O Problema de Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio

Gudelia Guillermina Morales Boluarte

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Nelson Maculan, D. Sc. (Presidente)

Profa. Susana Scheimberg, D. Sc.

Prof. Rolci de Almeida Cipolatti, D. Sc.

Profa. Ma. Helena Cautério Jardim D. Sc.

Prof. Sérgio Granville, Ph. D.

Prof. Orizon Pereira Ferreira, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1997

MORALES BOLUARTE, GUDELIA GUILLERMINA

O Problema de Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio [Rio de Janeiro] 1997.

VII, 88 p. 29.7 cm (COPPE / UFRJ, D. SC. Engenharia de Sistemas e Computação, 1997).

Tese - Universidade Federal do Rio e Janeiro, COPPE

1. Desigualdades Variacionais 2. Problema de Dois Níveis 3. Não Diferenciabilidade, Condições de Otimalidade.

I. COPPE / UFRJ II. Título (série).

AGRADECIMENTOS

- À Profa. Susana Scheimberg de Makler, pela estimulante discussão e orientação. As muitas horas de paciente leitura dedicadas e suas interessantes observações permitiram-me desenvolver muitas das idéias aqui apresentadas. Agradeço especialmente seu grande interesse por este trabalho.

- A José Arica, pelo estimulo e confiança mostrados a cada discussão durante o desenvolvimento deste trabalho. Sem suas sugestões haveria sido mais difícil concluí-lo.

- À Capes, à Universidade Estadual do Norte Fluminense e a FENORTE pelo apoio institucional e financeiro.

- Aos colegas do Laboratório de Ciências de Engenharia (Setor de Produção) da UENF, de modo especial ao Prof. Helder Gomes Costa, pelo incentivo e confiança manifestados nos momentos difíceis no desenvolvimento da tese.

- Ao Professor Eugen Blum (*in Memorian*) por me mostrar a Matemática além dele mesmo, por ter sido meu Mestre sem considerar as minhas limitações e me ensinar a perseguir o horizonte.

- À minha família, pela compreensão, carinho e apoio, sem os quais teria sido impossível a finalização deste trabalho.

DEDICO ESTE TRABALHO A MINHA FAMÍLIA:

JOSÉ, meu companheiro,

CATALINA, NATALIA e VICTORIA, minhas filhas, e

ENCARNACIÓN, minha mãe.

Resumo da Tese apresentada à COPPE / UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção de grau de Doutor em Ciências (D. Sc.).

O Problema de Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio

Gudelia Guillermina Morales Boluarte

DEZEMBRO, 1997

Orientadora: Profa. Susana Scheimberg

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Tratamos aqui o Problema de Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio (PMRGE), que é um problema do tipo *líder-seguidor*, onde o problema do seguidor é formulado por uma Desigualdade Variacional Generalizada.

O problema PMRGE é uma extensão de problemas que na literatura recebem o nome de Problemas de Dois Níveis Generalizados ou Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio. Este problema, como outros problemas hierárquicos, é um problema não diferenciável e não convexo.

Neste trabalho investigamos as propriedades do problema PMRGE e obtemos condições de otimalidade de primeira ordem sob a condição de problema *calme*. Esta área da Matemática está em desenvolvimento usando a Teoria de Não Diferenciabilidade e esta tese é um esforço nessa direção.

Abstract of thesis presented to COPPE / UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

The Mathematical Programming Problem with Generalized Equilibrium Constraint

Gudelia Guillermina Morales Boluarte

DECEMBER, 1997

Thesis supervisor: Profa. Susana Scheimberg
Department: Engenharia de Sistemas e Computação

We deal here with the Mathematical Programming. Problem with Generalized Equilibrium Constraint (MPGEC), which is a leader-follower problem, where the follower problem is given by a Generalized Variational Inequality.

The problem MPGEC is an extension of problems that in the literature are known as Generalized Bilevel Problems or Mathematical Programming Problems with Equilibrium Constraint. This problem, like other hierarquical problems, is a nonsmooth and nonconvex problem.

In this work we research the properties of the problem MPGEC and obtain first order optimality conditions under *calm* problem hypothesis. This area of Mathematics is being developed using nonsmooth theory and this thesis is an effort in this address.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese introduzimos o problema de otimização que denominamos de *Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio* $(PMRGE)$ e desenvolvemos condições de otimalidade obtendo algumas generalizações, de propriedades, sobre subdiferenciabiliadade. O problema PMRGE é uma extensão do problema de otimização conhecido como de Dois Níveis, (PDN), que foi a motivação fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Um problema (PDN) consite em calcular o valor da função objetivo e suas funções de restrição para os quais é necessário resolver um problema de otimizção subsidiário. Neste capítulo formulamos o problema PMRGE, damos sua relação com outros problemas de otimização e apresentamos uma breve descrição do conteúdo da tese.

1.1 Formulação do problema

Com o intuito de tornar a leitura mais compreensível, antes de apresentar o problema damos algumas definições e notações .

Seja $Y \subset I\!R^m$ um conjunto não vazio, convexo e fechado e $T : I\!R^m \to 2^{I\!R^m}$ uma aplicação ponto-conjunto. O problema de *Desigualdade Variacional Generalizada*, [16], está definido por

$$
\begin{aligned}
(DVG): \quad & \text{Achar } y \in Y, \text{ tal que existe } w \in T(y) \\
& \text{que satisfaz } \langle w, z - y \rangle \geq 0, \forall z \in Y.
\end{aligned}
$$

Este problema é também conhecido como problema de desigualdade variacional não linear, [28, 29], e no contexto da Programação Matemática, relacionado à Teoria de Jogos, algumas vezes é chamado de Problema de Equilíbrio, [6, 11].

Algumas modificações simples nos permitem parametrizar o problema (DVG). Sejam as aplicações ponto-conjunto $Y : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^m}$ e $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to 2^{\mathbb{R}^m}$ com imagens não vazias, fechadas e convexas. O problema de *Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica*, está definido por:
dado o parâmetro $x \in \mathbb{R}^n$, (tem-se a Desigualdade Variacional Generalizada)

$$\begin{aligned}(DVG_x): \quad & \text{Achar } y \in Y(x), \text{ tal que existe } w \in T(x,y) \\ & \text{que satisfaz } \langle w, z-y\rangle \geq 0, \forall z \in Y(x).\end{aligned}$$

A seguir definimos o problema que analizamos ao longo da tese. O Problema de *Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio* está dado por

$$\begin{aligned}(PMRGE): \quad \text{minimizar} \quad & F(x,y) \\ \text{s. a} \quad & G(x,y) \leq 0 \\ & y \in \mathcal{O}_G(x) \\ & (x,y) \in C_1 \times C_2,\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

onde $C_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $C_2 \subset \mathbb{R}^m$ são conjuntos convexos fechados não vazios, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{k_1}$ e

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_G(x) := \{y \in Y(x) : \exists\, w \in T(x,y), \text{ com } \langle w, z-y\rangle \geq 0, \forall z \in Y(x)\} \\ \text{sendo, } Y(x) = \{z \in \mathbb{R}^m : g(x,z) \leq 0\} \quad \text{e} \quad g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{k_2}.\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

O conjunto $\mathcal{O}_G(x)$ está formado pelas soluções de (DVG_x), para cada $x \in C_1$.

1.2 Casos Particulares

O problema $(PMRGE)$ é do tipo *hierárquico*, onde o primeiro nível (o líder) é um problema de otimização e o segundo nível (o seguidor) corresponde a um problema Generalizado de Equilíbrio, [17]. Por um lado generaliza o *problema de Dois Níveis* clássico, [52], onde o seguidor é um problema de Programação Matemática e, por outro lado, estende o problema de *Dois Níveis Generalizado*, onde o segundo nível é uma desigualdade variacional definida por uma aplicação ponto-a-ponto, [53]. No artigo de LOU *et al.* (1996), este último problema é denominado problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (PMRE). Com efeito:

1) Consideremos uma função $f : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R \cup \{\infty\}$ tal que $f(x,.)$, para cada ponto $x \in I\!R^n$, é própria e convexa em $y \in I\!R^m$, e seja $Y : I\!R^n \to 2^{I\!R^m}$ descrito em 1.1.2. Definimos a aplicação $T : I\!R^n \times I\!R^m \to 2^{I\!R^m}$ como sendo o subdiferencial relativo a y, quer dizer $T(x,y) = \partial_y f(x,y)$. Dado $x \in I\!R^n$, assumimos que $ri(Dom\ T(x,\ .\ )) \cap ri(Y(x))$ é não vazio (a notação ri significa *interior relativo*) . De [37], e o Teorema 27.4, [38], resulta que o problema (DVG_x) é equivalente a:

$$\text{Achar } y \in Y(x), \text{ tal que satisfaz } f(x,z) - f(x,y) \geq 0, \ \forall z \in Y(x),$$

i.e., o problema (DVG_x) caracteriza uma condição necessária e suficiente de otimalidade para o programa (não diferenciável) com restrições

$$\begin{array}{rll} (P): & \text{minimizar} & f(x,y) \\ & \text{s. a} & y \in Y(x) \end{array}$$

(Teorema 2.3, [13]). Notemos que, neste caso, o problema $(PMRGE)$ se reduz a um *Problema de Dois Níveis clássico*, [56], conhecido também como problema hierárquico, formulado como

$$\begin{array}{rll} (PDN_1): & \text{minimizar} & F(x,y) \\ & \text{s. a} & G(x,y) \leq 0 \\ & & y \in \arg \min\limits_{z \in Y(x)} \{f(x,z)\} \\ & & (x,y) \in C_1 \times C_2. \end{array} \tag{1.2.3}$$

O problema (PDN_1) teve como origem o estudo de um certo tipo de equilíbrio em economia, o equilíbrio de Stackelberg, ligado a problemas de jogos líder-seguidor, no qual dois jogadores tratam de minimizar suas particulares funções objetivo $F(x,y)$ e $f(x,y)$ respectivamente. Esta formulação é considerada em [30].

Observemos que assumindo que a função $f : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R \cup \{\infty\}$ é própria, semicontínua inferior, localmente Lipschitziana no interior de $DomT(x,.)$, e $Y(x) = I\!R^m$ (lembrar que $T(x,y) = \partial_y f(x,y)$), o problema (DVG_x) torna-se a condição necessária de otimalidade de um problema não diferenciável sem restrições. Em conseqüência, estamos tratando novamente com o problema $(PMRGE)$, sendo que neste caso podemos ainda expressá-lo como o problema de dois níveis clássico

$$
\begin{array}{lll}
(PDN_2): & \text{minimizar} & F(x,y) \\
 & \text{s. a} & G(x,y) \leq 0 \\
 & & y \in \arg \min\limits_{z \in I\!R^m} \{f(x,z)\} \\
 & & x \in C_1.
\end{array}
\tag{1.2.4}
$$

2) Consideremos a aplicação $T : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R^m$ univaluado, isto é, as imagens de T são formados por um único elemento. Neste caso, a desigualdade variacional generalizada paramétrica corresponde à *Desigualdade Variacional Paramétrica* seguinte: dado $x \in I\!R^n$

$$
\begin{array}{ll}
(DV_x): & \text{Achar } y \in Y(x), \text{ tal que} \\
 & \langle T(x,y), z - y \rangle \geq 0, \forall z \in Y(x).
\end{array}
$$

Sob estas condições o problema $(PMRGE)$ é chamado *Programa Matemático com Restrições de Equilíbrio*, [22], e é também conhecido como *Problema de Dois Níveis Generalizado*, [53],

$$
\begin{array}{lll}
(PDNG): & \text{minimizar} & F(x,y) \\
 & \text{s.a} & G(x,y) \leq 0 \\
 & & y \in \mathcal{O}(x) \\
 & & (x,y) \in C_1 \times C_2,
\end{array}
$$

onde $\mathcal{O}(x) := \{y \in Y(x) / \langle T(x,y), z - y \rangle \geq 0, \forall z \in Y(x)\}$ é o conjunto solução de (DV_x).

O $(PDNG)$, no contexto do Controle Ótimo, é conhecido como *Problema de Otimização com uma Desigualdade Variacional como Restrição* , [23, 32].

1.3 Metodologia

A dificuldade principal para tratar com o problema $(PMRGE)$ se deve à restrição generalizada de equilíbrio , definida implicitamente por $y \in \mathcal{O}_G(x)$. Nossa estratégia para contornar esta dificuldade consiste em caracterizar o conjunto $\mathcal{O}_G(x)$ através dos zeros de uma espécie de função de mérito não negativa: a função gap generalizada.

Uma *função gap generalizada* associada ao problema Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica é a função $g_T : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R \cup \{+\infty\}$, definida por

$$g_T(x,y) := \begin{cases} \sup_{z \in Y(x)} \sup_{w \in T(x,z)} \langle w, z - y \rangle & , \text{ se } y \in Y(x) \cap Dom(T(x,.)) \\ +\infty & , \text{ em outro caso.} \end{cases}$$

Esta *função gap generalizada* é uma extensão da *função gap dual* associada a uma desigualdade variacional, g_T, definida em [17, 18, 21]. Veremos no Capítulo 3 que g_T verifica as seguintes propriedades :

- $g_T(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in I\!R^n \times I\!R^m$;
- Se $T(x,.)$ é monótono maximal e $ri(Y(x)) \cap ri(Dom\ T(x,.)) \neq \emptyset$ então, $g_T(x,y) = 0$ se, e somente se, $y \in \mathcal{O}_G(x)$.

Com a estratégia proposta conseguimos reformular o problema $(PMRGE)$ como um problema de otimização *usual*, no sentido de substituir a restrição $y \in \mathcal{O}_G(x)$ por $g_T(x,y) = 0$.

A idéia de substituir a restrição complicadora por uma outra mais manipulável é uma técnica de abordagem típica para o problema de dois níveis (PDN_1). Assim, por exemplo, a restrição $y \in \arg\min_{z \in Y(x)}\{f(x,z)\}$ é substítuida por $f(x,y) - v(x) = 0$ e $y \in Y(x)$, onde v é a função marginal do problema do seguidor. Neste caso, consegue-se reformular o problema de dois níveis como um problema de *um nível* (ver, por exemplo, [2, 4, 31, 52]). No artigo de YE et al. (1997) considera-se uma formulação semelhante para o caso em que o seguidor é uma Desigualdade Variacional (não generalizada) usando uma função gap primal.

Sob condições convenientes podemos reescrever o problema $(PMRGE)$, como

$$\begin{aligned} (PDN^*): \quad \text{minimizar} \quad & F(x,y) \\ \text{s. a} \quad & G(x,y) \leq 0 \\ & g(x,y) \leq 0 \\ & g_T(x,y) = 0 \\ & (x,y) \in C_1 \times C_2. \end{aligned}$$

A partir do problema (PDN^*) desenvolvemos condições necessárias de otimalidade do tipo Karush-Kuhn-Tucker (K-K-T) para o nosso problema original, $(PMRGE)$. Com a introdução de hipóteses adequadas, no Capítulo 3, nos permite assegurar um comportamento conveniente da função $g_T(.,.)$ e nos garante a formulação das condições necessárias de otimalidade. Notemos, porém, que a função g_T é não diferenciável e não convexa, dificultando seu tratamento, entretanto goza de um certo tipo de semicontinuidade inferior que exploramos ao longo deste trabalho.

Nos últimos dez anos, a quantidade de trabalhos publicados sobre problemas do tipo (PDN_1) tem sido grande. Encontram-se em [1] diversas aplicações a problemas de engenharia, economia e transporte. Como já foi observado anteriormente, os problemas de dois níveis resultam sendo casos particulares do problema $(PMRGE)$ quando o problema do seguidor é um programa convexo não necessariamente diferenciável.

Recentemente, a Análise Não Diferenciável foi usada para estudar condições de otimalidade para problemas de Dois Níveis (ver, por exemplo, [3, 52, 54, 56]). De forma genérica, estes trabalhos fazem uso do conceito de *calma*. A calma é uma condição de qualificação , para um programa matemático, mais fraca que as usuais, por exemplo que a condição de Mangasarian-Fromowitz ([14, 44]).

Em [31, 32], é abordado o problema (PMRE) que corresponde ao caso de uma Desigualdade Variacional Paramétrica (não generalizada) como restrição para o segundo nível (ver capítulo 2 na seção 2.5). Assume-se, nesses trabalhos, diferenciabilidade das funções envolvidas e hipóteses que determinam conjuntos de equilíbrio unitário, isto é soluções únicas para o segundo nível, $\mathcal{O}(x) = \{y(x)\}$, além da diferenciabilidade de Frechet para a solução $y(x)$. Trabalhando com funções localmente Lipschitzianas, [32] apresenta uma proposta algorítmica que faz uso de técnicas de penalidade exata no contexto da Análise Não Diferenciável. Nós consideramos hipóteses mais fracas. Trabalhamos, também, com funções localmente Lipschitzianas, mas lembramos que nossa restrição de equilíbrio está determinada por uma Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica e não exigimos que o conjunto de soluções seja unitário.

Em [22] é considerado, também, o problema (PMRE), as funções são localmente Lipschitzianas permitindo-se respostas (soluções) não unitárias do seguidor . São formuladas condições de otimalidade usando penalidade exata, a teoría de funções subanalíticas e das equações normais.

As condições necessárias de otimalidade, que nos propomos, são estabelecidas para uma aplicação ponto-conjunto monótono maximal na segunda variável, $T(x, \, . \,)$, que define a Desigualdade Variacional Generalizada permitindo respostas não unitárias do seguidor. Nosso estudo utiliza ferramentas provenientes da Análise Não Diferenciável e da Teoria de Aplicações Ponto-conjunto.

A organização da tese é como segue. No próximo capítulo apresentamos definições e propriedades da Análise Não Diferenciável aplicadas a Programação Matemática; as principais propriedades da *função gap generalizada*, definições e resultados básicos das aplicações ponto-conjunto e um teorema de existência de soluções para uma Desigualdade Variacional Generalizada . No Capítulo 3 analisamos a subdiferenciabilidade da *função gap generalizada* (não paramétrica) associada a (DVG) e formulamos uma caracterização de $\partial g_T(y)$. Deduzimos, também, as características da *função gap generaliza-*

da associada com (DVG_x), sob a condição de *maleabilidade* (" tameness") [44]. Garantimos a subdiferenciabilidade de $g_T(.,.)$, nos pontos de interesse, e encontramos um conjunto limitante superior do conjunto $\partial g_T(.,.)$. Este conjunto limitante esta constituido pelos multiplicadores de Lagrange do problema de otimização que define a *função gap generalizada*, isto é, está definido em termos das restrições do problema (DVG_x) e da aplicação T. No Capítulo 4 definimos formalmente o problema (PMRGE) e estabelecemos as condições necessárias de otimalidade para o mesmo; assumindo a condição de *calma* para o (PMRGE). Por último, formulamos nossas conclusões.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os fundamentos teóricos que usamos no desenvolvimento desta tese. Enunciamos algumas definições e resultados que são provenientes da Análise Não Diferenciável, da teoria de Operadores Ponto-Conjunto e da teoria de Desigualdades Variacionais. Algumas proposições são colocadas de maneira mais específica, atendendo às nossas necessidades na formulação de condições necessárias de otimidade para o problema PMRGE apresentado no Capítulo 4.

2.1 Conceitos Básicos

Dada uma função $f : C \subset I\!R^n \longrightarrow I\!R$ $[g : C \subset I\!R^n \longrightarrow I\!R]$. Ao tratarmos o problema de minimização [maximização] definido por:

$$\text{Achar o valor ótimo } f^* := \inf\{f(x) : x \in C\} \quad [g^* := \sup\{g(x) : x \in C\}],$$

é necessário considerar o valor $f^* = +\infty$ $[g^* = -\infty]$ quando o conjunto C é vazio, de modo a mantermos o problema bem definido. Por outro lado o valor $+\infty$ deve ser, também, tomado em conta quando se redefine a função f (*função estendida*) sobre todo $I\!R^n$ por

$$f_e(x) := \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in C, \\ +\infty, & \text{outro caso.} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Deste modo, a minimização da função f_e sobre $I\!R^n$ é equivalente à minimização de f sobre o conjunto C. Portanto, não perdemos generalidade quando trabalharmos com funções definidas em todo $I\!R^n$ com valores nos reais estendido ($I\!R^n \cup \{-\infty, +\infty\}$).

