UM ESTUDO EM OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA
VISANDO UMA CONTRIBUIÇÃO À TEORIA DE MARKOWITZ

ARIOLANDO TAVARES ARARUNA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.).

Aprovada por:

CARLOS ALBERTO NUNES COSENZA - D.Sc.
(Orientador)

NELSON MACULAN FILHO - D.Sc.
(Co-Orientador)

JOSÉ DE JESUS DA SERRA COSTA - Livre Docente

RENATO ANTONIO RABUSKE - D.Sc.

ROOSEVELT JOSÉ DIAS - D.Sc.

RIO DE JANEIRO, DEZEMBRO DE 1981

ARARUNA, ARIOLANDO TAVARES

"Um Estudo em Otimização Estocástica Visando uma Contribuição à Teoria de Markowitz" [Rio de Janeiro] 1981.

viii, 79 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas, 1981).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.

1. Um Estudo em Otimização Estocástica Visando uma Contribuição à Teoria de Markowitz.

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série).

À KARLA, minha filha, e à Dna. MARIQUINHA, minha mãe, uma vida pontilhada de renúncia e bondade, que a morte me privou da sua convivência.

"Não há verdades absolutas ou irrefutáveis, as hipóteses são encaradas como provisórias, a construção teórica é sempre passível de reformulação, o sentido de humildade das descobertas predomina (por exemplo: reconhecer que a própria situação nos faz permanecer inseguros quanto à validade de nossas descobertas para explicar processos similares quando ocorrem algures em outros contextos)".

AGRADECIMENTOS

Ao COSENZA e MACULAN, por terem demonstrado, com a sua orientação, que a tarefa do intelectual, do pesquisador, do professor transcende ao aperfeiçoamento e perpetuação do saber científico, que por si só estariam desprovido de sentido. COSENZA e MACULAN, vocês demonstraram, na prática, que a ciência é um produto da sociedade, e mais ainda, que o papel fundamental de todo pesquisador é o de lutar de todas as maneiras pelo respeito, pela emancipação do ser humano, porque o reconhecimento à dignidade das pessoas, é um direito inalienável, inerente à dinâmica de todo processo de transformação.

Ao Professor DEMÉTRIO, pelo estímulo dado durante a elaboração do nosso trabalho.

Ao LIZARDO pela admiração do seu desempenho profissional e contribuição dada à COPPE, em especial ao Programa de Engenharia de Sistemas, e sobretudo a sua maneira acolhedora de sempre atender bem aos alunos.

Ao Professor Silvio Machado, agradeço o apoio e encorajamento dado, desde os tempos negros em que estava enquadrado na fatídica "LSN".

Ao RUTÊNIO, o grande amigo e pessoa humana que é, o reconhecimento pelo acolhimento até hoje dispensado.

À Cândida, a grande companheira que foi, nos períodos mais críticos da nossa vida; principalmente nos anos negros da DITADURA do MEDICI.

Às BIBLIOTECÁRIAS da COPPE/UFRJ, pelo grande empenho e dedicação no desempenho de suas funções; sem elas o desenvolvimento de pesquisa da COPPE ficaria comprometido. E quero, de público, manifestar o quanto sou agradecido a todas.

À Suely Klajman, secretária de Sistemas, pela sua eficiência e delicadeza no trato com as pessoas.

Aos colegas da COPPE, que no dia-a-dia da convivência, muito contribuíram para o desempenho dessa tarefa, com sugestões e apoio camarada, dentre eles, não poderia deixar de lembrar do Edmar, do Arlindo, do Clécio, do Ronaldo e do Clóvis de saudosa memória.

À Norma, pelo seu esmero no trabalho de datilografia.

Finalmente, a todos que contribuem para o bom funcionamento da COPPE/UFRJ - Professor ou Funcionário e, em especial, ao Professor Coimbra, fundador da instituição.

R E S U M O

O modelo desenvolvido, destina-se a um processo de seleção de projetos sob condições de risco, dando um tratamento aleatório ao retorno e ao dispêndio de recursos dentro do horizonte de planejamento.

A escolha desse tipo de abordagem é justificada pelas características de potencialidade do modelo, levando em consideração a disponibilidade variável de diversos tipos de recursos em diferentes períodos de planejamento. Além disso, dá um tratamento probabilístico completo ao retorno do portfólio, contribuindo com a teoria de Markowitz, que considera apenas a média e a variância, como medidas de risco.

Aqui, estendemos a idéia, trabalhando com uma família de variáveis aleatórias e, por conseguinte, baseamo-nos nas medidas estatísticas inerentes a uma distribuição de probabilidade conjunta, que dá maior confiabilidade ao sistema, em vista de um número maior de informações, embora, apenas a média e a variância sejam explicitadas.

ABSTRACT

In this work we develop a model to be applied to a process of project selection under risk conditions, where it is given a random treatment to the profit and resource expenditure within the planning horizon.

Our choice for this type of approach should be instified by the powerful characteristics of the model with respect to changes in availabilities of the various types of resources into different planning periods. Besides, it is given a complete probabilistic treatment to the portfolio return, contributing with the theory of Markowitz, which considers only the mean and variance as risk measures.

Here, we extend the idea dealing with a family of random variables and, thefore, we are supported on the statistical measures inherent to a joint probability distribuition, which gives greater reliatility to the system, due a great number of available informations, however only the mean and variable are explicited.

S U M Á R I O

CAPÍTULO I

SOB CONDIÇÕES DE RISCO - A SELEÇÃO DE PROJETOS

I. SOB CONDIÇÕES DE RISCO - A SELEÇÃO DE PROJETOS

1.1 - Introdução

A princípio vamos apresentar as características do problema de decisão que engloba a seleção de projetos e alocação de recursos sob condições de risco. A análise será feita para o caso de projetos de pesquisa e desenvolvimento, e, essa escolha não representa uma perda de generalidade, pois, com algumas exceções, essas características também são válidas para outros tipos de projetos. De qualquer maneira, para os projetos de pesquisa e desenvolvimento, fica caracterizado muito bem o problema de seleção e alocação numa realidade sob condições de risco.

Os fatores de complexidade e incerteza que regem os projetos de pesquisa e desenvolvimento sugerem o uso de modernas técnicas quantitativas na análise de decisão. Em geral, numa grande organização, a gerência de pesquisa e desenvolvimento enfrenta problemas bastante críticos, particularmente na seleção de novos projetos e na sua alocação no tempo, bem como no planejamento do desenvolvimento dos projetos já selecionados.

Além de levar em conta os benefícios e méritos de cada projeto, é necessário considerar a alocação da disponibilidade de recursos, como capital, pessoal, equipamento e demais facilidades de pesquisa entre os diferentes projetos. Os dispêndios em projetos de pesquisa e desenvolvimento são investimentos para os quais é esperado um determinado benefício (retorno), tal como ocorre em qualquer investimento na área de negócios.

Em geral, os orçamentos para investimento em projetos, não são muito flexíveis. Os projetos potenciais para desenvolvimento competem pelos diversos recursos que têm disponibilidade limitadas. Dessa forma, os projetos não podem ser todos desenvolvidos. É necessário fazer uma seleção, de forma que o programa de pesquisa obtido não exceda o orçamento de cada tipo de recurso.

Existem razões que fortalecem a necessidade de uso de uma metodologia sofisticada para o processo de seleção. Um exemplo é a grande influência que os fatores de risco exercem no processo decisório. Outro, é a interação que pode existir entre diferentes projetos.

Por essas considerações, fica claro que não é apropriado selecionar cada projeto por uma análise isolada dos demais projetos.

Devemos analisar todo o conjunto de projetos disponíveis e selecionar o subconjunto que produz os maiores benefícios à organização. Esse subconjunto de projetos é denominado de portfólio. Na escolha desse portfólio, devemos ter em mente as disponibilidades limitadas de cada recurso, bem como outros fatores de decisão que influem no processo, conforme veremos a seguir.

Assim, verificamos a necessidade de uma atividade de planejamento para assegurar que os recursos sejam utilizados do modo mais eficiente, visando a obtenção do melhor benefício total pelo investimento realizado.

1.2 - Características dos Projetos

Projeto é um empreendimento não repetitivo no qual são aplicados diversos tipos de recursos, buscando atingir um objetivo definido dentro de um prazo determinado. Porém, vale ressaltar que, as características dos projetos podem ser diferentes, de acordo com o tipo dos mesmos.

Os projetos de pesquisa, em geral, apresentam uma grande dependência dos fatores de risco. Isso ocorre devido às incertezas que envolvem o processo de avaliação dos projetos. Conforme veremos adiante, essa característica faz com que o processo de seleção seja uma decisão sob risco.

Em geral, no desenvolvimento de um projeto de uma pesquisa existe a demanda de uma grande variedade de recursos. Em sua maioria, esses recursos representam diferentes categorias de mão-de-obra especializada (cientistas, técnicos etc.). Essa demanda, geralmente, é variável para cada período.

Outra característica importante é que os projetos podem ser desenvolvidos de diversas maneiras para chegar a um mesmo objetivo. Dependendo da taxa de utilização dos diversos recursos, um projeto pode ser desenvolvido de forma "lenta", "normal" ou rápida. Pode existir, também, uma diferença de abordagem quanto às diversas etapas em que devem ser desenvolvidas. Isso dá origem ao conceito de versões de um projeto. Logicamente, as versões de um mesmo projeto são mutuamente exclusivas.

Nos projetos de pesquisa é muito comum ocorrer o intercâmbio entre diferentes recursos, sendo possível alocar um determinado recurso em diferentes categorias. Isso, normalmente, ocorre com os recursos de mão-de-obra especializada.

A interação entre projetos é outra característica importante. Em muitos casos, alguns projetos não podem ser definidos de forma independente de outros. Pode ocorrer que exista uma atividade comum a vários projetos, de modo que é possível economizar um determinado tipo de recurso quando esses projetos são selecionados.

De um modo geral, os projetos de pesquisa são muito semelhantes aos projetos de aplicações financeiras no mercado de capitais. Existem as mesmas interações entre projetos, os mesmos problemas com relação a risco e a mesma complexidade de alocação dos projetos em diferentes períodos. A principal diferença entre esses dois tipos de projetos é que nos projetos de pesquisa existe uma grande variedade de recursos e o grau de incerteza é maior. Por outro lado, os projetos de pesquisa têm natureza multi-fase, sendo que a decisão de iniciar cada fase não compromete necessariamente os recursos além da fase inciada. Assim, os projetos de pesquisa podem ser revisados com maior facilidade, propiciando a alternativa de cancelar, diminuir ou acelerar seu desenvolvimento.

1.3 - Estimativas e Incertezas

Os dados necessários para o processo de seleção são todos obtidos por uma avaliação econômica dos projetos envolvidos. Esses dados constam de estimativas dos benefícios dos projetos, bem como de estimativas da demanda de cada tipo de recurso em cada período. Logicamente, os resultados do processo de seleção dependem diretamente da qualidade das estimativas avaliadas para os projetos. O grau de detalhamento do processo de avaliação rege os resultados de processo de seleção.

De um modo geral, o processo de avaliação é bastante trabalhoso. Existem muitas dificuldades na quantificação das grandezas que identificam um projeto. Isto ocorre devido às características de incerteza que envolvem essas grandezas.

Usualmente, as maiores dificuldades e incertezas ocorrem na quantificação dos benefícios ou retorno. Do ponto de vista ideal, na avaliação dos benefícios de um projeto, devemos levar em consideração que os resultados do mesmo são distribuídos ao longo do tempo. Temos benefício a curto, médio e longo prazo. Nesse caso, é necessário compor uma única estimativa, obtendo o valor presente das mesmas. Desta forma, fica considerado o valor dos benefícios no tempo.

Também, muitas vezes, é necessário considerar a avaliação dos benefícios indiretos. Nesse caso, a quantificação é muito mais complexa. Na prática, a medida desse tipo de benefício é feita por estimativas subjetivas. Então, o retorno total do projeto será dado pela composição das estimativas dos benefícios diretos e indiretos num único escore.

