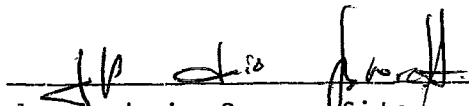


ALGUNS PROBLEMAS ALGORITMICOS EM CONJUNTOS  
PARCIALMENTE ORDENADOS E O TEOREMA DE DILWORTH

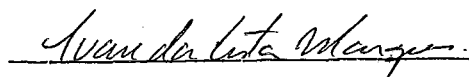
Carlos Alberto da Silva Franco

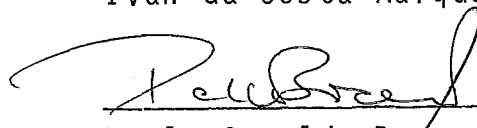
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

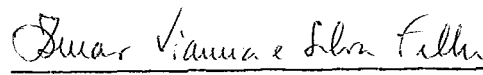
  
Jayme Luiz Szwarcfiter  
Presidente

  
Emmanuel Piseces Lopes Passos

  
Ivan da Costa Marques

  
Paulo Osvaldo Boaventura Neto

  
Paulo Roberto Oliveira

  
Ysmar Vianna e Silva Filho

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1983

FRANCO, CARLOS ALBERTO DA SILVA

Alguns Problemas Algoritmicos em Conjuntos Parcialmente Ordenados e o Teorema de Dilworth (Rio de Janeiro), 1983.

VII, 113 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1983).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

I. Grafos e Complexidade      I. COPPE/UFRJ      II. Título  
(série).

Para Joaquim  
Dejanira  
Elisabete  
Fábio  
Bruno  
Marcos

AGRADECIMENTOS

Agradeço de forma especial a Jayme  
Antônio  
Edil  
Denise

Resumo da Tese Apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ALGUNS PROBLEMAS ALGORITMICOS EM CONJUNTOS  
PARCIALMENTE ORDENADOS E O TEOREMA DE DILWORTH

Carlos Alberto da Silva Franco

Dezembro de 1983

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Resumo

Neste trabalho se determina a complexidade de problemas algorítmicos formulados sobre grafos relacionados a conjuntos parcialmente ordenados; além de um algoritmo para caracterização unívoca de conjuntos parcialmente ordenados, se determinam como de natureza polinomial ou NP-completos alguns problemas de obtenção de grafos orientados em que o número de Dilworth é mínimo ou máximo. Adicionalmente são obtidos alguns resultados para problemas sobre grafos de comparabilidade e na determinação do Kernel de um digrafo.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfilment  
to the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SOME ALGORITHMIC PROBLEMS IN PARTIALLY  
ORDERED SETS AND THE DILWORTH'S THEOREM

Carlos Alberto da Silva Franco

December, 1983

Chairman: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Engenharia de Sistemas e Computação

Text

In this work we determine the complexity of some algorithmic problems of graphs which are related to partially ordered sets. An algorithm is described for finding an unique characterization of a poset. Following, we consider the determination of the complexity of various problems on orientation of graphs, in which the goal is to maximize or minimize the Dilworth's number of the orientation. In addition, we examine some problems involving comparability graphs and others on Kernels of diagraphs.

ÍNDICE

|   | Pág. |
|---|------|
| CAPÍTULO I - PRELIMINARES .....                                       | 1    |
| 1. Introdução .....   | 1    |
| 2. Definições .....   | 3    |
| 3. Complexidade de Algoritmos .....                                   | 8    |
| 4. Problemas NP-Completos .....                                       | 11   |
| CAPÍTULO II - TEOREMA DE DILWORTH E CARACTERIZAÇÃO<br>DE POSETS ..... | 14   |
| 1. Introdução .....   | 14   |
| 2. O Teorema de Dilworth .....  | 14   |
| 3. Caracterização de Posets .....                                     | 19   |
| 3.1. Questão I .....  | 21   |
| 3.2. Questão II .....   | 22   |
| 3.3. Questão III .....  | 26   |
| 4. Cobertura Mínima Relaxada .....                                    | 31   |
| 4.1. Caracterização de Bogart .....                                   | 31   |
| 4.2. Caracterização Alternativa .....                                 | 36   |
| 5. O Número de Dilworth e a Cobertura Mínima<br>Relaxada .....        | 44   |
| 5.1. Questão I .....  | 44   |
| 5.2. Questão II .....   | 45   |
| CAPÍTULO III - ÁRVORES GERADORAS E NÚMERO DE DILWORTH ...             | 50   |
| 1. Introdução .....   | 50   |
| 2. Árvores Geradoras e Posets .....                                   | 50   |
| 3. Posets Induzidos .....   | 55   |
| 4. Árvores Geradoras Representando Poset Mínimo .....                 | 57   |

|   |     |
|---|-----|
| CAPÍTULO IV - ORIENTAÇÃO DE GRAFOS E TRANSFORMAÇÕES<br>PARA COMPARABILIDADE ..... | 65  |
| 1. Introdução .....   | 65  |
| 2. Minimização do Número de Dilworth .....  | 66  |
| 3. Maximização do Número de Dilworth .....  | 68  |
| 4. Obtenção de Grafos de Comparabilidade .....                                    | 73  |
| 4.1. Transformação por Eliminação Mínima de Arestas ..                            | 73  |
| 4.2. Transformação por Acréscimo Mínimo de Arestas ...                            | 78  |
| CAPÍTULO V - O PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DO KERNEL .....                           | 94  |
| 1. Introdução .....   | 94  |
| 2. O Problema do Kernel .....   | 94  |
| 3. O Problema do Pseudo-Kernel .....  | 100 |
| 4. Um Caso Particular do Problema PK .....  | 102 |
| CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E EXTENSÕES .....  | 106 |
| 1. Conclusões .....   | 106 |
| 2. Extensões .....  | 107 |
| REFERÊNCIAS .....   | 109 |



## CAPÍTULO I

### PRELIMINARES

#### 1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho são examinados alguns problemas algorítmicos relacionados a conjuntos parcialmente ordenados.

Encontra-se frequentemente na literatura referente ao projeto e análise de algoritmos, relatórios e livros inteiramente voltados ao estudo de problemas aritméticos e algébricos; os objetivos variam da tentativa de se obter definições alternativas que permitam um tratamento computacional mais eficiente destes problemas, até a proposta de modelos computacionais nos quais se pode representar os algoritmos que resolvem estes problemas conseguindo-se de forma mais precisa possível a correção e a complexidade destes algoritmos.

Aqui o procedimento é o de se mostrar a relação entre uma entidade algébrica e uma representação gráfica, não se estudando em seguida propriedades algébricas da entidade mas sim discutindo algumas questões que podem ser formuladas sobre a representação e que são interessantes do ponto de vista combinatório; além disso, se procura mais a classificação dos problemas quanto a sua complexidade computacional e menos o detalhamento de algoritmos eficientes para estes problemas.

Quanto a forma da apresentação, embora baseada em provas de propriedades enunciadas por lemas e teoremas, se procura mais um tratamento discursivo (embora preciso) e menos o uso de

caracterizações formais que em geral sofisticam e dificultam o entendimento.

Ainda quanto a forma da apresentação, deve ser observado que todos os resultados encontrados na literatura disponível e usados no texto, são enunciados sem prova porém seguidos da referência em que são discutidos; em alguns casos esta referência não indica o trabalho original na qual o resultado foi apresentado, mas foi escolhida porque nela se encontra uma prova mais elegante, uma proposição mais clara ou mesmo devido ao fato de não se ter conseguido o texto original.

Quanto a divisão do trabalho, a distribuição é feita por capítulos com o esquema apresentado a seguir.

Neste primeiro capítulo são dadas as principais definições necessárias ao entendimento do trabalho e são brevemente apresentados os conceitos de complexidade e de problemas NP-completos.

No capítulo II é apresentado o teorema de Dilworth e se discute o problema de cobertura de um conjunto parcialmente ordenado, de forma a se poder recuperar a relação entre seus elementos quando estes são apresentados por cadeias.

No capítulo III são discutidos dois problemas de árvores geradoras de um grafo, sobre as quais se impõe a condição de mínimo número de Dilworth.

No capítulo IV se determina a complexidade de problemas de obtenção de orientações sobre grafos, visando a minimização e a maximização do número de Dilworth, além de se discutir os problemas de transformação de um grafo em grafo de comparabilidade por acréscimo e por retirada de arestas.

O capítulo V tem menor relação com conjuntos parciais

mente ordenados; nele se discute o problema da determinação do Kernel de um digrafo.

Finalmente, os principais resultados obtidos são relacionados no capítulo VI que apresenta também alguns problemas para pesquisa posterior.

## 2. DEFINIÇÕES

As definições apresentadas a seguir, bem como vários dos resultados em teoria de grafos que são usados no decorrer do trabalho são encontradas em BERGE (2), BONDY (4), DEO (8), HARARY (18), LIU (29) e SZWARCFITER (34).

Um grafo é definido por um par  $(V,A)$  onde  $V$  é um conjunto não vazio de elementos chamados vértices, e  $A$  é um conjunto de pares de vértices distintos chamados arestas.

Os vértices entre os quais existe uma aresta são incidentes a aresta e são chamados de vértices adjacentes.

Arestas adjacentes são aquelas que tem um vértice incidente comum.

Loop é uma aresta em que os vértices incidentes são um mesmo vértice.

Um vértice incidente a uma só aresta é um vértice pendente; um vértice livre é um não incidente a qualquer aresta.

Um grafo finito e não orientado é representado por  $G = (V,A)$ , onde  $V$  é finito e cada elemento de  $A$  é representado por um par não ordenado  $(v,w)$  com  $v, w \in V$ .

Um caminho, em um grafo  $G = (V,A)$ , é uma sequência alternada de vértices e arestas, começando e terminando por vértices, sem vértices repetidos e em que cada vértice é incidente

a aresta que o precede e a que o segue.

Um grafo  $G = (V, A)$  é um grafo conexo quando existe pelo menos um caminho entre cada par de vértices de  $V$ .

Um caminho Hamiltoniano, em um grafo  $G = (V, A)$ , é um caminho que passa por todos os vértices exatamente uma vez por cada um.

Um ciclo, em um grafo  $G = (V, A)$ , é um caminho onde o vértice inicial e o terminal são um mesmo vértice.

Um grafo  $G = (V, A)$  é planar, se pode ser desenhado em um plano sem que suas arestas se interceptem.

Um grafo  $G = (V, A)$  é planar máximo, se não é possível acrescentar arestas ao conjunto  $A$  de modo que se mantenha a condição de planaridade do grafo.

Um matching, em um grafo  $G = (V, A)$ , é um subconjunto de arestas de  $G$  tais que não existem duas com vértices incidentes comuns; as arestas de um matching são arestas independentes.

Um matching máximo, em um grafo  $G = (V, A)$ , é um matching que possui o maior número de arestas independentes.

Uma cobertura, em um grafo  $G = (V, A)$  é um subconjunto  $K \subset V$  tal que cada aresta de  $A$  tem pelo menos um de seus vértices incidentes em  $K$ ; uma cobertura  $K$  é uma cobertura mínima, se não existe uma cobertura  $K'$  com  $|K'| < |K|$ .

Uma cobertura de arestas, em um grafo  $G = (V, A)$ , é um subconjunto  $L \subset A$ , tal que cada vértice de  $V$  é incidente a alguma aresta de  $L$ ; uma cobertura  $L$  é uma cobertura mínima de arestas, se não existe uma cobertura  $L'$  com  $|L'| < |L|$ .

Um conjunto dominante, em um grafo  $G = (V, A)$ , é um subconjunto  $F \subset V$ , tal que  $\forall v \in V$ , ou  $v \in F$  ou  $v$  é adjacente a pelo menos um vértice de  $F$ ; um conjunto dominante  $F$  é um con-

junto dominante m̃nimo, se ño existe conjunto dominante  $F'$  com  $|F'| < |F|$ .

Um conjunto independente, em um grafo  $G = (V,A)$ ,  $\bar{e}$  um subconjunto  $I \subset V$ , tal que ño existe aresta com ṽrtices inci dentes do conjunto  $I$ ; um conjunto independente  $I$   $\bar{e}$  um conjunto independente m̃ximo, se ño existe conjunto independente:  $I'$  com  $|I'| > |I|$ .

Um grafo  $G = (V,A)$   $\bar{e}$  um grafo reticulado, quando pode ser representado por um sistema de coordenadas cartesianas em um plano, de tal forma que:

- (i) as coordenadas de todos os ṽrtices s̃o ñmeros intei ros e
- (ii) se  $(v,w) \in A$ , ent̃o  $v$  e  $w$  possuem em comum uma das coordenadas e diferem por uma unidade na outra.

Uma ̃rvore,  $\bar{e}$  um grafo  $G = (V,A)$  conexo e sem ciclos.

Uma ̃rvore geradora, de um grafo  $G = (V,A)$ ,  $\bar{e}$  uma ̃rvo re que cont̃m todos os ṽrtices do conjunto  $V$ .

Uma ̃rvore geradora m̃nima, para um grafo  $G = (V,A)$  com pesos atribuĩdos aos elementos de  $A$ ,  $\bar{e}$  uma ̃rvore geradora de  $G$  tal que o somat̃rio dos pesos das arestas  $\bar{e}$  m̃nimo.

Um grafo finito e orientado, ou digrafo,  $\bar{e}$  representa do por  $D = (V,E)$ , onde  $V$   $\bar{e}$  finito e cada elemento de  $E$   $\bar{e}$  repre sentado por um par ordenado  $[v,w]$  com  $v,w \in V$ .

Para um digrafo  $D = (V,E)$ , o ñmero de arestas direcio nadas para um ṽrtice  $v$   $\bar{e}$  o grau de entrada de  $v$  ou  $in(v)$ ; o ñ meto de arestas direcionadas saindo de um ṽrtice  $v$   $\bar{e}$  o grau de saĩda de  $v$  ou  $out(v)$ .

Para um grafo direcionado  $D = (V,E)$ , o seu grafo subja

cente é um grafo  $G = (V, A)$ , com o mesmo conjunto  $V$  de vértices e com o conjunto  $A$  obtido por: se  $[v, w] \in E$  então  $(v, w) \in A$   $\forall v, w \in V$ .

Um grafo bipartite é um grafo com dois subconjuntos de vértices tais que não existe aresta entre vértices de um mesmo subconjunto; é representado por  $B = (X, Y, A)$  ou  $B = (X, Y, E)$  se é não orientado ou orientado respectivamente.

Um caminho direcionado, em um digrafo  $D = (V, E)$ , é um caminho em que cada aresta é direcionada do vértice que a precede para o vértice que a segue.

O fechamento transitivo de um digrafo  $D = (V, E)$ , é um digrafo  $D_t = (V, E_t)$  que tem o mesmo conjunto  $V$  de vértices de  $D$ , mas tem aresta  $[v, w]$  se e somente se existe um caminho direcionado entre  $v$  e  $w$  em  $D$ .

A redução transitiva de um digrafo  $D = (V, E)$ , é um digrafo  $D_r = (V, E_r)$  com o menor número de arestas tal que o fechamento transitivo de  $D_r$  é igual ao fechamento transitivo de  $D$ .

Um grafo  $G = (V, A)$  é transitivamente orientável ou de comparabilidade, se é possível orientar os elementos de  $A$ , de tal forma que o digrafo  $D = (V, E)$  resultante, satisfaz a seguinte condição:

se  $[a, b], [c, d] \in E$ , então  $[a, c] \in E$   $\forall a, b, c, d \in V$ .

Um grafo  $G = (V, A)$  é biorientável transitivamente, ou BOT, se é de comparabilidade e admite apenas duas orientações transitivas:  $T$  e  $T^{-1}$ .

Um conjunto parcialmente ordenado ou poset, representado por  $(X, R)$ , é um conjunto  $X$  que tem estabelecida entre seus

elementos uma relação  $R$  que é:

- (i) reflexiva -  $x R x \quad \forall x \in X$
- (ii) antisimétrica -  $x_1 R x_2$  e  $x_2 R x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$
- (iii) transitiva -  $x_1 R x_2$  e  $x_2 R x_3 \Rightarrow x_1 R x_3 \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in X.$

Um conjunto simplesmente ordenado  $(X, R)$ , é um conjunto parcialmente ordenado com a seguinte condição adicional:

$$\forall x_1, x_2 \in X, \text{ ou } x_1 R x_2 \text{ ou } x_2 R x_1$$

Uma cadeia em um poset  $(X, R)$  é um subconjunto não vazio de  $X$  que é simplesmente ordenado pela disposição induzida pela ordenação de  $X$ .

Para um poset  $(X, R)$ , sejam  $x_1, x_2 \in X$ : se  $x_1 \bar{R} x_2$  e  $x_2 \bar{R} x_1$ ,  $x_1$  e  $x_2$  são incomparáveis; caso contrário são comparáveis.

Para um grafo  $G = (V, A)$ , uma orientação que induz um poset é uma orientação acíclica e não transitiva do conjunto  $A$ .

A representação de um poset  $(X, R)$  é um digrafo acíclico coincidente com seu fechamento transitivo.

A representação reduzida de um poset  $(X, R)$  é um digrafo acíclico coincidente com sua redução transitiva.

Todo digrafo acíclico  $D = (V, E)$  induz um poset  $(X, R)$ ; é possível ordenar os elementos de  $V$  de forma a se obter uma sequência  $S \equiv v_1, v_2, \dots, v_n$ , tal que:

$$v_i R v_j \Rightarrow \text{existe caminho entre } i \text{ e } j, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n$$

e esta sequência é denominada ordenação topológica.

### 3. COMPLEXIDADE DE ALGORITMOS

Os conceitos aqui apresentados são encontrados em AHO (1) e TARJAN (35).

Seja  $X$  um conjunto de valores de entrada para um problema; seja  $y$  o resultado de uma computação. Existe um algoritmo para a computação  $F(X)$ , se existe uma sequência ordenada de passos que pode ser sistematicamente executada de forma que: ou se obtem  $y = F(X)$  executando os passos na ordem dada ou se obtem a indicação de que não existe  $y$  que satisfaz as condições.

Tenta-se expressar o trabalho realizado por um algoritmo, em termos de alguma medida que não seja o tempo de execução de uma de suas implementações, pois este varia com o equipamento; contar o número de declarações ou instruções que são usadas em uma implementação do algoritmo, fornece um resultado que varia com a linguagem, o estilo de programação e mesmo a experiência do programador.

A medida do trabalho realizado deve dizer algo sobre a eficiência do método empregado para se obter a solução, independente da linguagem empregada ou de qual máquina será usada; é necessário portanto especificar um modelo no qual o algoritmo deve ser escrito e que permita definir uma operação fundamental em cada passo da computação, contando-se o seu número de ocorrências.

Se o problema é, por exemplo, a multiplicação de matrizes com números reais, as operações fundamentais são a multiplicação e a soma de dois números reais; se o problema é o de se verificar se um elemento  $x$  pertence ou não a uma dada lista de elementos  $L(n)$ , a operação fundamental é a comparação de  $x$  com



$L(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Como não existe um modelo básico apropriado para todas as situações, adotou-se aqui a forma de descrição em linguagem natural, com especificação de todos os detalhes relevantes e estruturada em passos que devem ser seguidos sequencialmente a menos que exista uma transferência claramente especificada para passos anteriores ou posteriores, até que se atinge uma instrução de parada.

Deve-se observar que a escolha de uma operação fundamental é aceitável, apenas se o número total de operações do algoritmo é proporcional (por uma constante) ao número total de ocorrências desta operação fundamental.

Muito frequentemente, em teoria e no processamento em tempo real, se está interessado na razão de crescimento do tempo ou espaço requerido para se resolver casos particulares cada vez maiores; associa-se então a cada problema, um inteiro chamado de tamanho de problema e que é uma medida da quantidade de dados de entrada (comprimento da entrada).

O tempo gasto por um algoritmo e expresso como uma função do tamanho do problema é chamado de complexidade em tempo do algoritmo; o comportamento limite da complexidade, quando o tamanho do problema cresce, é chamado de complexidade assintótica em tempo. Definições análogas são feitas para o espaço.

Se um algoritmo processa entradas de tamanho  $n$ , em tempo  $c \cdot n^x$  para alguma constante  $c$ , diz-se que a complexidade do algoritmo é da ordem de  $n^x$  ou  $O(n^x)$ ; mais formalmente, uma função  $g(n)$  é dita ser  $O(f(n))$  se existe uma constante  $c$  tal que  $g(n) \leq c \cdot f(n)$  para todo  $n$  positivo.

Desta forma, a notação  $O(\cdot)$  descreve o comportamento

do algoritmo no pior caso, o que em última análise determina o tamanho dos problemas que podem ser resolvidos dentro de limites especificados de tempo; assim a busca de algoritmos mais eficientes é uma atividade significativa por dois motivos: gasta-se menos tempo para resolver um problema quando se usa um algoritmo de complexidade menor, e com este algoritmo pode-se resolver um problema do mesmo tipo porém de tamanho maior.

A primeira tabela dada a seguir mostra de forma clara as considerações do parágrafo anterior; da segunda tabela se pode concluir que o uso de um equipamento que permite maior rapidez de processamento é menos importante que o desenvolvimento de um algoritmo mais eficiente para resolver o problema ( $A_1, A_2$  e  $A_3$  são diferentes algoritmos para resolver um mesmo problema).

|       | Complexidade em Tempo | Tamanho Máximo do Problema |                 |                   |
|-------|-----------------------|----------------------------|-----------------|-------------------|
|       |                       | 1 segundo                  | 1 minuto        | 1 hora            |
| $A_1$ | $n$                   | 1000                       | $6 \times 10^4$ | $3.6 \times 10^6$ |
| $A_2$ | $n^2$                 | 31                         | 244             | 1897              |
| $A_3$ | $2^n$                 | 9                          | 15              | 21                |

|       | Complexidade em Tempo | Tamanho Máximo do Problema com Equipamento X | Tamanho Máximo do Problema com Equipamento 10 vezes mais Rápido |
|-------|-----------------------|--|---|
| $A_1$ | $n$                   | $S_1$  | $10 \times S_1$   |
| $A_2$ | $n^2$                 | $S_2$  | $3.16 \times S_2$   |
| $A_3$ | $2^n$                 | $S_3$  | $S_3 + 3.3$   |

#### 4. PROBLEMAS NP-COMPLETOS

Os conceitos aqui apresentados são encontrados em AHO (1), COOK (7), GAREY (12) e KARP (27) e (28).

Um problema  uma pergunta geral com vários parâmetros de valores não especificados; um problema é apresentado por uma descrição geral de todos os parâmetros e uma declaração de quais propriedades a solução deve satisfazer. Se a pergunta colocada pelo problema pode ser satisfeita por uma resposta do tipo sim ou não, o problema é classificado como problema de decisão.

Uma instância  $I$  de um problema, é um conjunto particular de valores para todos os parâmetros do problema; um algoritmo resolve um problema, se puder ser aplicado a todas as instâncias do problema e produzir uma solução para cada instância.

Um problema  intratável, quando não se consegue algoritmo de complexidade polinomial em tempo para resolvê-lo, esta definição engloba duas causas:

- (i) o problema  tão difícil que, para se obter uma solução, se requer tempo que cresce exponencialmente com o tamanho do problema, ou

(ii) a solução é muito longa e sua descrição exige tempo que cresce exponencialmente com o tamanho da entrada.

A segunda possibilidade é considerada como uma apresentação não razoável do problema e então usualmente não é considerada.

Para se mostrar que um problema é intratável, a principal técnica é a da redução que consiste em apresentar uma transformação que mapeia qualquer instância de um problema em instância equivalente de um segundo problema; esta transformação permite converter qualquer algoritmo que resolve o segundo problema em um algoritmo que resolve o primeiro problema.

Um algoritmo não determinístico é composto de dois passos: o primeiro é o passo da escolha, que fornece uma estrutura do tipo solicitado na formulação do problema, e o segundo é o passo da verificação, que examina a estrutura fornecida pelo passo da escolha com respeito as propriedades particulares que a solução do problema deve ter.

A classe NP de problemas de decisão, é aquela em que os problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial por algoritmos não determinísticos.

Embora o tratamento teórico desenvolvido para problemas da classe NP, se faça sobre problemas de decisão, podem ser feitas conclusões sobre problemas de otimização, uma vez que estes podem ser convertidos a problemas de decisão da seguinte forma: se o problema de otimização pede uma estrutura de certo tipo, que tenha custo mínimo entre todas as estruturas deste tipo, é possível associar este problema com um problema de decisão onde se inclui um limite numérico  $k$  como parâmetro adicional e que pergunta se existe uma estrutura do tipo reque

rido tendo custo não maior que  $k$ ; se a estrutura deve ter custo máximo, o problema de decisão associado inclui um parâmetro  $k$  e se pergunta pela existência de uma estrutura do tipo requerido, com custo pelo menos  $k$ .

