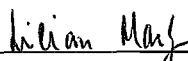


MAXIMALIDADE EM GRAFOS DE FLUXO REDUTÍVEIS

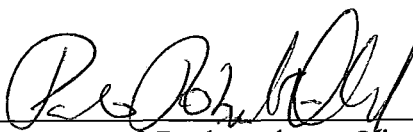
Oswaldo Vernet de Souza Pires

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



Prof. Lilian Markenzon, D.Sc.



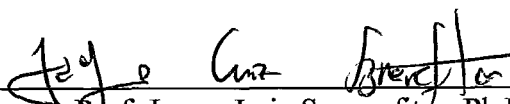
Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Ing.



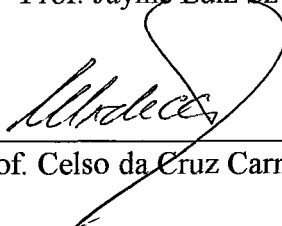
Prof. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.



Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto, D.Ing.



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



Prof. Celso da Cruz Carneiro Ribeiro, D.Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1997

PIRES, OSWALDO VERNET DE SOUZA

Maximalidade em Grafos de Fluxo Redutíveis

[Rio de Janeiro] 1997

VIII, 155 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas, 1997)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Redutibilidade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Mais uma vez, a minha orientadora Lilian Markenzon, pelo crescimento profissional e humano que alcancei, com sua ajuda, nestes oito anos de trabalho contínuo.

A querida amiga Rosa Nader, que, por tantas vezes compartilhou comigo a *angústia dos doutorandos*.

A Prof. Nair Abreu, com quem tive o privilégio de realizar um dos exames de qualificação, trabalho este que contribuiu inestimavelmente para a melhoria de meus conhecimentos.

Mais uma vez, e sempre, a todos os que, em qualquer plano ou dimensão consciencial, têm buscado agilizar o rumo de minha evolução.

Também àqueles que, com tanta insistência, têm procurado dificultar meu caminho. Sem eles, a vida seria confortável demais.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MAXIMALIDADE EM GRAFOS DE FLUXO REDUTÍVEIS

Oswaldo Vernet de Souza Pires

Abril/1997

Orientador: Lilian Markenzon

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho investiga o conceito de maximalidade aplicado a grafos de fluxo redutíveis, definindo e caracterizando os grafos de fluxo redutíveis-maximais. São estudadas diversas propriedades desta família, para a qual obtivemos duas caracterizações distintas: uma delas ligada à redutibilidade e a outra expressa em termos de um produto que definimos entre grafos de fluxo. É elaborado um algoritmo linear para reconhecimento, baseado na segunda caracterização e em propriedades relativas a caminhos hamiltonianos direcionados em grafos de fluxo redutíveis. São resolvidos, em tempo linear, dois problemas para a família: isomorfismo e obtenção de um conjunto de arestas de realimentação com cardinalidade mínima.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

MAXIMALITY IN REDUCIBLE FLOWGRAPHS

Oswaldo Vernet de Souza Pires

April/1997

Advisor: Lilian Markenzon

Department: Computing and Systems Engineering

In this work, maximal reducible flowgraphs are defined and characterized. Several properties are studied for this family. In particular, two distinct characterizations are obtained: one of them is strongly related to reducibility and the other is based on a product that we have defined between flowgraphs. A linear-time recognition algorithm is developed, based on the second characterization and on properties of directed hamiltonian paths in reducible flowgraphs. Two problems are solved for maximal reducible flowgraphs: isomorphism and finding a feedback arc set with minimum cardinality, both in linear time.

Índice

Capítulo 1 - Introdução, 1

- 1.1 Objetivos, 1
- 1.2 Bibliografia sobre Grafos de Fluxo Redutíveis, 3
- 1.3 Estrutura da Tese, 4
- 1.4 Definições Básicas, 6

Capítulo 2 - Uma Revisão de Redutibilidade, 16

- 2.1 Imagem de um Digrafo por uma Função, 16
- 2.2 Grafo de Fluxo Quociente, 20
- 2.3 Intervalos em Grafos de Fluxo, 22
- 2.4 Grafos de Fluxo Redutíveis, 23
- 2.5 Busca em Profundidade, 24
- 2.6 A Relação de Dominação em Grafos de Fluxo, 27
- 2.7 Busca em Profundidade e Arestas Retrógradadas, 31
- 2.8 Caracterizações Equivalentes para Redutibilidade, 33
- 2.9 Núcleos e Regiões, 36
- 2.10 Contrações, 40
- 2.11 Expansões de Vértices em Grafos de Fluxo, 42
- 2.12 Pólos em Grafos de Fluxo Redutíveis, 45
- 2.13 Conclusões, 46

Capítulo 3 - Manutenção Dinâmica da Redutibilidade, 47

- 3.1 Introdução, 47
- 3.2 Um Histórico do Reconhecimento de Grafos de Fluxo Redutíveis, 49
- 3.3 DJ-Grafos e Fronteiras de Dominação, 51
- 3.4 Determinação da Fronteira de Dominação Estendida, 55
- 3.5 Manutenção Dinâmica da Relação de Dominação, 59
- 3.6 Manutenção Dinâmica da Redutibilidade, 66
- 3.7 Conclusões, 72

Capítulo 4 - Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 74

- 4.1 Saturação e Maximalidade, 74
- 4.2 Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 76
- 4.3 O Teorema de Caracterização, 78
- 4.4 O Grafo de Fluxo $\Phi(n)$, 85
- 4.5 Aplicação do Teorema de Caracterização, 90
- 4.6 Algumas Propriedades dos Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 92
- 4.7 Conclusões, 99

Capítulo 5 - Morfologia dos Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 100

- 5.1 A Estrutura dos Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 100
- 5.2 O Teorema da Decomposição, 106
- 5.3 Árvore Característica de um Grafo de Fluxo Redutível-Maximal, 112
- 5.4 Limites para o Número de Arestas de um Grafo de Fluxo Redutível-Maximal, 116
- 5.5 A Estrutura do Grafo Subjacente, 123
- 5.6 Conclusões, 126

**Capítulo 6 - Algoritmo de Reconhecimento e Problemas Resolvidos
para Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 128**

- 6.1 Resultados Preliminares, 128
- 6.2 Reconhecimento de Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 133
- 6.3 Isomorfismo entre Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais, 140
- 6.4 Obtenção de um Conjunto de Arestas de Realimentação com
Cardinalidade Mínima para um Grafo de Fluxo Redutível-Maximal, 142
- 6.5 Conclusões, 145

Capítulo 7 - Conclusões, 146

Referências Bibliográficas, 150

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

Um *grafo de fluxo* é um grafo direcionado (digrafo) no qual se destaca um vértice especial, a partir do qual os demais podem ser alcançados. Grafos de fluxo são extensamente utilizados em algoritmos para geração e otimização de código em compiladores para linguagens de programação. Nesse contexto, o fluxo de um programa de computador é modelado por um grafo em que os vértices representam computações básicas e as arestas representam transferências de controle. Informações locais e globais acerca do comportamento do programa podem ser extraídas a partir do exame de seu grafo de fluxo, contribuindo para a melhoria substancial do código gerado (AHO *et al.*, 1986).

O conceito de redutibilidade em grafos de fluxo tem forte relação com a programação estruturada. O fluxo de um programa escrito em uma linguagem de alto nível sem a presença do comando de desvio incondicional (*goto*) é modelado por um grafo de fluxo redutível. Esta observação é relevante no contexto de otimização de código, pois diversos algoritmos têm desempenho superior quando operam sobre grafos de fluxo redutíveis. Este fato tem motivado extensa pesquisa sobre o assunto, conforme ilustraremos na próxima seção.

Consideremos a família de todos os digrafos que satisfazem uma propriedade P qualquer. Um digrafo desta família é *P-saturado* quando o acréscimo de qualquer aresta faz com que ele não mais satisfaça P . Um digrafo é dito *P-maximal* quando for um subdigrafo gerador P -maximal do digrafo completo; em outras palavras, quando não é subdigrafo gerador próprio de nenhum outro digrafo que satisfaça P . Um digrafo P -maximal é, evidentemente, P -saturado; a recíproca, no entanto, não se verifica em determinadas famílias, conforme mostraremos oportunamente.

A identificação, caracterização e reconhecimento de elementos saturados e maximais em uma família de digrafos encontra aplicações tanto do ponto de vista teórico quanto prático.

No aspecto teórico, o estudo morfológico dos membros P-maximais em uma família de digrafos pode levar à obtenção dos limites $NA_{\min}(n)$ e $NA_{\max}(n)$, que significam, respectivamente, o número mínimo e máximo de arestas que um digrafo P-maximal com n vértices pode possuir. Este fato está relacionado a um importante problema em teoria de grafos extremos (*extremal graph theory*), conforme (HARARY, 1969): dados um natural $n > 0$ e um conjunto C de digrafos proibidos, determinar $ex(n, C)$, o número máximo de arestas que um digrafo com n vértices que não contenha subdigrafos em C pode possuir. Se a propriedade P que define a família puder ser expressa em termos da não-ocorrência de subgrafos proibidos, $NA_{\max}(n)$ é exatamente o número $ex(n, C)$ procurado.

No aspecto prático, a P-saturação pode ser vista como caso limite em algoritmos para manutenção dinâmica da propriedade P quando o digrafo sofre inserções de arestas. Ao longo de inserções sucessivas de arestas, mantendo a propriedade P, se chegarmos a um digrafo P-saturado, saberemos que qualquer inserção futura será inviável, violando P.

Examinando o comportamento de um grafo de fluxo redutível quando se lhe acrescenta uma aresta, surgem duas alternativas: o grafo aumentado permanece redutível ou deixa de sê-lo. O estudo da manutenção dinâmica da redutibilidade, no caso extremo, leva-nos à seguinte questão:

Quais são os grafos de fluxo redutíveis que, ao sofrerem acréscimo de qualquer aresta, deixam de ser redutíveis ?

Pelo que foi exposto, a resposta traduz-se no estudo da saturação e maximalidade para a família dos grafos de fluxo redutíveis, envolvendo a caracterização, morfologia e reconhecimento dos grafos de fluxo redutíveis-saturados e redutíveis-maximais. Este é o objetivo do presente trabalho.

1.2 Bibliografia sobre Grafos de Fluxo Redutíveis

A formulação original do conceito de redutibilidade em grafos de fluxo aparece em (ALLEN, 1970) e (COCKE, 1970). A caracterização em função da não-ocorrência de um subgrafo proibido é devida a HECHT e ULLMAN (1972), posteriormente corrigida em (ADAMS *et al.*, 1974). KASYANOV (1973), TARJAN (1974) e HECHT e ULLMAN (1974) apresentam caracterizações alternativas para grafos de fluxo redutíveis, em função de regiões e ciclos aliados ao conceito de dominação.

O reconhecimento da redutibilidade é subproblema freqüente na otimização de código em compiladores, conforme (AHO *et al.*, 1986). A necessidade de resolvê-lo eficientemente levou à pesquisa de diferentes algoritmos de reconhecimento. Dentre eles, citamos (HOPCROFT e ULLMAN, 1972), com complexidade $O(|E|\log|E|)$; (TARJAN, 1974), com complexidade $O(|E|\alpha(|E|, |V|))$ e (GABOW e TARJAN, 1983), com complexidade $O(|E|)$. (PIRES, 1990) é um texto em português em que os dois últimos algoritmos são estudados.

Diversos problemas foram solucionados para grafos de fluxo redutíveis. Em (KENNEDY, 1975), conjectura-se a existência, para todo grafo de fluxo redutível, de uma seqüência de vértices de comprimento $O(|V|\log|V|)$, denominada *node listing*, da qual todo caminho acíclico é subsequência. AHO e ULLMAN (1976), comprovam essa conjectura para grafos de fluxo redutíveis com $O(|V|)$ arestas, fornecendo o algoritmo para obter a seqüência. FONG e ULLMAN (1977) resolvem, com programação dinâmica, o cálculo da profundidade de um grafo de fluxo redutível, que vem a ser o número máximo de arestas de retorno em qualquer caminho acíclico. Tal problema é NP-completo para grafos de fluxo genéricos, o que também é provado em (FONG e ULLMAN, 1977). A obtenção de um conjunto de vértices de realimentação com cardinalidade mínima para grafos de fluxo redutíveis é tratada em (SHAMIR, 1979), através de um algoritmo linear. RAMACHANDRAN (1988) aborda o problema do conjunto de arestas de realimentação com peso mínimo para grafos de fluxo redutíveis, transformando-o em um problema de fluxo em redes. Ambos os problemas são NP-completos para digrafos genéricos, conforme (GAREY e JOHNSON, 1979).

MARKENZON e VERNET (1991a, 1991b) descrevem procedimentos para geração pseudo-aleatória de grafos de fluxo redutíveis. Tais procedimentos mostraram-se de grande utilidade na produção de massas de testes para algoritmos.

A família dos grafos de fluxo redutíveis admite extensões e especializações. Em (AHO e ULLMAN, 1976), é definida a sub-família dos grafos de fluxo em espiral. SZWARCFITER (1985) caracteriza os grafos de fluxo redutíveis a árvore. MARKENZON (1987) define os grafos cebola. Observando que o algoritmo de SHAMIR (1979) para obter um conjunto de vértices de realimentação com cardinalidade mínima produz resultados corretos mesmo para grafos de fluxo não-redutíveis, MARKENZON (1987) caracteriza a família dos grafos de fluxo quase-redutíveis, que são os corretamente processados pelo algoritmo.

As pesquisas em compilação incremental têm motivado o desenvolvimento de algoritmos dinâmicos para grafos de fluxo. CARROL e RYDER (1988) desenvolvem um algoritmo baseado na manutenção incremental da árvore de dominadores de um grafo de fluxo redutível. Em (REPS e RAMALINGAN, 1994), encontramos outro algoritmo, mais eficiente, com o mesmo propósito. Recentemente, nos trabalhos de SREEDHAR e GAO (1994) e de SREEDHAR *et al.* (1994a, 1994b, 1995a, 1995b), com a introdução do conceito de grafo de dominação e junção (DJ-grafo), diversos procedimentos relacionados à otimização de código foram aperfeiçoados.

1.3 Estrutura da Tese

O presente trabalho consta de sete capítulos.

O restante deste capítulo introdutório constitui uma sinopse dos principais conceitos básicos utilizados na tese, envolvendo relações binárias, maximalidade, dígrafos, conjuntos parcialmente ordenados, grafos de fluxo e grafos não-orientados.

No Capítulo 2, revisamos diversos aspectos relacionados a grafos de fluxo e redutibilidade. Introduzimos a idéia de aplicar uma função a um digrafo de forma a evitar o aparecimento de arestas reflexivas no digrafo-imagem. A extensão deste formalismo a grafos de fluxo, juntamente com a definição de grafo de fluxo quociente, permite-nos redefinir algebricamente a redutibilidade. São ainda apresentados diversos resultados envolvendo buscas, dominação, DJ-grafo, arestas retrógradas, subgrafo progressivo, núcleos e regiões, constituindo sólida fundamentação teórica aos capítulos seguintes.

No Capítulo 3, estudamos o comportamento de um grafo de fluxo redutível que sofre inserção de arestas. Após a revisão da literatura, que abrange DJ-grafos e a manutenção dinâmica da relação de dominação, desenvolvemos um algoritmo dinâmico que mantém a redutibilidade quando um grafo de fluxo tem arestas sucessivamente acrescentadas.

A família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais é definida e caracterizada no Capítulo 4. A discussão se inicia com a distinção entre saturação e maximalidade em digrafos. Mostramos que, para grafos de fluxo redutíveis, ambas se equivalem. O Teorema de Caracterização fornece condições necessárias e suficientes para que um grafo de fluxo redutível seja redutível-maximal. Em seguida, construímos, para todo natural $n > 0$, o grafo de fluxo $\Phi(n)$, que provamos ser redutível-maximal. O capítulo é encerrado com a demonstração de diversas propriedades dos grafos de fluxo redutíveis-maximais, dentre elas a existência e unicidade do caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem.

A morfologia dos grafos de fluxo redutíveis-maximais é objeto de estudo do Capítulo 5. Mostramos que todo grafo de fluxo redutível-maximal provém de uma expansão generalizada da célula básica Φ , estudada no capítulo anterior. Este resultado leva-nos ao Teorema da Decomposição, segundo o qual todo grafo de fluxo redutível-maximal não-trivial é decomposto de forma única em outros dois. A associação entre grafos de fluxo redutíveis-maximais e árvores estritamente binárias decorre da unicidade da decomposição, permitindo-nos obter diversos resultados numéricos sobre a família. Por fim, estudamos a estrutura do grafo subjacente.

O Capítulo 6 ocupa-se da elaboração de um algoritmo eficiente para reconhecimento de grafos de fluxo redutíveis-maximais, desenvolvido com base no Teorema da

Decomposição e em resultados sobre ordenação topológica e caminhos hamiltonianos direcionados em grafos de fluxo redutíveis, oportunamente apresentados. O algoritmo de reconhecimento é utilizado na resolução de dois problemas para a família: isomorfismo e obtenção de um conjunto de arestas de realimentação com cardinalidade mínima.

Nas conclusões do Capítulo 7, comentamos e discutimos os principais resultados obtidos no trabalho.

1.4 Definições Básicas

Relações Binárias

Dado um conjunto $P \neq \emptyset$, uma *relação binária* α sobre P é qualquer subconjunto do produto cartesiano $P \times P$. Se um par ordenado $(x, y) \in \alpha$, indicamos este fato pela notação infixa $x \alpha y$. Eis algumas propriedades que podem ser satisfeitas por α :

- (P1) reflexiva: $\forall x \in P, \quad x \alpha x$
- (P2) irreflexiva: $\forall x \in P, \quad \sim(x \alpha x)$
- (P3) simétrica: $\forall x, y \in P, \quad x \alpha y \Rightarrow y \alpha x$
- (P4) anti-simétrica: $\forall x, y \in P, \quad x \alpha y \text{ e } y \alpha x \Rightarrow x = y$
- (P5) assimétrica: $\forall x, y \in P, \quad x \alpha y \Rightarrow \sim(y \alpha x)$
- (P6) transitiva: $\forall x, y, z \in P, \quad x \alpha y \text{ e } y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$
- (P7) linearidade: $\forall x, y \in P, \quad x \alpha y \text{ ou } y \alpha x$

Na tabela 1.1 seguinte, extraída de (VERNET *et al.*, 1995), as relações binárias recebem denominações especiais em função das propriedades por elas satisfeitas.

Um par ordenado $(x, x) \in \alpha$ é chamado *reflexivo*. Um par $(x, z) \in \alpha$ é *implícito por transitividade* quando existirem $k > 0$ e $y_1, y_2, \dots, y_k \in P$ tais que $(x, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{k-1}, y_k), (y_k, z) \in \alpha$.

	(P1)	(P2)	(P3)	(P4)	(P5)	(P6)	(P7)
Compatibilidade	•		•				
Equivalência	•		•			•	
Ordem Parcial	•			•		•	
Ordem Parcial Estrita		•			•	•	
Ordem Total	•			•		•	•
Ordem Total Estrita		•			•	•	•

Tabela 1.1: Relações binárias especiais e as propriedades por elas satisfeitas.

O conjunto subjacente (ou de suporte) de uma relação binária α sobre P é definido como

$$\text{SUB}(\alpha) = \{\{x, y\} \mid (x, y) \in \alpha \text{ ou } (y, x) \in \alpha\}.$$

Vale observar que $\text{SUB}(\alpha)$ está propriamente contido no conjunto das partes de P : os pares reflexivos de α correspondem a subconjuntos unitários em $\text{SUB}(\alpha)$, ao passo que os pares não-reflexivos correspondem a subconjuntos com dois elementos.

Subconjuntos Maximais e Minimais

Sejam uma propriedade P e um conjunto U quaisquer.

Um subconjunto $S \subseteq U$ é *P-maximal* quando:

- (i) S satisfaz P ;
- (ii) $\forall V$, se $S \subset V \subseteq U$, então V não satisfaz P .

Um subconjunto $T \subseteq U$ é *P-minimal* quando:

- (i) T satisfaz P ;
- (ii) $\forall V$, se $V \subset T$, então V não satisfaz P .

Digrafos

Um *grafo direcionado* (ou *digrafo*) é um par ordenado de conjuntos $D = (V, E)$, em que $V \neq \emptyset$ é o *conjunto de vértices* e $E \subseteq V \times V$ é uma relação binária sobre V , denominada *conjunto de arestas*. Dados $v, w \in V$, definimos:

- $A_D(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E \}$, conjunto dos *sucessores imediatos de v* . $|A_D(v)|$ é chamado *grau de saída* de v . Se $A_D(v) = \emptyset$, v é um *sumidouro* de D .
- $P_D(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E \}$, conjunto dos *predecessores imediatos de v* . $|P_D(v)|$ é chamado *grau de entrada* de v . Se $P_D(v) = \emptyset$, v é uma *fonte* de D .
- Uma aresta $(v, w) \in E$ *parte do* vértice v e *chega ao* vértice w . v e w são *extremidades* da aresta.
- Um digrafo constituído por um único vértice e desprovido de arestas é chamado *trivial*.
- Uma aresta da forma (v, v) é denominada *reflexiva*.
- Um *caminho de v a w* em D é uma seqüência de vértices $v = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = w$, com $k > 0$, onde $(x_{i-1}, x_i) \in E$, para $i = 1, \dots, k$. k é o *comprimento* do caminho. Por extensão, diremos que existe um caminho, de comprimento nulo, de qualquer vértice a si mesmo. É usual dizer que o caminho *passa* pelos vértices que o constituem. Um caminho de v a w *evita* z quando $x_i \neq z$, para $i = 0, \dots, k$. Um *caminho simples* é um caminho em que todos os vértices são distintos. Um caminho é *hamiltoniano* quando passa exatamente uma vez por cada vértice do digrafo.
- $v \rightarrow_D w$ significa v *alcança* w em D , ou seja, existe um caminho de v a w em D . Em outras palavras, \rightarrow_D é uma relação binária sobre V , que satisfaz as propriedades reflexiva e transitiva.

Um caminho é *fechado* quando o primeiro e o último vértices coincidem. Um *ciclo* é um caminho fechado em que apenas o primeiro e o último vértice coincidem. Um digrafo é *acíclico* quando não contém ciclos; do contrário, é *cíclico*.

Um *subdigrafo* de $D = (V, E)$ é um digrafo $D' = (V', E')$, em que $V' \subseteq V$, $V' \neq \emptyset$ e $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$. Se $V' = V$, D' é um *subdigrafo gerador* de D . Se $V' = V$ e $E' \subset E \cap (V' \times V')$, D' é um *subdigrafo gerador próprio* de D .

O *subdigrafo* de D , induzido por um subconjunto de vértices $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, é o subdigrafo $D||S = (S, E \cap (S \times S))$.

Um subconjunto $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, é *fortemente conexo* quando, $\forall v, w \in S$, $v \rightarrow_{D||S} w$. Por extensão, dizemos que o subdigrafo induzido $D||S$ é fortemente conexo. Subconjuntos unitários de vértices são fortemente conexos.

Um *componente fortemente conexo* de D é um subdigrafo induzido por um subconjunto maximal $S \subseteq V$ fortemente conexo. D é *fortemente conexo* quando possui apenas um componente fortemente conexo.

Dois digrafos $D_1 = (V_1, E_1)$ e $D_2 = (V_2, E_2)$ são *idênticos* quando $V_1 = V_2$ e $E_1 = E_2$. Este fato é representado por $D_1 = D_2$.

Dois digrafos $D_1 = (V_1, E_1)$ e $D_2 = (V_2, E_2)$ são *isomorfos* quando existir um isomorfismo de D_1 em D_2 , ou seja, uma função bijetora $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ tal que, $\forall v, w \in V_1$, $(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\psi(v), \psi(w)) \in E_2$. Observe que a identidade é um caso particular de isomorfismo.

O *fecho reflexivo* de um digrafo $D = (V, E)$ é o digrafo $D^\circ = (V, E \cup E^\circ)$, onde $E^\circ = \{(v, v) \mid v \in V\}$. A *redução reflexiva* de $D = (V, E)$ é o digrafo $D^\circ = (V, E - E^\circ)$.

O *fecho transitivo* de um digrafo $D = (V, E)$ é o *maior* digrafo $D' = (V, E')$ no qual a relação \rightarrow_D é preservada, ou seja:

- $|E'|$ é máxima;
- $\forall v, w \in V, v \rightarrow_D w \Leftrightarrow v \rightarrow_{D'} w$. Ou, equivalentemente: $\rightarrow_D = \rightarrow_{D'}$.

A *redução transitiva* de um digrafo $D = (V, E)$ é o *menor* digrafo $D' = (V, E')$ no qual a relação \rightarrow_D é preservada, ou seja:

- $|E'|$ é mínima;
- $\rightarrow_D = \rightarrow_{D'}$.

Observe que D' não é necessariamente um subdigrafo de D .

O *subdigrafo gerador equivalente mínimo* (MEQ) de um digrafo $D = (V, E)$ é o *menor* subdigrafo gerador $D' = (V, E')$ de D no qual a relação \rightarrow_D é preservada, ou seja:

- $E' \subseteq E$;
- $|E'|$ é mínima;
- $\rightarrow_D = \rightarrow_{D'}$.

Se $D = (V, E)$ é acíclico, sua redução transitiva e seu subdigrafo gerador equivalente mínimo são idênticos.

Uma *ordenação topológica de um digrafo acíclico* $D = (V, E)$, quando V é finito, é uma função bijetora $\tau: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ tal que

$$\forall x, y \in V, (x, y) \in E \Rightarrow \tau(x) < \tau(y).$$

Em outras palavras, trata-se de rotular os $|V|$ vértices com os números naturais de 1 a $|V|$ de tal forma que toda aresta tenha origem com rótulo menor que o do destino; ou ainda, dispor os vértices em uma seqüência de forma que as arestas tenham um único sentido. É interessante observar que toda ordenação topológica de D é também ordenação topológica da redução e do fecho transitivos de D .

Se $D = (V, E)$ é um digrafo e $x, y \in V$ são dois vértices quaisquer, indicamos por

$$D + (x, y) = (V, E \cup \{(x, y)\})$$

o digrafo aumentado, obtido pelo acréscimo da aresta (x, y) . Se $(x, y) \in E$, é óbvio que $D = D + (x, y)$.

Grafos de Fluxo

Um *grafo de fluxo* é uma tripla $F = (V, E, r)$, onde $D = (V, E)$ é um digrafo *desprovido de arestas reflexivas* e $r \in V$ é um vértice especial, denominado *origem* ou *raiz* de F , que possui a propriedade de alcançar os demais: $r \rightarrow_D v, \forall v \in V$. As definições mencionadas para digrafos estendem-se de modo natural a grafos de fluxo.

Um grafo de fluxo constituído apenas pelo vértice origem e desprovido de arestas é denominado *trivial*.

$G = (V', E', r')$ é um *subgrafo de fluxo gerador* de $F = (V, E, r)$ quando $V' = V, E' \subseteq E$ e $r' = r$. Se $E' \subset E$, G é um *subgrafo de fluxo gerador próprio* de F .

O *subgrafo de fluxo* de $F = (V, E, r)$, induzido por $S \subseteq V$, com origem em $s \in S$, é o grafo de fluxo $F' = (S, E \cap (S \times S), s)$, se $s \rightarrow_{F'} t, \forall t \in S$. Caso contrário, dizemos que este subgrafo é inexistente.

Uma *árvore direcionada* é um grafo de fluxo $T = (V, E, r)$ em que $|E| = |V| - 1$. Uma *folha* é um vértice $v \in V$ tal que $|A_T(v)| = 0$. Um vértice que não seja folha é denominado *interior*.

Em uma árvore direcionada $T = (V, E, r)$, se $v, w \in V$ são tais que $v \rightarrow_T w$, então w é descendente de v , ou v é ancestral de w . Se $(v, w) \in E$, então v é pai de w e w é filho de v . Se v é pai de x e y , x e y são vértices irmãos. Representaremos por $SA_T(v)$ o conjunto de todos os descendentes de v em T :

$$SA_T(v) = \{ w \in V \mid v \rightarrow_T w \}.$$

Pela definição, fica claro que $v \in SA_T(v)$.

O nível de um vértice v em uma árvore direcionada $T = (V, E, r)$ é o comprimento do caminho de r a v , representado por $L_T(v)$. Desta forma, $L_T(r) = 0$.

Dados uma árvore direcionada $T = (V, E, r)$ e um vértice $v \in V$ qualquer, a *sub-árvore de raiz v* é o subgrafo de fluxo de T , com origem v , induzido pelo conjunto $SA_T(v)$.

Uma *árvore m -ária*, $m > 0$, é um par (T, ρ) , onde $T = (V, E, r)$ é uma árvore direcionada e $\rho: E \rightarrow \{1, \dots, m\}$ é uma função tal que

$$\forall v \in V, \forall x, y \in A_T(v), \rho(v, x) \neq \rho(v, y).$$

Em outras palavras, arestas que ligam o pai aos seus filhos são rotuladas com valores distintos pertencentes ao conjunto $\{1, \dots, m\}$. Isto implica na existência de uma ordenação de vértices irmãos. É usual desenhar árvores m -árias dispondo os vértices irmãos da esquerda para a direita de acordo com a ordem crescente dos rótulos das arestas que ligam o pai aos filhos. Uma árvore é *estritamente m -ária* quando é m -ária e o grau de saída de todo vértice interior é m .

Uma *árvore geradora* de um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é uma árvore direcionada $T = (V, E_T, r)$ na qual $E_T \subseteq E$.

Em um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, um vértice v *domina* um vértice w quando v pertence a todo caminho de r a w .

Dois grafos de fluxo $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$ são *idênticos* quando temos $V_1 = V_2$, $E_1 = E_2$ e $r_1 = r_2$. Este fato é representado por $F_1 = F_2$.

Dois grafos de fluxo $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$ são *isomorfos* quando existir um isomorfismo de F_1 em F_2 , ou seja, uma função bijetora $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\psi(r_1) = r_2$ e, $\forall v, w \in V_1$, $(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\psi(v), \psi(w)) \in E_2$.

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo e $x, y \in V$ são dois vértices quaisquer, indicamos por $F + (x, y)$ o grafo de fluxo assim construído:

$$F + (x, y) = \begin{cases} F, & \text{se } x = y \\ (V, E \cup \{(x, y)\}, r), & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Conjuntos Parcialmente Ordenados

Um *conjunto parcialmente ordenado* é um digrafo (P, \preceq) , onde a relação binária \preceq sobre P é de ordem parcial (reflexiva, anti-simétrica e transitiva). Dois elementos $x, y \in P$ tais que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$ são ditos *comparáveis por \preceq* ; do contrário, são *incomparáveis*.

A representação da redução reflexivo-transitiva de (P, \preceq) através de um grafo não-orientado hierarquicamente imerso no plano é chamada *diagrama de Hasse* do conjunto parcialmente ordenado (P, \preceq) .

Dado um subconjunto não-vazio $X \subseteq P$, definimos:

- $m \in P$ é *majorante de X* quando $x \preceq m$, $\forall x \in X$. Um majorante de P é chamado *universal*.
- $n \in P$ é *minorante de X* quando $n \preceq x$, $\forall x \in X$. Um minorante de P é chamado *universal*.

- $s \in P$ é *supremo de X* quando:
 - (i) s é majorante de X ;
 - (ii) $\forall m \in P$, se m é majorante de X , então $s \preceq m$.

- $t \in P$ é *ínfimo de X* quando:
 - (i) t é minorante de X ;
 - (ii) $\forall n \in P$, se n é minorante de X , então $n \preceq t$.

O supremo (ínfimo) de X , quando existe, é único.

Grafos

Um grafo (não-direcionado) $G = (V, E)$ é um par ordenado de conjuntos, sendo $V \neq \emptyset$ o *conjunto de vértices* de G e E o *conjunto de arestas* de G . Uma aresta é um subconjunto de um ou dois vértices. Uma aresta unitária é denominada *laço*.

Dados o grafo $G = (V, E)$ e o vértice $v \in V$, $A_G(v) = \{ w \in V \mid \{v, w\} \in E \}$ é o conjunto de vértices *adjacentes* a v . $|A_G(v)|$ é denominada *grau* (ou *valência*) de v .

Um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E \cap \text{SUB}(V \times V)$ é um *subgrafo* de $G = (V, E)$.

O *subgrafo de $G = (V, E)$ induzido pelo subconjunto $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$* , é o grafo $G||S = (S, E \cap \text{SUB}(S \times S))$.

Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ são *isomorfos* quando existir uma função bijetora $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ tal que, $\forall v, w \in V_1$, $\{v, w\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\psi(v), \psi(w)\} \in E_2$.

Dados $G = (V, E)$ e $S \subseteq V, S \neq \emptyset$, $G||S$ é uma *clique de G* quando for isomorfo a $K_{|S|}$. Uma clique induzida por S é *maximal* quando, $\forall S^o$, se $S \subset S^o \subseteq V$ então $G||S^o$ não é isomorfo a $K_{|S^o|}$.

Um *conjunto independente* (ou *estável*) de vértices em um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $S \subseteq V, S \neq \emptyset$, tal que $G||S = (S, \emptyset)$. A cardinalidade do maior conjunto independente de vértices de G é denominada *número de estabilidade de G*, representado por $\alpha(G)$.

O *grafo subjacente* (ou *grafo de suporte*) de um digrafo $D = (V, E)$ é o grafo

$$\text{SUB}(D) = (V, \text{SUB}(E)),$$

onde $\text{SUB}(E)$ é o conjunto subjacente (ou de suporte) da relação binária E .

Capítulo 2

Uma Revisão de Redutibilidade

Neste capítulo, é feita uma revisão sobre grafos de fluxo redutíveis. A idéia de aplicar uma função a um digrafo, introduzida na seção inicial, é estendida a grafos de fluxo, mostrando-se bastante útil para expressar os conceitos de grafo de fluxo derivado e condensação de subconjuntos de vértices. A formulação original de redutibilidade, (COCKE, 1970, ALLEN, 1970), envolvendo as noções de intervalos e grafos derivados, é revista sob essa ótica.

Alguns resultados sobre busca em profundidade, dominação, arestas retrógradas, subgrafo progressivo, núcleos e regiões, conhecidos da literatura - (TARJAN, 1972), (TARJAN, 1974), (HECHT e ULLMAN, 1974) e (LENGAUER e TARJAN, 1979) - são retomados por constituírem base teórica indispensável a caracterizações alternativas de grafos de fluxo redutíveis. O grafo de dominação e junção (DJ-grafo) associado a um grafo de fluxo, recentemente definido por SREEDHAR (1995), é também abordado.

Introduzimos o conceito de expansão de um vértice em um grafo de fluxo por um outro grafo de fluxo, que será útil nos capítulos 3 e 4. A definição e alguns resultados sobre pólos em grafos de fluxo redutíveis concluem o capítulo.

2.1 Imagem de um Digrafo por uma Função

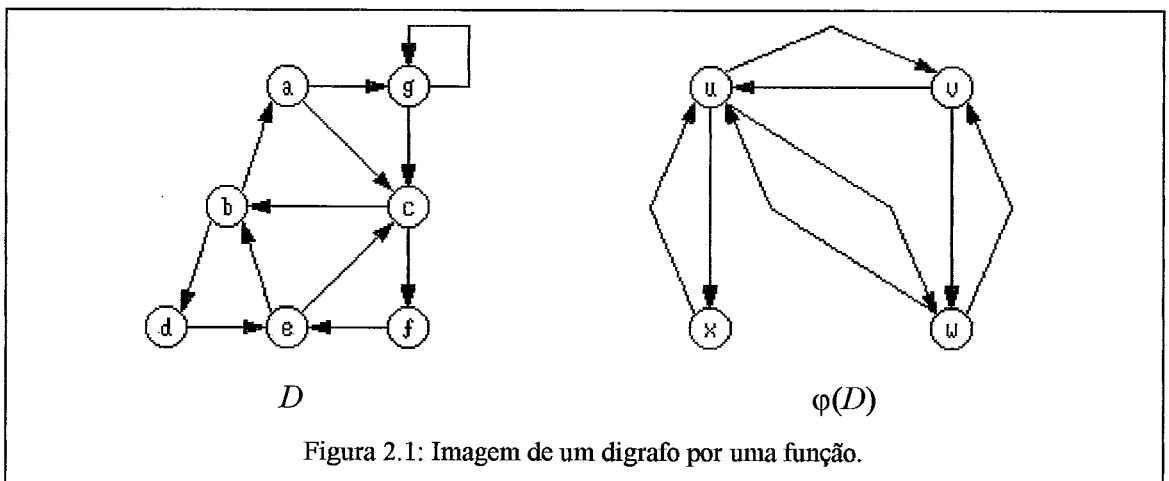
Sejam $D = (V, E)$ um digrafo, $U \neq \emptyset$ um conjunto e $\varphi: V \rightarrow U$ uma função quaisquer. Dados um subconjunto de vértices $S \subseteq V$ e um subconjunto de arestas $T \subseteq E$, definimos:

$$\varphi(S) = \{ \varphi(s) \mid s \in S \};$$

$$\varphi(T) = \{ (\varphi(v), \varphi(w)) \mid (v, w) \in T \text{ e } \varphi(v) \neq \varphi(w) \}.$$

O digrafo $\varphi(D) = (\varphi(V), \varphi(E))$ é denominado *imagem de D por φ* . O conjunto de vértices de $\varphi(D)$ é a imagem de V por φ , subconjunto do contradomínio U . Dada uma aresta de D , se as imagens de suas extremidades coincidirem, esta aresta não possuirá correspondente em $\varphi(D)$; se as imagens forem distintas, haverá uma aresta correspondente em $\varphi(D)$. Portanto, a cada aresta em $\varphi(D)$ corresponde ao menos uma aresta em D . Vale notar que, pela construção estabelecida, o digrafo imagem $\varphi(D)$ não possui arestas reflexivas.

Na figura 2.1, o digrafo $\varphi(D)$, mostrado à direita é imagem do digrafo D , à esquerda, pela função $\varphi: \{a, b, c, d, e, f, g\} \rightarrow \{u, v, w, x, y, z\}$ tal que $\varphi(a) = \varphi(c) = \varphi(d) = u$, $\varphi(b) = \varphi(f) = v$, $\varphi(e) = w$ e $\varphi(g) = x$. Observe que os elementos y e z do contradomínio não são utilizados.



As imagens dos conjuntos de vértices e arestas são, respectivamente:

$$\varphi(\{a, b, c, d, e, f, g\}) = \{u, v, w, x\}$$

$$\varphi(\{(a, c), (a, g), (b, a), (b, d), (c, b), (c, f), (d, e), (e, b), (e, c), (f, e), (g, c), (g, g)\}) = \{(u, x), (v, u), (u, v), (u, w), (w, v), (w, u), (v, w), (x, u)\}.$$

A correspondência entre arestas é mostrada a seguir.

arestas em D	aresta em $\varphi(D)$	arestas em D	aresta em $\varphi(D)$
$(a, c), (g, g)$	→ não têm	(e, b)	→ (w, v)
(a, g)	→ (u, x)	(e, c)	→ (w, u)
$(b, a), (b, d)$	→ (v, u)	(f, e)	→ (v, w)
$(c, b), (c, f)$	→ (u, v)	(g, c)	→ (x, u)
(d, e)	→ (u, w)		

Dado $S' \subseteq U$, o subconjunto $\varphi^{-1}(S') = \{v \in V \mid \varphi(v) \in S'\} \subseteq V$ é a *imagem inversa* de S' por φ . Quando $S' = \{v'\}$, por comodidade, escrevemos $\varphi^{-1}(v')$ em vez de $\varphi^{-1}(\{v'\})$.

Os próximos teoremas revelam importantes propriedades. O primeiro afirma que a imagem de um caminho em D é um caminho em $\varphi(D)$.

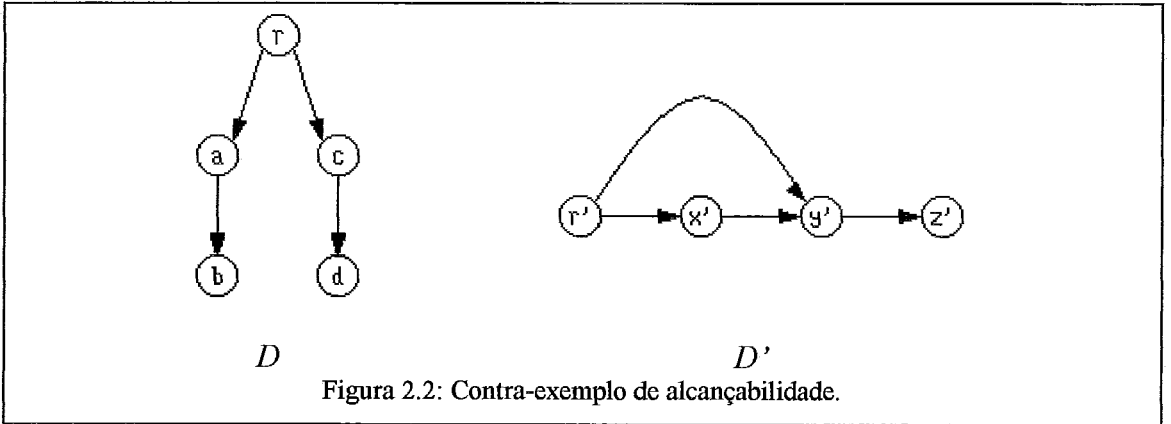
Teorema 2.1

Se $v \rightarrow_D w$, então $\varphi(v) \rightarrow_{\varphi(D)} \varphi(w)$, para qualquer $\varphi: V \rightarrow U, U \neq \emptyset$.

Prova:

Tomemos $v, w \in V$ tais que $v \rightarrow_D w$. Se $v = w$, $\varphi(v) = \varphi(w)$ e $\varphi(v) \rightarrow_{\varphi(D)} \varphi(w)$. Caso contrário, seja um caminho $v = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = w$, com $k > 0$. Como $(x_{i-1}, x_i) \in E$, temos $\varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_i)$ ou $(\varphi(x_{i-1}), \varphi(x_i)) \in \varphi(E)$, de maneira que $\varphi(x_{i-1}) \rightarrow_{\varphi(D)} \varphi(x_i)$, para $i = 1, \dots, k$. Logo, $\varphi(v) \rightarrow_{\varphi(D)} \varphi(w)$, por transitividade. ■

A recíproca desta afirmativa não é verdadeira: um caminho em $\varphi(D)$ não é necessariamente imagem de um caminho em D . Na figura 2.2, $D' = \varphi(D)$, sendo $\varphi(r) = r'$, $\varphi(a) = x'$, $\varphi(b) = \varphi(c) = y'$, $\varphi(d) = z'$. Observe que x' alcança z' em D' , porém os vértices em $\varphi^{-1}(x') = \{a\}$ não alcançam os vértices em $\varphi^{-1}(z') = \{d\}$ em D .



