

# Representação analítica de falhas dos equipamentos e variação da demanda no despacho hidrotérmico multi-estágio

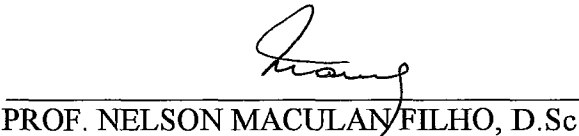
**Nora Marcela Campodónico Viacava**

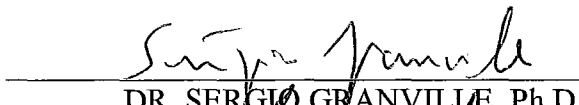
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

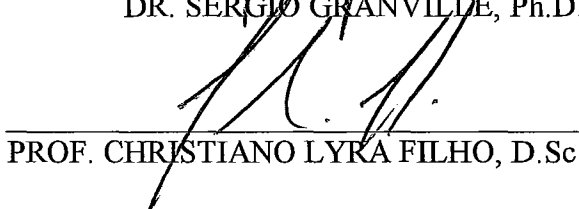
Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
PROF. JOÃO LIZARDO DE ARAÚJO, Dr.

  
\_\_\_\_\_  
DR. MARIO VEIGA F. PEREIRA, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
PROF. NELSON MACULAN FILHO, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
DR. SERGIO GRANVILLE, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
PROF. CHRISTIANO LYRA FILHO, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
JUNHO DE 1997

**CAMPODÓNICO V., NORA MARCELA**

Representação analítica de falhas dos equipamentos e variação da demanda no despacho hidrotérmico multi-estágio (Rio de Janeiro) 1997.

VIII, 94 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, DSc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1997)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Despacho hidrotérmico probabilístico

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

## **AGRADECIMENTOS**

Ao orientador Prof. João Lizardo de Araújo pelo incentivo e importantes sugestões durante todo o processo de elaboração deste trabalho.

A Mario Veiga F. Pereira, meu co-orientador, pela amizade e apoio constantes e participação em cada etapa da tese.

Aos professores Sergio Granville, Nelson Maculan e Christiano Lyra pelo interesse demonstrado em meu trabalho e pelos comentários e sugestões ao texto da tese.

Aos amigos da PSR e do Cepel pelo apoio e incentivo.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## **Representação analítica de falhas dos equipamentos e variação da demanda no despacho hidrotérmico multi-estágio**

Nora Campodónico

Junho 1997

Orientador: João Lizardo de Araújo

Programa: Engenharia de Sistemas

Neste trabalho se apresenta uma metodologia para representar de maneira integrada o efeito estocástico das afluências, próprios de problemas de operação de sistemas hidrotérmicos, com o efeito das flutuações da demanda e das falhas dos equipamentos, próprio de problemas de operação de sistemas térmicos.

O problema de despacho probabilístico de uma etapa é resolvido pelo método de Balériaux, que calcula o valor esperado do custo operativo e das gerações das usinas térmicas baseado na convolução sucessiva das distribuições de probabilidade das capacidades dos geradores, colocados em ordem crescente de custo operativo.

A representação de usinas hidroelétricas, cujas gerações estão limitadas por metas energéticas, se baseia na decomposição de Dantzig-Wolfe, onde o problema mestre representa as decisões de geração hidroelétrica e o subproblema corresponde a um despacho probabilístico.

A extensão da metodologia para representar o despacho hidrotérmico multi-estágio se baseia em programação dinâmica dual estocástica, que permite representar a função de custo futuro através de uma função linear por partes.

O algoritmo desenvolvido é computacionalmente eficiente e utiliza como módulos programas tradicionais para sistemas térmicos e hidroelétricos.

## **Analytical representation of equipment failure and load variation in multi-stage hydrothermal dispatch**

Nora Campodónico

June 1997

Supervisor: João Lizardo de Araújo  
Program: Systems Engineering

This work presents an integrated methodology to represent the effect of inflow uncertainty - typical of hydrothermal systems - jointly with the effect of load fluctuations and equipment failure, typical of thermal system operation.

The one-stage probabilistic dispatch is solved by the Balériaux method, which calculates the expected value of operating cost and plant generation by the successive convolution of generating capacity probability distribution, added by increasing operating cost.

The representation of hydro plants, whose generation is limited by energy targets, is based on the Dantzig-Wolfe decomposition, where the master problem represents the hydro generation decisions and the subproblem corresponds to a probabilistic dispatch.

The methodology is extended to represent multi-stage hydrothermal dispatch based on stochastic dual dynamic programming, which allows a piecewise linear representation of the future cost function.

The algorithm is computationally efficient and uses as modules traditional programs for thermal and hydro systems.

# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO I. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>I.1 Objetivo da operação de sistemas hidrotérmicos</b>	<b>1</b>
<b>I.2 Características do problema</b>	<b>1</b>
I.2.1 Tipos de usinas	1
I.2.2 Operação de sistemas puramente térmicos	1
I.2.3 Operação de sistemas hidrotérmicos	2
<b>I.3 Resenha bibliográfica</b>	<b>2</b>
I.3.1 Despacho hidrotérmico de curto prazo	3
I.3.2 Despacho hidrotérmico de médio prazo	4
I.3.2.1 Despacho hidrotérmico determinístico	4
I.3.2.2 Despacho hidrotérmico estocástico	4
<b>I.4 Método proposto</b>	<b>5</b>
<b>I.5 Organização do trabalho</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO II. DESPACHO PROBABILÍSTICO - SISTEMAS TÉRMICOS</b>	<b>9</b>
<b>II.1 Introdução</b>	<b>9</b>
<b>II.2 Formulação do problema</b>	<b>9</b>
II.2.1 Representação da variável aleatória demanda	10
II.2.2 Representação da variável aleatória capacidade de geração	12
II.2.3 Reformulação do problema	12
<b>II.3 Uma solução analítica: esquema de Balériaux</b>	<b>13</b>
II.3.1 Esquema de Balériaux no caso determinístico	13
II.3.2 Esquema de Balériaux no caso estocástico	15
II.3.3 Solução de cada problema de confiabilidade	15
<b>II.4 Exemplo</b>	<b>16</b>
II.4.1 Solução por enumeração	16
II.4.2 Solução pelo método de Balériaux	17
<b>II.5 Técnicas de convolução</b>	<b>20</b>
II.5.1 Estatísticas a serem calculadas	20
II.5.2 Discretização do espaço amostral	21
II.5.2.1 Cálculo da LOLP	24
II.5.2.2 Cálculo da EENS	24
II.5.3 Método dos cumulantes	24
II.5.3.1 Cálculo das derivadas $n^i(x)$	25
II.5.3.2 Cálculo dos coeficientes $c_i$	26
II.5.3.3 Coeficientes da expansão em séries de normais em termos dos momentos da variável padronizada	26
II.5.3.4 Coeficientes da expansão em séries de normais em termos dos momentos da potência total disponível	27
II.5.3.5 Cálculo dos momentos da potência total disponível	27
II.5.3.6 Cálculo dos cumulantes	29
II.5.3.7 Coeficientes da expansão em séries de normais em termos dos cumulantes	30
II.5.3.8 Cálculo da LOLP	31
II.5.3.9 Cálculo da EENS	32

<b>CAPÍTULO III. DESPACHO PROBABILÍSTICO - SISTEMAS HIDROTÉRMICOS</b>	<b>34</b>
<b>III.1. Introdução</b>	<b>34</b>
<b>III.2. Despacho probabilístico - uma hidroelétrica</b>	<b>34</b>
III.2.1 Formulação do problema	34
III.2.2 Algoritmo tradicional de solução	36
III.2.3 Exemplo	38
<b>III.3 Despacho probabilístico - múltiplas hidroelétricas</b>	<b>40</b>
III.3.1 Formulação do problema	40
III.3.2 Limitações do algoritmo tradicional	41
<b>III.4 Metodologia proposta</b>	<b>41</b>
III.4.1 Idéia básica	41
III.4.2 Algoritmo proposto	42
III.4.2.1 Esquema de decomposição Dantzig-Wolfe	42
III.4.2.2 Cálculo dos custos reduzidos	43
III.4.2.3 Condição de otimalidade	44
III.4.3 Passos do algoritmo	44
III.4.4 Extensão para Múltiplas Usinas Hidroelétricas	45
III.4.5 Exemplo 1 - uma hidroelétrica	45
III.4.6 Exemplo 2 - sistema Colombiano	49
III.4.6.1 Solução do problema	53
III.4.6.2 Benefício da flexibilidade operativa	56
III.4.6.3 Tempos de execução	57
<b>CAPÍTULO IV. CÁLCULO DOS CUSTOS MARGINAIS DE DEMANDA</b>	<b>58</b>
<b>IV.1 Introdução</b>	<b>58</b>
<b>IV.2 Cálculo dos custos marginais no método tradicional de Balériaux</b>	<b>58</b>
<b>IV.3. Cálculo dos custos marginais de demanda no modelo proposto</b>	<b>59</b>
IV.3.1 Cálculo de $\partial z^P/\partial d$	60
IV.3.2 Cálculo de $\partial e^P/\partial d$	60
<b>IV.4. Exemplo - caso colombiano</b>	<b>61</b>
<b>CAPÍTULO V. FUNÇÃO DE CUSTO FUTURO E RESTRIÇÕES HIDROELÉTRICAS NO DHP</b>	<b>63</b>
<b>V.1 Introdução</b>	<b>63</b>
<b>V.2 Custo futuro linear em função da geração</b>	<b>63</b>
V.2.1 Exemplo	65
<b>V.3 Custo futuro linear por partes em função do armazenamento</b>	<b>66</b>
V.3.1 Extensão para multiplas hidroelétricas.	69

<b>CAPÍTULO VI. DESPACHO HIDROELÉTRICO PROBABILÍSTICO MULTI-ESTÁGIO.</b>	<b>72</b>
<b>VI.1 Introdução</b>	72
<b>VI.2 Formulação do Problema</b>	72
<b>VI.3 Esquema de solução</b>	73
<b>VI.4 Incorporação do despacho probabilístico no SDDP</b>	76
<b>VI.5 Integração SDDP &amp; despacho probabilístico</b>	77
VI.5.1 Resumo do esquema proposto	77
VI.5.2 Estratégias de solução	78
<b>CAPÍTULO VII. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS</b>	<b>79</b>
<b>VII.1 Conclusões</b>	79
<b>VII.2 Desenvolvimentos futuros</b>	79
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>82</b>
<b>APÊNDICE A - A FUNÇÃO DE CUSTO FUTURO É LINEAR POR PARTES</b>	<b>85</b>
<b>APÊNDICE B. PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA</b>	<b>87</b>
<b>B.1. Formulação do problema</b>	87
<b>B.2 Passos do algoritmo SDDP</b>	88
B.2.1 Seleção do conjunto inicial de estados	88
B.2.1.1 Estados iniciais de armazenamento	88
B.2.1.2 Estados iniciais de afluições	88
B.2.2 Cálculo da Função Aproximada de Custo Futuro	88
B.2.2.1 Geração dos $N$ cenários de afluições condicionadas	89
B.2.2.2 Solução do problema de operação	89
B.2.2.3 Cálculo das derivadas	89
B.2.2.4 Cálculo da aproximação da função de custo futuro	91
B.2.2.5 Atualização da função de custo futuro do estágio anterior	91
B.2.3 Cálculo do limite inferior	92
B.2.4 Cálculo do limite superior	92
B.2.4.1 Estados iniciais de armazenamento	92
B.2.4.2 Estados iniciais de afluições	92
B.2.4.3 Simulação operativa	93
B.2.4.4 Atualização do estado inicial de armazenamento	93
B.2.4.5 Obtenção do limite superior	93
B.2.5 Verificação da Otimalidade	94



## **Capítulo I. Introdução**

### **I.1 Objetivo da operação de sistemas hidrotérmicos**

O objetivo da operação ótima de um sistema hidrotérmico é determinar metas de geração para cada usina, a cada estágio, que atendam à demanda e minimizem o valor esperado do custo operativo ao longo do horizonte de planejamento levando em consideração a estocasticidade das afluências, as flutuações da demanda e as falhas aleatórias nos equipamentos. Este custo operativo é composto do custo de combustível das usinas térmicas e dos custos de racionamento.

### **I.2 Características do problema**

#### **I.2.1 Tipos de usinas**

Todas as usinas geradoras operam de forma parecida: uma fonte de energia é utilizada para fazer girar uma turbina e a energia é produzida por um gerador elétrico acoplado à mesma.

Nas usinas termoelétricas são utilizados combustíveis fósseis (carvão, gás ou óleo) ou o calor produzido por fissão nuclear para gerar vapor super-aquecido que vai acionar a turbina. Nas usinas hidroelétricas, a energia potencial da água é utilizada para fazer girar as turbinas. A energia gerada por uma hidroelétrica depende de dois fatores: a vazão que passa pelas turbinas e a altura de queda, que é a distância entre o nível do reservatório e o nível de jusante.

#### **I.2.2 Operação de sistemas puramente térmicos**

Em sistemas de geração compostos somente de unidades termoelétricas, o custo operativo de uma usina depende basicamente do seu custo de combustível. Portanto, o problema operativo é determinar a combinação de usinas que minimize o custo total de combustível necessário para atender à demanda. Na sua versão mais simples, este problema se resolve colocando as usinas em ordem crescente do custo de produzir um MWh adicional (o custo incremental) e ajustando a operação às flutuações da demanda. O problema da operação termoelétrica tem características básicas, resumidas a seguir:

- a.* é um problema estocástico, devido às falhas aleatórias dos geradores.
- b.* é desacoplado no tempo, isto é, uma decisão operativa hoje não tem efeito no custo operativo do próximo estágio;
- c.* as unidades têm um custo direto de operação, isto é, o custo operativo de uma unidade não depende do nível de geração de outras unidades; além disso, a operação de uma unidade não afeta a capacidade de geração ou disponibilidade de outra unidade;

### 1.2.3 Operação de sistemas hidrotérmicos

Em contraste com sistemas puramente termoeletricos, sistemas que também dispõem de geração hidroelétrica podem utilizar a energia armazenada nos reservatórios do sistema para atender à demanda, evitando desta forma gastos de combustível com as unidades termoeletricas.

No entanto, a disponibilidade de energia hidroelétrica é limitada pela capacidade de armazenamento nos reservatórios. Isto introduz uma relação entre uma decisão operativa num determinado estágio e as consequências futuras desta decisão. Em outras palavras, se as provisões de energia hidroelétrica são utilizadas hoje e no futuro ocorre uma seca, poderá ser necessário utilizar geração termoeletrica de custo elevado no futuro, ou mesmo interromper o fornecimento de energia. Por outro lado, se os níveis dos reservatórios são mantidos através do uso mais intenso de geração termoeletrica, e se registram afluências elevadas no futuro, poderá haver vertimento no sistema, o que representa um desperdício de energia e, em consequência, um aumento no custo operativo. Esta situação se ilustra na Fig. 1.1.

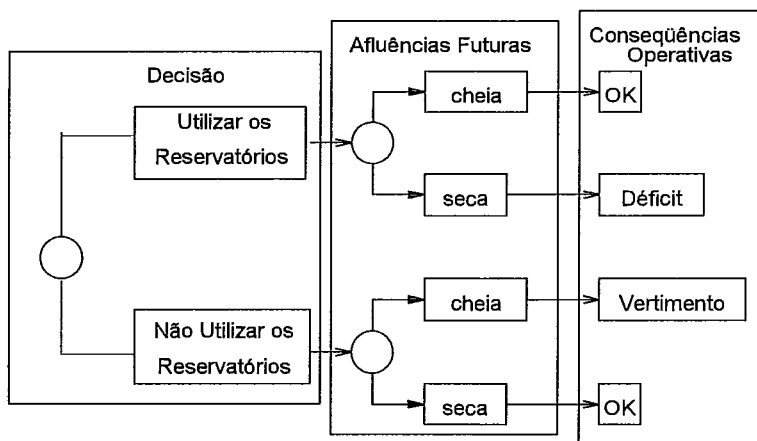


Figura 1.1 - Processo de Decisão para Sistemas Hidrotérmicos

Portanto, o gerenciamento dos recursos hidroelétricos é um problema dinâmico, cuja solução ótima é um equilíbrio entre o benefício presente do uso da água e o benefício futuro de seu armazenamento, medido em termos da economia esperada no gasto em combustíveis das unidades térmicas. A este problema dinâmico se agrega o problema da irregularidade das vazões afluentes aos reservatórios, que variam sazonalmente, de ano para ano, e regionalmente. Além disto, as previsões das afluências futuras são em geral pouco precisas. Esta incerteza com relação às vazões faz do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos um problema essencialmente estocástico.

### 1.3 Resenha bibliográfica

Na revisão da literatura a seguir, os problemas de despacho hidrotérmico serão classificados em curto prazo e médio prazo. Os problemas de curto prazo tem tipicamente um horizonte de uma semana e intervalo de decisão horária. A principal fonte de incerteza nestes problemas é a falha dos geradores. Observa-se que o problema de *unit commitment*, que é um tema geralmente associado com o despacho a

curto prazo, não será tratado no escopo deste trabalho. Por sua vez, os problemas de médio prazo tem tipicamente um horizonte plurianual, com intervalos de decisão semanal ou mensal. Neste tipo de problema, a principal fonte de incerteza se refere à vazões afluentes aos reservatórios. A ligação entre os problemas de curto e médio prazo é feita através das metas de geração das usinas hidroelétricas. Sob o ponto de vista da operação a curto prazo, estas metas são consideradas conhecidas; sob o ponto de vista do despacho de médio prazo, elas são variáveis de decisão cuja alocação tem como objetivo equilibrar o benefício presente do uso da água e o benefício futuro do seu armazenamento.

### 1.3.1 Despacho hidrotérmico de curto prazo

A percepção de que era necessário representar as falhas dos equipamentos no cálculo dos custos operativos de sistemas de geração sempre existiu. No início, este efeito foi aproximado através da redução da capacidade (*derating*), que consiste em representar um gerador de  $P$  MW de capacidade com uma taxa de falha de  $\lambda$  %, por um gerador com uma capacidade equivalente de  $P \times (100 - \lambda)$  %. A principal desvantagem desta aproximação é que ela subestima os custos operativos. Segundo J.P. Stremel [1] a partir dos anos 40 começaram a ser propostos métodos probabilísticos para representar as falhas aleatórias dos equipamentos. No entanto, estas metodologias não foram desenvolvidas devido à falta de recursos computacionais.

A partir dos anos 60, graças ao uso mais intensivo de computadores, o método de *derating* começou a ser substituído pela simulação de um grande número de cenários, utilizando técnicas de Monte Carlo para o sorteio das falhas aleatórias dos equipamentos. Estes métodos, apesar de serem mais precisos e realistas, requeriam um esforço computacional muito mais elevado.

Em 1967, Balériaux e outros [2] publicaram uma metodologia que visava facilitar a incorporação de usinas de bombeio no marco conceitual da metodologia de Monte Carlo. Posteriormente, esta abordagem se revelou muito mais geral e viria a se converter na base para os modelos chamados de *curva de demanda equivalente*. A grande vantagem desta metodologia é a sua eficiência computacional e a possibilidade de representar analiticamente todas as combinações de cenários de falhas. Booth [3], [4] reconheceu a importância desta metodologia e divulgou seu uso fazendo comparações com o método de Monte Carlo em várias aplicações. A partir desses trabalhos surgiram ferramentas computacionais baseadas nesta metodologia e que tem sido bastante utilizadas como os modelos WASP [5], PROMOD [6] e EGEAS [7].

A partir de então as duas linhas de desenvolvimento - Monte Carlo e Balériaux - foram se aperfeiçoando. Os métodos baseados em Balériaux se tornaram mais eficientes mediante o uso de métodos de cumulantes [8] para o cálculo das convoluções. Por sua vez, a utilização de técnicas de redução de variância e amostragem por importância [9,10] tornaram mais eficientes os métodos baseados em Monte Carlo.

Junto com os aperfeiçoamentos do método de Balériaux, foi desenvolvida uma linha de pesquisa que visava representar usinas hidroelétricas. A primeira abordagem foi semelhante à utilizada nos modelos baseados em Monte Carlo, que consistia em subtrair da carga o valor da geração hidroelétrica disponível no período. Desta forma, a geração hidroelétrica era sempre utilizada nas horas de demanda mais elevada.

Posteriormente, demonstrou-se que a hidroelétrica poderia ser representada nos modelos de Balériaux como um gerador térmico, sujeito a uma restrição de meta energética. Desta maneira, ela estaria sendo utilizada tanto em eventos de demanda alta como em eventos de alta taxa de falha dos outros equipamentos, o que é mais realista. Como mencionado por Stremel [1], no caso de falha das unidades térmicas, o operador do sistema usaria a capacidade hidroelétrica, mesmo violando a meta energética por um período curto de tempo, para atender à demanda e depois usaria a geração térmica para recuperar o nível do reservatório.

A dificuldade computacional desta abordagem se encontra na determinação da ordem em que as unidades hidroelétricas devem ser carregadas de forma a atender a suas metas energéticas, o que leva a um problema combinatório no caso de múltiplas usinas hidroelétricas. Várias propostas baseadas em métodos heurísticos foram sugeridas nos anos seguintes, como discutido em [11].

Em 1993, Bloom e Gallant [12] apresentaram a primeira formulação analiticamente rigorosa do problema, baseada em programação linear, e propuseram como algoritmo de solução uma variação do algoritmo Simplex.

### **1.3.2 Despacho hidrotérmico de médio prazo**

A primeira formulação do problema de despacho hidrotérmico foi feita por Pierre Massé [23] em 1946. Neste trabalho já foram estabelecidos os conceitos básicos de valor da água e da condição de otimalidade como o equilíbrio entre o custo imediato e o valor esperado do custo futuro. Devido às dificuldades computacionais do problema, as pesquisas posteriores podem ser caracterizadas em despacho determinístico, onde se supõe conhecida a série de afluições futuras, e despacho estocástico, onde se leva em conta a aleatoriedade destas afluições.

#### **1.3.2.1 Despacho hidrotérmico determinístico**

Os modelos de despacho determinísticos são geralmente formulados como problemas de otimização multi-estágio e resolvidos por técnicas de otimização linear e não linear, como proposto por Rosenthal (1980) [24], Hanscom e outros (1980) [25], Lyra e Tavares (1980) [26], Soares e Carneiro (1990) [27] e outros..

A principal limitação dos modelos determinísticos está no uso de apenas uma série de afluições futura, o que leva a uma subestimação dos custos operativos. Esta limitação pode ser parcialmente aliviada através da atualização sucessiva das previsões ou da otimização operativa para várias series hidrológicas, calculando-se o valor esperado do custo operativo [28]. Neste trabalho será considerada a formulação de despacho estocástico, discutida a seguir.

#### **1.3.2.2 Despacho hidrotérmico estocástico**

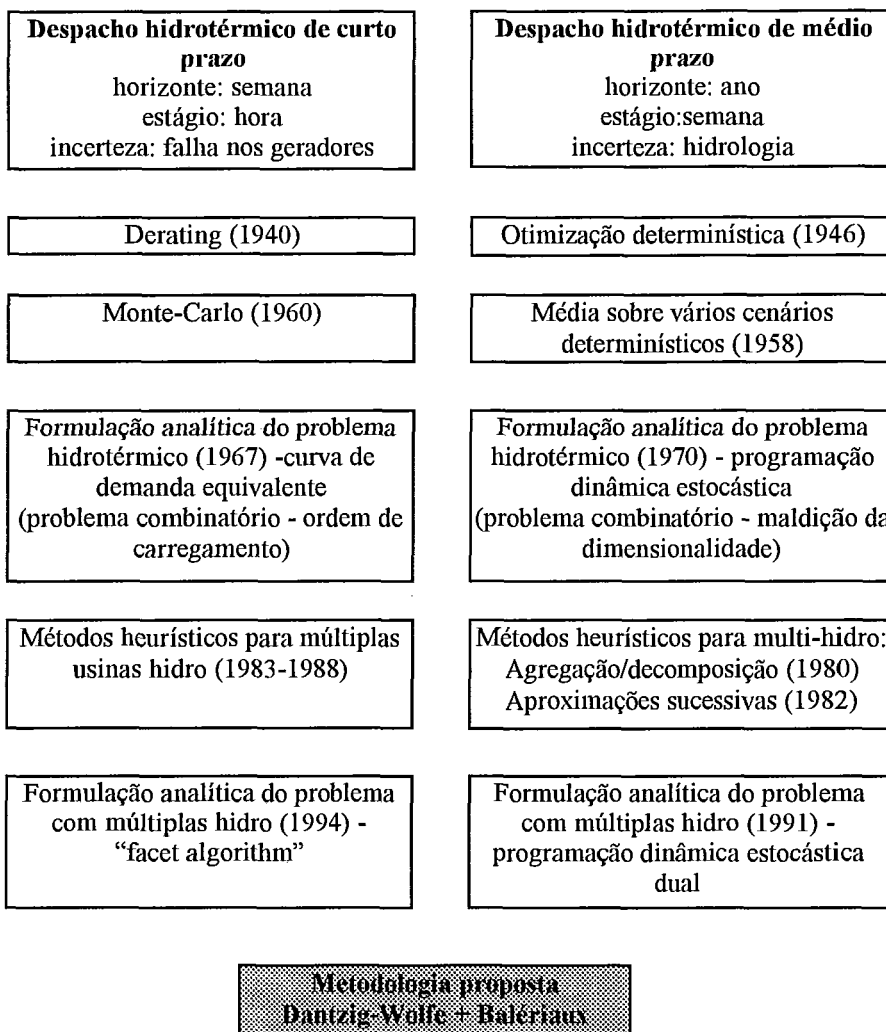
Em 1970 Arvanitidis e Rosing [29] fizeram uma das primeiras aplicações de programação dinâmica estocástica ao problema de operação de reservatórios, representando de maneira adequada a incerteza nas afluições. Neste mesmo trabalho foi detetada a principal limitação do esquema de programação dinâmica estocástica,

que é o crescimento exponencial do esforço computacional com o número de reservatórios. Os autores propuseram então agregar os reservatórios em um único reservatório equivalente de energia, diminuindo assim a dimensão do problema. Nas décadas seguintes foram desenvolvidos vários métodos heurísticos que tentavam aproximar a solução do problema para múltiplos reservatórios, tais como os métodos de aproximação sucessiva propostos originalmente por Davis (1972) [30] e aplicados por Pronovost e Boulva (1978) [31] ao sistema canadense, por Egeland e outros (1982) [32] ao sistema norueguês, por Sherkat e outros (1985) [33] ao sistema colombiano e por Terry e outros (1986) [21] ao sistema brasileiro; o método de agregação/decomposição proposto por Turgeon (1980) [34]; o método da programação dinâmica amostral proposto por Kelmam e outros [35] em 1990 e o método de componentes principais proposto por Saad e outros [36] em 1992.

Em 1990, Read e Georges [38] propuseram uma formulação analítica do problema na qual a função de custo futuro era representada como uma superfície linear por partes obtida a partir dos valores da água associados às combinações dos níveis dos reservatórios. Esta abordagem foi aplicada ao sistema de Nova Zelândia, com dois reservatórios. Independentemente, Pereira e Pinto [37] propuseram em 1991 uma técnica semelhante, conhecida como programação dinâmica estocástica dual, na qual os segmentos da função de custo futuro são gerados iterativamente por um processo de otimização/simulação, o que permitiu a sua aplicação a sistemas de múltiplos reservatórios. Aplicações e extensões deste método estão descritas por Gorenstin e outros [22] em 1992 e Travers e Kaye [39] em 1997. Uma abordagem alternativa baseada em técnicas de Lagrangeano aumentado foi proposta por Escudero e outros [40] em 1995 com aplicações ao despacho estocástico do sistema espanhol.

#### **1.4 Método proposto**

A Figura 1.2 resume os principais resultados das pesquisas em despacho hidrotérmico de curto e médio prazo discutidos acima. Pode-se observar um certo paralelismo no desenvolvimento das técnicas em cada área, que reflete em parte a disponibilidade de ferramentas computacionais cada vez mais poderosas. Por exemplo, ambas as áreas começam com aproximações determinísticas do problema (*derating* no caso do curto prazo e otimização determinística no médio prazo). No final da década de 60 foram formulados os primeiros algoritmos analíticos, que são o método de curva de demanda equivalente para o curto prazo e programação dinâmica estocástica para o médio prazo. Ambos os métodos encontraram dificuldades computacionais severas devido ao caráter combinatório do problema de múltiplas usinas hidroelétricas. No caso de curto prazo o problema está na determinação da ordem de carregamento das usinas hidroelétricas. No problema de médio prazo esta dificuldade está associada à representação de todas as combinações dos níveis de armazenamento dos reservatórios. Nas décadas seguintes foram desenvolvidos uma série de métodos heurísticos para aproximar a solução destes problemas. No início da década de 90 foram propostas as primeiras formulações analíticas capazes de representar múltiplas hidroelétricas.



**Figura 1.2 Evolução dos métodos de solução dos problemas de despacho**

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia que reúna as características analíticas dos problemas de curto e médio prazo. Maceira e Pereira [13] em 1994 propuseram uma primeira abordagem de um algoritmo para a representação integrada da evolução cronológica em conjunto com técnicas de Balériaux. Essa proposta, que se baseia em uma formulação de fluxo em redes, somente tem solução analítica no caso de uma única usina hidroelétrica, sendo necessário um procedimento de simulação no caso de múltiplas hidroelétricas.