Uma transformação polinomial de um problema de decisão  $P_1$  para um problema de decisão  $P_2$ , é uma que transforma cada instância de  $P_1$  em uma instância de  $P_2$  em tempo polinomial e é indicada por  $P_1 \alpha P_2$ ; dois problemas de decisão  $P_1$  e  $P_2$  são polinomialmente equivalentes, se  $P_1 \alpha P_2$  e  $P_2 \alpha P_1$ .

Um problema NP-completo é aquele pertencente a classe NP e para o qual existe uma transformação polinomial de qualquer problema pertencente a classe NP para ele; desta forma, todos os problemas pertencentes a classe dos NP-completos são equivalentes entre si e a solução em tempo polinomial ou exponencial para um deles, implica na existência de solução obtida em tempo polinomial ou exponencial para todos os demais desta classe.

Desta forma, para provar que um problema de decisão  $P$  é NP-completo procede-se da seguinte maneira:

- (i) mostra-se que  $P$  pode ser resolvido por algoritmo não determinístico em tempo polinomial, e
- (ii) mostra-se que para um problema  $P'$  que seja NP-completo,  $P' \alpha P$ .

## CAPÍTULO II

### TEOREMA DE DILWORTH E CARACTERIZAÇÃO DE POSETS

#### 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado o resultado de Dilworth e são feitas considerações sobre os problemas de cobertura e caracterização mínima de posets.

Dada sua relevância no estudo de propriedades de conjuntos parcialmente ordenados, e uma vez que ao longo de todo o presente trabalho são feitas considerações sobre problemas em grafos, para os quais se quer a minimização ou maximização do número de Dilworth, a abertura deste capítulo é feita com uma verificação deste teorema com base em sua relação com outros resultados de teoria dos grafos.

Discute-se em seguida o problema de caracterização unívoca de posets; para este problema, encontrou-se apenas um trabalho BOGART (3) que embora essencialmente correto, é pouco claro e apresenta falhas na forma da solução do problema além de não abordar os aspectos algorítmicos da prova.

Na última seção, são feitas algumas considerações sobre a relação entre o número de Dilworth e a cobertura mínima que caracteriza univocamente o poset.

#### 2. O TEOREMA DE DILWORTH

Resultado importante na teoria de combinatória, o teo

rema de Dilworth mereceu atenção de vários pesquisadores que para ele apresentaram diferentes provas e demonstrações de equivalências com outros problemas.

Apresentado originariamente em 1950, recebeu de M.A. Perles (1963) a sua prova mais simples e elegante; é também verificável a partir da teoria de fluxo em redes, de onde é possível mostrar sua equivalência com os seguintes problemas: determinação do matching máximo em um grafo bipartite, sistemas de representantes distintos, conectividade de arestas, conectividade de vértices, determinação de se um dado par de vetores são ou não são a soma de vetores linha ou coluna de uma matriz de zeros e uns, etc.

Além do trabalho original DILWORTH (9), outras referências são importantes neste estudo; em NIJENHUIS (31), é apresentado um algoritmo que é o núcleo de solução para os problemas citados no parágrafo anterior.

A equivalência e alguns resultados correlatos com o problema de sistemas de representantes distintos é apresentada em MIRSKY (30), enquanto a demonstração do uso da teoria do fluxo em redes para a solução daqueles problemas encontra-se em FORD (11).

Aqui o teorema de Dilworth será apresentado com base no conceito de cobertura mínima; para sua verificação é necessária a utilização dos seguintes resultados:

#### Teorema 2.1 - BONDY (4)

Um conjunto  $I \subseteq V$  é um conjunto independente de um grafo  $G = (V, A)$ , se e somente se  $V - I$  é uma cobertura em  $G$ . ■

Lema 2.1

Se o grafo  $G = (V, A)$  é o grafo subjacente do grafo  $D_t = (V, E_t)$ , representação de um poset, então:

- a - uma cobertura para  $G$  é uma cobertura para  $D_t$
- b - um conjunto de vértices de  $G$  é independente, se e somente se é um conjunto incomparável em  $D_t$ .

Prova

A verificação do primeiro item é imediata, uma vez que o conjunto  $A$  difere do conjunto  $E_t$  por não ser orientado.

Para verificar o segundo item, basta observar que uma vez que  $D_t$  é transitivo, se dois vértices são comparáveis existe uma aresta entre eles que pertence a  $E_t$ ; assim a transitividade de  $D_t$  é condição necessária e suficiente para a verificação deste item. ■

Corolário

Em um grafo de comparabilidade  $G = (V, A)$ , a cardinalidade de um conjunto independente máximo é igual ao número de Dilworth dos digrafos acíclicos transitivos obtidos pelas orientações dos elementos de  $A$ .

Prova

Diretamente do segundo item do lema 2.1: se o conjunto independente é máximo, o conjunto incomparável no grafo orientado também é máximo. ■

Estas informações são suficientes para a verificação do teorema de Dilworth, com base na equivalência ao problema de



cobertura. O teorema de Dilworth tem a seguinte formulação:

### Teorema 2.2

Em um poset  $(X, R)$ , o número mínimo de cadeias disjuntas que o cobrem, é igual ao maior número de elementos de  $X$  que são incomparáveis entre si.

### Prova

Considere-se o grafo  $G = (V, A)$  não direcionado e subjacente ao grafo  $D_t = (V, E_t)$ , representação de um poset  $(X, R)$ .

Uma cobertura para  $G$  é uma cobertura para  $D_t$ , e um conjunto independente em  $G$  é um conjunto de elementos incomparáveis em  $D_t$ , como visto no lema 2.1.

Seja então  $K$  uma cobertura mínima para  $G$ ; pode-se assim dividir  $V$  em dois conjuntos disjuntos  $K$  e  $S$  tais que

$$K \cup S \equiv V \quad \therefore \quad K \equiv V - S$$

Pelo teorema 2.1, como  $K$  é uma cobertura,  $S$  é um conjunto independente; além disso como  $K$  é mínimo  $S$  é máximo, isto é:  $S$  é um conjunto de elementos de  $D_t$  que é incomparável e máximo.

Qual é o menor número de cadeias que cobrem  $D_t$ ? É um número pelo menos igual ao número de vértices de um conjunto independente máximo ou seja  $S$ , uma vez que não existe caminho direcionado na representação do poset que envolva mais do que um vértice do conjunto  $S$ . Assim:

$$\text{menor número de cadeias} \geq |S| \tag{1}$$

Se  $|S| \geq |K|$ , obviamente tem-se:

$$\text{menor número de cadeias} = |S| \tag{2}$$

Se  $|S| < |K|$ , suponha que o menor número de cadeias é  $|S| + 1$ ; isto significa que existe pelo menos um vértice na cobertura mínima que ou não pode fazer parte de nenhum dos  $|S|$  caminhos direcionados que passam pelos vértices do conjunto independente máximo, ou ele pode pertencer a um destes caminhos mas neste caso algum outro vértice da cobertura sobra nestas mesmas condições.

No primeiro caso, o vértice que sobra não é comparável com nenhum daqueles do conjunto  $S$ , o que significa que o conjunto  $S$  não é máximo e a cobertura  $K$  não é mínima.

No segundo caso, existem dois vértices na cobertura mínima incomparáveis entre si e comparáveis com um vértice do conjunto  $S$ ; aqui duas situações podem ocorrer:

a - a aplicação recursiva do processo de colocar o vértice que sobra em um caminho e determinar qual o novo vértice de sobra, atinge um ponto em que estes dois vértices são comparáveis com apenas um vértice do conjunto  $S$  e desta forma podem substituí-lo, isto é: o conjunto  $S$  não é máximo e a cobertura  $K$  não é mínima.

b - a aplicação recursiva do processo de determinação do novo vértice de sobra, é efetuada  $|S|$  vezes. Isto significa que existem  $|S| + 1$  vértices independentes, e novamente o conjunto  $S$  não é máximo e a cobertura  $K$  não é mínima.

Desta forma se  $|S| < |K|$ , tem-se:

$$\text{menor número de cadeias} \leq |S| \quad (3)$$

De (1), (2) e (3) vem que o menor número de cadeias é igual ao maior número de elementos incomparáveis. ■

Exemplo 2.1

Considere-se o poset com a representação da figura (II.1).

Para este poset, sejam os conjuntos  $K$  e  $S$  da figura (II.2), representando uma cobertura mínima e um conjunto independente máximo respectivamente.

O maior número de elementos independentes é quatro, e com efeito existem quatro cadeias que cobrem a representação:

$\{1,2,3\}$ ,  $\{7,4,5,6\}$ ,  $\{8\}$  e  $\{9\}$      ▲

3. CARACTERIZAÇÃO DE POSETS

O teorema de Dilworth relacionando elementos incomparáveis a cadeias, e demonstrado na seção anterior com base na equivalência com o problema de cobertura mínima, permite a formulação de algumas questões interessantes que serão examinadas a seguir.

É interessante observar que a equivalência usada para demonstrar o teorema de Dilworth, não implica ser ele um problema NP-completo uma vez que o problema de cobertura de vértices o é. O problema de Dilworth enunciado como: dado um poset  $(X,R)$ , achar o menor número de cadeias disjuntas que o cobrem, admite solução polinomial em tempo.

Usando-se uma solução obtida para o problema de Dilworth formulado para um poset  $(X,R)$ , não é possível - em geral - obter uma representação que o caracteriza, isto é: obter um dos digrafos acíclicos transitivos que contem todas as características do poset em exame, mas obtem-se um conjunto de digrafos acíclicos

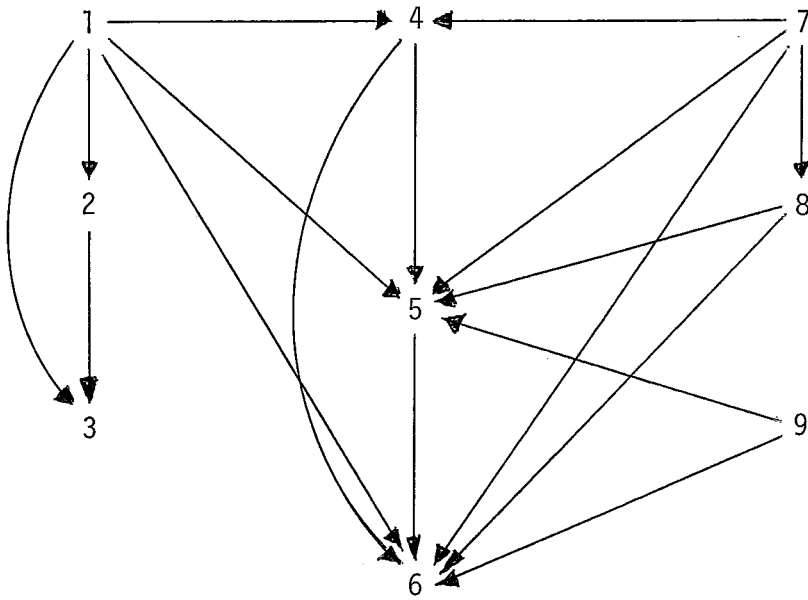


Figura II.1

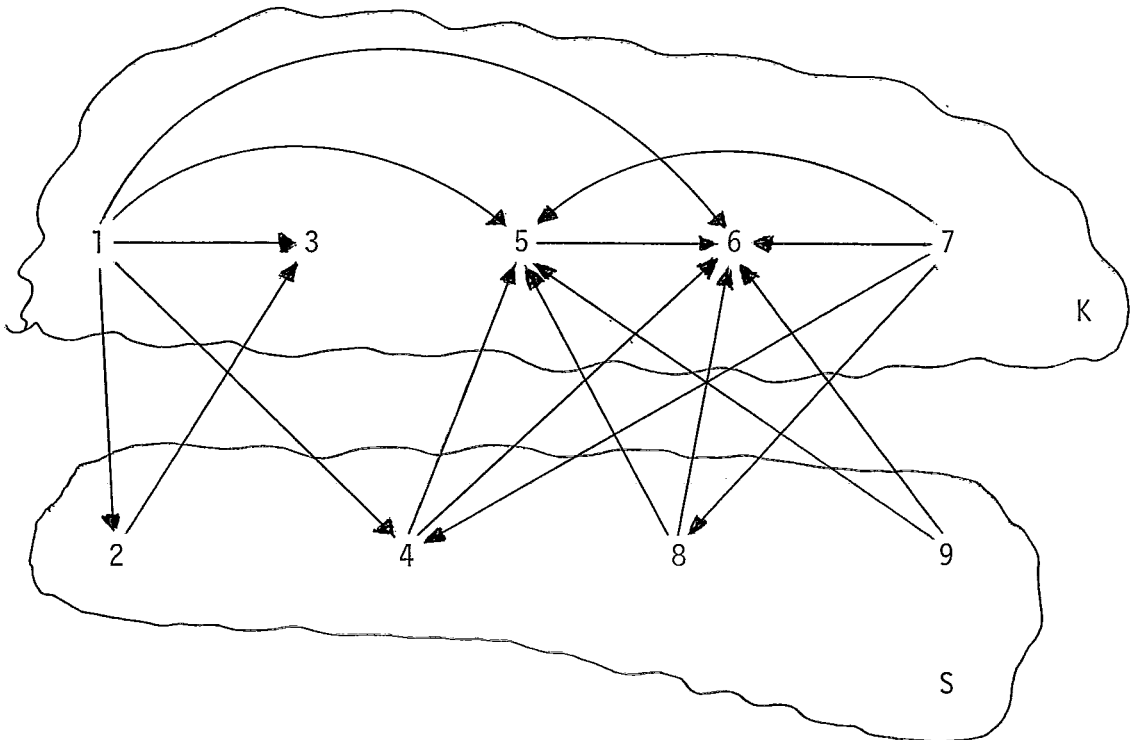


Figura II.2

clicos transitivos que dão origem a mesma cobertura.

Desta forma algumas questões que podem ser imediatamente formuladas são:

- I. várias coberturas mínimas são possíveis para um poset  $(X,R)$ ; algumas delas o caracteriza univocamente?
- II. para um poset  $(X,R)$  e uma cobertura mínima, é possível apresentar um algoritmo polinomial em tempo, que gere todas as representações diferentes que possuem essa cobertura?
- III. é possível apresentar um algoritmo polinomial em tempo que acha uma cobertura mínima caracterizando univocamente o poset?

### 3.1. QUESTÃO I

As considerações aqui são simples. É necessário em primeiro lugar, observar que ao se fornecer uma cobertura mínima como um conjunto de cadeias formadas pelos elementos de  $X$ , assume-se que a ordem com que os elementos aparecem listados nas cadeias, respeita a ordenação parcial dos mesmos no poset. Assim, por exemplo, se as cadeias são  $(1,2,3)$  e  $(4,5)$ , segue-se que  $1 > 2 > 3$  e  $4 > 5$ .

Desta forma, para que qualquer das coberturas mínimas caracterize univocamente o poset, é necessário que pelo menos todas as arestas de uma representação reduzida do poset apareçam implicitamente; isto ocorre quando

$$|E_r| = |V| - 1$$

ou, dito de outra forma: quando a representação reduzida do po

set é uma árvore.

### 3.2. QUESTÃO II

Esta questão desperta implicações mais interessantes. Considere-se um poset  $P = (X, R)$  com  $X = \{a, b, c, d\}$  e a relação  $R$  é  $\geq$ .

Suponha-se que uma cobertura mínima para  $P$  é dada pelas cadeias  $\{a, b\}$  e  $\{c, d\}$ . Uma vez que uma representação do poset  $P$ , pode ser obtida polinomialmente (por algoritmo de fechamento transitivo) a partir de uma representação reduzida, uma resposta em termos de  $D_r$  é válida para a questão que foi formulada em termos de  $D_t$ .

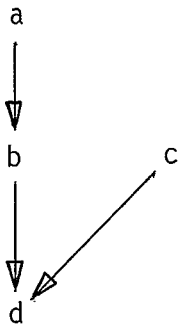
Quantos  $D_r$  distintos podem ser gerados com essa cobertura mínima? Aqueles apresentados na figura (II.3).

Observe-se aqui, que a cobertura mínima  $\{a, b\}$ ,  $\{c, d\}$  são caracteriza univocamente o poset da representação da figura (II.3.b).

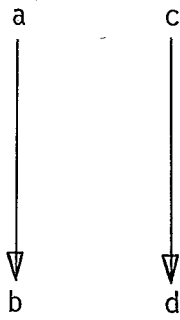
Para responder a questão II, um esquema de solução é o de gerar um  $D_r$  para a cobertura mínima apresentada e, em seguida, efetuar a verificação de isomorfismo dos digrafos reduzidos já obtidos e não isomorfos, com este último.

Na tentativa de apresentação de um algoritmo para este esquema de solução, deve ser considerado:

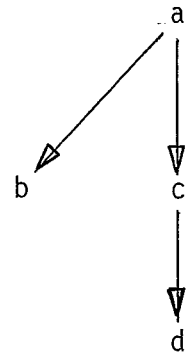
a - um processo de enumeração para a geração sistemática dos  $D_r$  pertinentes à cobertura mínima apresentada. Isto é facilmente conseguido por um algoritmo de geração de permutações em que a posição relativa de alguns elementos não pode sofrer alteração. Este processo tem complexidade linear em tempo para cada



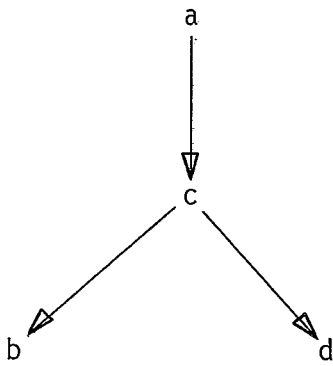
(a)



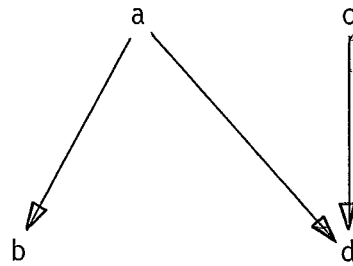
(b)



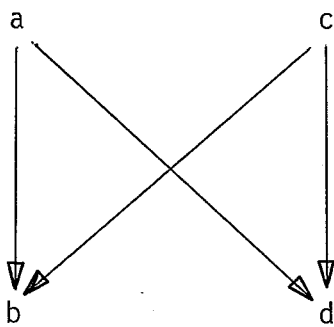
(c)



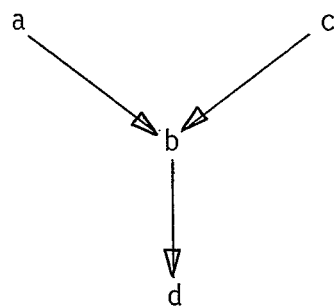
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura II.3

digrafo da solução;

b - se o problema de verificação de isomorfismo entre digrafos acíclicos, admite solução polinomial em tempo, então o algoritmo para a questão II tem complexidade polinomial em tempo para cada digrafo  $D_r$ , e complexidade polinomial para a obtenção de todos os digrafos se estes são em número limitado por um polinomio.

c - se o problema de verificação de isomorfismo entre digrafos acíclicos é de complexidade exponencial em tempo, então o algoritmo para a questão II terá complexidade exponencial em tempo para cada digrafo  $D_r$ .

Aqui se pode dizer que o problema central reside na verificação de isomorfismo em grafos; mais precisamente no problema de isomorfismo de digrafos acíclicos. Observe-se por outro lado que na colocação dos três pontos anteriores não se constitui uma restrição o fato de se fazer referência a representações reduzidas, uma vez que o fechamento transitivo e a redução transitiva são obtidos por algoritmos de complexidade polinomial em tempo e espaço.

Assim, naquelas observações, se é considerada a geração de digrafos reduzidos, pode-se usar os resultados encontrados em BOOTH (5). Nessa referência, define-se um grafo orientado como sendo um digrafo sem loops e onde a existência da aresta  $[y,x]$  implica na não existência da aresta  $[x,y]$ ; esta definição cobre a de digrafo reduzido aqui utilizada e então pode-se usar o seguinte resultado:



Teorema 2.3. - BOOTH (5)

O isomorfismo de grafos orientados é isomorfismo completo. ■

Isto significa dizer que não existe restrição significativa em termos de complexidade, ao se fazer isomorfismo entre digrafos reduzidos, em relação ao problema geral de isomorfismo.

Por outro lado, encontra-se em BOOTH (5), GAREY (12) e JOHNSON (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), a indicação de que o problema de isomorfismo entre digrafos acíclicos transitivos é um problema em aberto; aparentemente sua complexidade não é menor que a de se verificar o isomorfismo entre digrafos reduzidos e desta forma, uma resposta a questão II que passe pelas considerações anteriores leva a um algoritmo em princípio pouco eficiente em função dos conhecimentos de que se dispõe atualmente.

Uma alternativa possível é projetar um algoritmo que quando da geração de um  $D_r$ , garanta sua unicidade sem a necessidade de verificação de isomorfismo com os digrafos reduzidos anteriormente gerados; é claro que se este algoritmo tem complexidade polinomial em tempo, obtem-se um algoritmo para a questão II com complexidade polinomial ou exponencial em função do número de digrafos reduzidos que podem ser gerados.

Deve-se observar entretanto que com esta alternativa, possivelmente não se evita o primeiro esquema. Quando se considera um algoritmo de complexidade polinomial em tempo por  $D_r$  gerado, garantindo a unicidade de cada geração, aparentemente admite-se ser possível definir um conjunto de invariantes mínimo e

completo - isto é: necessário e suficiente - que caracteriza o isomorfismo de digrafos acíclicos, sendo desta forma possível listar apenas aqueles não isomorfos, sem um processo de comparação estrutural entre eles. Assim as considerações anteriores também são aplicáveis aqui, examinando-se o processo de geração com uma parte enumerativa e uma função que caracterize invariância; se esta função pode ser verificada polinomialmente o algoritmo para a questão II é polinomial em tempo por digrafo.

Em resumo, uma resposta para a questão II está aparentemente relacionada com as respostas para as seguintes perguntas:

a - a verificação de isomorfismo entre digrafos acíclicos admite algoritmo de complexidade polinomial em tempo ou é intrinsecamente de natureza exponencial?

b - é possível definir um conjunto de invariantes para o problema de isomorfismo de digrafos acíclicos, com verificação por algoritmo de complexidade polinomial em tempo?

### 3.3. QUESTÃO III

Uma cobertura mínima deste tipo, deve conter pelo menos todas as arestas da representação reduzida, e desta forma deve ser permitida a repetição de elementos nas cadeias obtidas como solução para o problema de Dilworth formulado para um poset  $(X,R)$ ; em função desta observação será usada para esta cobertura a denominação de cobertura mínima relaxada ou CMR.

Para se mostrar o significado da CMR, considere-se o exemplo a seguir:

Exemplo 2.2

Seja um poset  $(X,R)$  com os elementos e sua ordenação parcial representados pelo digrafo da figura (II.4.a).

Da representação reduzida, figura (II.4.b), observa-se que:

$\{1,2,4\}, \{3,5\}$  é uma CM.

$\{1,2,4\}, \{3,2,5\}$  é uma CMR. ▲

Neste exemplo,

$$|E_r| < |V|$$

Ainda quando a representação reduzida não seja uma árvore, o relaxamento de uma cobertura mínima pode caracterizar univocamente o poset, mas isso nem sempre ocorre; desta forma, quando

$$|E_r| \geq |V|$$

a situação é mais complexa.

Considere-se os exemplos 2.3 e 2.4 a seguir.

Exemplo 2.3

Seja um poset  $(X,R)$  dado pela representação reduzida da figura (II.5).

