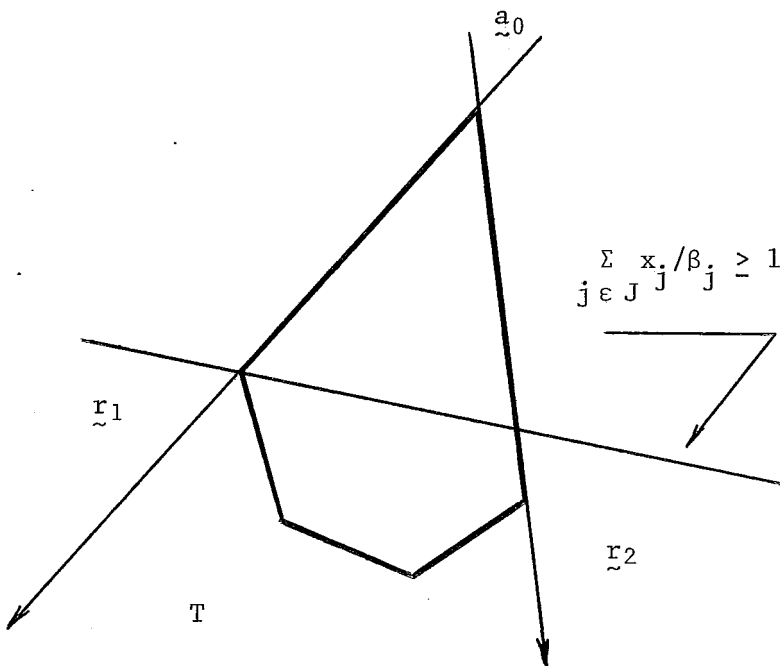


Figura III-3

Assim, o Corte Convexo pode ser obtido a partir do enfraquecimento de um corte da família disjuntiva.

3.3.4 - Exemplo de Aplicação

Seja o seguinte Problema Linear com Custos Fixos na Origem na forma normal conjuntiva:

$$\text{minimizar } x = -3x_1 - 5x_2 + 5y_1 + 2y_2$$

sujeito a:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18$$

$$x_1 + x_4 = 4$$

$$x_2 + x_5 = 6$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$\bigwedge_{j \in \{1,2\}} \left[(x_j > 0, y_j = 1) \vee (x_j = 0, y_j = 0) \right]$$

Aplicaremos o algoritmo descrito para obtenção do ótimo global de (PD).

Passo 0

Inicialização

- Resolvendo-se o programa linear associado a (PD), temos o seguinte quadro final:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-36	0	0	-1	0	-3
x_1	2	1	0	1/3	0	-2/3
x_4	2	0	0	-1/3	1	2/3
x_2	6	0	1	0	0	1

$$\begin{cases} \tilde{x}^0 = (2, 6, 0, 2, 0) \\ \tilde{x}^* = \tilde{x}^0 \\ \underline{f} = -36 \\ \bar{f} = x_0^0 = -29 \\ \mathbf{i} = 0 \quad \text{e vá para o } \underline{\text{Passo 1}}. \end{cases}$$

Passo 1

Iteração Padrão

- Determinam-se os coeficientes do "Corte Convexo 1":

$$\beta_3 = \text{mínimo} \{6, \infty, \infty\} = 6$$

$$\beta_5 = \text{mínimo} \{\infty, 3, 6\} = 3$$

\implies

$$\boxed{1/6x_3 + 1/3x_5 \geq 1}$$

e Anexando o corte ao quadro e re-otimizando, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-30	0	0	0	0	-1	-6
x_1	0	1	0	0	0	-4/3	2
x_4	4	0	0	0	1	4/3	-2
x_2	6	0	1	0	0	1	0
x_3	6	0	0	1	0	2	-6

Então, $f = -30$

Vá para o Passo 2.

Passo 2

Regra de Parada

$$\underline{c} \underline{x}^1 = -30 < \bar{f} = -29$$

$$\underline{c} \underline{x}^1 + \underline{k} \underline{y}^1 = -30 + 2 = -28 < \bar{f} = -29 \implies \bar{f} = -29$$

$$\underline{x}^* = (0, 6, 6, 4, 0)$$

$i = 1$ e vá para o Passo 1.

Passo 1

Iteração Padrão

e Determinam-se os coeficientes do Corte Convexo 2:

$$\beta_5 = \text{mínimo} \{3, 6, 3, \infty\} = 3$$

$$\beta_6 = \infty$$

$$\implies \boxed{x_5 \geq 3}$$

e Anexando o corte ao quadro e re-otimizando, temos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-27	0	0	0	0	0	-6	-3
x_1	4	1	0	0	0	0	2	-4
x_4	0	0	0	0	1	0	-2	4
x_2	3	0	1	0	0	0	0	3
x_3	0	0	0	1	0	0	-6	6
x_5	3	0	0	0	0	1	0	-3

Então, $\underline{f} = -27$

Vá para o Passo 2.

Passo 2

Regra de Parada

$$\underline{c} \tilde{x}^2 = -27 > \bar{f} = -29 \implies \text{Solução } \tilde{\text{Ótima}} \text{ Global}$$

$$\tilde{x}^* = (0, 6, 6, 4, 0)$$

$$x_0^* = -28$$

Geometricamente, podemos observar o desenvolvimento dos cortes na Figura III-4, a seguir.

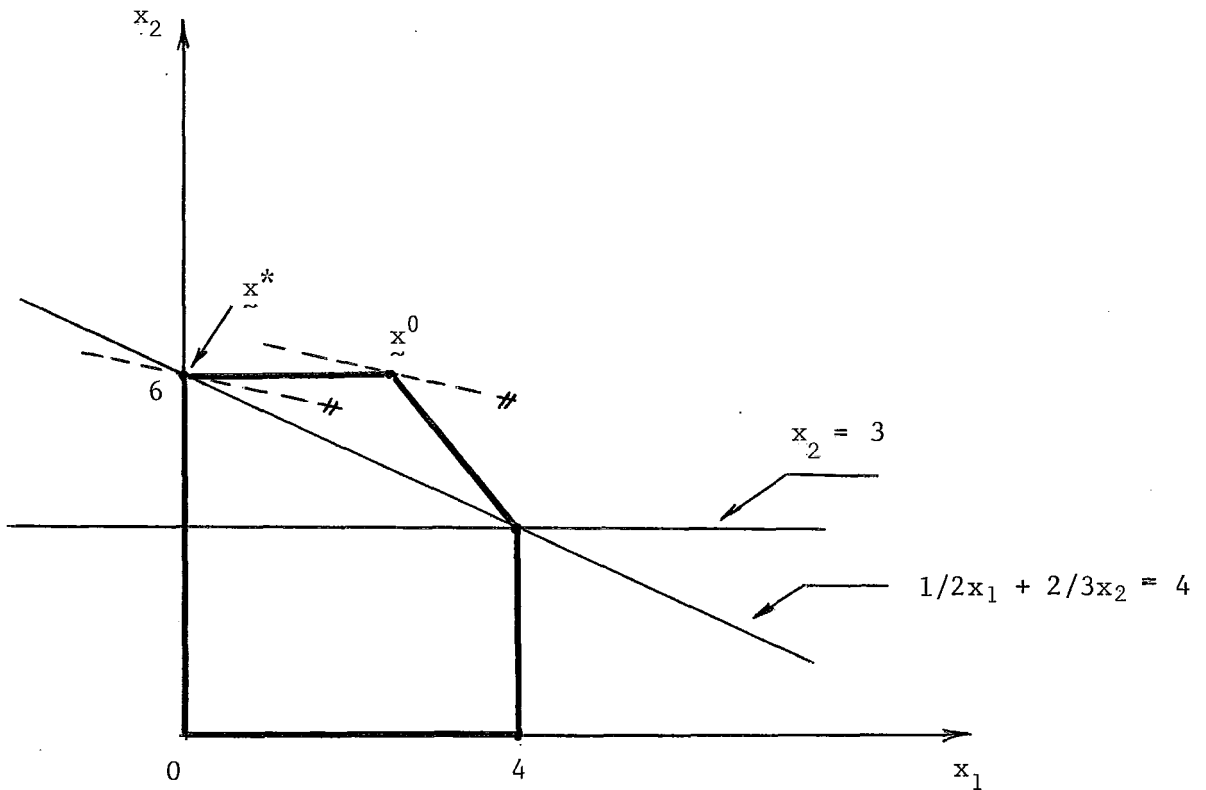


Figura III-4

Este algoritmo foi por nós programado em linguagem FORTRAN IV-H para o IBM/370-158 e testado para problemas de pequeno e médio porte. Co-

no era de se esperar, os resultados obtidos reproduzem os contidos em [23], mostrando a utilidade do método. À medida, porém, que o porte dos problemas aumentou, a eficiência da técnica decresceu, ficando bastante comprometida. Uma das razões foi, como sempre, o acúmulo de erros de processamento; outro adversário foi a ocorrência intensa de degenerescência dual.

3.4. O Problema da Degenerescência Dual

Um dos fatores preponderantes para a ineficiência dos algoritmos duais de cortes, quando aplicados a problemas de programação inteira é a ocorrência de degenerescência dual após algumas iterações.

Isto se deve ao fato dos cortes tradicionalmente usados nestes algoritmos terem todos os seus coeficientes não negativos. A primeira operação de pivoteamento, após adicionarmos cada novo corte, faz com que os coeficientes da linha zero (linha da função objetivo) decresçam; de fato, com a possível exceção do elemento correspondente à coluna do pivot, nenhum deles crescerá. Este fato tende, gradualmente, a fazer com que um número maior de coeficientes a_{0j} , $j \in J$ tornem-se nulos.

Geometricamente, sendo T o cone convexo envoltório associado a uma solução contínua \underline{a}_0 , um corte cujos coeficientes são positivos corresponde ao caso em que os raios vetores $\underline{r}_j = \underline{a}_0 - \theta_j \underline{a}_j$, $\theta_j \geq 0$ $j \in J$ que emanam de \underline{a}_0 são interceptados pelo plano de corte $\sum_{j \in J} \beta_j x_j \leq \beta_0$.

A utilização repetida deste tipo de corte levará a um certo "enfraquecimento" do conjunto de soluções viáveis na região dos cortes, e estes tendem a tomar-se "paralelos" à família de hiperplanos definidos pela função objetivo. Tentamos ilustrar o problema em R^2 na Figura III-5.

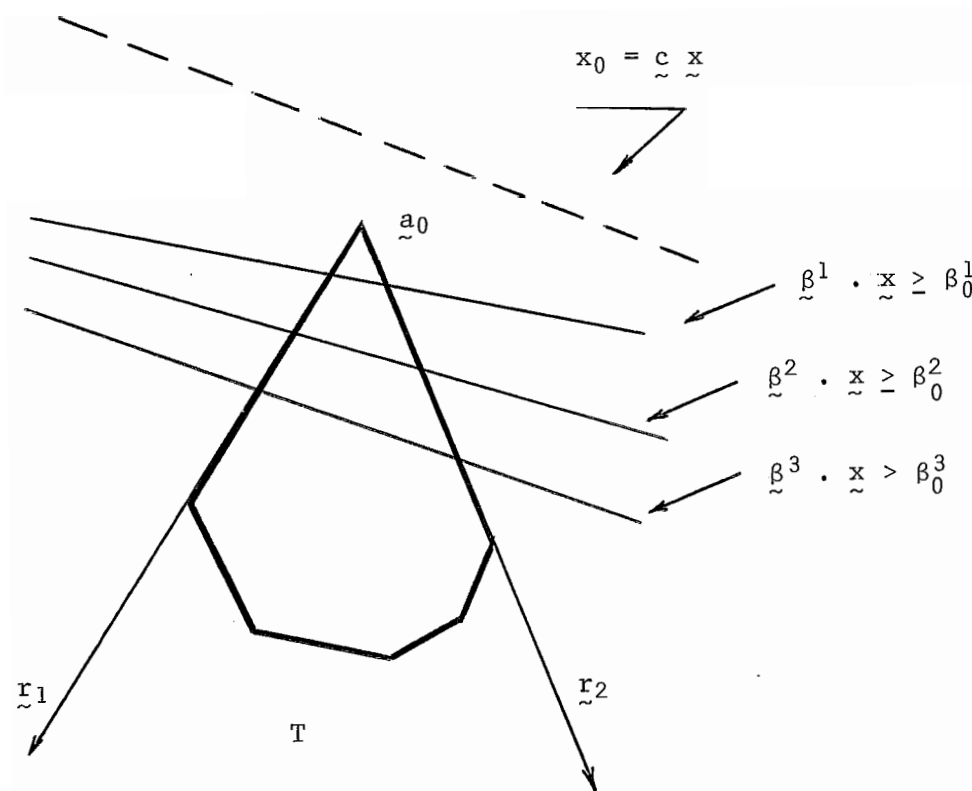


Figura III-5

A abordagem disjuntiva, além de valer-se da estrutura de certos problemas importantes e muito frequentes na prática, permite a obtenção de cortes com coeficientes de sinais diferentes. A utilização destes fatores tornam possível a obtenção de cortes mais profundos cuja utilização repetida não leva necessariamente ao fenômeno indesejável da degenerescência dual.

Geometricamente, conforme ilustrado em R^2 na Figura III-6, um corte $\sum_{j \in J} \alpha_j x_j \geq \alpha_0$ com coeficientes negativos corresponde à situação em que algumas das arestas do cone T são interceptadas fora do poliedro.

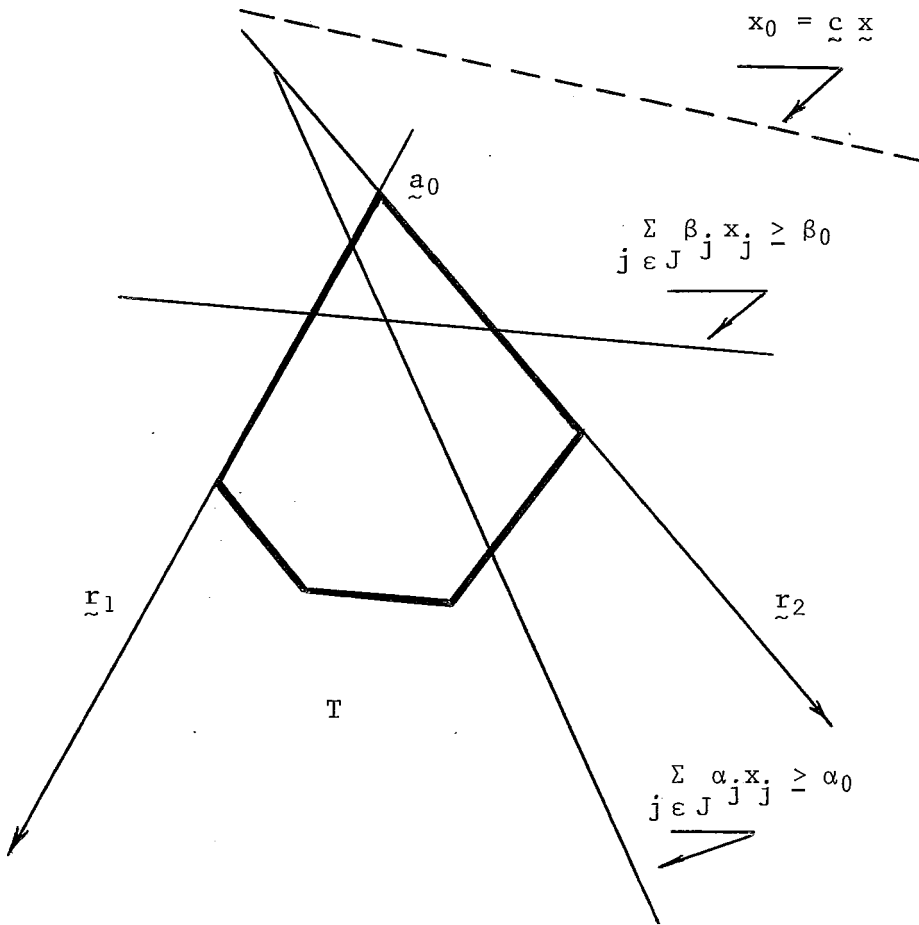


Figura III-6

CAPÍTULO IV

APROFUNDAMENTO DE CORTES DISJUNTIVOS

Suponhamos que um corte $\underline{\alpha} \underline{x} \geq \alpha_0$, válido para (PD), não seja satisfeito a nível de igualdade estrita por nenhum $\underline{x} \in F$. Então, este corte poderá ser aprofundado no sentido de (2.1.2).

Note-se que o conjunto dos \underline{x} satisfazendo a:

$$\left[\sup_{h \in H^* \subseteq H} \{ \theta^h A^h \} \right] \underline{x} \geq \inf_{h \in H^* \subseteq H} \{ \theta^h a_0^h \}, \quad \theta^h \geq 0, \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

é poliédrico convexo; logo, para que seja válido, deverá conter, necessariamente, a envoltória convexa de F , que é também um conjunto poliédrico.

Assim, deduzimos que um corte aprofundado desejável será uma face de $\text{CONV}(F)$ ou pelo menos seu suporte.

Uma face de dimensão $(n-1)$ de $\text{CONV}(F)$, já que $\text{DIM} [\text{CONV}(F)] = \text{DIM}(F) = n$, é um conjunto S satisfazendo a:

- $S = \text{CONV}(F) \cap \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / \underline{\pi} \underline{x} = \pi_0 \}$

- $\underline{\pi} \underline{x} \geq \pi_0 \quad \forall \underline{x} \in \text{CONV}(F)$

e $\underline{\pi} \underline{x} = \pi_0$ para exatamente n pontos linearmente independentes de $\text{CONV}(F)$.

Adicionalmente, diremos que:

- $x_j \geq 0$, $\forall j \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ é uma face trivial de $\text{CONV}(F)$, e que
- Toda face não-trivial de $\text{CONV}(F)$ satisfaz a:
 $\pi_j \geq 0 \quad \forall j \in N$ e $\pi_0 > 0$.

Para o (PD) exemplificado em (2.1), teríamos as quatro faces de dimensão unitária ①, ②, ③ e ④, incluindo duas triviais ① e ②, assinaladas na Figura IV-1

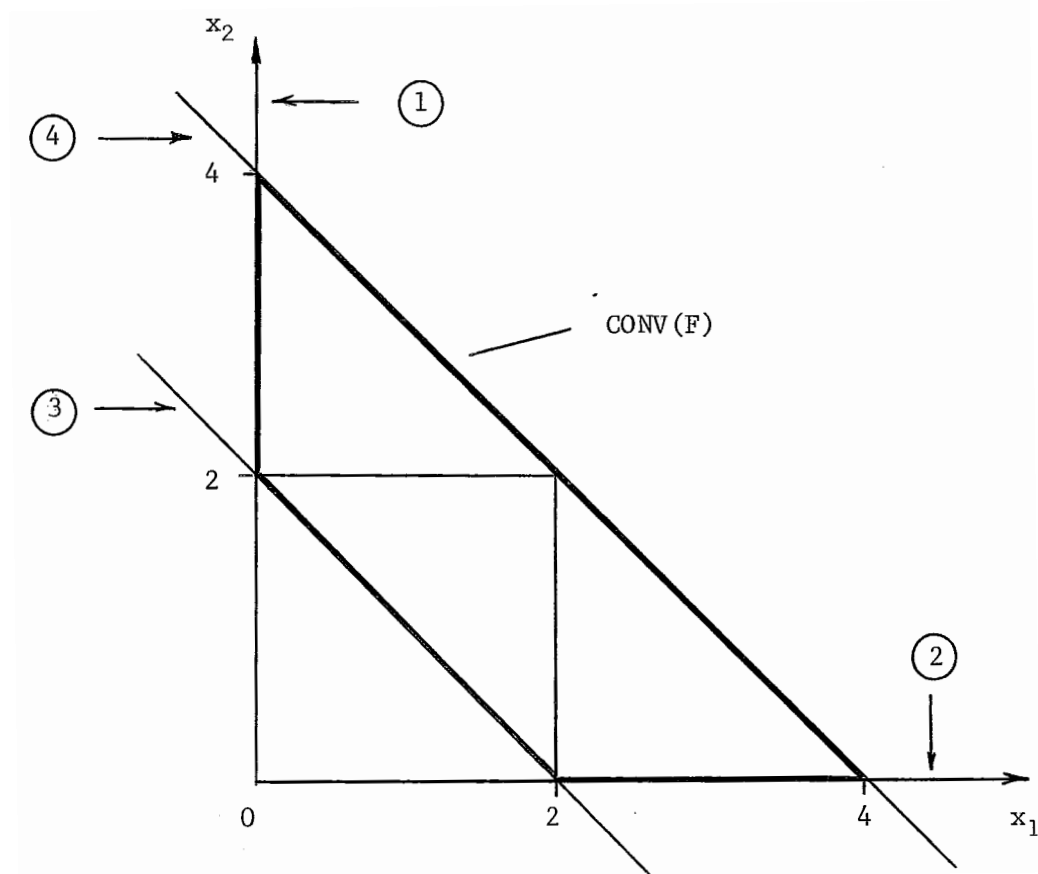


Figura IV-1

Note-se que um corte $\underline{a} \underline{x} \geq \underline{a}_0$ é implicado pela disjunção

$$\bigvee_{h \in H} (A^h \underline{x} \geq \underline{a}_0^h, \underline{x} \geq \underline{0}) \iff \underline{a} \in C; \text{ onde:}$$

$$C = \{ \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^n / \tilde{\beta} \tilde{x} \geq \alpha_0, \forall \tilde{x} \in F \}$$

Consideremos o Teorema (3.1.1) na definição do seguinte conjunto:

$$C^* = \{ \tilde{\beta} \in \mathbb{R}^n / \tilde{\beta} \geq \tilde{\theta}^h \cdot A^h, \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0 \leq a_0, \tilde{\theta}^h \geq 0 \forall h \in H^* \subseteq H \}$$

Podemos mostrar [4] que $\tilde{a} \tilde{x} \geq \alpha_0$ ($\alpha_0 \neq 0$) é uma face de $\text{CONV}(F) \iff \tilde{a} \neq 0$ é um vértice de C^* e que se $\tilde{a} \tilde{x} \geq 0$ é uma face de $\text{CONV}(F)$, então $\tilde{a} \neq 0$ é um raio vetor de C^* .

É possível, então, obtermos as faces de $\text{CONV}(F)$ através da resolução de programas lineares da forma:

$$\begin{aligned} \text{(PL):} \quad & \text{maximizar} \quad \tilde{d} \tilde{\beta} \\ & \text{sujeito a:} \\ & \bigwedge_{h \in H^* \subseteq H} \left[\begin{array}{l} \tilde{\beta} - \tilde{\theta}^h A^h \geq 0 \\ \tilde{\theta}^h \tilde{a}_0 \geq \alpha_0 \\ \tilde{\theta}^h \geq 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

onde \tilde{d} será um vetor escolhido adequadamente para cada (PL).

Esta pode não ser uma abordagem prática, porquanto em geral os elementos de H^* são desconhecidos e sua cardinalidade pode ser elevada, levando a problemas de grande porte. O primeiro problema pode ser contornado, trabalhando-se com H ao invés de H^* [4], porém, o porte do problema desta forma resultaria maior. Por outro lado, como estamos interessados nas faces devemos determinar valores de \tilde{d} para os quais o (PL) tem solução ótima finita, o que nem sempre será uma tarefa evidente.

Descartada a possibilidade de obtermos todas as faces por este processo, resta ainda o recurso de utilizar o Teorema (3.1.1), na tentativa de obtermos faces. Para o exemplo (2.1), teríamos:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right] \vee \left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right]$$

Assim:

$$\bullet A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_0^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{a}_0^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet H = \{1, 2\}$$

Aplicando o Corolário (3.1.2), temos:

$$\left[\sup_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h A^h\} \right] x \geq \inf_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h \tilde{a}_0^h\}, \quad \theta^h \geq 0 \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

Como $\#(H) = \#(H^*) = 2$, podemos escrever:

$$\pi_j = \max_{h \in H} \{\theta^h \tilde{a}_j^h\}, \quad j \in \{1, 2\}$$

$$\pi_0 = \min_{h \in H} \{\theta^h \tilde{a}_0^h\}$$

Tomando $\tilde{\theta}^h = (1,1) \quad \forall h \in H$, temos:

$$\pi_0 = 2$$

$$\pi_1 = \text{máximo } \{0,1\} = 1$$

$$\pi_2 = \text{máximo } \{1,0\} = 1$$

Logo, $x_1 + x_2 \geq 2$ é um corte válido para (PD) e $x_1 + x_2 = 2$ é ainda uma face de $\text{CONV}(F)$, como podemos verificar. Na Figura Iv-1, está assinalada pelo número ③.

Nosso intuito aqui é discutir, primeiramente, sob que condições os cortes disjuntivos obtidos do Corolário (3.1.2) podem ser aprofundados, a partir de uma escolha conveniente de multiplicadores, havendo possibilidade, como veremos, de obter um corte, que será uma face da envoltória convexa de F e, portanto, o corte mais profundo implicado pela disjunção em questão. Posteriormente, discutiremos o princípio geral de aprofundamento de cortes da família disjuntiva, no caso em que, além das disjunções aplicadas às variáveis básicas, há restrições estruturais de integralidade aplicadas a algumas ou todas as variáveis não-básicas.

A discussão completa dos problemas citados pode ser encontrada em detalhe em [4, 13]. Aqui, a ênfase maior é dada ao caso em que $\#(H) = 2$ já que o corte B(5), obtido a partir da aplicação do princípio geral, é o principal elemento de discussão da dissertação.

4.1 - Aspectos Preliminares

Alguns critérios têm sido utilizados na obtenção de cortes aprofundados. Recentemente, Shetty e Sherali [13] exploraram os critérios da

distância euclidiana e retilínea, respectivamente, para aprofundamento de cortes disjuntivos.

Passamos a apresentar, dentro das características didáticas que propusemos, algumas propriedades dos cortes obtidos a partir do Corolário (3.1.2), com relação a estes critérios.