Ao longo da tese consideramos funções $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Usamos a notação $\overline{I\!R} := I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$ e a aritmética envolvendo $-\infty$ e $+\infty$ conforme o padrão clássico em [38], por exemplo $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$, se $\lambda < 0$ então $\lambda\infty = -\infty$.

Definição 2.1 *Seja uma função $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$.*

a) *A função f é convexa se o epígrafo de f é um conjunto convexo, onde epígrafo de f é o conjunto*

$$Epi\ f := \{(x, \alpha) : x \in I\!R^n, \alpha \in I\!R, \alpha \geq f(x)\}.$$

b) *O dominio efetivo da função f é o conjunto $Dom\ (f) := \{x \in I\!R^n : f(x) < +\infty\}$.*

c) *A função f é própria se o $Dom(f) \neq \emptyset$ e $f(x) > -\infty$, para todo $x \in I\!R^n$.*

Denotamos por $Conv(I\!R^n)$ a família de funções $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ convexas e próprias.

Exemplo 2.2 *Seja $C \subset I\!R^n$ um conjunto convexo*

1) *A função indicadora Φ_C definida por*

$$\Phi_C(x) := \begin{cases} 0, & se\ x \in C, \\ +\infty, & outro\ caso, \end{cases}$$

é uma função convexa.

2) *Seja $h : C \longrightarrow I\!R$ uma função convexa no sentido clássico, isto é , $\forall x_1, x_2 \in C$ e $\forall\ \lambda \in [0, 1]$ verifica-se*

$$h(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda h(x_1) + (1 - \lambda)h(x_2).$$

A redefinição de h, segundo a relação (2.1.1), é função convexa . Notemos que as funções Φ_C, h_e são próprias se e somente se o conjunto C é não vazio.

Proposição 2.3 *[Proposição IV.2.1.2 [20]] Sejam as funções $f_i : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, tal que $f_i \in Conv(\mathbb{R}^n)$, formando uma familia de funções com $i \in Y$ e Y um conjunto arbitrario. Então a função $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por $f := \sup_Y f_i$, tal que existe x_0 que satisfaz $f(x_0) < +\infty$ é convexa e própria, isto é $f \in Conv(\mathbb{R}^n)$.*

■

Exemplo 2.4 *Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ e um conjunto $C \in \mathbb{R}^n$, para cada vetor $y \in \mathbb{R}^m$, consideramos o problema*

$$maximizar_{x \in C} f(x, y). \tag{2.1.2}$$

Associada a este problema, $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a função valor ótimo *(ou* função marginal*) está definida por*

$$g(y) := \sup_{x \in C} f(x, y), . \tag{2.1.3}$$

A função marginal é convexa se $f(x, y)$ é convexa na variável y (Proposição 2.3), mas não necessariamente própria, embora f o seja [42].

Definição 2.5 *Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$,*

i) *f é* semicontínua inferior (s.c.i.) *em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x' \to x_0} f(x').$$

ii) *f é* semicontínua superior (s.c.s.) *em $x_0 \in \mathbb{R}^n$, se $-f$ é semicontínua inferior no ponto x_0.*

iii) *f é* semiconínua inferior *em um conjunto $C \in \mathbb{R}^n$, se é s.c.i. em cada ponto do conjunto C.*

iv) *f é* s.c.i. próximo do ponto x_0*, se existe uma vizinhança $V(x_0)$ onde a função f é s.c.i..*

v) *f é* localmente s.c.i.*, se é s.c.i. próxima do x_0, para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

vi) f *é* semiconínua inferior *se é s.c.i. em* $I\!R^n$.

A condição de s.c.i. de uma função f, garante que a função atinge seu mínimo sobre subconjuntos compactos de $I\!R^n$ (apéndice em [20]).

A família de funções $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ convexas, próprias e semicontínuas inferiormente denota-se por $\overline{Conv}(I\!R^n)$.

Teorema 2.6 *(Teorema 7.1, [38]) Dada uma função* $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$, *as seguintes condições são equivalentes.*

(i) f *é s.c.i. em* $I\!R^n$.

(ii) *Os conjuntos de nível* $\{x \in I\!R^n : f(x) \leq \alpha\}$ *são fechados, para cada* $\alpha \in I\!R$.

(iii) *O epígrafo de* f, *Epi* (f), *é um conjunto fechado em* $I\!R^{n+1}$.

■

O seguinte conceito, muito usado neste trabalho, é mais forte que o de s.c.i. num ponto, mas mais fraco que o de s.c.i. de f em uma vizinhança de um ponto (s.c.i. próximo de x_0) ([42, 44, 51]).

Definição 2.7 *[44] Uma função* $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ *é* estritamente semicontínua inferior *(e.s.c.i.) no ponto* $x_0 \in I\!R^n$, *se* f *é finito em* x_0 *e para algum* $\alpha > f(x_0)$ *a função mín*$\{f, \alpha\}$ *é s.c.i. próxima do ponto* x_0 *(*$\min\{f, \alpha\}(x) = \min\{f(x), \alpha\}$*).*

Observemos que se f é e.s.c.i. no ponto $x_0 \in I\!R^n$, então é s.c.i. x_0. De fato,

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq \liminf_{x \to x_0} \min\{f(x), \alpha\} \geq \min\{f(x_0), \alpha\} = f(x_0).$$

Notemos que se f é s.c.i. próximo de x_0 e $f(x_0)$ é finito, então f é e.s.c.i..

Com a finalidade de darmos uma idéia geométrica de quando uma função é e.s.c.i. definamos primeiro conjunto localmente fechado num ponto.

Definição 2.8 *[45, 51] Um conjunto* $C \subset I\!R^n$ *é* localmente fechado *no ponto* $x_0 \in C$, *se existe* $\epsilon > 0$, *tal que o conjunto* $C \cap \overline{B}_\epsilon(x_0)$ *é fechado, sendo* $\overline{B}_\epsilon(x_0)$ *a bola fechada com centro em* x_0 *e raio* ϵ, *i.e.,* $\overline{B}_\epsilon(x_0) := \{z \in I\!R^n : \|z - x_0\| \leq \epsilon\}$.

Lema 2.9 *[42, 45] Uma função f é e.s.c.i. em x_0 se, e somente se, o seu epígrafo é localmente fechado no ponto $(x_0, f(x_0))$.*

A seguir damos um exemplo de uma função e.s.c.i. em um ponto x_0, mas que não é s.c.i. próxima de x_0.

Exemplo 2.10 *Seja $g : I\!R \to I\!R$ uma função contínua. Dado $x_0 \in I\!R$, definimos $f : I\!R \to I\!R$ da seguinte maneira*

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \text{ se } x \leq x_0 \\ g(x_0) + 2\alpha & , \text{ se } x_0 < x, x \in \mathcal{Q} \\ g(x_0) + 3\alpha & , \text{ se } x_0 < x, x \in \mathcal{I}, \end{cases}$$

para algum $\alpha > 0$, sendo $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{I}$ os conjuntos de números racionais e irracionais, respectivamente (Figura 1).

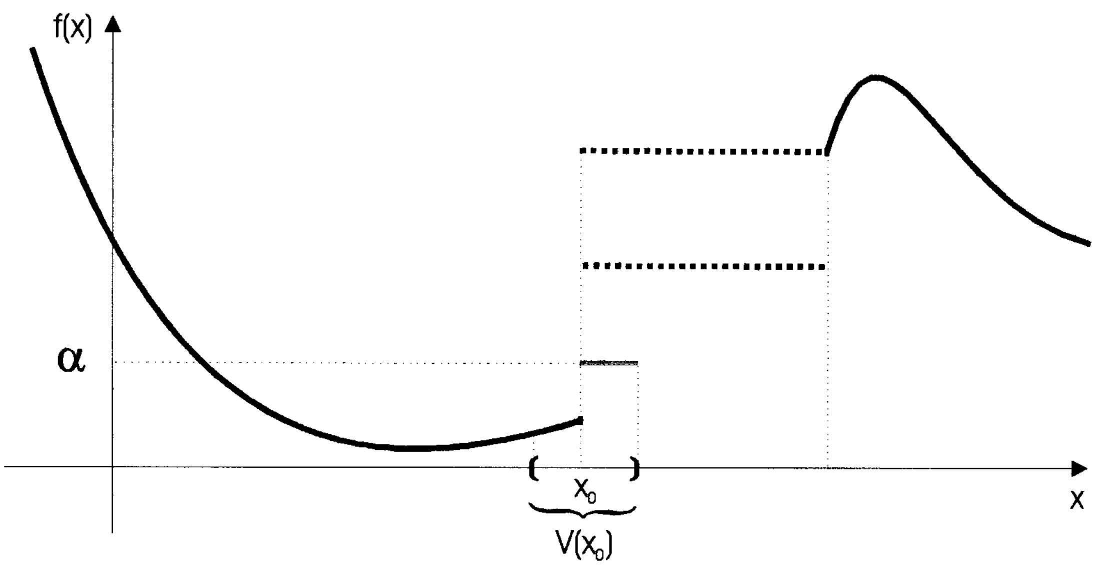

Figura 1 Na Vizinhança $V(x_0)$ a função mín$\{\alpha, f(\,.\,)\}$ é s.c.i.

Então,

i) *f é e.s.c.i. em x_0:*

$$\exists \delta > 0 \text{ tal que } g(x) - g(x_0) \leq \alpha, \forall x - x_0 < \delta,$$

definimos $\epsilon = \min\{\alpha, \delta\}$ e $\overline{B}_\epsilon(x_0, f(x_0)) \cap Epi\ f$ é fechado.

ii) *f não é s.c.i. próximo de x_0:*

Seja $V(x_0)$ uma vizinhança de x_0. Existem $x \in V(x_0)$, $x > x_0$ com $x \in \mathcal{I}$, e uma seqüência $\{x_k\} \subseteq V(x_0)$, $x_k > x_0$, com $x_k \in \mathcal{Q}$ para todo k e $x_k \to x$, sendo que $\lim_{k\to\infty} f(x_k) < f(x)$.

Outro conceito usado neste trabalho é o de função conjugada.

Definição 2.11 *[42] Seja uma função $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$, a função conjugada $f^* : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ está determinada por*

$$f^*(v) := \sup\{\langle v, x\rangle - f(x) \ : \ x \in I\!R^n\}.$$

Teorema 2.12 *Seja $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ própria, tal que existem $w \in I\!R^n$ e $b \in I\!R$ que satisfazem $\langle w, x\rangle + b \leq f(x)$, para todo $x \in I\!R^n$. Então, cumpre-se que*

(i) *f^* é convexa e s.c.i. em $I\!R^n$; e*

(ii) *f^* é própria.*

Prova: [20] página 159. ■

Observação 2.13 *A função $f^* \in \overline{Conv}\ (I\!R^n)$ independentemente da convexidade ou s.c.i. da função f, sempre que f seja própria e limitada inferiormente por uma função afim.*

2.2 Derivadas Direcionais e Subgradiente

Nesta seção formulamos alguns conceitos que estendem o de *diferenciabilidade* de funções a valores reais. Primeiro apresentamos a condição de uma função com valores regulares respecto da norma de sua variável, conhecida como funcao Lipschitz, mas restrita a uma vizinhança de um ponto.

Definição 2.14 *[14] Seja $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ e $C \subset I\!R^n$ não vazio. Diz-se que*

1) *f é localmente Lipschitziana em x_0, se existem $B_\epsilon(x_0) := \{z \in I\!R^n : \|z - x_0\| < \epsilon\}$, para algum $\epsilon > 0$, e $K \in I\!R$ tal que*

$$|f(y) - f(y')| \leq K\|y - y'\|, \forall y, y' \in B_\epsilon(x_0);$$

2) *f é localmente Lipschitziana no conjunto C, se f é localmente Lipschitziana em cada ponto $x \in C$.*

Para estabelecer condições de otimalidade do tipo K-K-T precisamos estudar a variação de uma função marginal, relação (2.1.3), do tipo $v(y) = \sup_{x \in C} f(x, y)$ com respeito do parâmetro y. Isto é, precisamos analisar a sensibilidade da função marginal v em relação a y. Este problema esta ligado ao conceito de *derivada direcional* da função marginal.

Por outro lado, é conhecido que para uma função convexa diferenciável f o hiperplano tangente ao epígrafo de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ (relacionado à aproximação linear à função f no ponto x_0) está determinado pelo vetor $(\nabla f(x_0), -1)$ (relacionado à derivada direcional de f no ponto x_0). Daqui que é interessante generalizar o conceito de aproximação linear através da extensão do conceito de hiperplano tangente pelo cone tangente, com o intuito de estender o conceito de derivada direcional e o conceito de diferenciabilidade.

Em [6, 49, 50] generalizam-se estas idéias geométricas e examinam-se diferentes conceitos de derivada direcional, descritos em termos de aproximações cônicas locais ao epígrafo de uma função . Estas aproximações cônicas, em geral, são chamadas de *cones tangentes* ao epígrafo. Definimos abaixo três destes cones.

Definição 2.15 *[51] Seja o conjunto $S \subset I\!R^n$ não vazio e $x_0 \in \overline{S}$.*

(i) *O cone tangente de Clarke de S no ponto x_0 é o conjunto*

$$\begin{aligned} T_S(x_0) \ &:= \{v \in I\!R^n : \quad \textit{dado } \epsilon > 0, \exists \lambda > 0, \ \textit{tal que } \forall t \in (0, \lambda) \ e \\ &\qquad \forall z \in S \cap \overline{B}_\lambda(x_0), \exists y \in \overline{B}_\epsilon(v) \ \textit{com } z + ty \in S\} \\ &= \{v \in I\!R^n : \quad x_i \to_S x_0, t_i \downarrow 0 \Rightarrow \exists v_i \to v \\ &\qquad x_i + t_i v_i \in S \ \ \forall i\}. \end{aligned}$$

(ii) *O cone contingente de S no ponto x_0 é o conjunto*

$$\begin{aligned} T^c_S(x_0) := \{v \in I\!R^n : \ \exists t_i \downarrow 0, \exists v_i \to v, \ \textit{tal que} \ , \\ \forall i \in I\!N, x_0 + t_i v_i \in S\}. \end{aligned}$$

(iii) *O cone de recessão do conjunto S, [44], é*

$$0^+S := \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ x + tv \in S, \forall x \in S \ e \ \forall t \geq 0\}.$$

Na seguinte figura ilustramos os cones T_S e T_S^c.

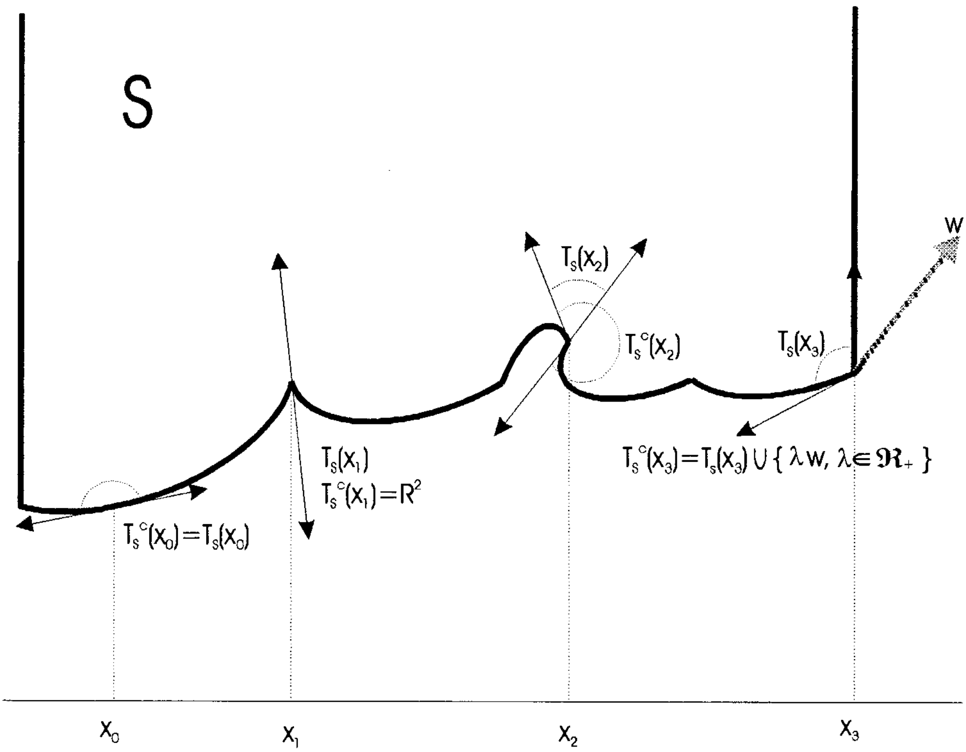

Figura 2

Observação 2.16 • *Os cones $T_S^c(x_0)$ e $T_S(x_0)$ são conjuntos fechados e o cone $T_S(x_0)$ é convexo, para todo $S \subset \mathbb{R}^n$ e para todo $x_0 \in S$, [49].*

• *Verifica-se que*

$$0 \in T_S(x_0) \subseteq T_S^c(x_0),$$

para todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ e para todo $x_0 \in \overline{S}$, ([51, 6])

Definição 2.17 *Um conjunto S é regular no ponto x_0 quando o $T_S(x_0) = T_S^c(x_0)$.*

Se S é um conjunto convexo, então é regular, [14].

A continuação definimos a derivada direcional para funções convexas e duas extensões. A primeira dessas extensões é a derivada direcional generalizada, considerada inicialmente para funções localmente Lipschitzianas e posteriormente definida para funções e.s.c.i. em um ponto [14, 44]. A segunda extensão considerada é a subderivada direcional superior.

Definição 2.18 *Seja $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ finita em x_0.*

(i) *A derivada direcional (*clássica*) de f no ponto x_0 na direção v, está definida por*

$$f'(x_0; v) \quad := \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}.$$

(ii) *Seja f e.s.c.i. em x_0. A* derivada direcional generalizada de Clarke *da função f no ponto x_0 e na direção v ([44, 14]), denotada por $f^0(x_0; v)$, está definida por*

$$f^0(x_0; v) \quad := \quad \limsup_{\substack{(x', f(x')) \to (x_0, f(x_0)) \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t},$$

onde

$$\limsup_{z \to z'} F(z) := \inf_{\epsilon > 0} \left(\sup\{F(z) : \|z - z'\| \leq \epsilon\}\right).$$

(iii) *Seja f e.s.c.i. em x_0, a* subderivada direcional superior *[41, 44, 14], denotada por $f^{\uparrow}(x_0; v)$, está definida por*

$$f^{\uparrow}(x_0; v) := \lim_{\epsilon \downarrow 0} \limsup_{\substack{(x', \alpha) \to_f x_0 \\ t \downarrow 0}} \left[\inf_{\|v' - v\| < \epsilon} \frac{f(x' + tv') - \alpha}{t}\right], \qquad (2.2.4)$$

onde a notação $(x', \alpha) \to_f x_0$ significa que $(x', \alpha) \in Epi(f)$, tal que $x' \to x$ e $\alpha \to f(x_0)$.

Observação 2.19 **1)** *As funções $f^0(x_0; \,.\,)$ e $f^{\uparrow}(x_0; \,.\,)$ estão bem definidas para todo $v \in I\!R^n$, podendo ter valores infinitos, o que não acontece com $f'(x_0; \,.\,)$.*

2) *Da definição (iii) temos* $domf^{\uparrow}(x_0;\ .\ ) \neq \emptyset$ *e existe* $v \in I\!\!R^n$ *tal que* $f^{\uparrow}(x_0; v) > -\infty$, *ver página 33 em [44].*

3) *A derivada direcional* $f^{\uparrow}(x_0; v)$ *está associada ao cone tangente de Clarke*

$$Epi(f^{\uparrow}(x_0; .)) = T_{Epi(f)}(x_0, f(x_0))$$

(ver [50, 6]).