A estimativa da demanda de recursos de cada projeto é dada em termos de unidades utilizadas por período. De acordo com o detalhamento da avaliação, a demanda pode ser variável para cada projeto.

Concluímos, facilmente, que o retorno dos projetos, bem como a demanda de recursos têm um comportamento aleatório. Conseqüentemente, as estimativas dessas grandezas envolvem intrinsecamente o conceito de incerteza.

Podemos considerar que a característica mais marcante dos projetos de pesquisa é que os mesmos têm um envolvimento muito grande com fatores de risco. As incertezas afetam os processos de avaliação e de seleção dos projetos. Cada estimativa na avaliação de projetos de pesquisa é uma suposição em relação ao futuro. Pode ser uma suposição fundamentada numa cuidadosa extrapolação de determinados dados, historicamente confiáveis, bem como pode ser uma opinião subjetiva que leva em consideração fatores intangíveis. Em qualquer caso, fica identificado que a melhor representação de uma estimativa é uma distribuição de probabilidade. Uma distribuição de probabilidade pode ser obtida na prática com o uso de estimativas "otimistas", "pessimistas" e "mais provável", atribuindo-se a cada uma a probabilidade associada.

As incertezas ocorrem tanto na estimativa de demanda dos recursos, como também na estimativa do retorno do projeto. Cada projeto requer o investimento distribuido no tempo de uma quantidade aleatória de diversos tipos de recursos, seguido de um retorno também aleatório.

Essas incertezas fazem com que no processo decisório os fatores de risco assumam importância vital. A medida dos fatores de risco é tão importante quanto a própria medida de retorno dos projetos.

Desta forma, tanto o retorno como as necessidades de recursos de cada projeto são variáveis aleatórias com determinadas distribuições de probabilidade. Infelizmente, do ponto de vista prático esse problema é bastante complexo e de difícil solução.

Numa análise simplificada, porém satisfatória, podemos considerar as necessidades de recursos como variáveis determinísticas e representadas por uma estimativa média. Temos, então, demandas determinísticas de recursos e retornos aleatórios, ambos distribuídos no tempo.

1.4 - Um Sistema Ideal de Seleção

Conforme já verificamos, quando consideramos todas as características que regem os projetos de pesquisa, a seleção de um portfólio não é um problema simples.

O programa de pesquisa deve ser determinado pelo conjunto de projetos que propicie um máximo retorno com um menor risco, numa alocação balanceada dos recursos disponíveis. Esse tipo de objetivo só pode ser atingido se no processo decisório forem utilizados modelos de seleção e alocação de recursos que levam em consideração todas as informações obtidas por uma avaliação econômica compatível de todos os projetos envolvidos.

De qualquer forma, o sistema de seleção deve ser apropriado à organização que o utiliza. O sistema deve ser escolhido de acordo com o grau de sofisticação desejado pela organização, ficando sempre em compatibilidade com o detalhamento utilizado no processo de avaliação.

De um modo geral, um sistema ideal deve ter as facilidades de levar em consideração todos os fatores que caracterizam os projetos de pesquisa, tais como:

a) planejamento especificado para diversos períodos;

b) necessidade variável por período de diversos tipos de recursos com disponibilidade limitada;

c) risco e incerteza;

d) tratamento mutuamente exclusivo para as versões de um mesmo projeto;

e) tratamento das características compulsórias dos projetos;

f) intercâmbio de determinadas categorias de recursos.

Logicamente, um sistema de seleção com estas facilidades só pode ser utilizado por uma organização que está num estágio de desenvolvimento avançado em termos de processos de avaliação e seleção de seus projetos. A adequação desse sistema ideal para cada caso pode ser obtida mediante simplificações, de acordo com a necessidade de cada organização.

Nos próximos capítulos, veremos como o problema da seleção de projetos e alocação de recursos pode ser resolvido com a ajuda de modelos matemáticos de formulação e solução relativamente simples. Os modelos apresentados levam em consideração a maior parte das facilidades de um sistema ideal de seleção.

CAPÍTULO II

A METODOLOGIA DE SELEÇÃO DE PROJETOS

II. A METODOLOGIA DE SELEÇÃO DE PROJETOS

2.1 - Introdução

Existem muitos sistemas para a seleção de projetos, conhecidos através da extensa bibliografia disponível. Entretanto, apenas alguns satisfazem os requisitos definidos para um sistema ideal de seleção de projetos, conforme descrito no Capítulo anterior.

Os sistemas de seleção mais simples são baseados nas tradicionais técnicas de análise econômico-financeiras dos projetos candidatos. Estas técnicas englobam a análise custo/benefício, a análise custo efetividade, o método da taxa de retorno e o método do valor presente. Como resultado desse tipo de análise, fica determinado para cada projeto um qualificador financeiro. Segundo esse qualificador, será selecionado um conjunto de projetos de acordo com as disponibilidades de recursos.

Entretanto, estas técnicas consideram os projetos como investimentos puramente financeiros. Segundo esse qualificador, será selecionado um conjunto de projetos de acordo com as disponibilidades de recursos. No entanto, essas técnicas consideram os projetos como investimentos puramente financeiros, sem levar em conta de forma explícita os diferentes tipos de recursos requeridos para o desenvolvimento dos projetos. Isso é uma desvantagem, já que é, de certo modo, difícil avaliar em bases monetárias o valor desses recursos. Outra desvantagem é que essas técnicas não permitem uma otimização na alocação dos diversos recursos no tempo.

Os projetos de pesquisa e desenvolvimento caracterizam investimentos diversificados sob condição de risco de diversos tipos de recurso. Portanto, os sistemas de seleção baseados em técnicas de análise econômico-financeiras não são considerados apropriados para um estudo mais elaborado.

Existem, também, técnicas de seleção totalmente subjetivas que apresentam utilidade quando a seleção é baseada em critérios de difícil quantificação. Como exemplo, mencionamos um método de atribuição de escores que foi sugerido por Kepner e Tregoe [8] no processo genérico de seleção de alternativa. Esse método considera o desempenho de cada alternativa em termos de diversos requisitos obrigatórios e desejáveis, além de avaliar possíveis conseqüências adversas por sua seleção. Para isso são atribuídos graus ponderados, chegando a um escore final que expressa a sua qualificação. É evidente que essas técnicas subjetivas não são adequadas para uma análise completa do processo de seleção, podendo, entretanto, ser utilizadas como ferramenta para uma análise complementar.

Os únicos sistemas que permitem uma análise mais completa do problema são aqueles que buscam uma otimização na alocação dos diversos recursos, cuja disponibilidade é variável em diversos períodos de planejamento. Estes sistemas estão baseados em técnicas de programação matemática, cuja principal característica é a potencialidade de representar situações que se aproximam bastante da realidade. Mediante uma formulação matemática relativamente simples, podemos levar em consideração fatores de decisão muito importantes no processo de seleção de projetos e alocação de recursos.

2.2 - Formulação Matemática Geral do Problema

No Capítulo I foi definido o problema da determinação de um programa de pesquisa e desenvolvimento com a alocação de diversos tipos de recursos disponíveis. O objetivo básico é a otimização do investimento assegurando o maior retorno possível com o menor risco.

Apresentamos, a seguir, uma formulação matemática para o problema, a fim de facilitar a descrição dos diversos modelos de seleção. O problema de seleção de projetos pode ser representado genericamente por um conjunto de equações e desigualdades.

De acordo com a notação utilizada por Cear[2], temos:

$$\text{Máx } F(x_{11}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{NM_N}, r_{11}, \ldots, r_{ij}, \ldots, r_{NM_N})$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} \text{Prob } \{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} \leqslant b_{kt} \} \geqslant \alpha_{kt} & (2.1) \\ \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \leqslant 1; \quad i = 1, \ldots, N & (2.2) \\ x_{ij} \geqslant 0; \quad j = 1, \ldots, M_i & \end{cases}$$

onde:

$F(x_{ij}, r_{ij})$ - função objetivo de retorno;

(2.1) - conjunto de restrições de demanda;

(2.2) - variável de decisão que representa a extensão na qual a versão j do projeto i é selecionada.

com $x_{ij} = 0 \rightarrow$ a versão j-projeto i é rejeitada.

com $x_{ij} = 1 \rightarrow$ o projeto i-versão j é completamente aceito.

r_{ij} - variável aleatória que mede o valor presente do retorno do projeto i-versão j;

a_{ijkt} - quantidade de recurso do tipo k necessária ao projeto i-versão j no tempo t;

b_{kt} - disponibilidade total do recurso tipo k no período t, em unidades de b_{ijkt};

i - indicador para o número do projeto, i = 1, ..., N;

N - número de projetos em consideração;

j - indicador para a versão de um projeto, j = = 1, ..., M_i;

M_i - número de versão alternativas do projeto i;

t - indicador do período de planejamento $t = 1, \ldots, T$;

T - número de períodos que compõem o horizonte de planejamento;

K - número de categorias de recursos incluído no modelo;

α - é um vetor coluna com n-componentes, cujos elementos encontram-se entre 0 e 1.

Portanto, uma solução não-negativa x é viável se e somente se:

$$\text{Prob}\ \{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\ x_{ij} \leqslant b_{kt}\} \geqslant \alpha_{kt} \quad \forall\ (k,t)$$

desta forma, a probabilidade complementar $1-\alpha$ representa o risco admissível que as variáveis aleatórias tomarão sobre valores, tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\ x_{ij} > b_{kt}.$$

Se $a_{i1}, \ldots, a_{iM_i}, b_{kt}$ são todos constantes preferivelmente do que variáveis aleatórias para um valor particular de i, então α_{kt} torna-se irrelevante e a i-ésima restrição pode permanecer na forma:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\ x_{ij} \leqslant b_{kt}$$

Considerando que a função objetivo $F(x_{ij}, r_{ij})$ é tomada para ser o valor esperado de cx, que cada projeto i-versão j tenha um retorno cujo valor presente é medido pela variável aleatória r_{ij}, o valor presente do retorno total do portfólio será dado pela variável aleatória R, tal que:

$$R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} r_{ij} \; x_{ij}$$

Para facilitar, passaremos a denotar a variável aleatória R, simplesmente de retorno do portfólio. E fica assumido que sua definição engloba o conceito financeiro de valor presente.

Analisando as restrições de demanda e de compromisso, é assumido aqui que as variáveis de decisão são contínuas com limites conhecidos, ou variáveis discretas restritas a dois valores <u>0</u> ou <u>1</u> assim uma decisão deve ou não ser tomada. Pode ser assumido sem perda de generalidade que as variáveis contínuas estão entre <u>0</u> e <u>1</u>, daí isto pode sempre ser efetuado pela mudança apropriada de escala e translação dos coeficientes das respectivas variáveis. Para simplificar, as restrições de compromisso são usadas para representar fatores de decisão diversos que influem no processo de seleção. E mais, estas restrições de compromisso regem o tratamento de versões mutuamente exclusivas do projeto. Isto é, para um mesmo projeto só pode ser selecionada uma única versão.

As restrições de demanda servem para equacionar o dispêndio de recursos, por tipo e por período, de acordo com suas disponibilidades. Além destas restrições poderemos formular outras que levam em consideração diferentes fatores de decisão no processo de seleção. Esta característica dá muita flexibilidade aos modelos, tornando-os mais apropriados a uma situação real.

Por exemplo, podemos considerar que por razões políticas uma versão de projeto índice 9 deve ser selecionada. Devemos, então, substituir na formulação genérica do modelo a restrição de compromisso:

$$\sum_{j=1}^{M_9} x_{9j} \leqslant 1 \text{ pela restrição } \sum_{j=1}^{M_9} x_{9j} = 1$$

Esta restrição linear representa a característica compulsória do projeto índice 9.

Concluímos, então, que, pela inclusão e/ou alteração de restrições, podemos aumentar substancialmente a potencialidade dos modelos, sem perda de simplicidade.