4.1.1 - Distância Euclidiana

Entendemos por distância euclidiana da origem à região viável de um corte C $\sum_{j \in J} \pi_j x_j \geq \pi_0$, onde $\pi_0 > 0$ e $\pi_j > 0$ para algum $j \in J$, a seguinte medida:

$$d_e = \text{mínimo } \{ \| \underline{x} \| \mid \sum_{j \in J} \pi_j x_j \geq \pi_0, \underline{x} \geq \underline{0} \} = \frac{\pi_0}{\| \underline{\pi} \|}$$

onde $z_j = \text{máximo } \{0, \pi_j\}$, $j \in J$

4.1.2 - Distância Retilínea

A distância retilínea da origem à região viável de um corte H $\sum_{j \in J} \pi_j x_j \geq \pi_0$, onde $\pi_0 > 0$ e $\pi_j > 0$ para algum $j \in J$ é dada por:

$$d_r = \frac{\pi_0}{\pi_m}, \text{ onde } \pi_m = \text{máximo } \{ \pi_j \mid j \in J \}$$

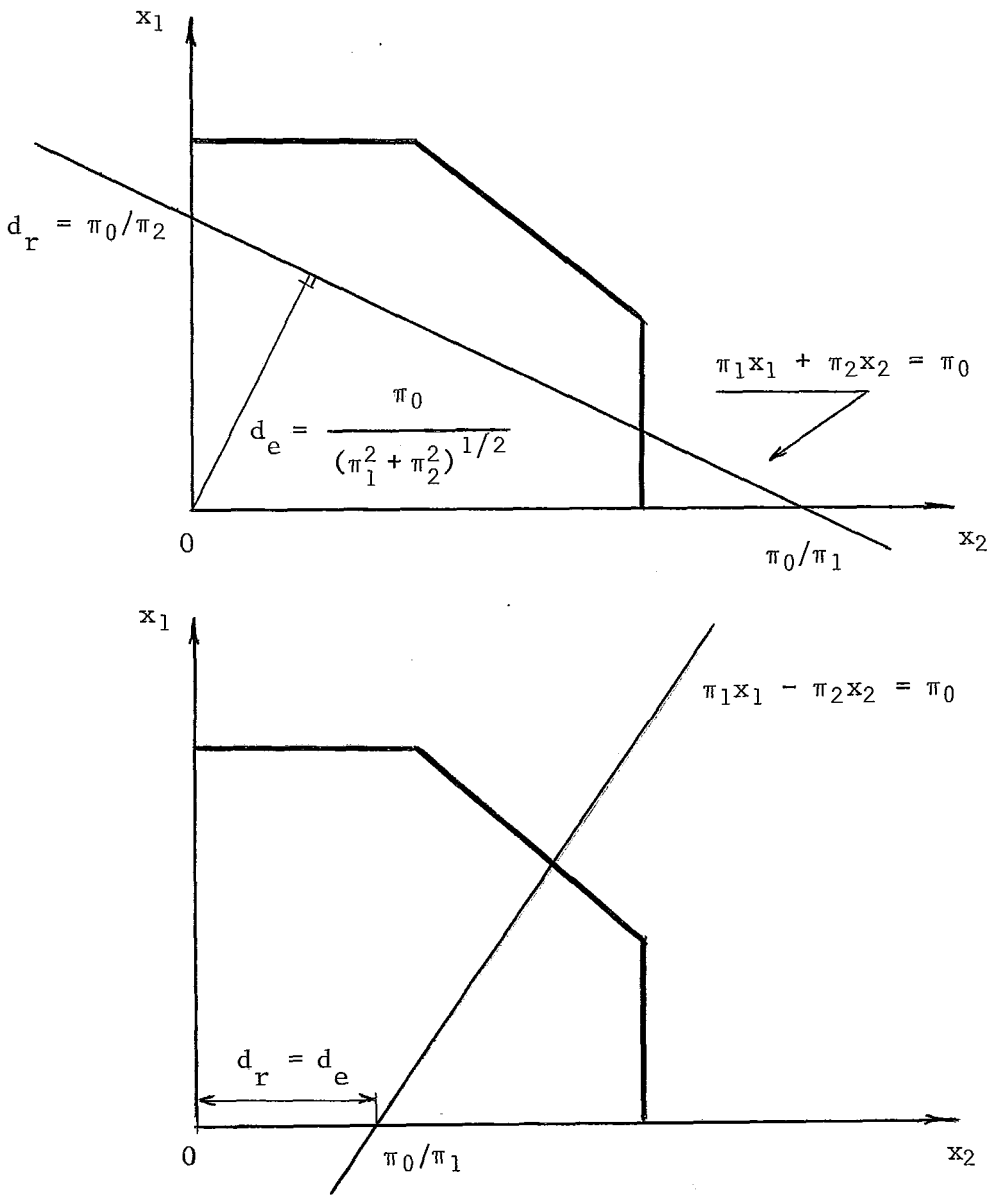


Figura IV-2

Com relação às duas medidas definidas e ilustradas na Figura IV-2, um critério intuitivo para gerar ou selecionar cortes seria o de maximizar a distância euclidiana e/ou retilínea da origem à região viável definida pelo corte. A grande limitação associada à utilização deste critério é o problema da dominância, porquanto podemos ser levados a tratar dois cortes como de mesmo poder, quando na realidade, um deles domina estritamente o ou-

tro; situação ilustrada na Figura IV-3, onde o corte ① domina ② .

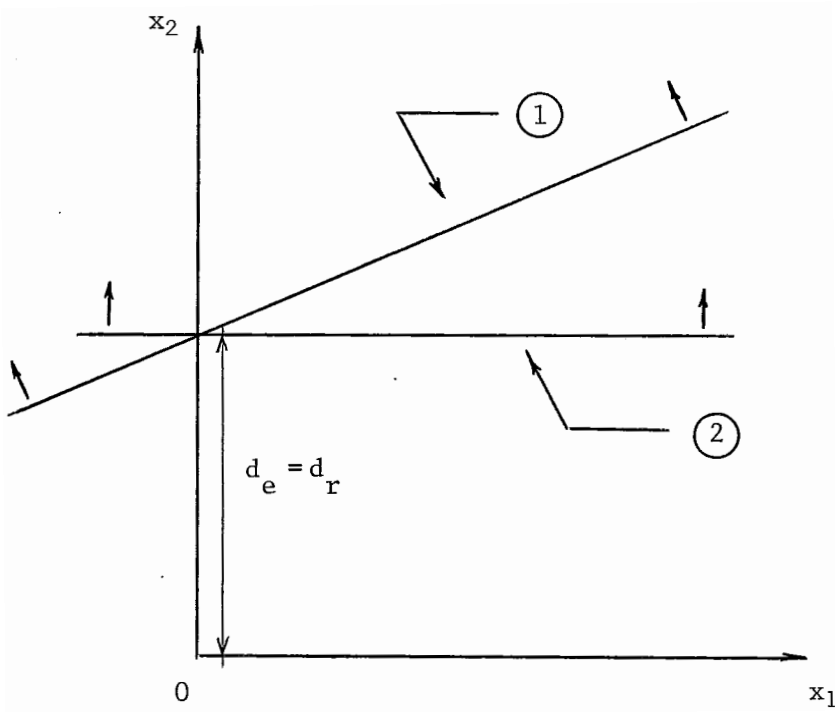


Figura IV-3

Conscientes, então, das limitações, vamos investigar as propriedades dos cortes disjuntivos com relação a estes critérios.

Seja então:

$$X_h = \{ \underline{x} / \sum_{j \in J} a_j^h x_j \geq a_0^h, \quad a_0^h > 0 \quad \forall h \in H, \quad \underline{x} \geq \underline{0} \}$$

$$H^* = \{ h \in H / X_h \neq \phi \} \neq \phi \quad \text{e finito}$$

Obviamente, de (3.1.1) :

$$\forall \tilde{x} \in \bigcup_{h \in H^*} X_h \iff \sum_{j \in J} \max_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h a_j^h\} x_j \geq \min_{h \in H^* \subseteq H} \{\theta^h a_0^h\},$$

$$\theta^h \geq 0, \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

Fazendo $\theta^h = 1/a_0^h$, $\forall h \in H^* \subseteq H$, obtemos o resultado do Corolário (3.1.2).

4.1.3 - Proposição

O corte disjuntivo definido pelo Corolário (3.1.2) é o de maior distância euclidiana à origem.

Prova:

Por definição, a distância euclidiana do corte definido pelo Corolário (3.1.2) à origem é dada por:

$$\hat{d}_e = \min \left\{ \frac{\|\tilde{x}\|}{c} \mid \sum_{j \in J} \max_{h \in H^* \subseteq H} \{a_j^h / a_0^h\} \cdot x_j \geq 1, \quad x_j \geq 0 \right\} = 1/\hat{z}_e \quad \|\tilde{x}\|$$

onde $\hat{z}_e = (\hat{z}_j)$, $j \in J$ é tal que $\hat{z}_j = \max \{0, \max_{h \in H^* \subseteq H} \{a_j^h / a_0^h\}\}$, $\forall j \in J$

Por conveniência algébrica, vamos utilizar o quadrado da distância euclidiana ao corte, ou seja:

$$(\hat{d}_e)^2 = 1 / \sum_{j \in J} z_j^2$$

Se considerarmos multiplicadores θ^h , $h \in H'' \subseteq H$ diferentes dos utilizados na obtenção do corte disjuntivo do Corolário (3.1.2), teremos:

$$\sum_{j \in J} \{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \theta^h \cdot a_j^h \} \cdot x_j \geq \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \{ \theta^h \cdot a_0^h \}, \theta^h \geq 0 \quad \forall h \in H^* \subseteq H$$

O quadrado da distância euclidiana \tilde{e} é então dado por:

$$d_e^2 = \left[\underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \{ \theta^h \cdot a_0^h \} \right]^2 / \sum_{j \in J} z_j^2 = (\lambda^P)^2 / \sum_{j \in J} z_j^2$$

$$\text{com } z_j = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ 0, \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ \theta^h \cdot a_j^h \} \}, \quad j \in J$$

No caso em que $\lambda^P = 0$ então $d_e^2 = 0$ e a proposição é trivialmente verificada. Consideremos, então, o caso em que $\lambda^P > 0$.

$$\text{Temos que: } d_e^2 = 1 / \sum_{j \in J} (z_j / \lambda^P)^2$$

$$\text{e sendo } h^P = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \{ \theta^h \cdot a_0^h \}, \text{ segue-se que } (\theta^h \cdot a_0^h) / \lambda^P \geq 1 \quad \forall h \in H^* \subseteq H.$$

Logo:

$$z_j / h^P = \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ 0, \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ (\theta^h / h^P) \cdot a_j^h \} \} \geq \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ 0, \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{ a_j^h / a_0^h \} \} = \hat{z}_j$$

Segue-se que: $d_e^2 \leq (\hat{d}_e)^2$ para qualquer escolha dos multiplicadores $\theta^h \geq 0$, $h \in H^* \subseteq H$ \square

4.1.4 - Proposição

O corte disjuntivo definido pelo Corolário (3.1.2) é o de maior distância retilínea à origem.

Prova:

Por definição, a distância retilínea do corte, definido pelo Corolário (3.1.2), à origem, é dada por:

$$\hat{d}_r = 1 / \left[\underset{j \in J}{\text{máximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \frac{a_j^h}{a_0^h} \right\} \right]$$

Escolhendo multiplicadores θ^h , $h \in H^* \subseteq H$ arbitrariamente, temos:

$$\begin{aligned} d_r &= \left[\underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{mínimo}} \theta^h a_0^h \right] / \left[\underset{j \in J}{\text{máximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \theta^h a_j^h \right\} \right] = \\ &= \lambda^p / \left[\underset{j \in J}{\text{máximo}} \left\{ \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \theta^h a_j^h \right\} \right] \end{aligned}$$

Claro que $\lambda^p = 0$ implica em um valor de $d_r = 0$, inferior, portanto, a \hat{d}_r , o que verifica trivialmente o resultado. Vamos assumir, então, $\lambda^p > 0$.

Por outro lado, $(\theta^h a_0^h) / \lambda^p \geq 1 \quad \forall h \in H^* \subseteq H$ e pela definição de d_r são considerados aqueles $j \in J$ para os quais $a_j^h > 0$.

Logo:

$$1/\left[\widehat{\text{máximo}}_{j \in J} \left\{ \widehat{\text{máximo}}_{h \in H^* \subseteq H} (\theta^h/\lambda^P) a_j^h \right\}\right] \leq 1/\left[\widehat{\text{máximo}}_{j \in J} \left\{ \widehat{\text{máximo}}_{h \in H^* \subseteq H} a_j^h/a_0^h \right\}\right]$$

Portanto, para qualquer escolha dos multiplicadores $\theta^h \geq 0$, $h \in H^* \subseteq H$, tem-se $d_r \leq \widehat{d}_r$ \square

Verificamos, portanto, que os dois critérios são satisfeitos simultaneamente, o que é bastante interessante. Por outro lado, se os multiplicadores forem selecionados de modo mais elaborado, poderemos obter um corte mais profundo, com as mesmas propriedades, sendo ainda uma face de $\text{CONV}(F)$.

Esta escolha de multiplicadores será definida a seguir.

4.2 - Geração de Faces de $\text{CONV}(F)$

Primeiramente, discutamos como aprofundar o corte.

4.2.1 - Proposição

O corte disjuntivo $\sum_{j \in J} \alpha_j^* \cdot x_j \geq 1$ é mais profundo que o obtido no Corolário (3.1.2).

Onde: $\alpha_j^* = \widehat{\text{máximo}}_{h \in H^* \subseteq H} \{\gamma^h (a_j^h/a_0^h)\}$, $j \in J$

$$\gamma^h = \widehat{\text{mínimo}}_{\substack{j \in J \\ a_j^h/a_0^h > 0}} \left\{ \frac{a_j^h}{a_0^h} \right\}$$

$$a_j^h = \max_{h \in H^* \subseteq H} \{a_j^h/a_0^h\}, \quad j \in J$$

Prova:

Consideremos, inicialmente, os parâmetros $\gamma^h, h \in H^* \subseteq H$. Temos que $a_j^h > 0$ para algum $j \in J, \forall h \in H^*$. Assim, mesmo que $\exists a_j^h < 0$, teremos sempre γ^h positivo. Por outro lado da sua própria definição, segue-se que $\gamma^h \geq 1, \forall h \in H^*$.

Definamos a seguinte partição de J :

$$\begin{cases} J^+ = \{j \in J / \alpha_j^* > 0\} & \text{com } \#(J^+) = m \\ J^- = \{j \in J / \alpha_j^* \leq 0\} & \text{com } \#(J^-) = n \end{cases}$$

Evidentemente:

$$J^+ \cup J^- = J, \quad J^+ \cap J^- = \phi \quad \text{e} \quad \#(J) = m + n.$$

Se, para um particular $j \in J$ tivermos $a_j^- \leq 0$, então: $a_j^- \leq 0 \quad \forall h \in H^*$. Logo, $\gamma^h(a_j^-/a_0^h) \leq (a_j^-/a_0^h), \forall h \in H^*$.

Segue-se trivialmente que:

$$\max_{h \in H^* \subseteq H} \{ \gamma^h(a_j^-/a_0^h) \} \leq \max_{h \in H^* \subseteq H} \{ a_j^-/a_0^h \}$$

Ou seja., $a_j^* \leq a_j^-$ quando $j \in J^-$.

* Por outro lado, não é difícil ver que para $j \in J^+$ teremos $a_j^* = a_j$. Assim, mostramos que:

$$\alpha_j^* \begin{cases} = \alpha_j, & j \in J^+ \\ \leq \alpha_j, & j \in J^- \end{cases}, \quad \forall j \in J$$

Pela definição de corte mais profundo, contida em (2.3.2), a prova está completa. ■

A partir deste resultado, torna-se clara a observação feita no capítulo III, com relação aos coeficientes do corte disjuntivo definido pelo Corolário (3.1.2). Portanto, se algum a_j , $j \in J$ for negativo, podemos tentar aprofundar o corte a partir dos multiplicadores γ^h , $h \in H$ como definido. Mostraremos, agora, que este corte também atende aos critérios de distância mencionados.

4.2.2 - Proposição

$$\text{O corte disjuntivo } \sum_{j \in J} \left\{ \max_{h \in H^* \subseteq H} \gamma^h(a_j^h/a_0^h) \right\} x_j > 1$$

com $\gamma^h = \min_{\substack{j \in J \\ a_j^h/a_0^h > 0}} \{a_j^h/(a_j^h/a_0^h)\}$, $h \in H'' \subseteq H$ maximiza as distâncias euclidianas

na e retilínea à origem.

Prova:

Por definição de distância euclidiana, tem-se: $\hat{d}_e^Y = 1/\|z^Y\|$.

Onde $z^Y = (z_j^Y)$, $j \in J$ com $z_j^Y = \text{máximo} \{0, \alpha_j\} \quad \forall j \in J$.

$$\text{Como } \alpha_j^* \begin{cases} = \alpha_j, & \text{se } \alpha_j > 0 \\ \leq \alpha_j, & \text{se } \alpha_j \leq 0 \end{cases}$$

segue-se que $z_j^Y = \hat{z}_j$, $\forall j \in J$ e, portanto, $d_e^Y = \hat{d}_e$.

Por outro lado, a distância retilínea \hat{e} é dada por:

$$d_r^Y = 1 / \left[\text{máximo}_{j \in J} \alpha_j^* \right]$$

Pela mesma argumentação anterior, tem-se:

$$\text{máximo}_{j \in J} \alpha_j^* = \text{máximo}_{j \in J} \alpha_j \quad \text{e, portanto, } d_r^Y = \hat{d}_r.$$

Segue-se que: $d_e^Y \leq \hat{d}_e^Y$ e $d_r^Y \leq \hat{d}_r^Y$ para qualquer escolha dos multiplicadores $\theta^h \geq 0$, $h \in H^* \subseteq H$. ■

4.2.3 - Proposição

O corte disjuntivo definido pela Proposição (4.2.1) \hat{e} é uma face de $\text{CONV}(F)$.

Prova:

É suficiente identificarmos $\#(J)$ vetores linearmente independentes de $\text{CONV}(F)$, satisfazendo ao corte definido em (4.2.1) a nível de

igualdade estrita, já que dimensão $\text{CONV}(F) = \#(J)$,

Utilizaremos os mesmos conjuntos J^+ e J^- , os quais são uma partição de J , conforme (4.2.1).

Seja $\bar{x}_p = (0, \dots, 1/\alpha_p^*, \dots, 0)$, $p \in J^+$ onde claramente todos os elementos de \bar{x}_p são nulos, exceto o p -ésimo componente,

Como $p \in J^+$, temos de (4.2.1) que:

$$\alpha_p^* = \alpha_p = \max_{h \in H_p^*} \{a_p^h / a_0^h\}$$

$$\text{Segue-se que: } \sum_{j \in J} \alpha_j^* \cdot \bar{x}_j = \alpha_p^* \bar{x}_p = 1$$

e, portanto, $\bar{x}_p \in \text{CONV}(F)$.

Assim, temos $\#(J^+)$ elementos da forma \bar{x}_j , $j \in J^+$ pertencentes a $\text{CONV}(F)$.

Consideremos, a seguir, um elemento genérico $q \in J^-$. Vamos mostrar, inicialmente, que $\exists X_h$, $h_q \in H$ e $q \in J^-$, satisfazendo a:

$$\gamma^h (a_p^h / a_0^h) = \alpha_p^* \quad \text{para algum } p \in J^+$$

$$\text{e } \gamma^q (a_q^h / a_0^h) = \alpha_q^*$$

De (4.2.1), temos que:

$$\alpha_q^* = \underset{h \in H_q^*}{\text{m\u00e1ximo}} \{ \gamma^h (a_q^h / a_0^h) \} = \gamma^q (a_q^q / a_0^q)$$

Assim, para este $h_4 \in H$, teremos:

$$\gamma^q = \underset{j \in J}{\text{m\u00ednimo}} \{ \alpha_j / (a_j^q / a_0^q) \} = \alpha_p / (a_p^q / a_0^q), \quad p \in J^+$$

$$a_j^q / a_0^q > 0$$

Como $\alpha_p = a_p^*$, $p \in J^+$, segue-se que $\gamma^q (a_p^q / a_0^q) = \alpha_p^*$, $p \in J^+$.

Definamos, ent\u00e3o:

$$\underline{d}_q = \begin{cases} (0, \dots, 1/\alpha_p^*, \dots, -1/\alpha_q^*, \dots, 0), & \text{se } \alpha_q^* < 0 \\ (0, \dots, 0, \dots, \Lambda, \dots, 0), & \text{se } \alpha_q^* = 0 \end{cases}$$

sendo $\Lambda > 0$. Podemos observar que \underline{d}_q \u00e9 uma dire\u00e7\u00e3o de X_{h_4} , $h_4 \in H$ j\u00e1 que se $\alpha_q^* = 0$, temos $a_q^q = 0$ e o resultado \u00e9 imediato; por outro lado, para $\alpha_q^* < 0$, $\hat{x} = (0, \dots, \gamma^q / \alpha_p^*, \dots, 0) \in X_{h_4}$ e $\hat{x} + \lambda (\gamma^q \underline{d}_q) \in X_{h_4}$ para todo $h \geq 0$. Assim, \underline{d}_q \u00e9 uma dire\u00e7\u00e3o de $\text{CONV}(F)$.

Fazendo $\hat{x}_{-4} = \bar{x}_{-4} + \underline{d}_q$, $q \in J^-$, verificamos que $\hat{x}_{-4} \in \text{CONV}(F)$, satisfazendo ao corte como igualdade estrita.

Obtivemos, ent\u00e3o, **#** (J) elementos que satisfazem ao corte a n\u00edvel de igualdade estrita, a saber:

$$\bar{x}_p = (0, \dots, 1/\alpha_p^*, \dots, 0) \quad , \quad p \in J^+$$

$$\hat{x}_{\sim q} = \bar{x}_{\sim p} + d_{\sim q} \quad , \quad q \in J^-$$

Se dispusermos estes elementos em uma matriz tal que as $\#(J^+)$ primeiras colunas forem os \bar{x}_p^T , $p \in J^+$ e as $\#(J^-)$ últimas colunas, os $\bar{x}_{\sim q}^T$, $q \in J^-$, nota-se claramente que a mesma poderá ser reduzida, através de operações elementares aplicadas sobre suas linhas, a uma matriz dita "echelon" sem linha nula. Portanto, estes $\#(J)$ elementos obtidos são linearmente independentes de $\text{CONV}(F)$, e como dimensão $[\text{CONV}(F)] = \#(J)$, a prova está completa. ■

Assim, mostramos que o corte definido em (4.2.1) é uma face de $\text{CONV}(F)$ e, portanto, o mais profundo implicado pela disjunção $\bigvee_{h \in H} (X_h \neq \phi)$.

Para o caso generalizado, a situação é mais complexa, não havendo até o momento uma solução analítica; passaremos, então, a discutir alguns aspectos introdutórios ao princípio geral de aprofundamento, quando em presença de restrições bivalentes a um subconjunto de variáveis do problema (PD).

4 - Princípio Geral de Aprofundamento

Consideremos um (PD) na forma normal disjuntiva, ao qual são adicionadas restrições de integralidade a algumas componentes do vetor de decisão \underline{x} .

Adicionalmente, admitiremos que:

$$\left[\begin{array}{l} A^h \tilde{x} \geq \tilde{b}_0^h \\ \tilde{a}_0^h \geq \tilde{b}_0^h \end{array} \right] \quad \forall h \in H$$

sendo $\#(H) = q$.

Temos, então, o seguinte problema de programação disjuntiva na forma normal conjuntiva:

$$(PD) \left[\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad c \tilde{x} \\ \text{sujeito a:} \\ \bigvee_{i \in H} \left(\begin{array}{l} A^i \tilde{x} \geq \tilde{a}_0^i \\ \tilde{x} \geq \tilde{0} \end{array} \right) \\ \bigwedge_{i \in H} \left(A^i \tilde{x} \geq \tilde{b}_0^i \right) \\ \\ x_j \text{ inteiro, } \forall j \in J_1 \subseteq J \end{array} \right]$$

A metodologia para aprofundamento de cortes disjuntivos aqui descrita $\tilde{s}\tilde{o}$ pode ser aplicada se existirem limites inferiores \tilde{b}_0^h , $h \in H$. Note-se que, embora sendo uma limitação considerável, verificar-se-á na maioria dos problemas práticos de programação matemática mista; além disso, especificamente para problemas de programação bivalente, como é o caso do problema de particionamento, estes limites não $\tilde{s}\tilde{o}$ existem, como também são bastante estreitos.

Estabeleceremos, agora, um lema que será útil na demonstração do princípio básico.

.Sejam:

$$\left[\begin{array}{l} A^i = (a_{ij}^i), \quad j \in J \quad e \quad i \in H \\ M = \{m \in R^q / \sum_{i \in H} m_i \geq 0, \quad m_i \text{ inteiro}, \quad i \in H\} \\ \underline{m}_j = (m_{1j}), \quad j \in J \quad e \quad i \in H \end{array} \right.$$

4.3.1 - Lema

Sendo $\underline{m}_j \in M$, $j \in J_1 \subseteq J$; $\forall \underline{x} \in R_+^n$ tal que x_j inteiro, $j \in J_1 \subseteq J$, uma das condições se verifica:

- $\sum_{j \in J_1} m_{ij} \cdot x_j = 0$, $\forall i \in H$ ou
- $\forall i \in H \left(\sum_{j \in J_1} m_{ij} x_j \geq 1 \right)$

Prova:

Suponhamos, por absurdo, que $\exists \hat{\underline{x}} \geq \underline{0}$ tal que \hat{x}_j inteiro $\forall j \in J_1 \subseteq J$, tal que:

$$\sum_{j \in J_1} m_{ij} \cdot \hat{x}_j < 0, \quad \forall i \in H$$

①

onde $\underline{m}_j \in M$, $j \in J_1$. Portanto:

$$\sum_{i \in H} \sum_{j \in J_1} m_{ij} \cdot \hat{x}_j < 0$$

Da definição do conjunto M e sendo $\hat{x} \geq 0$, segue-se que:

$$\sum_{i \in H} m_{ij} \geq 0, \quad j \in J_1 \implies \sum_{i \in H} m_{ij} \hat{x}_j \geq 0, \quad j \in J_1$$

$$\implies \sum_{i \in H} \sum_{j \in J_1} m_{ij} \hat{x}_j \geq 0 \quad (2)$$

Vemos que **a** contraria (1), portanto, devemos ter, pelo menos, um $\sum_{j \in J_1} m_{ij} x_j \geq 1, \quad i \in H$, ou equivalentemente:

$$\forall_{i \in H} \left(\sum_{j \in J_1} m_{ij} x_j \geq 1 \right) \quad \blacksquare$$

4.4 - Princípio Básico

O teorema a seguir nos fornece o ponto de partida para o aprofundamento de alguns cortes da família disjuntiva em presença de **variáveis bivalentes**.

4.4.1 - Teorema

O corte $\sum_{j \in J} \alpha_j \cdot x_j \geq \alpha_0$ é implicado por F . Sendo:

$$\alpha_j = \begin{cases} \inf_{m_{ij} \in M} \sum_{i \in H} \theta^i \left[a_{ij}^i + m_{ij} (a_0^i - b_0^i) \right], & j \in J_1 \\ \max_{i \in H} \{ \theta^i a_{ij}^i \}, & j \in J_2 = J \setminus J_1 \end{cases}$$

$$e \quad \alpha_0 = \underset{i \in H}{\text{mínimo}} \{ \theta_{\sim j}^i \cdot \underline{a}_0^i \}$$

Prova:

Seja $\underline{x} \in F$, tentaremos mostrar que \underline{x} satisfaz a:

$$\bigvee_{i \in H} \left(\sum_{j \in J_1} \left[\underline{a}_{\sim j}^i + m_{ij} (\underline{a}_0^i - \underline{b}_0^i) \right] x_j + \sum_{j \in J_2} \underline{a}_{\sim j}^i \cdot x_j \geq \underline{a}_0^i \right)$$

para qualquer $\underline{m}_{ij} \in M$, $j \in J_1$.

Objetivando facilitar a demonstração, vamos reescrever a disjunção como se segue:

$$\bigvee_{i \in H} \left(\sum_{j \in J} \underline{a}_{\sim j}^i \cdot x_j + (\underline{a}_0^i - \underline{b}_0^i) \sum_{j \in J_1} m_{ij} \cdot x_j \geq \underline{a}_0^i \right) \quad (3)$$

De acordo com o Lema (4.4. 1), dois casos devem ser considerados:

$$(1^\circ \text{ Caso}) \quad \sum_{j \in J_1} m_{ij} x_j = 0, \quad \forall i \in H$$

Neste caso, a disjunção (3) transformar-se-á em:

$$\bigvee_{i \in H} \left(\sum_{j \in J} \underline{a}_{\sim j}^i \cdot x_j \geq \underline{a}_0^i \right) \equiv \bigvee_{i \in H} (A_{\sim}^i \underline{x} \geq \underline{a}_0^i)$$

o que, por hipótese, se verifica, pois $\underline{x} \in F$.

$$(2^\circ \text{ Caso}) \quad \bigvee_{i \in H} \left(C_{\sim j} m_{ij} \cdot x_j > 1 \right)$$

Neste caso, $\exists k \in H$ tal que:

$$\sum_{j \in J_1} m_{kj} \cdot x_j \geq 1 \implies \sum_{j \in J_1} m_{kj} \cdot x_j = s + 1$$

para algum $s \geq 0$.