Proposição 2.20 **1)** *[14] A função* $f^0(x_0;\ .\ )$ *é positivamente homogênea,* $f^0(x_0; \lambda v) = \lambda f^0(x_0; v)$, *para todo* $\lambda > 0$.

2) *[49]* $f^{\uparrow}(x_0; .)$ *é s.c.i., convexa e* $f^{\uparrow}(x_0; \lambda v) = \lambda f^{\uparrow}(x_0; v)$, *para todo* $\lambda > 0$. *Se* $f^{\uparrow}(x_0; 0) = -\infty$, *então* $f^{\uparrow}(x_0; v) = -\infty$ *para todo* $v \in dom(f^{\uparrow}(x_0; .))$.

Proposição 2.21 *Seja* $f : I\!\!R^n \longrightarrow \overline{I\!\!R}$ *finita no ponto* x_0. *Tem-se que*

1) *[14] Se* f *é convexa numa vizinhança de* x_0 *então*

$$f'(x_0; v) = f^0(x_0; v) = f^{\uparrow}(x_0; v) \text{ para todo } v \in I\!\!R^n.$$

2) *[41, 14] Se* f *é localmente Lipschitziana em* x_0, *então* $f^0(x_0; v) = f^{\uparrow}(x_0; v)$ *é finito para todo* $v \in I\!\!R^n$ *e*

$$f^0(x_0; v) = \limsup_{\substack{x' \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}.$$

A definição de subderivada direcional superior fica mais simples se exigirmos mais da função , por exemplo, ser e.s.c.i. em um ponto ou, mais ainda, continuidade no ponto.

Proposição 2.22 *Seja* $f : I\!\!R^n \longrightarrow \overline{I\!\!R}$ *finita no ponto* x_0. *Tem-se que*

1) *[41] Se* f *é s.c.i. em* x_0, *então*

$$f^{\uparrow}(x_0; v) = \limsup_{\substack{x' \to_f x_0 \\ t \downarrow 0}} \left[\inf_{v' \to v} \frac{f(x' + tv') - f(x')}{t} \right].$$

2) *Se f é contínua em x_0, então*

$$f^{\uparrow}(x_0; v) = \limsup_{\substack{x' \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \left[\inf_{v' \to v} \frac{f(x' + tv') - f(x')}{t} \right].$$

As derivadas direcionais $f^0(x_0; \ .\ )$ e $f^{\uparrow}(x_0; \ .\ )$ de uma função e.s.c.i., diferenciam-se somente na fronteira de seus dominios efetivos.

Proposição 2.23 *[44] Se f é e.s.c.i. em x_0, então*

1) *Os dominios efetivos de f^0 e $f^{\uparrow}$,*

$$\begin{aligned} dom\ (f^0(x_0, .)) &= \{v : f^0(x_0, v) < \infty\}, \\ dom\ (f^{\uparrow}(x_0; .)) &= \{v : f^{\uparrow}(x_0; v) < \infty\}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

são cones convexos que contém o vetor 0 *e*

$$int(Dom(f^0(x_0, .))) = int(Dom(f^{\uparrow}(x_0; .))).$$

2) $f^0(x_0, v) = f^{\uparrow}(x_0; v)$, *para toda direção v no interior dos dominios do item anterior.*

Precisamos o seguinte conceito para generalizar algunas resultados existentes para funções localmente Lipschitzianas.

Definição 2.24 *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ finita em x_0.*

1) *[41] f é direcionalmente Lipschitziana em x_0 na direção v se*

$$\limsup_{\substack{(x',\alpha) \to_f x_0 \\ t \downarrow 0}} \left[\sup_{v' \to v} \frac{f(x'+tv')-\alpha}{t} \right] < +\infty.$$

2) *[44] f é direcionalmente Lipschitziana em x_0 se existe alguma direção $v \in \mathbb{R}^n$ tal que é direcionalmente Lipschitziana em x_0 na direção v.*

Observação 2.25 **1)** *[41] Uma função f é localmente Lipschitziana em x_0 se , e somente se, é direcionalmente Lipschitziana em x_0 na direção $v = 0$.*

2) *Se f é e.s.c.i. em x_0 e $v \in int(dom f^0(x_0;\ .\ ))$ então f é direcionalmente Lipschitziana em x_0 na direção v (2.23).*

Para finalizar esta seção , definimos o subdiferencial ([15]) de uma função real estendida. Fazemos isto em analogia ao seguinte fato geométrico; o vetor $(\nabla f(x_0), -1)$ constitui o vetor normal ao gráfico de uma função diferenciável $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R$.

Definição 2.26 *O Cone Normal de Clarke de um conjunto $S \subseteq I\!R^n$ no ponto $x_0 \in \overline{S}$, está definido como o cone polar ao cone tangente $T_S(x_0)$, isto é,*

$$N_S(x_0) := \{\xi \in I\!R^n\ : \langle \xi, v \rangle \leq 0, \forall v \in T_S(x_0)\}.$$

Se S é um conjunto convexo e fechado, este conjunto coincide com a definição clássica de cone Normal, [38].

$$N_S(x_0) = \{\xi \in I\!R^n\ : \langle \xi, z - x_0 \rangle \leq 0, \forall z \in S\}.$$

Lema 2.27 **1)** *Seja $C_1 \times C_2 \subset I\!R^{n+m}$ e $(x, y) =: \zeta \in \overline{C_1 \times C_2}$ então*

$$N_{C_1 \times C_2}(\zeta) = N_{C_1}(x) \times N_{C_2}(y).$$

2) *Sejam K_1, K_2 sunconjuntos de $I\!R^n$ e $x_0 \in K_1 \cap K_2$. Se satifaz*

$$T_{K_1}(x_0) \cap int(T_{K_2}(x_0)$$

e existe pelo menos um vetor $v \in I\!R^n$ tal que para algum $\epsilon > 0$,

$$x + tw \in K_2\ \ \forall x \in B_\epsilon(x_0),\ w \in B_\epsilon(v),\ t \in (0, \epsilon)$$

então

$$N_{K_1 \cap K_2}(x_0) \subset N_{K_1}(x_0)\ +\ N_{K_2}(x_0).$$

A igualdade se verifica quando K_1 e K_2 são conjuntos regulares (Definição 2.17)no ponto x_0, neste caso $N_{K_1} \cap N_{K_2}$ é também, um conjunto regular em x_0.

Prova:

O item 1) é o Corolário do Treorema 2.4.5 [14] e o item 2) o Corolário 2 do Teorema 2.9.8 [14]. ■

O subdiferencial de uma função $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$, chamado também de subgradiente [44, 49], ou gradiente generalizado [14], pode ser definido através do cone normal do epígrafo de f.

Definição 2.28 *Seja $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ finita no ponto x_0.*

(i) *O* subdiferencial *de f no ponto x_0 é o conjunto, (Teorema 4 [41], [14]),*

$$\partial f(x_0) := \{\xi \in I\!R^n \ : (\xi, -1) \in N_{Epi\,(f)}(x_0, f(x_0))\}. \tag{2.2.6}$$

(ii) *O* subdiferencial singular *de f no ponto x_0 é o conjunto*

$$\partial^0 f(x_0) := \{\xi \in I\!R^n \ : (\xi, 0) \in N_{Epi\,(f)}(x_0, f(x_0))\}. \tag{2.2.7}$$

Em [15] o subdiferencial singular é chamado de gradiente generalizado assintótico.

O subfiderencial também pode ser definido através da subderivada direcional superior, (2.2.4), como na seguinte proposição .

Proposição 2.29 *[44] Seja $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ finita no ponto x_0. Verifica-se que*

1) *O subdiferencial de f no ponto x_0 é o conjunto*

$$\partial f(x_0) = \{\xi \in I\!R^n \ : \langle \xi, v\rangle \leq f^{\uparrow}(x_0; v)\ \forall v \in I\!R^n\}.$$

2) *O subdiferencial singular de f no ponto x_0 é o cone polar do dom $f^{\uparrow}(x_0; \ . \ )$, i.e.,*

$$\partial^0 f(x_0) = \{\xi \in I\!R^n \ : \langle \xi, v\rangle \leq 0, \forall v \ tal\ que\ f^{\uparrow}(x_0; v) < \infty\}.$$

3) *Os conjuntos $\partial f(x_0)$ e $\partial^0 f(x_0)$ são convexos e fechados.*

4) *Se $\partial f(x_0) = \emptyset$, então $f^{\uparrow}(x; v) = \pm\infty$ para todo v.*

5) *O subdiferencial singular* $\partial^0 f(x_0)$ *é um cone, sempre que dom* $f^{\uparrow}(x_0;\ .\ )$ *seja não vazio, e* $0 \in \partial^0 f(x_0)$.

6) *Se* $\partial f(x_0) \neq \emptyset$, *então* $\partial^0 f(x_0) = 0^+ \partial f(x_0)$.

∎

Observação 2.30 *Subgradientes singulares não nulos descrevem direções que podem ser identificadas com elementos de* $\partial f(x_0)$ *que vão para* ∞*; exceto que podem existir situações onde* $\partial f(x_0) = \emptyset$ *e ainda* $\partial^0 f(x_0) \neq \emptyset$. *Isto é, se* $f^{\uparrow}(x_0;\ .\ ) \equiv -\infty$, *então* $\partial f(x_0) = \emptyset$ *mas* $\partial^0 f(x_0) = \{0\}$.

Proposição 2.31 *[49] Seja* $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ *finita em* $x_0 \in I\!R^n$. *Para todo* $v \in I\!R^n$ *se verifica*

$$f^{\uparrow}(x;v) := \begin{cases} \sup\{\langle v, \xi\rangle : \xi \in \partial f(x_0)\} & , \text{ se } \partial f(x_0) \neq \emptyset \\ -\infty & , \text{ se } \partial f(x_0) = \emptyset. \end{cases}$$

∎

Observação 2.32 *Seja* $f : I\!R^n \to I\!R$.

1) *Se* f *é convexa, então* $\partial f(x_0)$ *é o subdiferencial clássico de funções convexas:*

$$\partial f(x_0) := \{\xi \in I\!R^n\ : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi, x - x_0\rangle, \forall x\}.$$

2) *Se* f *é localmente Lipchitziana em* x_0, *então* $\partial f(x_0)$ *é o subdiferencial de Clarke:*

$$\partial f(x_0) := co\ \{\xi \in I\!R^n\ : \exists x_k \to x_0, \exists \nabla f(x_k), \forall k \in I\!N, \nabla f(x_k) \to \xi\}.$$

3) *Se* f *é e.s.c.i. em ROCKAFELLAR [41], o elemento de* $\partial f(x_0)$ *é referido como subgradiente* inferior. *A razão desse nome é diferencia-lo dos elementos do conjunto* $\tilde{\partial} f$ *chamado de* subdiferencial superior $\tilde{\partial} f$ *e a* subderivada direcional inferior $f^{\downarrow}(x_0;.)$ *que são definidos de maneira análoga com* $\partial f(x_0)$ *e* $f^{\uparrow}(x_0;.)$ *respectivamente. A relação entre os conjuntos* $\tilde{\partial} f$ *e* $\partial f(x_0)$ *(relação (8.8) [41]) é*

$$\tilde{\partial} f(x_0) = -\partial(-f)(x_0).$$

2.3 Cálculo de Subdiferenciais

Nesta seção mencionamos as regras básicas do cálculo do subgradiente de uma função f definida por uma combinação linear, por uma composição ou por um produto de funções . Estes casos aparecem na tese envolvendo funções estendidas.

A seguir apresentamos o conceito de *função regular* num ponto, baseado na regularidade do seu epígrafo (Definição 2.17).

Definição 2.33 *[42, 14] Uma função $f : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$, finita no ponto x_0 é regular no ponto x_0, se $T^c_{Epi\,(f)}(x_0, f(x_0)) = T_{Epi\,(f)}(x_0, f(x_0))$.*

Uma função f é regular no ponto x_0, se o ponto $(x_0, f(x_0)) \in Epi\ f$ e o conjunto $Epi\ f$ é regular no $(x_0, f(x_0))$.

Proposição 2.34 *Sejam $f_1, f_2 : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ finitas e f_2 é s.c.i. numa vizinhança do ponto x_0, tais que satisfazem*

$$\{v \in I\!R^n \ : \ f_1^{\uparrow}(x; v) < \infty\} \cap int\ \{v \in I\!R^n \ : \ f_2^{\uparrow}(x; v) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Então,

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) \subseteq \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

A igualdade se satisfaz se f_1 e f_2 são regulares em x_0.

Prova:

Ver o Teorema 2.9.8 e Corolário 3 [14]. ■

Corolário 2.35 *Sejam $f_1, f_2 : I\!R^n \longrightarrow \overline{I\!R}$ finitas no ponto x_0, tais que f_1 ou f_2 é localmente Lipschitziana em x_0. Então*

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) \subseteq \partial f_1(x_0) + \partial f_2(x_0).$$

Se adicionalmente f_1 e f_2 são regulares em x_0, a igualdade se satisfaz na relação anterior.

Prova:

Corolário 1 do Teorema 2.9.8, [14], e Proposição 5, [44]. ■

Proposição 2.36 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ finita em x, e.s.c.i. e direcionalmente Lipschitziana no ponto. Então, verifica-se que*

$$\partial f(x) = -\partial(-f(x)).$$

Prova:

Considerando o item 3 na observação 2.32 e o Teorema 6 em [41], página. 277, podemos afirmar

$$\partial f(x) = -\partial(-f(x)).$$

■

Proposição 2.37 *(Proposição 2.3.13, [14]) Sejam $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ localmente Lipschitzianas no ponto x_0. Então a função $f_1 f_2$ é localmente Lipschitziana em x_0 e*

$$\partial(f_1 f_2)(x_0) \subset f_1(x_0)\partial(f_2)(x_0) + f_2(x_0)\partial(f_1)(x_0). \tag{2.3.8}$$

■

Teorema 2.38 *Sejam as funções $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $f = g \circ F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Se a função F é estritamente diferenciável, a função g finita e direcionalmente Lipschitziana em $F(x_0)$ e*

$$Imagem\ (D\ F(x_0)) \cap int\ \{v\ :\ g^{\uparrow}(F(x_0); v) < \infty\} \neq \emptyset,$$

então

$$\partial f(x_0) \subset \partial g(F(x_0)) \circ D\ F(x_0) \tag{2.3.9}$$

(sendo $\partial g(F(x_0)) \circ D\ F(x_0) := \{\xi^t D\ F(x_0) : \xi \in \partial g(F(x_0))\}$). Se g é regular no ponto $F(x_0)$, a relação 2.3.9 se satisfaz em forma de igualdade.

Prova:

Teorema 2.9.9, [14] extensão do Teorema 2.3.10 [14] segundo resultado de uma composição de funções . ■

A seguir indicamos dois resultados do cálculo de subdiferencias para funções reais não Lipschitzianas que usamos em demonstrações posteriores.

Proposição 2.39 *(Corolário 3.6, [49]) Para cada* $i = 1, 2$, *seja* $f_i : I\!R^n \to \overline{I\!R}$ *finita e e.s.c.i. em* x_0. *Se*

$$dom f_1^{\uparrow}(x_0;\ .\ ) - dom f_2^{\uparrow}(x_0;\ .\ ) = I\!R^n,$$

então

$$\partial(f_1 + f_2)(x_0) \subseteq \partial(f_1)(x_0) + \partial(f_2)(x_0).$$

■

Proposição 2.40 *(Corolário 3.20 [49]) Para cada* $i = 1, 2$, *seja* $f_i : I\!R^n \to I\!R \cup [0, +\infty]$ *finita, e.s.c.i. e positiva no ponto* x_0. *Se*

$$dom f_1^{\uparrow}(x_0;\ .\ ) - dom f_2^{\uparrow}(x_0;\ .\ ) = I\!R^n,$$

então

$$\partial(f_1 f_2)(x_0) \subseteq f_1(x_0)\partial f_2(x_0) + f_2(x_0)\partial f_1(x_0).$$

■

Dada uma função $g : I\!R^n \times I\!R^m \longrightarrow \overline{I\!R}$ e fixado $y \in I\!R^m$, notamos por $\partial_1 g(x, y)$ o subdiferencial da função $g(\ .\ , y)$ no ponto x; fixado $x \in I\!R^n$, notamos por $\partial_2 g(x, y)$ o subdiferencial da função $g(x,\ .\ )$ no ponto y; e, notamos por $\Pi_1 \partial g(x, y)$, $\Pi_2 \partial g(x, y)$ as projeções de $\partial g(x, y)$ sobre $I\!R^n$ e $I\!R^m$, respectivamente, i.e.,

$$\Pi_1 \partial g(x, y) = \{\xi \ : \ (\xi, \psi) \in \partial g(x, y) \text{ para algum } \psi \in I\!R^m\},$$

$$\Pi_2 \partial g(x, y) = \{\psi \ : \ (\xi, \psi) \in \partial g(x, y) \text{ para algum } \xi \in I\!R^n\}.$$

Proposição 2.41 *Dada uma função* $g : I\!R^n \times I\!R^m \longrightarrow I\!R$, *localmente Lipschitziana e regular no ponto* (x_0, y_0), *cumpre-se que*

$$\partial g(x_0, y_0) \subset \partial_1 g(x_0, y_0) \times \partial_2 g(x_0, y_0).$$

Prova:

Proposição 2.3.15 [14]. ■

Observação 2.42 *Em geral, tem-se que*

$$\partial_1 g(x_0, y_0) \times \partial_2 g(x_0, y_0) \not\subset \partial g(x_0, y_0) \not\subset \partial_1 g(x_0, y_0) \times \partial_2 g(x_0, y_0),$$

(Exemplo 2.5.2, [14]).

A seguir acrescentamos uma relação entre o subdiferencial parcial e a projeção do subdiferencial na mesma variável. O resultado generaliza a Proposição 2.3.16, [14], dada para uma função localmente Lipschitziana.

Proposição 2.43 *Seja* $g : I\!R^n \times I\!R^m \longrightarrow \overline{I\!R}$, *tal que* g *é finita e direcionalmente Lipschitziana no ponto* (x_0, y_0). *Se existe* $v \in I\!R^n$ *tal que*

$$(v, 0) \in int\ \{(h, k)\ :\ g^{\uparrow}((x_0, y_0); (h, k)) < \infty\},$$

então

$$\partial_1 g(x_0, y_0) \subset \Pi_1 \partial g(x_0, y_0).$$

Prova:
Dado $y_0 \in I\!R^m$, consideremos as funções $f : I\!R^n \to \overline{I\!R}$ e $F : I\!R^n \to I\!R^{n+m}$, definidas por $f(x) := g(x, y_0)$ e $F(x) := (x, y_0)$. Observemos que F é estritamente diferenciável e que $\langle \nabla F(x), v\rangle = (v, 0)$.

Então, desde que Imagem $(\nabla F(x_0)) = I\!R^n \times \{0\}$, as hipóteses do Teorema 2.38 são satisfeitas. Portanto,

$$\partial f(x_0) = \partial_1 g(x_0, y_0) \subset \Pi_1 \partial g(x_0, y_0).$$

■

Corolário 2.44 *Sob as hipóteses da Proposição 2.43, cumpre-se que*

$$\partial_1 g(x_1, x_2) \times \partial_2 g(x_1, x_2) \subset \Pi_1 \partial g(x_1, x_2) \times \Pi_2 \partial g(x_1, x_2).$$

Prova:
Conseqüência imediata da Proposição 2.43. ■

2.4 Operador Ponto-Conjunto

Definição 2.45 **(i)** *O operador T é uma aplicação ponto-conjunto de $I\!R^n$ em $I\!R^m$ se para cada $x \in I\!R^n$ a imagem $T(x)$ é um subconjunto de $I\!R^m$, escreve-se $T : I\!R^n \longrightarrow 2^{I\!R^m}$.*

(ii) *O dominio efetivo de uma aplicação ponto-conjunto T é $Dom(T) := \{x \in I\!R^n \ : \ T(x) \neq \emptyset\}$.*

(iii) *Uma aplicação ponto-conjunto T é própria se existe pelo menos um elemento $x \in I\!R^n$, com imagem $T(x) \neq \emptyset$. Portanto, T é própria se $Dom(T) \neq \emptyset$.*

Observação 2.46 *O conceito de aplicação ponto-conjunto aparece em alguns trabalhos sob o nome de operador multivaluado, multiaplicação ou correspondencia.*

Exemplo 2.47 **(i)** *A função inversa de uma função (aplicação univaluada) não injetiva, definida por*

$$f^{-1}(y) = \{x \in I\!R^n \ : \ f(x) = y\},$$

é uma aplicação ponto-conjunto.