Em termos do problema de curto prazo, neste trabalho se apresenta uma formulação analítica alternativa, também baseada em programação linear, em que se utiliza o método de decomposição de Dantzig-Wolfe. Esta abordagem apresenta como primeira vantagem uma maior clareza conceitual, pois se demonstra que a solução do problema mestre de Dantzig-Wolfe corresponde à determinação automática da ordem de carregamento das usinas hidroelétricas de forma a atender as metas energéticas. Com isto, o subproblema de Dantzig-Wolfe passa a ser um problema de despacho probabilístico que pode ser resolvido de maneira muito eficiente usando a técnica de Balériaux.

Em termos do problema de médio prazo se mostra que a metodologia proposta pode ser incorporada a modelos de operação hidrotérmica baseados em programação dinâmica estocástica dual, nos quais, como foi mencionado, a função de custo futuro é representada como uma função linear por partes. Desta forma, são representados a evolução cronológica e a incerteza das afluências de maneira integrada com os aspectos probabilísticos das falhas dos equipamentos e variação da demanda.

## **1.5 Organização do trabalho**

Neste trabalho se apresenta uma metodologia para representar de maneira integrada o efeito estocástico das afluências, próprios de problemas de operação de sistemas hidrotérmicos, com o efeito das flutuações da demanda e das falhas dos equipamentos, próprio de problemas de operação de sistemas térmicos.

No capítulo 2 se descreve em detalhe o problema de despacho probabilístico de um estágio para sistemas puramente térmicos. Se apresenta o método de Balériaux, que permite calcular o valor esperado do custo operativo e das gerações das usinas térmicas baseando-se na adição sucessiva das unidades geradoras em ordem crescente de custo operativo e calculando-se as distribuições de probabilidades utilizando técnicas de convolução.

No capítulo 3, se apresenta uma metodologia para também representar usinas hidroelétricas cujas gerações estão limitadas por metas energéticas, as quais representam os efeitos futuros dessa decisão. A metodologia de solução proposta se baseia na decomposição de Dantzig-Wolfe, onde o problema mestre representa as decisões de geração hidroelétrica e o subproblema corresponde a um despacho probabilístico.

O Capítulo 4 descreve a obtenção dos custos marginais, que são uma medida básica para estudos de política tarifária e preços de intercâmbio de energia.

No capítulo 5 se descreve a extensão da metodologia para representar as restrições hidroelétricas (balanço hídrico, nível de armazenamento, etc), supondo que a função de custo futuro é conhecida e linear por partes.

Finalmente, no capítulo 6 se descreve a extensão da metodologia para representar a função de custo futuro no contexto de algoritmos de programação dinâmica estocástica, o que permite incorporar o aspecto probabilístico devido a falhas dos equipamentos em modelos de despacho hidrotérmico multi-estágio. Isto é possível porque a metodologia utilizada para o despacho hidrotérmico multi-estágio - baseada em programação dinâmica dual estocástica e descrita no apêndice B - permite representar a função de custo futuro através de uma função linear por partes. O esquema de solução proposto é mostrado na Figura 1.3.

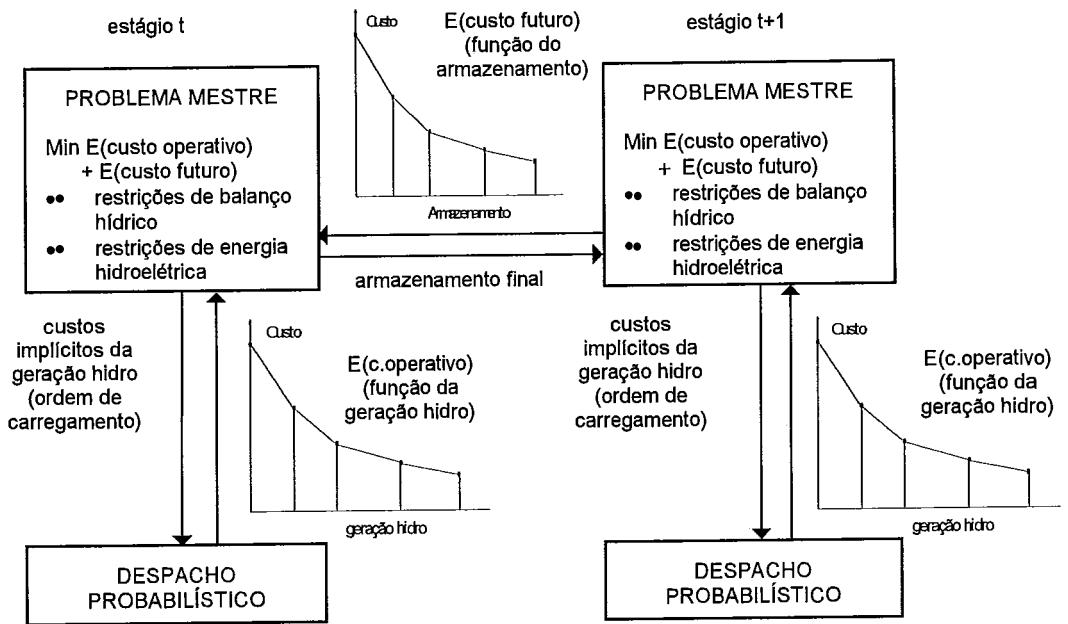


Figura 1.3 - Esquema de solução

A metodologia proposta combina as técnicas de decomposição de Benders (na solução do problema de despacho multi-estágio), decomposição de Dantzig-Wolfe (na solução do problema de despacho probabilístico com limites de energia) e métodos de expansão em séries para a obtenção das convoluções analíticas no despacho probabilístico. O algoritmo desenvolvido é computacionalmente eficiente e utiliza como módulos os programas tradicionais para sistemas térmicos (despacho probabilístico) e hidroelétricos (programação dinâmica dual estocástica).



## Capítulo II. Despacho probabilístico - sistemas térmicos

### II.1 Introdução

Neste capítulo vamos formular o problema de despacho probabilístico para sistemas térmicos e descrever sua solução através do algoritmo de Balériaux [2]. Será também apresentado um caso exemplo e discutidas as técnicas de convolução de distribuições de probabilidade usadas no método.

### II.2 Formulação do problema

O problema de despacho probabilístico (DP) para sistemas térmicos consiste em calcular o valor esperado do custo de geração levando em conta as flutuações da demanda e as falhas aleatórias nos equipamentos. Considerando:

- $i$  indexa os geradores ( $I$  número de geradores)
- $c_i$  custo unitário de operação do  $i$ -ésimo gerador (geradores com custos não lineares são representados como linear por partes)
- $g_i$  energia produzida pelo  $i$ -ésimo gerador
- $d$  demanda do sistema (variável aleatória)
- $\bar{g}_i$  capacidade do  $i$ -ésimo gerador (variável aleatória)

O problema de DP pode ser formulado como o seguinte problema de otimização estocástica:

Determinar o valor esperado de  $z$ ,  $E(z)$ , onde:

$$\begin{aligned} z = & \text{Mín} && \sum_{i=1}^I c_i g_i && (1) \\ & \text{s.a} && \sum_{i=1}^I g_i = d \\ & && 0 \leq g_i \leq \bar{g}_i && i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias demanda e capacidade de geração térmica têm algumas características que explicamos a seguir.

## II.2.1 Representação da variável aleatória demanda

No caso da demanda, a seguinte figura mostra os dados cronológicos de demanda horária para um dia típico.

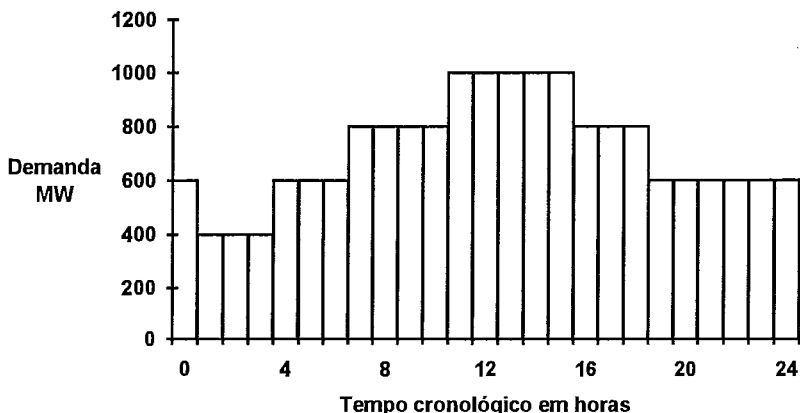


Figura 2.1. Demanda instantânea horária

A Figura seguinte mostra a Curva de Duração de Demanda, obtida por reordenação das demandas históricas em ordem decrescente de valor. Observe que nesta curva se perde a informação cronológica das demandas, mas isto não é importante porque, como foi mencionado no capítulo anterior, o despacho térmico é independente para cada hora.

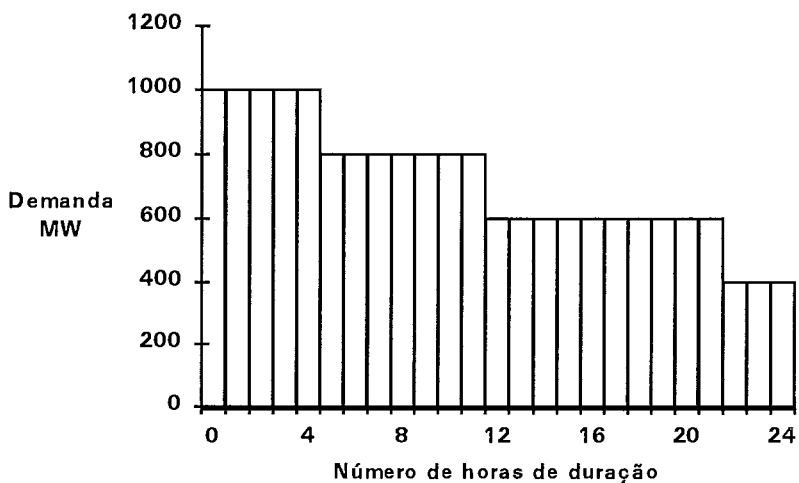


Figura 2.2. Curva de Duração de Demanda

Se normalizamos o eixo das horas e invertemos os eixos na Curva de Duração de Demanda, esta pode ser interpretada como a função de probabilidade acumulada da demanda, i.e.,  $f(x) = P(X \leq x)$ :

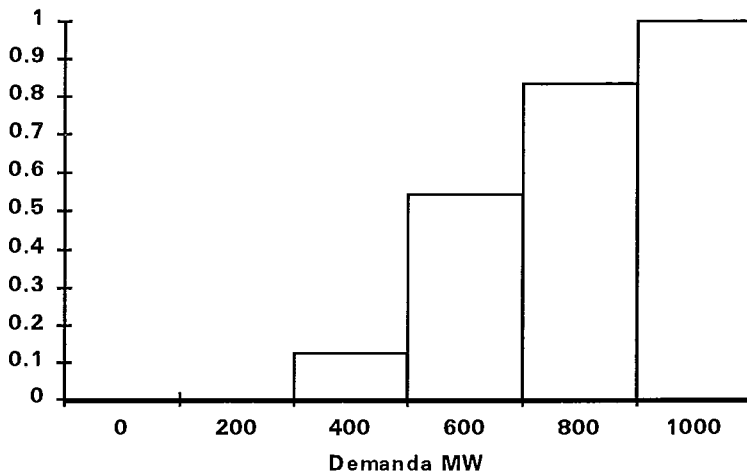


Figura 2.3. Função de Probabilidade Acumulada da Demanda

A função de distribuição de probabilidades é dada por:

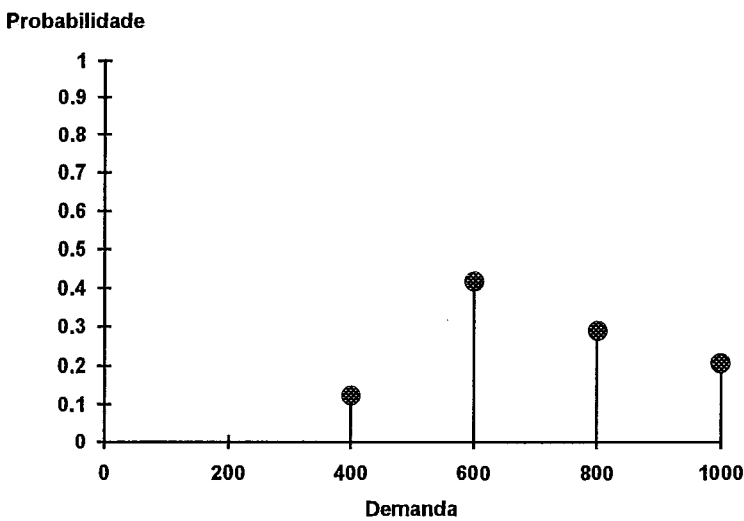


Figura 2.4. Função de Distribuição de Probabilidade da Demanda

Neste trabalho, a demanda  $d$  é representada como uma variável aleatória discreta cujos valores são os patamares e as probabilidades associadas a cada um desses patamares representam sua duração percentual. Denotaremos  $J$  o número de patamares de demanda e  $q_j$  a duração do patamar de demanda  $j$ .

## II.2.2 Representação da variável aleatória capacidade de geração

A variável aleatória  $\bar{g}_i$  representa a falha no equipamento  $i$ . Típicamente considera-se que a capacidade de geração tem uma distribuição de Bernoulli, i.e.:

$$\begin{aligned} \bar{g}_i &= 0 && \text{com probabilidade } r_i \\ \bar{g}_i &= \bar{G}_i, && \text{com probabilidade } (1 - r_i) \end{aligned}$$

onde  $\bar{G}_i$  é o limite operativo do gerador  $i$ .

## II.2.3 Reformulação do problema

Seja  $K$  o número total de cenários de capacidade de geração, obtidos por combinação dos cenários de falha e funcionamento de cada um dos geradores, e seja  $p_k$  a probabilidade associada ao cenário  $k$ , obtida por multiplicação das probabilidades de falha ou funcionamento de cada gerador.

Discretizando desta forma o problema de despacho probabilístico, temos o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \quad (2.1)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijk} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I, \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad (2.3)$$

onde:  $i$  indexa os geradores ( $I$  número de geradores)  
 $j$  indexa os patamares de demanda ( $J$  número de patamares de demanda)  
 $k$  indexa os cenários de capacidade ( $K$  número de cenários de capacidade)  
 $p_k$  probabilidade do cenário  $k$   
 $q_j$  duração do patamar de demanda  $j$   
 $c_i$  custo de operação unitário do gerador  $i$   
 $g_{ijk}$  energia produzida pelo gerador  $i$  no patamar de demanda  $j$ , cenário  $k$   
 $c_\delta$  penalidade pelo não atendimento à demanda  
 $\delta_{jk}$  corte de carga no patamar  $j$ , cenário  $k$ , devido à insuficiência de geração  
 $d_j$  demanda no patamar  $j$   
 $\bar{g}_{ik}$  capacidade do gerador  $i$ , cenário  $k$

A função objetivo é minimizar o valor esperado do custo de geração total. As restrições (2.2) representam o atendimento à demanda para cada patamar e para cada cenário de capacidade térmica. As restrições (2.3) representam os limites na geração de cada gerador para cada patamar de demanda e cada cenário de capacidade.

Devido ao carácter combinatório do problema, o número de restrições cresce exponencialmente com o número de geradores. Por exemplo, se considerarmos um sistema com 30 geradores, sendo a capacidade de geração de cada um deles uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli, o número total de cenários de capacidade - e, portanto, de restrições do problema - será  $2^{30}$ , que é da ordem de um bilhão.

Uma alternativa para resolver este problema é observar que o problema pode ser decomposto em  $K \times J$  problemas menores, para cada cenário de capacidade e patamar de demanda. Neste caso, pode-se utilizar simulação Monte Carlo, onde se sorteia aleatoriamente cenários de capacidade e patamares de demanda e se resolve o problema de despacho para cada cenário sorteado. A média dos custos operativos para um grande número de sorteios é uma estimativa do valor esperado do custo de operação. A precisão desta estimativa depende do número de sorteios realizados, que pode ser reduzido através de técnicas de redução de variância e amostragem por importância [9,10].

No entanto, existe uma alternativa de solução analítica bastante eficiente proposta por Balériaux [2], descrita a seguir.

## II.3 Uma solução analítica: esquema de Balériaux

### II.3.1 Esquema de Balériaux no caso determinístico

O algoritmo de Balériaux também se baseia na possibilidade de decompor o problema de despacho probabilístico em  $K \times J$  subproblemas mas permite resolver analiticamente os subproblemas. Por simplicidade de notação, vamos retornar a formulação (1), sem os índices de cenário de capacidade e de patamar de demanda de cada subproblema, ou seja,

$$\begin{aligned}
 z = \quad & \text{Min} \quad \sum_{i=1}^I c_i g_i & (3) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^I g_i = d \\
 & 0 \leq g_i \leq \bar{g}_i & i = 1, \dots, I
 \end{aligned}$$

onde  $d$  e  $\bar{g}_i$  são agora valores *conhecidos*. Como mencionado no ítem I.2.2, este subproblema pode ser resolvido colocando os geradores em ordem crescente de custo unitário até alcançar sua capacidade máxima de geração ou atender à demanda. Portanto, a energia produzida por cada gerador é dada por:

$$g_i = \text{Min} \{ \bar{g}_i, w_{i-1} \} \quad (4)$$

onde:

$$w_{i-1} = \max \left\{ 0, d - \sum_{n=1}^{i-1} \bar{g}_n \right\}$$

e pode ser interpretado como a *energia não suprida* de um sistema no qual somente os primeiros  $i-1$  geradores estão disponíveis:

$$\begin{aligned} w_{i-1} = & \text{Mín } \delta & (5) \\ \text{s. a } & \delta + \sum_{n=1}^{i-1} g_n = d \\ & g_i \leq \bar{g}_i & i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

onde  $\delta$  é uma variável escalar que representa o *corte de carga* no sistema devido a uma capacidade de geração insuficiente.

Vamos agora mostrar que  $g_i$  é dado pela diferença entre a energia não suprida antes e depois da entrada em operação do gerador:

$$g_i = w_{i-1} - w_i \quad (6)$$

Suponha que na solução de (4),  $g_i = \bar{g}_i$ . Neste caso,  $w_{i-1}$  e  $w_i$  são dados por:

$$w_{i-1} = d - \sum_{n=1}^{i-1} \bar{g}_n \quad (7)$$

$$w_i = d - \sum_{n=1}^i \bar{g}_n \quad (8)$$

Subtraindo os dois termos, obtém-se  $w_{i-1} - w_i = \bar{g}_i$ .

Suponha agora que  $g_i < \bar{g}_i$ . Neste caso,  $g_i = \max \{ 0, d - \sum_{n=1}^{i-1} \bar{g}_n \}$ , que é por construção  $w_{i-1}$ . Observe também que neste caso  $w_i = 0$ . Portanto,

$$g_i = \max \{ 0, d - \sum_{n=1}^{i-1} \bar{g}_n \} - 0 = w_{i-1} - w_i \quad (9)$$

Em resumo, o problema operativo pode ser resolvido com o seguinte algoritmo:

a) Calcular a energia não suprida após a adição de cada gerador:

$$w_i = \max \{ 0, d - \sum_{n=1}^i \bar{g}_n \} \quad i = 0, \dots, I \quad (10)$$

b) Calcular a energia produzida por cada gerador:

$$g_i = w_{i-1} - w_i \quad i = 1, \dots, I \quad (11)$$

c) Calcular o custo operativo:

$$z = \sum_{i=1}^I c_i g_i \quad (12)$$

Dado que as gerações podem ser calculadas diretamente de (4) este esquema de solução não tem muita vantagem computacional no caso determinístico. Seu interesse está na extensão desta idéia para o caso estocástico.

### II.3.2 Esquema de Balériaux no caso estocástico

Este esquema de solução pode ser estendido ao caso estocástico onde tanto  $\bar{g}_n$  e  $d$  são variáveis aleatórias. Neste caso o algoritmo pode ser resumido como:

a) Calcular o valor esperado da energia não suprida após a adição de cada gerador:

$$E(w_i) = E(\max \{ 0, d - \sum_{n=1}^i \bar{g}_n \}) \quad i = 0, \dots, I \quad (13)$$

b) Calcular o valor esperado da energia produzida por cada gerador como a diferença das energias não supridas:

$$E(g_i) = E(w_{i-1}) - E(w_i) \quad i = 1, \dots, I \quad (14)$$

c) Calcular o valor esperado do custo total de geração:

$$E(z) = \sum_{i=1}^I c_i E(g_i) \quad (15)$$

Em resumo, o esquema de solução de Balériaux decompõe o problema de despacho probabilístico em  $I$  subproblemas de determinar o valor esperado da energia não suprida. Estes problemas são conhecidos como problemas de *confiabilidade de geração* [14] e podem ser resolvidos com as técnicas descritas a seguir. Observe que neste esquema de solução pode-se aproveitar os cálculos do valor esperado da energia não suprida da iteração anterior.

### II.3.3 Solução de cada problema de confiabilidade

O problema (13) pode ser resolvido por convolução das distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias  $d$  e  $\bar{g}_i$ . Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias independentes com distribuições de probabilidade discretas. A distribuição de probabilidade da soma, representada por  $X = X_1 + X_2$ , se obtém convoluindo as distribuições destas variáveis. Vamos supor que  $X_1$  pode assumir os valores  $x_1(i)$  com probabilidade  $p_1(i)$  para  $i = 1, \dots, n_1$  e  $X_2$  pode assumir os valores  $x_2(j)$  com probabilidade  $p_2(j)$  para  $j = 1, \dots, n_2$ . Portanto, a variável aleatória  $X$  pode assumir os valores  $x(i,j) = x_1(i) + x_2(j)$  com probabilidade  $p_1(i) \times p_2(j)$ , para  $i = 1, \dots, n_1$  e  $j = 1, \dots, n_2$ .

No caso contínuo, a função de densidade da variável  $X$  é calculada como:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s)f_2(x-s)ds = f_1 \otimes f_2(x) \quad (16)$$

Note que  $E(w_i)$  pode ser obtido a partir da convolução realizada no cálculo de  $E(w_{i-1})$ , adicionando o  $i$ -ésimo gerador. A seguir apresentamos um exemplo resolvido tanto pelo método de enumeração de cenários como pela técnica de Balériaux.

## II.4 Exemplo

Vamos considerar um sistema composto de duas usinas térmicas, com as seguintes características:

Tabela 2.1. Exemplo - Dados das usinas térmicas

Usina	Capacidade (MW)	Taxa de Pane (%)	Custo oper. $c_i$ (\$/MWh)
1	500	20	5
2	200	10	10

A penalidade pelo não atendimento à demanda, que é representada como uma térmica de capacidade infinita, é de 100 \$/MWh. Os patamares de demanda são os seguintes:

Tabela 2.2. Exemplo - Dados de demanda

Demanda (MW)	Duração (%)
600	50
400	50

Dado que estamos considerando duas usinas térmicas, cada uma com dois possíveis cenários de capacidade, então o número total de cenários de capacidade térmica é  $2^2 = 4$ . As capacidades e as probabilidades associadas a estes cenários estão apresentadas na seguinte tabela:

Tabela 2.3. Exemplo - Cenários de capacidade

Cenário $k$	$\bar{q}_{1k}$	$\bar{q}_{2k}$	Probabilidade $p_k$
1	500	200	$0.8 \times 0.9 = 0.72$
2	500	0	$0.8 \times 0.1 = 0.08$
3	0	200	$0.2 \times 0.9 = 0.18$
4	0	0	$0.2 \times 0.1 = 0.02$

### II.4.1 Solução por enumeração

O problema (1) é separável em subproblemas para cada cenário e para cada patamar de demanda. O custo operativo associado ao gerador  $i$ , patamar de demanda  $j$  e cenário de capacidade térmica  $k$  se obtém multiplicando a energia gerada  $g_{ijk}$  pelo custo unitário de operação  $c_i$  e pela duração (p.u.) do patamar de demanda  $q_j$ , isto é,  $q_j \times c_i \times g_{ijk}$ .

Para obter o custo associado a cada cenário basta somar os custos operativos em cada patamar de demanda como se mostra nas seguintes tabelas

Tabela 2.4 Solução do problema por enumeração  
(a) Cenário 1



Gerador	Patamar 1 MW	Patamar 1 Custo (\$)	Patamar 2 MW	Patamar 2 Custo (\$)
T1	500	$0.5 \times 5 \times 500 = 1250$	400	$0.5 \times 5 \times 400 = 1000$
T2	100	$0.5 \times 10 \times 100 = 500$	0	0
Deficit	0	0	0	0
Total	600	1750	400	1000
Custo Cenário = \$ 2 750				

(b) Cenário 2

Gerador	Patamar 1 MW	Patamar 1 Custo (\$)	Patamar 2 MW	Patamar 2 Custo (\$)
T1	500	$0.5 \times 5 \times 500 = 1250$	400	$0.5 \times 5 \times 400 = 1000$
T2	0	0	0	0
Deficit	100	$0.5 \times 100 \times 100 = 5000$	0	0
Total	600	6250	400	1000
Custo Cenário = \$ 7 250				

(c) Cenário 3

Gerador	Patamar 1 MW	Patamar 1 Custo (\$)	Patamar 2 MW	Patamar 2 Custo (\$)
T1	0	0	0	0
T2	200	$0.5 \times 10 \times 200 = 1000$	200	$0.5 \times 10 \times 200 = 1000$
Deficit	400	$0.5 \times 100 \times 400 = 20000$	200	$0.5 \times 100 \times 200 = 10000$
Total	600	21000	400	11000
Custo Cenário = \$ 32 000				

(d) Cenário 4

Gerador	Patamar 1 MW	Patamar 1 Custo (\$)	Patamar 2 MW	Patamar 2 Custo (\$)
T1	0	0	0	0
T2	0	0	0	0
Deficit	600	$0.5 \times 100 \times 600 = 30000$	400	$0.5 \times 100 \times 400 = 20000$
Total	600	30000	400	20000
Custo Cenário = \$50 000				

O custo operativo total se obtém ponderando os custos de cada cenário pela probabilidade associada  $p_k$ . Desta forma, o valor esperado do custo de operação é:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^4 \text{Custo Cenário } k \times p_k \\
 & = 2750 \times 0.72 + 7250 \times 0.08 + 32000 \times 0.18 + 50000 \times 0.02 \\
 & = \$ 9320
 \end{aligned}$$

## II.4.2 Solução pelo método de Balériaux

### Iteração 0

Retirando todos os geradores do sistema, o valor esperado da energia não suprida é dado pelo valor esperado da demanda, cuja distribuição de probabilidade é:

Tabela 2.5 Distribuição da demanda

d	Prob.
600	0.5
400	0.5

Então:

$$w_0 = E[d] = 0.5 \times 600 + 0.5 \times 400 = 500 \text{ MW}$$

### Iteração 1

Adicionando a térmica mais barata, T<sub>1</sub>, o valor esperado da energia não suprida é:

$$w_1 = E [ \max \{ 0, d - \bar{g}_1 \} ]$$

Convolvendo a distribuição da demanda  $d$  com a de  $\bar{g}_1$ , que é dada por:

**Tabela 2.6 Distribuição da capacidade de geração do gerador T1**

$\bar{g}_1$	Prob.
500	0.8
0	0.2

Tem-se,

**Tabela 2.7 Distribuição da variável aleatória  $d - \bar{g}_1$**

$d - \bar{g}_1$	Prob.
600	$0.5 \times 0.2$
400	$0.5 \times 0.2$
100	$0.5 \times 0.8$
-100	$0.5 \times 0.8$

Transportando todos os valores negativos para o valor zero (operação  $\max\{\cdot\}$ ), tem-se a distribuição final.

**Tabela 2.8 Distribuição da variável aleatória  $\max \{ 0, d - \bar{g}_1 \}$**

$\max \{ 0, d - \bar{g}_1 \}$	Prob.
600	0.1
400	0.1
100	0.4
0	0.4

O valor de  $w_1$  é dado por:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0.1 \times 600 + 0.1 \times 400 + 0.4 \times 100 + 0.4 \times 0 \\ &= 140 \text{ MW} \end{aligned}$$

Portanto o valor esperado da geração da térmica T1 é:

$$E[g_1] = w_0 - w_1 = 500 - 140 = 360 \text{ MW}$$

## Iteração 2

Adicionando a segunda térmica mais barata,  $T_2$ , o valor esperado da energia não suprida é:

$$w_2 = E [ \max \{ 0, d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2 \} ]$$

A distribuição de capacidade da térmica  $T_2$  é dada por:

**Tabela 2.9 Distribuição da capacidade de geração do gerador  $T_1$**

$\bar{g}_2$	Prob.
200	0.9
0	0.1

Convolvendo com a distribuição de  $d - \bar{g}_1$ , obtém-se:

**Tabela 2.10 Distribuição da variável aleatória  $d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2$**

$d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2$	Prob.
600	$0.1 \times 0.1$
400	$0.1 \times 0.9$
200	$+ 0.1 \times 0.1$ $0.1 \times 0.9$
100	$0.4 \times 0.1$
-100	$0.4 \times 0.9$
-300	$+ 0.4 \times 0.1$ $0.4 \times 0.9$

Trazendo os valores negativos para zero, tem-se a distribuição final:

**Tabela 2.11 Distribuição da variável aleatória  $\max \{ 0, d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2 \}$**

$\max \{ 0, d - \bar{g}_1 - \bar{g}_2 \}$	Prob.
600	0.01
400	0.10
200	0.09
100	0.04
0	0.76

O valor esperado é:

$$\begin{aligned} w_2 &= 0.01 \times 600 + 0.10 \times 400 + 0.09 \times 200 + 0.04 \times 100 + 0.76 \times 0 \\ &= 68 \text{ MW} \end{aligned}$$

Portanto, o valor esperado da geração da térmica  $T_2$  é

$$E[g_2] = w_1 - w_2 = 140 - 68 = 72 \text{ MW}$$

Finalmente, o valor esperado do custo de operação é dado pela soma dos valores de geração multiplicado pelos custos operativos:

$$5 \times 360 + 10 \times 72 + 100 \times 68 = \$ 9320$$

## II.5 Técnicas de convolução

O procedimento de convolução apresentado no exemplo anterior se torna computacionalmente ineficiente se o número de geradores é elevado, devido ao caráter combinatório da construção da distribuição de probabilidade da potência total disponível. Por exemplo, seja  $X$  uma variável aleatória definida como  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ . O número máximo de possíveis valores de  $X$  é  $\prod_{i=1}^N n_i$ , onde  $n_i$  é o número de possíveis valores de  $X_i$ .