Assim, o k -ésimo termo da disjunção (3) transformar-se-á em:

$$\sum_{j \in J} \tilde{a}_j^k \cdot x_j \geq \tilde{b}_0^k - s(\tilde{a}_0^k - \tilde{b}_0^k)$$

Como $\tilde{a}_0^k \geq \tilde{b}_0^k$ e $s \geq 0$, segue-se que: $s(\tilde{a}_0^k - \tilde{b}_0^k) \geq 0$

e, portanto, como $x_j \in F$, automaticamente verifica (3).

Aplicando o Teorema Fundamental (3.1.1), tem-se que

$\sum_{j \in J} \alpha_j^i x_j \geq \alpha_0$ é implicado por F , sendo:

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \text{máximo}_E \theta^i \left[\tilde{a}_j^i + m_{ij} (\tilde{a}_0^i - \tilde{b}_0^i) \right], & j \in J_1 \\ \text{máximo}_{i \in H} \{ \theta^i \tilde{a}_j^i \}, & j \in J_2 = J \setminus J_1 \end{cases}$$

$$e \quad \alpha_0 = \text{mínimo}_{i \in H} \{ \theta^i \tilde{a}_0^i \}$$

Como os coeficientes \tilde{a}_j^i , $j \in J_1$ e α_0 são válidos em $\tilde{m}_j \in M$, é natural que escolhamos o corte mais profundo possível no sentido de (2.1.2), ou seja:

$$\alpha_j = \begin{cases} \inf_{m_j \in M} \alpha_j^i, & j \in J_1 \\ \max_{i \in H} \{\theta^i a_j^i\}, & j \in J_2 = J \setminus J_1 \end{cases}$$

$$\text{e } \alpha_0 = \min_{i \in H} \{\theta^i a_0^i\} \quad \blacksquare$$

4.4.2 - Corolário

Sejam os vetores $\underline{\sigma}^i$, $i \in H$ satisfazendo a $\underline{\sigma}^i (a_0^i - b_0^i) = 1$,
 $\underline{\sigma}^i a_0^i > 0$.

O corte $\sum_{j \in J} \beta_j \cdot x_j > 1$ é implicado por F

onde:

$$\beta_j = \begin{cases} \min_{m_j \in M} \max_{i \in H} \left\{ \frac{\underline{\sigma}^i a_j^i + m_{ij}}{\underline{\sigma}^i a_0^i} \right\}, & j \in J_1 \\ \max_{i \in H} \frac{\underline{\sigma}^i a_j^i}{\underline{\sigma}^i a_0^i}, & j \in J_2 = J \setminus J_1 \end{cases}$$

Prova:

Aplicando-se o Teorema (4.4.1) e utilizando os multiplicadores:

$$\theta^i = \underline{\sigma}^i / (\underline{\sigma}^i a_0^i), \quad \forall i \in H$$

obtemos os coeficientes:

$$\left[\begin{array}{l} (\underline{\sigma}^i / \underline{\sigma}^i \underline{a}_0^i) \left[\underline{a}_j^i + m_j^i (\underline{a}_0^i - \underline{b}_0^i) \right] = \frac{\underline{\sigma}^i \underline{a}_j^i + m_j^i}{\underline{\sigma}^i \underline{a}_0^i}, \quad j \in J_1 \\ (\underline{\sigma}^i / \underline{\sigma}^i \underline{a}_0^i) \underline{a}_j^i = \frac{\underline{\sigma}^i \underline{a}_j^i}{\underline{\sigma}^i \underline{a}_0^i}, \quad j \in J_2 \end{array} \right.$$

$$e \quad (\underline{\sigma}^i / \underline{\sigma}^i \underline{a}_0^i) \underline{a}_0^i = 1 \quad \blacksquare$$

Para que o procedimento descrito possa ser utilizado, é necessário determinar os valores Ótimos m_i , $i \in H$.

Dois algoritmos estão descritos em [7], obtendo os valores dos m_i a partir dos multiplicadores $\underline{\sigma}^i$ considerados fixos. Evidentemente, a otimização global requer a determinação simultânea de m_i e $\underline{\sigma}^i$, $i \in H$; porém um algoritmo eficiente para este problema não é conhecido até a data.

Apresentamos, a seguir, um dos algoritmos contidos em [7].

4.5 - Algoritmo para o Cálculo dos β_j , $j \in J_1$

Suponhamos os \underline{a}^i fixos $\forall i \in H$, e escolhidos de tal forma, que:

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\sigma}^i (\underline{a}_0^i - \underline{b}_0^i) = 1 \\ \underline{\sigma}^i \underline{a}_0^i > 0 \end{array} \right] \quad \forall i \in H$$

Consideremos adicionalmente, a seguinte notação:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_i = \sigma_i^i a_{ij}^i \quad \text{e} \quad \lambda_i = (\sigma_i^i a_{i0}^i)^{-1}, \quad i \in H \\ \left[m_{ij}^* \right] \equiv \text{maior inteiro} \leq m_{ij}^*, \quad j \in J_1 \\ \left\langle m_{ij}^* \right\rangle \equiv \text{menor inteiro} \geq m_{ij}^*, \quad j \in J_1 \end{array} \right.$$

Temos, então:

$$\beta_j = \begin{cases} \underset{m_{ij} \in M}{\text{mínimo}} \left[\underset{i \in H}{\text{máximo}} \{ (\alpha_i + m_{ij}) \lambda_i \} \right], & j \in J_1 \\ \underset{i \in H}{\text{máximo}} \{ \alpha_i \lambda_i \} & , \quad j \in J_2 \end{cases}$$

O problema resumir-se-á na determinação de valores Ótimos para os m_{ij} e, em seguida, calcula-se:

$$\beta_j = \underset{i \in H}{\text{máximo}} \{ (\alpha_i + m_{ij}) \lambda_i \}, \quad j \in J_1$$

Vamos examinar alguns aspectos que, a nosso ver, facilitam a compreensão do algoritmo contido em [7], o qual será listado posteriormente.

Convém recordar que, ao nos referirmos a valores ótimos, estaremos considerando um problema parcial em que os σ_i^i , $i \in H$ são fixos, e não ao problema real para o qual tanto os σ_i^i quanto os m_{ij} , $i \in H$ são otimizados simultaneamente. Feita esta ressalva, como por hipótese temos

$\sum_{i \in H} m_{ij} > 0$, segue-se que:

$$\beta_j \geq (\alpha_i + m_{ij}) \cdot \lambda_i, \quad \forall i \in H \quad \therefore$$

$$\therefore m_{ij} \leq (\beta_j / \lambda_i) - \alpha_i, \quad \forall i \in H \quad \therefore$$

$$\therefore 0 \leq \sum_{i \in H} m_{ij} \leq \beta_j \sum_{i \in H} (1/\lambda_i) - \sum_{i \in H} \alpha_i \quad \therefore$$

$$\therefore \beta_j \geq \sum_{i \in H} \alpha_i / \sum_{i \in H} (1/\lambda_i), \quad j \in J_1$$

Obtivemos, desta forma, um limite inferior

$\gamma = \sum_{i \in H} \alpha_i / \sum_{i \in H} (1/\lambda_i)$ para β_j , $j \in J_1$ que não depende dos valores de m_{ij} , $i \in H$.

Omitindo, por comodidade, o índice j e lembrando que no Ótimo podemos assumir que $\sum_{i \in H} m_i = 0$, basta fazer:

$$m_i^* = \gamma / \lambda_i - \alpha_i, \quad \forall i \in H$$

que esta condição verificar-se-á; porém, os valores de m_i^* , em geral, não serão todos inteiros.

Como buscamos valores ótimos inteiros, uma primeira aproximação a considerar seria:

$$m_i = \left[m_i^* \right], \quad \forall i \in H$$

Devemos, então, verificar o quanto nos afastamos da condição de Ótimo a partir desta aproximação.

Considerando que:

$$m_i^* \geq \left[m_i^* \right], \quad \forall i \in H \implies 0 = \sum_{i \in H} m_i^* \geq \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right]$$

$$\implies - \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] \geq 0$$

Por outro lado, chamando ξ a "distância" do Ótimo, temos:

$$\xi = \sum_{i \in H} m_i^* - \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] = 0 - \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] = - \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] \geq 0$$

Esta medida ξ é limitada superiormente. Basta notar que:

$$m_i^* < \left[m_i^* \right] + 1, \quad \forall i \in H \implies 0 < \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] + \#(H)$$

$$\implies - \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] < \#(H)$$

$$\implies 0 \leq - \sum_{i \in H} \left[m_i^* \right] \leq \#(H) - 1$$

Tendo em vista estarmos afastados ξ do ponto de Ótimo, podemos reduzir iterativamente esta distância, escolhendo um $s \in H$ e somando uma unidade ao valor de m_s . Devemos, no entanto, escolher s de modo a enfraquecer, o menos possível, o corte nesta direção.

Bastará, então, escolhermos $s \in H$, tal que:

$$\lambda_s(\alpha_s + m_s + 1) = \underset{i \in H}{\text{mínimo}} \{ \lambda_i(\alpha_i + m_i + 1) \}$$

e fazer, então, $m_s \leftarrow m_s + 1$, mantendo os demais valores de m_i , $i \in H \setminus \{s\}$.

Se repetirmos $\sum_{i \in H} \begin{bmatrix} m_i^* \\ i \end{bmatrix}$ vezes o procedimento, obteremos os

m_i Ótimos e, em seguida, faremos $\beta_j = \text{máximo}_{i \in H} \{(\alpha_i + m_i) \lambda_i\}$.

Destas reflexões, resulta evidente o algoritmo a seguir, que deve ser aplicado para cada $j \in J_1$.

4.5.1 - Algoritmo

Passo 0

Inicialização

• Calcular
$$\begin{bmatrix} \alpha_i = \sigma_{\sim}^i a_{\sim j}^i \\ \lambda_i = (\sigma_{\sim}^i a_{\sim 0}^i)^{-1} \end{bmatrix} \quad \forall i \in H$$

$$\gamma = \frac{\sum_{i \in H} \alpha_i}{\sum_{i \in H} (1/\lambda_i)}$$

$$\begin{bmatrix} m_i^* = \frac{\gamma}{\lambda_i} - \alpha_i \\ m_i = \begin{bmatrix} m_i^* \\ i \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \forall i \in H$$

• Fazer $k = \sum_{i \in H} \begin{bmatrix} m_i^* \\ i \end{bmatrix} \leq \#(H) - 1$. Vã para o Passo 1.

Passo 1

Iteração Padrão

e Determinar $s \in H$ tal que:

$$\lambda_s (\alpha_s + m_s + 1) = \underset{i \in H}{\text{mínimo}} \{h_i (\alpha_i + m_i + 1)\}$$

- Fazer: $m_s \leftarrow m_s + 1$
 $m_i \leftarrow m_i$, $\forall i \in H \setminus \{s\}$

e Testar

- Se $k=1$, então os valores Ótimos de m_i estão determinados. Fazer: $\beta_j = \underset{i \in H}{\text{máximo}} \{\lambda_i (\alpha_i + m_i)\}$ e terminar.

- Caso contrário, fazer: $k \leftarrow k-1$ e voltar ao início da iteração padrão.

Vamos utilizar, agora, o algoritmo para o caso de interesse, que será $\#(H) = 2$.

Assim, para $j \in J_1$ teremos, após calcular A_i e a_i , $i = 1, 2$:

$$\left[\begin{array}{l} m_1^* = \frac{\gamma}{\lambda_1} - \alpha_1 = \frac{\lambda_2 \alpha_2 - \lambda_1 \alpha_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ m_2^* = \frac{\gamma}{\lambda_2} - \alpha_2 = \frac{\lambda_1 \alpha_1 - \lambda_2 \alpha_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = -m_1^* \end{array} \right.$$

e, portanto, $k = -([\ m_1^* \] + [\ -m_1^* \])$ = 1.

Aplicando a iteração padrão com $m_1^* = m_j^*$:

$$m_1 + 1 = [m_1^*] + 1 = \langle m_j^* \rangle$$

$$m_2 + 1 = [-m_1^*] + 1 = -[m_j^*]$$

$$e \quad \beta_j = \text{mínimo} \{ \lambda_1(\alpha_1 + \langle m_j^* \rangle) , \lambda_2(\alpha_2 - [m_j^*]) \}$$

O valor Ótimo para $m_1 = -m_2$ será $\langle m_j^* \rangle$ ou $[m_j^*]$, dependendo do valor mínimo para β_j ser obtido para o primeiro ou segundo termo, respectivamente.

Repetindo-se o procedimento $\forall j \in J_1$ e calculando os coeficientes para $j \in J_2$, obtemos o corte válido.

CAPÍTULO VCORTES DISJUNTIVOS PARA O PROBLEMA DO PARTICIONAMENTO

Dentre todos os problemas de programação inteira com estrutura especial, três têm merecido maior destaque por parte dos pesquisadores devido à sua relevância prática:

- Problema do Particionamento
- Problema do Recobrimento
- Problema do Caixeiro Viajante

O problema do particionamento, algumas vezes denominado problema do recobrimento com restrições de igualdade, pode ser escrito na forma normal conjuntiva como:

$$(PPD): \quad \text{Minimizar} \quad x_0 = \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{x}$$

Sujeito a:

$$A \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{e}$$

$$\bigwedge_{j \in N} \left[(x_j = 0) \vee (x_j = 1) \right]$$

Onde:

$$\left[\begin{array}{l} A = (a_{ij}) \text{ , } a_{ij} \in \{0,1\} \forall (i,j) \in M \times N \\ M = \{1,2,\dots,m\} \\ N = \{1,2,\dots,n\} \\ \underset{\sim}{c} \in \mathbb{R}^n \\ \underset{\sim}{e} = (1,1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

O detalhamento do problema com discussão de suas propriedades pode ser encontrado em [8, 11].

Os algoritmos duais de planos de corte, notadamente aqueles baseados nos Cortes de Gomory, são, até o momento, os mais indicados para resolução de problemas de particionamento e recobrimento de dimensões razoáveis. À medida, porém, que estas dimensões vão aumentando, a eficiência desta técnica diminui consideravelmente. A razão prática para este fato repouza nos erros de arredondamento que vão se acumulando e, além disso, no fenômeno da degenerescência dual presente nos algoritmos duais baseados em cortes fracionários.

A experiência computacional realizada até o momento [11, 18] mostra que, em grande parte dos casos, o progresso inicial destes algoritmos é excelente, aproximando-se em poucas iterações de um limite inferior, de boa qualidade, para o valor da função objetivo no Ótimo. Posteriormente, a solução ótima propriamente dita é atingida assintoticamente, o que, em termos práticos, significa que o algoritmo itera por tempo ilimitado. Portanto, após grande tempo de máquina ser consumido, teremos um excelente limite inferior para nosso problema e nenhuma solução viável, já que os algoritmos duais só produzem soluções viáveis quando a otimalidade se verifica. Por outro lado, os métodos de enumeração do tipo "Branch and Bound" e suas variantes padecem de problemas de falta de memória e do não-conhecimento de limites inferiores iniciais. O que se faz, na prática, é resolver estes problemas mais difíceis em duas etapas: na primeira, aplica-se um algoritmo dual e, caso não seja obtida a solução Ótima em determinado tempo de máquina, utiliza-se o limite inferior gerado como informação adicional ao método de enumeração aplicado a seguir.

Uma das principais vantagens da abordagem disjuntiva é a possibilidade de explorar, de modo mais amplo, a estrutura particular de certos problemas combinatórios, gerando cortes mais profundos que os tradicionais, eliminando praticamente a degenerescência dual.

A seguir, apresentamos a dedução e discussão de cortes da família $B(\cdot)$, dos quais $B(4)$ e sua versão aprofundada $B(5)$ são novos. Para os demais, embora tenham sido publicados há cerca de quatro anos [5, 8], não existe experiência computacional concreta [6], daí a motivação para, nesta dissertação, testarmos estes cortes.

Adicionalmente, o que pode ser considerado uma contribuição, aplicamos a estes cortes a metodologia de aprofundamento contida no capítulo IV verificando, em termos computacionais, seu desempenho.

5.1 - Cortes $B(j)$, $j = 1, 2, 3$

Consideremos a seguinte condição lógica:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i \in Q_r} x_i = 1 \\ x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in Q_r \end{array} \right] \quad (1)$$

onde $\#(Q_r) = q_r$, $r \in M = \{1, 2, \dots, m\}$. Obviamente, se todas as restrições de um problema de programação inteira forem deste tipo, teremos um (PPD).

Vamos admitir, sem perda de generalidade que: $q_r \geq 2$, $\forall r \in M$, já que, se tivermos $q_s = 1$ e $Q_s = \{l\}$, $s \in M$, a condição lógica é trivial, da forma $x_R = 1$ e, portanto, podemos eliminar não só a linha s e a

coluna ℓ como também toda a linha $p \in E_R = \{k / \bigcup_{k \in M} Q_k \cap \{\ell\} \neq \emptyset\}$.

Resolvendo-se o problema de programação linear, obtido a partir de (PPD) pela substituição das restrições $x_j \in \{0,1\}$, $\forall j \in N = \{1,2,\dots,n\}$ por restrições de não-negatividade $x_j \geq 0 \forall j \in N$ obtemos a seguinte solução básica viável Ótima:

$$x_i = a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), \quad i \in I \cup J \cup \{0\} \quad (2)$$

para a qual $a_{i0} = 0$ e $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ e $a_{ij} = -1 \forall i = j$, $i, j \in J$

Se em (2), $a_{i0} \in \{0,1\}$, $\forall i \in I$, então a solução é ótima para (PPD). Vamos supor que $\exists i \in I$ com $a_{i0} \notin \{0,1\}$ e que a linha geradora do corte foi obtida, omitindo o índice, a partir da restrição $\sum_{i \in Q} x_i = 1$, satisfazendo a:

$$\bar{Q} = \{i \in I \cap Q / 0 < a_{i0} < 1\} \neq \emptyset \quad \text{com} \quad \#(\bar{Q}) \geq 2.$$

No item (5.3), serão apresentados dois critérios heurísticos que tornarão possível a escolha da linha geradora.

Devemos notar que a restrição $\sum_{i \in Q} x_i = 1$ é satisfeita a nível de igualdade estrita, pela solução em curso e, portanto, não pode ser utilizada diretamente para gerar um corte viável. Entretanto, a condição lógica a ela associada, ou seja, exatamente uma das variáveis x_j , $j \in Q$ deve ser igual a um e as restantes iguais a zero, isto é:

$$\bigvee_{i \in Q} \left(\begin{array}{l} x_i \geq 1, \quad \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} x_h \leq 0 \\ x_h \in \{0,1\}, \quad \forall h \in Q \end{array} \right) \quad (3)$$

é mais forte e sendo violada pela solução corrente pode ser utilizada para gerar um corte.

Seja $\sigma \in \mathbb{R}^Q$, tal que $0 \leq \sigma_i \leq 1$, $\forall i \in Q$. Tomando a combinação linear convexa de cada membro da disjunção (3) resulta em:

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in Q} \left(\begin{array}{l} x_i \geq 1, \quad \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} x_h \leq 0 \\ x_h \in \{0,1\}, \quad \forall h \in Q \end{array} \right) &\equiv \bigvee_{i \in Q} (x_i = 1, \quad \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} x_h = 0) \equiv \\ &\equiv \bigvee_{i \in Q} \left[(1 - \sigma_i)x_i - \sigma_i \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} x_h = 1 - \sigma_i \right] \equiv \\ &\equiv \bigvee_{i \in Q} \left[x_i - \sigma_i \sum_{h \in Q} x_h = 1 - \sigma_i \right] \quad (4) \end{aligned}$$

Como a solução definida em (2) é viável, teremos:

$$\sum_{h \in Q} a_{h0} = \sum_{h \in Q \cap I} a_{h0} + \sum_{h \in Q \cap J} a_{h0} = \sum_{h \in Q \cap I} a_{h0} = 1$$

com $a_{h0} = 0$, $\forall h \in Q \cap J$.

Logo:

$$\sum_{h \in Q} x_h = \sum_{h \in Q \cap I} x_h + \sum_{h \in Q \cap J} x_h = \sum_{h \in Q \cap I} x_h =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h \in Q \cap I} (a_{h0} - \sum_{j \in J} a_{hj} x_j) = \\
&= \sum_{h \in Q \cap I} a_{h0} - \sum_{j \in J} \sum_{h \in Q \cap I} a_{hj} x_j = \\
&= 1 - \sum_{j \in J} \sum_{h \in Q \cap I} a_{hj} x_j
\end{aligned}$$

Substituindo, então, (2) na disjunção (4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i \in Q} \left[(a_{i0} - \sum_{j \in J} a_{ij} x_j) - \sigma_i + \sigma_i \sum_{j \in J} \sum_{h \in Q} a_{hj} x_j = 1 - \sigma_i \right] &\equiv \\
\bigvee_{i \in Q} \left[\sum_{j \in J} (\sigma_i \sum_{h \in Q} a_{hj} - a_{ij}) (1 - a_{i0})^{-1} x_j = 1 \right] &\quad (5)
\end{aligned}$$

Aplicando-se o Corolário (3.1.2), tem-se o corte

$\bigvee_{j \in J} \alpha_j x_j \geq 1$ válido para (PPD) com coeficientes:

$$\alpha_j = \text{máximo}_{i \in Q} \{ (\sigma_i \sum_{h \in Q} a_{hj} - a_{ij}) (1 - a_{i0})^{-1} \}, \quad j \in J$$

O corte definido por (5) é computacionalmente simples, tendo-se liberdade de escolha dos multiplicadores σ_i , $i \in Q$, de modo a aprofundar o corte em uma ou em outra direção.

Tendo em vista que $0 < (1 - a_{i0}) \leq 1$, $\forall i \in Q$, uma escolha conveniente do ponto de vista computacional será tomar:

$$\sigma_i = (1 - a_{i0}), \quad \forall i \in Q, \text{ o que levar-nos-á ao corte } B(1).$$

5.1.1 - Corte B(1)

O corte $\sum_{j \in J} a_j x_j \geq 1$ é válido para (PPD), onde:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \max_{i \in Q} \{ \sum_{h \in Q} a_{hj} - a_{ij}(1 - a_{i0})^{-1} \} = \\ &= \sum_{h \in Q} a_{hj} - \min_{i \in Q} \{ a_{ij}(1 - a_{i0})^{-1} \}, \quad j \in J \end{aligned}$$

A condição lógica (1) estabelece que (q-1) das variáveis x_i devem ser nulas e exatamente uma igual a um.

Consideremos $\{Q_h\}_{h \in H}$ todos os subconjuntos de Q, tais que:

$$\#(Q_h) = q - 1, \quad \forall h \in H. \quad \text{Obviamente, } \#(H) = q.$$

Reescrevendo a condição (1) na forma disjuntiva, tem-se:

$$\bigvee_{h \in H} \left(\begin{array}{l} x_i = 0, \quad i \in Q_h \\ x_j = 1, \quad j \in Q \setminus Q_h \end{array} \right) \quad (6)$$

Pôdemos, então, generalizar o raciocínio e tomarmos $\{Q_h\}_{h \in H}$

como sendo todos os subconjuntos de Q, tais que:

$$\#(Q_h) = k - 1, \quad \forall h \in H \quad \text{onde} \quad 1 \leq k \leq q$$

Obviamente, a forma disjuntiva (6) permanece válida, e todo $\underline{x} \geq \underline{0}$ satisfazendo pelo menos k condições associadas aos índices do con-

junto Q , satisfará pelo menos uma dentre aquelas indexadas por $Q' = Q \setminus Q_h$ onde $\#(Q') = q - (k - 1)$.

Se, por simplicidade computacional, fizermos $k = q - 1$, retiraremos $(q - 2)$ restrições associadas a Q , resultando em $\#(Q') = 2$. Aplicando-se o Corolário (3.1.2), obtemos o Corte $B(2)$, com:

$$a_j = \underset{i \in Q'}{\text{máximo}} \{a_{ij} \cdot a_{i0}^{-1}\}, \quad j \in J$$

onde $\#(Q') = 2$.

5.1.2 - Corte $B(2)$

O corte $\sum_{j \in J} a_j \cdot x_j > 1$ é válido para (PPD), onde:

$$a_j = \underset{i \in Q'}{\text{máximo}} \{a_{ij} \cdot a_{i0}^{-1}\}, \quad j \in J$$

e Q' é qualquer subconjunto de cardinalidade igual a dois de Q ; o mesmo para cada $j \in J$.

Este corte é ainda mais simples que $B(1)$ podendo, como este, ter coeficientes com sinais negativos. Observe-se que Q' deve ser escolhido de modo que as duas linhas correspondentes a seus índices, no quadro do Simplex, tenham coeficientes negativos. O critério para a escolha de Q' será especificado mais adiante, em (5.3).

Para o corte $B(3)$, utilizaremos a condição lógica:

$$\begin{aligned}
 \bigvee_{i \in Q} [x_i \geq 1, x_h \leq 0 \quad \forall h \in Q \setminus \{i\}] &\equiv \bigvee_{i \in Q} \left[\begin{array}{l} a_{i0} + \sum_{j \in J} a_{ij} (-x_j) \geq 1 \\ a_{h0} + \sum_{j \in J} a_{hj} (-x_j) \leq 0, \quad \forall h \in Q \setminus \{i\} \end{array} \right] \\
 &\equiv \bigvee_{i \in Q} \left[\begin{array}{l} \sum_{j \in J} a_{ij} (-x_j) \geq 1 - a_{i0} \\ \sum_{j \in J} \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} a_{hj} x_j \geq \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} a_{h0} \end{array} \right] \\
 &\equiv \bigvee_{i \in Q} \left[\sum_{j \in J} \left(\sum_{h \in Q \setminus \{i\}} a_{hj} - a_{ij} \right) x_j \geq \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} a_{h0} + (1 - a_{i0}) \right]
 \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema (3.1.1), vem:

$$\alpha_j \geq \widehat{\text{máximo}}_{i \in Q} \left\{ \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} \theta_h^i a_{hj} - \theta_i^i a_{ij} \right\}, \quad j \in J$$

$$\alpha_0 \leq \widehat{\text{mínimo}}_{i \in Q} \left\{ \sum_{h \in Q \setminus \{i\}} \theta_h^i a_{h0} + \theta_i^i (1 - a_{i0}) \right\}$$

onde $\theta_h^i \geq 0$, $\forall h, i \in Q$

Para obtermos o corte definido pelo Corolário (3.1.2), basta fazer:

$$\theta_h^i = \left[\begin{array}{ll} \# (\bar{Q})^{-1} \cdot a_{h0}^{-1} & , h \in \bar{Q} \setminus \{i\} \\ \# (\bar{Q})^{-1} \cdot (1 - a_{h0})^{-1} & , h \in \bar{Q} \cap \{i\} \\ M \gg 0 & , h \in (Q \setminus \bar{Q}) \cap (J \setminus \{i\}) \\ 0 & , h \in (Q \setminus \bar{Q}) \cap (I \cap \{i\}) \end{array} \right.$$

Detalhes da obtenção destes multiplicadores estão em [5].