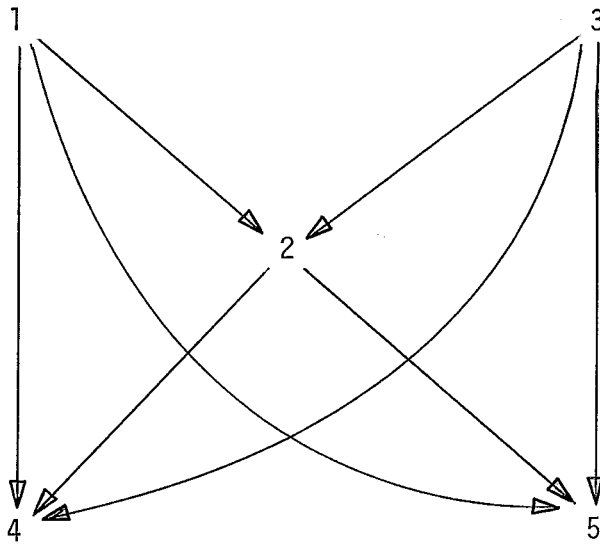
Neste exemplo,

$$|E_r| = |V|$$

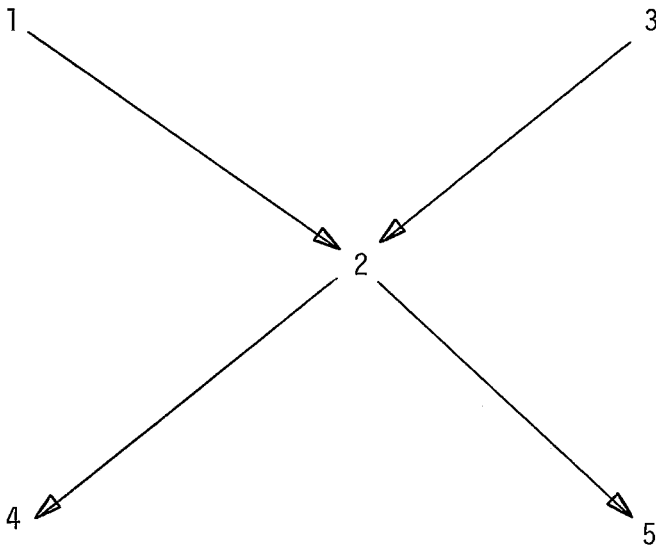
$\{3,2\}, \{6,4,5,1\}, \{7\}$  é uma CM.

$\{3,2,1\}, \{6,4,5,1\}, \{6,7\}$  não é uma CMR.

Aqui, o relaxamento da cobertura mínima pela inclusão



(a)



(b)

Figura II.4

dos v̄rtices 1 e 6 nos segundo e terceiro blocos respectivamente n̄o foi suficiente para a especificação da aresta [3,5].

É simples verificar que n̄o existe cobertura m̄nima relaxada com o mesmo n̄mero de cadeias que o de uma cobertura m̄nima, uma vez que existem pelo menos quatro caminhos a partir dos v̄rtices 3 e 6. ▲

#### Exemplo 2.4

Seja o poset  $(X,R)$  com a representação dada na figura (II.6).

Ainda aqui,

$$|E_r| = |V|$$

$\{3,2,1\}, \{6,4,5\}, \{7\}$  é uma CM.

$\{3,2,1\}, \{6,4,5,1\}, \{6,7,5\}$  é uma CMR. ▲

Em resumo, a cobertura m̄nima relaxada tem o mesmo n̄mero de cadeias que uma cobertura m̄nima quando

$$|E_r| < |V|$$

Porẽm quando

$$|E_r| \geq |V|,$$

quantas cadeias s̄o necess̄rias para a caracterização un̄voca do poset?

Para responder a este pergunta, ser̄ desenvolvida uma solução com base em resultados encontrados em BOGART (3); inicialmente ser̄ feita uma apresentação do esquema de solução desenvolvido nesta referẽncia usando-se uma linguagem mais simples e em seguida ser̄o feitas consideraçães algoritmicas n̄o conti

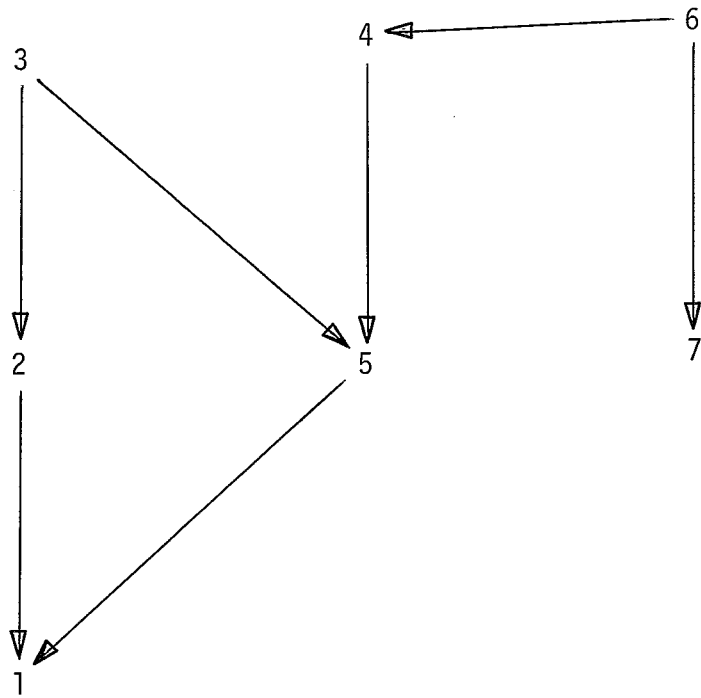


Figura II.5

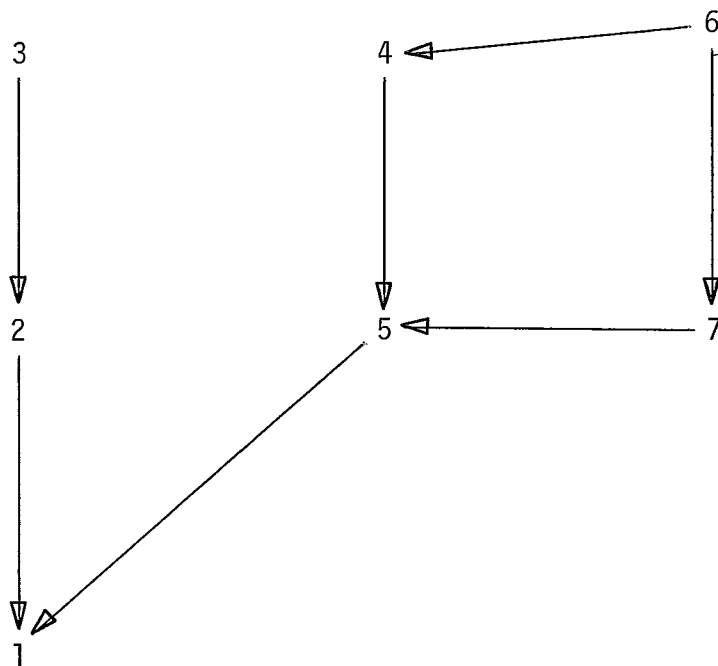


Figura II.6

das naquele trabalho, além da proposta de um outro processo que conduz a um melhor desempenho em tempo.

#### 4. COBERTURA MÍNIMA RELAXADA

##### 4.1. CARACTERIZAÇÃO DE BOGART

Para Bogart, em um poset  $(X,R)$ , uma cobertura é um par  $[a,b]$  que implica em um caminho entre  $a$  e  $b$  na representação do poset, isto é:

se  $a, b \in X$  e  $a R b$ ,

a aresta  $[a,b]$  da representação do poset é uma cobertura.

Duas coberturas  $[a,b]$  e  $[c,d]$  são comparáveis, se  $a$  e  $b$  são comparáveis (relativamente a  $R$ ), cada um deles, com  $c$  e  $d$ .

Como é possível relacionar essas coberturas de forma a caracterizar univocamente o poset? Considere-se o seguinte resultado:

#### Teorema 2.4. - BOGART (3)

Se um conjunto finito parcialmente ordenado  $(X,R)$ , tem um conjunto de  $r$  coberturas incomparáveis, mas nenhum conjunto com  $r + 1$  coberturas incomparáveis, e tem  $i$  elementos isolados, então ele pode ser caracterizado univocamente por  $r + i$  cadeias. ■

Para a prova deste teorema, faz-se:

a)  $K$  é a coleção de todas as coberturas de  $(X,R)$

b)  $K$  é parcialmente ordenada por uma relação  $T$  definida por:

$$[a,b] T [c,d] \text{ se } a R c \text{ e } ou \ b R c \text{ ou } b = d.$$

Desta forma é obtido um poset  $(K,T)$ , tal que na sua representação, os vértices são as arestas do digrafo transitivo que representa o poset  $(X,R)$ . Agora, resolvendo-se o problema de Dilworth formulado para o poset  $(K,T)$ , obtem-se o menor número de cadeias que o cobrem e que são formadas por arestas comparáveis do poset  $(X,R)$ .

Seja então um poset  $(X,R)$ , representado por um  $D_t$  e para o qual se deseja determinar uma cobertura mínima que o caracteriza univocamente; o esquema do algoritmo induzido pelo teorema 2.4 é apresentado a seguir.

#### ALGORITMO BOGART

entrada: poset  $(X,R)$  representado por  $D_t$

saída: sequência de conjuntos de arestas de  $D_t$  que caracterizam univocamente  $(X,R)$ .

1. para cada par  $[a,b] \in E_t$  - uma cobertura - verificar quais pares  $[c,d]$  - todas as outras coberturas - são com ele ordenáveis segundo a relação  $T$  definida como:

$$[a,b] T [c,d] \text{ se } a R c \text{ e } ou \ b R c \text{ ou } b = d.$$

Isto é: obter o  $D_t$  que representa  $(K,T)$ .

2. achar uma cobertura mínima para o poset  $(K,T)$ .
3. Fim.

A correção deste algoritmo advém da prova do teorema 2.4. A complexidade em tempo é obtida com base nas proposições a seguir.



Lema 2.2

A complexidade em tempo do passo 1 do algoritmo é  $O(|E_t|^2)$  no pior caso.

Prova

Os elementos da coleção  $K$  são os pares  $[a,b]$ , arestas do  $D_t$  que representa  $(X,R)$ .

É necessário verificar se um par  $[a,b]$  é comparável, segundo a relação  $T$ , com cada um dos  $[c,d] \in E_t$ ; tem-se então  $|E_t| - 1$  testes para a verificação de comparabilidade entre arestas. Como o número de pares é  $|E_t|$ , são necessários  $|E_t|^2$  testes no pior caso. ■

Lema 2.3

A complexidade em tempo do passo 2 do algoritmo é  $O(|E_t|^{5/2})$  no pior caso.

Prova

O problema de Dilworth é equivalente ao problema de matching máximo em grafos bipartites; então para o poset  $(K,T)$ , a determinação de uma cobertura mínima é feita em tempo proporcional a  $|V|^{5/2}$ , onde  $V$  é o conjunto de vértices do  $D_t$  que representa  $(K,T)$ .

Como o conjunto  $V$  do digrafo que representa  $(K,T)$ , tem como elementos as arestas do digrafo que representa  $(X,R)$ , vem que o tempo é dado por  $|E_t|^{5/2}$  no pior caso. ■

Teorema 2.5

A complexidade em tempo do algoritmo BOGART é  $O(|E_t|^{5/2})$  no pior caso.

Prova

Como o passo 1 e o passo 2 do algoritmo, são executados sequencialmente e uma vez por poset de entrada, a complexidade no pior caso é a maior complexidade dos dois. Pelo lema 2.3 é  $O(|E_t|^{5/2})$ . ■

Exemplo 2.5

Seja um poset  $(X,R)$  representado por um  $D_t$  dado na figura (II.7.a). Aqui a coleção  $K$  é dada por:

$$K = \{ [1,2], [1,4], [1,5], [2,4], [2,5], [3,2], [3,4], [3,5] \}$$

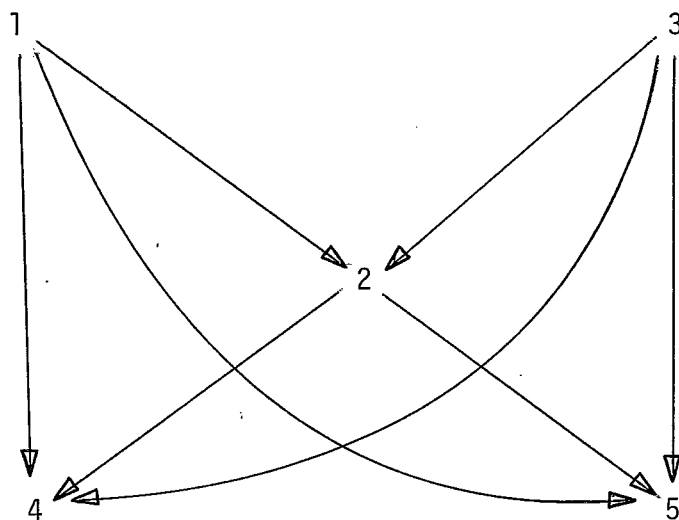
O passo 1 fornece o digrafo da figura (II.7.b), que é representação do poset  $(K,T)$ . A resolução do problema de Dilworth formulado para este poset, isto é: o resultado do passo 2 do algoritmo, dá como seis o maior número de elementos incomparáveis. Isto significa que as arestas do  $D_t$  de  $(X,R)$  podem ser agrupadas em seis cadeias, dando uma cobertura que caracteriza univocamente o poset.

Aqui, um conjunto independente máximo é:

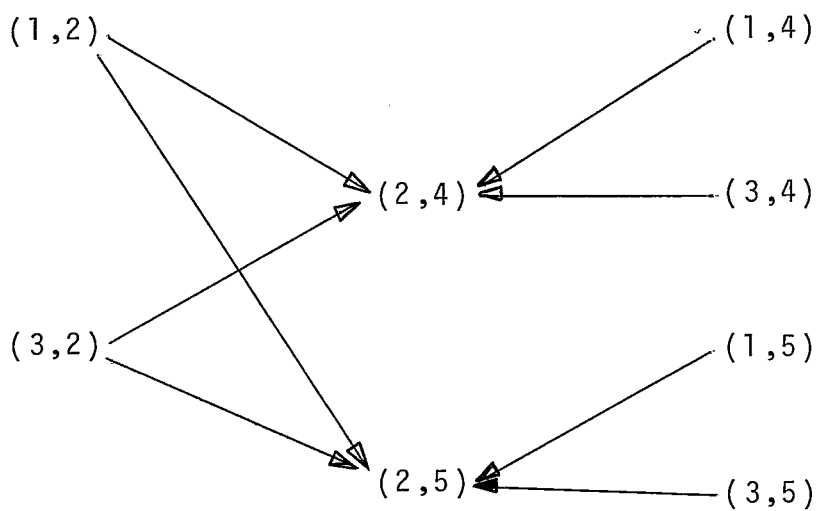
$$[1,2], [3,2], [1,4], [3,4], [1,5], [3,5]$$

Este conjunto levaria a cobertura:

$$\{1,2,4\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{3,2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\} \quad \blacktriangle$$



(a)



(b)

Figura II.7

#### 4.2. CARACTERIZAÇÃO ALTERNATIVA

Como a representação reduzida preserva todas as características do poset, parece promissor desenvolver um algoritmo que utilize as arestas desta representação para se obter uma cobertura mínima relaxada.

Para esta caracterização, seja:

- a)  $K$  é a coleção de arestas  $E_r$  da representação reduzida do poset  $(X,R)$ .
- b)  $K$  é parcialmente ordenada por uma relação  $T$  definida por:

$$[a,b] T [c,d] \text{ se } b R c$$

Desta forma é obtido um poset  $(K,T)$  com  $D_t$  cujos vértices são as arestas do digrafo reduzido que representa o poset  $(X,R)$ . Agora, resolvendo-se o problema de Dilworth formulado para o poset  $(K,T)$ , obtem-se o menor número de cadeias que o cobrem e que são formadas por arestas comparáveis do poset  $(X,R)$ . Aqui deve ser observado que existe a possibilidade do surgimento de elementos isolados, quando é feita a ordenação dos elementos da coleção  $K$ ; se isto acontece, estes elementos aparecem isoladamente na cobertura de  $(K,T)$  e conseqüentemente na cobertura que caracteriza univocamente o poset  $(X,R)$ .

Seja então um poset  $(X,R)$ , representado por um  $D_t$  e para o qual se deseja determinar uma cobertura mínima que o caracteriza univocamente; o esquema do algoritmo induzido pelas considerações anteriores é apresentado a seguir.

ALGORITMO CR

entrada: poset  $(X,R)$  representado por  $D_t$

saída: sequência de conjuntos de arestas do  $D_r$  obtido de  $D_t$ ,  
que caracterizam univocamente  $(X,R)$ .

1. obter o  $D_r$  de  $(X,R)$ , por redução transitiva de  $D_t$ .
2. para cada par  $[a,b] \in E_r$  - um elemento de  $K$  - verificar  
quais pares  $[c,d]$  - todas as demais arestas  $E_r$  - são com  
ele ordenáveis segundo a relação  $T$  definida como:

$$[a,b] T [c,d] \text{ se } b R c$$

Isto é: obter o  $D_t$  que representa  $(K,T)$ .

3. achar a cobertura mínima para o poset  $(K,T)$ .
4. Fim.

A correção deste algoritmo é obtida pelos resultados estabelecidos a seguir.

Lema 2.4

A cobertura mínima obtida para o poset  $(K,T)$ , envolve todas e apenas as arestas da representação reduzida do poset  $(X,R)$ .

Prova

Para a obtenção de  $(K,T)$ , faz-se  $K$  como sendo o conjunto das  $E_r$  do  $D_r$  de  $(X,R)$ ; a cobertura mínima para o poset  $(K,T)$  envolve todos e apenas elementos de  $K$ , logo a proposição é verdadeira. ■

Lema 2.5

Uma cobertura mínima para  $(K,T)$ , fornece o menor número de cadeias em que podem ser agrupadas as  $E_r$  do  $D_r$  de  $(X,R)$ .

Prova

Os elementos de  $K$  são os elementos do conjunto  $E_r$  do  $D_r$  de  $(X,R)$ . Para se obter uma cobertura mínima de  $(K,T)$ , usou-se o resultado de Dilworth que agrupa minimamente os elementos de  $K$ , logo a proposição é verdadeira. ■

Teorema 2.6

O algoritmo CR dá o menor conjunto de cadeias que caracterizam univocamente um poset fornecido como entrada.

Prova

Dos lemas 2.4 e 2.5 ve-se que o algoritmo dá o menor número de cadeias em que podem ser agrupadas as arestas do  $D_r$ , representação reduzida de  $(X,R)$ , logo a proposição é verdadeira. ■

Para a complexidade em tempo do algoritmo, as considerações a seguir são suficientes.

Lema 2.6

A complexidade em tempo do passo 1 do algoritmo é  $O(|V| \cdot |E_t|)$  no pior caso.

Prova

A complexidade em tempo de um algoritmo que obtem o fechamento transitivo de um digrafo acíclico  $D = (V, E)$  é dada por  $O(|V| \cdot |E|)$  no pior caso. Por outro lado, como colocado em AHO(1), o problema de determinação da redução transitiva é equivalente ao de fechamento transitivo e pode ser determinada por algoritmo de mesma complexidade. Desta forma é necessário efetuar  $|V| \cdot |E_t|$  operações no pior caso. ■

Lema 2.7

A complexidade em tempo do passo 2 do algoritmo CR é  $O(|E_r|^2)$  no pior caso.

Prova

Os elementos da coleção  $K$  são os pares  $[a, b]$ , arestas do  $D_r$  que representa de forma reduzida  $(X, R)$ .

É necessário verificar se um par  $[a, b]$  é comparável, segundo a relação  $T$ , com cada um dos  $[c, d] \in E_r$ ; tem-se então  $|E_r| - 1$  testes para a verificação de comparabilidade entre as arestas. Como o número de pares é  $|E_r|$ , são necessários  $|E_r|^2$  testes no pior caso. ■

Lema 2.8

A complexidade em tempo do passo 3 do algoritmo CR é  $O(|E_r|^{5/2})$  no pior caso.

Prova

A solução para o problema de Dilworth formulado sobre o

poset  $(K,T)$  é obtida em tempo proporcional a  $|V|^{5/2}$ , onde  $V$  é o conjunto de vértices do  $D_t$  que representa  $(K,T)$ . Aqui, este conjunto  $V$  tem como elementos as arestas do conjunto  $E_r$  de  $D_r$  que é representação reduzida de  $(X,R)$ ; desta forma o tempo é dado por  $|E_r|^{5/2}$  no pior caso. ■

### Teorema 2.7

A complexidade em tempo do algoritmo CR é  $O(|E_r|^{5/2})$  no pior caso.

### Prova

Como os passos 1, 2 e 3 do algoritmo, são executados sequencialmente e uma vez por poset de entrada, a complexidade no pior caso é a maior complexidade dos três. Pelo lema 2.8 é  $O(|E_r|^{5/2})$ . ■

Além desta análise geral, algumas observações adicionais devem ser feitas.

Ao se examinar o passo 1 do algoritmo BOGART e o passo 2 do algoritmo CR, vê-se que no primeiro caso pelo menos duas comparações devem ser efetuadas, enquanto que no segundo caso apenas uma comparação é necessária; além disso no algoritmo BOGART as comparações são feitas sobre arestas do fechamento transitivo, enquanto que no algoritmo CR as comparações se fazem sobre arestas da redução transitiva. Desta forma, para a obtenção da representação do poset  $(K,T)$ , o trabalho realizado em comparações de vértices é duas vezes maior no algoritmo BOGART.

Porém a definição da relação  $T$  no algoritmo CR, exige cuidado especial na sua implementação, uma vez que ao se fazer



comparações entre arestas do digrafo que é representação reduzida do poset  $(X,R)$ , não se obtém diretamente a representação - grafo  $D_t$  - do poset  $(K,T)$ .

Isto ocorre sempre que se tem um caminho de comprimento igual ou maior do que três e assim é necessário um trabalho adicional no passo 2 do algoritmo CR, que é o estabelecimento de uma ordenação topológica sobre os vértices do digrafo  $D_r$  obtido do passo 1; as comparações indicadas no passo 2 são então feitas a partir de vértices com grau de saída zero e retornando até os vértices com grau de entrada zero considerando-se que, se  $[a,b]$  é comparável com  $[c,d]$ , é também comparável com todas as arestas (vértices de  $D_r$ ) com as quais  $[c,d]$  é comparável. Dado que um algoritmo de ordenação topológica tem desempenho em tempo dado por  $O(|V| + |E_r|)$  no pior caso, o trabalho adicional nos passos equivalentes dos dois algoritmos é aproximadamente o mesmo.

A segunda observação se relaciona ao último passo de cada algoritmo. A rigor, o que se determina na solução do problema de Dilworth é o maior conjunto independente de vértices do digrafo que representa o poset; para a obtenção da cobertura mínima é necessário um trabalho adicional que exige tempo não superior ao que se precisa para a determinação do conjunto independente máximo.

A forma de se obter uma cobertura mínima a partir de um conjunto independente máximo, é de importância secundária no esquema proposto, e desta forma foi omitido nos dois casos.

Finalmente deve ser mencionado que existem algoritmos sofisticados para a obtenção do produto de matrizes booleanas com complexidade limitada por  $O(n^{2.5})$  no pior caso. Como exis

te equivalência entre esse problema e o problema do fechamento transitivo, o lema 2.6 poderia ser enunciado com um limite de  $O(|V|^{2.5})$  no pior caso; isto não foi feito, uma vez que nas implementações correspondentes a estes algoritmos é necessário introduzir computações adicionais que alteram, para mais, a ordem da complexidade.

### Exemplo 2.6

Seja um poset  $(X,R)$  representado por um  $D_t$  dado na figura (II.8.a).

O passo 1 fornece o digrafo da figura (II.8.b). A coleção  $K$  é dada por:

$$K = \{[1,2], [2,3], [3,4], [5,2]\}$$

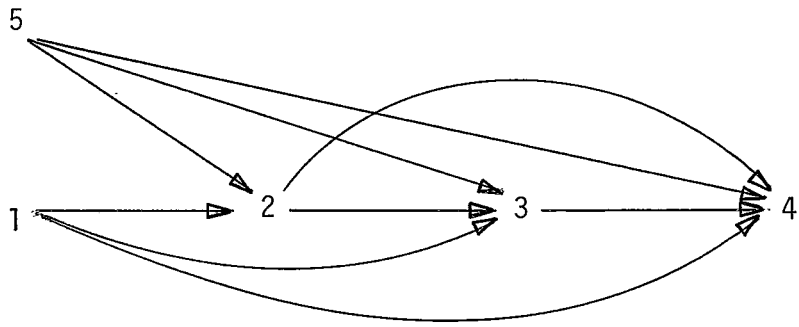
O passo 2 fornece o digrafo da figura (II.8.c), que é representação do poset  $(K,T)$ . Aqui em função da ordenação topológica efetuada antes das comparações requeridas pela relação  $T$ , o processo se inicia pela aresta  $[3,4]$ ; desta forma quando é verificado que  $[1,2]$  é comparável com  $[2,3]$ , uma vez que  $[2,3]$  é comparável com  $[3,4]$ , se determina em realidade que  $[1,2]$  é comparável também com  $[3,4]$ . A resolução do problema de Dilworth formulado para este poset dá como dois o maior número de elementos incomparáveis, o que significa que as arestas do  $D_r$  de  $(X,R)$  podem ser agrupadas em duas cadeias.