Portanto, é necessário desenvolver métodos aproximados que sejam computacionalmente mais eficientes. Uma análise de possíveis alternativas pode ser encontrada na referência [16]. Neste trabalho, foram analisados e implementados dois métodos, que são descritos a seguir:

1. discretização do espaço amostral
2. técnicas de expansão em séries de normais [8,15,17,18]

Estas técnicas serão apresentadas com detalhe nas seções II.5.2 e II.5.3. Os leitores já familiarizados com estas técnicas ou mais interessados nos aspectos conceituais da metodologia proposta podem passar diretamente para o capítulo III. A seguir são descritas as estatísticas a ser calculadas.

### II.5.1 Estatísticas a serem calculadas

Seja  $X$  uma variável aleatória que representa a potência total disponível, definida como:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

onde cada variável aleatória  $X_i$  representa a potência disponível da  $i$ -ésima unidade do sistema gerador.

As estatísticas que desejamos calcular são o valor esperado da energia não suprida, denominado EENS (Expected Energy Not Supplied) e a probabilidade de perda de carga, denominada LOLP (Loss of load probability). A EENS é usada diretamente no algoritmo de Balériaux apresentado anteriormente. Por sua vez, a LOLP será utilizada no cálculo dos custos marginais de demanda, que serão apresentados no capítulo IV.

Para um valor de demanda  $d$  a EENS é dada por:

$$\text{EENS}(d) = E[\max\{0, d - X\}] = \int_0^d (d-x)f(x)dx \quad (17)$$

e a probabilidade de perda de carga é dada por:

$$\text{LOLP}(d) = \text{P}[X < d] = \int_0^d f(x)dx \quad (18)$$

onde  $f$  é a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $X$ .

Vamos demonstrar agora que a LOLP é a derivada da EENS com respeito à demanda.

$$\text{LOLP}(d) = \frac{\partial \text{EENS}(d)}{\partial d} \quad (19)$$

Expandindo a expressão (17) temos:

$$\text{EENS}(d) = d \int_0^d f(x)dx - \int_0^d x f(x)dx \quad (20)$$

Derivando com respeito a  $d$ , e lembrando que se:

$$g(d) = \int_0^d f(x)dx$$

então  $g'(d) = f(d)$ , tem-se que:

$$\frac{\partial \text{EENS}(d)}{\partial d} = d f(d) + \int_0^d f(x)dx - d f(d) = \int_0^d f(x)dx \quad (21)$$

que é a expressão da LOLP.

## II.5.2 Discretização do espaço amostral

Este método consiste em discretizar o conjunto de possíveis valores de  $X$  em  $M$  pontos,  $x_m$ ,  $m = 1, \dots, M$ , sendo  $x_1 = 0$  e inicializar a probabilidade:

$$r_1 = \text{P}(X = 0) = 1 \quad (22.a)$$

$$r_m = \text{P}(X = x_m) = 0 \quad m = 2, \dots, M \quad (22.b)$$

Agora consideramos a primeira variável  $X_1$ , que supomos assumir os valores  $x_{1i}$  com probabilidade  $p_{1i}$  para  $i = 1, \dots, n_1$ . Para cada  $i = 1, \dots, n_1$ , determinamos o índice  $k$  tal que:

$$x_k < x_{1i} \leq x_{k+1} \quad (23)$$

e fazemos:

$$\begin{aligned}
 R_m(i,1) &= 0 & m < k \\
 &= r_{m-k+1} \times p_{1i} \times \frac{x_{1i} - x_k}{x_{k+1} - x_k} & m \geq k
 \end{aligned} \tag{24.a}$$

$$\begin{aligned}
 R_m(i,2) &= 0 & m \leq k \\
 &= r_{m-k} \times p_{1i} \times \frac{x_{k+1} - x_{1i}}{x_{k+1} - x_k} & m > k
 \end{aligned} \tag{24.b}$$

Este cálculo é repetido para todos os valores de do espaço amostral de  $X_1$  e depois se redefine:

$$r_m = \sum_{i=1}^{n_1} (R_m(i,1) + R_m(i,2)) \quad m = 1, \dots, M \tag{25}$$

Observa-se que o número de operações é de  $2 \times M \times n_1$ .

O processo se repete para cada uma das variáveis aleatórias  $X_2, \dots, X_N$ . Ao final teremos uma aproximação da função de distribuição de  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , obtida após  $2 \times M \times \sum_{i=1}^N n_i$  operações e cuja precisão depende do número de discretizações do espaço amostral de  $X$ .

A modo de ilustração apresentamos a seguir o cálculo da função de distribuição de probabilidades da potência disponível depois da adição de um novo gerador. A Figura 2.5 mostra a distribuição de probabilidades da potência disponível (antes da adição do novo gerador) e do novo gerador.

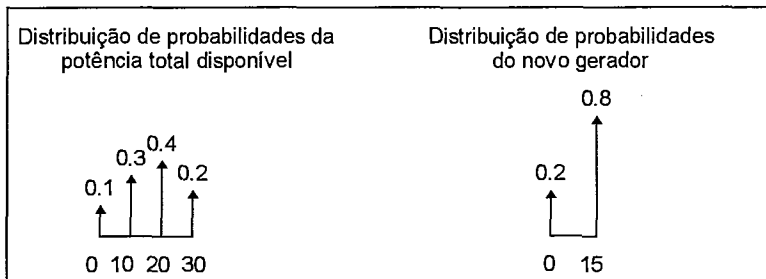


Figura 2.5 Distribuição de probabilidades

Na Figura 2.6 se apresenta a distribuição da função de probabilidades da potência total disponível obtida através de convolução discreta.

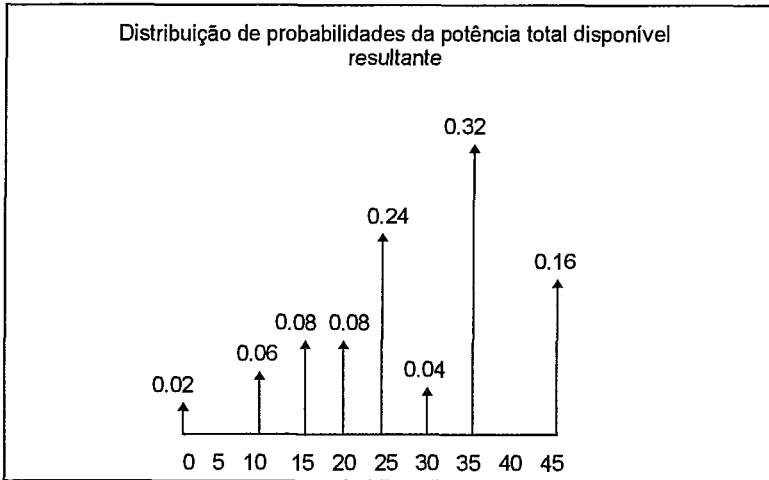
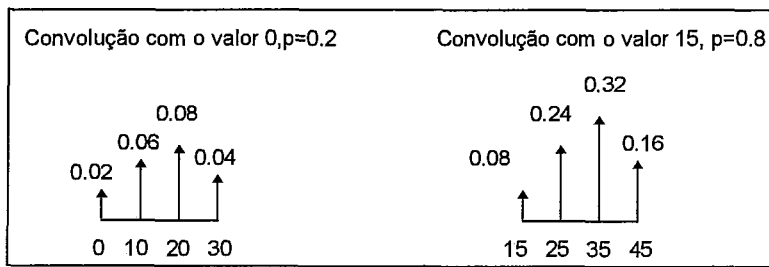


Figura 2.6 Distribuição de probabilidades da potência total disponível

A aproximação da distribuição de probabilidades da potência total disponível obtida discretizando o espaço de estado usando um *grid* de 5 MW se mostra na Figura 2.7.

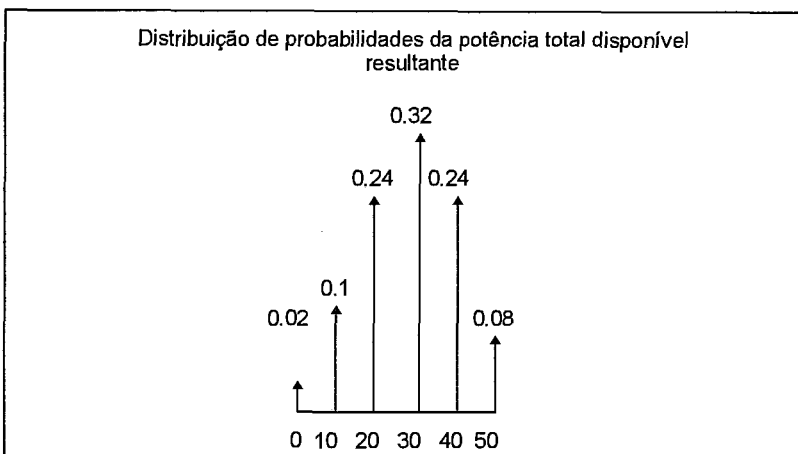
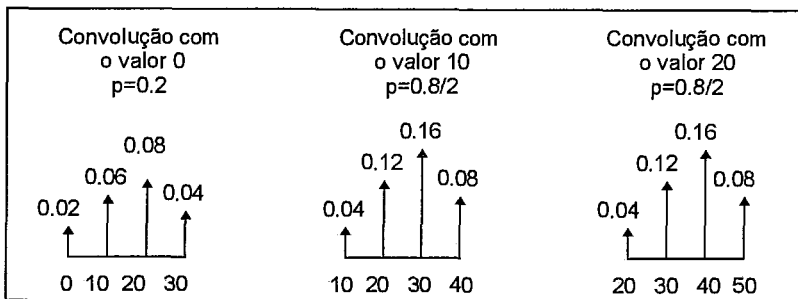


Figura 2.7 Aproximação da distribuição de probabilidades da potência total disponível

### II.5.2.1 Cálculo da LOLP

Uma vez calculadas as probabilidades  $r_m$ , a LOLP se obtém como:

$$\text{LOLP}(d) = \sum_{m=1}^k r_m \quad (26)$$

onde  $k$  é tal que  $x_k < d \leq x_{k+1}$

### II.5.2.2 Cálculo da EENS

A EENS se obtém como:

$$\text{EENS}(d) = \sum_{m=1}^k [ (d - x_m) \times r_m ] \quad (27)$$

onde  $k$  é tal que  $x_k < d \leq x_{k+1}$

### II.5.3 Método dos cumulantes

Seja  $X$  uma variável aleatória tal que:

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (28)$$

onde  $X_i$  é uma variável aleatória independente com média  $m_i$  e desvio padrão  $\sigma_i$ . Sejam também:

$$m = \sum m_i \quad (29)$$

$$\sigma^2 = \sum \sigma_i^2 \quad (30)$$

Sabemos que sob as condições do Teorema do Limite Central, se  $n$  tende a  $\infty$ , a distribuição da variável padronizada  $\frac{X-m}{\sigma}$  tende à distribuição normal  $N(0,1)$ . Sem perda de generalidade e a menos que se indique o contrário, vamos nos referir a  $X$  como sendo a variável padronizada. Assim, se  $f$  é a função de densidade de  $X$ , podemos escrever que:

$$f(x) = n(x) + r(x) \quad (31)$$

onde  $n(x)$  é a função de densidade da normal, i.e.:

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (32)$$



e  $r(x)$  é uma função resíduo. É natural perguntar se esta aproximação pode ser melhorada expandindo em séries o resíduo  $r(x)$ . Na referência [15] o autor observa que a função de densidade de  $X$  poderia ser expandida na seguinte série de normais:

$$f(x) = c_0 n(x) + c_1 n^1(x) + \frac{c_2}{2!} n^2(x) + \dots \quad (33)$$

onde as funções  $n^i(x)$  são as derivadas de  $i$ -ésima ordem de  $n(x)$  e os  $c_i$  são coeficientes constantes. Na citada referência se discute a dificuldade de garantir a convergência desta série. Entretanto, se observa que para efeitos práticos o que interessa é saber se é possível obter uma boa aproximação de  $f(x)$  usando apenas um número finito de termos da série acima, independentemente do comportamento assintótico do resto da série. A teoria mostra que os seis primeiros termos da série acima, chamada expansão de Gram-Charlier, levam a uma boa aproximação de  $f(x)$  quando o número de variáveis aleatórias é suficientemente grande. Assim,

$$f(x) = \sum_{i=0}^6 \frac{c_i}{i!} n^i(x) \quad (34)$$

A obtenção de cada um dos termos e dos coeficientes desta aproximação será mostrada a seguir.

### II.5.3.1 Cálculo das derivadas $n^i(x)$

As derivadas da função de densidade da normal satisfazem a seguinte relação:

$$n^i(x) = (-1)^i h_i(x) n(x) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (35)$$

onde  $h_i(x)$  é um polinômio de grau  $i$  chamado polinômio de Hermite. Estes polinômios podem ser obtidos diretamente de (35), resultando:

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1 \\ h_1(x) &= x \\ h_2(x) &= x^2 - 1 \\ h_3(x) &= x^3 - 3x \\ h_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ h_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x \\ h_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 \end{aligned} \quad (36)$$

Portanto a expansão (34) pode ser reescrita como:

$$f(x) = \sum_{i=0}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_i(x) n(x) \quad (37)$$

### II.5.3.2 Cálculo dos coeficientes $c_i$

Uma propriedade importante dos polinômios de Hermite é que eles são ortogonais com respeito a  $n(x)$  [15], i.e.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_i(x) h_j(x) n(x) dx &= i! && \text{se } i = j \\ &= 0 && \text{caso contrário} \end{aligned} \quad (38)$$

Esta propriedade pode ser utilizada para determinar os coeficientes  $c_i$ . Multiplicando a expressão (37) por  $h_i(x)$  e integrando, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_i(x) f(x) dx = (-1)^i c_i \quad (39)$$

E então:

$$c_i = (-1)^i \int_{-\infty}^{\infty} h_i(x) f(x) dx = (-1)^i E[h_i(x)] \quad (40)$$

Como  $h_i(x)$  é um polinômio em  $x$ , o cálculo de  $E[h_i(x)]$  pode ser feito a partir dos momentos da função de densidade  $f(x)$ . O  $r$ -ésimo momento em torno da origem se define como:

$$\mu'_r = E[x^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \quad (41)$$

Outra medida importante são os momentos centrais ou momentos em torno da média, que se definem como:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu'_1)^r f(x) dx \quad (42)$$

### II.5.3.3 Coeficientes da expansão em séries de normais em termos dos momentos da variável padronizada

Dado que estamos trabalhando com a variável aleatória padronizada  $(x-m)/\sigma$  os momentos centrais coincidem com os momentos em torno da média pois  $\mu'_1 = 0$ , em outras palavras:

$$\mu_1 = \mu'_1 = 0 \quad (43)$$

$$\mu_2 = \mu'_2 = 1$$

$$\mu_r = \mu'_r \quad r = 3, 4, \dots$$

Portanto, os coeficientes resultam:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= (-1)^0 E [h_0(x)] = (-1)^0 E [ 1 ] = 1 \\
 c_1 &= (-1)^1 E [h_1(x)] = (-1)^1 E [ x ] = 0 \\
 c_2 &= (-1)^2 E [h_2(x)] = (-1)^2 E [ x^2 - 1 ] = 0 \\
 c_3 &= (-1)^3 E [h_3(x)] = (-1)^3 E [ x^3 - 3x ] = - \mu_3 \\
 c_4 &= (-1)^4 E [h_4(x)] = (-1)^4 E [ x^4 - 6x^2 + 3 ] = \mu_4 - 3 \\
 c_5 &= (-1)^5 E [h_5(x)] = (-1)^5 E [ x^5 - 10x^3 + 15x ] = - \mu_5 + 10\mu_3 \\
 c_6 &= (-1)^6 E [h_6(x)] = (-1)^6 E [ x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 ] = \mu_6 - 15\mu_4 + 30
 \end{aligned} \tag{44}$$

#### II.5.3.4 Coeficientes da expansão em séries de normais em termos dos momentos da potência total disponível

Existe uma relação entre os momentos da variável aleatória padronizada e os momentos da variável aleatória potência disponível. Seja:

$$\eta_r = E[ (X - m)^r ]$$

o  $r$ -ésimo momento em torno da média da variável aleatória potência disponível. Multiplicando e dividindo o lado direito por  $\sigma^r$ , tem-se:

$$\eta_r = \sigma^r E[ \left( \frac{X-m}{\sigma} \right)^r ] = \sigma^r \mu_r \quad r = 3, 4, \dots \tag{45}$$

Portanto, em termos destes momentos os coeficientes resultam:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 1 \\
 c_1 &= 0 \\
 c_2 &= 0 \\
 c_3 &= - \frac{\eta_3}{\sigma^3} \\
 c_4 &= \frac{\eta_4}{\sigma^4} - 3 \\
 c_5 &= - \frac{\eta_5}{\sigma^5} + 10 \frac{\eta_3}{\sigma^3} \\
 c_6 &= \frac{\eta_6}{\sigma^6} - 15 \frac{\eta_4}{\sigma^4} + 30
 \end{aligned} \tag{46}$$

#### II.5.3.5 Cálculo dos momentos da potência total disponível

A potência disponível total do sistema é dada pela soma das variáveis aleatórias que representam a potência disponível de cada unidade geradora. Portanto, será necessário calcular os momentos de uma soma de variáveis aleatórias.

Sejam  $X_1$  e  $X_2$  duas variáveis aleatórias independentes com funções de densidade  $f_1$  e  $f_2$ , respectivamente. Como foi dito antes, a variável  $X = X_1 + X_2$  tem como função de densidade:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) f_2(x-s) ds = f_1 \otimes f_2(x) \quad (47)$$

Uma primeira alternativa para a obtenção dos momentos é utilizar a transformada de Fourier, chamada também de função característica, definida como:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx \quad \text{ou} \quad \phi(t) = E[e^{itx}] \quad (48)$$

Utilizando a expansão em série de Maclaurin, tem-se que:

$$e^{itx} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(itx)^r}{r!} \quad (49)$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(itx)^r}{r!} f(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} \eta'_r \end{aligned} \quad (50)$$

onde  $\eta'_r$  é o  $r$ -ésimo momento em torno da origem.

A função  $\phi(t)$  é uma *função geradora de momentos*, i.e.,  $\phi^{(r)}(0) = \eta'_r$ .

Uma característica da função geradora de momentos de  $f$  é que ela é o produto das funções geradoras de momentos de  $f_1$  e  $f_2$ :

$$\phi(t) = E[e^{itx}] = \phi_1(t) \times \phi_2(t) \quad (51)$$

Portanto, para calcular o  $r$ -ésimo momento da variável aleatória  $X$ , temos que calcular a  $r$ -ésima derivada de  $\phi(t)$  e calcular em  $t=0$ . Assim, o primeiro momento de  $f$  se obtém derivando:

$$\phi^{(1)}(t) = \phi_1^{(1)}(t) \times \phi_2(t) + \phi_1(t) \times \phi_2^{(1)}(t) \quad (52)$$

e avaliando no ponto  $t=0$ . Estas contas podem ser complicadas e ineficientes computacionalmente.

### II.5.3.6 Cálculo dos cumulantes

Uma alternativa mais eficiente para resolver este problema é utilizar a seguinte função:

$$K(t) = \log \phi(t) \quad (53)$$

ou:

$$\phi(t) = e^{K(t)} \quad (54)$$

onde  $K(t)$  é chamada de *função geradora de cumulantes*:

$$K(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{r!} k_r \quad (55)$$

onde  $k_r = K^{(r)}(0)$  é chamado o *cumulante de ordem r*.

Na soma de duas variáveis aleatórias a função geradora resultante é:

$$\begin{aligned} K(t) &= \log \phi(t) \\ &= \log (\phi_1(t) \times \phi_2(t)) \\ &= \log \phi_1(t) + \log \phi_2(t) \\ &= K_1(t) + K_2(t) \end{aligned} \quad (56)$$

Se observa que os cumulantes associados à função  $f$  são obtidos facilmente somando os cumulantes associados às funções  $f_1$  e  $f_2$ . Com efeito, o  $r$ -ésimo cumulante é obtido avaliando no ponto  $t = 0$  a  $r$ -ésima derivada da função geradora de cumulantes  $K(t)$ . Assim:

$$k_r = K^{(r)}(0) = K_1^{(r)}(0) + K_2^{(r)}(0) \quad (57)$$

É possível obter os momentos em torno da origem em função dos cumulantes e vice-versa. Igualando as expressões (50) e (54), resulta que:

$$\exp(itk_1 + \frac{(it)^2}{2!}k_2 + \frac{(it)^3}{3!}k_3 + \dots) = 1 + it\eta'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\eta'_2 + \frac{(it)^3}{3!}\eta'_3 + \dots \quad (58)$$

Expandindo o termo da esquerda em séries de Maclaurin:

$$\begin{aligned} 1 + (itk_1 + \frac{(it)^2}{2!}k_2 + \dots) + \frac{1}{2!}(itk_1 + \frac{(it)^2}{2!}k_2 + \dots)^2 + \dots \\ = 1 + it\eta'_1 + \frac{(it)^2}{2!}\eta'_2 + \dots \end{aligned} \quad (59)$$

Igualando os coeficientes das potências de  $it$  e utilizando as relações entre os momentos em torno da origem e os momentos centrais:

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \eta'_2 - \eta_1'^2 \\ \eta_3 &= \eta'_3 - 3\eta_1'\eta_2' + 2\eta_1'^3 \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (60)$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}\eta'_1 &= k_1 \\ \eta_2 &= k_2 \\ \eta_3 &= k_3 \\ \eta_4 &= k_4 + 3k_2^2 \\ \eta_5 &= k_5 + 10k_3k_2 \\ \eta_6 &= k_6 + 15k_4k_2 + 10k_3^2 + 15k_2^3\end{aligned}\tag{61}$$

Da mesma maneira os cumulantes podem ser expressos em função dos momentos centrais:

$$\begin{aligned}k_1 &= \eta'_1 \\ k_2 &= \eta_2 \\ k_3 &= \eta_3 \\ k_4 &= \eta_4 - 3\eta_2^2 \\ k_5 &= \eta_5 - 10\eta_3\eta_2 \\ k_6 &= \eta_6 - 15\eta_4\eta_2 - 10\eta_3^2 + 30\eta_2^3\end{aligned}\tag{62}$$

### II.5.3.7 Coeficientes da expansão em séries de normais em termos dos cumulantes

Em termos dos cumulantes:

$$c_3 = -\frac{k_3}{\sigma^3}\tag{63}$$

$$\begin{aligned}c_4 &= \frac{1}{\sigma^4} (k_4 + 3k_3^2) - 3 \\ &= \frac{k_4}{\sigma^4} + 3\frac{k_3^2}{\sigma^4} - 3\end{aligned}\tag{64}$$

e como  $\frac{k_2}{\sigma^2} = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = \mu_2 = 1$ , então:

$$c_4 = \frac{k_4}{\sigma^4}.$$

$$\begin{aligned}
c_5 &= -\frac{k_5 + 10k_3k_2}{\sigma^5} + 10\frac{k_3}{\sigma^3} \\
&= -\frac{k_5}{\sigma^5} - 10\frac{k_3k_2}{\sigma^3\sigma^2} + \frac{k_3}{\sigma^3} \\
&= -\frac{k_5}{\sigma^5}
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
c_6 &= \frac{k_6 + 15k_4k_2 + 10k_3^2 + 15k_2^3}{\sigma^6} - 15\frac{k_4 + 3k_2^2}{\sigma^4} + 30 \\
&= \frac{k_6 + 10k_3^2}{\sigma^6}
\end{aligned} \tag{66}$$

Portanto a aproximação (34) é dada por:

$$f(x) = n(x) + \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_i(x) n(x) \tag{67}$$

onde cada  $c_i$  é calculado em termos dos cumulantes.

### II.5.3.8 Cálculo da LOLP

Seja  $d$  a demanda padronizada. Como visto no ítem II.5.1 a probabilidade de perda de carga (LOLP) é definida como:

$$\text{LOLP}(d) = \int_{-\infty}^d f(x) dx \tag{68}$$

Substituindo  $f(x)$  por sua expansão em séries de normais

$$\begin{aligned}
\text{LOLP}(d) &= \int_{-\infty}^d \left[ n(x) + \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_i(x) n(x) \right] dx \\
&= N(d) + \sum_{i=3}^6 \frac{c_i}{i!} \left[ \int_{-\infty}^d (-1)^i h_i(x) n(x) dx \right] \\
&= N(d) + \sum_{i=3}^6 \frac{c_i}{i!} \left[ \int_{-\infty}^d n^{(i)}(x) dx \right] \\
&= N(d) + \sum_{i=3}^6 \frac{c_i}{i!} n^{i-1}(d) \\
&= N(d) + \sum_{i=3}^6 \frac{c_i}{i!} (-1)^{i-1} h_{i-1}(d) n(d)
\end{aligned}$$

$$= N(d) - \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_{i-1}(d) n(d) \quad (69)$$

onde  $N(x)$  é a acumulada da função de densidade normal.

### II.5.3.9 Cálculo da EENS

Como visto em (19) a LOLP é a derivada da EENS com respeito à demanda. Portanto, a EENS satisfaz a seguinte relação:

$$\text{EENS}(d) = \int_{-\infty}^d \text{LOLP}(x) dx \quad (70)$$

Integrando esta expressão, temos:

$$\text{EENS}(d) = \int_{-\infty}^d \left[ N(x) - \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_{i-1}(x) n(x) \right] dx \quad (71)$$

Integrando por partes a primeira parcela temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^d N(x) dx &= dN(d) - \int_{-\infty}^d x n(x) dx \\ &= dN(d) - \int_{-\infty}^d x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= dN(d) - \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2} \right) \\ &= dN(d) + n(d) \end{aligned} \quad (72)$$

Integrando a segunda parcela temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^d \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_{i-1}(x) n(x) dx &= \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i \left[ \int_{-\infty}^d (-1)^{i-1} h_{i-1}(x) n(x) dx \right] \\ &= \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i \left[ \int_{-\infty}^d n^{i-1}(x) dx \right] \\ &= \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i n^{i-2}(d) \\ &= \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i (-1)^{i-2} h_{i-2}(d) n(d) \end{aligned}$$



$$= - \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_{i-2}(d) n(d) \quad (73)$$

Portanto,

$$\text{EENS}(d) = dN(d) + n(d) \left[ 1 + \sum_{i=3}^6 \frac{(-1)^i}{i!} c_i h_{i-2}(d) \right] \quad (74)$$

## Capítulo III. Despacho probabilístico - sistemas hidrotérmicos

### III.1. Introdução

Neste capítulo formulamos o problema de despacho hidrotérmico de um estágio e discutimos as dificuldades de aplicar diretamente a técnica de Balériaux apresentada no capítulo anterior. Apresentamos uma metodologia baseada em decomposição de Dantzig-Wolfe [41] que permite a solução deste problema de forma eficiente utilizando a técnica de despacho probabilístico (DP) como um submódulo. A aplicação da metodologia será ilustrada com exemplos derivados de sistemas reais.

### III.2. Despacho probabilístico - uma hidroelétrica

#### III.2.1 Formulação do problema

Vamos considerar agora um sistema composto de  $I$  geradores térmicos e uma usina hidroelétrica, cuja produção de energia está limitada a um valor máximo  $E$ . Esta restrição representa, por exemplo, um limite na água disponível para geração e pode ser escritas em termos matemáticos como:

$$\sum_{j=1}^J q_j h_{jk} \leq E \quad k = 1, \dots, K \quad (1)$$

onde  $k$  indexa os cenários de capacidade e  $j$  indexa os patamares de demanda. O problema de despacho resulta:

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \quad (2)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad (2.1)$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad (2.2)$$

$$0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \quad (2.3)$$

$$\sum_{j=1}^J q_j h_{jk} \leq E \quad k = 1, \dots, K \quad (2.4)$$

onde:  $i$  indexa as usinas térmicas ( $I$  número de usinas térmicas)  
 $j$  indexa os patamares de demanda ( $J$  número de patamares de demanda)  
 $k$  indexa os cenários de capacidade ( $K$  número de cenários de capacidade)  
 $p_k$  probabilidade do cenário  $k$   
 $q_j$  duração do patamar de demanda  $j$   
 $c_i$  custo de operação unitário da usina térmica  $i$   
 $g_{ijk}$  geração da usina térmica  $i$  no patamar de demanda  $j$ , cenário  $k$

$c_\delta$	penalidade pelo não atendimento à demanda
$\delta_{jk}$	deficit no atendimento à demanda no patamar $j$ , cenário $k$
$d_j$	demanda no patamar $j$
$\bar{g}_{ik}$	capacidade de geração da térmica $i$ , cenário $k$
$h_{jk}$	geração da hidroelétrica no patamar de demanda $j$ , cenário $k$
$E$	meta energética da hidroelétrica
$\bar{h}$	capacidade de geração da hidroelétrica

As restrições (2.1) a (2.3) representam respectivamente o balanço de carga do sistema e os limites de capacidade para as usinas térmicas e hidroelétricas. A restrição (2.4) indica que a energia gerada pela hidroelétrica em cada cenário não deve exceder o limite de energia  $E$ .