O próximo teorema nos dá condições suficientes para que um caminho em $\varphi(D)$ seja imagem de um caminho em D .

Teorema 2.2

Se $\varphi: V \rightarrow U$ é sobrejetora, $\forall u \in U$, $\varphi^{-1}(u)$ é fortemente conexo e $v \rightarrow_{\varphi(D)} w$, então existem $x \in \varphi^{-1}(v)$ e $y \in \varphi^{-1}(w)$ tais que $x \rightarrow_D y$.

Prova:

Como φ é sobrejetora, certamente $\varphi^{-1}(u) \neq \emptyset$, $\forall u \in U$. Temos dois casos:

- Se $v = w$, basta tomarmos x e y quaisquer pertencentes a $\varphi^{-1}(v) = \varphi^{-1}(w)$, fortemente conexo por hipótese. Certamente, $x \rightarrow_D y$.
- Se $v \neq w$, consideremos o caminho $v = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = w$ em $\varphi(D)$, onde $k > 0$. Como $(x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1}) \in \varphi(E)$, para $i = 1, \dots, k-1$, pela definição de $\varphi(E)$, devem existir $a_{i-1} \in \varphi^{-1}(x_{i-1})$, $\hat{a}_i, a_i \in \varphi^{-1}(x_i)$ e $\hat{a}_{i+1} \in \varphi^{-1}(x_{i+1})$ tais que $(a_{i-1}, \hat{a}_i), (a_i, \hat{a}_{i+1}) \in E$. Como $\varphi^{-1}(x_i)$ é fortemente conexo, \hat{a}_i alcança a_i em $\varphi^{-1}(x_i)$. Portanto, $a_{i-1} \rightarrow_D a_i$, para $i = 1, \dots, k-1$, ou seja, $a_0 \rightarrow_D a_{k-1}$. Mas $(a_{k-1}, \hat{a}_k) \in E$, donde $a_0 \rightarrow_D \hat{a}_k$. Tomando $x = a_0$ e $y = \hat{a}_k$, concluímos a tese, pois $a_0 \in \varphi^{-1}(v)$ e $\hat{a}_k \in \varphi^{-1}(w)$. ■

Recordemos que um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é um digrafo (V, E) , desprovido de arestas reflexivas, no qual o vértice r , denominado *origem*, possui a propriedade de alcançar os demais.

Teorema 2.3

A imagem de um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ por uma função $\varphi: V \rightarrow U$, definida por $\varphi(F) = (\varphi(V), \varphi(E), \varphi(r))$, é um grafo de fluxo.

Prova:

Temos que $r \rightarrow_F y, \forall y \in V$. Pelo teorema 2.1, $\varphi(r) \rightarrow_{\varphi(F)} \varphi(y), \forall \varphi(y) \in \varphi(V)$. Além disso, $\varphi(E)$ não possui arestas reflexivas. Portanto, $\varphi(F)$ é um grafo de fluxo. ■

Os enunciados dos teoremas 2.1 e 2.2 adaptam-se de modo natural a grafos de fluxo.

2.2 Grafo de Fluxo Quociente

O conceito de grafo de fluxo quociente que apresentaremos é uma extensão do conceito de grafo quociente, encontrado em (ABREU, 1991).

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo e θ uma relação de equivalência sobre o conjunto de vértices V . Dado $v \in V$, representamos por $[v]_\theta$ a classe de equivalência a que v pertence, ou seja,

$$[v]_\theta = \{w \in V \mid v \theta w\}.$$

Consideremos V/θ o conjunto das classes de equivalência de θ . Sabemos que V/θ é uma partição de V . A função $\Psi_\theta: V \rightarrow V/\theta$ tal que $\Psi_\theta(v) = [v]_\theta, \forall v \in V$, é, portanto,

sobrejetora. O grafo de fluxo $\Psi_\theta(F)$, imagem de F por Ψ_θ , é denominado *grafo de fluxo quociente de F por θ* , representado por

$$F/\theta = (V/\theta, E/\theta, [r]_\theta).$$

Os vértices de F/θ são as classes de equivalência de θ . Cada aresta de F cujas extremidades pertençam a classes distintas corresponde a uma aresta de F/θ interligando essas classes. A origem de F/θ é a classe de equivalência de r .

Na figura 2.3(a), vemos um grafo de fluxo com origem em r e $V = \{r, a, b, c, x, y\}$. Considerando θ a relação de *mesmos sucessores imediatos*,

$$v \theta w \Leftrightarrow A_F(v) = A_F(w), \forall v, w \in V,$$

verificamos que $V/\theta = \{\{r, b\}, \{x, y\}, \{a, c\}\}$. O grafo de fluxo quociente é mostrado na figura 2.3(b).

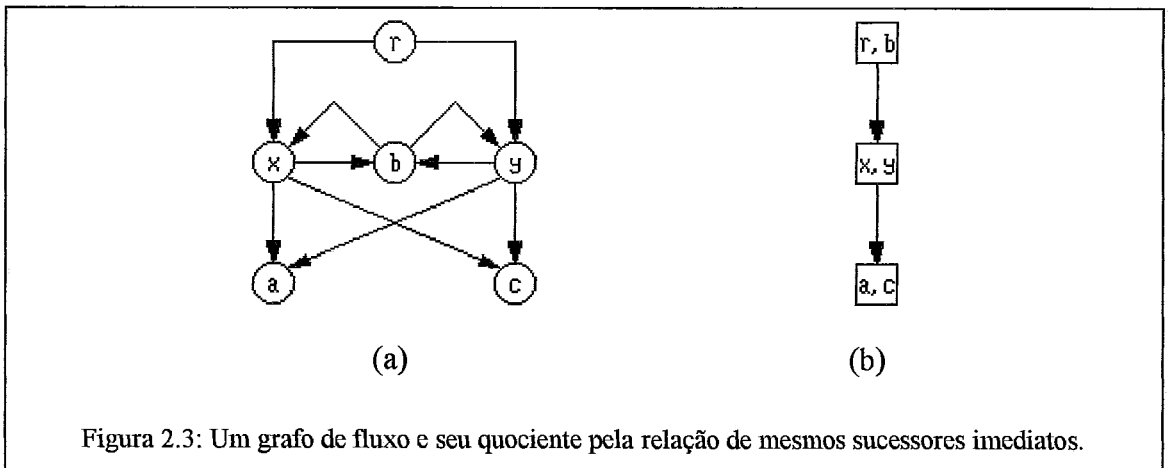


Figura 2.3: Um grafo de fluxo e seu quociente pela relação de mesmos sucessores imediatos.

2.3 Intervalos em Grafos de Fluxo

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo e $v \in V$. O *intervalo com vértice de entrada em v* é o subconjunto $I_F(v) \subseteq V$ construído da seguinte forma:

- (i) $v \in I_F(v)$;
- (ii) Se $w \neq r$ e $P_F(w) \subseteq I_F(v)$, então $w \in I_F(v)$;
- (iii) Nenhum outro vértice pertence a $I_F(v)$.

Em (AHO e ULLMAN, 1973) são apontadas as seguintes propriedades de $I_F(v)$:

- $I_F(v)$ é único e independente da ordem em que os vértices considerados no item (ii).
- O vértice de entrada v domina os demais vértices em $I_F(v)$. De fato, v é o único vértice em $I_F(v)$ que pode possuir predecessores imediatos que não pertençam a $I_F(v)$.
- Para todo ciclo C de F cujos vértices pertencem a $I_F(v)$, $v \in C$.

No grafo de fluxo F da figura 2.4(a), onde r é a origem, destacamos:

$$\begin{array}{llll} I_F(r) = \{r, a, b, c\} & I_F(a) = \{a, b, c\} & I_F(b) = \{b, c\} & I_F(c) = \{c\} \\ I_F(d) = \{d, g\} & I_F(e) = \{e, f\} & I_F(f) = \{f\} & I_F(g) = \{g\}. \end{array}$$

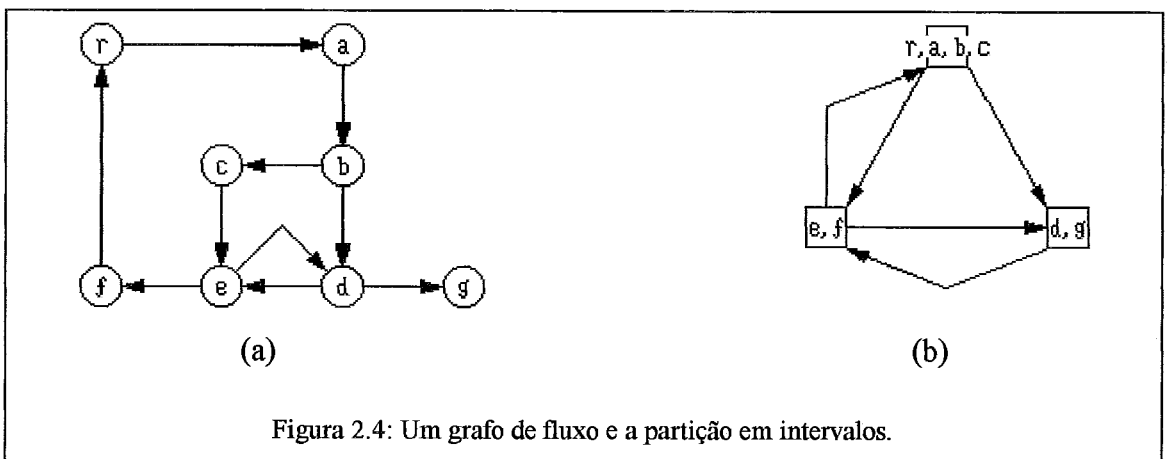


Figura 2.4: Um grafo de fluxo e a partição em intervalos.

Ainda em (AHO e ULLMAN, 1973), é provado que o conjunto de vértices de um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ pode ser particionado de modo único em intervalos através de um

algoritmo de complexidade $O(|E|)$. Aplicado ao grafo de fluxo da figura 2.4(a), o algoritmo particiona o conjunto de vértices da seguinte maneira:

$$P = \{\{r, a, b, c\}, \{d, g\}, \{e, f\}\}.$$

2.4 Grafos de Fluxo Redutíveis

Os conceitos de grafo de fluxo quociente e partição em intervalos podem ser utilizados na redefinição de uma importante classe de grafos de fluxo, denominados *reduzíveis*.

Seja $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo e consideremos a partição de V em intervalos. Vamos definir uma relação binária δ sobre V :

$$v \delta w \Leftrightarrow v \text{ e } w \text{ pertencem a um mesmo intervalo da partição.}$$

É imediato que δ é uma relação de equivalência sobre V . O grafo de fluxo quociente F/δ tem por vértices as classes de equivalência de δ – neste caso, os intervalos que particionam V . A origem de F/δ é o intervalo $I_F(r)$. Este grafo é chamado *grafo derivado de F* , aqui representado por ∂F .

Dizemos que F é *irreduzível* quando for isomorfo a ∂F .

A *seqüência derivada de F* é a seqüência infinita de grafos de fluxo definida recorrentemente através das relações:

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= F \\ F^{(i+1)} &= \partial^{(i+1)} F = \partial F^{(i)}, \text{ para } i > 0. \end{aligned}$$

Como F é finito, existe certamente $k > 0$ tal que $F^{(k)}$ é irreduzível. Se $F^{(k)}$ é trivial, F é *reduzível por intervalos*, ou simplesmente, *reduzível*. Do contrário, F é *não-reduzível*.

Utilizando como exemplo o grafo de fluxo da figura 2.4(a), o grafo derivado é mostrado na figura 2.4(b). Este último é irreduzível e não-trivial. Portanto, o grafo de fluxo original é não-reduzível. Na figura 2.5, vemos um grafo de fluxo F com origem r e seu derivado ∂F . O grafo derivado de ∂F é trivial e, portanto, F é reduzível.

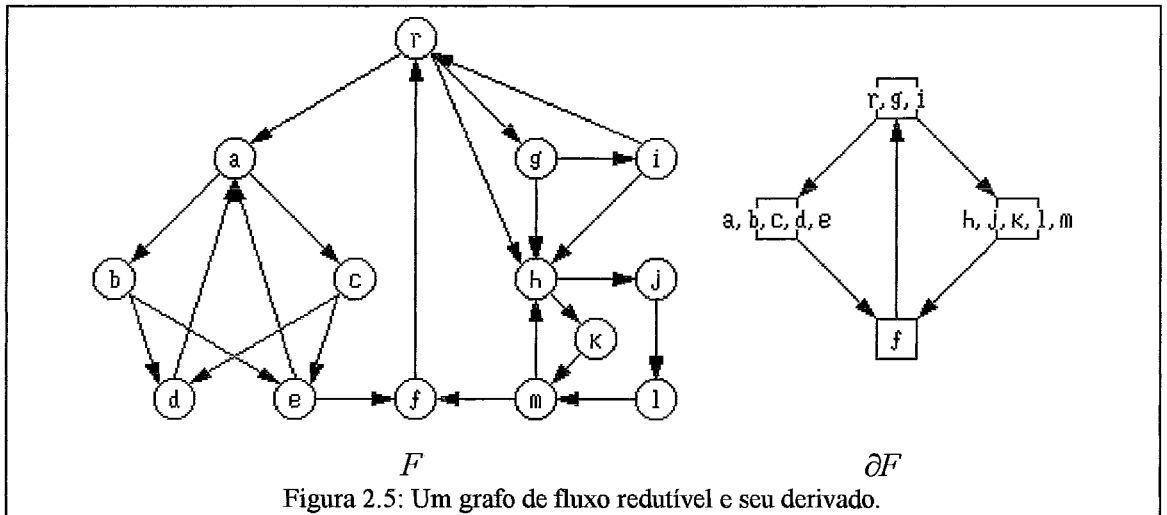


Figura 2.5: Um grafo de fluxo reduzível e seu derivado.

2.5 Busca em Profundidade

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo e $T = (V, E_T, r)$ uma árvore geradora *qualquer* de F . As arestas pertencentes a $E - E_T$ podem ser classificadas em três subconjuntos disjuntos, possivelmente vazios, definidos através da relação de alcançabilidade na árvore geradora T :

$$RT(F, T) = \{ (v, w) \in E - E_T \mid w \rightarrow_T v \},$$

$$AV(F, T) = \{ (v, w) \in E - E_T \mid v \rightarrow_T w \},$$

$$CR(F, T) = \{ (v, w) \in E - E_T \mid \sim(v \rightarrow_T w) \text{ e } \sim(w \rightarrow_T v) \}.$$

É possível representar a relação de alcançabilidade em T com o auxílio de duas funções bijetoras $\rho, \sigma: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$, de modo que:

$$\forall v, w \in V, v \rightarrow_T w \Leftrightarrow \rho(v) \leq \rho(w) \text{ e } \sigma(v) \geq \sigma(w).$$

Os valores de ρ correspondem a uma numeração seqüencial dos vértices em pré-ordem; os de σ , a uma numeração seqüencial em pós-ordem (BRASSARD e BRATLEY, 1988).

Através de um processo sistemático de exploração de F , denominado *busca em profundidade* (TARJAN, 1972), é possível obter uma árvore geradora $T = (V, E_T, r)$ e as bijeções ρ, σ de maneira que:

$$\forall (v, w) \in CR(F, T), \rho(v) > \rho(w).$$

Uma árvore geradora assim obtida é denominada *árvore geradora de profundidade de F* , ou simplesmente, *árvore de profundidade de F* . Os valores de ρ e σ para cada vértice são chamados, respectivamente, *profundidade de entrada* e *profundidade de saída* do vértice.

O conjunto de todas as árvores de profundidade de F será representado por $PROF(F)$.

A busca em profundidade, em última análise, classifica as arestas do grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ em quatro subconjuntos disjuntos:

E_T		arestas de árvore;
$RT(F, T)$	$= \{ (v, w) \in E - E_T \mid \rho(v) > \rho(w) \text{ e } \sigma(v) < \sigma(w) \}$	arestas de retorno;
$AV(F, T)$	$= \{ (v, w) \in E - E_T \mid \rho(v) < \rho(w) \text{ e } \sigma(v) > \sigma(w) \}$	arestas de avanço;
$CR(F, T)$	$= \{ (v, w) \in E - E_T \mid \rho(v) > \rho(w) \text{ e } \sigma(v) > \sigma(w) \}$	arestas de cruzamento.

Destes, apenas o subconjunto E_T é obrigatoriamente não-vazio. É interessante observar que as arestas em E_T e $AV(F, T)$ são indistinguíveis através da relação de alcançabilidade: em todas elas, o vértice destino é descendente do vértice origem em T . Os lemas seguintes revelam outras propriedades da busca em profundidade.

Lema 2.1

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, uma árvore de profundidade $T \in \text{PROF}(F)$ com rotulações ρ e σ e $(v, w) \in E$. $(v, w) \in \text{RT}(F, T)$ se, e somente, se, $\sigma(v) < \sigma(w)$.

Prova:

Basta observar as definições dos conjuntos E_T , $\text{AV}(F, T)$, $\text{CR}(F, T)$ e $\text{RT}(F, T)$ acima. ■

Lema 2.2

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ e uma árvore de profundidade $T \in \text{PROF}(F)$. Todo ciclo de F possui pelo menos uma aresta que é de retorno em relação a T .

Prova:

Sejam $\rho, \sigma: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ as rotulações de $T = (V, E_T, r)$ e $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ um ciclo de F . Suponhamos, sem perda de generalidade, que v_1 seja o vértice de menor ρ dentre todos os que integram o ciclo (do contrário, basta considerar uma permutação cíclica dos vértices em que isso aconteça).

Vamos mostrar, por indução finita sobre o comprimento do ciclo, que os demais vértices são descendentes de v_1 em T :

- (i) Como $\rho(v_1) < \rho(v_2)$, $(v_1, v_2) \in E_T \cup \text{AV}(F, T)$. Em ambos os casos, $\sigma(v_1) > \sigma(v_2)$ e $v_1 \rightarrow_T v_2$.
- (ii) Hipótese de indução: suponhamos que $v_1 \rightarrow_T v_{i-1}$, ou seja, $\rho(v_1) < \rho(v_{i-1})$ e $\sigma(v_1) > \sigma(v_{i-1})$, para algum i tal que $3 \leq i \leq k$.
- (iii) Devemos mostrar que $v_1 \rightarrow_T v_i$. Como $\rho(v_1) < \rho(v_i)$, restam duas alternativas para $\sigma(v_i)$:
 - se $\sigma(v_1) > \sigma(v_i)$, $v_1 \rightarrow_T v_i$;
 - se $\sigma(v_1) < \sigma(v_i)$, usando a hipótese de indução, temos que $\sigma(v_i) > \sigma(v_1) > \sigma(v_{i-1})$. Logo $\sigma(v_{i-1}) < \sigma(v_i)$ e, pelo lema 2.1, $(v_{i-1}, v_i) \in \text{RT}(F, T)$, donde $v_i \rightarrow_T v_{i-1}$.

Como $v_1 \rightarrow_T v_{i-1}$, temos que v_{i-1} é descendente de v_1 e de v_i simultaneamente. Isto só é possível em uma árvore se $v_1 \rightarrow_T v_i$ ou $v_i \rightarrow_T v_1$. Como $\rho(v_1) < \rho(v_i)$, concluímos que $v_1 \rightarrow_T v_i$.

Portanto, $v_1 \rightarrow_T v_k$ e a aresta $(v_k, v_1) \in \text{RT}(F, T)$. ■

Dados um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ e $T \in \text{PROF}(F)$, chamamos

$$\text{DAG}(F, T) = (V, E - \text{RT}(F, T), r)$$

o subgrafo de fluxo gerador de F obtido pela supressão das arestas de retorno com respeito a T . O corolário seguinte decorre do lema 2.2.

Corolário 2.1

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo e T é uma árvore geradora de profundidade de F , então $\text{DAG}(F, T) = (V, E - \text{RT}(F, T), r)$ é acíclico.

2.6 A Relação de Dominação em Grafos de Fluxo

Dados um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ e dois vértices $v, w \in V$, v *domina* w (ou v é *dominador de* w ou w é *dominado por* v) quando v pertence a todo caminho de r a w . A dominação pode, portanto, ser encarada como relação binária sobre o conjunto de vértices V . Se v domina w em F , representamos este fato por $v \text{ dom}_F w$.

É imediato concluir, a partir da definição, que a relação binária dom_F é uma ordem parcial sobre V . De fato, dom_F é reflexiva ($v \text{ dom}_F v$), anti-simétrica (se $v \text{ dom}_F w$ e $w \text{ dom}_F v$ então $v = w$) e transitiva (se $v \text{ dom}_F w$ e $w \text{ dom}_F z$ então $v \text{ dom}_F z$).

Podemos, então, referir-nos ao conjunto parcialmente ordenado (V, dom_F) . As proposições seguintes exploram algumas de suas propriedades.

Lema 2.3

A origem r é um minorante universal em (V, dom_F) .

Prova:

Óbvio: r pertence a todo caminho de r aos demais vértices; logo r domina os demais vértices. ■

Lema 2.4

Se os vértices v e w são incomparáveis em (V, dom_F) , então não existem majorantes de $\{v, w\}$.

Prova:

A existência de um vértice simultaneamente dominado por v e w implicaria, pela própria definição de dominação, na comparabilidade entre v e w (ou v dominaria w ou w dominaria v). ■

Lema 2.5

Se os vértices x, y são minorantes de $\{v\}$ em (V, dom_F) , então x e y são comparáveis.

Prova:

O vértice v é majorante de $\{x, y\}$. Pelo lema 2.4, x e y devem ser comparáveis. ■

Dos lemas 2.3, 2.4 e 2.5, afirmamos que o diagrama de Hasse de (V, dom_F) é uma árvore em que a origem r é a raiz. Esta árvore é chamada, na literatura, *árvore de dominadores de F* (LENGAUER e TARJAN, 1979). Vale observar que, em geral, a árvore de dominadores não é uma árvore geradora do grafo de fluxo.

O lema 2.5 permite concluir, de imediato, a existência do ínfimo para todo par de vértices. O ínfimo de dois vértices v e w será chamado *maior dominador comum* de v e w , representado por $\text{MDC}_F\{v, w\}$. Se v e w são incomparáveis por dom_F , $\text{MDC}_F\{v, w\}$ é o ancestral comum a v e w situado o mais distante possível da raiz r na árvore de dominadores. Se v domina w , $\text{MDC}_F\{v, w\} = v$; se w domina v , $\text{MDC}_F\{v, w\} = w$.

Dado $v \in V$, denominamos $\text{DOM}_F(v)$ o conjunto de todos os vértices dominados por v em F , que são exatamente os descendentes de v na árvore de dominadores de F :

$$\text{DOM}_F(v) = \{ w \in V \mid v \text{ dom}_F w \}.$$

Os dominadores de v em F são seus ancestrais na árvore de dominadores. Se $v \neq r$, o *dominador imediato* de v em F é o vértice pai de v na árvore, representado por $\text{DI}_F(v)$.

Se $v \text{ dom}_F w$ e $v \neq w$, v *domina propriamente* (ou é *dominador próprio* de) w em F . Este fato é representado por $v \text{ dom}_F w$. Neste caso, v é ancestral próprio de w na árvore de dominadores de F . Os vértices propriamente dominados por $v \in V$ integram o conjunto $\text{DOM}_F(v) - \{v\}$.

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ qualquer e $T = (V, E_D, r)$ sua árvore de dominadores. Portanto, $E_D = \{ (\text{DI}_F(v), v) \mid v \in V - \{r\} \}$. O grafo de fluxo

$$\text{DJ}(F) = (V, E \cup E_D, r)$$

é denominado *DJ-grafo* de F , conforme (SREEDHAR *et al.*, 1994a). As arestas integrantes do conjunto E_D são denominadas *arestas de dominação* ou *D-arestas*, ao passo que as arestas restantes, pertencentes a $E - E_D$, são chamadas *arestas de junção* ou *J-arestas*. Observe que $E \cap E_D \neq \emptyset$, pois as arestas que partem da origem r pertencem obrigatoriamente à interseção. As J-arestas, por sua vez, pertencem todas ao grafo de fluxo original. Assim, é indistinto dizer “J-aresta de F ” ou “J-aresta de $\text{DJ}(F)$ ”.

Na figura 2.6 podemos visualizar a árvore de dominadores e o DJ-grafo correspondentes a um grafo de fluxo. As D-arestas são mostradas em pontilhado e as J-arestas, contínuas.

É importante observar que v domina w em F se, e somente se, v domina w em $DJ(F)$. Ou ainda, $\text{dom}_F = \text{dom}_{DJ(F)}$.

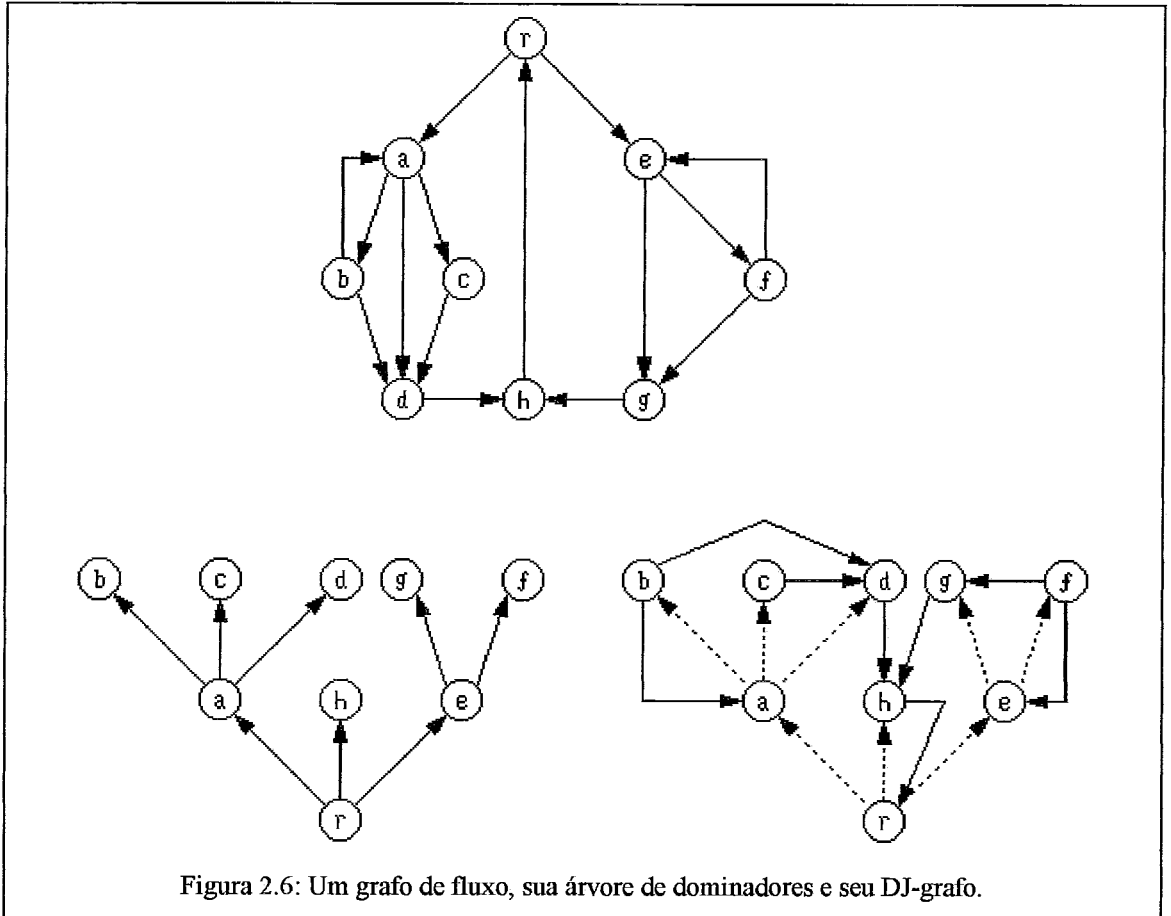


Figura 2.6: Um grafo de fluxo, sua árvore de dominadores e seu DJ-grafo.

O conjunto de arestas retrógradas de um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é definido como

$$\text{RTG}(F) = \{ (v, w) \in E \mid w \text{ dom}_F v \}.$$

Na figura 2.6, (h, r) , (b, a) e (f, e) são exemplos de arestas retrógradas. É imediato verificar que $\text{RTG}(F) \subseteq E - E_D$, ou seja, o conjunto das arestas retrógradas de F é subconjunto do conjunto das J-arestas de F .

Denominamos *subgrafo progressivo de F* ao subgrafo de fluxo gerador de F obtido pela supressão das arestas retrógradas de F :

$$\text{SGP}(F) = (V, E - \text{RTG}(F), r).$$

No exemplo da figura 2.6, bastaria suprimirmos as arestas (h, r) , (b, a) e (f, e) para obtermos o subgrafo progressivo de F .

2.7 Busca em Profundidade e Arestas Retrógradas

O conceito de dominação, analisado na seção anterior, está fortemente relacionado com a alcançabilidade em árvores de profundidade, de acordo com o próximo teorema.

Teorema 2.4

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo e $v, w \in V$, $v \neq w$, então $v \text{ dom}_F w$ se, e somente se, $\forall T \in \text{PROF}(F)$, $v \rightarrow_T w$.

Prova (contrapositivas):

(\Rightarrow) Seja $T \in \text{PROF}(F)$ tal que v não alcança w em T . Então existe um caminho de r a w em T que evita v e, conseqüentemente, um caminho de r a w em F que evita v . Logo, v não domina w em F .

(\Leftarrow) Suponhamos que v não domine w em F , sendo $r = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = w$, $k > 0$, um caminho simples em que $x_i \neq v$, para $i = 1, \dots, k-1$. Seja T uma árvore de profundidade de F que contenha as arestas (x_{i-1}, x_i) , para $i = 1, \dots, k$. Evidentemente, v não alcança w em T . ■

Suponhamos que duas buscas em profundidade sejam realizadas sobre um grafo de fluxo, originando duas árvores de profundidade distintas. O teorema 2.5 estabelece uma relação entre os conjuntos de arestas de retorno obtidos.

Teorema 2.5

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ e duas árvores de profundidade $T_1, T_2 \in \text{PROF}(F)$. Se $\text{RT}(F, T_1) \subseteq \text{RT}(F, T_2)$, então $\text{RT}(F, T_1) = \text{RT}(F, T_2)$.

Prova:

Basta provarmos que, se $\text{RT}(F, T_1) \subseteq \text{RT}(F, T_2)$, então $\text{RT}(F, T_2) \subseteq \text{RT}(F, T_1)$. Vamos mostrar a contrapositiva, supondo que exista $(v, w) \in E$ tal que (v, w) é de retorno em relação a T_2 mas não é de retorno em relação a T_1 . Devemos concluir que existe uma aresta que é de retorno em relação a T_1 mas não é de retorno em relação a T_2 .

Como (v, w) é de retorno em relação a T_2 , v é descendente de w em T_2 . Logo, existe uma seqüência de vértices $w, x_1, x_2, \dots, x_k, v, w$ formando um ciclo de F em que todas as arestas são de árvore em relação a T_2 , exceto (v, w) . Pelo lema 2.2, este ciclo deve possuir pelo menos uma aresta que seja de retorno com respeito a T_1 . Como, por hipótese, (v, w) não é de retorno em relação a T_1 , concluímos que pelo menos uma das arestas que é de árvore em relação a T_2 é de retorno em relação a T_1 . ■

O próximo teorema mostra que as arestas retrógradas de um grafo de fluxo F são classificadas como arestas de retorno em qualquer busca em profundidade realizada sobre F ; além disso, as arestas de F que são classificadas como de retorno em qualquer busca são exatamente as arestas de $\text{RTG}(F)$.

Teorema 2.6

Em um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, $\text{RTG}(F) = \bigcap_{T \in \text{PROF}(F)} \text{RT}(F, T)$.

Prova:

$$\begin{aligned}
 (v, w) \in \text{RTG}(F) &\Leftrightarrow w \text{ dom}_F v && \text{(pela definição de RTG)} \\
 &\Leftrightarrow w \rightarrow_T v, \forall T \in \text{PROF}(F) && \text{(pelo teorema 2.4)} \\
 &\Leftrightarrow (v, w) \in \text{RT}(F, T), \forall T \in \text{PROF}(F) && \text{(pela definição de RT). } \blacksquare
 \end{aligned}$$

O teorema 2.7 revela importante propriedade dos grafos de fluxo: se as arestas de retorno obtidas numa busca em profundidade sobre F são tais que o vértice de chegada domina o de partida, então o conjunto de arestas de retorno de F será o mesmo em qualquer busca em profundidade realizada, coincidindo com $\text{RTG}(F)$.

Teorema 2.7

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ e uma árvore de profundidade $T_1 \in \text{PROF}(F)$. Se $\text{RT}(F, T_1) \subseteq \text{RTG}(F)$, então $\text{RTG}(F) = \text{RT}(F, T), \forall T \in \text{PROF}(F)$.

Prova:

Pelo teorema 2.6, $\text{RTG}(F) \subseteq \text{RT}(F, T), \forall T \in \text{PROF}(F)$. Como $\text{RT}(F, T_1) \subseteq \text{RTG}(F)$, temos que $\text{RT}(F, T_1) \subseteq \text{RT}(F, T), \forall T \in \text{PROF}(F)$. Mas, pelo teorema 2.5, $\text{RT}(F, T_1) = \text{RT}(F, T), \forall T \in \text{PROF}(F)$, donde $\text{RTG}(F) = \text{RT}(F, T), \forall T \in \text{PROF}(F)$. ■

2.8 Caracterizações Equivalentes para Redutibilidade

A caracterização de grafos de fluxo redutíveis por intervalos, vista na seção 2.4, conduz naturalmente a um algoritmo de reconhecimento (HECHT e ULLMAN, 1972). Com o intuito de melhorar as complexidades de tempo e espaço deste algoritmo, evitando a construção explícita da seqüência derivada, caracterizações equivalentes foram obtidas.

O teorema 2.8, devido a Hecht-Ullman, caracteriza os grafos de fluxo redutíveis em função da não ocorrência do subgrafo proibido $\text{SP}(r, x, y, z)$, mostrado na figura 2.7, onde as arestas pontilhadas representam caminhos que só se interceptam nas extremidades indicadas. O caminho de r a x pode ter comprimento nulo: $\text{SP}(x, x, y, z)$.

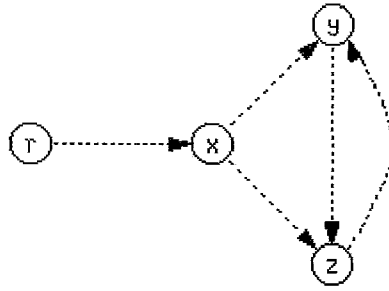


Figura 2.7: O subgrafo proibido $SP(r, x, y, z)$; arestas pontilhadas significam caminhos.

Teorema 2.8 (Hecht-Ullman)

Um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é redutível por intervalos se, e somente se, F não contém o subgrafo proibido $SP(r, x, y, z)$.

Prova:

Este teorema foi demonstrado inicialmente em (HECHT e ULLMAN, 1972). A prova continha incorreções, apontadas e corrigidas em (ADAMS *et al.*, 1974). ■

O teorema de Hecht-Ullman não conduz a um algoritmo eficiente para reconhecimento, uma vez que implica em analisar todos os subgrafos em busca do proibido.

Em um artigo posterior (HECHT e ULLMAN, 1974), diversas caracterizações adicionais para grafos de fluxo redutíveis foram obtidas. O teorema 2.9, que demonstramos a seguir, é a principal delas.

Teorema 2.9

Um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é redutível se, e somente se, o conjunto de arestas de retorno em relação a qualquer árvore de profundidade de F é único e coincide com o conjunto de arestas retrógradas de F .

Prova:

É equivalente mostrar que F não é redutível se, e somente se, existir uma árvore de profundidade T em relação à qual alguma aresta de retorno não seja retrógrada.

(\Rightarrow) Se F não é redutível, então, pelo teorema de Hecht-Ullman, F contém o subgrafo proibido $SP(r, x, y, z)$ da figura 2.7. Consideremos uma busca em profundidade sobre F que, iniciando em r , visite seqüencialmente os vértices no caminho de r a y , passando por x , atribuindo-lhes profundidades de entrada consecutivas. Deste modo, as arestas constituintes deste caminho integram a árvore de profundidade T de F , decorrente da busca. Seja $y, y_1, \dots, y_k, z, z_1, \dots, z_\ell, y$ o ciclo formado pelos caminhos de y a z e de z a y . Este ciclo possui y como vértice de menor profundidade de entrada. Pelo lema 2.1, sabemos que a aresta (z_ℓ, y) , pertencente ao caminho de z a y , é de retorno com respeito a T . Mas y não domina z_ℓ em F , donde (z_ℓ, y) não é aresta retrógrada de F .

(\Leftarrow) Suponhamos que existam uma árvore de profundidade $T \in \text{PROF}(F)$ e uma aresta $(w, y) \in \text{RT}(F, T)$ tal que y não domine w em F . Evidentemente, w também não domina y , pois existe um caminho de r a y , constituído por arestas de árvore, que evita w . Seja $x = \text{MDC}_F\{w, y\}$. Como w e y são incomparáveis por dom_F , existem dois caminhos de x a y e de x a w que só possuem o vértice x em comum. No caminho de x a w , seja z o vértice de menor profundidade de entrada que este caminho tem em comum com o caminho de y a w cujas arestas são de árvore em relação a T (eventualmente, $z = w$). A figura 2.8 ilustra esta construção. Então F possui o subgrafo proibido $SP(r, x, y, z)$ (w pertence ao caminho de z a y). ■

Como consequência imediata deste teorema, temos:

Corolário 2.2

$F = (V, E, r)$ é redutível se, e somente se, $\text{SGP}(F) = (V, E - \text{RTG}(F), r)$ é acíclico.

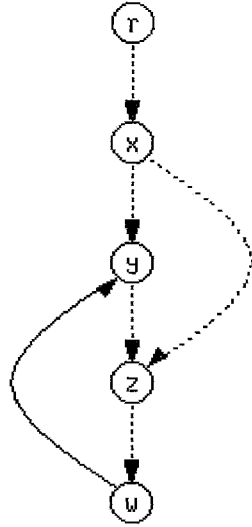


Figura 2.8: Ilustração da prova do teorema 2.10. Arestas pontilhadas significam caminhos.

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo qualquer e $T \in \text{PROF}(F)$, consideremos o subgrafo de fluxo gerador de F obtido pela supressão das arestas de retorno com respeito a T :

$$\text{DAG}(F, T) = (V, E - \text{RT}(F, T), r).$$

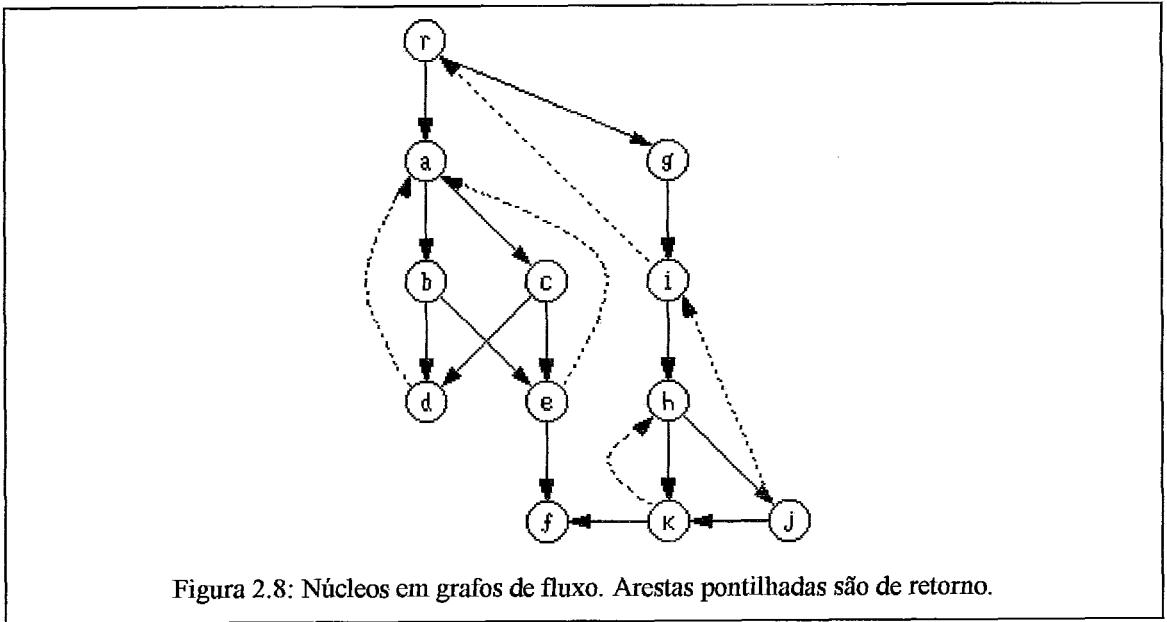
Pelo corolário 2.1, sabemos que $\text{DAG}(F, T)$ é acíclico. Se F é redutível, $\text{RT}(F, T) = \text{RTG}(F)$, $\forall T \in \text{PROF}(F)$, e $\text{DAG}(F, T)$ independe da árvore T considerada, coincidindo com o subgrafo progressivo $\text{SGP}(F) = (V, E - \text{RTG}(F), r)$.

2.9 Núcleos e Regiões

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo e $T = (V, E_T, r)$ uma árvore de profundidade de F . O *núcleo* de um vértice $v \in V$ em relação a T é o subconjunto de vértices assim definido:

$$\text{NUC}_r(T, v) = \{ v \} \cup \{ z \in V \mid \text{existem } (w, v) \in \text{RT}(F, T) \text{ e um caminho de } z \text{ a } w \text{ que evita } v \}.$$

Podemos ter $\text{NUC}_F(T, v) = \{v\}$, significando que não chegam arestas de retorno a v . Além disso, se $(w, v) \in \text{RT}(F, T)$, então $w \in \text{NUC}_F(T, v)$, pois existe um caminho (de comprimento nulo) de w a w que evita v .



No grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ da figura 2.8, foi realizada uma busca em profundidade; as arestas de retorno resultantes são mostradas em pontilhado. Distingüimos os seguintes núcleos não-unitários:

$$\begin{aligned} \text{NUC}_F(T, r) &= \{ r, g, h, i, j, k \} & \text{NUC}_F(T, a) &= \{ a, b, c, d, e \} \\ \text{NUC}_F(T, i) &= \{ h, i, j, k \} & \text{NUC}_F(T, h) &= \{ h, j, k \} \end{aligned}$$

O teorema seguinte caracteriza os grafos de fluxo redutíveis em função dos núcleos dos vértices do grafo.