Um conjunto independente máximo é:

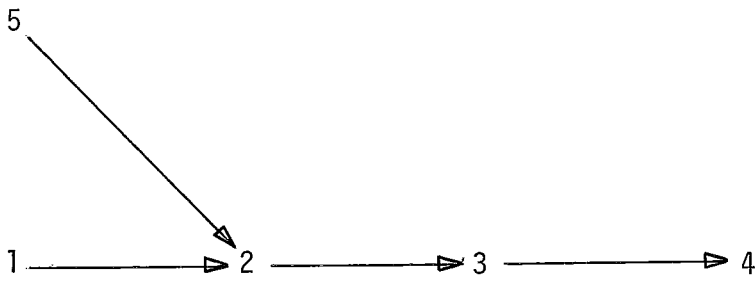
$$[1,2] , [5,2]$$

Uma cobertura é:

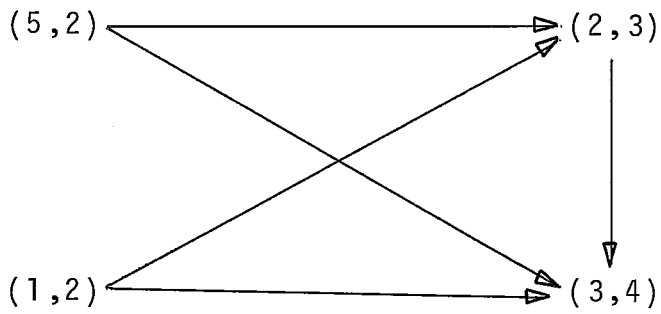
$$\{1,2,3,4\} , \{5,2\} \quad \blacktriangle$$



(a)



(b)



(c)

Figura II.8

## 5. O NÚMERO DE DILWORTH E A COBERTURA MÍNIMA RELAXADA

As perguntas que surgem naturalmente após a solução proposta na seção anterior são:

- I. É possível obter um algoritmo mais eficiente do que o algoritmo CR para a determinação de uma cobertura mínima relaxada?
- II. É possível relacionar o número de cadeias na cobertura mínima de um poset  $(X,R)$  e o número de cadeias em uma cobertura mínima relaxada que o caracteriza univocamente?

### 5.1. QUESTÃO I

Como visto na seção anterior, para que uma cobertura caracterize univocamente um poset  $(X,R)$ , é necessário que um conjunto mínimo de relações entre elementos de  $X$  sejam indicadas. Esse conjunto de relações é dado pelas arestas do digrafo da representação reduzida do poset.

O algoritmo CR relaciona minimamente as arestas do conjunto  $E_r$  com base no resultado de Dilworth; como qualquer cobertura mínima que caracteriza univocamente  $(X,R)$ , deve necessariamente induzir o esquema de recuperação da sua representação reduzida, isto é: deve mostrar todo o relacionamento entre as arestas do conjunto  $E_r$ , uma solução mais eficiente que a do algoritmo CR é, em princípio uma solução mais eficiente para o problema de Dilworth e seus equivalentes.

5.2. QUESTÃO II

Considere-se um poset  $(X,R)$  e sua representação reduzi da  $D_r$ . Seja  $I$  um conjunto  $I \subset X$  com o maior número de elementos incomparáveis e  $B \subset E_r$  um conjunto com o maior número de arestas incomparáveis no sentido da seção 4.2.

Uma relação que aparentemente se pode obter de forma direta, é a da contenção mútua de  $B$  e  $I$ , isto é: todo  $B$  contém um conjunto  $I$  e/ou de todo  $I$  se tira diretamente um conjunto  $B$ . Esta relação aparente não se verifica em geral, como mostrado na figura (II.9).

No poset dado pela representação reduzida da figura (II.9.a), o conjunto  $B$  é dado por:

$$B \equiv \{[1,2], [1,3], [1,5], [6,5], [6,7], [8,5], [8,7]\}$$

e existem dois conjuntos  $I$ :

$$I_1 \equiv \{2,3,5,7\}$$

$$I_2 \equiv \{2,3,6,8\}$$

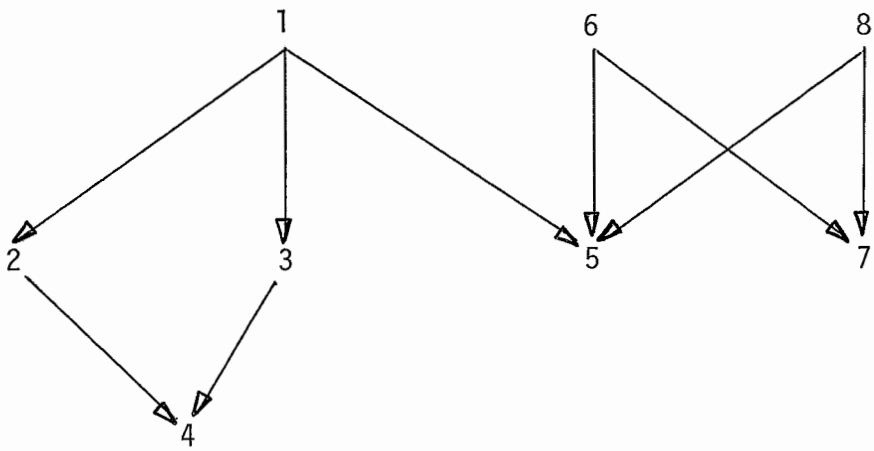
Do conjunto  $I_2$  não é possível obter diretamente o conjunto  $B$ , porém isto ocorre com o conjunto  $I_1$ ; por outro lado, neste poset, o conjunto  $B$  contém um conjunto  $I$ .

Seja agora o poset dado pela representação reduzida da figura (II.9.b); considere-se os conjuntos  $B$  seguintes:

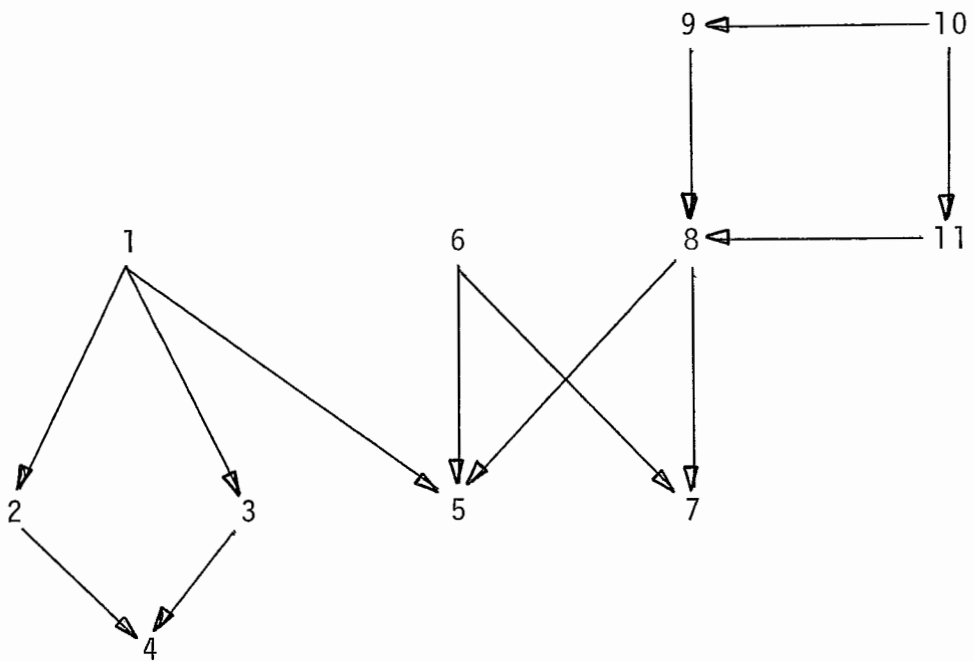
$$B_1 \equiv \{[1,2], [1,3], [1,5], [6,5], [6,7], [8,5], [8,7]\}$$

$$B_2 \equiv \{[1,2], [1,3], [1,5], [6,5], [6,7], [9,8], [11,8]\}$$

Aqui ao se considerar o maior conjunto incomparável de vértices, obtido de  $B_1$ , se tem



(a)



(b)

Figura II.9

$$V_1 \equiv \{2, 3, 5, 7\}$$

$$V_2 \equiv \{2, 3, 6, 8\}$$

que não formam um conjunto independente máximo para o poset, embora de  $V_1$  se consiga obter um conjunto  $B$ . Por outro lado, o maior conjunto incomparável de vértices obtido de  $B_2$  é independente máximo para o poset.

$$I \equiv \{2, 3, 6, 8, 11\}$$

Desta forma, as arestas de um conjunto  $B$  podem conter ou não um conjunto independente máximo para o poset, porém contém um conjunto de vértices incomparáveis  $V_B$  sobre os quais é possível estabelecer uma propriedade.

### Teorema 2.8

Se o conjunto  $V_B$  de um conjunto  $B$ , não é um conjunto  $I$  para o poset, não existe conjunto  $I$  tal que  $V_B \subset I$ .

### Prova

Se  $V_B$  não é um conjunto independente máximo para o poset, é claro que  $|V_B| < |I|$ .

Então se  $V_B \subset I$ , seja  $v$  um vértice incomparável com os vértices de  $V_B$  e tal que

$$V_B \cup \{v\} \equiv I .$$

Para este vértice  $v$  são válidas as seguintes afirmações:

- a - não existe aresta entre  $v$  e os vértices de  $V_B$ .
- b - não existe aresta com origem em  $v$  e extremidade em qualquer vértice pertencente a um caminho direcionado que

atinge um vértice de  $V_B$ , nem aresta com origem em qualquer vértice pertencente a um caminho direcionado a partir de um vértice de  $V_B$  e com extremidade em  $v$ , porque em qualquer dos dois casos,  $v$  seria comparável com um vértice de  $V_B$ .

Como se está sempre examinando grafos conexos, ou

- c - existe aresta com origem em vértice pertencente a caminho direcionado que atinge um vértice de  $V_B$ , e extremidade em  $v$  ou
- d - existe aresta com origem em  $v$  e extremidade em qualquer vértice de um caminho direcionado com origem em um vértice de  $V_B$ ; em qualquer dos dois casos, essa aresta é incomparável com as do conjunto  $B$  e desta forma ele pode ser aumentado.

Se existe mais do que um vértice  $v$  nestas condições, a análise é idêntica e desta forma a suposição de que  $V_B \subset I$  é absurda. ■

### Corolário

Todo conjunto  $V_B$  é um conjunto independente para o digrafo que representa o poset.

### Prova

Um conjunto  $V_B$  é o maior conjunto incomparável para  $B$  que se constitui em um subgrafo do  $D_r$  do poset. Como pelo teorema 2.8 ele não pode ser aumentado, ele é um conjunto independente para  $D_r$  e em consequência é um conjunto independente para  $D_t$ . ■



Teorema 2.9

$$|B| \geq |I|$$

Prova

Cada vértice  $i \in I$  é incidente com uma aresta do digrafo que representa o poset. Como não existe caminho direcionado entre os elementos do conjunto  $I$ , as arestas incidentes a estes vértices são incomparáveis. Desta forma quando se considera o maior entre  $\text{in}(i)$  e  $\text{out}(i)$  e se efetua a união das arestas assim obtidas para cada  $i$ , se obtem um conjunto de arestas incomparáveis cuja cardinalidade é pelo menos igual a cardinalidade de  $I$ ; assim, como  $B$  é um conjunto de arestas incomparáveis, necessariamente

$$|B| \geq |I| \quad \blacksquare$$

## CAPÍTULO III

### ÁRVORES GERADORAS E NÚMERO DE DILWORTH

#### 1. INTRODUÇÃO

O problema de determinação de uma árvore geradora para um grafo  $G = (V, A)$  é um dos problemas clássicos na teoria de grafos e para ele existem algoritmos de comportamento polinomial em tempo.

Porém quando o que se deseja é obter uma árvore geradora com características particulares como maior número de folhas, conter um caminho especificado entre dois vértices, etc, é possível que para a solução não se consiga um algoritmo tão simples e eficiente; em GAREY (12) encontra-se, por exemplo, uma lista de treze problemas de árvores geradoras que são NP-completos.

Neste capítulo, inicialmente são feitas considerações sobre o número de Dilworth de posets obtidos a partir de árvores geradoras; analisa-se em seguida o problema de minimização do número de Dilworth em árvores geradoras, por orientação que induz um poset e por orientação que representa um poset.

#### 2. ÁRVORES GERADORAS E POSETS

Um grafo  $G = (V, A)$  admite em geral, um número exponencial de árvores geradoras como mostrado, por exemplo, em

DEO (8); olhadas como subgrafos conexos de  $G$ , nota-se que o número de Dilworth varia em função da estrutura da árvore e da forma como as arestas são orientadas.

### Exemplo 3.1

A figura (III.1) mostra um grafo  $G$ ; na figura (III.2) são dadas quatro árvores geradoras de  $G$  com orientações transitivas e uma quinta com orientação que induz um poset.

O número de Dilworth é a cardinalidade do conjunto independente máximo, e para as árvores  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  da figura (III.2), esses conjuntos são respectivamente:  $\{1,3,5,7,9\}$ ,  $\{1,3,5,6,9\}$ ,  $\{1,2,3,5,8,9\}$ ,  $\{1,2,3,4,5,8,9\}$ .

A árvore mostrada na figura (III.2.e) é a mesma da figura (III.2.d) porém com uma orientação não transitiva; o poset induzido tem número de Dilworth igual a 4 e o conjunto independente máximo é  $\{4,5,8,9\}$ . ▲

Alguns resultados gerais que podem ser estabelecidos sobre árvores são dados a seguir.

### Lema 3.1

Toda árvore é um grafo de comparabilidade.

### Prova

Toda árvore é um grafo bipartite; por outro lado todo grafo bipartite é um grafo de comparabilidade como mostrado no Lema 4.1, logo toda árvore é um grafo de comparabilidade. ■

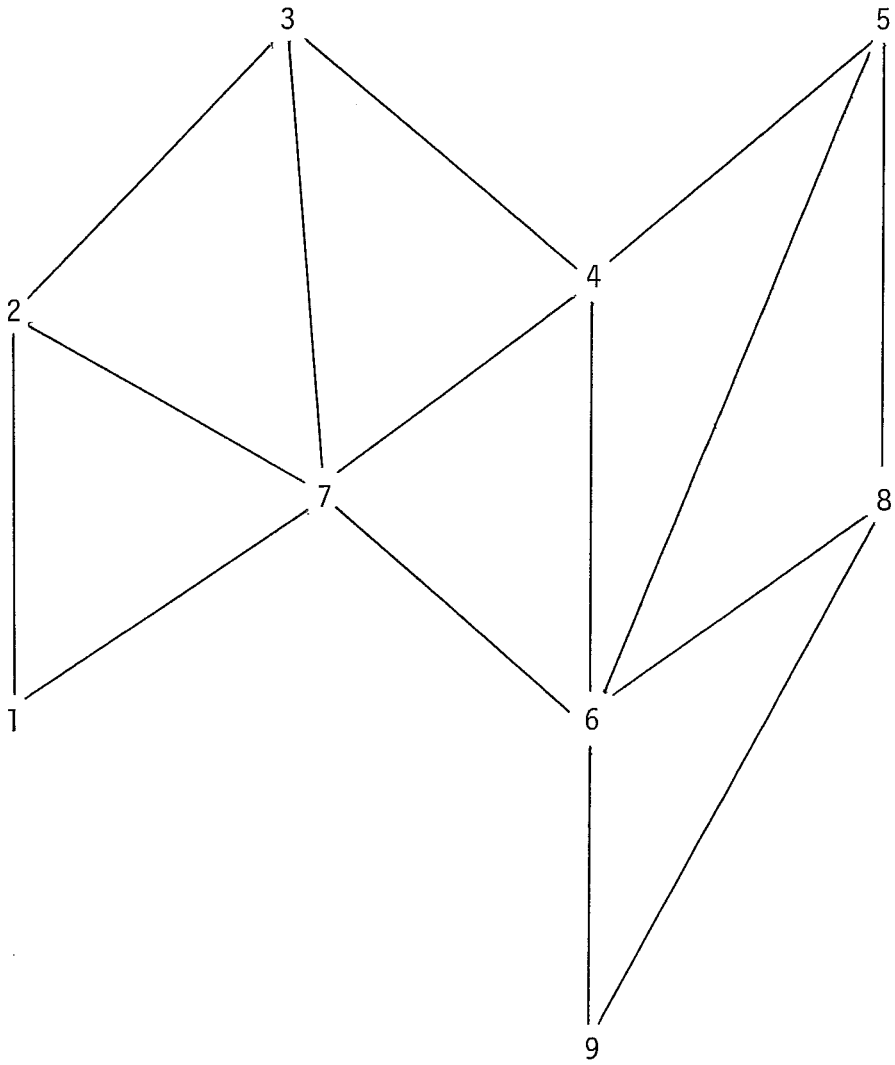
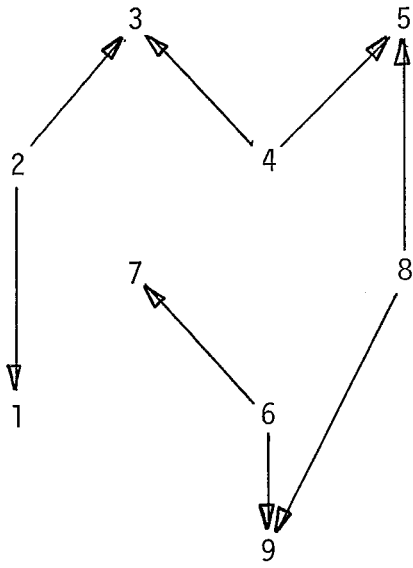
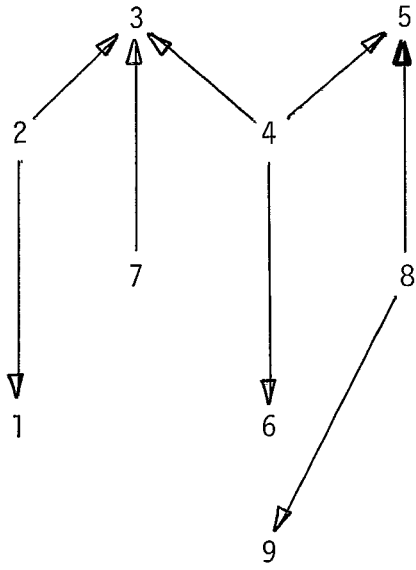


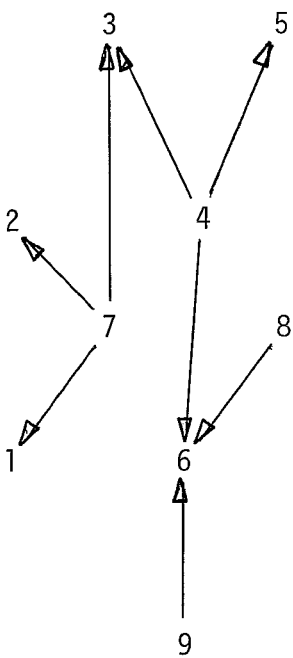
Figura III.1



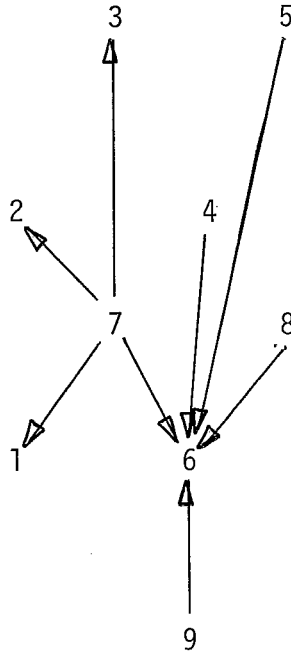
(a)



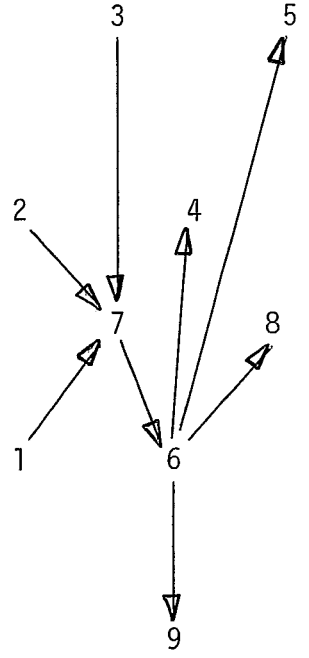
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura III.2

Lema 3.2

Toda árvore admite apenas duas orientações transitivas:  $T$  e  $T^{-1}$ .

Prova

Pelo lema 3.1, uma orientação transitiva em uma árvore não admite caminho orientado com comprimento maior do que um; desta forma cada vértice tem grau de entrada ou saída igual a zero. Seja  $T$  esta orientação.

A modificação na orientação de uma aresta da árvore com orientação  $T$ , implica na modificação da orientação de todas as arestas adjacentes a essa modificada, caso contrário surgiria um caminho de comprimento maior do que um. Desta forma existe apenas mais uma orientação transitiva possível e ela é  $T^{-1}$ . ■

Lema 3.3

Quando orientada transitivamente, uma árvore pode representar posets com número de Dilworth variando entre  $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$  e  $|V| - 1$ .

Prova

Como em uma árvore orientada transitivamente não existe caminho de comprimento maior que um, pode-se representá-la como um grafo bipartite direcionado  $B = (X, Y, E)$  onde  $\forall x \in X$ ,  $\text{in}(x) = 0$  e  $\forall y \in Y$ ,  $\text{out}(y) = 0$ .

O número de Dilworth é dado pela cardinalidade de um conjunto independente máximo, e como os conjuntos  $X$  e  $Y$  são

constituídos de vértices independentes, o número de Dilworth mínimo é dado por:

$$\max(|X|, |Y|).$$

Para que este número seja o menor possível é necessário que  $\frac{|X|}{|Y|} \approx 1$ , isto é: quando  $X$  ou  $Y$  for igual a  $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$ . O maior número de Dilworth ocorre evidentemente quando  $|X| = 1$  e  $|Y| = |V| - 1$  ou o contrário. ■

### 3. POSETS INDUZIDOS

Como verificado no exemplo 3.1, a estrutura de uma árvore e o tipo de orientação atribuído a suas arestas são os fatores que condicionam o número de Dilworth do poset por ela representado. Assim, uma questão interessante é:

#### Questão 3.1

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , obter uma árvore geradora para a qual é possível orientar as arestas de forma a induzir um poset com o menor número de Dilworth. ●

Encontra-se em GAREY (12) que o problema enunciado a seguir pertence à classe dos NP-completos:

#### CAMINHO HAMILTONIANO/CH

Dados: grafo  $G = (V, A)$ .

Questão: o grafo  $G$  tem um caminho Hamiltoniano? ●

A questão 3.1 colocada na forma de um problema de decisão aparece como:

ÁRVORE GERADORA que INDUZ POSET MÍNIMO/AGM

Dados: grafo  $G = (V, A)$  e inteiro positivo  $k \leq |V| - 1$

Questão: existe árvore geradora em  $G$  para a qual uma orientação de suas arestas induza um poset com número de Dilworth  $D$ , tal que  $D \leq k$ ? ●

Teorema 3.1

O problema AGM é NP-completo para  $k = 1$ .

Prova

a. AGM  $\in$  NP

Escolhida uma árvore geradora de  $G$ , o direcionamento de suas arestas, o fechamento transitivo e a determinação do número  $D$ , são passos efetuados por algoritmos de complexidade polinomial em tempo.

b. AGM  $\alpha$  CH

Para que uma árvore geradora induza um poset com número de Dilworth igual a 1, é necessário que suas arestas sejam orientadas a partir de um vértice de grau 1 até um vértice de grau 1, sendo todos os demais vértices de grau 2; desta forma não existem ramificações e se encontra um caminho direcionado de comprimento  $|V| - 1$ , isto é: existe um caminho Hamiltoniano no grafo.

c. CH  $\alpha$  AGM

Um caminho Hamiltoniano em  $G$  é uma árvore geradora de  $G$ ; se as arestas deste caminho são orientadas a partir de um vértice de grau 1 de forma que todos os vértices  $v$  de grau 2 tenham



$\text{in}(v) = 1$  e  $\text{out}(v) = 1$ , obtem-se a indução de um poset em que não existem dois vértices incomparáveis, logo  $D = 1$ . ■

Estabelecida a equivalência do problema AGM com o problema CH, deve ser observado que mesmo para classes restritas de grafos a condição de NP-completo não se altera.

### Teorema 3.2

O problema AGM é NP-completo para  $k = 1$  em grafos reticulados e grafos maximais planares.