5.1.3 - Corte B(3)

O corte $\sum_{j \in J} a_j x_j \geq 1$ é válido para (PPD), onde:

$$\alpha_j = \begin{cases} (\# \bar{Q})^{-1} \cdot \sum_{i \in \bar{Q}} \frac{a_{ij}}{a_{i0}}, & \text{se } j \in J \cap Q \text{ ou } a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in Q \\ (\# \bar{Q})^{-1} \cdot \left[\sum_{i \in \bar{Q}} \frac{a_{ij}}{a_{i0}} - \underset{i \in \bar{Q}}{\text{mínimo}} \frac{a_{ij}}{a_{i0}(1-a_{i0})} \right], & \text{se } j \in J \setminus Q \\ & \text{e } a_{ij} < 0 \text{ para algum } i \in Q \end{cases}$$

Note-se que os cortes B(j), j=1,2,3 podem ser aprofundados aplicando a Proposição (4.2.1).

5.2 - Corte B(4)

Os cortes B(j), j=1,2,3 foram gerados a partir da disjunção:

$$\forall_{i \in Q} (x_i = 1, x_h = 0, \forall h \in Q \setminus \{i\})$$

Vamos agora deduzir dois novos cortes que, em muitos casos, serão mais profundos que os anteriores.

Consideremos a seguinte partição:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \cap Q_2 = \phi \\ Q_1 \cup Q_2 = Q \end{pmatrix}$$

5.2.1 - característica Básica da Partição

Escolheremos os elementos de Q_k , $k \in \{1,2\}$ de tal forma que:

- $\{i \in Q_k / a_{i0} > 0\} \neq \phi$, $k \in \{1,2\}$ e, portanto,

$$I \cap Q_k \neq \phi, \quad k \in \{1,2\}.$$

Esta condição especifica que pelo menos um índice de variável básica não-degenerada em (2) esteja em cada conjunto Q_k .

Podemos, então, escrever a disjunção (1) como:

$$\bigvee_{i \in Q} (x_i = 1, x_h = 0, \forall h \in Q \setminus \{i\}) \equiv \left(\sum_{i \in Q_1} x_i = 0 \vee \sum_{i \in Q_2} x_i = 0 \right)$$

A partir de (2), fazendo:

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} a_{i0} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} (-x_j), \text{ ou ainda:}$$

$$\sum_{i \in I \cap Q_1} x_i + \sum_{i \in I \cap Q_2} x_i = \sum_{i \in I \cap Q_1} a_{i0} + \sum_{i \in I \cap Q_1} a_{i0} +$$

$$+ \sum_{i \in I \cap Q_1} \sum_{j \in J} a_{ij} (-x_j) +$$

$$+ \sum_{i \in I \cap Q_2} \sum_{j \in J} a_{ij} (-x_j) \quad \therefore$$

$$\therefore \sum_{i \in I \cap Q_k} x_i = \sum_{i \in I \cap Q_k} a_{i0} + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I \cap Q_k} a_{ij}(-x_j); \quad k \in \{1,2\}$$

Fazendo $\beta_j^k = \sum_{i \in I \cap Q_k} a_{ij}$, $k \in \{1,2\}$ e $j \in J \cup \{0\}$, podemos

escrever:

$$\sum_{i \in I \cap Q_k} x_i = \beta_0^k + \sum_{j \in J} \beta_j^k(-x_j)$$

Tendo em vista que $\sum_{j \in J \cap Q_k} x_j = 0$ e que $x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in N$,

podemos, então, reescrever a disjunção em consideração da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bigvee_{k \in \{1,2\}} \left(\sum_{i \in I \cap Q_k} x_i = 0 \right) &\equiv \bigvee_{k \in \{1,2\}} \left(\begin{array}{l} \sum_{j \in J} \beta_j^k \cdot x_j \geq \beta_0^k \\ \sum_{j \in J \cap Q_k} x_j = 0 \end{array} \right) \\ &\equiv \bigvee_{k \in \{1,2\}} \left(\begin{array}{l} \sum_{j \in J \setminus Q_k} \beta_j^k x_j + \sum_{j \in J \cap Q_k} \beta_j^k x_j \geq \beta_0^k \\ \sum_{j \in J \cap Q_k} x_j = 0 \end{array} \right) \\ &\equiv \bigvee_{k \in \{1,2\}} \left(\sum_{j \in J \setminus Q_k} \beta_j^k \cdot x_j \geq \beta_0^k \right) \end{aligned}$$

Note-se que da hipótese de viabilidade e da característica básica da partição (5.2.1), temos que:

$$a_{i0} \geq 0, \quad \forall i \in I \quad \text{e} \quad \sum_{i \in I \cap Q_k} a_{i0} = \beta_0^k > 0, \quad k \in \{1,2\}.$$

Recordemos que, sendo:

$$Z = \{ \underline{x} \geq \underline{0} / \forall_{k \in \{1,2\}} (\sum_{j \in J \setminus Q_k} \beta_j^k / \beta_0^k x_j + \sum_{j \in J \cap Q_k} \beta_j^k / \beta_0^k x_j \geq 1) \},$$

o corte $\sum_{j \in J} \beta_j x_j \geq 1$ é implicado pelo conjunto $Z \iff (\forall \underline{x} \in Z \implies$

$\sum_{j \in J \setminus Q} \beta_j x_j + \sum_{j \in J \cap Q} \beta_j x_j \geq 1)$ e, para que a solução corrente seja eliminada,

devemos ter $\beta_j \geq 0, \forall j \in J \cap Q$.

Por outro lado, tendo em mente que os conjuntos $I \cap Q_k, k \in \{1,2\}$ estão determinados por hipótese, os conjuntos $J \cap Q_k, k \in \{1,2\}$ podem ser otimizados no sentido de colocar um índice $j \in J \cap Q$ em Q_1 se $\beta_j^1 / \beta_0^1 \geq \beta_j^2 / \beta_0^2$ e em Q_2 , caso contrário.

Destas observações, aplicando o Corolário (3.1.2) com multiplicadores $\theta_j^k = 1/\beta_0^k, k \in \{1,2\}$ e $j \in J$, impondo adicionalmente $\beta_j \geq 0, j \in J \cap Q$ obtemos o corte B(4), $\sum_{j \in J \setminus Q} \beta_j \cdot x_j + \sum_{j \in J \cap Q} \beta_j \cdot x_j \geq 1$, com coeficientes:

$$\beta_j = \begin{cases} \text{máximo} \left\{ \frac{\beta_j^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2}{\beta_0^2} \right\}, & j \in J \setminus Q \\ \text{máximo} \left\{ 0, \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2}{\beta_0^2} \right\} \right\}, & j \in J \cap Q \end{cases}$$

5.3. Corte Aprofundado B(5)

Aplicaremos o Corolário (4.2.2) para aprofundamento de B(4), a

partir dos coeficientes β_j , $j \in J \setminus Q$.

Necessitaremos, de acordo com (4.3), de um limite inferior b_0^k , $k \in \{1,2\}$ que fica facilmente estabelecido, já que:

$$\sum_{i \in I \cap Q_k} x_i = \beta_0^k + \sum_{j \in J \setminus Q_k} \beta_j^k (-x_j) \leq 1, \quad k \in \{1,2\} \quad \therefore$$

$$\sum_{j \in J} \beta_j^k \cdot x_j \geq \beta_0^k - 1, \quad k \in \{1,2\}$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} b_0^k = \beta_0^k - 1 \\ a_0^k = \beta_0^k \end{bmatrix} \quad k \in \{1,2\}$$

Devemos, então, escolher multiplicadores σ^k , $k \in \{1,2\}$ satisfazendo a:

$$\sigma^k (a_0^k - b_0^k) = 1 \quad e \quad \sigma^k a_0^k > 0, \quad k \in \{1,2\}$$

Ou ainda:

$$\sigma^k \left[\beta_0^k - (\beta_0^k - 1) \right] = 1, \quad \sigma^k \beta_0^k > 0, \quad k \in \{1,2\}$$

Como $\beta_0^k > 0$, $k \in \{1,2\}$ segue-se que $\sigma^k = 1$ e $\sigma^k \beta_0^k > 0$, $k \in \{1,2\}$.

Assim:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_k = \sigma^k \cdot a_j^k = \beta_j^k \\ \lambda_k = (\sigma^k \cdot a_0^k)^{-1} = \frac{1}{\beta_0^k} \end{array} \right] \quad k \in \{1, 2\}$$

$$e \quad \beta_j = \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1 + \langle m_j^* \rangle}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2 - [m_j^*]}{\beta_0^2} \right\}, \quad j \in J \setminus Q$$

$$\text{com } m_j^* = \frac{\beta_j^2 \beta_0^1 - \beta_j^1 \beta_0^2}{\beta_0^1 + \beta_0^2}, \quad j \in J \setminus Q$$

Portanto, o Corte B(5), $\sum_{j \in J} \beta_j x_j \geq 1$ é válido para (PPD);

onde:

$$\beta_j = \begin{cases} \text{máximo} \left\{ 0, \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2}{\beta_0^2} \right\} \right\}, & j \in J \cap Q \\ \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1 + \langle m_j^* \rangle}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2 - [m_j^*]}{\beta_0^2} \right\}, & j \in J \setminus Q \end{cases}$$

para qualquer partição (Q_1, Q_2) de Q .

5.4 - Critérios de Escolha da Linha Geradora do Corte

As regras aqui sugeridas, para escolha da linha geradora do corte no problema de particionamento, são basicamente empíricas, não sendo evidente, a priori, qual delas produzirá o melhor resultado. A idéia geral será escolher uma linha do problema original que mais rapidamente implique em soluções inteiras.

5.4.1 - Critério R(1)

Escolher a linha p de (PPD), tal que:

$$\#(\bar{Q}_p) = \underset{i \in \{1, \dots, m\}}{\text{máximo}} \{\#(\bar{Q}_i)\}$$

onde $\bar{Q}_i = \{h \in I \cap Q_i / 0 < a_{h0} < 1\}$

5.4.2 - Critério R(2)

Escolher a linha p de (PPD), tal que:

$$f_p = \underset{i \in \{1, \dots, m\}}{\text{mínimo}} \left[\sum_{h \in I \cap Q_i} \text{máximo} \{a_{h0}, 1 - a_{h0}\} \right]$$

Caso $I \cap Q_i = \emptyset$ então $f_i = +\infty$. Os empates serão resolvidos arbitrariamente.

Desta forma, utilizando um dos critérios $R(k)$, $k = 1, 2$ podemos determinar a condição lógica:

$$\left[\begin{array}{l} \sum_{i \in Q_p} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \text{ e inteiro } \forall i \in Q_p \end{array} \right]$$

que será utilizada para obter as disjunções geradoras dos cortes $B(j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

5.4.3 - Critério R(3)

Este critério será utilizado em conjunto com R(1) ou R(2) para a obtenção do corte B(2).

Suponhamos que a linha p geradora do corte disjuntivo está determinada, ou seja:

$$\bar{Q}_p = \{i \in I \cap Q_p / 0 < a_{i0} < 1\}$$

$$\#(\bar{Q}_p) \geq 2$$

Sendo a solução continua associada ao programa linear, naquele instante, dada por (2), podemos definir:

$$\delta_i = \min_{k \in \{j \in J / a_{ij} \neq 0\}} \{a_{ik} / |a_{ik}|\}, \quad \forall i \in \bar{Q}_p$$

Logicamente, δ_i será o número de elementos negativos da linha $i \in I$ no quadro do Simplex.

Sejam:

$$\delta_\ell = \min_{i \in I \cap Q_p} \{\delta_i\}$$

$$\delta_r = \min_{i \in (I \cap Q_p) \setminus \{\ell\}} \{\delta_i\}$$

(7)

Definiremos $Q' \subseteq \bar{Q}_p$ de modo que $Q' = \{\ell, r\}$ com $\ell, r \in I$

definidos em (7).

Desta forma, tentamos garantir o maior número de coeficientes $a_j < 0$, $j \in J$ para o corte disjuntivo B(2) definido em (5.1.2).

5.4.4 - Critério R(4)

Para que os cortes B(4) e B(5) possam ser determinados, devemos fixar a cardinalidade de cada conjunto Q_k , $k \in \{1,2\}$ além de respeitar a característica básica da partição (5.2.1).

Adotaremos, então, o seguinte critério:

$$\#(Q_1) = \begin{cases} \#(Q)/2, & \text{se } \#(Q) \text{ é par} \\ \lceil \#(Q)/2 \rceil + 1, & \text{se } \#(Q) \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\text{e } \#(Q_2) = \begin{cases} \#(Q_1), & \text{se } \#(Q) \text{ é par} \\ \#(Q) - \#(Q_1), & \text{se } \#(Q) \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Antes de passarmos à aplicação numérica dos cortes B(.), é interessante notar que os resultados obtidos neste capítulo aplicam-se a qualquer problema de programação mista com, pelo menos, uma restrição da forma:

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{j \in Q} x_j = 1 \\ x_j \text{ inteiro}, \quad j \in Q \end{array} \right)$$

5.5 - Aplicação Numérica

Consideremos um problema de particionamento tal que:

$$\underline{c} = (5, 4, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 0)$$

$$e. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução Ótima do programalinear associado a este (PPD) \vec{e} mostrada no quadro final do algoritmo Simplex, a seguir:

	1	$-x_1$	$-x_6$	$-x_3$	$-x_5$	$-x_2$
x_0	2	-5	-2	-1	-1	-3
x_1	0	-1	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	-1
x_3	0	0	0	-1	0	0
x_4	1/3	-1/3	-1/3	2/3	1/3	1/3
x_5	0	0	0	0	-1	0
x_6	0	0	-1	0	0	0
x_7	2/3	1/3	1/3	1/3	-1/3	2/3
x_8	1/3	-1/3	2/3	2/3	1/3	1/3
x_9	1/3	2/3	2/3	-1/3	1/3	-2/3
x_{10}	1	1	0	0	0	1

Vamos calcular cada um dos cortes $B(\cdot)$ utilizando o critério $R(1)$ para escolha da linha geradora. Assim, temos:

$$\bullet \quad I = \{4, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\bullet \quad \bar{Q}_k = \{i \in I \cap Q_k / 0 < a_{i0} < 1\}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{Q}_1 = \{7, 9\}, \quad \bar{Q}_2 = \emptyset, \quad \bar{Q}_3 = \{7, 8\}, \quad \bar{Q}_4 = \{4, 7\}, \quad \bar{Q}_5 = \{4, 8, 9\}$$

$$\implies \max_{i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}} \{\#(\bar{Q}_i)\} = \#(\bar{Q}_5) = 3$$

Logo, a quinta linha de A gerará os cortes com $Q_5 = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.

Omitiremos o índice 5 a partir daqui.

5.5.1 - Corte $B(1)$

Temos que:

$$\alpha_j = \sum_{h \in Q} a_{hi} - \min_{i \in Q} \{a_{ij} (-a_{i0})^{-1}\}, \quad j \in J$$

sendo:

$$J = \{1, 2, 3, 5, 6\}$$

O quadro a seguir tem elemento genérico $a_{ij}(1 - a_{i0})^{-1}$.

Q \ J	1	2	3	5	6
3	0	0	-1	0	0
4	-1/2	1/2	1	1/2	-1/2
5	0	0	0	-1	0
6	0	0	0	0	-1
8	-1/2	1/2	1	1/2	1
9	1	-1	-1/2	1/2	1
$\min_{i \in Q} \{a_{ij}(1 - a_{i0})^{-1}\}$	-1/2	-1	-1	-1	-1
$\sum_{h \in Q} a_{hj}$	0	0	0	0	0
α_j	1/2	1	1	1	1

Portanto, o corte B(1) será:

$$1/2 x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1$$

5.5.2 - Corte B(2)

Temosque: $\alpha_j = \max_{i \in Q'} \{a_{ij} \cdot a_{i0}^{-1}\}$, $j \in J$

Aplicando-se R(3), temos: $Q' = \{4, 8\}$.

O quadro a seguir tem elemento genérico $(a_{ij} \cdot a_{i0}^{-1})$.

Q' \ J	J				
	1	2	3	5	6
4	-1	1	2	1	-1
8	-1	1	2	1	2
$\bar{\text{máximo}}_{i \in Q'} \{a_{ij} \cdot a_{i0}^{-1}\}$	-1	1	2	1	2

Logo, B(2) será:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 \geq 1$$

Como $\alpha_1 < 0$, podemos tentar aprofundar o corte utilizando a Proposição (4.2.1).

Temos, então:

$$\gamma^h = \bar{\text{mínimo}}_{\substack{j \in J \\ a_j^h / a_0^h > 0}} \{ \alpha_j / (a_{hj} / a_{h0}) \}, \quad h \in Q'$$

$$\gamma^4 = \bar{\text{mínimo}} \{1, 1, 1, 1\} = 1$$

$$\gamma^8 = \bar{\text{mínimo}} \{1, 1, 1, 1, 1\} = 1$$

$$\text{Logo, } \alpha_j^* = \bar{\text{máximo}}_{h \in Q'} \{ \gamma^h \cdot (a_{hj} / a_{h0}) \}, \quad j \in J$$

Temos, então, o novo quadro com elemento genérico:

$$\gamma^h \cdot (a_{hj} / a_{h0})$$

Q' \ J	1	2	3	5	6
4	-1	1	2	1	-1
8	-1	1	2	1	2
α_j^*	-1	1	2	1	2

Vemos, então, que o corte B(2) $\tilde{j}\tilde{a}$ \tilde{e} o mais profundo implicado pela disjunção.

5.5.3 - Corte B(3)

Sendo $J \cap Q = \{3,5,6\}$ e $J \setminus Q = \{1,2\}$, temos:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{1}{3} \left[(-1-1+2) - \text{mínimo} \left\{ \frac{-1/2}{2/9}, \frac{-1/3}{2/9}, \frac{2/3}{2/9} \right\} \right] = 1/2 \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} \left[(1+1-2) - \text{mínimo} \left\{ \frac{1/3}{2/9}, \frac{1/3}{2/9}, \frac{-2/3}{2/9} \right\} \right] = 1 \\ \alpha_3 = \frac{1}{3} \left[(2+2-1) \right] = 1 \\ \alpha_5 = \frac{1}{3} \left[(1+1+1) \right] = 1 \\ \alpha_6 = \frac{1}{3} \left[(-1+2+2) \right] = 1 \end{array} \right.$$

Logo, B(3) será: $1/2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 \geq 1$

5.5.4 - Cortes B(4) e B(5)

Temos que:

$$B(4) : \beta_j = \begin{cases} \text{máximo} \left\{ \frac{\beta_j^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2}{\beta_0^2} \right\}, & j \in J \setminus Q \\ \text{máximo} \left\{ 0, \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2}{\beta_0^2} \right\} \right\}, & j \in J \cap Q \end{cases}$$

$$B(5) : \beta_j = \begin{cases} \text{máximo} \left\{ 0, \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2}{\beta_0^2} \right\} \right\}, & j \in J \cap Q \\ \text{mínimo} \left\{ \frac{\beta_j^1 + \langle m_j^* \rangle}{\beta_0^1}, \frac{\beta_j^2 - \lfloor m_j^* \rfloor}{\beta_0^2} \right\}, & j \in J \setminus Q \end{cases}$$

Tomando:

$$Q_1 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_2 = \{6, 8, 9\}$$

$$J \cap Q = \{3, 5, 6\}$$

$$J \setminus Q = \{1, 2\}$$

J	1	2	3	5	6	0
β_j^1	-1/3	1/3	2/3	1/3	-1/3	1/3
β_j^2	1/3	-1/3	1/3	2/3	4/3	2/3

$$m_1^* = \frac{\beta_1^2 \cdot \beta_0^1 - \beta_1^1 \cdot \beta_0^2}{(\beta_0^1 + \beta_0^2)} = \frac{1/9 + 2/9}{1} = 1/3$$

$$m_2^* = -1/9 - 2/9 = -1/3$$

Logo:

$$B(4) \left[\begin{array}{l} \beta_1 = \text{m\`aximo} \{-1, 1/2\} = 1/2 \\ \beta_2 = \text{m\`aximo} \{1, -1/2\} = 1 \\ \beta_3 = \text{m\`aximo} \{0, \text{m\`inimo} \{2, 1/21\}\} = 1/2 \\ \beta_5 = \text{m\`aximo} \{0, \text{m\`inimo} \{1, 1\}\} = 1 \\ \beta_6 = \text{m\`aximo} \{0, \text{m\`inimo} \{-1, 2\}\} = 0 \end{array} \right.$$

$$B(5) \left[\begin{array}{l} \beta_1 = \text{m\`inimo} \left\{ \frac{-1/3 + 1}{1/3}, \frac{1/3 - 0}{2/3} \right\} = 1/2 \\ \beta_2 = \text{m\`inimo} \left\{ \frac{-1/3 + 1}{2/3}, \frac{1/3 - 0}{1/3} \right\} = \end{array} \right.$$

Logo: $B(4) \equiv B(5)$ sendo dado por:

$$1/2x_1 + x_2 + 1/2x_3 + x_5 \geq 1$$

5.5.5 - Dist\`ancias

Conhecidos os coeficientes dos cortes $B(j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, calcularemos as dist\`ancias euclidiana d_e e retil\`inea d_r da origem \tilde{a} re-

gião viável definida pelo corte.

B(.)	α_1	α_2	α_3	α_5	α_6	d_e	d_r
1	1/2	1	1	1	1	0.49	1
2	-1	1	2	1	2	0.32	1/2
3	1/2	1	1	1	1	0.49	1
4	1/2	1	1/2	1	0	0.63	1
5	1/2	1	1/2	1	0	0.63	1

Neste caso, B(2) seria o de menor "distância" pelos dois critérios, e B(4)/B(5) os de maior "distância" e, portanto, os melhores segundo este critério que, como observamos no capítulo IV, possui inconvenientes.

O número de cortes B(.) necessários à obtenção da solução ótima da aplicação numérica em um algoritmo dual:

$$\left[\begin{array}{l} x_0^* = 3 \\ x_5^* = x_7^* = x_{10}^* = 1 \\ x_i^* = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 \end{array} \right.$$

bem como o número de cortes de Dantzig ($\sum_{j \in J} c_j x_j > 1$) e Gomory [11] encontram-se no quadro a seguir.

DANTZIG	GOMORY	B(1)	B(2)	B(3)	B(4)	B(5)
1	2	1	2	1	1	1

CAPÍTULO VI

EXPERIÊNCIA COMPUTACIONAL

Neste capítulo, de natureza empírica, inicialmente faremos comentários de ordem geral, associados ao estado da arte. A seguir, justificamos o planejamento do experimento, apresentando os resultados numéricos obtidos.

6.1 - Comentários Gerais

Teoricamente, qualquer problema de programação inteira admite solução; entretanto, do ponto de vista estritamente prático, diversos fatores nos colocam diante de uma situação insólita. Um destes fatores é o tempo de processamento, conceitualmente finito, porém, podendo tornar-se economicamente impraticável, mesmo para computadores tecnicamente mais desenvolvidos. Os erros de arredondamento representam papel preponderante na viabilidade de resolvermos determinado problema. Estas limitações, entre outras, tornam certos problemas insolúveis na prática e, lamentavelmente, não existe até o momento, uma maneira de estabelecermos a priori este fato.

Esta situação complica-se quando problemas, considerados difíceis ou mesmo impossíveis de resolver, utilizando determinado código, convergem de modo simples com outro código semelhante ou até mesmo a partir da utilização do mesmo código em outro computador. Da mesma forma, não há maneira segura de anteciparmos estes fatos.

Provavelmente estas são as razões para a descontinuidade existente entre teoria e prática neste setor da programação matemática. A elegância conceitual da teoria em muito contribuiu para esta situação. Se, de um

lado, a área é conceitualmente desenvolvida, do ponto de vista da aplicação, podemos considerar que a programação inteira ainda se encontra em fase embriônica.

De qualquer forma, não se tem mais ilusões a respeito de um algoritmo capaz de resolver com a mesma eficiência qualquer problema de programação inteira. Este fato é particularmente verdadeiro no caso de estruturas especiais, as quais devem ter suas características exploradas adequadamente em algoritmos específicos.

Dos algoritmos utilizados em experimentos computacionais com o problema do particionamento, os que apresentaram resultados mais significativos possuem as seguintes características comuns:

- são baseados nos algoritmos primal e/ou dual simplex,

e utilizam variantes do tradicional "Corte de Gomory", e

e são gerais, não levando em consideração a estrutura particular da aplicação.

A razão fundamental para o relativo sucesso destes experimentos parece repousar no fato do conjunto de soluções viáveis para o problema linear associado ter alta incidência de vértices inteiros entre seus elementos, viabilizando desta forma a utilização de algoritmos duais de corte. Por outro lado, este problema linear associado é normalmente de difícil tratamento, devido à sua estrutura. Apesar da descoberta de L.G. Khachian, de um método polinomial para problemas lineares [15], a resolução deste permanece, em geral, como etapa complexa.

Martin (1969), em uma pesquisa não publicada [8], relata a solução de diversos problemas de particionamento, de densidades relativamente baixas, com cerca de 300 a 500 restrições e 1500 a 4000 variáveis, utilizando cortes de Gomory gerados de forma particular. O número de cortes utilizados, apesar do porte dos problemas, foi inferior a 10, exceto em um caso, quando foram necessários 16 cortes. Entretanto, alguns casos mais densos, com menos de 300 variáveis, não puderam ser resolvidos dentro de limites aceitáveis de tempo.

Jaques Délorne (1974), em sua dissertação de doutoramento [14], comunicou resultados satisfatórios para problemas com até 1043 variáveis e 185 restrições. Os 8 problemas possuíam duas restrições adicionais: uma delas, um limite superior para a soma ponderada de todas as variáveis e a outra, do tipo $\sum x_i = k$, que fixa a cardinalidade de uma partição viável. A introdução destas restrições adicionais reduz consideravelmente o grau de complexidade do problema e, além disso, segundo Balas [8], a julgar pelos dados e resultados exibidos, as densidades são muito baixas. Os cortes são gerados a partir da linha com maior termo fracionário, sendo que, após cada pivoteamento, um novo corte de Gomory é introduzido, até que a solução torne-se inteira; entretanto, esta solução não é necessariamente primal viável e no processo de pós-otimização a integralidade poderá ser perdida.

Outro experimento relevante foi a aplicação do algoritmo totalmente inteiro de Gomory a problemas de particionamento e recobrimento por Sattin e Koncal [12], a um conjunto de 14 problemas de 30 a 90 variáveis e 30 restrições com custos unitários e densidade 7%, obtendo-se tempos de até 53 segundos em um computador UNIVAC 1108. Não foi possível resolver 8 problemas com 300 a 900 variáveis e 26 a 200 restrições, em limites razoáveis de tempo.

Em geral, os autores apontam os métodos de corte como indicados para problemas de particionamento de pequena densidade; por outro lado, para problemas mais densos, algoritmos baseados em enumeração são mais indicados e como causas principais para falha da tentativa de solução de problemas de maior porte, o acúmulo de erros de arredondamento e a degenerescência dual [11]. Nosso experimento com os cortes B(.), gerados a partir de considerações estruturais, visará verificar empiricamente o comportamento dos mesmos, com relação a estas limitantes.

6.2 - Planejamento do Experimento

Os artigos publicados em revistas especializadas fazem referência a resultados computacionais como indicadores da eficiência de algoritmos ou métodos. No entanto, não há uma padronização que possa ser utilizada na realização do experimento.

Na tentativa de corrigir esta situação, foram publicadas na ORSA [24] alguns pontos potencialmente importantes que devem ser observados em toda a pesquisa desta natureza.

A seguir, apresentamos nosso experimento que, em linhas gerais, obedece às recomendações da ORSA, comentando e justificando os critérios e medidas adotadas.