Teorema 2.10

O grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é redutível se, e somente se, $\forall T \in \text{PROF}(F), \forall v \in V, \text{NUC}_F(T, v) \subseteq \text{DOM}_F(v)$.

Prova (contrapositivas):

(\Rightarrow) Suponhamos que existam $T \in \text{PROF}(F)$, $v \in V$ e $w \in \text{NUC}_F(T, v)$, $w \neq v$, tais que v não domina w em F . Existe, portanto, um caminho de r a w em F que evita v . Como $w \in \text{NUC}_F(T, v)$, existem um vértice z (eventualmente $z = w$) tal que (z, v) é aresta de retorno e um caminho de w a z em F (eventualmente de comprimento nulo) que também evita v . Então, existe um caminho de r a z em F que evita v , ou seja, v não domina z em F . Logo, (z, v) é aresta de retorno mas não é aresta retrógrada. Concluimos, pelo teorema 2.9, que F não é redutível.

(\Leftarrow) Suponhamos que F não seja redutível: existem $T \in \text{PROF}(F)$ e $(v, w) \in \text{RT}(F, T)$ tais que w não domina v em F . Portanto, $w \neq r$, existe um caminho de r a v em F que evita w e, pela definição de núcleo, $r \in \text{NUC}_F(T, w)$. No entanto, w não domina r em F . ■

Como corolário, citamos o seguinte resultado, enunciado e demonstrado em (TARJAN, 1974):

Corolário 2.3

F é redutível se, e somente se, $\forall T \in \text{PROF}(F)$, $\forall v \in V$, $\forall w \in \text{NUC}_F(T, v)$, $v \rightarrow_T w$.

Prova:

(\Rightarrow) Suponhamos que existam $T \in \text{PROF}(F)$, $v \in V$ e $w \in \text{NUC}_F(T, v)$, $w \neq v$, tais que v não alcança w em T . Existe um caminho de r a w em T (e em F) que evita v . A prova segue de maneira idêntica à prova do item (\Rightarrow) do teorema 2.10.

(\Leftarrow) Supondo que F não seja redutível, existem $T \in \text{PROF}(F)$ e $(v, w) \in \text{RT}(F, T)$ tais que w não domina v . Portanto, $w \neq r$, existe um caminho de r a v em F que evita w e, pela definição de NUC, $r \in \text{NUC}_F(T, w)$. Mas w não alcança r em T . ■

Se F é redutível, o conjunto de arestas de retorno é único e independente da árvore de profundidade considerada. Portanto, pela definição, os núcleos dos vértices também independem da árvore e, para abreviar a notação, escreveremos, $\forall v \in V$, $\text{NUC}_F(v)$ em vez de $\text{NUC}_F(T, v)$. Além disso, como v domina os vértices em $\text{NUC}_F(v)$, o subgrafo de fluxo de F induzido por $\text{NUC}_F(v)$ com origem em v existe para todo vértice v , sendo denominado *região com entrada em v* e representado por $\text{REG}_F(v)$.

Se F não é redutível, é possível que este subgrafo induzido não exista para algum vértice, conforme ilustra a figura 2.9, onde $T = (\{r, v, a, b\}, \{(r, v), (v, a), (r, b)\}, r)$ é a árvore de profundidade considerada. Temos $\text{NUC}_F(T, v) = \{v, a, r, b\}$ e não existe o subgrafo de fluxo de F induzido por $\text{NUC}_F(T, v)$ com origem v , pois v não alcança nem r nem b .

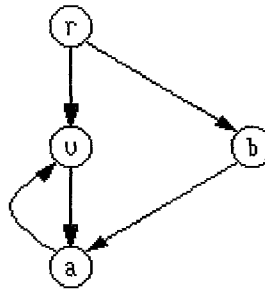


Figura 2.9: Inexistência do subgrafo de fluxo induzido por $\text{NUC}_F(T, v)$ com origem em v .

Em um grafo de fluxo redutível, um vértice v , por dominar os demais vértices em seu núcleo, é denominado *vértice cabeça* ou *vértice de entrada de $\text{NUC}_F(v)$* .

Teorema 2.11

Se $F = (V, E, r)$ é redutível, então $\text{NUC}_F(v)$ é fortemente conexo e $\text{REG}_F(v)$ é redutível, $\forall v \in V$.

Prova:

Se $\text{NUC}_F(v) = \{v\}$, o resultado é trivialmente válido. Do contrário, sejam $x, y \in \text{NUC}_F(v)$ distintos. Pela definição do conjunto NUC , concluímos que x e y alcançam v em

$\text{REG}_F(v)$. Pelo corolário 2.3, x e y são descendentes de v em qualquer árvore de profundidade de F , o que significa que existem caminhos de v a x e de v a y em $\text{REG}_F(v)$. Logo, x alcança y e y alcança x em $\text{REG}_F(v)$.

Suponhamos, por absurdo, que $\text{REG}_F(v)$ não seja redutível. Então, $\text{REG}_F(v)$ contém o subgrafo proibido $\text{SP}(v, x, y, z)$ e F contém $\text{SP}(r, x, y, z)$, o que contradiz o fato de F ser redutível. ■

2.10 Contrações

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, um subconjunto $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$ e $s \in S$. A *contração de S em s* é a função $\varphi: V \rightarrow (V - S) \cup \{s\}$ definida da seguinte maneira:

- (i) $\varphi(x) = s, \forall x \in S$;
- (ii) $\varphi(y) = y, \forall y \in V - S$.

O grafo de fluxo $\varphi(F)$, imagem de F por uma contração φ , é denominado *grafo contraído*.

A figura 2.10 mostra um exemplo de em que o subconjunto de vértices $\{a, b\}$, no grafo de fluxo mostrado à esquerda, foi contraído em a , gerando o grafo contraído à direita.



Figura 2.10: Um exemplo de contração.

É fundamental observar que:

- $\varphi(V) \subseteq V$, ou seja, os vértices não são renomeados por uma contração;
- contrações são funções sobrejetoras;
- a contração tem o efeito de condensar (identificar) um subconjunto de vértices em um de seus elementos.

Em um grafo de fluxo redutível, a contração de um subconjunto fortemente conexo em um de seus vértices produz um grafo contraído também redutível, conforme o próximo teorema.

Teorema 2.12

Se $F = (V, E, r)$ é redutível, $S \subseteq V$ é fortemente conexo e $s \in S$, então $\varphi(F)$ é também redutível, onde φ é a contração, em F , de S em s .

Prova:

Observemos que φ satisfaz as hipóteses do teorema 2.2: é sobrejetora e as imagens inversas são subconjuntos fortemente conexos.

Vamos mostrar a contrapositiva, supondo que $\varphi(F)$ não seja redutível. $\varphi(F)$, portanto, contém um subgrafo proibido $SP(r, x, y, z)$. Pelo teorema 2.2, caminhos em $\varphi(F)$ são imagens de caminhos em F . Portanto, F contém o subgrafo proibido $SP(r, a, b, c)$, onde $a \in \varphi^{-1}(x)$, $b \in \varphi^{-1}(y)$ e $c \in \varphi^{-1}(z)$. ■

A contrapositiva do teorema 2.12 é de especial interesse na caracterização de grafos de fluxo redutíveis: se a contração de um subconjunto fortemente conexo em um de seus vértices produzir um grafo contraído que não seja redutível, isto significa que o grafo original também não é redutível.

2.11 Expansões de Vértices em Grafos de Fluxo

A idéia de expansão de vértices em grafos pode ser encontrada em (VAN LEUWEEN, 1990). Estenderemos esse conceito aos grafos de fluxo, estabelecendo uma definição de expansão que terá propriedades importantes quanto à redutibilidade.

Sejam os grafos de fluxo $F = (V, E, r)$ e $G = (V', E', v)$ com apenas o vértice v , origem de G , em comum: $V \cap V' = \{v\}$. Uma *expansão, em F , de v por G* é um grafo de fluxo

$$H = (V \cup V', E \cup E' \cup K, r),$$

onde $K \subseteq V' \times A_F(v)$.

É importante observar, nesta definição, os seguintes pontos:

- os grafos F e G possuem apenas o vértice v em comum, origem de G ;
- o vértice v é substituído, em F , pelo grafo G , de maneira que o subgrafo de fluxo de H induzido por V' com origem v é idêntico a G ;
- as arestas de F e de G são mantidas em H ;
- cada aresta $(v, w) \in E$ dá origem a arestas da forma (x, w) , onde $x \in V' - \{v\}$, integrantes do conjunto K ;
- $A_H(v) = A_F(v) \cup A_G(v)$;
- $P_H(v) = P_F(v) \cup P_G(v)$.
- Se φ é a contração, em H , de V' em v , então $\varphi(H) = F$.

Se K é vazio, a expansão é *elementar*; se $K = (V' - \{v\}) \times A_F(v)$, a expansão é *total*; se $K \subset (V' - \{v\}) \times A_F(v)$, a expansão é *parcial*.

Na figura 2.11 vemos exemplos de expansões.

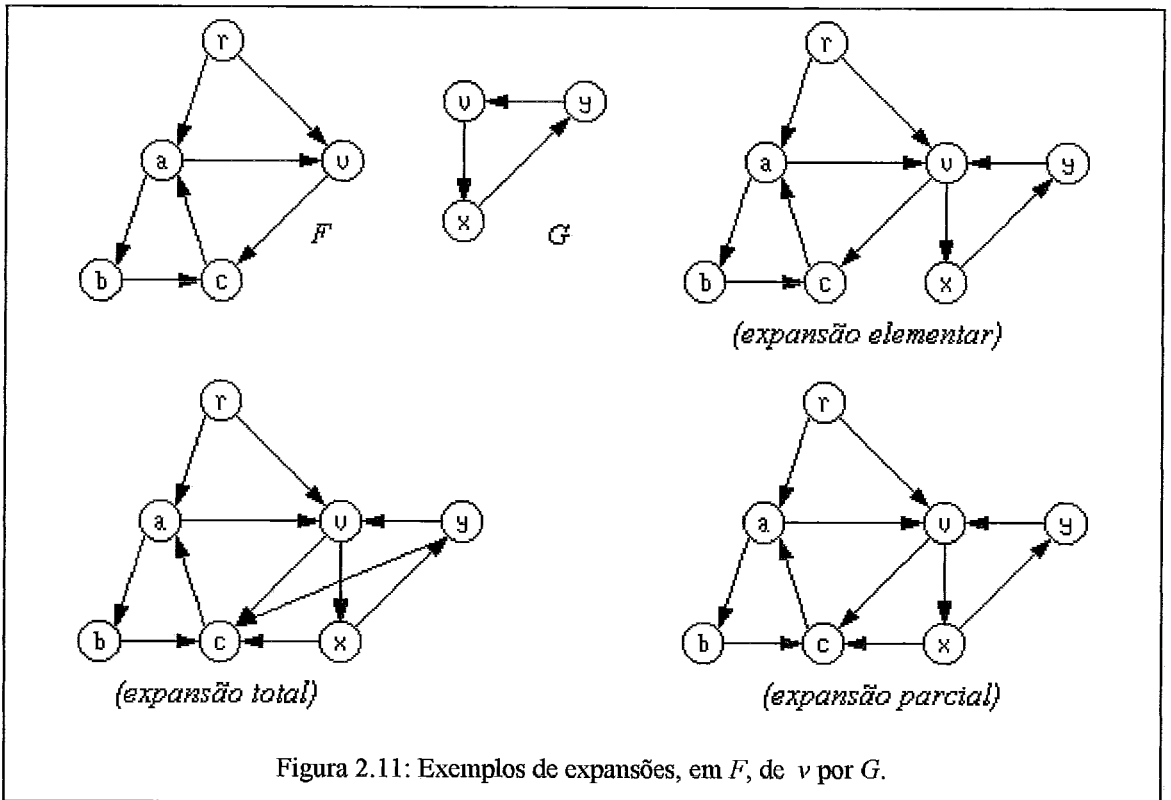


Figura 2.11: Exemplos de expansões, em F , de v por G .

O teorema seguinte analisa a expansão de um vértice em um grafo de fluxo redutível por um grafo de fluxo também redutível.

Teorema 2.13

Sejam os grafos de fluxo redutíveis $F = (V, E, r)$ e $G = (V', E', v)$ tais que $V \cap V' = \{v\}$. Qualquer expansão (elementar, parcial ou total), em F , de v por G é um grafo de fluxo também redutível.

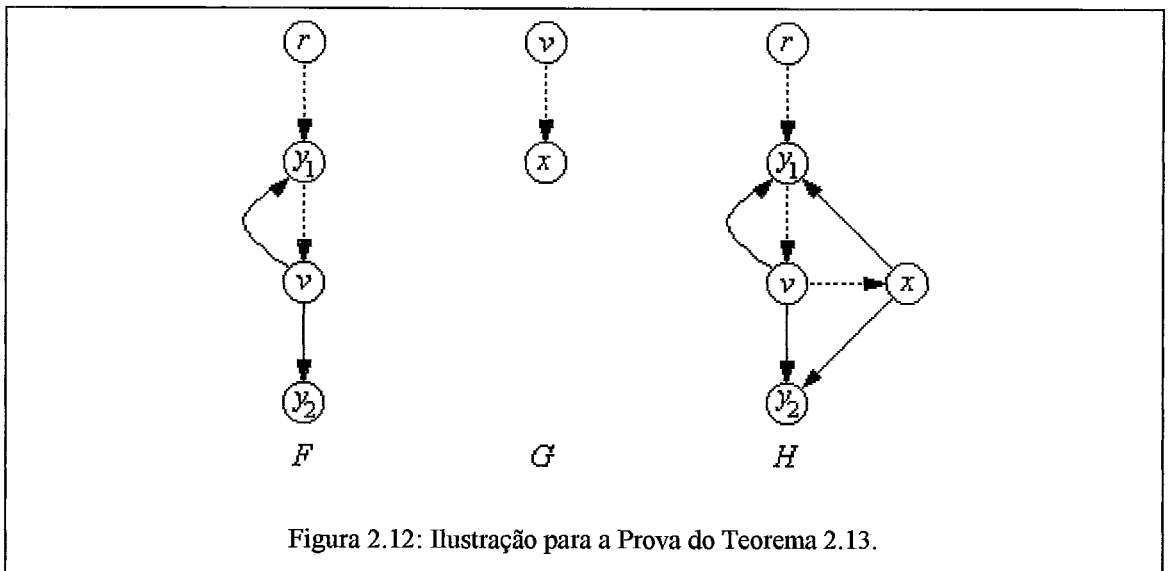
Prova.

Seja $H = (V'', E'', r)$ uma expansão, em F , de v por G . Para mostrar que H é redutível, devemos realizar sobre ele uma busca em profundidade, obtendo uma árvore de profundidade em relação a qual toda aresta de retorno seja aresta retrógrada.

Sejam $S = (V, E_S, r)$ e $T = (V', E_T, r')$ árvores de profundidade de F e G , respectivamente. Sabendo que $A_H(v) = A_F(v) \cup A_G(v)$, consideremos uma busca em profundidade em H na qual os vértices em $A_F(v)$ são visitados *antes* dos vértices em

$A_G(v)$, no momento em que o vértice v está sendo explorado. Seja $U = (V'', E_U, r)$ a árvore de profundidade decorrente desta busca.

É imediato ver que as arestas de E'' oriundas de E e de E' mantêm, em relação à árvore U , a mesma classificação que possuem em relação a S e T , respectivamente. Uma aresta $(x, y) \in K$, que não possui correspondente nos grafos originais, implica na existência da aresta $(v, y) \in E$, onde $y \in A_F(v)$, pela definição de expansão. Se (v, y) não for de retorno em relação a S , (x, y) será de cruzamento em relação a U . Se (v, y) for de retorno em relação a S , (x, y) também o será em relação a U . Neste último caso, como v domina, em H , todos os vértices pertencentes a V'' , (x, y) será aresta retrógrada de H , pois y domina v (porque y domina v em F) e v domina x . A figura 2.12 ilustra este fato.



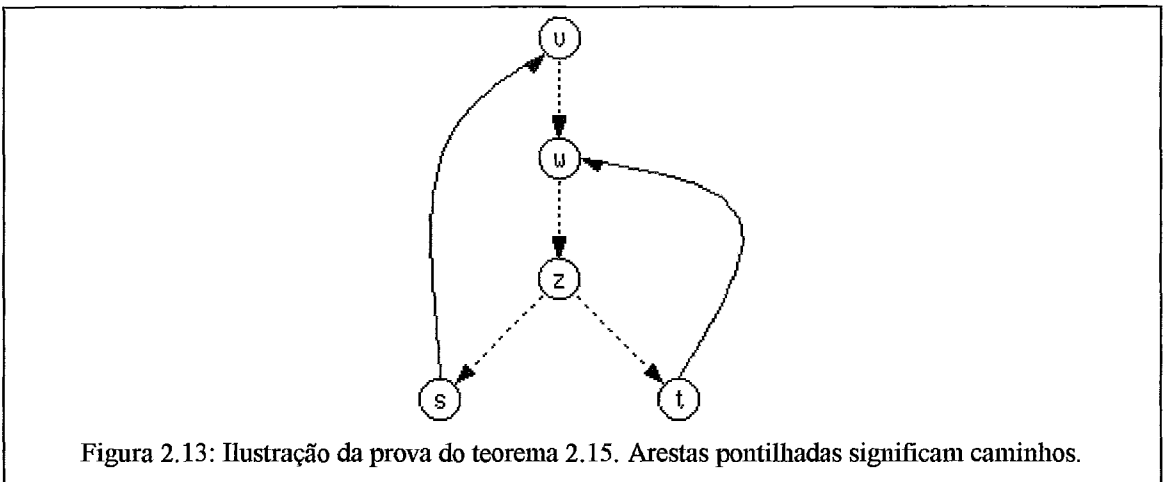
Portanto, as arestas de retorno de H em relação à árvore de profundidade U são arestas retrógradas e H é um grafo de fluxo redutível. ■

2.12 Pólos em Grafos de Fluxo Redutíveis

Dado um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$, um vértice $v \in V$ é um *pólo de F* quando v é o único vértice que recebe arestas retrógradadas em $\text{NUC}_F(v)$. Assim, podemos definir formalmente o *conjunto dos pólos de F* :

$$\text{POL}(F) = \{ v \in V \mid \text{NUC}_F(v) \neq \{v\} \text{ e, } \forall w \in \text{NUC}_F(v) - \{v\}, \text{NUC}_F(w) = \{w\} \}.$$

O núcleo de um pólo de F é chamado *núcleo polar*. É fácil ver que todo grafo de fluxo redutível cíclico possui pelo menos um pólo.



Teorema 2.14

Os núcleos polares de um grafo de fluxo redutível são disjuntos.

Prova:

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo redutível e $v, w \in V$, $v \neq w$, dois pólos de F . Suponhamos, por absurdo, que $\text{NUC}_F(v) \cap \text{NUC}_F(w) = \{z\}$. Pela definição de núcleo, existem $s \in \text{NUC}_F(v)$ e $t \in \text{NUC}_F(w)$ tais que $(s, v), (t, w) \in \text{RTG}(F)$ e existem caminhos de z a s e de z a t que evitam v e w , respectivamente. Como F é redutível, sabemos, pelo teorema 2.11, que v e w dominam z , donde v domina w ou w domina v . Sem perda de generalidade, suponhamos que v domine w , como na figura 2.13. Portanto, existe um

caminho de w a s que evita v , ou seja, $w \in \text{NUC}_F(v)$. Então v não é um pólo de F , pois a aresta (t, w) é retrógrada por hipótese. ■

2.13 Conclusões

Apresentamos, neste capítulo, uma revisão sobre grafos de fluxo redutíveis. Iniciamos com as definições de imagem de um digrafo através de uma função, estendida a grafos de fluxo, e de grafo de fluxo quociente, apresentadas nas seções 2.1 e 2.2. Essas definições permitiram-nos reelaborar a formulação original de redutibilidade, aqui revista como limite de uma seqüência de grafos de fluxo quociente.

Alguns resultados sobre busca em profundidade, dominação, DJ-grafo e arestas retrógradas foram mencionados nas seções 2.5, 2.6 e 2.7 por constituírem fundamento teórico indispensável à obtenção de caracterizações equivalentes para grafos de fluxo redutíveis. Dentre elas, destacamos duas principais, estudadas na seção 2.8: a inexistência do subgrafo proibido e o fato de as arestas de retorno obtidas em uma busca em profundidade serem arestas retrógradas, em que o vértice de chegada domina o vértice de partida. Os resultados sobre dominação serão utilizados no capítulo seguinte.

Os conceitos de núcleo e região (seção 2.9), contração (seção 2.10) e expansão de um vértice em um grafo de fluxo por outro grafo de fluxo (seção 2.11) serão de fundamental importância nos capítulos 4 e 5, tanto para a caracterização quanto para o estudo estrutural dos grafos de fluxo redutíveis-maximais. A definição que adotamos para núcleo difere da encontrada na literatura (TARJAN, 1974) pela inclusão do vértice-cabeça no conjunto. Para nossos propósitos, a forma adotada revelou-se mais adequada à definição de contração.

Capítulo 3

Manutenção Dinâmica da Redutibilidade

Neste capítulo, examinamos o comportamento de um grafo de fluxo redutível que sofre inserções de arestas, visando a manutenção da redutibilidade. A seção inicial é uma breve introdução aos conceitos relacionados aos algoritmos dinâmicos, seguida de um histórico sobre os algoritmos estáticos de reconhecimento. As seções seguintes constituem uma revisão sobre a manutenção dinâmica da relação de dominação em grafos, apresentada por SREEDHAR *et al.* (1994a, 1994b, 1995a, 1995b). Com base nesses conceitos, desenvolvemos um algoritmo que permite verificar se o acréscimo de uma aresta preserva a redutibilidade de um grafo de fluxo e, em caso positivo, incorpora dinamicamente a nova aresta, possibilitando novas inserções.

3.1 Introdução

Em situações reais, é freqüente a necessidade de atualizar a solução de um problema, em virtude de alterações nos dados, sem recomputá-la inteiramente. Em grafos, especial atenção tem sido dada ao estudo da manutenção dinâmica de propriedades, como conectividade e planaridade (DI BATTISTA e TAMASSIA, 1989), quando o grafo sofre inserção ou remoção de vértices ou arestas (AUSIELLO *et al.*, 1991). Os algoritmos elaborados com este fim utilizam estruturas de dados específicas, que permitem verificar se o grafo alterado satisfaz a propriedade sendo mantida sem submetê-lo ao algoritmo tradicional de reconhecimento.

Seja P uma propriedade satisfeita por digrafos (ou grafos de fluxo). O problema da *manutenção de P sob inserção de arestas* consiste em, a partir de um digrafo $D = (V, E)$ que satisfaz P e uma seqüência de $k > 0$ pares distintos (x_i, y_i) tais que $x_i, y_i \in V$ e $(x_i, y_i) \notin E$, para $i = 1, \dots, k$, realizar o seguinte processamento:

Para $i := 1$ até k faça

Se $D + (x_i, y_i)$ satisfaz P então

$D := D + (x_i, y_i)$

A *abordagem estática* para elaboração de um algoritmo que realize o processamento indicado pressupõe a disponibilidade de um algoritmo eficiente de reconhecimento para a propriedade P. No i -ésimo passo, a aresta (x_i, y_i) é acrescentada ao digrafo obtido no passo $i - 1$. O digrafo resultante é, então, submetido ao algoritmo de reconhecimento, que produz *sim* ou *não* como resposta, caso o digrafo satisfaça ou não P, respectivamente. Se a resposta for negativa, a aresta (x_i, y_i) deve ser removida.

Em contrapartida, um algoritmo elaborado segundo a *abordagem dinâmica* mantém estruturas de dados específicas que permitem verificar, no i -ésimo passo, se $D + (x_i, y_i)$ satisfaz P levando em conta informações obtidas na iteração anterior. Caso afirmativo, as estruturas devem ser atualizadas, refletindo a inserção da aresta (x_i, y_i) .

Um algoritmo elaborado segundo a abordagem estática é chamado *algoritmo estático* para manutenção de P sob inserção de arestas em digrafos. Naturalmente, um *algoritmo dinâmico* é aquele concebido segundo a abordagem dinâmica.

A manutenção dinâmica da redutibilidade em grafos de fluxo possui importantes aplicações no desenvolvimento de técnicas incrementais de compilação (AHO *et al.*, 1986). Nesta abordagem, destacam-se algoritmos para atualizar informações concernentes ao fluxo de dados (*data flow analysis*) de um programa-fonte estruturado que sofre alterações dinâmicas, como inserção ou remoção de comandos e variáveis, permanecendo estruturados. Como o conceito de redutibilidade é definido a partir da relação de dominação (o vértice cabeça de um núcleo deve dominar os demais vértices do núcleo), é natural que os algoritmos para manutenção dinâmica desta propriedade sejam baseados, direta ou indiretamente, na manutenção dinâmica da relação de dominação.

Dentre os principais algoritmos encontrados na literatura que mantêm dinamicamente a relação de dominação em grafos de fluxo, podemos citar: o de CARROL e RYDER

(1988) e o de REPS e RAMALINGAN (1994). Em trabalhos posteriores, SREEDHAR e GAO (1994) introduzem o DJ-grafo associado a um grafo de fluxo, cuja definição mencionamos na seção 2.6. Esta estrutura mostrou-se a mais apropriada para a manutenção dinâmica da relação de dominação, suplantando os trabalhos anteriores.

O objetivo deste capítulo é desenvolver um algoritmo dinâmico para manutenção da redutibilidade em grafos de fluxo que sofrem inserções de arestas, utilizando o DJ-grafo como estrutura de dados.

3.2 Um Histórico do Reconhecimento de Grafos de Fluxo Redutíveis

A formulação original do conceito de redutibilidade baseia-se na identificação de subconjuntos de vértices denominados intervalos (COCKE, 1970, ALLEN, 1970). Se for baseado nesta definição, o algoritmo para reconhecimento de grafos de fluxo redutíveis deve construir, de forma implícita ou explícita, a seqüência derivada, conforme foi mostrado na seção 2.4, podendo ser implementado com complexidade polinomial em tempo e espaço no tamanho do grafo de fluxo. Por se tratar de um subproblema freqüente em algoritmos para otimização de código em compiladores, diversas caracterizações equivalentes para redutibilidade foram propostas, contribuindo para a obtenção de algoritmos de reconhecimento mais eficientes.

A primeira caracterização, encontrada em (HECHT e ULLMAN, 1972), introduz um par de transformações, denominadas T_1 e T_2 . Seus efeitos são: remover arestas reflexivas (T_1) e condensar um vértice distinto da origem com seu único predecessor imediato (T_2). Oportunamente aplicadas, essas transformações produzem um novo grafo de fluxo transformado, com menos arestas que o original. A aplicação iterada dessas transformações, enquanto possível e em qualquer ordem, produz um grafo de fluxo trivial se, e somente se, o grafo de fluxo original é redutível por intervalos. Como a aplicação de T_1 consome tempo $O(|V|)$ e a aplicação de T_2 consome tempo $O(|V|)$ e reduz em uma unidade o número de vértices do grafo de fluxo, é imediato desenvolver, baseado nessas transformações, um algoritmo $O(|V|^2)$ em tempo para reconhecer se um

grafo de fluxo é redutível. Hopcroft e Ullman, em (HOPCROFT e ULLMAN, 1972), modificaram essa complexidade para $O(|E|\log|E|)$.

TARJAN (1974) apresentou a caracterização da redutibilidade em função de núcleos e suas contrações. O algoritmo de reconhecimento baseado nesta nova caracterização processa uma seqüência de grafos de fluxo obtidos por contrações sucessivas de núcleos. Através das operações UNION e FIND sobre uma coleção de conjuntos disjuntos de vértices é evitada a construção explícita desta seqüência. A complexidade do reconhecimento é a complexidade de executar uma seqüência de até $|V| - 1$ operações UNION e $|E|$ operações FIND, na época avaliada em $O(|E|\log^*|E|)$, onde

$$\log^*x = \min \{k \mid \log^{(k)}x \leq 1\},$$

sendo

$$\log^{(k)}x = \begin{cases} \log x, & \text{se } k = 0 \\ \log(\log^{(k-1)}x), & \text{se } k > 0 \end{cases}.$$

Em (TARJAN, 1975, TARJAN, 1979, BANACHOWSKI, 1980), é demonstrado que a complexidade de tempo para executar uma seqüência de $n - 1$ UNIONs e m FINDs é de $\Theta(n + m\alpha(m, n))$, onde α é uma função, relacionada ao inverso da função de Ackermann, que cresce muito lentamente com a razão m/n . O algoritmo possui, na prática, desempenho equivalente ao de um algoritmo linear, não obstante sua complexidade teórica não-linear. A partir deste resultado, o reconhecimento de grafos de fluxo redutíveis através do algoritmo de Tarjan consome tempo $O(|E|\alpha(|E|, |V|))$ e espaço $O(|E|)$, já que $|E| \geq |V| - 1$.

GABOW e TARJAN (1983) apresentaram um algoritmo para um caso particular da execução de uma seqüência de UNIONs e FINDs em que a árvore de uniões é conhecida a priori. Mediante um particionamento conveniente desta árvore, é obtida, de forma artesanal, a complexidade linear em espaço e tempo. O reconhecimento da redutibilidade satisfaz as restrições usadas na particularização, podendo ser considerado linear, em tempo e espaço, no tamanho do grafo de fluxo.

Maiores detalhes sobre as operações UNION e FIND e sobre os algoritmos de Tarjan e Gabow podem ser encontrados em (PIRES, 1990), um texto em português sobre o assunto.

3.3 DJ-Grafos e Fronteiras de Dominação

Na seção 2.6, definimos o *grafo de dominação e junção (DJ-grafo)* associado a um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ qualquer como $DJ(F) = (V, E \cup E_D, r)$, onde E_D é o conjunto de arestas da árvore de dominadores de F : $E_D = \{(DI_F(v), v) \mid v \in V - \{r\}\}$. As arestas de $DJ(F)$ pertencentes a E_D são denominadas *arestas de dominação* (ou *D-arestas*), ao passo que as demais arestas, pertencentes a $E - E_D$, são *arestas de junção* (ou *J-arestas*). Observamos também que $E \cap E_D \neq \emptyset$, pois $\{r\} \times A_F(r) \subseteq E \cap E_D$. As arestas retrógradadas de F , que partem de um vértice em direção a um dominador, são J-arestas. Recordemos que a notação $v \text{ dom}_F w$ significa v domina w em F ; $v \text{ dom}_F^p w$ significa v domina propriamente w em F ($v \text{ dom}_F w$ e $v \neq w$).

O lema 3.1, de (SREEDHAR *et al.*, 1994a), mostra-nos uma propriedades das J-arestas:

Lema 3.1

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer, $T = (V, E_D, r)$ a árvore de dominadores de F e $DJ(F) = (V, E \cup E_D, r)$ o DJ-grafo de F . Se (x, y) é uma J-aresta e $y \neq r$, então $DI_F(y) \text{ dom}_F^p x$.

Prova:

Se $DI_F(y)$ não domina x em F , existe um caminho r, \dots, x, y que evita $DI_F(y)$, uma contradição. Como (x, y) é uma J-aresta, não podemos ter $x = DI_F(y)$ (do contrário (x, y) seria uma D-aresta). Logo, $DI_F(y)$ domina propriamente x em F . ■

O corolário 3.1, também de (SREEDHAR *et al.*, 1994), relaciona os níveis das extremidades de uma J-aresta com respeito à árvore de dominadores:

Corolário 3.1

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer, $T = (V, E_D, r)$ a árvore de dominadores de F e $DJ(F) = (V, E \cup E_D, r)$ o DJ-grafo de F . Se (x, y) é uma J-aresta, então $L_T(y) \leq L_T(x)$.

Prova:

Se $y = r$, $L_T(y) = 0$ e o resultado é imediato. Se $y \neq r$, pelo lema 3.1, $DI_F(y)$ $\text{domp}_F x$. Logo, $L_T(DI_F(y)) = L_T(y) - 1 < L_T(x)$, donde $L_T(y) \leq L_T(x)$. ■

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ qualquer, $T = (V, E_D, r)$ sua árvore de dominadores e $DJ(F) = (V, E \cup E_D, r)$ seu DJ-grafo. A *fronteira de dominação* de um vértice $v \in V$ é definida como o conjunto dos vértices que possuem predecessores imediatos dominados por v e que, no entanto, não são propriamente dominados por v (SREEDHAR *et al.*, 1994). Matematicamente,

$$FD_F(v) = \{ w \in V \mid P_F(w) \in \text{DOM}_F(v) \} - (\text{DOM}_F(v) - \{v\}).$$

Vale observar que $FD_F(r) = \emptyset$, já que r domina todos os vértices.

A fronteira de dominação de um vértice $v \in V$ pode ser obtida por inspeção visual do DJ-grafo de F . Como o conjunto de vértices dominados por v em F , $\text{DOM}_F(v)$, coincide com a sub-árvore de T com raiz v , representada por $SA_T(v)$, $FD_F(v)$ é o conjunto dos vértices de chegada de todas as J-arestas que partem de vértices em $SA_T(v)$ em direção a vértices não pertencentes a $SA_T(v)$. Um algoritmo para obter $FD_F(v)$ deve efetuar um percurso da sub-árvore $SA_T(v)$, no qual a visita a um vértice consiste na inspeção das J-arestas dele divergentes.

Na figura 3.1, em que são mostrados um grafo de fluxo F à esquerda e seu DJ-grafo à direita, destacamos:

$$FD_F(r) = \emptyset$$

$$FD_F(a) = FD_F(b) = \{c\}$$

$$FD_F(c) = FD_F(e) = \{a\}$$

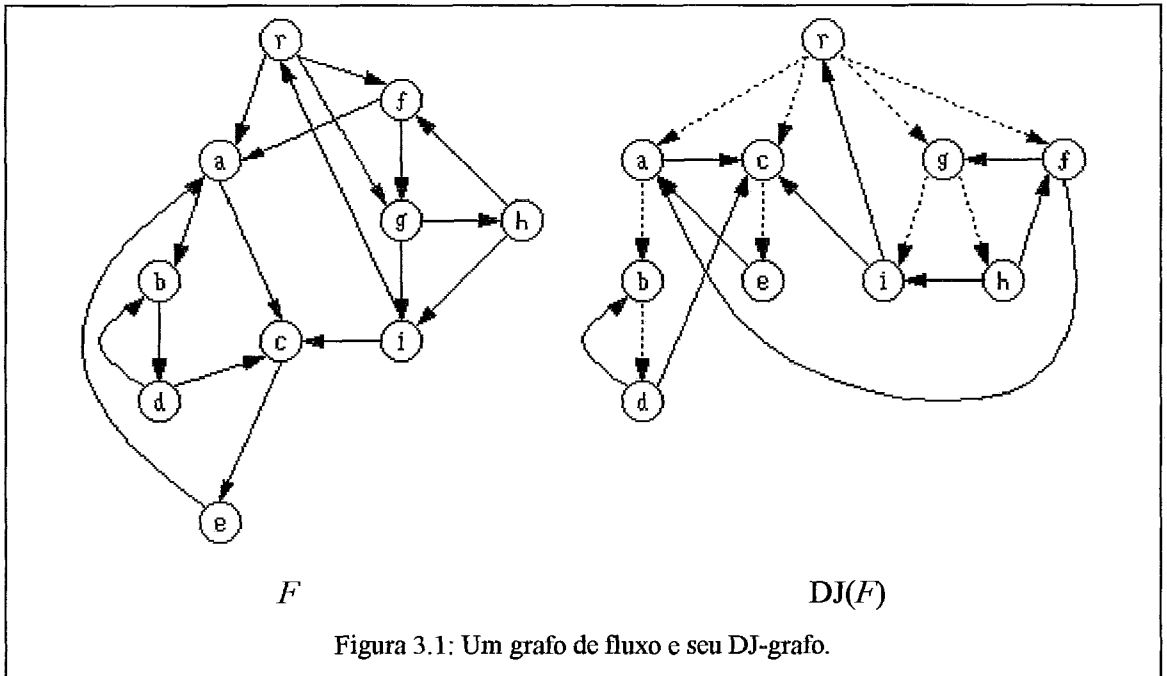
$$FD_F(d) = \{c, b\}$$

$$FD_F(f) = \{a, g\}$$

$$FD_F(g) = \{c, f, r\}$$

$$FD_F(h) = \{i, f\}$$

$$FD_F(i) = \{r, c\}$$



O conceito de fronteira de dominação pode ser estendido a um subconjunto não-vazio de vértices $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq V$, $k > 0$, da seguinte maneira:

$$FD_F(\{s_1, s_2, \dots, s_k\}) = FD_F(s_1) \cup FD_F(s_2) \cup \dots \cup FD_F(s_k).$$

A *fronteira de dominação estendida* de $S \subseteq V$, representada por $FDE_F(S)$, é o limite da seqüência de conjuntos:

$$FDE_F^{(1)}(S) = FD_F(S)$$

$$FDE_F^{(k)}(S) = FD_F(S \cup FDE_F^{(k-1)}(S)), \quad k > 1.$$

Observe que $FD_F(S) \subseteq FDE_F(S)$.

Seja calcular $FDE_F(\{f\})$ para o grafo de fluxo da figura 3.1:

$$\begin{aligned}
 FDE_F^{(1)}(\{f\}) &= FD_F(\{f\}) &&= \{a, g\} \\
 FDE_F^{(2)}(\{f\}) &= FD_F(\{a, f, g\}) &&= FD_F(\{a\}) \cup FD_F(\{f\}) \cup FD_F(\{g\}) \\
 &&&= \{a, c, f, g, r\} \\
 FDE_F^{(3)}(\{f\}) &= FD_F(\{a, c, f, g, r\}) &&= FD_F(\{a\}) \cup FD_F(\{c\}) \cup FD_F(\{f\}) \cup \\
 &&&\cup FD_F(\{g\}) \cup FD_F(\{r\}) = \{a, c, f, g, r\} = \\
 &&&FDE_F^{(2)}(\{f\}).
 \end{aligned}$$

Logo, $FDE_F(\{f\}) = \{a, c, f, g, r\}$.

O lema e o corolário seguintes, encontrados em (SREEDHAR *et al.*, 1994a), estendem os resultados do lema 3.1 e do corolário 3.1, válidos para J-arestas, à fronteira de dominação.

Lema 3.2

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo qualquer e $y \in FD_F(x)$, $y \neq r$, então $DI_F(y) \text{ domp}_F x$.

Prova:

Como $y \in FD_F(x)$, $y \neq r$, pela definição de fronteira de dominação, x não domina propriamente y e existe $z \in P_F(y)$ tal que $x \text{ dom}_F z$ e (z, y) é uma J-aresta. Pelo lema 3.1, $DI_F(y) \text{ domp}_F z$. Portanto, z é simultaneamente dominado por x e $DI_F(y)$, donde concluímos que $DI_F(y) \text{ dom}_F x$. Como x não domina propriamente y , temos $DI_F(y) \neq x$, donde $DI_F(y) \text{ domp}_F x$. ■

Corolário 3.2

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo qualquer e $y \in FD_F(x)$, então $L_T(y) \leq L_T(x)$.

A mesma propriedade se conserva, ainda, para a fronteira de dominação estendida, conforme o seguinte teorema e seu corolário (SREEDHAR *et al.*, 1994a).

Teorema 3.1

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo e $y \in \text{FDE}_F(x)$, $y \neq r$, então $\text{DI}_F(y) \text{domp}_F x$.

Prova:

$y \in \text{FDE}_F(x)$, $y \neq r$, implica na existência de vértices t_0, t_1, \dots, t_k tais que $t_0 = y$, $t_k = x$ e $t_i \in \text{FD}_F(t_{i+1})$, para $0 \leq i < k$. Logo, $\text{DI}_F(t_i) \text{domp}_F t_{i+1}$, donde $\text{DI}_F(t_i) \text{dom}_F \text{DI}_F(t_{i+1})$. Por transitividade, $\text{DI}_F(t_0) \text{dom}_F \text{DI}_F(t_k)$, ou seja, $\text{DI}_F(y) \text{dom}_F \text{DI}_F(x)$, o que equivale a $\text{DI}_F(y) \text{domp}_F x$. ■

Corolário 3.3

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo qualquer e $y \in \text{FDE}_F(x)$, então $L_T(y) \leq L_T(x)$.

3.4 Determinação da Fronteira de Dominação Estendida

Nesta seção, resumiremos o algoritmo linear, apresentado em (SREEDHAR *et al.*, 1995b), para calcular a fronteira de dominação estendida de um vértice em um grafo de fluxo.

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, $T = (V, E_D, r)$ sua árvore de dominadores e $\text{DJ}(F) = (V, E \cup E_D, r)$ seu DJ-grafo. O algoritmo proposto opera sobre o DJ-grafo de F , que suporemos armazenado na forma de listas de adjacência, $A_{\text{DJ}(F)}(v)$, $\forall v \in V$. A construção de $\text{DJ}(F)$ exige a determinação do dominador imediato de cada vértice. Dentre os diversos algoritmos que realizam esta tarefa, citamos o de HAREL (1985), que o faz em tempo linear.

Uma lista de prioridades, na qual vértices são inseridos e removidos, é utilizada no processamento. A prioridade de um vértice é dada por seu nível na árvore de dominadores. O primeiro vértice a ser inserido na lista é aquele cuja fronteira queremos determinar; na remoção, excluimos da estrutura o vértice de maior prioridade. Em (SREEDHAR *et al.*, 1995b), o corolário 3.3 é usado para provar, por indução, que, uma vez removido um vértice de nível ℓ , jamais será inserido um vértice de nível superior a ℓ .

Tradicionalmente, listas de prioridades são implementadas através de *heaps* (SZWARCFITER e MARKENZON, 1994). A propriedade mencionada no parágrafo anterior permite uma implementação alternativa, mais simples, que contribui para a melhoria da complexidade. Essa implementação é realizada com um vetor L de $|V|$ listas e um índice (nível_corrente) para a lista não-vazia de maior nível no momento. Os procedimentos Inicializa_Estrutura, Insere e Retira, descritos a seguir, gerenciam essa estrutura.