### Prova

O problema CH é NP-completo para grafos reticulados como mostrado em ITAI (19) e também é NP-completo para grafos maximais planares como mostrado em WIGDERSON (36); por outro lado, o teorema 3.1 dá a equivalência entre o problema AGM para  $k = 1$  e o problema CH, logo o teorema está correto. ■

## 4. ÁRVORE GERADORA REPRESENTANDO POSET MÍNIMO

Uma vez que uma árvore geradora é um grafo de comparabilidade, como mostrado pelo lema 3.1, ela é subjacente a uma árvore orientada que representa um poset. Desta forma pode-se perguntar se é possível obter uma árvore geradora que satisfaça o limite inferior colocado pelo lema 3.3.

### Questão 3.2

Dado um grafo  $G = (V, A)$  obter uma árvore geradora tal

que quando orientada transitivamente, representa um poset com número de Dilworth igual a  $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ . ●

No desenvolvimento mostrado a seguir, uma árvore geradora que satisfaz a questão 3.2 será denominada AGR; em um grafo  $G = (V, A)$ , um matching que cobre um subconjunto  $S$  de vértices de  $V$  tal que

$$|V| - |S| \leq 1,$$

será chamado de matching crítico.

Para a solução do problema apresentado pela questão 3.2, são necessários os resultados mostrados a seguir.

Em um grafo  $G = (V, A)$ , seja:

- $|I|$  é o número de vértices em um conjunto independente máximo de  $G$ .
- $|V'|$  é o número de vértices em uma cobertura mínima de  $G$ .
- $|M|$  é o número de arestas em um matching máximo de  $G$ .
- $|A'|$  é o número de arestas em uma cobertura mínima de arestas de  $G$ .

Corolário 3.1 (do Teorema 2.1) - BONDY (4)

$$|I| + |V'| = |V| \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3 (Gallai) - BONDY (5)

Em um grafo  $G = (V, A)$ , se não existem vértices livres,

$$|M| + |A'| = |V| \quad \blacksquare$$

Teorema 3.4 - BONDY (4)

Em um grafo bipartite sem vértices livres,

$$|I| = |A'| \quad \blacksquare$$

Corolário 3.2

Em um grafo bipartite sem vértices livres,

$$|M| + |I| = |V|$$

Prova

Substituição direta do resultado do teorema 3.4 no teorema 3.3. ■

Lema 3.4

Existe pelo menos uma árvore geradora de um grafo  $G = (V, A)$  que contém as arestas de um matching máximo de  $G$ .

Prova

Se as arestas do matching máximo não cobrem todos os vértices de  $V$ , os vértices não cobertos devem ser adjacentes unicamente a vértices das arestas do matching, caso contrário o matching não é máximo.

Se não existe árvore geradora contendo as arestas do matching, então:

- a. não existe caminho que passe por pelo menos um vértice de cada aresta do matching.

Isto implica na existência de uma aresta que não pode ser alcançada por outras arestas do grafo  $G$  que é portanto desconexo; esta hipótese é então absurda.

- b. existe um ciclo passando por pelo menos um vértice de cada aresta do matching.

Como as arestas do matching não são adjacentes, entre

cada duas delas existe um caminho de comprimento igual a 2 no máximo, caso contrário o matching poderia ser aumentado. Para o ciclo determinado, é suficiente retirar uma aresta que não pertence ao matching para se obter um caminho que passa por pelo menos um vértice de cada aresta do matching; se o matching não cobre todos os vértices de  $G$ , é evidentemente possível colocá-los como vértices penderes de arestas do matching no caminho assim determinado e se obtém uma árvore geradora de  $G$ . Desta forma esta hipótese embora não absurda, não impede a existência de uma árvore geradora para  $G$  e o lema está correto. ■

Como todo matching crítico é máximo, existe pelo menos uma árvore geradora para o grafo  $G$  que contém todas as suas arestas.

### Exemplo 3.2

A figura (III.3.a) mostra um grafo  $G$  em que as arestas de um matching máximo são:

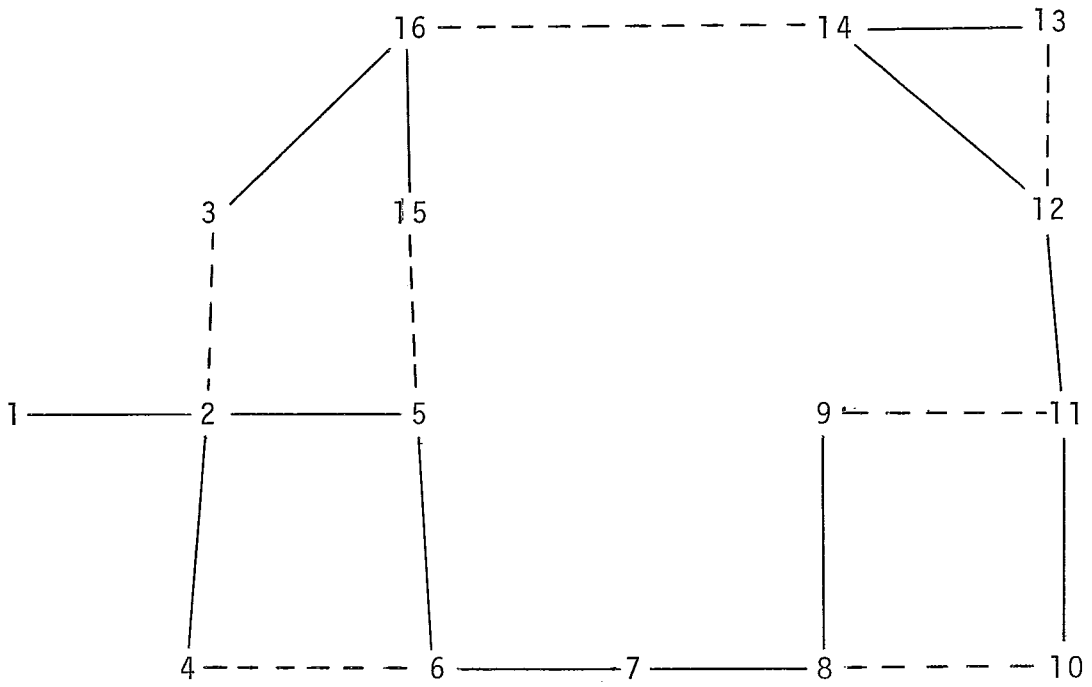
$$M = \{(2,3), (4,6), (8,10), (9,11), (5,15), (12,13), (14,16)\}$$

A figura (III.3.b) mostra uma árvore geradora para esse grafo, que contém todas as arestas do matching máximo indicado. ▲

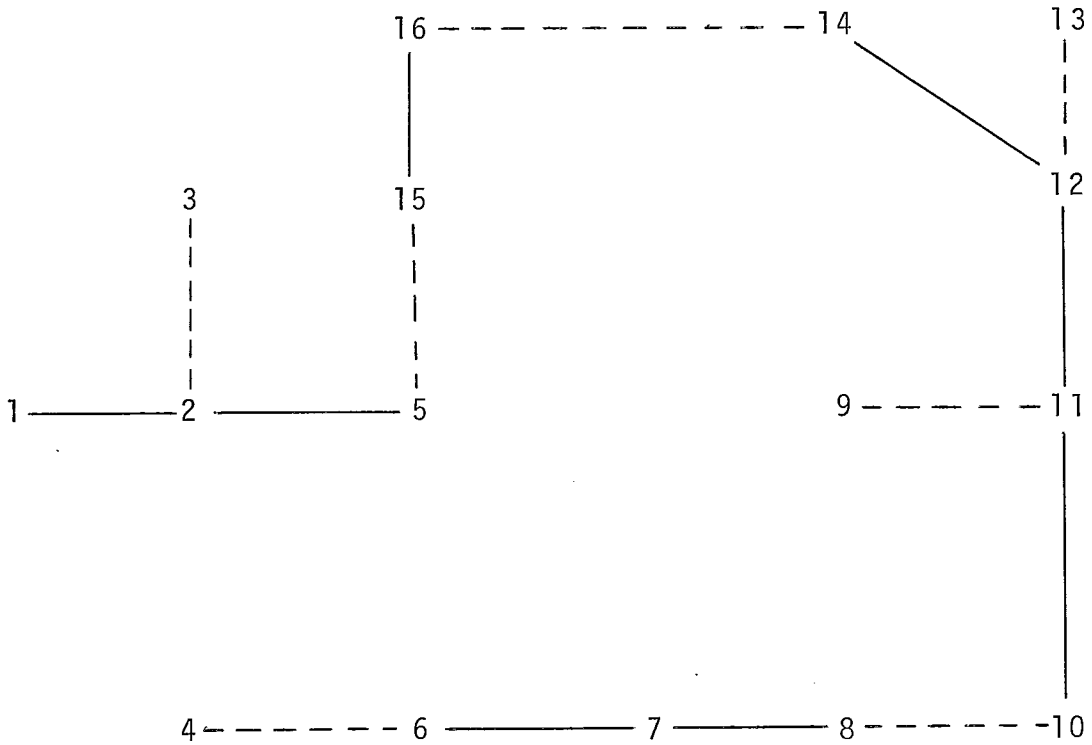
Agora é possível mostrar o seguinte resultado:

### Teorema 3.5

Um grafo  $G = (V,A)$  tem uma AGR, se e somente se con-



(a)



(b)

Figura III.3

têm um matching crítico.

### Prova

#### a. G tem uma AGR

A AGR pode ser vista como um grafo bipartite  $B = (X, Y, A')$ ,  $A' \subset A$ , que tem número de Dilworth igual a  $\lceil \frac{|V|}{2} \rceil$ , isto é: tem conjunto independente máximo com essa cardinalidade.

Seja  $M$  um matching máximo na árvore e  $S \subset V$  o subconjunto de vértices cobertos por  $M$ ; pelo corolário 3.2 vem que:

$$|M| = |V| - \lceil \frac{|V|}{2} \rceil$$

I. se  $|V|$  é par:

$$|M| = |V| - \frac{|V|}{2} = \frac{|V|}{2}$$

$$|S| = 2 \cdot |M| \therefore |S| = |V| \quad (1)$$

II. se  $|V|$  é ímpar:

$$|M| = |V| - \left[ \frac{|V|}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{|V|}{2} - \frac{1}{2}$$

$$|S| = 2 \cdot \left[ \frac{|V|}{2} - \frac{1}{2} \right] \therefore |S| = |V| - 1 \quad (2)$$

De (1) e (2) vem que

$$|V| - |S| \leq 1$$

e assim o matching é crítico.

#### b. G tem um matching crítico

Pelo lema 3.4 existe uma árvore geradora que contém o matching crítico; seja  $|MC|$  a cardinalidade deste matching. A cardinalidade de um conjunto independente máximo para a árvore geradora que contém o matching crítico é determinada assim:

I. o matching crítico cobre  $|V|$  vértices

$$|MC| = \frac{|V|}{2}$$

Pelo corolário 3.2 um conjunto independente máximo  $I$ , é tal que:

$$|I| = |V| - \frac{|V|}{2} = \frac{|V|}{2} \quad (1)$$

II. o matching crítico não cobre  $|V|$  vértices

Então ele cobre  $S \subset V$  vértices e

$$|S| = |V| - 1$$

$$\text{Como } |S| = 2 \cdot |MC| \therefore |MC| = \frac{|V|}{2} - \frac{1}{2}$$

Pelo corolário 3.2, vem que

$$|I| = |V| - |MC| \therefore |I| = \frac{|V|}{2} + \frac{1}{2} \quad (2)$$

De (1) e (2) tira-se

$$|I| = \left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil,$$

e como o número de Dilworth é dado pela cardinalidade de um conjunto independente máximo na árvore geradora em questão, uma orientação transitiva conduz a representação de um poset com número de Dilworth dado por

$$\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil,$$

isto é: a árvore geradora é uma AGR. ■

O teorema 3.5 relaciona então a árvore geradora requerida pela questão 3.2 com um matching máximo de características particulares para o grafo em exame. Assim, colocada na forma de decisão a questão 3.2, é possível dar uma resposta sim ou não em tempo igual ao consumido por um algoritmo que determina um

matching máximo para um grafo  $G = (V, A)$ , isto é: se o grafo  $G$  tem um matching máximo que cobre um subconjunto de vértices  $S \subset V$  tal que,  $|S| \geq |V| - 1$ , então o grafo  $G$  tem uma AGR, caso contrário não a terá.

Uma vez que um algoritmo para a determinação de um matching máximo, tem complexidade  $O(|V|^{1/2} \cdot |A|)$  em tempo como encontrado em PAPADIMITRIOU (32), esta é a complexidade de se responder se existe ou não uma AGR para o grafo.

Para a resolução do problema combinatório, isto é: para a obtenção de uma AGR, um algoritmo implicado diretamente pelo teorema 3.5 deve ter dois passos. Primeiramente determina-se um matching máximo verificando-se que ele é crítico; em seguida atribui-se uma constante  $\delta$  como peso às arestas do matching e uma constante  $\gamma$ ,  $\gamma \gg \delta$ , às demais arestas do grafo usando-se um algoritmo para determinação de árvore geradora mínima sobre o grafo assim ponderado. Esta árvore geradora mínima necessariamente conterá as arestas do matching crítico e portanto será uma AGR.

Como um algoritmo que obtém uma árvore geradora mínima para um grafo  $G = (V, A)$ , tem complexidade  $O(|A| \cdot \log |V|)$  em tempo no pior caso, a complexidade em tempo do algoritmo direto é dada por  $O(|V|^{1/2} \cdot |A|)$ .



CAPÍTULO IVORIENTAÇÃO DE GRAFOS E TRANSFORMAÇÕES PARA COMPARABILIDADE1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são analisados alguns problemas referentes a orientação de grafos para obtenção de número de Dilworth mínimo e máximo; estes problemas são formulados sobre grafos de comparabilidade ou não e conduzem a resultados interessantes quando se observa como a introdução de uma restrição de minimização ou maximização leva um problema combinatório de natureza polinomial à condição de problema NP-completo.

Inicialmente se estuda o problema de minimizar o número de Dilworth com uma orientação transitiva ou não sobre um grafo geral ou de comparabilidade; em seguida se analisa o problema de maximização sobre os mesmos casos.

É mostrado depois um processo de caracterização de grafos de comparabilidade, que pode ser utilizado como método de solução não ótima para um problema formulado sobre grafos que não são de comparabilidade.

Finalmente são feitas algumas observações e comparações sobre os problemas de obtenção de grafos de comparabilidade por retirada e acréscimo mínimo de arestas a um grafo que não tenha esta característica.

## 2. MINIMIZAÇÃO DO NÚMERO DE DILWORTH

### Questão 4.1

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , obter uma orientação acíclica e transitiva dos elementos do conjunto  $A$ , de maneira que o digrafo obtido represente um poset com o menor número de Dilworth. ●

Se é possível obter uma orientação acíclica e transitiva dos elementos de  $A$ , o grafo  $G$  é um grafo de comparabilidade; como visto no corolário do lema 2.1, o número de Dilworth do digrafo obtido com esta orientação, é igual a cardinalidade de um conjunto independente máximo de  $G$ .

Desta forma, para qualquer orientação transitiva das arestas de  $G$  o número de Dilworth será o mesmo e assim a solução do problema apresentado pela questão 4.1 se resume na verificação de se o grafo  $G$  é ou não de comparabilidade; em caso afirmativo, qualquer orientação acíclica e transitiva para  $G$  resolve o problema.

### Questão 4.2

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , obter uma orientação acíclica dos elementos do conjunto  $A$ , de maneira que o digrafo obtido induza um poset com o menor número de Dilworth. ●

No desenvolvimento que se segue, o problema CH é o já apresentado na seção 3 do Capítulo III.

A questão 4.2, apresenta um problema de minimização

que colocado na forma de decisão aparece como:

GRAFO ORIENTÁVEL INDUZINDO POSET MÍNIMO (GPMI)

Dados: grafo  $G = (V, A)$  e inteiro positivo  $k \leq |V| - 1$ .

Questão: existe uma orientação acíclica dos elementos do conjunto  $A$ , de tal forma que o digrafo assim obtido induza um poset com número de Dilworth  $D$  tal que  $D \leq k$ ? ●

Teorema 4.1

O problema GPMI é NP-completo para  $k = 1$ .

Prova

a. GPMI  $\in$  NP

Escolhida uma orientação acíclica dos elementos do conjunto  $A$ , basta efetuar o fechamento transitivo do digrafo assim gerado e calcular  $D$ , verificando se  $D = 1$ . Estes passos são executados por algoritmos polinomiais em tempo e assim o problema pertence a classe NP.

b. GPMI  $\alpha$  CH

Como a orientação é acíclica, existe pelo menos um vértice  $v_1 \in V$  com  $\text{in}(v_1) = 0$  e pelo menos um vértice  $v_2 \in V$  com  $\text{out}(v_2) = 0$ .

Uma vez que  $D = 1$ , todos os vértices são comparáveis e necessariamente existe um caminho direcionado com origem em  $v_1$  e extremidade em  $v_2$ , sem ramificações e passando por todos os vértices de  $V$ , isto é: o caminho subjacente a este caminho direcionado é um caminho Hamiltoniano.

c. CH  $\alpha$  GPMI

Considere-se o seguinte algoritmo aplicado a um caminho Hamiltoniano determinado em  $G$ : inicialmente um v\u00e9rtice pendente do caminho \u00e9 considerado como v\u00e9rtice em exame; cada aresta do conjunto  $A$  incidente a este v\u00e9rtice \u00e9 ent\u00e3o orientada com origem nele e extremidade no v\u00e9rtice adjacente. Este processo \u00e9 repetido para o segundo v\u00e9rtice do caminho e at\u00e9 que n\u00e3o existam mais v\u00e9rtices para serem examinados.

Este algoritmo tem, claramente, complexidade polinomial em tempo, e de sua aplica\u00e7\u00e3o resulta um digrafo em que existe um caminho Hamiltoniano direcionado, isto \u00e9: o digrafo induz um poset em que todos os elementos s\u00e3o compar\u00e1veis e portanto  $D = 1$ . ■

3. MAXIMIZA\u00c7\u00c3O DO N\u00daMERO DE DILWORTHQuest\u00e3o 4.3

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , obter uma orienta\u00e7\u00e3o ac\u00edclica e transitiva dos elementos do conjunto  $A$ , de maneira que o digrafo obtido represente um poset com o maior n\u00famero de Dilworth. ●

As considera\u00e7\u00f5es aqui s\u00e3o as mesmas feitas na quest\u00e3o 4.1; qualquer orienta\u00e7\u00e3o ac\u00edclica e transitiva de  $G$  resolve o problema.

Quest\u00e3o 4.4

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , obter uma orienta\u00e7\u00e3o ac\u00edclica

ca dos elementos do conjunto  $A$ , de maneira que o digrafo obtido induza um poset com o maior número de Dilworth. ●

Encontra-se em GAREY (12) que o problema enunciado a seguir pertence à classe dos NP-completos:

#### CONJUNTO INDEPENDENTE/CI

Dados: grafo  $G = (V, A)$ , inteiro positivo  $k \leq |V|$ .

Questão: o grafo  $G$  contém um conjunto independente de tamanho  $k$  ou maior, isto é: um subconjunto  $V' \subseteq V$  tal que  $|V'| \geq k$  e tal que não existem em  $V'$  dois vértices unidos por uma aresta de  $A$ ? ●

A questão 4.4 apresenta um problema de maximização que colocado na forma de decisão aparece como:

#### GRAFO ORIENTÁVEL INDUZINDO POSET MÁXIMO (GPMA)

Dados: grafo  $G = (V, A)$  e inteiro positivo  $k \leq |V|$ .

Questão: existe uma orientação acíclica dos elementos do conjunto  $A$ , de tal forma que o digrafo assim obtido induza um poset com número de Dilworth  $D$  tal que  $D \geq k$ ? ●

#### Teorema 4.2

O problema GPMA é NP-completo.

#### Prova

a.  $GPMA \in NP$

Escolhida uma orientação acíclica para os elementos do

conjunto  $A$ , basta efetuar o fechamento transitivo do digrafo assim gerado e calcular  $D$ , verificando se  $D = 1$ . Estes passos são executados por algoritmos polinomiais em tempo e assim o problema pertence a classe NP.

b. GPMA  $\alpha$  CI

A orientação acíclica atribuída aos elementos de  $A$ , pode levar ao surgimento da condição de comparabilidade, isto é: um caminho direcionado, entre vértices não adjacentes em  $D$ . Se essa orientação é tal que  $D$  é máximo, necessariamente ela não cria condição de comparabilidade entre elementos independentes de  $G$ , uma vez que se isso ocorre, o grafo  $G'$  subjacente ao digrafo obtido pelo fechamento transitivo dessa orientação acíclica escolhida para  $G$ , tem arestas entre vértices que são independentes em  $G$  e assim  $D$  não é máximo.

No melhor caso portanto, um conjunto incomparável de cardinalidade  $D \geq k$ , no poset induzido pela orientação acíclica sobre os elementos de  $G$ , é um conjunto independente de cardinalidade  $I \geq k$  sobre  $G$  e  $I = D$ .

c. CI  $\alpha$  GPMA

É evidente que a cardinalidade de um conjunto independente máximo de  $G$  não pode ser menor que a cardinalidade de um conjunto incomparável máximo no digrafo obtido por orientação de elementos de  $A$ ; se isto fosse possível, a simples retirada da orientação, transformaria o conjunto incomparável máximo em um conjunto de vértices não adjacentes em  $G$  e portanto independente máximo, com cardinalidade maior que o de um conjunto independente máximo determinado para  $G$ , o que é absurdo.

Dado um conjunto independente máximo para  $G$ , é suficiente

orientar as arestas incidentes aos vértices  $v$  desse conjunto, de tal forma que ou  $\text{in}(v) = 0 \ \forall v$  ou  $\text{out}(v) = 0 \ \forall v$ ; evidentemente não é possível o surgimento de caminho direcionado entre esses vértices, qualquer que seja a orientacao atribuída as demais arestas. Desta forma, se  $G$  tem um conjunto independente máximo com cardinalidade  $I \geq k$ , é possível em tempo polinomial obter uma orientacao acíclica de  $A$  tal que o poset induzido tem número de Dilworth  $D \geq k$ , e  $I = D$ . ■

#### Exemplo 4.1

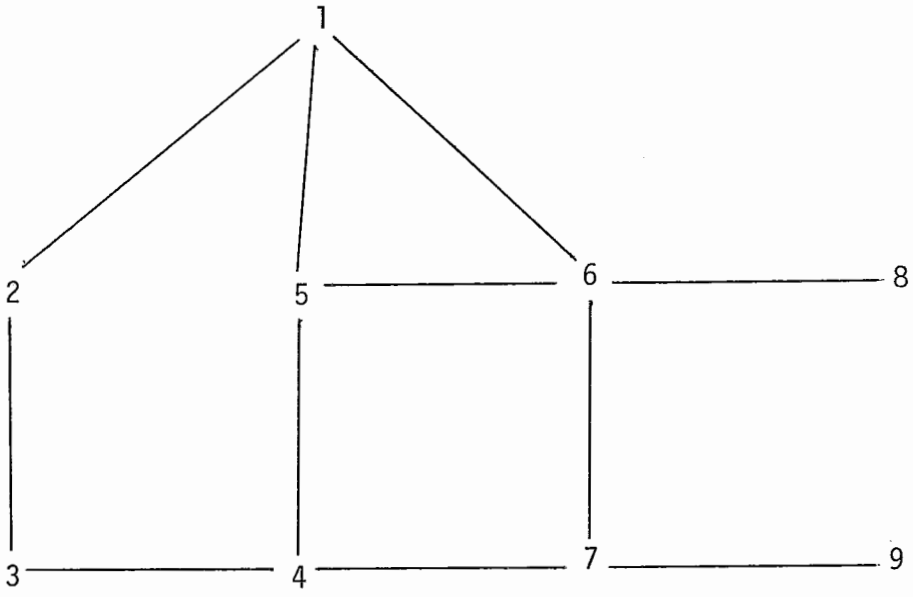
O grafo  $G$  da figura (IV.1.a) não é de comparabilidade; um conjunto independente máximo é dado por  $\{3,5,7,8\}$ .

A figura (IV.1.b) mostra as arestas incidentes aos vértices daquele conjunto orientadas de forma que  $\text{in}(v) = 0 \ \forall v$ . é evidente que não existirá caminho direcionado entre quaisquer dois vértices do conjunto, para qualquer orientacao das arestas (1,2) e (1,6).