Este problema não pode ser resolvido diretamente utilizando a técnica de Balériaux descrita no capítulo anterior. A razão principal é que o esquema de Balériaux se baseia no fato que a ordem de carregamento dos geradores *independe* do cenário de capacidade, isto é, os geradores são sempre carregados na mesma ordem. No entanto para atender a meta energética, o gerador hidro deveria ser carregado em ordens *diferentes* para cada cenário de capacidade.

Neste trabalho se apresenta uma metodologia para resolver uma formulação deste problema que consiste em substituir as  $K$  restrições acima pela seguinte restrição:

$$\sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{jk} \leq E \quad (3)$$

Esta restrição exige que a meta energética seja atendida “em média” com respeito aos cenários. Isto significa que nos cenários em que houve falha substancial dos equipamentos térmicos seria utilizado o recurso hídrico com mais intensidade, compensando-se este “excesso” nos cenários de ampla disponibilidade térmica. Como discutido em [1] esta representação reflete as ações do operador de maneira mais realista do que supor um limite fixo do recurso hídrico independente do cenário.

Desta maneira, o problema do DP para um sistema composto de uma usina hidroelétrica e  $I$  geradores térmicos é:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) & (4) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j & j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \\ & 0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} & i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \\ & 0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} & j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \\ & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{jk} \leq E \end{aligned}$$

### III.2.2 Algoritmo tradicional de solução

Como comentado anteriormente, o número total de cenários de capacidade térmica aumenta exponencialmente com o número de usinas. Portanto, o problema (4) pode ter uma dimensão extremamente elevada, o que impede sua solução por métodos tradicionais de programação linear.

Entretanto podemos usar o método de Balériaux para resolver este problema de maneira eficiente através do seguinte procedimento [19]:

- resolva o problema de DP utilizando o método de Balériaux retirando a hidroelétrica da ordem de carregamento,  $\{T_1, T_2, \dots, T_I\}$ . Calcule a energia média produzida por cada gerador e o custo esperado de operação do sistema.
- resolva novamente o problema de DP utilizando o método de Balériaux, agora com a hidroelétrica na *primeira* posição da ordem de carregamento, como se ela fosse o gerador de menor custo, isto é,  $\{H, T_1, T_2, \dots, T_I\}$ . Calcule a energia média produzida por cada gerador e o custo esperado de operação correspondente. A Figura 3.1 ilustra os passos (a) e (b).

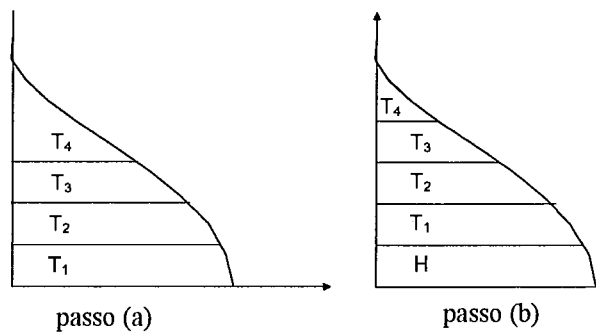


Figura 3.1 - Posições da Hidroelétrica na Ordem de Carregamento

- coloque as gerações hidroelétricas médias obtidas nos passos (a) e (b) e os respectivos custos de operação do sistema como pontos extremos de um gráfico de *custo de operação*  $\times$  *energia hidroelétrica*, como mostra a Figura 3.2.



Figura 3.2 - Pontos Extremos da Curva de Custo  $\times$  Energia Hidroelétrica

- d) calcule os custos de operação associados aos pontos intermediários de geração hidroelétrica, isto é, às posições intermediárias na ordem de carregamento, por exemplo  $\{T_1, H, T_2, \dots, T_4\}$ . Observe que *não* é necessário executar rodadas adicionais de DP. A geração média de  $T_1$  vem do DP executado no passo (a), no qual a hidroelétrica era a última na ordem de carregamento. A razão é que a geração esperada de uma usina *não* depende de quais usinas vem *depois* na ordem de carregamento. Por sua vez, a geração média das demais usinas térmicas  $\{T_2, \dots, T_4\}$  vem do DP do passo (b). A razão é que a geração média de uma dada usina não depende da *ordem* em que as usinas *anteriores* foram carregadas. Finalmente, a geração hidroelétrica média é calculada como a *diferença* entre a demanda esperada e a geração térmica esperada. A Figura 3.3 ilustra a execução do passo (d).

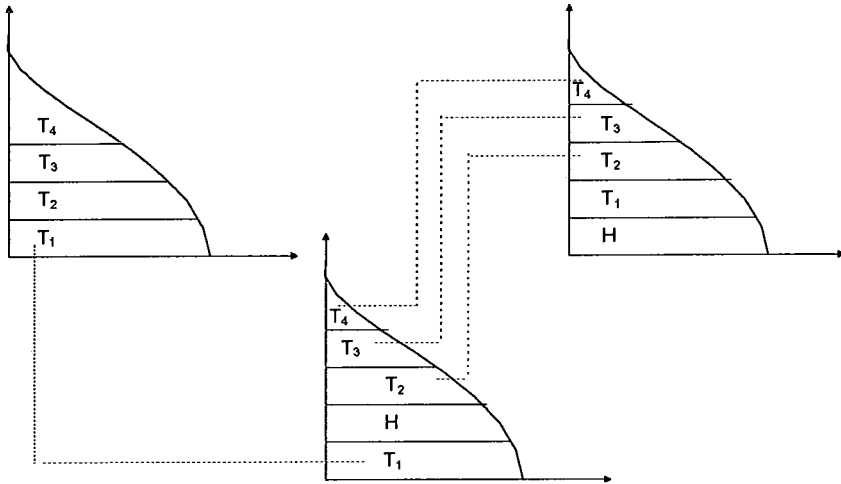


Figura 3.3 - Pontos Intermediários na Curva Custo x Energia Hidroelétrica

- e) coloque os pontos intermediários calculados no passo (d) no gráfico de custo x energia hidroelétrica como ilustrado na Figura 3.4.

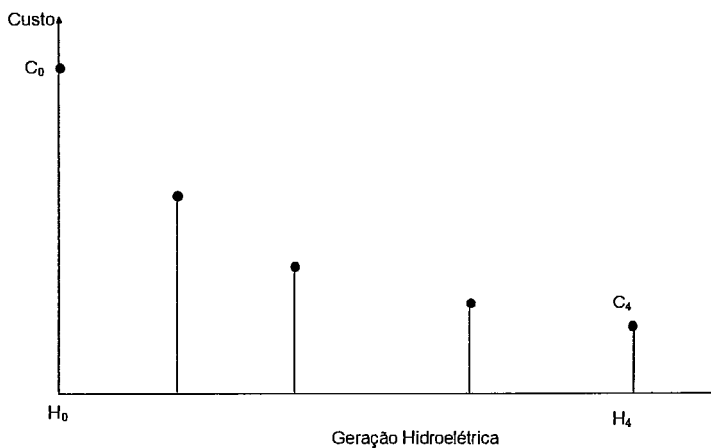


Figura 3.4 - Pontos da Curva de Custo x Energia Hidroelétrica

Será demonstrado mais adiante que esta curva é linear por partes, i.e. o custo de uma meta de energia intermediária entre dois pontos é a combinação linear dos custos associados a estes pontos, como mostrado na Figura 3.5.

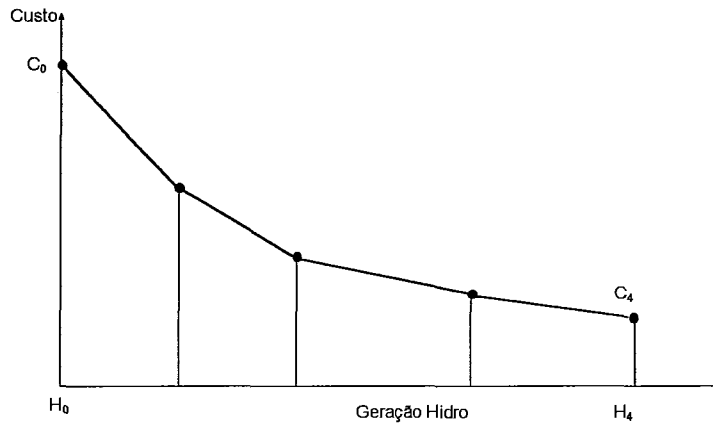


Figura 3.5- Curva de Custo x Energia Hidroelétrica

A interpretação intuitiva é que para atender uma meta de energia  $E$  dada por:

$$E = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 \tag{5}$$

com  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , o sistema opera  $(\lambda_1 \times 100)\%$  do tempo gerando  $H_1$  e  $(\lambda_2 \times 100)\%$  do tempo gerando  $H_2$ . A curva resultante permite a determinação do valor esperado do custo de operação associado a qualquer nível de geração hidroelétrica.

### III.2.3 Exemplo

Vamos considerar o mesmo exemplo do item II.4 e adicionar ao sistema uma hidroelétrica  $H$  cuja capacidade de geração é 300 MW, com um limite de energia de 200 MWh.

**Iteração 1** - Resolver o DP supondo que  $H$  é carregada na primeira posição:

Tabela 3.1 Solução do problema de despacho probabilístico - Iteração 1

Gerador	E[Geração]	E[Custo de Operação]
H	300	0
T1	160	800
T2	27	270
Deficit	13	1300
Total	500	2370

**Iteração 2** - Resolver o DP considerando que  $H$  não é carregada:

Tabela 3.2 Solução do problema de despacho probabilístico - Iteração 2

Gerador	E[Geração]	E[Custo de Operação]
T1	360	1800
T2	72	720
Deficit	68	6800
H	0	0
Total	500	9320

**Iteração 3** - Combinar as Tabelas 3.1 e 3.2 para obter o resultado equivalente a um DP com a hidroelétrica na segunda posição

**Tabela 3.3 Solução do problema de despacho probabilístico - Iteração 3**

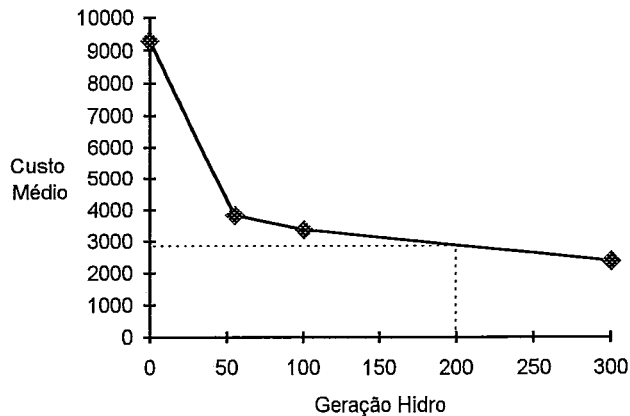
Usina	E[Geração]	E[Custo de Operação]	Origem
T1	360	1800	iteração 2
H	100	0	por diferença
T2	27	270	iteração 1
Deficit	13	1300	iteração 1
Total	500	3370	

**Iteração 4**- Combinar as Tabelas 3.1 e 3.2 para obter o resultado equivalente a um DP com a hidroelétrica na terceira - e última posição

**Tabela 3.4 Solução do problema de despacho probabilístico - Iteração 4**

Usina	E[Geração]	E[Custo de Operação]	Origem
T1	360	1800	iteração 2
T2	72	720	iteração 2
H	55	0	por diferença
Deficit	13	1300	iteração 1
Total	500	3820	

A Figura 3.6 mostra a curva de custo operativo em função da geração hidroelétrica.



**Figura 3.6 - Curva de Custo Operativo**

O custo associado à meta hidroelétrica (200 MWh) é obtido por interpolação linear, e é igual a \$ 2870.

### III.3 Despacho probabilístico - múltiplas hidroelétricas

#### III.3.1 Formulação do problema

O problema do DP para um sistema composto por  $N$  usinas hidroelétricas e  $I$  unidades térmicas é:

$$\text{Min} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) \quad (6)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijk} + \sum_{n=1}^N h_{nj} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq h_{nj} \leq \bar{h}_n \quad n = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{nj} \leq E_n \quad n = 1, \dots, N$$

- onde:
- $n$  indexa as usinas hidroelétricas ( $N$  número de usinas hidroelétricas)
  - $i$  indexa as usinas térmicas ( $I$  número de usinas térmicas)
  - $j$  indexa os patamares de demanda ( $J$  número de patamares de demanda)
  - $k$  indexa os cenários de capacidade ( $K$  número de cenários de capacidade)
  - $p_k$  probabilidade do cenário  $k$
  - $q_j$  duração do patamar de demanda  $j$
  - $c_i$  custo de operação unitário da usina térmica  $i$
  - $g_{ijk}$  geração da usina térmica  $i$  no patamar de demanda  $j$ , cenário  $k$
  - $c_\delta$  penalidade pelo não atendimento à demanda
  - $\delta_{jk}$  deficit no atendimento à demanda no patamar  $j$ , cenário  $k$
  - $d_j$  demanda no patamar  $j$
  - $\bar{g}_{ik}$  capacidade de geração da térmica  $i$ , cenário  $k$
  - $h_{nj}$  geração da hidroelétrica  $n$  no patamar de demanda  $j$ , cenário  $k$
  - $E_n$  meta energética da hidroelétrica  $n$
  - $\bar{h}_n$  capacidade de geração da hidroelétrica  $n$



### III.3.2 Limitações do algoritmo tradicional

Em princípio, o mesmo procedimento da seção anterior pode ser aplicado para construir uma curva  $N$ -dimensional de custo  $\times$  geração hidroelétrica. Observe, no entanto, que a curva agora depende da geração de *cada uma* das  $N$  usinas hidroelétricas. Portanto, seria necessário executar rodadas de DP para todas as  $2^N$  combinações de usinas hidroelétricas na base e no topo da ordem de carregamento, e calcular os pontos de interseção dos hiperplanos resultantes das combinações dos pontos intermediários. Em outras palavras o custo computacional deste procedimento aumenta exponencialmente com o número de usinas hidroelétricas.

## III.4 Metodologia proposta

### III.4.1 Idéia básica

Por simplicidade de notação vamos apresentar a metodologia proposta para o caso de uma única hidroelétrica e depois apresentaremos a extensão para o caso de  $N$  hidroelétricas.

O problema (4) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} z = & \quad \text{Min} \quad z(e) & (7) \\ \text{s.a} & \quad e \leq E \end{aligned}$$

onde  $e$  é a geração hidroelétrica média, e  $z(e)$  é o custo de operação correspondente:

$$\begin{aligned} z(e) = \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) & (8) \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j & j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \\ & 0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} & i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \\ & 0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} & j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \\ & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{jk} = e \end{aligned}$$

Por teoria de programação linear sabemos que  $z(e)$  é uma função linear por partes com respeito ao termo independente  $e$ . Portanto a função  $z(e)$  pode ser escrita como uma combinação convexa de seus pontos de quebra. O problema (7) é reformulado como:

$$\begin{aligned}
z = & \text{Min} && \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] && (9) \\
\text{s.a:} & && \sum_{p=1}^P \lambda_p [e^p] \leq E \\
& && \sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 \\
& && \lambda_p \geq 0 && p = 1, \dots, P
\end{aligned}$$

onde  $p$  indexa os pontos de quebra ou vértices,  $P$  é o número de pontos de quebra, e os valores  $[z^p, e^p]$  correspondem ao  $p$ -ésimo ponto de quebra na função de custo  $\times$  energia hidroelétrica. As variáveis de decisão  $\lambda_p$  representam a combinação convexa dos pontos de quebra  $[z^p, e^p]$ .

Como mencionado anteriormente, o número de pontos de quebra  $P$  é potencialmente muito grande no caso de várias usinas hidroelétricas. A solução proposta é *gerar somente* a parte da superfície linear por partes correspondente às metas de geração, através de um esquema de decomposição de Dantzig-Wolfe [20], descrito a seguir.

### III.4.2 Algoritmo proposto

#### III.4.2.1 Esquema de decomposição Dantzig-Wolfe

O algoritmo de Dantzig-Wolfe é uma técnica de gerar colunas a entrar na base conforme elas são requeridas. Este procedimento decompõe o problema em dois subproblemas, como ilustrado na Figura 3.7. O *problema mestre* representa as restrições de acoplamento (limites de geração hidroelétrica, no caso atual), e envia "preços" aos subproblemas, que correspondem ao custo marginal de utilização dos recursos limitados. O *subproblema* utiliza estes preços para minimizar os custos operativos (determinar a ordem de carregamento das usinas, no caso atual), e devolve uma nova coluna (produção energética) ao problema mestre.

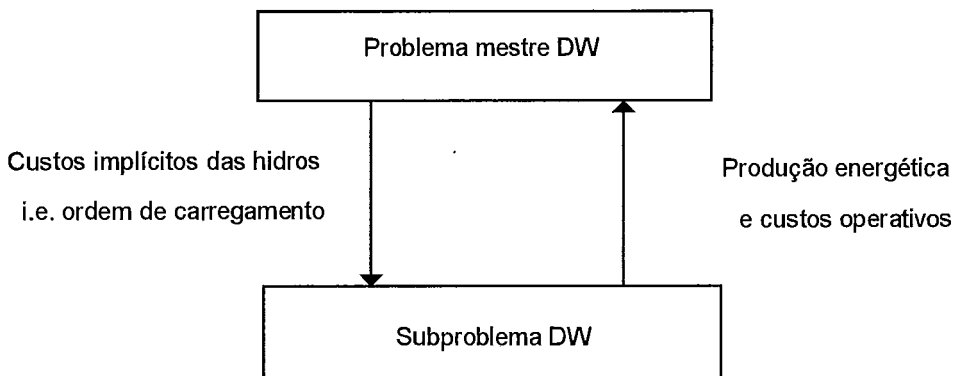


Figura 3.7 - Decomposição de Dantzig-Wolfe

### III.4.2.2 Cálculo dos custos reduzidos

Reescrevendo (9) no formato padrão, tem-se:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Mín} & \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] \\
 \text{s.a} & - \sum_{p=1}^P \lambda_p [e^p] \geq -E \\
 & \sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 \\
 & \lambda_p \geq 0 \quad p = 1, \dots, P
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{Multiplicador Simplex} \\
 \pi \\
 \mu
 \end{array}
 \quad (10)$$

Associado à solução ótima do problema (10) existe um conjunto de variáveis duais que medem a variação do valor da função objetivo com relação a perturbações no lado direito das restrições. Estas variáveis serão utilizadas tanto no algoritmo de decomposição como no cálculo dos custos marginais de demanda descritos no capítulo IV.

Da teoria de programação linear [20,41], sabe-se que para determinar a variável a entrar na base ou para verificar a otimalidade da base atual é preciso calcular os custos reduzidos das variáveis não básicas. O custo reduzido da variável  $\lambda_p$  é:

$$\bar{c}_p = [z^p] - \pi \times (-[e^p]) - \mu \times 1 \quad (11)$$

Se calculamos o menor destes custos reduzidos e este valor for negativo então a variável correspondente é uma boa candidata a entrar na base. Se este valor for igual a zero, está comprovada a otimalidade da base atual. O custo reduzido mais negativo é determinado como a solução de:

$$\bar{c}_{\min} = \text{Mín}_e \{ z(e) + \pi \times e - \mu \} \quad (12)$$

Substituindo a expressão para  $z(e)$  em (8) na expressão (12), obtém-se:

$$\bar{c}_{\min} = \text{Mín} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} \right) + \pi \times e - \mu \quad (13.1)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad (13.2)$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \quad (13.3)$$

$$0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \quad (13.4)$$

$$\sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{jk} = e \quad (13.5)$$

Substituindo o valor de  $e$  na função objetivo pela igualdade (13.5), tem-se:

$$\bar{c}_{\min} = \text{Min} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + \pi \times h_{jk} \right) - \mu \quad (14)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K$$

O problema (14) é o conhecido como o subproblema da decomposição de Dantzig-Wolfe e tem como objetivo obter o menor custo reduzido. Se observa que ele corresponde a um problema de DP onde a usina hidroelétrica tem um custo operativo  $\pi$ . Como visto anteriormente, este problema pode ser resolvido pelo procedimento Balériaux.

### III.4.2.3 Condição de otimalidade

Há duas alternativas de solução do subproblema de Dantzig-Wolfe (14):

- ♦ Se  $\bar{c}_{\min} \geq 0 \Rightarrow$  a solução ótima foi encontrada;
- ♦ Se  $\bar{c}_{\min} < 0 \Rightarrow$  uma nova coluna  $[z^p, e^p]$  será enviada ao problema mestre de Dantzig-Wolfe, a partir da solução do subproblema (14).

### III.4.3 Passos do algoritmo

- a) Inicialize  $P = 1$ , e resolva o DP (14) com a usina hidroelétrica na primeira posição da ordem de carregamento; calcule  $[z^1]$  e  $[e^1]$ .
- b) Resolva o problema mestre de Dantzig-Wolfe utilizando técnicas de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] + \gamma \sigma & \text{Multiplicador Simplex} & (15) \\ \text{s.a} & \sum_{p=1}^P \lambda_p [e^p] - \sigma \leq E & \pi & \\ & \sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 & \mu & \\ & \lambda_p \geq 0 & p = 1, \dots, P & \end{array}$$

onde  $\sigma$  é uma variável artificial que assegura a viabilidade matemática da restrição de meta energética. O custo de penalização  $\gamma$  é elevado.

- c) Seja  $\pi$  o multiplicador simplex associado à restrição de energia na solução ótima de (15); atribua este valor ao custo operativo da hidroelétrica, e obtenha uma nova ordem de carregamento; resolva o sub-problema de Dantzig-Wolfe (14) através do esquema Balériaux, e calcule  $\bar{c}_{\min}$ .

- d) Se  $\bar{c}_{\min} = 0$ , então a solução ótima foi encontrada.  
 Caso contrário, faça  $P \leftarrow P + 1$ ; sejam  $[z^p]$  e  $[e^p]$  o custo de operação e a geração hidroelétrica resultantes da solução de (14) no passo (c); adicione a nova coluna ao problema mestre (15); vá para o passo (b)

### III.4.4 Extensão para Múltiplas Usinas Hidroelétricas

No caso de  $N$  usinas hidroelétricas, o problema mestre de Dantzig-Wolfe é:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] + \gamma \sum_{n=1}^N \sigma_n & \text{Multiplicador Simplex} & (16) \\
 \text{s.a} & \sum_{p=1}^P \lambda_p [e_n^p] - \sigma_n \leq E_n & \pi_n & n = 1, \dots, N \\
 & \sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 & \mu & \\
 & \lambda_p \geq 0 & & p = 1, \dots, P
 \end{array}$$

onde  $E_n$  é a meta energética associada à  $n$ -ésima hidroelétrica,  $[e_n^p]$  é a geração média da usina  $n$  no  $p$ -ésimo ponto de quebra e  $\sigma_n$  é uma variável artificial que assegura a viabilidade matemática da restrição de meta energética da usina  $n$ .

O subproblema de Dantzig-Wolfe é:

$$\begin{array}{ll}
 \bar{c}_{\min} = \text{Min} & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + \sum_{n=1}^N \pi_n h_{njc} \right) - \mu & (17) \\
 \text{s.a} & \sum_{i=1}^I g_{ijk} + \sum_{n=1}^N h_{njc} + \delta_{jk} = d_j & j = 1, \dots, J & k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} & i = 1, \dots, I & j = 1, \dots, J & k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq h_{njc} \leq \bar{h}_n & n = 1, \dots, N & j = 1, \dots, J, & k = 1, \dots, K
 \end{array}$$

O problema (17) também é um DP, no qual as  $N$  hidro tem custos  $\{\pi_n, n = 1, \dots, N\}$ .

### III.4.5 Exemplo 1 - uma hidroelétrica

Vamos agora resolver o mesmo problema do item III.2.3 utilizando a metodologia proposta.

### Iteração 1

*Sub-problema* Resolvemos o DP com a hidro na primeira posição. Na solução ótima do DP o custo é \$2370 e H gera 300MWh

*Ponto Gerado*  $(z^1, e^1) = (2370, 300)$

<i>Problema Mestre</i>	Min	$\lambda_1 [z^1] + \gamma \sigma$	Multiplicador Simplex
	s.a	$\lambda_1 [e^1] - \sigma \leq E$	$\pi$
		$\lambda_1 = 1$	$\mu$

*Solução ótima*  $\lambda_1 = 1, \pi = 3000$  e  $\mu = 902\ 370$

### Iteração 2

*Sub-problema* Como o custo implícito da hidro é maior que o custo de déficit, então retiramos a usina H do DP. Na solução ótima do DP o custo é \$ 9320 e H gera 0 MWh

*Ponto gerado*  $(z^2, e^2) = (9320, 0)$

*Verifica otimalidade*  $\bar{c}_{min} = z^2 + \pi \times e^2 - \mu$   
 $= 9320 + 3000 \times 0 - 902\ 370 = - 893\ 050$

Como  $\bar{c}_{min}$  é menor que zero, o processo continua.

<i>Problema mestre</i>	Min	$\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \gamma \sigma$	Multiplicador Simplex
	s.a	$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 - \sigma \leq E$	$\pi$
		$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$	$\mu$
		$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$	

*Solução ótima*  $\lambda_1 = 0.666, \lambda_2 = 0.333, \pi = 23.17$  e  $\mu = 9320$

### Iteração 3

*Sub-problema* Como o custo implícito da hidroelétrica é igual a \$ 23.17 então H é colocada na última posição de carregamento. Na solução ótima do DP o custo é \$ 3820 e H gera 55 MWh.

*Ponto gerado*  $(z^3, e^3) = (3820, 55)$

*Verifica otimalidade*  $\bar{c}_{min} = z^3 + \pi \times e^3 - \mu$   
 $= 3820 + 23.17 \times 55 - 9320 = - 4225.65$

Como  $\bar{c}_{min}$  é menor que zero, o processo continua

<i>Problema mestre</i>	Min	$\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \gamma \sigma$	Multiplicador Simplex
	s.a	$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e^3 - \sigma \leq E$	$\pi$
		$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$	$\mu$
		$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$	

*Solução ótima*  $\lambda_1 = 0.59, \lambda_2 = 0.00, \lambda_3 = 0.41, \pi = 5.92$  e  $\mu = 4145.51$

#### Iteração 4

*Sub-problema* Como o custo implícito da hidro é igual a \$ 5.92 então H é colocada na segunda posição de carregamento, entre as térmicas T<sub>1</sub> e T<sub>2</sub>. Na solução ótima do DP o custo é \$ 3370 e H gera 100 MWh.

*Ponto gerado*  $(z^4, e^4) = (3370, 100)$

*Verifica otimalidade*  $\bar{c}_{min} = z^4 + \pi \times e^4 - \mu$   
 $= 3370 + 5.92 \times 100 - 4145.51 = - 183.51$

Como  $\bar{c}_{min}$  é menor que zero, o processo continua.

<i>Problema mestre</i>	Min	$\lambda_1 z^1 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 z^3 + \lambda_4 z^4 + \gamma \sigma$	Multiplicador Simplex
	s.a	$\lambda_1 e^1 + \lambda_2 e^2 + \lambda_3 e^3 + \lambda_4 e^4 - \sigma \leq E$	$\pi$
		$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$	$\mu$
		$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \geq 0$	

*Solução ótima*  $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0.5, \pi = 5$  e  $\mu = 3870$

#### Iteração 5

*Sub-problema* Como o custo implícito da hidro é igual a \$ 5, H é colocada na segunda posição de carregamento, i.e, repetimos a ordem da iteração anterior e, portanto, repetimos os resultados.

*Ponto gerado*  $(z^5, e^5) = (3370, 100)$

*Verifica otimalidade*  $\bar{c}_{min} = z^5 + \pi \times e^5 - \mu$   
 $= 3370 + 5 \times 100 - 3870 = 0$

Como  $\bar{c}_{min} = 0$ , então a convergência foi obtida.