ALGORITMO: MANIPULAÇÃO DA LISTA DE PRIORIDADES

Variáveis Globais

```
nível_corrente: inteiro;
L              : vetor [0 .. |V| - 1] de listas de vértices;
niv(v)        : nível do vértice  $v$  em  $T$ ,  $\forall v \in V$ ;
```

```
proc Inicializa_Estrutura;
```

```
  variáveis locais
```

```
    nível : inteiro;
```

```
  início
```

```
    Para nível := 0 até |V| - 1 faça
```

```
      L[nível] :=  $\emptyset$ ;
```

```
    nível_corrente := |V| - 1
```

```
  fim;
```

```
proc Insere (v : Vértice);
```

```
  início
```

```
    Inclua  $v$  em L[niv(v)]
```

```
  fim;
```

```

função Retira : Vértice;
variáveis locais
  w : Vértice;
início
  Enquanto nível_corrente ≥ 0 faça
    se L[nível_corrente] ≠ ∅ então
      Escolha w ∈ L[nível_corrente];
      Retire w de L[nível_corrente];
      Retorne (w)
    fim;

    nível_corrente := nível_corrente - 1
  fim;

  Retorne (NULL)
fim;

```

O cálculo de $FDE_F(v)$ inicia-se com a inserção de v na lista de prioridade. Enquanto essa lista contiver elementos, dela retiramos w , o vértice de maior prioridade (nível), calculando $FD_F(w)$. Um vértice de $FD_F(w)$ é incluído em $FDE_F(v)$ e na lista de prioridade se tiver nível menor ou igual ao de v (corolário 3.3).

A determinação de $FD_F(w)$ resume-se ao percurso da sub-árvore $SA_T(w)$, através das D-arestas. Na visita a um vértice $x \in SA_T(w)$, examinamos as J-arestas da forma (x, z) . O vértice z pertencerá a $FD_F(w)$ se tiver nível menor ou igual ao de w , mas só será incluído em $FDE_F(v)$ se tiver nível menor ou igual ao de v . A distinção entre D- e J-arestas é feita por comparação dos níveis das extremidades: se $y \in A_{DJ(F)}(x)$ e $L_T(x) = L_T(y) - 1$, (x, y) é uma D-aresta; do contrário, certamente $L_T(x) \leq L_T(y)$ e (x, y) é uma J-aresta.

Para evitar que um vértice seja inserido mais de uma vez na lista de prioridades e na fronteira sendo calculada, SREEDHAR e GAO (1994) utilizam os seguintes rótulos lógicos, associados a cada vértice $v \in V$.

visitado(v)	v já foi visitado durante o cálculo da fronteira
depositado(v)	v já foi depositado na estrutura
na_fronteira(v)	v já foi inserido em Fronteira

Estes rótulos são inicializados juntamente com a leitura do grafo.

```

proc Calcula_Fronteira_Estendida (v : Vértice);
variáveis locais
  w : Vértice;
início
  Inicializa_Estrutura;
  Fronteira := ∅;
  nível_corrente := niv(v);
  Insere (v); depositado(v) := verdadeiro;

  w := Retira;
  Enquanto w ≠ NULL faça
    Calcula_Fronteira (w, niv(w));
    w := Retira
  fim
fim;

proc Calcula_Fronteira (v : Vértice, nível_máximo : inteiro);
variáveis locais
  w : Vértice;
início
  visitado(v) := verdadeiro;
  Para w ∈ Adj(E)(v) faça
    se niv(v) = niv(w) - 1 então
      se não visitado (w) então
        Calcula_Fronteira (w, nível_máximo)
      caso contrário
        se (não na_frenteira(w)) e (niv(w) ≤ nível_máximo) então
          Inclua w em Fronteira;
          na_frenteira(w) := verdadeiro;
          se não depositado(w) então
            Insere (w);
            depositado(w) := verdadeiro
          fim
        fim
      fim
    fim
  fim
fim;

```

A correção deste algoritmo, bem como sua complexidade $O(|E|)$ em tempo e espaço, no pior caso, são demonstrados em (SREEDHAR *et al.*, 1995b).

3.5 Manutenção Dinâmica da Relação de Dominação

Vamos descrever em detalhes, nesta seção, o algoritmo proposto em (SREEDHAR *et al.*, 1995a) para manter dinamicamente a árvore de dominadores de um grafo de fluxo que sofre inserções de arestas.

Sejam um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ qualquer, $T = (V, E_D, r)$ sua árvore de dominadores e $DJ(F) = (V, E \cup E_D, r)$ seu DJ-grafo. Sejam $x, y \in V$, $x \neq y$, tais que $(x, y) \notin E$. Interessamos obter $DJ(F + (x, y))$ a partir de $DJ(F)$ sem reconstruí-lo totalmente. Em outras palavras, que alterações são provocadas no DJ-grafo quando o grafo original sofre a inserção de uma aresta? Esta pergunta fica bem respondida se identificarmos as alterações produzidas na árvore de dominadores.

O acréscimo de uma aresta cria novos caminhos no grafo de fluxo aumentado, mantendo caminhos do grafo de fluxo original. O lema 3.3 seguinte é consequência imediata desta observação.

Lema 3.3

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer e $x, y \in V$, $x \neq y$ tais que $(x, y) \notin E$. Se $v \text{ dom}_{F+(x,y)} w$, então $v \text{ dom}_F w$.

Prova:

Basta ver que, se v não domina w em F , então v também não domina w em $F + (x, y)$, pois os caminhos de r a w que evitam v em F são mantidos em $F + (x, y)$. ■

O lema 3.4 nos diz que o MDC entre $\{x, y\}$ se conserva quando a aresta (x, y) é acrescentada a F .

Lema 3.4

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer e $x, y \in V$, $x \neq y$ tais que $(x, y) \notin E$. Então $\text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\} = \text{MDC}_F\{x, y\}$.

Prova:

Chamemos $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$ e $z' = \text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\}$. Pelo lema 3.6, z' também domina x e y em F . Logo, $z' \text{ dom}_F z$, pois z é o $\text{MDC}_F\{x, y\}$.

A adição da aresta (x, y) não cria caminhos em $F + (x, y)$ de r a x ou de r a y que evitem z . Logo, z domina x e y em $F + (x, y)$. Como z' é o $\text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\}$, $z \text{ dom}_{F+(x,y)} z'$. Pelo lema 3.3 $z \text{ dom}_F z'$.

Como dom_F é anti-simétrica, $z' \text{ dom}_F z$ e $z \text{ dom}_F z'$ acarreta $z = z'$. ■

Lema 3.5

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer, $x, y \in V$, $x \neq y$ tais que $(x, y) \notin E$ e $z = \text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\} = \text{MDC}_F\{x, y\}$. Então $\text{DOM}_{F+(x,y)}(z) = \text{DOM}_F(z)$.

Prova:

Pelo lema 3.3, fica claro que $\text{DOM}_{F+(x,y)}(z) \subseteq \text{DOM}_F(z)$. Seja $u \in \text{DOM}_F(z)$ e suponhamos que $u \notin \text{DOM}_{F+(x,y)}(z)$. Portanto, existe um caminho de r a u que evita z em $F + (x, y)$ e que obrigatoriamente usa a aresta (x, y) acrescentada: r, \dots, x, y, \dots, u . Logo, existia em F um caminho de r a x que evita z , uma contradição. Então, $\text{DOM}_F(z) \subseteq \text{DOM}_{F+(x,y)}(z)$ e a igualdade se verifica. ■

Um vértice é *afetado pela inserção de uma aresta* quando muda de dominador imediato no grafo aumentado. Formalmente, definimos o conjunto dos vértices afetados pela inserção da aresta (x, y) em F :

$$\text{Afetados}_F(x, y) = \{ w \in V \mid \text{DI}_{F+(x,y)}(w) \neq \text{DI}_F(w) \}.$$

Vale notar que um vértice w é afetado pela inserção da aresta (x, y) quando, no grafo aumentado $F + (x, y)$, existir um caminho $r, \dots, \text{MDC}_F\{x, y\}, \dots, x, y, \dots, w$ que evita $\text{DI}_F(w)$, acarretando, portanto, a mudança de dominador imediato. Vale também observar que, necessariamente, $y \rightarrow_F w$.

O próximo lema mostra-nos que apenas os vértices dominados por $\text{MDC}_F\{x, y\}$ em F podem ser afetados pela adição da aresta (x, y) a F . Tais vértices permanecem dominados por $\text{MDC}_F\{x, y\}$, já que, pelo lema 3.7, $\text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\} = \text{MDC}_F\{x, y\}$.

Lema 3.6

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer, $x, y \in V$, $x \neq y$ tais que $(x, y) \notin E$ e $z = \text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\} = \text{MDC}_F\{x, y\}$. Então $\text{Afetados}_F(x, y) \subseteq \text{DOM}_F(z)$.

Prova:

Vamos mostrar a contrapositiva: se $u \notin \text{DOM}_F(z)$, então $u \notin \text{Afetados}_F(x, y)$.

Suponhamos, por absurdo, que $u \in \text{Afetados}_F(x, y)$. Logo, $\text{DI}_F(u) \neq \text{DI}_{F+(x,y)}(u)$ e a adição da aresta (x, y) cria um caminho $r, \dots, z, \dots, x, y, \dots, u$, em $F + (x, y)$, que evita $\text{DI}_F(u)$. Portanto, existe, em F , o caminho $r, \dots, z, \dots, y, \dots, u$, que evita $\text{DI}_F(u)$, uma contradição. ■

O teorema seguinte afirma que o novo dominador imediato dos vértices afetados pela inserção da aresta (x, y) é $\text{MDC}_F\{x, y\}$.

Teorema 3.2

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer, $x, y \in V$, $x \neq y$ tais que $(x, y) \notin E$ e $z = \text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\} = \text{MDC}_F\{x, y\}$. Então $\text{DI}_{F+(x,y)}(u) = z, \forall u \in \text{Afetados}_F(x, y)$.

Prova:

Sejam $u \in \text{Afetados}_F(x, y)$, $v = \text{DI}_F(u)$ e $v' = \text{DI}_{F+(x,y)}(u)$. Pela definição de vértice afetado, devemos ter $v \neq v'$. Como $\text{dom}_{F+(x,y)} \subseteq \text{dom}_F$, pelo lema 3.3, podemos afirmar que $v' \text{ dom}_F u$. Mas $v \text{ dom}_F u$, donde, pelo lema 2.5, $v' \text{ dom}_F v$ ou $v \text{ dom}_F v'$. Como v é o dominador imediato de u em F , resta-nos que $v' \text{ dom}_F v$.

Observemos que v não domina u em $F + (x, y)$; do contrário, como $v' = \text{DI}_{F+(x,y)}(u)$, teríamos $v \text{ dom}_{F+(x,y)} v'$, acarretando, pelo lema 3.3, $v \text{ dom}_F v'$, que já vimos ser impossível.

Portanto, a adição da aresta (x, y) cria, em $F + (x, y)$, um caminho de r a u que evita v , mas que passa obrigatoriamente por v' : $r, \dots, v', \dots, x, y, \dots, u$. É claro que v' domina x e y em $F + (x, y)$, do contrário existiria um caminho r, \dots, x, y, u que evita v' , contradizendo $v' = \text{DI}_{F+(x,y)}(u)$. Logo, $v' \text{ dom}_{F+(x,y)} z$, do contrário o $\text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\}$ seria v' e não z . Do lema 3.6, sabemos que $z \text{ dom}_F u$. Como $\text{DOM}_F(z) = \text{DOM}_{F+(x,y)}(z)$ (lema 3.5), temos $v' \text{ dom}_{F+(x,y)} z \text{ dom}_{F+(x,y)} u$. Sendo $v' = \text{DI}_{F+(x,y)}(u)$, resta-nos concluir que $v' = z$. ■

O lema seguinte será importante na prova do teorema 3.5, que determinará com precisão, o conjunto de vértices afetados pela inserção de uma aresta (x, y) em um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$.

Lema 3.7

Sejam $F = (V, E, r)$ e $u, w \in V$ tais que $w \rightarrow_F u$ e $u \notin \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$. Em qualquer caminho de w a u em F existe um vértice $s \in \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$ tal que $s \text{ dom}_F u$.

Prova:

Se $w \text{ dom}_F u$, $s = w$. Do contrário seja P um caminho de w a u e s o vértice mais próximo de u em P tal que $s \in \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$ (no caso extremo, $s = w$).

Afirmamos que todos os vértices em P entre s e u são dominados por s . Do contrário, sejam t o primeiro vértice em P entre s e u que não seja dominado por s e z o vértice anterior a t , também entre s e u , que é dominado por s (eventualmente, $z = s$). Portanto, (z, t) é uma J-aresta e $t \in \text{FD}_F(s)$. Como $s \in \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$ e $t \neq w$, temos que $t \in \text{FDE}_F(w)$, uma contradição, já que s é, por construção, o único vértice de P entre s e u que pertence a $\text{FDE}_F(w)$.

Afirmamos também que s domina propriamente u . Do contrário, teríamos $u \in \text{FD}_F(s)$ e, conseqüentemente, $u \in \text{FDE}_F(w)$, contrariando a hipótese do lema. ■

Teorema 3.3

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer, $T = (V, E_D, r)$ sua árvore de dominadores, $x, y \in V$, $x \neq y$ tais que $(x, y) \notin E$ e $z = \text{MDC}_{F+(x,y)}\{x, y\} = \text{MDC}_F\{x, y\}$. Então $\text{Afetados}_F(x, y) = \{w \in \{y\} \cup \text{FDE}_F(y) \mid L_T(w) > L_T(z) + 1\}$.

Prova:

(\subseteq) Seja $w \in \text{Afetados}_F(x, y)$. Pelo lema 3.6, $w \in \text{DOM}_F(z)$, ou seja, $L_T(w) \geq L_T(z)$. Como nem z nem seus filhos em T são afetados pela inserção de (x, y) , temos $L_T(w) > L_T(z) + 1$. Resta mostrar que $w \in \{y\} \cup \text{FDE}_F(y)$.

Suponhamos que $w \notin \{y\} \cup \text{FDE}_F(y)$. Como w é afetado, é claro que $y \rightarrow_F w$. Pelo lema anterior, em qualquer caminho de y a w existe $s \in \{y\} \cup \text{FDE}_F(y)$ tal que $s \text{ dom}_F w$. Como a inserção da aresta (x, y) não cria novos caminhos de y a w , temos que $s \text{ dom}_{F+(x,y)} w$ e, portanto, w não é afetado, uma contradição.

(\supseteq) Sejam $w \in \{y\} \cup \text{FDE}_F(y) \mid L_T(w) > L_T(z) + 1$ e $v = \text{DI}_F(w)$. Se $w = y$, é claro que $v \text{ dom}_F y$; se $w \neq y$, então $w \in \text{FDE}_F(y)$ e, pelo teorema 3.2, $v \text{ dom}_F y$. No entanto, v não domina propriamente x em F , do contrário v seria o $\text{MDC}_F\{x, y\}$ e não z . A adição da aresta (x, y) cria um caminho $r, \dots, z, \dots, x, y, \dots, w$ que evita v , donde $w \in \text{Afetados}_F(x, y)$. ■

O teorema 3.3 conduz ao algoritmo apresentado em (SREEDHAR *et al.*, 1995a) para atualizar o DJ-grafo de $F = (V, E, r)$ após a inserção da aresta (x, y) . Este algoritmo consta dos seguintes passos:

- 1) Calcule $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$.
- 2) Calcule $S = \text{Afetados}_F(x, y) = \{ w \in \{y\} \cup \text{FDE}_F(y) \mid L_T(w) > L_T(z) + 1 \}$, utilizando o algoritmo apresentado na seção 3.4.
- 3) Se $z \neq x$, crie a J-aresta (x, y) ; (caso contrário, será criada uma D-aresta no passo 4.3).
- 4) Para $w \in S$ efetuar
 - 4.1) $v := \text{DI}_F(w)$;
 - 4.2) Se $(v, w) \in E$, (v, w) se torna uma J-aresta; caso contrário, remova (v, w) ;
 - 4.3) Crie a D-aresta (z, w) ;
 - 4.4) Recalcule os níveis dos vértices da sub-árvore com raiz w , sabendo que o novo nível de w é $L_T(z) + 1$.

Se mantivermos, para todo vértice $v \in V$, um rótulo $\text{pai}(v) = \text{DI}_F(v)$, o passo 1 resume-se a percorrer ascendentemente as cadeias de dominadores, a partir de x e y , até que seja atingido um vértice z pertencente a ambas. Este vértice será o MDC de $\{x, y\}$.

A implementação do passo 2 exige pequenas alterações no algoritmo apresentado na seção 3.4, para cálculo da fronteira estendida. O procedimento só deve considerar vértices de nível superior a $L_T(z) + 1$. Este piso deve ser transmitido como parâmetro ao procedimento `Calcula_Fronteira_Estendida`.

O passo 4.2 exige que reconheçamos se uma D-aresta de $DJ(F)$ pertence ao grafo de fluxo F original. Isto pode ser resolvido com um rótulo, associado às arestas, que assume três valores: J-aresta, DN-aresta ou DO-aresta. Uma DN-aresta é uma D-aresta que pertence a $DJ(F)$, mas não a F ; uma DO-aresta é uma D-aresta que pertence a F e a $DJ(F)$. Este rótulo é inicializado na construção do DJ-grafo e mantido facilmente pelo algoritmo.

No passo 4.3, como (z, w) é uma D-aresta, devemos fazer $\text{pai}(w) := z$.

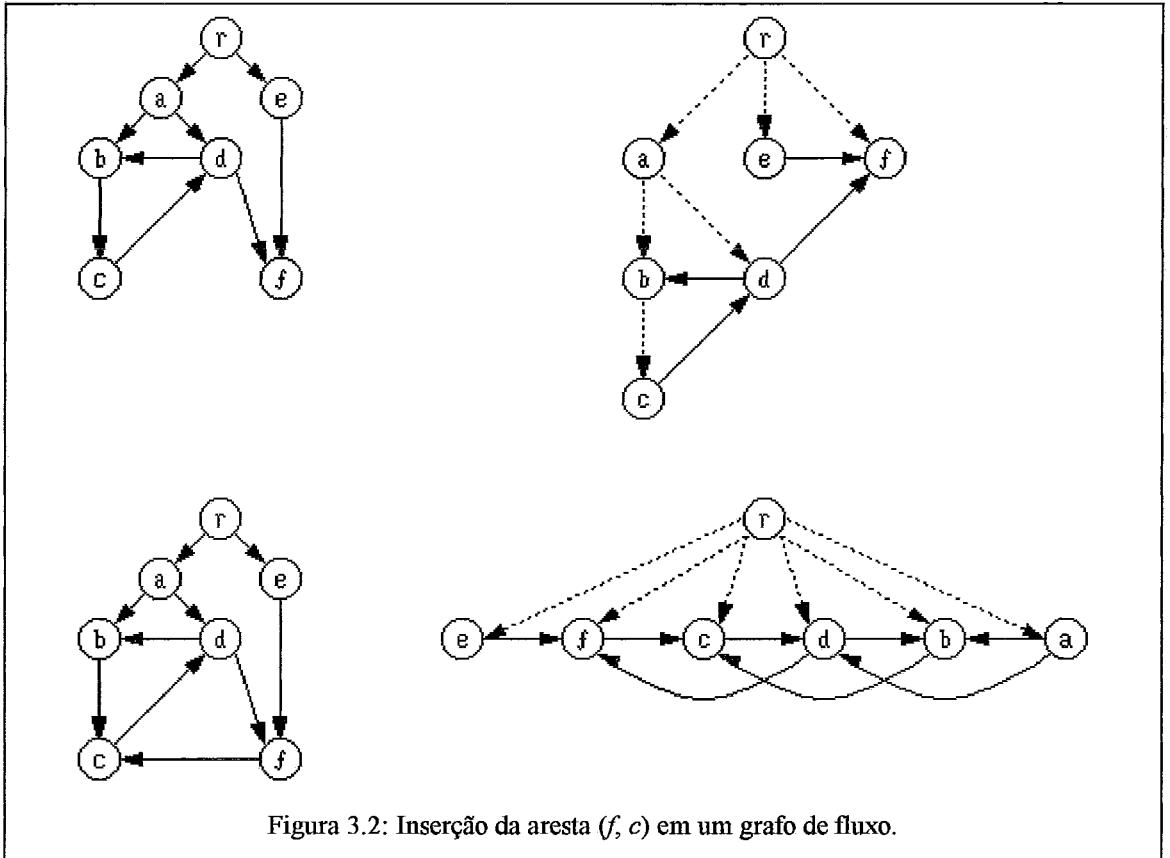
O passo 4.4 é implementado com o percurso da sub-árvore $SA_T(w)$, através das D-arestas.

Denominemos E' o conjunto de arestas do subgrafo de fluxo de $DJ(F)$, com origem $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$, induzido pelo conjunto de vértices dominados por z . Visto que todo o processamento realizado pelo algoritmo anterior restringe-se aos vértices dominados por z , é imediato concluir, conforme (SREEDHAR *et al.*, 1995a), que o tempo dispendido para atualizar o DJ-grafo de F em virtude da inserção da aresta (x, y) é $O(|E'|)$. No pior caso, podemos ter, $z = r$ e $E' = E \cup E_D$.

Na parte superior da figura 3.2, vemos um grafo de fluxo F à esquerda e seu DJ-grafo à direita. Vamos ilustrar o algoritmo apresentado com a inserção da aresta (f, c) .

Temos que $\text{MDC}_F\{f, c\} = r$. Portanto, a origem, de nível 0, será o novo dominador imediato de todos os vértices afetados pela inserção. O cálculo da fronteira de dominação estendida de c produz $\text{FDE}_F(c) = \{b, c, d, f\}$. Destes vértices, apenas b, c e d são afetados, já que o nível de f é 1. Logo, $S = \{b, c, d\}$. Os vértices afetados tornam-se filhos de r na árvore de dominadores. Como $r = \text{MDC}_F\{f, c\} \neq c$, a aresta (f, c) sendo é acrescentada como J-aresta. As D-arestas (a, b) , (b, c) e (a, d) , que ligam os vértices afetados a seus antigos dominadores imediatos no DJ-grafo original, são DO-arestas (pertencem todas ao grafo de fluxo original), convertendo-se, portanto, em J-arestas no DJ-grafo atualizado.

Na parte inferior da figura 3.2, vemos o grafo de fluxo $F + (f, c)$ à esquerda e seu DJ-grafo à direita.



3.6 Manutenção Dinâmica da Redutibilidade

Vamos elaborar, nesta seção, um algoritmo para manutenção dinâmica da redutibilidade sob inserção de arestas em grafos de fluxo. Tal algoritmo recebe como entrada um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$ e uma seqüência de $k > 0$ pares distintos (x_i, y_i) tais que $x_i, y_i \in V$ e $(x_i, y_i) \notin E$, para $i = 1, \dots, k$. O processamento a ser realizado é o seguinte:

Para $i := 1$ até k faça

Se $F + (x_i, y_i)$ é redutível então

$F := F + (x_i, y_i)$

O algoritmo deve manter estruturas de dados que permitam realizar eficientemente o teste da redutibilidade do grafo aumentado $F + (x_i, y_i)$, dado que F é redutível, sem recorrer aos algoritmos clássicos de reconhecimento (TARJAN, 1974, GABOW e TARJAN, 1983). As estruturas devem responder, de maneira também eficiente, ao acréscimo das arestas.

A solução do problema exige a determinação de condições necessárias e suficientes para que $F + (x_i, y_i)$ seja não-redutível, dado que F é redutível.

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo redutível e $x, y \in V, x \neq y$, tais que $(x, y) \notin E$. Se F é redutível e $F + (x, y)$ é não-redutível, concluímos que a adição da aresta (x, y) faz surgir, em $F + (x, y)$, o subgrafo proibido para redutibilidade, mostrado na seção 2.x. Chamando $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$, existem duas formações possíveis para o subgrafo proibido, ilustradas na figura 3.3.

Em 3.3(a), vemos que existem, em F , dois caminhos

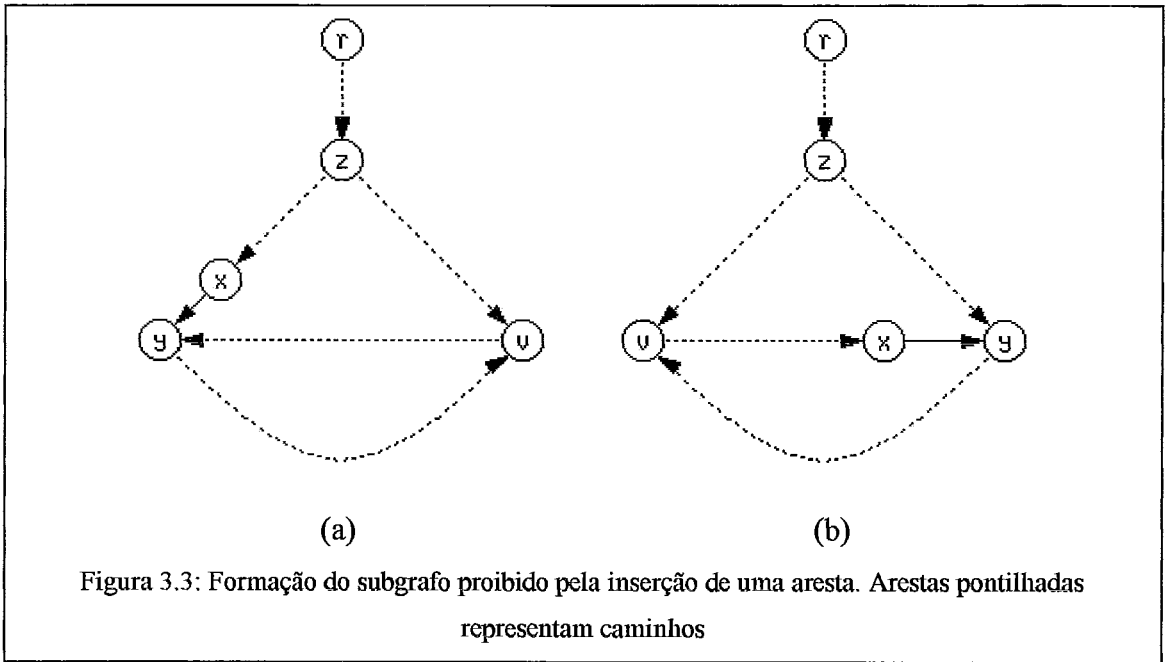
$$r, \dots, z, \dots, v \quad \text{e} \quad r, \dots, z, \dots, x$$

e um ciclo v, \dots, y, \dots, v que possui v como única entrada. A inserção da aresta (x, y) cria o caminho r, \dots, z, \dots, x, y , transformando y em uma entrada alternativa para o ciclo, tornando $F + (x, y)$ não-redutível. Neste caso, $y \in \text{NUC}_F(v)$, $x \notin \text{NUC}_F(v)$ e v não domina x em F . O subgrafo proibido é formado *por invasão*. Eventualmente, $z = x$.

Em 3.3(b), existem em F três caminhos

$$y, \dots, v, \dots, x, \quad r, \dots, z, \dots, y \quad \text{e} \quad r, \dots, z, \dots, v.$$

A inserção da aresta (x, y) cria um ciclo v, \dots, x, y, \dots, v com dois vértices de entrada: v e y , de forma que $F + (x, y)$ é não-redutível. Neste caso, o subgrafo proibido é formado *por criação indevida de ciclo*. Eventualmente, $v = x$.



O lema 3.8, a seguir, relaciona núcleos e fronteiras estendidas.

Lema 3.8

Se $F = (V, E, r)$ é redutível, $v, w \in V$, $v \neq w$ e $w \in \text{NUC}_F(v)$, então $v \in \text{FDE}_F(w)$.

Prova:

Pela definição de núcleo (seção 2.9), existem, em F , um vértice x , um caminho de w a x que evita v e uma aresta retrógrada (x, v) , já que F é redutível. Considerando que (x, v) é uma J-aresta e que, portanto, $v \in \text{FD}_F(x)$, temos duas situações:

- se $x \in \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$, então $v \in \text{FDE}_F(w)$, pois $v \in \text{FD}_F(x)$;
- se $x \notin \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$, então, pelo lema 3.7, existe s no caminho de w a x tal que $s \in \{w\} \cup \text{FDE}_F(w)$ e $s \text{ domp}_F x$. Logo, $v \in \text{FD}_F(s)$ e $v \in \text{FDE}_F(w)$. ■

O teorema seguinte nos dá condições necessárias e suficientes para que $F + (x, y)$ seja não-redutível.

Teorema 3.4

Sejam $F = (V, E, r)$ redutível, $x, y \in V$, $x \neq y$, tais que $(x, y) \notin E$ e $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$. $F + (x, y)$ é não-redutível se, e somente se, existe um vértice $v \in \text{FDE}_F(y)$, $v \neq y$, tal que:

- ou $z = \text{DI}_F(v)$ e $v \text{ dom}_F x$
- ou $z \text{ domp}_F v \text{ domp}_F y$.

Prova:

(\Rightarrow) Suponhamos que $F + (x, y)$ seja não-redutível. Portanto, a adição da aresta (x, y) fez surgir o subgrafo proibido de uma das duas formas:

a) Por invasão de ciclo

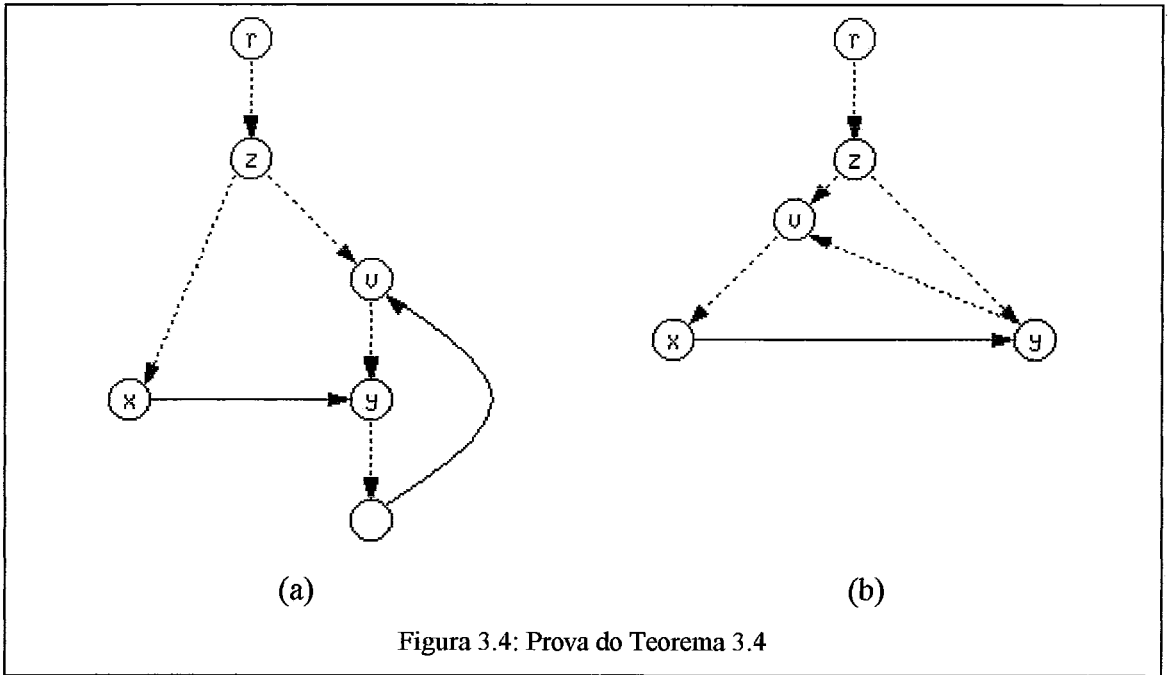
Existe, em F , um ciclo que é invadido pela inserção da aresta (x, y) . Seja v o vértice de entrada desse ciclo, antes da inserção. Como F é redutível, temos que $y \in \text{NUC}_F(v)$, $v \text{ domp}_F y$ e v não domina x em F . Sendo $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$, devemos ter $z \text{ domp}_F v$. Pelo lema 3.8, $v \in \text{FDE}_F(y)$.

b) Por criação indevida de ciclo

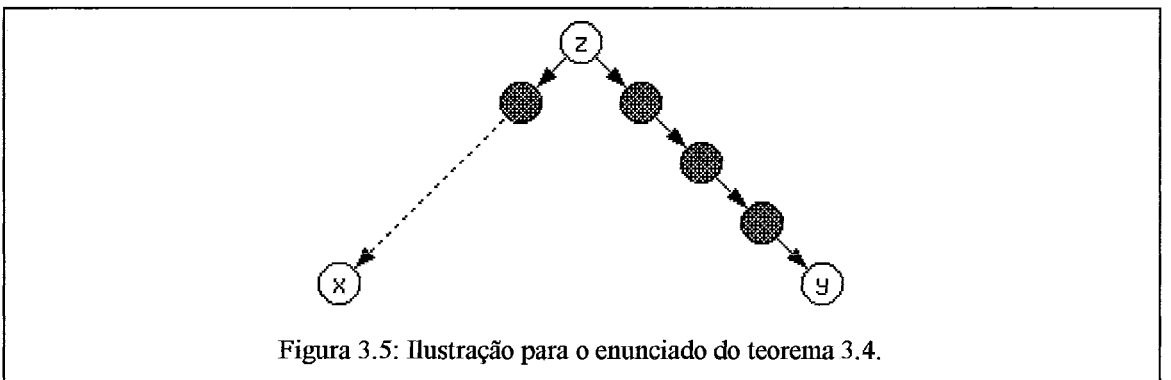
Existe, em F , um caminho de y a x que evita z . Se $x \in \text{FDE}_F(y)$, basta tomarmos $v = x$. Do contrário, pelo lema 3.7, sabemos que, em qualquer caminho de y a x , existe $v \in \{y\} \cup \text{FDE}_F(y)$ tal que $v \text{ domp}_F x$. Como, por hipótese, $v \neq y$, temos $v \in \text{FDE}_F(y)$ e, pelo teorema 3.1, $\text{DI}_F(v) \text{ domp}_F y$. Sendo $z = \text{MDC}_F\{x, y\}$, devemos ter $z = \text{DI}_F(v)$.

(\Leftarrow) Suponhamos que exista $v \in \text{FDE}_F(y)$ tal que $z = \text{DI}_F(v)$ e $v \text{ dom}_F x$. Existe, em F , um caminho y, \dots, v, \dots, x que evita z . A inserção da aresta (x, y) forma o subgrafo proibido $\text{SP}(r, z, v, y)$ por criação indevida de ciclo, como ilustra a figura 3.4(b). Eventualmente, podemos ter $x = v$.

Suponhamos que exista $v \in \text{FDE}_F(y)$ tal que $z \text{ domp}_F v \text{ domp}_F y$. Logo, v não domina x em F e existe um ciclo v, \dots, y, \dots, v que é invadido pela inserção da aresta (x, y) , formando $\text{SP}(r, z, v, y)$, conforme ilustra a figura 3.4(a) (eventualmente, $x = z$). Em ambos os casos, $F + (x, y)$ é não-redutível. ■



A figura 3.5 ilustra o enunciado do teorema 3.4, destacando, no DJ-grafo de F , os vértices que, pertencendo a $FDE_F(y)$, acarretam $F + (x, y)$ não-redutível. As arestas contínuas são D-arestas e a aresta pontilhada representa um caminho constituído por D-arestas.



Essas idéias levam à elaboração um algoritmo para a manutenção dinâmica da redutibilidade em grafos de fluxo sob inserções de arestas. O algoritmo utiliza, como estrutura de dados, o DJ-grafo, cuja construção para o grafo de fluxo redutível inicial constitui etapa à parte, podendo ser realizada com o algoritmo linear de HAREL (1985).

Dados o grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$, o DJ-grafo de F e a seqüência de arestas (x_i, y_i) , para $i = 1, \dots, k$, o processamento realizado é o seguinte:

Para $i := 1$ até k faça

 Calcule $z = \text{MDC}_F\{x_i, y_i\}$, marcando os vértices proibidos (figura 3.5);

 Calcule $T = \{ w \in \text{FDE}_F(y_i) \mid L_T(w) > L_T(z) \}$, utilizando o algoritmo da seção 3.4;

 Se existir em T algum vértice proibido então

$F + (x_i, y_i)$ não será redutível e a aresta (x_i, y_i) não é inserida

 caso contrário

$F := F + (x_i, y_i)$

 Utilize o algoritmo da seção 3.5 para atualizar o DJ-grafo em virtude da inserção de (x_i, y_i) , observando que $\text{Afetados}_F(x_i, y_i) \subset T$.

Consideremos o processamento da inserção de uma aresta (x_i, y_i) . A complexidade de tempo deste passo é dominada pela determinação de $z = \text{MDC}_F\{x_i, y_i\}$ e pelo o cálculo do conjunto T , um subconjunto da fronteira estendida $\text{FDE}_F(y_i)$ restrito aos vértices de nível superior a z . Caso a inserção da aresta (x_i, y_i) seja viável, utilizamos o algoritmo da seção anterior para atualização do DJ-Grafo, observando que o conjunto de vértices afetados não precisa ser recalculado, pois é subconjunto de T . Portanto, o processamento leva tempo proporcional ao número de arestas do subgrafo de fluxo de $\text{DJ}(F)$ com origem z induzido pelo conjunto de vértices dominados por z . No pior caso, $z = r$ e a complexidade de tempo é proporcional ao número total de arestas do grafo de fluxo.

Cabe, por fim, a comparação do algoritmo dinâmico que desenvolvemos com o algoritmo estático, que utiliza, a cada passo, o reconhecimento para redutibilidade em tempo linear no número de arestas do grafo (GABOW e TARJAN, 1983). Pelo exposto, a execução de um passo de nosso algoritmo, correspondente à inserção de uma nova aresta, tem, no pior caso, complexidade de tempo idêntica à de um passo do algoritmo estático. No caso médio, é razoável supor que várias das inserções efetuadas produzirão apenas alterações de âmbito local, restritas ao subgrafo induzido pelo conjunto de vértices dominados por $z = \text{MDC}_F\{x_i, y_i\}$.

3.7 Conclusões

Neste capítulo, desenvolvemos um algoritmo dinâmico para manutenção da redutibilidade em grafos de fluxo que sofrem inserções de arestas. O algoritmo utiliza, como estrutura de dados, o DJ-grafo, definido por SREEDHAR e GAO (1994).

Os conceitos teóricos relacionados a DJ-grafos e fronteiras de dominação foram apresentados na seção 3.3. Em seguida, descrevemos o algoritmo para cálculo da fronteira de dominação estendida de um vértice, apresentado em (SREEDHAR *et al.*, 1995b).

A seção 3.5 tratou da manutenção dinâmica da relação de dominação quando arestas são acrescentadas ao grafo de fluxo, conforme (SREEDHAR *et al.*, 1995a). Utilizando o DJ-grafo, é possível determinar com exatidão o conjunto de vértices afetados pela inserção da aresta (x, y) , quais sejam, os que mudam de dominador imediato no grafo aumentado. O novo dominador imediato desses vértices é $MDC_F\{x, y\}$. As idéias apresentadas conduzem a um algoritmo que leva tempo proporcional ao número de arestas do subgrafo de fluxo do DJ-grafo induzido pelos vértices dominados por $MDC_F\{x, y\}$. No pior caso, $MDC_F\{x, y\}$ é a própria origem do grafo.

Utilizamos essas idéias na obtenção de condições necessárias e suficientes para que um grafo de fluxo redutível se torne não-redutível quando se lhe acrescenta uma nova aresta. As condições foram expressas em termos da ocorrência de determinados vértices na fronteira estendida da extremidade destino da aresta sendo inserida. O algoritmo que desenvolvemos é capaz de verificar se o grafo aumentado é redutível *sem* submetê-lo a algoritmos tradicionais de reconhecimento, como (TARJAN, 1974) ou (GABOW e TARJAN, 1983); caso afirmativo, a aresta é inserida e o algoritmo de SREEDHAR *et al.* (1995a) é utilizado na atualização do DJ-grafo. Um passo de nosso algoritmo, compreendendo a inserção de uma aresta, tem complexidade de tempo e espaço idênticas às do algoritmo de Sreedhar, Gao e Lee.

Com o algoritmo desenvolvido, somos capazes de verificar se $F + (x, y)$ é redutível, dado que F é redutível, sem recorrer aos algoritmos tradicionais para reconhecimento da redutibilidade. Este fato motiva a pesquisa de um caso extremo:

Em que situação é impossível preservar a redutibilidade qualquer que seja a aresta acrescentada ?

Ou ainda:

Quais são os grafos de fluxo redutíveis que deixam de sê-lo quando se lhes acrescenta uma aresta qualquer ?

A resposta a essas questões é o estudo apresentado nos capítulos seguintes.

Capítulo 4

Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

No capítulo 3, analisamos o comportamento de um grafo de fluxo redutível que sofre inserções de arestas, obtendo condições necessárias e suficientes para que o grafo aumentado permaneça redutível. A partir da análise realizada, é pertinente a seguinte questão: quais são os grafos de fluxo redutíveis que se tornam não-redutíveis quando se lhes acrescenta uma aresta qualquer ?

Neste capítulo, definimos e caracterizamos a família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais, para os quais o acréscimo de qualquer aresta viola a redutibilidade. O resultado central é o teorema 4.1, que fornece condições necessárias e suficientes para que um grafo de fluxo redutível seja maximal. Em seguida, construímos, para todo natural $n > 0$, o grafo de fluxo $\Phi(n)$, que provamos ser redutível-maximal. A última seção enumera diversas propriedades dos grafos de fluxo redutíveis-maximais, envolvendo dominação, caminhos hamiltonianos, pólos e expansões.

4.1 Saturação e Maximalidade

Sejam P uma propriedade e $D = (V, E)$ um digrafo quaisquer. Vamos estender aos digrafos o conceito de *saturação*, mencionado em (KÁSZONYI e TUZA, 1986) para grafos não-direcionados.

$D^\circ = (V, E^\circ)$ é um *subdigrafo gerador P -saturado* de D quando:

- (i) $E^\circ \subseteq E$;
- (ii) D° satisfaz a propriedade P ;
- (iii) $\forall (x, y) \in E - E^\circ$, o subdigrafo aumentado $D^\circ + (x, y)$ gerador de D não satisfaz P .

Se $D = (V, E)$ é um digrafo completo ($E = V \times V$), qualquer subdigrafo gerador P -saturado de D é chamado, simplesmente, *digrafo P -saturado*.