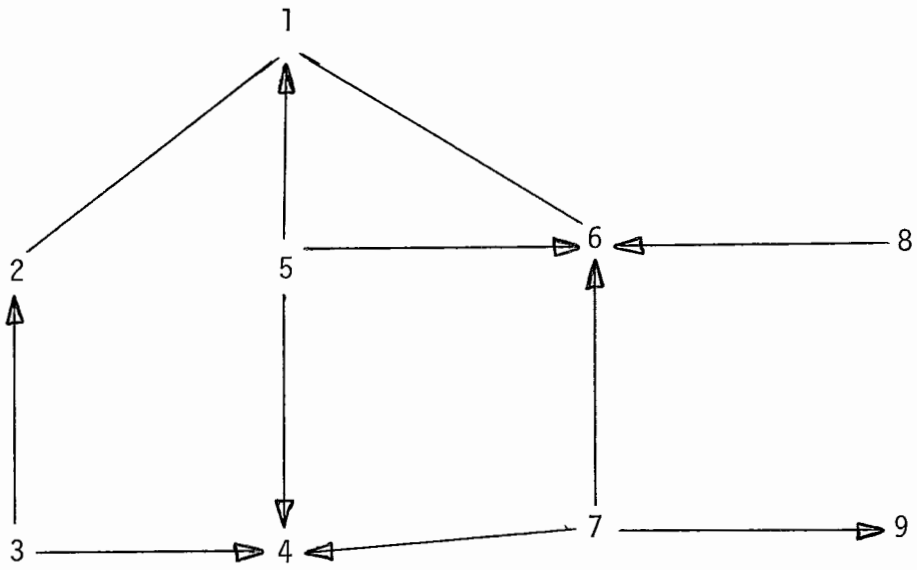
Desta forma o número de Dilworth do poset induzido será 4 e um conjunto incomparável máximo é  $\{3,5,7,8\}$ , para qualquer orientacao de (1,2) e (1,6). ▲

é interessante observar que os problemas de minimizacao e maximizacao do número de Dilworth formulado sobre grafos que não são de comparabilidade, pertencem a classe de problemas NP-completos; como comentado em GAREY (12), para alguns problemas "duais" este fato não se verifica.

Um exemplo é, para um grafo  $G = (V,A)$ , o problema da determinacao do menor caminho entre um par especificado de vêr



(a)



(b)

Figura IV.1



tices e o problema da determinação do maior caminho entre um par especificado de vértices; o primeiro é resolvido polinomialmente, enquanto o segundo é classificado como NP-completo.

#### 4. OBTENÇÃO DE GRAFOS DE COMPARABILIDADE

Se um grafo  $G = (V,A)$  não é de comparabilidade, a sua transformação em um grafo de comparabilidade pode ser vista de duas formas: pela retirada ou acréscimo de arestas; os problemas que surgem naturalmente, envolvem a determinação do menor número de arestas que retiradas ou acrescentadas a  $G$ , o transformam em um grafo de comparabilidade.

##### 4.1. TRANSFORMAÇÃO POR ELIMINAÇÃO MÍNIMA DE ARESTAS

A transformação de um grafo  $G = (V,A)$  em um grafo de comparabilidade por retirada mínima de arestas é um problema classificado como NP-completo em YANNAKAKIS (37); na forma de decisão o problema tem a seguinte formulação:

##### SUBGRAFO DE COMPARABILIDADE/SC

Dados: grafo  $G = (V,A)$ , inteiro positivo  $k \leq |A|$ .

Questão: existe um conjunto  $A' \subseteq A$ , com  $|A'| \geq k$ , tal que o grafo  $G' = (V,A')$  é de comparabilidade? ●

Embora se encontre em GAREY (12), algumas restrições do problema SC que não alteram sua classificação como problema NP-completo (os vértices tem grau máximo menor ou igual a 3 e

subgrafo  $\bar{e}$  conexo), um relevante resultado não  $\bar{e}$  referenciado em YANNAKAKIS (37) e (38), ou mesmo na literatura mais recente como em JOHNSON (20), (21), (22), (23), (24), (25) e (26).

Em HADLOCK (17) se prova que o problema de determinação de um conjunto máximo de corte  $\bar{e}$  resolvido por algoritmo de complexidade polinomial em tempo, quando restrito a grafos planares; este resultado  $\bar{e}$  conseguido fazendo-se a equivalência com o problema de determinação de matching máximo ponderado, e  $\bar{e}$  importante uma vez que apresenta uma restrição que transforma em problema de natureza polinomial o seguinte problema NP-completo enunciado em KARP (27):

#### CONJUNTO MÁXIMO DE CORTE/MAC

Dados: grafo  $G = (V, A)$ , custos  $w(a) \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall a \in A$ , inteiro positivo  $k$ .

Questão: o conjunto  $V$  pode ser particionado em dois conjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , com  $V_1 \cap V_2 \equiv \emptyset$ , de tal forma que o somatório dos custos das arestas de  $A$  que tem uma extremidade em  $V_1$  e outra em  $V_2$ ,  $\bar{e}$  pelo menos  $k$ ? ●

O primeiro passo do procedimento desenvolvido por Hadlock,  $\bar{e}$  obter polinomialmente uma cobertura de ciclos de comprimento impar; isto significa: obter o menor conjunto de arestas que eliminam os ciclos de comprimento impar do grafo em exame.

Por outro lado, resultado conhecido  $\bar{e}$ :

#### Teorema 4.3 - GILMORE (13)

Um grafo  $G = (V, A)$   $\bar{e}$  um grafo de comparabilidade, se

e somente se não contêm ciclos de comprimento ímpar sem cordas triangulares. ■

Desta forma, é possível derivar diretamente que:

#### Teorema 4.4

O problema SC é resolvido em tempo polinomial quando o grafo  $G = (V, A)$  é planar.

#### Prova

O procedimento apresentado por Hadlock, retira mínima mente um subconjunto de arestas de  $A$  que deixam o grafo  $G$  sem ciclos de comprimento ímpar; então pelo teorema 4.3, o grafo  $G'$  assim obtido é um grafo de comparabilidade, e como o procedimento tem complexidade polinomial em tempo, o teorema está correto. ■

Um grafo transformado em grafo de comparabilidade, se torna subjacente a um conjunto de digrafos acíclicos transiti vos; um problema interessante é examinar se é possível obter uma solução eficiente para a transformação, por retirada de ares tas, em um grafo subjacente a apenas dois digrafos com orientações acíclicas, transitivas e inversas.

#### Questão 4.5

Para um grafo  $G = (V, A)$  que não é de comparabilidade, determinar o menor número de arestas que retiradas de  $A$  trans formam  $G$  em um grafo BOT. ●

Considere-se o seguinte resultado:

#### Lema 4.1

Todo grafo bipartite e conexo,  $B = (V, X, A)$ , é um grafo BOT.

#### Prova

Todo grafo bipartite é um grafo de comparabilidade, uma vez que é transitiva a orientação obtida fazendo-se com que todos os vértices do conjunto  $V$  tenham  $\text{in}(v) = 0$  e os vértices do conjunto  $X$  tenham  $\text{out}(x) = 0$  ou vice-versa; seja  $T$  esta orientação.

A alteração no sentido de qualquer uma das arestas do grafo, implica na alteração de sentido de todas as arestas que lhe são adjacentes, caso contrário haveria o surgimento de pelo menos um caminho orientado de comprimento maior ou igual a 2, passando por vértices de um mesmo conjunto; como não existem arestas entre vértices de  $X$  ou entre vértices de  $V$ , a orientação não seria transitiva, e desta forma a modificação de orientação de uma aresta obriga a modificação na orientação de todas as outras, obtendo-se então uma orientação  $T^{-1}$ . ■

Encontra-se em YANNAKAKIS (38), que o seguinte problema pertence a classe dos problemas NP-completos:

#### SUBGRAFO BIPARTITE CONEXO/SBC

Dados: grafo  $G = (V, A)$  e inteiro positivo  $k \leq |A|$ .

Questão: existe um subconjunto  $A' \subseteq A$  com  $|A'| \geq k$  e tal que  $G' = (V, A')$  é bipartite e conexo? ●

O problema combinatório correspondente a esta forma de decisão, pede então que seja encontrado em um grafo  $G = (V,A)$ , o maior subgrafo bipartite conexo; dito de outra forma: se quer o menor número de arestas que retiradas de um grafo  $G = (V,A)$  o transformam em um grafo bipartite e conexo.

A questão 4.5 restrita a grafos bipartites e na forma de decisão aparece como:

#### SUBGRAFO BOT E BIPARTITE/SBB

Dados: grafo  $G = (V,A)$  e inteiro positivo  $k \leq |A|$ .

Questão: existe um subconjunto  $A' \subseteq A$  com  $|A'| \geq k$  e tal que  $G' = (V,A')$  é um grafo BOT e bipartite? ●

#### Teorema 4.5

O problema SBB é NP-completo.

#### Prova

a.  $SBB \in NP$

Escolhido um subconjunto  $A' \subseteq A$ , basta verificar se  $G' = (V,A')$  é BOT e bipartite, e se:  $|A'| \geq k$ ; essas verificações podem ser feitas por algoritmos de complexidade polinomial em tempo e desta forma o problema pertence a classe NP.

b.  $SBB \alpha SBC$

Encontrou-se em  $G$ , um subgrafo  $G' = (V,A')$  com  $A' \subseteq A$  e  $|A'| \geq k$ , tal que  $G' = (V,A')$  é BOT e bipartite. Necessariamente  $G'$  é conexo, caso contrário como cada componente tem duas orientações transitivas, o número de orientações transitivas de  $G'$  seria  $2^\gamma$  onde  $\gamma$  é o número de componentes de  $G'$  e isto é absurdo uma vez que  $G'$  é BOT.

Assim  $G'$  é bipartite e conexo e uma solução para o problema SBC.

c. SBC  $\alpha$  SBB

O grafo  $G' = (V, A')$  com  $A' \subseteq A$  e  $|A'| \geq k$ , solução para o problema SBC é bipartite e conexo. Pelo lema 4.1,  $G'$  é BOT e portanto é uma solução para o problema SBB. ■

#### 4.2. TRANSFORMAÇÃO POR ACRÉSCIMO MÍNIMO DE ARESTAS

No exame de problema de acréscimo mínimo de arestas a um grafo  $G = (V, A)$  para transformá-lo em um grafo de comparabilidade, não se conseguiu sua classificação absoluta como um problema NP-completo ou polinomial; porém algumas propriedades interessantes podem ser estabelecidas com base em um algoritmo de caracterização de grafos de comparabilidade.

Os algoritmos de caracterização são apresentados por EVEN (10), GILMORE (13), GOLUMBIC (14), (15), (16) e PNUELI (33); em todos estes algoritmos se faz uso de uma regra básica que induz a orientação de todas as arestas do grafo, a partir de uma orientação arbitrária sobre uma aresta escolhida aleatoriamente.

Essa regra foi proposta inicialmente por Gilmore, mas seu algoritmo embora de complexidade polinomial em tempo, é menos eficiente que o algoritmo de Pnueli e Even; basicamente, enquanto Gilmore examina o grafo todo em cada passo, Pnueli e Even trabalham sobre subgrafos sucessivamente menores.

O algoritmo desenvolvido por Golubic é mais uma implementação sofisticada do algoritmo proposto por Pnueli; des-

ta forma Golubic consegue resultados um pouco melhores quando

$$|V|^2 \gg |A| .$$

A complexidade do algoritmo de Golubic é a mesma do algoritmo de Pnueli e Even; é limitada no pior caso por  $O(\delta \cdot |A|)$  em tempo, onde  $\delta$  é o grau do vértice de maior grau.

Aqui será usada a versão desenvolvida em PNUELI (33), com as definições a seguir:

- (i) seja o grafo  $G = (V, A)$ ; se  $i \neq k$  e  $(i, j), (j, k) \in A$  uma relação  $F$  é tal que:  $(i, j)F(j, k) \text{ sss } (i, k) \notin A$ .
- (ii) para um grafo que tem algumas arestas direcionadas e outras não direcionadas, uma aresta é chamada de implicante se é direcionada e  $F$  relacionada a pelo menos uma aresta não direcionada do grafo.
- (iii) um grafo é estável se não contém implicantes.

ALGORITMO PNUELI

entrada: grafo  $G = (V, A)$

saída: indicação de que o grafo  $G$  não é de comparabilidade ou uma orientação acíclica e transitiva de  $A$ .

1.  $G' \equiv G$
2. escolher e direcionar arbitrariamente uma aresta de  $G'$ ; se o grafo resultante é estável, ir para 4;
3. aplicar repetidamente a seguinte regra de orientação, até que não existam mais arestas implicantes:
 

$\forall (i, i') \mid [i, j] \in F(i, i')$  faça  $[i, i']$  e

$\forall (j, j') \mid [i, j] \in F(j, j')$  faça  $[j', j]$ .
4. verificar se o subgrafo orientado obtido,  $D = (V^*, E)$ , é transitivo; para isto:
 

$\forall i \in V^*$  faça  $X(i) = \{j \in V^* \mid [i, j] \in E\}$

O subgrafo  $D$  é transitivo se e somente se

$$\forall i \in V^*, X(i) \supseteq W(i) = \bigcup_{j \in X(i)} X(j).$$

Se o subgrafo  $D$  não é transitivo, ir para 6.
5. se não existem mais arestas não direcionadas, ir para 7; caso contrário seja  $G'$  o subgrafo não direcionado resultante: ir para 2.
6. parar; o grafo dado não é de comparabilidade.
7. parar; o grafo dado é de comparabilidade e a orientação obtida é acíclica e transitiva.
8. Fim.

O funcionamento do ALGORITMO PNUELI é facilmente entendido com o auxílio dos seguintes exemplos:



Exemplo 4.2

Seja o grafo  $G = (V, A)$  da figura (IV.2.a); inicialmente,  $G' \equiv G$ .

No passo 2, seja  $(1,2)$  a aresta escolhida e seja  $[1,2]$  a orientação arbitrária. O grafo resultante não é estável porque a aresta  $[1,2]$  é implicante, então:

3.  $[1,2] \implies (2,3)$  como  $[3,2]$   
 $[3,2] \implies (2,5)$  e  $(3,4)$  como  $[5,2]$  e  $[3,4]$   
 $[5,2] \implies (5,4)$  como  $[5,4]$   
 $[5,4] \implies (5,1)$  como  $[5,1]$

e não existem mais implicantes. O digrafo obtido é o da figura (IV.2.b).

4.  $V^* = \{1,2,3,4,5\}$   
 $X(1) = \{2\}$ ,  $X(2) = X(4) = \{\emptyset\}$ ,  $X(3) = \{2,4\}$ ,  $X(5) = \{1,2,4\}$   
 $W(1) = W(2) = W(3) = W(4) = \{\emptyset\}$ ,  $W(5) = \{2\}$

Aqui  $W(i) \subset X(i)$ ,  $i = 1,5$ , isto é: este subgrafo está orientado transitivamente.

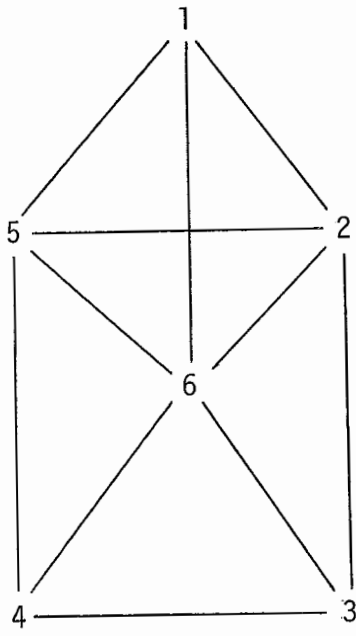
5. Agora  $G'$  é o subgrafo da figura (IV.2.c), então:

2. seja  $(1,6)$  a aresta escolhida e seja  $[1,6]$  a orientação arbitrária.  $G$  não é estável porque a aresta  $[1,6]$  é implicante, então:

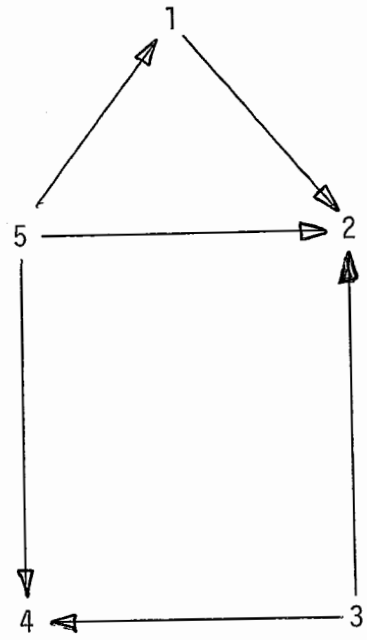
3.  $[1,6] \implies (2,6)$ ,  $(3,6)$ ,  $(4,6)$  e  $(5,6)$  como  
 $[2,6]$ ,  $[3,6]$ ,  $[4,6]$  e  $[5,6]$

e não existem mais implicantes. O digrafo obtido é o da figura (IV.2.d)

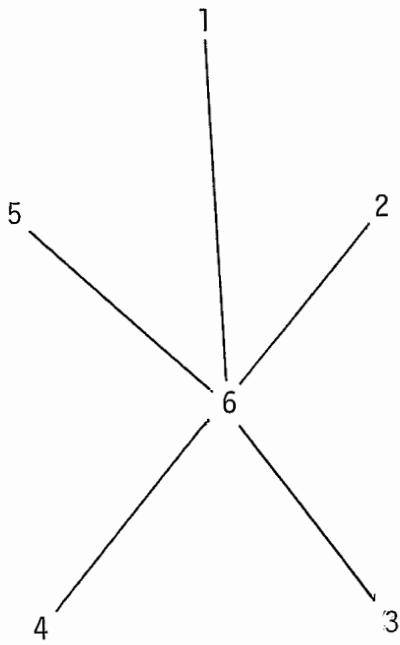
4.  $V^* = \{1,2,3,4,5,6\}$   
 $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = \{6\}$ ,  $X(6) = \{\emptyset\}$   
 $W(1) = W(2) = W(3) = W(4) = W(5) = W(6) = \{\emptyset\}$



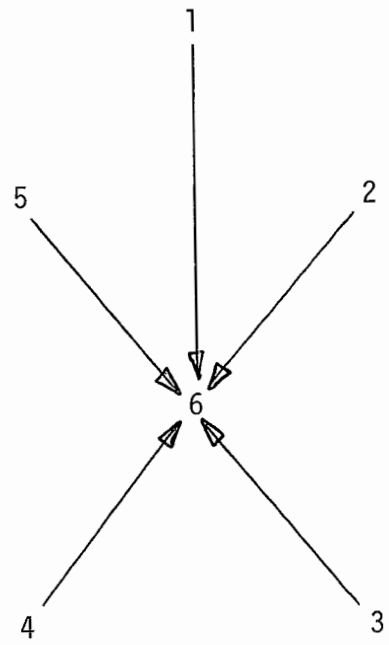
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura IV.2

Aqui  $W(i) \subset X(i)$ ,  $i = 1,6$ , isto é: este subgrafo está orientado transitivamente.

5. não existem mais arestas não direcionadas, então:

7. parar;  $G$  é um grafo de comparabilidade, e uma orientação acíclica foi conseguida. ▲

### Exemplo 4.3

Seja o grafo  $G = (V,A)$  da figura (IV.3.a); inicialmente  $G' \equiv G$ .

2. seja  $(1,2)$  a aresta escolhida e seja  $[1,2]$  a orientação arbitrária.

3.  $[1,2] \implies (1,5)$  e  $(2,3)$  como  $[1,5]$  e  $[3,2]$

$[1,5] \implies (5,4)$  como  $[4,5]$

$[3,2] \implies (3,4)$  como  $[3,4]$

e não existem mais implicantes. O digrafo obtido é o da figura (IV.3.b).

4.  $V^* = \{1,2,3,4,5\}$

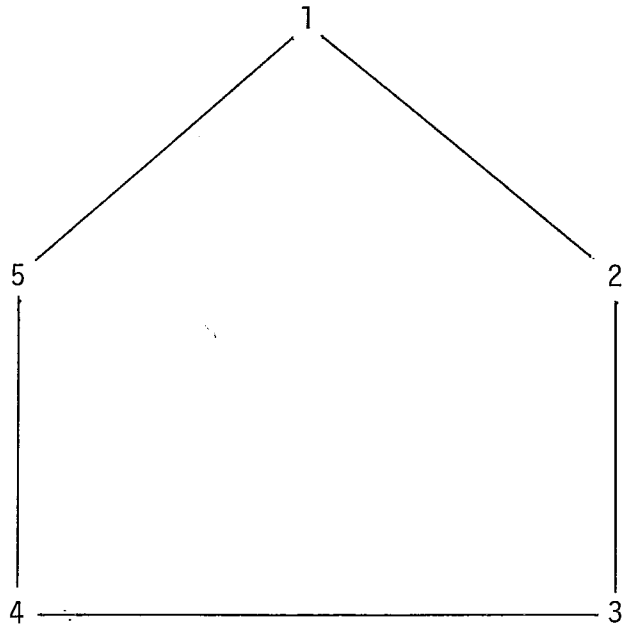
$X(1) = \{2,5\}$ ,  $X(2) = X(5) = \{\emptyset\}$ ,  $X(3) = \{2,4\}$ ,  $X(4) = \{5\}$

$W(1) = W(2) = W(4) = W(5) = \{\emptyset\}$ ,  $W(3) = \{5\}$

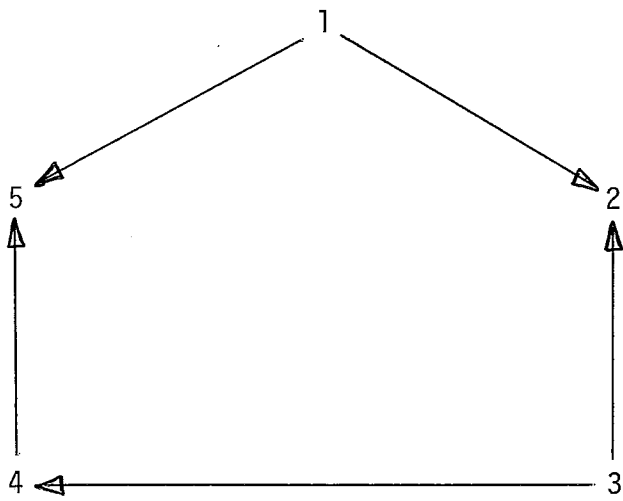
Aqui  $W(3) \not\subset X(3)$ , isto é: este subgrafo não está orientado transitivamente.

6. parar;  $G$  não é um grafo de comparabilidade. ▲

O ALGORITMO PNUELI trabalha portanto, a partir da orientação arbitrária de uma aresta escolhida aleatoriamente, obtendo componentes orientados que são verificados no passo 4 com respeito a sua transitividade; o encontro de um componente direcionado não transitivo, permite interromper o processo com a



(a)



(b)

Figura IV.3

certeza de que o grafo original não é de comparabilidade, mas se todas as arestas são orientadas, e todos os componentes são grafos de comparabilidade, o grafo  $G$  também o é.

O passo 4 do algoritmo fornece entretanto uma indicação adicional: se o componente não tem orientação transitiva, a condição de transitividade apresentada no passo 4 diz implicitamente que faltam arestas com determinadas orientações entre vértices especificados.

Assim no exemplo 4.3, verifica-se que  $W(3) = \{5\}$ , isto é: para que o componente fosse de comparabilidade, seria necessária a existência da aresta  $(3,5)$  como  $[3,5]$ .

Desta forma, o ALGORITMO PNUELI, com pequenas modificações, pode ser usado para caracterização de grafos de comparabilidade ou para transformação de grafos em grafos de comparabilidade por acréscimo de arestas.

As modificações essenciais para isto são:

- (i) criar um vetor de arestas no passo 4, que indica quais arestas devem ser acrescentadas a  $G$  de maneira a transformá-lo em um grafo de comparabilidade.
- (ii) parar somente quando não existirem mais arestas não orientadas.

O algoritmo com estas modificações requer espaço adicional limitado por  $O(|A|)$ ; a complexidade em tempo, uma vez que podem ser acrescentadas  $|V|^2 - |A|$  arestas, é  $O(|V|^2 + \delta \cdot |A|)$  no pior caso.

Deve ainda ser observado que a transformação do grafo  $G$  em grafo de comparabilidade, por informação obtida do passo 4 do ALGORITMO PNUELI, pode não se efetuar de forma mínima;

isto ocorre devido a aleatoriedade da escolha do passo 2 e da ordem de exame das arestas implicantes no passo 3. Assim é possível que as escolhas e implicações sejam feitas de tal forma, que indicam um número superior ao mínimo necessário para a transformação do grafo  $G$  em grafo de comparabilidade.