6.2.1 - Critérios de Escolha de variáveis para Avaliação

A eficiência de um algoritmo pode ser avaliada em termos dos recursos computacionais, principalmente tempo de processamento e memória, e/ou segundo variáveis como, por exemplo, o número de iterações, requeridos para

solução de problemas típicos.

O tempo de CPU depende diretamente de fatores tais como: técnicas de programação, eficiência do sistema operacional, projeto do compilador e características de eficiência intrínsecas à máquina que se está utilizando. Assim, o desempenho de um algoritmo pode perfeitamente se modificar, de um equipamento para outro.

Apesar das dificuldades apontadas, o tempo de CPU continua sendo muito utilizado, embora deva ser encarado com certa reserva.

A utilização de uma variável tal como o número de iterações, não está isenta de crítica, uma vez que os algoritmos diferem em sua complexidade e em seus passos fundamentais;

No caso presente, desejamos avaliar o comportamento dos cortes $B(\cdot)$, os quais possuem base comum representada pelos algoritmos primal e dual simplex. Assim, uma variável como o número de cortes gerados para resolução de determinado problema é altamente significativa já que, sendo menos influenciada pela máquina que se está utilizando, os resultados poderão ser utilizados como termo de referência em futuras pesquisas. Por outro lado, se considerada isoladamente, pode levar a interpretações errôneas, já que os cortes diferem em sua forma analítica e, portanto, o número de operações necessárias à obtenção de seus coeficientes não é, necessariamente, o mesmo. Adicionalmente, o número de pivoteamentos duais do algoritmo simplex varia entre dois cortes consecutivos. Estes fatos nos levam a considerar o tempo de CPU em conjunto com o número de cortes como informação básica em nossa experiência computacional.

O fato da resolução do problema linear associado ser o primeiro passo na busca da solução Ótima global de qualquer problema de programação inteira através de algoritmos duais de cortes, nos leva a considerar alguns parâmetros, associados à solução Ótima contínua, como indicadores do grau de complexidade destes problemas.

Diversos pesquisadores [18] consideram que o determinante da base ótima contínua pode ser elemento chave na avaliação da complexidade de um problema de programação inteira. A razão parece estar associada ao fato de que, sendo o módulo do determinante da base Ótima igual a 1, a solução contínua é inteira e, portanto, Ótima; caso contrário, estando distante da unidade, o problema pode apresentar grande complexidade do ponto de vista computacional.

Os graus de degenerescência primal e dual são também parâmetros de importância potencial, já que a convergência dos algoritmos baseados em métodos de programação linear, como é nosso caso, é fortemente influenciada pelos mesmos. Outro índice de complexidade que se deve considerar é a "distância" entre a solução Ótima linear e o ótima global, representada pela diferença em módulo entre os respectivos valores da função objetivo.

Como meta secundária, nossa experiência computacional será uma tentativa empírica de verificar até que ponto estes parâmetros influenciam os cortes B(.) .

6.2.2 - Problemas Teste

A maior parte das experiências computacionais, reportadas até a data, é baseada em problemas teste, gerados sob condições controladas ou fei-

tas em relação a problemas padrão de solução conhecida.

Todos os problemas localizados na bibliografia não possuíam dimensões significativas, ou então, os casos teste utilizados não estavam disponíveis.

Fomos, então, levados a utilizar problemas gerados aleatoriamente com parâmetros controlados. Esta abordagem possui, a nosso ver, inconvenientes, dentre os quais podemos apontar:

- as soluções dos problemas não são previamente conhecidas.
- determinados problemas podem não ser reproduzíveis em diferentes máquinas.
- comparações entre os esforços necessários à resolução de diferentes problemas gerados aleatoriamente são usualmente difíceis e de valor muitas vezes pouco significativo.

Em contrapartida, estas desvantagens são compensadas pelas seguintes vantagens em potencial:

- um gerador aleatório de problemas é portátil.
- permite obter uma gama de problemas distintos, com atributos diferentes, porém controlados.
- métodos estatísticos podem ser empregados na análise dos diferentes atributos.

Os problemas teste desta pesquisa foram, portanto, gerados aleatoriamente com densidade na faixa de 20% a 40%, impondo adicionalmente, pelo menos, um coeficiente não nulo por coluna e dois por linha. Em geral, densidades mais altas tornam os problemas de programação inteira mais difíceis. Este fato parece estar relacionado a dois aspectos básicos:

- cada subproblema linear levará mais tempo para determinar o "elemento pivot";
- maior incidência de erros de arredondamento;
- um número considerável de soluções viáveis inteiras estão presentes nas cercanias da solução Ótima contínua, impedindo a geração de cortes mais profundos e produzindo efeito semelhante ao da degenerescência dual.

Os coeficientes da função objetivo variam no intervalo $[0, 10]$ e são inteiros.

O critério para escolha da linha geradora foi $R(1)$ em todo o experimento e os algoritmos primal e dual simplex utilizam a regra de BLAND (Robert G. Bland, 1977) para escolha do pivot, que consiste, basicamente, em selecionar dentre todos os candidatos a entrada na base a variável de menor índice e dentre todos os candidatos a sair da base também a variável de menor índice no quadro; desta forma, mostra-se que a ocorrência de ciclos fica eliminada.

Adicionalmente, foram processados, como termo de referência, os mesmos problemas teste, utilizando-se o Corte de Gomory [11] e o de

Dantzig $(\sum_{j \in J} c_j x_j \geq 1)$.

Os programas computacionais foram desenvolvidos em linguagem FORTRAN IV, utilizando um compilador FORTRAN H Extended Optimization Enhancement (OPT(3)) para o Sistema IBM/370-158.

6.3 - Resultados

Duas séries de problemas teste de particionamento com 5 e 10 linhas foram processados para os cortes de Dantzig, Gomory e $B(j)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

$m \backslash n$	10	15	20	30	40
5	•	•	•		
10			•	•	•

Para cada dimensão $m \times n$, temos 10 casos teste, totalizando 60 problemas. Adicionalmente, 10 casos 10×20 sem solução viável inteira foram processados juntamente com um problema exemplo extraído de [11] e alguns casos gerados aleatoriamente tendo as especificações, em termos de densidade e dimensões, dadas a seguir.

PROBLEMAS	DIMENSÕES (m x n)	DENSIDADE (%)
SALKIN	15 x 32	21
(0)	50 x 100	9
(1)	20 x 40	47
(2)	20 x 40	35
(3)	20 x 40	31

Os principais resultados obtidos são apresentados nos ANEXOS e comentados ao longo deste capítulo.

6.3.1 - Fase Primal

No quadro resumo fornecido no ANEXO 13, podemos observar um grau de degenerescência primal elevado, situado no intervalo $[0\%, 60\%]$, o que pode ser explicado pela densidade dos casos teste ser alta, tornando altamente provável que um pequeno número de variáveis satisfaça a todas as restrições. Assim, um grau elevado de degenerescência primal prejudica o desempenho dos cortes em termos de consumo de CPU, já que tende a alongar a fase dual acarretando, pelo maior número de operações de pivoteamento, um acúmulo acentuado de erros de arredondamento,

Os tempos de CPU obtidos nesta fase podem ser consideravelmente reduzidos, já que foi utilizado um algoritmo primal não-revisado. Se implementado o método simplex sob a forma compacta do produto da inversa, inteiro proveito da esparsidade da matriz de coeficientes tecnológicos pode ser obtido, com ganho substancial no tempo de computação. Adicionalmente, este método garante uma inversa da base mais precisa.

Visando minimizar os erros de arredondamento, provenientes desta fase, a inversa da base Ótima contínua é atualizada para cada problema teste do experimento, acarretando ônus adicional na CPU; além disto todos os cálculos são executados em dupla precisão.

Como foi mencionado, a faixa de densidade sendo alta, acarreta soluções contínuas bastante seletivas e, portanto, as distâncias do Ótimo global são relativamente pequenas. Por outro lado, um número considerável de soluções inteiras estará presente nas cercanias do Ótimo contínuo impedindo a geração de cortes profundos e produzindo efeito semelhante ao da degenerescência dual, o que é desejável em termos de experimento.

6.3.2 - Fase Dual

A execução de cada caso teste foi limitada, nesta fase, pelo número de cortes gerados, em $(150 - m)$, onde m é o número de restrições do problema de particionamento. Não foi feita recuperação de precisão da inversa da base na fase dual.

Os resultados obtidos, contidos em detalhe nos ANEXOS 15, 17, 19, 21, 23 e 25, mostram que os cortes B(4) e B(5) apresentaram, em linhas gerais, comportamento mais promissor ao longo dos 60 problemas.

Para a série de problemas com 5 linhas, conforme esquematizado nas FIGURAS 1, 2, 3 e 4, observa-se que o corte de Gomory, em relação ao número médio de cortes gerados, apresentou ligeira vantagem sobre B(4) para os casos de dimensões 5×10 e 5×15 , sendo superado, no entanto, para os de 20 colunas. Entretanto, B(5), em todas as três situações, apresentou melhor

desempenho. Já na série de 10 linhas, o corte B(5) foi o que melhor se houve em todos os casos, seguido de perto por B(4), o que pode ser visto nas FIGURAS 9, 10, 11 e 12.

Adicionalmente, devemos notar que B(5) só foi superado pelo corte de Gomory em um caso 5 x 20 (Problema nº 10, ANEXO 19) e um 10 x 20 (Problema nº 4, ANEXO 21).

As variabilidades, obtidas em relação ao número de cortes gerados, esquematizadas nas FIGURAS 17 e 19, quando examinadas em conjunto com os intervalos de confiança para a mesma variável, calculados a um nível de significância de 10% (ANEXO 29), confirma o desempenho dos cortes B(4) e B(5).

Os cortes de Dantzig, B(1), B(2) e B(3) apresentaram comportamento irregular, sendo afetados não só pela degenerescência dual propriamente dita, como por efeitos semelhantes, comentados em (6.3.1), causados pela faixa de densidade dos casos teste. Os cortes de Gomory também foram afetados, embora em menor proporção.

Note-se que o corte de Dantzig, na forma $\sum_{j \in J} c_j x_j \geq 1$, não é necessariamente convergente [11];

o corte $\sum_{j \in J_k} c_j x_j \geq 1$ com $J_k = \{j \in J / a_{ij} - \frac{[a_{ij}]}{-1j} > 0, i \in I\}$

e $\#(J_k) = \min_{i \in I} \{ \#(J_i) \}$ é mais profundo e convergente, segundo Bowman

e Nemhauser (1970) [17]. Por outro lado, de acordo com [17], não é de se esperar que qualquer corte obtido a partir do de Dantzig possa ter melhor apra

veitamento que o de Gomory.

É interessante notar que nestes cortes, o progresso inicial, como exemplificado para alguns casos nas FIGURAS 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 36, é bom, aproximando-se em poucas iterações de um limite inferior de boa qualidade para o valor da função objetivo no Ótimo. Posteriormente, passa por iterações ineficientes, com cortes muito pouco profundos no sentido de variação da função objetivo, para então atingir a solução Ótima ou fazê-lo assintoticamente, o que, em termos práticos, significa que o algoritmo itera por tempo ilimitado. O mesmo comportamento foi observado no problema Salkin (ANEXO 30) e nos problemas Extra (ANEXOS 32, 34, 35 e 36), como se pode ver nas FIGURAS 33, 34, 35 e 36.

conclusão idêntica à obtida com relação a número de cortes gerados foi verificada no aspecto do tempo de CPU. Cumpre notar, porém, que sendo os cortes de Dantzig e Gomory analiticamente menos elaborados que os cortes B(.), em particular B(4) e B(5), as técnicas de programação utilizadas e a estrutura dos códigos afetam, embora em menor escala, seu desempenho. Se técnicas de programação mais eficientes forem utilizadas, levando à otimização dos códigos, os tempos de CPU correspondentes certamente serão melhorados.

Mesmo com esta ressalva, as FIGURAS 13, 14, 15 e 16, onde estão esquematizados os tempos médios de CPU e as FIGURAS 18 e 20 com as variabilidades, em conjunto com os intervalos de confiança no ANEXO 29, suportam nossa conclusão de que os cortes B(4) e B(5) apresentaram desempenho superior, ou seja, o tempo de CPU adicional dispendido devido à maior complexidade analítica destes cortes foi compensado pelo menor número de cortes gera-

dos e, portanto, pivoteamentos duais utilizados.

Nosso experimento, em geral, confirmou a regra do número de variáveis, isto é, aumentando o número de colunas, aumenta o grau de combinatória e, portanto, a complexidade dos problemas. A regra do determinante da base Ótima da fase primal não pode ser confirmada, já que os valores obtidos nos casos teste não são muito elevados. Nos problemas extra, onde os determinantes são consideráveis, os cortes B(4) e B(5) parecem não ter sido afetados.

Em algumas situações, deparamo-nos com problemas para os quais não existe solução inteira viável, embora admitam solução contínua no problema relaxado. É interessante, então, que os cortes propostos apresentem suficiente poder, de modo a identificar rapidamente a inviabilidade.

Visando sondar este aspecto, foram processados 10 casos de dimensões 10×20 , inviáveis na fase dual, e o aproveitamento do corte B(5), como pode ser visto nos ANEXOS 27 e 28, foi bastante promissor.

Apesar de, neste tipo de experimento, os resultados, como comentamos no início do capítulo, estarem intimamente relacionados ao equipamento utilizado e às características específicas da amostra gerada, concluímos por um forte indício em favor de B(4) e B(5),

CAPÍTULO VII
RESUMO E CONCLUSÕES

A Programação Disjuntiva tem suas raízes intimamente ligadas aos trabalhos de Cortes de Interseção ou Cortes Convexos de Young (1971) [22], Balas (1971) [1], Glover (1973) [9], Owen (1973) [10] e Zwart (1972) [26].

A idéia geral destes cortes convexos, como foi mostrado no capítulo três, é interceptar as arestas do cone com origem na solução Ótima contínua com a fronteira de algum conjunto convexo, cujo interior contém esta solução, mas não contém nenhum ponto inteiro [23], e utilizar o hiperplano definido pelos pontos de interseção como plano de corte,

Balas, a partir dos trabalhos de Glover, estabeleceu que os cortes de interseção podem ser obtidos a partir de disjunções.

Na realidade, quando exigimos que nenhuma solução viável inteira esteja contida no interior do conjunto convexo utilizado na geração do corte de interseção, implicitamente estamos impondo que toda a solução viável satisfaça pelo menos uma das desigualdades cujos complementos definem os suportes de seus semi-espacos.

Esta mudança de enfoque, aparentemente inócua, é extremamente valiosa, já que permite a consideração de todas as desigualdades válidas para problemas de programação inteira. Esta mesma abordagem oferece a possibilidade de obter cortes especialmente moldados para problemas com estrutura particular, tendo a propriedade desejável de poderem apresentar coeficientes negativos.

A importância da classe de cortes definidos pelo Teorema Fundamental (3.1.1) reside, portanto, em sua generalidade. A partir da escolha apropriada dos multiplicadores θ_i^h , $i = 1, 2, \dots, m_h \quad \forall h \in H$, como foi ilustrado, parte dos cortes propostos na literatura são recobertos, muitas vezes em versão mais aprofundada.

O Problema do Particionamento, quando visto segundo a metodologia da Programação Disjuntiva, permite obter uma classe $B(\cdot)$ de cortes válidos, potencialmente relevantes. Particular ênfase deve, a nosso ver, ser dada aos cortes $B(4)$ e sua versão aprofundada $B(5)$, obtida pela aplicação do Princípio Geral de Aprofundamento, discutido no capítulo quatro.

Estes novos cortes revelaram, em nosso experimento, um aproveitamento uniforme e eficiente, em relação a número de cortes gerados, eliminando o problema da degenerescência dual, sem representar, em nosso entender, ônus computacional significativo, levando-se em conta as circunstâncias sob as quais foram testados.

Outra potencialidade dos cortes $B(\cdot)$, em particular $B(5)$, é a possibilidade de virem a ser utilizados, combinados ao princípio de "Branch-and-Bound", não só em problemas de particionamento, mas em qualquer problema da forma:

(P): Minimizar $x_0 = \underset{\sim}{c} \underset{\sim}{x}$

Sujeito a:

$$\left(\begin{array}{l} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{a_0} \\ \underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0} \end{array} \right)$$

$$\bigwedge_{h \in H} \left(\sum_{i \in Q_h} x_i = 1 \right)$$

$$\bigcup_{h \in H} Q_h \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$$

$$x_i \text{ inteiro, } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \cap \left[\begin{array}{l} \bigcup_{h \in H} Q_h \end{array} \right]$$

Desta forma, poderia ser atenuado um dos aspectos mais restritivos deste método, que é o fato das decisões relativas à escolha de um sub-problema ativo para expansão na árvore de busca serem baseadas geralmente em pouca informação. Esta limitação é particularmente pronunciada nos primeiros estágios da árvore gerada pelo algoritmo, onde o número de ramos é pequeno, não permitindo, em geral, a obtenção de um limite superior capaz de inibir o crescimento da seqüência de sub-problemas ativos, ou outras informações relevantes com respeito & próximas decisões a serem tomadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] E. BALAS - Intersection Cuts - A New Type of Cutting Planes for Integer Programming, ORSA, 19, 1971, p. 19-39.
- [2] E. BALAS - Disjunctive Programming: Cutting Planes from Logical Conditions, Nonlinear Programming 2, O.L. Mangasarian, R.R. Meyer e S.M. Robinson (Editores), Academic Press, 1975, 279-312.
- [3] E. BALAS - Disjunctive Programming: Properties of the Convex Hull of Feasible Points, MSRR.348, Carnegie-Mellon University, julho 1974.
- [4] E. BALAS - Disjunctive Programming, MSRR.415, Carnegie-Mellon University, agosto 1977.
- [5] E. BALAS - Intersection Cuts from Disjunctive Constraints, MSRR.330, Carnegie-Mellon University, fevereiro 1974
- [6] E. BALAS - Comunicações Pessoais, 1979.
- [7] E. BALAS and R. JEROSLOW - Strengthening Cuts for Mixed Integer Programs, MSRR.359, Carnegie-Mellon University, fevereiro 1975.
- [8] E. BALAS and M.W. PADBERG - Set Partitioning, B. Roy (Editor), Combinatorial Programming: Methods and Applications, 205-258, 1975.

- | 9 | F. GLOVER - Convexity Cuts and Cut Search, ORSA, 21, 1973, p. 123-134.
- | 10 | G. OWEN - Cutting Planes for Programs with Disjunctive Constraints,
Journal of Optimization Theory and Applications, 11, 1973,
p. 49-55.
- | 11 | HARVEY M. SALKIN - Integer Programming, Addison-Wesley Publishing Com-
pany, Inc., 1975.
- | 12 | HARVEY M. SALKIN and KONCAL, R.D. - Set Covering by an Integer Algo-
rithm: Computational Experience, ACM Journal, 20, 189-193,
1973.
- | 13 | HANIF D. SHERALI and C.M. SHETTY - On the Generation of Deep Disjuncti-
ve Cutting Planes, Georgia Institute of Technology, Indus-
trial & Systems Engineering Reports Series M J-79-8, abril,
1979.
- | 14 | JAQUES DÉLORME - Contribution à la Résolution du Problème de Recouvre-
ment: Méthodes de Troncature, Thèse de Docteur Ingénieur,
Université Paris VI, 1974.
- | 15 | KOLATA, G.B. - Mathematicians Amazed by Russian's Discovery, Science,
Vol. 206, novembro, 1979.
- | 16 | MICHEL SIMMONARD - Linear Programming, Prentice-Hall Inc., Englewood
Cliffs, N.J., 1966.

- [17] ROGER S. GARFINKEL and GEORGE L. NEMHAUSER - Integer Programming, John Wiley & Sons, 1972.
- [18] RONALD L. RARDIN and BENJAMIN W. LIN - What Makes Integer Programming Problems Hard to Solve?, Georgia Institute of Technology, Industrial & Systems Engineering Report Series, 5-77-13, maio, 1977.
- [19] R.G. JEROSLOW - Cutting Planes for Relaxations of Integer Programs, MSRR,347, Carnegie-Mellon University, julho, 1974.
- [20] R. G. JEROSLOW - Cutting Plane Theory: Disjunctive Methods, Annals of Discrete Mathematics, vol. 1: Studies in Integer Programming, 1977, p. 293-330.
- [21] R.G. JEROSLOW - Cutting Planes for Complementary Constraints, SIAM Journal on Control and Optimization, 16, 1978, p. 56-62.
- [22] R.D. YOUNG - Hypercylindrically Deduced Cuts in Zero-One Integer Programs, Operations Research, 19, 1971, p. 1393-1405.
- [23] TAHA, HAMDY A. - Concave Minimization Over a Convex Polyhedron, Naval Research Logistics Quarterly, 20(3), setembro, 1973.
- [24] Reporting Computational Experience in Operations Research, George Nemhauser, Area Editor, Optimization and William Pierskalla, Editor - ORSA, janeiro-fevereiro, 1979,

- [25] WOOLSEY, R.E. and C.A. TRAUTH, Jr. - Integer Linear Programming: A Study in Computational Efficiency, Management Science, 15(9), maio, 1969.
- [26] ZWART, P.B. - Intersection Cuts for Separable Programming, School of Engineering and Applied Science, Washington University, St. Louis, Mo., janeiro, 1972.
-

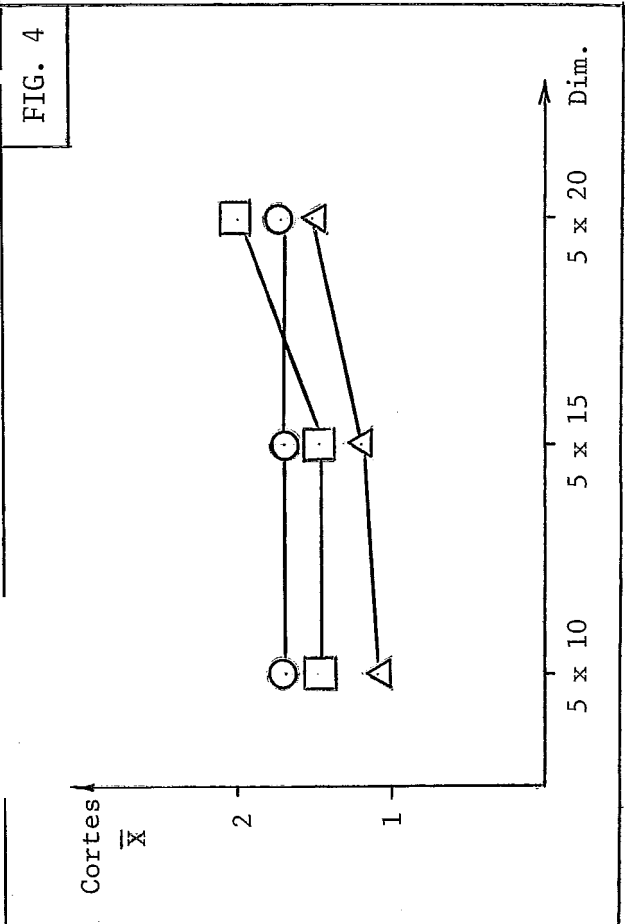
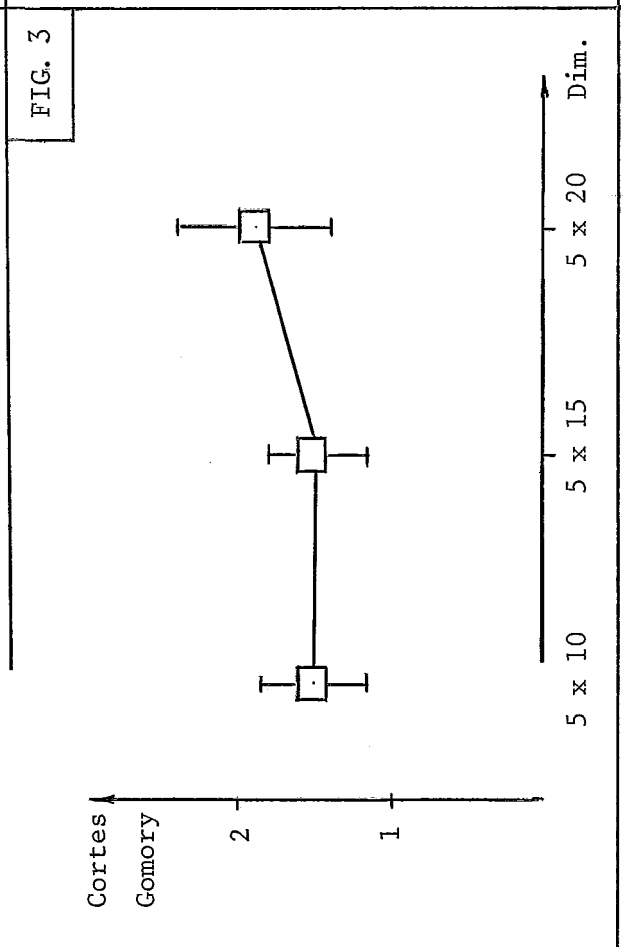
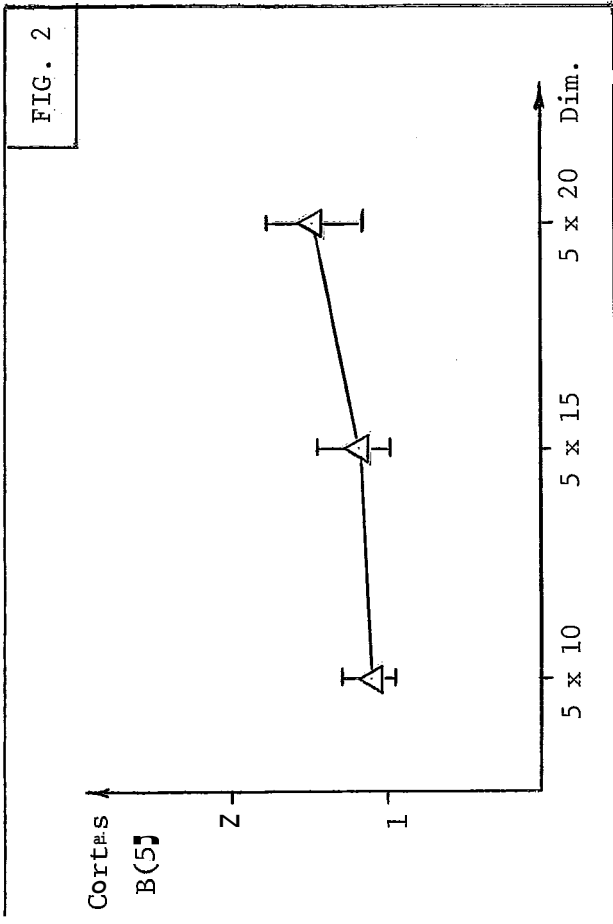
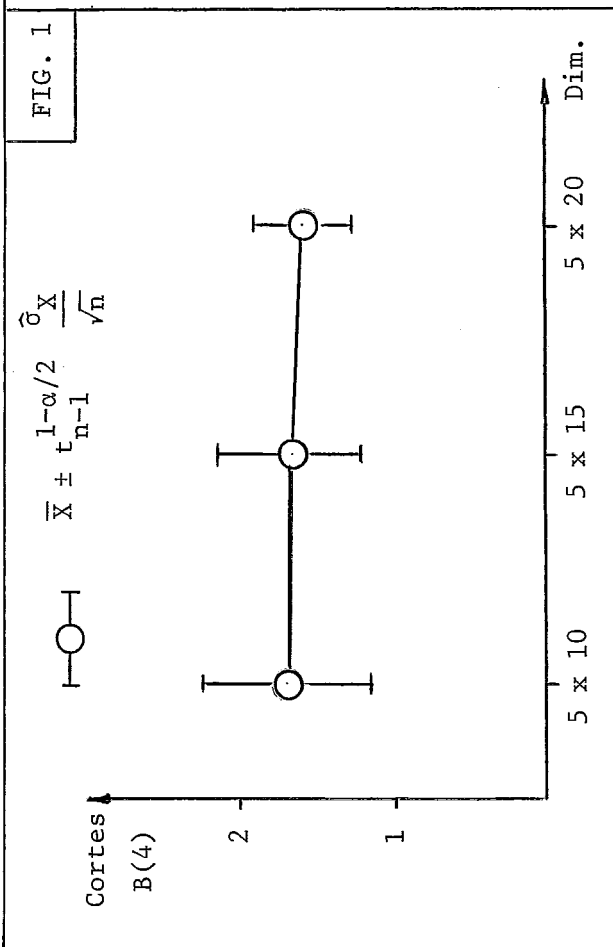