$D' = (V, E')$ é um *subdigrafo gerador P-maximal* de D quando:

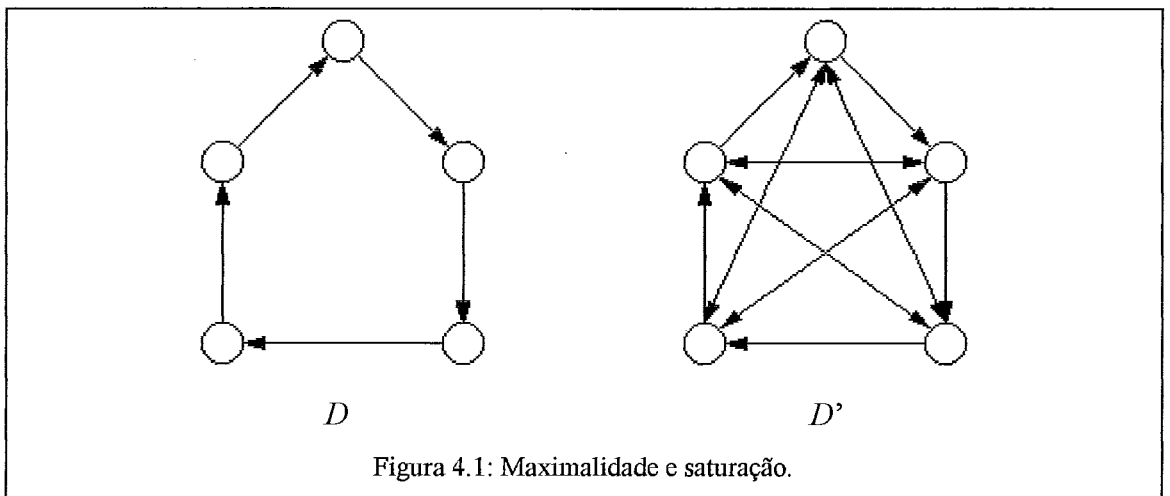
- (i) $E' \subseteq E$;
- (ii) D' satisfaz a propriedade P ;
- (iii) $\forall D'' = (V, E'')$, se $E' \subset E'' \subseteq E$, então D'' não satisfaz P .

Se $D = (V, E)$ é um digrafo completo ($E = V \times V$), qualquer subdigrafo gerador P -maximal de D é chamado, simplesmente, *digrafo P-maximal*.

Qualquer que seja a propriedade P , é imediato concluir, a partir das definições, que todo digrafo P -maximal é também P -saturado. A recíproca, no entanto, não é verdadeira, como ilustra o seguinte exemplo. Consideremos a propriedade

$P =$ o digrafo não possui arestas reflexivas e todo vértice tem grau de entrada ímpar.

Seja D o digrafo mostrado na figura 4.1. É imediato verificar que D satisfaz P . É também imediato verificar que o acréscimo de uma só aresta não-reflexiva a D faz com que o vértice destino da aresta possua grau de entrada 2, violando P . Logo, o digrafo D é P -saturado. Entretanto, D não é P -maximal, pois o digrafo D' , também mostrado na figura 4.1, satisfaz P e tem D como subdigrafo gerador próprio. D' , por sua vez, é P -saturado e P -maximal.



Entretanto, há propriedades em relação às quais os conceitos de saturação e maximalidade são equivalentes. Um exemplo é a propriedade de não possuir ciclos.

A extensão dos conceitos de saturação e maximalidade a grafos de fluxo é imediata. Assim, dados um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, uma propriedade P e um subgrafo de fluxo $F' = (V, E', r)$ gerador de F , dizemos que F' é P -saturado (P -maximal) quando o digrafo (V, E') for subdigrafo gerador P -saturado (P -maximal) do digrafo (V, E) .

4.2 Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

Como convenciamos que os grafos de fluxo *não possuem* arestas reflexivas, os conceitos de saturação e maximalidade devem ser revistos de forma a contornar o aparecimento de tais arestas.

Se V é um conjunto não-vazio e $E \subseteq V \times V$ é uma relação binária sobre V , representamos por $\langle V \sim E \rangle$ a redução reflexiva da diferença $(V \times V) - E$:

$$\langle V \sim E \rangle = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (V \times V) - E \text{ e } x \neq y \}.$$

Portanto, $\langle V \sim \emptyset \rangle = \{ (x, y) \mid (x, y) \in V \times V \text{ e } x \neq y \}$ representa o conjunto de todos os pares não-reflexivos do produto cartesiano $V \times V$. Com a nova convenção adotada, um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ deve satisfazer $E \subseteq \langle V \sim \emptyset \rangle$. Quando $E = \langle V \sim \emptyset \rangle$, F é dito *completo*.

Vale notar que $\langle V \sim E \rangle$ representa exatamente o conjunto de arestas cujo acréscimo a F produz um grafo de fluxo “aumentado”, distinto de F .

Um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é *reduzível-saturado* quando for subgrafo de fluxo gerador reduzível-saturado do grafo de fluxo completo $C = (V, \langle V \sim \emptyset \rangle, r)$, ou seja:

- (i) F é reduzível;
- (ii) $\forall (x, y) \in \langle V \sim E \rangle, F + (x, y)$ é não-reduzível.

Um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é *reduzível-maximal* quando for subgrafo de fluxo gerador reduzível-maximal do grafo de fluxo completo $C = (V, \langle V \sim \emptyset \rangle, r)$, ou seja:

- (i) F é reduzível;
- (ii) Não existe grafo de fluxo reduzível do qual F seja subgrafo de fluxo gerador *próprio*. Ou seja, $\forall G = (V, E', r)$, se $E \subset E' \subseteq \langle V \sim \emptyset \rangle$, então G é não-reduzível.

É imediato ver que um grafo de fluxo trivial é reduzível-saturado e reduzível-maximal.

O lema 4.1 nos diz que a reduzibilidade é uma propriedade *irreversível*: todo subgrafo de fluxo gerador de um grafo de fluxo reduzível é também reduzível. Ou ainda, um grafo de fluxo não-reduzível não pode ser subgrafo de fluxo gerador de um grafo de fluxo reduzível.

Lema 4.1

Se $F = (V, E, r)$ é não-reduzível e $G = (V, E', r)$ é tal que $E \subseteq E' \subseteq \langle V \sim \emptyset \rangle$, então G é não-reduzível.

Prova:

Óbvio: F contém o subgrafo proibido, o mesmo acontecendo para G . ■

O lema 4.2 nos mostra que, com respeito à reduzibilidade, maximalidade e saturação são conceitos equivalentes.

Lema 4.2

Seja $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo reduzível. F é reduzível-maximal se, e somente se, F é reduzível-saturado.

Prova:

(\Rightarrow) Suponhamos que F seja redutível-maximal e tomemos $(x, y) \in \langle V \sim E \rangle$. Logo, $(x, y) \notin E$ e F é subgrafo de fluxo gerador próprio de $F + (x, y)$. Portanto, $F + (x, y)$ não é redutível e, como (x, y) é qualquer, F é redutível-saturado.

(\Leftarrow) Suponhamos que F seja redutível-saturado: $F + (x, y)$ é não-redutível, $\forall (x, y) \in \langle V \sim E \rangle$. Seja $G = (V, E', r)$ tal que $E \subset E'$. Então G possui pelo menos uma aresta $(x, y) \in \langle V \sim E \rangle$. Como $F + (x, y)$ é não-redutível e $F + (x, y)$ é subgrafo de fluxo gerador de G , pelo lema 4.1, G é também não-redutível. Logo, F é redutível-maximal, pela definição. ■

Lema 4.3

Se F e G são grafos de fluxo redutíveis-maximais e F é subgrafo de fluxo gerador de G , então $F = G$.

Prova:

Óbvio pela definição de maximalidade. ■

4.3 O Teorema de Caracterização

Esta seção é dedicada à obtenção de um teorema (4.1) que forneça condições necessárias e suficientes para que um grafo de fluxo redutível seja redutível-maximal.

Os lemas 4.4 e 4.5, demonstrados a seguir, serão utilizados na prova do teorema 4.1.

Lema 4.4

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo qualquer, $S \subseteq V, S \neq \emptyset, s \in S$ e φ é a contração, em F , de S em s , então $\varphi(F + (x, y)) = \varphi(F) + (\varphi(x), \varphi(y)), \forall (x, y) \in \langle V \sim E \rangle$.

Prova:

Seja $(x, y) \in \langle V \sim E \rangle$ qualquer. Observando as definições de contração (na seção 2.10) e de adição de arestas, vemos que:

- $(V - S) \cup \{s\}$ é o conjunto de vértices de ambos os grafos de fluxo.
- $\varphi(r)$ é a origem de ambos.

Resta mostrar que os conjuntos de arestas coincidem. Temos duas situações a considerar:

a) $x, y \in S$

Como $\varphi(x) = \varphi(y) = s$, $\varphi(E)$ será o conjunto de arestas de ambos os grafos.

b) $x \notin S$ ou $y \notin S$

Como $x \neq y$, $(x, y) \notin E$ e $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, temos $\varphi(E \cup \{(x, y)\}) = \varphi(E) \cup \{(\varphi(x), \varphi(y))\}$.

Estes dois conjuntos são, respectivamente, os conjuntos de arestas de $\varphi(F + (x, y))$ e $\varphi(F) + (\varphi(x), \varphi(y))$. ■

A maximalidade de um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$ traduz-se, em última análise, na impossibilidade de obter um outro grafo de fluxo redutível do qual F seja subgrafo de fluxo gerador *próprio*. Escolhido um vértice $v \in V$ qualquer de F , o lema 4.5 nos ensina a construir um grafo de fluxo redutível H do qual F seja subgrafo de fluxo gerador. São utilizados os conceitos de núcleo, região, contração e expansão total, definidos no capítulo 2.

Lema 4.5

Se

 $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível, $v \in V$ é um vértice qualquer, φ é a contração, em F , de $\text{NUC}_F(v)$ em v , G é um grafo de fluxo redutível tal que $\text{REG}_F(v)$ seja um subgrafo de fluxo gerador de G , K é um grafo de fluxo redutível tal que $\varphi(F)$ seja um subgrafo de fluxo gerador de K

e

 H é a expansão total, em K , de v por G ,

então

 H é redutível e F é um subgrafo de fluxo gerador de H .

Prova:

Reunindo as hipóteses, temos que:

$$\text{REG}_F(v) = (\text{NUC}_F(v), E \cap (\text{NUC}_F(v) \times \text{NUC}_F(v)), v),$$

$$\varphi(F) = (\varphi(V), \varphi(E), \varphi(r)) = ((V - \text{NUC}_F(v)) \cup \{v\}, \varphi(E), \varphi(r)),$$

$$G = (\text{NUC}_F(v), E_G, v), \text{ onde } E \cap (\text{NUC}_F(v) \times \text{NUC}_F(v)) \subseteq E_G \text{ e}$$

$$K = ((V - \text{NUC}_F(v)) \cup \{v\}, E_K, \varphi(r)), \text{ onde } \varphi(E) \subseteq E_K.$$

Chamando $H = (V', E', r)$ a expansão total, em K , de v por G , a redutibilidade de H é assegurada pelo teorema 2.13, dado que K e G são redutíveis por hipótese.

Para que F seja subgrafo de fluxo gerador de H , devemos ter: $V = V'$ e $E \subseteq E'$. Pela definição de expansão, $V' = (V - \text{NUC}_F(v)) \cup \{v\} \cup \text{NUC}_F(v) = V$. Resta mostrar que $E \subseteq E'$.

Pela definição de expansão total, $E' = E_K \cup E_G \cup (\text{NUC}_F(v) \times A_K(v))$. Tomando $(x, y) \in E$, temos quatro alternativas:

a) $x, y \in \text{NUC}_F(v)$

$$(x, y) \in E \cap (\text{NUC}_F(v) \times \text{NUC}_F(v)) \subseteq E_G \subseteq E'.$$

b) $x, y \notin \text{NUC}_F(v)$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y) \in \varphi(E) \subseteq E_K \subseteq E'.$$

c) $x \in \text{NUC}_F(v), y \notin \text{NUC}_F(v)$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (v, y) \in \varphi(E) \subseteq E_K, \text{ ou seja, } y \in A_K(v). \text{ Como } \text{NUC}_F(v) \times A_K(v) \subseteq E', \\ (x, y) \in E'.$$

d) $x \notin \text{NUC}_F(v), y \in \text{NUC}_F(v)$

$$\text{Como } F \text{ é redutível, devemos ter } y = v. (\varphi(x), \varphi(y)) = (x, v) \in \varphi(E) \subseteq E_K \subseteq E'.$$

Em todos os casos, $(x, y) \in E'$, acarretando $E \subseteq E'$. ■

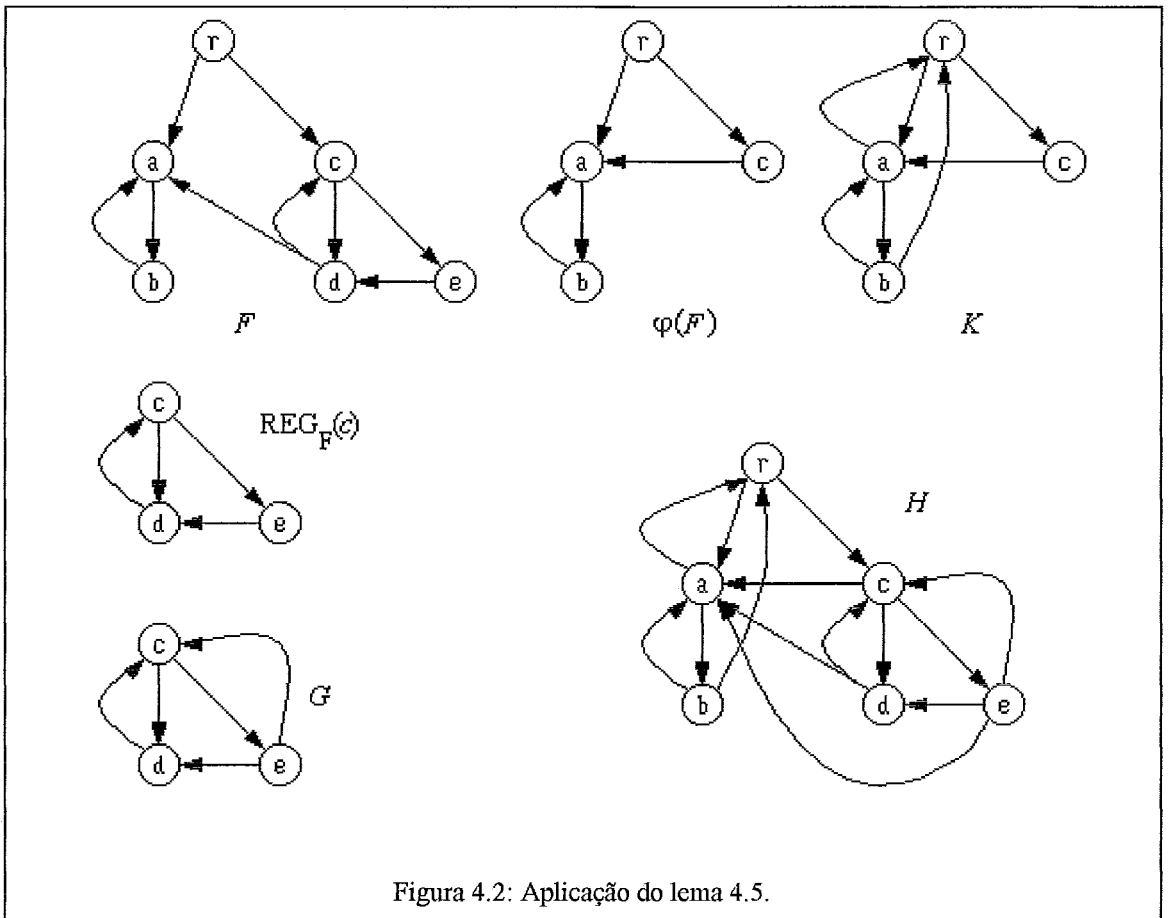


Figura 4.2: Aplicação do lema 4.5.

Na figura 4.2 vemos um exemplo de aplicação do lema 4.5 a um grafo de fluxo redutível F . O vértice v escolhido é c , cujo núcleo é $\text{NUC}_F(c) = \{c, d, e\}$. Observe que a aresta (d, a) de F transforma-se em (c, a) no grafo contraído $\varphi(F)$, sendo recuperada na expansão total. É imediato constatar que os grafos de fluxo G , K e H são redutíveis e que F é um subgrafo gerador de H . Como F é um subgrafo gerador *próprio* de H , concluímos que F não é redutível-maximal.

Em um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$, seja $v \in V$ um vértice qualquer. Dado um vértice $x \in \text{NUC}_F(v)$, definimos o conjunto dos *sucessores imediatos externos de x com respeito a $\text{NUC}_F(v)$* :

$$\text{AE}_F(v, x) = A_F(x) - \text{NUC}_F(v), \forall v \in V, \forall x \in \text{NUC}_F(v).$$

Teorema 4.1 - Caracterização de Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo redutível, $v \in V$ um vértice qualquer e φ a contração, em F , de $\text{NUC}_F(v)$ em v . F é redutível-maximal se, e somente se:

- (i) a região $\text{REG}_F(v)$ é redutível-maximal;
- (ii) $\forall x \in \text{NUC}_F(v) - \{v\}$, $\text{AE}_F(v, x) = \text{AE}_F(v, v)$; e
- (iii) o grafo contraído $\varphi(F)$ é redutível-maximal.

Prova:

Examinemos a necessidade das três condições, supondo que F seja redutível-maximal. Se $\text{NUC}_F(v) = \{v\}$, (i), (ii) e (iii) valem trivialmente. Suponhamos, então, que $\text{NUC}_F(v)$ não seja unitário.

- (i) Suponhamos, por absurdo, que $\text{REG}_F(v)$ não seja redutível-maximal. Existem, portanto, vértices $x, y \in \text{NUC}_F(v)$, distintos, tais que $(x, y) \notin E$ e $\text{REG}_F(v) + (x, y)$ é redutível. Chamemos $H = (V', E', r')$ a expansão total, em $\varphi(F)$, de v por $\text{REG}_F(v) + (x, y)$. Pelo lema 4.5, H é redutível e F é um subgrafo de fluxo gerador de H . Como $(x, y) \in E' - E$, $E \subset E'$ e F não é redutível-maximal.

(ii) Sejam $x \in \text{NUC}_F(v) - \{v\}$ e $a \in \text{AE}_F(v, v)$. Suponhamos, por absurdo, que $a \notin \text{AE}_F(v, x)$. Chamemos H a expansão total, em $\varphi(F)$, de v por $\text{REG}_F(v)$. Pela definição da contração φ , $\varphi(x) = v$ e $\varphi(a) = a$, donde (v, a) é aresta em $\varphi(F)$. Pelo lema 4.5, H é redutível e F é um subgrafo de fluxo gerador de H . Mas, pela definição de expansão total, além das arestas de F , H contém todas as arestas da forma $\text{NUC}_F(v) \times \{a\}$, em especial (x, a) . Como $(x, a) \notin E$, F é subgrafo de fluxo gerador próprio de H e F não é redutível-maximal. Portanto, $a \in \text{AE}_F(v, x)$, o que prova a inclusão $\text{AE}_F(v, v) \subseteq \text{AE}_F(v, x)$.

A prova de que $\text{AE}_F(v, x) \subseteq \text{AE}_F(v, v)$ é análoga, o que assegura a igualdade $\text{AE}_F(v, x) = \text{AE}_F(v, v)$.

(iii) Suponhamos, por absurdo, que $\varphi(F) = (\varphi(V), \varphi(E), \varphi(r))$ não seja redutível-maximal. Pelo lema 4.2, existe $(x, y) \in \langle \varphi(V) \sim \varphi(E) \rangle$ tal que $\varphi(F) + (x, y)$ é redutível. Chamemos H a expansão total, em $\varphi(F) + (x, y)$, de v por $\text{REG}_F(v)$. Pelo lema 4.5, H é redutível e F é um subgrafo de fluxo gerador de H . Como $(x, y) \notin E$, F é um subgrafo de fluxo gerador próprio de H e, portanto, não é redutível-maximal.

Para provar a suficiência, suponhamos que F seja redutível e que as condições (i), (ii) e (iii) sejam verificadas por F . Tomemos $(x, y) \in \langle V \sim E \rangle$. Temos três possibilidades:

a) $x, y \in \text{NUC}_F(v)$

Pela condição (i), o grafo de fluxo $\text{REG}_F(v) + (x, y)$, subgrafo de $F + (x, y)$, é não-redutível. O mesmo acontece para $F + (x, y)$, pelo teorema 2.11.

b) $x \notin \text{NUC}_F(v)$, $y \in \text{NUC}_F(v)$

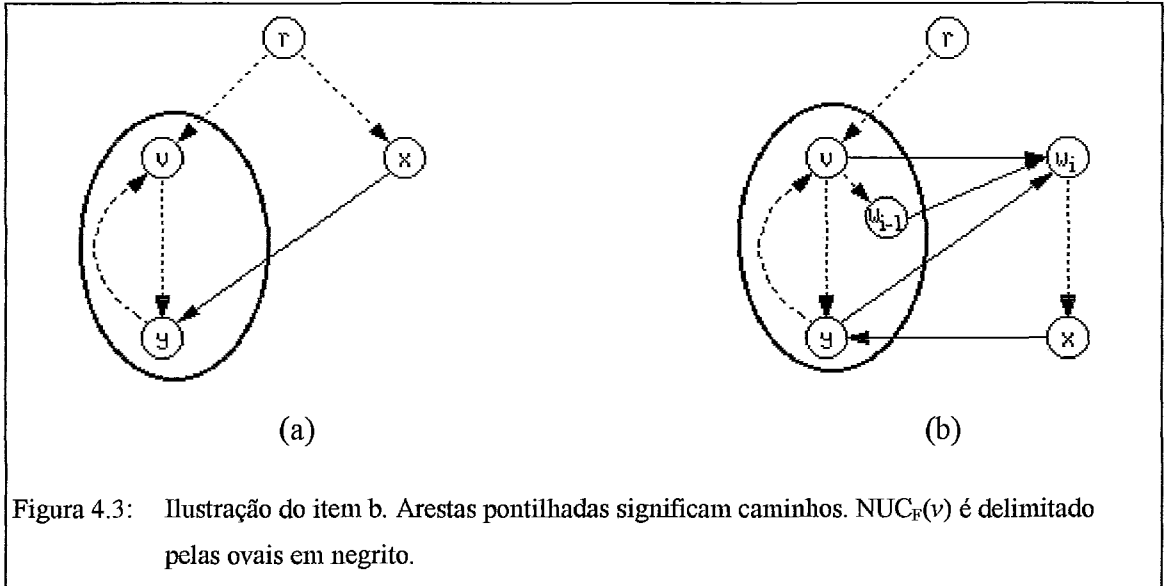
Temos duas alternativas:

- v não domina x

Existe um caminho de r a x que não passa por v e $F + (x, y)$ contém o subgrafo proibido $\text{SP}(r, r, v, y)$, como na figura 4.3(a).

- v domina x

Existe um caminho de v a x : $v = w_0, w_1, w_2, \dots, w_p = x, p > 0$, e existe $i, 1 \leq i \leq p$, tal que $w_k \in \text{NUC}_F(v)$, para $k < i$ e $w_k \notin \text{NUC}_F(v)$, para $k \geq i$. Como $w_{i-1} \in \text{NUC}_F(v)$, $w_i \notin \text{NUC}_F(v)$ e $(w_{i-1}, w_i) \in E$, temos que $w_i \in \text{AE}_F(v, w_{i-1})$. Pela condição (ii), $w_i \in \text{AE}_F(v, v)$ e $w_i \in \text{AE}_F(v, y)$, ou seja, $(v, w_i), (y, w_i) \in E$. Portanto $F + (x, y)$ contém $\text{SP}(r, v, w_i, y)$, como ilustra a figura 4.3(b).



- c) $y \notin \text{NUC}_F(v)$

Pelo lema 4.4, $\varphi(F + (x, y)) = \varphi(F) + (\varphi(x), \varphi(y))$, sendo ambos não-redutíveis, pois $\varphi(F)$ é maximal pela condição (iii). Chamemos δ a contração, em $F + (x, y)$, de $\text{NUC}_{F+(x,y)}(v)$ em v . Como $y \notin \text{NUC}_F(v)$, pela definição de núcleo, $\text{NUC}_F(v) = \text{NUC}_{F+(x,y)}(v)$ e as funções φ e δ são idênticas. Logo, $\varphi(F + (x, y)) = \delta(F + (x, y))$ e o grafo contraído $\delta(F + (x, y))$ é não-redutível. Como F é redutível, $\text{NUC}_{F+(x,y)}(v) = \text{NUC}_F(v)$ é fortemente conexo. Pela contrapositiva do teorema 2.12, $F + (x, y)$ é não-redutível.

Concluimos, nas três alternativas, que $F + (x, y)$ é não-redutível, $\forall (x, y) \in \langle V \sim E \rangle$. Pelo lema 4.2, F é redutível-maximal. ■

Teorema 4.2

O grafo de fluxo $\Phi(n)$ é redutível-maximal, $\forall n > 0$.

Prova:

Se $n = 1$, $\Phi(n)$ é trivial e redutível-maximal. Se $n > 1$, consideremos a árvore geradora $T(n) = (\{1, \dots, n\}, \{ (x, x+1) \mid 1 \leq x < n \}, 1)$. Como $\text{CR}(\Phi(n), T(n)) = \emptyset$, $T(n)$ é uma árvore de profundidade de $\Phi(n)$ e $\Phi(n)$ é redutível porque todas as arestas de retorno com respeito a $T(n)$ dirigem-se à origem (vértice 1), que domina os demais vértices. Como $\langle \{1, \dots, n\} \sim Z(n) \rangle = \{ (x, y) \mid n \geq x > y > 1 \}$, $\forall (x, y) \in \langle \{1, \dots, n\} \sim Z(n) \rangle$, $\Phi(n) + (x, y)$ contém o subgrafo proibido $\text{SP}(1, 1, x, y)$. ■

Os grafos de fluxo $\Phi(n)$ possuem uma característica bastante peculiar: em todos eles, o único vértice que recebe arestas retrógradadas é a origem. Recordemos, da seção 2.12, que um vértice $v \in V$ é um *pólo* de um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$ quando v é o único vértice de $\text{NUC}_F(v)$ que recebe arestas retrógradadas. O conjunto de todos os pólos de F é denotado por $\text{POL}(F)$. É imediato constatar que todo grafo de fluxo redutível cíclico possui pelo menos um pólo.

O teorema 4.3 nos dá condições necessárias e suficientes para o isomorfismo com Φ .

Teorema 4.3

Um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ é isomorfo a $\Phi(|V|)$ se, e somente se, F é redutível-maximal e $\text{POL}(F) = \{r\}$.

Prova:

(\Rightarrow) Se F é isomorfo a $\Phi(|V|)$, F é redutível-maximal (pelo teorema 4.2) e apenas a origem recebe arestas retrógradadas (pela definição de Φ). Logo, $\text{NUC}_F(r) = V$ e, $\forall v \in V - \{r\}$, $\text{NUC}_F(v) = \{v\}$. Portanto, $\text{POL}(F) = \{r\}$.

(\Leftarrow) Suponhamos que F seja redutível-maximal e que $\text{POL}(F) = \{r\}$. Seja $T = (V, E_T, r)$ uma árvore de profundidade de F , com rotulações ρ (profundidade de entrada) e σ (profundidade de saída). Considerando a bijeção $\psi: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ tal que $\psi(v) = |V| + 1 - \sigma(v)$, o grafo de fluxo imagem de F por ψ

$$\psi(F) = (\psi(V), \psi(E), \psi(r)) = (\{1, \dots, |V|\}, \psi(E), 1)$$

é isomorfo a F e redutível-maximal. Vamos mostrar que $\psi(F)$ é um subgrafo de fluxo gerador de $\Phi(|V|)$. Para isso, é suficiente mostrar que $\psi(E) \subseteq Z(|V|)$.

Como ψ é um isomorfismo, $(x, y) \in E \Leftrightarrow (\psi(x), \psi(y)) \in \psi(E)$. Sendo F redutível, temos duas alternativas:

- $(x, y) \in \text{RTG}(F)$

Como $\text{POL}(F) = \{r\}$, r é o único vértice de F que recebe arestas retrógradas.

Logo, $y = r$ e $(\psi(x), \psi(y)) = (\psi(x), |V| + 1 - \sigma(r)) = (\psi(x), 1) \in Z(|V|)$.

- $(x, y) \notin \text{RTG}(F)$

Portanto, $(x, y) \notin \text{RT}(F, T)$ e, pelo lema 2.1, $\sigma(x) > \sigma(y)$, donde $1 \leq \psi(x) < \psi(y) \leq |V|$ e $(\psi(x), \psi(y)) \in Z(|V|)$.

$\psi(F)$ é um subgrafo de fluxo gerador de $\Phi(|V|)$. Como são ambos redutíveis-maximais, concluímos, pelo lema 4.3, que são idênticos. Logo, F é isomorfo a $\Phi(|V|)$. ■

O teorema 4.4 nos diz que os núcleos polares de um grafo de fluxo redutível-maximal são isomorfos a Φ .

Teorema 4.4

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então, $\forall v \in \text{POL}(F)$, $\text{REG}_F(v)$ é isomorfo a $\Phi(|\text{NUC}_F(v)|)$.

Prova:

Pelo teorema 4.1, sabemos que $\text{REG}_F(v)$ é redutível-maximal. Como $v \in \text{POL}(F)$, v é o único vértice em $\text{REG}_F(v)$ que recebe arestas retrógradas. Logo, $\text{POL}(\text{REG}_F(v)) = \{v\}$ e, pelo teorema 4.3, $\text{REG}_F(v)$ é isomorfo a $\Phi(|\text{NUC}_F(v)|)$. ■

O exame das seqüências de graus de entrada e saída dos vértices de um grafo de fluxo é bastante para concluir se ele é isomorfo a Φ , de acordo com o teorema seguinte:

Teorema 4.5

$F = (V, E, r)$ é isomorfo a $\Phi(n)$, onde $n = |V|$, se, e somente se, existir uma ordenação dos vértices v_1, v_2, \dots, v_n de maneira que:

- (i) $v_1 = r$;
- (ii) $|A_F(r)| = |P_F(r)| = n - 1$;
- (iii) $|A_F(v_i)| = n - i + 1$ e $|P_F(v_i)| = i - 1$, para $i = 2, \dots, n$.

Prova:

(\Rightarrow) Pela definição de isomorfismo, existe uma função bijetora $\psi: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ tal que $\psi(r) = 1$ e $\psi(E) = Z(n)$. A ordenação de vértices $1, 2, \dots, n$, em $\Phi(n)$, satisfaz claramente as condições (i), (ii) e (iii). Basta, portanto, tomar a imagem inversa desta ordenação $\psi^{-1}(1), \psi^{-1}(2), \dots, \psi^{-1}(n)$ para concluir que as mesmas condições são satisfeitas por F .

(\Leftarrow) Suponhamos que exista a ordenação de vértices v_1, v_2, \dots, v_n satisfazendo as condições dadas. Devemos construir uma bijeção $\psi: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ que verifique $\psi(r) = 1$ e $\psi(E) = Z(n)$.

Com efeito, consideremos $\psi(v_i) = i$, para $i = 1, \dots, n$. Como $v_1 = r$, temos $\psi(r) = 1$. Vamos construir o conjunto E a partir das condições impostas às seqüências de graus, expressas nas condições (ii) e (iii).

- a) A origem r tem $n - 1$ sucessores imediatos e $n - 1$ predecessores imediatos, de maneira que $\{ (v_i, r) \mid i = 2, \dots, n \} \cup \{ (r, v_i) \mid i = 2, \dots, n \} \subseteq E$.
- b) v_2 tem $n - 1$ sucessores imediatos e 1 predecessor imediato. O predecessor imediato de v_2 é, necessariamente, r , já que $(r, v_2) \in E$ pelo item a. Um dos sucessores imediatos de v_2 é r , também pelo item a, restando $n - 2$, que são os demais vértices v_3, \dots, v_n . Portanto, $\{ (v_2, v_i) \mid i = 3, \dots, n \} \subseteq E$.
- c) v_3 tem $n - 2$ sucessores imediatos e 2 predecessores imediatos. Os predecessores imediatos de v_3 são r e v_2 , já que $(r, v_3) \in E$, pelo item a, e $(v_2, v_3) \in E$, pelo item b. r é sucessor imediato de v_3 e v_2 não é sucessor imediato de v_3 , pois v_2 tem apenas um predecessor imediato que é r . Portanto, $\{ (v_3, v_i) \mid i = 4, \dots, n \} \subseteq E$.

Continuando este raciocínio, concluiremos que:

$$\{ (v_i, r) \mid i = 2, \dots, n \} \cup \\ \cup \{ (r, v_i) \mid i = 2, \dots, n \} \cup \{ (v_2, v_i) \mid i = 3, \dots, n \} \cup \dots \cup \{ (v_{n-1}, v_n) \} \subseteq E,$$

ou seja, $\{ (v_i, r) \mid 1 < i \leq n \} \cup \{ (v_i, v_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \} \subseteq E$.

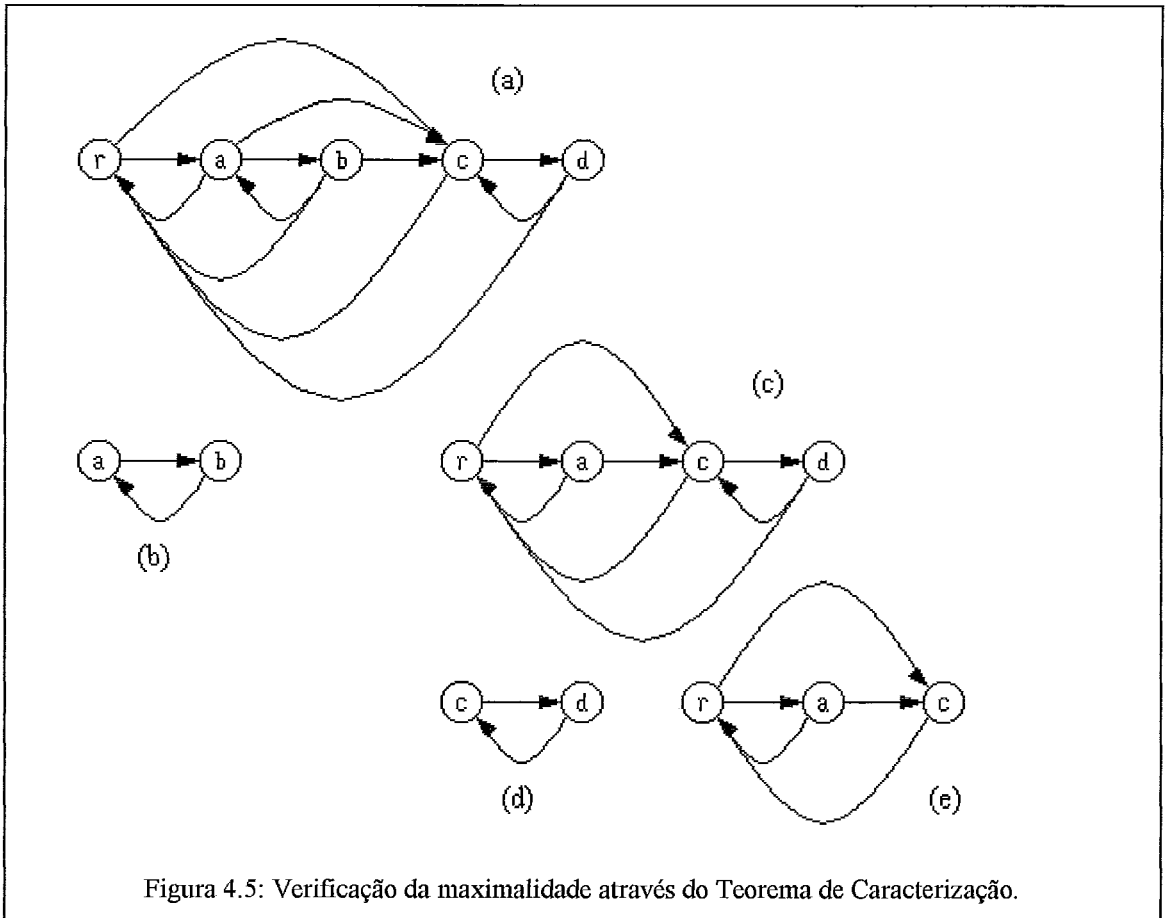
Observando que $|\{ (v_i, r) \mid 1 < i \leq n \} \cup \{ (v_i, v_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \}| = (n^2 + n - 2)/2$ e que $|E| = |A_F(r)| + |A_F(v_2)| + \dots + |A_F(v_n)| = (n^2 + n - 2)/2$, podemos concluir a igualdade $E = \{ (v_i, r) \mid 1 < i \leq n \} \cup \{ (v_i, v_j) \mid 1 \leq i < j \leq n \}$.

Portanto, $\psi(E) = \{ (x, 1) \mid 1 < x \leq n \} \cup \{ (x, y) \mid 1 \leq x < y \leq n \} = Z(n)$ e F é, de fato, isomorfo a $\Phi(n)$. ■

4.5 Aplicação do Teorema de Caracterização

Mostraremos como o teorema 4.1 pode ser utilizado para reconhecer se um grafo de fluxo redutível é redutível-maximal. Tal aplicação constitui, sem dúvida, um algoritmo de reconhecimento para a família. Entretanto, sua complexidade não será avaliada tendo em vista que, no capítulo 6, deduziremos um procedimento linear de reconhecimento, diverso do aqui apresentado.

Seja determinar se o grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$, da figura 4.5(a), é redutível-maximal.



A aplicação do teorema 4.1 pressupõe:

- a escolha um vértice $v \in V$ do grafo;
- a verificação da redutibilidade e da maximalidade de $\text{REG}_F(v)$;
- a verificação da igualdade dos conjuntos de sucessores exteriores, para todo vértice $x \in \text{NUC}_F(v)$;
- a verificação da redutibilidade e da maximalidade do grafo contraído $\varphi(F)$, onde φ é a contração, em F , de $\text{NUC}_F(v)$ em v .

Não são escolhas adequadas para v a origem e os vértices cujos núcleos sejam unitários. No primeiro caso, $\text{REG}_F(v) = F$ e, no segundo, $\varphi(F) = F$; em ambos, o teste de maximalidade será repetido para o próprio grafo. Os pólos de F são escolhas interessantes, pois, pelo teorema 4.4, suas regiões devem ser grafos de fluxo isomorfos à célula básica Φ para que F seja redutível-maximal.

Escolhamos, portanto, o vértice a . $\text{NUC}_F(a) = \{a, b\}$ e devemos verificar se os três itens do teorema 4.1 são satisfeitos:

- (i) $\text{REG}_F(a) = (\{a, b\}, \{(a, b), (b, a)\}, a)$, mostrado na figura 4.5(b), é isomorfo a $\Phi(2)$ e, portanto, redutível-maximal, pelo teorema 4.2.
- (ii) $\text{AE}_F(a, a) = \text{AE}_F(a, b) = \{c, r\}$.
- (iii) Chamando φ a contração, em F , de $\text{NUC}_F(a)$ em a , devemos verificar se o grafo de fluxo contraído (figura 4.5(c))

$$\varphi(F) = (\{r, a, c, d\}, \{(r, a), (r, c), (a, r), (a, c), (c, r), (c, d), (d, r), (d, c)\}, r)$$

é redutível-maximal. Omitindo a verificação da redutibilidade, escolhemos o vértice c para aplicar o teorema 4.1. Como $\text{NUC}_{\varphi(F)}(c) = \{c, d\}$,

- (i) $\text{REG}_{\varphi(F)}(c) = (\{c, d\}, \{(c, d), (d, c)\}, c)$, na figura 4.5(d), é isomorfo a $\Phi(2)$ e, portanto, redutível-maximal, pelo teorema 4.2.

$$(ii) \quad AE_{\varphi(F)}(c, c) = AE_{\varphi(F)}(c, a) = \{r\}$$

(iii) Chamando δ a contração, em $\varphi(F)$, de $NUC_{\varphi(F)}(c)$ em c , temos, na figura 4.5(e), o grafo de fluxo:

$$\delta(\varphi(F)) = (\{r, a, c\}, \{(r, a), (r, c), (a, r), (a, c), (c, r)\}, r),$$

que é isomorfo a $\Phi(3)$ e, portanto, redutível-maximal, pelo teorema 4.2.

Logo, pelo teorema 4.1, F é redutível-maximal.

4.6 Algumas Propriedades dos Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

Esta seção reúne importantes propriedades dos grafos de fluxo redutíveis-maximais. Os resultados apresentados dizem respeito ao acréscimo de arestas em grafos de fluxo redutíveis, bem como à árvore de dominadores e a caminhos hamiltonianos em grafos de fluxo redutíveis-maximais.

O lema 4.6 nos diz que o acréscimo de arestas retrógradas em um grafo de fluxo redutível preserva a redutibilidade:

Lema 4.6

Se $F = (V, E, r)$ é redutível, $u, v \in V$, $u \neq v$ e $v \text{ dom}_F u$, então $F + (u, v)$ é redutível.

Prova:

Basta observar que v também domina u em $F + (u, v)$. Logo, $(u, v) \in \text{RTG}(F + (u, v))$, donde $F + (u, v)$ é redutível. ■

O lema 4.7 afirma que o acréscimo de arestas entre o dominador imediato de um vértice e esse vértice também preserva a redutibilidade:

Lema 4.7

Se $F = (V, E, r)$ é redutível e $v \in V - \{r\}$, então $F + (\text{DI}_F(v), v)$ é redutível.

Prova (contrapositiva):

Se $(\text{DI}_F(v), v) \in E$, $F + (\text{DI}_F(v), v) = F$ e o resultado vale. Suponhamos, então, que $(\text{DI}_F(v), v) \notin E$. Seja $T = (V, E_T, r)$ uma árvore de profundidade de F . Pelo teorema 2.4, $\text{DI}_F(v) \rightarrow_T v$ e T é também uma árvore de profundidade para $F + (\text{DI}_F(v), v)$, em relação à qual a aresta $(\text{DI}_F(v), v)$ é de avanço e as demais arestas mantêm sua classificação. Se $F + (\text{DI}_F(v), v)$ não é redutível, $\exists(x, y) \in \text{RT}(F + (\text{DI}_F(v), v), T)$ tal que y não domina x em $F + (\text{DI}_F(v), v)$. Como $(x, y) \in \text{RT}(F, T)$ e a relação de dominação em F e em $F + (\text{DI}_F(v), v)$ é a mesma, y também não domina x em F , donde F não é redutível. ■

Recordando que $\text{DOM}_F(v)$ é o conjunto dos vértices dominados por v em um grafo de fluxo F , o teorema seguinte afirma que um grafo de fluxo redutível-maximal deve possuir todas as arestas retrógradas possíveis:

Teorema 4.6

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal e $v \in V$, então $(u, v) \in E, \forall u \in \text{DOM}_F(v) - \{v\}$.

Prova:

Decorre do lema 4.6. ■

De imediato, surgem duas conseqüências:

Corolário 4.1

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então $\text{NUC}_F(v) = \text{DOM}_F(v), \forall v \in V$.

Prova: Óbvio, pela definição de núcleo. ■

Corolário 4.2

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então $(v, r) \in E, \forall v \in V - \{r\}$.