#### Exemplo 4.4

Seja o grafo  $G = (V,A)$  da figura (IV.4.a). A figura (IV.4.b) mostra um digrafo obtido pela aplicação do algoritmo, e com a ordem de implicação de arestas indicada por uma árvore; com a aresta (1,6) o grafo  $G$  seria de comparabilidade.

A figura (IV.4.c), com diferente ordem de implicação, indica que com as arestas (2,5) e (8,5) o grafo seria de comparabilidade. ▲

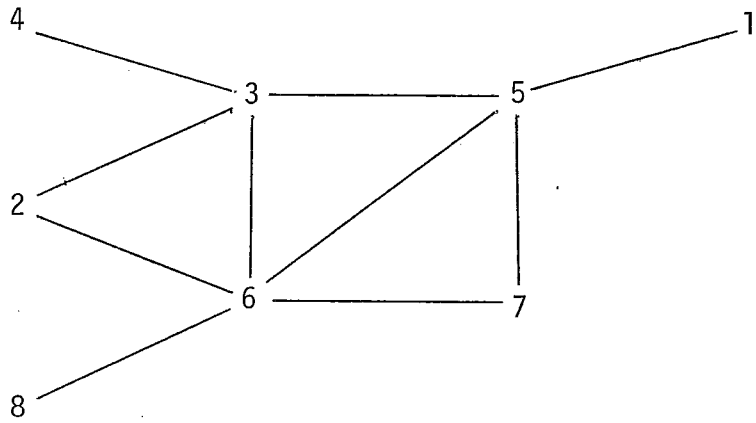
Seja  $T^*$  uma orientação de um grafo de comparabilidade, diferente das orientações geradas pelo algoritmo de Pnueli; então:

#### Teorema 4.6

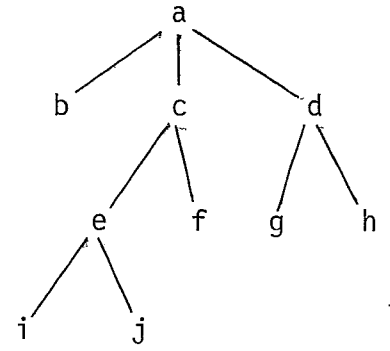
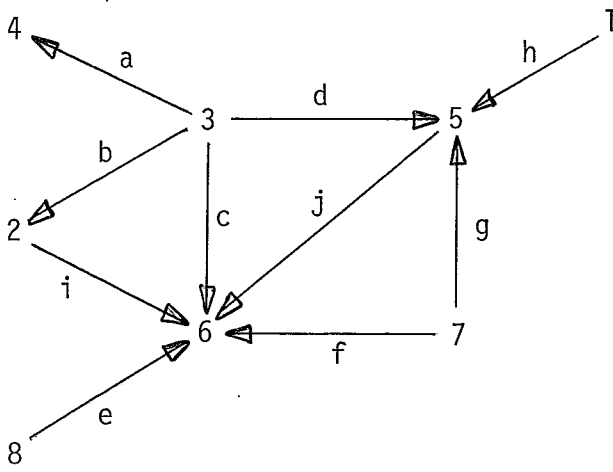
O poset obtido pela orientação  $T^*$  sobre um grafo de comparabilidade  $G = (V,A)$ , tem número de Dilworth menor ou igual ao dos posets obtidos por orientações do grafo  $G$  dadas pelo algoritmo de Pnueli.

#### Prova

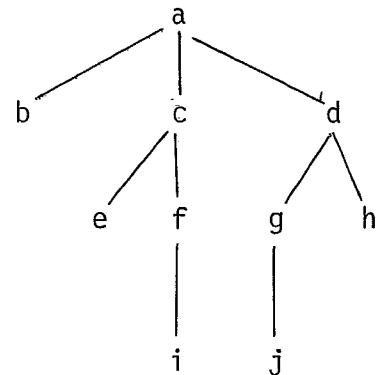
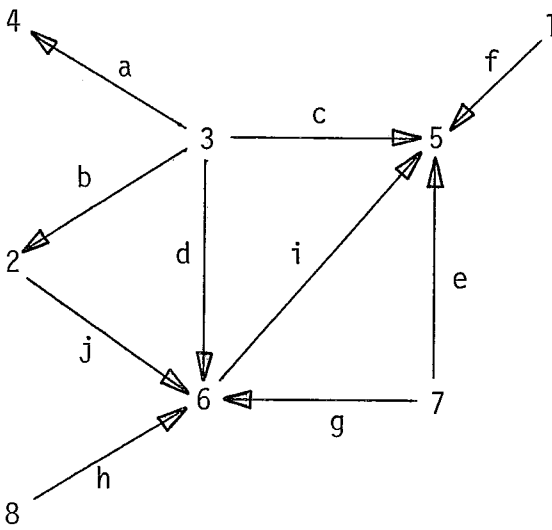
Os posets representados por digrafos obtidos com o algoritmo de Pnueli, tem o mesmo número de Dilworth; seja  $D$  es



(a)



(b)



(c)

Figura IV.4

te número, que é também a cardinalidade de um conjunto independente máximo de  $G$ .

Se o poset obtido com a orientação  $T^*$  tem número de Dilworth  $D'$ , tal que  $D' > D$ , então existe em  $G$  um conjunto independente máximo de cardinalidade  $D'$ , o que é absurdo. ■

Com respeito ao número de Dilworth dos posets obtidos de orientações sobre grafos transformados, uma questão interessante é: se existe mais de uma forma de acréscimo mínimo de arestas a um grafo para transformá-lo em um grafo de comparabilidade, o número de Dilworth dos posets obtidos dos grafos transformados independe de quais arestas são acrescentadas?

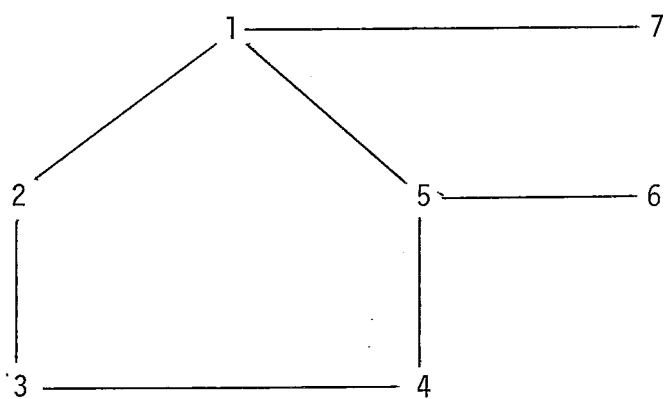
A resposta aqui pode ser dada com o auxílio da figura (IV.5). O grafo da figura (IV.5.a) não é de comparabilidade; com o acréscimo da aresta (1,3) o grafo é transformado em um grafo de comparabilidade, que ao ser orientado transitivamente, representa posets com número de Dilworth igual a 4. Um desses posets é o da figura (IV.5.b).

Com o acréscimo da aresta (2,4) o grafo resultante é subjacente a representação de posets com número de Dilworth igual a 3; um desses posets é o da figura (IV.5.c).

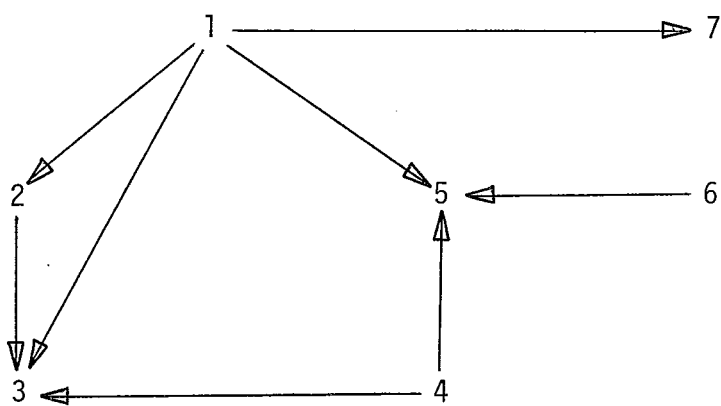
Finalmente é interessante examinar a possível equivalência entre os problemas de retirada mínima de arestas e acréscimo mínimo de arestas a um grafo, para transformá-lo em grafo de comparabilidade.

Que esses problemas não tem uma relação direta entre si, mas são aparentemente de mesma complexidade, pode ser visto por intermédio dos exemplos a seguir.

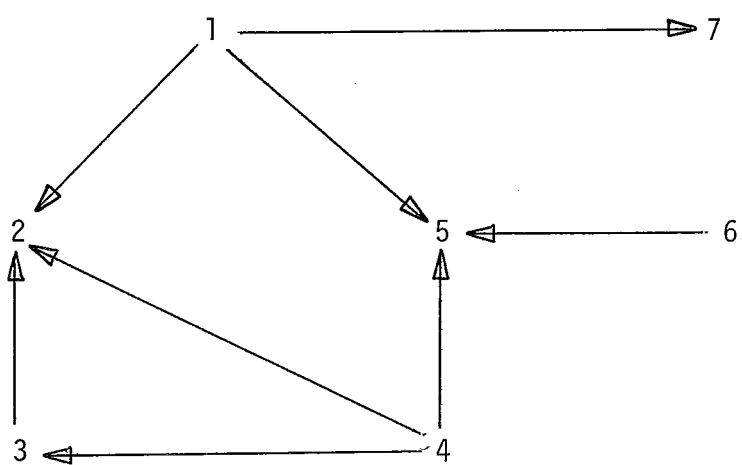




(a)



(b)



(c)

Figura IV.5

Exemplo 4.5

Seja o grafo  $G = (V,A)$  da figura (IV.6.a). A figura (IV.6.b) mostra um grafo  $G'$  obtido do grafo  $G$  por acréscimo mínimo das arestas  $(1,4)$  e  $(4,6)$ ;  $G'$  é de comparabilidade.

Por outro lado, a retirada da aresta  $(5,4)$  resulta no grafo da figura (IV.6.c), e é suficiente para se obter a condição de comparabilidade. Assim, neste exemplo, o grafo  $G$  pode ser transformado minimamente em um grafo de comparabilidade por retirada de uma aresta ou pelo acréscimo de duas. ▲

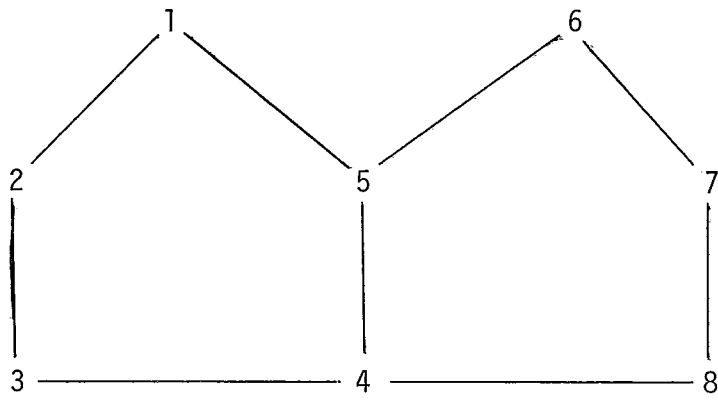
Exemplo 4.6

Seja o grafo  $G = (V,A)$  da figura (IV.7.a). A figura (IV.7.b) mostra um grafo  $G'$  obtido do grafo  $G$  por acréscimo da aresta  $(2,5)$ ;  $G'$  é de comparabilidade.

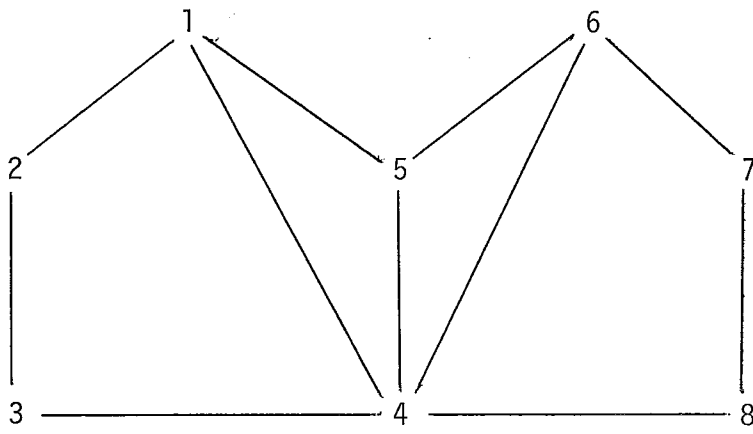
Por outro lado, a retirada das arestas  $(1,2)$  e  $(2,6)$  transformam minimamente o grafo  $G$  em um grafo de comparabilidade de  $G'$ , como mostrado na figura (IV.7.c). Neste exemplo, o grafo  $G$  pode ser transformado minimamente em um grafo de comparabilidade, por retirada de duas arestas ou pelo acréscimo de uma. ▲

Um grafo  $G = (V,A)$  é 1 - transformável, se:

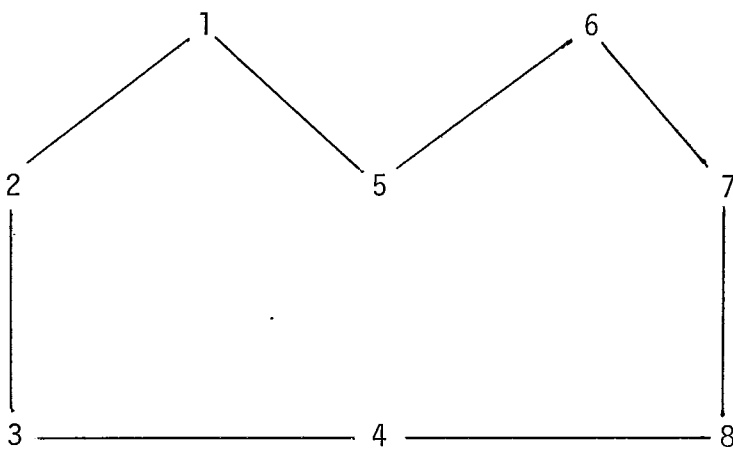
- (i) não é de comparabilidade
- (ii) pode ser transformado em um grafo de comparabilidade por acréscimo de uma aresta  $(a,c)$ , onde  $a,c \in V$
- (iii) existe uma orientação  $T^*$  que garante a existência de apenas um caminho direcionado entre  $a$  e  $c$ , indicado pelas arestas  $[a,b]$  e  $[b,c]$ ; desta forma é necessário o acréscimo de  $[a,c]$ .



(a)

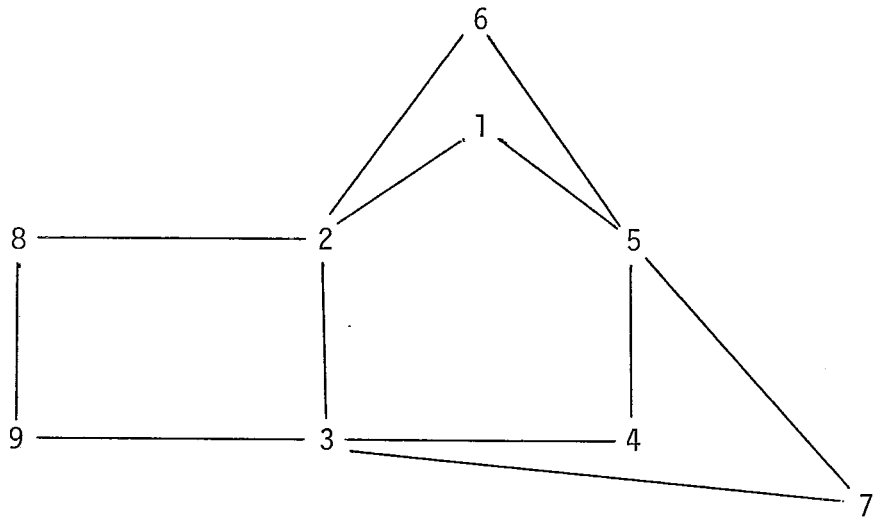


(b)

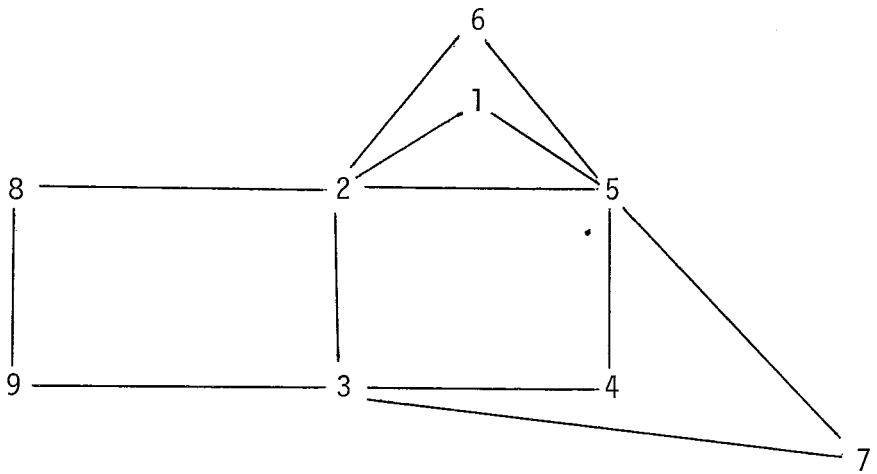


(c)

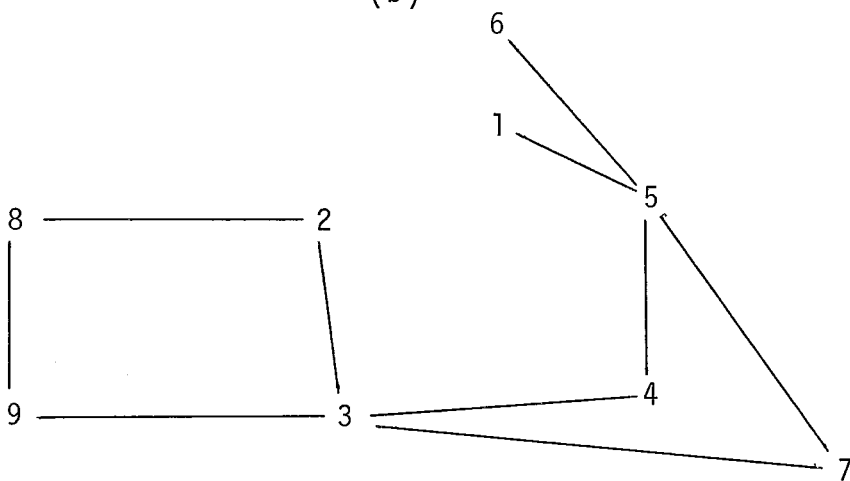
Figura IV.6



(a)



(b)



(c)

Figura IV.7

Então:

#### Teorema 4.7

Se um grafo  $G = (V,A)$  é 1 - transformável, a retirada de uma aresta o transforma em um grafo de comparabilidade.

#### Prova

Considere-se o digrafo obtido pela orientação  $T^*$ ; para ele é possível afirmar que:

- (a) para um caminho direcionado com extremidade em  $\underline{c}$ , que não passa por  $\underline{a}$  ou  $\underline{b}$ , a retirada de  $[\underline{b},\underline{c}]$  torna transitivo o digrafo.
- (b) para um caminho direcionado com extremidade em  $\underline{c}$ , que passa por  $\underline{b}$ , e diferente de  $[\underline{b},\underline{c}]$ : existe mais de um caminho direcionado entre  $\underline{a}$  e  $\underline{c}$ , o que contradiz a definição.
- (c) para um caminho direcionado com extremidade em  $\underline{c}$ , que passa por  $\underline{a}$  e não por  $\underline{b}$ : existe mais de um caminho direcionado entre  $\underline{a}$  e  $\underline{c}$ , o que contradiz a definição.
- (d) para um caminho direcionado com extremidade em  $\underline{b}$ , que não passa por  $\underline{a}$ , a retirada de  $[\underline{b},\underline{c}]$  torna transitivo o digrafo.
- (e) para um caminho direcionado com extremidade em  $\underline{a}$ , a retirada de  $[\underline{b},\underline{c}]$  torna transitivo o digrafo.
- (f) para um caminho direcionado com origem em  $\underline{c}$ , a retirada de  $[\underline{b},\underline{c}]$  torna transitivo o digrafo.

Desta forma a retirada da aresta  $(b,c)$  transforma  $G$  em um grafo de comparabilidade. ■

## CAPÍTULO V

### O PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DO KERNEL

#### 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é discutido o problema de determinação do Kernel de um digrafo. Após a apresentação do problema que é classificado como NP-completo, são feitas algumas considerações sobre a forma da definição, que não é a mesma na literatura sobre o assunto; além disso apresenta-se um caso em que o problema pode ser resolvido em tempo polinomial, e as diferenças que surgem quanto a cardinalidade do Kernel em função da forma da definição usada neste caso particular e em algumas variações dele.

Finalmente apresenta-se um novo problema, variação do problema do Kernel, que se mostra pertencente a classe dos problemas NP-completos.

#### 2. O PROBLEMA DO KERNEL

##### KERNEL

Dados: grafo direcionado  $D = (V, E)$

Questão: o grafo  $D$  tem um subconjunto  $K \subseteq V$ , tal que não existe aresta entre os vértices de  $K$ , e tal que  $\forall v \in V - K$  existe um vértice  $u \in K$  tal que  $[v, u] \in E$ ? ●

Este problema foi classificado como NP-completo em CHVATAL (6); é interessante observar que ele é relativamente pouco referenciado e até aonde foi possível determinar, não serviu como problema equivalente para a inclusão de outros problemas na classe dos NP-completo.

Também deve ser observado que nas referências ao problema, existe uma diferença na forma de apresentação; como se mostrará adiante para uma classe particular de grafos a forma da definição leva a conjuntos Kernel de cardinalidade diferente, embora aparentemente isto não altere a classificação do problema geral como NP-completo.

Em CHVATAL (6), DEO (8) e KARP (28), a formulação do problema pede pelo menos uma aresta com origem no conjunto  $V - K$  e extremidade no conjunto  $K$ ,  $\forall v \in V - K$ ; ao contrário, em GAREY (12) pede-se pelo menos uma aresta com origem no conjunto  $K$  e extremidade em  $V - K$ ,  $\forall v \in V - K$ .

Também é interessante observar que em CHVATAL (6), GAREY (12) e KARP (28) não se faz nenhum comentário sobre casos particulares que ainda possam ser classificados como NP-completos ou que admitam solução polinomial em tempo; porém em DEO (8), o problema do Kernel é apresentado como de complexidade polinomial em tempo para a classe de digrafos acíclicos.

Nas várias listas de problemas NP-completos encontradas na literatura, vê-se com frequência a apresentação de casos particulares que podem ser resolvidos por algoritmos de comportamento polinomial em tempo, ou que tem solução imediata por propriedades inerentes a esses casos; desta forma a omissão do resultado mencionado por DEO (8) na literatura posterior, é aparentemente mais uma falha no levantamento bibliográfico.

fico do que uma retirada deliberada de um resultado supostamente simples.

O resultado apresentado a seguir, é verificado em DEO (8) por intermédio de um algoritmo que constrói o conjunto que é solução única para o problema do Kernel formulado para digrafos acíclicos.

### Teorema 5.1 - DEO (8)

Todo digrafo acíclico admite Kernel e ele é único.

#### Prova

Seja  $K$  um Kernel; suponha-se que  $K$  não é único. Então:

- a. existe um  $K'$  composto de alguns vértices de  $K$  e outros de  $V - K$ .

Neste caso pelo menos um vértice  $v \notin K$  é trocado com um vértice de  $K$ . Como  $v \in V - K$ , existe pelo menos uma aresta com origem em  $v$  e extremidade em um vértice  $u \in K$ ; evidentemente a troca deve ser feita com este vértice  $u$ , caso contrário o conjunto  $K'$  teria pelo menos um par de vértices entre os quais existe aresta. Porém se o vértice  $u$  é retirado do Kernel, ele é um vértice que não tem arestas para os vértices de  $K - \{u\}$ , caso contrário  $K$  não seria Kernel; desta forma  $u$  ou não pode ser retirado de  $K$  ou é origem de aresta com extremidade em  $v$ , isto é: existe  $[u, v]$ . Como existe  $[v, u]$  o digrafo não é acíclico e isto contradiz a hipótese.

- b. existe um  $K'$  tal que  $K \cap K' \equiv \emptyset$ .