(ii) *Para cada $x \in I\!R^n$, consideremos o problema de programação linear paramétrico*

$$(P_x) : \ minimizar \ \{l(x, y, z) = y + (x-4)z \ : \ (y, z) \in D\}, \quad (2.4.10)$$

sendo $D = \{(y, z) \ : \ 0 \leq y \leq 5, \ z \leq 0\}$.

A função $l(x, ., .)$ é linear para cada valor do parâmetro $x \in I\!R$. Definimos o conjunto solução do problema (P_x)

$$S(x) = \arg\min\{l(x, y, z) \ : \ (y, z) \in D\}, \ para \ cada \ x \in I\!R,$$

Então, a aplicação ponto-conjunto S esta definido explicitamente da seguinte maneira:

$$S(x) = \begin{cases} \{(0,0)\} & se \ x < 4, \\ \{0\} \times (-\infty, 0] & se \ x = 4 \\ \emptyset & se \ x > 4 \end{cases} .$$

O dominio efetivo da multiaplicação S é $Dom(S) = (-\infty, 4]$.

Definição 2.48 **(i)** *O gráfico de uma aplicação ponto-conjunto $T : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ é o conjunto*

$$Graf(T) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \ y \in T(x)\}.$$

(ii) *Uma aplicação ponto-conjunto é fechada ou convexa se seu gráfico é fechado ou convexo, respectivamente.*

Definição 2.49 *Dadas as aplicações ponto-conjunto $T, N : \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, a aplicação ponto-conjunto soma $T + N$ está definido por*

$$(T + N)(z) := \{v + w \ : \ v \in T(z), w \in N(z)\}.$$

O dominio efetivo da multiaplição soma é $Dom(T+N) = Dom(T) \cap Dom(N)$.

Definição 2.50 *Uma aplicação ponto-conjuto $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é monótona (estritamente monótona) no conjunto Y se*

$$\langle y_1 - y, x_1 - x\rangle \geq \ 0, \ \forall x, x_1 \in Y, \ \forall y_1 \in T(x_1), \forall y \in T(x). \qquad (2.4.11)$$

(verifica a desigualdade estrita em (2.4.11).

Definição 2.51 *[5] Uma aplicação ponto-conjunto $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ é monótona maximal se é monótona em $\mathbb{R}^n$ e seu gráfico $Graf(T)$ não esta contido propriamente no gráfico de nenhuma outra aplicação ponto-conjunto monótona em $\mathbb{R}^m$.*

Exemplo 2.52 *Se $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é convexa própria e s.c.i., então o subdiferencial é uma aplicação ponto-conjunto monótona [38].*

Definição 2.53 *[16] Uma aplicação ponto-conjunto $T : Y \subseteq \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ é pseudo-monótona sobre Y, se dados $z, z' \in Y$, $\omega \in T(z)$ e $\omega' \in T(z')$ se cumpre que*

$$0 \leq \langle z' - z, \omega\rangle implica \ 0 \leq \langle z' - z, \omega'\rangle.$$

Exemplo 2.54 *Consideremos a aplicação ponto-conjunto* $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$T(z_1, z_2) = \begin{cases} \{\mathbf{e_1}\} & se \quad z_2 \geq 0 \\ cone\{\mathbf{e_1}\} & se \quad z_2 < 0; \end{cases}$$

onde $\mathbf{e_1}$ *é o vetor (1,0), e cone* $\{\mathbf{e_1}\}$ *é o cone gerado pelo vetor* $\mathbf{e_1}$. *Esta aplicação ponto-conjunto é pseudo-monótona.*

Proposição 2.55 *Todo aplicação ponto-conjunto monótona é pseudo-monótona.*

Estamos interessados na aplicação ponto-conjunto ∂f, o *subdiferencial* de uma função f. Assim também, no Capítulo 4 precisamos conhecer o comportamento dos conjuntos $\partial f(x_n)$ quando $x_n \rightarrow x_0$ de modo a conseguir uma aproximação do conjunto $\partial f(x_0)$ a partir dos conjuntos $\partial f(x_n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Por esta razão, a continuação definimos limites de uma seqüência de funções .

Definição 2.56 *Seja uma seqüência* $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$.

1) *O* limite superior *da seqüênca de conjuntos é*

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} K_n := & \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \ \liminf_{n\to\infty} dist(x, K_n) = 0\} \\ := & \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ ponto de clausura de seqüências} \\ & \qquad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } x_n \in K_n\}. \end{aligned}$$

2) *O* limite inferior *da seqüênca de conjuntos é*

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} K_n := & \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \ \lim_{n\to\infty} dist(x, K_n) = 0\} \\ := & \quad \{x \in \mathbb{R}^n : \ x \text{ ponto limite de seqüências} \\ & \qquad \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ tal que } x_n \in K_n\}. \end{aligned}$$

Propriedade Seja uma seqüência $\{K_n\}_{n\geq\mathbb{N}}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. A seguinte relação se verifica

$$\liminf_{n\to\infty} K_n \subset \limsup_{n\to\infty} K_n.$$

Exemplo 2.57 *Considere a seguinte seqüência de conjuntos em* $I\!R^2$

$$K_n = \begin{cases} [-1, \frac{1}{n}] \times \{\frac{1}{n}\} & \textit{se } n \textit{ é impar} \\ [-\frac{1}{n}, 1] \times \{\frac{1}{n}\} & \textit{se } n \textit{ é par} \end{cases}.$$

Os conjuntos limite desta seqüência são

$$\liminf_{n\to\infty} K_n = \{(0,0)\},$$

$$\limsup_{n\to\infty} K_n = [-1,1] \times \{0\}.$$

Proposição 2.58 *Seja* T *a aplicação ponto-conjunto monótona maximal de* $I\!R^n$*. Verificam-se as seguintes propriedades*

1) *as imagens,* $T(x)$*, são fechadas e convexas;*

2) *o gráfico, Graf(T), é fechado se:* $(x_n, z_n) \in Graf\ (T)$ *e* $(x_n, z_n) \to (x, z)$*, com* $x \in Dom(T)$*, então* $(x, z) \in Graf\ (T)$*;*

3) $T(x)$ *é limitada se, e somente se,* $x \in int(DomT)$*.*

4) T *manda conjuntos limitados, do interior do dominio, em limitados, isto é, se* $C \subset int(Dom\ T)$ *é limitado, então* $T(C) = \cup_{x\in C} T(x)$ *é limitado.*

Prova:

Ver Proposição 3.5.6, [6], para [1)] e [2)] e [35] para [3)] e [4)]. ∎

Lema 2.59 *Sejam as aplicações ponto-conjunto* $T, U : I\!R^n \to 2^{I\!R^n}$ *monótonas maximais. Se* $ir(Dom\ T) \cap ir(Dom\ U) \neq \emptyset$*, então* $T + U$ *é uma aplicação ponto-conjunto monótona maximal.*

Prova:

Teorema 2, [36]. ∎

2.5 Desigualdade Variacional e Função Gap

Consideremos o seguinte Problema de *Desigualdade Variacional*

(DV) Achar $y \in Y$, tal que $\langle T(y), z - y\rangle \geq 0, \forall z \in Y \subseteq I\!R^m$, sendo $T : I\!R^m \to I\!R^m$ uma aplicação ponto-conjunto monótona e Y um conjunto não vazio, convexo e fechado . Denotamos por $\mathcal{O}$ o conjunto solução de (DV).

Definição 2.60 *[21] A função $\gamma : Y \to \overline{I\!R}$ é uma* função gap *associada à desigualdade variacional (DV), se*

(a) $\gamma(y)\gamma(z) \geq 0$, *para todo* $y, z \in Y$;

(b) $\gamma(y) = 0$ *se, e somente se,* $y \in \mathcal{O}$.

Observação 2.61 **(i)** *Dado $y \in Y$, a função gap, no caso não negativo, pode ser interpretada como sendo uma medida da violação de (DV). Neste caso, usa-se a função gap como uma função de mérito para (DV). (ver [34]).*

(ii) *Para uma aplicação ponto-a-ponto T (com valores únicos ou univaluados) estão definidas as funções gap primal e gap dual:*

$$G(y) = \sup_{z\in Y}\{\langle T(y), y - z\rangle\},$$

$$g(y) = \sup_{z\in Y}\{\langle T(z), y - z\rangle\}.$$

Estas funções , com a aplicação $T(z) = \nabla(z)$, foram usadas em [18, 24, 57] e em [27]. G e g são casos particulares da classe de funções de mérito para (DV) desenvolvidas em [7]. Essa classe de funções de mérito são obtidas via uma formulação dual aplicada à seguinte função $L : Y \times Y \longrightarrow I\!R$ associada a (DV)

$$L(z, y) = f(z) - f(y) + \langle T(z) - \nabla f(z), z - y\rangle,$$

sendo $f : I\!R^n \longrightarrow I\!R \cup \{\infty\}$ convexa , s.c.i. e de classe C^1. Resulta $g(y) = \sup_{z\in Y}(-L(z, y))$ e $G(z) = \sup_{y\in Y} L(z, y)$ quando $f \equiv 0$, [21].

(iii) *As funções de* erro limitado *definidos em [53] são funções obtidas como a raiz quadrada da função gap primal para uma aplicação T univaluada.*

2.5.1 Desigualdade Variacional Generalizada

A seguir formulamos uma generalização de (DV) ([16], [11],e [28]). Seja $T : I\!R^n \to 2^{I\!R^n}$ uma aplicação ponto-conjunto monótona maximal e $Y \subset I\!R^n$ um conjunto não vazio, convexo e fechado. O problema seguinte é chamado de *Desigualdade Variacional Generalizada*

$$
\begin{aligned}
(DVG): \quad & \text{Achar } y \in Y, \text{ tal que existe } w \in T(y) \\
& \text{que satisfaz } \langle w, z-y \rangle \geq 0, \forall z \in Y.
\end{aligned}
$$

Denotaremos o conjunto de soluções de (DVG) por $\mathcal{O}_G$, i.e.,

$$\mathcal{O}_G := \{y \in Y : \text{ existe } w \in T(y), \text{ com } \langle w, z-y \rangle \geq 0, \forall z \in Y\}.$$

Seguidamente definimos no espírito da Definição 2.60, uma função gap generalizada.

Definição 2.62 *A função* $\gamma : Y \to \overline{I\!R}$ *é uma* função gap generalizada *associada à desigualdade variacional (DVG), se*

(a) $\gamma(y)\gamma(z) \geq 0$, *para todo* $y, z \in Y$;

(b) $\gamma(y) = 0$ *se, e somente se,* $y \in \mathcal{O}_G$.

Consideremos a seguinte função associada a (DVG)

$$
g_T(y) := \begin{cases} \sup_{z \in Y} \sup_{w \in T(z)} \langle w, y - z \rangle & , \text{ se } y \in Y \cap Dom(T) \\ +\infty & , \text{ em outro caso.} \end{cases}
$$

Observação 2.63 *Satisfaz-se que :*

(a) *Seja* $Gr_Y(T) := \{(z, \omega) : z \in Y, \ \ \omega \in T(z)\}$. *Desde que* $\sup_{(z,\omega) \in Gr_{Y(T)}} = \sup_{z \in Y} \sup_{\omega \in T(z)}$, g_T *coincide com á função gap, restrita a* $Y \cap Dom(T)$, *definida em [12] para espaços de Hilbert.*

(b) *Para o caso em que* T *é univaluado,* g_T *é a função gap definida em [57, 18, 27, 24] quando* $T = \nabla f$;

Na seção seguinte estabelecemos que a $g_T(.)$ é uma *função gap generalizada* no esquema da Definição 2.62. Com a finalidade de garantir que $\mathcal{O}_G \neq \emptyset$, estabelecemos condições suficientes para a existência de soluções do problema (DVG). Formulamos antes a definição de conjunto contractível que usamos no teorema de existência.

Definição 2.64 *Um conjunto $S \subseteq I\!R^m$ é* **contractível**, *se existe um elemento $x^0 \in S$ e uma função contínua $h : S \times [0,1] \to S$, tal que $h(x,0) = x$ e $h(x,1) = x^0$, para cada $x \in S$.*

Notemos que todo conjunto convexo é contractível, basta considerar $h(x,t) = (1-t)x + tx^0$. Na figura seguinte damos mais um exemplo de conjunto contractível.

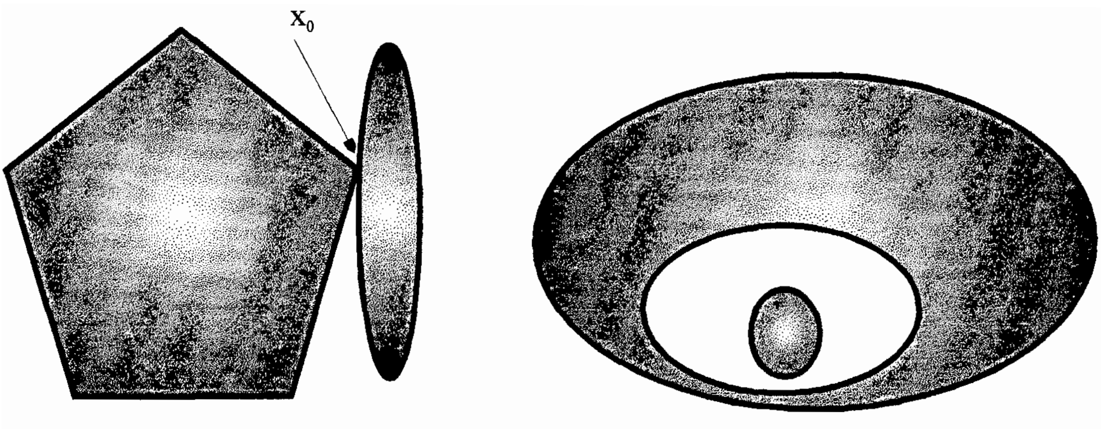

Figura 3: Conjunto contractível e não contractível.

O próximo teorema de existência de soluções de (DVG), está baseado no Teorema de Hartman-Stampacchia-Saigal (ver [47]).

Teorema 2.65 *(Teorema 4.1, Observação 4.2 (i), [16]) Se as seguintes condições são verificadas*

(i) $Y \subseteq I\!R^m$ é um convexo não vazio ;

(ii) $T : Y \subseteq I\!R^m \to 2^{I\!R^m}$;

(iii) existe um $x^0 \in Y$ *e* $y^0 \in T(x^0) \cap int(Y^+)$, *onde* $Y^+ := \{z \in \mathbb{R}^m : \langle y, z\rangle \geq 0, \forall y \in Y\}$ *é o cone dual gerado por* Y*;*

(iv) existe um convexo $E \subseteq \mathbb{R}^m$, *com* $int(E) \neq \emptyset$, *tal que*

(a) $\{z \in Y : \langle x^0, y^0\rangle \leq \langle z, y^0\rangle\} \subseteq int(E)$*;*

(b) $Y \cap E$ *é não vazio e compacto;*

(c) T *é monótona sobre* $Y \cap E$*;*

(d) T *restrito a* $Y \cap E$ *é semicontínua superior, com* $T(y)$ *não vazio, compacto e contractível para cada* $y \in Y \cap E$*;*

então, o problema (DVG) *tem uma solução* y^*, *tal que* $y^* \in E$.

2.6 Função Gap Generalizada

Nesta seção apresentamos alguns resultados que nos permitem concluir que $g_T(.)$ é uma *função gap generalizada* associada ao problema (DVG) (Definição 2.62). Previamente, é conveniente associar o cone normal de um conjunto convexo a uma multiaplicação definida em todo $\mathbb{R}^m$.

Seja $Z \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto convexo, o **cone normal** de Z, pode ser definido pela aplicação ponto-conjunto $N_Z : \mathbb{R}^m \to 2^{\mathbb{R}^m}$, tal que

$$N_Z(z) := \begin{cases} \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, y - z\rangle \leq 0, \forall y \in Z\} & , \text{ se } z \in \overline{Z} \\ \emptyset & , \text{ em outro caso.} \end{cases} \tag{2.6.12}$$

A seguir damos um resultado que usamos com freqüência.

Lema 2.66 *Seja* $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ *não vazio, convexo e fechado, e* Ψ_Z *sua função indicadora. Então verifica-se que* $N_Z = \partial\Psi_Z$ *é uma aplicação ponto-conjunto monótono maximal.*

Prova:

Conseqüência imediata do Corolário 31.5.2 [38] ■

A Desigualdade Variacional Generalizada pode ser caracterizada em termos de uma Equação Generalizada que envolve o operador T e o cone normal a Y.

Lema 2.67 *(Extensão do Lema 2.2, [7]) Resolver o problema (DVG) é equivalente a resolver a seguinte inclusão:*

$$\text{Achar } y^* \in Y, \ \text{tal que } 0 \in T(y^*) + N_Y(y^*).$$

■

Na seguinte proposição estabelecemos algumas propriedades da *função gap generalizada*. Na demonstração seguimos os resultados do capítulo 7, [26] (em [12] apresenta-se uma outra prova destas propriedades).

Proposição 2.68 *Seja a desigualdade variacional generalizada (DVG) definida pelo operador T no conjunto Y não vazio, convexo fechado. Se $ri(Dom\ T) \cap ri(Y) \neq \emptyset$, então*

1. *g_T é uma* função gap generalizada *não negativa; e*

2. *g_T é convexa.*

Prova:

(1) Provemos primeiro que $g_T(.)$ é uma *função gap* não negativa. Para establecer a condição (a) da Definição 2.62, é suficiente provar que $g_T(y) \geq 0$, para todo $y \in Dom\ T \ \cap \ Y$. Notemos que

$$g_T(y) \geq \langle \omega, y - z \rangle, \quad \forall z \in Y, \quad \forall \omega \in T(z).$$

Em particular, para $z = y$, obtemos

$$g_T(y) \geq 0, \quad \forall y \in Dom\ T \cap Y.$$

A seguir, provamos a condição (b) da Definição 2.62.
$(\Rightarrow)$ Se $g_T(y^*) = 0$, então

$$\langle \omega, y^* - z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in Y \cap Dom\ T, \quad \forall\ \omega \in T(z). \tag{2.6.13}$$

Da relação (2.6.12), para cada $z \in Y$, verifica-se

$$\langle v, y^* - z \rangle \leq 0, \quad \forall v \in N_Y(z). \tag{2.6.14}$$

Somando (2.6.13) e (2.6.14), resulta que

$$\langle \omega + v, y^* - z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in Y \cap Dom\ T, \quad \forall\ \omega + v \in T(z) + N_Y(z).$$

Desde que o operador $T + N_Y$ é monótono maximal, da Proposição 3.5.5 de [6], temos que a última desigualdade é equivalente a

$$0 \in T(y^*) + N_Y(y^*),$$

i.e., existe $\omega \in T(y^*)$, tal que

$$\langle \omega, z - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in Y.$$

Portanto, $y^* \in \mathcal{O}_C$.

($\Leftarrow$) Provemos que se $y^* \in \mathcal{O}_G$ então $g_T(y^*) = 0$.

Sendo y^* solução de (DVG), existe $\omega^* \in T(y^*)$ tal que

$$\langle \omega^*, z - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in Y.$$

Por outro lado, da monotonicidade de T, verifica-se que

$$\langle v, z - y^* \rangle \geq \langle \omega^*, z - y^* \rangle \geq 0, \forall v \in T(z), \ \forall z \in Y \cap Dom\ T,$$

e, portanto,

$$\sup_{v \in T(z)} \langle v, y^* - z \rangle \leq \langle \omega^*, y^* - z \rangle \leq 0, \quad \forall z \in Y \cap Dom\ T,$$

então

$$g_T(y^*) = \sup_{z \in Y} \sup_{v \in T(z)} \langle v, y^* - z \rangle \leq 0.$$

Desde que $g_T(y^*) \geq 0$, pois $y^* \in Y \cap Dom(T)$, concluimos que

$$g_T(y^*) = 0.$$

(2) Dado que a função g_T é o supremo de uma família de funções afins, é uma função convexa. ■

Observação 2.69 *Seja $\mathcal{O}_G \neq 0$, então*

a função $g_T(.)$ é própria.