Prova: Óbvio, pois $\text{DOM}_F(r) = V$. ■

Recordemos, da seção 2.6, que o DJ-grafo correspondente a um grafo de fluxo qualquer $F = (V, E, r)$ é dado por $\text{DJ}(F) = (V, E \cup E_D, r)$, onde E_D é o conjunto de arestas da árvore de dominadores de F : $E_D = \{(\text{DI}_F(v), v) \mid \forall v \in V - \{r\}\}$. O teorema 4.7 nos diz que todo grafo de fluxo redutível-maximal coincide com seu DJ-grafo.

Teorema 4.7

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então $F = \text{DJ}(F)$.

Prova:

Pelo lema 4.7, F deve possuir todas as arestas da forma $(\text{DI}_F(v), v), \forall v \in V - \{r\}$. ■

Decorrem, de imediato, dois corolários:

Corolário 4.3

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então a árvore de dominadores de F é também árvore geradora de F .

Prova:

As arestas da árvore de dominadores de F são da forma $(DI_F(v), v), \forall v \in V - \{r\}$; pelo teorema anterior, são arestas também de F . ■

O próximo corolário relaciona núcleos em um grafo de fluxo redutível-maximal com sub-árvores na árvore de dominadores deste grafo.

Corolário 4.4

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível-maximal e $T = (V, E_D, r)$ é a árvore de dominadores de F , então $SA_T(v) = NUC_F(v), \forall v \in V$.

Prova:

Pelo corolário 4.1, sabemos que $NUC_F(v) = DOM_F(v)$. Mas, como T é árvore de dominadores, $SA_T(v)$ é exatamente o conjunto de vértices dominados por v em F , donde $NUC_F(v) = DOM_F(v) = SA_T(v)$. ■

O próximo teorema será de fundamental importância no estudo da estrutura dos grafos de fluxo redutíveis-maximais, abordado no próximo capítulo.

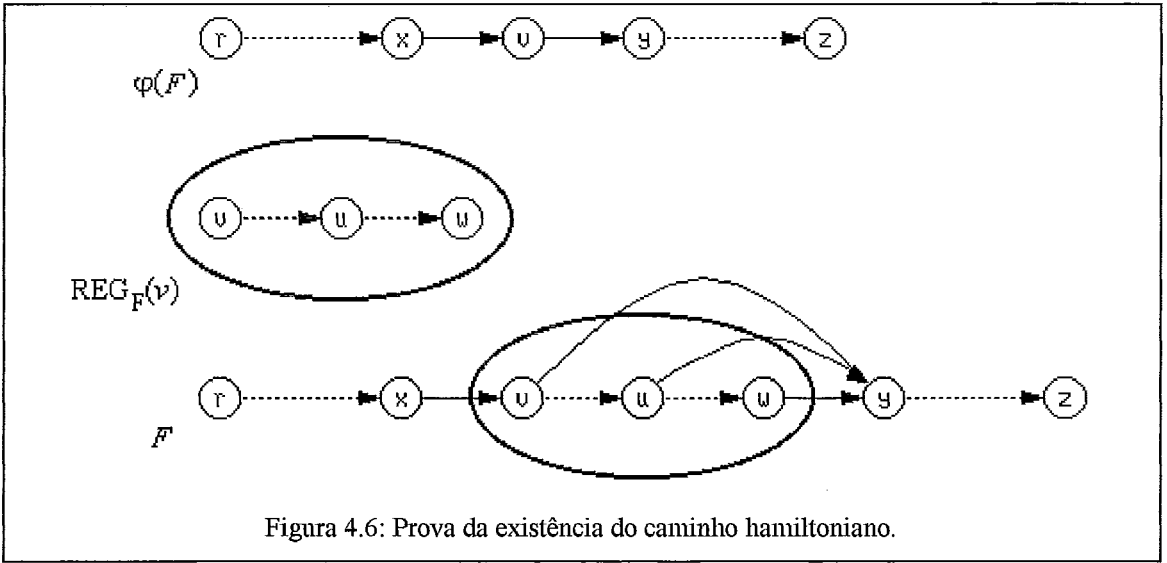
Teorema 4.8

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então F possui um único caminho hamiltoniano a partir da origem r .

Prova:

A existência do caminho hamiltoniano pode ser provada por indução finita sobre o número de vértices:

- Se F é trivial, F possui caminho hamiltoniano de comprimento nulo.



- Hipótese de indução: suponhamos que grafos redutíveis-maximais com menos de n vértices possuam caminho hamiltoniano a partir da origem.
- Consideremos F um grafo de fluxo redutível-maximal com n vértices e $v \in \text{POL}(F)$. Se $\text{POL}(F) = \{r\}$, $v = r$ e, pelo teorema 4.3, F é isomorfo a $\Phi(n)$. O caminho hamiltoniano em F é a imagem inversa do caminho hamiltoniano $1, 2, \dots, n$ em $\Phi(n)$. Do contrário, seja φ a contração, em F , de $\text{NUC}_F(v)$ em v . Como v é um pólo distinto da origem, $1 < |\text{NUC}_F(v)| < n$ e os grafos de fluxo $\text{REG}_F(v)$ e $\varphi(F)$, ambos redutíveis-maximais (pelo teorema 4.1), têm menos de n vértices. Pela hipótese de indução, $\text{REG}_F(v)$ e $\varphi(F)$ possuem os caminhos hamiltonianos

$$v, \dots, u, \dots, w \quad \text{e} \quad r, \dots, x, v, y, \dots, z,$$

respectivamente. Portanto, F possui os caminhos

$$r, \dots, x, v, \dots, u, \dots, w \quad \text{e} \quad y, \dots, z,$$

Como $y \in \text{AE}_F(v, v)$ e $w \in \text{NUC}_F(v)$, concluímos, pelo item (ii) do teorema 4.1, que $y \in \text{AE}_F(v, w)$. Logo, $(w, y) \in E$ e o caminho

$$r, \dots, x, v, \dots, u, \dots, w, y, \dots, z,$$

é hamiltoniano em F , conforme ilustra a figura 4.6.

Para provar a unicidade, suponhamos, por absurdo, que F admita dois caminhos hamiltonianos distintos a partir de r . Existem, portanto, vértices $x, y \in V$ tais que x precede y no primeiro caminho e y precede x no segundo caminho:

$$r, \dots, x, \dots, y, \dots \quad \text{e} \quad r, \dots, y, \dots, x, \dots$$

Temos que x não domina y e y não domina x , existindo um dominador comum v que precede x e y em ambos os caminhos (eventualmente, $v = r$) e caminhos de v a x e de v a y que só possuem em comum o vértice v . Consideremos, agora, os subcaminhos de x a y e de y a x , que certamente evitam v . Se possuem apenas as extremidades x e y em comum, F contém $\text{SP}(r, v, x, y)$, sendo não-redutível. Se, além de x e y , possuem um vértice z_1 em comum, consideramos os subcaminhos de x a z_1 e de z_1 a x . Novamente, se possuem apenas as extremidades x e z_1 em comum, F contém $\text{SP}(r, v, z_1, x)$. Se além de z_1 e x , possuem um vértice z_2 em comum, consideramos os subcaminhos de x a z_2 e de z_2 a x . Este raciocínio pode repetir-se até que estejamos considerando x e z_j adjacentes, para algum j ; neste caso, F contém $\text{SP}(r, v, z_j, x)$.

Portanto, o caminho hamiltoniano existe e é único. ■

Corolário 4.5

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então F possui um único ciclo hamiltoniano.

Prova:

Decorre trivialmente do corolário 4.2 e do teorema 4.8. ■

Corolário 4.6

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então o único caminho hamiltoniano direcionado a partir de r é uma árvore geradora de F .

Em (SZWARCFITER, 1985), é definida a família dos *grafos de fluxo redutíveis a árvore*. Dentre as caracterizações equivalentes encontradas para os membros desta família, temos que um grafo de fluxo é redutível a árvore se, e somente se, é redutível e admite uma busca em profundidade que não produz arestas de cruzamento. Considerando que o caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem em um grafo de fluxo redutível-maximal é uma árvore geradora de profundidade em relação a qual o grafo de fluxo não possui arestas de cruzamento, podemos afirmar que:

Corolário 4.7

Todo grafo de fluxo redutível-maximal é redutível a árvore.

O teorema 4.9 analisa a expansão total de vértices em grafos de fluxo redutíveis-maximais.

Teorema 4.9

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, $v \in V$ é um vértice que não recebe arestas retrógradadas, $G = (V', E', v)$ é redutível-maximal e $V \cap V' = \{v\}$, então a expansão total, em F , de v por G é um grafo de fluxo redutível-maximal.

Prova:

Chamemos $H = (V'', E'', r)$ a expansão total, em F , de v por G . Vamos mostrar que H satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) do teorema 4.1 em relação ao vértice v .

- (i) Como v não recebe arestas retrógradadas em F , $\text{NUC}_H(v) = V''$ e $\text{REG}_H(v) = G$, que é redutível-maximal por hipótese.
- (ii) Pela construção do conjunto E'' , os sucessores imediatos de v em F são sucessores exteriores de v em H com respeito a $\text{NUC}_H(v)$.

(iii) Seja φ a contração, em H , de $\text{NUC}_H(v)$ em v . Então, $\varphi(H) = F$, que é redutível-maximal por hipótese.

Concluimos que H é, de fato, redutível-maximal. ■

4.7 Conclusões

O estudo dos grafos de fluxo redutíveis-maximais iniciou-se com uma discussão sobre saturação e maximalidade de subgrafos geradores. Estendidos ambos os conceitos para grafos de fluxo, vimos que, com respeito à redutibilidade, saturação e maximalidade são equivalentes.

O teorema 4.1 é o resultado principal deste capítulo. Através dele, é possível reconhecer se um grafo de fluxo redutível é redutível-maximal examinando a região, o grafo contraído e o conjunto de sucessores exteriores com respeito a um vértice qualquer. A seção 4.5 ilustrou a aplicação deste teorema.

Construímos, para todo natural $n > 0$, o grafo de fluxo $\Phi(n)$, que mostramos ser redutível-maximal. Este grafo de fluxo desempenhará importante papel no estudo da estrutura dos grafos de fluxo redutíveis-maximais, a ser realizado no capítulo 5. Foram estabelecidas condições necessárias e suficientes para que um grafo de fluxo com n vértices seja isomorfo a $\Phi(n)$.

A última seção resume importantes resultados acerca de grafos de fluxo redutíveis-maximais, a saber: a existência de um único caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem e a presença obrigatória de todas arestas da forma (u, v) , onde v domina u e de todas as arestas da forma (u, v) , onde u é dominador imediato de v . Este fato permitiu concluir que a árvore de dominadores de um grafo de fluxo redutível-maximal é também árvore geradora deste grafo. A existência do caminho hamiltoniano permitiu concluir que todo grafo de fluxo redutível-maximal é redutível a árvore.

Capítulo 5

Morfologia dos Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

Neste capítulo são deduzidas propriedades relativas à estrutura da família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais. Mostramos que qualquer membro desta família pode ser construído a partir da célula básica Φ , definida na seção 4.3, mediante expansões totais de vértices. Em seguida, o Teorema da Decomposição permite decompor um grafo de fluxo redutível-maximal não-trivial em dois outros, de maneira única. A associação com árvores estritamente binárias é consequência deste teorema. Dela deduzimos a quantidade de grafos de fluxo redutíveis-maximais não-isomorfos para um dado número de vértices, bem como os limites inferior e superior para o número de arestas. Por fim, estudamos a estrutura do grafo subjacente de um grafo de fluxo redutível-maximal, mostrando que esses grafos pertencem a uma sub-família dos grafos perfeitos, já caracterizada na literatura.

5.1 A Estrutura dos Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

O teorema 4.8 assegurou a existência e unicidade do caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem de um grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$. Este fato permite definir uma função bijetora $\pi_F: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ de tal modo que $\pi_F(v)$ represente a posição do vértice $v \in V$ na seqüência de vértices que constituem o caminho hamiltoniano. Este valor é denominado *posto de v* , sendo $\pi_F(r) = 1$.

Supondo que o grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$ seja não-trivial, consideremos o conjunto $A_F(r)$, certamente não-vazio, dos sucessores imediatos da origem. Os vértices que integram este conjunto podem ser ordenados de acordo com seus postos, constituindo a seqüência s_1, s_2, \dots, s_ℓ , onde ℓ é o grau de saída de r .

O lema 5.1 mostra que os núcleos de s_1, s_2, \dots, s_ℓ são disjuntos dois a dois.

Lema 5.1

$$\text{NUC}_F(s_i) \cap \text{NUC}_F(s_j) = \emptyset, \forall i, j \in \{1, \dots, \ell\}, i \neq j.$$

Prova:

Suponhamos, por absurdo, que existam i e j nas condições citadas e $v \in \text{NUC}_F(s_i) \cap \text{NUC}_F(s_j)$. Como F é redutível, v é simultaneamente dominado por s_i e s_j . Pelo lema 2.5, s_i domina s_j ou s_j domina s_i . Como s_i e s_j são sucessores imediatos da origem, devemos ter $s_i = s_j$, contrariando a hipótese de $i \neq j$. ■

O próximo lema nos diz que os vértices integrantes de $\text{NUC}_F(s_i)$ têm postos consecutivos a partir de $\pi_F(s_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}$.

Lema 5.2

$$\text{Se } w \in \text{NUC}_F(s_i), \text{ então } x \in \text{NUC}_F(s_i), \forall x \in V \text{ tal que } \pi_F(s_i) \leq \pi_F(x) < \pi_F(w).$$

Prova:

Pela definição de núcleo e existência do caminho hamiltoniano. ■

O próximo teorema permite-nos determinar os núcleos dos sucessores imediatos da origem em função dos postos.

Teorema 5.1

$$\text{NUC}_F(s_i) = \{ w \in V \mid \pi_F(s_i) \leq \pi_F(w) < \pi_F(s_{i+1}) \}, \forall i \in \{1, \dots, \ell - 1\};$$

$$\text{NUC}_F(s_\ell) = \{ w \in V \mid \pi_F(s_\ell) \leq \pi_F(w) \leq |V| \}.$$

Prova:

Devemos mostrar que $X_F(i) \subseteq \text{NUC}_F(s_i)$ e $\text{NUC}_F(s_i) \subseteq X_F(i)$, $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}$, onde

$$X_F(i) = \{ w \in V \mid \pi_F(s_i) \leq \pi_F(w) < \pi_F(s_{i+1}) \}, \forall i \in \{1, \dots, \ell - 1\}, \text{ e}$$

$$X_F(\ell) = \{ w \in V \mid \pi_F(s_\ell) \leq \pi_F(w) \leq |V| \}.$$

Sejam $i \in \{1, \dots, \ell - 1\}$ qualquer e $w \in V$ tal que w é dominado por s_i . Como s_i e s_{i+1} são sucessores imediatos de r , é claro que w deve estar entre s_i e s_{i+1} no caminho hamiltoniano. Logo $\pi_F(s_i) \leq \pi_F(w) < \pi_F(s_{i+1})$ e $\text{DOM}_F(s_i) \subseteq X_F(i)$. Como F é redutível-maximal, pelo corolário 4.1, $\text{NUC}_F(s_i) = \text{DOM}_F(s_i)$, donde $\text{NUC}_F(s_i) \subseteq X_F(i)$.

Pelo lema 5.2, os vértices de $\text{NUC}_F(s_i)$ têm postos consecutivos a partir de $\pi_F(s_i)$. Sejam $u, w \in V$ vértices de postos consecutivos tais que $u \in \text{NUC}_F(s_i)$ e $w \notin \text{NUC}_F(s_i)$. Portanto, w é sucessor exterior de u com respeito a $\text{NUC}_F(s_i)$ e, pelo item (ii) do teorema 4.1, $(s_i, w) \in E$, como na figura 5.1.

A existência do caminho r, s_i, w , aliada à hipótese de $w \notin \text{NUC}_F(s_i) = \text{DOM}_F(s_i)$, permite-nos afirmar que apenas a origem r domina w , ou seja, $\text{DI}_F(w) = r$. Logo, pelo teorema 4.7, $(r, w) \in E$, ou seja, $w \in A_F(r)$. Portanto, $w = s_{i+1}$ e $X_F(i) \subseteq \text{NUC}_F(s_i)$.

A prova de que $\text{DOM}_F(s_\ell) = \{ w \in V \mid \pi_F(s_\ell) \leq \pi_F(w) \leq |V| \}$ é análoga. ■

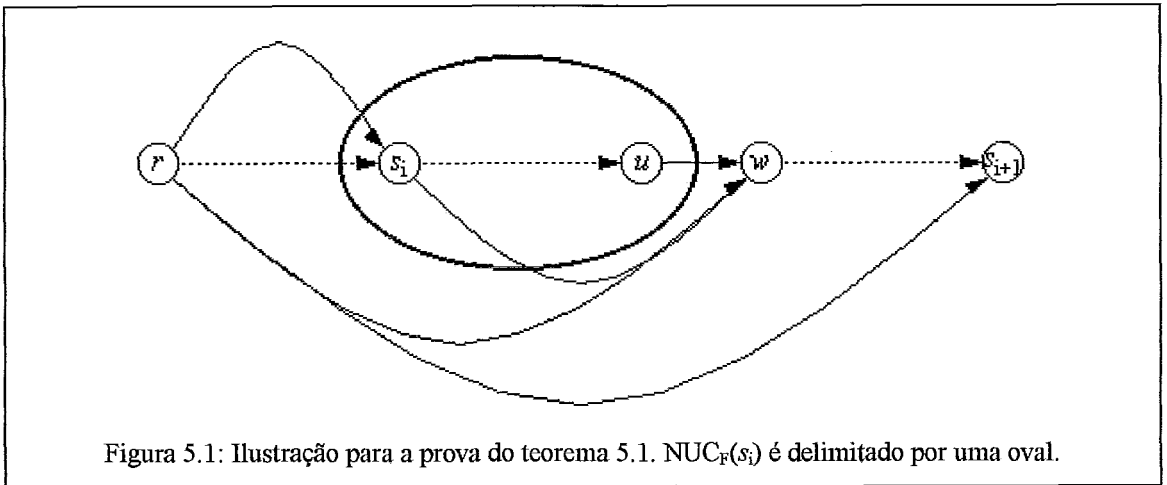


Figura 5.1: Ilustração para a prova do teorema 5.1. $\text{NUC}_F(s_i)$ é delimitado por uma oval.

Como consequência imediata dessas proposições, temos o seguinte corolário:

Corolário 5.1

A família de subconjuntos $\{\{r\}, \text{NUC}_F(s_1), \dots, \text{NUC}_F(s_\ell)\}$ forma uma partição de V .

Vamos definir a função $\Psi: V \rightarrow \{r, s_1, \dots, s_\ell\}$, cujo efeito é contrair simultaneamente os núcleos $\text{NUC}_F(s_1), \dots, \text{NUC}_F(s_\ell)$ em seus vértices de entrada s_1, \dots, s_ℓ , mantendo inalterada a origem:

- $\Psi(r) = r$;
- $\forall i \in \{1, \dots, \ell\}, \forall v \in \text{NUC}_F(s_i), \Psi(v) = s_i$.

O teorema seguinte analisa o grafo de fluxo $\Psi(F)$, imagem de F por esta contração simultânea.

Teorema 5.2

$\Psi(F)$ é isomorfo a $\Phi(\ell + 1)$.

Prova:

Consideremos a seqüência de grafos de fluxo:

$$F_1 = F$$

$$F_{i+1} = \varphi_i(F_i), \text{ onde } \varphi_i \text{ é a contração, em } F_i, \text{ de } \text{NUC}_{F_i}(s_i) \text{ em } s_i, \text{ para } i = 1, \dots, \ell.$$

Tendo em conta que $\text{NUC}_{F_i}(s_i) = \text{NUC}_F(s_i), \forall i \in \{1, \dots, \ell\}$, a contração simultânea Ψ que estamos considerando é exatamente a composição das contrações $\varphi_\ell \circ \dots \circ \varphi_1$, donde $F_{\ell+1} = \Psi(F)$. Pelo item (iii) do teorema 4.1, os grafos de fluxo $F_1, \dots, F_\ell, F_{\ell+1}$ são todos redutíveis-maximais.

Em $F_{\ell+1}$, apenas a origem r recebe arestas retrógradas, já que a existência de uma aresta retrógrada (s_j, s_i) implicaria na existência de uma aresta (x, y) em F , também retrógrada,

onde $x \in \text{NUC}_F(s_j)$ e $y \in \text{NUC}_F(s_i)$, acarretando $x \in \text{NUC}_F(s_j) \cap \text{NUC}_F(s_i)$, um absurdo pelo lema 5.1.

Concluimos que $F_{\ell+1}$ é um grafo de fluxo redutível-maximal em que apenas a origem recebe arestas retrógradas. Pelo teorema 4.3, $F_{\ell+1} = \Psi(F)$ é isomorfo a $\Phi(\ell + 1)$. ■

O teorema 5.3 constrói os conjuntos de predecessores imediatos dos vértices s_1, \dots, s_ℓ :

Teorema 5.3

$$P_F(s_i) = \{ w \in V \mid 1 \leq \pi_F(w) < \pi_F(s_{i+1}) \} - \{s_i\}, \forall i \in \{1, \dots, \ell - 1\};$$

$$P_F(s_\ell) = V - \{s_\ell\}.$$

Prova:

Sejam Ψ a contração simultânea definida anteriormente e $i \in \{1, \dots, \ell\}$ qualquer. Sendo $\Psi(F)$ isomorfo a $\Phi(\ell + 1)$, são arestas em $\Psi(F)$: (r, s_i) e (s_j, s_i) , para $j = 1, \dots, i - 1$. Pela definição de imagem de um digrafo por uma função, a cada aresta (x, y) em $\Psi(F)$ corresponde pelo menos uma aresta (u, v) em F , onde $u \in \Psi^{-1}(x)$ e $v \in \Psi^{-1}(y)$. Como F é redutível, o único vértice em $\Psi^{-1}(s_i) = \text{NUC}_F(s_i)$ que pode receber arestas de vértices não pertencentes a $\text{NUC}_F(s_i)$ é s_i . Logo, $(r, s_i) \in E$ e existem $t_j \in \Psi^{-1}(s_j) = \text{NUC}_F(s_j)$ tais que $(t_j, s_i) \in E$, para $j = 1, \dots, i - 1$. Em outras palavras, s_i possui como predecessores imediatos em F : a origem r e pelo menos um vértice de cada um dos núcleos $\text{NUC}_F(s_j)$, para $j = 1, \dots, i - 1$.

Pelo item (ii) do teorema 4.1 de caracterização, a existência de uma aresta (t_j, s_i) , com $t_j \in \text{NUC}_F(s_j)$ e $s_i \notin \text{NUC}_F(s_j)$, implica na existência de todas arestas da forma (x, s_i) , $\forall x \in \text{NUC}_F(s_j)$. Logo, todos os vértices de posto inferior ao de s_i são seus predecessores imediatos em F . Além disso, s_i deve receber arestas retrógradas dos demais vértices em seu núcleo (teorema 4.6 e corolário 4.1). Portanto,

$$\begin{aligned}
 P_F(s_i) &= \{ w \in V \mid 1 \leq \pi_F(w) < \pi_F(s_i) \} \cup (\text{NUC}_F(s_i) - \{s_i\}) \\
 &= \{ w \in V \mid \pi_F(w) < \pi_F(s_{i+1}) \} - \{s_i\}, & \text{se } 1 \leq i < \ell; \\
 &= V - \{s_\ell\}, & \text{se } i = \ell. \blacksquare
 \end{aligned}$$

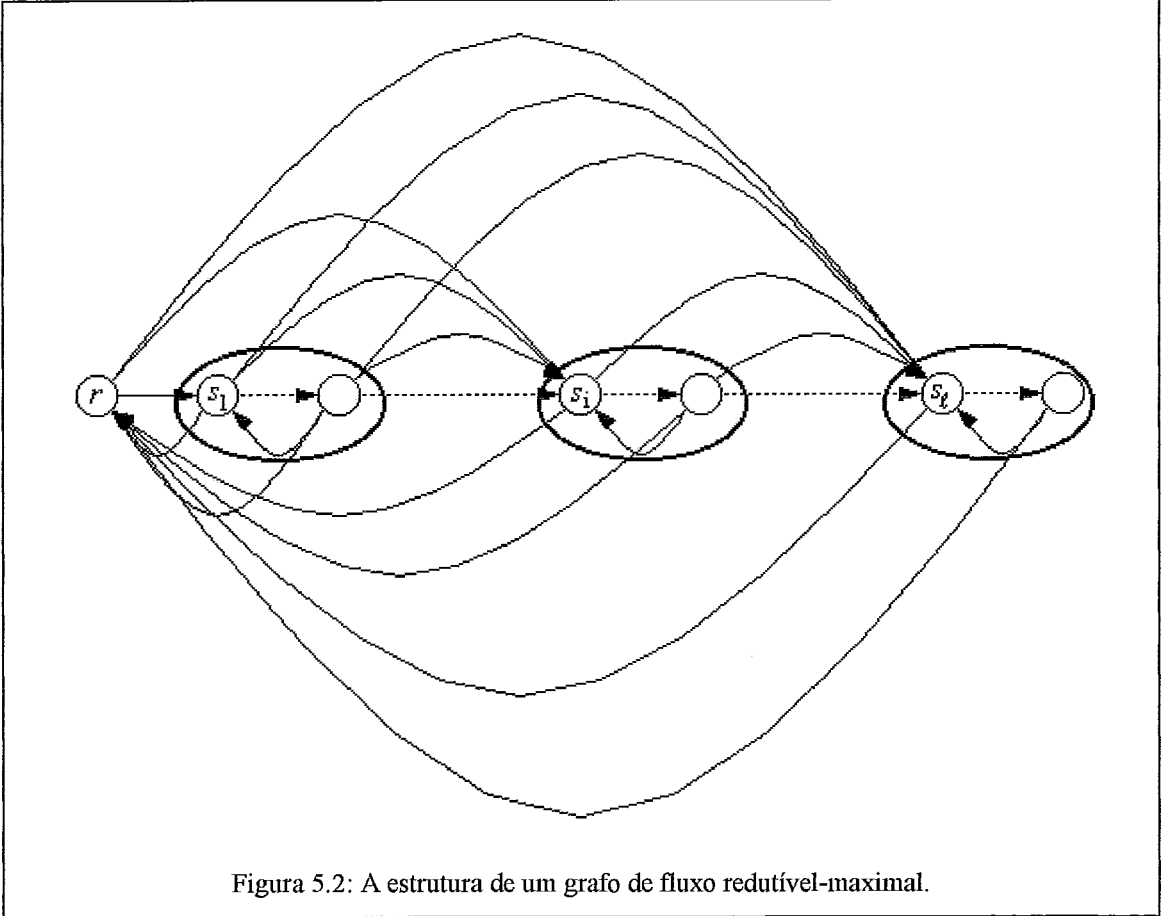


Figura 5.2: A estrutura de um grafo de fluxo redutível-maximal.

O item (i) do teorema 4.1 de caracterização afirma que as regiões $\text{REG}_F(s_i)$ são grafos de fluxo redutíveis-maximais, para $i = 1, \dots, \ell$. O teorema 5.2 nos diz que a imagem de F pela contração simultânea dos núcleos $\text{NUC}_F(s_i)$ em seus vértices-cabeça é um grafo de fluxo isomorfo a $\Phi(\ell + 1)$. O teorema 5.3 nos mostra como os núcleos são interligados em F . Recordando a definição de expansão total, dada na seção 2.11, podemos concluir que todo grafo de fluxo redutível-maximal não-trivial $F = (V, E, r)$ provém de uma expansão total generalizada dos vértices da célula básica $\Phi(\ell + 1)$, de forma que o vértice s_i de $\Phi(\ell + 1)$ sofre uma expansão total por $\text{REG}_F(s_i)$, para $i = 1, \dots, \ell$. Esta estrutura está ilustrada na figura 5.2, onde as ovais em negrito demarcam os vértices

integrantes das regiões $\text{REG}_F(s_1), \dots, \text{REG}_F(s_\ell)$. Como essas regiões são grafos de fluxo redutíveis-maximais, é interessante observar que a mesma estrutura se repete para cada uma delas.

5.2 O Teorema da Decomposição

Vamos mostrar, nesta seção, com base na estrutura deduzida na seção anterior, que um grafo de fluxo redutível-maximal pode ser decomposto de maneira única em dois outros grafos de fluxo, também redutíveis-maximais.

O lema seguinte apresenta um fato, no mínimo, curioso acerca de grafos de fluxos redutíveis.

Lema 5.3

Se $F = (V, E, r)$ é redutível, então F possui, no máximo dois vértices com grau de entrada máximo $|V| - 1$.

Prova:

Se F possuir três vértices $x, y, z \in V$ com grau de entrada máximo, F possui o subgrafo proibido $\text{SP}(r, x, y, z)$, não sendo redutível, como na figura 5.3. ■

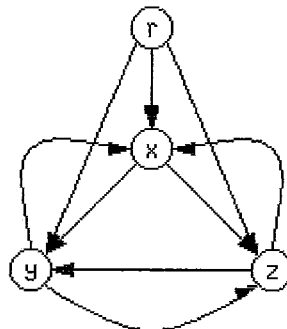


Figura 5.3: Ilustração do lema 5.3.

O lema 5.4 nos diz que um grafo de fluxo redutível-maximal não-trivial possui exatamente dois vértices com grau de entrada máximo: a origem e seu sucessor de maior posto.

Lema 5.4

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal não-trivial, então F possui exatamente dois vértices com grau de entrada máximo: a origem e seu sucessor imediato de maior posto.

Prova:

Decorre trivialmente do teorema 5.3. ■

Dados os grafos de fluxo $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$, sendo $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, definimos o *produto*

$$F_1 \otimes F_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \times \{r_2\}) \cup (V_2 \times \{r_1\}), r_1).$$

É importante notar que:

- Os vértices e arestas de ambos os grafos de fluxos são preservados.
- Não são acrescentadas arestas com extremidades provenientes do mesmo grafo de fluxo. As arestas acrescentadas por \otimes possuem uma extremidade proveniente de F_1 e outra de F_2 .
- Pelo fato de só estar definida para grafos de fluxo cujos conjuntos de vértices sejam disjuntos, não podemos dizer que o produto \otimes seja uma operação entre grafos de fluxo. Por exemplo, $F_1 \otimes F_1$ não está definido.
- A origem de $F_1 \otimes F_2$ é r_1 , origem do primeiro grafo F_1 ; logo, \otimes não é comutativo.

Na figura 5.4 podemos observar um exemplo de aplicação de \otimes a dois grafos de fluxo que não são redutíveis-maximais.

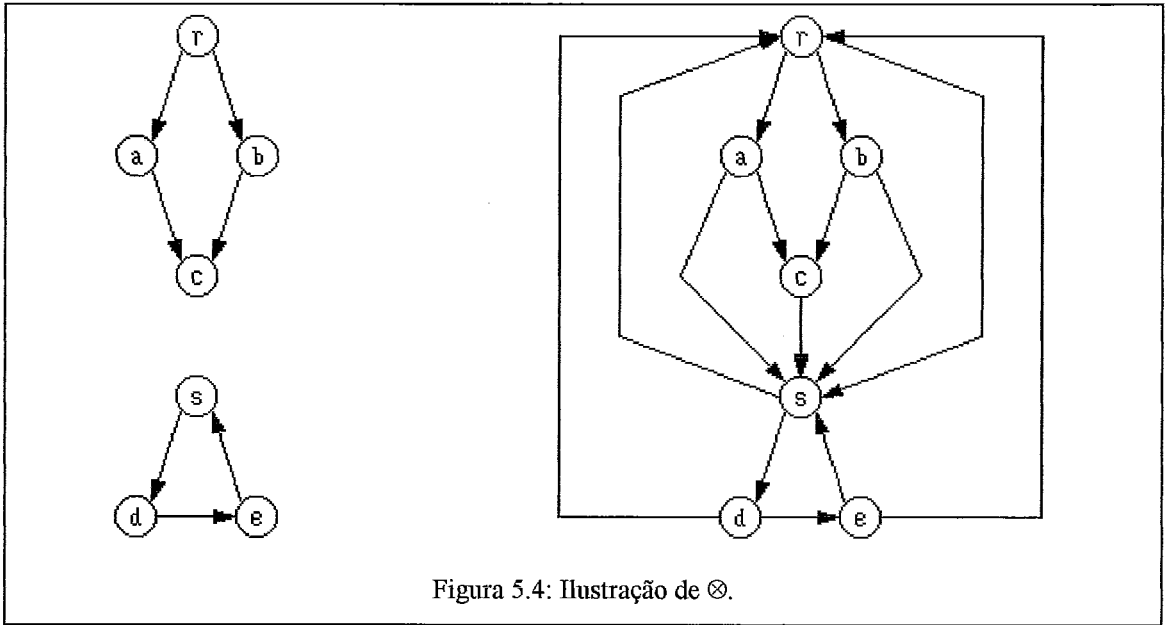


Figura 5.4: Ilustração de \otimes .

O próximo lema caracteriza os grafos de fluxo redutíveis-maximais em função de \otimes . Por $(\{t\}, \emptyset, t)$ entendemos o grafo de fluxo trivial consistindo apenas da origem t .

Lema 5.5

Sejam $F = (V, E, r)$ e $t \notin V$. F é redutível-maximal se, e somente se, $F \otimes (\{t\}, \emptyset, t)$ é redutível-maximal.

Prova:

Chamemos $G = F \otimes (\{t\}, \emptyset, t)$.

(\Rightarrow) Suponhamos que F seja redutível-maximal e consideremos uma aresta (x, y) , $x \neq y$, que não pertença a G . Temos duas alternativas:

- (x, y) tem ambas as extremidades pertencentes a V :

Como F é redutível-maximal, $F + (x, y)$ é não-redutível, o mesmo acontecendo para $G + (x, y)$.

- $x = t$ e $y \in V - \{r\}$:

$G + (x, y) = G + (t, y)$ contém $SP(r, r, y, t)$, sendo não-redutível (figura 5.5).

Portanto, G é redutível-maximal.

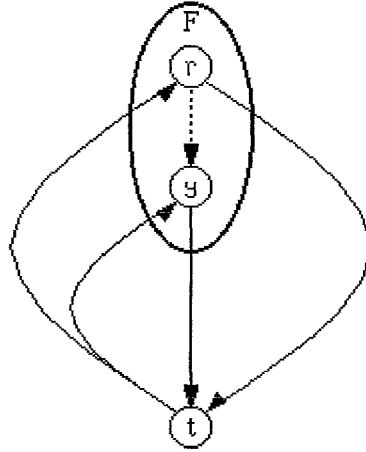


Figura 5.5: Ilustração para a prova do lema 5.5.

(\Leftarrow) Suponhamos que G seja redutível-maximal. Seja uma aresta (x, y) , $x \neq y$, não pertencente a G com ambas as extremidades em V . Logo, $G + (x, y)$ é não-redutível e contém um subgrafo proibido ao qual o vértice t não pertence, já que a única aresta que parte de t dirige-se a r . Portanto, $F + (x, y)$ contém o mesmo subgrafo proibido, sendo não-redutível e F é redutível-maximal. ■

O teorema seguinte generaliza este resultado.

Teorema 5.4

Sejam os grafos de fluxo $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$, tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. F_1 e F_2 são redutíveis-maximais se, e somente se, $F_1 \otimes F_2$ é redutível-maximal.

Prova:

(\Rightarrow) Suponhamos que F_1 e F_2 sejam redutíveis-maximais. Tomando $t \notin V_1$, pelo lema 5.5, $F_1 \otimes (\{t\}, \emptyset, t)$ é redutível-maximal. Observando que $F_1 \otimes F_2$ nada mais é do que a expansão total, em $F_1 \otimes (\{t\}, \emptyset, t)$, do vértice t por F_2 , concluimos, pelo teorema 4.9, que $F_1 \otimes F_2$ é redutível-maximal.

(\Leftarrow) Suponhamos que $G = F_1 \otimes F_2$ seja redutível-maximal. Observando que $\text{NUC}_G(r_2) = V_2$, pelo item (i) do teorema 4.1, temos que $\text{REG}_G(r_2) = F_2$ é redutível-maximal. Chamando φ a contração deste núcleo em seu vértice cabeça r_2 , pelo item (iii) do teorema 4.1, $\varphi(G) = F_1 \otimes (\{r_2\}, \emptyset, r_2)$ é redutível-maximal. Aplicando o lema 5.5, concluímos que F_1 é também redutível-maximal. ■

Podemos, finalmente, enunciar o Teorema da Decomposição.

Teorema 5.5 (Teorema da Decomposição)

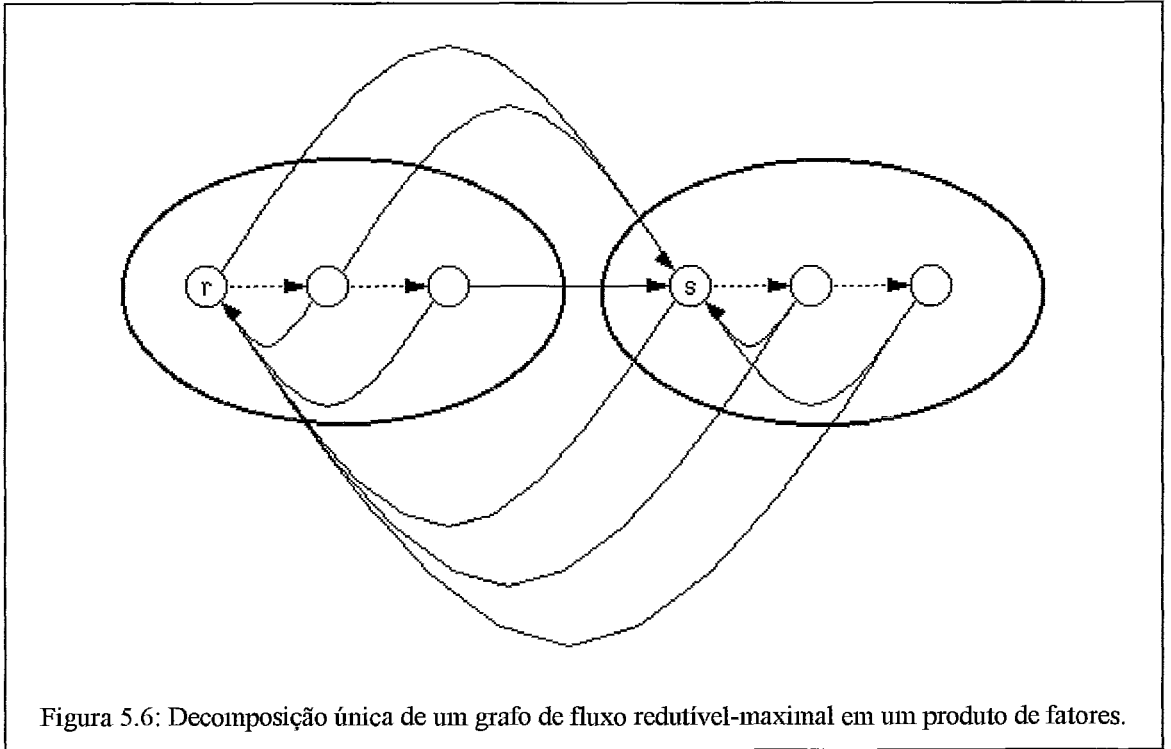
Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal não-trivial, então existem um único grafo de fluxo $\text{FAT1}(F)$ e um único grafo de fluxo $\text{FAT2}(F)$, ambos redutíveis-maximais, tais que $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$.

Prova:

Seja $s \in A_F(r)$ o sucessor de r de maior posto no caminho hamiltoniano de F . Chamemos $\text{FAT1}(F)$ o subgrafo de fluxo de F com raiz r induzido por $V - \text{NUC}_F(s)$ e $\text{FAT2}(F)$ o subgrafo de fluxo de F com raiz s induzido por $\text{NUC}_F(s)$, ou seja, a região $\text{REG}_F(s)$. Pela estrutura deduzida na figura 5.2, é imediato verificar que $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$ e que $\text{FAT1}(F)$ e $\text{FAT2}(F)$ são também redutíveis-maximais (teorema 5.5).

Para constatar a unicidade da decomposição, observemos que, pela definição de \otimes , a origem de $\text{FAT1}(F)$ deve ser r e a origem de $\text{FAT2}(F)$ deve receber arestas de todos os demais vértices. O único vértice que satisfaz esse requisito é s . Por ser redutível-maximal, $\text{FAT1}(F)$ deve possuir um único caminho hamiltoniano a partir de sua origem r . Este caminho deve ser um prefixo do caminho hamiltoniano de F , compreendendo os vértices de posto inferior a s , do contrário estaríamos negando a unicidade do caminho hamiltoniano de F a partir de r . Desta forma, a decomposição apresentada é a única que satisfaz as condições impostas. ■

Os grafos de fluxo redutíveis-maximais $FAT1(F)$ e $FAT2(F)$ são denominados *primeiro* e *segundo fatores de F* , respectivamente. A decomposição é ilustrada na figura 5.6.



O teorema 5.6 é consequência de toda a teoria exposta até o presente momento neste capítulo: todo grafo de fluxo redutível-maximal é o produto da raiz (considerada como um grafo de fluxo trivial) pelas regiões de seus sucessores, ordenados pelos postos:

Teorema 5.6

Se $F = (V, E, r)$ é redutível-maximal, então

$$F = (((\{r\}, \emptyset, r) \otimes REG_F(s_1)) \otimes \dots) \otimes REG_F(s_{\ell-1}) \otimes REG_F(s_\ell)$$

Prova:

Pelo teorema 5.5, $F = FAT1(F) \otimes FAT2(F) = FAT1(F) \otimes REG_F(s_\ell)$. Entretanto, a mesma decomposição se aplica a $FAT1(F)$. ■

5.3 Árvore Característica de um Grafo de Fluxo Redutível-Maximal

A um grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$ vamos associar uma árvore estritamente binária $B(F)$, que denominaremos *árvore característica de F* . Esta árvore possui $2|V| - 1$ vértices, sendo $|V|$ folhas e $|V| - 1$ vértices interiores. As folhas de $B(F)$ são os próprios vértices de F .