2.3 - Maximização do Valor Esperado do Retorno

Esse modelo busca a maximização do valor esperado do retorno do portfólio, otimizando a alocação dos diversos tipos de recurso. Considerando os retornos r_{ij} de cada projeto-versão como variáveis aleatórias, o retorno médio do portfólio é dado pela soma dos valores médios dos retornos de cada projeto-versão componente. Assim sendo, a função objetivo pode ser representada por:

$$\text{máx } E = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \mu_{ij}$$

onde:

x_{ij} - variável de decisão;

μ_{ij} - valor médio do retorno aleatório r_{ij}.

Essa função-objetivo é linear, e só leva em conta o valor esperado como medida estatística do retorno aleatório r_{ij}. Não considera nenhuma medida de dispersão. É evidente que, o valor experado não é uma medida suficiente para fatores de risco. Portanto, essa função-objetivo não é, por si mesma, apropriada para uma análise de risco, o que caracteriza uma limitação desse modelo. Existe indiferença na escolha entre portfólios com característica de retorno (E,V_1) e (E,V_2) com $V_1 \neq V_2$. Na verdade, com $V_1 < V_2$ deve ser preferido o portfólio com característica (E, V_1) que apresenta menor risco. Do Ponto de vista prático, essa limitação é considerável no processo de seleção de projetos e alocação de recursos.

No processo de seleção de projetos buscamos a maximização do valor experado de retorno mantendo mínima a variância. Isto é equivalente a minimizar a variância mantendo máximo o valor experado do retorno. Esse comportamento de compromisso entre duas medidas estatísticas de retorno aleatório é estudado pela teoria de Markowitz[7] que rege o investimento de recursos sob condições de risco. O conjunto das soluções obtidas do modelo proposto é dito eficiente no sentido de Markowitz. Isto é, cada um dos portfólios obtidos é aquele que apresenta máximo retorno para o nível de risco correspondente; em outras palavras, cada um dos portfólios obtidos é aquele que apresenta menor risco para o nível de retorno correspondente. De um modo geral, o modelo proposto é apropriado ao processo de seleção de projetos e alocação dos diversos recursos sob risco. Agora, do ponto de vista da análise de Markowitz, existe uma limitação que considera a variância como uma medida estatística suficiente para quantificar fatores de risco. Entretanto, existem casos em que a média e a variância não são suficientes para especificar uma distribuição de probabilidade. É o caso quando temos duas distribuições de retorno dos portfólios P e Q com a mesma média E e a mesma variância V, porém com medianas M_P e M_Q diferentes. Sendo $M_P < M_Q$ a probabilidade de que o retorno exceda a média E é maior para o portfólio Q. Desta forma, o portfólio Q deve ser preferido ao portfólio P. E, pela análise de Markowitz, como os portfólios P e Q têm as mesmas características de retorno (E,V), não é possível identificar essa preferência.

2.3.1 - Otimização de um Modelo de Programação Estocástica

O tratamento aleatório do retorno é dado em diversos estudos na área de seleção de alternativas de investimentos sob risco. Esse tipo de função-objetivo busca levar em consideração a forma completa da distribuição de probabilidade de retorno, além de sintetizar esta distribuição usando dois parâmetros. Além da média e da variância, outras medidas são consideradas intrinsecamente pelo próprio conceito de probabilidade. Desta maneira, são evitados os problemas que ocorrem pela insuficiência estatística da média e da variância na medida do retorno aleatório.

Considerando, aqui, o modelo:

Máx. Prob $\{R \geqslant T\}$

$$
\text{Sujeito a}
\begin{cases}
\text{Prob } \{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\ x_{ij} \leqslant b_{kt} \} \geqslant \alpha_{kt} & \forall\ (k,t) \\
\sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \leqslant 1 & \text{se } j \in C \\
x_{ij} \geqslant 0 & \\
x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 & \text{se } j \in D
\end{cases}
$$

onde $C \cap D = \phi$ e $C \cup D = \{1, \ldots, \mu\}$. Cada um dos elementos de A, b e r é permitido ser uma constante ou uma variável aleatória, e a cada variável aleatória é permitido ser dependente. Porém, é assumido que a distribuição de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias não é importunada pela escolha de x. O primeiro passo na solução deste problema de programação com função-objetivo e restrições probabilísticas é para reduzí-lo a uma forma determinística equivalente.

2.3.2 - Transformação da Função-Objetivo

Inicialmente, vamos considerar a função - objetivo máx Prob $\{R \geqslant T\}$ = máx Prob $\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} r_{ij}\ x_{ij} \geqslant T\}$.

Segundo Roy [4], o critério de decisão que rege as aplicações sob risco está baseado num princípio de segurança, pelo qual procuramos reduzir, tanto quanto possível, a possibilidade de um resultado econômico indesejável. Para isso, vamos considerar um nível crítico C como sendo o limite de sobrevivência econômica ao retorno da aplicação. Desta forma, podemos explicitar as afirmações acima em termos de uma função-objetivo, com a formulação:

$$\text{mín } P_r \{R \leqslant C\}.$$

Como já vimos, anteriormente, que as duas medidas estatísticas de retorno R - valor experado E e variância V - não são suficientes para determinar a probabilidade de que o retorno não seja superior ao nível crítico C, buscamos determinar um limite superior usando a desigualdade de Chebyshev's [20]. Temos, então:

$$P_r \{|R - E| \geqslant E - C\} \leqslant V/(E - c)^2.$$

Logo:

$$P_r \{E - R \geqslant E - C\} \leqslant V/(E - C)^2.$$

ou seja:

$$P_r \{R \leqslant C\} \leqslant V/(E - C)^2.$$

Daí, ao invés de minimizar $P_r \{R \leqslant C\}$, operamos com seu limite superior. E segue que:

mín $[V/(E - C)^2]$ é equivalente a:

$$\text{máx}\left[(E - C)/V^{1/2}\right].$$

Dando outro enfoque, Hanssman [5] define um critério de decisão baseado na probabilidade de sobrevivência econômica das aplicações. De um modo geral, os dois critérios são idênticos, existindo diferença apenas na abordagem matemática de representação dos critérios.

No caso do critério sugerido por Hanssmann [5] a função-objetivo busca maximizar a probabilidade de que o retorno da aplicação exceda um nível crítico C, considerado como limite de sobrevivência econômica. Desta maneira, temos como função-objetivo:

$$\text{máx } P_r \{R \geqslant C\}.$$

Agora, como estamos interessados na utilização dos resultados anteriores, precisamos assumir, aqui, a natureza da distribuição de probabilidade do retorno R, o qual assumiremos ter uma distribuição normal. Assim sendo, $P_r \{R \geqslant C\} = 1 - P_r \{R \leqslant C\}$, ou seja, $P_r \{R \geqslant C\} = 1 - \phi\left[(C - E)/V^{1/2}\right]$, onde ϕ é a função de probabilidade normal padrão.

Pela simetria da função distribuição normal, temos que:

$$\phi(\text{arg}) = 1 - \phi(-\text{arg}).$$

Logo:

$$P_r\ \{R \geqslant C\} = \max\ \phi\left[(E - C)/V^{1/2}\right]$$

Como ϕ é uma função monotônica crescente, temos que:

$$\max\ P_r\ \{R \geqslant C\}$$

é equivalente a:

$$\max\ \left[(E - C)/V^{1/2}\right]$$

Os critérios de decisão abordados por Roy [4] e por Hanssmann [5] quando utilizados no contexto de seleção de projetos da forma que propõe o presente trabalho, os critérios são equivalentes, na forma como expressamos as funções-objetivo.

Sendo os retornos r_{ij} de cada projeto-versão considerados variáveis aleatórias independentes, a média e a variância do retorno do portfólio serão dadas por:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\ \mu_{ij}$$

$$V = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\ \sigma^2_{ij}$$

onde:

x_{ij} - variável de decisão correspondente ao projeto i-versão j;

μ_{ij} - média do retorno r_{ij};

σ^2_{ij} - variância do retorno r_{ij}.

Desta maneira, para o problema de seleção proposto, a nossa função-objetivo é dada por:

$$\text{máx} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \mu_{ij} - C \right) / \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \sigma^2_{ij} \right)^{1/2} \right]$$

2.3.3 - Desenvolvimento Teórico para Aproximações das Restrições

Motivado e inspirado no trabalho de |1|, vamos considerar a restrição típica:

$$\text{Prob} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt} \leqslant 0 \right\} > \alpha_{kt}$$

Afirmamos que os valores esperados e a matriz covariância de $a_{i1}, \ldots, a_{iM_i}, b_{kt}$ são conhecidos. E denotemo-la por $E(a_{i1}), \ldots, E(a_{iM_i}), E(b_{kt})$ e por V_i, respectivamente. Assumiremos, posteriormente, que a forma funcional da distribuição de probabilidade de $\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt} \right)$ é conhecida, e que as partes desta distribuição são completamente determinadas pela sua média e variância. Se as variáveis aleatórias individuais têm uma distribuição arbitrária, então:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt} \right)$$

poderão ser aproximadas com o Teorema do Limite Central [19].

Dado B, $0 \leqslant B \leqslant 1$, defina k_B pela relação:

$$F(k_B) = B \quad (F^{-1}(B) = k_B)$$

Portanto, pelo procedimento usual [8], a forma determinística equivalente das restrições se torna:

$$E\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt}\}$$

$$+ k_\alpha \left[V_{ar}\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt}\right)\right]^{1/2} \leqslant 0$$

a qual se reduz a:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ijkt})x_{ij} -$$

$$- k_\alpha \left(\left[x^t, -1\right] V_i \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}\right)^{1/2} \leqslant E(b_{kt}).$$

O problema agora é para reduzir a uma forma determinística mais tratável!

Vamos considerar, novamente, a restrição típica:

$$\text{Prob}\ \{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt} \leqslant 0\} \geqslant \alpha_{kt}$$

e sua forma determinística estabelecida anteriormente.

Afirmamos, inicialmente, que $a_{i1}, \ldots, a_{1M_i}$, b_{kt} são, mutuamente, independentes, desta forma:

$$V_{ar}\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt}\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} V_{ar}(a_{ijkt})x_{ij}^2 + V_{ar}(b_{kt}).$$

Defina:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M_i} V_{ar}(a_{ijkt}) + V_{ar}(b_{kt}) \qquad i = 1, \ldots, N$$

$$\sigma_{ij}^2 = V_{ar}(a_{ij}) \qquad p/ \begin{array}{l} i = 1, \ldots, N \\ j = 1, \ldots, M_i \end{array}$$

<u>Teorema 2.1</u> - Afirmamos que $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ p/ $j \in C$ e $x_j = 0$ ou 1 para $j \in D$ e que $a_{i1}, \ldots, a_{iM_i}$, b_{kt} são mutuamente independentes. Então:

i) $$(V_{ar}\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\, x_j - b_{kt}\})^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j\in C} (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2\, x_j^2)^{1/2} + \sum_{j\in D}\left[\sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right] x_j +$$

$$+ \sum_{j\in D} (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} - (M_i - 1)\sigma_i \stackrel{def}{=} R_i(x)$$

ii) $$(V_{ar}\{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\, x_{ij} - b_{kt}\})^{1/2} = R_i(x)$$

se $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = M_i$

ou se $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{M_i} x_j = M_i - 1 \qquad \forall\ k = 1, \ldots, M_i$

iii) $R_i(x) \leqslant h(x)$ para qualquer função $h(x)$ da forma:

$$h(x) = \sum_{j\varepsilon C} f_j(x_j) + \sum_{j\varepsilon D} d_j\, x_j + a_0 \text{ tal que:}$$

$$(V_{ar}\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\, x_{ij} - b_{kt}\})^{1/2} \leqslant h(x)$$

para todo x viável e

$$V_{ar}\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\, x_{ij} - b_{kt}\}^{1/2} = h(x)$$

se $\sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} = M_i$

Prova:

i observe que:

$$(V_{ar}\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\, x_{ij} - b_{kt}\})^{1/2} =$$

$$= (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \sigma_{ij}^2\, x_{ij} + V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} =$$

$$= \sigma_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \Big[(\sigma_i^2 - \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{ik}^2\, (1 - x_k^2))^{1/2} -$$

$$- (\sigma_i^2 - \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ik}^2\, (1 - x_k^2))^{1/2}\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_i - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} \Big[\sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2\, (1 - x_{ij}^2))^{1/2}\Big] =$$

$$= -(M_i - 1)\sigma_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \varepsilon C} (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 \; x_{ij}^2)^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \varepsilon D} \left[x_{ij} \; \sigma_i + (1 - x_{ij})(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \right]$$

(daí $x_{ij} = 0$ ou 1 para $j \; \varepsilon \; D$), que é o resultado desejado.