(ii) g_T *é localmente Lipschitziana relativo a* $ir(dom\ g_T)$*; isto é, dado* $y \in ir(dom\ g_T)$*, existem* K_y *e* $\epsilon > 0$ *tais que*

$$\|g_T(z) - g_T(z')\| \leq K_y\|z - z'\|, \forall z, z' \in ir(dom\ g_T) \cap B(y, \epsilon)$$

(Teorema 5.25, [48]).

(iii) $\partial g_T(y) \neq \emptyset$, $\forall y \in ir(dom\ g_T)$ *(Teorema 5.35, [48]).*

Concluimos esta seção caracterizando, a seguir, o problema (DVG) em termos da *função gap*.

Lema 2.70 *Se o problema* (DVG) *tem solução e* $irY \cap ir(DomT) \neq \emptyset$*, então* (DVG) *é equivalente ao seguinte problema*

$$\begin{array}{lll} (P): & minimizar & g_T(y) \\ & s.a.: & y \in Y \cap Dom(T). \end{array}$$

Prova:

Conseqüência imediata da Proposição 2.68. ■

Capítulo 3

O subdiferencial da função gap

Neste capítulo caracterizamos o subdiferencial da *função gap generalizada*, $g_T(.)$, associada a uma Desigualdade Variacional Generalizada (DVG). A seguir definimos a *função gap generalizada parametrizada*, $g_T(.;.)$, relativa a uma Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica (DVG_x) que corresponde a restrição de equilibrio de nosso problema $(PMRGE)$. Consideramos uma decomposição de $g_T(.;.)$, em termos de uma função $G_T(.;.)$ e a função indicadora do conjunto das restrições da (DVG_x). Usando a equivalência entre uma Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica e um problema de minimização paramétrico obtemos, sob certas condições , uma aproximação exterior do subdiferencial da função $-G_T$. Em outras palavras obtemos um conjunto que contém $\partial - G_T$ e está definido em termos do problema original (DVG_x). Esta estimativa nos permite deduzir, no próximo capítulo as condições necessárias otimalidade do problema $(PMRGE)$.

3.1 Subdiferenciabilidade de $g_T(.)$

Nesta seção temos como objetivo estabelecer uma caracterização do gradiente generalizado da *função gap* associada com a Desigualdade Variacional Generalizada,

$$(DVG): \quad \text{Achar } y \in Y, \text{ tal que existe } w \in T(y)$$
$$\text{que satisfaz } \langle w, z-y\rangle \geq 0, \forall z \in Y.$$

A seguir definimos formalmente a *função gap* considerada no Capítulo 2.

Definição 3.1 *Sejam a aplicação ponto-conjunto* $T : I\!R^m \to 2^{I\!R^m}$ *monótona maximal e um conjunto* $Y \subseteq I\!R^m$ *convexo e fechado. A* função gap generalizada *associada ao problema* (DVG), *está determinada por*

$$g_T(y) := \begin{cases} \sup_{z\in Y} \sup_{w\in T(z)} \langle w, y-z\rangle & , \text{ se } y \in Y \cap DomT \\ +\infty & , \text{ em outro caso.} \end{cases}$$

Notemos que, se o conjunto Y e as imagens da aplicação ponto-conjunto T são conjuntos limitados podemos escrever a função gap como

$$g_T(y) := \begin{cases} \max_{z\in Y} \max_{w\in T(z)} \langle w, y-z\rangle, & \forall y \in Y \cap DomT \\ +\infty, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Do Lema 2.70, sabemos que, se o problema (DVG) tem solução $irY \cap ir(DomT) \neq \emptyset$, ele é equivalente ao problema de minimização convexa seguinte

$$\begin{array}{lll} (P): & \text{minimizar} & g_T(y) \\ & \text{s. a.} & y \in Y \cap DomT, \end{array}$$

Em outras palavras o conjunto solução de (DVG) pode ser caracterizado em termos do problema (P)

$$\mathcal{O}_G = \arg\min\{g_T(y) : y \in Y \cap DomT\} = \{y \in Y \cap DomT : g_T(y) = 0\}. \tag{3.1.1}$$

Para caracterizar o subdiferencial da *função gap generalizada*, usamos uma maneira diferente de representa-la. Consideramos duas funções sobre as quais apoiamos a nossa análise. Começamos por definir para cada $z \in Y$, a função $l_z : I\!R^m \to \overline{I\!R}$ como

$$l_z(w) := \begin{cases} \langle w, z\rangle & , \text{ se } w \in T(z) \\ +\infty & , \text{ em outro caso.} \end{cases}$$

A segunda função é a conjugada de l_z no ponto y, que denotamos por $l_z^*(y)$

$$l_z^*(y) = \sup_{w\in I\!R^m} \{\langle w, y\rangle - l_z(w)\} = \sup_{w\in T(z)} \{\langle w, y-z\rangle\}.$$

Notemos que $l_z(.)$ é linear em $T(z)$. Pelo Teorema 2.12 a função $l_z^*(y)$ é convexa, s.c.i., e própria se $T(z) \neq \emptyset$.

A função *gap generalizada* pode ser formulada como a soma de duas funções , uma é o supremo de uma família de funções convexas e a outra é a função indicadora do conjunto $Y \cap DomT$. Com efeito, consideremos a seguinte função $G_T : I\!R^m \to \overline{I\!R}$,

$$G_T(y) := \sup_{z \in Y \cap DomT} l_z^*(y) = \sup_{z \in Y \cap DomT} \sup_{w \in T(z)} \{\langle w, y\rangle - \langle w, z\rangle\} \quad \forall y \in I\!R^m. \tag{3.1.2}$$

Esta função é convexa, pela Proposição 2.3, e se $Y \cap DomT \neq \emptyset$, resulta

$$G_T(y) > -\infty \quad \forall y \in I\!R^m$$

A *função gap generalizada* associada a (DVG), $g_T(x)$, pode ser expressa por

$$g_T(y) = G_T(y) + \Phi_{Y \cap DomT}(y), \tag{3.1.3}$$

sendo $\Phi_{Y \cap DomT}$ a função indicadora do conjunto $Y \cap DomT$. O seguinte teorema é uma extensão do teorema VI.4.4, [20], o usamos para caracterizar o conjunto subdiferencial da *função gap generalizada.*

Teorema 3.2 *Seja $Y \subset I\!R^m$ um conjunto compacto não vazio e $h : I\!R^m \times Y \longrightarrow \overline{I\!R}$ uma função que satisfaz as seguintes condições :*

(i) *$h(y, z) > -\infty$ para todo $y \in I\!R^m$ e $z \in Y$*

(ii) *$h(. , z)$ é s.c.i. e convexa, para cada $z \in Y$,*

(iii) *$h(y, .)$ é s.c.s. em Y, para cada $y \in I\!R^m$.*

Se a função definida por

$$f(y) = \sup_{z \in Y}\{h(y, z)\} \text{ é tal que } int(Dom(f)) \neq \emptyset, \tag{3.1.4}$$

então

(1) *f é própria, semicontínua inferior e convexa (i.e., $f \in \overline{Conv}(I\!R^m)$).*

(2) $\partial f(y) = \overline{co}\,\{\partial_1 h(y,z):\ z \in Y, f(y) = h(y,z)\} + N_{Dom(f)}(y)$.

Em particular, se $y \in int(Dom(f))$, *resulta:*

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= co\,\{\textstyle\bigcup_{z\in\{z\in Y, f(y)=h(y,z)\}} \partial_1 h(y,z)\} \\ &= co\,\{\partial_1 h(y,z):\ z \in Y, f(y) = h(y,z)\}. \end{aligned}$$

Prova:

(1) A função é própria por (i) e (3.1.4); é convexa pela Proposição 2.3 e é s.c.i. por (ii).

(2) Seja $I(y) = \{z \in Y\ :\ f(y) = h(y,z)\}$ e $S(y) = \cup_{z\in I(y)} \partial_1 h(y,z)$.

Notemos primeiro que $I(y) \neq \emptyset$, para todo $y \in I\!R^m$. De fato, se $f(y) = l \leq +\infty$, existe $\{z_k\} \subset Y$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} h(y, z_k) = l,$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ \exists\{z_{k_i}\} \subset \{z_k\} \text{ e } \exists z \in Y : z_{k_i} \to z \text{ quando } i \to +\infty, \\ &\Rightarrow\ l = \lim_{k\to\infty} h(y,z_k) = \lim_{k\to\infty} h(y, z_{k_i}) \leq h(y,z) \leq f(y) \\ &\Rightarrow\ l = h(y,z) = f(y) \ \Rightarrow\ z \in I(y), \end{aligned}$$

onde as desigualdades resultam da semicontinuidade superior de $h(y,\ .\ )$ e da definição de f, respectivamente.

Se $y \notin dom(f)$ a igualdade da tese verifica-se trivialmente. Consideramos então o caso $y \in dom(f)$.

Devemos mostrar que $\partial f(y) = \overline{co}\ S(y) + N_{dom(f)}(y)$. Primeiro provamos a inclusão $\partial f(y) \supseteq \overline{co}\ S(y) + N_{dom(f)}(y)$.

(a) $S(y) \subseteq \partial f(y)$:

$s \in S(y)\ \Rightarrow\ \exists z \in I(y), s \in \partial_1 h(y,z)\ \Rightarrow$

$$h(v,z) \geq h(y,z) + \langle s, v-y\rangle\ , \forall v \in I\!R^m.$$

Das definições de f e $I(y)$, resulta que

$$f(v) \geq f(y) + \langle s, v-y\rangle\ , \forall v \in I\!R^m.$$

Logo, $s \in \partial f(y)$. Portanto, $S(y) \subseteq \partial f(y)$.

(b) $\overline{co}\ S(y) \subseteq \partial f(y)$, pois $\partial f(y)$ é convexo e fechado, Proposição 2.29 e observação 2.32.

(c) Da definição do cone de recessão, resulta que o conjunto $N_{Dom(f)}(y)$ é o cone de recessão do $\partial f(y)$, i.e.,

$$N_{Dom(f)}(y) = \{d \in I\!R^m : s + td \in \partial f(y) \quad \forall s \in \partial f(y),\ \forall t \geq 0\}.$$

Afirmamos que

$$\partial f(y) = \partial f(y) + N_{Dom(f)}(y). \tag{3.1.5}$$

De fato, desde que $0 \in N_{Dom(f)}(y)$, implica que $\partial f(y) \subset \partial f(y) + N_{Dom(f)}(y)$. Por outro lado, da caracterização do $N_{Dom(f)}(y)$, temos que

$$\begin{aligned} s \in \partial f(y),\ d \in N_{Dom(f)}(y) \Rightarrow \qquad & s + d \in \partial f(y) \Rightarrow \\ & \partial f(y) + N_{Dom(f)}(y) \subset \partial f(y). \end{aligned}$$

Assim, das últimas relações de inclusão, obtemos a (3.1.5).

(d) Dos itens (b) e (c) concluimos que

$$\overline{co}\ S(y) + N_{Dom(f)}(y) \subseteq \partial f(y) + N_{Dom(f)}(y) = \partial f(y).$$

E, portanto, provamos uma das inclusões do teorema.

Mostramos a outra inclusão nos dois itens seguintes.

(e) Do Teorema 25.6, [38], sabemos que por ser f uma função convexa em $I\!R^n$, verifica-se que

$$\begin{aligned} \partial f(y) = \overline{co}\ \{s \in I\!R^n : \exists\{y_k\}, \quad \exists\{\nabla f(y_k)\}, y_k \to y, \nabla f(y_k) \to s\} \\ + N_{Dom(f)}(y). \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Vamos provar que

$$\{s \in I\!R^n : \exists\{y_k\},\ \exists\{\nabla f(y_k)\},\ y_k \to y,\ \nabla f(y_k) \to s\} \subseteq S(y).$$

Seja $s \in I\!R^n$, tal que existem as seqüências $\{y_k\}$ e $\{\nabla f(y_k)\}$ verificando que $y_k \to y$ e $\nabla f(y_k) \to s$. Então do item d) tem-se que

$$\partial f(y_k) = \{\nabla f(y_k)\} = \{\nabla_y h(y_k, z_k)\}, \ \forall z_k \in I(y_k). \tag{3.1.7}$$

Consideremos a seqüência $\{z_k\} \subset Y$, com $z_k \in I(y_k)$. Desde que Y é compacto, existem uma subseqüência $\{z_{k_i}\}$, de $\{z_k\}$, e um ponto $z \in Y$ tal que $z_{k_i} \to z$ quando $i \to \infty$.

Usando a seguinte caracterização de função convexa :

$$h(v, z_{k_i}) \geq h(y_{k_i}, z_{k_i}) + \langle \nabla_y h(y_{k_i}, z_{k_i}), v - y_{k_i} \rangle, \ \forall v \in I\!R^n, \forall i \in I\!N,$$

e o fato que

$$f(y_{k_i}) = h(y_{k_i}, z_{k_i}) \geq h(y_{k_i}, \overline{z}) \ \ \forall \overline{z} \in I(y_{k_i}),$$

resulta

$$h(v, z_{k_i}) \geq h(y_{k_i}, \overline{z}) + \langle \nabla_y h(y_{k_i}, z_{k_i}), v - y_{k_i} \rangle, \ \forall v \in I\!R^n, \forall i \in I\!N.$$

Tomamos o limite inferior nesta última desigualdade e, desde que $h(y, \ .\ )$ é semicontínua superior e $h(\ .\ , z)$ é semicontínua inferior, obtemos

$$\begin{aligned} h(v, z) \geq & \quad \limsup_{i \to \infty} h(v, z_{k_i}) \geq \liminf_{i \to \infty} h(v, z_{k_i}) \\ \geq & \quad \liminf_{i \to \infty} h(y_{k_i}, \overline{z}) + \lim_{i \to \infty} \langle \nabla f(y_{k_i}), v - y_{k_i} \rangle \\ \geq & \quad h(y, \overline{z}) + \langle s, v - y \rangle, \ \ \forall v \in I\!R^n. \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Em particular, se $v = y$, temos que

$$h(y, z) \geq h(y, \overline{z}) = f(y),$$

isto é, $z \in I(y)$ e válida a desigualdade 3.1.8 para $\overline{z} = z$

$$h(v, z) \geq h(y, z) + \langle s, v - y \rangle, \ \ \forall v \in I\!R^n .$$

Portanto,

$$s \in \partial_1 h(y, z) \ \ \Rightarrow \ \ s \in S(y).$$

(f) Do item anterior e do item d) deduzimos que

$$\partial f(y) = \overline{co}S(y) + N_{Dom(f)}(y) \; .$$

Em particular se $y \in$ int(Dom(f)), resulta que $N_{Dom(f)} = \{0\}$.

Finalmente, para mostrar que $co \; \{\partial_y h(y,z) \; : \; z \in Y, f(y) = h(y,z)\}$ é fechado, aplicamos o mesmo raciocínio que o usado no Teorema VI.4.4.1, [20]. Assim, concluimos a prova.

■

Observação 3.3 **(i)** *Este teorema relaxa a condição da Proposição VI.4.4.2, [20], que considera às funções convexas $h(.,z)$ finitas, com supremo finito.*

(ii) *A parcela $N_{Dom(f)}(y)$ é fundamental quando $y \in Fr(Dom(f))$ (onde Fr denota* fronteira*).*

(iii) *A propriedade anterior continua sendo válida sob uma condição mais fraca que a s.c.s. de $h(y, \; . \;)$ em Y, é suficiente pedir* $\liminf_{z_k \to z} h(y, z_k) \leq h(y,z)$ *para todo $y \in Y$.*

A seguir damos uma caracterização do subdiferencial de G_T, baseada na propriedade anterior, que nos permite obter uma expressão para o subdiferencial da *função gap* g_T

Proposição 3.4 *Seja o problema (DVG), tal que $Y \cap DomT$ é compacto não vazio. Se para cada $y \in I\!R^m$, fixo, a função $z \to l_z^*(y)$, definida para $z \in Y \cap DomT$ é semicontínua superior, e $G_T(y)$ finito então*

$$\partial G_T(y) = \overline{co} \; \{\partial l_z^*(y) \; : \; z \in M(y)\} + N_{domG_T}(y),$$

sendo

$$M(y) := \{z \in Y \cap DomT \; : \; G_T(y) = l_z^*(y)\}. \tag{3.1.9}$$

Prova:

Observemos que, se definimos $h(y,z) := l_z^*(y)$, resulta

(1) Para cada $z \in Y \cap DomT$ fixo, $h(.,z)$ é própria, convexa e s.c.i., dado que é a conjugada de uma função própria e convexa (ver Teorema 2.12).

(2) $h(x,.)$, por hipótese, é s.c.s. em $Y \cap DomT$. Logo, podemos aplicar o Teorema 3.2, substituindo Y por $Y \cap DomT$ para obter a caracterização desejada.

■

Corolário 3.5 *Seja o problema (DVG), tal que $Y \cap DomT$ é compacto não vazio. Se para cada $y \in Y \cap DomT$, fixo, a função $z \to l_z^*(y)$ é s.c.s. em $Y \cap DomT$ e $int(domG_T) \cap ir(Y \cap DomT) \neq \emptyset$. Então*

$$\partial g_T(y) = \overline{co}\,\{\partial l_z^*(y)\ :\ z \in M(y)\} + N_{domG_T}(y) + N_{Y \cap DomT}(y).$$

Prova:

Conseqüência imediata da definição de G_T e da Proposição 3.4

■

A seguir apresentamos uma condição para garantir que, para cada $y \in Y \cap DomT$ dado, a função $z \to l_z^*(y)$ seja s.c.s. em $Y \cap DomT$.

Lema 3.6 *Seja $T : I\!R^m \to 2^{I\!R^m}$ uma aplicação ponto-conjunto monótona maximal tal que $Y \subseteq int(DomT)$. Então, a função $l_{(.)}^*(y) =: h(y,\ .\ ) : Y \to \overline{I\!R}$ é semicontínua superior em Y para cada $y \in I\!R^m$, fixo.*

Prova:

(Pelo absurdo) Suponhamos que existem $y \in I\!R^m$, $z \in Y$ e uma seqüência $\{z_k\} \subset Y$, com $z_k \to z$, tal que $l_{z_k}^*(y)$ é convergente e

$$\limsup_{z' \to z} l_{z'}^*(y) = \lim_{k \to +\infty} l_{z_k}^*(y) = L > l_z^*(y)\ .$$

Pela Proposição 2.58 sabemos que existe uma vizinhança V de z tal que $T(V) = \bigcup_{z' \in V} T(z')$ é limitado. Como para algum $K \in I\!N$ temos que $z_k \in V$, para todo $k \geq K$, então temos que $\bigcup_{k \geq K} T(z_k) \subset T(V)$ é limitado.

(i) Se $L < +\infty$ consideramos um $\epsilon > 0$ tal que

$$L - \epsilon > l_z^*(y). \tag{3.1.10}$$

Da definição de $l_{z_k}^*(y)$ resulta que

$$\forall k \in I\!N, \exists \omega_k \in T(z_k) \text{ tal que } l_{z_k}^*(y) - \langle \omega_k, y - z_k \rangle \leq \epsilon.$$

Assim, temos que $\{\omega_k\} \subset T(V)$ é limitada. Então, existem $\{\omega_{k_j}\}_j \subseteq \{\omega_k\}_k$ e $\omega \in I\!R^n$, tal que

$$\omega_{k_j} \longrightarrow \omega \text{ ,quando } j \longrightarrow +\infty.$$

Desde que $\omega_{k_j} \in T(z_{k_j})$ e o operador T é fechado (Proposição 2.58), obtemos que $\omega \in T(z)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} l_z^*(y) = &\quad \sup_{v \in T(z)} \langle v, y - z \rangle \geq \langle \omega, y - z \rangle \\ = &\quad \lim_{j \to +\infty} \langle \omega_{k_j}, y - z_{k_j} \rangle \\ \geq &\quad \lim_{j \to +\infty} l_{z_{k_j}}^*(y) - \epsilon = L - \epsilon, \end{aligned}$$

i.e., $l_z^*(y) \geq L - \epsilon$, que contradiz (3.1.10).