## Resumo

A seguinte tabela mostra os resultados do processo iterativo:

**Tabela 3.5 Resumo do processo iterativo**

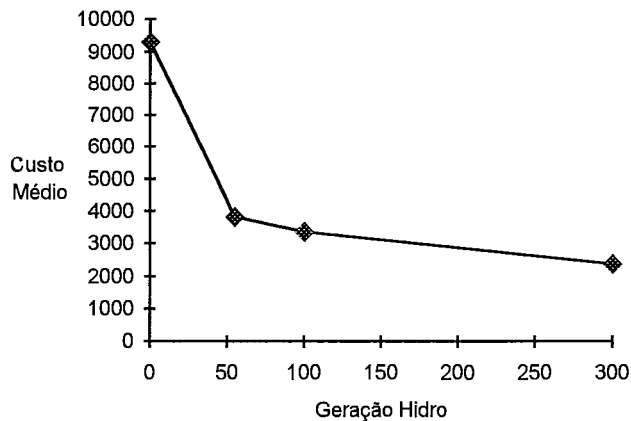
Iter p	Problema Mestre				Despacho Probab.		
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\pi$	$e^P$	$z^P$
1	-	-	-	-	-	300	2370
2	1.00	-	-	-	3000.00	0	9320
3	0.66	0.33	-	-	23.17	55	3820
4	0.59	0.00	0.41	-	5.92	100	3370
5	0.50	0.00	0.00	0.50	5.00	100	3370

A coluna  $\pi$  é o custo implícito da hidroelétrica que serve para determinar a ordem de carregamento no Despacho Probabilístico. A seguinte tabela mostra este processo:

**Tabela 3.6 Ordem de carregamento**

Iteração	Ordem de carregamento	H	E[CO]
1	H T1 T2	300	2370
2	T1 T2	0	9320
3	T1 T2 H	55	3820
4	T1 H T2	100	3370
5	T1 H T2	100	3370

A curva de custo operativo médio versus energia hidroelétrica gerada neste processo é mostrada na figura 3.7.



**Figura 3.7 - Curva de Custo Operativo**

O valor esperado da geração hidroelétrica é dado por:

$$\begin{aligned}
 E[h] &= \sum_{p=1}^4 \lambda_p e^p \\
 &= 0.50 \times 300 + 0.50 \times 100 = 200 \text{ MWh}
 \end{aligned}$$



O valor esperado do custo de operação é dado por:

$$E[CO] = \sum_{p=1}^4 \lambda_p z^p$$

$$= 0.50 \times 2370 + 0.50 \times 3370 = \$ 2870$$

A interpretação intuitiva é que o sistema opera 50% do tempo no ponto (100, 3370) e os outros 50% do tempo no ponto (300, 2370).

Observe que a curva gerada é idêntica à da Figura 3.6, obtida pela aplicação do método tradicional. Isto significa que neste caso foram gerados todos os pontos de quebra da função de custo, e portanto não houve uma vantagem computacional na aplicação da metodologia proposta. Veremos a seguir que para sistemas de maiores dimensões esta vantagem fica evidente.

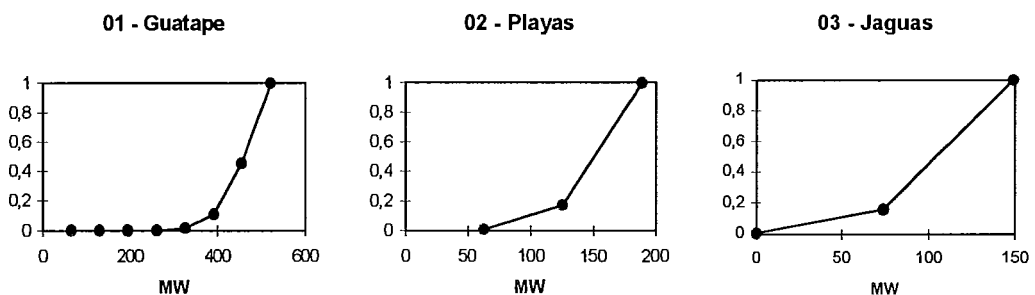
### III.4.6 Exemplo 2 - sistema Colombiano

Esta técnica foi aplicada a um caso real utilizando os dados do sistema Colombiano, composto de 29 usinas hidroelétricas e 50 usinas térmicas. As metas energéticas para cada uma das usinas hidroelétricas se mostram na tabela 3.7. Estas metas representam limites superiores para a energia média produzida no período.

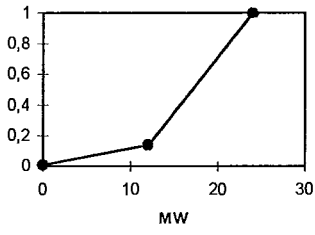
Tabela 3.7 Metas energéticas

Código	Hidroelétrica	Meta Energética (MW-médio)	Código	Hidroelétrica	Meta Energética (MW-médio)
01	Guatape	292.00	16	Colegio	0.00
02	Playas	142.00	17	Altoanchica	170.00
03	Jaguas	38.00	18	Bajoanchica	48.00
04	Calderas	19.00	19	Calima	0.00
05	Troneras	26.00	20	Salvajina	120.00
06	Guadalupe3	136.00	21	Esmeralda	8.00
07	Guadalupe4	136.00	22	Snfrancisco	16.00
08	Riogrande1	7.00	23	Prado	6.00
09	Latasajera	110.00	24	Prado4	4.00
10	Guavio	306.00	25	Florida	13.00
11	Paraiso	175.00	26	Riomayo	11.00
12	Laguaca	206.00	27	Chivor	123.00
13	Canoas	0.00	28	Sancarlos	728.00
14	Salto	0.00	29	Betania	207.00
15	Laguneta	0.00			

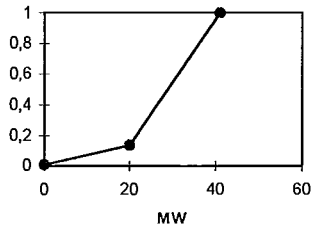
Cada uma das curvas mostrada na Figura 3.8 representa a distribuição de probabilidade acumulada da potência das hidroelétricas.



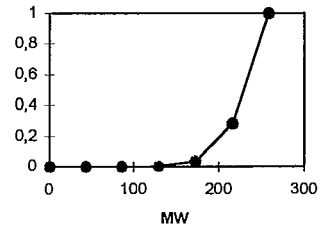
**04 - Calderas**



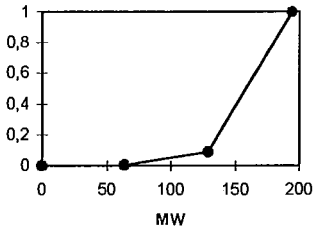
**05 - Troneras**



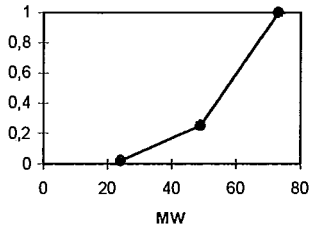
**06 - Guadalupe3**



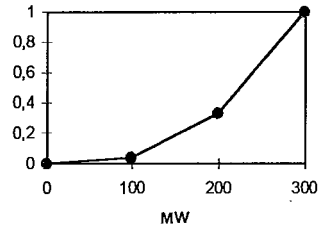
**07 - Guadalupe4**



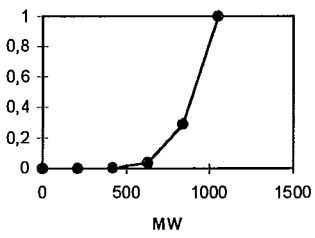
**08 - Riogrande1**



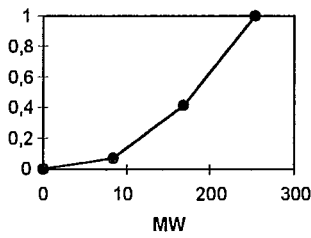
**09 - Latajajera**



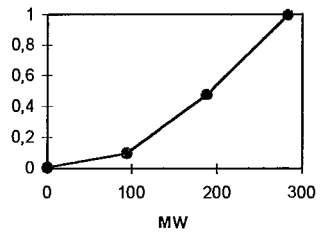
**10 - Guavio**



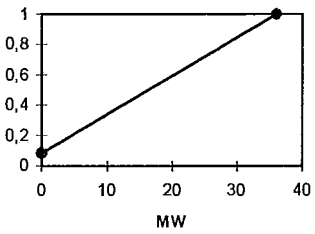
**11 - Paraiso**



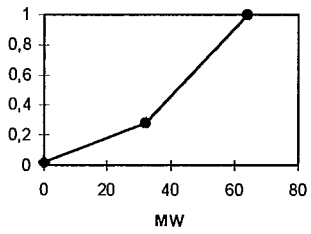
**12 - Laguaca**



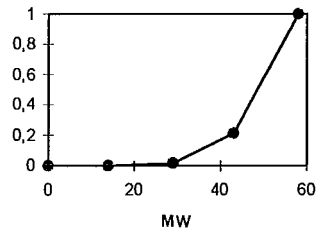
**13 - Canoas**



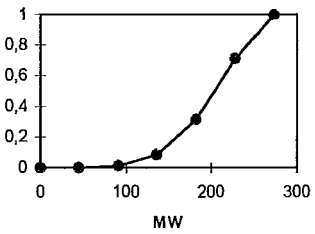
**14 - Salto**



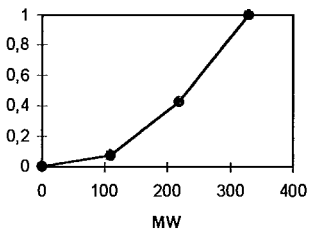
**15 - Laguneta**



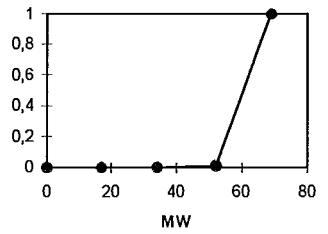
**16 - Colegio**



**17 - Altoanchica**



**18 - Bajoanchica**



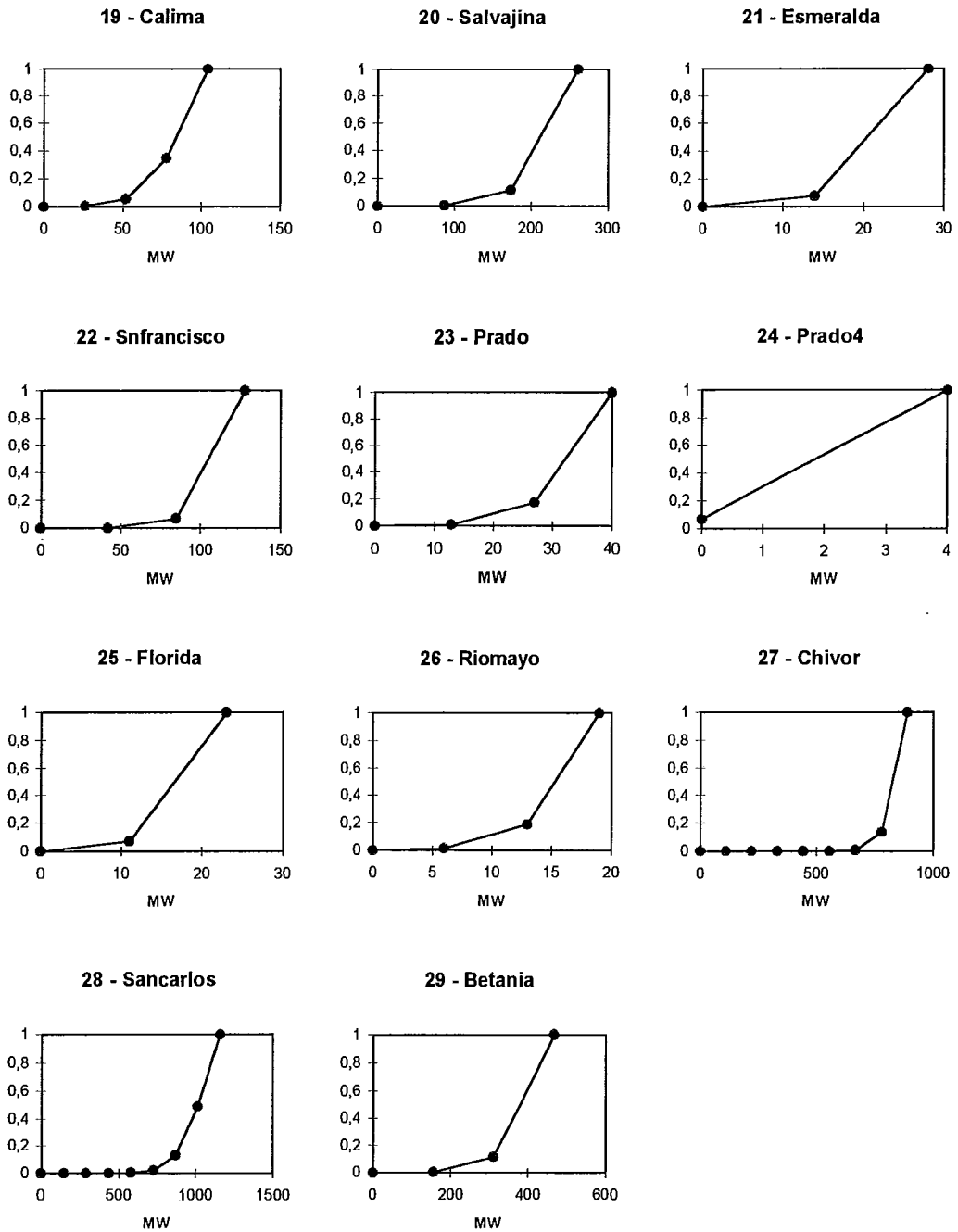


Figura 3.8 Distribuição acumulada da potência instalada das usinas hidroelétricas

Consideramos que a capacidade de geração das usinas térmicas têm uma distribuição de probabilidades de Bernoulli com parâmetro igual à taxa de pane. As características das usinas térmicas estão representadas na seguinte tabela.

Tabela 3.8 Dados dos geradores térmicos

Código	Térmica	Capacidade (MW)	Taxa de pane (%)	Custo (\$/MWh)
1	Paipa1	28.40	42.58	12.92
2	Paipa2	62.00	5.20	10.10
3	Paipa3	68.80	13.88	9.71
4	Palenque3	13.40	17.76	18.68

Tabela 3.8 Dados dos geradores térmicos (continuação)

Código	Térmica	Capacidade (MW)	Taxa de pane (%)	Custo (\$/MWh)
5	Palenque4	12.80	14.17	18.68
6	Barranca1	9.10	34.42	13.69
7	Barranca2	9.40	26.80	13.69
8	Barranca3	65.40	39.14	12.89
9	Barranca4	29.80	29.74	14.40
10	Barranca5	18.40	11.39	13.60
11	Tasajero	135.90	17.14	10.07
12	Zipaeeb3	58.40	11.01	13.54
13	Zipaeeb2	34.00	12.86	13.54
14	Zipaisa4	58.00	25.78	13.01
15	Zipaisa5	61.90	23.57	13.01
16	Elrio6	9.10	31.73	28.24
17	Elrio7	9.00	24.05	28.17
18	Elrio8	12.10	40.39	25.50
19	Launion1	8.30	7.24	28.84
20	Launion2	8.40	11.63	28.65
21	Launion3	7.90	51.40	29.05
22	Barranquill1	44.20	15.39	19.77
23	Barranquill2	47.60	25.33	19.26
24	Barranquill3	53.60	24.36	17.75
25	Barranquill4	57.70	29.34	18.72
26	Cartagena1	63.00	16.76	19.08
27	Cartagena2	49.30	19.02	21.63
28	Cartagena3	55.20	33.00	21.53
29	Ballena1	13.60	33.29	27.85
30	Ballena2	13.80	36.40	27.55
31	Guajira1	149.60	10.68	14.89
32	Guajira2	155.40	13.22	15.11
33	Chinu4	12.50	50.86	21.09
34	Chinu5	26.70	24.64	25.44
35	Chinu6	25.90	10.04	25.62
36	Chinu7	26.90	56.73	25.59
37	Chinu8	24.90	19.62	25.59
38	Dorada	42.50	0.00	21.82
39	Centro	170.00	0.00	20.26
40	Flores1	149.90	7.84	10.85
41	Flores2	97.40	7.84	15.65
42	Mamonal	89.50	10.60	11.45
43	Tebsa1	82.40	0.00	16.12
44	Tebsa2	82.40	0.00	16.12
45	Tebsa3	82.40	0.00	16.12
46	Gualanday	40.40	32.48	12.54
47	Yumbogas	39.20	31.50	19.82
48	Ocoagas	40.20	14.45	10.41
49	Yumbo3	27.00	23.01	18.15
50	Deterministi	110.30	0.00	0.00

A curva de duração da demanda considerada neste estudo tem seis patamares, como se mostra na seguinte figura:

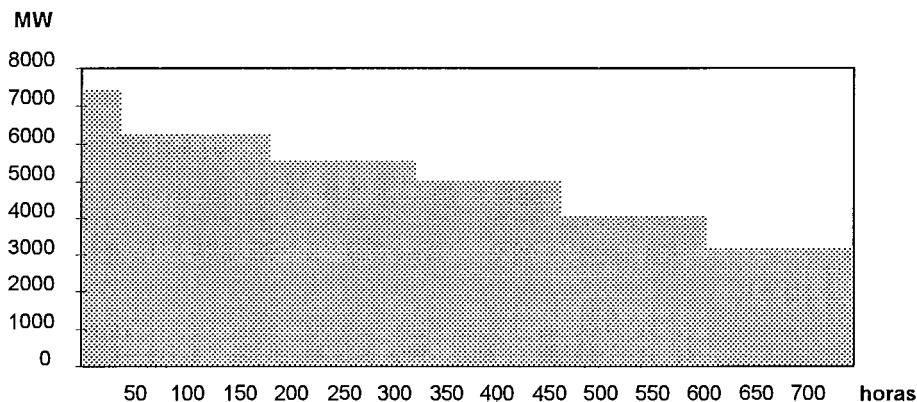


Figura 3.9 Curva de duração da demanda

Os valores das demandas e suas durações percentuais se mostram na tabela a seguir:

Tabela 3.9 Demandas por patamar

Patamar	Demanda (MW)	Duração (%)
1	7393	3
2	6292	19
3	5556	19
4	5037	19
5	4080	19
6	3191	19

Consideramos que o custo pelo não atendimento à demanda é de 307 \$/MWh. A penalidade pelo não atendimento às restrições de meta energética é de 308 \$/MWh.

### III.4.6.1 Solução do problema

Se o sistema é composto de  $T$  usinas térmicas e  $N$  usinas hidroelétricas, o número máximo de pontos de quebra da curva multi-dimensional de custo operativo médio versus geração hidroelétrica é dado por  $(T + 2)^N$ . Neste exemplo, este número é da ordem de  $52^{29} \approx 10^{50}$ , o que obviamente impede o uso do método tradicional. Aplicando o algoritmo proposto a solução é obtida após 114 iterações, isto é foram gerados unicamente 114 pontos de quebra. O processo de convergência se mostra na Figura 3.10 através dos valores de custo reduzido  $\bar{c}_{\min}$  - ver equação (17) - a cada iteração. Observe que no gráfico se mostram os valores absolutos dos custos reduzidos pois na verdade estes são negativos. Para melhor visualizar o processo de convergência, foi utilizada uma escala logarítmica.

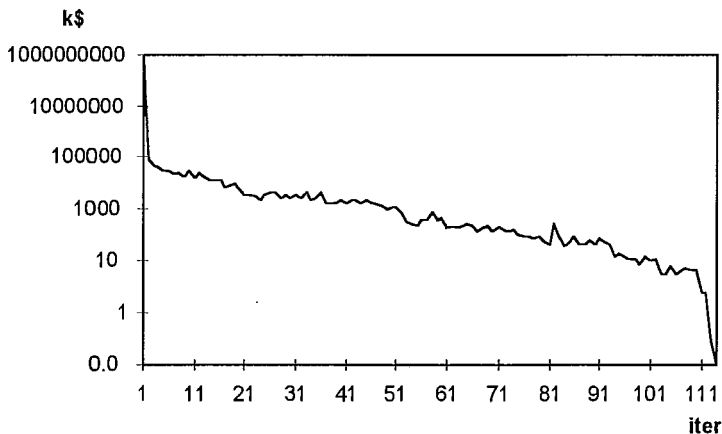


Figura 3.10 Menor custo reduzido x iteração

A figura 3.11 mostra o evolução do valor esperado do custo operativo, das penalidades e do custo total a cada iteração. Nas primeiras iterações o custo operativo é muito baixo pois a solução está violando as restrições de meta energética.

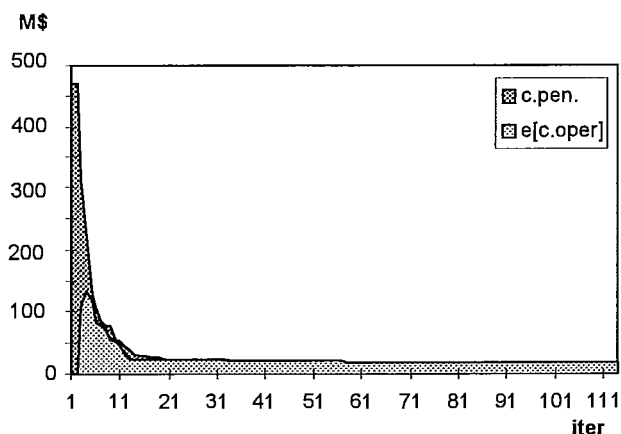


Figura 3.11 Valor esperado do custo operativo x iteração

A solução obtida pelo modelo se apresenta nas Tabela 3.10 e 3.11. A tabela 3.10 apresenta as gerações hidroelétricas para cada patamar de demanda, a geração hidroelétrica média e a meta energética.

Tabela 3.10 Gerações hidro médias por patamar de demanda

Cód	Hidroelétrica	Pat.1	Pat.2	Pat.3	Pat.4	Pat.5	Pat.6	Média	Meta
								MW-médio	MW-médio
1	Guatape	483.85	434.72	359.33	303.18	201.25	128.25	292.00	292.00
2	Playas	162.90	160.06	154.68	143.52	134.67	113.45	142.00	142.00
3	Jaguas	59.69	46.72	43.02	41.57	39.14	15.79	38.00	38.00
4	Calderas	19.04	19.00	19.00	19.00	19.00	19.00	19.00	19.00
5	Troneras	28.58	27.18	26.53	26.51	25.87	23.46	26.00	26.00
6	Guadalupe3	234.55	179.93	155.13	140.58	104.34	82.91	136.00	136.00
7	Guadalupe4	174.52	162.84	160.90	146.29	104.77	98.51	136.00	136.00
8	Riogrande1	30.12	12.06	5.54	4.49	4.47	4.42	7.00	7.00
9	Latasajera	195.20	129.12	111.98	111.66	103.39	79.04	110.00	110.00
10	Guavio	969.44	689.04	323.38	203.76	162.10	36.60	306.00	306.00
11	Paraiso	209.78	201.32	184.83	177.40	163.55	141.87	175.00	175.00
12	Laguaca	218.55	213.23	213.21	213.21	213.21	174.96	206.00	206.00
13	Canoas	0	0	0	0	0	0	0	0
14	Salto	0	0	0	0	0	0	0	0
15	Laguneta	0.01	0	0	0	0	0	0	0
16	Colegio	0.01	0	0	0	0	0	0	0
17	Altoanchica	253.64	204.37	192.86	175.93	160.62	101.69	170.00	170.00
18	Bajoanchica	54.27	52.09	50.60	47.34	45.61	43.27	48.00	48.00
19	Calima	0	0	0	0	0	0	0	0
20	Salvajina	154.18	137.18	133.37	132.28	101.52	89.73	120.00	120.00
21	Esmeralda	8.51	7.98	7.98	7.98	7.98	7.98	8.00	8.00
22	Snfrancisco	27.42	22.53	21.93	14.77	9.40	9.40	16.00	16.00
23	Prado	6.20	5.99	5.99	5.99	5.99	5.99	6.00	6.00
24	Prado4	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	4.00
25	Florida	13.29	13.22	13.22	13.09	12.72	12.72	13.00	13.00
26	Riomayo	11.33	11.04	10.98	10.98	10.98	10.98	11.00	11.00
27	Chivor	644.22	245.38	181.90	88.28	8.85	0.06	123.00	123.00
28	Sancarlos	1067.20	1065.74	1045.72	944.35	436.12	89.28	728.00	728.00
29	Betania	440.79	359.82	251.45	186.54	143.07	53.56	207.00	207.00
<b>Total Hidro</b>		<b>5471.03</b>	<b>4404.3</b>	<b>3677.27</b>	<b>3162.44</b>	<b>2222.36</b>	<b>1346.66</b>	<b>3046.74</b>	

Pode-se observar que as gerações médias das hidroelétricas são iguais aos seus limites máximos (metas). Isto é de se esperar pois as hidroelétricas têm custo operativo nulo e deveriam portanto ser utilizadas ao máximo. A única exceção é a usina Prado4 cuja geração é inferior à meta. A razão é que a capacidade máxima média desta usina (levando em consideração as probabilidades de quebra dos equipamentos mostrado na Figura 3.8) é inferior à meta. Neste caso a geração da usina foi igual a esta capacidade máxima.

A tabela 3.11 mostra as gerações médias das usinas térmicas por patamar, a geração média total e os custos operativos.

**Tabela 3.11 Gerações térmicas médias por patamar de demanda**

Cód	Térmica	Pat.1	Pat.2	Pat.3	Pat.4	Pat.5	Pat.6	Média MW-médio	Custo k\$
1	Paipa1	16.31	16.31	16.31	16.31	16.31	16.31	16.31	156.81
2	Paipa2	58.78	58.78	58.78	58.78	58.78	58.78	58.78	441.68
3	Paipa3	59.25	59.25	59.25	59.25	59.25	59.25	59.25	427.98
4	Palenque3	11.02	11.02	11.02	11.02	11.02	11.02	11.02	153.13
5	Palenque4	10.99	10.99	10.99	10.99	10.99	10.99	10.99	152.65
6	Barranca1	5.97	5.97	5.97	5.97	5.97	5.97	5.97	60.80
7	Barranca2	6.88	6.88	6.88	6.88	6.88	6.88	6.88	70.10
8	Barranca3	39.80	39.80	39.80	39.80	39.80	39.80	39.80	381.61
9	Barranca4	20.94	20.94	20.94	20.94	20.94	20.94	20.94	224.25
10	Barranca5	16.30	16.30	16.30	16.30	16.30	16.30	16.30	164.99
11	Tasajero	112.61	112.61	112.61	112.61	112.61	112.61	112.61	843.97
12	Zipaeeb3	51.97	51.97	51.97	51.97	51.97	51.97	51.97	523.55
13	Zipaeeb2	29.63	29.63	29.63	29.63	29.63	29.63	29.63	298.47
14	Zipaisa4	43.05	43.05	43.05	43.05	43.05	43.05	43.05	416.66
15	Zipaisa5	47.31	47.31	47.31	47.31	47.31	47.31	47.31	457.92
16	Elrio6	0	0	0	0	0	0	0	0
17	Elrio7	0	0	0	0	0	0	0	0
18	Elrio8	0.01	0	0	0	0	0	0	0
19	Launion1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	Launion2	0	0	0	0	0	0	0	0
21	Launion3	-0.03	0	0	0	0	0	0	-0.02
22	Barranquill1	37.40	37.40	37.40	37.40	37.40	37.40	37.40	550.12
23	Barranquill2	35.54	35.54	35.54	35.54	35.54	35.54	35.54	509.28
24	Barranquill3	40.54	40.54	40.54	40.54	40.54	40.54	40.54	535.38
25	Barranquill4	40.77	40.77	40.77	40.77	40.77	40.77	40.77	567.73
26	Cartagena1	52.44	52.44	52.44	52.44	52.44	52.44	52.44	744.54
27	Cartagena2	0.16	0	0	0	0	0	0.01	0.08
28	Cartagena3	0.19	0	0	0	0	0	0.01	0.10
29	Ballena1	0	0	0	0	0	0	0	0
30	Ballena2	0.01	0	0	0	0	0	0	0
31	Guajira1	133.62	133.62	133.62	133.62	133.62	133.62	133.62	1480.40
32	Guajira2	134.86	134.86	134.86	134.86	134.86	134.86	134.86	1516.12
33	Chinu4	0.11	0	0	0	0	0	0	0.06
34	Chinu5	0.02	0	0	0	0	0	0	0.01
35	Chinu6	0.02	0	0	0	0	0	0	0.01
36	Chinu7	0.01	0	0	0	0	0	0	0.01
37	Chinu8	0.02	0	0	0	0	0	0	0.01
38	Dorada	0.13	0	0	0	0	0	0	0.07
39	Centro	140.55	107.01	98.04	93.85	76.95	64.13	89.76	1352.98
40	Flores1	138.15	138.15	138.15	138.15	138.15	138.15	138.15	1114.75
41	Flores2	89.76	89.76	89.76	89.76	89.76	89.76	89.76	1045.09
42	Mamonal	80.01	80.01	80.01	80.01	80.01	80.01	80.01	681.82
43	Tebsa1	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	988.38
44	Tebsa2	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	988.38
45	Tebsa3	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	82.40	988.38
46	Gualanday	27.28	27.28	27.28	27.28	27.28	27.28	27.28	254.47
47	Yumbogas	26.85	26.85	26.85	26.85	26.85	26.37	26.76	394.50
48	Ocoagas	34.39	34.39	34.39	34.39	34.39	34.39	34.39	266.33
49	Yumbo3	20.79	20.79	20.79	20.79	20.79	20.79	20.79	280.70
50	Deterministi	110.30	110.30	110.30	110.30	110.30	110.30	110.30	0
<b>Total Térm</b>		<b>1921.91</b>	<b>1887.72</b>	<b>1878.75</b>	<b>1874.56</b>	<b>1857.66</b>	<b>1844.36</b>	<b>1870.39</b>	<b>19034.30</b>

A tabela 3.12 mostra um resumo da operação, isto é os totais de geração hidro e térmica.