Parte II é feita por inspeção.

Parte III, note que $R_i(x) = h(x) = \sigma_i$, quando:

$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} = M_i$ e que $h(x)$ é uma soma de funções das variáveis individuais.

Além disso, segue Parte II que:

$$f_{ij}(1) - f_{ij}(x_{ij}) \leqslant (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2(1))^{1/2} -$$

$$- (\sigma_i^2 \; \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 \; x_{ij}^2)^{1/2} \qquad \text{para } 0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \text{ e } j \; \varepsilon \; C$$

$$d_j \leqslant \sigma_i - (\sigma_i - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \qquad \text{para } j \; \varepsilon \; D$$

Desta forma:

$$\sigma_i - h(x) \leqslant \sigma_i - R_i(x), \quad \forall \; x \text{ viável.}$$

Assim: $h(x) \geqslant R_i(x)$ e está completa a prova do teorema 2.1.

Corolário 2.2 - Em adição às suposições do Teo.2.1, afirmamos que $e = \phi$ e $\sum_{j=1}^{n} x_j < n_i < n-1$. Seja $J_1 \subset \{1, \ldots\ldots n\}$ contendo exatamente $(n - n_1)$ elementos tal que:

$$J_1 = \{j \mid \sigma_{ij}^2 < \sigma_{ik}^2 \ \forall \ k \notin J_1\}$$

e defina:

$$a_i = \sigma_i - \sum_{j \varepsilon J_1} \left[\sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right] -$$

$$- (\sigma_i^2 - \sum_{j \varepsilon J_1} \sigma_{ij}^2)^{1/2}.$$

I. $\quad (V_{ar}\left\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij} x_{ij} - b_i\right\})^{1/2} \leqslant R_i(x) - a_i$

II. $\quad (V_{ar}\left\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij} x_{ij} - b_{kt}\right\})^{1/2} = R_i(x) - a_i$

$$\text{Se} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{M_i} x_j = n_1 \\ \\ \sum_{j \varepsilon J_1} x_j = 0 \end{cases}$$

Prova:

Sob estas suposições, as duas funções reduzem-se a

$$(V_{ar}\left\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij} x_{ij} - b_{kt}\right\})^{1/2} =$$

$$= (\sigma_i^2 - \sum_{j=1}^{n} (1 - x_j) \sigma_{ij}^2)^{1/2}$$

$$R_i(x) = \sigma_i - \sum_{j=1}^{M_i} (1 - x_j) \left[\sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right]$$

$$\text{Seja} \quad S = \{x \mid x_j = 0 \text{ ou } 1, \sum_{j=1}^{M_i} x_j \leqslant n_1\}$$

$$g(x) = R_1(x) - (V_{ar}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i\right\})^{1/2},$$

$$d = \min_{x \varepsilon S} g(x), \text{ desta forma:}$$

$$(V_{ar}\left\{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\, x_{ij} - b_{kit}\right\})^{1/2} \leqslant R_i(x) - d.$$

Daī $y^{1/2}$ ē uma função côncava, ē evidente que $g(x)$ deve ser minimizada por algum x tal que $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = n_1$. Alēm disso, x permanece somente para mostrar que, entre conjunto de soluções tal que $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = n_1$, $g(x)$ ē minimizada por $x^{(1)}$, onde $x_j^{(1)} = 0$ se $j \varepsilon J_1$, $x_j^{(1)} = 1$ se $j \notin J_1$, daī segue que $a_i = d$.

Seja J_2 um subconjunto arbitrārio de $\{1, \ldots, n\}$ que contēm exatamente $(n - n_1)$ elementos e seja $x^{(2)}$ a solução tal que:

$$x_j^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \varepsilon J_2 \\ 1 & \text{se } j \notin J_2 \end{cases}$$

Seja $J_3 = J_1 - J_1 \wedge J_2$ e $J_4 = J_2 - J_1 \wedge J_2$, e n_3, (n_4) o nūmero de elementos de J_3 (ou J_4) e seja $h_3(1), \ldots, h_3(n_3)$ e $h_4(1), \ldots h_4(n_4)$ os ele mentos de J_3 e J_4, respectivamente. Finalmen te, defina:

$$j' = \begin{cases} j & \text{se } j \varepsilon J_3 \\ h_4(k) & \text{se } j = h_3(k) \text{ p/algum } k = 1, \ldots, n_3 \end{cases}$$

Por essa razão:

$$g(x^{(2)}) - g(x^{(1)}) = \Big\{\sigma_i - \sum_{j=1}^{n}(1 - x_j^{(2)})$$

$$(\sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2}) - (\sigma_i - \sum_{j=1}^{n}(1 - x_j^{(2)})\sigma_{ij}^2)^{1/2}\Big\} -$$

$$- \Big\{\sigma_i - \sum_{j=1}^{n}(1 - x_j^{(1)})(\sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2}) -$$

$$- (\sigma_i^2 - \sum_{j=1}^{n}(1 - x_j^{(1)})\sigma_{ij}^2)^{1/2}\Big\} =$$

$$= (\sigma_i^2 - \sum_{j\varepsilon J_1}\sigma_{ij}^2)^{1/2} -$$

$$- (\sigma_i^2 - \sum_{j\varepsilon J_1}\sigma_{ij}^2 - \sum_{k=1}^{n_3}(\sigma_{i,h_4(k)}^2 - \sigma_{i,h_3(k)}^2))^{1/2} -$$

$$- \sum_{j\varepsilon J_3}\Big[(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 - (\sigma_{ij'}^2 - \sigma_{ij}^2))^{1/2}\Big] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big\{(\sigma_i^2 - \sum_{j\varepsilon J_1}\sigma_{ij}^2 - \sum_{k=1}^{j-1}(\sigma_{ij'}^2 - \sigma_{ij}^2))^{1/2} -$$

$$- (\sigma_i^2 - \sum_{j\varepsilon J_1}\sigma_{ij}^2 - \sum_{k=1}^{j}(\sigma_{ij'}^2 - \sigma_{ij}^2))^{1/2} -$$

$$- \Big[(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} -$$

$$- (\sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^2 - (\sigma_{ij'}^2 - \sigma_{ij}^2))^{1/2}\Big]\Big\} \geqslant 0$$

daí $y^{1/2}$ é uma função côncava e, desta forma, cada termo no somató rio é não-negativo. O que completa a prova.

Corolário 2.2 - Sob as suposições do Teo.2.1, segue:

I. Qualquer solução x que satisfaz o conjunto de restrições:

$$\sum_{j=1}^{M_i} E\,(a_{ij})x_j + K_{\alpha_i} R_i(x) \leqslant E(b_i),\ \text{para } i = 1, \ldots, n$$

$$0 \leqslant x_j \leqslant 1 \qquad \text{para } j \in C$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ \text{ou} \\ 1 \end{cases} \qquad \text{para } j \in D$$

necessariamente é uma solução viável.

II. Se as suposições do corolário 2.2 são consistentes, então I apoiará a substituição $R_i(x)$ por:

$$\left[R_i(x) - a_i\right] \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

III. Se para cada $i = 1, \ldots, n$ $k_{\alpha_i} \geqslant 0$ e cada termo não-linear $(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2\ x_j^2)^{1/2}$ em $R_i(x)$ é aproximado por funções lineares por parte, que coincide com $(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2\ x_j^2)^{1/2}$ somente em $x_j = 0$, $x_j = 1$ e os pontos onde as partes das funções lineares mudam a inclinação, então ambos I e II apoiarão. Posteriormente, cada parte destas funções lineares é, necessariamente, convexa.

IV. Qualquer solução viável x tal que $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = n$ ou $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{M_i} x_j = n - 1$ para qualquer $k = 1, \ldots, M_i$, necessariamente, satisfaz o conjunto de restrições em I. Posteriormente, se também $x_k = 0$, então deverá afetar a introdução das partes das funções lineares descritas em III.

Prova:

Dado o Lema Fundamental, todas estas afirmações são uma conseqüência imediatamente do Teo. 2.2. A convexidade das funções lineares por parte descritas em III é demonstrado simplesmente notando que:

$$\frac{d^2}{dx_j} \left\{\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 \; x_j^2\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)\sigma_{ij}^2/(\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 \; x_j^2)^{3/2}\right\} \geqslant 0$$

Para visualizar o quanto é boa a aproximação introduzida pelo Teo.2.1, vamos montar o seguinte exemplo: $M_i = 5$, $E(a_{ij}) = 10$ e $V_{ar}(a_{ij}) = 10 \; \forall \; j=1,\ldots,5$; $E(b_{kt}) = 50$ e $V_{ar}(b_{kt}) = 50$, $k_{\alpha_i} = 2$ e $C = \phi$: Para este caso, o seguinte resultado numérico é obtido:

$\sum_{j=1}^{M_i} x_j$	$(V_{ar}\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}x_j - b_{kt}\})^{1/2}$	$R_i(x)$	$\sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j + k_{\alpha_i}(V_{ar}\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}x_j - b_{kt}\})^{1/2}$	$\sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j + k_{\alpha_i} R_i(x)$
5	10	10	70	70
4	9,487	9,487	58,974	58,974
3	8,944	8,974	47,888	47,948
2	8,367	8,461	36,734	36,922
1	7,746	7,948	25,492	25,896
0	7,071	7,435	14,142	14,870

Portanto, a aproximação introduzida pelo Teo.2.1 é excelente para os valores de $\sum_{j=1}^{M_i} x_j$.

Os resultados acima asseguram a uniformidade da restrição; Teorema 2.2, que segue assegurará a relaxação.

Teorema 2.2 - Afirmamos que $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ para $j \in C$ e $x_j = 0$ ou 1 para $j \in D$, e

I. Existe uma única constante real:

$$V_i;\ V_{ar}(b_{kt}) + \max_{j\in\{1,\ldots,n\}}\{\sigma_{ij}^2\} \leqslant V_i \leqslant \sigma_i^2$$

tal que:

$$(V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} + \sum_{j=1}^{M_i}\left[(V_i)^{1/2} - (V_i - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right] = \sigma_i$$

II. Se $y \geqslant V_i$ (isto é, se:

$$(V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} + \sum_{j=1}^{M_i}\left[y^{1/2} - (y - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right] \leqslant \sigma_i),\ \text{então:}$$

$$h(x,y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j\in C}\left[(y - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2\ x_j^2)^{1/2} - (y - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right] +$$

$$+ \sum_{j\in D}\left[y^{1/2} - (y - \sigma_{ij}^2)^{1/2}\right]x_j +$$

$$+ (V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} \leqslant \left\{V_{ar}(\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\ x_j\ b_i)^{1/2}\right\}$$

III. $h(x,y) = (V_{ar}\left\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}\ x_j - b_{kt}\right\})^{1/2}$ se $\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$

$$\text{ou se } y = V_i \text{ e } \sum_{j=1}^{M_i} x_j = n.$$

Prova:

I. Considere $g(y) = (V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} +$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[y^{1/2} - (y - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \right]$$

para $y \geqslant \max_{j\varepsilon\{1, \ldots, n\}}\{\sigma_{ij}^2\}$, e note que $g(y)$ deve ser uma função contínua estritamente decrescente, daí $y^{1/2}$ é uma função estritamente côncava. Conseqüentemente, a aplicação do Teo. V. Médio, é necessário para mostrar que:

$$g(V_{ar}(b_i)) + \max_{j\varepsilon\{1, \ldots, n\}}\{\sigma_{ij}^2\} \geqslant \sigma_i \geqslant g(\sigma_i^2).$$

De qualquer modo, isto se torna evidente assumindo que:

$\sigma_{i1}^2 = \max_{j\varepsilon\{1, \ldots, n\}}\{\sigma_{ij}^2\}$ e então expressando:

σ_i como:

$$\sigma_i = (V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} + \sum_{j=1}^{M_i} \Big[(V_{ar}(b_{kt}) + \sum_{i=1}^{j} \sigma_{ik}^2)^{1/2} -$$

$$- (V_{ar}(b_{kt}) + \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ik}^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \Big],$$

daí, $(V_{ar}(b_{kit}) + \sigma_{i1}^2)^{1/2} - (V_{ar}(b_{kit}) + \sigma_{i1}^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \geqslant$

$$\geqslant (V_{ar}(b_{kit}) + \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ij}^2)^{1/2} - (V_{ar}(b_{kit}) + \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ik}^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \sigma_i - (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2}.$$

Para provar II, note que, para x fixado h (x,y) é uma função monótona decrescente de y. Portanto, $y = V_i$ é suficiente para provar II.