(ii) Se $L = +\infty$, consideremos $M > 0$ tal que $l_z^*(y) < M$. Enão, existe K tal que $l_{z_k}^*(y) > M$, $\forall k \geq K$. Da definição de $l_{z_k}^*(y)$, existe $\omega_k \in T(z_k)$ tal que

$$\langle \omega_k, y - z_k \rangle > M \quad \forall k \geq K.$$

Seguindo um raciocínio semelhante à parte anterior chegamos a que $l_z^*(y) \leq M$ o que é um absurdo . Logo a tese do lema é verdadeira.

■

Corolário 3.7 *Seja T uma aplicação ponto-conjunto monótona maximal tal que $DomT = I\!R^m$. Se Y é um subconjunto convexo compacto de $I\!R^m$, então, para cada $y \in I\!R^m$, a função $z \mapsto l_z^*(y)$ é semicontínua superior em Y.*

$\blacksquare$

Sob as condições destas últimas proposições obtemos, a seguir, uma expresão para $\partial g_T(y)$.

Proposição 3.8 *Seja T uma aplicação ponto-conjunto monótona maximal e $Y \subset int(Dom\ T)$. Se o conjunto Y é convexo e compacto, então*

$$\partial g_T(y) = co\ \{\omega \in I\!R^m\ :\ z \in Y,\ w \in T(z),\ g_T(y) = l_z^*(y) = \langle \omega, y - z\rangle\} + N_Y(y). \tag{3.1.11}$$

Em particular

$$\partial g_T(y) = co\ \{\omega \in I\!R^m\ :\ z \in Y,\ w \in T(z),\ g_T(y) = l_z^*(y) = \langle \omega, y - z\rangle\} \quad \forall y \in\ int(Y).$$

Prova:

De fato, temos que

1) $dom\ (G_T) = I\!R^m$, pois Y é compacto e como T é monótono maximal deve ser $T(Y)$ limitado (Proposição 2.58).

2) Para cada z fixo e $y \in I\!R^m$, qualquer, resulta

$$\partial l_z^*(y) = \text{co}\ \{\omega \in T(z)\ : l_z^*(y) = \langle \omega, y - z\rangle\};$$

pois podemos aplicar o Teorema 3.2, substituindo Y por $T(z)$, e considerando

$$h(y, \omega) = \langle \omega, y - z\rangle.$$

Note que $h(\ .\ ,\ .\ )$ é uma função contínua em (y, ω) e, para cada ω fixo, $h(\ .\ , \omega)$ é afim. Donde

(*i*) $h(., \omega)$ é s.c.i. e convexa em Y para cada $\omega \in T(z)$, fixo;

(*ii*) $h(y, .)$ é s.c.s. em $T(z)$ para cada y fixo .

Além disso, para cada $z \in Y$, a compacidade de $T(z)$ implica que $Dom\ l_z^* = I\!R^m$, e que o conjunto

$$\{\omega \in T(z)\ : l_z^*(y) = \langle \omega, y - z\rangle\}$$

é compacto (pois $h(., \omega)$ é contínua).

3) O conjunto

$$S = \{\omega \in \mathbb{R}^m \ : z \in Y,\ w \in T(z),\ g_T(y) = l_z^*(y) = \langle \omega, y - z\rangle\}$$

é compacto; de fato, sejam $\{\omega_k\}_k \subset S$ e ω tal que $\omega_k \to \omega$, então da definição do conjunto S, existe $\{z_k\}_k \subset Y$ tal que $\{\omega_k\}_k \subset T(x_k)$. Da compacidade de Y sendo a aplicação T fechada, afirmamos que $z \in Y$ e $\omega \in T(z)$. Tomando $h(y, \omega)$, como no item 2) pela sua continuidade em $\omega \in S$, resulta que S é um conjunto fechado.

Pelo absurdo provamos que S é um conjunto limitado. Isto é assumimos que existe uma seqüência

$$\{\omega_k\}_k \subset S \quad \text{tal que } \|\omega_k\| \to_{k\to\infty} +\infty.$$

Da compacidade de Y, existe um ponto de acumulação z, da seqüência $\{z_k\}_k \in Y$ associada a $\{\omega_k\}_k$. Por outro lado pela compacidade local de T, existe uma vizinhança V de z tal que $\{\omega_{k_j}\}_j \subset \cup_{z' \in V} T(z')$ é limitado para alguna seqüência $\{\omega_{k_j}\}_j$; que é uma contradição .

Logo, $S \in \mathbb{R}^m$ é compacto. Usando a Proposição 3.4, o Corolário 3.5 e as três afirmações acima resulta a tese da proposição .

■

3.2 Alguns Exemplos

A seguir apresentamos alguns exemplos que ajudam a visualizar os elementos do subdiferencial da *função gap* associada a uma desigualdade variacional (DVG).

Exemplo 3.9 *Seja a função f definida por*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2}, & se\ z < 0, \\ 0, & se\ 0 \leq z \leq 1, \\ \frac{2(z^3-1)}{3} & se\ z > 1. \end{cases} \quad .$$

Consideremos a aplicação ponto-conjunto monótona maximal $T := \partial f$ e a desigualdade variacional generalizada (DVG), associada a T, definida sobre o conjunto viável $Y = [-2, 3]$. Então, temos

$$T(z) = \begin{cases} \{z\} & se \quad z < 0 \ , \\ \{0\} & se \ 0 \leq z < 1 \ , \\ [0, 2] & se \quad z = 1 \ , \\ \{2z^2\} & se \quad z > 1 \ . \end{cases}$$

e

$$(DVG): \quad Achar \ y \in [-2, 3], \ tal \ que \ existe \ w \in T(y)$$
$$que \ satisfaz \ \langle w, z - y \rangle \geq 0, \forall z \in [-2, 3].$$

O conjunto solução resulta $\mathcal{O}_G = [0, 1]$.

A função gap está definida por

$$g_T(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}y^2 & , \ se \ -2 \leq y \leq 0 \ , \\ 0 & , \ se \ 0 \leq y \leq 1 \ , \\ 2y - 2 & , \ se \ 1 \leq y \leq \frac{3}{2} \ , \\ \frac{8}{27}y^3 & , \ se \ \frac{3}{2} \leq y < 3 \ , \\ +\infty & , \ em \ outro \ caso. \end{cases}$$

Observemos que $\mathcal{O}_G$ é o conjunto de soluções dos problemas de minimização $\min_{z \in Y} f(z)$, $\min_{y \in I\!R} g_T(y)$ *(Lema 2.70) e da equação $g_T(y) = 0$. O subdiferencial de $g_T(.)$*

$$\partial g_T(y) = \begin{cases} (-\infty, -1] & , \ se \ y = -2 \ , \\ \{\frac{1}{2}y\} & , \ se \ -2 < y \leq 0 \ , \\ \{0\} & , \ se \ 0 \leq y < 1 \ , \\ [0, 2] & , \ se \ y = 1 \ , \\ \{+2\} & , \ se \ 1 < y \leq \frac{3}{2}, \\ \{\frac{8}{9}y^2\} & , \ se \ \frac{3}{2} \leq y < 3 \ , \\ [8, +\infty) & , \ se \ y = 3 \\ \emptyset & \quad em \ outro \ caso. \end{cases}$$

Outra maneira de definir $\partial g_T(.)$ é através da Proposição 3.4. De fato, temos que

$$M(y) = \begin{cases} \{\frac{1}{2}y\} & , \ se \ -2 \leq y < 0 \ , \\ [0, 1] & , \ se \ 0 \leq y \leq 1, \\ \{+1\} & , \ se \ 1 < y \leq \frac{3}{2} \ , \\ \{\frac{2}{3}y\} & , \ se \ \frac{3}{2} < y \leq 3 \ . \end{cases}$$

E a família de funções conjugadas l_z^*, $z \in Y$ é

$$l_z^*(y) = \begin{cases} z(y-z) & \forall y \in I\!R \quad se\ z < 0 \\ 0 & \forall y \in I\!R \quad se\ 0 \le z < 1 \\ \begin{cases} 0 & se\ \ y < 1 \\ 2y-2 & se\ \ y \ge 1. \end{cases} & \forall y \in I\!R \quad se\ z = 1 \\ 2z^2(y-z) & \forall y \in I\!R \quad se\ z > 1 \end{cases}$$

Notemos que, neste caso, a função $G_T(\ .\ )$ está determinada por

$$G_T(y) = \begin{cases} -2y-4 & ,\ se\ y \le -4\ , \\ \frac{1}{4}y^2 & ,\ se\ \ -4 \le y \le 0\ , \\ 0 & ,\ se\ 0 \le y \le 1\ , \\ 2y-2 & ,\ se\ 1 \le y \le \frac{3}{2}\ , \\ \frac{8}{27}y^3 & ,\ se\ \frac{3}{2} \le y \le \frac{9}{2}\ , \\ 18y-54 & ,\ se\ y \ge \frac{9}{2}\ . \end{cases}$$

Exemplo 3.10 *Consideremos aplicação ponto-a-ponto T monótona maximal definido por $T(y) = (y_1 - y_2\ ,\ y_1)$, e o problema (DV) formulado sobre $Y = [0,\alpha] \times [-\beta, 0]$, com $0 < \alpha < \beta$. Pode-se verificar que o conjunto solução de (DV) é $\mathcal{O} = \{(0, y_2)^t : -\beta \le y_2 \le 0\}$. A função gap está determinada por:*

$$g_T(y) = \sup_{z \in Y}\{z_1(y_1+y_2) - z_1^2 - z_2 y_1\}, \forall y \in Y.$$

Observemos que

$$l_z^*(y) = z_1(y_1+y_2) - z_1^2 - z_2 y_1\ , \forall z \in Y, \forall y \in Y.$$

Então, para $y \in Y$, resulta

$$g_T(y) = \begin{cases} \frac{(y_1+y_2)^2}{4} + \beta y_1 & ,\ se\ y_1 \ge 0,\quad 0 \le y_1 + y_2 \le 2\alpha, \\ \beta y_1 & ,\ se\ y_1 \ge 0,\quad y_1 + y_2 \le 0; \end{cases}$$

sendo o conjunto de índices das funções $l_{(.)}^*(y)$

$$M(y) = \begin{cases} \{(\frac{y_1+y_2}{2}, -\beta)^t\} & ,\ se\ y_1 \ge 0, 0 \le y_1 + y_2 \le 2\alpha, \\ \{(0, -\beta)^t\} & ,\ se\ y_1 \ge 0, y_1 + y_2 \le 0. \end{cases}$$

O subdiferencial da função gap é

$$\partial g_T(y_1, y_2) = \begin{cases} \{(r+\beta, r)^t\} & se\ y_1 > 0, 0 \le y_1 + y_2 \le 2\alpha, \\ co\ \{(r,r)^t, (r+\beta, r)^t\} & ,\ se\ y_1 = 0, -\beta \le y_2 \le 0, \\ \{(\beta, 0)^t\} & ,\ se\ y_1 > 0, y_1 + y_2 \le 0, \end{cases}$$

onde $r = \frac{y_1+y_2}{2}$.

3.3 A função gap parametrizada

Nesta seção definimos a *função gap generalizada parametrizada* associada a uma Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica, que denotamos por (DVG_x). Fazemos de maneira análoga à Definição 3.1.

Consideremos as aplicações ponto-conjunto $Y : I\!R^n \to 2^{I\!R^m}$ e $T : I\!R^n \times I\!R^m \to 2^{I\!R^m}$, tais que para cada $x \in I\!R^n$, o conjunto $Y(x)$ seja não vazio convexo e fechado e $T(x, \ .\ )$ seja monótono maximal. Para cada x o problema de *Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica* está definido por,

$$(DVG_x): \quad \text{Achar } y \in Y(x), \text{ tal que existe } \ w \in T(x,y)$$
$$\text{que satisfaz } \langle w, z-y\rangle \geq 0, \forall z \in Y(x).$$

O conjunto solução do problema (DVG_x) é denotado por $\mathcal{O}_G(x) = \{y \in Y(x) : \exists w \in T(x,y); \langle w, z-y\rangle \geq 0, \forall z \in Y(x)\}$. Alguns autores usam a notação $DVG(T(x,.), Y(x))$ nós preferimos (DVG_x).

Adicionalmente, precisaremos da seguintes hipóteses para definir a *função gap generalizada* associada ao problema (DVG_x).

Hipótese 3.11 *Para cada $x \in I\!R^n$.*

a. *O conjunto viável do problema (DVG_x), é da forma*

$$Y(x) := \{y : g_i(x,y) \leq 0, i \in 1 = 1, \ldots, k_2\}, \tag{3.3.12}$$

sendo a função $g_i : I\!R^n \times I\!R^m \longrightarrow I\!R$ localmente lipschitziana, em relação a x, e convexa em relação à variável y, para cada $i = 1, 2..., k_2$.

b. *Existe solução do problema (DVG_x).*

c. $ir(Y(x)) \cap ir(DomT(x, \ .\ )) \neq \emptyset$.

d. $(DomT(x,.)) = I\!R^m$.

Observação 3.12 **a)** *As funções g_i são localmente Lipschitzianas nas duas variáveis pois, da hipótese 3.11 item a), esta função é convexa na segunda variável.*

b) *Podemos substituir d) por*

d') $Y(x) \subseteq int(DomT(x,.))$.

Definição 3.13 *A* função gap generalizada *associada ao problema* (DVG_x) *é definida por*

$$g_T(x,y) := \begin{cases} \sup_{z\in Y(x)} \sup_{w\in T(x,z)} \langle w, y-z\rangle & , \textit{ se } (x,y) \in Graf\ Y \\ +\infty & , \textit{ em outro caso.} \end{cases}$$

Observemos que, para cada x fixo, pela hipótese 3.11 b), e pelo Lema 2.70 podemos reformular o problema (DVG_x) como sendo o seguinte problema de minimização paramétrica

$$\begin{aligned} (P_x): \quad & \text{minimizar} \quad g_T(x,y) \\ & \text{s. a.} \qquad y \in Y(x). \end{aligned}$$

e pela Proposição 2.68 ocorre que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_G(x) &= \{y \in Y(x) : g_T(x,y) = 0\} \\ & \{y \in Y(x) : G_T(x,y) = 0 = -G_T(x,y)\}. \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

3.4 Estimativa do Subdiferencial

No contexto de nosso problema $(PMRGE)$ é suficiente estabeler condições que garantão a existência do subdiferencial da função $-G_T$, (3.1.2), parametrizada e a sua relação com multiplicadores de Lagrange associados ao problema de minimização paramétrica P_x equivalente a (DVG_x). Estabelecemos primeiro algumas propriedades da função $g_T(x,\ .\ )$ e de $G_T(x,.)$, para cada $x \in I\!R^n$. Estes resultados são obtidos de simples adaptações da Definição 2.62 e das Proposições 3.8 e 2.58.

Lema 3.14 *Para cada $x \in I\!R^n$, assumimos que as condições do problema (DVG_x), as hipóteses 3.11 são satisfeitas e que o conjunto $Y(x)$ é compacto. Se $\mathcal{O}_G \neq \emptyset$ verificam-se as seguintes propriedades:*

(i) *A função* $g_T(x, \,.\,)$ *é convexa*

(ii) $g_T(x, \,.\,)$ *é uma função gap sobre* $Y(x)$*, isto é,*

$$g_T(x, \,.\,) \geq 0, \quad \forall y \in Y(x)$$

$$e \quad y \in \mathcal{O}_G(x) \Longleftrightarrow g_T(x,y) = 0.$$

(iii) *Se* $y \in int\ Y(x)$*, então*

$$\partial_2 g_T(x,y) = \quad co\ \{\omega \ : \qquad \exists\ z \in Y(x),\ \omega \in T(x,z),$$
$$g_T(x,y) = \langle \omega, y - z \rangle\} \ \ \forall\ y \in int(Y(x)) \tag{3.4.14}$$

Prova:
Fixado x, obtemos os itens (i) e (ii) pela Proposição 2.68 e o item (iii) pela Proposição 3.8. ■

Neste caso a *função gap generalizada parametrizada* pode ser decomposta, análogo com (3.1.3), da seguinte maneira:

$$g_T(x,y) = G_T(x,y) + \Phi_{GrafY}(x,y) \tag{3.4.15}$$

sendo

$$G_T(x,y) = \sup_{z \in Y(x)} \sup_{w \in T(x,z)} \langle w, y - z \rangle$$

e $\Phi_{Graf\ Y}(x,y)$ a função indicadora do gráfico de Y no ponto (x,y).

Lema 3.15 *Seja* $x \in I\!R^n$. *Se as condições do problema* (DVG_x)*, as hipóteses 3.11 são satisfeitas e* $\mathcal{O}_G(x) \neq \emptyset$ *então*

$$g_T(x,y) = 0 \Longleftrightarrow G_T(x,y) = 0 \quad e \quad y \in Y(x).$$

Prova:
Para x fixo, se $g_T(x,y) = 0$ então pelo Lema 3.14 $y \in \mathcal{O}_G(x)$, o que significa $\Phi_{GrafY}(x,y) = 0$ pois $y \in Y(x)$ em conseqüência $G_T(x,y) = 0$.

A outra implicação é simples.

■

Notemos que no Lema 3.14 generalizamos resultados obtidos no caso no paramétrico e conseguimos sob certas condições o subdiferencial em relação a y da função *gap*, $\partial_2 g_T(x,y)$. Mas não permitem obter concluões a respeito de $\partial_1 g_T(x,y)$. De fato, de forma geral o cálculo direto do subdiferencial da *função gap generalizada*, g_T, no ponto (x,y) envolve a relação implícita entre as duas variáveis x e y pois $y \in Y(x)$. Evitamos esta dificuldade calculando o ∂G_T onde x e y são consideradas independentes, um da outra.

A fim de obter uma estimativa do conjunto $\partial - G_T$, consideramos a função $-G_T(x,y)$ como uma *função marginal*. Com efeito, seja o seguinte problema

$$\begin{array}{rll} (Q_{x,y}) : -G_T(x,y) = & \inf_{(z,w)} & \langle \omega, z-y \rangle \\ & \text{s. a} & g(x,z) \leq 0 \\ & & (y,x,z,w) \in I\!R^m \times Graf\ (T) \end{array}$$

O valor marginal deste problema coincide com $-g_T(x,y)$ quando $y \in Y(x)$.

Precisamos assegurar a subdiferenciabilidade da função $-G_T(\ .\ ,\ .\ )$, $\partial g_T(x,y) \neq \emptyset$. Para isto, introduzamos a seguir o conceito de *maleabilidade* ("tameness").

A condição de *maleabilidade* resulta de generalizar a condição de existência de soluções ótimas limitadas do problema $Q_{x',y'}$ viável. Sendo que (x',y') varia próximo do ponto (x^*,y^*) parâmetro do problema Q_{x^*,y^*} com soluções também limitadas. Esta condição foi apresentada em [19] no cálculo de subdiferenciabilidade de funções marginais. Das varias versões de *maleabilidade*, [14, 44, 50, 51], usamos a definição em [44]. Denotamos por $dist(\xi, A)$ a distância do ponto ξ ao conjunto A, $dist(\xi, A) := \inf_{a\in A} \|\xi - a\|$.

Definição 3.16 *[[44]] Dado o ponto (x,y), o problema $(Q_{x,y})$ é* maleável *se existe um conjunto $\mathcal{A} \subset I\!R^m \times I\!R^m$ com as seguintes características:*
O conjunto $\mathcal{A}$ é compacto e para qualquer $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $\alpha < G_T(x,y)$ tal que se

$$\|(x',y') - (x,y)\| < \delta \ e\ \alpha < G_T(x',y')$$

então, o valor ótimo do problema $(Q_{x',y'})$ incrementado com a restrição $dist((z,w),\mathcal{A}) \leq \epsilon$, continua sendo $G_T(x',y')$.

Sob a hipótese de maleabilidade para o problema $(Q_{x,y})$, assegura-se de alguma maneira que a variação do conjunto de soluções viáveis, respecto dos parâmetros, está localmente limitada. Obtemos, ainda, outras propriedades importantes para a função $-G_T(\,.\,,\,.\,)$ formuladas na seguinte proposição .

Proposição 3.17 *Seja (x^*, y^*) tal que o problema (Q_{x^*,y^*}) é maleável. Então, se verificam as seguintes propriedades*

i) *$G_T(x^*, y^*)$ é finito; e*

ii) *$-G_T(\,.\,,\,.\,)$ é estritamente semicontínua inferior em (x^*, y^*).*

iii) *Existe pelo menos uma solução do problema Q_{x^*,y^*}. Mais ainda, existe uma solução $(z^*, w^*) \in \mathcal{A}$.*

iv) *$(-G_T(x^*, y^*)$ é direcionalmente Lipschitziana se e somente se o conjunto $\partial^0(-G_T)(x^*, y^*)$ é pontudo*

Prova:

Os três primeiros itens são conclusões da Proposição 8 [44]. O item iv) provém da Proposição 2 em [44]. ■

Para enunciar a condição que nos permite garantir que $\partial(-G_T)(x, y)$ seja não vazio, formulamos primeiro a Proposição 1, [44] onde a função marginal é denotada por $p(.)$ e o parâmetro por u.

Proposição 3.18 *(Proposição 1, Rock-82) Seja $p(.)$ finita e s.c.i. no ponto u, tem-se que $\partial p(u) \neq \emptyset$ se, e somente se, existem seqüências $t_j \downarrow 0$ e $u_j \rightarrow_p u$ tais que para nenhuma seqüência convergente $v_j \rightarrow v$ ocorre que*

$$\frac{p(u_j + t_j v_j) - p(u_j)}{t_j} \rightarrow -\infty. \tag{3.4.16}$$

■

Lembremos que $u_j \rightarrow_p u$ significa que $u_j \rightarrow u$ e $p(u_j) \rightarrow p(u)$.

Proposição 3.19 *Seja $(-G_T)(.,.)$ finita e s.c.i. no ponto (x, y). Para que $\partial(-G_T)(x, y) \neq \emptyset$ é suficiente que existam seqüências $t_j \downarrow 0$ e $(x_j, y_j) \rightarrow_{-G_T}$*

(x, y) *tais que para nenhuma seqüência convergente* $(h_j, k_j) \to (0, 0)$, *ocorra que*

$$G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)) - G_T(x_j, y_j) \downarrow 0. \tag{3.4.17}$$

Prova:

Suponhamos que $\partial(-G_T(x, y)) = \emptyset$. Notemos que, pela Proposição 2.20 item 2, temos que

$$-G_T^{\uparrow}((x, y); (h, k)) = -\infty \ \forall (h, k) \in dom(-G_T)((x, y); .) \neq \emptyset.$$

O que é equivalente a $(-G_T)^{\uparrow}((x, y); (0, 0)) = -\infty$ (pela homogeneidade positiva da $(-G_T)^{\uparrow}((x, y); .)$ Proposição 2.20).

Desde que $-G_T(., .)$ é finito e s.c.i. no ponto (x, y), as observações acima e a Proposição 3.18 resulta

$$\forall t_j \downarrow 0, \ (x_j, y_j) \to_{-G_T} (x, y) \ \exists \ (h_j, k_j) \to (0, 0) \text{ tal que}$$

$$\frac{G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)) - G_T(x_j, y_j)}{t_j} \to \infty. \tag{3.4.18}$$

Então para j suficiente grande verifica-se que:

$$G_T(x_j, y_j) < G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j))$$

como G_T é s.c.s. em (x, y), temos que

$$G_T(x, y) = \lim_{j \to +\infty} G_T(x_j, y_j) \leq G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)) \leq G_T(x, y).$$

Isto implica que existe uma subseqüência de $\{(x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)\}$ que tornamos em denota-la com o mesmo nome, tal que

$$\lim_{j \to +\infty} G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)) = G_T(x, y).$$

Pelo que, se deduz que

$$G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)) - G_T(x_j, y_j) \downarrow 0.$$

Por negação , obtemos a tese desta proposição .

■

Seja (z, w) um ponto viável para o programa

$$\begin{aligned}(Q_{x,y}) : -G_T(x, y) = \quad & \inf \quad \langle \omega, z - y \rangle \\ & \text{s. a} \quad g(x, z) \leq 0 \\ & \qquad (y, x, z, w) \in I\!R^m \times Graf\ (T).\end{aligned}$$

Notemos que se $y \in Y(x)$, o problema $Q_{x,y}$ tem pontos viáveis dado que $DomT(x, .) = I\!R^m$. Definamos o conjunto de multiplicadores $M^1_{x,y}(z, w)$ do problema $Q_{x,y}$, segundo [44], da seguinte maneira:

$$M^1_{x,y}(z, w) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \in I\!R^{k_2+n+m} : \begin{array}{c} \lambda \geq 0, \langle \lambda, g(x, z) \rangle = 0, \\ \tau_2 = -w, \\ \tau_1 \in \sum \lambda_i \partial_1 g_i(x, z) + N^x_{Graf(T)}(x, z, w), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} w + \sum \lambda_i \partial_2 g_i(x, z) + N^z_{Graf(T)}(x, z, w) \\ z - y + N^w_{Graf(T)}(x, z, w) \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Analogamente, o conjunto de multiplicadores singulares do problema $(Q_{x,y})$ está definido por

$$M^0_{x,y}(z, w) := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^0 \\ \tau^0_1 \\ \tau^0_2 \end{pmatrix} \in I\!R^{k_2+n+m} : \begin{array}{c} \lambda^0 \geq 0, \langle \lambda^0, g(x, z) \rangle = 0, \\ \tau^0_2 = 0, \\ \tau^0_1 \in \sum (\lambda^0)_i \partial_1 g_i(x, z) + N^x_{Graf(T)}(x, z, w), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \sum (\lambda^0)_i \partial_2 g_i(x, z) + N^z_{Graf(T)}(x, z, w) \\ N^w_{Graf(T)}(x, z, w) \end{pmatrix} \end{array} \right\},$$

onde $N_{Graf(T)}(x, z, w)$ denota o cone normal de Clarke ao $Graf\ (T)$ em $(x, z, w) \in Graf(T)$ e os conjuntos $N^x_{Graf(T)}(x, z, w)$, $N^z_{Graf(T)}(x, z, w)$ e $N^w_{Graf(T)}(x, z, w)$ são as projeções de $N_{Graf(T)}(x, z, w)$ sobre os espaços correspondentes as variáveis x,z e w, respectivamente. Uma outra forma de obtermos os multiplicadores é considerar os parâmetros do problema como se fossem novas variáveis α, γ tais que satisfazem $\alpha - x = 0$ e $\gamma - y = 0$ e identificar os multiplicadores com um problema de otimização não paramétrico (esta observação é feita por ROCKAFELLAR (1982).

Observação 3.20 *O conjunto $M^0_{x^*,y^*}(z,w)$ é um cone que contém a origem.*

Quando $\partial(G_T(x^*,y^*) \subseteq \partial_1(G_T(x^*,y^*) \times \partial_2(G_T(x^*,y^*)$ reencontramos a expressão correspondente a $\partial_2(g_T(x^*,y^*)$ obtida no Proposição 3.8 (ii) sem a hipótese de compacidade sobre $Y(x)$. Por outro lado para assegurar esta inclusão precisa-se de condições que garantam que $\partial G_T(x,y)$ seja regular e as derivadas direcional e direcional generalizada coincidam .

No entanto, sob condições mais fracas, pode-se aplicar a Proposição 2.43 a função $G_T(.,.)$ se $\partial^0(-G_T(x^*,y^*)$ é pontudo obtemdo-se

$$\partial_1 G_T(x,y) \subset \Pi_1 \partial G_T(x,y), \quad \partial_2 G_T(x,y) \subset \Pi_2 \partial G_T(x,y);$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 G_T(x,y) \\ \partial_2 G_T(x,y) \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \Pi_1 \partial G_T(x,y) \\ \Pi_2 \partial G_T(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.4.19}$$

onde Π_1 e Π_2 significam as projeções sobre a primeira e a segunda variáveis, respectivamente.

A condição que segue a denominamos condição de *tipo Mangasarian-Fromowitz* análoga á condição em ARICA (1995). Denotamos por $\Sigma(x,y)$ o conjunto de soluções do programa $(Q_{x,y})$.

Hipótese 3.21 *Seja (x,y) tal que $Q_{x,y}$ é maleável. Suponha que para cada $(z,w) \in \Sigma(x,y)$ existe um vetor $\overline{\eta} \in I\!R^n$, tal que as seguintes condições são satisfeitas*

$$\langle \overline{\eta}, \gamma_i \rangle < 0, \quad \forall \gamma_i \in \partial_1 g_i(x,z), \forall i \in I(z,w)$$
$$\langle \overline{\eta}, h^x \rangle < 0, \quad \forall\, h^x \in N^x_{Graf\ T}(x,z,w) - \{0\},$$

onde $I(z,w) := \{i \ : \ g_i(x,z) = 0\}$.

Lema 3.22 *Seja o problema (Q_{x^*,y^*}) maleável. Então*

$$\partial(-G_T(x^*,y^*) \quad \subset \Pi_{I\!R^{n+m}} \overline{co} \,\{ \quad \cup_{(z,w)\in\Sigma(x^*,y^*)} M^1_{x^*,y^*}(z,w) + \cup_{(z,w)\in\Sigma(x^*,y^*)} M^0_{x^*,y^*}(z,w)\}. \tag{3.4.20}$$

Se $\cup_{(z,w)\in\Sigma(x^*,y^*)} M^0_{x^*,y^*}(z,w)\}$ é pontudo então $\partial^0(-G_T(x^*,y^*)$ é pontudo resultando que a envoltoria convexa na relação (3.4.20) é fechada e esta se cumpre sem a operação de fecho.

Lembremos que um cone $K \subset I\!R^n$ é pontudo se a origem não pode-se expressar como a soma de dois vetores não nulos de K.

Prova:

Corolário 1 do Teorema 2, [44]. ■

Observação 3.23 **(i)** *Da Proposição 2.36 temos que $\partial(-G_T(x^*, y^*) = -\partial(G_T(x^*, y^*)$.*

(ii) *A partir da Proposição 3.17 item (iv), afirmamos que, $-G_T$ é direcionalmente Lipschitziana.*

(iii) *Em analogia com o artigo de [44] o vetor u de perturbações em relação as desigualdades é $u = 0$.*

Para deduzir a relação (3.4.19) definamos o conjunto S a seguir. Seja $x \in C_1$ e $y \in Y(x)$. Consideremos

$$S := \cup_{(z,w)\in\Sigma(x,y)}\{ \quad (h_1, h_2, k) \in I\!R^{k_2} \times I\!R^{n+m} : \langle(\lambda, \tau, 0), (h_1, h_2, k)\rangle \leq 0, \\ \forall(\lambda, \tau, 0) \in M^0_{x,y}(z, w)\} \tag{3.4.21}$$

Lema 3.24 *Assuma que as funções $g_i(\ .\ ,\ .\ )$, que definem o conjunto viável do programa $(Q_{x,y})$, são localmente Lipschitzianas para todo i. Então, sob a Hipótese 3.21, para o programa $(Q_{x,y})$, existe um vetor $(0, \overline{\eta}) \in I\!R^{k_2} \times I\!R^{n+m}$ tal que $-G_T(\ .\ ,\ .\ )$ é direcionalmente Lipschitz no ponto (x, y) na direção $(0, \overline{\eta})$.*

Prova:

Seja $(\lambda, \tau, 0) \in M^0_{x,y}(z, w)$. Então, $\tau \in \sum_i \lambda_i \partial_1 g_i(x, z) + N^x_{Graf\ T}(x, z, w)$, com $\lambda \geq 0$ e $\langle \lambda, g(x, z)\rangle = 0$. Para o vetor $\overline{\eta}_1 \in I\!R^n$ da Hipótese 3.21, cumpre-se que

$$\langle \tau, \overline{\eta}_1)\rangle = \sum_i \lambda_i \langle \gamma_i, \overline{\eta}_1\rangle + \langle h^x, \overline{\eta}_1\rangle < 0,$$

para certos vetores $\gamma_i \in \partial_1 g_i(x, z)$ e $h^x \in N^x_{Graf\ T}(x, z, w)$.

Portanto, desde que

$$\langle(\lambda, \tau, 0), (0, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)\rangle = \langle \tau, \overline{\eta}_1\rangle < 0,$$

para todo $\overline{\eta}_2 \in I\!R^m$, temos que $(0, \overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2) \in int\ S$, onde S é o conjunto definido na referência (3.4.21).

Agora, aplicando o Corolário 3, [44], obtemos que $-G_T(\ .\ ,\ .\ )$ é direcionalmente Lipschitz no ponto (x, y) na direção $(\overline{\eta})$, para $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2)$, sendo $\overline{\eta}_1$ da Hipótese 3.21 e $\overline{\eta}_2 \in I\!R^m$ qualquer, com o que provamos o lema. ■

Observação 3.25 *A partir do Lema 3.24, obtemos também que o conjunto $\partial^0 g_T(x, y)$ é um cone pontudo pela Proposição 2 em [44]. Isto é nas condições $-G_T$ finita e e.s.c.i. em (x, y) o Lema implica que G_T direcionalmente Lipschitziana.*

No próximo lema estabelecemos a relação de contenção entre o produto cartesiano dos subdiferenciais parciais de G_T e o produto cartesiano das projeções do subdeferencial de G_T, referência (3.4.19).

Lema 3.26 *Se (z, w) é um ponto viável do problema $Q_{x,y}$ satisfazendo a Hipótese do Lema 3.24, então*

$$\begin{pmatrix} \partial_1 G_T(x, y) \\ \partial_2 G_T(x, y) \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \Pi_1 \partial G_T(x, y) \\ \Pi_2 \partial G_T(x, y) \end{pmatrix}, \tag{3.4.22}$$

Prova:

Usando a Proposição 2.2.5 e o Lema 3.24, obtemos o resultado. ■

Teorema 3.27 *Seja (x, y) tal que o problema $(Q_{x,y})$ é maleável e $\Sigma(x, y)$ o conjunto de todas as soluções de $(Q_{x,y})$. Então, sob as hipóteses do Lema 3.24, cumpre-se que*

$$\partial_1 G_T(x, y) \subset co \left\{ \begin{array}{r} -(\sum_i (\lambda_i + \lambda_i^0) \partial_x g_i(x, z) + h^x : (z, w) \in \Sigma(x, y), \\ (\lambda, -w, \sum_i \lambda_i \partial_x g_i(x, z) + h^x) \in M^1_{x,y}(z, w), \\ (\lambda^0, 0, \sum_i \lambda_i^0 \partial_x g_i(x, z) + h^x) \in M^0_{x,y}(z, w) \end{array} \right\}$$

$$\partial_2 G_T(x, y) \subset co\ \{w : (z, w) \in \Sigma(x^*, y^*)\}$$

Prova:

Usando o Lema 3.22 e o Lema 3.26, obtemos o resultado. ■

Para encerrar esta seção , mediante um exemplo identificamos os elementos teoricamente obtidos.

Exemplo 3.28 *Considerar o conjunto* $Y(x) = \{z \in I\!R^m / x \leq x \leq x+1\}$ *com a variável* $x \in C_1 = [1,2]$. *A aplicação ponto-conjunto* T *definido por*

$$T(x,z) = \begin{cases} \{z-2\} & se\ z < 2, \\ [0,1] & se\ z = 2, \\ \{z-1\} & se\ z > 2. \end{cases}$$

Quando $x \in C_1$, *a Desigualdade Variacional Generalizada associada a esta aplicação tem como conjunto solução* $\mathcal{O}_G(x) = \{y = 2\}$ *em* C_1.

A função gap *generalizada a definimos como a soma de* $G_T(x,y) + \Phi_{Graf(Y)}$ *(ver 3.1.3), onde* G_T *esta definido por*

$$G_T(x,y) := \begin{cases} -x^2 + x(y-1) & se \quad y > 2x+1, \\ \frac{1}{4}(y-1)^2 & se\ 3 \leq y \leq 2x+1, \\ y-2 & se\ 2 < y \leq 3, \\ \frac{1}{4}(y-2)^2 & se\ 2x-2 \leq y \leq 2, \\ -x^2 + x(y+2) - 2y & se \quad y < 2x-1; \end{cases}$$

sendo o conjunto de índices M_x *definido por*

$$M_x(y) = \begin{cases} \{x+1\} & se \quad y > 2x+1, \\ \{\frac{1}{2}(y+1)\} & se\ 3 \leq y \leq 2x+10, \\ \{y-2\} & se\ 2 < y \leq 3, \\ \{\frac{1}{2}(y+2)\} & se\ 2x-2 \leq y \leq 2, \\ \{x\} & se\ y < 2x-2. \end{cases}$$

Lembremos que $M_x(y) := \{z \in Y(x) \cap Dom\ T(x,.)\ :\ G_T(x,y) = l_z^*(x,y)\}$, *para cada* x *fixo, ver (3.1.9) na Proposição 3.4.*

O subdiferencial de g_T *em relação a variável* y, *para cada* x *fixo, é o conjunto definido pela Proposição 3.8 para pontos* $(x,y) \in \int Graf(Y)$:

$$\partial_y G_T(x,y) = \begin{cases} \{x-2\} & se \quad y \leq 2x-2, \\ \{\frac{1}{2}(y-2)\} & se\ 2x-2 \leq y \leq 2, \\ [\,0\,,\,1\,] & se\ y\ =\ 2, \\ \{1\} & se\ 2 \leq y \leq 3, \\ \{\frac{1}{2}(y-1)\} & se\ 3 \leq y < 2x+1, \\ \{x\} & se\ y \geq 2x+1. \end{cases}$$

Neste caso o subdiferencial de g_T *no ponto* $(x,y) \in int\ Graf(Y)$, *em relação a variável* x *para cada* y *fixo, é*

$$\partial_x g_T(x,y) = \begin{cases} \{-2x+y+2\} & se \quad 2x > y+2, \\ \{0\} & caso\ contrario\ . \end{cases}$$

Capítulo 4

Condições Necessárias de otimalidade para (PMRGE)

Neste capítulo apresentamos as condições necessárias de otimalidade de tipo K-K-T em um ponto de ótimo do problema

$$
\begin{aligned}
(PMRGE): \quad \text{minimizar} \quad & F(x,y) \\
\text{s. a} \quad & G(x,y) \leq 0 \\
& y \in \mathcal{O}_G(x) \\
& (x,y) \in C_1 \times C_2,
\end{aligned}
$$

sendo $C_1 \subset I\!R^n$ e $C_2 \subset I\!R^m$ conjuntos fechados e não vazios, $F : I\!R^n \times I\!R^m \to \overline{I\!R}$, $G : I\!R^n \times I\!R^m \to I\!R^{k_1}$, $\mathcal{O}_G(x)$ é o conjunto de soluções da Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica, (DVG_x),

$$\mathcal{O}_G(x) := \{y \in Y(x) : \text{ existe } w \in T(x,y), \text{ com } \langle w, z-y \rangle \geq 0, \forall z \in Y(x)\}$$

e $Y(x) = \{z \in I\!R^m : g_j(x,z) \leq 0, j = 1, 2, ..., k_2\}$.