**Tabela 3.12 Resumo das gerações médias hidro e térmicas por patamar de demanda**

	Pat.1 MW-médio	Pat.2 MW-médio	Pat.3 MW-médio	Pat.4 MW-médio	Pat.5 MW-médio	Pat.6 MW-médio	Média MW-médio
Total Hidro	5471.03	4404.3	3677.27	3162.44	2222.36	1346.66	3046.74
Total Térm	1921.91	1887.72	1878.75	1874.56	1857.66	1844.36	1870.39
Total	7392.92	6292.02	5556.00	5036.98	4080.00	3191.00	4917.13
Demanda	7393.00	6292.00	5556.00	5037.00	4080.00	3191.00	4917.13
Durac.p.u	0.0336	0.1932	0.1933	0.1933	0.1933	0.1933	

Na Figura 3.12 se mostram os totais de geração hidroelétrica e térmica para cada patamar de demanda. É importante observar que a geração hidroelétrica é modulada de forma a atender as demandas em cada patamar e atender a restrição de meta energética. Observe que a geração hidro é modulada de maneira a manter a geração térmica o mais constante possível. Esta flexibilidade operativa é um dos aspectos importantes da geração hidroelétrica.

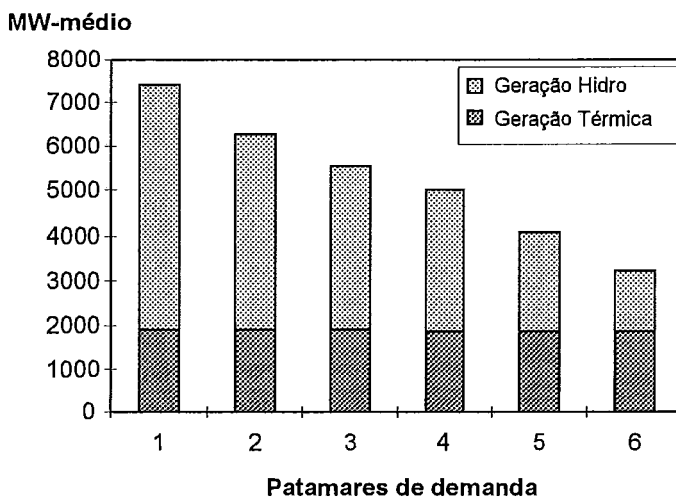


Figura 3.12 Geração no caso base

### III.4.6.2 Benefício da flexibilidade operativa

Para ilustrar o benefício da flexibilidade operativa das usinas hidroelétricas, consideramos que a capacidade de cada hidroelétricas é igual a sua meta energética com probabilidade 1.0, e repetimos o exercício.

Neste caso, a Figura 3.13 mostra a geração total por patamar de demanda. Pode-se observar que ao fixar a capacidade de geração das hidroelétricas o sistema não pode mais modular. Portanto, nos patamares de demanda alta o sistema entra em racionamento e nos patamares de demanda baixa as usinas térmicas tem que ajustar sua geração dado que a geração das hidroelétricas permanece constante.

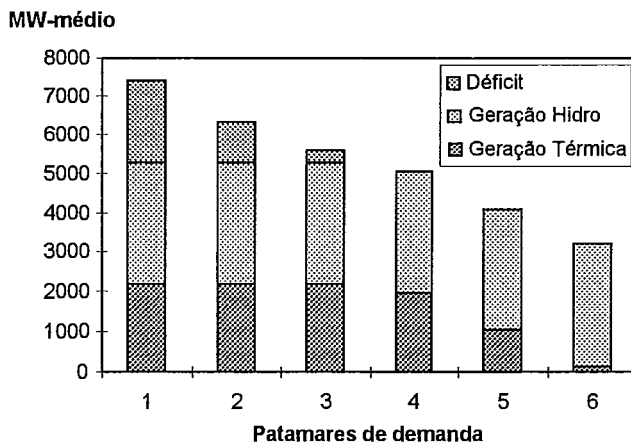


Figura 3.13 Geração no caso modificado



### III.4.6.3 Tempos de execução

O tempo total de CPU foi de 14.10 segundos num computador Pentium 166 MHz, 32 Mbytes. O tempo médio na solução do problema mestre foi de 0.10 s e o tempo médio no subproblema de despacho foi de 0.02 s.

A Tabela 3.13 mostra os tempos computacionais de execução do problema usando a técnica de convoluções com discretização do espaço amostral descrita no item II.5. Pode-se observar que a discretização de 100 MW já começa a distorcer os resultados e que no caso da técnica dos cumulantes há um ganho de tempo computacional de 6.32 vezes.

**Tabela 3.13 Comparação entre técnicas de discretização e cumulantes**

Técnica	E[Custo Operativo]	Número de Iterações	Tempo de CPU (s)	Tempo médio problema mestre (s)	Tempo médio subproblema de despacho (s)
Discret.Grid = 10 MW	19 034.50	116	379.27	0.097	3.172
Discret.Grid = 25 MW	19 034.54	128	186.81	0.162	1.296
Discret.Grid = 50 MW	19 034.77	139	137.05	0.210	0.775
Discret.Grid =100 MW	19 035.45	129	89.16	0.193	0.498
Cumulantes	19 034.68	114	14.10	0.101	0.023

## Capítulo IV. Cálculo dos custos marginais de demanda

### IV.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o conceito de *custo marginal de demanda*. Veremos como ele é obtido no despacho probabilístico, tanto na metodologia tradicional de Balériaux como no esquema proposto para representação de hidroelétricas com metas de geração.

O custo marginal de demanda é a derivada do custo total com respeito a variações na demanda. Esta informação é básica para estudos de política tarifária, a determinação de preços de intercâmbio com os sistemas vizinhos, e a determinação de tarifas de pedágio pelo uso do sistema de transmissão da empresa por terceiros [42]

### IV.2 Cálculo dos custos marginais no método tradicional de Balériaux

Na capítulo anterior foi visto que ao aplicar o método tradicional de Balériaux no problema de despacho probabilístico puramente térmico, o valor esperado do custo operativo é obtido como:

$$E(z) = \sum_{i=1}^I c_i ( E(w_{i-1}) - E(w_i) ) \quad (1)$$

onde  $E(w_i)$  é o valor esperado da energia não suprida depois da adição do  $i$ -ésimo gerador. Nos interessa obter a derivada deste valor com respeito à demanda, i.e.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(z)}{\partial d} &= \frac{\partial}{\partial d} \left[ \sum_{i=1}^I c_i ( E(w_{i-1}) - E(w_i) ) \right] \\ &= \sum_{i=1}^I c_i \left( \frac{\partial E(w_{i-1})}{\partial d} - \frac{\partial E(w_i)}{\partial d} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto será necessário determinar a derivada do valor esperado da energia não suprida depois da adição do  $i$ -ésimo gerador com respeito à demanda, i.e.:

$$\frac{\partial E(w_i)}{\partial d} \quad (3)$$

Foi demonstrado no item II.5.1 que:

$$LOLP(d) = \frac{\partial EENS(d)}{\partial d} \quad (4)$$

Desta maneira, o custo marginal da demanda é dado por:

$$\frac{\partial E(z)}{\partial d} = \sum_{i=1}^I c_i (\text{LOLP}(w_{i-1}) - \text{LOLP}(w_i)) \quad (5)$$

onde  $\text{LOLP}(w_i)$  é a probabilidade de perda de carga depois da adição da  $i$ -ésima unidade geradora. Como visto no capítulo II, a LOLP é produzida no cálculo das convoluções.

### IV.3. Cálculo dos custos marginais de demanda no modelo proposto

O modelo proposto utiliza a decomposição de Dantzig-Wolfe. Na convergência depois de  $K$  iterações, o problema mestre resultante é:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] & \text{Multiplicadores Simplex} & (6) \\ \text{sujeito a} & & & \\ & - \sum_{p=1}^P \lambda_p [e^p] \geq -E & \pi & \\ & \sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 & \mu & \\ & \lambda_p \geq 0 & p = 1, \dots, P & \end{array}$$

Sabe-se que tanto  $[z^p]$  como  $[e^p]$  dependem da demanda  $d$ . Considere o seguinte problema geral de programação linear:

$$\begin{array}{ll} z = \text{Min} & c(d) x & \text{Multiplicador Simplex} & \\ \text{s. a} & A(d)x = b & \pi(d) & \\ & x \geq 0 & & \end{array} \quad (7)$$

onde tanto o vetor de custos como a matriz de coeficientes dependem de um parâmetro  $d$ . O dual deste problema é:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \pi(d) b & (8) \\ \text{s. a} & \pi(d) A(d) = c(d) \\ & \pi(d) \geq 0 \end{array}$$

A derivada da função objetivo com respeito ao parâmetro  $d$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(d)}{\partial d} &= \frac{\partial c(d) x(d)}{\partial d} \\ &= \frac{\partial c(d)}{\partial d} x(d) + c(d) \frac{\partial x(d)}{\partial d} \\ &= \frac{\partial c(d)}{\partial d} x(d) + \pi(d) A(d) \frac{\partial x(d)}{\partial d} \end{aligned}$$

dado que  $\pi(d)$  satisfaz as restrições do problema dual (8).

Por outro lado, derivando a restrição do problema primal:

$$\frac{\partial A(d)}{\partial d} x(d) + A(d) \frac{\partial x(d)}{\partial d} = 0$$

E substituindo  $A(d) \frac{\partial x(d)}{\partial d}$  na expressão da  $\frac{\partial z(d)}{\partial d}$ :

$$\frac{\partial z(d)}{\partial d} = \frac{\partial c(d)}{\partial d} x(d) - \pi(d) \frac{\partial A(d)}{\partial d} x(d) \quad (9)$$

Em termos do problema (6) a derivada é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial z}{\partial d} = \sum_{p=1}^P \lambda_p \frac{\partial z^p}{\partial d} - \pi \sum_{p=1}^P \lambda_p \frac{\partial(-e^p)}{\partial d} \quad (10)$$

Se verá a continuação como cada um destes termos é obtido.

#### IV.3.1 Cálculo de $\partial z^p / \partial d$

Seja  $c_i$  o custo operativo da  $i$ -ésima usina carregada, e seja  $c_{\text{def}}$  o custo da energia não suprida. Então,

$$z = \sum_{i=1}^I c_i (E(w_{i-1}^p) - E(w_i^p)) + c_{\text{def}} E(w_{I+1}^p) \quad (11)$$

Lembrando que a LOLP é a derivada da energia não suprida com relação à demanda, tem-se:

$$\frac{\partial z^p}{\partial d} = \sum_{i=1}^I c_i (\text{LOLP}_{i-1}^p - \text{LOLP}_i^p) + c_{\text{def}} \text{LOLP}_{I+1}^p \quad (12)$$

onde  $\text{LOLP}_i^p$  é a probabilidade de perda de carga após o carregamento da  $i$ -ésima usina na iteração  $p$  do algoritmo.

#### IV.3.2 Cálculo de $\partial e^p / \partial d$

Sabe-se do esquema Balériaux que:

$$e^p = E(w_{i-1}^p) - E(w_i^p) \quad (13)$$

onde:

- $i$  ordem de carregamento da hidroelétrica na  $p$ -ésima iteração;
- $E(w_i^p)$  valor esperado da energia não suprida após o carregamento da  $i$ -ésima usina na iteração  $p$ .

Lembrando mais uma vez que a derivada da EENS com relação à demanda é a LOLP, tem-se:

$$\frac{\partial(e^p)}{\partial d} = \Delta \text{LOLPP} \quad (14)$$

onde  $\Delta \text{LOLPP} = \text{LOLPP}_{i-1} - \text{LOLPP}_i$

Substituindo (12) e (14) em (10), obtém-se o custo marginal de demanda:

$$\frac{\partial z}{\partial d} = \sum_{p=1}^P \lambda_p \left[ \sum_{i=1}^I c_i (\text{LOLPP}_{i-1} - \text{LOLPP}_i) + c_{\text{def}} \text{LOLPP} + \pi \Delta \text{LOLPP} \right] \quad (15)$$

#### IV.4. Exemplo - caso colombiano

Os custos marginais obtidos no caso exemplo apresentado no capítulo anterior são mostrados na Tabela 4.1 e Figura 4.1.

Tabela 4.1 Custos marginais de demanda por patamar

Patamar	Custo Marginal de Demanda \$/MWh
1	20.42
2	20.26
3	20.26
4	20.26
5	20.26
6	20.26

Pode-se observar que os custos marginais são idênticos em cada patamar de demanda com exceção do patamar 1 (demanda alta) em que ele é um pouco maior. Como mencionado no capítulo III, este resultado se deve à capacidade de modulação da geração hidroelétrica - ver Figura 3.12.

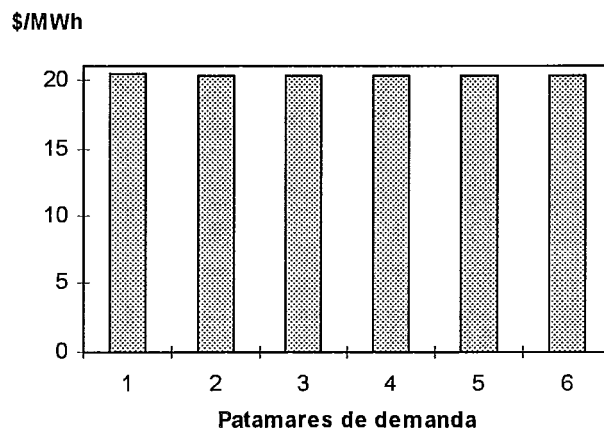


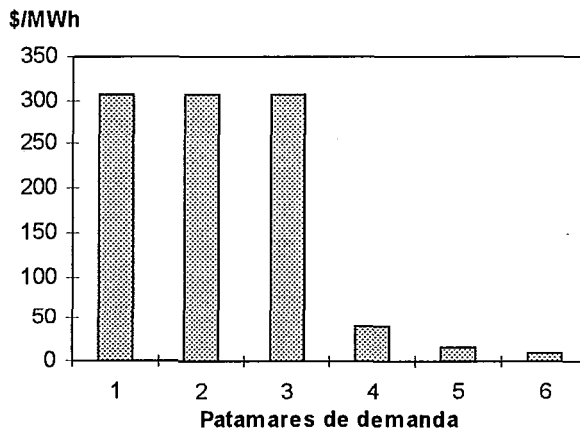
Figura 4.1 Custos marginais de demanda por patamar no caso base

O efeito da modulação hidro no custo operativo pode ser confirmado na tabela 4.2 e figura 4.2 que apresentam os custos marginais para o caso em que não se permite a modulação da geração das hidroelétricas.

**Tabela 4.2 Custos marginais de demanda por patamar no caso em que não se permite a modulação**

Patamar	Custo Marginal de Demanda \$/MWh
1	307.00
2	307.00
3	305.80
4	41.36
5	15.03
6	9.76

Neste caso, dado que a capacidade de geração hidroelétrica foi definida como sendo igual à meta energética, estas gerações não podem ser moduladas, o que ocasiona déficits de energia, como foi mostrado na Figura 3.13 do capítulo III.



**Figura 4.2 Custos marginais de demanda por patamar no caso em que não se permite modulação**

## Capítulo V. Função de custo futuro e restrições hidroelétricas no DHP

### V.1 Introdução

Até agora supomos que o custo da geração hidro é zero, isto é, que a energia pode ser livremente utilizada até o valor da meta. Na realidade, existe um custo indireto associado ao uso da energia hidroelétrica hoje, representado através de uma *função de custo futuro* que mede o valor esperado do custo operativo do final do período até o final do horizonte de estudo.

No caso de um sistema composto de usinas térmica e de uma única usina hidroelétrica, esta função tem o seguinte comportamento típico.

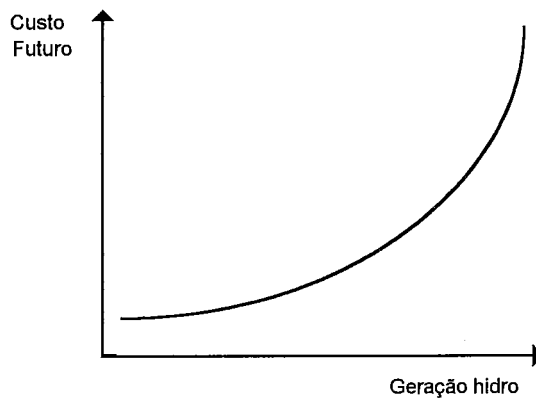


Figura 5.1 Função de custo futuro x geração hidro

Em outras palavras, quanto maior a energia hidraulica produzida hoje menor será a energia hidro disponível nas próximas etapas, o que aumenta o custo operativo futuro.

Neste capítulo será analisado o efeito do custo futuro na geração hidroelétrica. Será feita inicialmente a hipótese de que o custo futuro é linear em função da geração e a seguir será discutida sua representação geral em termos das restrições operativas de um sistema hidroelétrico.

### V.2 Custo futuro linear em função da geração

Vamos considerar um sistema composto de  $N$  usinas hidroelétricas, cujas energias são no máximo  $E_n$  para  $n = 1, \dots, N$ . Esta energia tem um custo futuro unitário de  $\varphi_n$   $\$/MWh$ , correspondendo portanto à função linear mostrada na Figura 5.2.

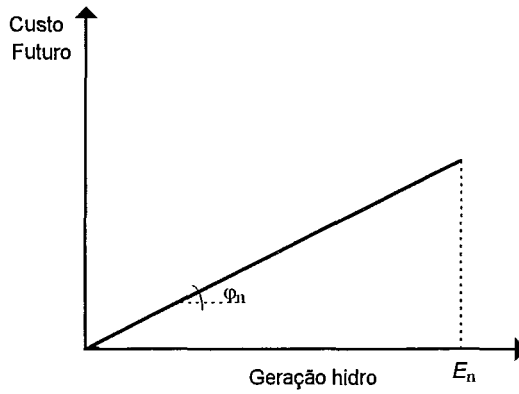


Figura 5.2 Função de custo futuro linear x geração da  $n$ -ésima usina hidro

Neste caso, o problema de despacho probabilístico é formulado como:

$$z = \text{Min} \quad z(e) + \sum_{n=1}^N \varphi_n e_n \quad (1)$$

$$\text{s.a} \quad e_n \leq E_n \quad n = 1, \dots, N$$

Como foi visto no capítulo III o valor esperado do custo operativo e a geração hidro podem ser escritos como:

$$z(e) = \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] \quad (2)$$

$$e_n = \sum_{p=1}^P \lambda_p [e_n^p] \quad (3)$$

Para garantir a viabilidade da restrição de igualdade (3) adicionaremos duas variáveis artificiais  $\sigma_{1n}$  e  $\sigma_{2n}$  com um custo  $\gamma$  superior ao custo de racionamento. O problema mestre resultante é:

$$\text{Min} \quad \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] + \gamma \sum_{n=1}^N (\sigma_{1n} + \sigma_{2n}) + \sum_{n=1}^N \varphi_n e_n \quad \text{Mult. Simplex} \quad (4)$$

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p [e_n^p] - e_n + \sigma_{1n} - \sigma_{2n} = 0 \quad \pi_e(n) \quad n = 1, \dots, N$$

$$e_n \leq E_n \quad \pi_E(n) \quad n = 1, \dots, N$$

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 \quad \mu$$

$$\lambda_p \geq 0 \quad p = 1, \dots, P$$



### V.2.1 Exemplo

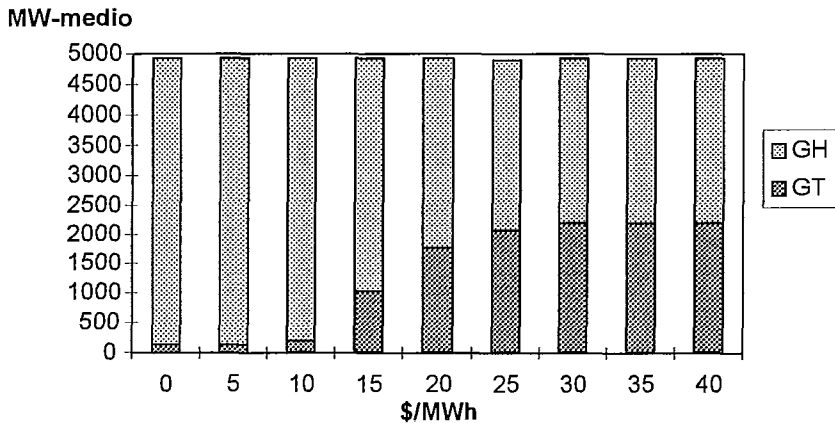
Vamos utilizar o sistema da Colômbia para fazer um exercício que ilustre os conceitos apresentados neste capítulo.

Vamos considerar que a meta de geração é igual à capacidade de cada usina hidroelétrica e que o custo futuro  $\varphi_n$  é igual para todas as usinas. Foram realizadas várias rodadas utilizando diferentes valores de custo futuro de geração hidroelétrica, como se mostra na Tabela 5.1.

**Tabela 5.1 Resultados para diferentes custos futuros da geração hidroelétrica**

$\varphi_n$	Geração Hidro	Geração Térmica	Custo Imediato	Custo Futuro
\$/MWh	MW-médio	MW-médio	k\$	k\$
0	4787.29	129.84	162.80	0
5	4787.29	129.84	162.80	17808.72
10	4730.12	187.01	575.78	35192.07
15	3884.26	1032.87	8270.36	43348.33
20	3136.43	1780.70	17682.38	46670.02
25	2840.08	2076.25	22266.14	52840.33
30	2708.73	2208.40	24878.84	60458.88
35	2708.73	2208.40	24878.84	70535.36
40	2708.73	2208.40	24878.84	80611.84

As gerações totais hidro e térmica são mostradas na Figura 5.3. Pode-se observar que a geração hidroelétrica diminui de forma inversamente proporcional aos custos futuros.



**Figura 5.3 - Geração hidro total versus custo futuro**

O processo de otimização do uso da geração hidroelétrica para o caso  $\varphi = 40$  \$/MWh está ilustrado na Figura 5.4. Observe que a geração ótima (CT) é a que minimiza a soma do custo imediato (CI) mais o custo futuro (CF).

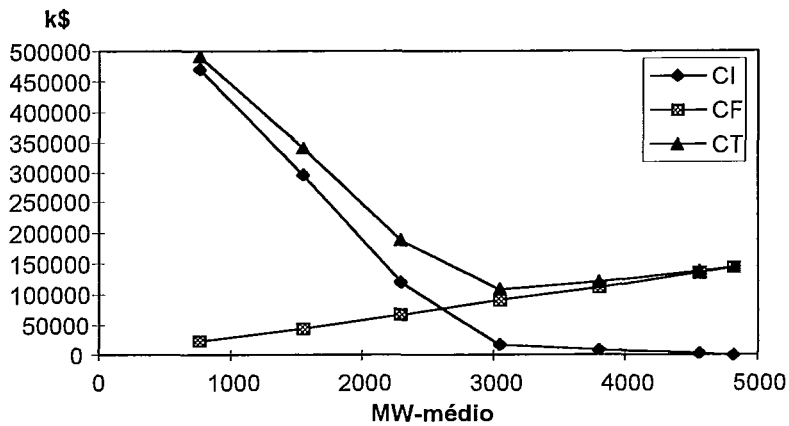


Figura 5.4 - Geração hidro total versus custo futuro

### V.3 Custo futuro linear por partes em função do armazenamento

A geração ótima nas usinas hidroelétricas na realidade vem de um processo dinâmico em que se mede o *trade-off* entre o uso da água hoje e o *armazenamento* desta água para seu uso futuro. Esta função no caso de um sistema composto de usinas térmica e de uma única usina hidroelétrica tem o seguinte comportamento típico.

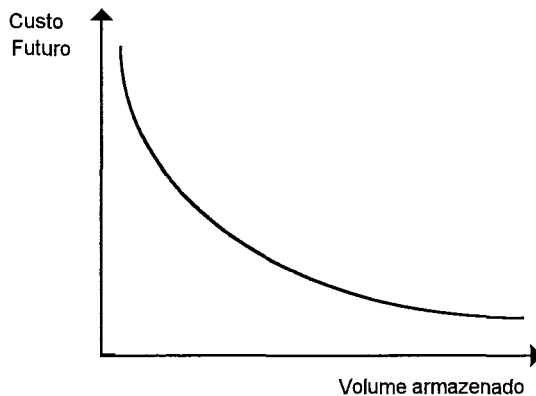


Figura 5.5 Função de custo futuro x volume armazenado

Em outras palavras, quanto maior o volume armazenado no reservatório, menor o custo operativo futuro.

A geração hidro e o armazenamento estão relacionados pelas equações de balanço hídrico e produção hidroelétrica:

$$v = v_0 + a - u + s \tag{5}$$

$$e = \rho u \tag{6}$$

$$0 \leq v \leq \bar{v} \tag{7}$$

$$0 \leq u \leq \bar{u} \tag{8}$$

onde:

$v$	volume armazenado no final do período
$u$	volume turbinado
$s$	volume vertido
$v_0$	volume armazenado no início do período
$\alpha$	volume afluente
$e$	energia hidroelétrica gerada
$\rho$	coeficiente de produção da usina hidro
$\bar{v}$	limite de armazenamento
$\bar{u}$	limite de turbinamento

A equação de balanço hídrico (5) estabelece que o armazenamento final no período é igual ao armazenamento no início do período, mais a afluência lateral, menos os volumes de saída (turbinados e vertidos).

Supondo que o coeficiente de produção  $\rho$  é constante, isto é, que ele não depende do nível de armazenamento do reservatório, mostra-se no Apêndice A que a função de custo futuro é uma função linear por partes, como ilustrado na Figura 5.6.

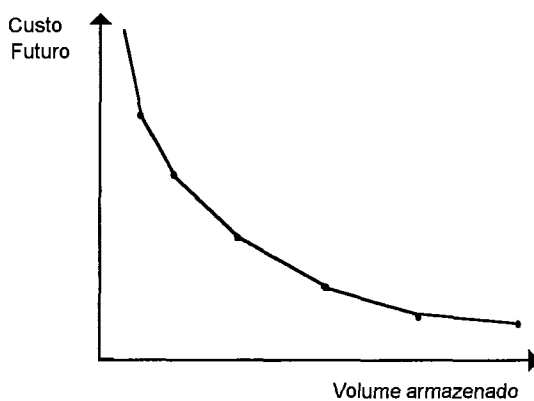


Figura 5.6 Função de custo futuro linear por partes  $\times$  armazenamento

Por sua vez, foi demonstrado no capítulo III que o custo operativo atual é uma função linear por partes da geração hidroelétrica. A decisão ótima no período é portanto a que minimiza a soma dos custos operativo atual e futuro sujeito às restrições operativas (5) a (8).

Em termos formais, este problema pode ser formulado como o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Min } z(e) + \alpha(v) \quad (9)$$

$$\text{s.a } v + u + s = v_0 + \alpha$$

$$e = \rho u$$

$$0 \leq v \leq \bar{v}$$

Observe que não é necessário colocar a restrição  $0 \leq u \leq \bar{u}$ . Como será visto em seguida ela está representada implicitamente na função  $z(e)$  através das restrições  $0 \leq h_{jk} \leq \bar{h}$ . Com efeito, a função de custo imediato  $z(e)$  é tal como definida no ítem III.4.1:

$$\begin{aligned}
 z(e) = \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_8 \delta_{jk} \right) & (10) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j & j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} & i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} & j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K \\
 & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{jk} = e
 \end{aligned}$$

Por sua vez, a função de custo futuro, que é por construção uma função linear por partes (ver Apêndice A), pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \alpha(v) = \text{Min} \quad & \alpha & (11) \\
 \text{s.a} \quad & \alpha + \phi_q v \geq \varepsilon_q & q = 1, \dots, Q \\
 & \alpha \geq 0
 \end{aligned}$$

onde:

- $\alpha$  variável escalar
- $\phi_q$  coeficiente do  $q$ -ésimo segmento da função de custo futuro
- $\varepsilon_q$  termo independente do  $q$ -ésimo segmento da função de custo futuro
- $Q$  número de segmentos que definem a função de custo futuro

Substituindo (11) em (9), temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & z(e) + \alpha & (12) \\
 \text{s.a} \quad & v + u + s = v_0 + a \\
 & e = \rho u \\
 & \alpha + \phi_q v \geq \varepsilon_q & q = 1, \dots, Q \\
 & 0 \leq v \leq \bar{v} \\
 & \alpha \geq 0
 \end{aligned}$$

Podemos observar que a representação de restrições de balanço hídrico e funções de custo futuro só implica em novas restrições lineares. Portanto, o algoritmo de decomposição de Dantzig-Wolfe pode ser aplicado de maneira semelhante à do capítulo III. O problema mestre resultante é:

$$\begin{aligned}
 z = \quad \text{Min} \quad & \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] + \gamma (\sigma_1 + \sigma_2) + \alpha & \text{Multiplicador Simplex} & \quad (13) \\
 \text{s.a:} \quad & v + u + s = v_0 + \alpha & \pi_v & \\
 & \alpha + \phi_q v \geq \varepsilon_q & \pi_c(q) & \quad q = 1, \dots, Q \\
 & 0 \leq v \leq \bar{v} & \pi_{\bar{v}} & \\
 & \sum_{p=1}^P \lambda_p [e^p] - \rho u + \sigma_1 - \sigma_2 = 0 & \pi_e & \\
 & \sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 & \mu & \\
 & \alpha \geq 0 & & \\
 & \lambda_p \geq 0 & p = 1, \dots, P &
 \end{aligned}$$

O sub-problema de Dantzig-Wolfe que determina o menor custo reduzido é igual ao apresentado no capítulo III:

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_{\min} = \quad \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + \pi_e h_{jk} \right) - \mu & \quad (14) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^I g_{ijk} + h_{jk} + \delta_{jk} = d_j & j = 1, \dots, J & \quad k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} & i = 1, \dots, I & \quad j = 1, \dots, J & \quad k = 1, \dots, K \\
 & 0 \leq h_{jk} \leq \bar{h} & j = 1, \dots, J, & \quad k = 1, \dots, K
 \end{aligned}$$

que corresponde a um problema de despacho probabilístico onde a usina hidroelétrica é um gerador com custo implícito  $\pi_e$ , que pode ser resolvido usando o método de Balériaux.