Dado $F = (V, E, r)$, a construção de $B(F)$ é feita recursivamente:

Se F é trivial então

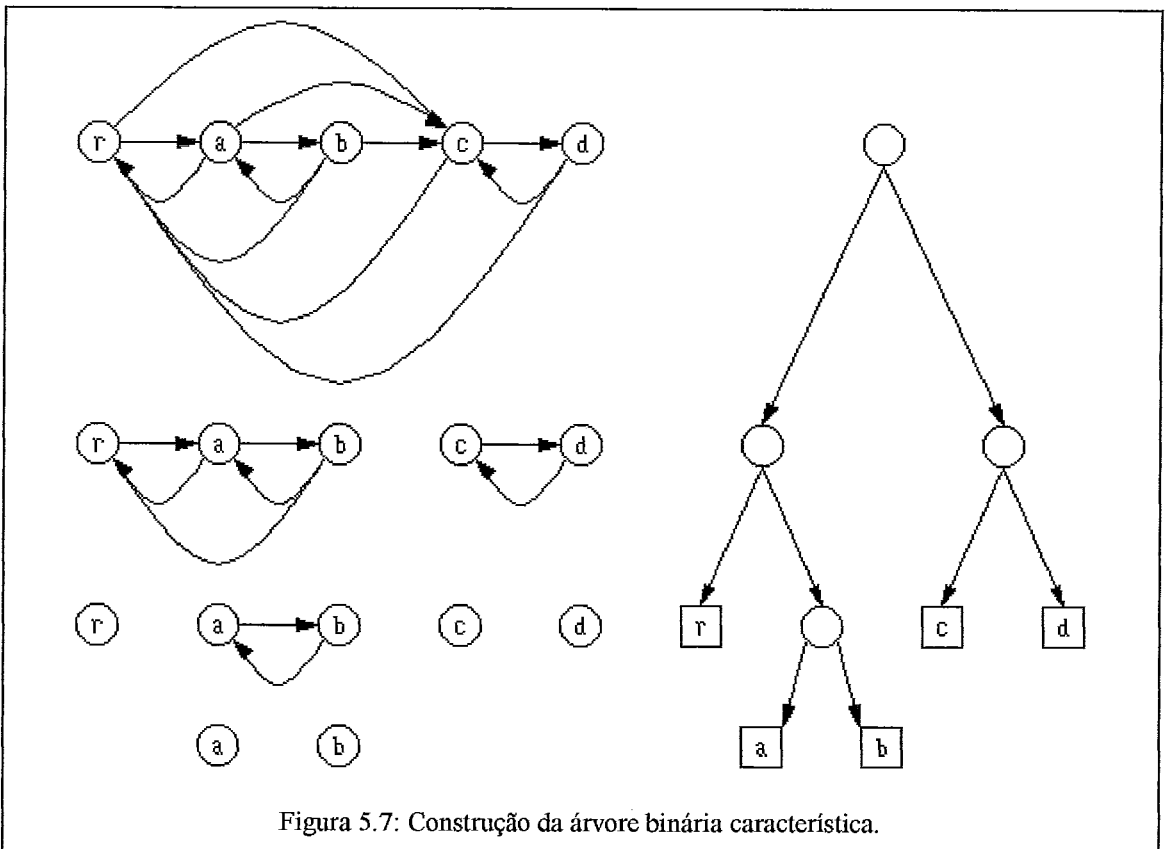
$$B(F) := F$$

caso contrário

$B(F)$ é a árvore binária que possui:

$B(\text{FAT1}(F))$ como sub-árvore à esquerda da raiz;

$B(\text{FAT2}(F))$ como sub-árvore à direita da raiz.



Na figura 5.7, podemos acompanhar a construção da árvore binária característica do grafo de fluxo redutível-maximal mostrado no canto superior à esquerda. Os fatores de cada grafo são mostrados imediatamente abaixo dele. O processo de decomposição se encerra quando atingimos um fator trivial, indecomponível. Os vértices interiores da árvore representam produtos, ao passo que as folhas são os próprios vértices do grafo. Vale observar que a ordem dos vértices no único caminho hamiltoniano de F é a mesma ordem das folhas, da esquerda para a direita, na árvore característica.

Esta associação entre grafos de fluxo redutíveis-maximais e árvores estritamente binárias, baseada na unicidade da decomposição de um grafo de fluxo redutível-maximal em um produto de fatores, permite-nos deduzir importantes propriedades. A primeira delas, expressa no teorema 5.7, diz respeito à quantidade de grafos de fluxo redutíveis-maximais não-isomorfos com dado número de vértices.

Teorema 5.7

Existem $\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ grafos de fluxo redutíveis-maximais não-isomorfos com $n > 0$ vértices.

Prova:

Existem tantos grafos de fluxo redutíveis-maximais não-isomorfos com n vértices quantas são as árvores estritamente binárias não-isomorfas com n folhas. Esta quantidade

é dada pelo número de Catalão $C(n) = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$, para $n > 0$ (BRASSARD e

BRATLEY, 1988, GRAHAM *et al.*, 1989). ■

Para um grafo de fluxo redutível-maximal F , uma importante relação pode ser estabelecida entre o grau de saída de um vértice em F e seu nível na árvore característica $B(F)$, conforme o lema seguinte. Vale recordar que o nível de um vértice em uma árvore é o comprimento do (único) caminho da origem até o vértice considerado. Desta forma, a raiz da árvore tem nível 0.

Lema 5.6

Seja $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo redutível-maximal. Então $L_{B(F)}(v) = |A_F(v)|, \forall v \in V$.

Prova:

Indução finita sobre $|V|$:

- Para $|V| = 1$, F é trivial e o teorema vale, pois $L_{B(F)}(r) = |A_F(r)| = 0$.
- Hipótese de indução: suponhamos válido para grafos de fluxo com menos de n vértices, $n > 1$.
- Seja F com $n > 1$ vértices. Como F não é trivial, $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$. Pela definição de \otimes , observamos que:
 - se v é um vértice do primeiro fator, $|A_F(v)| = |A_{\text{FAT1}(F)}(v)| + 1$. Como $\text{FAT1}(F)$ tem menos de n vértices, pela hipótese de indução, $|A_{\text{FAT1}(F)}(v)| = L_{B(\text{FAT1}(F))}(v)$. Pela construção de $B(F)$, $L_{B(F)}(v) = L_{B(\text{FAT1}(F))}(v) + 1$. Logo, $|A_F(v)| = |A_{\text{FAT1}(F)}(v)| + 1 = L_{B(\text{FAT1}(F))}(v) + 1 = L_{B(F)}(v)$.
 - se v é um vértice do segundo fator, a prova é análoga.

Logo, a igualdade se verifica para todo vértice $v \in V$. ■

Do lema 5.6, podemos concluir que o número de arestas de um grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$ é igual à soma dos níveis das folhas de sua árvore característica.

Observando que o conjunto de folhas de $B(F)$ é V , escrevemos:

$$|E| = \sum_{v \in V} L_{B(F)}(v).$$

Este somatório é denominado, na literatura, *comprimento de caminho externo* de T (KNUTH 1968, REINGOLD *et al.*, 1977, SZWARCFITER e MARKENZON, 1994). O teorema 5.8 sintetiza este resultado.

Teorema 5.8

O número de arestas de um grafo de fluxo redutível-maximal é igual ao comprimento de caminho externo de sua árvore binária característica.

A expressão de Kraft-McMillan (DE PRISCO e PERSIANO, 1995, KNUTH 1968), [Knu68] estabelece que, se l_1, l_2, \dots, l_n são os níveis das n folhas em uma árvore estritamente binária com $2n - 1$ vértices, $n > 0$, então

$$\sum_{i=1}^n 2^{-l_i} = 1.$$

O teorema 5.9, a seguir, utiliza este resultado, obtendo uma interessante relação entre os graus de saída dos vértices de um grafo de fluxo redutível-maximal.

Teorema 5.9

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível-maximal, então $\sum_{v \in \mathcal{F}} 2^{-|A_r(v)|} = 1$.

Prova:

Basta usar a expressão de Kraft-McMillan e o lema 5.6. ■

5.4 Limites para o Número de Arestas de um Grafo de Fluxo Redutível-Maximal

Em vista do teorema 5.8, podemos obter os limites inferior e superior para o número de arestas de um grafo de fluxo redutível-maximal com $n > 0$ vértices minimizando e maximizando o comprimento de caminho externo de uma árvore estritamente binária com n folhas, conforme o teorema 5.10.

Teorema 5.10

Um grafo de fluxo redutível-maximal com $n > 0$ vértices possui, no mínimo,

$$NA_{\min}(n) = n(\lfloor \log_2 n \rfloor + 2) - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1} \text{ e, no máximo, } NA_{\max}(n) = \frac{n^2 + n - 2}{2} \text{ arestas.}$$

Prova:

Determinar $NA_{\min}(n)$ e $NA_{\max}(n)$ equivale a calcular, respectivamente, os comprimentos de caminho externo mínimo e máximo que uma árvore estritamente binária com $n > 0$ folhas pode possuir. Estes números podem ser vistos em (KNUTH, 1968, REINGOLD *et al.*, 1977, BRASSARD e BRATLEY, 1988).

O limite superior $NA_{\max}(n)$ é atingido para árvores estritamente binárias que possuem exatamente uma folha em cada um dos níveis $1, \dots, n - 2$ e duas folhas no nível $n - 1$. Já o limite inferior $NA_{\min}(n)$ é atingido para árvores estritamente binárias completas. ■

É importante notar que o limite superior $NA_{\max}(n)$ corresponde ao número máximo de arestas que um grafo de fluxo redutível com n vértices pode possuir. No entanto, o limite inferior $NA_{\min}(n)$ não corresponde ao número mínimo de arestas que um grafo de fluxo redutível com n vértices pode possuir, pois este número é $n - 1$ (uma árvore direcionada é um grafo de fluxo redutível).

A obtenção do número máximo de arestas que os grafos de uma determinada família podem possuir constitui importante problema relacionado à teoria dos grafos extremos, conforme (HARARY, 1969). Dados $n > 0$ e um conjunto P de subgrafos proibidos, $ex(n, P)$ representa o número máximo de arestas de um grafo com n vértices que não possui nenhum subgrafo pertencente a P . Em nosso caso, tratamos de grafos de fluxo, em vez de grafos, e o conjunto P é constituído por todos os grafos de fluxo homeomorfos ao subgrafo proibido para redutibilidade $SP(r, x, y, z)$.

Na figura 5.8, vemos os $C(4) = 5$ grafos de fluxo redutíveis-maximais não-isomorfos com 4 vértices, com suas respectivas árvores características. Os quatro primeiros possuem número máximo de arestas ($NA_{\max}(4) = 9$), ao passo que o último possui o número mínimo ($NA_{\min}(4) = 8$).

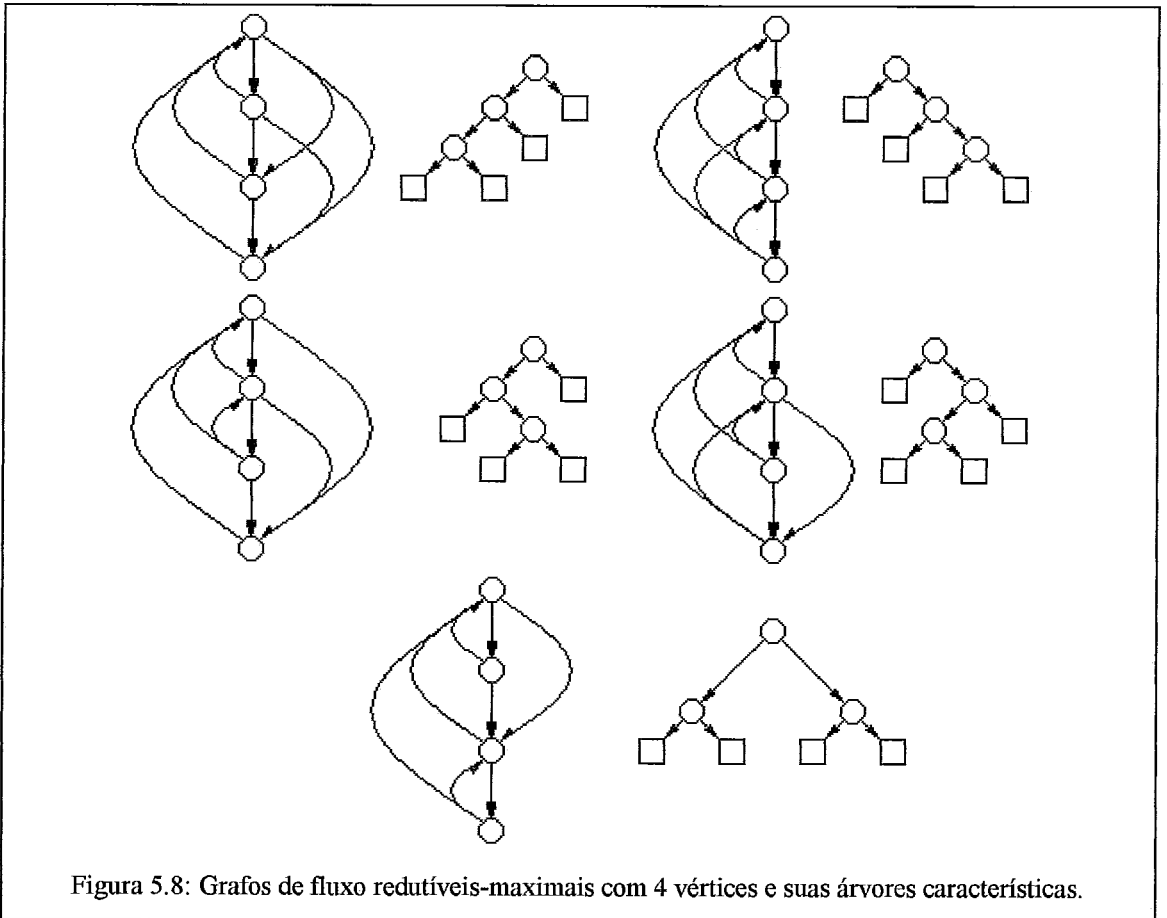
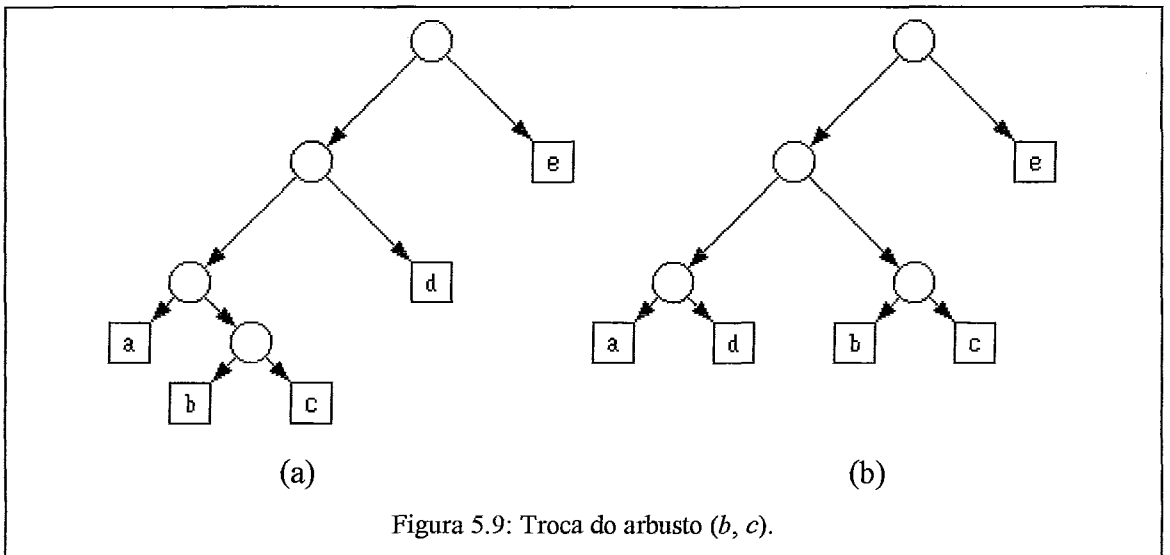


Figura 5.8: Grafos de fluxo redutíveis-maximais com 4 vértices e suas árvores características.

A determinação dos limites inferior e superior para o número de arestas de um grafo de fluxo redutível-maximal leva-nos à seguinte questão: dados $n > 0$ e m tais que $NA_{\min}(n) \leq m \leq NA_{\max}(n)$, é sempre possível construir um grafo de fluxo redutível-maximal com n vértices e m arestas ?

A resposta a essa pergunta é afirmativa. Para justificá-la, sistematizaremos um processo para obter árvores estritamente binárias com $n > 0$ folhas e comprimentos de caminho externo variando em toda a faixa viável, de $NA_{\min}(n)$ a $NA_{\max}(n)$. Algumas definições prévias são necessárias.

Em uma árvore estritamente binária com $n > 0$ folhas, denominamos *ordem natural das folhas* à seqüência em que as folhas figuram na árvore, da esquerda para a direita. Um *arbusto* é uma sub-árvore constituída por duas folhas irmãs e um vértice interior, pai de ambas as folhas. Um arbusto é bem determinado pelo par de folhas que o constituem. O nível do vértice pai das folhas em um arbusto é denominado *nível do arbusto*. A *troca* em um arbusto é realizada com a folha vizinha à direita, na ordem natural.



Na figura 5.9(a), vemos uma árvore estritamente binária com 5 folhas. A ordem natural das folhas é a seqüência a, b, c, d, e . A figura 5.9(b) mostra a árvore resultante da troca

no arbusto (b, c) , de nível 3, que é trocado com a folha vizinha d , de nível 2. Observe que a ordem natural das folhas na árvore resultante é a, d, b, c, e .

Sejam T uma árvore estritamente binária com $n > 0$ folhas, (x, y) um arbusto de nível L , z a folha vizinha ao arbusto, de nível M , e T' a árvore resultante da troca do arbusto (x, y) . Os comprimentos de caminho externo de T e T' podem ser expressos da seguinte maneira: $CE(T) = F + 2(L + 1) + M$ e $CE(T') = F + 2(M + 1) + L$, onde F corresponde ao somatório dos níveis das folhas que permaneceram inalterados. Logo,

$$CE(T') = CE(T) + (M - L).$$

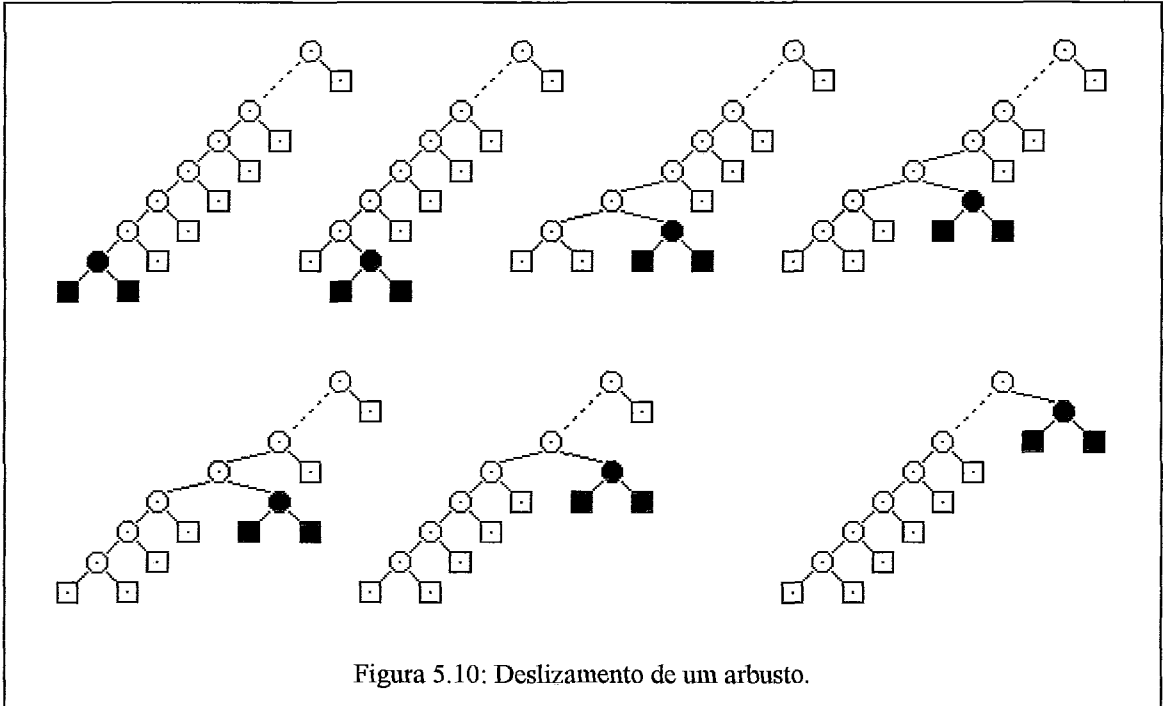
Dizemos que a troca de um arbusto é *produtiva* se mantém ou diminui de uma unidade o comprimento de caminho externo na árvore resultante. Neste caso, pela expressão deduzida, devemos ter $-1 \leq M - L \leq 0$; ou seja, a folha vizinha deve estar situada ou no mesmo nível ou um nível abaixo do arbusto.

Em uma árvore estritamente binária, o *deslizamento* de um arbusto consiste em uma seqüência de trocas desse arbusto, enquanto produtivas. Em outras palavras, o arbusto é trocado sucessivamente com a folha vizinha enquanto essa troca mantiver ou diminuir de uma unidade o comprimento de caminho externo na árvore resultante.

Como ponto de partida do processo de geração que queremos sistematizar, tomemos a árvore estritamente binária T com $n > 0$ folhas situadas nos níveis

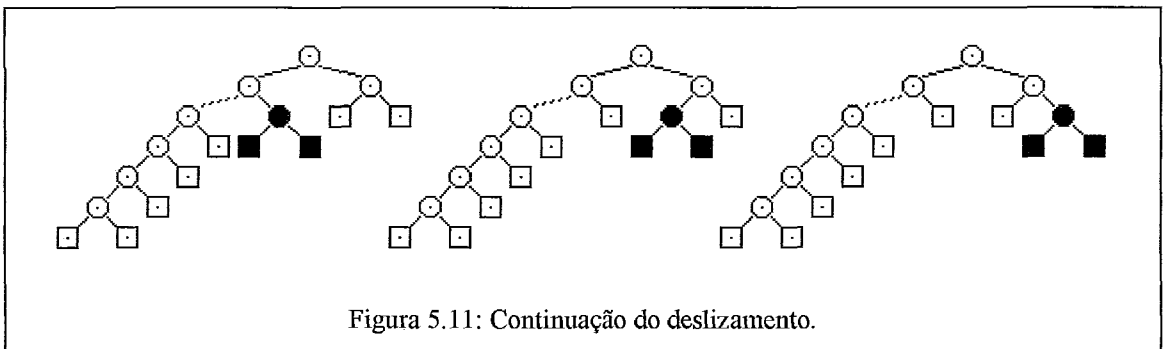
$$[n - 1, n - 1, n - 2, \dots, 2, 1].$$

Esta árvore tem comprimento de caminho externo máximo $NA_{\max}(n) = (n^2 + n - 2) / 2$ e possui um único arbusto, constituído pelas duas primeiras folhas na ordem natural, situado no nível $n - 2$. O deslizamento desse arbusto produz sucessivamente $n - 2$ árvores estritamente binárias, com comprimentos de caminho externo $NA_{\max}(n)$, $NA_{\max}(n) - 1$, $NA_{\max}(n) - 2$, ..., $NA_{\max}(n) - n + 3$. A primeira troca não altera o comprimento de caminho externo, pois a folha vizinha situa-se no mesmo nível do arbusto, como ilustrado na figura 5.10.



Chamemos T^p a árvore obtida ao final do deslizamento. O arbusto torna-se filho direito da raiz em T^p , situado no nível 1 e a altura de T^p é uma unidade menor que a de T .

O mesmo processo pode ser repetido para a árvore T^p , que possui um arbusto situado no nível $n - 3$. O deslizamento desse arbusto produzirá também $n - 2$ árvores estritamente binárias. A figura 5.11 ilustra as duas últimas trocas do arbusto. A árvore T^{pp} resultante tem altura uma unidade menor que a de T^p e, portanto, 2 unidades menor que a de T .



A figura 5.12 ilustra a última troca do deslizamento seguinte, em que o arbusto situado no nível $n - 4$ de T^{pp} é conduzido ao nível 2, produzindo a árvore T^{ppp} .

$NA_{\max}(n)$, é sempre possível construir uma árvore estritamente binária com n folhas e comprimento de caminho externo m . Como consequência, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.11

Dados $n > 0$ e m tais que $NA_{\min}(n) \leq m \leq NA_{\max}(n)$, existe pelo menos um grafo de fluxo redutível-maximal com n vértices e m arestas.

Em (AHO e ULLMAN, 1976), são definidos recorrentemente os grafos de fluxo em espiral (“spiral graphs”), a saber:

- (i) Um grafo de fluxo trivial é um grafo de fluxo em espiral.
- (ii) Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo em espiral e $s \notin V$, então

$$F_1 = (V \cup \{s\}, E \cup (V \times \{s\}) \cup \{(s, r)\}, r) \quad \text{e}$$

$$F_2 = (V \cup \{s\}, E \cup (V \times \{s\}) \cup \{(s, r)\}, s)$$

são grafos de fluxo em espiral.

Esta construção é um caso particular do produto \otimes , definido na seção 5.2, em que um dos grafos de fluxo é trivial, pois $F_1 = F \otimes (\{s\}, \emptyset, s)$ e $F_2 = (\{s\}, \emptyset, s) \otimes F$.

O teorema seguinte mostra que a família dos grafos em espiral está propriamente contida na família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais:

Teorema 5.12

Todo grafo de fluxo em espiral é redutível-maximal com número máximo de arestas.

Prova:

Por serem construídos através de um caso particular do produto \otimes , todo grafo de fluxo em espiral é redutível-maximal. O número de arestas de um grafo de fluxo em espiral pode ser calculado por indução finita sobre o número de vértices:

- Para o grafo de fluxo trivial, desprovido de arestas, o resultado vale.
- Hipótese de indução: todo grafo de fluxo em espiral com $n - 1$ vértices possui $NA_{\min}(n - 1) = [(n - 1)^2 + (n - 1) - 2]/2$ arestas.
- Seja um grafo de fluxo em espiral F com n vértices. Então, F é o produto de um grafo de fluxo em espiral com $n - 1$ vértices por um grafo de fluxo trivial. Usando a hipótese de indução e o fato de que exatamente n arestas são acrescentadas pelo produto, o número de arestas de F é $[(n - 1)^2 + (n - 1) - 2]/2 + n = (n^2 + n - 2)/2$. ■

5.5 A Estrutura do Grafo Subjacente

O *grafo subjacente* de um digrafo $D = (V, E)$ é o grafo não-orientado

$$\text{SUB}(D) = (V, \text{SUB}(E)),$$

onde $\text{SUB}(E)$ é o conjunto subjacente da relação binária E . Por extensão, definimos o grafo subjacente de um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$ também como o grafo não-orientado $\text{SUB}(F) = (V, \text{SUB}(E))$.

Em um grafo não-orientado $G = (V, E)$ qualquer, chamemos $M(G)$ o número de cliques maximais de G e $\alpha(G)$ o número de estabilidade de G (cardinalidade do maior conjunto independente de vértices). É claro que $\alpha(G) \leq M(G)$, pois deve haver pelo menos $\alpha(G)$ cliques maximais distintas contendo os vértices de um conjunto independente máximo (GOLUMBIC, 1980).

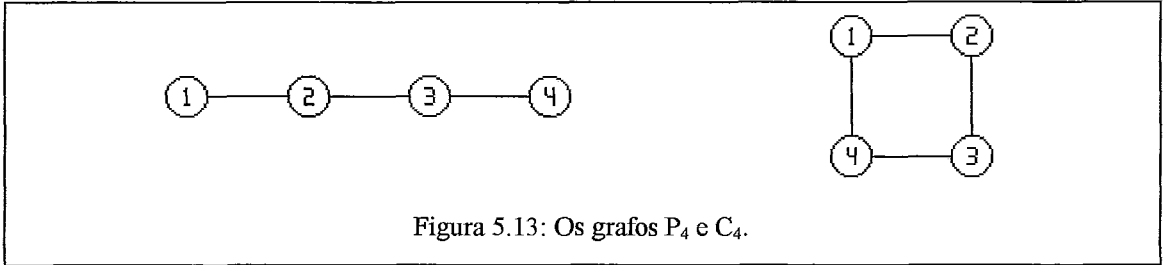
GOLUMBIC (1978) define os grafos *trivialmente perfeitos*, nos quais ocorre a igualdade $\alpha(G||S) = M(G||S)$ para todo subgrafo induzido $G||S$ de G por $S \subseteq V$. Um teorema, também em (GOLUMBIC, 1978), afirma que G é trivialmente perfeito se, e somente se, não contiver subgrafo induzido isomorfo a P_4 ou a C_4 , onde

$$P_4 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\})$$

e

$$C_4 = (\{1, 2, 3, 4\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}),$$

são os grafos mostrados na figura 5.13.



O próximo teorema mostra que o grafo subjacente de um grafo de fluxo redutível-maximal é trivialmente perfeito.

Teorema 5.13

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível-maximal, então $\text{SUB}(F)$ é trivialmente perfeito.

Prova:

Vamos mostrar, por indução sobre $|V|$, que $\text{SUB}(F) = (V, \text{SUB}(E))$ não contém subgrafo induzido isomorfo a P_4 ou a C_4 .

- Para $|V| = 1, 2, 3$ o resultado vale trivialmente.
- Hipótese de indução: para $3 < |V| < n$, $\text{SUB}(F)$ não possui subgrafo induzido isomorfo a P_4 ou C_4 .
- Seja $F = (V, E, r)$, redutível-maximal, com $|V| = n \geq 4$. Então, pelo teorema 5.5, F se decompõe de maneira única como um produto de fatores $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$,

sendo $\text{FAT1}(F) = (V_1, E_1, r)$ e $\text{FAT2}(F) = (V_2, E_2, s)$ redutíveis-maximais, $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e $E = E_1 \cup E_2 \cup (V_2 \times \{r\}) \cup (V_1 \times \{s\})$. Pela definição de conjunto subjacente, $\text{SUB}(E) = \text{SUB}(E_1) \cup \text{SUB}(E_2) \cup \{\{x, s\} \mid x \in V_1\} \cup \{\{x, r\} \mid x \in V_2\}$.

Consideremos $S \subseteq V$ com 4 vértices distintos: $S = \{a, b, c, d\}$. Chamemos G o subgrafo de $\text{SUB}(F)$ induzido por S . Temos 4 alternativas:

- $S \subseteq V_1$ ou $S \subseteq V_2$.

Portanto, G é subgrafo de $\text{SUB}(\text{FAT1}(F))$ ou de $\text{SUB}(\text{FAT2}(F))$ induzido por S .

Como $|V_1| < n$ e $|V_2| < n$, pela hipótese de indução, G não é isomorfo a P_4 ou C_4 .

- $\{a\} \subseteq V_1$ e $\{b, c, d\} \subseteq V_2$.

- Se $a \neq r$, $b \neq s$, $c \neq s$ e $d \neq s$, G é desconexo.

- Se $a = r$, G contém as arestas $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{a, d\}$ e a tem grau 3 em G .

- Se $b = s$, G contém as arestas $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ e $\{b, d\}$ e b tem grau 3 em G .

- $\{a, b\} \subseteq V_1$ e $\{c, d\} \subseteq V_2$.

- se $a \neq r$, $b \neq r$, $c \neq s$ e $d \neq s$, G é desconexo.

- se $a = r$, G contém as arestas $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{a, d\}$ e a tem grau 3 em G .

- se $c = s$, G contém as arestas $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{c, d\}$ e c tem grau 3 em G .

- $\{a, b, c\} \subseteq V_1$ e $\{d\} \subseteq V_2$.

- se $a \neq r$, $b \neq r$, $c \neq r$ e $d \neq s$, G é desconexo.

- se $a = r$, G contém as arestas $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ e $\{a, d\}$ e a tem grau 3 em G .

- se $d = s$, G contém as arestas $\{a, d\}$, $\{b, d\}$ e $\{c, d\}$ e tem grau 3 em G .

Das três últimas alternativas, concluímos que G ou é desconexo ou possui um vértice com grau 3, não sendo isomorfo a P_4 ou C_4 . ■

5.6 Conclusões

Neste capítulo, foram obtidos importantes resultados acerca da estrutura dos grafos de fluxo redutíveis-maximais.

Mostramos, de início, que todo grafo de fluxo redutível-maximal pode ser expresso, de forma única, como um produto de dois outros. Este fato permitiu associar a um grafo de fluxo redutível-maximal uma árvore estritamente binária, que denominamos árvore característica. Nesta árvore, os vértices do grafo original são folhas e os vértices interiores representam produtos.

Provamos que o grau de saída de um vértice qualquer em um grafo de fluxo redutível-maximal é igual ao seu nível na árvore característica, o que nos permitiu concluir que o número de arestas do grafo é igual ao comprimento de caminho externo da árvore.

Com esta informação, obtivemos os limites inferior $NA_{\min}(n)$ e superior $NA_{\max}(n)$ para o número de arestas de um grafo de fluxo redutível-maximal em função do número de vértices n . A obtenção do limite superior, conforme mencionamos, constitui importante problema relacionado à teoria dos grafos extremos (HARARY, 1969). Mostramos que, dados $n > 0$ e m tal que $NA_{\min}(n) \leq m \leq NA_{\max}(n)$, existe pelo menos um grafo de fluxo redutível-maximal com n vértices e m arestas.

Reunindo os resultados expressos no teorema 5.12 e no corolário 4.7, podemos concluir a inclusão própria:

$$\begin{array}{c}
 \text{grafos de fluxo em espiral (AHO e ULLMAN, 1976)} \\
 \subset \\
 \text{grafos de fluxo redutíveis-maximais} \\
 \subset \\
 \text{grafos de fluxo redutíveis a árvore (SZWARCFITER, 1985).}
 \end{array}$$

Por fim, provamos que o grafo subjacente de um grafo de fluxo redutível-maximal pertence à sub-família dos grafos trivialmente perfeitos, definidos e caracterizados em (GOLUMBIC, 1978).

Capítulo 6

Algoritmo de Reconhecimento e Problemas Resolvidos para Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

Neste capítulo, desenvolvemos um algoritmo linear para reconhecer se um grafo de fluxo é redutível-maximal. A seção inicial apresenta alguns resultados sobre ordenação topológica e caminhos hamiltonianos em grafos de fluxo redutíveis, fundamentais para o algoritmo a ser desenvolvido. O algoritmo de reconhecimento é utilizado na resolução de dois importantes problemas para a família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais: isomorfismo e obtenção de um conjunto de arestas de realimentação com cardinalidade mínima.

6.1 Resultados Preliminares

Dados um grafo de fluxo qualquer $F = (V, E, r)$ e uma árvore geradora de profundidade $T = (V, E_T, r)$ de F , podemos obter uma ordenação topológica para o digrafo acíclico $\text{DAG}(F, T) = (V, E - \text{RT}(F, T), r)$ a partir das profundidades de saída dos vértices, conforme o próximo lema.

Lema 6.1

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo e $T = (V, E_T, r)$ é uma árvore geradora de profundidade de F , então a função $\tau_T: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ tal que $\tau_T(v) = |V| + 1 - \sigma_T(v)$, $\forall v \in V$, é uma ordenação topológica para $\text{DAG}(F, T)$, onde $\sigma_T: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ é a rotulação de profundidade de saída com respeito a T .

Prova:

Como a rotulação $\sigma_T: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ é bijetora, é claro que τ_T é também bijetora. Seja (v, w) uma aresta de $\text{DAG}(F, T)$. Portanto, $(v, w) \in E - \text{RT}(F, T) = E_T \cup \text{AV}(F, T) \cup$

$CR(F, T)$. Em qualquer dos casos, $\sigma_T(v) > \sigma_T(w)$, donde $\tau_T(v) < \tau_T(w)$. Logo, τ_T satisfaz os requisitos de uma ordenação topológica de $DAG(F, T)$. ■

Se $F = (V, E, r)$ é redutível, sabemos, da seção 2.8, que $DAG(F, T)$ independe da árvore de profundidade T considerada, coincidindo com o subgrafo progressivo $SGP(F)$. A aplicação do teorema 6.1 conduz, neste caso, a uma ordenação topológica do subgrafo progressivo de um grafo de fluxo redutível, qualquer que seja a árvore de profundidade obtida na busca.

Sejam $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo qualquer e $\eta: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ uma rotulação bijetora para os vértices de um grafo de fluxo. Desejamos ordenar, crescente ou decrescentemente, os conjuntos $A_F(v)$, $\forall v \in V$, de acordo com os valores de η , em tempo e espaço $O(|E|)$.

Esta ordenação pode ser realizada sobre o conjunto de arestas de F através de caixas (“radix sort”, (KNUTH, 1973)), utilizando $|V|$ filas. Cada aresta $(v, w) \in E$ é univocamente identificada através do par $(\eta(v), \eta(w))$. Os $|E|$ pares são distribuídos pelas $|V|$ filas de acordo com o valor do segundo elemento do par. Concatenadas as filas em ordem crescente (decrescente), distribuimos novamente os $|E|$ pares pelas $|V|$ filas de acordo com o valor do primeiro elemento. Ao final, a fila $\eta(v)$ conterà os vértices de $A_F(v)$ ordenados crescentemente (decrescentemente) pelos valores de η . Este procedimento consome tempo e espaço $O(|E|)$.

O próximo teorema nos diz que, se um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$ possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem r , então esse caminho é obrigatoriamente único.

Teorema 6.1

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível e possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem r , então esse caminho é único.

Prova:

Ver a segunda parte da prova do teorema 4.8, onde mostramos que a existência de mais de um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem em um grafo de fluxo acarreta o surgimento do subgrafo proibido, contrariando a redutibilidade de F . ■

Além de ser único, o caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem em um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$, quando existe, está contido no subgrafo progressivo de F , conforme o próximo teorema.

Teorema 6.2

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível e possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem r , então esse caminho está contido em $\text{SGP}(F)$.

Prova:

Chamemos $H = (V, E_H, r)$ o grafo de fluxo constituído pelo único caminho hamiltoniano direcionado de F a partir da origem r . Seja (v, w) uma aresta de retorno de F . Suponhamos, por absurdo, que $(v, w) \in E_H$. Como F é redutível, w domina v em F , donde o caminho hamiltoniano direcionado de F deve passar por w antes de atingir v . Logo w aparece duas vezes no caminho, contrariando o fato de ele ser hamiltoniano. ■

Teorema 6.3

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível e possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem r , então as profundidades de saída dos vértices coincidem em qualquer árvore de profundidade de F .

Prova:

Seja $T = (V, E_T, r)$ uma árvore de profundidade de F , com rotulações ρ_T (profundidade de entrada) e σ_T (profundidade de saída). O lema 6.1 nos garantiu que a função bijetora $\tau_T: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ tal que $\tau_T(v) = |V| + 1 - \sigma_T(v)$ é uma ordenação topológica para o digrafo acíclico $\text{SGP}(F)$.

Como o caminho hamiltoniano direcionado de F a partir de r está contido em $SGP(F)$, a ordenação topológica τ_T de $SGP(F)$ é única e não depende da árvore T considerada. Logo, a bijeção σ_T é também única e independente de T . ■

Pelos teoremas 6.1, 6.2 e 6.3, determinar se um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$ possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem r resume-se a determinar se o subgrafo progressivo de F possui tal caminho, o que pode ser feito a partir de uma ordenação topológica $\tau: V \rightarrow \{1, \dots, |V|\}$ para os vértices de $SGP(F)$. $SGP(F)$ possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem r se, e somente se, todo vértice $v \in V$, exceto o de maior τ , possui um sucessor imediato $w \in A_F(v)$ com $\tau(v) = \tau(w) - 1$. A ordenação pode ser calculada com o auxílio de uma busca em profundidade sobre F , a partir das profundidades de saída dos vértices, conforme o teorema 6.1.

ALGORITMO: DETERMINAR SE UM GRAFO DE FLUXO REDUTÍVEL POSSUI CAMINHO HAMILTONIANO DIRECIONADO A PARTIR DA ORIGEM

Entrada:

Um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$

Saída:

SIM, se F possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir de r ;

NÃO, caso contrário.

Para cada vértice v , são mantidas as seguintes estruturas:

ADJ(v) : lista de sucessores imediatos de v
(montada durante a leitura do grafo);

PS(v) : profundidade de saída de v (inteiro);

VISITADO(v) : diz se v já foi alcançado na busca;

variáveis globais

psai : inteiro;

```

Programa Principal;
variáveis locais
  v : Vértice;
início
  Para v ∈ V faça
    PS(v)      := 0;
    VISITADO(v) := falso;

    psai := 0;
    Se Hamiltoniano(r) então
      Imprima: SIM, o grafo dado é hamiltoniano
    caso contrário
      Imprima: NÃO, o grafo dado não é hamiltoniano
fim;

função Hamiltoniano (v: Vértice) : lógica;
variáveis locais
  w      : Vértice;
  maior  : inteiro;
início
  VISITADO(v) := verdadeiro;

  maior := 0;
  Para w ∈ ADJ(v) faça
    Se não VISITADO(w) então
      Se não Hamiltoniano (w) então
        Retorne (Falso);
    Se PS(w) > maior então      { Guarda a maior dentre as PS's }
      maior := PS(w);          { dos sucessores imediatos de v }

  psai := psai + 1;
  PS(v) := psai;

  Retorne (maior = psai - 1)
fim;

```

Em se tratando de uma busca em profundidade, onde cada vértice e cada aresta são visitados exatamente uma vez, o algoritmo para determinar se um grafo de fluxo redutível $F = (V, E, r)$ possui um hamiltoniano direcionado a partir da origem r consome tempo e espaço $O(|E|)$.

6.2 Reconhecimento de Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

Dado um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$, desejamos elaborar um algoritmo eficiente para determinar se F é redutível-maximal.

Para que F seja redutível-maximal é necessário e suficiente que F possa ser expresso de forma única como produto (\otimes) de dois grafos de fluxo também redutíveis-maximais: $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$, conforme os teorema 5.5. Equivalentemente, devemos verificar se F tem a estrutura indicada na figura 6.1.