Será assumido, agora, que $\sigma_{in}^2 = \max_{j\varepsilon\{1,\ldots,n\}}\{\sigma_{ij}^2\}$.

Primeiro, considere o caso onde:

$$V_i \geqslant \max_{j\varepsilon\{1,\ldots,n\}}\Big\{V_{ar}(b_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{ik}^2 \; x_k^2 + \sigma_{ij}^2\Big\} = V_{ar}(b_{kt}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{ik}^2 x_k^2 + \sigma_{in}^2 .$$

Então:

$$h(x,V_i) \leqslant (V_{ar}(b_{kt})^{1/2} +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Big[(V_{ar}(b_{kt}) + \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ik}^2 \; x_k^2)^{1/2} -$$

$$- (V_{ar}(b_{kt}) - \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{ik}^2 \; x_k^2)^{1/2}\Big] =$$

$$= (V_{ar}\Big\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j - b_{kt}\Big\})^{1/2}.$$

Agora considere o caso complementar, onde:

$$V_i \leqslant \min_{j\varepsilon\{1,\ldots,n\}}\Big\{(V_{ar}(b_{kt}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 - \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{ik}^2(1 - x_k^2) =$$

$$= \min_{j\varepsilon\{1,\ldots,n\}} \left\{ V_{ar}(b_{kt}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{ik}^2 \; x_k^2 + \sum_{k=j}^{n} \sigma_{ik}^2 \right\} =$$

$$= V_{ar}(b_{kt}) + \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{ik}^2 \; x_k^2 + \sigma_{in}^2 .$$

Então:

$$h(x,V_i) = \sigma_i - \sum_{j\varepsilon C} \left[(V_i)^{1/2} - (V_i - \sigma_{ij}^2(1 - x_j^2))^{1/2} \right] -$$

$$- \sum_{j\varepsilon D} \left[(V_i)^{1/2} - (V_i - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \right] (1 - x_j) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_i - \sum_{j=1}^{n} \left[(V_{ar}(b_i) + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}^2 - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^{j-1} \sigma_{ik}(1 - x_k^2))^{1/2} -$$

$$- (V_{ar}(b_i) + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}^2 -$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{j} \sigma_{ik}^2(1 - x_k^2))^{1/2} \right] =$$

$$= (V_{ar}\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; x_j - b_i \right\})^{1/2},$$ o que completa a prova II.

Parte III é evidente por inspeção.

Corolário (Teo.2.2) - Sob as suposições do Teo.2.2, assumimos que:

I. Se $u_i \leqslant V_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, então, qualquer solução viável x necessariamente satisfaz o conjunto de restrições.

$$\sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j + k_{\alpha_i} h(x,u_i) \leqslant E(b_{kt}) \text{ para } i = 1, \ldots, n$$

$$0 \leqslant x_j \leqslant 1 \qquad \text{para } j \in C$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1 \qquad \text{para } j \in D$$

II. $$h(x,\sigma_i^2) = R_i(x) + (V_{ar}(b_{kt}))^{1/2} +$$

$$+ (n-1)\sigma_i - \sum_{j=1}^{n} (\sigma_i^2 - \sigma_{ij}^2)^{1/2} \quad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

III. Se, para cada $i = 1, \ldots, n$, $k_{\alpha_i} \geqslant 0$ e cada termo não-linear $(u_i - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 x_j^2)^{1/2}$ em $h(x,u_i)$ é aproximado por uma função linear por parte e convexa que jamais excede $(u_i - \sigma_{ij}^2 + \sigma_{ij}^2 x_j^2)^{1/2}$, então I se manterá.

IV. Qualquer solução x que satisfaz o conjunto de restrições em I, necessariamente é uma solução viável se $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = 0$ ou se $u_i = V_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $\sum_{j=1}^{n} x_j = n$.

Apesar de que, nenhuma solução explícita para V_i tem sido dada, elas podem ser determinadas (dentro de um erro especificado) por métodos numéricos, já que $h(x,y)$ é uma função monótona decrescente de y.

Para ilustrar a aplicação do Teo. 2.2, vamos considerar, novamente, o exemplo numérico utilizado para Teo. 2.1, sendo que:

$$(V_i)^{1/2} - (V_i - \sigma_{ij}^2)^{1/2} = 0{,}5858 \text{ (assim } V_i = 77{,}94\text{)},$$

o qual produz os resultados seguintes:

$\sum_{j=1}^{M_i} x_j$	$h(x,V_i)$	$\sum_{j=1}^{n} E(a_{ij})x_j + k_{\alpha_i} h(x,V_i)$
5	10	70
4	9,414	58,828
3	8,828	47,656
2	8,243	36,486
1	7,657	25,314
0	7,071	14,142

Comparando com os valores de $(V_{ar}\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_{kt}\})^{1/2}$ e $\left[\sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j + k_{\alpha_i}(V_{ar}\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_{kt}\}\right]^{1/2}$ indica claramente que é uma excelente aproximação linear.

Agora vamos considerar o caso onde $a_{ij}, \ldots, a_{in}$, b_i não são mutuamente independentes, dessa forma:

$$V_{ar}\left\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij} x_j - b_{kt}\right\} =$$

$$= \left[x^t, -1\right] V_i \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{M_i} V_{ar}(a_{ij})x_j^2 + V_{ar}(b_{kt}) +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\ k \phi j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} Cov(a_{ij}, a_{ik})x_j x_k - \sum_{j=1}^{M_i} Cov(a_{ij}, b_{kt})x_j$$

Lema 1.2 - Defina:

$$\alpha_{ij} = k_{\alpha_i}^2 V_{ar}(a_{ij}) - \left[E(a_{ij})\right]^2 \quad \text{para } j = 1, \ldots, M_i$$

$$B_{ijk} = k_{\alpha_i}^2 Cov(a_{ij}, a_{ik}) -$$

$$- E(a_{ik})D(a_{ik}) \quad \text{para } j, k = 1, \ldots, M_i$$

$$j \neq k$$

$$Y_{ij} = 2\, E(b_{kt})E(a_j) -$$

$$- k_{\alpha_i} Cov(a_{ij}, b_{kt}) \quad \text{para } j = 1, \ldots, M_i$$

$$r_i = \left[E(b_{kt})\right]^2 - k_{\alpha_i}^2 V_{ar}(b_{kt})$$

Então, se $k_{\alpha_i} \geqslant 0$, a restrição

$$\sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j + k_{\alpha_i}(V_{ar}\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}x_j - b_{kt}\})^{1/2} \leqslant E(b_{kt})$$

é equivalente ao par de restrições:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij}x_j^2 + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk}x_j x_k + \sum_{j=1}^{M_i} Y_{ij}x_j \leqslant r_i \\ \\ \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j \leqslant E(b_{kt}) \end{cases}$$

Prova:

Reescrevendo a restrição original na forma equivalente:

$$k_{\alpha_i} V_{ar}\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}x_j - b_{kt}\}^{1/2} \leqslant \left[E(b_i) - \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j\right]$$

Elevando-se ambos os membros da restrição ao quadrado, teremos:

$$k_{\alpha_i}^2 V_{ar}\{\sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}x_j - b_{kt}\} \leqslant \left[E(b_{kt}) - \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j\right]^2$$

prova que: $E(b_{kt}) \equiv \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j \geqslant 0$, isto é:

$$\sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij})x_j \leqslant E(b_{kt})$$

Substituindo na expressão para $V_{ar}\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\}$, a qual foi dada antes do Lema, e rearrumando os termos obtem-se o resultado desejado.

Teorema 2.3 - Afirmamos que $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ para $j \in C$ e $x_j = 0$ ou 1 para $j \in D$.

I. $$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk}x_jx_k \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ijk} - \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (B_{ijk} + \min\{B_{ijk} 1 0\})\right] x$$

$$x\ (1 - x_j) = U_i(x).$$

II. $\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k = M_i(x)$ se $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = n$ ou se

$B_{ijk} \leqslant 0$ para todo $j,\ k = 1, \ldots, M_i (k \neq j)$

e $\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{M_i} x_j = M_i - 1$ para qualquer $k = 1, \ldots, M_i$

ou se $B_{ijk} \geqslant 0 \quad \forall\ j,k = 1, \ldots, M_i (k \neq j)$ e

$\sum_{j=1}^{M_i} x_j = 0.$

III. Se $B_{ijk} \leqslant 0$ para todo $j,\ k = 1, \ldots, M_i (k \neq j)$

então $M_i(x) \leqslant h(x)$ para qualquer função $h(x)$ da forma $h(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{M_i} d_j x_j$, tal que

$\sum_{\substack{j=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_j = h(x)$ se $\sum_{j=1}^{M_i} x_j = n.$

Prova:

Para provar <u>i</u>, observe que:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k =$$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} \left[1 - (1 - x_k) - (1 - x_j) x_k\right].$$

Conseqüentemente, já que $B_{ijk} = B_{ikj}$ desta forma

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_k = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j$$

segue que:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} -$$

$$- \sum_{j=1}^{M_i} \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} \right] (1 - x_j) -$$

$$- \sum_{j=1}^{M_i} \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} x_k \right] (1 - x_j) \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} -$$

$$- \sum_{j=1}^{M_i} \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} (B_{ijk} + \min\{B_{ijk}, 0\} (1 - x_j) \right.$$ como era para ser mostrado.

Parte II é evidente por inspeção, e parte III segue imediatamente de II.

Corolário 1 p/Teo 2.3 - Em adição às suposições do Teo. 2.3 afirmamos que $n_0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} x_j \leqslant n_1$.

Seja $(B_{ijP_j}(1), \ldots, B_{ijP_j}(n-1)$ uma permutação de $B_{ij1}, \ldots, B_{ij(j-1)}, B_{ij(j+1)}, \ldots, B_{ijn}$ tal que:

$B_{ijP_j}(1) \geqslant B_{ijP_j}(2) \geqslant B_{ijP_j}(n-1)$. Defina $e_{ij} =$

$$= \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} + \sum_{k=n-n_0+1}^{M_i-1} \max\{B_{ijP_j}(k),0\} +$$

$$+ \sum_{k=M_i-M_1}^{M_i-1} \min\{B_{ijP_j}(k),0\} \quad p/j = 1, \ldots, n.$$

I. $$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk}x_j x_k \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} - \sum_{j=1}^{M_i} e_{ij}(1 - x_j).$$

II. Defina:

$$\Delta_{ij} = e_{ij} - \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} (B_{ijk} + \min\{B_{ijk},0\})\right]$$

$$p/j = 1, \ldots, M_i.$$

e seja S_i a soma dos $(M_i - M_1)$ menores elementos de $(\Delta_{i_1}, \ldots, \Delta_{iM_i})$.

Então:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk}x_j x_k \leqslant U_i(x) - S_i$$

Prova: O passo chave é para notar que:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk}x_k = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \max\{B_{ijk},0\}x_k +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \min\{B_{ijk},0\}x_k \geqslant \sum_{k=M_i-M_0+1}^{M_i-1} \max\{B_{ijP_j}(x),0\} +$$

$$+ \sum_{k=n-n_1}^{M_i-1} \min\{B_{ijP_j}(k),0\}.$$

Então, parte I é para notar que:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk}x_k = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \max\{B_{ijk},0\}x_k +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \min\{B_{ijk},0\}x_k \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=M-M_0+1}^{M_i-1} \max\{B_{ijP_j}(k),0\} +$$

$$+ \sum_{k=M_i-M_1}^{M_i-1} \min\{B_{ijk},0\}.$$

Desta forma, I segue imediatamente usando a expressão obtida na prova do Teo. 2.3,

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk}x_jx_k = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} -$$

$$- \left[\sum_{j=1}^{M_i} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk}\right](1 - x_j) -$$

$$- \sum_{j=1}^{M_i} \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk}x_k\right](1 - x_j) \leqslant$$

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} - \sum_{j=1}^{M_i} e_{ij}(1 - x_j).$$

Notando depois que $\Delta_{ij} \geqslant 0$ para todo j e que $\sum_{j=1}^{M_i} (1 - x_j) \geqslant (M_i - M_1)$, então Parte II segue da Parte I.

Corolário 2.2 para Teo. 2.3:

I. Qualquer solução x que satisfaz o conjunto de restrições

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij} x_j^2 + M_i(x) + \sum_{j=1}^{M_i} \gamma_{ij} x_j < r_i & \text{para } i = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij}) x_j \leqslant E(b_{kt}) & \text{para } i = 1, \ldots, n \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 & \text{para } j \in C \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 & \text{para } j \in D \end{cases}$$

necessariamente é uma solução viável.

II. Se a suposição adicional do corolário 1, tem consistência, então I terá, substituindo:

$U_i(x)$ por $\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} - \sum_{j=1}^{M_i} e_{ij}(1 - x_j)\right]$ ou

$\left[U_i(x) - S_i\right]$ para $i = 1, \ldots, n$.

III. Se $C = \phi$, então I e II estarão garantidos substituindo x_j^2 por x_j para $j = 1, \ldots, M_i$.

IV. Afirmamos que $C \neq \phi$ e que, para $i = 1, \ldots, n$ $\alpha_{ij} \geqslant 0$ para cada $j \in C$.

Suponha que, para cada $j \in D$, x_j^2 é substituido em I por x_j, e que, para cada $j \in C$, x_j^2 é aproximado em I por uma função linear por partes que coincidem com x_j^2 somente em $x_j = 0$, $x_j = 1$ e em pontos onde a inclinação das funções lineares mudam (estas funções lineares por parte são, necessariamente, convexas). Então, tanto I como II terão consistência.

V. A solução viável x necessariamente satisfaz o conjunto de restrições em $\underline{I}$ se:

(1) $$\sum_{j=1}^{M_i} x_j = n \text{ ou}$$

(2) $B_{ijk} \leqslant 0$ para todo $j,k = 1, \ldots, M_i$ $(k \neq j)$ e
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{M_i} x_j = M_i - 1 \text{ para qualquer } k = 1, \ldots, M_i \text{ ou}$$

(3) $B_{ijk} \leqslant 0$ para todo $j,k = 1, \ldots, M_i$ $(k \neq j)$ e
$$\sum_{j=1}^{M_i} x_j = 0.$$

Além disso, se $x_k = 0$, também na condição (2) então, estas afirmações todas deverão estar seguras depois de feitas as substituições descritas em IV.

Prova:

Dado o Lema Fundamental e Lema 1, estas afirmações são uma conseqüência imediata do Teo. 2.3 do Corolário 1.2.

Teo. 2.4: Assumimos que $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ para $j \in C$ $x_j = 0$ ou 1 para $j \in D$ e $n_0 \leqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} x_j \leqslant n_1$.

Defina $P_j(k)$ como no Corolário 1 para Teo. 3 e seja $\gamma'_{ij} = \sum_{k=1}^{n_0-1} B_{ij} P_j(k) + \sum_{k=n_0}^{n_1} \max\{B_{ijP_j}(k), 0\}$ para $j = 1, \ldots, n$.

Então:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ijk} x_j x_k < \sum_{j=1}^{n} \gamma'_{ij} x_j .$$

Prova:

Observe que $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M_i} B_{ijk} x_k \leqslant \gamma'_{ij} x_j$, dessa forma:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k = \sum_{j=1}^{M_i} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M_i} B_{ijk} x_k \right] x_j \leqslant \sum_{j=1}^{M_i} \gamma'_{ij} x_j$$

como era para ser mostrado.

Corolário para Teo. 2.4. Depois das valiosas afirmações do Teo. 2.4, afirmações I, e suas extensões III e IV do Corolário 2.2 para Teo. 2.3 estarão garantidas substituindo $M_i(x)$ por $\sum_{j=1}^{M} \gamma'_{ij} x_j$.

A decisão quer para uso do Teo. 2.3 ou Teo. 2.4 para obter um limite superior sobre:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{M} \sum_{j=1}^{M} B_{ijk} x_j x_k$$

depende fortemente sobre os valores antecipados de $\sum_{j=1}^{M_i} x_j$. O limite estabelecido pelo Teo. 2.3 e Corolário 1 para Teo. 3.2 tende a ser compacto se $\sum_{j=1}^{n} x_j$ e fechado para n. Além disso, se a interseção soluções viáveis tende a produzir valores de $\sum_{j=1}^{M_i} x_j$ que são relativamente pequenos em relação a M_i, então o limite provado pelo Teo. 4 pode ser melhor, especificamente se $(M_1 - M_0)$ não é grande e o B_{ijk} não são também variáveis.

Vamos, agora, apresentar um exemplo numérico para ilustrar. Considere o exemplo introduzido depois Teo. 2.1, e imponha a restrição adicional que $2 \leqslant \sum_{j=1}^{M_i} x_j \leqslant 3$. Daí:

$$\alpha_{ij} = -60,\ B_{ijk} = -100,\ \gamma_{ij} = 1000,\ r_i = 2300$$

$$e_{ij} = -700,\ \delta_i = -200 \text{ e } \gamma'_{ij} = -100$$

para todo j, k, que produz os resultados seguintes:

$\sum_{j=1}^{n} x_j$	$\sum_{\substack{j=1 \\ k\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ijk}\, x_j x_k$	$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ijk} - e_{ij}(1-x_j)$	$U_i(x) - S_i$	$\sum_{j=1}^{n} \gamma'_{ij} x_j$	$r_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_j$
2	-200	100	200	-200	420
3	-600	-600	-600	-300	-540

Considerando que os Teos. 3 e 4 estabelecem um limite superior sobre:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k ;$$

Teo. 5 que segue, estabelecerá um limite inferior sobre esta função.

Teo. 25.: Afirmamos que $0 \leqslant x_j \leqslant 1$ para $j \in C$

$x_j = 0$ ou 1 para $j \in D$, e

$n_0 \leqslant \sum_{j=1}^{M_i} x_j \leqslant n_1$. Defina $P_j(x)$ como no Corolário 1 do Teo. 3, seja:

$$N_j = \begin{cases} M_1 & \text{se } j \in C \\ M_1 - 1 & \text{se } j \in D \end{cases}$$

e seja

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{M_0-1} B_{ijP_j}(n-k) + \sum_{k=M_0}^{N_j} \min\{B_{ijP_j}(u-k), 0\}$$

para $j = 1, \ldots, M_i$.

Então:

I. $$\sum_{j=1}^{M_i} q_{ij} x_j \leqslant \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k .$$

$$\text{II. } \sum_{j=1}^{M_i} q_{ij} x_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k \text{ se } \sum_{j=1}^{M_i} x_j = 0.$$

Prova:

Note que:

$$\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} x_k\right] x_j \geqslant q_{ij} x_j \quad \text{para } j = 1, \ldots, M_i$$

desta forma:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k = \sum_{j=1}^{M_i} \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{M_i} B_{ijk} x_k\right] x_j \geqslant \sum_{j=1}^{M_i} q_{ij} x_j.$$

Isto verifica I, e II ē obvio por inspeção.

Corolārio para Teo. 2.5

$$\text{I. Se } t_{ij} \leqslant q_{ij} \text{ para todo } i, j \begin{cases} i = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, M_i \end{cases}$$

então qualquer solução viāvel x tal que $M_0 \leqslant \sum_{j=1}^{M_i} x_j \leqslant M_1$ necessariamente satisfaz o conjunto de restrição.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij} x_j^2 + \sum_{j=1}^{M_i} (t_{ij} + \gamma_{ij}) x_j \leqslant r_i & \text{para } i = 1, \ldots, n \\ \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij}) x_j \leqslant E(b_{kt}) & \text{para } i = 1, \ldots, n \\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1 & \text{para } j \in C \\ x_j = 0 \text{ ou } 1 & \text{para } j \in D \end{cases}$$

II. Afirmamos que $\alpha_{ij} \geqslant 0$ para $i = 1, \ldots, n$ $j \in C$.

Suponha que, para cada $j \in D$, x_j^2 é substituído em I por x_j, e que, para cada $j \in C$ x_j^2 é aproximado em I por uma função linear por parte, que nunca excede x_j^2. Então I terá consistência.

Para ilustrar essa apresentação, vamos ao exemplo utilizado para Teos. 2.3 e 2.4 com $q_{ij} = -200$ para todo j:

$\sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}$	$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} B_{ijk} x_j x_k$	$\sum_{j=1}^{M_i} q_{ij} x_j$	$r_i - \sum_{j=1}^{M_i} \alpha_{ij} x_i^2 - \sum_{j=1}^{M_i} \gamma_{ij} x_j$
2	-200	-400	420
3	-600	-600	-540

2.4 - Considerações Gerais

De um modo geral, os modelos de programação apresentados são satisfatórios, de acordo com o nível de sofisticação desejado para a análise. Quando consideramos uma situação de incerteza por fatores de risco, os modelos com função objetivo e restrições probabilística são mais adequados. Do ponto de vista prático, a principal característica desses modelos é sua pontencialidade sem perda de simplicidade.

Nesse caso, tanto o retorno do portfólio como também as demandas e as disponibilidades de recursos são considerados variáveis aleatórias. É evidente que esse modelos apresentam um tratamento matemático muito mais complexo, e a sua solução depende da construção de uma forma determinísica equivalente para o modelo.

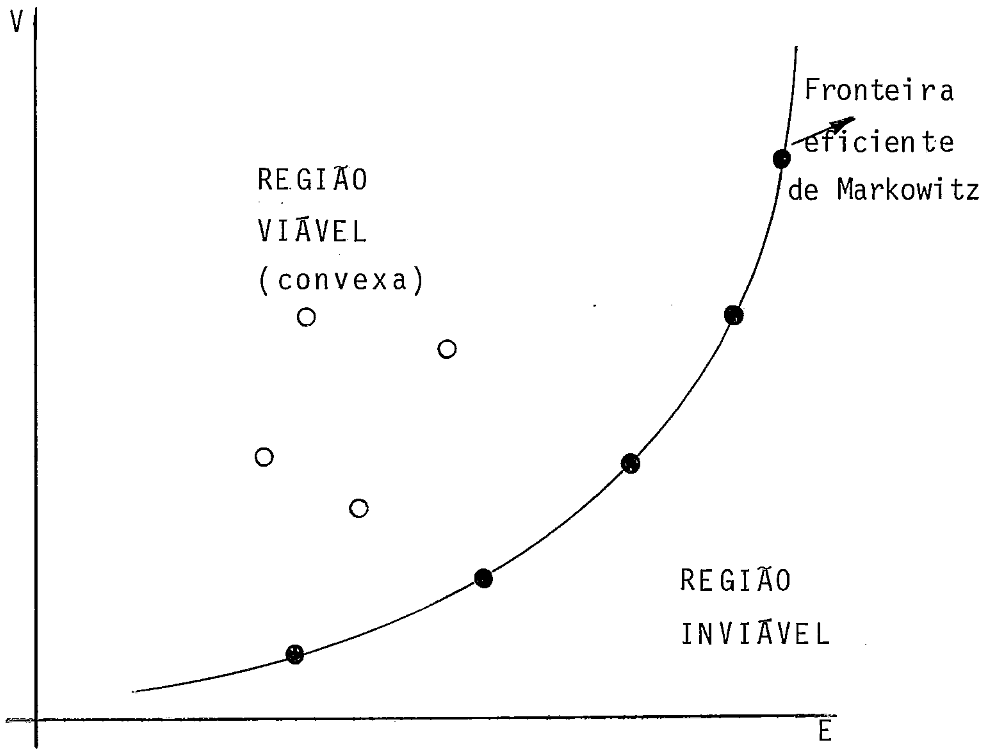
Os modelos que consideram a média e a variância como medidas estatísticas do retorno aleatório apresentam soluções com uma qualificação comum. O conjunto de projetos selecionados por qualquer desses modelos possui as características de eficiência definidas pela teoria de Markowitz(07) que rege a aplicação diversificada de recursos sob condição de risco.