FIG. 6

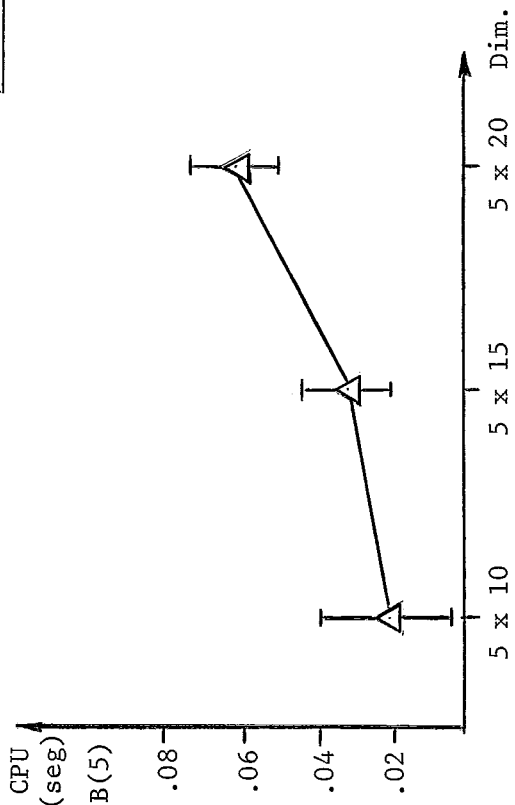


FIG. 8

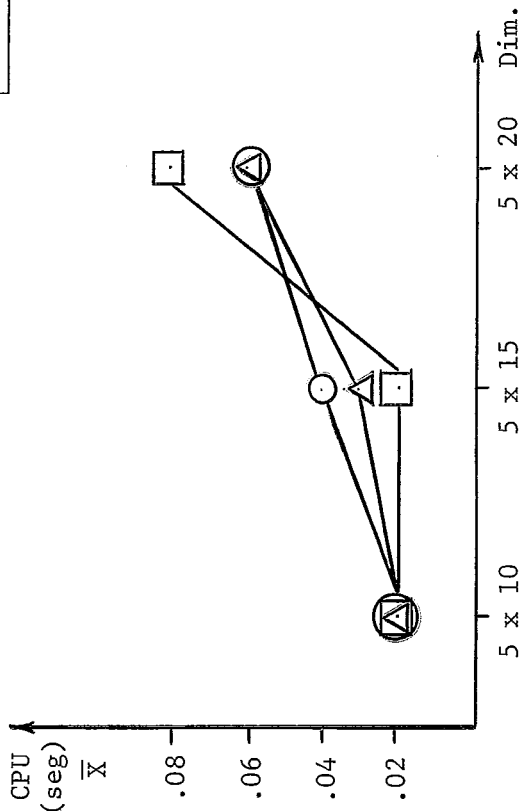


FIG. 5

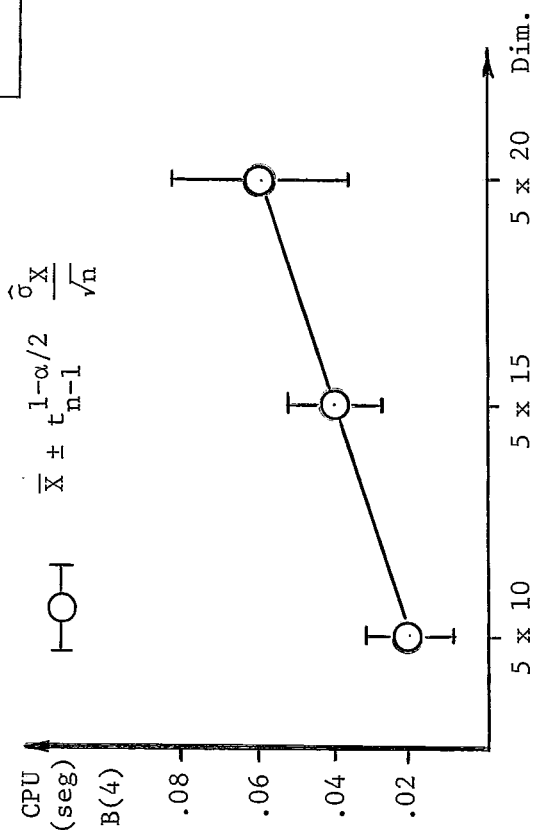


FIG. 7

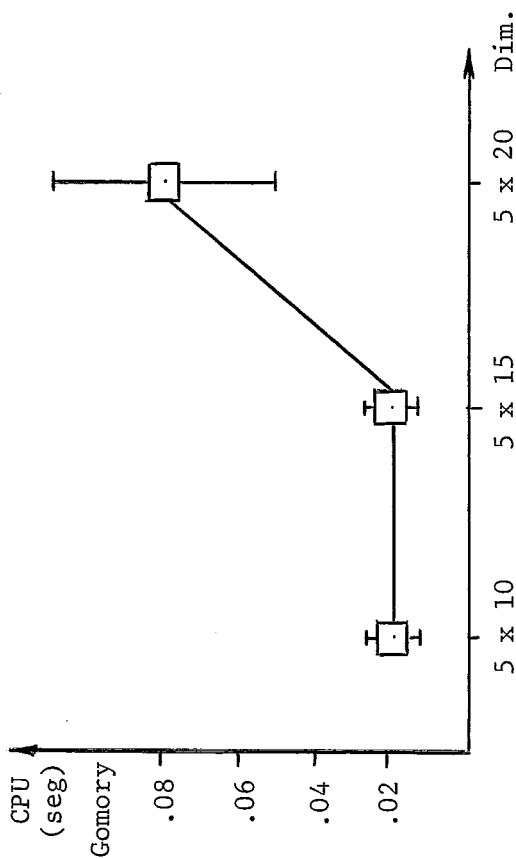


FIG. 9

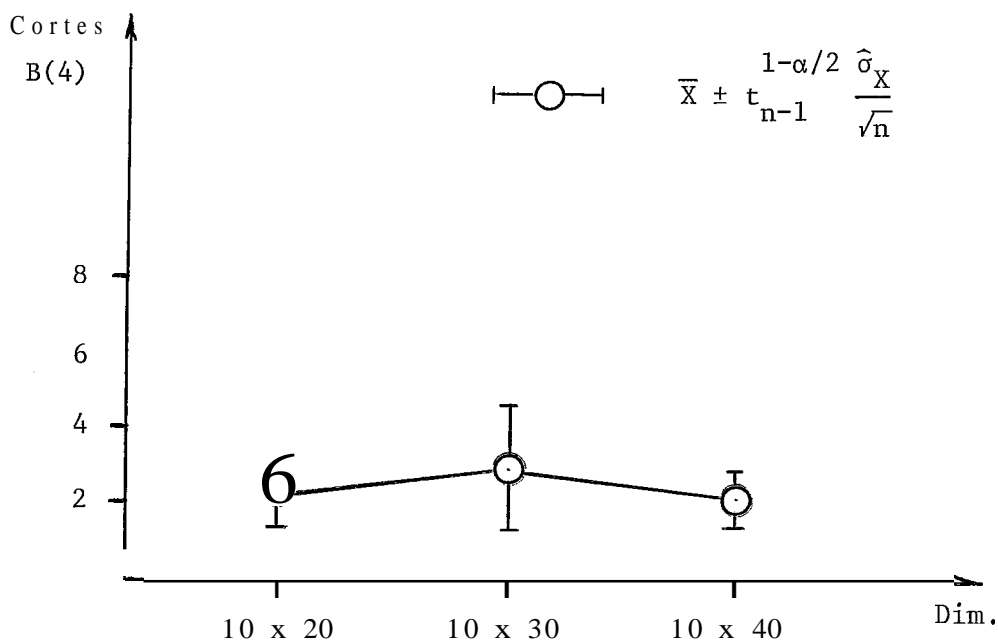


FIG. 10

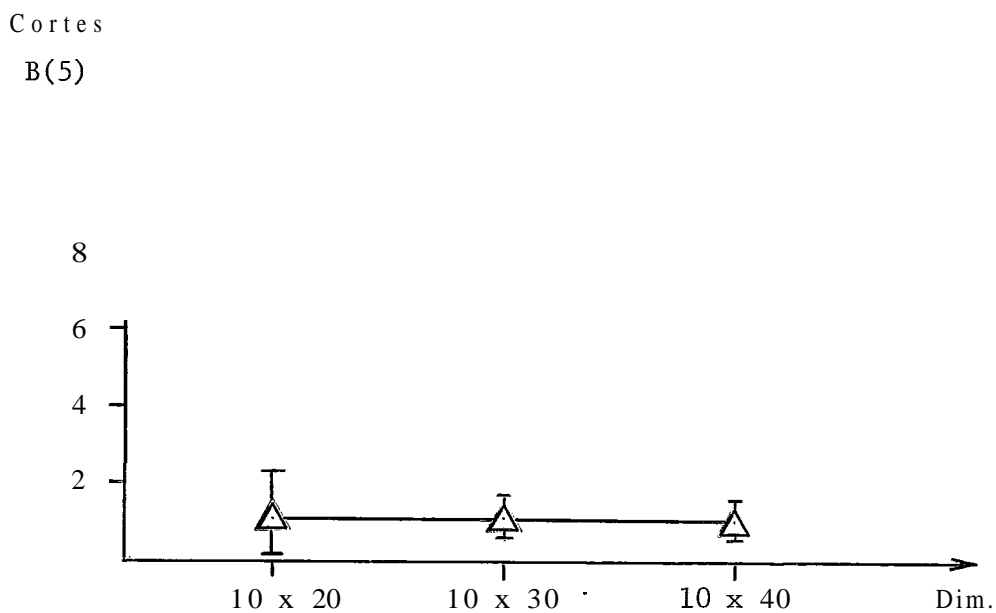


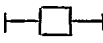
FIG. 11

Cortes
Gomory

15

10

5


$$\bar{X} \pm t_{n-1}^{1-\alpha/2} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}$$

10 x 20

10 x 30

10 x 40

Dim.