### V.3.1 Extensão para múltiplas hidroelétricas.

Da mesma forma como foi descrito no capítulo III, esta técnica pode ser estendida para o caso de  $N$  usinas hidroelétricas. Neste caso, as equações de balanço hídrico devem representar sistemas em cascata, isto é, estabelecer que o armazenamento final no estágio é igual ao armazenamento no início do estágio, mais a afluência lateral,

menos os volumes de saída (turbinados e vertidos), mais os volumes de saída das usinas hidroelétricas diretamente a montante. Em termos formais:

$$v_n = v_{0n} + a_n - s_n - u_n + \sum_{m \in M_n} [s_m + u_m] \quad (15)$$

para  $n = 1, \dots, N$

Por sua vez a função de custo futuro é uma função multidimensional que depende do vetor de volumes finais  $v$  e pode ser escrita como:

$$\alpha(v) = \text{Min } \alpha \quad (16)$$

$$\text{s.a } \alpha + \sum_{n=1}^N \phi_{qn} v_n \geq \varepsilon_q \quad q = 1, \dots, Q$$

$$\alpha \geq 0$$

Desta forma, o problema mestre pode ser caracterizado na forma a seguir:

$$\text{Min } \sum_{p=1}^P \lambda_p [z^p] + \gamma \sum_{n=1}^N (\sigma_{1n} + \sigma_{2n}) + \alpha \quad \text{Multiplicador Simplex} \quad (17)$$

$$\text{s.a } v_n + s_n + u_n - \sum_{m \in M_i} [s_m + u_m] = v_{0n} + a_n \quad \pi_v(n) \quad n = 1, \dots, N$$

$$\alpha + \sum_{n=1}^N \phi_{qn} v_n \geq \varepsilon_q \quad \pi_c(q) \quad q = 1, \dots, Q$$

$$0 \leq v_n \leq \bar{v}_n \quad \pi_{\bar{v}}(n) \quad n = 1, \dots, N$$

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p [e_n^p] - \rho_n u_n + \sigma_{1n} - \sigma_{2n} = 0 \quad \pi_e(n) \quad n = 1, \dots, N$$

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 \quad \mu$$

$$\alpha \geq 0$$

$$\lambda_p \geq 0 \quad p = 1, \dots, P$$

E o subproblema de Dantzig-Wolfe é:

$$\bar{c}_{\min} = \text{Min} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijk} + c_\delta \delta_{jk} + \sum_{n=1}^N \pi_c(n) h_{njik} \right) - \mu \quad (18)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijk} + \sum_{n=1}^N h_{njik} + \delta_{jk} = d_j \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq g_{ijk} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq h_{njik} \leq \bar{h}_n \quad n = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

O problema (17) também é um DP padrão, no qual as  $N$  hidroelétricas têm custos  $\pi_c(n)$  ( $n = 1, \dots, N$ ).

A Figura 5.7 resume o processo iterativo no caso geral

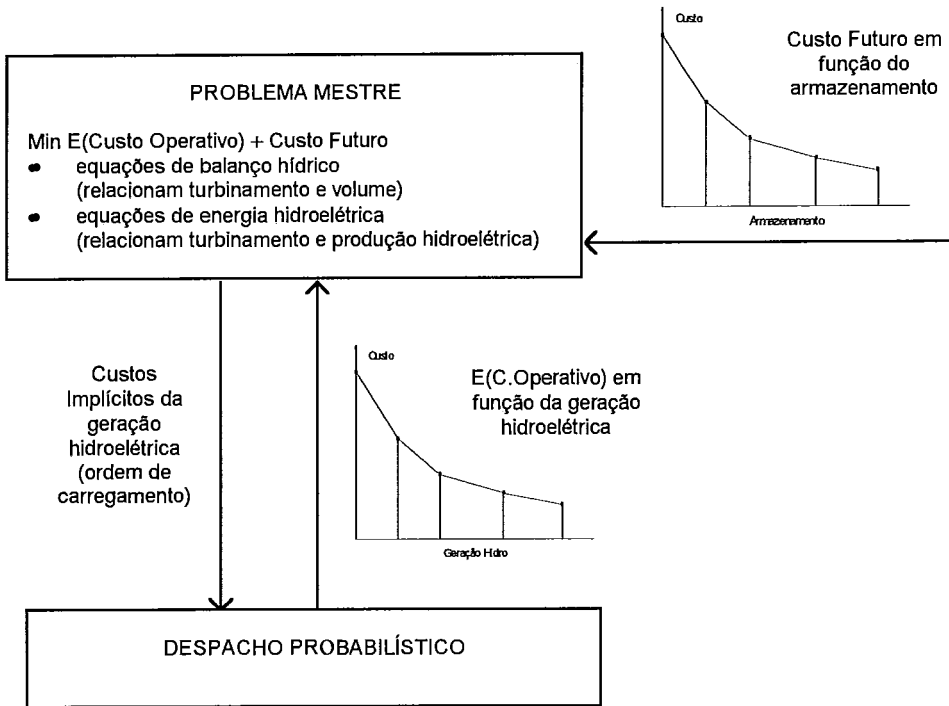


Figura 5.7 Processo iterativo

## Capítulo VI. Despacho hidroelétrico probabilístico multi-estágio.

### VI.1 Introdução

No capítulo anterior vimos como representar as funções de custo futuro no despacho probabilístico hidrotérmico de um estágio. Como discutido no capítulo I, o despacho de sistemas hidrotérmicos é um problema *multi-estágio e dependente no tempo*, isto é, decisões tomadas hoje vão influir no despacho futuro, devido à capacidade de armazenar energia, na forma de água, nos reservatórios. Ele é também um problema *estocástico*; com efeito, as vazões afluentes em cada posto hidrológico, que variam sazonalmente e ano a ano, são um componente aleatório no despacho hidrotérmico.

Neste capítulo, mostraremos como a metodologia proposta para representar o aspecto probabilístico das falhas de equipamentos pode ser incorporada em algoritmos já existentes que resolvem o problema de despacho hidrotérmico multi-estágio.

### VI.2 Formulação do Problema

O problema de despacho hidrotérmico multi-estágio pode ser formulado como um problema de *programação dinâmica estocástica* [21], caracterizado pela seguinte equação de recursão:

$$\alpha_t(v_{t-1}, a_{t-1}) = E \{ \text{Min} [z_t(e_t) + \alpha_{t+1}(v_t, a_t)] \} \quad (1)$$

$$\text{s.a} \quad v_{nt} + s_{nt} + u_{nt} - \sum_{m \in M_i} [s_{mt} + u_{mt}] = v_{n,t-1} + a_{nt} \quad n = 1, \dots, N$$

$$0 \leq v_{nt} \leq \bar{v}_n \quad n = 1, \dots, N$$

$$e_{nt} = \rho_n u_{nt} \quad n = 1, \dots, N$$

onde  $v_{t-1}$  (armazenamento no início do mes  $t$ ) e  $a_{t-1}$  (afluências no mes  $t-1$ ) são as variáveis de estado. Em particular, é necessário incluir as afluências devido à dependência temporal entre os aportes em meses consecutivos. Esta dependência temporal é representada por um modelo autoregressivo linear [43]. Por facilidade de notação supõe-se que a ordem do modelo é 1. Vale lembrar que esta hipótese não é restritiva.

A função  $z_t(e_t)$  representa o custo operativo no estágio  $t$  em função da geração hidroelétrica  $e_t$ . Ela é formulada de maneira análogo à definida no ítem III.4.1, mas referida ao estágio  $t$ :

$$z_t(e_t) = \text{Min} \quad \sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j \left( \sum_{i=1}^I c_i g_{ijkt} + c_\delta \delta_{jkt} \right) \quad (2)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{i=1}^I g_{ijkt} + \sum_{n=1}^N h_{njkt} + \delta_{jkt} = d_{jt} \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$



$$0 \leq g_{ijkt} \leq \bar{g}_{ik} \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad k = 1, \dots, K$$

$$0 \leq h_{njkt} \leq \bar{h}_n \quad n = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, J, \quad k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{k=1}^K p_k \sum_{j=1}^J q_j h_{njkt} \leq e_{nt} \quad n = 1, \dots, N$$

Em teoria, a recursão (1) pode ser resolvida através de um algoritmo de programação dinâmica estocástica (PDE). No entanto, o esforço computacional do algoritmo PDE tradicional, que se baseia na discretização do espaço de estados, cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado do problema [21].

Devido a isto, utiliza-se a técnica de programação dinâmica estocástica dual (SDDP) [22]. Esta técnica permite resolver o problema de despacho hidrotérmico multi-estágio sem necessidade de discretização do espaço de estados. Trata-se de um processo iterativo que gera os segmentos lineares que compõem a função de custo futuro que, como demonstrado no Apêndice A, é uma função linear por partes. A seguir se apresenta uma descrição do esquema de solução SDDP. Uma dedução formal desta metodologia, baseada em decomposição de Benders, é apresentada no apêndice B.

### VI.3 Esquema de solução

O procedimento do SDDP é composto pelos seguintes passos (no esquema de solução à seguir utilizamos a letra  $w$  para representar custo operativo; esta variável não deve ser confundida com a notação do capítulo II):

- 1) selecione um conjunto inicial de estados  $\{v_{t-1}, a_{t-1}\}$  para cada estágio  $t = 1, \dots, T$ . A Figura 6.1 ilustra a escolha inicial dos níveis de armazenamento para um sistema de um reservatório.

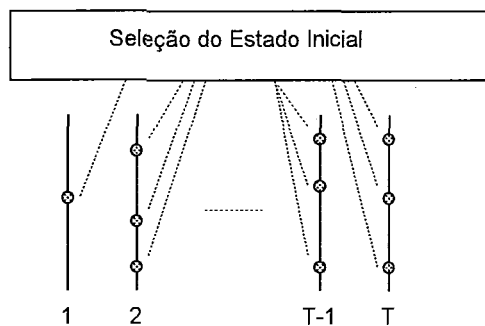
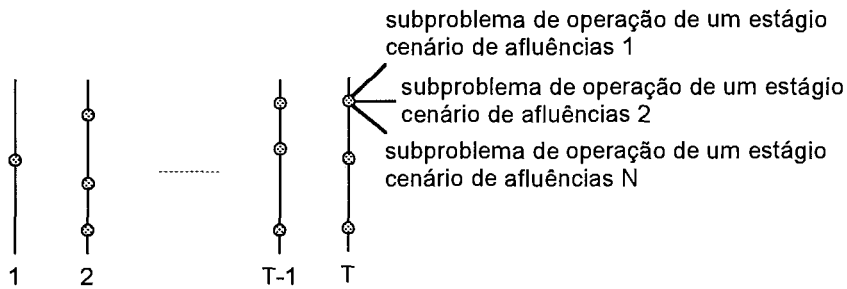


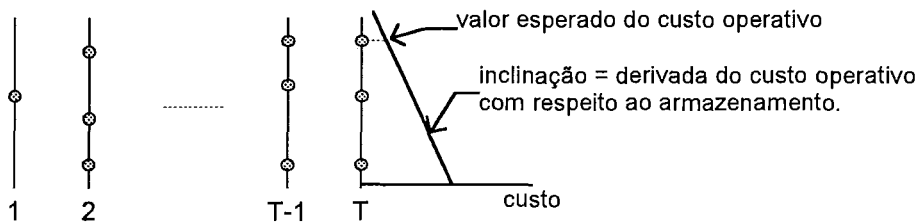
Figura 6.1 - Seleção do estado inicial

- 2) aplique a recursão de PDE tradicional para os estados selecionados no passo (1), e crie uma *aproximação* para a função de custo futuro,  $\tilde{\alpha}_{t-1}(v_{t-1}, a_{t-1})$ , para cada estágio. A Figura 6.2 ilustra o cálculo do custo esperado de operação para um estado do estágio  $T$ .



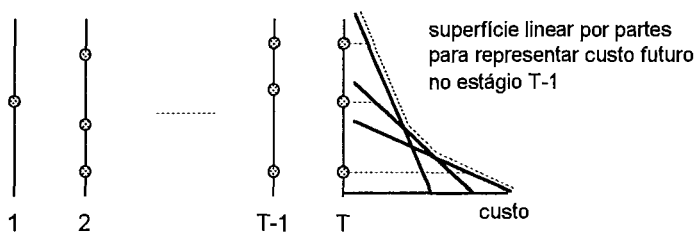
**Figura 6.2 - Cálculo do custo esperado de operação para um dado estado**

A Figura 6.3 mostra a construção de um hiperplano que aproxima a função de custo futuro para o estágio  $T-1$ , em torno do primeiro estado do estágio  $T$ . Esta aproximação linear é baseada no valor esperado do custo operativo representado na Figura 6.2 e nas derivadas deste custo em relação ao armazenamento (também são calculadas as derivadas com relação às aflúências, não representadas na figura abaixo - ver Apêndice B para detalhes).



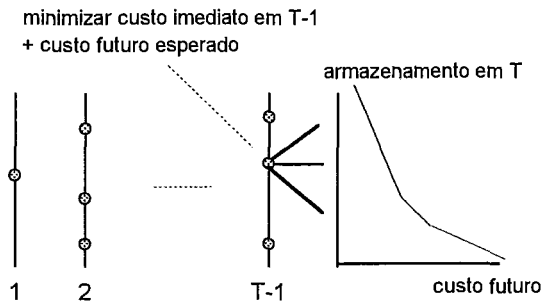
**Figura 6.3 - Cálculo de um hiperplano de custo futuro**

O cálculo do valor esperado do custo operativo e a geração de um hiperplano suporte da função de custo futuro é repetido para cada estado no estágio  $T$ . A superfície linear por partes resultante é utilizada como aproximação para a função de custo futuro do estágio  $T-1$ , como ilustra a Figura 6.4.



**Figura 6.4 Superfície linear por partes do custo futuro para o estágio  $T-1$**

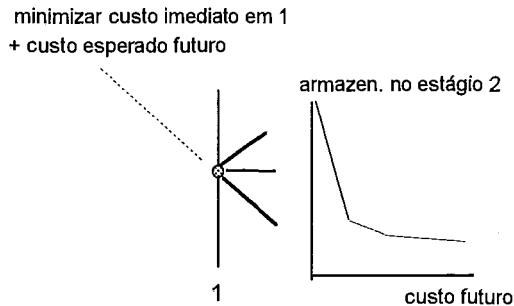
Repete-se então o processo para todos os estados nos estágios  $T-1$ ,  $T-2$  etc. como ilustra a Figura 6.5. Observe que o objetivo agora é minimizar o custo imediato no estágio  $T-1$  mais o custo futuro esperado, dado pela aproximação da superfície de custo calculada anteriormente.



**Figura 6.5 - Cálculo dos custos operativos para o estágio T-1**

- 3) calcule um limite inferior  $\underline{w}$  para o valor esperado do custo operativo ótimo:

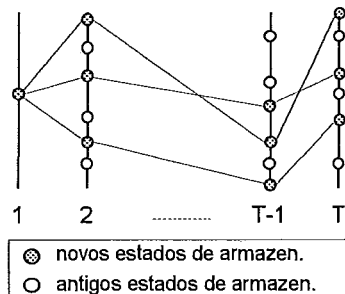
A Figura 6.6 mostra o cálculo do custo de operação ótimo para o estado inicial. A aproximação da superfície de custo é produzida pelo processo recursivo descrito no passo (2). Como esta superfície (aproximada) é um *limite inferior* para a superfície de custo “real”, o custo operativo do primeiro estágio é um limite inferior para a solução ótima global.



**Figura 6.6 - Cálculo do limite inferior**

- 4) calcular um limite superior  $\bar{w}$  para o valor esperado do custo operativo ótimo.

Uma vez que já se tenha calculado uma aproximação da função de custo futuro para cada estágio, podemos *simular* a operação do sistema para um conjunto de sequências de afluências, como ilustra a Figura 6.7. O custo de operação resultante da simulação é um *limite superior* para a solução ótima global, pois somente simulações com funções de custo futuro “reais” levam ao mínimo do custo esperado da operação.



**Figura 6.7 - Simulação da operação do sistema**

- 5) se a diferença  $\bar{w}-w$  for menor que uma dada tolerância, pare; caso contrário, observe que a simulação também produz um novo conjunto de estados  $\{v_{t-1}, a_{t-1}\}$  - ver Figura 6.7 - que podem ser utilizados para melhorar a representação da superfície de custo futuro. Volte ao passo (2).

## VI.4 Incorporação do despacho probabilístico no SDDP

De maneira análoga à programação dinâmica estocástica tradicional, o algoritmo SDDP decompõe o problema de despacho hidrotérmico multi-estágio em problemas de uma etapa com uma estrutura idêntica à do problema (17) do capítulo V, isto é:

$$\begin{aligned}
 w_t &= \text{Min } z_t(e_t) + \alpha_t & (3) \\
 \text{s. a } \quad v_{nt} + s_{nt} + u_{nt} - \sum_{m \in M_i} [s_{mt} + u_{mt}] &= v_{n,t-1} + a_{nt} & \pi_v(n,t) \quad n = 1, \dots, N \\
 0 \leq v_{nt} &\leq \bar{v}_n & n = 1, \dots, N \\
 e_{nt} &= \rho_n u_{nt} & n = 1, \dots, N \\
 \alpha_t + \sum_{n=1}^N \phi_{qnt} v_{nt} &\geq - \sum_{n=1}^N \varphi_{qnt} a_{nt} + \varepsilon_{qt} & \pi_c(q,t) \quad q = 1, \dots, Q \\
 \alpha_t &\geq 0
 \end{aligned}$$

A cada iteração do algoritmo, segmentos lineares da função de custo futuro para o estágio  $t-1$  são construídos a partir das derivadas do custo total  $w_t$  (imediato e futuro) com respeito ao volume inicial dos reservatórios e as afluências no estágio anterior. Como se mostra no Apêndice B, estas derivadas são calculadas a partir das variáveis duais das equações de balanço hídrico e das restrições lineares que compõem a função de custo futuro no estágio. Trata-se dos valores  $\pi_v(n,t)$  e  $\pi_c(q,t)$  acima.

Substituindo a representação probabilística proposta na função de custo imediato  $z_t(e_t)$  obtém-se o problema mestre:

$$\begin{aligned}
 w_t &= \text{Min } \sum_{p=1}^P \lambda_p [z_t^p] + \gamma \sum_{n=1}^N (\sigma_{1nt} + \sigma_{2nt}) + \alpha_t & \text{Multiplicador Simplex} & (4) \\
 \text{s. a } \quad v_{nt} + s_{nt} + u_{nt} - \sum_{m \in M_i} [s_{mt} + u_{mt}] &= v_{n,t-1} + a_{nt} & \pi_v(n,t) & n = 1, \dots, N \\
 \alpha_t + \sum_{n=1}^N \phi_{qnt} v_{nt} &\geq - \sum_{n=1}^N \varphi_{qnt} a_{nt} + \varepsilon_{qt} & \pi_c(q,t) & q = 1, \dots, Q \\
 0 \leq v_{nt} &\leq \bar{v}_n & \pi_v(n,t) & n = 1, \dots, N
 \end{aligned}$$

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p [e_{nt}^p] - \rho_n u_{nt} + \sigma_{1nt} - \sigma_{2nt} = 0 \quad \pi_c(n, t) \quad n = 1, \dots, N$$

$$\sum_{p=1}^P \lambda_p = 1 \quad \mu$$

$$\alpha_t \geq 0$$

$$\lambda_p \geq 0 \quad p = 1, \dots, P$$

Observe que as restrições de balanço hídrico e custo futuro são mantidas no problema mestre (4). Portanto não há dificuldade em calcular os segmentos da função de custo futuro para o estágio anterior. Conclui-se que o algoritmo proposto pode ser diretamente incorporado no esquema SDDP.

## VI.5 Integração SDDP & despacho probabilístico

### VI.5.1 Resumo do esquema proposto

A Figura 6.8 ilustra o esquema proposto. Para cada estágio, o problema mestre recebe através da decomposição de Dantzig-Wolfe informações sobre o custo imediato (valor esperado do custo de operação em função da geração hidro no estágio). Por sua vez, as informações sobre o custo futuro são obtidas através da decomposição de Benders multi-estágio (por simplicidade somente se representa na Figura 6.8 o custo futuro em função do armazenamento). A ligação entre a geração hidro no estágio e os volumes finais é feita através das equações de balanço e restrições operativas do problema mestre.

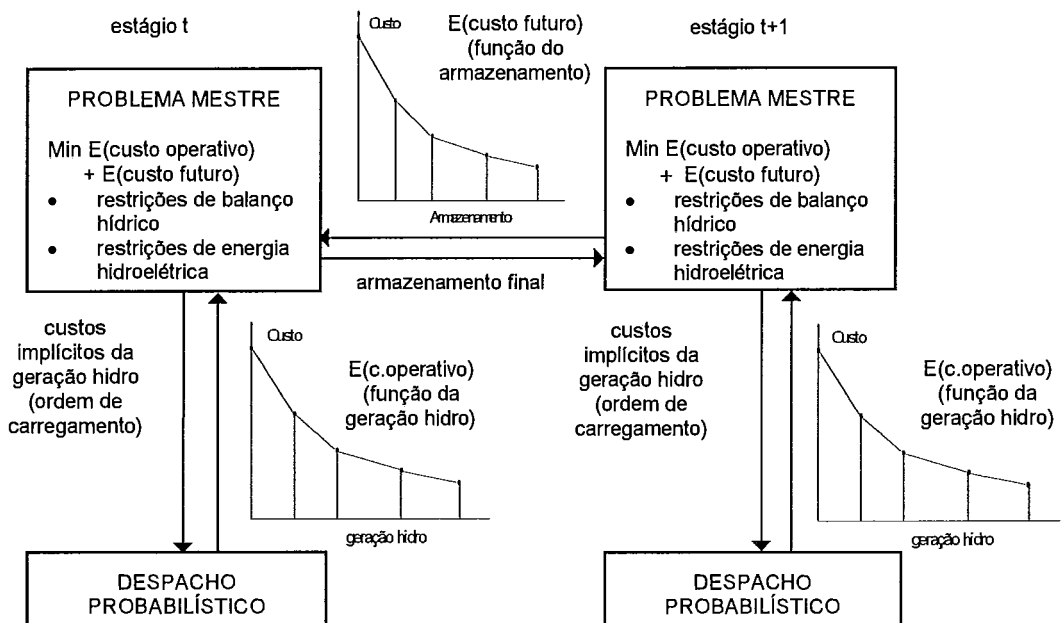


Figura 6.8 - Esquema de solução

## VI.5.2 Estratégias de solução

O algoritmo de programação dinâmica dual estocástica permite representar várias estratégias de uso da decomposição de Dantzig-Wolfe e de Benders. Por exemplo:

- a cada iteração e para cada estágio do algoritmo SDDP, resolver o problema probabilístico do custo imediato até a otimalidade utilizando a metodologia proposta e só então gerar o segmento da função de custo futuro para o estágio anterior.
- resolver o despacho hidrotérmico até a otimalidade com o algoritmo SDDP tradicional sem levar em conta o aspecto probabilístico devido as falhas dos equipamentos utilizando, por exemplo, a redução da capacidade ou *derating*. Reiniciar o processo aproveitando as aproximações da função de custo futuro obtidas anteriormente e considerando o aspecto probabilístico através da metodologia proposta. Esta estratégia pode ser utilizada porque, como mencionado no capítulo 1, o *derating* é um limite inferior do custo operativo.
- realizar somente algumas iterações do algoritmo SDDP tradicional e depois utilizar o algoritmo proposto.

## Capítulo VII. Conclusões e desenvolvimentos futuros

### VII.1 Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia que representa de maneira integrada o efeito estocástico das afluências, próprio de sistemas hidrotérmicos com o efeito das flutuações da demanda e das falhas dos equipamentos, própria de problemas de operação de sistemas térmicos.

A metodologia proposta combinou as técnicas de decomposição de Benders (na solução do problema de despacho multi-estágio), decomposição de Dantzig-Wolfe (na solução do problema de despacho probabilístico com limites de energia) e métodos de expansão em séries para a obtenção das convoluções analíticas no despacho probabilístico. O algoritmo desenvolvido é computacionalmente eficiente e utiliza como módulos os programas tradicionais para sistemas térmicos (despacho probabilístico) e hidroelétricos (programação dinâmica dual estocástica).

### VII.2 Desenvolvimentos futuros

A seguir são listados alguns tópicos para o prosseguimento da pesquisa:

- Representação de limites de transmissão entre subsistemas de geração

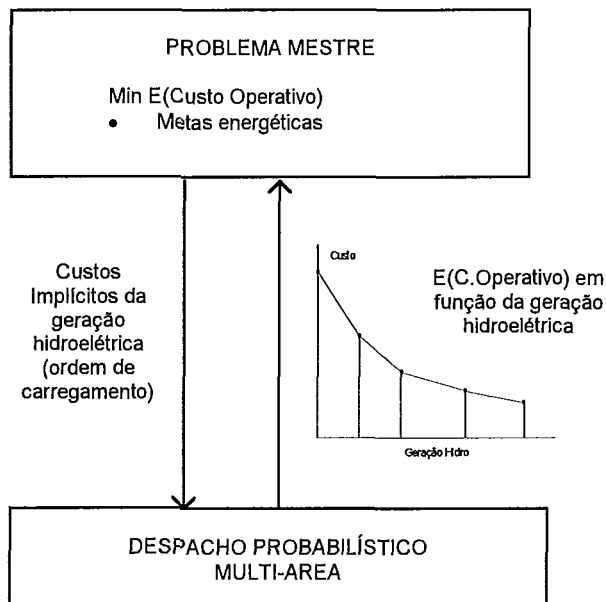


Figura 7.1 Esquema de solução de despacho probabilístico multi-área

O esquema de decomposição contínua válido, mas, neste caso, o subproblema é um problema de despacho probabilístico multi-área, que pode ser formulado com um problema de fluxo em redes. Pode-se provar que a lógica de Balériaux é válida

para este problema [13] e os problemas de confiabilidade multi-area podem ser resolvidos com algoritmos eficientes [44].

- Incorporação da metodologia como parte da solução do problema de expansão de sistemas de geração.

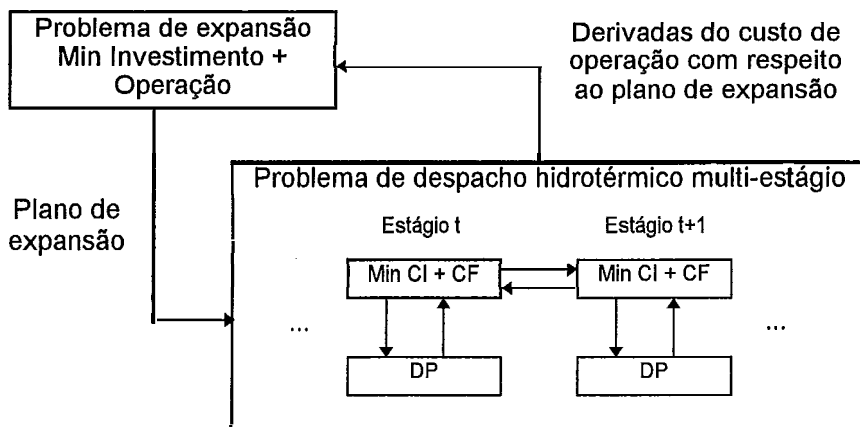


Figura 7.2 Esquema de um modelo de expansão com despacho probabilístico

Da mesma forma como mostramos no capítulo IV que os custos marginais de demanda podem ser obtidos na metodologia proposta, as derivadas do custo operativo com respeito às capacidades de geração podem ser calculadas sem dificuldade.

- Uso da metodologia no cálculo de remuneração de geradores em sistemas hidrotérmicos.

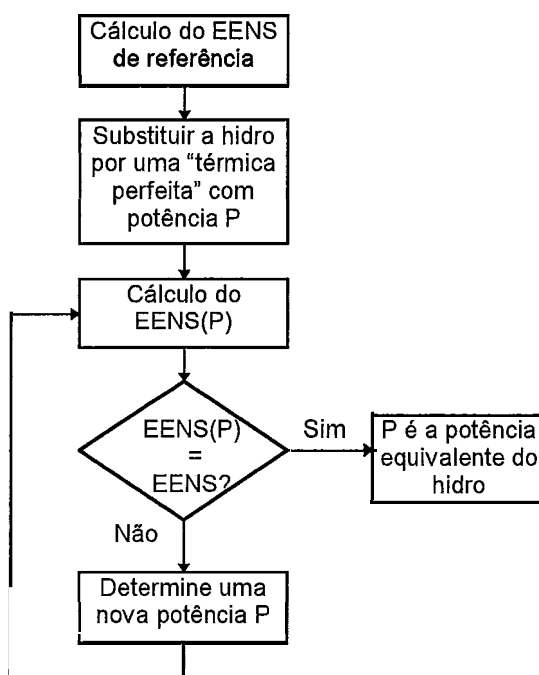


Figura 7.3 Esquema iterativo para el cálculo de la potencia equivalente



Em vários países é feito um pagamento aos geradores pela sua contribuição à confiabilidade do sistema. No caso de geradores térmicos esta contribuição se estima utilizando a potência equivalente resultante de aplicar o método de *derating*. Determinar a potência equivalente de um gerador hidráulico é mais complicado devido à restrição de meta energética. A metodologia proposta neste trabalho pode ser utilizada para calcular esta potência equivalente num esquema iterativo como o ilustrado na Figura 7.3.