Segundo essa teoria, para um dado conjunto de projetos candidatos, existe um número bastante elevado de combinações desses projetos para formar um portfólio. Esses portfólios estão classificados em dois grupos:

○ conjunto dos portfólios "não eficientes";

● conjunto dos portfólios "eficientes".

Um portfólio é dito não eficiente se existe outro com o mesmo valor de retorno e menor risco, ou com o mesmo risco tenha maior valor de retorno. Um portfólio é dito eficiente quando não existe nenhum portfólio com o mesmo valor de retorno e menor risco, ou com o mesmo risco tenha maior valor de retorno. Desta forma, para portfólios eficientes é impossível obter maior variância ou obter menor variância sem uma diminuição no valor de retorno. Para melhor visualizar a teoria de Markowitz, consideremos um plano cartesiano (E,V) com a locação dos portfólios eficientes e não eficientes, conforme apresentação a seguir.



Características de retorno dos portfólios eficientes de Markowitz.

As características de retorno (E,V) dos portfólios eficientes estão sob a fronteira da região viável. As características de retorno (E,V) dos portfólios não eficientes estão acima da fronteira da região viável. Nenhum portfólio tem o ponto (E,V) locado abaixo da fronteira, porque essa região é inviável.

Desta forma, a solução do modelo de seleção levando em conta as duas medidas estatísticas do retorno R deve ser obviamente um portfólio que pertença ao conjunto eficiente de Markowitz.

Conseqüentemente, todos os modelos de seleção de projetos que levam em conta a média e a variância do retorno do portfólio fornecem soluções equivalentes no sentido de Markowitz[07].

CAPÍTULO III

CONSIDERAÇÕES SOBRE UM MODELO OPERACIONAL

III. CONSIDERAÇÕES SOBRE UM MODELO OPERACIONAL

3.1 - Introdução

Com a exposição anterior, vimos várias maneiras de considerar o problema de seleção de projetos de acordo com a sofisticação exigida pela análise. Foi visto, ainda, que, para o problema de alocação de recursos sob condições de risco, os modelos de programação matemática que consideram a média e a variância do retorno possuem soluções equivalentes segundo a teoria de Markowitz.

Neste capítulo, será feita a análise detalhada de um modelo de seleção com função objetivo e restrições probabilísticas. A escolha desse tipo de abordagem é justificada pelas características de potencialidade desse modelo, sem perda de simplicidade. O modelo leva em consideração a disponibilidade variável de diversos tipos de recursos em diversos períodos de planejamento. Além disso, dá um tratamento probabilístico completo ao retorno do portfólio, usando apenas a média e a variância como medidas estatísticas explícitas. Esta abordagem é bastante adequada ao processo de seleção de projetos e alocação de recursos sob risco, aproximando-se muito do sistema ideal definido no Capítulo I.

O modelo analisado é probabilístico, mas pode ser formulado de modo equivalente por aproximações conforme proposto por Hillier[1].

3.2 - Modelo com Tratamento Probabilístico do Retorno e DISPÊNDIO DE RECURSOS

Um modelo adequado para o processo de alocação de recursos em programas de pesquisa e desenvolvimento deve considerar um critério de aspiração em termos de retorno e do dispêndio de recursos dentro do horizonte de planejamento. Isto é, para um objetivo de retorno, o nosso modelo busca determinar o portfólio que maximiza a probabilidade de que seu retorno exceda o objetivo. E, em termos de alocação de recursos, que a probabilidade da demanda seja inferior ou igual a quantidade de recursos disponíveis. De qualquer forma, o nosso procedimento é, em parte, inspirado nas idéias de Hillier[1], Roy[4] e por Hanssmann[5]. A função objetivo probabilística sugerida por Freemann & Cear[2] pode ser formulada por:

$$\max \text{ Prob } \{R \geqslant T\},$$

onde: R - valor presente do retorno total do portfólio $\left(R = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, r_{ij}\right)$

T - objetivo do retorno.

Verificamos, facilmente, que essa função tem estrutura matemática idêntica à função sugerida por Hillier[1]. Conforme já foi demonstrado, anteriormente, concluímos que:

$$\max \text{ Prob } \{R \geqslant T\} = \max \left[(E - T)/(V)^{1/2}\right]$$

e isso é equivalente a:

$$\text{máx} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \mu_{ij} - T \right) / \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \sigma_{ij}^{2} \right)^{1/2} \right]$$

E, em termos de alocação de recursos, objetivamos que a probabilidade da demanda seja inferior ou igual à quantidade de recursos disponíveis.

De acordo com a proposta do modelo, formulada no Capítulo II, a restrição de demanda pode ser apresentada como:

$$\text{Prob} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} \leqslant b_{kt} \right\} \geqslant \alpha$$

onde b_{kt} representa a disponibilidade total do recurso tipo k no período t, em unidades de b_{ijkt}.

Novamente, ao invés de trabalharmos com a função $\text{Prob} \{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} \leqslant b_{kt} \}$, através da desigualdade de Tchebycheff, chegamos ao seu limite superior, com o qual passaremos a operar.

Desta forma, temos também uma restrição de demanda que dá tratamento probabilístico ao dispêndio de recursos, considerando um critério de aspiração na sua utilização.

Esse modelo com função objetivo probabilística, sujeita ao conjunto de restrições de demanda e de compromisso, estabelece um modelo bastante completo ao processo de seleção de projetos e alocação de recursos sob risco. A formulação de nos so modelo é probabilística e antes de se iniciar a resolução vamos colocá-lo numa forma equivalente, baseado nas idéias de Hillier[1].

Esse procedimento consiste em se especificar a função objetivo somente em termos do valor esperado e da variância do retorno; bem como a restrição de demanda e usando como critério de seleção entre os portfólios eficientes a busca de alternativa (E,V) para a qual:

$$\text{máx}_{(E,V)\,\varepsilon\, P_{ef}} \left[(E - T_0)/(V)^{1/2} \right]$$

onde:

P_{ef} - conjunto dos portfólios eficientes

T_0 - objetivo de retorno escolhido

Pela teoria de Markowitz[7] existe uma alternativa eficiente, para cada valor máximo de retorno "E", tal que é mínima a variância do portfólio "V".

Temos, então, um modelo equivalente:

$$\text{máx} \left[\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \mu_{ij} - T \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij}\, \sigma_{ij}^{2} \right)^{1/2} \right]$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} E(a_{ij}) x_{ij} + \\ + k_\alpha \left[V_{ar} \{ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt} \} \right]^{1/2} \leqslant E(b_{kt})^* \\ \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \leqslant 1 \qquad \text{se } j \in C \\ x_{ij} \geqslant 0 \\ x_{ij} = 0 \text{ ou } 1 \qquad \text{se } j \in D \end{cases}$$

* Se a distribuição de $(\Sigma\Sigma\, a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt})$ não é conhecida, k_α não é determinado, então usamos a desigualdade de Tchebycheff para determinar o limite superior sobre $k_\alpha(\alpha - \left[(1 - \alpha)\right]^{1/2}$. Tudo isso para garantir que Prob $\{\Sigma\Sigma\, a_{ijkt}\, x_{ij} - b_{kt}\} \geqslant \alpha$.

onde: $C \wedge D = \phi$ e $C \cup D = \{1, \ldots, n\}$

Essa formulação do problema constitui um modelo não-linear, que pode ser resolvido com o uso de algorítmos de programação não-linear. Essas técnicas não são bastante difundidas em termos computacionais, mas a aplicação desse modelo é bastante simplificada e eficiente.

Desta forma, especificando um valor de T_0 para o objetivo T, a solução ótima para o problema é o portfólio eficien te definido pelo par (E^*, V^*) tal que:

$$(E^* - T_0)/(V^*)^{1/2} = \max_{(E,V) \in P_{ef}} \left[(E - T_0)/(V)^{1/2}\right]$$

Analisando o modelo proposto e as soluções ótimas obtidas para x_{ij}, observa-se que seus valores pertencem ao intervalo real $[0,1]$. Considerando que os projetos são entidades essencialmente discretas, seria conveniente que os valores ótimos da variável de decisão x_{ij} fossem estritamente 0 ou 1. Para satisfazer esse requisito, o modelo deveria ser resolvido por técnicas de programação inteira. Entretanto, as características computacionais dos programas disponíveis para a resolução de algorítmos inteiros não recomendam seu uso para esse tipo de problema, pelo elevado custo de obtenção da solução. Usando programação contínua, problemas de porte real podem ser resolvidos de maneira fácil e econômica, pois os algorítmos são mais eficientes.

De qualquer forma, a solução contínua pode dar uma indicação de qual deve ser a política de expansão ou retração de recursos através da análise da solução ótima dual e variáveis de folga.

Valores diferentes de 0 ou 1 para x_{ij} podem ser interpretados como uma seleção parcial do projeto i - versão j. Um projeto que tiver somente uma de suas versões parcialmente selecionadas é um projeto marginal que utiliza recursos residuais até seu limite. Nesse caso, o projeto só pode ser selecionado desde que os recursos necessários sejam providenciados. Se um projeto tiver duas ou mais versões parcialmente selecionadas significa que deve existir outra versão não proposta na qual a demanda de recursos é algo diferente e que é mais apropriado à seleção. Isto pode ser verificado substituindo as versões parcialmente selecionadas por uma versão intermediária.

Analisando somente o conjunto dos portfólios eficientes de Markowitz gerados pelo algorítmo, não podemos dizer "a priori" se um é mais eficiente que o outro. É necessário uma análise, segundo algum critério, para escolher o melhor dos portfólios. Esse critério pode ser considerado como sendo a atitude subjetiva que tomamos frente aos fatores de risco que envolvem o programa de pesquisa. Pelo critério adotado, o protfólio escolhido para um determinado objetivo de retorno T_0 é tal que maximiza a probabilidade de que seu retorno R exceda o objetivo. Isso é equivalente, conforme já verificamos a escolher o portfólio com característica de retorno (E,V), tal que é máxima a relação $(E-T_0)/(V)^{1/2}$.

CAPÍTULO IV - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

IV. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

4.1 - Conclusões

Uma retrospectiva global do nosso estudo apresentado nesse trabalho nos demonstra que os modelos de seleção de projetos e alocação de recursos sob condições de risco são de grande utilidade em atividades de planejamento. Assim como, qualquer outra técnica gerencial quantitativa, a sua utilização deve ser considerado como um instrumento de auxílio em todas as etapas do processo decisório e nunca um substituto do elemento humano que incorpora o processo. É importante lembrar que um modelo é e sempre será uma abstração da realidade. E mais, os resultados fornecidos por um modelo são fortemente dependentes dos dados que o mesmo manipula. Por isso, a interferência e o julgamento do elemento humano dentro de uma ótica gerencial são indispensáveis. Os resultados devem ser interpretados em termo das políticas e objetivos da organização.

A escolha de um modelo em Otimização Estocástica foi devida à grande potencialidade para se representar os diferentes fatores de decisão que devem ser considerados na seleção de projetos e alocação de recursos sob risco. Quanto à função objetivo probabilística, o fato de ser representada por uma família de variáveis aleatórias, tem o mérito de levar em conta a forma completa da distribuição de probabilidade, considerando (explicitamente) somente a média e a variância como medida estatística do retorno aleatório. Dessa forma, são considerados os fatores de risco que caracterizam o problema, eliminando a insuficiência estatística da média e da variância.