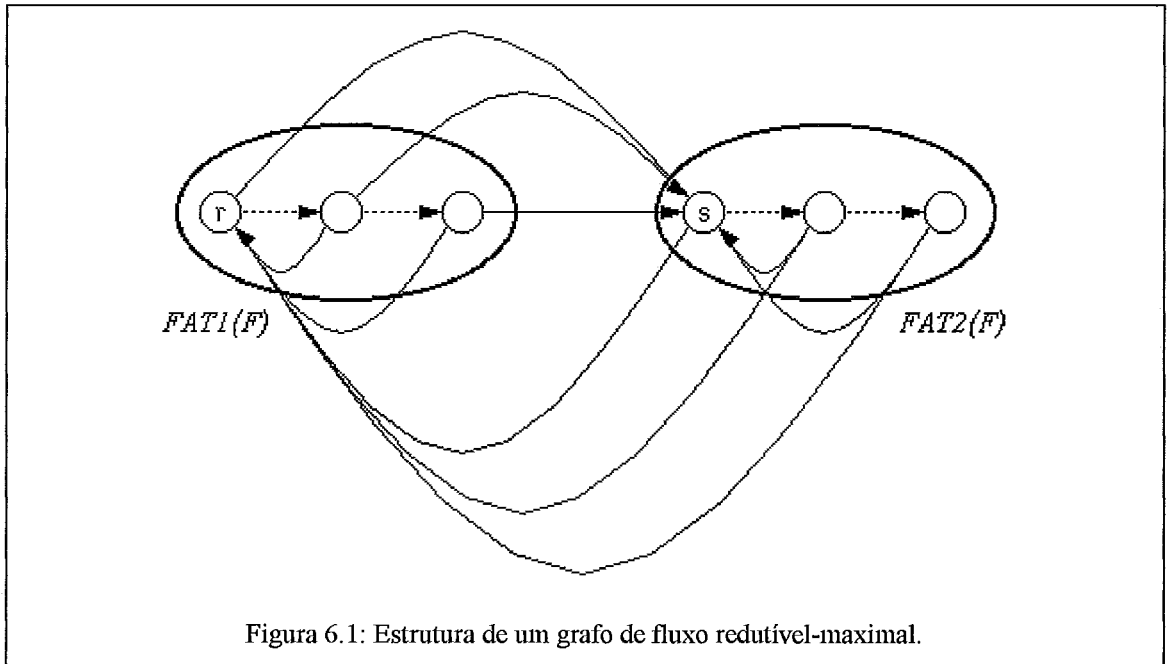


Figura 6.1: Estrutura de um grafo de fluxo redutível-maximal.

Na estrutura ilustrada na figura 6.1, observamos que:

- existe um único caminho hamiltoniano direcionado em F a partir da origem r ;
- o vértice s , origem do segundo fator $\text{FAT2}(F)$, pelo teorema 5.5, é o sucessor imediato de r com maior posto no caminho hamiltoniano direcionado;
- os vértices r e s têm grau de entrada máximo: $|V| - 1$, ou seja, recebem arestas de todos os demais vértices;

- as arestas que partem de vértices de $FAT1(F)$ em direção a vértices de $FAT2(F)$ dirigem-se todas ao vértice s , ou seja, s é o único vértice de $FAT2(F)$ que recebe arestas provenientes de vértices de $FAT1(F)$;
- as arestas que partem de vértices de $FAT2(F)$ em direção a vértices de $FAT1(F)$ dirigem-se todas ao vértice r , ou seja, r é o único vértice de $FAT1(F)$ que recebe arestas provenientes de vértices de $FAT2(F)$;
- os fatores $FAT1(F)$ e $FAT2(F)$ devem também ser grafos de fluxo redutíveis-maximais, satisfazendo, portanto, a mesma estrutura do grafo F .

O algoritmo para verificar se um grafo de fluxo satisfaz essa estrutura compreende duas etapas distintas: inicialização e verificação propriamente dita. Vale observar que não é necessário testar a redutibilidade do grafo, pois, satisfeita a estrutura, a redutibilidade estará automaticamente assegurada.

A etapa de inicialização consiste em averiguar se $DAG(F, T)$ possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem, para alguma árvore geradora de profundidade $T = (V, E_T, r)$ de F . Caso isto não ocorra, temos duas hipóteses: ou F não possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir de r ou F possui um caminho hamiltoniano direcionado a partir de r que utiliza arestas de retorno com respeito a T ; neste caso, F não é redutível (pela contrapositiva do teorema 6.4). Em ambas as situações, F não é redutível-maximal e o processamento é interrompido com a resposta negativa.

Para verificar se $DAG(F, T)$ possui um hamiltoniano direcionado a partir de r , é realizada sobre F uma busca em profundidade, calculando as profundidades de saída dos vértices com respeito a uma árvore $T = (V, E_T, r)$ geradora de profundidade de F . Os complementos dessas profundidades de saída em relação a $|V| + 1$ correspondem, pelo teorema 6.1, a uma ordenação topológica de $DAG(F, T)$ e, portanto, aos postos dos vértices, caso o caminho hamiltoniano exista. $DAG(F, T)$ possuirá um caminho hamiltoniano direcionado a partir de r se, e somente se, se todo vértice tiver exatamente um sucessor imediato com posto uma unidade maior, conforme o algoritmo desenvolvido na seção anterior.

A verificação propriamente dita da estrutura é um processo recursivo. No caso mais geral, são dados como parâmetros ao procedimento de verificação dois vértices v e z , tais que:

- v precede ou iguala z no caminho hamiltoniano;
- todos os vértices compreendidos entre v e z no caminho hamiltoniano são predecessores imediatos de v (exceto o próprio v).

Cumprir verificar se o subgrafo de fluxo com origem v induzido pelo conjunto de todos os vértices compreendidos, no caminho hamiltoniano, entre v e z , possui a estrutura mencionada. O procedimento deve retornar o valor lógico “verdadeiro” se tal subgrafo satisfizer a estrutura e “falso” caso contrário.

Antes de invocar o procedimento pela primeira vez, um teste deve garantir que a origem r tenha como predecessores imediatos todos os demais vértices. Se isto não ocorrer, F não será redutível-maximal. Do contrário, o procedimento de verificação recebe, como parâmetros, r e o vértice de maior posto do grafo de fluxo (último do caminho hamiltoniano).

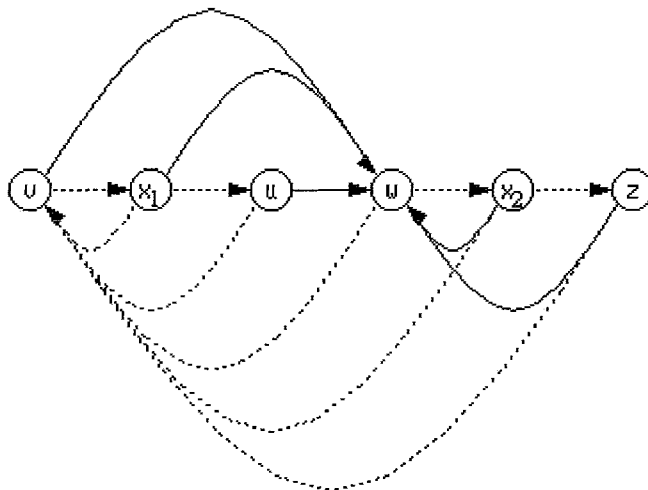


Figura 6.2: Ilustração para o algoritmo de reconhecimento.

Identificado w , sucessor imediato de v com maior posto, entre v e z , devemos verificar se w possui como predecessores imediatos todos os vértices entre v e z , exceto o próprio w . Além disso, w deve ter como predecessores imediatos apenas esses vértices. O procedimento percorre o conjunto $P_F(w)$, comparando postos. Caso uma das condições seja violada, o procedimento retorna o valor lógico “falso”.

Por fim, o procedimento deve ser chamado recursivamente duas vezes. A primeira chamada destina-se a verificar se o subgrafo de fluxo com origem v , induzido pelo conjunto de vértices entre v e o antecessor de w no caminho hamiltoniano (vértice u da figura 6.2), é redutível-maximal; a segunda, se o subgrafo de fluxo com origem w , induzido pelo conjunto de vértices entre w e z no caminho hamiltoniano, é redutível-maximal. O valor retornado pelo procedimento será, portanto, um “e lógico” dos valores retornados por essas duas chamadas recursivas.

Em se tratando de um procedimento recursivo, deve existir um caso de tratamento trivial que não ocasione novas invocações, garantindo o término do processo. Esta situação se dá quando o procedimento recebe $v = z$. Neste caso, o valor retornado é “verdadeiro”, pois o grafo de fluxo trivial é redutível-maximal.

Um ponto nessa verificação merece detalhamento. Como obter, eficientemente, o vértice w , sucessor imediato de v , compreendido entre v e z no caminho hamiltoniano, com maior posto possível? A princípio, a determinação exigiria o percurso do conjunto $A_F(v)$, restrito ao subgrafo considerado. Entretanto, se mantivermos os conjuntos de sucessores imediatos ordenados decrescentemente por postos, que são calculados na inicialização, o vértice w pode ser localizado em tempo constante, dispensando percursos. Após essa ordenação, que pode ser realizada em tempo e espaço $O(|E|)$, conforme comentamos na seção anterior, os sucessores imediatos de um vértice $v \in V$ estão disponíveis em $FILA(v)$, ordenados decrescentemente por postos.

Obter w , sucessor imediato de v com maior posto entre v e z , resume-se a retirar o primeiro elemento de $FILA(v)$, o que é realizado em tempo $O(1)$. Durante o exame dos predecessores imediatos de w , seja $x \in P_F(w)$. Se x tem posto menor que o de w , w deve ser o sucessor de x com maior posto no subgrafo induzido sendo tratado. Ou seja, w

deve ser o primeiro elemento de $FILA(x)$. O vértice w é retirado também dessas filas. Desta maneira, garantimos que as duas chamadas recursivas processarão corretamente os subgrafos induzidos.

ALGORITMO: RECONHECIMENTO DE GRAFOS DE FLUXO REDUTÍVEIS-MAXIMAIS

Entrada:

Um grafo de fluxo $F = (V, E, r)$

Saída

SIM, se F é redutível-maximal;
NÃO, caso contrário.

Para cada vértice v , são mantidas as seguintes estruturas:

ADJ(v) : lista de sucessores imediatos de v
(montada durante a leitura do grafo);
PRED(v) : lista de predecessores imediatos de v ;
NPRED(v) : cardinalidade de PRED(v);
POSTO(v) : posto de v (inteiro);
VISITADO(v) : diz se v já foi alcançado na busca;
FILA(v) : fila com os sucessores imediatos de v em ordem decrescente de postos;

variáveis globais

posto : inteiro; { Para numerar os postos }
ultimo : Vértice; { Vértice de maior posto }

Programa Principal;

variáveis locais

v, w : Vértice;

início

Para $v \in V$ faça

POSTO(v) := 0;
VISITADO(v) := falso;
FILA(v) := fila-vazia;
PRED(v) := lista-vazia;
NPRED(v) := 0;

Para $v \in V$ faça

Para $w \in ADJ(v)$ faça
Inclua v em PRED(w);
NPRED(w) := NPRED(w) + 1;

Se NPRED(r) = $|V| - 1$ então

posto := $|V| + 1$;

Se DAG-Tem-Caminho-Hamiltoniano(r) então

Se Red-Max(r , ultimo) então

IMPRIMA: SIM, o grafo dado é redutível-maximal;
PARE;

IMPRIMA: NÃO, o grafo dado não é redutível-maximal;
PARE

fim;

função DAG-Tem-Caminho-Hamiltoniano (v : Vértice) : lógica;
variáveis locais

w : Vértice;
menor : inteiro;

início

VISITADO(v) := verdadeiro;

menor := $|V| + 1$;

Para $w \in \text{ADJ}(v)$ faça

Se não VISITADO(w) então

Se não DAG-Tem-Caminho-Hamiltoniano (w) então

Retorne (Falso);

Se $\text{POSTO}(w) \neq 0$ e $\text{POSTO}(w) < \text{menor}$ então

menor := $\text{POSTO}(w)$;

Se menor \neq posto então

Retorne (Falso);

posto := posto - 1;

$\text{POSTO}(v)$:= posto;

Se posto = $|V|$ então

ultimo := v ;

Para $w \in \text{PRED}(v)$ faça

{ O radix-sort é embutido }

Se $\text{POSTO}(w) = 0$ então

{ na busca }

Insira v em $\text{FILA}(w)$;

Retorne (Verdadeiro)

fim;

função Red-Max (v, z : Vértice) : lógica;

variáveis locais

x, w, y, u : Vértice;

início

Se $v = z$ então

Retorne (Verdadeiro);

Remova o primeiro vértice de $\text{FILA}(v)$, guardando em w ;

Se $\text{NPRED}(w) \neq \text{POSTO}(z) - \text{POSTO}(v)$ então

Retorne (Falso);

Para $x \in \text{PRED}(w)$ faça

Se $\text{POSTO}(x) < \text{POSTO}(v)$ ou $\text{POSTO}(x) > \text{POSTO}(z)$ então

Retorne (Falso);

Se $x \neq v$ e $\text{POSTO}(x) < \text{POSTO}(w)$ então

Remova o primeiro vértice de $\text{FILA}(x)$, guardando em y ;

Se $y \neq w$ então

Retorne (Falso);

Se $\text{POSTO}(x) = \text{POSTO}(w) - 1$ então

$u := x$;

Retorne (Red-Max(v, u) e Red-Max(w, z))

fim;

A complexidade de espaço é $O(|E|)$, dominada pelo armazenamento das listas $\text{ADJ}(v)$ e $\text{PRED}(v)$, $\forall v \in V$.

A inicialização toma tempo $O(|V| + |E|) = O(|E|)$, dominado pela construção das listas de predecessores.

DAG-Tem-Caminho-Hamiltoniano executa em tempo $O(|V| + |E|) = O(|E|)$, por se tratar de uma busca em profundidade em que cada vértice é visitado exatamente uma vez (isto é garantido pela marca VISITADO) e cada aresta é visitada exatamente duas vezes (ambas as listas $\text{ADJ}(v)$ e $\text{PRED}(v)$ são percorridas na visita ao vértice v).

O procedimento Red-Max é invocado $2|V| - 1$ vezes, exatamente o número de vértices da árvore binária característica associada a F . $|V|$ chamadas recaem no caso trivial ($v = z$) e $|V| - 1$ no caso não trivial ($v \neq z$). No pior caso, uma chamada a $\text{Red-Max}(v, z)$ consome tempo $O(1)$ quando $v = z$ ou $O(|\text{PRED}(w)|)$ quando $v \neq z$. Se F é redutível-maximal, a variável w assume, nas chamadas não-triviais, o valor de todos os vértices do grafo (exceto a origem) exatamente uma vez. Portanto, o tempo total consumido por todas as chamadas a Red-Max é $O(|V| + |E|) = O(|E|)$.

Concluimos que o algoritmo para reconhecimento de grafos de fluxo redutíveis-maximais tem complexidade $O(|E|)$ em tempo e espaço.

É interessante observar que o algoritmo desenvolvido permite verificar se um grafo de fluxo é redutível-maximal sem a necessidade de verificar “a priori” se o grafo de fluxo é redutível. Uma vez satisfeita a estrutura da figura 6.1, a redutibilidade estará automaticamente assegurada.

Dois acréscimos podem ser feitos ao algoritmo de modo que, se o grafo de fluxo fornecido como entrada for redutível-maximal, tenhamos, ao final do processamento, as duas árvores geradoras estudadas na seção 4.6: o caminho hamiltoniano direcionado e a árvore de dominadores, caso o grafo dado como entrada seja redutível-maximal.

A obtenção da seqüência de vértices que constitui o caminho hamiltoniano pode ser feita com o acréscimo da linha

$$\text{CHD}[\text{posto}] := v$$

imediatamente após a atribuição $\text{POSTO}(v) := \text{posto}$, na função DAG-Tem-Caminho-Hamiltoniano, onde CHD deve ser declarado como um vetor de vértices. A determinação da árvore de dominadores é igualmente imediata: na função Red-Max, uma vez identificado w , sucessor de v de maior posto, sabemos, da seção 5.1, que $\text{DI}_F(w) = v$; portanto, (v, w) será uma aresta da árvore de dominadores. Acrescentando a linha

$$\text{PAI}(w) := v$$

conheceremos, ao final do processamento, o pai de cada vértice na árvore de dominadores, o que é suficiente para reconstruí-la segundo outra representação, se desejado.

A determinação dessas árvores geradoras será utilizada, a seguir, na resolução de dois problemas para a família.

6.3 Isomorfismo entre Grafos de Fluxo Redutíveis-Maximais

O problema do isomorfismo entre dois grafos de fluxo $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$ consiste em decidir se existe uma função bijetora $\Psi: V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\Psi(r_1) = r_2$ e $(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\Psi(v), \Psi(w)) \in E_2$. Uma condição necessária óbvia para o isomorfismo é que tenhamos $|V_1| = |V_2|$ e $|E_1| = |E_2|$.

Em (SZWARCFITER, 1985), o problema do isomorfismo entre grafos de fluxo redutíveis a árvore é resolvido em tempo polinomial no tamanho dos grafos. Por estarem propriamente contidos nesta família, esta solução se estende de forma natural aos grafos

de fluxo redutíveis-maximais. Entretanto, a estrutura peculiar desta família facilita sobremaneira a resolução do problema do isomorfismo, conforme veremos.

Denominamos *assinatura* de um grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$ a seqüência de $|V|$ elementos constituída pelos graus de saída dos vértices tomados na ordem do único caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem de F .

O lema 6.2 decorre da associação biunívoca entre um grafo de fluxo redutível-maximal e sua árvore estritamente binária característica.

Lema 6.2

Dois grafos de fluxo redutíveis-maximais $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$ são isomorfos se, e somente se, suas árvores características $B(F_1)$ e $B(F_2)$ são isomorfas.

Prova:

Óbvio, dada a correspondência biunívoca estabelecida na seção 5.2. Vale observar que o isomorfismo entre árvores binárias leva em conta a ordenação de vértices irmãos. ■

O teorema seguinte estabelece condições necessárias e suficientes para que dois grafos de fluxo redutíveis-maximais sejam isomorfos.

Teorema 6.4

Dois grafos de fluxo redutíveis-maximais $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$ são isomorfos se, e somente se, possuem a mesma assinatura.

Prova:

(\Rightarrow) Suponhamos que $F_1 = (V_1, E_1, r_1)$ e $F_2 = (V_2, E_2, r_2)$ sejam isomorfos, existindo uma bijeção $\psi: V_1 \rightarrow V_2$ de modo que $\psi(r_1) = r_2$ e $(v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\psi(v), \psi(w)) \in E_2$. É imediato concluir que o caminho hamiltoniano direcionado de F_2 a partir de r_2 é imagem, pela bijeção ψ , do caminho hamiltoniano direcionado de F_1 a partir de r_1 . Logo, as assinaturas F_1 e de F_2 coincidem.

(\Leftarrow) Seja $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ a assinatura de F_1 e de F_2 , onde $n = |V_1| = |V_2|$. Do lema 5.6, sabemos que $[g_1, g_2, \dots, g_n]$ é também a seqüência dos níveis das folhas nas árvores estritamente binárias características $B(F_1)$ e $B(F_2)$, sendo as folhas consideradas da esquerda para a direita na ordenação natural das árvores. Logo, $B(F_1)$ e $B(F_2)$ são isomorfas, donde, pelo lema 6.2, F_1 e F_2 são isomorfos. ■

Pelo teorema anterior, o problema do isomorfismo entre dois grafos de fluxo redutíveis-maximais fica solucionado com a determinação dos caminhos hamiltonianos direcionados e a comparação dos graus de saída dos vértices. Como vimos na seção anterior, o algoritmo de reconhecimento fornece o caminho hamiltoniano direcionado em tempo e espaço $O(|E|)$. Decidir se dois grafos de fluxo redutíveis-maximais são isomorfos tem, portanto, essa mesma complexidade em espaço e tempo.

6.4 Obtenção de um Conjunto de Arestas de Realimentação com Cardinalidade Mínima para um Grafo de Fluxo Redutível-Maximal

Dado um dígrafo $D = (V, E)$, um *conjunto de arestas de realimentação* (CAR) é um subconjunto $E' \subseteq E$ tal que o dígrafo $D' = (V, E - E')$ é acíclico. Em outras palavras, a remoção das arestas que integram E' interrompe todos os ciclos de D .

Dado um número natural $K > 0$, determinar se existe um CAR com cardinalidade menor ou igual a K para um dígrafo $D = (V, E)$ qualquer é um problema NP-completo (GAREY e JOHNSON, 1979). Entretanto, se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível, o correspondente problema de otimização (determinar um CAR de cardinalidade mínima) admite solução em tempo polinomial, mediante transformação em um problema de fluxo em redes, conforme (RAMACHANDRAN, 1988).

Para um grafo de fluxo redutível-maximal, a determinação de um CAR de cardinalidade mínima decorre das proposições seguintes.

Lema 6.3

Seja $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo redutível-maximal, unicamente decomposto em fatores $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$. Qualquer CAR de F deve conter um CAR de $\text{FAT1}(F)$ e um CAR de $\text{FAT2}(F)$.

Prova:

Pela estrutura do produto \otimes , para interromper os ciclos de F , é necessário interromper os ciclos de $\text{FAT1}(F)$ e de $\text{FAT2}(F)$. ■

O lema 6.4 nos diz que é impossível interromper todos os ciclos de um grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$ retirando menos de $|V| - 1$ arestas:

Lema 6.4

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível-maximal e $E' \subseteq E$ é um conjunto de arestas de realimentação de $D = (V, E)$, então $|E'| \geq |V| - 1$.

Prova:

Indução sobre $|V|$.

- Para $|V| = 2$, F é isomorfo a $\Phi(2)$, que nada mais é do que um ciclo de comprimento 2. É, pois, necessário que E' contenha pelo menos uma aresta para que este ciclo seja interrompido. Logo, $|E'| \geq 1 = |V| - 1$.
- Hipótese de indução: suponhamos o lema válido para grafos de fluxo redutíveis-maximais com menos de n vértices.
- Seja $F = (V, E, r)$ um grafo de fluxo redutível-maximal com $|V| = n$ vértices. Pelo Teorema da Decomposição (5.5), sabemos que F se escreve de forma única como $F = \text{FAT1}(F) \otimes \text{FAT2}(F)$, onde $\text{FAT1}(F) = (V_1, E_1, r)$, $\text{FAT2}(F) = (V_2, E_2, s)$, $V = V_1 \cup V_2$ e $E = E_1 \cup E_2 \cup (V_2 \times \{r\}) \cup (V_1 \times \{s\})$, como na figura 6.1. Portanto, pelo lema 6.3, se E' é um CAR de F , E' deve conter um CAR de $\text{FAT1}(F)$ e um CAR

de $FAT1(F)$, além de arestas que interrompam os ciclos formados em virtude das arestas acrescentadas pelo produto.

Pela hipótese de indução, um CAR de $FAT1(F)$ possui pelo menos $|V_1| - 1$ arestas e um CAR de $FAT2(F)$ possui pelo menos $|V_2| - 1$ arestas. Logo,

$$|E'| \geq |V_1| - 1 + |V_2| - 1 = |V| - 2 \text{ arestas.}$$

Além disso, o ciclo induzido pelos vértices r e s deve ser interrompido, acarretando que uma das arestas (r, s) ou (s, r) deve pertencer a E' . Logo, $|E'| \geq |V| - 2 + 1 = |V| - 1$. ■

O teorema 6.5 nos diz que é possível interromper todos os ciclos de um grafo de fluxo redutível-maximal $F = (V, E, r)$ retirando exatamente as $|V| - 1$ arestas que integram a árvore de dominadores de F .

Teorema 6.5

Se $F = (V, E, r)$ é um grafo de fluxo redutível-maximal e $T = (V, E_D, r)$ é a árvore de dominadores de F , então E_D é um CAR de cardinalidade mínima de F .

Prova:

Observemos que F não possui arestas de avanço com respeito a T , pois isto violaria a relação de dominação expressa em T . Logo, as arestas de $E - E_D$ são de retorno ou de cruzamento. Como é impossível formar ciclos utilizando apenas arestas desses dois tipos, E_D é, de fato, um CAR de F . Sendo $|E_D| = |V| - 1$, concluímos, pelo lema 6.4, que E_D tem a menor cardinalidade possível. ■

Na seção 6.2, mencionamos que a obtenção da árvore de dominadores de um grafo de fluxo redutível-maximal pode ser feita a partir do algoritmo de reconhecimento sem ônus

quanto à complexidade. Portanto, a determinação de um CAR de cardinalidade mínima para um grafo de fluxo redutível-maximal consome tempo e espaço $O(|E|)$.

6.5 Conclusões

Neste capítulo, desenvolvemos um algoritmo linear, em tempo e espaço, para reconhecer se um grafo de fluxo é redutível-maximal. O algoritmo, que dispensa o teste prévio da redutibilidade, utilizou o Teorema da Decomposição, demonstrado na seção 5.2, bem como propriedades de caminhos hamiltonianos em grafos de fluxo redutíveis e da ordenação topológica do subgrafo progressivo, apresentadas na seção introdutória.

A solução do problema do isomorfismo entre dois grafos de fluxo redutíveis-maximais resume-se à identidade das assinaturas desses grafos, que pode ser conferida em tempo e espaço lineares no número de arestas do grafo de fluxo, utilizando o próprio algoritmo de reconhecimento da família.

A determinação de um conjunto de arestas de realimentação com cardinalidade mínima para um grafo de fluxo redutível-maximal revelou-se igualmente eficiente, uma vez que o subconjunto constituído pelas arestas da árvore de dominadores satisfazem os requisitos de um CAR mínimo. Sua obtenção se dá também através do algoritmo de reconhecimento, consumindo tempo e espaço lineares no número de arestas do grafo de fluxo.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho, investigamos o conceito de maximalidade aplicado a grafos de fluxo redutíveis.

O capítulo 2 apresentou uma revisão sobre redutibilidade. Com a formalização da idéia de aplicar uma função a um grafo de fluxo e a definição de grafo de fluxo quociente, reformulamos o conceito de redutibilidade à luz deste ferramental teórico. O capítulo resumiu os principais resultados conhecidos da literatura (HECHT e ULLMAN, 1972, HECHT e ULLMAN, 1974, TARJAN, 1974), envolvendo busca em profundidade, dominação, DJ-grafo, arestas retrógradas, núcleos e regiões, bem como caracterizações equivalentes para grafos de fluxo redutíveis. Definimos a contração de um subconjunto de vértices e a expansão de um vértice, em um grafo de fluxo, por outro grafo de fluxo. Essas operações revelaram-se extremamente úteis nos capítulos 4 e 5.

No capítulo 3, analisamos o comportamento dinâmico de grafos de fluxo redutíveis que sofrem inserções de arestas. Revisamos os conceitos teóricos relacionados a DJ-grafos e fronteiras de dominação, descrevendo o algoritmo para cálculo da fronteira de dominação estendida de um vértice, conforme (SREEDHAR, 1995). A manutenção dinâmica da relação de dominação quando arestas são acrescentadas ao grafo de fluxo, conforme (SREEDHAR *et al.*, 1995a), foi revista em detalhes.

Utilizamos esses conceitos da literatura na obtenção de condições necessárias e suficientes para que um grafo de fluxo redutível permaneça redutível quando se lhe acrescenta uma nova aresta (teorema 3.4). As condições foram expressas em termos da não-ocorrência de vértices proibidos na fronteira estendida da extremidade destino da aresta sendo inserida. O algoritmo que desenvolvemos é *dinâmico*, na medida em que é capaz de verificar se o grafo aumentado é redutível *sem* submetê-lo a algoritmos tradicionais de reconhecimento, como (TARJAN, 1974) ou (GABOW e TARJAN, 1983); caso afirmativo, a aresta é inserida e o algoritmo de SREEDHAR e GAO (1995a) é utilizado na atualização do DJ-grafo. Nosso algoritmo tem complexidade de tempo e espaço idênticas às deste último.

A motivação para o estudo dos grafos de fluxo redutíveis-maximais surge como caso extremo do acréscimo de arestas a grafos de fluxo redutíveis. Respondendo à questão

Quais são os grafos de fluxo redutíveis que, ao sofrerem o acréscimo de qualquer aresta, deixam de ser redutíveis ?

definimos e caracterizamos, no capítulo 4, os grafos de fluxo redutíveis-maximais. Após uma interessante discussão em que distingüimos os conceitos de saturação e maximalidade em digrafos (e em grafos de fluxo) com respeito a uma propriedade qualquer, mostramos que, dependendo da propriedade, tais conceitos não se equivalem. Em se tratando, porém, da redutibilidade, demonstramos que um grafo de fluxo é redutível-saturado se, e somente se, é redutível-maximal (lema 4.2). Em síntese, isto significa que o acréscimo de qualquer aresta a esse grafo de fluxo torna-o não-redutível.

Como resultado central do capítulo 4, obtivemos o teorema 4.1, que caracterizou os grafos de fluxo redutíveis-maximais em função do exame da região, do grafo contraído e do conjunto de sucessores exteriores com respeito a um vértice qualquer. Ainda neste capítulo, construímos, para todo número natural $n > 0$, o grafo de fluxo $\Phi(n)$, que mostramos ser redutível-maximal. Estes grafos de fluxo desempenharam papel de relevo no estudo morfológico da família, realizado no capítulo seguinte.

O capítulo 4 encerrou com a demonstração de algumas propriedades satisfeitas por grafos de fluxo redutíveis-maximais. A principal delas (teorema 4.8) é a existência de um único caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem e, conseqüentemente, de um único ciclo hamiltoniano. Este fato permitiu concluir que a família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais está propriamente contida na família dos grafos de fluxo redutíveis a árvore, caracterizada em (SZWARCFITER, 1985).

O capítulo 5 dedicou-se ao estudo da morfologia dos grafos de fluxo redutíveis-maximais. A estrutura destes grafos de fluxo foi deduzida em função de três conceitos examinados em capítulos anteriores: a expansão de um vértice (seção 2.11), a célula básica Φ (seção 4.4) e a existência e unicidade, em qualquer grafo de fluxo redutível-maximal, do caminho hamiltoniano direcionado a partir da origem (seção 4.6).

Mostramos que todo grafo de fluxo redutível-maximal não-trivial é obtido através de uma expansão generalizada de vértices da célula básica Φ .

O exame mais profundo desta estrutura levou-nos à definição de um produto entre grafos de fluxo e ao Teorema da Decomposição (teorema 5.5), segundo o qual todo grafo de fluxo redutível-maximal pode ser expresso, de forma única, como produto de dois outros grafos de fluxo redutíveis-maximais. Este fato permitiu associar a um grafo de fluxo redutível-maximal uma árvore estritamente binária, que denominamos árvore característica (seção 5.3). Nesta árvore, os vértices do grafo original são folhas e os vértices interiores representam produtos.

A associação biunívoca entre grafos de fluxo redutíveis-maximais e árvores estritamente binárias revelou-nos importantes propriedades. Provamos que o grau de saída de um vértice qualquer em um grafo de fluxo redutível-maximal é igual ao seu nível na árvore característica, o que nos permitiu concluir que o número de arestas do grafo é igual ao comprimento de caminho externo da árvore. Com esta informação, obtivemos os limites inferior $NA_{\min}(n)$ e superior $NA_{\max}(n)$ para o número de arestas de um grafo de fluxo redutível-maximal em função do número de vértices n . A obtenção do limite superior, conforme mencionamos, constitui importante problema relacionado à teoria dos grafos extremos (HARARY, 1969). Mostramos que, dados $n > 0$ e m tal que $NA_{\min}(n) \leq m \leq NA_{\max}(n)$, existe pelo menos um grafo de fluxo redutível-maximal com n vértices e m arestas.

Examinando a caracterização da família dos grafos de fluxo em espiral, encontrada em (AHO e ULLMAN, 1976), concluímos que os grafos de fluxo em espiral são exatamente os redutíveis-maximais com número máximo de arestas. Este fato estabelece a seguinte inclusão própria entre sub-famílias dos grafos de fluxo redutíveis:

$$\begin{array}{c} \text{grafos de fluxo em espiral (AHO e ULLMAN, 1976)} \\ \subset \\ \text{grafos de fluxo redutíveis-maximais} \\ \subset \\ \text{grafos de fluxo redutíveis a árvore (SZWARCFITER, 1985).} \end{array}$$

Encerrando o capítulo 5, analisamos a estrutura do grafo subjacente de um grafo de fluxo redutível-maximal. Provamos que esses grafos subjacentes pertencem à sub-família dos grafos trivialmente perfeitos, definidos e caracterizados em (GOLUMBIC, 1978).

Vale notar que o Teorema da Decomposição, obtido no capítulo 5, constitui uma caracterização alternativa para a família dos grafos de fluxo redutíveis-maximais que não utiliza o conceito de redutibilidade. Esta caracterização permitiu o desenvolvimento, no capítulo 6, de um algoritmo linear, em tempo e espaço, para reconhecer se um grafo de fluxo é redutível-maximal. Além do Teorema da Decomposição, o algoritmo foi elaborado com base em propriedades de caminhos hamiltonianos direcionados em grafos de fluxo redutíveis e da ordenação topológica do subgrafo progressivo, oportunamente apresentadas.

Ao final do capítulo 6, mostramos que o algoritmo de reconhecimento obtido pode ser utilizado na solução de dois problemas para a família: o problema do isomorfismo e o problema da obtenção de um conjunto de arestas de realimentação com cardinalidade mínima. Ambos já haviam sido resolvidos em tempo polinomial, o primeiro para grafos de fluxo redutíveis a árvore (SZWARCFITER, 1985) e o segundo para grafos de fluxo redutíveis (RAMACHANDRAN, 1988). No entanto, dadas as características peculiares da família que estudamos, ambos são resolvidos em tempo linear utilizando, respectivamente, o caminho hamiltoniano direcionado e a árvore de dominadores.

Referências Bibliográficas

- ABREU, N. M. M., 1991, *Grafos Quociente e Algumas Aplicações a Problemas Discretos de Otimização*. Ata Didática 006/91, ILTC, Niterói, RJ.
- ADAMS, J. M., PHELAN, J. M. STARK, R. H., 1973, "A Note on the Hecht-Ullman Characterization of Nonreducible Flow Graphs", *SIAM Journal on Computing*, v. 3, n. 3, pp. 222-223.
- ALLEN, F. E., 1970, "Control Flow Analysis", *SIGPLAN Notices*, v. 5, pp. 1-19.
- AHO, A. V., ULLMAN, J. D., 1973. *The Theory of Parsing, Translation and Compiling, Volume II: Compiling*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, Prentice-Hall.
- AHO, A. V., SETHI, R., ULLMAN, J. D., 1986, *Compilers: Principles, Techniques and Tools*. 1 ed. Reading, Massachusetts, USA, Addison-Wesley.
- AHO, A. V., ULLMAN, J. D., 1976, "Node Listings for Reducible Flow Graphs", *Journal of Computer and System Sciences*, v. 13, pp. 286-299.
- AUSIELLO, G., ITALIANO, G. F., SPACCAMELA, A. M et al., 1991, "Incremental Algorithms for Minimal Length Paths", *Journal of Algorithms*, v. 12, pp. 615-638.
- BANACHOWSKI, L., 1980, "A Complement to Tarjan's Result about the Lower Bound on the Complexity of the Set Union Problem", *Information Processing Letters*, v. 11, n. 2, pp. 59-65.
- BRASSARD, G., BRATLEY P., 1988, *Algorithmics: Theory and Practice*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, Prentice-Hall.

- CARROL, M., RYDER, B. G., 1988, "Incremental Data Flow Analysis via Dominator and Attribute Updates". In: *Proceedings of the 15th Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 274-284, San Diego, California, USA, Jan.
- COCKE, J., 1970, "Global Common Subexpression Elimination", *SIGPLAN Notices*, v. 5, pp. 20-24.
- DE PRISCO, R., PERSIANO, G., 1995, "Characteristic Inequalities for Binary Trees", *Information Processing Letters*, v. 53, n. 4, pp. 201-207.
- DI BATTISTA, G., TAMASSIA, R., 1989, Incremental Planarity Testing. In: *Proceedings of the 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 436-441.
- FONG, A., ULLMAN, J. D., 1977, "Finding the Depth of a Flow Graph", *Journal of Computer and System Sciences*, v. 15, pp. 300-309.
- GABOW, H. N., TARJAN, R. E., 1983, "A Linear Time Algorithm for a Special Case of Disjoint Set Union". In: *Proceedings of the 15th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 246-251.
- GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., 1979, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. 1 ed. San Francisco, California, USA, W. H. Freeman.
- GOLUMBIC, M. C., 1978, "Trivially Perfect Graphs", *Discrete Mathematics*, v. 24, pp. 105-107.
- GOLUMBIC, M. C., 1980, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. 1 ed, New York, USA, Academic Press.

- GRAHAM, R. L., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O., 1989, *Concrete Mathematics*. 1 ed. Reading, Massachusetts, USA, Addison-Wesley.
- GUPTA, R., 1995, "Generalized Dominators", *Information Processing Letters*, v. 53, n. 4, pp. 193-200.
- HARARY, F., 1969, *Graph Theory*. 1 ed. Reading, Massachusetts, USA, Addison-Wesley.
- HAREL, D., 1985, "A Linear Time Algorithm for Finding Dominators in Flow Graphs and Related Problems". In: *Proceedings of the 17th ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 185-194, May.
- HECHT, M. S., ULLMAN, J. D., 1972, "Flow Graph Reducibility", *SIAM Journal on Computing*, v. 1, n. 2, pp. 188-202.
- HECHT, M. S., ULLMAN, J. D., 1974, "Characterizations of Reducible Flow Graphs", *Journal of the ACM*, v. 21, n. 3, pp. 367-375.
- HOPCROFT, J. E., ULLMAN, J. D., 1972, "An $n \log n$ Algorithm for Detecting Reducible Graphs". In: *Proceedings of the 6th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems*, Princeton, New Jersey, USA, pp. 119-122.
- KASYANOV, V. N., 1973, "Some Properties of Fully Reducible Graphs", *Information Processing Letters*, v. 2, pp. 113-117, 1973.
- KÁSZONYI, L., TUZA, Z., 1986, "Saturated Graphs with Minimal Number of Edges", *Journal of Graph Theory*, v. 10, n. 2, pp. 203-210.
- KENNEDY, K., 1975, "Node Listing Techniques Applied to Data Flow Analysis". In: *Proceedings of the 2nd ACM Conference on Principles of Programming Languages*, pp. 10-21, Jan.

- KNUTH, D. E., 1968, *The Art of Computer Programming, volume I: Fundamental Algorithms*. 1 ed. Reading, Massachusetts, USA, Addison-Wesley.
- KNUTH, D. E., 1973, *The Art of Computer Programming, volume III: Searching and Sorting*. 1 ed. Reading, Massachusetts, USA, Addison-Wesley.
- LENGAUER, T., TARJAN, R. E., 1979, "A Fast Algorithm for Finding Dominators in a Flowgraph", *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, v. 1, n. 1, pp. 121-141.
- MARKENZON, L., 1987, *Propriedades e Algoritmos para Extensões e Especializações de Grafos de Fluxo Redutíveis*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MARKENZON, L., VERNET, O., 1991a, *Algoritmos para Geração de Digrafos Redutíveis*. Relatório Técnico NCE 04/91, Núcleo de Computação Eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MARKENZON, L., VERNET, O., 1991b, "Some Methods for the Generation of Reducible Flow Digraphs". *Journées de l'Optimization*, Montreal, CA, May.
- PIRES, O. V. S., 1990, *Coleções de Conjuntos Disjuntos: Operações e Algoritmos*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- RAMACHANDRAN, V., 1988, "Finding a Minimum Feedback Arc Set in Reducible Flow Graphs", *Journal of Algorithms*, v. 9, pp. 299-313.
- RAMACHANDRAN, V., 1990, "A Minimax Arc Theorem for Reducible Flow Graphs", *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 3, n. 4, pp. 554-560.

- RAMALINGAN, G., REPS, T., 1994, "An Incremental Algorithm for Maintaining the Dominator Tree of a Reducible Flowgraph". In: *Conference Record of the 21st Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 287-296, Portland, Oregon, USA, 16-19 Jan.
- REINGOLD, E. M., NIEVERGELT, J., DEO, N., 1977, *Combinatorial Algorithms: Theory and Practice*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, Prentice-Hall.
- SHAMIR, A., 1979, "A Linear Time Algorithm for Finding Minimum Cutsets in Reducible Graphs", *SIAM Journal on Computing*, v. 8, n. 4, pp. 645-655.
- SREEDHAR, V. C., 1995, *Efficient Program Analysis Using DJ-Graphs*, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, Montréal, Québec, CA.
- SREEDHAR, V. C., GAO, G. R., 1994, "Computing ϕ -Nodes in Linear Time Using DJ-Graphs". *ACAPS Technical Memo 75*, School of Computer Science, McGill University, Montreal, CA, Jan.
- SREEDHAR, V. C., LEE, Y-F, GAO, G. R., 1994a, "DJ-Graphs and Their Applications to Flowgraph Analyses". *ACAPS Technical Memo 70*, School of Computer Science, McGill University, Montreal, CA, May.
- SREEDHAR, V. C., LEE, Y-F, GAO, G. R., 1994b, "An Efficient Incremental Algorithm for Maintaining Dominator Trees and its Application to ϕ -Nodes Update". *ACAPS Technical Memo 77*, School of Computer Science, McGill University, Montreal, CA, Jul.
- SREEDHAR, V. C., LEE, Y-F, GAO, G. R., 1995a, "Incremental Computation of Dominator Trees". In: *Proceedings of the ACM SIGPLAN Workshop on Intermediate Representations*, pp. 1-12, San Francisco, California, USA, 22 Jan.

- SREEDHAR, V. C., LEE, Y-F, GAO, G. R., 1995b, "A Linear Time Algorithm for Placing ϕ -Nodes". In: *Conference Record of the 22nd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages*, pp 62-73, San Francisco, California, USA, Jan.
- SZWARCFITER, J. L., 1985, "On Digraphs with a Rooted Tree Structure", *Networks*, v. 15, pp. 49-57.
- SZWARCFITER, J. L., MARKENZON, L., 1994, *Estruturas de Dados e seus Algoritmos*. 1 ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Editora LTC.
- TARJAN, R. E., 1972, "Depth-First Search and Linear Graph Algorithms", *SIAM Journal on Computing*, v. 1, n. 2, pp. 146-160.
- TARJAN, R. E., 1974, "Testing Flow Graph Reducibility", *Journal of Computer and System Sciences*, v. 9, pp. 355-365, 1974.
- TARJAN, R. E., 1975, "Efficiency of a Good but not Linear Set Union Algorithm", *Communications of the ACM*, v. 22, n. 2, pp. 215-225.
- TARJAN, R. E., 1979, "A Class of Algorithms which Require Non-Linear Time to Maintain Disjoint Sets", *Journal of Computer and System Sciences*, v. 18, n. 2, pp. 110-127.
- ULLMAN, J. D., 1974, "Fast Algorithms for the Elimination of Common Subexpressions", *Acta Informatica*, v. 2, pp. 191-213.
- VAN LEEUWEN, J., 1990, "Graph Algorithms". In: Van Leeuwen (eds), *Handbook of Theoretical Computer Science*, chapter 10, Elsevier Science Publishers B. V.
- VERNET, O., RODRIGUES, R. M. N. D., ABREU, N. M. M., 1995, "Reticulados de Permutações". *Relatório Técnico EP-03/95 - Série P.O.*, COPPE - Programa de Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ.