

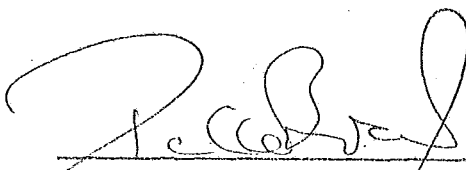
ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES À APLICAÇÃO  
DA TEORIA DOS HIPERGRAFOS

10

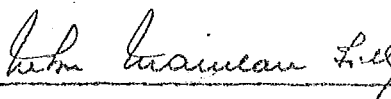
MARCIA AGUIAR RABUSKE

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.)

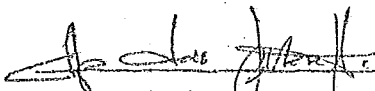
Aprovada por:



Paulo Oswaldo Boaventura Netto  
(Presidente)



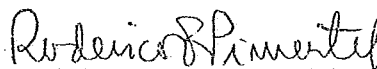
Nelson Maculan Filho



Jayme Luiz Szwarcfiter



Antonio Alberto Fernandes de Oliveira



Ruderico Ferraz Pimentel

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1981

RABUSKE, MARCIA AGUIAR

Algumas contribuições à aplicação da teoria dos hipergrafos (rio de Janeiro, 1981).

VII, 136 p 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas, 1981)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia

TEORIA DOS HIPERGRAFOS - I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Para Renato, Allan e Patrícia

Agradeço a todos vocês que de uma maneira ou outra contribuíram para que esse trabalho fosse levado a bom . termo.



R E S U M O

O presente trabalho tem como objetivo aprofundar alguns aspectos da teoria dos hipergrafos assim como apresentar novos aspectos desta teoria.

A pesquisa como um todo abrange os seguintes tópicos:

- Um método para distritamento otimamente equilibrado com um enfoque heurístico (desenvolvimento teórico e algoritmo).
- Representação de grafos planares por <sup>meio</sup> ~~em~~ de hipergrafos.
- Novas definições para hipergrafos orientados e generalização das existentes.
- Fluxos em hipergrafos com e sem orientação.

A B S T R A C T

The present work has the objective to deepen some aspects of the theory of hypergraphs as well as to present new aspects of this theory.

The research as a whole comprises the following topics:

- A method for optimally equilibrated districting with a heuristic approach (theoretical development and algorithm).
- Representation of planar graphs through hypergraphs.
- New definitions for oriented hypergraphs and generalization of the existing ones.
- Flows in hypergraphs with and without orientation.

ÍNDICE

RESUMO .....	iv
ABSTRACT .....	v
ÍNDICE .....	vi
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I: CONCEITOS E DEFINIÇÕES .....	3
1.1. Definições Formais de Hipergrafo .....	3
1.2. Conceitos Diversos .....	5
CAPÍTULO II: UM MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DO DISTRTAMENTO ÓTIMO - UM ENFOQUE HEURÍSTICO .....	13
2.1. Revisão Bibliográfica .....	14
2.2. Definição do Problema .....	15
2.3. Formalização do Modelo .....	16
2.3.1. Tentativa de Solução .....	18
2.3.2. Algoritmo .....	19
2.3.3. Teste de Algoritmo .....	23
2.4. Desempenho do Algoritmo .....	23
2.5. CONCLUSÃO .....	25
CAPÍTULO III: REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS PLANARES POR MEIO DE HIPERGRAFOS .....	27
3.1. Definição do Problema I .....	27
3.1.1. Tentativa de Solução .....	28
3.2. Definição do Problema II .....	30
3.2.1. Tentativa de Solução do Problema II .	30

CAPÍTULO IV: HIPERGRAFOS ORIENTADOS .....	32
4.1. Definições da Literatura .....	32
4.2. Novas Definições .....	<b>33</b>
CAPÍTULO V: FLUXO EM HIPERGRAFOS .....	37
5.1. Adaptação de Definições. Teoremas e Levas de Grafos para Hipergrafos .....	38
5.2. Fluxo máximo .....	41
5.2.1. Modelo de Lawler .....	42
5.2.2. Hipergrafo com Restrição de capacidade de comum .....	43
5.2.3. Associação de arestas de um Hipergrafo a Regiões de uma Rede .....	50
5.2.3.1. Exemplo Ilustrativo .....	53
5.2.4. Associação de grafos não orientados as arestas de Hipergrafos .....	61
APÊNDICES .....	64
1. Listagem da programação para Computador. ....	65
2. Promenorização de uma Iteração do Algoritmo de Distritamento .....	77
3. Resultados Experimentais .....	85
BIBLIOGRAFIAS .....	95
ANEXOS .....	101
1. Teoria dos Grafos .....	102
2. Tabelas das cliques dos grafos .....	<b>111</b>

## I N T R O D U Ç Ã O

Propomo-nos no presente trabalho aprofundar alguns pontos da teoria de hipergrafos assim como apresentar no vos aspectos desta teoria. Enfocamos em especial o problema do distritamento, orientação de hiperyrafos e fluxos em hipergrafos.

Apresentamos a seguir um resumo dos aspectos desenvolvidos nos diversos capítulos,

No capítulo I fazemos um apanhado das principais definições e conceitos necessários para um bom entendimento do trabalho. Não houve preocupação em provar as afirmações uma vez que as mesmas se encontram na bibliografia referenciada.

Apresentamos no capítulo II um novo método para de terminação do distritamento ótimo com um enfoque heurístico. O corpo do capítulo inclui uma revisão bibliografica sobre problemas relacionados a distritamento, sendo da abordagem do problema: a definição do problema, a formalização do modelo, uma tentativa de solução, um algoritmo e a análise de desempenho deste algoritmo.

No capítulo III enfocamos e damos solução a dois problemas: a determinação do número de cliques de um grafo planar de  $n$  vértices e a determinação de valores mínimos para  $n$  vértices e  $m$  linhas necessários para compor  $p$  cliques de tamanho 2,  $q$  de tamanho 3 e  $r$  de tamanho 4, sendo  $p, q, r$  inteiros não negativos.

No capítulo IV apresentamos novas definições de hipergrafos orientados e generalizamos definições existentes.

Na capítulo V apresentamos uma solução para o problema de fluxos de hipergrafos. Tratamos em especial de algoritmos para fluxos máximos com e sem orientação.

## C A P Í T U L O I

### CONCEITOS E DEFINIÇÕES

Um hipergrafo é uma estrutura combinatória com vértices e arestas, similar a um grafo comum, (cf anexo 1) exceto em que as arestas correspondem a subconjuntos arbitrários de vértices ao invés de pares de vértices. Um hipergrafo com  $n$  vértices pode ter até  $2^n - 1$  arestas distintas, sendo portanto uma generalização do grafo.

O principal propósito da teoria dos hipergrafos é generalizar resultados da teoria dos grafos, pois muitas das suas definições e conceitos se aplicam a hipergrafos sem qualquer dificuldade particular,

A seguir veremos algumas definições e conceitos que, de certa forma retratam os principais resultados nesta área de pesquisa.

Algumas vezes teremos que tratar de grafos e hipergrafos ao mesmo tempo e, para evitar confusão na nomenclatura, adotaremos os termos - vértices e arestas para hipergrafos e vértices e linhas para grafos.

#### 1.1 - Definições formais de hipergrafos

Define-se (BERGE<sup>2</sup>) um hipergrafo  $H = (V, E)$ , como sendo formado por um par de conjuntos finitos  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $E = \{E_1, E_2, \dots, E_m\}$  denominados respectivamente conjunto

de vértices e conjunto de arestas, e satisfazendo as seguintes condições:

$$i) \quad E = \{E_i \mid E_i \subset (\mathcal{P}(V) - \phi)\}, \text{ onde } \mathcal{P}(V) \text{ é o conjunto das partes de } V$$

$$II) \quad \bigcap_{i \in I} E_i = \phi$$

$$III) \quad \bigcup_{i \in I} E_i = V$$

Diz-se que  $|V| = n$  é a ordem do hipergrafo.

Um hipergrafo com  $n$  vértices deve **ter** no máximo  $2^n - 1$  arestas distintas.

A figura 1.1 mostra um hipergrafo possuindo três vértices e duas arestas.

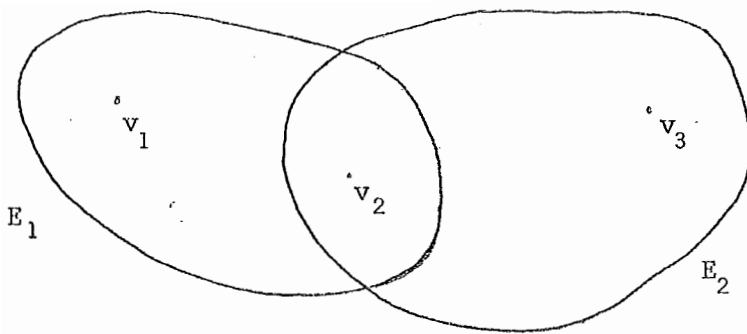


Fig. 1.1: Representação de um Hipergrafo

BERGE<sup>8</sup> define um hipergrafo de uma maneira mais ampla, que pode ser expresso como segue: "Um hipergrafo  $H$  é formado por um conjunto  $V$  de elementos indexados por um conjunto  $N$ :  $V = (v_j)_{j \in N}$  e de uma família de partes não vazias indexadas



por um conjunto  $M : E = (E_i)_{i \in M}$ , tal que  $\bigcup_{i \in M} E_i = V$ .

Assim um hipergrafo  $H$  pode ser simbolizado por  $H = ((v_j)_{j \in N}, (E_i)_{i \in M})$  ou  $H = (V, (E_i)_{i \in M})$  ou  $H = (V, E)$  ou mais simples ainda,  $H = (E_i | i \in M)$

Os elementos de  $V$  são chamados vértices de  $H$  e as partes  $(E_i)_{i \in M}$ , arestas de  $H$ .

Um hipergrafo  $H = ((v_j)_{j \in N}, (E_i)_{i \in M})$  é finito se  $N$  e  $M$  são finitos".

SEYMOUR<sup>48</sup>, define um hipergrafo  $H$  como sendo um conjunto finito  $A$  de conjuntos finitos não vazios, chamados arestas de  $H$ , e  $UH$  o conjunto de vértices de  $H$  definido por  $UH = \bigcup \{A \in H\}$ . Se  $Z \subseteq UH$ , definimos  $H|Z = \{A \cap Z : A \in H, A \cap Z \neq \emptyset\}$ . Se  $|H| = |UH|$  diz-se que  $H$  é quadrado.

Logo o hipergrafo de Seymour é o conjunto de arestas do hipergrafo de Berge, ou seja, a estrutura superposta ao conjunto de vértices; isso não acarreta maiores problemas de entendimento,

### 1.2 - Conceitos diversos

Dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes se existe uma aresta  $E_k$  que contém os dois vértices.

Duas arestas  $E_i$  e  $E_j$  são adjacentes se  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ .

Grau de um vértice  $v \in V$  é o número máximo de arestas, diferentes de  $\{v\}$ , que contém  $v$ , isto é, o número máximo de arestas tais que para todo  $i, j \in N, i \neq j, E_i \cap E_j = \{v\}$ .

Representamos este número por  $d_H(v)$ , que será

igual a zero se a única aresta que contém  $v$  é  $\{v\}$ .

Grau de uma aresta  $E_i \in E$  é o número de vértices da aresta. Designamos este número por  $d_H(E_i)$ . O máximo  $d_H(E_i)$  é denominado "rank" do hipergrafo.

Um hipergrafo é dito ser h-uniforme se todas as arestas possuem o mesmo grau  $h$ , ou ainda, se todas as arestas tem o grau igual ao "rank" do hipergrafo. Portanto podemos dizer que um grafo simples é um hipergrafo uniforme de "rank" igual a 2.

Multiplicidade, (ACHARYA<sup>1</sup>), de um conjunto  $S$  de vértices de um hipergrafo  $H$ , simbolizado por  $m(S, H)$ , é o número de vezes que  $S$  aparece como aresta de  $H$ . Claramente, para qualquer  $E_i$  de  $H$  tem-se  $m(E_i, H) \geq 1$ ;  $E_i$  é dita ser simples (múltipla) se  $m(E_i, H) = 1$  ( $m(E_i, H) > 1$ ).

Um hipergrafo simples é aquele no qual as arestas são simples. Um multigrafo (grafo) é um hipergrafo  $H = (V, E)$  tal que  $|E_i| = 2$  e  $m(E_i, H) \geq 1$  ( $m(E_i, H) = 1$ ) para toda aresta  $E_i$  em  $H$ .

Podemos também definir um hipergrafo simples como aquele na qual as arestas  $E_i$  são todas distintas, Se  $|E_i| = 2$  para todo  $i$ , e se o hipergrafo é simples, então  $H$  é um grafo simples sem vértices isolados,

Hipergrafo h-completo (MEYER<sup>20</sup>): Sejam  $n$  e  $h$  dois inteiros,  $h < n$ . O hipergrafo simples tendo por conjunto de vértices um conjunto  $V$  tal que  $|V| = n$ , e por conjunto de arestas o conjunto  $P_h(V)$  das partes de  $V$ , é chamado hipergrafo  $h$ -completo com  $n$  vértices. Simbolizamo-lo por  $k_n^h$ . No caso de  $h = 2$ ,

retornamos ao grafo completo  $k_n$ .

Para um melhor entendimento, consideremos a figura 1.2, onde (a) representa um hipergrafo 2-uniforme  $H = (a, b, c, ab, bc)$  e (b) representa um hipergrafo 2-completo  $H = (a, b, c, ab, ac, bc)$ .

Note-se que todo hipergrafo h-completo é também h-uniforme.

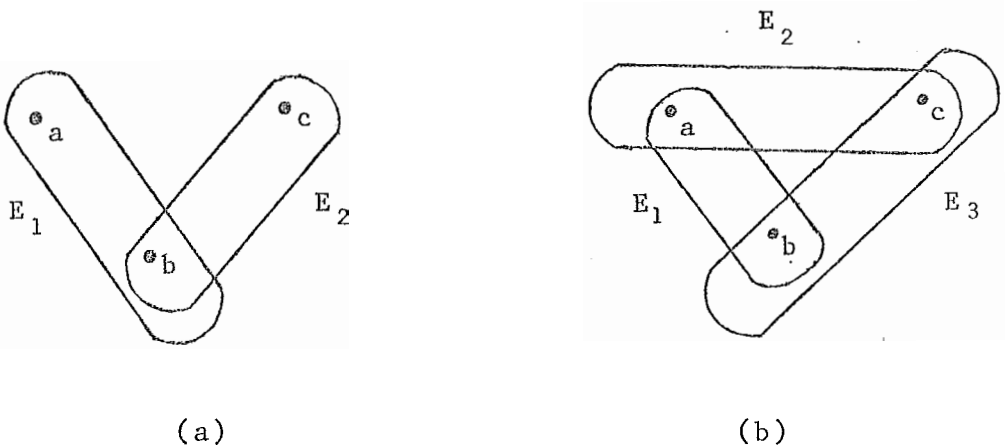


Fig. 1.2

Hipergrafo h-partite (MEYER<sup>41</sup>): Seja h um inteiro. O hipergrafo simples tendo por conjunto de vértices a união dos conjuntos disjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_h$ , com  $|V_i| = n_i$  para todo  $i, 1 \leq i \leq h$ , e por arestas todos os subconjuntos  $E_j$  de

$\bigcup_{1 \leq i < j \leq h} V_i$  tais que  $|E_j \cap V_i| = 1$  para  $1 \leq i \leq h$ , é chamado hipergrafo h-partite completo sobre  $V_1, V_2, \dots, V_h$ . Simbolizamos-o por  $k_{n_1, n_2, \dots, n_h}^h$ . Para o caso  $h = 2$  retornamos ao grafo bipartite completo  $k_{n_1, n_2}^2$ .

Dizemos que  $H_P = (V_P, F)$  é um hipergrafo parcial,

(BERGE<sup>8</sup>) do hipergrafo  $H = (V, E)$  se  $F \subseteq E$  e  $V_F = \bigcup_{E_i \in F} E_i$ .

O sub-hipergrafo (BERGE<sup>8</sup>), de  $H_A = (A, E_A)$  gerado por um conjunto  $A \subseteq V$ , é por definição o hipergrafo  $H_A = (A, E_A)$  onde  $E_A = \{E_i \cap A \mid E_i \in E; E_i \cap A \neq \emptyset\}$

Seja  $H = (V, E)$  um hipergrafo onde  $V = (v_j)_{j \in N}$  e  $E = (E_i)_{i \in M}$ . A partir de  $H$  obtemos o hipergrafo dual  $H^* = (\tilde{V}, \tilde{E})$  onde os vértices são os pontos  $e_1, e_2, \dots, e_m$  (representando as arestas de  $H$ ) e as arestas os conjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_n$  (representando os vértices de  $H$ ), ou seja  $V_j = \{e_i \mid i < m, v_j \in E_i\}$ . A figura 1.3 (b) mostra o hipergrafo dual de  $H$ , figura 1.3 (a).

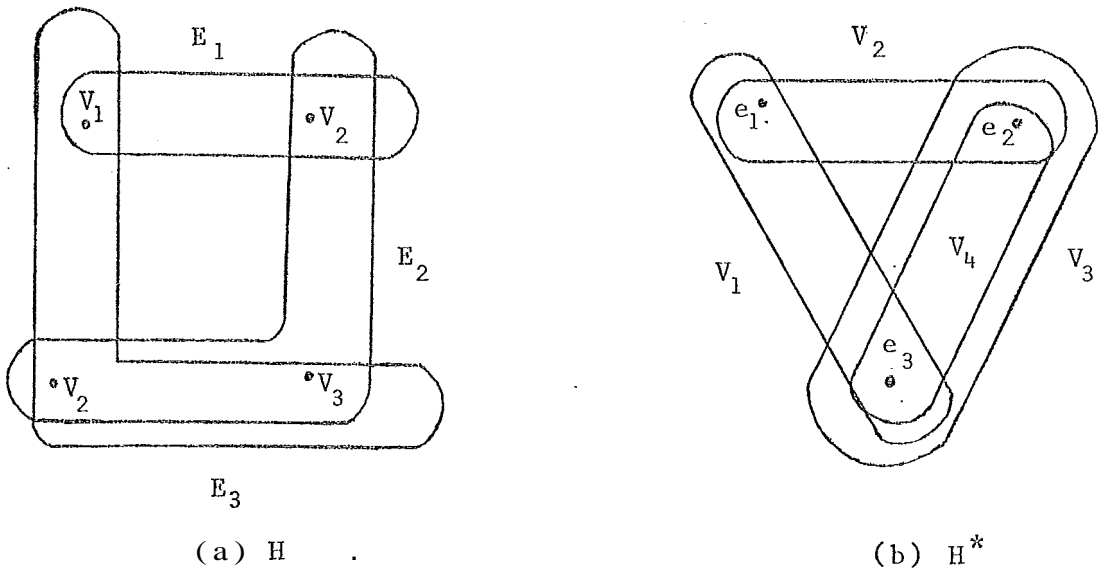


Fig. 1.3

Matriz de Incidência: Um hipergrafo  $H = (V, E)$  pode ser representado por uma matriz de incidência  $(a_{ij})$ , com  $m$  colunas representando as arestas e  $n$  linhas os vértices. Os ele-

mentos  $a_{ij}$  são assim definidos:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SSS } v_i \in E_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Portanto toda matriz cujos elementos são iguais a 0 ou a 1, e que não possua linha ou coluna zero, é uma matriz de incidência representativa de algum hipergrafo.

Se  $A$  é a matriz de incidência do hipergrafo  $H$ , então,  $B = A^T$  é a matriz de incidência do hipergrafo dual  $H^*$ . Em particular temos  $(H^*)^* = H$ .

Definimos  $L_k(H)$  como grafo  $k$ -linha (ou  $k$ -adjunto) do hipergrafo  $H$ , o grafo (sem laços ou arestas múltiplas) cujo ~vértices ( $e_i$ ) podem ser colocados em correspondência 1-1 com as arestas  $E_i$ , de tal modo que dois vértices  $e_i$  e  $e_j$  em  $L_k(H)$  são adjacentes se e somente se  $E_i$  e  $E_j$  possuem pelo menos  $k$  elementos em comum.

Conexidade: Um hipergrafo  $H = (V, E)$  é dito ser conexo, se  $V$  não pode ser dividido em duas classes disjuntas não vazias  $V_1$  e  $V_2$ , tal que, para todas as arestas  $E_i$  de  $H$  se tenha  $E_i \subseteq V_1$  ou  $E_i \subseteq V_2$ . LOVASZ<sup>8</sup> observou que um hipergrafo  $H$  é conexo se e somente se o grafo  $k$ -linha de  $H$  é conexo.

Seja um hipergrafo  $H = (V, E)$ . Cadeia é uma seqüên"cia  $(v_1, E_1, v_2, E_2, \dots, v_{k+1}, E_k, v_{k+1})$  tal que para todo  $i$ ,  $v_i \in V$  e  $E_i \in E$  são distintos e  $v_i$  e  $v_{i+1} \in E_i$ .

Com o conceito de cadeia podemos redefinir um hipergrafo conexo, como segue: Um hipergrafo é dito ser conexo se

existe pelo menos uma cadeia ligando cada par de arestas  $E_i, E_j$  qualquer que seja  $i, j$ . Se existe alguma aresta  $E_i$  que não esteja unida as demais por uma cadeia então diz-se que o hipergrafo é não conexo ou desconexo.

Um hipergrafo não conexo  $\mathcal{C}$  formado por pelo menos dois sub-hipergrafos conexos, que são suas componentes conexas.

Se existe uma cadeia do hipergrafo começando por um vértice  $x$  e terminando por um  $y$ , diremos que  $x \equiv y$ . A relação  $x \equiv y$  é uma relação de equivalência e as classes se chamam componentes conexas do hipergrafo. Se existe somente uma classe diremos que o hipergrafo  $\mathcal{C}$  conexo.

Desde que a relação  $x \equiv y$  (ou  $x \neq y$ ) pode indicar a existência (ou não) de uma cadeia  $(x, y)$ , então

i)  $x \equiv x$  (reflexiva), caso em que existe uma cadeia de comprimento um, começando e terminando em  $x$ .

ii)  $x \equiv y \leftrightarrow y \equiv x$  (simétrica)

iii)  $x \equiv y, y \equiv z \leftrightarrow x \equiv z$  (transitiva), caso em que existe uma cadeia de comprimento  $c_1$  entre  $x$  e  $y$  e uma cadeia de comprimento  $c_2$  entre  $y$  e  $z$ , então existe uma cadeia de comprimento menor ou igual a  $c_1 + c_2$  entre  $x$  e  $z$ .

Dado um hipergrafo  $H = (V, E)$  dizemos que uma cadeia é hamiltoniana se ela passa uma e somente uma vez em cada vértice do hipergrafo. Dizemos também que a cadeia é euleriana se ela passa uma e somente uma vez em cada aresta do hipergrafo.

Ciclo de um hipergrafo  $H = (V, E)$  é uma cadeia  $v_1 E_1 v_2 E_2 \dots v_k E_k v_{k+1}$  tal que

- i)  $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$  sejam distintos
- ii)  $E_1, E_2, \dots, E_k \in E$  sejam distintos
- iii)  $v_i, v_{i+1} \in E_i$  para  $i = 1, 2, \dots, k$
- iv)  $k > 1$  e  $v_{k+1} = v_1$

Observe que  $k$  é o comprimento do ciclo e que laços não são considerados ciclos na teoria dos hipergrafos,

Se  $k > 2$ , o ciclo é dito ser significante.

seja  $H = ((X_j)_{j \in N}, (E_i)_{i \in M})$  e  $H' = ((Y_j)_{j \in N'}, (F_i)_{i \in M'})$  dois hipergrafos, então

i)  $H$  e  $H'$  são isomorfos se existe uma bijeção  $X$  sobre  $Y$  que relaciona biunivocamente a família das arestas de  $H$  à família das arestas de  $H'$ .

ii)  $H$  e  $H'$  são idênticos se existe uma bijeção  $\pi$  de  $M$  sobre  $M'$  tal que  $\Phi(E_i) = F_{\pi(i)}$  para todo  $i \in M$ , onde  $\Phi$  é a bijeção de  $X$  sobre  $Y$  definida por  $\Phi(x_j) = y_j$  para todo  $j \in N$  (isto é, preserva o Endice dos vértices).

iii)  $H$  e  $H'$  são fortemente isomorfos (denotamos  $H \cong H'$ ), se existe uma bijeção  $\Phi$  de  $X$  sobre  $Y$  tal que  $\Phi(E_i) = F_i$  para todo  $i \in M$  (isto é, preserva o índice das arestas).

iv)  $H$  e  $H'$  são iguais e representamos por  $H=H'$ , se  $\Phi(E_i) = F_i$  para todo  $i \in M$  onde  $\Phi$  é a bijeção de  $X$  sobre  $Y$  definida por  $\Phi(x_j) = y_j$  para todo  $j \in N$  (isto é,  $\Phi$  preserva os índices dos vértices e os das arestas).

Seja  $H = (V, E)$  um hipergrafo. Dois vértices  $x$  e  $y$  de  $H$  são simétricos, se existe um automorfismo  $F$  de  $H$  tal que

$F(x) = y$ . Duas arestas  $E_i$  e  $E_j$  são simétricas se existe um automorfismo  $F$  de  $H$  tal. que  $F(E_i) = E_j$ .



C A P Í T U L O    I I

UM MÉTODO PARA DETERMINAÇÃO DO DISTRITAMENTO ÓTIMO  
UM ENFOQUE HEURÍSTICO

A realocação de áreas vem se constituindo num assunto abordado com muita frequência em vista da grande aplicação que tem no campo da distribuição de serviços.

Muitas organizações que prestam serviços à comunidade dividem suas áreas de atuação em zonas ou distritos. A delimitação de distritos chamamos de distritamento.

Podem ser enumeradas como possíveis aplicações de distritamento, a localização de serviços públicos tais como escolas, hospitais, unidades do corpo de bombeiros, demarcação de áreas de influência de centrais telefônicas, etc.

Nem sempre o uso do vocábulo "distrito" está ligado a divisão territorial. Assim, por exemplo a divisão de uma população segundo determinadas características, é uma forma de distritamento.

Com a diversidade dos problemas analisados sob este prisma (distritamento), a formulação destes deverá ser feita respeitando o campo de aplicação e os dados disponíveis, além de características peculiares. Assim, por exemplo, se o problema for associar áreas de atendimento para unidades do Corpo de Bombeiros, é de se supor que as unidades existentes sejam aproveitadas e que o problema dê uma resposta para o melhor posicionamento de novas unidades a serem construídas. Contudo, se for a implantação de um serviço ainda não existente, ou mesmo, se uma

nova divisão de áreas de atendimento implicar em investimentos que não queiram ser aceitos (muito onerosos), a abordagem do problema poderá ser conduzida de forma bem diversa.

## 2.1 - Revisão bibliográfica

Os principais tópicos dessa área discutidos na bibliografia especializada são os seguintes:

McCORMICK et AL<sup>40</sup> ilustraram através de exemplos e experimentos computacionais um novo método de análise através do que chamaram "cacheamento". A base do método está em formar grupos (cachos) de elementos (variáveis do problema.) que tenham informações comuns entre eles. Conseguem o objetivo através de permutações de linhas e colunas de uma matriz, a qual contém as informações sobre os elementos a serem "cacheados".

BEKTOLAZZI et AL<sup>13</sup>, consideram o problema de distribuição em termos de otimização restrita. Tomaram como função objetiva o tempo médio de percurso da unidade de atendimento até o atendido, e o equilíbrio da unidade de trabalho é expresso por meio de restrições. O estudo foi feito através de um modelo traduzido por um algoritmo derivado do método de filtragem de BALAS, que parece ser muito eficiente para esta classe de problemas. O tempo de percurso Ótimo obtido pelo algoritmo, aplicada ao serviço do Corpo de Bombeiros de Roma, tornou-se significativamente mais baixo que o em uso.

CARTER et AL, citados em Bertolazzi, analisaram o caso de duas unidades de resposta de posição fixa (o atendido desloca-se ao lugar de atendimento) e obtiveram um distritamen

to ótimo, considerando o comportamento estocástico do sistema e tomando como base uma forma simplificada de cooperação interdistrital. Consideraram como parâmetro de desempenho o tempo médio de percurso e a carga de trabalho das unidades.

LARSON, citado em Bertolazzi, elaborou um modelo sofisticado (valido para sistemas tanto com unidades fixas como móveis), baseado na teoria de filas, incluindo fenômenos probabilísticos e relações interdistritais. Este modelo não chegou a ser otimizado.

BOAVENTURA<sup>14</sup>, analisa a redistribuição de áreas de atuação de organizações responsáveis pela prestação de serviços ao público, tal como agência de correio, Corpo de Bombeiros, etc, através de um modelo baseado na construção de um hipergrafo, gerando as soluções viáveis sem buscar a otimalidade. Essas soluções correspondem aos subconjuntos internamente estáveis (ou independentes) do grafo linha do hipergrafo, correspondendo a uma partição do conjunto de vértices do hipergrafo.

No presente capítulo, aperfeiçoaremos esta última abordagem através da busca da otimalidade, por um critério de minimização de variancias por um modelo heurístico.

## 2.2 - Definição do problema

Consideremos um problema semelhante ao de BOAVENTURA<sup>14</sup>. Dada uma área (município ou cidade) dividida em distritos, queremos reformular esta divisão, alterando ou não o número de distritos. Para esta finalidade, supomos que estes distritos admitam fracionamento em partes definidas a priori, as quais

chamaremos de subdistritos.