É claro que os vértices com  $\text{out}(v) = 0$  devem fazer parte de um Kernel, caso contrário haveria vértices em  $V - K$  que não



são origem de arestas com extremidade em  $K$ . Se existe um  $K'$  tal que  $K \cap K' \equiv \emptyset$ ,  $K$  e  $K'$  não contêm todos os vértices  $u$  tais que  $\text{out}(u) = 0$ , e neste caso não são Kernel; por outro lado se nem  $K$  nem  $K'$  tem vértice  $v$ , com  $\text{out}(v) = 0$  ou não são Kernel ou o grafo não é acíclico. ■

### Exemplo 5.1

Para o digrafo acíclico da figura (V.1), o Kernel é dado por  $K \equiv \{1,6,7,9\}$ . ▲

O algoritmo apresentado em DEO (8) obtém o Kernel de um digrafo acíclico em  $O(|V|+|E|)$  de complexidade em tempo e então pode-se dizer:

### Teorema 5.2

O problema de determinação do Kernel é de complexidade de polinomial para digrafos acíclicos.

### Prova

O algoritmo de DEO (8) cuja correção é feita pelo teorema 5.1. ■

Observe-se agora que se é considerada a definição do Kernel como sendo o conjunto de vértices tal que  $\forall v \in V - K$  existe aresta com origem em  $v$  e extremidade em  $K$ , além de todos os vértices  $v \in V$  tais que  $\text{out}(v) = 0$  tomarem parte em  $K$ , também aqueles vértices  $v \in V$  tais que  $\text{in}(v) = 0$  podem fazer parte de  $K$ ; isto acontece sempre que  $u \notin K$  e  $\exists [v,u]$  com  $v$  ten

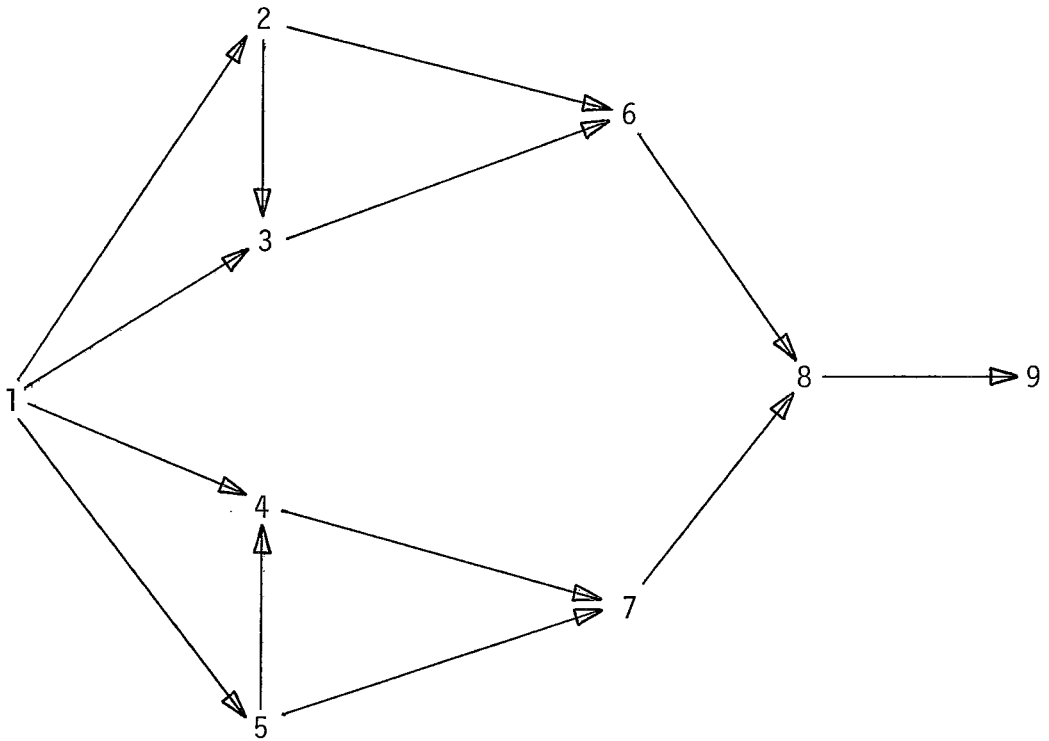


Figura V.1

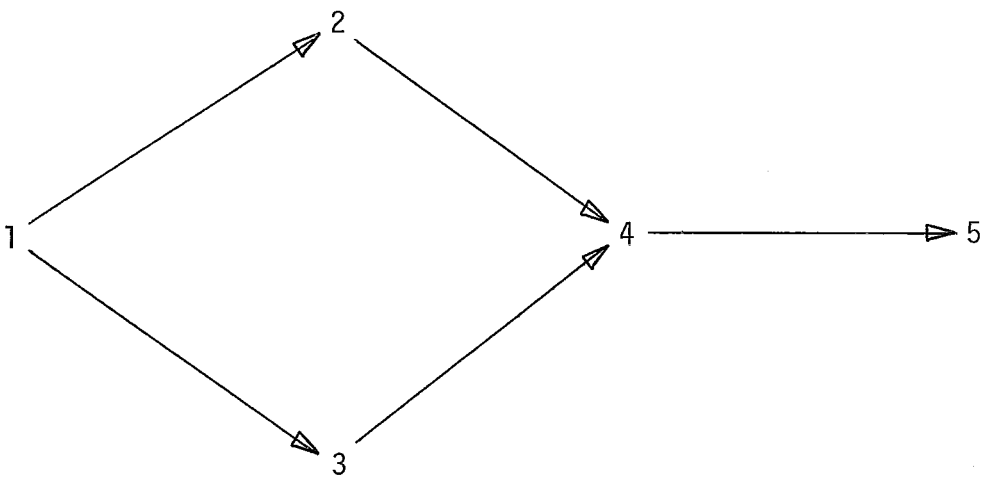


Figura V.2

do  $\text{in}(v) = 0$ , para digrafos acíclicos.

Agora, ainda para digrafos acíclicos, se a definição do Kernel pede pelo menos uma aresta  $[u,v] \forall v \in V - K$ , além de todos os vértices  $v \in V$  tais que  $\text{in}(v) = 0$  tomarem parte em  $K$ , também aqueles vértices  $v \in V$  tais que  $\text{out}(v) = 0$  podem fazer parte de  $K$ ; isto acontece sempre que  $u \notin K$  e  $\exists [u,v]$  com  $v$  tendo  $\text{out}(v) = 0$ .

A ilustração dessas observações são as figuras (V.1) e (V.2). O Kernel para o digrafo acíclico da figura (V.1) é dado pelo conjunto  $\{1,6,7,9\}$  não importando qual a definição usada; porém para o digrafo acíclico da figura (V.2) o Kernel em um caso é dado pelo conjunto  $\{1,4\}$  e no outro pelo conjunto  $\{2,3,5\}$ , isto é: não existe um Kernel para o grafo, mas um Kernel para cada forma da definição.

Se o digrafo é acíclico e transitivo o problema do Kernel tem uma característica adicional:

### Teorema 5.3

O Kernel de um digrafo acíclico transitivo é dado por  $S \subset V$ , tal que  $\text{out}(s) = 0 \forall s \in S$ .

### Prova

Como o digrafo é acíclico e transitivo, existe aresta com extremidade naqueles vértices com  $\text{out}(s) = 0$ , e origem em cada vértice pertencente a um caminho direcionado do qual um vértice  $s$  é terminal. Assim, como entre os vértices de  $S$  não existe aresta, a definição do Kernel é satisfeita com os vértices deste conjunto. ■

Para a outra forma de definição mencionada, o resultado é expresso em relação aos vértices de um conjunto  $F \subset V$ , tal que  $\text{in}(f) = 0 \quad \forall f \in F$ .

### 3. O PROBLEMA DO PSEUDO-KERNEL

Uma variação do problema do Kernel é a que relaxa a condição da aresta direcionada do conjunto  $V - K$  para o conjunto  $K$  e impõe restrição de minimalidade, assim:

#### Questão 5.1

Dado um digrafo  $D = (V, E)$ , se quer o menor número de vértices  $P \subset V$  tal que não existe aresta entre os vértices de  $P$  e  $\forall v \in V - P$  existe pelo menos uma aresta entre  $v$  e um vértice  $p \in P$ . ●

Encontra-se em GAREY (12), que o seguinte problema pertence a classe dos NP-completos:

#### CONJUNTO DOMINANTE-INDEPENDENTE/DI

Dados: grafo  $G = (V, A)$  e um inteiro positivo  $k \leq |V|$ .

Questão: o grafo  $G$  tem um conjunto de vértices  $V' \subseteq V$  com  $|V'| \leq k$  tal que não existe aresta entre os vértices de  $V'$  e  $\forall v \in V - V'$ , existe um  $u \in V'$  tal que  $(u, v) \in A$ ? ●

A questão 5.1 colocada na forma de um problema de decisão, aparece como:

PSEUDO-KERNEL/PK

Dados: grafo direcionado  $D = (V, E)$  e inteiro positivo  $k \leq |V|$ .

Questão: o grafo  $D$  tem um conjunto de vértices  $P \subseteq V$  com  $|P| \leq k$  tal que não existe aresta entre os vértices de  $P$ , e  $\forall v \in V - P$  existe pelo menos uma aresta  $[v, u]$  ou  $[u, v]$  para um vértice  $u \in P$ ? ●

Teorema 5.4

O problema PK é NP-completo.

Prova

a.  $PK \in NP$

Um algoritmo não determinístico escolhe um conjunto  $P \subseteq V$  com  $|P| \leq k$  e em tempo polinomial verifica que não existe aresta entre os vértices de  $P$ , e para todo vértice que não pertence a  $P$  existe pelo menos um vértice de  $P$  tal que existe uma aresta entre esses dois vértices.

b.  $PK \propto DI$

Considere-se um grafo  $D = (V, E)$  e o seu subjacente  $G = (V, A)$ . Um conjunto de vértices  $P$  que satisfaz a questão do problema PK é um conjunto de vértices do grafo  $G$  tais que: não existe aresta entre eles, mas existe pelo menos uma aresta de  $A$  entre um vértice de  $P$  e um vértice de  $V - P$ ; isto significa dizer que  $P$  é um conjunto dominante e independente com cardinalidade mínima em  $G$ .

c.  $DI \propto PK$

Considere-se um grafo  $G = (V, A)$ ; ele é subjacente de um conjunto de grafos  $D = (V, E)$ . Um conjunto de vértices  $P$  que é

dominante e independente com mínima cardinalidade em  $G$ ,  $\bar{e}$  tal que:  $\bar{e}$  é um conjunto de vértices entre os quais não existe aresta, mas existe pelo menos uma aresta direcionada entre um vértice de  $P$  e um vértice de  $V - P$ , uma vez que  $P$  é um conjunto dominante em  $G$ ; isto significa dizer que  $P$  é um conjunto que satisfaz a questão do problema PK.

A transformação usada é a de obtenção de um grafo  $G$  subjacente de um grafo  $D$ , que é evidentemente efetuada por um algoritmo de complexidade polinomial em tempo, logo o teorema está correto. ■

#### 4. UM CASO PARTICULAR DE PROBLEMA PK

Seja o problema de determinação de um conjunto  $DI$  sobre um grafo  $\bar{B} = (V, A)$  que é complementar de um grafo bipartite  $B = (X, Y, H)$ .

##### Teorema 5.5

Para todo grafo complementar de um grafo bipartite, um conjunto  $DI$  é tal que  $|DI| = 2$

##### Prova

Como o grafo  $\bar{e}$  complementar de um grafo bipartite, ele pode ser visto como dois subgrafos completos - um sobre o conjunto  $X$  e outro sobre o conjunto  $Y$  - entre os quais existem arestas de ligação. Para o grafo complementar, um vértice de  $X$  é dominante para este subconjunto e um vértice de  $Y$  é dominante para  $Y$ ; como o grafo bipartite é conexo, não existe no com

plementar nenhum vértice de  $X$  ou  $Y$  com arestas para todos os vértices de  $Y$  ou  $X$  respectivamente, e assim um conjunto dominante mínimo no complementar tem cardinalidade 2. Pelo mesmo motivo, um conjunto independente máximo no complementar tem cardinalidade 2; desta forma a determinação de um conjunto independente máximo no complementar é suficiente para a obtenção de um conjunto dominante e independente, que tem cardinalidade 2. ■

É claro que um algoritmo para esta determinação tem complexidade polinomial em tempo.

### Corolário

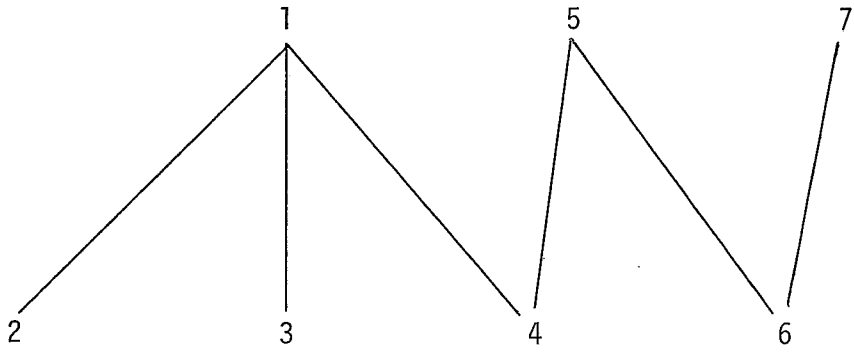
Se o grafo subjacente de um digrafo  $D = (V, E)$  é complementar de um grafo bipartite, um conjunto de vértices que satisfaz o problema PK tem cardinalidade 2.

### Prova

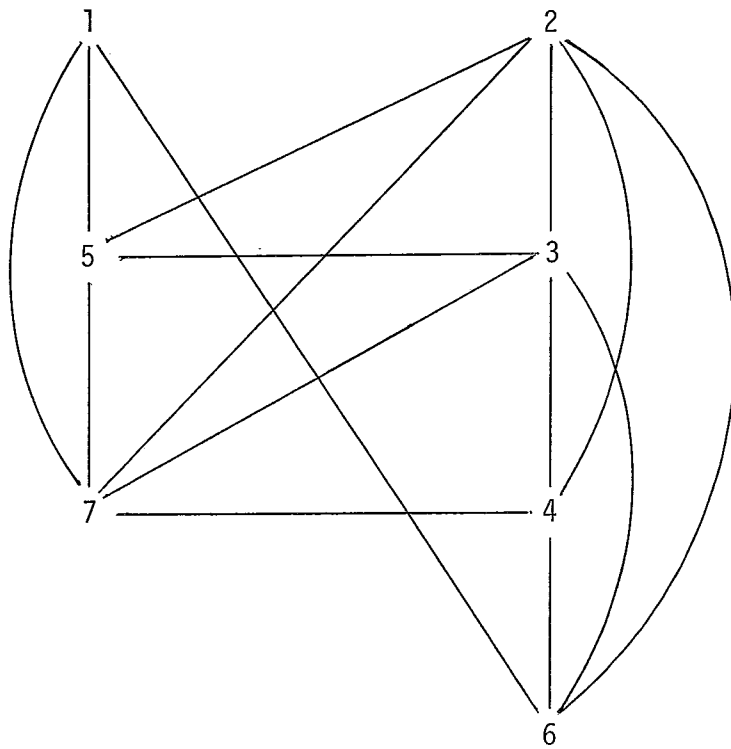
Para a prova do teorema 5.4, estabeleceu-se a equivalência entre o problema DI e o problema PK, logo do teorema 5.5 vem diretamente que se  $P$  é um conjunto que satisfaz o problema PK, então  $|P| = |DI| = 2$ . ■

### Exemplo 5.2

A figura (V.3.a) mostra um grafo bipartite cujo complementar é o grafo da figura (V.3.b). Um conjunto dominante independente no complementar é sempre formado por um vértice de cada subconjunto do grafo bipartite; assim  $\{1,2\}, \{1,3\}$ ,



(a)



(b)

Figura V.3



$\{1,4\}, \{5,4\}, \{5,6\}$  e  $\{7,6\}$  são todos conjuntos dominante e independente e assim são conjuntos que satisfazem o problema PK formulado para qualquer digrafo que se obtenha por orientação das arestas do complementar. ▲

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E EXTENSÕES

#### 1. CONCLUSÕES

Neste trabalho foram analisados diversos problemas algorítmicos, na sua quase totalidade referentes a grafos relacionados a conjuntos parcialmente ordenados.

Nesses problemas, o interesse maior foi o de discutir características que permitissem sua classificação como problemas que podem ou não ser resolvidos por algoritmos de complexidade polinomial, quando se inclui na formulação uma condição de minimização ou maximização.

O sumário dos principais resultados é o que se segue.

No capítulo II se mostra que a caracterização única de posets, pode ser feita por algoritmo de complexidade polinomial que obtem cadeias de arestas da representação reduzida do poset; este algoritmo tem melhor desempenho do que o que pode ser obtido por indicação de BOGART (3).

No capítulo III se mostra que:

a) para um grafo  $G = (V, A)$  a obtenção de uma árvore geradora que induz um poset com o menor número de Dilworth  $D$ , é um problema NP-completo quando se requer que  $D = 1$ .

b) para um grafo  $G = (V, A)$  a obtenção de uma árvore geradora que representa um poset com número de Dilworth igual a  $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$  é um problema equivalente ao problema de matching máximo em grafos gerais.

No capítulo IV se mostra que:

- a) se um grafo  $G = (V, A)$  não é de comparabilidade a obtenção de uma orientação acíclica tal que o poset induzido tem número de Dilworth  $D = 1$  é um problema NP-completo; o mesmo acontece quando se requer a maximização do número de Dilworth.
- b) para um grafo  $G = (V, A)$ , a sua transformação em um grafo biorientável transitivamente e bipartite, por acréscimo mínimo de arestas, é um problema NP-completo.
- c) o algoritmo de caracterização de grafos de comparabilidade apresentado em PNUELI (33), pode ser modificado para indicar um conjunto de arestas que acrescentadas ao grafo em exame o transformam em um grafo de comparabilidade; este conjunto de arestas é obtido em tempo polinomial mas não se pode fazer, em geral, qualquer afirmação quanto a sua minimalidade.

No capítulo V se mostra que o problema de se determinar o menor conjunto  $P$  de vértices de um grafo  $D = (V, E)$ , de forma que para todos os vértices  $v \in V - P$ , existe pelo menos uma aresta entre cada um deles e um vértice de  $P$ , é um problema NP-completo; o conjunto  $P$  tem cardinalidade igual a 2 se o grafo subjacente a  $D$  é complementar de um grafo bipartite.

## 2. EXTENSÕES

Alguns problemas não examinados ou não resolvidos completamente neste trabalho, mas diretamente relacionados aos problemas aqui tratados e que se constituem em tópicos interessantes de pesquisa são:

- a) para um grafo  $G = (V, A)$ , encontrar uma árvore geradora que com uma orientação acíclica e transitiva, representa um poset

com o maior número de Dilworth possível.

Este problema tem solução trivial se  $G$  tem vértice  $v$  de grau  $|V| - 1$  ou  $|V| - 2$ .

b) determinar a complexidade do problema de acréscimo mínimo de arestas a um grafo  $G = (V, A)$ , para transformá-lo em um grafo de comparabilidade.

c) determinar a complexidade do problema de acréscimo mínimo de arestas a um grafo  $G = (V, A)$ , para transformá-lo em um grafo de comparabilidade não alterando a cardinalidade de seu conjunto independente máximo ou minimizando esta cardinalidade.

d) caracterizar classes de grafos para os quais é possível estabelecer relações entre o número de arestas retiradas e acrescentadas minimamente para transformação em grafos de comparabilidade.

e) caracterizar classes de grafos para as quais o problema PSEUDO-KERNEL permanece um problema NP-completo.

REFERÊNCIAS

- (1) AHO, ALFRED V., HOPCROFT, JOHN E. e ULLMAN, JEFFREY D., "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- (2) BERGE, C., "Graphs and Hypergraphs", North Holland, Amsterdam, 1973.
- (3) BOGART, KENNETH P., "Decomposing Partial Orderings Into Chains", Journal of Combinatorial Theory, nº 9, pp. 97-99, 1970.
- (4) BONDY, J.A. e MURTY, U.S.R., "Graph Theory with Applications", Elsevier North Holland Inc., 1976.
- (5) BOOTH, K.S. e COLBOURN, C.J., "Problems Polynomially Equivalent to Graph Isomorphism", Technical Report CS-77-04, Dept. of Computer Science, University of Waterloo, 1979.
- (6) CHVATAL, V., "On the Computational Complexity of Finding a Kernel", Technical Report CRM-300, Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montreal, 1973.
- (7) COOK, STEPHEN A., "The Complexity of Theorem-Proving Procedures", Proceedings of 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, pp. 151-158, 1971.

- (8) DEO, N., "Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science", Prentice-Hall Inc., 1974.
- (9) DILWORTH, R.P., "A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets", Annals of Mathematics, vol. 2, nº 51, pp. 161-166, 1950.
- (10) EVEN, S., "Algorithmic Combinatorics", MacMillan, 1973.
- (11) FORD, L.R. e FULKERSON, D.R., "Flows in Networks", Princeton University Press, 1962.
- (12) GAREY, MICHAEL R. e JOHNSON, DAVID S., "Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness", W.H. Freeman and Company, 1979.
- (13) GILMORE, P.C. e HOFFMAN, A.J., "A Characterization of Comparability Graphs and of Interval Graphs", Canadian Journal of Mathematics, vol. 16, pp. 539-548, 1964.
- (14) GOLUMBIC, MARTIN C., "The Complexity of Comparability Graph Recognition and Coloring", Computing, vol. 18, nº 3, pp. 199-208, 1977.
- (15) , "Comparability Graphs and a New Matroid", Journal of Combinatorial Theory, Serie B, vol.22, pp. 68-90, 1977.

- (16) , "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs", Academic Press, 1980.
- (17) HADLOCK, F., "Finding a Maximum Cut of a Planar Graph in Polynomial Time", SIAM Journal on Computing, vol. 4, n° 3, pp. 221-225, 1975.
- (18) HARARY, F., "Graph Theory", Addison-Wesley, 1969.
- (19) ITAI, A., PAPADIMITRIOU, C.H. e SZWARCFITER, J.L., "Hamiltonian Paths in Grid Graphs", SIAM Journal on Computing, vol. 11, n° 4, pp. 676-686, 1982.
- (20) JOHNSON, DAVID, S., "The NP-Completeness Column: On Ongoing Guide", Journal of Algorithms, vol. 2, n° 4, pp. 393-405, 1981.
- (21) , Journal of Algorithms, vol. 3, n° 1, pp. 89-99, 1982.
- (22) , Journal of Algorithms, vol. 3, n° 2, pp. 182-195, 1982.
- (23) , Journal of Algorithms, vol. 3, n° 3, pp. 288-300, 1982.
- (24) , Journal of Algorithms, vol. 3, n° 4, pp. 381-395, 1982.

- (25) , Journal of Algorithms, vol. 4, n° 1, pp. 87-100, 1983.
- (26) , Journal of Algorithms, vol. 4, n° 2, pp. 189-203, 1983.
- (27) KARP, RICHARD M., "Reducibility Among Combinatorial Problems", Complexity of Computer Computations, R.E. Miller e J.W. Thatcher (editores), Plenum Press, pp.85-103, 1972.
- (28) , "On the Computational Complexity of Combinatorial Problems", Networks, n° 5, pp. 45-68, 1975.
- (29) LIU, C.L., "Introduction to Combinatorial Mathematics", MacGraw-Hill, 1968.
- (30) MIRSKY, L. e PERFECT, H., "Systems of Representatives", Journal of Mathematical Analysis and Applications, n° 15, pp. 520-568, 1966.
- (31) NIJENHUIS, A. e WILF, H.S., "Combinatorial Algorithms", Academic Press, 1975.
- (32) PAPADIMITRIOU, C.H. e STEIGLITZ, K., "Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity", Prentice-Hall Inc., 1982.
- (33) PNUELI, A., LEMPEL, A. e EVEN, S., "Transitive Orientation of Graphs and Identification of Permutation Graphs",



Canadian Journal of Mathematics, vol. 23, nº 1, pp.160-175, 1971.

- (34) SZWARCFITER, J.L., "Algoritmos e Grafos: Uma Introdução", Terceira Escola de Computação, Departamento de Informática, PUC, 1982.
- (35) TARJAN, R.E., "Complexity of Combinatorial Algorithms", Technical Report Computer Science Department, Stanford University, 1978.
- (36) WIGDERSON, A., "The Complexity of the Hamiltonian Circuit Problem for Maximal Planar Graphs", Technical Report nº 298, Electrical Engineering and Computer Science Department, Princeton University, 1982.
- (37) YANNAKAKIS, M., "The Effect of a Connectivity Requirement on the Complexity of Maximum Subgraph Problems", Thecnical Report, nº 242, Department of Electrical Engineering and Computer Science, Princeton University, 1978.
- (38) , "Node and Edge - Deletion NP-Complete Problems", Proceedings of 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, pp. 253-264, 1978.