Sobre as restrições de demanda de recursos também representadas por uma família de variáveis aleatórias, servem para equacionar o dispêndio de recursos por tipo e por período, de acordo com suas disponibilidades. E as restrições de compromisso (com representação determinística) são usadas para representar fatores de decisão diversos que influem no processo de seleção, bem como, regem o tratamento de versões mutuamente exclusivas do projeto. Isto é, para um mesmo projeto só pode ser selecionada uma única versão.

Como pudemos constatar, o modelo obtido (após a sua transformação para uma forma determinística equivalente) é Não-Linear. Por isso o modelo deverá ser resolvido por técnicas de Programação - Não - Linear, cujos algoritmos desenvolvidos até o momento, só funcionam, mais ou menos bem, para um limite de 50 variáveis. E se pensarmos numa aplicação de uma seleção de projetos, com 20 projetos candidatos a cada projeto com 40 versões, estaremos diante de um impasse (no momento!), para solucionar o nosso problema utilizando um algoritmo de Programação-Não-Linear. Daí, identificamos um leque que dará um subsídio para uma linha de pesquisa, visando a implantação de modelos desse tipo. Além disso, a consideração de variáveis de decisão contínuas, poderemos encontrar soluções mais fáceis e menos onerosa computacionalmente. A solução contínua nos fornece adicionais de análise pela consideração dos resultados das variáveis duais. A desvantagem desse tipo de solução é a ocorrência de seleções parciais caracterizadas pelos valores não inteiros da variável de decisão.

A obtenção de uma solução estritamente inteira pelos algoritmos de Programação-Não-Linear, por enquanto desaconse lhamos, tendo em vista que, até o momento é muito grande o dispêndio do computador com a implementação de algoritmos para soluções inteiras, mesmo em Programação Linear.

Desta forma, podemos considerar que o modelo construido visando uma contribuição à Teoria de Markowitz é bastante completo e a sua utilização dependerá (também) do grau de sofisticação exigido pela empresa.

Da qualidade dos dados obtidos na fase de avaliação, dependerá o sucesso da utilização de um modelo de seleção. E o detalhamento da avaliação deve ser compatível com o nível de sofisticação do modelo de seleção escolhodo pela organização.

Considerando que o modelo deve ser desenvolvido de acordo com as necessidades da organização, o mais racional é iniciar com modelos simples. Assim, a experiência adquirida possibilita uma mais fácil alteração quando necessário. Esta abordagem assegura que o tamanho do modelo, bem como os dados necessários sejam compatíveis com sua utilização. Apesar de termos adotado (no nosso trabalho) o tratamento ao processo de seleção de projetos de pesquisa e desenvolvimento, o estudo pode ser usado, com pequenas adaptações, a qualquer caso do processo genérico de seleção e alocação sob influência de fatores de risco.

4.2 - Sugestões

O modelo proposto neste trabalho pode ser melhorado substancialmente com a inclusão de outros fatores de decisão ainda não considerados no mesmo. No Capítulo II, foi visto que o modelo em estudo são considera restrições de compromisso que regem a característica mutuamente exclusiva de versões de um mesmo projeto. Além disso, verificamos que as possíveis características compulsórias dos projetos podem ser incluídas facilmente no modelo, sem modificar a estrutura do mesmo.

Numa situação real de seleção de projetos a alocação de recursos é comum à necessidade de levar em conta a interação entre projetos ou também a permutabilidade de recursos(1).

A interação entre projetos é caracterizada quando dois projetos estão relacionados em qualquer de suas versões, e-xiste a economia de certa quantidade de determinados recursos em determinados períodos. Convém observar que, apesar de existir uma interação em termos de recursos, os retornos dos projetos continuam independentes. A ilustração dessa abordagem, ficará mais ilustrada com a implantação de um problema exemplo. De onde há de vir outras elucidações também importantes. Quanto à permutabilidade de recursos ela é caracterizada quando um determinado recurso pode ser alocado numa categoria diferente da sua. Muitas vezes uma determinada categoria de recursos somente é usada em fases específicas de um projeto. Nesses casos, em geral, é interessante permitir uma maior flexibilidade na alocação desse tipo de recurso. Verifica-se facilmente que a possibilidade de permuta entre diferentes categorias de recursos é uma facilidade que pode determinar uma melhoria considerável na alocação dos mesmos.

Do nosso ponto de vista profissional e da nossa responsabilidade acadêmica e de cidadãos, que somos, achamos por bem incluir nessas conclusões o seguinte:

I. Cabe à comunidade, através de ordenamentos jurídicos, impor à Universidade e à empresa, seus interesses, decidindo sobre a amplitude e natureza da ação universitária e da ação empresarial e sobre a eficiência privada e social dos vários recursos com que conta para promover o bem-estar de seus elementos;

II. Cabe ao pesquisador, enquanto pesquisador, posicionar inteligentemente as restrições internas de sua instituição de pesquisa, traduzidas por suas políticas de benefícios e comunidade, e pugnar por alargamento das limitações, contidas nas políticas sociais e econômicas, monetárias e fiscais, que lhe são impostas, de sorte a permitir atingir o mais alto nível na escala de valores da instituição; como cidadão, cabe-lhe, no entanto, contribuir para o aperfeiçoamento das regras que disciplinam o comportamento da sociedade;

III. A respeito da existência de inúmeros indicadores de mérito para um projeto, é impossível, avaliar-se de forma completa e perfeita a qualidade de uma oportunidade de investimento, mesmo quando vista isoladamente; em conseqüência, nem sempre é possível comparar-se de forma inquestionável duas (ou mais propostas) que competem por recursos escassos; por outro lado, existem ainda sérias dificuldades metodológicas na determinação do volume ótimo de investimento a ser adotado, numa seleção de projetos.

B I B L I O G R A F I A

B I B L I O G R A F I A

|1| - HILLIER, F.S., Chance Constrained Programming with 0-1 or Bounded Continuous Decision Variables, Management Sciences, Vol. 14, nº 1, 1967.

|2| - FREEMAN, P., CEAR, A.E., Objective Function for R & D Portfolio, Operational Research Quarterly, Vol. 22, nº 3, 1971.

|3| - Bonini, Charles, P., Risk evoluation of investment Projects, OMEGA, Vlo. 3, nº 6, 1975.

|4| - ROY, A.D., Safety First and the Holding of Assets, Econometrica, Vol. 20, nº 3, 1962.

|5| - HANSSMANN, F., Probability of Survival in Ontário: A case Study in Rationing of Capital Budgets, Management Sciences, Vol. 20, nº 4, 1973.

|6| - Hespos & Strassmann, Stochastic decision tress for the analysis of investment decisions, Management Sciences, August 65, pp. B-244-B-259.

|7| - MARKOWITZ, H.M., Portfolio Slection: Efficient Diversification of Investment, Willey, New York, 1969.

|8| - KEPNER, C.H., TREGOE, B.B. O Administrador Racional, Atlas, São Paulo, 1974.

| 9 | - WEINGARTNER, H. MARTIN, Mathematical Programming and the analysis of Capital Budgeting Problems - Kershaw Publishing

|10| - WEINGARTNER, H. MARTIN, Mathematical Programming and the analysis of Capital Budgeting Problems - Prentice - Hall, Englewood Cliff, N.I., 1963.

|11| - WEINGARTNER, H. MARTIN, "Capital Budgeting of Interrelated Projects: survey and synthesis, Management Science, Vol.12, No.7, March, 1966, pp. 485-516.

|12| - SCHLAIFER, ROBERT, Probability and statistics for business decisions, McGraw - Hill, New York, 1959.

|13| - NASLUN, BERTIL, Mathematical programming under risk, Swedish Journal of Economics, 1965, pp. 240-255.

|14| - MAO, JAMES C.T., and SÄRNDAL, CARL ERIK, A decision theory approach to portfolio selection, Management Science, Vol. 12, No.8, April, 1966, pp. B-323 to B-333.

|15| - MALCOLM, D.G., ROSEBOOM, J.H., and CLARK, C.E., Application of a technique for research and development program evaluation, Operations Research, Sept. - Oct. 1959, pp. 646-669.

|16| - MARKOWITZ, HARRY, M., "The utility of Wealth, Journal of Political Economy, Vol. LX, No.2, April, 1952, pp.151-158.

|17| MARKOWITZ, HARRY,M., Portfōlio selection, John Wiley and Sons, New York, 1959.

|18| MARTIN, A.D., Jr., Mathematical programming of portfōlio selections, Managment Science, Jan., 1954, pp.152-165.

|19| MODIGLIANI, F., AND MILLER, M., The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment, American Economic Riview, vol. XL VIII, No, June, 1958.

|20| HOEFFDING, W., AND ROBBINS, H., The central limit theorem for dependent randow variables, Duke Mathematical Journal Vol. 15, 1958, pp. 773 ff.

|21| BNEDENKO, B.V., Limit theorems of probability theory, proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1958.

|22| GNEDENKO, B.V., The theory of probability MIR PUBLISHERS. MOSCOW.

|23| GINLAR, Erhan, Introduction to stochastic processes Northwestern University, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

|24| HILLIER, FREDERICKS, The Evaluation of risk Interrelated Investments, Technical Report No. 73, Contract Neur - 225 (53), Stanford University, July 24, 1964. To appear as capital Budgeting of Interrelated Projeets, Vol. II, Office of Naval Research Monograph on Mathematical Methods in Logisties, 1967.

|25| GAVER, D.P., Jr., Models for appraising investments yielding stochastie returns, Management Science, Vol. 11, No.9 July 1965, pp. 815-830.

|26| FREUND, R.J., The introduction of risk into a programming model, Econometrica, July, 1961.

|27| KATAOKA, SHINII, A stochastic programming model,Econometrica Vol. 31, 1963, pp. 181-196.

|28| LORIE, J., AND SAVAGE, L.J., Three problems in capital rationing, Journal of Business, Oct., 1955.

|29| MAGE, JOHN F., How to use decision in capital investment, Harvard Business Review, Sept.-Oct., 1964.

|30| MORRIS, WILLIAM T., Diversification, Management Science July, 1958, pp.381-391.

|31| HILLIER, FREDERICKS, Derivation of probabilistic information for the evaluation of risk investments Managment Science, April, 1963, pp. 443-457.

|32| HILLIER, FREDERICK S., Suplement to the derivation of probabilistic information for the evaluation of risk investments, Managment Science, Vol. 11 No. 3, Jan, 1965, pp. 485-487.

|33| HILLIER, FREDERICK S., AND HEEBINK, DAVID V., Evaluating risk capital investments, California Managment Review,Winter, 1965-1966, pp. 71-80.

|34| DOOB, J.L., Stochastic processes, John Wiley and Sons, Rew York, 1953.

|35| DYCKMAN, T.R., Allocating funds to investment projects when funds are subject to uncertainty:a comment, Management Science, Vol. 11 No. 2. Nov., 1964 pp.348-350.

|36| FAMA, EUGENE F., Portfolio analysis in a stable paretian market, Managment Science, Vol. 11, No. 3, Jan., 1965, pp. 404-419.

|37| FARRAR, DONALD EUGENE, The investment decision under uncertainty, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. N.I., 1962.

|38| FELLER, WILLIAM, An introduction to probability theory and its applications, 2nd edition, John Wiley and Sons, New York, 1957.

|39| CHARNES, A., AND COOPER, W.W., Chance-constrained programs with normal devistes and linear decisions rules, the technological institute, Northwestern University, 1959 b.

|40| CHARNES, A., AND COOPER, W.W., Chance-constrained programming, Managment, Oct. 1959a pp. 73-79.

|41| CHARNES, A., AND COOPER, W.W., Chance constraints and normal deviates, Journal of the American Statistical Association, March, 1962b, pp.134-143.

|42| CHENG, PAO-LUN, Optimum bond portfolio selection, Management Science, July, 1962, pp.490-499.

|43| CORD, JOEL, A method for allocating funds to investment projects when returns are subject to incertainty, Management Science, Jan., 1964.