## REFERÊNCIAS

- [1] J.P.Stremel, *A historical perspective on production costing models*, EPRI Monographs on Simulation of Electrical Power Production, 1991
- [2] H.Balériaux, E.Jamouille, F.Guertechin, *Simulation de l'exploitation d'un parc de machines thermiques de production d'électricité couplé à des stations de pompage*, *Revue E*, Vol. 5, No. 7, pp. 225-245, 1967
- [3] R.R.Booth, *The A-B-C of probabilistic simulation*, EPRI Monographs on Simulation Electrical Power Production, 1991
- [4] R.R.Booth, *Power system simulation model based on probability analysis*, IEEE PICA Conference, 1971
- [5] IAEA, *Wien Automatic System Planning Package (WASP), a computer code for power generating system expansion planning*, Viena, Austria, 1980
- [6] Energy Management Associates, PROMOD, User Manual
- [7] EPRI, *Electric generation expansion analysis system (EGEAS)*, EPRI Report EL-2561, Aug. 1982
- [8] E. Breitenberger, *Cumulants*, Capítulo 17 da *Chatanooga Conference of Power Production Simulation*, EPRI Monographs on Simulation of Electric Power Production, May 1993
- [9] J.P.C. Kleijnen, *Statistical techniques in simulation*, Marcel Dekker, 1974
- [10] M.Mazumdar, *Importance sampling in reliability estimation - Reliability and fault-tree analysis*, SIAM, 1975
- [11] J.A.Bloom and L.Charny, *Long range generation planning with limited energy and storage plants, Part I: Production costing*, IEEE Trans.on Power Apparatus and Systems, PAS-102, 9, pp 2861-2870, 1983.
- [12] J.A.Bloom, L.Gallant, *Modelling dispatch constraints in production cost simulations based on the equivalent load method*, PICA Conference 1993
- [13] M.E.P.Maceira, M.V.F.Pereira, *Representation of chronological hydrothermal operation in analytical production costing*, IEEE Trans.on PWRS, May 1994
- [14] R.Billinton, R.N.Allan, *Reliability evaluation of power systems*, Pitman Advanced Publishing Program, New York, 1984
- [15] H.Cramer, *Mathematical methods of statistics*, Princeton University Press, 1954
- [16] S.H.F.Cunha, G.C.Oliveira, L.M.V.Pinto, M.V.F.Pereira, *Eficiência computacional dos métodos de cálculo da probabilidade de perda de carga: um estudo comparativo*, 1º Congresso Latino-Americano de Automática/5º Congresso Brasileiro de Automática, Campina Grande, 1984
- [17] R.B.Fancher, S.M.Haas, Ch.E.Clark, *Derivatives in probabilistic simulations of electric power system operations*, IEEE Power Engineering Society, Winter Meeting, 1984
- [18] J.P. Stremel, R.T.Jenkins, R.A.Babb, W.D.Bayless, *Production costing using the cumulant method of representing the equivalent load curve*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-99, No. 5 Sept/Oct 1980
- [19] P.Nordlund, D.Sjelvgren, M.V.F.Pereira, J.Bubenko, *Generation expansion in systems with a high share of hydro power*, IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No.1, 1987
- [20] G.B.Dantzig, *Linear programming and extensions*, Princeton Univ. Press, 1963
- [21] L.A.Terry, M.V.F.Pereira, T.A.Araripe Neto, L.F.Amaro da Silva, P.R.Sales, *Coordinating the energy generation of brazilian national hydrothermal electrical generation system*, Interfaces, jan/fev 1986

- [22] B.G.Gorenstin, N.M.Campodónico, J.P.Costa, M.V.F.Pereira, *Stochastic optimization of a hydrothermal system including network constraints*, IEEE Trans.on PAS, Vol.7, No.2, May 1992
- [23] P.B.D.Massé, *Les réserves et la la régulation de l'avenir dans la vie économique*, Hermann, Paris, 1946
- [24] R.D.Rosenthal, *Nonlinear network flow algorithm for maximization of benefits in a hydroelectric power system*, Operation Research, vol.29, 1981
- [25] M.A.Hanscom, L.Lafond, L.Lasdon, G.Pronovost, *Modelling and resolution of the medium term energy generation planning problem for a large hydro-electric system*, Management Science, 1980
- [26] C.Lyra, H.Tavares, *A contribution to the midterm scheduling of large scale hydrothermal power systems*, IEEE Transactions on Power Systems, vol.3, no.3, 1988
- [27] S.Soaes, A.A.F.M.Carneiro, *Optimal operation of reservoirs for electric generation*, Proceedings of the IEEE Power Engineering Society, 1990 Summer Meeting, Minneapolis, Minnesota, 1990
- [28] J.Gessford, S.Karlin, *Optimal policy for hydroelectric operations*, Studies in the mathematical theory of inventory and production, Stanford University Press, Stanford, California, 1958
- [29] N.V.Arvanitidis, J.Rosing, *Composite representation of a multireservoir hydroelectric power system*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1970
- [30] R.E.Davis, *Stochastic dynamic programming for multi-reservoir hydro-optimization*, Technical report 15, Syst.Contr., Palo Alto, Calif., 1972
- [31] R.Pronovost, J.Boulva, *Long-range operation planning of a hydrothermal system - Modelling and optimization*, Conference of the Electrical Canadian Association, Toronto, 1978
- [32] O.Egeland, J.Hegge, E.Kylling, J.Nes, *The extended power pool model - Operation planning of a multi-river and multi-reservoir hydro-dominated power production system - A hierarchical approach*, 1982 CIGRE Meeting, Paris, 1982
- [33] V.R.Sherkat, R.Campo, K.Moslehi, E.O.Lo, *Stochastic long-term hydrothermal optimization for a multi-reservoir system*, IEEE Winter Power Meeting, New York, 1985
- [34] A.Turgeon, *A decomposition method for the long-term scheduling of reservoir in series*, Water Resources Research, 1980
- [35] J.Kelman, J.R.Stedinger, L.A.Cooper, E.Hsu, S.-Q.Yuan, *Sampling stochastic dynamic programming applied to reservoir operation*, Water Resources Research, 1990
- [36] M.Saad, A.Turgeon, J.R.Stedinger, *Censored-data correlation and principal component dynamic programming*, Water Resources Research, 1992
- [37] M.V.F.Pereira, L.M.V.G.Pinto, *Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning*, Mathematical Programming, 1991
- [38] E.G.Read, J.A.George, *Dual dynamic programming for linear production inventory systems*, Computers Math. Applic., 1990
- [39] D.L.Travers, R.J.Kaye, *Dynamic dispatch by constructive dynamic programming*, accepted for publication in IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, 1997
- [40] L.F.Escudero, J.F.de la Fuente, C.Garcia, F.J.Prieto, *Hydropower generation management under uncertainties via scenario analysis and parallel computation*, Power Industry Computer Applications PICA'95 Conference, Salt Lake City, Utah, 1995

- [41] G.B.Dantzig, P.Wolfe, *The decomposition algorithms for linear programming*, *Econometrica*, 9, no. 4, 1961
- [42] F.C.Schweppe, M.C.Caramanis, R.D.Tabors, R.E.Bohn, *Spot pricing of electricity*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1988
- [43] J.Kelman, *Modelos estocásticos no gerenciamento dos recursos hídricos*, Modelos para gerenciamento de recursos hídricos, Coleção ABRH de Recursos Hídricos, 1987
- [44] G.C.Oliveira, M.V.F.Pereira, S.H.F.Cunha, *A direct method for multi-area reliability evaluation*, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. PWRS-2, No.4, 1987

## Apêndice A - A função de custo futuro é linear por partes

Nesta seção será mostrado que a função de custo futuro é linear por partes em função do volume final. Para isto vamos supor que estamos resolvendo o problema de despacho hidrotérmico para dois estágios. Este problema corresponde ao seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & E_1 x_1 + A_2 x_2 \geq b_2 \\ & x_1 \geq 0 \quad \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  representam respectivamente o conjunto de variáveis de decisão do primeiro e segundo estágios (geração hidroelétrica, geração térmica e volumes armazenados finais). Observe que as decisões de primeiro e segundo estágio estão acopladas através das equações de balanço hídrico.

O problema (1) pode ser interpretado como um *processo de decisão em dois estágios*, onde a solução ótima do problema de segundo estágio pode ser escrita como uma função da decisão do primeiro estágio:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1) = \text{Min} \quad & c_2 x_2 \\ \text{s.a} \quad & A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

O problema (1) pode portanto ser escrito somente em termos das variáveis de decisão  $x_1$ :

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & c_1 x_1 + \alpha_1(x_1) \\ \text{s.a} \quad & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

O problema (3) pode ser interpretado como um problema de programação dinâmica onde  $c_1 x_1$  representa o *custo imediato* e  $\alpha_1(x_1)$  representa o *custo futuro* da decisão  $x_1$ . A função de custo futuro traduz os custos do segundo estágio como uma função das decisões do primeiro estágio,  $x_1$ , também conhecidas como *variáveis de estado*. Se esta função estivesse disponível, o problema de decisão em dois estágios (1) poderia ser resolvido utilizando a formulação (3).

Para demonstrar que a função de custo futuro é linear por partes vamos utilizar o dual do problema do segundo estágio (2). Sabemos pela teoria de programação linear que se os problemas são viáveis e limitados, as soluções ótimas do primal e do dual coincidem. Portanto a função de custo futuro pode ser escrita também como:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) = \text{Max} \quad & \pi (b_2 - E_1 x_1) \\ \text{s.a} \quad & \pi A_2 \leq c_2 \\ & \pi \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

onde  $\pi$  é o vetor de variáveis duais do problema (2).

Observe que na formulação dual a variável de decisão do primeiro estágio  $x_1$  está na função objetivo e não no lado direito das restrições, como no problema primal (2). Portanto o conjunto de soluções viáveis de (4) não depende de  $x_1$ . Sabemos também por teoria de programação linear que o conjunto de soluções viáveis é um polítopo totalmente definido pelos seus vértices e que o ótimo é alcançado num dos vértices deste conjunto. Sejam estes vértices  $\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^v$ , então o problema (4) pode ser reescrito como:

$$\alpha_1(x_1) = \text{Max} \{ \pi^i (b_2 - E_1 x_1), \text{ para } i = 1, \dots, v \} \quad (5)$$

ou de forma equivalente:

$$\begin{aligned} \alpha_1(x_1) = \text{Min} \quad & \alpha \\ \text{s.a} \quad & \alpha \geq \pi^1 (b_2 - E_1 x_1) \\ & \alpha \geq \pi^2 (b_2 - E_1 x_1) \\ & \dots \\ & \alpha \geq \pi^v (b_2 - E_1 x_1) \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $\alpha$  é uma variável escalar. Pode-se observar que o problema escrito desta forma caracteriza uma função linear por partes como se mostra na Figura A.1.

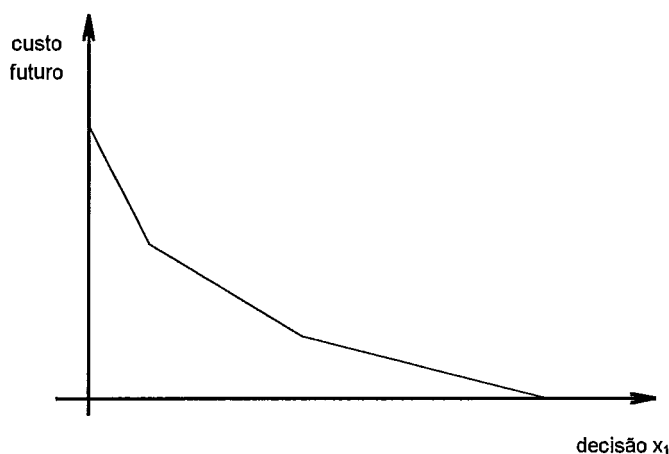


Figura A.1 - Função de custo futuro linear por partes

Substituindo a expressão do custo futuro  $\alpha_1(x_1)$  no problema global (3) tem-se:

$$\begin{aligned} z = \quad & \text{Min} \quad c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \quad & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & \alpha \geq \pi^i (b_2 - E_1 x_1) \quad \text{para } i = 1, \dots, v \end{aligned} \quad (7)$$

Esta demonstração pode ser diretamente generalizada para o caso de incerteza nas afluências, que corresponde a uma *árvore* de decisões.

## Apêndice B. Programação dinâmica dual estocástica

### B.1. Formulação do problema

O problema de despacho hidrotérmico multi-estágio pode ser formulado como um problema de *programação dinâmica estocástica*, caracterizado pela seguinte equação de recursão:

$$\alpha_t(v_{t-1}, a_{t-1}) = E\{ \text{Min} [z_t(e_t) + \alpha_{t+1}(v_t, a_t)] \} \quad (1)$$

$$\text{s.a} \quad v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_t} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}(i) + a_t(i) \quad i = 1, \dots, I$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) \quad i = 1, \dots, I$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i) \quad i = 1, \dots, I$$

$$e_t(i) = \rho(i) u_t(i) \quad i = 1, \dots, I$$

onde  $i$  indexa as usinas hidroelétricas ( $I = \text{número de hidroelétricas}$ ) e  $z_t(e_t)$  representa o custo operativo associado à geração hidroelétrica  $e_t$ , isto é:

$$z_t(e_t) = \text{Min} \quad \sum_{j=1}^J c(j)g_t(j) + c_\delta \delta_t \quad (2)$$

$$\text{s.a} \quad \sum_{j=1}^J g_t(j) + \sum_{i=1}^I e_t(i) + \delta_t = d_t$$

$$0 \leq g_t(j) \leq \bar{g}_t(j) \quad j = 1, \dots, J$$

onde  $j$  indexa as usinas térmicas ( $J = \text{número de térmicas}$ ).

Em teoria, a recursão (1) poderia ser resolvida através de um algoritmo de programação dinâmica estocástica (PDE) [21]. No entanto, o esforço computacional do algoritmo PDE tradicional cresce exponencialmente com o número de variáveis de estado do problema.

Devido a isto, utiliza-se a técnica de programação dinâmica estocástica dual (SDDP) [22], que permite obter os mesmos resultados da PDE tradicional, sem necessidade de discretização do espaço de estados. O algoritmo SDDP é um processo iterativo de construção de uma aproximação da função de custo futuro, cuja precisão depende de dois parâmetros: o tamanho da amostra de estados ( $L$ ) e o número de cenários condicionados utilizados no cálculo da função de custo futuro ( $N$ ).

## B.2 Passos do algoritmo SDDP

### B.2.1 Seleção do conjunto inicial de estados

Na primeira iteração é preciso contar com  $L$  estados iniciais. Para cada estágio  $t$  o estado  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  representa as condições iniciais de armazenamento e afluições, para  $l = 1, \dots, L$ .

#### B.2.1.1 Estados iniciais de armazenamento

O estado inicial de armazenamento para o estágio  $t=1$  é um dado conhecido, igual a  $v_0$  para cada um dos  $L$  estados. Os estados iniciais de armazenamento  $\{v_{t-1}^l\}$ ,  $l = 1, \dots, L$  e  $t = 2, \dots, T$  podem ser obtidos dividindo-se a capacidade do reservatório em  $L$  faixas. Por exemplo, se  $L = 5$ , os estados de armazenamento seriam 100%, 75%, 50%, 25% e 0%.

#### B.2.1.2 Estados iniciais de afluições

A condição hidrológica inicial  $a_0$  é um dado conhecido. Os estados iniciais de afluições anteriores  $\{a_{t-1}^l\}$ ,  $l = 1, \dots, L$  são obtidos gerando-se um conjunto de  $L$  seqüências hidrológicas para os estágios  $t = 2, \dots, T$ . O processo de geração consiste em sortear aleatoriamente um vetor de ruídos  $\xi_t^l$  com distribuição lognormal de três parâmetros e calcular o vetor de afluições para o estágio  $t$ , seqüência  $l$  como:

$$a_t^l = \Phi_{t-1} \times a_{t-1}^l + \Lambda_t \times \xi_t^l \quad (10)$$

As matrizes  $\Phi_{t-1}$  e  $\Lambda_t$  contém os parâmetros do modelo estocástico de afluições.  $\Phi_{t-1}$  representa a relação entre as afluições de uma mesma usina em estágios consecutivos (correlação temporal), enquanto  $\Lambda_t$  representa a relação entre todas as afluições do sistema no mesmo estágio (correlação espacial). Nesta apresentação da metodologia utilizamos um modelo autoregressivo de ordem 1, com o objetivo de simplificar a notação. Observe-se que a utilização de modelos de ordem maior que 1 não compromete a eficiência da metodologia.

### B.2.2 Cálculo da Função Aproximada de Custo Futuro

A aproximação da função de custo futuro é construída através de uma recursão no sentido inverso do tempo. Para cada estágio  $t$  e para cada estado  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  o seguinte processo é repetido.



### B.2.2.1 Geração dos $N$ cenários de afluições condicionadas

São gerados  $N$  cenários de afluições condicionadas à afluição  $a_{t-1}^l$ , como mostrado a seguir:

$$a_t^{ln} = \Phi_{t-1} \times a_{t-1}^l + \Lambda_t \times \xi_t^n \quad \text{para } n = 1, \dots, N \quad (11)$$

onde  $\Phi_{t-1}$  e  $\Lambda_t$  são os parâmetros do modelo estocástico de afluições para o estágio  $t$ , e o vetor  $\xi_t^n$  é obtido por um sorteio aleatório de uma distribuição lognormal.

### B.2.2.2 Solução do problema de operação

Seja  $v_{t-1}^l$  o vetor de armazenamentos iniciais e  $a_t^{ln}$  um dos vetores de afluições condicionadas produzido no passo B.2.2.1. É resolvido então o problema operativo para o estágio  $t$ :

$$w_t^{ln} = \text{Min} \quad z_t(e_t) + \alpha_{t+1} \quad (12)$$

$$\text{s. a:} \quad v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_i} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}^l(i) + a_t^{ln}(i) \quad \pi_{v_{t-1}^l}^{ln}(i)$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i) \quad \pi_{\bar{v}_t}^{ln}(i)$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i) \quad \pi_{\bar{u}_t}^{ln}(i)$$

$$e_t(i) = \rho(i) u_t(i)$$

$$\alpha_{t+1} - \sum_{i=1}^I \phi_{v_t}^p(i) \times v_t(i) \geq \sum_{i=1}^I \phi_{a_t}^p(i) \times a_t^{ln}(i) + r_t^p \quad \pi_{\alpha_{t+1}}^{ln}(p)$$

$$\alpha_{t+1} \geq 0$$

$$\text{para } i = 1, \dots, I; \text{ para } j = 1, \dots, J; \text{ para } p = 1, \dots, P(t)$$

onde  $P(t)$  é o número de aproximações da função de custo futuro no estágio  $t$ . Inicialmente  $P(t) = 0$ .

### B.2.2.3 Cálculo das derivadas

Após a solução do problema (12) para cada um dos cenários de afluições condicionadas, são calculadas as derivadas da função objetivo com respeito às condições iniciais  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$

O vetor  $\partial w_t^{ln} / \partial v_{t-1}^l$  representa a variação do custo operativo com respeito aos armazenamentos iniciais. Como estes armazenamentos só aparecem na equação de balanço hídrico, tem-se:

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial v_{t-1}^l} = \pi_{v_{t-1}}^{ln} \quad (13)$$

onde  $\pi_{v_{t-1}}^{ln}$  é o multiplicador simplex associado à equação de balanço hídrico do problema (12).

A variação do custo operativo com respeito às afluências do estágio anterior,  $\partial w_t^{ln} / \partial \alpha_{t-1}^l$  são obtidas da seguinte maneira. Embora  $\alpha_{t-1}^l$  não apareça no lado direito do problema (12), a regra da cadeia é utilizada para obter a derivada:

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial \alpha_{t-1}^l} = \frac{\partial w_t^{ln}}{\partial \alpha_t^{ln}} \times \frac{\partial \alpha_t^{ln}}{\partial \alpha_{t-1}^l} \quad (14)$$

Como  $\alpha_t^{ln}$  aparece na equação de balanço hídrico e nas restrições de custo futuro, tem-se:

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial \alpha_t^{ln}} = \pi_{v_{t-1}}^{ln} + \sum_{p=1}^{P(t)} \phi_{\alpha_t^p} \times \pi_{\alpha_{t+1}^{ln}}(p) \quad (15)$$

Para obter o termo  $\partial \alpha_t^{ln} / \partial \alpha_{t-1}^l$ , substitui-se  $\alpha_t^{ln}$  pela expressão (11) do modelo estocástico de afluências. Derivando-se tem-se:

$$\frac{\partial \alpha_t^{ln}}{\partial \alpha_{t-1}^l} = \Phi_{t-1} \quad (16)$$

A derivada desejada é calculada como o produto das expressões (15) e (16):

$$\frac{\partial w_t^{ln}}{\partial \alpha_{t-1}^l} = [\pi_{v_{t-1}}^{ln} + \sum_{p=1}^{P(t)} \phi_{\alpha_t^p} \times \pi_{\alpha_{t+1}^{ln}}(p)] \times \Phi_{t-1} \quad (17)$$

Por simplicidade de notação, define-se:

$$\phi_{\alpha_{t-1}^l}^{ln} = \frac{\partial w_t^{ln}}{\partial \alpha_{t-1}^l} \quad (18)$$

#### B.2.2.4 Cálculo da aproximação da função de custo futuro

Após a solução dos  $N$  problemas correspondentes aos  $N$  cenários condicionados ao estado  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$  e calculadas as derivadas com respeito às condições iniciais para cada cenário  $n$ , o valor esperado destas derivadas é dado por

$$\phi_{v_{t-1}}^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \pi_{v_{t-1}}^{ln} \quad (19)$$

$$\phi_{a_{t-1}}^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_{a_{t-1}}^{ln} \quad (20)$$

e o valor esperado da função objetivo é:

$$w_t^l = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_t^{ln} \quad (21)$$

Uma aproximação da função de custo futuro do estágio anterior  $t-1$  é obtida através da linearização do valor esperado  $w_t^l$  em torno do estado inicial  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$

$$\alpha_{t-1}^l(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) \geq w_t^l + \phi_{v_{t-1}}^l \times (v_{t-1} - v_{t-1}^l) + \phi_{a_{t-1}}^l \times (a_{t-1} - a_{t-1}^l) \quad (22)$$

Separando os valores conhecidos das variáveis de decisão e agregando os termos, tem-se:

$$\alpha_{t-1}^l(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l) \geq \phi_{v_{t-1}}^l \times v_{t-1} + \phi_{a_{t-1}}^l \times a_{t-1} + r_{t-1}^l \quad (23)$$

onde  $r_{t-1}^l$  é um termo constante dado por:

$$r_{t-1}^l = w_t^l - \phi_{v_{t-1}}^l \times v_{t-1}^l - \phi_{a_{t-1}}^l \times a_{t-1}^l \quad (24)$$

#### B.2.2.5 Atualização da função de custo futuro do estágio anterior

O procedimento descrito em B.2.2.4 constrói um hiperplano que aproxima a função de custo futuro do estágio anterior  $t-1$  em torno do estado inicial  $(v_{t-1}^l, a_{t-1}^l)$ . Este processo se repete para cada estado  $l$ , com  $l = 1, \dots, L$ . Desta forma geramos  $L$  aproximações da função de custo futuro para o estágio  $t-1$ . Estes  $L$  novos hiperplanos são adicionados ao problema do estágio anterior, assim  $P(t-1) \leftarrow P(t-1) + L$ .

### B.2.3 Cálculo do limite inferior

O problema operativo é resolvido agora para o primeiro estágio,  $t=1$ . Os segmentos da função de custo futuro para este estágio foram obtidos como descrito no item B.2.2. O valor esperado do custo operativo ao longo do período de planejamento é calculado como:

$$\underline{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L w_1^l \quad (25)$$

onde:

$\underline{w}$  valor esperado do custo operativo

$w_1^l$  valor ótimo do problema operativo do primeiro estágio dado o volume inicial  $v_0$  e o vetor de afluências  $\alpha_1^l$ :

$$w_1^l = \text{Min} \quad \sum_{j=1}^J c_1(j)g_1(j) + c_8\delta_t + \alpha_1 \quad (26)$$

sujeito a restrições operativas etc.

Se o procedimento descrito nos itens B.2.1 e B.2.2 fosse aplicado a todos os estados  $(v_{t-1}^l, \alpha_{t-1}^l)$  possíveis do sistema, o custo operativo médio calculado em (25) seria por definição a solução ótima do problema estocástico. Como o número total de estados é excessivamente elevado, vimos que o procedimento é aplicado a um subconjunto de  $L$  estados. Portanto, as funções de custo futuro  $\{\alpha_t\}$  calculadas são aproximações das funções verdadeiras. Em particular, dado que a aproximação da função de custo futuro não inclui todos os segmentos, o valor  $\underline{w}$  em (25) é um limite inferior para a solução ótima.

### B.2.4 Cálculo do limite superior

O cálculo do limite superior se baseia na observação de que o custo esperado resultante da simulação operativa do sistema para qualquer função de custo futuro não pode ser inferior ao valor ótimo. O processo consiste numa simulação no sentido direto do tempo de uma amostra de tamanho  $L$ . O procedimento de simulação é apresentado a seguir.

#### B.2.4.1 Estados iniciais de armazenamento

Para o estágio  $t=1$  se considera o vetor de volumes iniciais  $v_0$ .

#### B.2.4.2 Estados iniciais de afluências

Os estados iniciais de afluências para os estágios  $t = 1, \dots, T$  e para os cenários  $l = 1, \dots, L$  são os mesmos sorteados no item B.2.1.2.

### B.2.4.3 Simulação operativa

Para cada estágio  $t$  e para cada estado inicial  $(v_{t-1}^l, \alpha_{t-1}^l)$  é resolvido o problema operativo:

$$w_t^l = \text{Min} \quad z_t(e_t) + \alpha_{t+1} \quad (27)$$

$$\text{s. a:} \quad v_t(i) + s_t(i) + u_t(i) - \sum_{m \in M_i} [s_t(m) + u_t(m)] = v_{t-1}^l(i) + \alpha_t^l(i)$$

$$0 \leq v_t(i) \leq \bar{v}_t(i)$$

$$0 \leq u_t(i) \leq \bar{u}_t(i)$$

$$e_t(i) = \rho(i) u_t(i)$$

$$\alpha_{t+1} - \sum_{i=1}^I \phi_{v_t}^p(i) \times v_t(i) \geq \sum_{i=1}^I \phi_{\alpha_t}^p(i) \times \alpha_t^l(i) + r_t^p$$

$$\alpha_{t+1} \geq 0$$

para  $i = 1, \dots, I$ ; para  $j = 1, \dots, J$ ; para  $p = 1, \dots, P(t)$

onde  $P(t)$  é o número de aproximações da função de custo futuro no estágio  $t$  obtidas no processo de recursão descrito em B.2.2.

À solução deste problema está associada a seguinte grandeza:

$$z_t^l = w_t^l - \alpha_t^l \quad (28)$$

onde  $w_t^l$  é o valor ótimo da solução e  $\alpha_t^l$  é o valor da variável de custo futuro na solução ótima. Em outras palavras,  $z_t^l$  representa o custo operativo no estágio  $t$ , sem custo futuro.

### B.2.4.4 Atualização do estado inicial de armazenamento

Para os estágios  $t$ ,  $t = 2, \dots, T$ , atualize os estados iniciais de armazenamento utilizando o vetor de armazenamentos finais  $v_{t-1}^l$  obtido na solução do problema operativo do estágio  $t-1$  para o  $l$ -ésimo cenário.

### B.2.4.5 Obtenção do limite superior

Após a solução do problema (27) para cada estado inicial  $(v_{t-1}^l, \alpha_{t-1}^l)$  e para cada estágio podemos calcular:

$$\bar{w} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L z^l \quad (30)$$

onde  $z^l$  é o custo operativo total da seqüência  $l$ :

$$z^l = \sum_{t=1}^T z_t^l \quad (31)$$

### B.2.5 Verificação da Otimalidade

O limite superior estimado em (30) se baseia em uma amostra de  $L$  seqüências de afluências. Portanto, há uma incerteza ao redor desta estimativa, que depende do desvio padrão do estimador:

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{1}{L^2} \sum_{l=1}^L (z^l - \bar{w})^2} \quad (32)$$

O intervalo de confiança (95%) para  $\bar{w}$  é:

$$[\bar{w} - 1.96 \sigma_w, \bar{w} + 1.96 \sigma_w] \quad (33)$$

Se o limite inferior  $\underline{w}$  está no intervalo (33), é encontrada a solução ótima, e o algoritmo termina.

Caso contrário, é preciso melhorar a aproximação das funções de custo futuro e portanto repetir o procedimento descrito no item B.2.2. Os novos estados de armazenamento são os volumes ( $v_{t-1}^l$ ) produzidos na simulação operativa descrita no item B.2.4. Os estados de afluências ( $a_{t-1}^l$ ) permanecem iguais.