A divisão a priori é uma exigência imposta pela ferramenta de trabalho (o computador) e não se constitui em perda de generalidade. Em muitos casos esta pré divisão é uma forma de acelerar a determinação da solução.

Admitindo-se conhecidas as áreas dos subdistritos e suas relações de vizinhança, propomo-nos fazer o redistritamento (construção de novos distritos a partir dos subdistritos) usando um enfoque heurístico.

### 2.3 - Formalização do modelo

Consideremos uma área subdividida em regiões segundo uma certa partição  $E$ ; a cada elemento  $E_i \in E$  chamaremos um distrito. A forma desses distritos depende dos critérios utilizados e também da configuração geográfica da área.

Como exemplo, suponhamos que a área de atuação de uma agência de correio tenha sido delimitada particionando a região de atendimento em distritos, segundo um critério qualquer. Com o crescimento da demanda o atendimento tornou-se precário em diversas unidades, sendo necessária uma reforma para melhorá-lo. Para atingir tal melhoramento, pensou-se em criar mais unidades de atendimento com capacidades iguais (hipótese do problema) fazendo um reescalamento das áreas abrangidas pelas unidades.

Para efetuar o redistritamento, particionamos cada distrito  $E_i \in E$  em subdistritos  $k_{ij}$ . A cada subdistrito  $k_{ij}$ , associamos uma função de decisão  $f(k_{ij}) = d_{ij}$ , onde  $d_{ij}$  indica população, área, quantidade de tráfego, distância, tempo de per

curso ou uma combinação matemática que exprima um número.

Podemos então definir um distrito como sendo um conjunto de entidades, e o redistritamento um reagrupamento destas entidades levando em conta características ou necessidades, a fim de criar um número de distritos igual ou diferente ao dos já existentes.

A título de ilustração mostramos na figura 2.1 (a) uma área particionada em distritos e 2.1 (b) particionada em subdistritos.

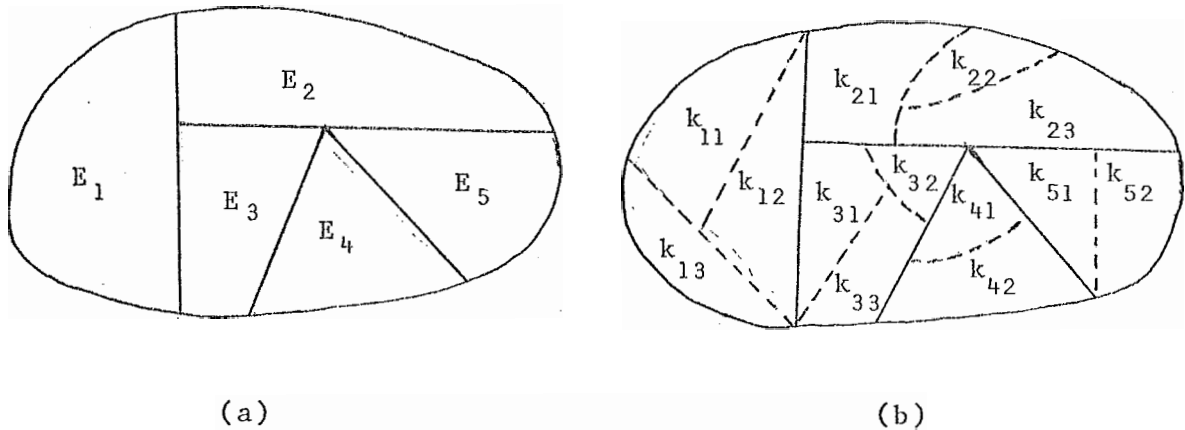


Fig. 2.1

É fácil de ver que a área distritada pode ser associada a um hipergrafo, onde cada possível distrito é considerado uma aresta e cada subdistrito um vértice. Como a cada subdistrito  $k_{ij}$  foi associada uma função de decisão  $f$ , face a hipótese de capacidade igual e redução de variância, a solução do problema pode ser obtida (como veremos em 2.3.1) reagrupando os subdistritos de tal forma que os novos distritos tenham aproximadamente o valor

$$V_e = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k_{ij} \in E_i} f(k_{ij})}{MN}$$

onde  $V_e$  é o valor médio esperado e MN o número de distritos que E terá depois do redistributamento.

### 2.3.1 - Tentativa de solução

ETAPA 1. Seja MN o número de distritos que se deseja criar. Inicialmente distribuimos aleatoriamente os subdistritos, formando MN novos distritos, todos conexos e não vazios. Como a cada subdistrito  $k_{ij}$  está associada uma função de decisão  $f$ , que é um número ( $d_{ij}$ ), então o valor do distrito  $E_i$  é dado por

$$V_i = \sum_{k_{ij} \in E_i} d_{ij}$$

Assim, podemos tomar como medida de decisão, o desvio padrão de  $V_i$  em relação a  $V_e$ . Se o desvio for aceitável, ( $\approx \delta$  estipulado) o problema está resolvido. Senão seguimos para a etapa 2.

ETAPA 2. Desde que a área a ser redistribuída é um hipergrafo H, consideremos o grafo lí-linha  $L_k(H)$ ,  $k \geq 1$ . Seja  $E_{\max}$  o distrito  $E_i$  que possui o maior valor  $V_i$ . Vamos expandir uma arborescência em  $L_k(H)$  com raiz em  $E_{\max}$ . A partir das folhas subimos para a raiz e calculamos para cada nó  $E_i$  as carências acumuladas da seguinte forma:

$$\text{CAREN}(E_i) = \begin{cases} V_i - V_e & , \text{ se } E_i \text{ é folha ou raiz} \\ (V_i - V_e) + \text{CAREN}(E_j) & , \text{ se } E_j \text{ é filho de } E_i \end{cases}$$

A árvore permite conduzir a otimização como UM processo global, isto é, evita que o "ganho" obtido num passo possa ser anulado num posterior.

ETAPA 3. Transfere do distrito  $E_{\max}$  aos distritos vizinhos a ele (que são filhos dele na árvore) tantos subdistritos quantos forem necessários para que  $|V_{\max} - V_e|$  seja **mínimo**,  $E_{\max}$  permaneça conexo e não vazio.

Para acelerar o processo e atingir mais rapidamente a solução, propomos um caráter seletivo na escolha dos distritos sucessores de  $E_{\max}$  para os quais for passada área. Como a árvore indica caminhos de fluxo entre distritos, para as áreas a serem deslocadas, e as carências indicam necessidade de áreas, é natural que não se despreze o enfoque heurístico, atendendo primeiro aos vizinhos com menor carência (analogia ao algoritmo de Dijkstra).

ETAPA 4. Verifica se a nova divisão assim obtida está ótima segundo um critério estabelecido. Para isto atualizamos os  $V_i$ 's (área dos distritos) e calculamos o seu desvio padrão em relação a  $V_e$ . Se o desvio padrão for menor do que um estipulado a priori, fim. Senão voltamos à etapa 2.

### 2.3.2 - Algoritmo

Algoritmo A : Montagem

- AP<sub>0</sub> : LÊ : NSUBD (número de subdistritos);
- MN (número de distritos a serem criados);
- AREATL (área total a ser distritada);
- XINFO (vetor de áreas dos subdistritos);
- DELTA (desvio a ser aceito);

Relação de vizinhos dos subdistritos e monte os vetores seguintes: IVIZ (vetor que contém os vizinhos de todos os subdistritos), IVIZIN (I) - (vetor que indica o início dos vizinhos do subdistrito I no vetor IVIZ), IVIZFM (I) - (vetor que indica o fim dos vizinhos dos subdistrito I no vetor IVIZ)

AP<sub>1</sub> : Monte inicialmente, de modo aleatório, a lista dos MN distritos E<sub>i</sub>'s (devem ser conexos e não vazios),

ISUBD (vetor que contem o número de subdistritos pertencentes ao distrito E<sub>i</sub>)

AP<sub>2</sub> : Calcule:

ADIST(I) (vetor que contém as áreas dos MN distritos montados em AP<sub>1</sub>)

EADIST ← AREATL/MN (área média esperada por distrito)

$$\text{DESVIO} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\text{MN}} (E_i - \text{EADIST})^2}{\text{MN}}}$$

AP<sub>3</sub> : Se DESVIO ≤ DELTA, pare. Senão segue.

AP<sub>4</sub> : Para cada subdistrito, subdivide a lista de seus vizinhos em internos e externos segundo o caso.



AP<sub>5</sub> : Para cada distrito, monte a lista de seus vizinhos e passe ao ALGORITMO B.

Algoritmo B : Balanceamento

BP<sub>1</sub> : Faça:

CAREN(I) ← ADIST(I) - EADIST, I=1, MN

MARCA(I) ← 0 , I=1, MN

Obs.: CAREN(I) significa carência do distrito I, e

$$\text{MARCA}(I) = \begin{cases} 1 & , \text{ se o distrito } I \text{ foi visitado} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

BP<sub>2</sub> : Procure o distrito E<sub>i</sub>, ainda não visitado, com o maior valor V<sub>i</sub>. Se todos foram visitados, então vá a BP<sub>1</sub>. Senão, faça:

MARCA(E<sub>i</sub>) ← 1

E<sub>max</sub> ← E<sub>i</sub> , e segue

BP<sub>3</sub> : Expande arborescência com raiz em E<sub>max</sub>. Partindo das folhas para a raiz, calcule as carências acumuladas, excluindo a raiz, isto é,

$$\text{CAREN}(E_i) = \begin{cases} V_i - V_e & , \text{ se } E_i \text{ é folha ou raiz (E}_{\text{max}}) \\ (V_i - V_e) + \text{CAREN}(E_j) & , \text{ se } E_j \text{ é filho de } E_i \end{cases}$$

BP<sub>4</sub> : Procure o distrito E<sub>i</sub> de menor carência acumulada tal que MARCSD(E<sub>i</sub>) = 0 e que seja vizinho de E<sub>max</sub>. Se E<sub>i</sub>

existe, então faça:

$$E_{\min} \leftarrow E_i$$

MARCA( $E_{\min}$ )  $\leftarrow$  1 , e segue. Senão vai BP<sub>1</sub>.

BP<sub>5</sub> : Procure o maior subdistrito externo de  $E_{\max}$  (MAI) e verifique se pode ser passado para  $E_{\min}$  (MAI deve ser vizinho de  $E_{\min}$  e sua retirada de  $E_{\max}$  não deve desconectá-lo). Se MAI não existe então faça:

MARCSD( $E_{\min}$ )  $\leftarrow$  1 e vai BP<sub>4</sub>.

Senão segue,

Obs. : MARCSD(I) =  $\begin{cases} 1 & , \text{ se o subdistrito I foi visitado} \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$

BP<sub>6</sub> : Retire MAI de  $E_{\max}$  e coloque-o em  $E_{\min}$  e faça:

$$\text{ADIST} (E_{\max}) \leftarrow \text{ADIST} (E_{\max}) - \text{XINFO} (\text{MAI})$$

$$\text{ADIST} (E_{\min}) \leftarrow \text{ADIST} (E_{\min}) + \text{XINFO} (\text{MAI})$$

$$\text{CAREN} (E_{\max}) \leftarrow \text{CAREN} (E_{\max}) - \text{XINFO} (\text{MAI})$$

$$\text{CAREN} (E_{\min}) \leftarrow \text{CAREN} (E_{\min}) + \text{XINFO} (\text{MAI})$$

$$\text{ISUBD} (E_{\max}) \leftarrow \text{ISUBD} (E_{\max}) - 1$$

$$\text{ISUBD} (E_{\min}) \leftarrow \text{ISUBD} (E_{\min}) + 1$$

$$\text{MARCSD}(I) \leftarrow 0 \quad , \quad I = 1, \text{ NSUBD}$$

BP<sub>7</sub> : Atualize listas de internos e externos de  $E_{\max}$  e  $E_{\min}$ , e a lista de vizinhos dos distritos.

BP<sub>8</sub> : Calcule DESVIO. Se DESVIO  $\leq$  DELTA, fim. Senão segue,

BP<sub>9</sub> : Se ADIST (E<sub>max</sub>)  $\leq$  EADIST, então vai BP<sub>2</sub>. Senão

Se E<sub>max</sub> possui menos que dois sub-  
distritos, isto é, se ISUBD(E<sub>max</sub>)=1  
então vai a' BP, Senão vai a BP<sub>3</sub>.

### 2.3.3 - Teste do algoritmo

Para verificar o desempenho do algoritmo submete-mo-lo a testes práticos, uma vez que uma análise teórica se afigurava como difícil.

Foram efetuados testes com dois hipergrafos diferentes sendo feitos 29 experimentos com um e 12 com outro. Além disso, a arborescência citada na etapa 2 da seção 2.3.1, foi considerada de duas formas diferentes de modo a ter raio mínimo (ARM) e raio não mínimo (ARNM).

A descrição pormenorizada dos experimentos práticos, assim como seus resultados, encontra-se no Apêndice.

### 2.4 - Desempenho do algoritmo

Devido à característica heurística do algoritmo, determinar-lhe o desempenho não é tarefa simples e a dificuldade vincula-se em geral a peculiaridade do problema.

Assim, no presente caso, encontramos dificuldades em efetuar uma avaliação comparativa, dada a falta de informações sobre problemas similares já resolvidos.

BERTOLAZZI<sup>13</sup>, apresenta um exemplo que poderiaser

vir de base para comparações, porem, para que seus resultados efetivamente servissem como referência, seria preciso que as restrições impostas para ambos os problemas fossem as mesmas.

Ressaltamos como diferenças relevantes, a restrição de conexidade e a função de decisão. Contudo, temos alguns elementos que nos permitem concluir objetivamente a respeito do desempenho do algoritmo.

a) Desvia padrão da área dos distritos em relação à área esperada.

Para ter-se uma idéia deste item, podemos verificar os resultados dos testes I e 2 no Apêndice.

Como não é sempre possível atingir o desvio padrão zero, nem há uma forma exata de relacioná-lo com o número e área dos subdistritos, um parâmetro não rígido de comparação com outros métodos poderia ser: comparar o tempo médio necessário para atingir certo (o menor possível) desvio padrão da área dos distritos em relação à área esperada.

b) Tempo computacional dos experimentos.

No teste 1 foram efetuados 29 experimentos com uma média de 93 iterações (por iteração entendemos a sistemática que envolve a tentativa de deslocamento ou o deslocamento de determinado subdistrito de um distrito para outro). O tempo médio de máquina por experimento foi aproximadamente igual a 3,91 segundos quando a árvore de raio não mínimo foi usada, e 4,3 segundos usando a árvore de raio mínimo. (os testes computacionais foram efetuados num computador BURROUGHS B-6700, em regime de multiprogramação, com programação em FORTRAN-V).

No teste 2 foram efetuados 12 experimentos com uma média de 200 iterações. O tempo médio de máquina por experimen

to foi aproximadamente igual a 12.77 segundos quando a árvore de raio não mínimo foi usada, e 15.4 segundos usando a árvore de raio mínimo.

A diferença observada entre os dois tipos de experimentos do teste 1 deve ser creditada ao serviço adicional exigido na obtenção da árvore de raio mínimo. Contudo, o tempo por iteração não pode ser considerado isoladamente como índice de desempenho e sim junto com o número de iterações necessárias. Assim, por exemplo, o desvio padrão zero foi atingido no teste 1 para ARNM após uma média de 21.7 iterações e precisou de 14.8 iterações para ARM.

A solução ótima foi atingida 20 vezes para ARNM e 18 vezes para ARM.

Restringimos nossas observações apenas ao teste 1, uma vez que o teste 2, por ser muito grande, precisaria de um número bem maior de experimentos para ser conclusivo.

## 2.5 - conclusão

Levando em conta a seção 2.4 e os resultados do Apêndice, podemos concluir que o método heurístico, ora proposto, produz bons resultados. Lastimavelmente, mesmo supondo a mesma função de decisão, os resultados de BERTOLAZZI<sup>13</sup> (26 segundos para 56 iterações) não são diretamente comparáveis com os nossos, devido a conceitos de iteração, ao grau de otimização possível para a programação e tipo de computador usado, (BERTOLAZZI efetuou seu experimento num computador UNIVAC 1110 com programação em FORTRAN-V), sem ignorar também que no nosso caso os distritos são conexos o que não ocorre com o experimento de

BERTOLAZZI.

Para os casos em que não se atingiu a solução ôtima, os resultados podem ser facilmente mel-horados e mesmo o ôtimo ser atingida, implantando um sistema de trocas entre subdistritos.

C A P Í T U L O    I I I

REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS PLANARES POR MEIO DE HIPERGRAFOS

Um dos aspectos que está começando a ser explorado pelos pesquisadores é a relação entre grafos e hipergrafos, aproveitando as facilidades trazidas pelo fato de que os últimos são generalização dos primeiros.

Citamos aqui o significativo trabalho de STERBOUL<sup>51</sup> que mostrou como construir um hipergrafo a partir dos cliques de um grafo, conseguindo seus resultados pela análise das propriedades dos números de estabilidade do grafo e do hipergrafo e estudando também os problemas extremais ligados a estes valores.

No presente capítulo, propomos solução para dois problemas relacionados com a construção de hipergrafos a partir de cliques de um grafo planar conexo. Na pesquisa feita na literatura especializada não foi encontrado nenhuma abordagem semelhante para que pudessemos fazer comparações.

3.1 - Definição do problema I

Determinar o valor de  $m$  (número de linhas) que minimiza o número de cliques necessário à caracterização de um grafo planar conexo com  $n$  vértices. Em outras palavras, queremos determinar um hipergrafo  $H = (V, E)$ , tal que  $E = \{\text{cliques de } G \text{ necessárias a sua caracterização}\}$  tenha a menor cardinalidade

possível.

### 3.1.1 - Tentativa de solução

Sabemos que o número de linhas de um grafo planar é restrito a  $|A| \leq 3n-6$ . Assim podemos afirmar que qualquer grafo com  $|V| \leq 4$  planar, visto que  $|A|$  satisfaz sempre a restrição acima. (Ver tabela 1, anexo 2).

Observa-se que o hipergrafo construído a partir de um grafo planar com  $1 \leq |V| \leq 4$  será:

a) minimal se o número de linhas do grafo for máximo (ver tabela 2, anexo 2). Neste caso o hipergrafo é conexo, e contém apenas uma aresta.

b) maximal se o número de linhas for zero. Neste caso o hipergrafo é desconexo, e cada aresta contém um vértice.

As arestas do hipergrafo construído a partir de um grafo planar com  $|V| \geq 5$  terão no máximo 4 vértices, do contrário se feriria a planaridade de  $G$ .

Assim, as arestas do hipergrafo  $H$  construído a partir de um grafo planar  $G$ , serão de uma das seguintes formas (onde  $k_c$  indica a clique de  $c$  vértices).

a)  $k_1$  : hipergrafo não conexo, onde cada aresta possui um vértice.

b)  $k_2, k_3, k_4$  : hipergrafo conexo, onde cada aresta possui 2, 3 ou 4 vértices.

c)  $k_1k_2, k_1k_3, k_1k_4$  : hipergrafo não conexo, onde as arestas são formadas por 1 e 2, 1 e 3 ou 1 e 4 vértices.



d)  $k_2k_3, k_2k_4, k_3k_4$  : hipergrafo conexo, onde as arestas são formadas por 2 e 3, 2 e 4 ou 3 e 4 vértices.

e)  $k_2k_3k_4$  . hipergrafo conexo, onde as arestas são formadas por 2, 3 e 4 vértices.

f)  $k_1k_2k_3k_4$  : hipergrafo não conexo.

Se levarmos em conta que um grafo conexo de  $n$  vértices deve possuir  $(n-1)$  linhas, podemos montar a tabela 3 (anexo 2) para  $n \geq 5$  vértices. Esta tabela, que foi montada com o auxílio de experimentos construtivos exaustivos e com o uso de computador, nos permite enunciar:

a) Teorema: Se um grafo conexo de  $n$  vértices possui  $m = n-1$  linhas, então o número mínimo  $p$  de cliques  $k_2$  é  $p=m$ .

A prova é imediata. O grafo conexo com  $n-1$  linhas é uma árvore, logo não possui ciclo. Não possuindo portanto cliques com mais de 2 vértices.

b) Conjectura: Se um grafo conexo, planar de  $n$  vértices possui  $(n-1) < m \leq (3n-6)$  linhas, então o número mínimo  $p$  de cliques quaisquer, é dado por  $p = \lfloor (n + 1)/3 \rfloor$ .

Este mínimo de  $p$  cliques ocorre quando

$$m = \begin{cases} 6(p-1), 6(p-1) + 1, \dots, 6(p-1) + 3 & \text{se } n=5 \text{ e } p=2 \\ 6(p-1), 6(p-1) + 1, \dots, 6(p-1) + 4 & \text{se } n=3p-1 \text{ e } p > 2 \\ 6(p-1) + 3, 6(p-1) + 5 & \text{se } n = 3p + 1 \\ 6p & \text{se } n = 3p + 1 \end{cases}$$

Esta relação vértices-número de linhas e número

\*  $\lfloor X \rfloor$  é o maior inteira contido em  $X$

mínimo de  $p$  cliques para um grafo planar conexo, sem laços e sem linhas paralelas, foi extraída da tabela 4 (montada a partir da tabela 3)

### 3.2 - Definição do problema II

Determinar os menores valores de  $m$  (linhas) e  $n$  (vértices) necessários para construir um grafo planar conexo contendo  $pk_2$ ,  $qk_3$  e  $rk_4$  sendo  $p, q, r$  inteiros não negativos.

#### 3.2.1 - Tentativa de solução do problema II

A tabela 5, construída a semelhança da tabela 3, mostra a relação entre o número mínimo de vértices e de linhas necessárias para construir  $pk_c$ .

(1) Para um grafo planar contendo apenas  $pk_2$ , necessita-se de

$$m = p \quad \text{e} \quad n = \begin{cases} 2 & \text{se } p = 1 \\ (p+5)/2 & \text{se } p > 1 \text{ é ímpar} \\ (p+4)/2 & \text{se } p \text{ é par} \end{cases}$$

Sabemos que toda linha  $(v_i \ v_j)$  de um grafo  $G$  é considerada uma clique  $k_2$ . Portanto, o grafo para ser formado apenas por  $p$  cliques  $k_2$ , com  $m$  e  $n$  mínimos deverá ter  $m = p$  linhas.

Por construção, se  $p = 1$  implica que  $m = 1$ . Neste caso necessita-se de no mínimo  $n = 2$  vértices. Porém é necessário observar (tabela 5) que com 3 vértices, o máximo de cliques

$k_2$  é  $p = 2$ , pois se for colocado mais uma linha obteremos um  $k_3$  ou um grafo de linhas paralelas. Portanto na construção de  $pk_2$  onde  $p > 1$  devemos observar se  $p$  é par ou ímpar, pois se  $p$  fôr par, o número de linhas  $m = 2n - 4 = p$  logo  $n = (p+4)/2$  vértices; Se  $p$  fôr ímpar necessitaremos de  $m = 2n - 5 = p$  logo  $n = (p+5)/2$  vértices.

(2) Para um grafo planar contendo apenas  $pk_3$ , necessita-se de

$$n \leq \begin{cases} 3 & \text{e } m = 3 & \text{se } q = 1 \\ (q+7)/2 & \text{e } m \leq 3n - 8 & \text{se } q > 1 \text{ é ímpar} \\ (q+6)/2 & \text{e } m \leq 3n-7 & \text{se } q \text{ é par} \end{cases}$$

(3) Na construção de  $rk_4$ , necessitamos no mínimo de  $n = r + 3$  e  $m = 3n - 6$ .

Observe na tabela 5 que na formação das  $q$  cliques  $k_3$  ( $q > 2$ ), se for acrescentada uma linha, obteremos uma clique  $k_4$  e perderemos  $2k_3$ .

Na formação das cliques  $k_4$ , se for acrescida uma linha, obteremos ou um grafo com linhas paralelas (o que não nos interessa) ou o grafo deixara de ser planar pois  $m$  será maior que  $3n - 6$ .

(4) Construção de  $(pk_2)$   $(qk_3)$ .

Vimos que para construir  $qk_3$  necessita-se de  $m = 3$  se  $q = 1$  e no máximo  $m = (3n-8) = (3q+5)/2$  se  $q > 1$  é ímpar e  $m = (3n-7) = (3q+4)/2$  se  $q$  é par; e na de  $pk_2$ ,  $m = p$ .

Portanto para construir  $(pk_2)$   $(qk_3)$ , precisamos das  $m$  linhas necessárias para as  $qk_3$ , mais as  $p$  linhas de  $pk_2$ , de

tal forma que nenhuma das  $p$  linhas una  $2k_3$  adjacentes, pois neste caso surgiria uni  $k_4$ . Logo para  $p \neq 0$

$$n \leq \begin{cases} (q+7)/2 + \lfloor p/2 \rfloor + 1 & \text{e } m \leq (3q+5)/2 + p & \text{se } q \text{ é ímpar} \\ (q+6)/2 + \lfloor p/2 \rfloor + 1 & \text{e } m \leq (3q+4)/2 + p & \text{se } q \text{ é par} \end{cases}$$

(5) Na construção de  $(pk_2)$   $(rk_4)$ , necessita-se de  $n = r + \lfloor p/2 \rfloor + 4$  e  $m = 3(r+1) + p$ .

Vimos que na construção de  $rk_4$  necessitou-se de  $n = r + 3$  e  $m = 3n - 6 = 3(r+1)$ . Observe que nestas condições o grafo possui o máximo de linhas possíveis respeitando a planaridade. Desde que uma linha é uma  $k_2$ , então acrescentaremos aos  $rk_4$   $p$  linhas e  $\lfloor p/2 \rfloor + 1$  vértices.

Assim  $n = r + 3 + \lfloor p/2 \rfloor + 1 = r + \lfloor p/2 \rfloor + 4$  e  $m = 3(r+1) + p$ .

(6) Repetindo o raciocínio das construções anteriores, chegamos aos resultados:

(6a.) na construção de  $(qk_3)$   $(rk_4)$

$$n \leq \begin{cases} (q+2r+8)/2 & \text{e } m \leq 3n - 8 & \text{se } q \text{ é par} \\ (2r+q+7)/2 & \text{e } m \leq 3n - 7 & \text{se } q \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(6b.) na construção de  $(pk_2)$   $(qk_3)$   $(rk_4)$

$$n \leq \begin{cases} (q+2r-p+8)/2 & \text{e } m \leq 3n + p - 8 & \text{se } q \text{ é par} \\ (q+2r-p+7)/2 & \text{e } m \leq 3n + p - 7 & \text{se } q \text{ é ímpar} \end{cases}$$

## C A P Í T U L O    I V

### HIPERGRAFOS ORIENTADOS

Assim como o grafo não orientado foi generalizado pelo hipergrafo (não orientado), podemos fazer o mesmo para o grafo orientado, levando ao conceito de hipergrafo orientado.

Apresentaremos primeiro algumas definições já existentes na literatura, para em seguida formular a nossa.

#### 4.1 - Definições da literatura

VENCKE<sup>55</sup> propôs duas formas, que são as seguintes:

Definição 1: Um hipergrafo orientado é um par  $(V, E)$  onde  $V$  é um conjunto finito e  $E$  um conjunto de seqüências  $\{E_i\}$  não vazias de elementos de  $V$ , tal que  $\cup E_i = V$  e  $E_i$  são as arestas.

As arestas podem conter o mesmo vértice várias vezes, portanto podem ser infinitas. Se  $|E_i| = 2$  para todo  $i$ , então  $(V, E)$  é um grafo orientado.

Se fizermos abstração do seqüenciamento, então re tornamos ao conceito de hipergrafo não orientado.

Um hipergrafo orientado, conforme a definição 1, pode ser usado para descrever a evolução de um sistema no qual o estado futuro depende do estado presente, assim como também

do estado passado.

Os vértices representam os estados do sistema e cada aresta uma seqüência de evoluções de estados. Por exemplo, a aresta  $E_i = (v_1, v_2, v_3)$  significa que o sistema pode evoluir do estado  $v_1$  para  $v_2$  e de  $v_2$  para  $v_3$ .

Se associarmos uma probabilidade a cada vértice do hipergrafo orientado, então poderemos descrever processos markovianos de ordem superior a I.

Podemos ainda, associar a um dado grafo, um hipergrafo orientado onde as arestas são, por exemplo, um caminho ou um circuito do grafo.

Definição 2: Um hipergrafo orientado é um par  $(V, E)$  onde  $V$  é o conjunto finito de vértices e  $E$  um conjunto de partes não vazias de  $V$ , cobrindo  $V$ , e em cada aresta  $E_i$  um vértice é distinguido e chamado origem,

Os elementos de  $E$  são chamados arestas. Uma aresta possuindo  $x$  como origem é simbolizada por  $(x, y_1, v_2, \dots)$ . A ordem dos vértices que seguem  $x$  é indiferente.

Se  $|E_i| = 2$  para todo  $i$ , então  $(V, E)$  é um grafo orientado.

Se fazemos abstração da noção de origem, retornamos ao conceito de hipergrafo não orientado.

#### 4.2 - Novas definições

A definição 2 pode ser generalizada. Suponhamos que exista mais de um vértice origem. Neste caso podemos representar a aresta  $E_i = (X, Y)$  onde  $X = \{x_k\}$  é o conjunto dos vértices

tices origem e  $Y = \{y_L\}$  é o conjunto dos vértices que seguem após a origem.

A ordem dos  $x_k$ 's em  $X$ , assim como dos  $y_L$ 's em  $Y$  é indiferente.

Suponhamos que além da origem  $x$  da aresta  $E_i$ , estejamos também interessados em saber o seu terminal  $y$ . Neste caso, utilizando a noção de cadeia em hiperyrafo podemos afirmar que todo vértice  $y \in Y$  e  $y \in E_i \cap E_j$  é um vértice terminal para  $E_i$  e uma origem para  $E_j$ , se a orientação é de  $E_i$  para  $E_j$ .

Se considerarmos, na figura 4.1, o vértice  $v_1$  pertencente a  $E_1$ , como seu ponto origem, então o vértice  $v_3$  pertencente a  $E_1 \cap E_2$  é seu terminal. Porém o vértice  $v_3$  é o ponto de origem para  $E_2$ .

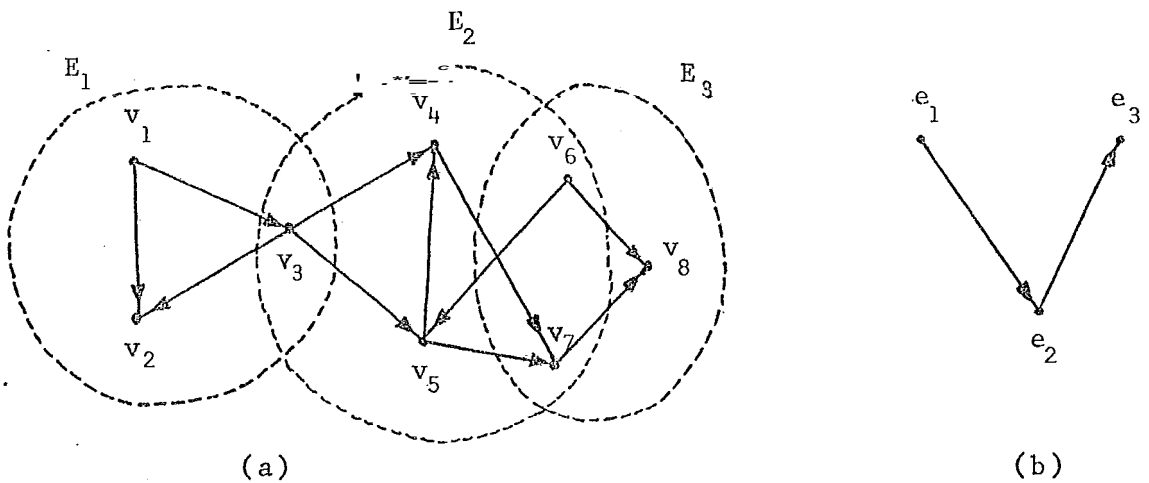


Fig. 4.1

Propomos agora as seguintes definições para hiperyrafo orientado:

Definição 3: Um hiperyrafo orientado é um par  $(V, E)$  onde  $V$  é um conjunto finito de vértices e  $E$  um conjunto

de partes de  $V$ , cobrindo  $V$ . A cada parte  $E_i \in E$ , chamada aresta, está associado o par  $(X, Y)$  onde  $X$  é o conjunto de vértices pertencentes a  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$  para  $i \neq j$  e  $Y = \{\text{pares ordenados de vértices pertencentes a } E_i\}$ .

A figura 4.1, mostra um hipergrafo com oito vértices e três arestas, isto é,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$  e  $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ . As arestas  $E_i$  podem ser escritas, segundo a definição 3, como

$$E_1 = (\{\emptyset; v_3; \emptyset\}, \{(v_1, v_3), (v_1, v_2), (v_3, v_2)\})$$

$$E_2 = (\{v_3; \emptyset; v_6, v_7\}, \{(v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_7), (v_5, v_4), (v_5, v_7), (v_6, v_5)\})$$

$$E_3 = (\emptyset; v_6, v_7; \emptyset), \{(v_6, v_8), (v_7, v_8)\})$$

Definição 4: Um hipergrafo orientado pode possuir orientação interna ou orientação externa.

O hipergrafo possui orientação interna se dois vértices quaisquer pertencentes a uma mesma aresta  $E_i \in E$  são ligados por um caminho.

O hipergrafo possui orientação externa se satisfaz as seguintes condições:

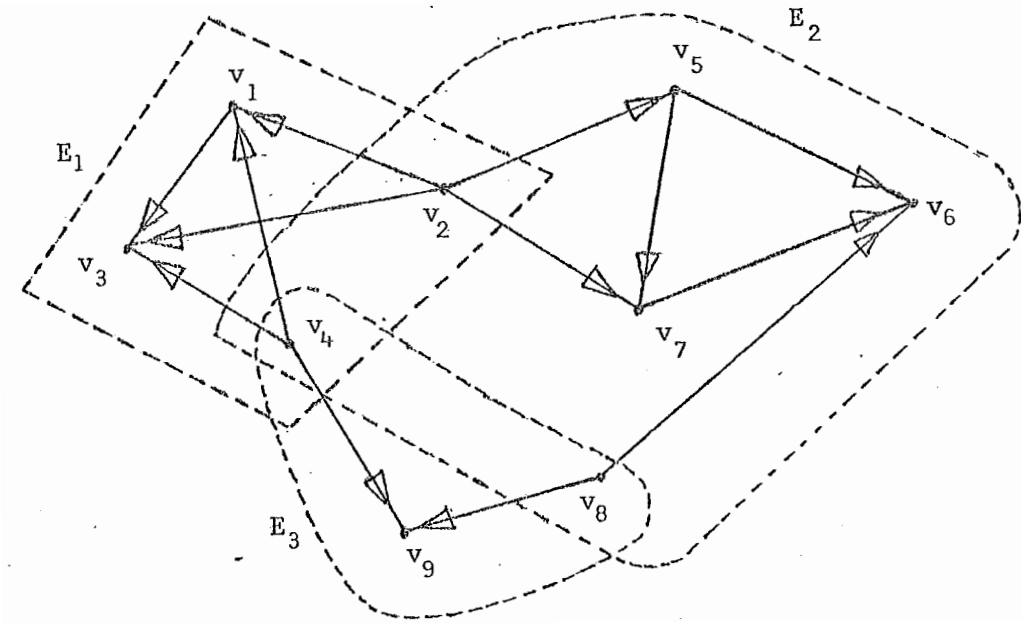
- i) possui orientação interna, e
- ii) existe algum vértice  $v_k \in E_j$  tal que  $v_k \notin E_i \cap E_j$ ,  $i \neq j$  que pode ser atingido partindo-se de algum vértice  $v$  pertencente apenas a aresta  $E_i$ .

O hipergrafo que possui orientação externa pode ser representado por um grafo linha orientado, como mostra a fi

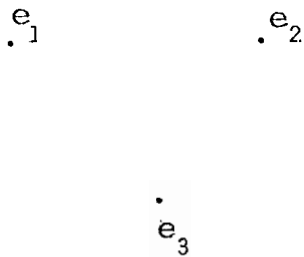


gura 4.1 (b). Se o hipergrafo possui apenas a orientação interna, então seu grafo linha  $\tilde{E}$  é o trivial.

No hipergrafo da figura 4.2 (a) não se pode passar de uma aresta para outra, portanto o hipergrafo não possui orientação externa. Logo seu grafo linha  $\tilde{E}$  é o trivial, como mostra a figura 4.2 (b).



(a)



(b)

Fig. 4.2: Hipergrafo orientado e seu grafo linha

C A P Í T U L O    V

FLUXO EM HIPERGRAFOS

Um problema interessante na teoria dos hipergrafos é a determinação do valor do fluxo máximo que pode ser transmitido de uma aresta fonte  $A_F$  para uma aresta sumidouro  $A_S$ .

Consideremos o hipergrafo  $H = (V, A)$  possuindo orientação externa.

Associemos uma capacidade de fluxo a cada aresta  $A_i$ . Esta capacidade representa o máximo de fluxo que pode ser transmitido ao longo da aresta  $A_i$ , isto é, o máximo de fluxo que pode ser emitido do vértice considerado origem nesta aresta a todos os vértices pertencentes a  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ,  $j=1,2, \dots$ .

A título de ilustração vamos tomar o hipergrafo da figura 5.1 e supor que, na aresta  $A_1$ , o vértice (a) seja origem e os vértices (c) e (d) os destinos. Como a aresta  $A_1$  possui uma capacidade de fluxo igual a 30, isto implica que a soma do fluxo a ser transmitido do vértice (a) até (c) e de (a) até (d) terá que ser menor ou igual a 30. Ou ainda a quantidade de fluxo que a aresta  $A_1$  emite para a aresta  $A_2$  mais a quantidade de fluxo emitido para a aresta  $A_4$  terá que ser menor ou igual a 30.

No decorrer deste capítulo, vamos abordar a solução de problemas semelhantes ao acima enunciado, com algumas restrições adicionais. Trataremos em especial de algoritmos para

fluxo máximo em hipergrafo com e sem orientação.

Iniciaremos nossa abordagem, adaptando para hipergrafos uma conceituação e teoria existentes para grafos.

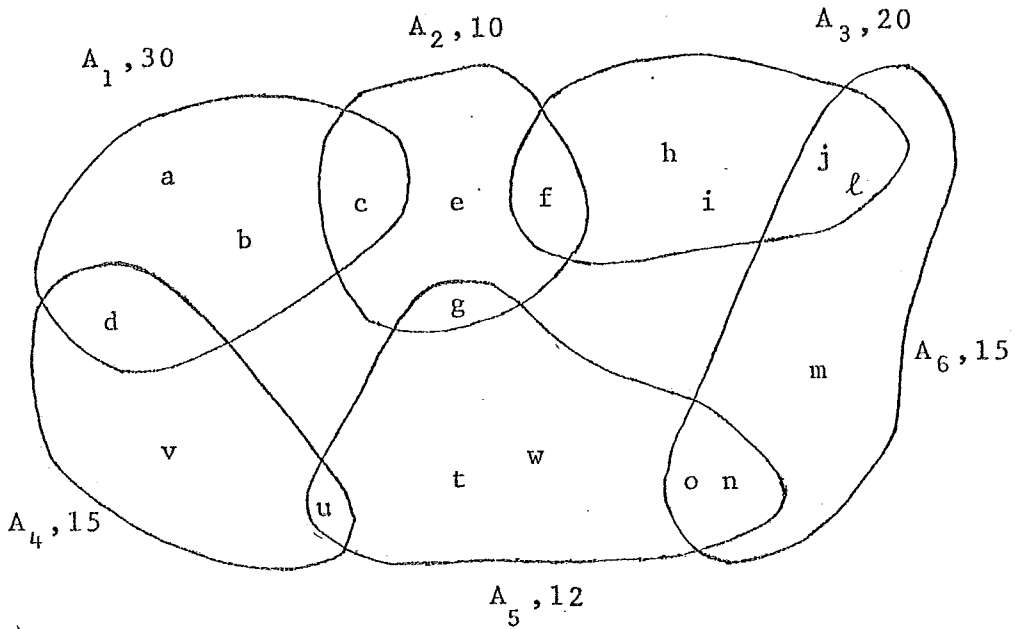


Fig. 5.1

5.1 - Adaptação de definições, teoremas e lemas de grafos para hipergrafos

Suponhamos um hipergrafo  $H = (V, E)$  conexo. Seja  $S \subseteq V$  um subconjunto de vértices e  $A(S)$  o conjunto de todas as arestas incidentes a algum vértice de  $S$ .

Sejam  $s, t$  vértices distintos de  $V$ . Então  $C \subseteq E$  é definido ser um corte  $(s, t)$ , se existe um subconjunto  $S \subseteq V$ , onde  $s \in S$  e  $t \in V - S$ , tal que  $C = A(S) \cap A(V - S)$ .

Denotaremos o corte  $C$  como  $(S, V - S)$ . Para maior clareza, vejamos o exemplo abaixo.

Suponhamos que no hipergrafo  $H$  da figura 5.2 temos  $s = (1)$ ,  $t = (5)$  e  $S = \{(1)\}$ . Então  $V - S = \{2, 3, 4, 5\}$  "

$$A(S) = \{E_1\} \text{ e } A(V-S) = \{E_1, E_2, E_3\}$$

$$\text{Logo } C = A(S) \cap A(V-S) = \{E_1\}$$

Assim  $(S, V-S) = \{E_1\}$  é o corte separando  $s$  e  $t$ .

Assim qualquer cadeia de  $s$  para  $t$  conterá alguma aresta do corte. Seja  $x_1 E_1 x_2 E_2 x_3 \dots x_{n-1} E_{n-1} x_n$  uma cadeia onde  $x_1 = s$  e  $x_n = t$ . Como  $x_1 \in S$ ,  $x_n \in V-S$  então deve existir  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) tal que  $x_i \in S$  e  $x_{i+1} \in V-S$ . Logo a aresta  $E_i$  contendo  $x_i, x_{i+1}$  é um elemento do corte,

Conclui-se que se todas as arestas pertencentes ao corte forem apagadas do hipergrafo, não existirá mais nenhuma cadeia ligando  $s$  a  $t$  e assim o fluxo máximo de  $s$  para  $t$  será zero.

Assim o lema e teorema de Ford e Fulkerson, a seguir são válidos também para hipergrafos.

LEMA 5.1: Seja  $f$  um fluxo de  $s$  para  $t$  em um hipergrafo e seja  $v$  o valor de  $f$ . Se  $(S, V-S)$  é o corte separando  $s$  e  $t$ , então  $v = f(S, V-S) - f(V-S, S) \leq c(S, V-S)$  onde  $c(S, V-S)$  é definido ser a capacidade do corte.

Este lema prova que o fluxo de  $s$  para  $t$  é no máximo igual à capacidade de qualquer corte separando  $s$  de  $t$ .

TEOREMA 5.1: Para qualquer hipergrafo no qual se considere a introdução de um fluxo, o valor do fluxo máximo de  $s$  para  $t$  é igual à capacidade do corte de capacidade mínima dentre todos os cortes separando  $s$  e  $t$ .

### Prova

Seja  $f$  o fluxo máximo (se existir); definamos em

termos de  $f$ , um corte  $(S, V-S)$ , tal que,

$$f(S, V-S) = c(S, V-S)$$

$$f(V-S, S) = 0$$

Estas igualdades satisfazem ao LEMA 5.1.

Usando  $f$ , definiremos o conjunto  $S$  recursivamente como segue:

a)  $s \in S$

b) Consideremos a cadeia  $x \in E_i \rightarrow y \in E_j \rightarrow z$ . Se  $x \in S$  e  $f(E_i) < c(E_i)$ , então  $y \in S$ .

c)  $t \in V-S$

Suponhamos não ser verdade que  $t \in V-S$ . Então pela definição de  $S$ , existe um caminho de  $s$  para  $t$ , digamos  $s = x_1 \in E_1 \rightarrow x_2 \in E_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1} \in E_{n-1} \rightarrow x_n = t$ , com a propriedade que, em toda aresta do caminho  $f(E_i) < c(E_i)$ .

Seja  $\xi > 0$  o mínimo de  $c-f$  considerando todas as arestas do caminho. Vamos alterar o fluxo  $f$  acrescentando um fluxo  $\xi$  a todas as arestas pertencentes ao caminho.

É fácil verificar que o novo fluxo de  $s$  para  $t$  assim definido, tem valor  $v + \xi$ . Então  $f$  não é máximo, contrariando nossa hipótese e assim  $t \in V-S$ .

Consequentemente,  $(S, V-S)$  é o corte separando  $s$  e  $t$ . Logo da definição de  $V-S$  tem-se que

$$f(s, \bar{s}) = c(s, \bar{s}) \text{ para } (s, \bar{s}) \in (S, V-S)$$

COROLÁRIO 5.1: Seja  $(S, V-S)$  e  $(Z, V-Z)$  cortes mínimos. Então  $(S \cup Z, \overline{S \cup Z})$  e  $(S \cap Z, \overline{S \cap Z})$  são também cortes mínimos.

mos.

5.2 - Fluxo máximo

Dado um hipergrafo  $H=(V,E)$  suponhamos que a aresta  $E_i \in E$  tenha associada a si um número real não negativo  $c(E_i)$ . Chamamos  $c(E_i)$  a capacidade da aresta  $E_i$ , que em problemas práticos pode representar a quantidade máxima de alguma mercadoria que pode ser transportada através da aresta  $E_i$ .

Sejam  $s_i$  e  $t_i$  dois vértices distintos de  $E_i$ . Um fluxo estático de valor  $v_i$  de  $s_i$  para  $t_i$  em  $E_i$  é uma função

$$f : E_i \rightarrow R^+$$

satisfazendo as equações e inequações lineares abaixo, definidas para grafos, uma vez que a cada aresta  $E_i$  se pode associar um grafo.

$$\sum f(x,y) - \sum f(y,x) = \begin{cases} v, & x = s \\ 0, & x \neq s, t \\ -v, & x = t \end{cases}$$

$$e \quad f(x,y) \leq c(x,y)$$

À semelhança dos grafos, diremos também para hipergrafos que  $s$  é a fonte,  $t$  o sumidouro, e os outros vértices são intermediários. Observemos que cada aresta  $E_i$  possui uma fonte e um sumidouro. A fonte da aresta  $E_1$ , assim como o sumidouro da aresta  $E_m$  são considerados fonte e sumidouro para a rede-hi-

pergrafo.

Como a cada aresta  $E_k$  está associada uma rede, de notaremos por  $\gamma_{ij}$  o fluxo que passa através da linha  $(x_i, x_j) \in E_k$  e por  $\theta_{ij}$  a capacidade máxima de fluxo através da mesma linha.

Para determinação do fluxo máximo em hipergrafos, somos levados em primeiro lugar a analisar o modelo de LAWLER<sup>34</sup>, para em seguida apresentar nossa contribuição.

### 5.2.1 - Modelo de Lawler

Lawler mostrou que um corte peso mínimo  $(V, S)$  em  $H$  corresponde a um corte capacidade mínima em uma rede  $H'$  como segue:

A rede  $H'$  de fluxo possui um vértice  $i$  para cada vértice  $i$  de  $H$  e dois vértices  $j'$  e  $j''$  para cada aresta  $A_j$  de  $H$ . Existe um arco de  $j'$  para  $j''$  em  $H'$  e sua capacidade é feita igual à capacidade da aresta  $A_j$  de  $H$ . Se a aresta  $A_j$  incide no vértice  $i$  em  $H$ ,  $H'$  possui arcos com capacidade infinita de  $i$  para  $j'$  e de  $j''$  para  $i$  em  $H'$ . Estes relacionamentos estão ilustrados na figura 5.2, onde os números nos arcos em  $H'$  indicam capacidades.

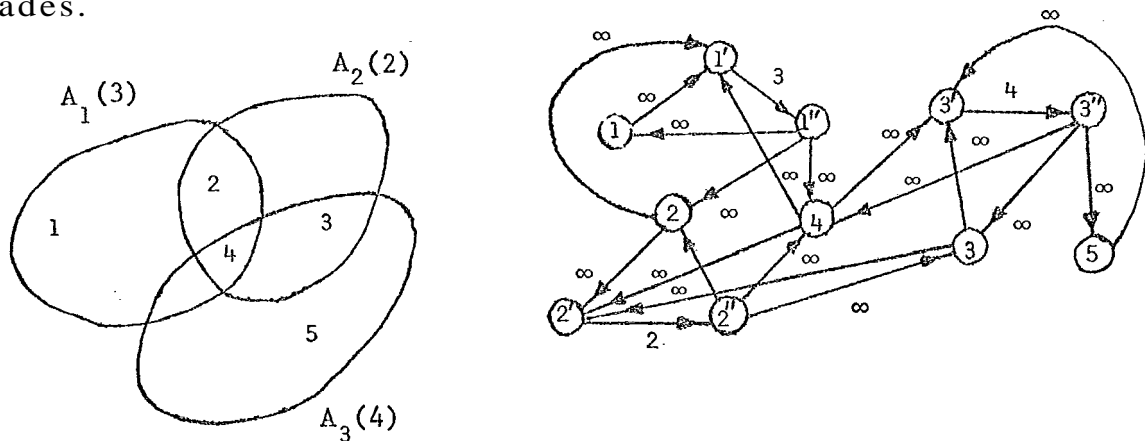


Fig. 5.2: Modelo de Lawler

Dado um hipergrafo  $H=(V,A)$  onde  $|V| = n$  e  $|A|=m$ , segundo Lawler, a rede  $H'$  possuirá  $2m + n$  vértices. Em  $H'$ , definidos os vértices fonte e sumidouro, pode-se determinar o fluxo máximo o qual corresponderá ao fluxo máximo em  $H$ .

Observamos que surge uma dificuldade adicional se não houver restrição de capacidade comum para as arestas e neste caso, é preciso resolver um subproblema de fluxo máximo para cada aresta. Pode-se notar que o modelo de Lawler considera o hipergrafo como não orientado, e cada aresta como uma clique, à qual se impõe uma restrição de capacidade comum (ver figura 5.3)

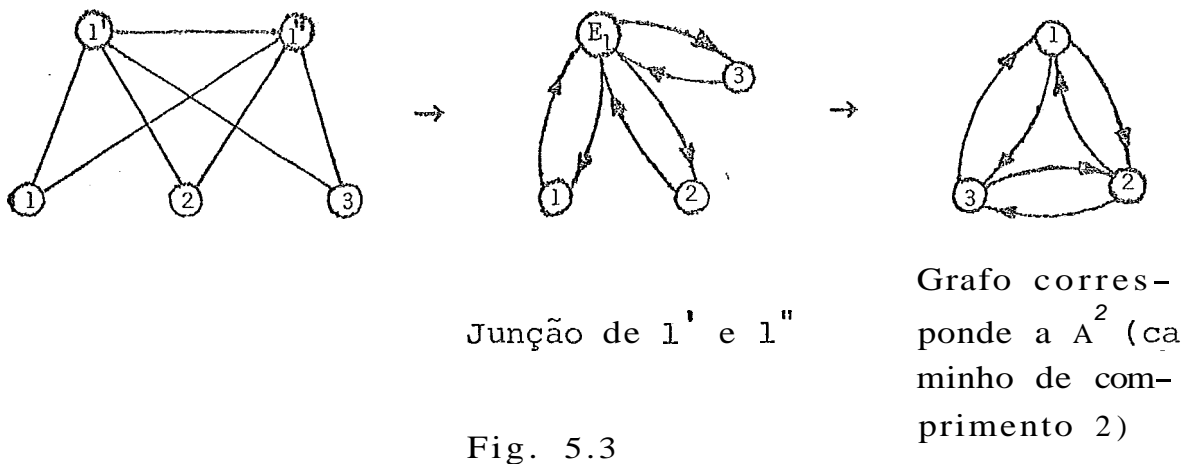


Fig. 5.3

Propomo-nos aqui estudar fluxos em hipergrafos orientados e não orientados, Nestes Últimos levamos em consideração que a cada aresta está associado um grafo completo, logo sempre será possível passar de uma aresta  $A_i$  a outra  $A_j$  desde que  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ .

5.2.2 - Hipergrafo com restrição de capacidade comum

Para um hipergrafo não orientado, podemos conside



rar que a cada aresta está associado um grafo completo e simétrico.

Dizer que as arestas  $E_i, i = 1, 2, \dots, m$  de um hipergrafo possuem restrição de capacidade comum significa que todo  $E_i$  possui um limite máximo de fluxo não importando quantos de fluxo passou na linha  $(x_j, x_k) \in E_i$ , isto é,

$$\sum_k f(E_i, E_k) \leq c(E_i).$$

Como neste caso os vértices passaram a ser secundários, vamos identificar o fluxo de um dado hipergrafo  $H$  não orientado, com restrição de capacidade comum, com um corte de capacidade mínima em uma rede  $G$  construída segundo o critério I a seguir:

Critério I

Para cada aresta  $E_i$  de  $H$ ,  $G$  possuirá dois vértices  $i'$  e  $i''$ , unidos por um arco  $(i', i'')$  de capacidade igual à capacidade da aresta  $E_i$  de  $H$ .

Se  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$  então  $G$  possui uma ligação  $i''$  para  $j'$  e de  $j''$  para  $i'$  com capacidade infinita.

Fixemos em  $G$  um vértice fonte  $s$  e um sumidouro  $t$ . Como  $s \in E_1$  e  $t \in E_m$ , então em  $G$  existirá um arco de  $s$  para  $1'$  e de  $m''$  para  $t$ . Determinamos o fluxo máximo em  $G$  o qual corresponderá ao fluxo máximo em  $H$ .

A figura 5.4 mostra o hipergrafo  $H$  e sua respectiva rede  $G$  construída segundo o critério I.

Teorema 5.2: Existe uma correspondência 1-1 entre

o conjunto corte de capacidade mínima  $(S, V-S)$  do hipergrafo  $H$  e o conjunto corte  $(s, t)$  de capacidade mínima da rede  $G$ . A aresta  $E_i$  de um conjunto corte  $(S, V-S)$  de  $H$  é identificada como a linha  $(i', i'')$  do conjunto corte correspondente a  $(s, t)$  de  $G$ .

Prova

A prova é imediata pela própria construção de  $G$ . A rede é o grafo adjunto de  $H$  desdobrado e orientado.

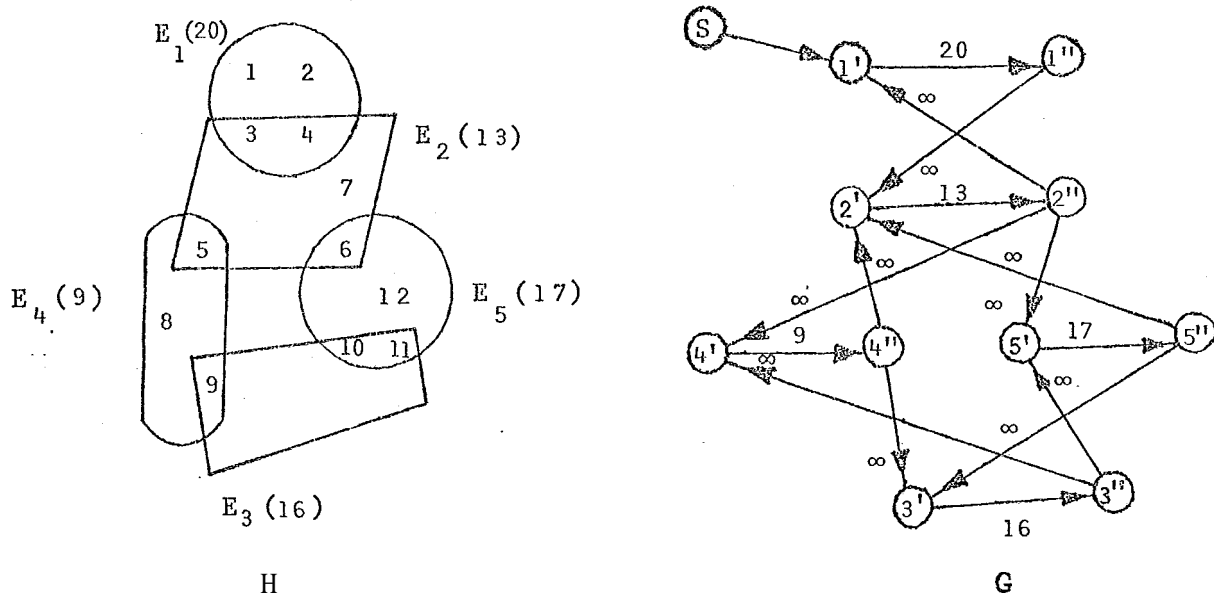


Fig. 5.4 - Hipergrafo H e sua rede adjunta G

Seja  $H$  um hipergrafo. Para determinar os vértices pertencentes a  $E_i \cap E_j$  pelos quais foi emitido fluxo de  $E_i$  para  $E_j$ , construímos a rede  $G$  pelo critério II e determinamos em  $G$  um corte de capacidade mínima que será identificado com o fluxo do hipergrafo  $H$ .

Critério II

Na representação de  $H$  por  $G$ , cada aresta  $E_i$  de  $H$  será representada por dois vértices  $i'$  e  $i''$  e todo vértice

$v \in E_i \cap E_j \neq \emptyset$ ,  $i \neq j$  terá um vértice correspondente em  $G$ .

$G$  possuirá um vértice fonte  $s$  e um sumidouro  $t$ . Existirão em  $G$  um arco  $(i', i'')$  cuja capacidade será igual a da aresta  $E_i$  correspondente de  $H$ . Se o vértice  $k \in E_i$ , então  $G$  possui arcos com capacidade infinita de  $k$  para  $i'$  e de  $i''$  para  $k$ .

A rede da figura 5.4, segundo o critério II terá a forma da figura 5.5 abaixo.

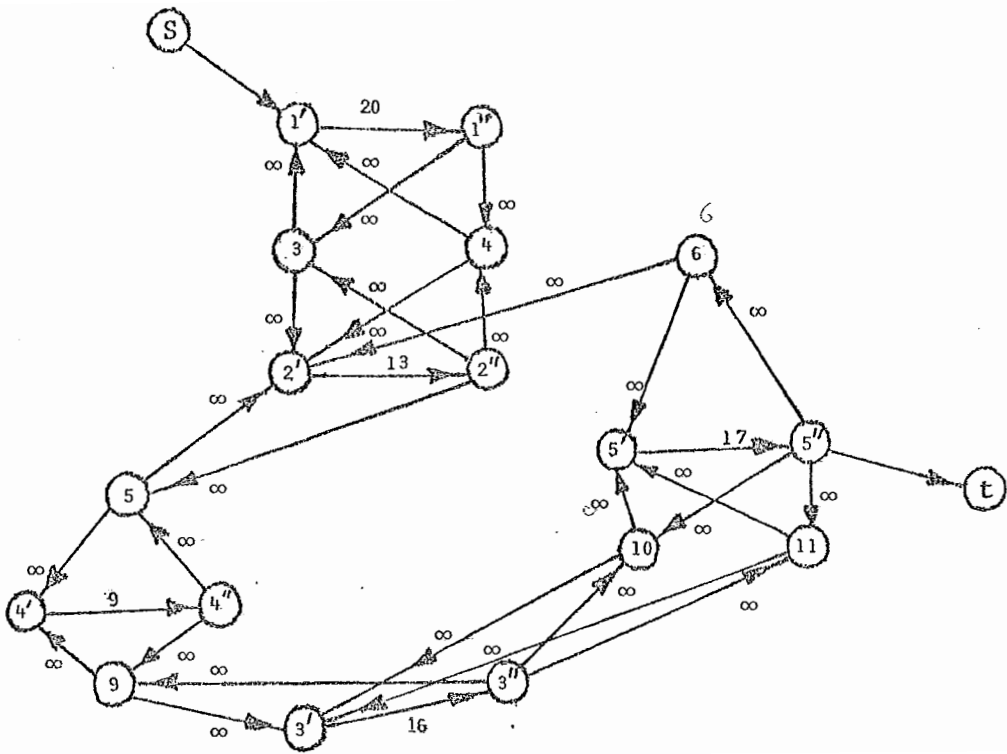


Fig. 5.5

Note-se que, se o hipergrafo possui restrições de capacidade comum, utiliza-se o critério I ou o II para facilitar o trabalho. Porém nada nos impede de utilizar a adaptação de algoritmo de Ford e Fulkerson, apresentado adiante, e determinar o corte de capacidade mínima sobre o próprio hipergrafo.

Chamaremos de aresta fonte ( $E_1$ ), aquela por onde será injetado o fluxo no hipergrafo e aresta sumidouro ( $E_m$ ) aquela por onde sairá o fluxo que conseguir passar através do hiper

grafo. Assim o vértice fonte  $v_s \in E_1$  e o sumidouro  $v_t \in E_m$ .

Como o caminho num hipergrafo necessariamente passa pelas interseções, então os vértices 'pertencentes a  $E_1 \cap E_j$  serão considerados sumidouros para a aresta  $E_1$  e os pertencentes a  $E_i \cap E_m$  serão considerados origens para  $E_m$  e destinos para  $E_i$ .

Vamos considerar  $\{v_s\} \in E_1$  e  $\{v_t\} \in E_m$  como pertencentes a uma interseção fictícia  $E_s \cap E_1 \subset E_1$  e  $E_t \cap E_m \subset E_m$ .

Assim, por exemplo, se no hipergrafo da figura 5.6 (a), (1) e (12) forem considerados origem o sumidouro, então as arestas fictícias  $E_s$  e  $E_t$  serão como mostra a figura 5.6 (b).

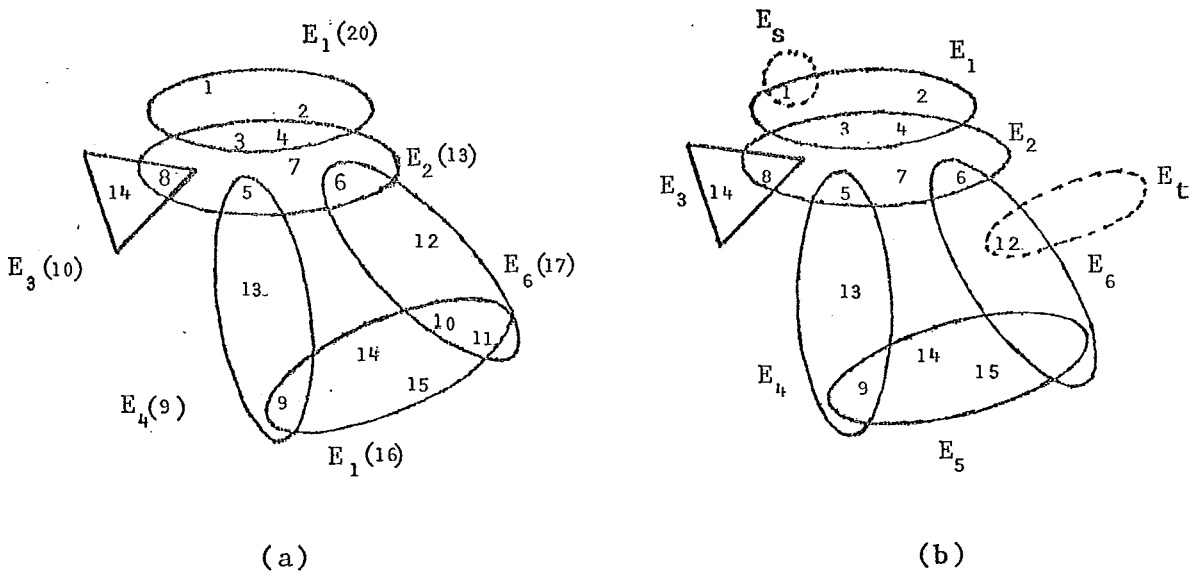


Fig. 5.6

O hipergrafo nesta forma está preparando para receber a atuação do algoritms que segue.

ALGORITMO: Adaptação do algoritmo de Ford e Fulkerson para hipergrafo não orientado.

ROTINA 1: Rotulação

Inicialmente reescrevemos o hipergrafo apagando

todos os vértices não pertencentes a  $E_i \cap E_j$ ,  $i \neq j$ . Observe que os vértices  $v_s$  e  $v_t$  pertencem à interseção fictícia  $E_s \cap E_1$  e  $E_t \cap E_m$ , portanto não serão apagados.

P1: Faça  $i-1$ . Rotule o vértice  $v_s \in E_s$  com  $(-, -, -, F=\infty)$ . A fonte está rotulada.

P2: Para todo  $j = 1, 2, \dots, m$ : faça  $c(E_t) = \infty$   
 $f(E_t) = f(E_j) = f(E_s) = 0$ .

P3: Como apenas a fonte  $v_s$  foi rotulada, selecionamos todo e qualquer vértice  $v \in E_1 \cap E_j$ ,  $j \neq 1$  ainda não rotulado e o rotulamos  $(v_s, E_1, E_j, c(E_1) - f(E_1))$ . Marca  $v_s$ . (O vértice  $v$  é marcado se todos os seus sucessores estão rotulados)

P4: Faça  $i \leftarrow i+1$ . Para todo vértice  $y \in E_1 \cap E_j$ ,  $j \neq i$  que não foi rotulado e tal que  $f(E_j) < c(E_j)$ , assinale o rótulo  $(x, E_j, E_p, f)$  onde  $x$  é o vértice origem da aresta  $E_p$  com um fluxo  $f = \min(f(E_j), c(E_p) - f(E_p))$ .  $y$  está rotulado e não marcado e  $x$  rotulado e marcado.

Repita P4 até que o sumidouro  $v_t \in E_t$  esteja rotulado, ou até que nenhum rótulo possa ser assinalado e o sumidouro não passa ser atingido (rotulado).

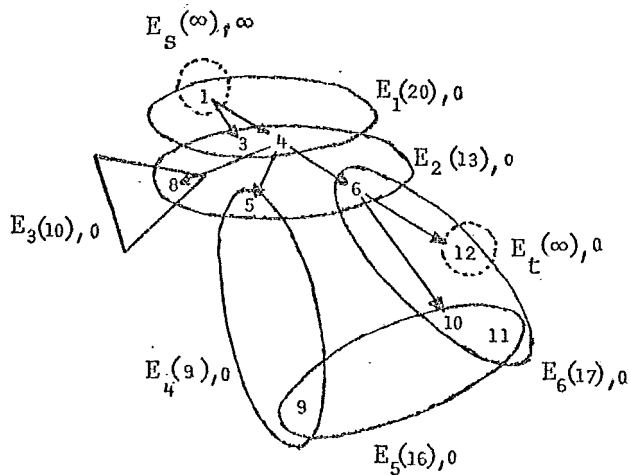
Quando for o caso, ir para rotina 2. (observe que vai sendo expandida uma árvore orientada).

ROTINA 2:

Suponha que o sumidouro  $v_t$  foi rotulado  $(x, E_1, E_t, F)$  então faça  $f(E_i) = f(E_1) + F$  e vai para o vértice  $x$ . A troca de fluxos para, quando a aresta  $E_1$  for atingida. Apaga a rotulação anterior. Faça  $f(E_t) = 0$  e volta a ROTINA 1.

Exemplo: Seja o hipergrafo da figura 5.6.

ROTINA 1



3 e 4 possuem rótulo

$$(1, E_1, E_2, 20)$$

1 está rotulado e marcado

8 possui rótulo

$$(4, E_1, E_3, 13)$$

5 possui rótulo

$$(4, E_2, E_4, 13)$$

6 possui rótulo

$$(4, E_2, E_6, 13)$$

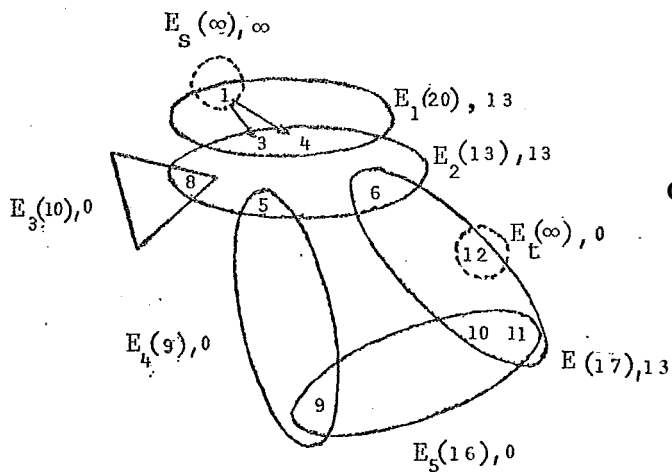
4 está rotulado e marcado

10, 11, 12 possuem rótulos

$$(6, E_6, E_5, 13)$$

$$(6, E_6, E_t, 13)$$

ROTINA 2



Como  $12 \in E_t$  foi atingido

então fazemos

$$f(E_5) = f(E_2) = f(E_1) = 13$$

ROTINA 1

3 e 4 possuem rótulo

$$(1, E_1, E_2, 7)$$

1 está rotulado e marcado.

Porém não é possível

atingir o vértice 12, então para. O fluxo máximo é 13.

### 5.2.3 - Associação de arestas de um hipergrafo a regiões de uma rede

Uma das formas de resolver problemas complexos é analisá-los em partes se a natureza do problema assim o permitir. É evidente que a análise de redes está incluída na classe dos problemas particionáveis uma vez que a rede admite divisões naturais que são as subredes. Nada obsta, portanto, que se associe a cada subrede uma aresta de hipergrafo, podendo-se sistematizar melhor seu tratamento.

Assim, por exemplo., suponhamos que a rede da figura 5.7 adiante, esteja associado um hipergrafo, onde cada subrede é uma aresta. Suponhamos que o vértice (1) seja origem e o (25) sumidouro, onde os números ao lado dos arcos são capacidades. Fazendo abstração das arestas  $E_i$ 's (resultando uma rede comum) e utilizando o algoritmo de Ford e Fulkerson., obtemos o fluxo máximo da rede, que é igual a 17.

Esta é uma das formas de determinar o fluxo máximo de uma rede-hipergrafo. Porém, problemas de grande porte podem exigir particionamento em subredes, seja devido a restrição de capacidade do equipamento usado na análise ou seja devido à conveniência quando a subdivisão nos proporciona informações que de outra forma não seriam facilmente obtíveis. Assim, por exemplo, poder-se-ia determinar:

i) qual a capacidade de fluxo de cada aresta.

ii) quanto de fluxo a aresta  $E_i$  tem capacidade de emitir para a aresta  $E_j$ , considerando  $E_i \cap E_j \neq \Phi$ ,  $i \neq j$ .

iii) qual a capacidade máxima de fluxo de  $E_i \cap E_j \neq \Phi$ ,

$i \neq j$ .

Observemos que, com estas informações, podemos determinar não só o fluxo máximo da rede-hipergrafo, mas também tentar, se possível, melhorar o potencial das arestas incrementando assim o fluxo máximo.

Atenção especial deveser dada ao fato de que as arestas aqui consideradas não possuem restrição de capacidade comum, sendo esta determinada a parte levando-se em conta se é aresta origem, sumidouro ou intermediária.

Se  $E_i = E_1$  (aresta origem)

Seja  $E_s \subset E_1$  o conjunto de vértices considerados origem ( $E_s$  aresta fictícia). O fluxo máximo é determinada na rede da aresta  $E_1$ , considerando como origem'  $\{v | v \in E_s \text{ e } E_s \subset E_1\}$  e sumidouro'  $\{\omega | \omega \in E_1 \cap E_j\}$ .

Esse fluxo máximo é identificado para a rede-hipergrafo como sendo a capacidade máxima da aresta  $E_1$ .

Se  $E_i = E_m$  (aresta sumidouro)

seja  $E_t$  a aresta fictícia, tal que  $E_t \subset E_m$  é o conjunto de vértices considerados sumidouros. O fluxo máximo é determinado na rede da aresta  $E_m$ , considerando como vértices origem'  $\{v | v \in E_m \cap E_i\}$  e sumidouro'  $\{\omega | \omega \in E_t\}$ .

Esse fluxo máximo é identificado para a rede-hipergrafo como sendo a capacidade máxima de fluxo da aresta  $E_m$ .

Se  $E_i$  é intermediária

Para qualquer aresta  $E_i$  intermediária o fluxo máximo é determinado na rede da aresta  $E_i$ , considerando como vértices



tices origem  $\{v | v \in E_k \cap E_i\}$  e sumidouro  $\{\omega | \omega \in E_i \cap E_j, i \neq j \neq k\}$ .

Esse fluxo máximo é identificado para a rede-hipergrafo como sendo a capacidade máxima de fluxo da aresta  $E_i$ .

Nas arestas  $E_1$  e  $E_m$  os vértices origem e sumidouro ficam bem determinados, não acontecendo o mesmo nas demais. Para resolver este problema construímos o grafo linha  $G$  de  $H$  e damos a este uma orientação segundo a das arestas do hipergrafo. Determinando o caminho de  $E_1$  a  $E_m$ , determinamos origens e sumidouros para as arestas intermediárias.

As capacidades de fluxo nas interseções  $E_i \cap E_j$  (considerando a direção  $E_i$  para  $E_j$ ) ficam determinadas calculando o fluxo máximo da rede formada pelos vértices da interseção e tomando-se como origem os antecessores diretos dos vértices  $v_k \in E_i \cap E_j$  em  $E_i$  e como sumidouro os sucessores diretos de todo  $v_k \in E_i \cap E_j$  em  $E_j$ .

A capacidade máxima de fluxo da aresta  $E_i$  assim como de  $E_j \cap E_i \neq \emptyset$ ,  $i \neq j$  é determinada achando-lhe o fluxo máximo quando é introduzido um fluxo infinito nos vértices origem. O fluxo máximo da aresta  $E_i$  vai depender da quantidade de fluxo que chega a cada um de seus vértices origem separadamente.

Portanto, uma aresta inserida num hipergrafo terá sempre um fluxo máximo menor ou igual ao que teria se analisada como uma rede à parte. Este fluxo dependerá da quantidade de fluxo que for emitido de toda aresta  $E_j$  tal que  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$  e  $i \neq j$ .

O fluxo máximo de uma rede-hipergrafo é igual ao fluxo máximo da aresta  $E_m$  introduzindo nos vértices  $\{v\} \in E_j \cap E_m$ , o fluxo máximo que a aresta  $E_j$  emite para  $v$ . Assim como, o flu

o que realmente passará por  $\{\omega\} \in E_i \cap E_j \neq \emptyset$ ,  $i \neq j$ , dependerá dos fluxos máximos das arestas que atingem  $\omega$ .

O fluxo máximo de  $E_i \cap E_j$  (considerando que estamos emitindo fluxo de  $E_i$  para  $E_j$ ) é determinado pois pelo fluxo máximo de  $E_i$  para os sucessores diretos dos vértices pertencentes a  $E_i \cap E_j$  em  $E_j$ . Aqui os vértices origem são os da aresta  $E_i$ .

### 5.2.3.1 - Exemplo ilustrativo

Consideremos o hipergrafo da figura 5.7, Há subjacente ao mesmo uma rede com vértice (1) como origem e (25) como sumidouro.

Vamos determinar a capacidade das arestas, o fluxo máximo das arestas, a capacidade de fluxo das interseções, o fluxo máximo das interseções e o fluxo máximo da rede.

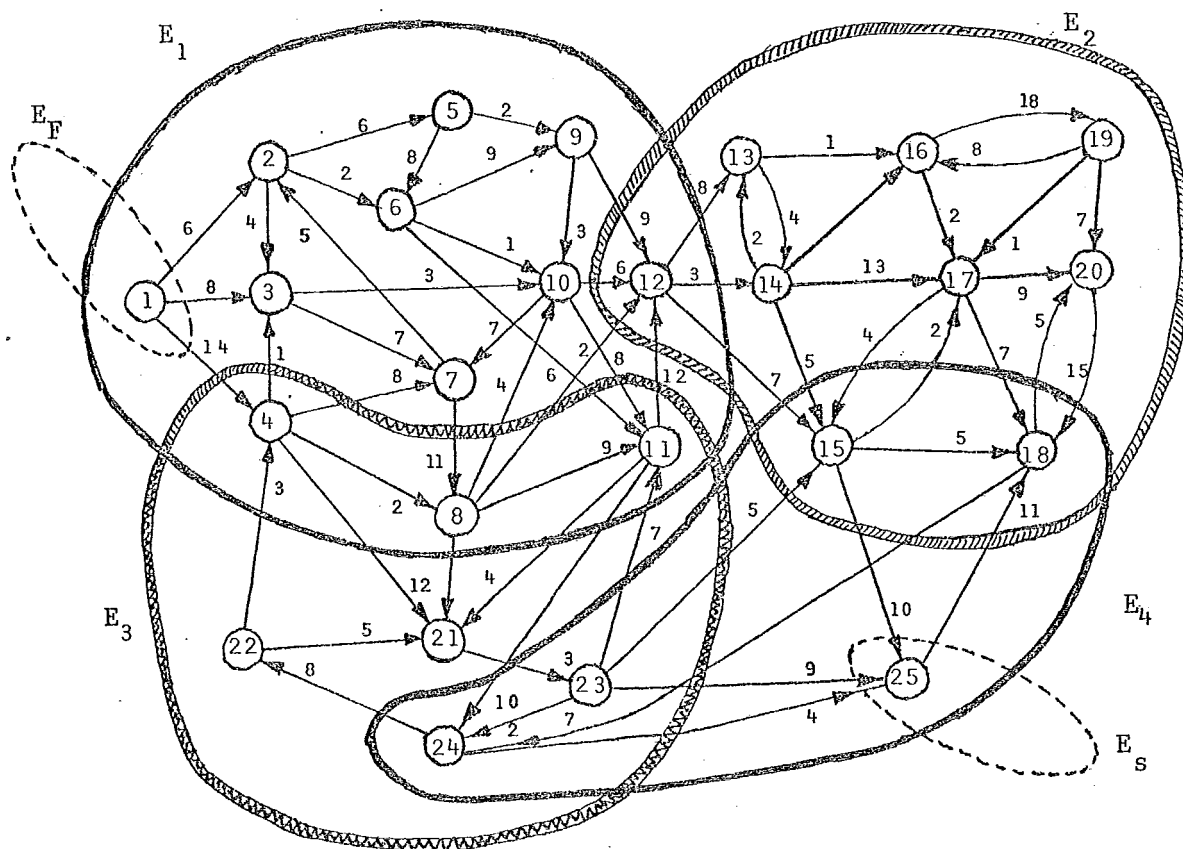


Fig. 5.7

Ao hipergrafo da figura 5.7 corresponde o grafo-linha orientado da figura 5.8,

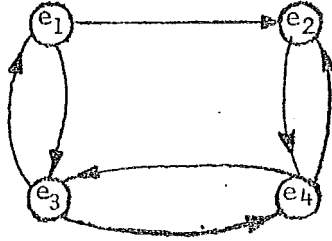
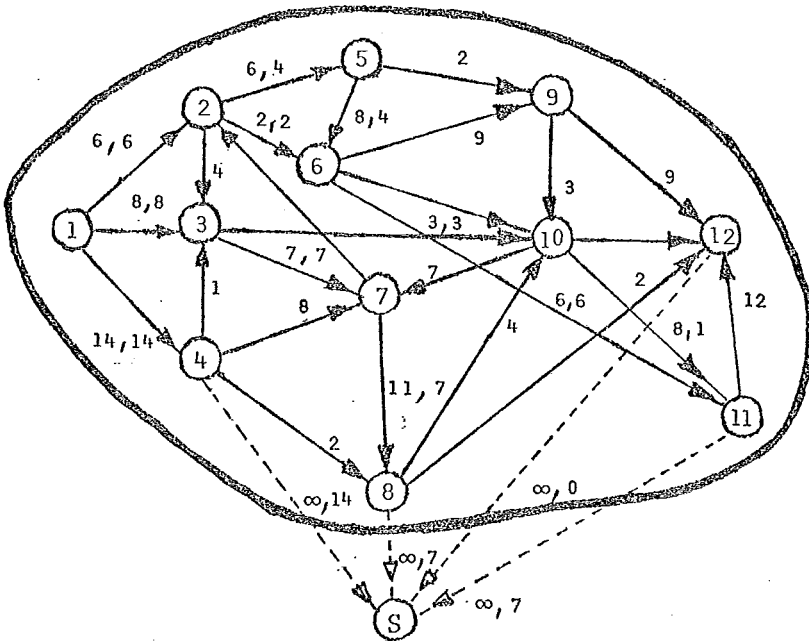


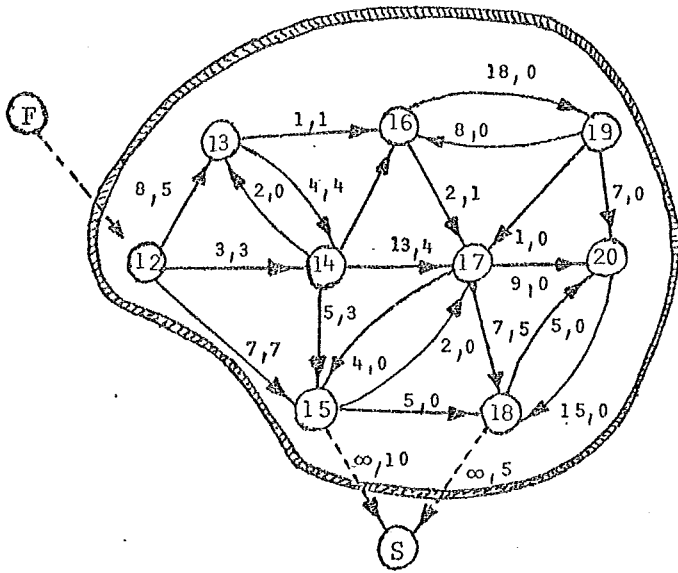
Fig. 5.8 - Grafo-linha orientado

a) Dterminação da capacidade das arestas

O fluxo máxmo do vértice (1) para os sumidouros (4), (8), (11) e (1-2) é 28. Logo a capacidade máxma de fluxo da aresta  $E_1$  (direção  $E_1$  para  $E_2$  e  $E_1$  para  $E_3$ ) é 28.

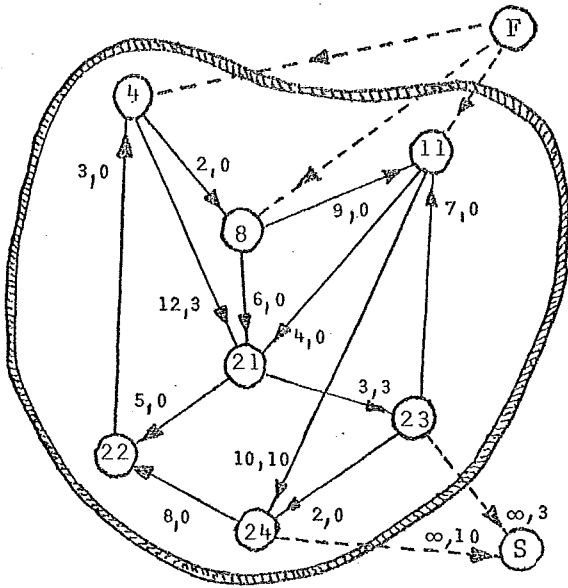


Aresta  $E_1$



ARESTA  $E_2$

O fluxo máximo do vértice origem (12) aos sumidouros (15) e (18) é 15. Logo a capacidade máxima de fluxo (direção  $E_2$  para  $E_4$ ) é 15.

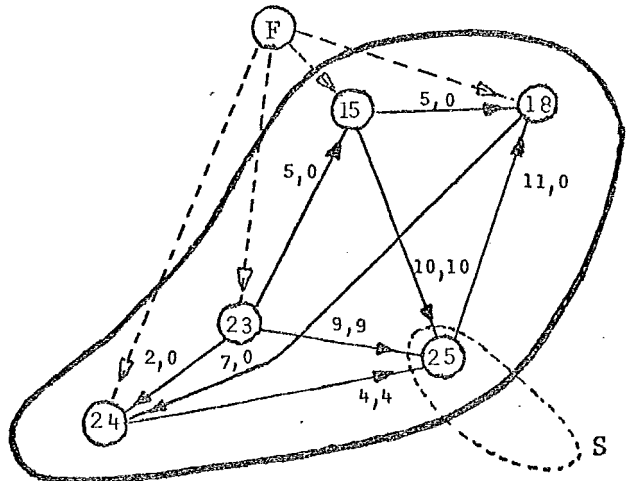


ARESTA  $E_3$

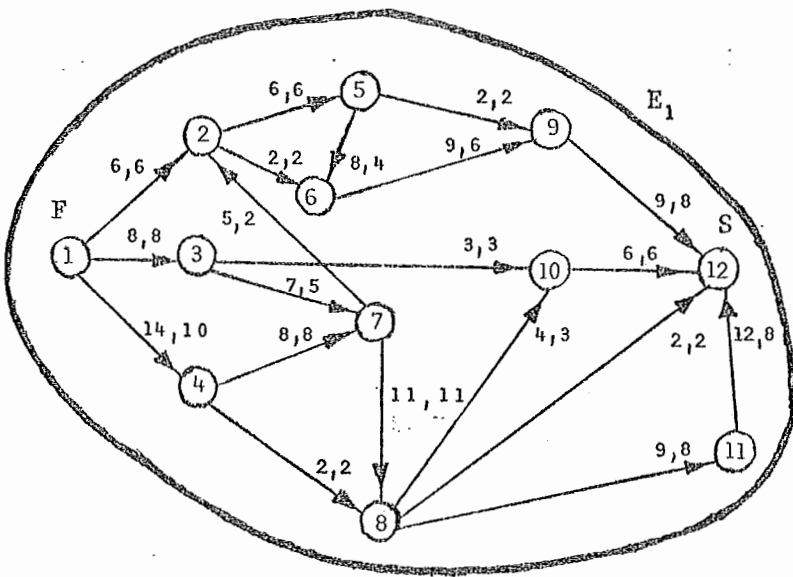
Capacidade máxima de fluxo da aresta  $E_3$  (direção  $E_3$  para  $E_1$ ) é 13. Vértices origem: (4), (8) e (11) Vértices sumidouro: (23) e (24).

ARESTA  $E_4$

Capacidade máxima de fluxo (direção  $E_4$  para  $E_t$ ) é 23. Vértices origem: (18), (23) e (24) Vértice sumidouro: (25)



b) Determinação do fluxo máximo das arestas



ARESTA  $E_1$

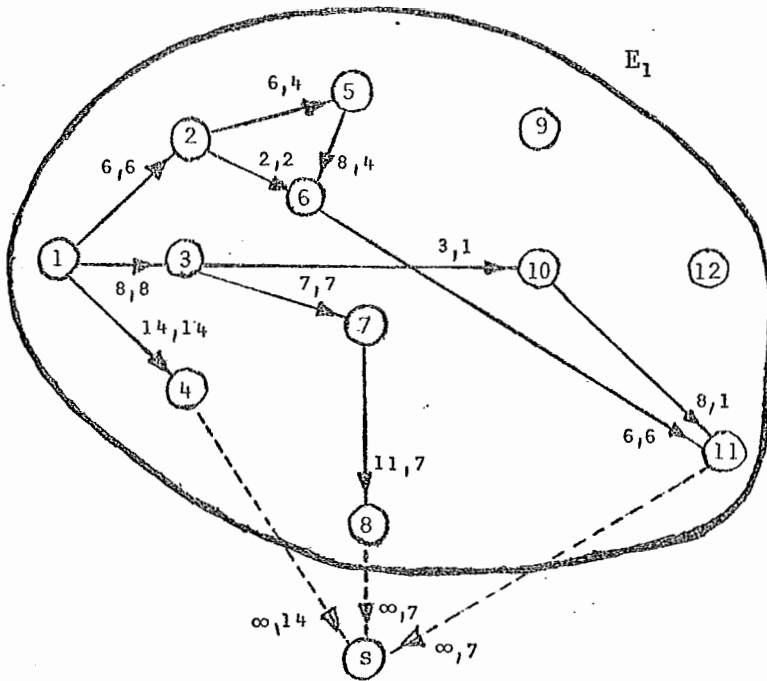
O fluxo máximo que a aresta  $E_1$  é capaz de emitir para a aresta  $E$ , é 24.

Vértice origem:

(1)

Vértice sumidouro:

(12).



ARESTA  $E_1$

O fluxo máximo que a aresta  $E_1$  é capaz de emitir para a aresta'  $E$ , é 26.

Vértice origem:

(1)

Vértice sumidouro:

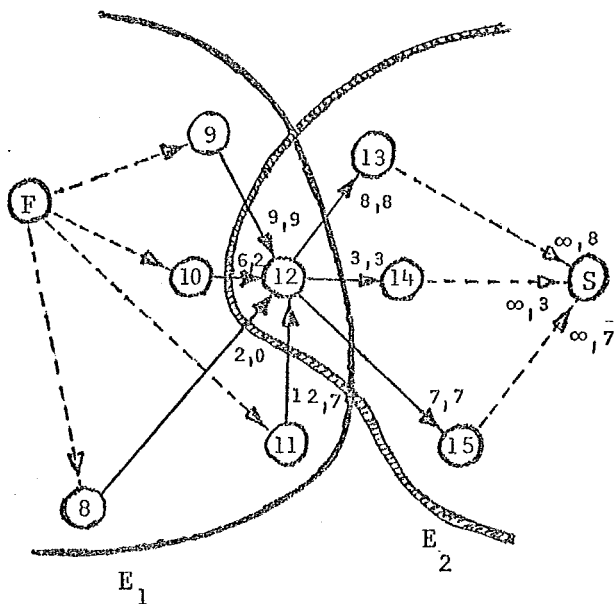
(4), (8) e (11)

O fluxo máximo que a aresta  $E_2$  é capaz de emitir para a aresta  $E_4$  é igual a sua capacidade, isto é, 15. E de  $E$ , para  $E_1$  é nulo.

O fluxo máximo que a aresta  $E_3$  é capaz de emitir para  $E_4$  é igual a sua capacidade, isto é, 13. E de  $E_3$  para  $E_1$  é 10.

O fluxo máximo que a aresta  $E_4$  é capaz de emitir para a aresta  $E_3$  é 7. e para a aresta  $E_2$ , 11.

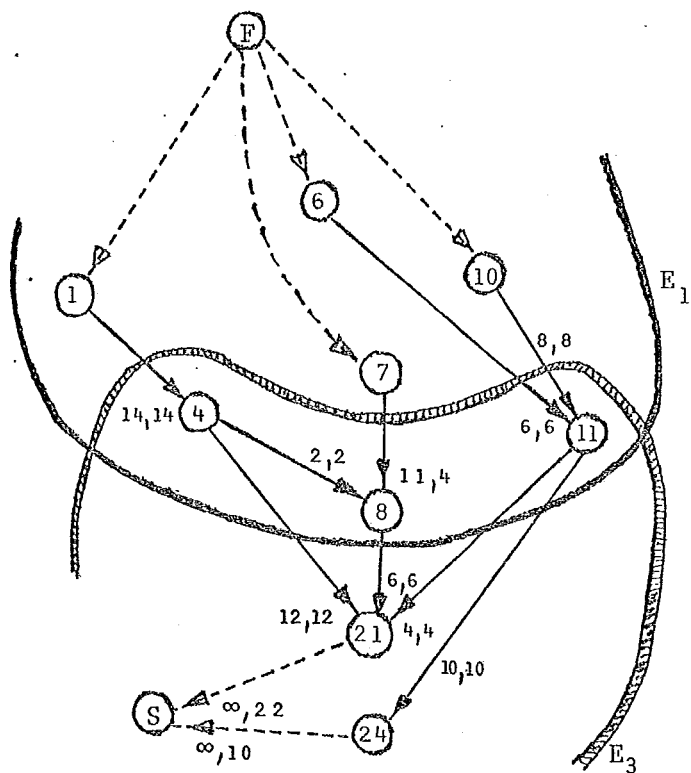
c) Determinação da capacidade de fluxos das interseções



A capacidade máxima de fluxo de  $E_1 \cap E_2$  é 18.

Vértices origem: (9), (10), (8), (11)

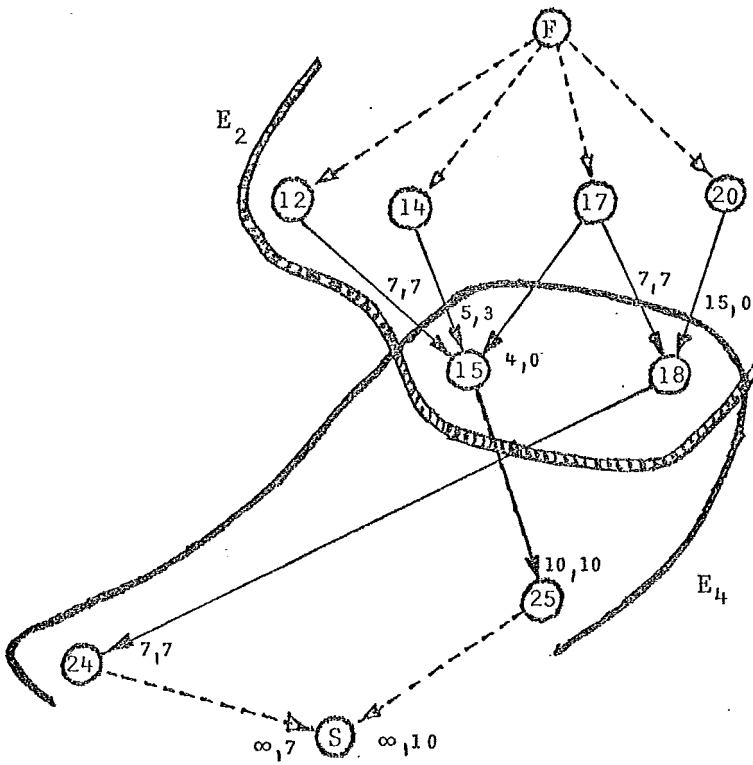
Vértice sumidouro: 3, (14), (15).



A capacidade máxima de fluxo de  $E_1 \cap E_3$  é 32.

Vértice origem: (1), (7), (6), (10)

Vértice sumidouro: (21) e (24).



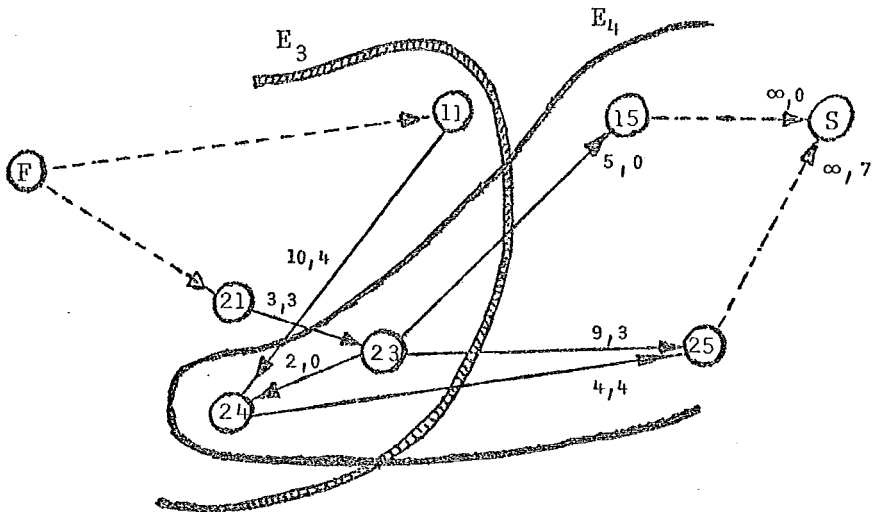
A capacidade máxima de fluxo de  $E_2 \cap E_4$  é 17.

Vértice origem:

$(12), (14), (17), (20)$

Vértice sumidouro:

$(24), (25)$



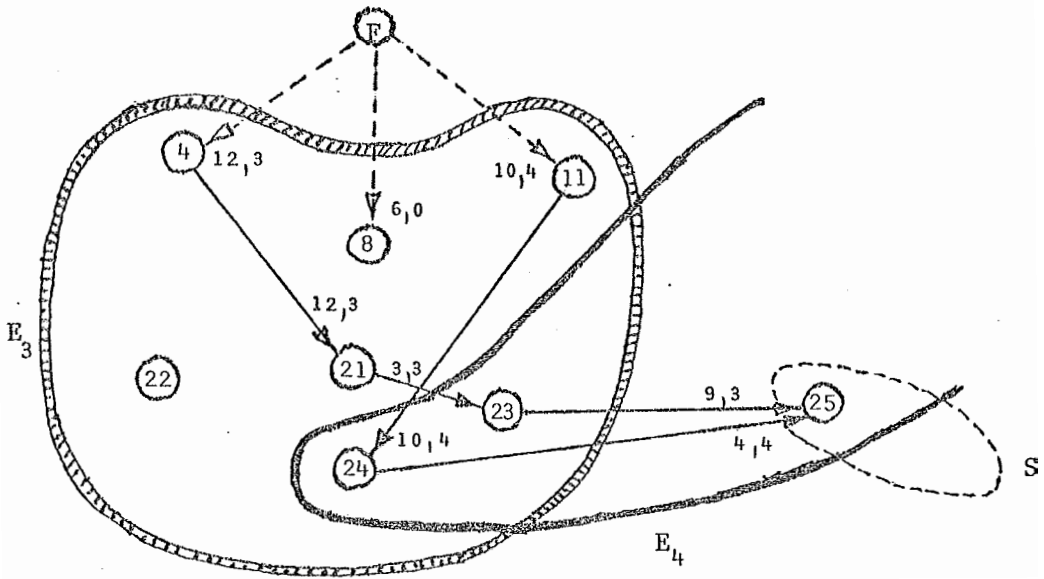
A capacidade máxima de fluxo de  $E_3 \cap E_4$  é 7.

Vértice origem:

$(11), (21)$

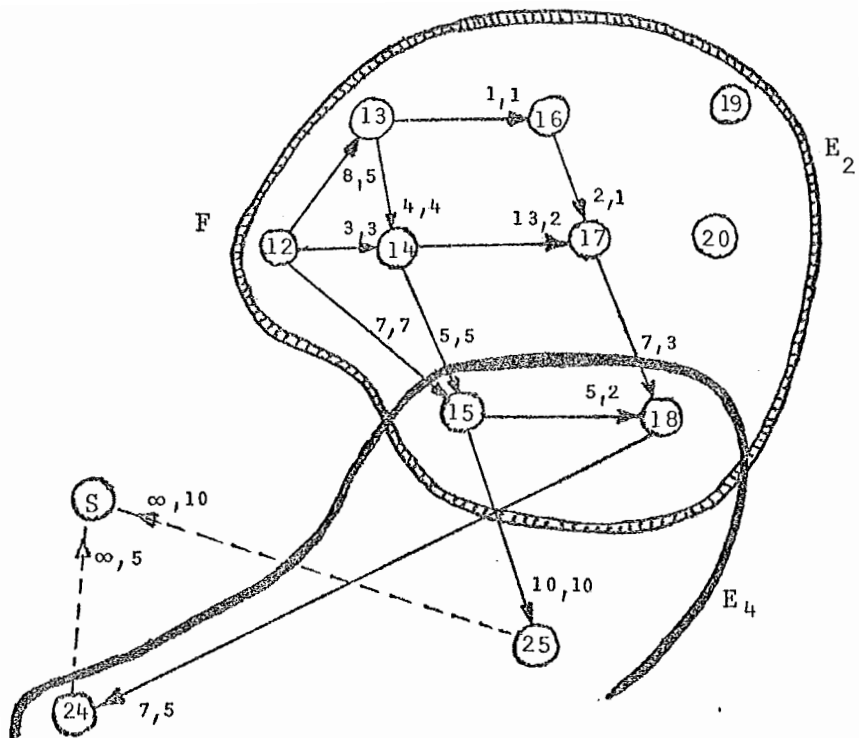
vértice sumidouro:

$(15), (25)$



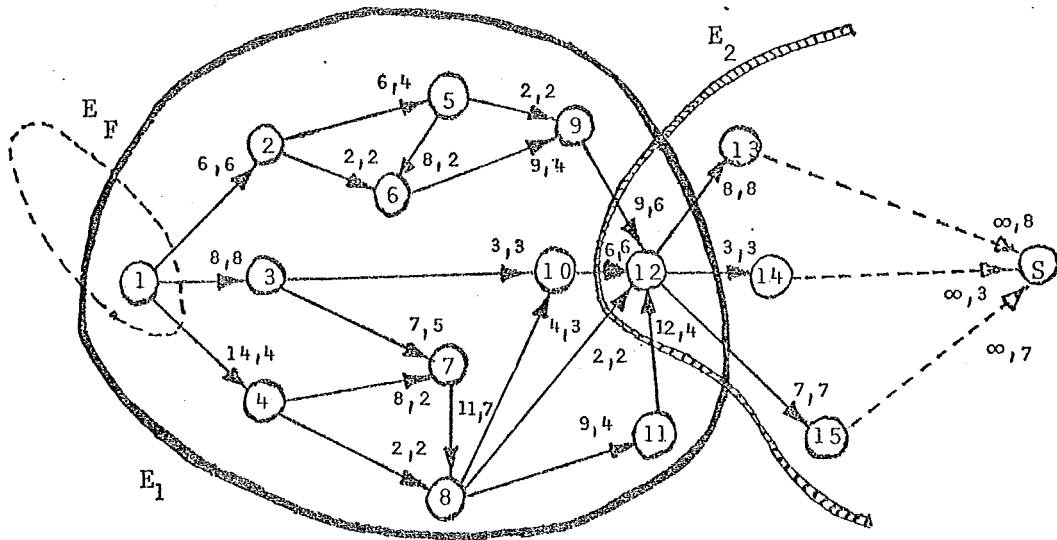
A aresta  $E_3$  recebe de  $E_1$  um fluxo máximo de 28 e consegue fazer passar para a aresta  $E_4$  um fluxd máximo de 7. A capacidade máxima de fluxo de  $E_3 \cap E_4$  é 7.

A aresta  $E_2$  recebe da aresta  $E_1$  um fluxo de no máximo 24, porém consegue fazer passar para a aresta  $E_4$  um fluxo máximo de 15. A capacidade máxima de fluxo de  $E_2 \cap E_4$  é 17.



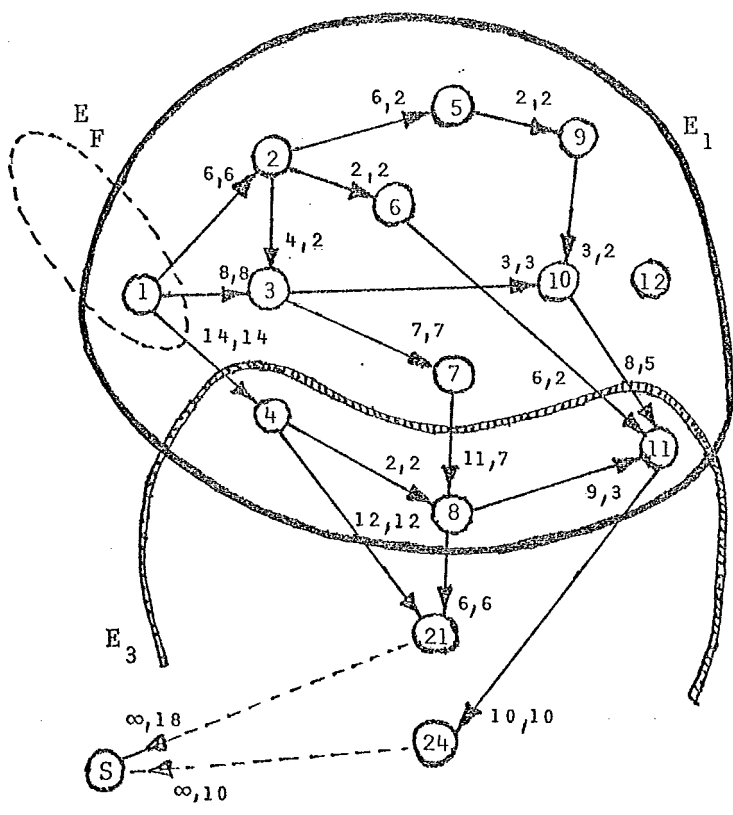


c) Determinação do fluxo máximo da rede

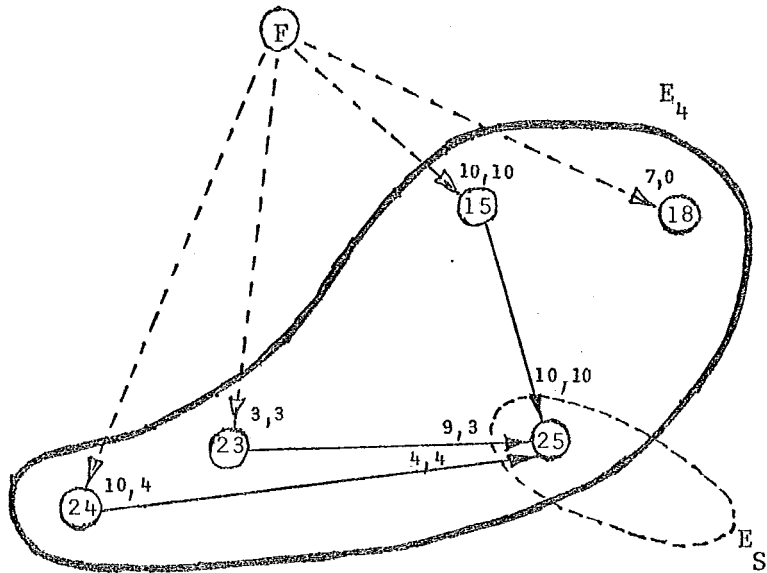


O máximo de fluxo que a aresta  $E_1$  consegue fazer passar para a aresta  $E_2$  é 18. A capacidade de fluxo de  $E_1 \cap E_2$  é 18.

A rede considerada tem como vértice origem (1) e sumidouro (13), (14) e (15).



O máximo de fluxo que a aresta  $E_1$  consegue fazer passar para a aresta  $E_3$  é 28. A capacidade máxima de  $E_1 \cap E_3$  é 32. A rede considerada tem como vértice origem (1) e sumidouro (21) e (24).



A aresta  $E_4$  possui uma capacidade máxima de fluxo igual a 23, porém o fluxo máximo é 17. Esse é o fluxo máximo da rede-hipergrafo.

5.2.4 - Associação de grafos não orientados as arestas de hipergrafos

Suponhamos que a rede-hipergrafo seja não orientado, e que cada linha que liga um vértice  $v_i$  a outro  $v_j$  possua capacidade de fluxo não negativo. Vamos estudar o caso onde dois movimentos paralelos de sentidos contrários podem ser produzidos sobre uma linha  $(v_i, v_j)$ .

Esta teoria tem muitas aplicações práticas, em especial citamos o estudo do controle de tráfego urbano. Neste particular, bairros seriam arestas da rede-hipergrafo cidade. Poder-se-ia, por exemplo, estudar controles sobre a sinalização, de modo que, o tráfego fluísse da melhor forma de determinado

bairro para outro.

para resolver este problema poder-se-ia pensar que tudo se passa como se tivéssemos duas ligações distintas  $(v_i, v_j)$  e  $(v_j, v_i)$ , entre os pontos  $v_i$  e  $v_j$ , e adotar critérios como:

1º) a linha não orientada  $(v_i, v_j)$  possui capacidade  $c(v_i, v_j)$ , então

$$\begin{aligned} f(v_i, v_j) &\leq c(v_i, v_j) \\ (1) \quad f(v_j, v_i) &\leq c(v_i, v_j) \\ f(v_i, v_j) + f(v_j, v_i) &\leq c(v_i, v_j) \end{aligned}$$

onde  $f(v_i, v_j)$  e  $f(v_j, v_i)$  são fluxos entre  $v_i$  e  $v_j$ .

2º) a linha não orientada possui capacidade  $c(v_i, v_j)$  então

$$\begin{aligned} f(v_i, v_j) &\leq c(v_i, v_j) \\ (2) \quad f(v_j, v_i) &\leq c(v_i, v_j) \\ f(v_i, v_j) \cdot f(v_j, v_i) &= 0 \end{aligned}$$

onde  $f(v_i, v_j)$  e  $f(v_j, v_i)$  possui o mesmo significado de (1) e a terceira igualdade significa que o fluxo será permitido somente numa direção.

Nota-se que qualquer que seja o critério escolhido para resolver o problema cujas ligações entre vértices não

são orientadas a priori, é necessário a utilização de duas linhas opostas entre cada vértice com restrições apropriadas.

APÊNDICE

1 - LISTAGEM DA PROGRAMAÇÃO PARA COMPUTADOR

Linguagem usada: FORTRAN

Computador usado para testes:

BUKROUGHS - 6900, mantido pelo Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

2 - PORMENORIZAÇÃO DE UMA ITERAÇÃO DO ALGORITMO DE DISTRITAMENTO

3 - RESULTADOS EXPERIMENTAIS

```
SUBROUTINE REMOVE(KI,KF,ND,IVIZIN,IVIZFM,IVIZ,IFILIN,IFILE
DIMENSION IVIZIN(200),IVIZFM(200),IVIZ(3000),IFILIN(200)
DIMENSION IFILEX(200),NDIS(200)
COMMON ISUC(500),XINFO(200)
DO 13 K=KI,KF
KV=IVIZ(K)
IF(ND.NE.NDIS(KV)) GO TO 13
KI1=IVIZIN(KV)
KF1=IVIZFM(KV)
DO 14 K1=KI1,KF1
NOV=IVIZ(K1)
IF(NDIS(NOV).EQ.ND) GOTO 14
GOTO 13
14 CONTINUE
CALL SAILST(ND,KV,IFILEX)
CALL PORLST(ND,KV,IFILIN)
13 CONTINUE
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE PORLST(I,N,INICLT)
```

C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

```
*****
```

```
PDE NA LISTA I O VERTICE N - A LISTA I E ORDENADA SEGUNDO
(ORDEM CRESCENTE) A FUNCAO OBJETIVA PARTICULAR DE SEUS
SUBDISTRITOS.
CADA LISTA I REPRESENTA UMA ARESTA (DISTRITO) DO HIPERGRA-
FO (AREA TOTAL).
```

```
*****
```

```
DIMENSION INICLT(200)
COMMON ISUC(500),XINFO(200)
IF(INICLT(I).GT.0)GOTO 16
INICLT(I)=N
ISUC(N)=0
RETURN
16 NA=INICLT(I)
22 IF(NA.EQ.N) RETURN
IF(XINFO(NA).LT.XINFO(N)) GOTO 19
IANT=NA
NA=ISUC(NA)
IF(NA.NE.0)GOTO22
ISUC(IANT)=N
ISUC(N)=0
RETURN
19 IF(NA.EQ.INICLT(I))GOTO 23
ISUC(IANT)=N
ISUC(N)=NA
RETURN
23 INICLT(I)=N
ISUC(N)=NA
RETURN
END
```

SUBROUTINE SAILST(I,N,INICLT)

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

RETIRA DA LISTA I O VERTICE N

\*\*\*\*\*

```

DIMENSION INICLT(200)
COMMON ISUC(500),XINFO(200)
IANT=INICLT(I)
IF(IANT.EQ.N) GOTO 3
1 IPOS=ISUC(IANT)
IF(IPOS.EQ.N)GOTO 2
IANT=IPOS
IF(IPOS.EQ.0)GOTO 4
GOTO 1
2 ISUC(IANT)=ISUC(IPOS)
RETURN
3 INICLT(I)=ISUC(IANT)
RETURN
4 WRITE(6,5) N
5 FORMAT(/ /2X,' VERTICE ',1X,I3,1X,' NAO FOI ENCONTRADO')
RETURN
END

```

SUBROUTINE CONEXA(NVIS,KM1,KM2,KM3,KM4)

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

VERIFICA A CONEXIDADE DOS DISTRITOS

\*\*\*\*\*

```

COMMON ISUC(500),XINFO(200),ICONTA,IVICOP(200),NUM
COMMON IVIZIN(200),IVIZFM(200),IVIZ(3000)
ICONTA=ICONTA+1
IF(ICONTA.GE.NUM)RETURN
KI=IVIZIN(NVIS)
KF=IVIZFM(NVIS)
DO 4 NV=1,NUM
IF(IVICOP(NV).NE.NVIS)GO TO 4
IVICOP(NV)=-IVICOP(NV)
GOTO 5
4 CONTINUE
5 CONTINUE
DO 2 K=KI,KF
NOVK=IVIZ(K)
DO 3 K3=1,NUM
IF(NOVK.EQ.IVICOP(K3))CALL CONEXA(NOVK,K,KI,KF,K3)
3 CONTINUE
2 CONTINUE
RETURN
END

```

FUNCTION CONSUL(L,IV)

C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

FUNCAO QUE CONSULTA LISTA L, PARA VER SE CONTEM PONTO IV

\*\*\*\*\*

```
COMMON ISUC(500),XINFO(200)
IF(L.EQ.0)GOTO 3
K=L
2 IF(K.NE.IV)GOTO 1
CONSUL=1.
RETURN
1 K=ISUC(K)
IF(K.GE.1)GOTO 2
3 CONSUL=-1.
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE ARVORE(MA,IND,IN,IF)
COMMON IAPA(4102),A(200),NUSADO(50),NPROF(50),CAREN(50)
COMMON ITERMO(50),INVDIS(50),IFVDIS(50),NEARDI(1000)
COMMON ADIST(50),EACIST,IPAI(50),MN
NPROPA=MN-1
NUSADO(MA)=1
I1=INVDIS(MA)
I2=IFVDIS(MA)
DO 1 INJ=I1,I2
ID=NEARDI(INJ)
IF(ID.EQ.IPAI(MA))GOTO 1
IF(NUSADO(ID).EQ.0)GOTO 2
IF((NPROF(MA)+1).GE.NPROF(ID)) GOTO 1
IDD=ID
NA=MA
ITEMP=IPAI(IDD)
IPAI(IDD)=NA
NPROF(IDD)=NPROF(NA)+1
IF(ITEMP.EQ.0)GOTO 3
CALL ARVORE(IDD,INJ,I1,I2)
GOTO 3
2 NPROF(ID)=NPROF(MA)+1
IPAI(ID)=MA
3 IF(NPROF(MA).EQ.NPROPA) RETURN
IF(NUSADO(ID).GT.0)GOTO 1
CALL ARVORE(ID,INJ,I1,I2)
1 CONTINUE
RETURN
END
```



```

SUBROUTINE IATUV D(IVC, IFILEX, NDIS)
DIMENSION IAJUDA(1000), IFILEX(200), NDIS(200)
COMMON ISUC(500), XINFO(200), ICONTA, I VICOPI(200), NUM
COMMON IVIZIN(200), IVIZFM(200), IVIZ(3000)
COMMON NUSAD(50), NPROF(50), CAREN(50), ITERM(50), INVDIS(50), EADIST
COMMON IFVDIS(50), NEARDI(1000), ADIST(50), EADIST
DO 2004 MP=1, IVO
NEARDI(MP)=0
CONTINUE
IVAR=0
2004 IVO=0
IVAR=IVAR+1
DO 2007 MAR=1, MN
IAJUDA(MAR)=0
K=IFILEX(IVAR)
2006 J1=IVIZIN(K)
J2=IVIZFM(K)
DO 2002 J3=J1, J2
JNOV=IVIZ(J3)
INA=NDIS(JNOV)
IF (INA.EQ.IVAR) GOTO 2002
IAJUDA(INA)=1
CONTINUE
2002 K=ISUC(K)
IF (K.GT.0) GOTO 2006
INVDIS(IVAR)=IVO+1
DO 2003 IC=1, MN
IF (IAJUDA(IC).EQ.0) GOTO 2003
IVO=IVO+1
NEARDI(IVO)=IC
CONTINUE
2003 IFVDIS(IVAR)=IVO
IF (IVAR.LT.MN) GOTO 2001
DO 2005 MPA=1, MN
IPAI=INVDIS(MPA)
IPAZ=IFVDIS(MPA)
2005 CONTINUE
RETURN
END
```



```
      IVIZIN(I)=0
      IVIZFM(I)=0
4001  CONTINUE
      DO 4002 I=1,50
      ISUBD(I)=0
      MARCAD(I)=0
4002  CONTINUE
      DO 4003 I=1,3000
4003  IVIZ(I)=0
      DO 4004 I=1,500
4004  ISUC(I)=0
      READ(5,100) M,N,NSUBD,AREATL
100   FORMAT(3I5,F20.4)
      MN=M+N
      EADIST=AREATL/MN
      EPSLON=AREATL/NSUBD
      EPSLOE=EADIST+EPSLON/2.
      EPSLOF=EADIST-EPSLON/2.
      DELTA=0.
      DO 1 I=1,MN
      IFILEX(I)=0
      IFILIN(I)=0
      INVDIS(I)=0
      IFVDIS(I)=0
      ADIST(I)=0.
1     CONTINUE
      WRITE(6,77) MN
      WRITE(6,78) NSUBD
      WRITE(6,79) AREATL
77    FORMAT(//2X,'NUMERO DE DISTRITOS',I5)
78    FORMAT(//2X,'NUMERO DE SUBDISTRITOS',I5)
79    FORMAT(//2X,'AREA TOTAL ',F20.4)
```

C  
C \*\*\*\*\*

C  
C MONTA LISTA DE VIZINHOS DOS SUBDISTRITOS

C  
C \*\*\*\*\*

```
      WRITE(6,901)
901   FORMAT(//2X,'SUBDISTRITO',6X,' VIZINHO')
      NSDA=0
      IVO=0
3     READ(5,200) NSD,(IVAUX(I),I=1,25)
200   FORMAT(26I3)
      IF(NSD.LT.0)GOTO 5
      IF(NSD.NE.NSDA)IVIZIN(NSD)=IVO+1
      DO 2 I=1,25
      IF(IVAUX(I).LT.1)GOTO 4
      IVO=IVO+1
      IVIZ(IVO)=IVAUX(I)
2     CONTINUE
      NSDA=NSD
      GOTO 3
4     IVIZFM(NSD)=IVO
```

```

C *****
C
C IMPRIME LISTA DE VIZINHOS DOS SUBDISTRITOS.
C
C *****

```

```

M1=IVIZIN(NSD)
WRITE(6,902) NSD, (IVIZ(IT),IT=M1,IVO)
902 FORMAT(2X,I3,12X,25I3)
NSDA=NSD
GOTO 3
5 CONTINUE

```

```

C *****
C
C LE AKEA DOS SUBDIST. E CALCULA AREAS DOS MN DISTRITOS
C FEITOS ANTERIORMENTE.
C
C *****

```

```

READ (5,300) (XINFO(I),I=1,NSUBD)
WRITE(6,2290) (XINFO(IT),IT=1,NSUBD)
2290 FORMAT(2X,'XINFO',4X,20F4.0)
READ(5,301) (NDIS(I),I=1,NSUBD)
DO 7 I=1,NSUBD
J=NDIS(I)
ISUBD(J)=ISUBD(J)+1
ADIST(J)=ADIST(J)+ XINFO(I)
300 FORMAT(20F4.0)
301 FORMAT(26I3)
7 CONTINUE
DO 26 IA=1,MN
DELTA=DELTA+(EADIST-ADIST(IA)) ** 2
26 CONTINUE
DELTA=SQRT(DELTA/MN)
IF(DELTA.LT.1)GOTO 4000
DESVIO =DELTA

```

```

C *****
C
C MONTAGEM DAS LESTAS DE SUBDISTRITOS VIZINHOS ,EM ESPIRAL
C (INTERNOS E EXTERNOS) A PARTIR DA LEITURA DOS SUBDIST.
C DE CADA DISTRITO .
C
C *****

```

```

WRITE(6,2291)
2291 FORMAT(/2X,'DISTRITO',6X,'SUBDISTRITO')
8 READ(5,200) ND,(IVAUX(I),I=1,25)
IF(ND.LT.1)GOTO 9

```

```

C *****
C
C POE SUBDISTRITO NA LISTA DE INTERNO OU EXTERNO,
C
C *****

```

```

DO 6 I=1,25

```

```

IF(IVAUX(I).LT.1)GOTO 80
IV=IVAUX(I)
KI=IVIZIN(IV)
KF=IVIZFM(IV)
DO 11 K=KI,KF
NOV=IVIZ(K)
IF(NDIS(NOV).EQ.ND)GOTO 11

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

CONCLUI-SE QUE O SUBDISTRITO E EXTERNO,

\*\*\*\*\*

```

CALL PORLST(ND,IV,IFILEX)
GOTO 6
11 CONTINUE
CALL PORLST (ND,IV,IFILIN)
GOTO 6
80 IFIM=I-1
WRITE(6,2292)ND,(IVAUX(IT),IT=1,IFIM)
2292 FORMAT(2X,I3,12X,25I3)
GOTO 8
6 CONTINUE
9 CONTINUE

```

C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

MONTA LISTA DOS VIZINHOS DOS DISTRITOS

\*\*\*\*\*

```

WRITE(6,106)
106 FORMAT(//2X,'DISTRITO',10X,'VIZINHO')
IVO=1000
CALL IATUVD(IVO,IFILEX,NDIS)

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

IMPRIME LISTA DOS VIZINHOS DOS DISTRITOS

\*\*\*\*\*

```

DO 2000 NSD=1,MN
M1=INVDIS(NSD)
M2=IFVDIS(NSD)
WRITE(6,107) NSD,(NEARDI(IT),IT=M1,M2)
107 FORMAT(2X,I3,12X,25I3)
2000 CONTINUE
WRITE(6,109) EADIST,EPSLON
109 FORMAT(//2X,'EADIST',2X,F20.4,//2X,'EPSLON',2X,F20.4)
WRITE(6,104)
104 FORMAT(//2X,'DELTA',40X,'AREA DOS DISTRITOS')
WRITE(6,800) DELTA,(ADIST(IT),IT=1,MN)
800 FORMAT(2X,F8.4,10X,16F6.2)

```

```

C *****
C BALANCEAMENTO DOS DISTRITOS - ARVORE
C *****

```

```

C ITCHAV=1
C ICHAVE=1
224 ICONTA=0
C NUMF=0
C IVOLTA=IVDLTA+1
C IP=0
221 IP=IP+1
C IF(IP.GT.MN) GOTO 2280
C IVOLTA=0
C IF((ISUBD(IP)-1).LE.0)MARCAD(IP)=1
C IF(MARCAD(IP).GT.0)GOTO 221
C IP1=IP+1
C DO 216 I=IP1,MN
C IF(MARCAD(I).GT.0)GOTO 216
C IF((ISUBD(I)-1).LE.0)GOTO 216
C IF(ADIST(I).GT.ADIST(IP))IP=I
216 CONTINUE

```

```

C *****
C IP CONTEM O INDICE DO DISTRITO COM MAIOR AREA.
C PROCURA VIZINHO COM MENOR CARENCIA - NOME -
C TENTA PASSAR EXCESSOS DE IP=NOMA PARA NOME
C *****

```

```

C NOMA=IP
C NOPAI=IP
C MARCAD(NOMA)=1
C NOME=0
C DO 157 I5=1,MN
C NUSADO(I5)=0
C NPROF(I5)=0
C CAREN(I5)=ADIST(I5)-EADIST
C ITERMO(I5)=-1
C IPAI(I5)=0
157 CONTINUE

```

```

C CALL ARVORE(NOMA,I1,I2,I3)
C JOGA EXCESSO OU FALTA DO FILHO PARA O PAI
C *****

```

```

C SE ITERMO(I)=-1, ENTAC I E TERMINAL

```

```

C *****
C DO 158 II=1,MN
C IIP=IPAI(II)
C IF(IIP.EQ.0)GOTO 158
C IF(ITERMO(IIP).LT.0)ITERMO(IIP)=0
C ITERMO(IIP)=ITERMO(IIP)+1
158 CONTINUE
C DO 159 II=1,MN
C L=II
C IF(ITERMO(L).GE.0)GOTO 159

```

```
160 IIP=IPAI(L)
    IF(IIP.EQ.NOMA)GOTO 1590
    ITERMO(IIP)=ITERMO(IIP)-1
    CAREN(IIP)=CAREN(IIP)+CAREN(L)
    IF(ITERMO(IIP).NE.0)GOTO 159
    L=IIP
    GOTO 160
1590 NUMF=NUMF+1
    159 CONTINUE
900  N1=INVDIS(NOMA)
    N2=IFVDIS(NOMA)
    CARENP=AREATL
    NOME=0
    DO 503 KL=N1,N2
    IV=NEARDI(KL)
    IF(MARCSO(IV).GT.0)GOTO 503
    IF(CAREN(IV).GT.CARENP)GOTO 503
    CARENP=CAREN(IV)
    IF(NOME.GT.0)GOTO 505
    NOME=IV
503  CONTINUE
    MARCAD(NOMA)=1
    GOTO 221
```

```
C
C *****
C
C PROCURA MAIOR SUBDISTRITO EXTERNO NO DISTRITO MAIOR=NOMA
C MAI=MAIOR SUBDISTRITO DE NOMA
C VERIFICA SE K E VIZINHO DO DISTRITO - NOME
C VERIFICA SE O DISTRITO NOMA NAO FICA DESCONEXO COM A RETI-
C RADA DE MAI
C *****
C
```

```
505  MAI=0
    K=IFILEX(NOMA)
219  IA=IVIZIN(K)
    IF=IVIZFM(K)
    DO 225 I=IA,IF
    IV=IVIZ(I)
    IF(NDIS(IV).EQ.NOME) GOTO 226
225  CONTINUE
    GOTO 220
226  NUM=0
    DO 12 M=IA,IF
    NOV=IVIZ(M)
    IF(NDIS(NOV).NE.NOMA) GOTO 12
    NUM=NUM+1
    IVICOP(NUM)=NOV
12  CONTINUE
    ICONTA=0
    CALL CONEXA(IVICOP(1),NN,KI,KF,K3)
    IF(ICONTA.NE.NUM)GOTO 220
    IF(MAI.EQ.0)GOTO 222
    TEMP1=EADIST-ADIST(NOMA)-XINFO(K)
    TEMP2=EADIST-ADIST(NOMA)-XINFO(MAI)
    IF(ABS(TEMP2).LT.ABS(TEMP1))GOTO 220
```

```

222 MAI=K
220 K=ISUC(K)
    IF(K.GE.1) GOTO 219
    IF(MAI.NE.0) GOTO 10
    MARCSD(NOME)=1
    NOME=0
    GOTO 900
10  CALL SAILST(NOMA,MAI,IFILEX)
    CALL PORLST(NOME,MAI,IFILEX)
    ADIST(NOME)=ADIST(NOME)+XINFO(MAI)
    ADIST(NOMA)=ADIST(NOMA)-XINFO(MAI)
    NDIS(MAI)=NOME
    ICONTA=0
    CAREN(NOMA)=CAREN(NOMA)-XINFO(MAI)
    CAREN(NOME)=CAREN(NOME)+XINFO(MAI)
    ISUBD(NOMA)=ISUBD(NOMA)-1
    ISUBD(NOME)=ISUBD(NOME)+1
    DO 804 IMP=1,MN
804 MARCSD(IMP)=0

```

```

C
C *****
C
C PASSA PARA INTERNO OS QUE FICARAM INTERNOS - NOME -
C ISTO E , ATUALIZA O
C IFILEX(NOMA) E IFILIN(NOMA),IFILEX(NOME) E IFILIN(NOME)
C
C *****
C
C K1=IVIZIN(MAI)
C K2=IVIZFM(MAI)
C DO 110 K=K1,K2
C NOV=IVIZ(K)
C IF(CONSUL(IFILIN(NOMA),NOV).LT.0) GOTO 110
C CALL SAILST(NOMA,NOV,IFILIN)
C CALL PORLST(NOMA,NOV,IFILEX)
110 CONTINUE
C CALL REMOVE(K1,K2,NOME,IVIZIN,IVIZFM,IVIZ,IFILIN,IFILEX,ND
C EXCESS=EXCESS-XINFO(MAI))
C
C *****
C
C ATUALIZA VIZINHOS DCS DISTRITOS
C
C *****
C
C CALL IATUVD(IVO,IFILEX,NDIS)
C
C *****
C
C DETERMINA O DESVIO PADRAO. SE FOR IGUAL A ZERO ENTAO PARE.
C SE O DISTRITO NOMW FICOU MENOR QU IGUAL A MEDIA ESPERADA
C ENTAO VOLTA PARA PROCURAR OUTRO NOMA.
C SENAO VERIFICA SE NCMA POSSUI MAIS QUE UM SUBDISTRITO E
C VOLTA A ARVORE PARA PROCURAR UM OUTRO NOME
C
C *****

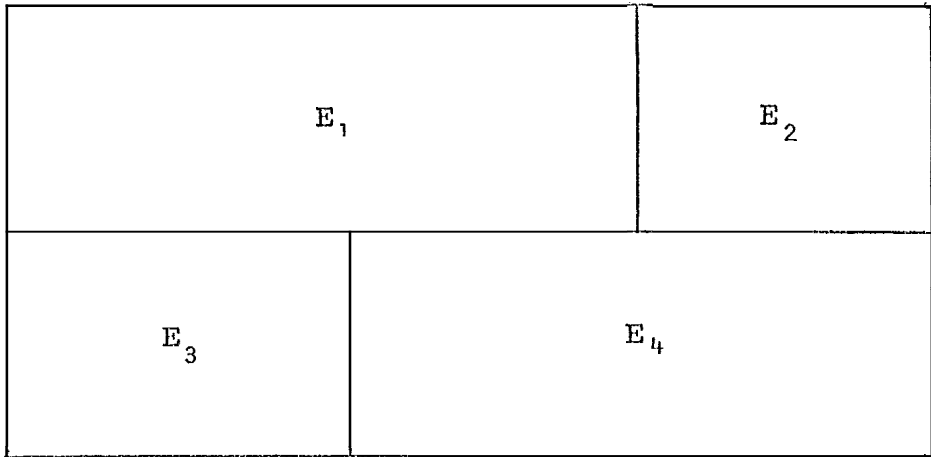
```



```
DELTA=0.
DO 266 IA=1,MN
DELTA=DELTA+(EADIST-ADIST(IA))**2
266 CONTINUE
DELTA=SQRT(DELTA/MN)
IF(DELTA.GT.DESVIO)GOTO 2282
DESVIO=DELTA
WRITE(6,2239) (IPAI(IT),IT=1,MN)
2239 FORMAT(2X,20I3)
WRITE(6,700) (NDIS(I),I=1,NSUBD)
700 FORMAT(/,2X,' NDIS ',4X, 20I3)
WRITE(6,800) DELTA,(ADIST(IT),IT=1,MN)
WRITE(6,2010) ITCHAV
2010 FORMAT(/,2X,' NUMERO DE MODIFICACOES FEITAS',2X,I6)
IF(DELTA.LT.1)GOTO 4000
2282 CONTINUE
ITCHAV=ITCHAV+1
IF(ITCHAV.GT.200)GOTO 4000
IF(ADIST(NOMA).LE.EADIST)GOTO 224
IF(ISUBD(NOMA).LT.2)GOTO 224
GO TO 900
2280 IF(IVOLTA.GE.2) STOP
DO 2281 IKA=1,MN
2281 MARCAD(IKA)=0
GOTO 224
4000 CONTINUE
STOP
END
```

FORMENORIZAÇÃO DE UMA ITERAÇÃO DO ALGORITMO DE DISTRITAMENTO

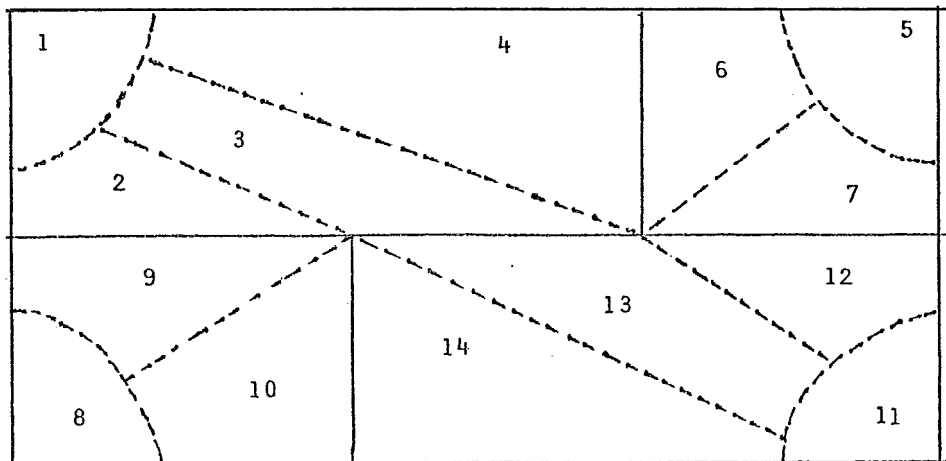
TESTE 1



A figura acima mostra uma área dividida em 4 distritos. Segundo um critério "qualquer" esta área será fracionada para que possa ser redistribuída para serem criados mais 2 distritos.

Segue a descrição pormenorizada de uma iteração (experimento 1) utilizando o algoritmo de distritamento.

A figura abaixo mostra a área acima dividida em subdistritos.



ÁREA TOTAL ANALISADA (AREATL)

168

DISTRITOS A SEREM FORMADOS (MN)

6

SUBDISTRITOS FORMADOS (NSUBD)

14

ÁREA DOS SUBDISTRITOS (XINFO)

4	7	10	14	10	18	20	28	10	11	9	8	12	7
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	----	---

DELTA

0.

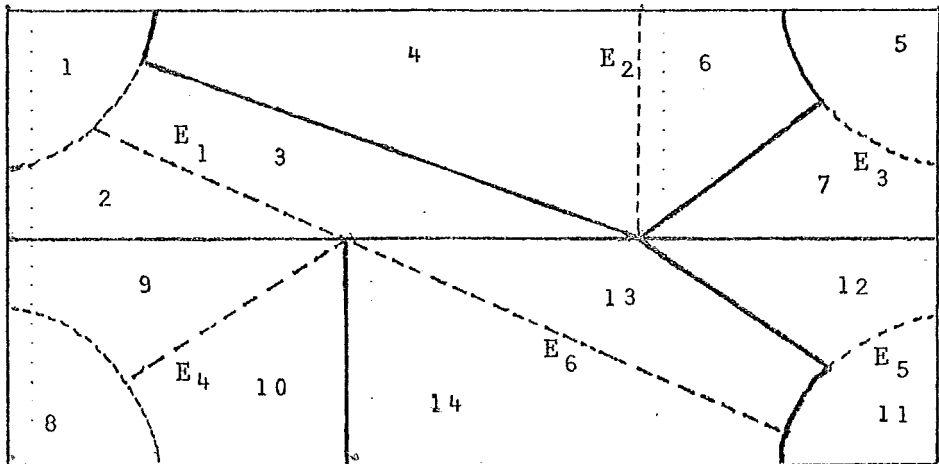
LISTA DOS VIZINHOS DOS SUBDISTRITOS

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	4	1	3	9	1	2	4	13	1	3	6	6

6	7	8	9	10	11	12	13	14					
7	4	5	7	5	6	9	10	2	8	10	8	9	14

11	12	13	14									
12	13	14	7	11	13	3	11	12	14	10	11	13

CONFIGURAÇÃO INICIAL ALEATÓRIA DADA AOS 6 DISTRITOS



DISTRITO	SUBDISTRITO
$E_1$	1,2,3
	4,6
	5,7
$E_4$	8,9,10
	11,12
$E_7$	13,14

Os distritos com seus subdistritos foram colocados sob a forma de lista.

O vetor ISUBD(I) que contará o número de subdistritos pertencentes ao distrito I, será da forma:

3	2	2	3	2	2	ISUBD
1	2	3	4	5	6	DISTRITO

PASSO AP<sub>2</sub>

ADIST(I) - área dos distritos montados anteriormente.

21	32	30	49	17	19
1	2	3	4	5	6

$$EADIST = 168/6 = 28 \text{ (área média esperada)}$$

$$DESIVIO = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (E_i - 28)^2}{6}} = 10.893$$

PASSO AP<sub>3</sub>: DESVIO < DELTA

PASSO AP<sub>4</sub>: Suponha que no distrito E<sub>i</sub> existam p subdistritos. As listas são montadas em ordem segundo os "pesos" dos p subdistritos. Isto facilita a procura dos elementos uma vez que o "peso" é fator do processo de balanceamento.

As listas serão internas e externas. A interna é formada pelos subdistritos pertencentes a E<sub>i</sub> que não possuem vizinhos fora de E<sub>i</sub>. Os subdistritos que possuem vizinhos pertencentes a outro distrito E<sub>j</sub> pertencerão a lista dos externos.

Início externo	3	6	7	10	11	13
----------------	---	---	---	----	----	----

Início interno	0	0	0	8	0	0
----------------	---	---	---	---	---	---

LISTA DOS SUBDISTRITOS

0	1	2	0	0	4	5	0	0	9	12	0	14	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	---	----	---

PASSO AP<sub>5</sub>: Montagem da lista de vizinhos dos distritos.

Distrito i	2	3	4	5	6									
Lista de distritos vizinhos	2	4	6	1	3	2	5	1	6	3	6	1	4	5

BALANCEAMENTO

PASSO BP<sub>1</sub>:  $CAREN(I) = ADIST(I) - EADIST$

CAREN (I)

-7	4	2	21	-11	-9
----	---	---	----	-----	----

MARCA(I)

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

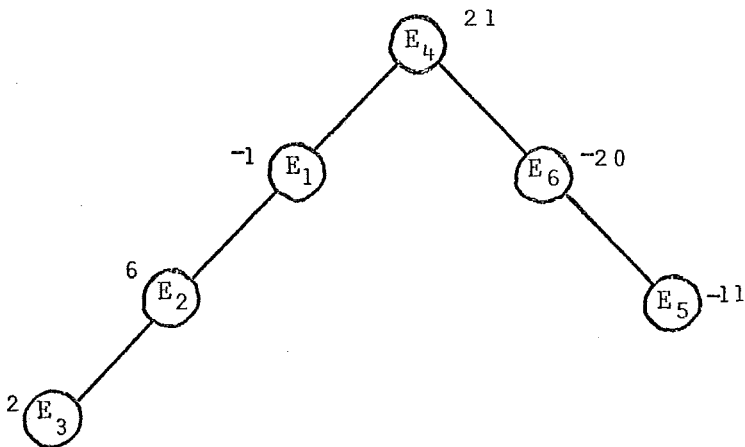
PASSO BP<sub>2</sub>: O distrito  $E_4$  é o de maior valor  $V_j$   
(=49), então:

MARCA ( $E_4$ )

0	0	0	1	0	0
---	---	---	---	---	---

$E_{max} \leftarrow E_4$

PASSO BP<sub>3</sub>: Expande arborescência com raiz em  $E_4$  e determina as carências.



PASSO BP<sub>4</sub>: O distrito de menor carência acumulada e vizinho de  $E_4$  é o  $E_6$ , então  $E_{min} \leftarrow E_6$ .

PASSO BP<sub>5</sub> :

MARCA (E <sub>6</sub> )	0	0	0	1	0	1
-------------------------	---	---	---	---	---	---

O maior subdistrito externo de E<sub>4</sub> e vizinho de E<sub>6</sub> é o índice 10, então MAI ← SUBD<sub>10</sub>

PASSO BP<sub>6</sub> :

DISTRITO	SUBDISTRITO
E <sub>1</sub>	1, 2, 3
E <sub>2</sub>	4, 6
E <sub>3</sub>	5, 7
E <sub>4</sub>	8, 9
E <sub>5</sub>	11, 12
E <sub>6</sub>	13, 14, 10

$$ADIST(E_4) = 49 - 11 = 38$$

$$ADIST(E_6) = 19 + 11 = 30$$

Vetor ADIST	21	32	30	38	17	30
-------------	----	----	----	----	----	----

$$CAREN(E_4) = 21 - 11 = 10$$

$$CAREN(E_6) = -9 + 11 = 2$$

Vetor CAREN

-7.	4	2	10	-11	2
-----	---	---	----	-----	---

$$\text{ISUBD}(E_4) = 3 - 1 = 2$$

$$\text{ISUBD}(E_6) = 2 + 1 = 3$$

Vetor ISUBD

3	2	2	2	2	3
---	---	---	---	---	---

$\text{MARCASD}(I) = 0$  para todo  $I = 1, \text{NSUBD}$

PASSO  $\text{BP}_7$ :

Início dos externos

3	6	7	8	11	13
---	---	---	---	----	----

Início dos internos

0	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---

Lista dos subdistritos

0	1	2	0	0	4	5	9	0	14	12	0	10	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	---	----	---

Remontagem da lista de vizinhos dos distritos

1	2	3	4	5	6								
2	4	6	1	3	2	5	1	6	3	6	1	4	5



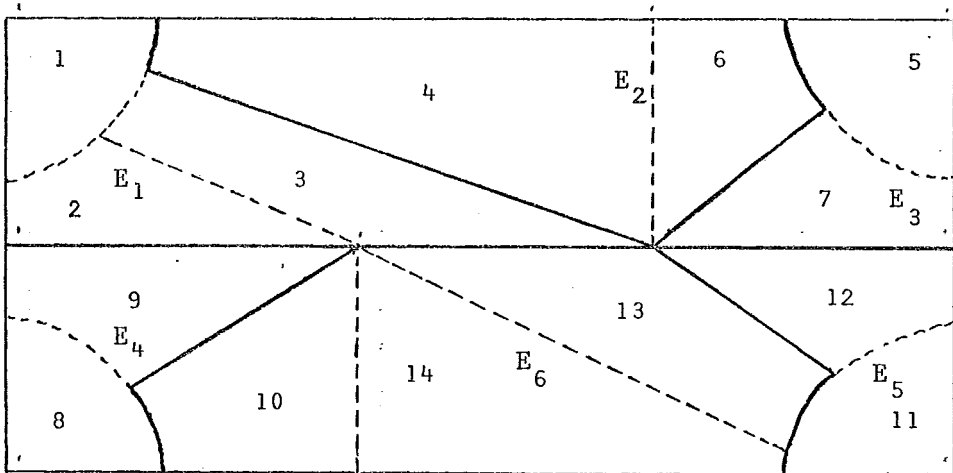
PASSO BP<sub>8</sub> :

$$\text{DESVIO} = \frac{\sum_{i=1}^6 (E_i - 28)^2}{6} = 7. \neq 0$$

PASSO BP<sub>9</sub> :

(ADIST(E<sub>4</sub>) = 38)  $\neq$  28 e ISUBD(E<sub>4</sub>) > 1 então vai ao PASSO BP<sub>2</sub>

A figura abaixo mostra como ficaram formados os distritos depois desta primeira iteração.



RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS - TESTE 1

EXPERI- MENTO	DADOS INICIAIS				ARNM			ARM			
	DIST.	SUBDISTRITOS	ÁREA	DESVIO PADRÃO	MOD	ÁREA	DESVIO PADRÃO	MOD	ÁREA	DESVIO PADRÃO	
1	1	1,2,3	21	10.8	9	28	1.7	14	28	0.	
	2	4,6	32			28			28		
	3	5,7	30			28			28		
	4	8,9,10	49			28			0.		28
	5	11,12	17			28			28		
	6	13,14	19			28			28		
2	1	1,4,6	36	10.6	6	28	2.5	6	32	2.5	
	2	2,3,9	27			28			28		
	3	5,7,12	38			28			30		
	4	8,10	39			28			0.		28
	5	11,14	16			28			24		
	6	13	12			28			26		
3	1	1,3	14	15.8	13	28	3.4	16	28	0.	
	2	4,6,7	52			28			28		
	3	5	10			28			28		
	4	2,8,9	45			28			0.		28
	5	11,12	17			28			28		
	6	10,13,14	30			28			28		
4	1	3,4	24	8.5	19	28	1.7	19	25	1.7	
	2	5,6	28			28			28		
	3	7,12	28			28			28		
	4	1,2,9	21			28			0.		31
	5	11,13	21			28			28		
	6	8,10,14	46			28			28		
5	1	1,3,13	26	9.1	10	32	3.4	6	28	0.	
	2	4,5,6	42			30			28		
	3	7,11,12	37			24			28		
	4	8	28			28			2.5		28
	5	10,14	28			28			28		
	6	2,9	26			26			28		

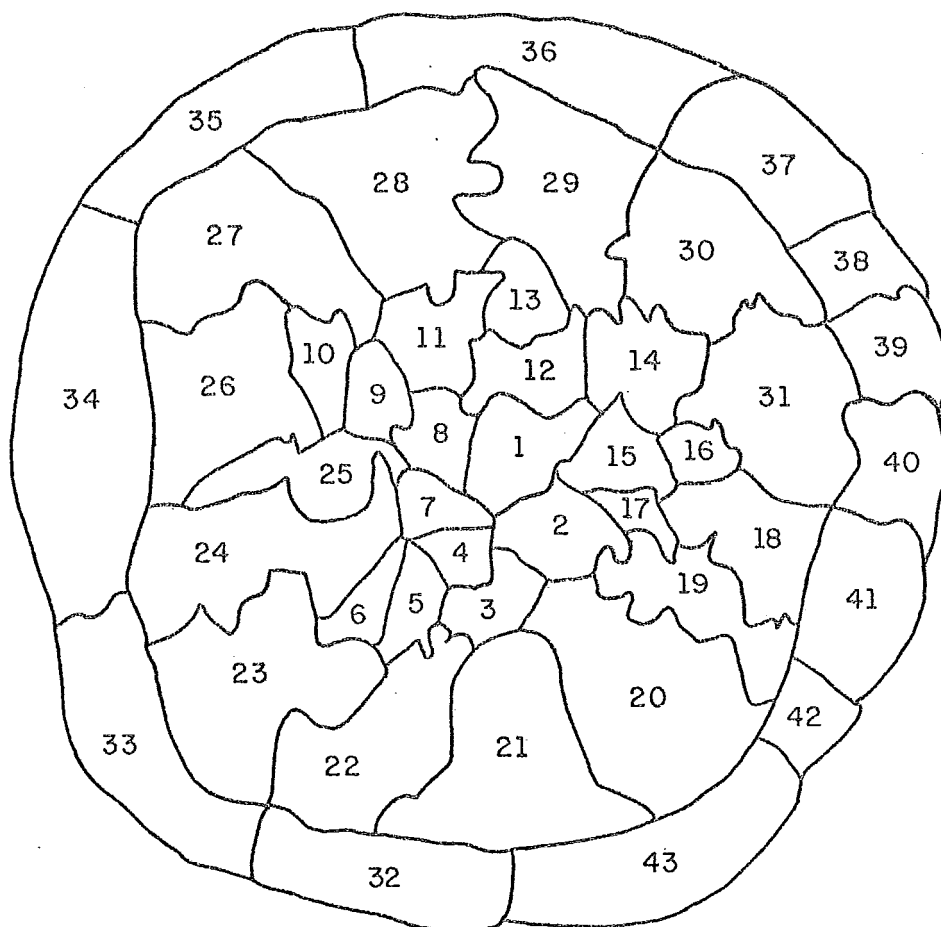
6	1	3,12,13	30	10.0	34	28	0.	34	28	0.
	2	1,2,4	25			28			28	
	3	5,6,7	48			28			28	
	4	8	28			28			28	
	5	11,14	16			28			28	
	6	9,10	21			28			28	
7	1	1,2,8,9	49	16.2	13	28	0.	13	28	0.
	2	3,4	24			28			28	
	3	5,6,7	48			28			28	
	4	10	11			28			28	
	5	11,12,13	29			28			28	
	6	14	7			28			28	
8	1	1,3,4	28	11.6	12	36	4.7	3	28	0.
	2	5,6,7	48			30			28	
	3	11,12	17			24			28	
	4	2,9	17			21			28	
	5	13,14	19			29			28	
	6	8,10	39			39			28	
9	1	1,3,11,13	35	14.4	6	30	3.5	6	30	3.5
	2	4	14			32			32	
	3	5,6,7,12	56			30			30	
	4	8	28			28			28	
	5	10,14	18			27			27	
	6	2,9	17			21			21	
10	1	1,2	11	16.2	34	28	0.	34	28	0.
	2	3,4	24			28			28	
	3	5,6,7	48			28			28	
	4	8,9,10	49			28			28	
	5	11,12,13	29			28			28	
	6	14	7			28			28	
11	1	1	4	22.5	29	28	0.	20	28	0.
	2	2,3	17			28			28	
	3	4,5,6,7	62			28			28	
	4	8,9,10,14	56			28			28	
	5	11	9			28			28	
	6	12,13	20			28			28	

12	1	1,4,5,6	46	16.1	17	28	0.	11	28	0.
	2	2,3,13	29			28			28	
	3	7,12	28			28			28	
	4	8,9,10	49			28			28	
	5	11	9			28			28	
	6	14	7			28			28	
13	1	1,2,4,6	43	10.5	7	32	2.5	7	32	2.5
	2	3,13	22			26			26	
	3	5,7	30			30			30	
	4	8,9	38			26			26	
	5	11,12,14	24			24			24	
	6	10	11			28			28	
14	1	1,2	11	17.4	19	28	0.	19	28	0.
	2	3,4	24			28			28	
	3	5,6,7	48			28			28	
	4	9	10			28			28	
	5	8,10,11,14	55			28			28	
	6	12,13	20			28			28	
15	1	3,12,13	30	3.5	36	28	0.	29	28	0.
	2	4,6	32			28			28	
	3	5,7	30			28			28	
	4	8	28			28			28	
	5	10,11,14	27			28			28	
	6	1,2,9	21			28			28	
16	1	1,2	11	12.2	46	26	2.5	18	26	2.5
	2	3,4	24			32			32	
	3	5,6,7	48			30			30	
	4	8,9	38			28			28	
	5	10,14	18			28			28	
	6	11,12,13	29			24			24	
17	1	1,2	11	14.9	47	26	2.5	19	26	2.5
	2	3,4	24			32			32	
	3	5,6,7,12	56			30			30	
	4	8,9	38			28			28	
	5	10,14	18			28			28	
	6	11,13	21			24			24	

18	1	1,2	11	12.3	15	28	0.	4	28	0.
	2	3,4	24			28			28	
	3	5,6	28			28			28	
	4	8,9,10	49			28			28	
	5	7,11,12	37			28			28	
	6	13,14	19			28			28	
19	1	1,2	11	12.4	5	28	0.	5	28	
	2	3,4	24			28			28	
	3	5,6,7	48			28			28	
	4	8,9	38			28			28	
	5	11,12	17			28			28	
	6	10,13,14	30			28			28	
20	1	1,2	11	11.7	10	28	0.	9	25	1.7
	2	3,4,6	42			28			28	
	3	5,7,12	38			28			28	
	4	8,9	38			28			28	
	5	10,14	18			28			28	
	6	11,13	21			28			31	
21	1	1,2	11	12.5	22	35	3.7	17	28	2.58
	2	3,4	24			22			26	
	3	5,6	28			28			32	
	4	8,9	38			28			28	
	5	10,14	18			27			24	
	6	11,13,7,12	49			28			30	
22	1	1,2	11	10.7	9	28	0.	22	28	0.
	2	3,4,6	42			28			28	
	3	5,7	30			28			28	
	4	8,9	38			28			28	
	5	10,14	18			28			28	
	6	11,12,13	29			28			28	
23	1	1,2	11	10.4	20	28	0.	14	28	0.
	2	3,4,6	42			28			28	
	3	5,7	30			28			28	
	4	8,9	38			28			28	
	5	10,11,14	27			28			28	
	6	12,13	20			28			28	

24	1	1,2	11	10.9	20	28	0.	6	28	0.
	2	3,4,6	42			28			28	
	3	5,7	30			28			28	
	4	8,9	38			28			28	
	5	11,12	17			28			28	
	6	10,13,14	30			28			28	
25	1	1,2,9	21	9.7	9	28	0.	8	28	2.5
	2	3,4,6	42			28			32	
	3	5,7	30			28			30	
	4	8,10	39			28			28	
	5	11,12	17			28			24	
	6	13,14	19			28			26	
26	1	1,2	11	14.9	16	28	0.	7	28	0.
	2	3,4	24			28			28	
	3	5,6,7	48			28			28	
	4	8,9,10	49			28			28	
	5	11,12	17			28			28	
	6	13,14	19			28			28	
27	1	1,4,6	36	4.4	1	32	2.5	1	32	2.5
	2	5,7	30			30			30	
	3	11,12,14	24			24			24	
	4	8	28			28			28	
	5	2,9,10	28			28			28	
	6	3,13	22			26			26	
28	1	1,2,4,6	43	12.1	3	32	2.5	3	32	2.5
	2	7,11,12,14	44			24			24	
	3	5	10			30			30	
	4	8	28			28			28	
	5	3,13	22			26			26	
	6	9,10	21			28			28	
29	1	1,4	18	19.9	17	28	0.	11	28	0.
	2	2,3,8,9	55			28			28	
	3	5,6,7,12	56			28			28	
	4	10	11			28			28	
	5	11,13	21			28			28	
	6	14	7			28			28	

TESTE 2



ÁREA TOTAL ANALISADA

574.

DISTRITOS A SEREM FORMADOS

7

SUBDISTRITOS EXISTENTES

43

MÉDIA DE ÁREA ESPERADA POR DISTRITO

82

ÁREA DOS SUBDISTRITOS (XINFO)

RESULTADOS DOS EXPERIMENTOS - TESTE 2

DADOS INICIAIS					ARNM			ARM		
EXPERI- MENTO	DIST.	SUBDISTRITOS	ÁREA	DESVIO PADRÃO	MOD	ÁREA	DESVIO PADRÃO	MOD	ÁREA	DESVIO PADRÃO
1	1	1,8,12,13,14, 15,18,25,26,34	159	37.9	63	83	3.3	74	87	3.1
	2	9,10,11,27,28, 35	109			85			81	
	3	29,30,36,37,38	69			81			81	
	4	16,31,39,40,41	44			80			79	
	5	2,17,19,20,42, 43	77			80			81	
	6	3,4,5,6,7,23, 24	76			88			81	
	7	21,22,32,33	40			77			84	
2	1	1,8,12,13,14, 15,25,26	143	43.6	37	85	3.4	41	79	3.6
	2	9,10,11,27,28, 29,35,36	151			81			77	
	3	2,17,16,18,30, 31,37,38,39,40	77			87			87	
	4	19,41,42	39			78			85	
	5	20,43	40			80			80	
	6	3,4,5,6,7,23, 24	76			81			86	
	7	21,22,32,33,34	48			82			80	
3	1	1,2,3,4,5,6,7,8	79	16.6	124	81	2.6	137	84	2.6
	2	9,10,11,12,13, 14,15	91			78			78	
	3	16,17,18,19,20	63			87			80	
	4	21,22,23,32,33, 43	63			81			80	
	5	30,31,37,38,39, 40,41,42	77			82			82	
	6	27,28,29,35,36	115			84			84	
	7	24,25,26,34	86			81			86	



4	1	1,8,9,11,12,13, 25	95			83			81	
	2	10,27,28,35	89			77			87	
	3	29,30,36,37,38	69	8.9	56	84	4.2	59	79	2.8
	4	14,15,16,18,31, 39,40,41	77			84			82	
	5	2,17,19,20,42, 43	77		134	80	2.8		83	
	6	3,4,5,6,7,23,24	76			80			78	
	7	21,22,26,32,33, 34	77			86			84	
5	1	1,8,9,12,13,25	83			83			81	
	2	11,27,28,35	85			79			84	
	3	14,15,29,30,36, 37	81	3.3	21	85	2.0	21	81	2.0
	4	16,17,18,31,39, 40,41,42,38	80			79		43	80	1.3
	5	2,5,7,19,20,43	80			83			83	
	6	3,4,6,21,22,23, 24	88			82			82	
	7	10,26,32,33,34	77			83			83	
6	1	1,8,9,12,13,25	83			83			81	
	2	11,27,28,35	85			79			84	
	3	14,15,29,30,36, 37	81			85			81	
	4	16,17,18,31,38, 39,40,41,42	80	3.3	21	79	2.0	21	80	2.0
	5	2,5,7,19,20,43	80			83		43	83	1.3
	6	3,4,6,21,22,23, 24	88			82			82	
	7	10,26,32,33,34	77			83			83	

7	1	1,8,12,13,25	75			83			83	
	2	11,27,28,35	85			85			85	
	3	14,15,29,30,36, 37	81			81			81	
	4	16,17,18,31,38, 39,40,41	70	11.2	14	80	2.3	14	80	2.3
	5	2,5,7,19,20	72			78			78	
	6	3,4,6,21,22,23, 24,42,43	106			82			82	
	7	9,10,26,32,33, 34	85			85			85	
8	1	1,2,8,11,20,28, 35,43	132			81			84	
	2	3,4,7,9,10,21, 24,25,27,32	132			84			79	
	3	12,13,14,15,17, 19,29,36,42	126			78			80	
	4	30,37,38	27	42.4	81	79	3.8	80	78	3.7
	5	16,18,31,39,40, 41	52			79		196	86	3.0
	6	5,6,22,23,33	54			83			81	
	7	26,34	51			90			86	
9	1	1,8,11,13,15,25	88			86			81	
	2	9,27,28,35	81			81			84	
	3	12,14,29,30,36, 37,38,39	100	12.9	31	81	2.6	6	86	2.7
	4	16,17,18,31,40, 41,42	60			79		188	79	2.3
	5	2,5,7,19,20	72			86			79	
	6	3,4,6,21,22,23, 24,43	96			80			82	
	7	10,26,32,33,34	77			81			83	

10	1	1,8,11,13,16, 17,25	93			84			85	
	2	9,27,28,35	81			81			81	
	3	29,30,36,37,38, 39	76			81			79	
	4	12,14,16,18,31, 40,41,42	79	6.7	115	84	1.6	61	82	2.2
	5	2,7,19,20,43	72			83		193	81	1.8
	6	3,4,5,6,21,22 23,32,33	89			82			82	
	7	10,24,26,34	84			79			84	
11	1	1,2,3,4,5,6,20, 21	103			85			84	
	2	7,8,9,10,11,12, 13,28,29,35,36	173			79			82	
	3	14,30,31,37,38, 39,40	66			84			83	
	4	15,16,17,18,19, 41,42	67	42.2	26	79	2.3	24	84	2.39
	5	22,32,43	32			80		65	78	2.32
	6	23,25,33,24	54			84			84	
	7	26,27,34	79			83			79	
12	1	1,8,9,12,13	65			83			80	
	2	10,11,27,28,35	101			81			81	
	3	14,15,16,29,30, 36,37	85			79			81	
	4	18,31,38,39,40, 42,43	79	14.3	11	82	2.0	11	80	2.0
	5	2,4,5,7,17,19, 20	83		55	84	1.5		85	
	6	3,6,21,22,23, 24,25	100			83			82	
	7	26,32,33,34	61			82			85	

BXBLTOGRAFXA

1. ACHARYA, B.D., On the Cyclomatic Number of a Hypergraph. Discrete Mathematic 27(1979) 111-116
2. BERGE, C., Graphes and Hypergraph. Dunod, Paris, 1976.
3. BERGE, C., and STERBOUL, F., Equipartite Colorings in Graphs and Hypergraphs. Journal of Combinatorial Theory, vol. 22-no. 2(1977) april.
4. BERGE, C., Resultats Recents Sur Certaines Classes D'Hypergraphes Qui Generalisent Les Graphes Bipartis. Coll. Math. Discreteç: Codes et Hypergraphes, Bruxelles 1978. Cahiers C.E.R.O., vol. 20, (1978) 3-4.
5. BERGE, C., The Multicolorings of Graphç and Hypergraphs. Lecture Notes in Math., vol. 642, Springer (1978) Berlin.
6. BERGE, C., Une Condition Pour Qu'un Kypergraphe Soit Fortement Isomorphe à Une Hypergraphe Coinplet ou Multiparti. C.R. Acad. Sci. Paris - Ser: A 274(1972) 25.
7. BERGE, C., The Multicoloring of Graphs and Hypergraphs. Lecture Notes In Mathematics- 642- Theory and Applications of Graphs-Procedings, Michigan, 1976.
8. BERGE, C., Introduction à La Théorie Des Hypergraphes. Seminaire De Mathématiques Supérieures. ÉTÉ 1971 (Les Presses de L'Université de Montreal) C.P. 6128, Montreal 101, Canada.
9. BERGE, C., and Dijen Ray Chaudhuri, Lecture Notes in Mathematics - 411 Hypergraph Seminar - Springer - Verlag Berlin - Heidelberg.New York - 1974.

10. BERMOND, J.C., Line Graphs of Hypergraphs I. Discrete Math. 18(1977) no. 3
11. BERMOND, J.C., GERMA, A. et REYDEMANN, M.C., Graphs Representatifs D'Hypergraphs. Cahiers Du Centre D'Etudes de Recherche Operationnelle - Vol. 20, (1978) no. 3, 4.
12. BERMOND, J.C. et MEYER J.C., Hypergraphes et Configurations Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Operationnelle. vol. 17, (1975) no, 2,3,4.
13. BERTOLAZZI, P., A Method for Determining the Optimal Districting in Urban Emergency Services. Comp. & Operation Research. vol. 4, pp 1-12 Pergamon Press, 1977 Printed in Great Britain
14. BOAVENTURA, P.O.N., Teoria e Modelos de Grafos. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1979.
15. BOAVENTURA, P.O.N., Um Modelo Gerador de Soluções para o Problema Discreto do Redistributamento. 12º Simpósio da Sobra. São Paulo, 1979.
16. BOLLOBÁS, B., DAYKIN, D.E. and ERDOS, P., Sets of Independent Edges of A Hypergraph. The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 27 (1976) no. 105, março.
17. BRUALDI, R.A., The Diagonal Hypergraph of a Matrix (Bipartite Graph). Discrete Mathematics 27 (1979) 127-147.
18. BRUALDI, R.A. and FOREGGER, T.H., Some Hypergraphs and Packing Problems Associated with Matrices of 0's and 1's. Journal of Combinatorial Theory, vol. 17 (1974) no, 2 october.

19. COCKAYNE, E.S. and HEDETNIEMI, S.T., Matchings and Transversals in Hypergraphs, Domination and Independence in Trees. Journal of Combinatorial Theory, Série B 26(1979) 78-80.
20. DAVID, J.H. and PITTERGER, A.O., Analytic Proofs of a Network Feasibility Theorem and a Theorem of Fulkerson Linear Algebra and its Applications 24 (1979) 151-156.
21. DEZA, M., Cardinalités De Sommes et D'arêtes D'Hypergraphes Satisfaisant a Certaines Conditions Sur L'Intersection d'Arêtes. C.N.R.S., Paris et C.R.M., Université De Montreal.
22. DEZA, M., Probleme De L'Existence De  $(H^1, H^2, b)$  - Hypergraphes. Cahiers Du Centre D'Etudes de Recherche Operationnelle, vol. 17 (1975) no. 2,3,4.
23. EDMONDS, J. and KARP, R.M., Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network **Flow** Problems. JACM, vol. 19 (1972) no. 1-4.
24. FABER, V., Reconstruction of Valued Hypergraphs. The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 26, set. (1975) no. 103. Oxford Second Series.
25. FOLDES, S., Regular Representation of Finite Group By Hypergraphs. Canad J. Math. 30 (1978) no.5
26. FORD, L.R. and FULKERSON, D.R., Flows in Networks. Princeton University Press, Princeton.
27. FOURNIER, J.C., Sur Les Isomorphismes D'Hypergraphes. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 274 (1972) 23.

28. FRANK, A., On a Class of Balanced Hypergraphs. Discrete Math 20 (1977/78) no.1.
29. GYARFAS, A., Partition Coverings and Blocking Sets of Hypergraphs. Tanulmányok, MTA Számítástech. Automat. Kutató Int. Budapest no. 71 (1977) 62 pp.
30. HUNSEN, P., Subdegrees and Chromatic Numbers of Hypergraphs Ann of Discrete Math., vol. 1, North-Holland, (1977) Amsterdam.
31. HARARY, F., Graph Theory. Addison Wesley, Reading MA (1972)
32. JAEGER, F., Sur Certains Valuations Des Hypergraphes D'Intervalles. C.R. Acad. Sa. Paris - Ser. A-B 287(1978) no. 4, A 487 A 489 - OSC
33. JOHNSON, E.L., On the Edge-Coloring Property for the Closure of the Complete Hypergraphs-Algorithmic Aspects of Combinatorics. Ann Discrete Math 2 (E978)
34. LAWLER, E.L., Cutsets and Partitions of Hypergraphs. Networks, 3; 275-289 (1973)
35. LEWIN, M., On Hypergraphs Without Significant Cycles. J. Combinatorial Theory, Ser. B 20(1) (1976) 80-83.
36. LOREA, M., Ensembles Stables Dans les Hypergraphes. J. Combinatorial Theory, Ser. A (1972) no. 3.
37. LOREA, M., Hypergraphes et Matroides. Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Operationnelle - vol 17 (1975) no. 2, 3, 4.
38. LOREA, M., Matroides Sur Les Ensembles D'Arêtes D'Hypergraphes, Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Opera

tionnelle - vol. 20 (1978) no, 2,

39. LAS VERGNAS, M., CURUE, M., CURIE, P., Sur les Activites Des Orientations D'une Geometrie Consignataire. Coll. **Math**, Discretes: Codes et Hypergraphes, Bruxelles 1978, Cahiers C.E.R.O., vol. 20 (1978) 3-4.
40. McCORNICK, W.T.J. et Al. Problem Decomposition and Data Reorganization by a Clustering Technique. Operation Research, vol. 20 (1970) no. 5.
41. MEYER, J.C., Nombre Chromatique Total D'un Hypergraphe. J. Combinatorial Theory - Ser. B 24 (1978) 1.
42. MULLER, V., On Critical 3 - Chromatic Hypergraphs. Acta mat. Acad. Sc. Hungar, 29 (1977) no. 3-4.
43. NESETRIL, J., Seletive Graphs and Hypergraphs. Ann Discrete Math. 3 (1978)
44. PAOLA, L. and BIANCO, L., A method for Determining the optimal Districting in Urban Emeryency Services. Computer & Operations Research, vol. 4 (1977) no. 1.
45. PAVOL, H, and NESETRLL, J., Cohomomorphisms of Graphs and Hypergraphs. Mathematische Nachrichten · 87, Band (1979) Akademie Verlag Berlin
46. PENAUD, 3.G., Une Propriete De Bicoloration Des Hypergraphes Planaires. Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Operationnelle, vol. 17 (1975) no. 2,3,4.
47. PSERRE, H., Deux Conditions de Colorabilite Des Hypergraphes. Bruxelles 1978, Cahiers C.E.R.O., vol. 20 (1978) 3-4



48. SEYMOUR, P.D., On the Two Colouring of Hypergraphs. Quart. J. Math. Oxford (3), 25 (1974) 303-312.
49. SHIMON, E., Algorithmic Combinatorics. The Macmillan Company, New York, 1973
50. SLATER, P.J., A Characterization of Soft Hypergraphs. Canad. Math. Bull 21 (1978) no. 3.
51. STERBOUL, F., L'Hypergraphe Des Cycles D'un Graph. Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Operationnelle, vol. 17 (1975) no. 2,3,4.
52. TOFT, B., Color Critical Graphs and Hypergraph. Journal of Combinatorial Theory, Ser, B, vol. 16 (1974) april no, 2.
53. TOMASTA, P., Decomposition of Graphs and Hypergraphs into Isomorphic Factors With a Given Diameter. Czechoslovak Math. J., 27 (102) 1977, no. 4.
54. TOMASTA, P., On Decompositions of Complete K-uniforme Hypergraphs. Czechoslovak Math. J., 28 (103) 1978, no, 1.
55. VINCKE, P., Hypergraphes Orientes, Cahiers Du Centre D'Etudes De Recherche Operationnelle, vol. 17 (1975) no. 2,3,4

ÁNEXO 1

TEORIA DOS GRAFOS

O anexo 1 contém definições, conceitos e tópicos sobre a teoria dos Grafos, que direta ou indiretamente estarão presentes no desenvolver deste trabalho,

DEFINIÇÕES E CONCEITOS

Um grafo (não direcionado)  $G(V,A)$  é a associação de um conjunto finito não vazio  $V$  e um Conjunto  $A$  de pares (não ordenados) de elementos distintos de  $V$ . Os elementos de  $V$  são os vértices, nós ou pontes, e os de  $A$  são as linhas de  $G$ .

Simbologia:  $|V| = n$  número de vértices

$|A| = m$  número de linhas

$e = (v_i, v_j) \in A$

Se  $e = (v_i, v_j)$  então  $e$  é incidente a  $v_i$  e  $v_j$ , e estes são adjacentes.

Se  $e_1 = (v_1, v_2)$  e  $e_2 = (v_1, v_3)$ , então  $e_1$  e  $e_2$  são adjacentes.

Se o vértice não possui linha a ele incidente, então diz-se que o vértice é isolado.

Um grafo que consiste somente de vértices isolados (não possui linhas), é chamado grafo nulo.

Se  $n = 1$  então  $m = 0$  e o grafo é dita trivial.

Laço é uma linha do tipo  $e = (v_i, v_i)$

Se dois vértices de um grafo são ligados por mais de uma linha, então o grafo possui linhas múltiplas, ou paralelas.

Multigrafo é o grafo que possui linhas paralelas.

Grafo rotulado é aquele em que a seus vértices ou linhas são associados rótulos.

Dois grafos são isomorfos quando existe uma cor-

respondência biunívoca entre seus vértices, respectivamente, que preserve a adjacência. Simbologia  $G \cong G'$ .

Um grafo  $G'(V',A')$  é subgrafo parcial de  $G(V,A)$  quando  $V' \subseteq V$  e  $A' \subseteq A$ ,

Um grafo  $G'(V',A')$  é subgrafo de  $G(V,A)$  quando  $G'$  for subgrafo parcial de  $G$  e para todo seu  $v_i, v_j \in V'$ , se  $(v_i, v_j) \in A \rightarrow (v_i, v_j) \in A'$ .

Um subgrafo parcial  $G'(V',A')$  de  $G(V,A)$  é dita ser subgrafo gerador de  $G$  quando  $V \cong V'$ .

Um digrafo (grafo direcionado, dirigido ou orientado)  $D$ , consiste de um conjunto não vazio  $V$  de vértices e uma coleção prescrita  $X$  de pares ordenados de vértices distintos. Os elementos de  $X$  são linhas direcionadas, linhas orientadas ou simplesmente arcos.

Dado um digrafo  $D$ , seja um arco  $x = (u, v)$  onde o vértice  $u$  é sua extremidade inicial e o vértice  $v$  sua extremidade final; diz-se que  $v$  é sucessor de  $u$  se o arco  $x$  tem sua extremidade inicial em  $u$  e sua extremidade final em  $v$ . Ao conjunto de sucessores de  $u$  representamos por:  $\Gamma^+(u)$ . Diz-se que  $u$  é um antecessor (ou predecessor) de  $v$  se o arco  $x$  tem sua extremidade inicial em  $u$  e sua extremidade final em  $v$ . Ao conjunto de antecessores de  $v$  representamos por:  $\Gamma^-(v)$ .

Cadeia é uma seqüência de linhas de um grafo  $G$ , tal que cada linha apresenta: a) uma extremidade em comum com a linha antecedente, à exceção da primeira; b) uma extremidade em comum com a linha sub-sequente, à exceção da última.

Uma vez que não se especifica qual das extremidades se trata, o conceito de cadeia é não - orientado, ou não - direcionado.

Um caminho em um digrafo  $D$  é uma seqüência alternada de vértices e arcos, começando e terminando com vértices e tal que cada arco é incidente com o vértice que o segue. O número de arcos de um caminho é denominado de comprimento do caminho. Caminho é dito simples se não passa duas vezes pelo mesmo arco, e dito elementar se não passa duas vezes pelo mesmo vértice.

O comprimento do menor caminho ou cadeia entre dois vértices  $u$  e  $v$  é denominado de distância,  $d(u,v)$ , entre esses vértices. Por convenção se não houver caminho entre  $u$  e  $v$ , então  $d(u,v) = \infty$ .

Um ciclo (cadeia fechada) é uma cadeia em que o primeiro e o último vértice coincidem, e todos os demais vértices são distintos.

Um circuito é um caminho simples e fechado, o conceito de circuito é orientado.

Um grafo é conexo quando existir uma cadeia entre quaisquer dois de seus vértices.

Os componentes conexos de um grafo são seus subgrafos parciais conexos maximais.

Dado um grafo  $G$ , define-se grafo linha  $L(G)$  de  $G$ , ao grafo tal que os vértices de  $L(G)$  correspondem as linhas de  $G$  e dois vértices de  $L(G)$  são ligados por uma linha adjacente se as linhas correspondentes em  $G$ , o forem.

Grau de um vértice  $v$ ,  $g(v)$ , é o número de linhas ou arcos incidentes a  $v$ . A soma dos graus dos vértices é igual ao dobre do número de linhas.

Um grafo é regular quando todos seus vértices possuem o mesmo grau.

O número de vértices em um grafo é chamado sua ordem.

Um grafo é completo quando possui um número máximo de linhas, para o dado conjunto de vértices.

Notação:  $K_p$  significa o grafo completo de  $p$  vértices.

Um grafo completo possui  $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$  h Os

grafos completos não orientados são chamados cliques. As cliques tem grande importância teórica, no estudo de problemas de planaridade, coloração, etc, de grafos.

EVEN<sup>49</sup>, estudou o problema do maior número de cliques de um grafo com  $n$  vértices e chegou ao seguinte resultado:

$$f(n) = \begin{cases} 3^{n/3} & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 \cdot 3^{(n-4)/3} & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2 \cdot 3^{(n-2)/3} & \text{se } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Os grafos que alcançam este máximo são os seguintes:

1. Se  $n \equiv 0 \pmod{3}$  então  $G$  consiste de  $n/3$  triplas de vértices. Não há ligação entre os vértices da mesma tripla e todos os vértices de triplas diferentes são ligados entre si.

2. Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$  temos duas estruturas possíveis para  $G$ . Consiste de uma quádrupla de  $(n-4)/3$  triplas ou consiste de 2 pares e  $(n-4)/3$  triplas. As ligações entre vértices respeitam as restrições de  $L$ .

3. Se  $n \equiv 2 \pmod{3}$  então  $G$  consiste de um par e  $(n-2)/3$  triplas, com ligações entre vértices como em 1.

Moon e Moser mostraram que estes são os únicos grafos que alcançam  $E(11)$ .

$M_k$  com  $n = 3k$  e  $3^k$  cliques são grafos tipo 1, que devido aos estudos de Moon e Moser, passaram a levar seus nomes. A figura A.1.1 mostra três exemplos de grafos Moon Moser.

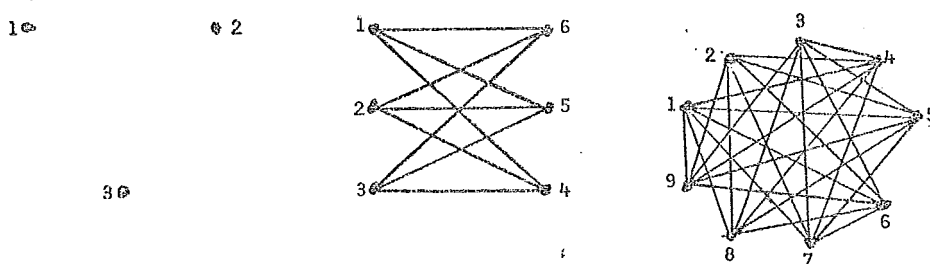


Fig. A.1.1

É possível provar por indução, que este tipo de grafo possui  $3^k$  cliques, cada uma consistindo de  $k$  vértices.

Paull e Unger apresentaram o seguinte algoritmo que determina as cliques de um grafo com  $n$  vértices, publicado em EVEN<sup>49</sup>:

Considere que  $G(V,A)$  é um grafo não orientado com  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  sendo  $\Gamma$  o operador sucessor.

Para  $n \geq 2$ , faça

P1.  $S_1 = v$  e  $i = 1$

P2. Para todo  $t \in S_i$  coloca  $\{v_{i+1}\} \cup (\Gamma(v_{i+1}) \cap t) \rightarrow C_{i+1}$ , em

tão  $C_{i+1} = \{S \mid S = \{v_{i+1}\} \cup (\Gamma(v_{i+1}) \cap t) \text{ para todo } t \in S_i\}$

P3. Faça  $S'_{i+1} = C_{i+1} \cup S_1$



- P4.  $S_{i+1}$  é o conjunto de todos os elementos de  $S'_{i+1}$  (que são subconjuntos de  $V$ ) que não são subconjuntos de outros elementos de  $S'_{i+1}$ . Então  $S_{i+1} = \{S \mid S \in S'_{i+1} \text{ e } \forall t \in S'_{i+1} (t \supset S \rightarrow t = S)\}$
- P5. Se  $i+1 = n$ , pare;  $S_{i+1}$  é o conjunto de todas as cliques de  $G$ . Senão, faça  $i \leftarrow i+1$  e volta a P2.

Um grafo  $G(V,A)$  é bipartite quando  $V$  puder ser particionado em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tais que cada linha de  $G$  une um vértice de  $V_1$  a outro de  $V_2$ . Particionado significa que  $V_1 \subset V$ ,  $V_2 \subset V$  e  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ .

Um grafo bipartite completo possui um número máximo de linhas, para o dado conjunto de vértices.

Notação:  $k_{P_1 P_2}$

O grafo bipartite completo possui  $P_1 * P_2$  linhas.

Teorema: Um grafo é bipartite se e somente se todos seus ciclos forem de comprimento par.

Um vértice (linha) é dito ponto de Corte (ponte) quando sua remoção aumentar o número de componentes conexos do grafo.

Um grafo é aciclico quando não possui ciclos.

Uma floresta é um grafo aciclico. Os componentes de uma floresta são denominados de árvores.

Um árvore geradora de um grafo é um subgrafo gerador deste grafo, o qual satisfaz a definição de árvore.

Em um digrafo, o número de arcos para um vértice  $v$  é denominada grau de entrada de  $v$ . O número de Arcos de um vértice  $v$  é denominado grau de saída de  $v$ . O grau de um vértice  $v$ ,

em um digrafo, é a soma de seus graus de entrada e saída,

Árvore enraizada direcionada (arborescência) é um grafo dirigido acíclico no qual exatamente um vértice (raiz) tem grau de entrada zero, enquanto todos os demais possuem grau de entrada um.

Um vértice é dito terminal (folha) se seu grau de saída for nulo.

Se existir um caminho de um vértice  $v$  para um vértice  $w$ , então  $v$  é dito ancestral de  $w$ , e  $w$  é descendente de  $v$ . Se este caminho possuir comprimento um,  $v$  é pai de  $w$  e  $w$  filho de  $v$ .

Um grafo é dito planar se existirá um modo de representá-lo num plano, de tal forma que não haja cruzamento de linhas,

Um grafo planar é também chamado grafo planar topológico e pode ser associado a um mapa onde cada região corresponde a um vértice e cada fronteira a uma linha.

Face de um grafo planar topológico é uma região do plano limitado por linhas do grafo e que não contém linhas nem vértices no seu interior. A face externa do grafo, limitada pelas linhas externas, é a face infinita.

Lema: Os ciclos que constituem as fronteiras das diferentes faces finitas de um grafo planar  $G$  formam uma base de ciclos para  $G$ .

Teorema (Euler): Em um grafo planar topológico conexo com  $n$  vértices,  $m$  linhas e  $f$  faces verifica-se

$$n - m + f = 2$$

Teorema: Todo grafo planar não orientado possui um vértice  $x$  com grau  $d(x) \leq 5$

Um resultado interessante tirado da fórmula de Euler é que: se levarmos em conta que um grafo planar,  $3f \leq 2m$  (visto que cada face é limitada por ao menos 3 linhas e cada linha separa duas faces), concluimos que, para todo grafo planar,  $m \leq 3n - 6$ ; logo um grafo é não planar se  $m > 3n - 6$ .

Uma rede  $G$  pode ser definida como uma tripla  $(V, A, f)$  consistindo de um conjunto  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de vértices, um conjunto  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  de arcos, e  $f$  a circulação de fluxo,

$f$  é em muitos casos um vetor de dimensão  $m$  tal que:  
a) para todo arco  $a_k \in A$ ,  $f_k$  é o fluxo elementar em  $a_k$ ; b) para todo vértice  $v_k \in V$ , a soma algébrica dos fluxos elementares nos arcos que chegam a  $a_k$  é igual a soma algébrica dos fluxos dos arcos que saem de  $a_k$ , isto é,  $\sum_{a_i \in \Gamma^-(v)} f_i = \sum_{a_j \in \Gamma^+(v)} f_j$ .

Corte em uma rede na forma canônica é o conjunto de arcos de mesmo sentido que une dois conjuntos complementares  $A$  e  $X - A$  de vértices, tais que a fonte  $x_0 \in A$  e o sumidouro  $x_n \in X - A$  (excluindo-se o arco de retorno).

Teorema: (Ford e Fulkerson): o valor máximo do fluxo em uma rede é igual à capacidade (líquida) do corte de capacidade (líquida) mínima.

ANEXO 2

TABELAS DAS CLIQUES DOS GRAFOS

TABELA 1

Nº DE VERTICES	Nº DE LINHAS	Nº DE CLIQUES	CLIQUE S
1	0	1	.
2	0	2	. .
	1	1	—
3	0	3	. . .
	1	2	/ .
	2	2	^
	3	1	△
4	0	4	. . . .
	1	3	.   .
	2	3 e 2	┌ .     └ .
	3	3 e 2	┌ .   └ .
	4	4 e 2	□ □ □ □
	5	2	◻
	6	1	◻

TABELA 2

Nº DE VERTICES	Nº MAX. DE LINHAS	Nº MIN. DE CLIQUES	CLIQUES
1	0	1K <sub>1</sub>	
2	1	1K <sub>2</sub>	
3	3	1K <sub>3</sub>	
4	6	1K <sub>4</sub>	

TABELA 3

Nº DE VERTICES	Nº DE LINHAS	Nº MIN. DE CLIQUES	CLIQUES
5	4	4	
	5	3	
	6	2	
	7	2	
	8	2	
	9	2	
6	5	5	

TABELA 3 (continuação)







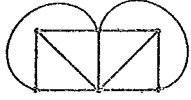
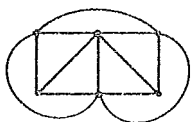
6	6	4	
7	6	6	
	7	5	
	8	4	
	9	3	
	10	3	
	11	2	
	12	3	

TABELA 3 (continuação)

7	10	3	
	11	3	
	12	2	
	13	3	
	14	3	
	15	4	
8	7	7	
	8	6	
	9	5	
	10	4	
	11	4	
	12	3	



TABELA 3 (continuação)


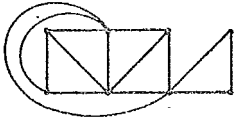
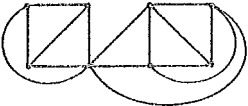
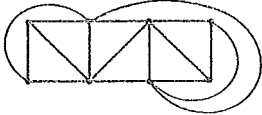
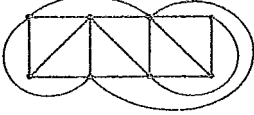
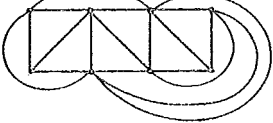


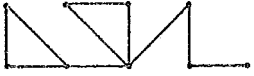

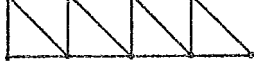
8	13	3	
	14	3	
	15	3	
	16	3	
	17	4	
	18	5	
9	8	8	
	9	7	
	10	6	
	11	5	
	12	4	

TABELA 3 (continuação)

9	13	4	
	14	4	
	15	3	
	16	4	
	17	3	
	18	4	
	19	4	
	20	5	
	21	6	

TABELA 3 (continuação)

10	9	9	
	10	8	
	11	7	
	12	6	
	13	5	
	14	5	
	15	4	
	16	4	
	17	4	
	18	3	
	19	4	
	20	4	

TABELA 3 (continuação)

10	21	4	
	22	5	
	23	6	
	24	7	
11	10	10	
	11	9	
	12	8	
	13	7	
	14	6	
	15	5	
	16	5	

TABELA 3 (continuação)

11	17	5	
	18	4	
	19	4	
	20	4	
	21	4	
	22	4	
	23	5	
	24	5	
	25	6	
	26	7	

TABELA 3 (continuação)

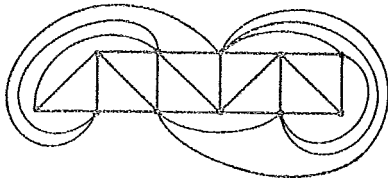

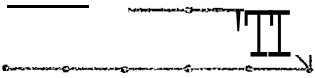









11	27	8	
12	11	11	
	12	10	
	13	9	
	14	8	
	15	7	
	16	6	
	17	6	
	18	5	
	19	6	
	20	5	
21	4		

TABELA 9 (continuação)

12	22	5	
	23	4	
	24	5	
	25	6	
	26	6	
	27	7	
	28	7	
	29	8	
	30	9	

TABELA 3 (continuação)



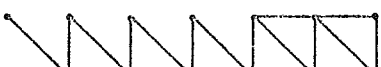
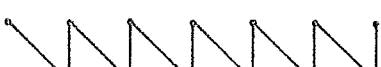


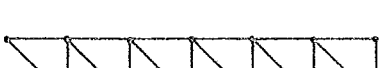
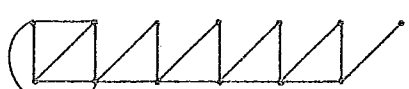
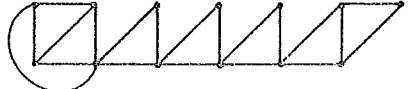
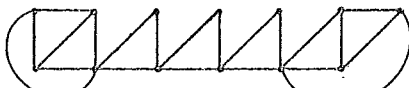
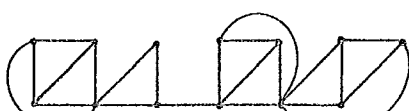
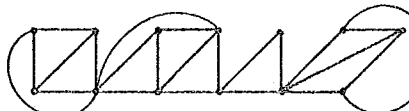
13	12	12	
	13	11	
	14	10	
	15	9	
	16	8	
	17	7	
	18	6	
	19	6	
	20	6	
	21	5	
	22	5	
		5	



TABELA 3 (continuação)

13	24	4	
	25	5	
	26	5	
	27	5	
	28	6	
	29	7	
	30	7	
	31	8	
	32	9	

TABELA 3 (continuação)

13	33	10	
14	13	13	
	14	12	
	15	11	
	16	10	
	17	9	
	18	8	
	19	7	
	20	7	
	21	6	
	22	7	
	23	6	

TABELA 3 (continuação)

14	24	5	
	25	5	
	26	5	
	27	5	
	28	5	
	29	6	
	30	6	
	31	6	
	32	7	

TABELA 3 (continuação)

14	33	8	
	34	9	
	35	10	
	36	11	

TABELA 4

Vértice	número de linhas que fornece o mínimo de cliques					número de cliques
5	6	7	8	9		2
6	9	11				2
7	12					2
8	12	13	14	15	16	3
9	15	17				3
10	18					3
11	18	19	20	21	22	4
12	21	23				4
13	24					4
14	24	25	26	27	28	5
15	27	29				5
16	30					5
.	.					.
.	.					.
.	.					.
$3p - 1$	$6(p-1), 6(p-1)+1, \dots, 6(p-1)+4$					$p$
$3p$	$6(p-1)+3, 6(p-1)+5$					$p$
$3p + 1$	$6p$					$p$

TABELA 5





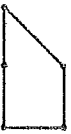




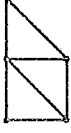
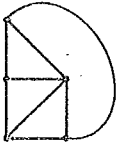
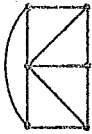
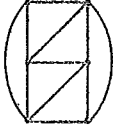
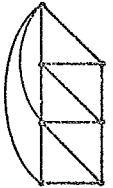
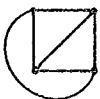
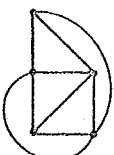
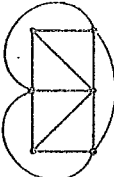
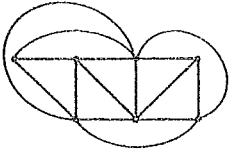
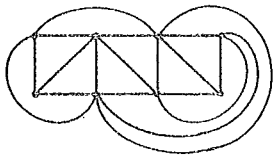
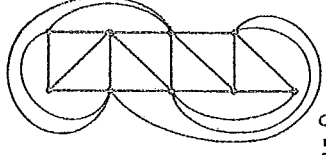
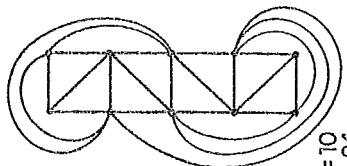
NÚMERO DE CLIQUES	1	2	3	4	5	6	7
K <sub>2</sub>	 $n = 2$ $m = 1$	 $n = 3$ $m = 2$	 $n = 4$ $m = 3$	 $n = 4$ $m = 4$	 $n = 5$ $m = 5$	 $n = 5$ $m = 6$	 $n = 6$ $m = 7$
K <sub>3</sub>	 $n = 3$ $m = 3$	 $n = 4$ $m = 5$	 $n = 5$ $m = 7$	 $n = 5$ $m = 8$	 $n = 6$ $m = 10$	 $n = 6$ $m = 11$	 $n = 7$ $m = 13$
K <sub>4</sub>	 $n = 4$ $m = 6$	 $n = 5$ $m = 9$	 $n = 6$ $m = 12$	 $n = 7$ $m = 15$	 $n = 8$ $m = 18$	 $n = 9$ $m = 21$	 $n = 10$ $m = 24$

TABELA 6







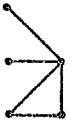
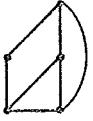
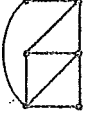
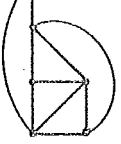

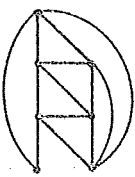

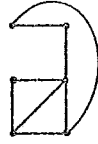
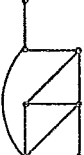
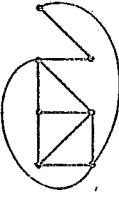
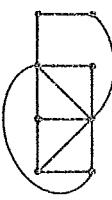


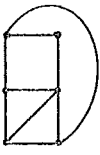

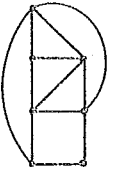
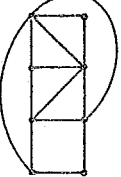
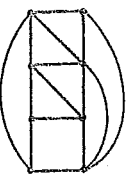
$K_3$ $K_2$	1	2	3	4	5	6
1	 $n = 4$ $m = 4$	 $n = 5$ $m = 6$	 $n = 6$ $m = 8$	 $n = 6$ $m = 9$	 $n = 7$ $m = 11$	 $n = 7$ $m = 12$
2	 $n = 5$ $m = 5$	 $n = 5$ $m = 7$	 $n = 6$ $m = 9$	 $n = 6$ $m = 10$	 $n = 7$ $m = 12$	 $n = 7$ $m = 13$
3	 $n = 5$ $m = 6$	 $n = 6$ $m = 8$	 $n = 7$ $m = 10$	 $n = 7$ $m = 11$	 $n = 8$ $m = 13$	 $n = 8$ $m = 14$
4	 $n = 6$ $m = 7$	 $n = 6$ $m = 9$	 $n = 7$ $m = 11$	 $n = 7$ $m = 12$	 $n = 8$ $m = 14$	 $n = 8$ $m = 15$

TABELA 6 (continuação)

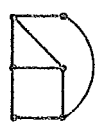
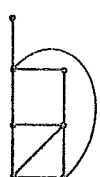
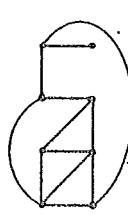
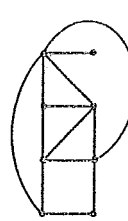
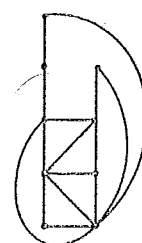
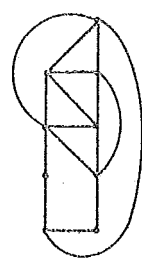
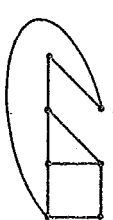
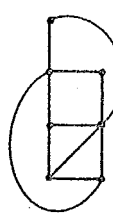

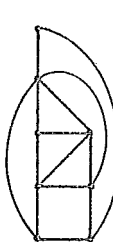
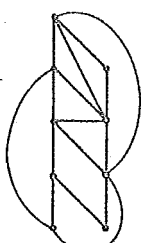
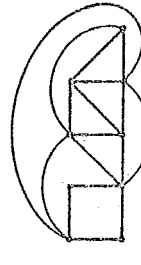
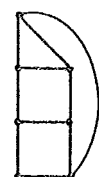
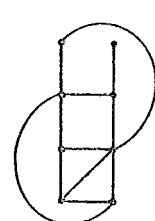
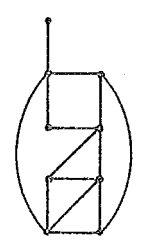
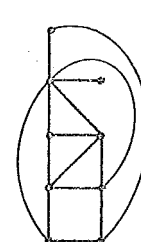
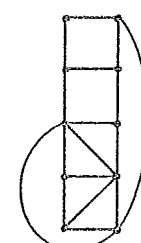
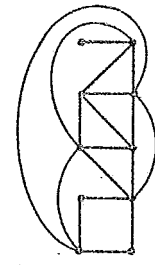
$K_3$ $K_2$	1	2	3	4	5	6
5	 $n = 6$ $m = 8$	 $n = 7$ $m = 10$	 $n = 8$ $m = 12$	 $n = 8$ $m = 13$	 $n = 9$ $m = 15$	 $n = 9$ $m = 16$
6	 $n = 7$ $m = 9$	 $n = 7$ $m = 11$	 $n = 8$ $m = 13$	 $n = 8$ $m = 14$	 $n = 9$ $m = 16$	 $n = 9$ $m = 17$
7	 $n = 7$ $m = 10$	 $n = 8$ $m = 12$	 $n = 9$ $m = 14$	 $n = 9$ $m = 15$	 $n = 10$ $m = 17$	 $n = 10$ $m = 18$



TABELA 7


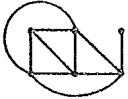
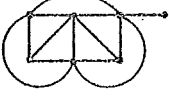
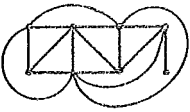
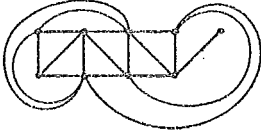
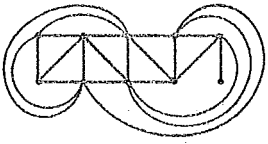




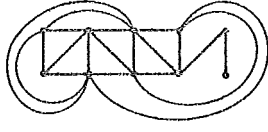
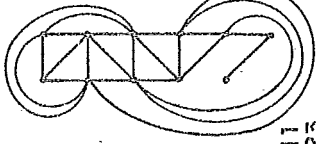


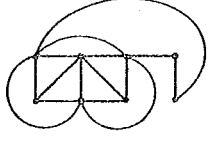
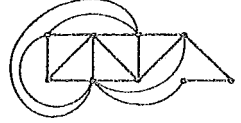
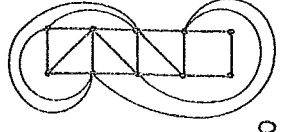
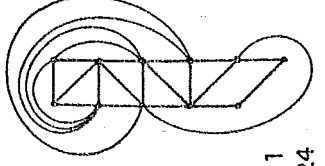
K4 K2	1	2	3	4	5	6
1	 $n = 5$ $m = 7$	 $n = 6$ $m = 10$	 $n = 7$ $m = 13$	 $n = 8$ $m = 16$	 $n = 9$ $m = 19$	 $n = 10$ $m = 22$
2	 $n = 6$ $m = 8$	 $n = 7$ $m = 11$	 $n = 8$ $m = 14$	 $n = 9$ $m = 17$	 $n = 10$ $m = 20$	 $n = 11$ $m = 23$
3	 $n = 6$ $m = 9$	 $n = 7$ $m = 12$	 $n = 8$ $m = 15$	 $n = 9$ $m = 18$	 $n = 10$ $m = 21$	 $n = 11$ $m = 24$

TABELA 7 (continuação)


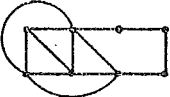
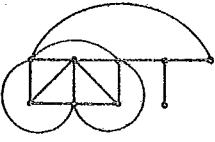
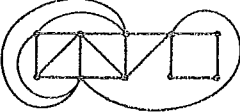
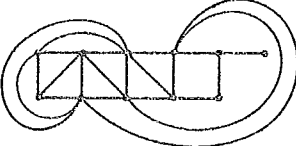
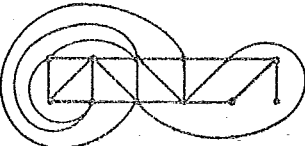
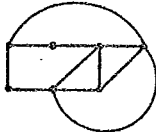
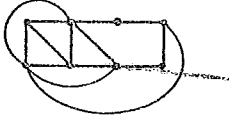
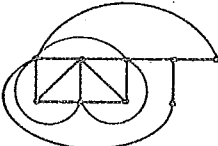
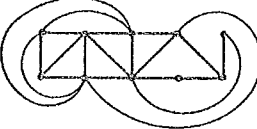
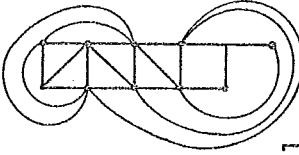
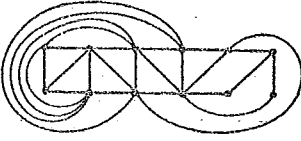
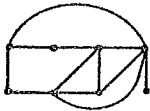
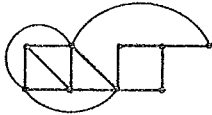
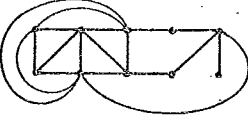
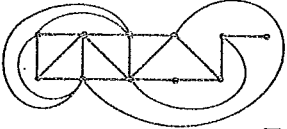
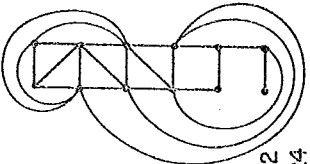
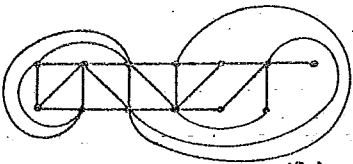
K4 K2	1	2	3	4	5	6
4	 <p><math>n = 7</math> <math>m = 10</math></p>	 <p><math>n = 8</math> <math>m = 13</math></p>	 <p><math>n = 9</math> <math>m = 16</math></p>	 <p><math>n = 10</math> <math>m = 19</math></p>	 <p><math>n = 11</math> <math>m = 22</math></p>	 <p><math>n = 12</math> <math>m = 25</math></p>
5	 <p><math>n = 7</math> <math>m = 11</math></p>	 <p><math>n = 8</math> <math>m = 14</math></p>	 <p><math>n = 9</math> <math>m = 17</math></p>	 <p><math>n = 10</math> <math>m = 20</math></p>	 <p><math>n = 11</math> <math>m = 23</math></p>	 <p><math>n = 12</math> <math>m = 26</math></p>
6	 <p><math>n = 8</math> <math>m = 12</math></p>	 <p><math>n = 9</math> <math>m = 15</math></p>	 <p><math>n = 10</math> <math>m = 18</math></p>	 <p><math>n = 11</math> <math>m = 21</math></p>	 <p><math>n = 12</math> <math>m = 24</math></p>	 <p><math>n = 13</math> <math>m = 27</math></p>

TABELA 8



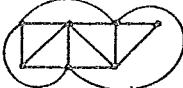
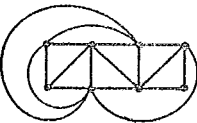
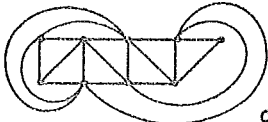
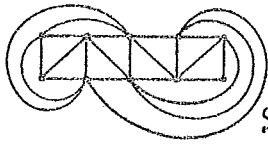



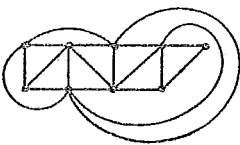
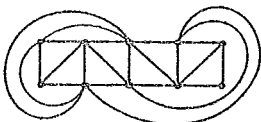
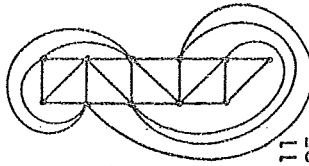

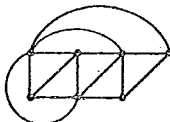
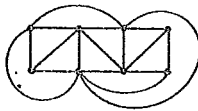
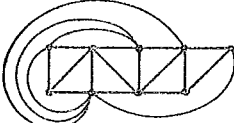
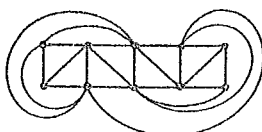
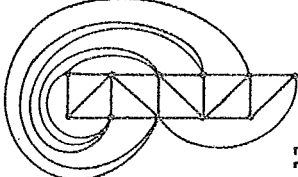
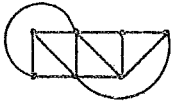
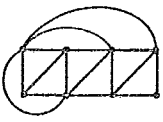
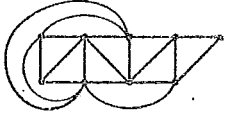
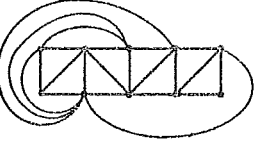
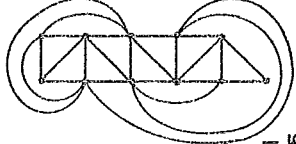
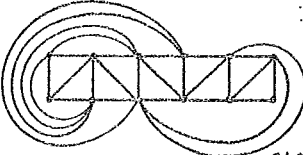
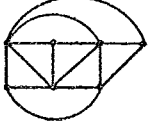
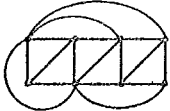
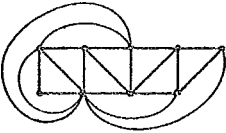
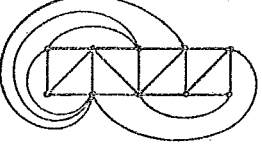
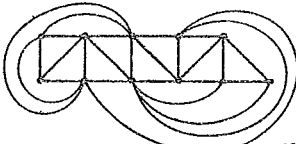
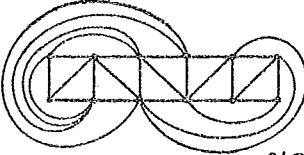
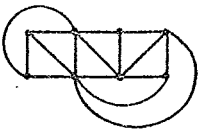
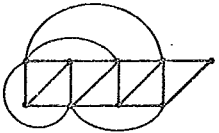
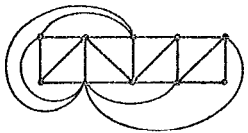
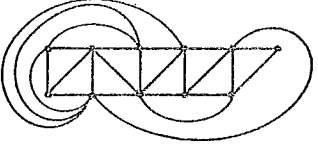
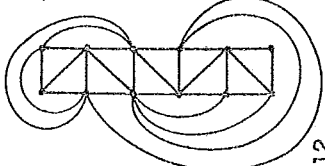
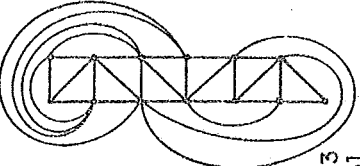
K4 K3	1	2	3	4	5	6
1.	 <p><math>n = 5</math> <math>m = 8</math></p>	 <p><math>n = 6</math> <math>m = 11</math></p>	 <p><math>n = 7</math> <math>m = 14</math></p>	 <p><math>n = 8</math> <math>m = 17</math></p>	 <p><math>n = 9</math> <math>m = 20</math></p>	 <p><math>n = 10</math> <math>m = 23</math></p>
2	 <p><math>n = 6</math> <math>m = 10</math></p>	 <p><math>n = 7</math> <math>m = 15</math></p>	 <p><math>n = 8</math> <math>m = 16</math></p>	 <p><math>n = 9</math> <math>m = 19</math></p>	 <p><math>n = 10</math> <math>m = 22</math></p>	 <p><math>n = 11</math> <math>m = 25</math></p>
3	 <p><math>n = 6</math> <math>m = 11</math></p>	 <p><math>n = 7</math> <math>m = 14</math></p>	 <p><math>n = 8</math> <math>m = 17</math></p>	 <p><math>n = 9</math> <math>m = 20</math></p>	 <p><math>n = 10</math> <math>m = 23</math></p>	 <p><math>n = 11</math> <math>m = 26</math></p>

TABELA 8 (continuação)

K4 K3	1	2	3	4	5	6
4	 $n = 7$ $m = 13$	 $n = 8$ $m = 16$	 $n = 9$ $m = 19$	 $n = 10$ $m = 22$	 $n = 11$ $m = 25$	 $n = 12$ $m = 28$
5	 $n = 7$ $m = 14$	 $n = 8$ $m = 17$	 $n = 9$ $m = 20$	 $n = 10$ $m = 23$	 $n = 11$ $m = 26$	 $n = 12$ $m = 29$
6	 $n = 8$ $m = 16$	 $n = 9$ $m = 19$	 $n = 10$ $m = 22$	 $n = 11$ $m = 25$	 $n = 12$ $m = 28$	 $n = 13$ $m = 31$