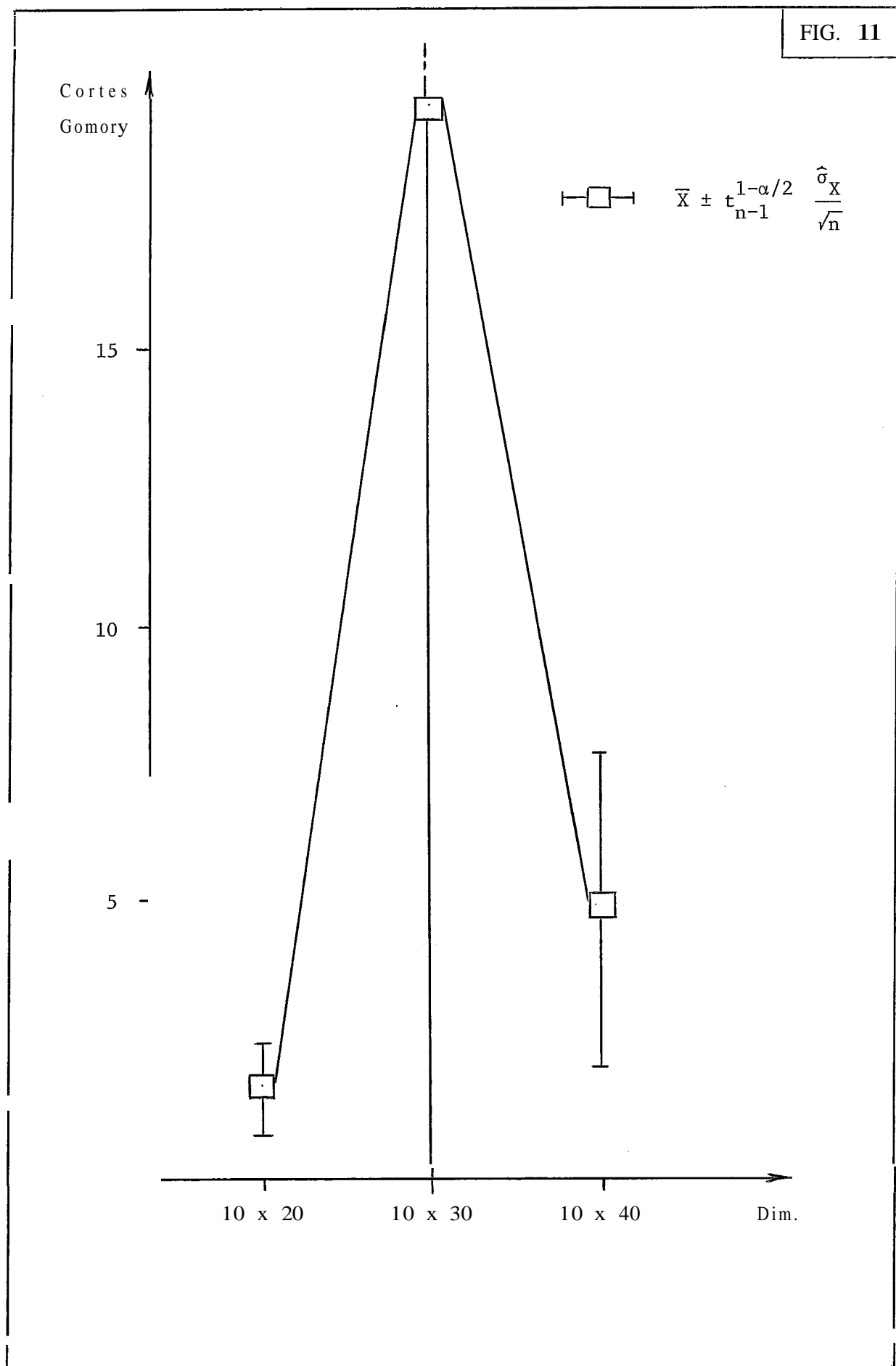


FIG. 12

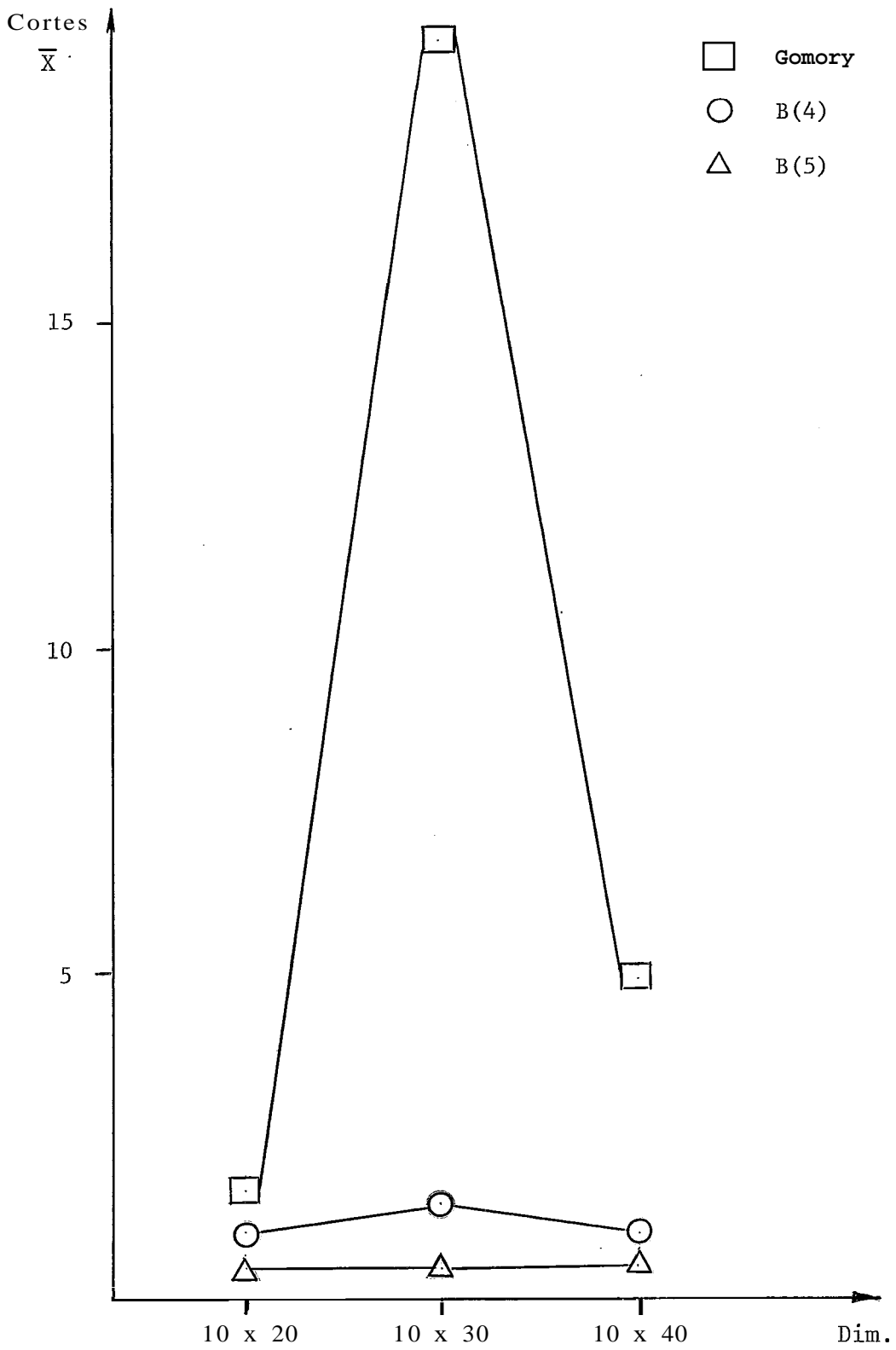


FIG. 13

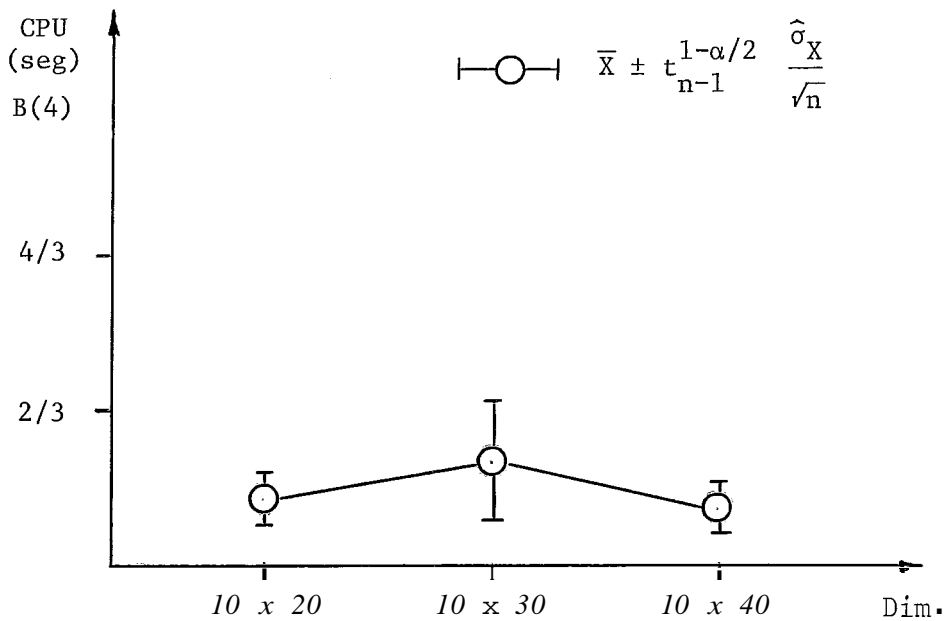


FIG. 14

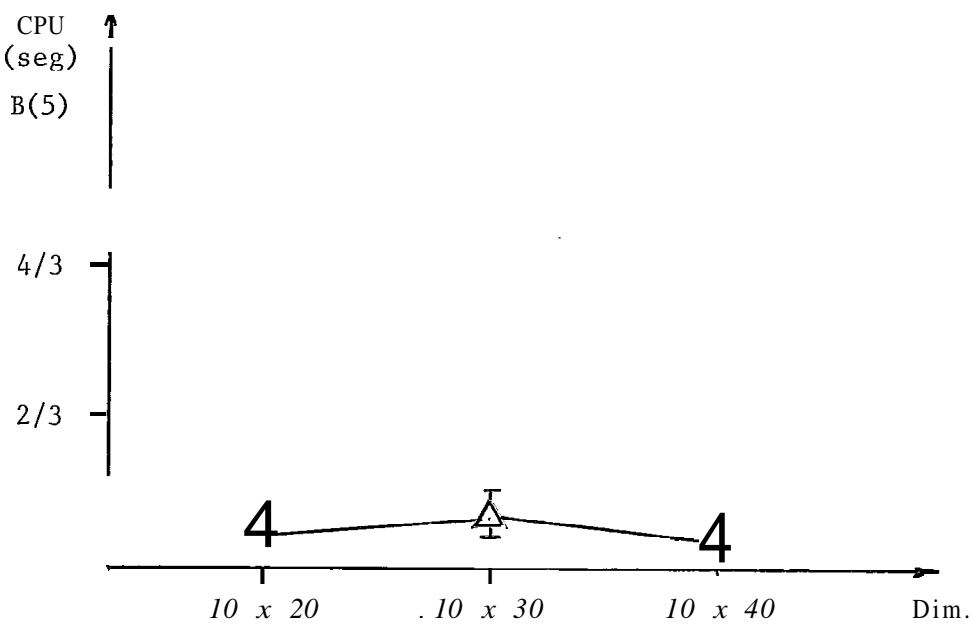


FIG. 15

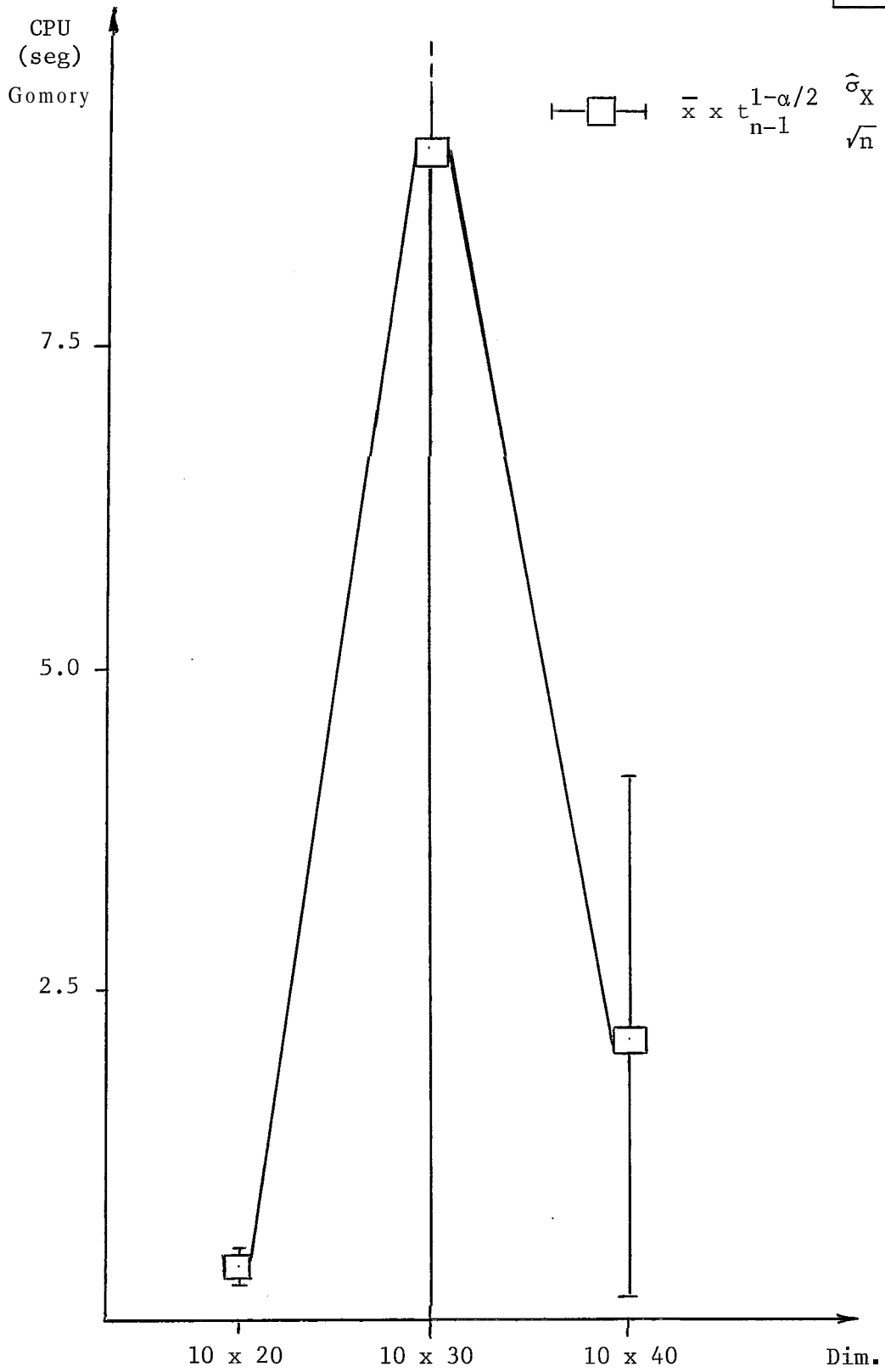


FIG. 16

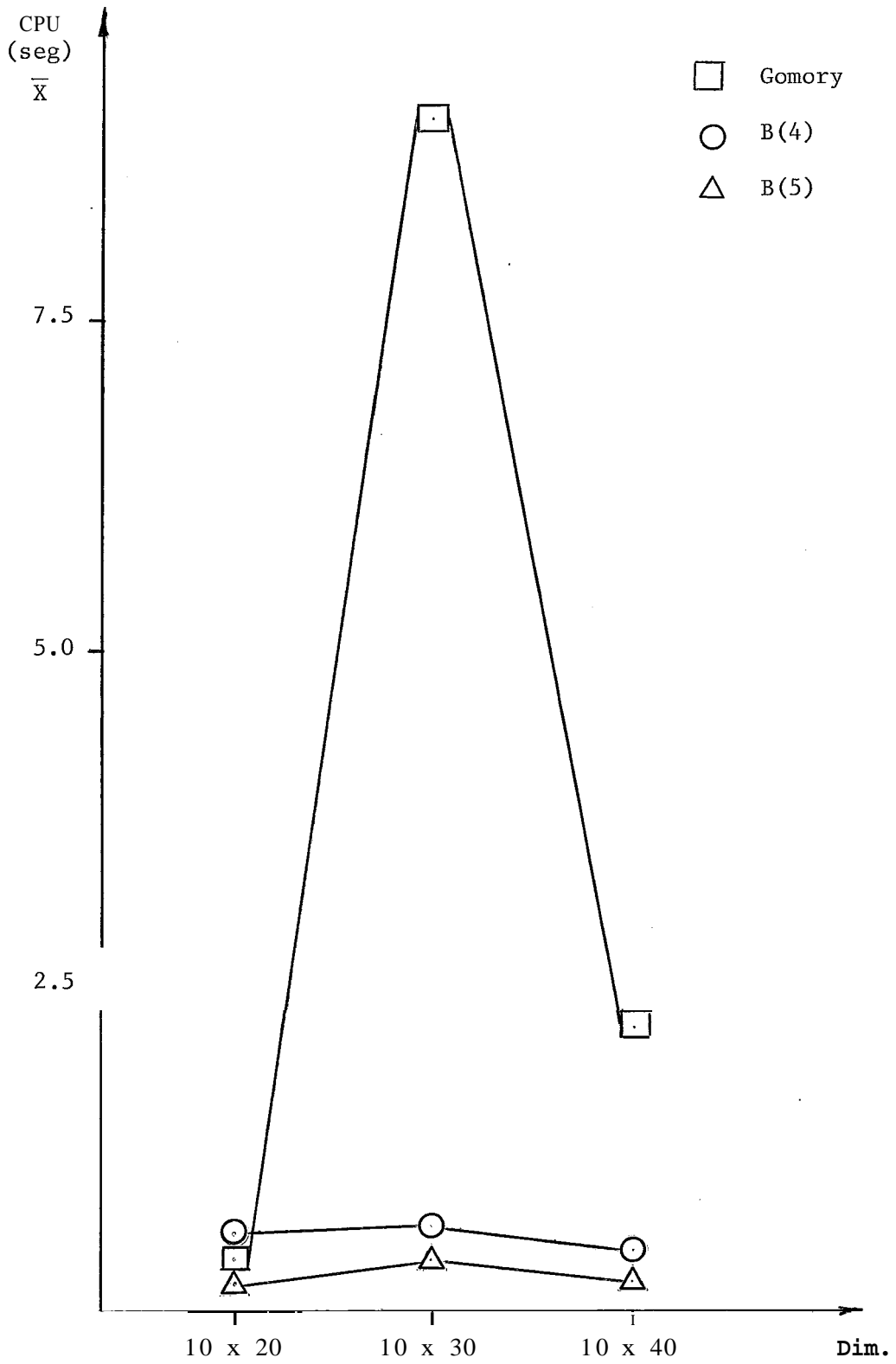


FIG. 17

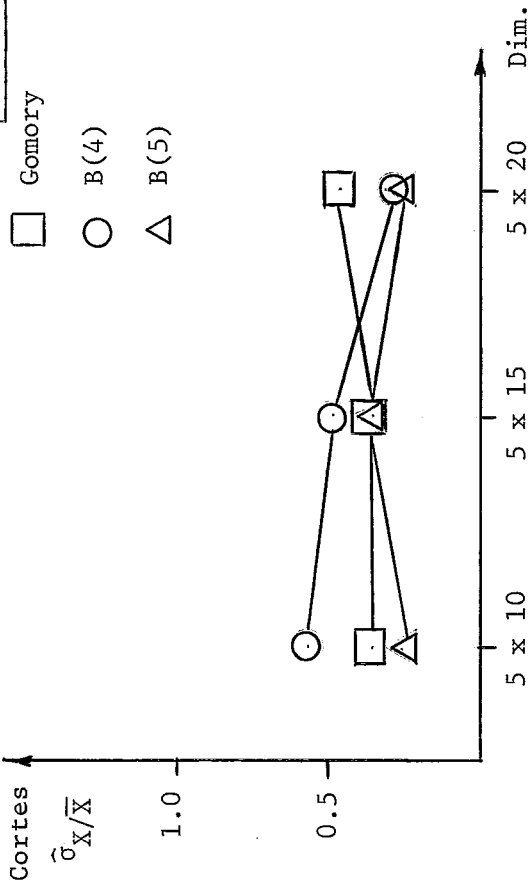


FIG. 18

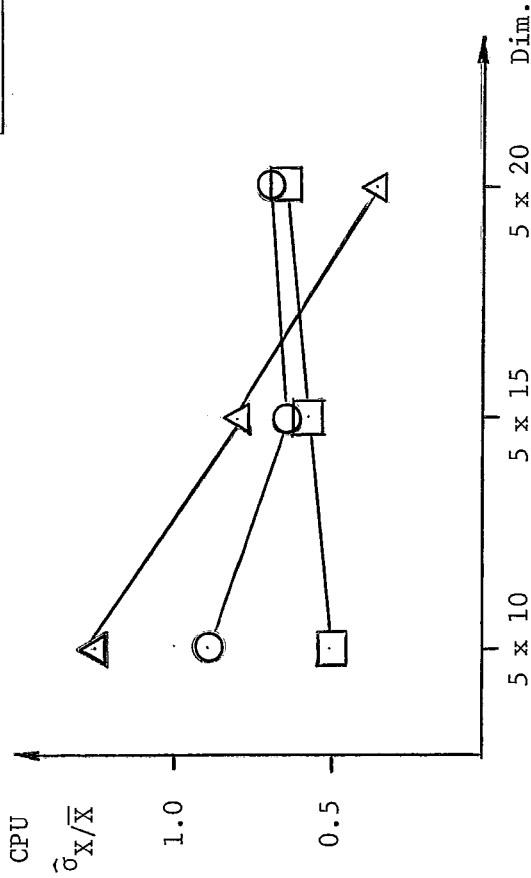


FIG. 19

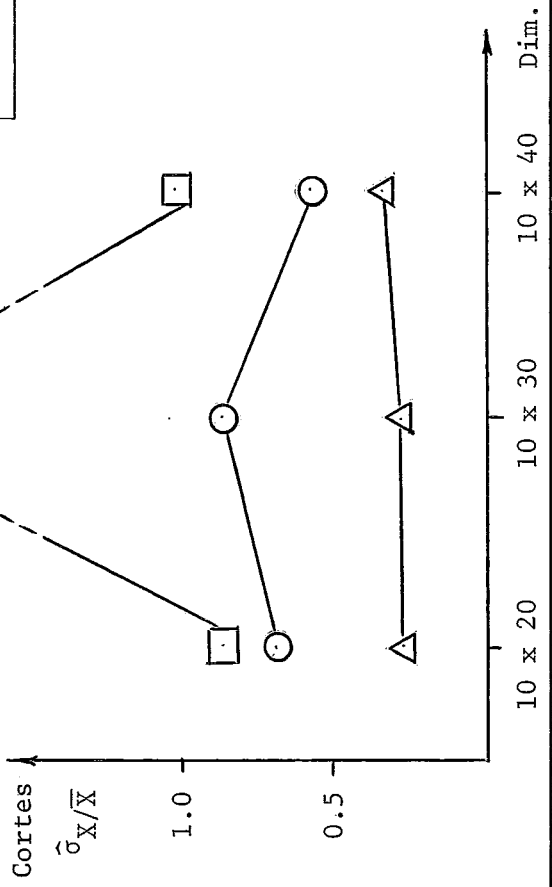


FIG. 20

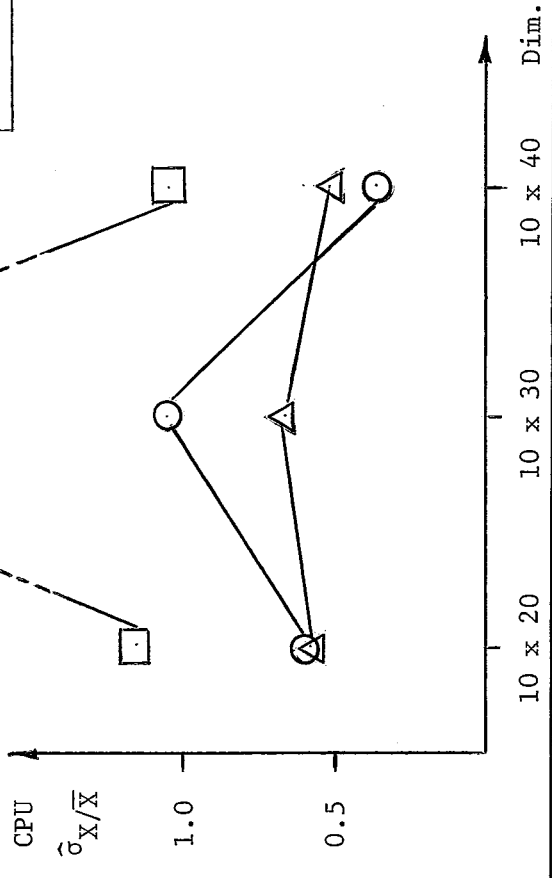


FIG. 22

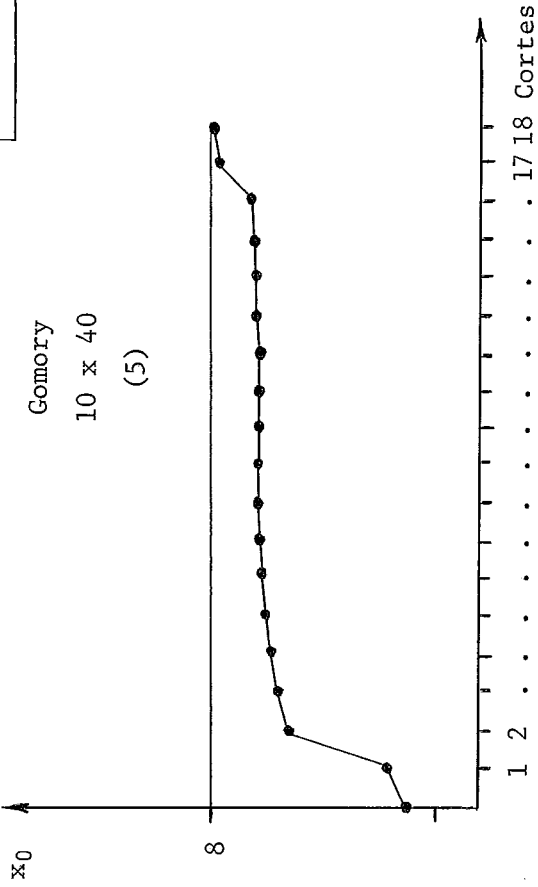


FIG. 24

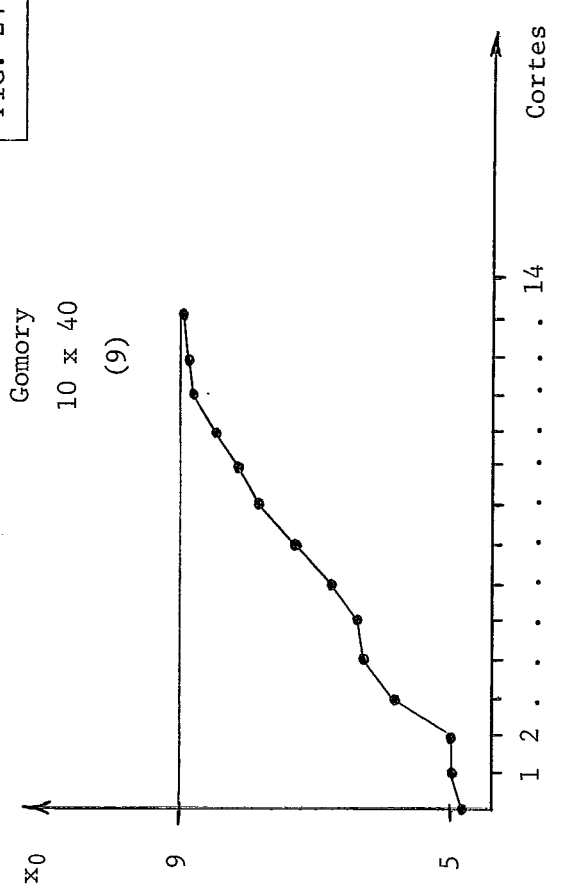


FIG. 21

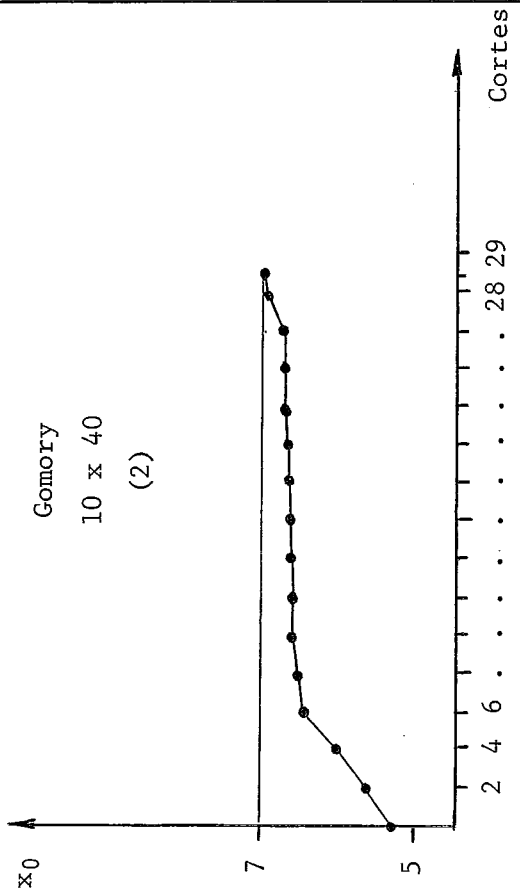


FIG. 23

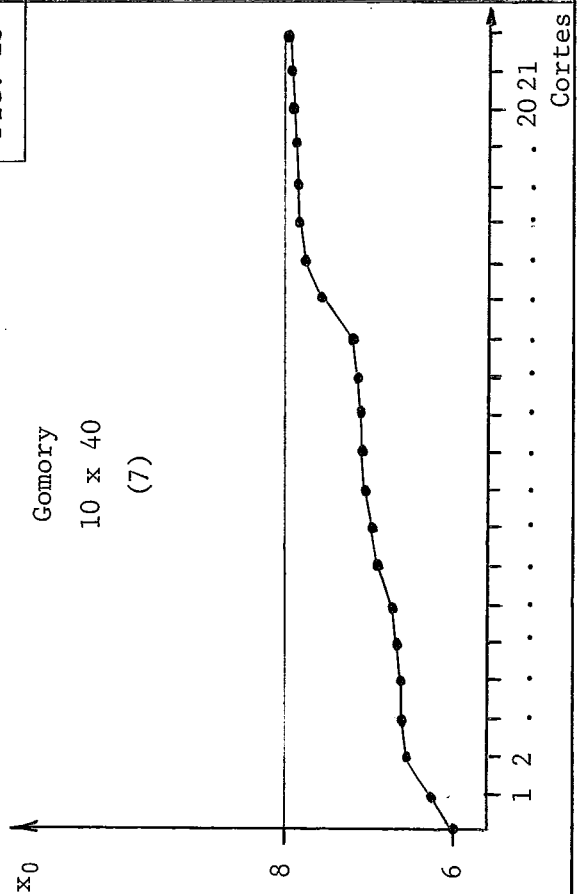


FIG. 25

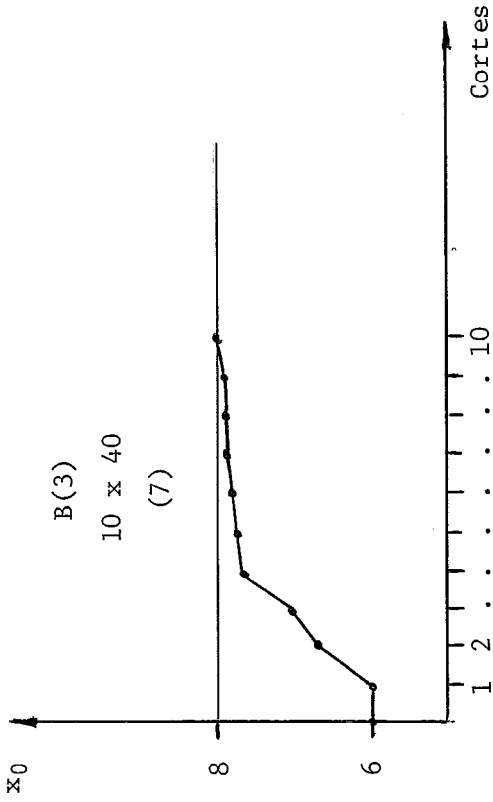


FIG. 26

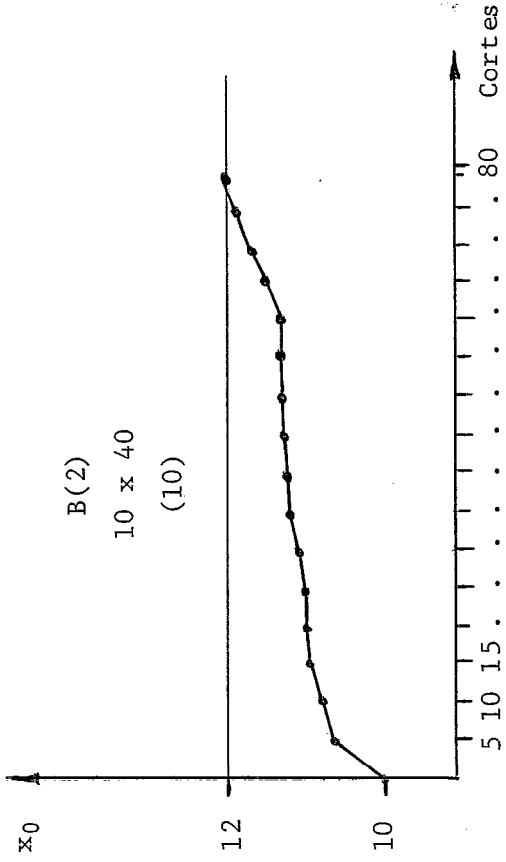


FIG. 27

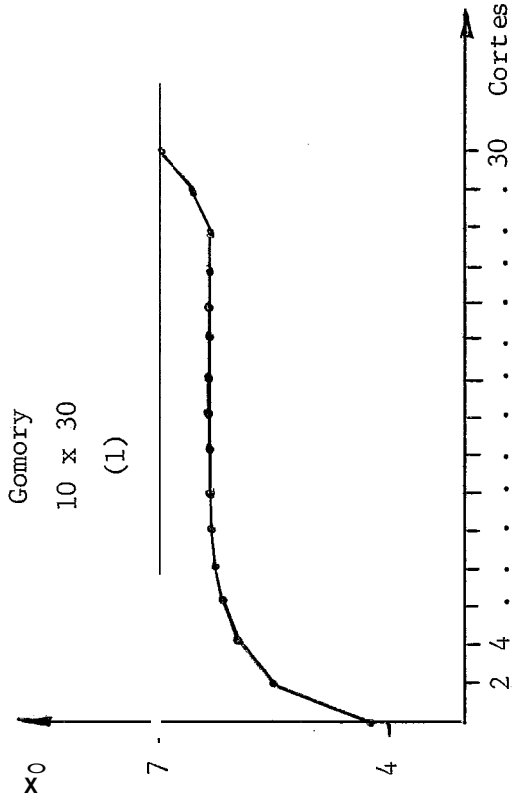


FIG. 28

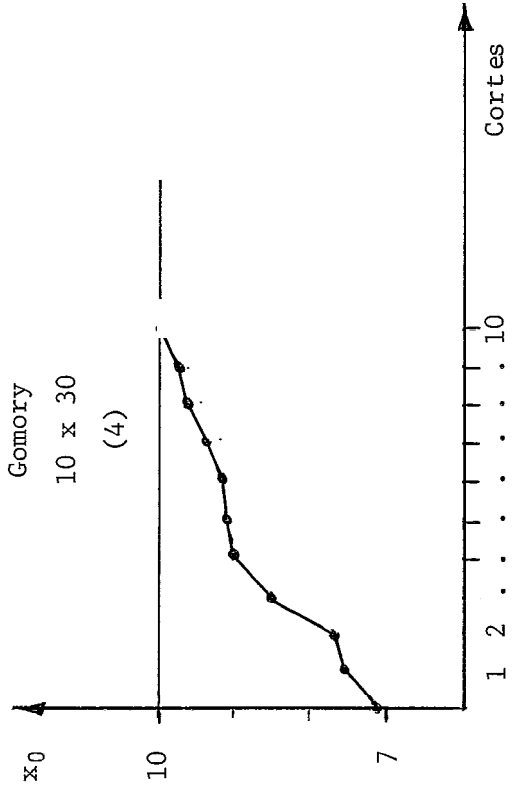


FIG. 29

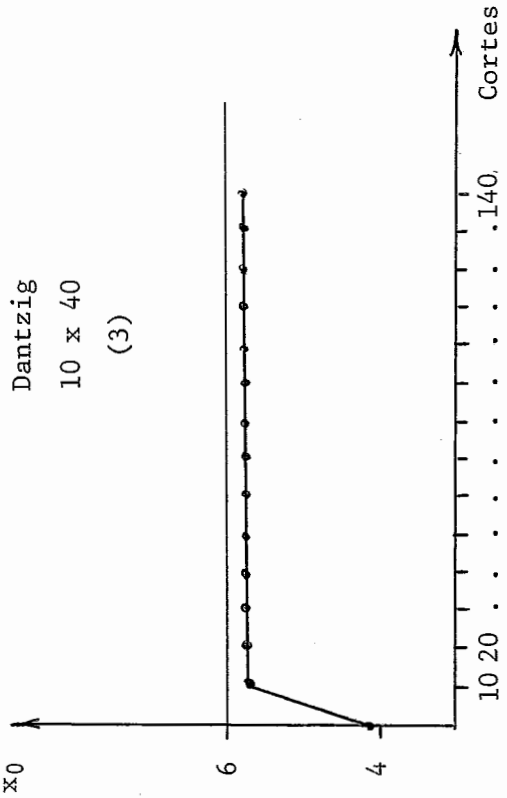


FIG. 30

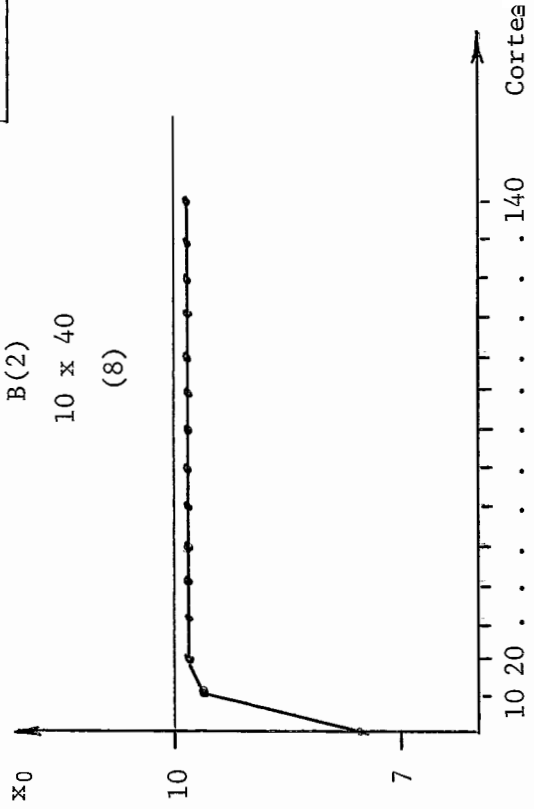


FIG. 31

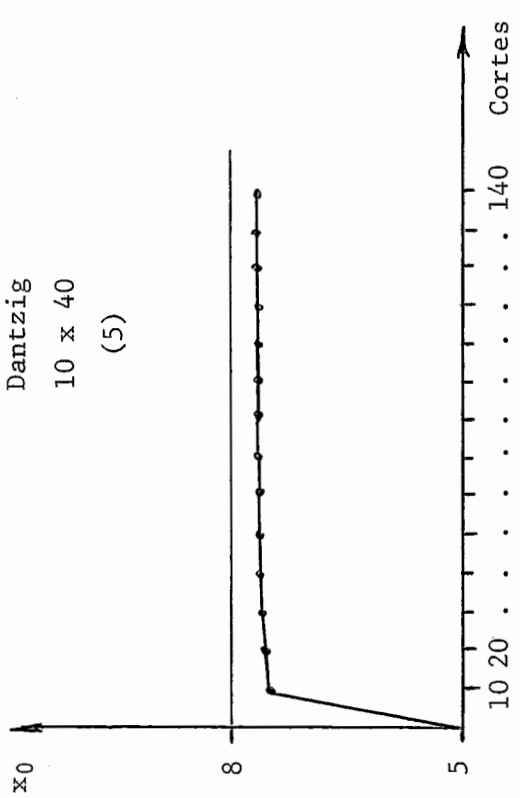
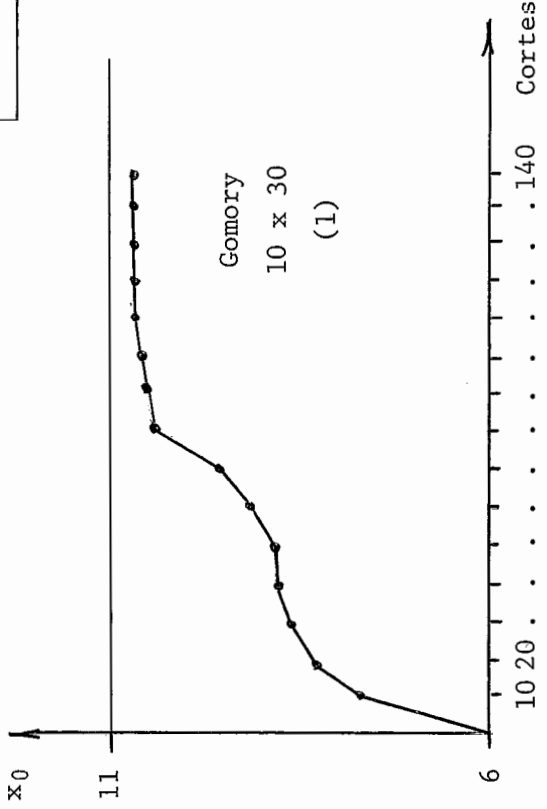


FIG. 32



INTERVALOS DE VARIAÇÃO	ITERAÇÕES NA FASE PRIMAL		TEMPO DE CPU NA FASE PRIMAL		DEGENERESCÊNCIA PRIMAL		DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA		DISTÂNCIA DO ÓTIMO CONTÍNUO	
	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.
5 x 10	7	10	00.07	00.12	00.00	20.00	2	5	0.00	7.20
5 x 15	10	17	00.07	00.12	00.00	20.00	2	4	0.67	7.00
5 x 20	7	15	00.10	00.17	00.00	40.00	2	4	0.25	3.67
10 x 20	15	32	00.25	00.83	00.00	60.00	3	16	3.17	11.50
10 x 30	34	52	00.32	00.70	00.00	60.00	4	24	0.17	4.75
10 x 40	30	58	00.40	00.79	00.00	40.00	4	31	1.00	5.03

μ (%)	20 a 40	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	5 x 10	(I)	(T)					
PROBLEMA Nº								
1		8	00.08	5	0.00	10.80	18	7.20
2		7	00.07	2	0.00	11.00	11	0.00
3		10	00.09	3	0.00	7.67	11	3.33
4		8	00.09	2	0.00	10.50	17	6.50
5		9	00.07	2	20.00	6.00	11	5.00
6		10	00.12	3	0.00	6.33	11	4.67
7		8	00.09	3	0.00	6.67	10	3.33
8		9	00.10	2	0.00	6.50	9	2.50
9		7	00.10	2	20.00	9.00	10	1.00
10		8	00.08	2	20.00	10.00	17	7.00
\bar{Y}		8.40	00.09	2.60	6.00	-	-	4.05
$\hat{\sigma}_Y$		1.07	00.02	0.97	9.66	-	-	2.45
$\hat{\sigma}_Y/\bar{Y}$		0.13	00.17	0.37	1.61	-	-	0.61

● (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40		DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
	d	5 x 10	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
PROBLEMA Nº			(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
1			145*	00.34	2	00.02	2	00.03	6	00.49	1	00.02	4	00.09	1	00.00
2			1	00.00	1	00.01	1	00.02	2	00.02	1	00.00	1	00.01	1	00.00
3			2	00.06	2	00.02	1	00.12	2	00.04	1	00.00	1	00.01	1	00.00
4			3	00.06	2	00.03	1	00.20	3	00.11	2	00.06	2	00.04	2	00.06
5			2	00.02	1	00.01	1	00.09	1	00.08	1	00.01	1	00.01	1	00.00
6			4	00.25	2	00.04	2	00.17	5	00.07	2	00.04	2	00.02	1	00.00
7			1	00.01	2	00.02	1	00.07	3	00.05	1	00.02	2	00.03	1	00.06
8			2	01.94	1	00.01	2	00.79	4	00.15	3	00.06	2	00.03	1	00.00
9			1	00.01	1	00.01	1	00.17	1	00.08	1	00.01	1	00.02	1	00.06
10			1	00.06	1	00.02	4	00.12	1	00.38	1	00.02	1	00.01	1	00.06
\bar{x}			16.20	00.28	01.50	00.02	01.60	00.18	02.80	00.15	01.40	00.02	01.70	00.02	01.10	00.02
$\hat{\sigma}_x$			45.27	00.60	00.53	00.01	00.97	00.22	01.75	00.16	00.70	00.02	00.95	00.02	00.31	00.03
$\hat{\sigma}_x/\bar{x}$			2.79	02.13	00.35	00.50	00.60	01.24	00.62	01.05	00.50	01.00	00.56	00.90	00.28	01.29

• n* - após n cortes a solução ótima não foi atingida.

• (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	5 x 15	(I)	(T)					
PROBLEMA Nº		(I)	(T)					
	1	11	00.07	3	0.00	6.00	13.00	7.00
	2	13	00.10	3	0.00	5.33	6.00	0.67
	3	17	00.12	3	0.00	11.33	13.00	2.67
	4	13	00.10	4	20.00	9.50	11.00	1.50
	5	12	00.08	2	20.00	6.50	9.00	2.50
	6	12	00.07	3	0.00	2.33	3.00	0.67
	7	14	00.10	2	20.00	4.00	5.00	1.00
	8	10	00.07	2	20.00	4.50	6.00	1.50
	9	16	00.10	2	20.00	5.50	8.00	2.50
	10	12	00.09	3	0.00	6.33	9.00	2.67
	\bar{Y}	13.00	00.09	2.70	10.00	-	-	2.27
	$\hat{\sigma}_Y$	02.16	00.02	0.67	10.54	-	-	1.85
	$\hat{\sigma}_Y/\bar{Y}$	00.17	00.19	0.25	1.05	-	-	0.81

e (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
		(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
d	5 x 15														
PROBLEMA Nº		(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
1	145*	2	00.26	2	00.04	2	00.37	6	00.07	2	00.07	3	00.08	1	00.05
2	2	2	00.03	1	00.02	1	00.01	2	00.04	1	00.01	1	00.02	1	00.03
3	2	2	00.04	1	00.02	2	00.05	5	00.76	2	00.06	1	00.02	1	00.03
4	2	2	00.05	2	00.04	2	00.03	2	00.06	2	00.07	2	00.07	2	00.10
5	2	2	00.01	2	00.02	2	00.04	7	00.46	2	00.04	2	00.04	2	00.03
6	1	1	00.01	1	00.01	1	00.01	1	00.03	1	00.01	2	00.03	1	00.01
7	1	1	00.02	1	00.02	1	00.02	2	00.02	1	00.01	1	00.01	1	00.03
8	1	1	00.05	1	00.02	1	00.01	1	00.01	1	00.03	1	00.03	1	00.01
9	2	2	00.05	1	00.00	1	00.01	3	00.05	1	00.02	1	00.03	1	00.01
10	3	3	00.05	2	00.02	3	00.06	6	00.16	4	00.12	3	00.07	1	00.03
\bar{X}	16.30	00.06	01.50	00.02	01.60	00.03	03.50	00.20	00.20	01.70	00.04	01.70	00.04	01.20	00.03
$\hat{\sigma}_X$	45.23	00.07	00.53	00.01	00.70	00.02	02.27	00.25	00.25	00.95	00.03	00.83	00.02	00.42	00.02
$\hat{\sigma}_{\bar{X}}$	02.77	01.28	00.35	00.57	00.44	00.62	00.65	01.27	00.90	00.56	00.90	00.48	00.61	00.35	00.80

• n* - após n cortes a solução ótima não foi atingida.

• (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	5 x 20	(I)	(T)					
PROBLEMA Nº		(I)	(T)					
1		10	00.12	3	0.00	1.67	2	0.33
2		9	00.12	2	40.00	1.50	2	0.50
3		12	00.16	3	20.00	6.33	10	3.67
4		9	00.14	2	20.00	6.00	9	3.00
5		15	00.17	2	40.00	1.50	2	0.50
6		11	00.13	3	0.00	5.33	6	0.67
7		10	00.17	2	40.00	1.50	2	0.50
8		11	00.15	4	0.00	1.75	2	0.25
9		13	00.13	2	40.00	2.50	4	1.50
10		7	00.10	3	20.00	1.67	2	0.33
\bar{X}		10.70	00.13	2.60	22.00	-	-	1.12
$\hat{\sigma}_X$		02.26	00.02	0.69	17.51	-	-	1.22
$\hat{\sigma}_X/\bar{X}$		00.21	00.16	0.26	00.79	-	-	1.09

μ (%)	20 a 40		DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
	d	5 x 20	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
			PROBLEMA Nº													
	1		1	00.04	2	00.06	1	00.02	2	00.03	1	00.02	1	00.02	1	00.02
	2		145*	37.66	2	00.07	2	00.09	7	00.33	3	00.12	2	00.09	2	00.06
	3		3	00.24	2	00.06	1	00.10	3	00.12	1	00.06	2	00.16	1	00.07
	4		145*	42.25	4	00.06	145*	31.06	145*	28.90	35.42	2	00.03	2	00.06	
	5		4	00.12	2	00.09	4	00.25	5	00.07	7	00.37	2	00.06	2	00.08
	6		1	00.03	1	00.01	1	00.01	2	00.01	1	00.06	1	00.03	1	00.06
	7		145*	30.03	2	00.20	145*	28.42	3	00.08	145*	62.30	2	00.04	2	00.06
	8		1	00.17	2	00.13	1	00.01	7	00.12	2	00.18	1	00.06	1	00.06
	9		145*	46.30	1	00.08	2	00.04	2	00.06	2	00.04	1	00.02	1	00.02
	10		1	00.04	1	00.06	1	00.01	3	00.18	1	00.01	2	00.05	2	00.07
	\bar{X}		59.10	15.68	01.90	00.08	30.30	06.00	17.90	02.99	30.80	09.85	01.60	00.06	01.50	00.06
	$\hat{\sigma}_X$		73.93	20.51	00.87	00.05	60.45	12.52	44.70	09.10	60.21	21.51	00.51	00.04	00.53	00.02
	$\hat{\sigma}_X/\bar{X}$		01.25	01.30	00.46	00.62	01.99	02.08	02.49	03.04	01.95	02.18	00.32	00.67	00.35	00.33

• n* - após n cortes a solução ótima não foi atingida.

• (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40		FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
	d	10 x 20	(I)	(T)					
	PROBLEMA Nº								
	1		21	00.45	12	40.00	8.75	12	3.25
	2		15	00.25	12	0.00	10.83	14	3.17
	3		24	00.44	4	10.00	9.25	15	5.75
	4		28	00.39	9	40.00	10.67	12	1.33
	5		32	00.57	6	60.00	11.50	13	1.50
	6		18	00.33	8	40.00	10.00	15	5.00
	7		28	00.83	16	40.00	11.50	16	4.50
	8		17	00.26	4	40.00	8.50	20	11.50
	9		24	00.51	3	20.00	13.33	18	4.67
	10		29	00.67	6	0.00	13.83	21	7.17
	\bar{Y}		23.60	00.47	8.00	29.00	-	-	4.78
	$\hat{\sigma}_Y$		5.72	00.18	4.24	20.25	-	-	2.97
	$\hat{\sigma}_Y/\bar{Y}$		0.24	00.39	0.53	0.70	-	-	0.62

• (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
d	10 x 20														
PROBLEMA Nº	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	
1	4	01.05	5	00.57	1	00.24	5	00.42	2	00.19	2	00.10	1	00.06	
2	3	00.66	9	00.61	2	00.51	4	00.31	5	00.45	1	00.21	1	00.32	
3	2	00.13	2	00.12	1	00.57	4	00.44	2	00.16	4	00.69	1	00.17	
4	2	00.25	1	00.03	4	00.91	8	00.51	5	00.73	2	00.48	2	00.33	
5	1	00.01	1	00.06	1	00.07	1	00.07	1	00.14	1	00.46	1	00.27	
6	1	00.01	1	00.08	1	00.85	4	00.30	1	00.12	2	00.63	1	00.33	
7	2	00.20	5	00.06	2	00.48	4	00.42	3	00.23	3	00.48	1	00.23	
8	1	00.07	1	00.10	1	00.16	1	00.21	1	00.12	1	00.16	1	00.11	
9	4	00.43	2	00.09	11	02.20	118	100.71	14	03.55	6	00.60	1	00.08	
10	2	00.13	6	00.77	1	00.07	3	00.12	1	00.07	1	00.12	1	00.08	
\bar{x}	02.20	00.29	03.30	00.25	02.50	00.60	15.20	10.35	03.50	00.58	02.30	00.39	01.10	00.20	
$\hat{\sigma}_x$	01.13	00.33	02.79	00.28	03.14	00.63	36.17	31.74	04.01	01.06	01.63	00.22	00.31	00.11	
$\hat{\sigma}_x/\bar{x}$	00.51	01.13	00.85	01.13	01.25	01.04	02.38	03.06	01.14	01.83	00.71	00.57	00.28	00.56	

o (T) - tempo de CPU em segundos .

μ (%)	20 a 40	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	10 x 30	(I)	(T)					
PROBLEMA Nº		(I)	(T)					
1		34	00,62	19	0.00	4.21	7	3.79
2		35	00.37	6	50.00	6.50	10	3.50
3		37	00.70	8	30.00	6.25	11	4.75
4		39	00.43	16	10.00	7.12	10	2.88
5		25	00.39	24	10.00	10.67	14	3.33
6		38	00.32	24	10.00	11.25	12	0.85
7		39	00.41	12	60.00	6.50	8	1.50
8		43	00.53	4	50.00	9.50	11	1.50
9		42	00.57	6	0.00	2.83	3	0.17
10		52	00.41	6	50.00	11.50	13	1.50
\bar{Y}		38.40	00.48	12.50	27.00	-	-	2.38
$\hat{\sigma}_Y$		06.93	00.12	07.74	23.59	-	-	1.47
$\hat{\sigma}_Y/\bar{Y}$		00.18	00.26	00.62	00.87	-	-	0.62

μ (%)	20 a 40		DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
	d	10 x 30	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
PROBLEMA Nº			(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
1			5	00.43	30	06.00	5	01.00	140*	36.00	140*	25.40	3	00.66	1	00.69
2			3	00.46	1	00.08	4	01.09	26	02.13	7	07.07	2	00.30	1	00.53
3			140*	56.35	140*	84.06	140*	45.21	62	08.68	140*	85.41	3	00.69	1	00.23
4			140*	43.83	10	00.73	140*	38.66	140*	50.78	140*	38.27	9	01.79	2	00.41
5			4	00.20	3	00.17	2	00.75	7	00.55	2	00.37	1	00.10	1	00.10
6			1	00.01	3	00.14	1	00.78	8	00.56	2	00.22	3	00.39	1	00.60
7			1	00.09	1	00.12	2	00.93	11	00.93	3	00.77	1	00.18	1	00.64
8			1	00.06	1	00.06	1	00.68	2	00.21	1	00.10	1	00.10	1	00.25
9			1	00.02	1	00.01	1	00.43	1	00.20	1	00.10	1	00.12	1	00.11
10			3	00.17	5	00.18	13	04.21	3	00.12	28	13.64	6	01.51	1	00.12
\bar{X}			29.90	10.16	19.50	09.16	30.90	09.37	40.00	10.02	46.40	17.13	03.00	00.58	01.10	00.37
$\hat{\sigma}_X$			58.04	21.25	43.26	26.38	57.61	17.26	55.75	18.11	65.08	27.29	02.62	00.61	00.32	00.23
$\hat{\sigma}_{\bar{X}}$			01.94	02.09	02.22	02.88	01.86	01.84	01.39	01.81	01.40	01.59	00.87	01.04	00.29	00.63

• n* - após n cortes a solução ótima não foi atingida.

• (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	20 a 40	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
	d 10 x 40	(I)	(T)					
	PROBLEMA Nº							
	1	41	0.75	4	40.00	4.00	6	2.00
	2	46	0.79	8	30.00	5.25	7	1.75
	3	30	0.45	10	0.00	4.10	6	1.90
	4	42	0.75	10	30.00	8.00	10	2.00
	5	41	0.51	5	10.00	5.40	9	3.60
	6	58	0.50	4	40.00	3.00	4	1.00
	7	44	0.40	4	30.00	6.00	8	2.00
	8	51	0.58	4	50.00	7.50	10	2.50
	9	33	0.62	31	0.00	4.97	9	5.03
	10	46	0.68	6	10.00	10.00	12	2.00
	\bar{X}	43.20	00.60	08.60	24.00	-	-	02.38
	$\hat{\sigma}_X$	08.07	00.14	08.24	17.76	-	-	01.14
	$\hat{\sigma}_{\sqrt{X}}$	00.19	00.23	00.96	00.74	-	-	00.48

μ (%)	20 a 40		DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)		
	d	10 x 40	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	
PROBLEMA Nº		(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
1		5	0.75	6	0.70	3	0.47	140*	107.71	3	0.31	2	0.19	1	0.23		
2		5	0.78	29	5.73	140*	85.35	140*	112.86	140*	43.12	2	0.20	1	0.22		
3		140*	115.10	2	0.51	1	0.31	18	1.78	6	0.83	2	0.32	2	0.42		
4		2	0.53	2	0.45	2	0.22	2	0.12	2	0.15	1	0.21	1	0.34		
5		140*	57.60	18	2.78	(-)	(-)	140*	110.99	7	0.90	1	0.29	1	0.13		
6		1	0.26	1	0.18	1	0.12	1	0.14	1	0.06	1	0.06	1	0.08		
7		4	1.33	21	5.37	(-)	(-)	140*	128.57	10	1.80	2	0.23	1	0.11		
8		3	0.85	3	0.80	2	0.29	140*	171.13	2	0.19	2	0.31	1	0.25		
9		140*	48.09	14	4.08	(-)	(-)	140*	116.98	140*	51.03	3	0.50	2	0.37		
10		5	0.68	3	0.59	4	0.45	79	25.77	140*	69.31	5	0.71	1	0.14		
\bar{x}		44.50	22.60	09.90	02.12	-	-	94.00	77.61	45.10	16.77	02.10	00.30	01.20	00.23		
σ_x		65.91	39.12	09.91	02.18	-	-	63.08	63.77	65.54	26.79	01.19	00.18	00.42	00.12		
$\hat{\sigma}_x/\bar{x}$		01.48	01.73	01.00	01.03	-	-	00.67	00.82	01.45	01.59	00.57	00.60	00.35	00.51		

• (T) - tempo de CPU em segundos.

• (-) - fase dual não concluída.

INTERVALOS DE VARIAÇÃO	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)		
	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.	
3 x 10	[I]	1	145	1	2	1	4	1	6	1	3	HN	4	1	2
	[T]	00.00	01.94	00.01	00.04	00.02	00.79	00.02	00.49	00.00	00.06	00.04	00.09	00.00	00.06
3 x 15	(I)	1	145	1	2	1	3	1	6	1	4	1	3	1	2
	(T)	00.01	00.26	00.00	00.04	00.01	00.37	00.01	00.76	00.01	00.12	00.01	00.08	00.01	00.10
5 x 20	(I)	1	105	1	4	1	145	2	105	1	105	1	2	1	2
	(T)	00.03	06.30	00.04	00.20	00.01	34.06	00.01	28.90	00.01	62.30	00.02	00.16	00.02	00.08
10 x 20	(I)	4	0	4	9	4	14	1	118	1	40	1	6	1	2
	(T)	00.001	01.05	00.03	00.77	00.07	02.20	00.07	100.71	00.07	03.55	00.40	00.69	00.06	00.33
10 x 30	(I)	4	100	1	140	1	* 00	1	100	1	100	1	9	4	2
	(T)	00.004	56.35	00.01	84.06	01.00	05.21	00.12	50.78	00.10	85.04	00.10	01.79	00.40	00.69
10 x 40	(I)	1	140	1	29	1	140	1	140	1	140	1	5	1	2
	(T)	00.26	115.10	00.51	05.37	0.12	85.35	00.14	171.13	00.06	69.31	00.06	00.71	00.11	00.37

μ (%)	20 a 40	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)
d	10 x 20	(I)	(T)		
PROBLEMA Nº		(I)	(T)		
1		22	00.30	12	10.00
2		19	00.28	6	20.00
3		40	00.41	12	20.00
4		33	00.36	12	0.00
5		32	00.44	22	15.00
6		26	00.37	19	0.00
7		21	00.27	12	0.00
8		22	00.27	24	5.00
9		28	00.35	4	15.00
10		26	00.40	3	15.00
\bar{Y}		26.90	00.35	12.60	10.00
$\hat{\sigma}_Y$		06.52	00.06	07.23	08.16
$\hat{\sigma}_Y/\bar{Y}$		00.24	00.18	00.57	00.81

● (T) - tempo de CPU em segundos .

μ (%)	20 a 40		DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)		
	d	10 x 20	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	
			PROBLEMA Nº	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
			1	(**)	-	10	00.30	2	00.51	6	01.00	2	00.71	5	00.75	2	00.23
			2	8	00.62	26	02.05	5	00.91	60	25.31	3	00.80	8	01.27	3	00.20
			3	3	00.33	5	00.30	2	00.53	2	00.77	2	00.83	4	00.64	1	00.06
			4	140*	00.55	7	00.37	12	02.00	33	05.60	(**)	-	5	00.90	3	00.38
			5	2	00.07	6	00.36	1	00.35	140*	115.62	2	00.85	1	00.30	1	00.05
			6	2	00.07	7	00.66	2	00.55	6	01.14	4	00.97	1	00.44	1	00.03
			7	1	00.05	7	00.39	2	00.54	6	01.02	2	00.74	2	00.50	1	00.15
			8	62	25.29	(**)	-	6	00.98	55	13.30	(**)	-	3	00.73	1	00.60
			9	140*	83.15	24	03.03	8	01.46	106	76.18	60	48.12	4	00.72	2	00.65
			10	3	00.20	11	00.59	6	01.06	127	173.39	(**)	-	5	01.05	1	00.30

● n* - inviabilidade não provada após n iterações.

● (**) - inviabilidade não provada após 2 minutos de CPU na fase dual.

● (T) - tempo de CPU em segundos.

AMPLITUDE DOS INTERVALOS DE CONFIANÇA						
CORTE	GOMORY		B(4)		B(5)	
	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
5 x 10	00.6144	00.0116	01.1014	00.0232	00.3594	00.0348
5 x 15	00.6144	00.0116	00.9506	00.0232	00.4870	00.0232
5 x 20	01.0086	00.0580	00.5912	00.0464	00.6144	00.0232
10 x 20	03.2346	00.3246	01.8898	00.2550	00.3594	00.1276
10 x 30	50.1534	30.5836	03.0374	00.7072	00.3710	00.2666
10 x 40	11.4892	02.5274	01.3796	00.2086	00.4870	00.1392

SPECIFICAÇÕES:

Amplitude: $L = 2 t_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1} \hat{\sigma}_X / \sqrt{n}$

Nível de Significância: $\alpha = 0.10$

Tamanho da Amostra: $n = 10$

Parâmetro "t" de Student: $t_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1} = 1.8331$

μ (%)	21	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
	d	15 x 32	(I)					
PROBLEMA SALKIN		40	00.42	30	20.00	13.00	14.00	1.00

FASE DUAL	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
PROBLEMA SALKIN	3	01.09	23	05.34	2	00.19	135*	75.20	2	00.78	2	00.20	1	00.25
PIVOTEAMENTOS DUAIS	17		137		8		357		7		6		6	

● n* - após n cortes, a solução ótima não foi atingida.

● Problema exemplo extraído do artigo: "Set Covering by Single-Branch Enumeration with Linear-Programming Subproblems"-
C.E. Lemke, H.M. Salkin e K. Spielberg - publicado na ORSA, 19(4), julho-agosto de 1971, pp. 998-1022.

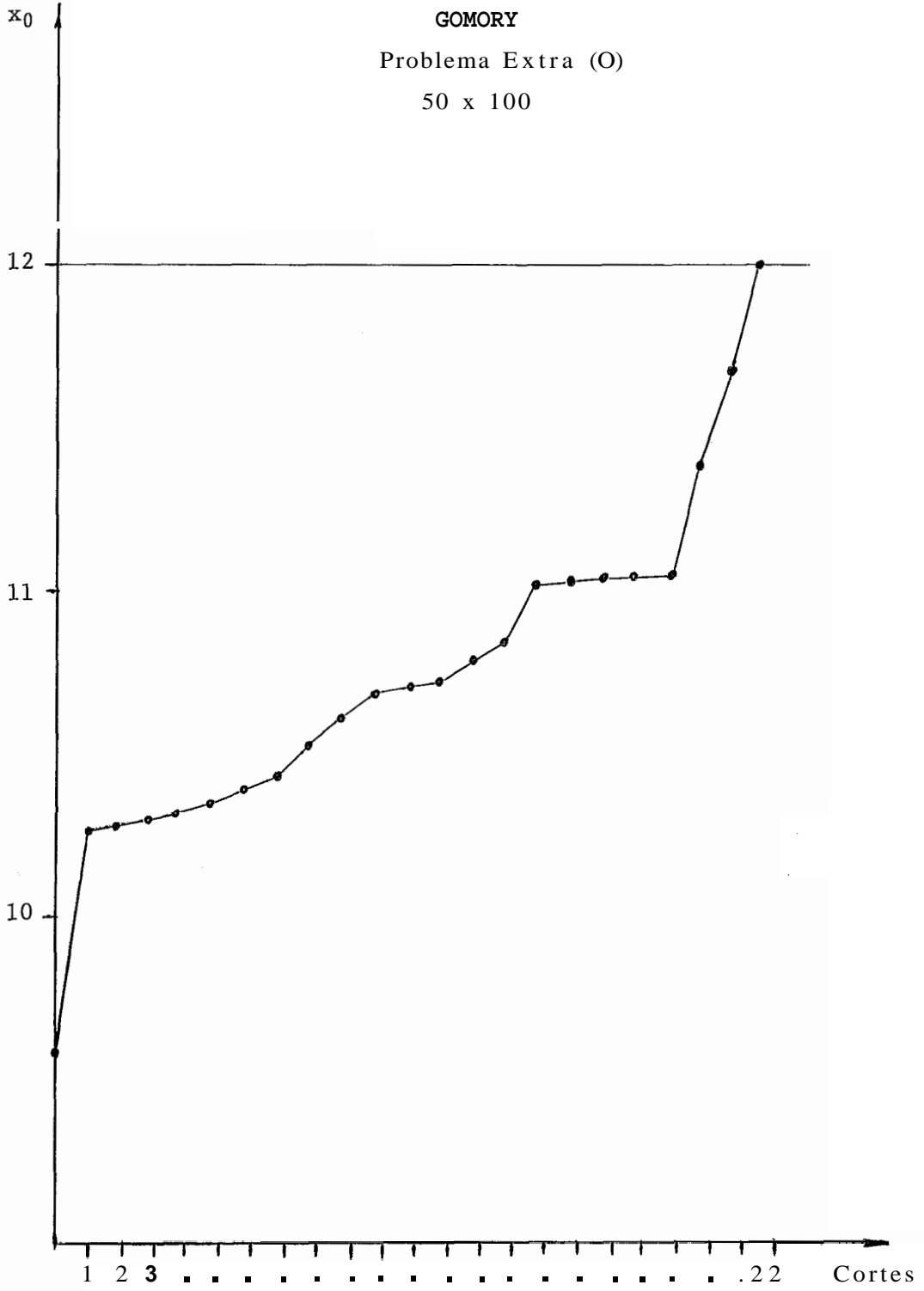
μ (%)	9	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	50 x 100	(I)	(T)					
PROBLEMA EXTRA (O)		367	48.60	40	52.00	9.60	12.00	2.40

FASE DUAL	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
PROBLEMA EXTRA (O)	100*	76.38	22	33.80	100*	95.35	100*	58.32	100*	78.52	4	11.31	3	10.28
PIVOTEAMENTOS DUAIS	154		121		184		134		164		46		35	

n^* - após n cortes, a solução ótima não foi atingida.

e (T) - tempo de CPU em segundos.

FIG. 35



μ (%)	47		FASE PRIMAL	MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
	d	20 x 40						
PROBLEMA EXTRA (1)	(I)	(T)						
	180	4.01		2187	0.00	7.41	15	7,59

FASE DUAL	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
PROBLEMA EXTRA (1)	2	1.75	130*	120.00	6	3.26	54.57	13	6.45	6	2.79	1	0.40	
PIVOTEAMENTOS DUAIS	49		712*		163		207*		195		94		11	

• n* - após n cortes, a solução ótima não foi atingida.

• (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	35	FASE PRIMAL		MODULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	20 x 40	(I)	(T)					
PROBLEMA EXTRA (2)		74	2.12	.1548	0.00	11,68	30	18.32

FASE DUAL	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
PROBLEMA EXTRA (2)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
	1	1.69	17	8.36	3	1.49	48	13.08	57	53.23	1	0.77	1	0.44
PIVOTEAMENTOS DUAIS	27		179		64		64		710		22		11	

● n* - após n cortes, a solução ótima não foi atingida.

e (T) - tempo de CPU em segundos.

μ (%)	31	FASE PRIMAL		MÓDULO DO DETERMINANTE DA BASE ÓTIMA	GRAU DE DEGENERESCÊNCIA PRIMAL (%)	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO CONTÍNUO	FUNÇÃO OBJETIVO NO ÓTIMO GLOBAL	DISTÂNCIA DO ÓTIMO
d	20 x 40	(I)	(T)					
PROBLEMA EXTRA (3)		103	01.37	1088	0.00	14.85	29	4.15

FASE DUAL	DANTZIG		GOMORY		B(1)		B(2)		B(3)		B(4)		B(5)	
PROBLEMA EXTRA (3)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)	(I)	(T)
	130*	93.50	40	20.45	2	1.80	11	4.42	40	25.59	1	3.32	1	3.54
PIVOTEAMENTOS DUAIS	915*		259		19		33		410		15		27	

* e n - após n cortes, a solução Ótima não foi atingida.

• (T) - tempo de CPU em segundos.

FIG. 36