Deduzimos estas condições , também conhecidas como condições de primeira ordem, considerando o seu problema equivalente (PDN^{**}) formulada abaixo.

$$
\begin{aligned}
(PDN^{**}): \quad \text{minimizar} \quad & F(x,y) \\
\text{s. a} \quad & G(x,y) \leq 0 \\
& g(x,y) \leq 0 \\
& -G_T(x,y) = 0 \\
& (x,y) \in C_1 \times C_2,
\end{aligned}
$$

O problema (PDN^{**}) resulta de substituir a *função gap generalizada*, $g_T(.)$, pela função $G_T(.,.)$ no problema (PDN^*) definido no Capítulo 1. Lembremos que $g_T(.,.) = G_T(.,.) + \Phi_{GrafY}(.,.)$, (3.4.15), e está associada à restrição generalizada de equilíbrio formulada pela (DVG_x). Como vimos nos Lemas 3.14, 3.15, seção 4 do Capítulo 3, o conjunto solução de $G_T(x,y) = 0$ coincide com $\mathcal{O}_G(x)$ conjunto solução de (DVG_x), quando $y \in Y(x)$.

Observamos que neste caso o problema (PDN^{**}) possui uma restrição de igualdade definida pela função $-G_T(.,.)$ que não é necessariamente Lipschitziana. Em consequên cia os conceitos e resultados usados no problema $Q_{x,y}$ no Capítulo 3 são insuficientes. Precisamos então de uma teoria mais geral que envolve os conceitos de presubdiferencial e de cone prenormal, [45, 15]. Adaptamos os resultados contidos em ROCKAFELLAR (1982) e obtemos uma aproximação exterior do subdiferencial da função marginal do problema (PDN^{**}) que dependem, entre outros, do subdiferencial da função $G_T(.,.)$ obtidos no capítulo anterior.

Em [51], encontra-se uma condição do tipo K-K-T generalizada para programas matemáticos análogos ao programa (PDN^{**}). Porém, uma condição fundamental para esse resultado é, que a restrição da igualdade deve de ser estritamente diferenciável e com gradiente surjetivo. Estas condições não são satisfeitas nem pela *função gap generalizada*, nem por G_T associadas à restrição (DVG_x) do problema $(PMRGE)$. De maneira que nossos resultados, formulados na seção 4, não podem ser obtidos diretamente de [51].

Se acrescentarmos condições ao problema variacional que garantam que G_T é localmente Lipschitziana, podemos aplicar uma teoria análoga à desenvolvida em ARICA e SCHEIMBERG (1995) para problemas do tipo (PDN^{**})

4.1 Presubdiferencial

As condições de otimalidade que obtemos estão sustentadas no conceito, analítico e geométrico, de presubdiferencial. Nesta seção definimos o presubdiferencial de uma função através do vetor normal proximal do epígrafo de uma função [15, 43]. Definimos, também, o conceito de cone prenormal. Mostramos que estes conceitos estão relacionados com as definições de subdiferencial e de cone normal, respectivamente.

Definição 4.1 *Sejam um conjunto $D \subset I\!R^n$ não vazio e fechado, e um ponto $x_0 \in D$*

1) *[45] Um vetor $\xi \in I\!R^n$ é um vetor* normal proximal *a D no ponto x_0 se para $t > 0$ suficientemente pequeno* $\arg\min dist(x_0 + t\xi, D) = \{x_0\}$, *sendo $dist(\xi, D) := \inf_{y\in D} \|\xi - y\|$ a distância do ponto ξ ao conjunto A.*

2) *[15] O cone* prenormal *a D no ponto x_0, é*

$$\widehat{N}_D(x_0) := \{\lim_{k\to\infty} \xi_k : \quad \exists x_k \in D, \exists \xi_k, x_k \to x_0 \ e \ \xi_k \ normal\, proximal\ a\ D\ em\ x_k\}.$$

O vetor $\xi = \lim_{k\to\infty} \xi_k$ é denominado por normal proximal limitante *a D no ponto x_0.*

Observação 4.2 **1)** *Um vetor ξ é* normal *a D em x_0 se e somente se* $\arg\min dist(x_0 + \xi, D) = \{x_0\}$, *o que é equivalente a*

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2 \ \forall x \in D,$$

e ξ é normal proximal *a D em x_0 se e somente se existe $\sigma > 0$ tal que*

$$\langle \xi, x - x_0 \rangle \leq \sigma\|x - x_0\|^2 \ \forall x \in D.$$

2) *Um vetor ξ é* normal proximal *a D em x_0 se para t suficientemente pequeno $t\xi$ é normal a D em x_0*

3) *O cone normal de Clarke pode ser caracterizado através do cone prenormal [43, 15], de fato tem-se que*

$$N_D(x_0) = \overline{co}\, \widehat{N}_D(x_0). \tag{4.1.1}$$

A continuação , colocamos uma versão funcional do conceito de normais proximais [15]. Vamos considerar, uma função e.s.c.i. em x_0.

Definição 4.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ finita em x_0. Um vetor ξ é* subgradiente proximal *de f no ponto x_0, se existem escalares $\sigma > 0$ e $\epsilon > 0$ tais que verificam a seguinte condição*

$$f(y) - f(x_0) + \sigma\|y - x_0\|^2 \geq \langle \xi, y - x_0 \rangle, \quad \forall y \in B_\epsilon(x_0).$$

O conjunto de subgradientes proximais de uma função f no ponto x_0 é denotado por $\partial^\pi f(x_0)$, [15].

O conceito seguinte é conhecido também, como *subgradiente proximal limitante* , [43].

Definição 4.4 *[15] Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ finita em x_0. Os conjuntos* presubdiferencial *e o* presubdiferencial assintótico *da função f no ponto x_0 são, respectivamente,*

$$\widehat{\partial} f(x_0) := \{ \lim_{k \to \infty} \xi_k : \xi_k \in \partial^\pi f(x_k), x_k \to x_0, f(x_k) \to f(x_0) \},$$

$$\widehat{\partial}^0 f(x_0) := \{ \lim_{k \to \infty} t_k \xi_k : \xi_k \in \partial^\pi f(x_k), x_k \to x_0, f(x_k) \to f(x_0), t_k \downarrow 0 \}.$$

Os elementos de $\widehat{\partial} f(x_0)$ são chamados de *presubdiferenciais.*

Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto onde a função f é finita. Notemos que os conjuntos $\widehat{\partial} f(x_0)$ e $\widehat{\partial}^0 f(x_0)$ dependem de um comportamento local da função e não global. Este fato nos permite deduzir as conclusões do Teorema 1 de ROCKAFELLAR (1981b), sob uma hipótese mais fraca. Substituimos a condição de s.c.i da função pela condição e.s.c.i. de f em x_0.

Proposição 4.5 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ finita e e.s.c.i. em x_0. Então*

1) *$\widehat{\partial} f(x_0)$ é fechado e $\widehat{\partial}^0 f(x_0)$ é um cone fechado.*

2) *$0 \in \widehat{\partial}^0 f(x_0)$ e $\widehat{\partial}^0 f(x_0) \supset 0^+ \widehat{\partial} f(x_0)$.*

3) *$\widehat{\partial} f(x_0) \neq \emptyset$ ou $\widehat{\partial}^0 f(x_0) \neq \{ 0 \}$.*

Prova:

Teorema 1 e a sua demonstração em [43]. ■

Proposição 4.6 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ finita e e.s.c.i. em x_0. As seguintes relações se satisfazem*

1)

$$\widehat{\partial} f(x_0) = \{\xi : (\xi, -1) \in \widehat{N}_{Epi\, f}(x_0, f(x_0))\} \subseteq \partial f(x_0),$$

2)

$$\widehat{\partial}^0 f(x_0) = \{\xi : (\xi, 0) \in \widehat{N}_{Epi\, f}(x_0, f(x_0)) \subseteq \partial^0 f(x_0)\},$$

3)

$$\partial f(x_0) = \overline{co}\{\widehat{\partial} f(x_0) + \widehat{\partial}^0 f(x_0)\}, \tag{4.1.2}$$

4)

$$\partial^0 f(x_0) \supset \overline{co}\widehat{\partial}^0 f(x_0)]. \tag{4.1.3}$$

e, se $\partial^0 f(x_0)$ é pontudo, se a satisfaz igualdade.

Prova:

Os itens 1) e 2) resultam do Teorema 1 em [43].

O item 3) é conseqüência da Proposição 1.2 em [15], assim sendo é uma extensão de [38] seção 17.

O item 4) é a relação (1.14) em [45], e é um resultado da Proposição 4.5. Para segunda asserção ver [45]. ■

Lembremos que e da Defição 2.28 e [1)] na Proposição 2.29:

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, z\rangle \leq f^{\uparrow}(x_0; z), \forall z \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : (y, -1) \in N_{Epi\, f}(x_0, f(x_0))\}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

A partir desta última igualdade (4.1.4), da relação (4.1.1) e do item 1) na Proposição 4.6 obtemos o nexo entre a subderivada direcional superior $(f^{\uparrow}(x_0; .))$ e o conjunto presubdiferencial acima apresentado .

4.2 Multiplicadores do Lagrangeano Aumentado

O nosso objetivo é formular condições necessárias de otimalidade para uma solução de $(PMRGE)$. Precisamos analisar a sensibilidade da função marginal do problema em relação às variações nas restrições. Fazemos esta análise sobre seu problema equivalente (PND^{**}) que o apresentamos de maneira mais simplificada e já no contexto do trabalho de ROCAFELLAR (1981) [43]. Reescrevemos o problema (PDN^{**}) como

$$\begin{aligned} (P): \quad \text{minimizar} \quad & F(\zeta) \\ \text{s. a} \quad & f_i(\zeta) \leq 0, i = 1, 2, \ldots, k_1 + k_2, \\ & f_i(\zeta) = 0, i = k_1 + k_2 + 1, \\ & \zeta \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

sendo $\zeta := (x, y), f_i := G_i$ se $i = 1, 2, \ldots, k_1$, $f_{k_1+j} := g_j$ se $j = 1, 2, \ldots, k_2$, $f_{k_1+k_2+1} := G_T$ e $D := C_1 \times C_2$. Consideremos o problema de minimização paramétrica que é obtido perturbando as restrições de (P):

$$\begin{aligned} (P_u): \quad \text{minimizar} \quad & F(\zeta) \\ \text{s. a} \quad & f_i(\zeta) + u_i \leq 0, i = 1, \ldots, k_1 + k_2, \\ & f_i(\zeta) + u_i = 0, i = k_1 + k_2 + 1, \\ & \zeta \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Denotamos a função marginal do problema (P_u) como $p(u) := \inf(P_u)$. Chegamos a nosso objetivo a partir da relação que existe entre os conjuntos presubdiferencias, $\widehat{\partial}p(u)$ e $\widehat{\partial}^0 p(u)$, com os conjuntos de multiplicadores do Lagrangeano aumentado do problema P_u.

Sem perda de generalidade nesta seção assumimos que $\mathcal{D}$ é o espaço $\mathbb{R}^{n+m}$. Se $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ substituimos a função objetivo F por $F + \Phi_D$.

Baseados no trabalho [43] o Lagrangeano aumentado quadrático do problema (P_u) está definido por

$$L(u, \zeta, v, r) := F(\zeta) + \sum_{i=1}^{k_1+k_2+1} \Psi_i(v_i, f_i(\zeta) + u_i, r),$$

para $\zeta \in \mathcal{D}$ e $r > 0$, sendo

$$\Psi_i(v_i, f_i(\zeta)+u_i, r) := \begin{cases} v_i(f_i(\zeta)+u_i) + \frac{r}{2}(f_i(\zeta)+u_i)^2, & \text{se } v_i + r(f_i(\zeta)+u_i) \geq 0 \\ -v_i^2/2r, & \text{caso contrario} \end{cases},$$

para $i = 1, \ldots, k_1 + k_2$, e

$$\Psi_i(v_i, f_i(\zeta)+u_i, r) := v_i(f_{k_1+k_2+1}(\zeta)+u_i) + \frac{r}{2}(f_i(\zeta)+u_i)^2,$$

quando $i = k_1 + k_2 + 1$.

Um vetor $\overline{v} \in I\!R^{k_1+k_2+1}$ é chamado *multiplicador aumentado* do problema $(P_{\overline{u}})$, se $(\overline{\zeta}, \overline{v}, r)$ é um ponto sela do Lagrangeano aumentado $L(\overline{u}, \overline{\zeta}, \overline{v}, r)$, para algum $\overline{\zeta} \in \mathcal{D}$ e $r > 0$.

Teorema 4.7 *Seja o problema paramétrico* (P_u) *e* $p(u) := \inf(P_u)$. *Se as seguintes condições são satisfeitas*

a)

$$\liminf_{\|u\| \to \infty} \left[\frac{p(u)}{\|u\|^2}\right] > -\infty, \qquad \textit{(condição de crescimento quadrático)}$$

b) *para cada conjunto compacto* $U \subset I\!R^{k_1+k_2+1}$ *e* $\alpha \in I\!R$, *o conjunto*

$$\{(u, \zeta) \in U \times \mathcal{D} : \zeta \text{ é viável para } (P_u), F(\zeta) \leq \alpha\}$$

é compacto. *(condição de compacidade)*

Então, para cada $\overline{u}$ *tal que* $(P_{\overline{u}})$ *tem um ponto viável, verifica-se que*

i)

$$\begin{aligned} \widehat{\partial} p(\overline{u}) = \ & \{\overline{v} : \exists u_k \text{ perturbação }, \exists v_k \text{ multiplicador aumentado de } (P_{u_k}) \\ & \text{com } u_k \to \overline{u}, p(u_k) \to p(\overline{u}), v_k \to \overline{v}\}. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}^0 p(\overline{u}) = \ & \{\overline{y} : \exists u_k \text{ perturbação }, \exists \lambda_k, \exists v_k \text{ multiplicador aumentado de} \\ & (P_{u_k}), \text{ com } u_k \to \overline{u}, p(u_k) \to p(\overline{u}), \lambda_k \downarrow 0, \ \lambda_k v_k \to \overline{v}\}. \end{aligned}$$

iii) $0 \in \widehat{\partial}^0 p(\overline{u})$ *e* $\widehat{\partial}^0 f(x_0) \supset 0^+ \widehat{\partial} f(x_0)$.

iv) $\widehat{\partial} p(\overline{u}) \neq \emptyset$ *ou* $\widehat{\partial}^0 p(\overline{u}) \neq \{ 0 \}$.

v)

$$\partial p(\overline{u}) = \overline{co}[\widehat{\partial} p(\overline{u}) + \widehat{\partial}^0 p(\overline{u}] \quad e \quad \partial^0 p(\overline{u}) = \overline{co}[\widehat{\partial}^0 p(\overline{u})].$$

Prova:

Os itens i) e ii) correspondem ao Teorema 2, [43], iii) e iv) ao Teorema 1, [42]. O item v) é a tese do Teorema 1 de [43]. ■

Observação 4.8 1) *A condição de compacidade garante que o problema (P_u) tem uma solução ótima para cada u, para o qual existe um ponto viável. Esta hipótese assegura também que a função marginal $p(u) = \inf(P_u)$ é s.c.i. (Proposição 8 em [44]).*

2) *O resultado do item iii) é a relação (4.1.2).*

3) *Da Proposição 9, [44], o problema (P_u) é maleável (Capítulo 3).*

4.3 O Problema $(PMRGE)$

Sejam as funções $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{k_1}$ localmente Lipschitzianas. O conjunto abstrato $\mathcal{D} = C_1 \times C_2$ com $C_1 \subset \mathbb{R}^n$ $C_2 \subset \mathbb{R}^m$ fechados e convexos. O problema que abordamos é

$$\begin{array}{lll} (PMRGE): & \text{minimizar} & F(x,y) \\ & \text{s. a} & G(x,y) \leq 0 \\ & & y \in \mathcal{O}_G(x) \\ & & (x,y) \in C_1 \times C_2, \end{array}$$

onde $\mathcal{O}_G(x)$ é o conjunto solução da Desigualdade Variacional Paramétrica (DVG_x)

$$\mathcal{O}_G(x) := \{ y \in Y(x) : \text{ existe } w \in T(x,y), \text{ com } \langle w, z - y \rangle \geq 0, \forall z \in Y(x) \}.$$

Assumimos $Y(x) = \{z \in I\!R^m : g_j(x,z) \leq 0, j = 1, 2, ..., k_2\}$.

Nossa estratégia para obter condições de otimalidade de $(PMRGE)$ é analisar o seu problema equivalente (PDN^{**}). Na seção anterior reescrevemos (PDN^{**}) denotando-o por (P) e sua família de problemas perturbados por (P_u). Vamos considerar $P := P_0$.

O primeiro que devemos garantir, de modo a continuar nesta análise, é que $\partial p(u) \neq \emptyset$, onde $p(u) := inf P_u$ é a função marginal do problema (P_u). Conseguimos isto, assumindo uma Condição de Qualificação , utilizada por CLARKE (1983), conhecida como a condição de *calma*. Este conceito tem sido usado por OUTRATA (1993) para garantir a condição de penalidade exata, considerada, no tratamento numérico do Problema de Dois Níveis *clássico*. Também YE *et al.* (1995,1997) obtiveram condições de otimalidade de problemas tipo (PDN) e $(PDNG)$ utilizando a *calma parcial* e demonstrando com essa condição , a existência de penalidade exata.

Definição 4.9 *[14] Seja ζ_0 solução do problema (P). O problema (P) é* calmo *em ζ_0 se existem reais positivos ϵ e M, tais que, para todo $u \in \epsilon B$ e para todo $\zeta' \in \zeta_0 + \epsilon B$ viáveis para o problema P_u, tem-se*

$$F(\zeta') - F(\zeta_0) + M\|u\| \geq 0$$

Lema 4.10 *Seja $p(0)$ finito. Se*

$$\liminf_{u \to 0} \frac{p(u) - p(0)}{\|u\|} > -\infty.$$

Então para cada ponto solução ζ_0 de (P),(P) é calmo em ζ_0.

Prova:

Proposição 6.4.2 [14].

■

Observação 4.11 **1)** *O problema (P) é calmo se satifaz o Lema 4.10.*

2) *A condição de compacidade dos problemas perturbados de (PDN^{**}), (P_u), é demasiado forte, pois precisamos somente de vizinhanças compactas da origem.*

3) *Para analisar o comportamento da função marginal $p(u)$ numa vizinhança de $u = 0$ é suficiente considerar a seguinte condição , quando $p(0)$ é finito,*

$$\exists \epsilon \geq 0,\ \alpha \geq 0 \qquad \textit{tal que}$$
$$S = \{(u,\zeta) : \ \|u\| \leq \epsilon,\ \zeta \textit{ ponto viável de} P_u, \ F(\zeta) \leq \alpha\} \textit{ é compacto.} \tag{4.3.5}$$

Proposição 4.12 *Se (P) é calmo então $\partial p(u) \neq \emptyset$.*

Prova:

A condição de calma no Lema 4.10 implica que se verifica a condição da Proposição 3.18 para $u = 0$ e portanto resulta $\partial p(0) \neq \emptyset$.

■

A continuação enumeramos as hipóteses consideradas anteriormente e acrescentamos aqueles que nos permitem garantir a subdiferenciabilidade da função marginal do problema geral.

Hipótese 4.13 *Para cada $x \in C_1$ verificam-se as seguintes condições :*

(1a) *A aplicação ponto-conjunto $T(x,\ .\ )$ é maximal monótona e tal que $DomT(x,.) = \mathbb{R}^m$.*

(1b) *O conjunto $Y(x)$ é a imagem de uma aplicação ponto-conjunto Y, tal que as funções $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; i = 1, ..., k_2$, são localmente Lipschitzianas na variável x e convexas em y.*

(1c) *Existem soluções de $(DVG)_x$, i.e., $\mathcal{O}_G(x) \neq \emptyset$.*

Para cada ponto solução (x, y) de $(PMRGE)$ verifica-se:

(2a) *o problema $(Q_{x,y})$ é maleável em (x, y).*

(2b) *existem seqüências $t_j \downarrow 0$ e $(x_j, y_j) \to_{G_T} (x, y)$ tais que para nenhuma seqüência convergente $(h_j, k_j) \to (0,0)$, tal que*

$$G_T((x_j, y_j) + t_j(h_j, k_j)) - G_T(x_j, y_j) \downarrow 0. \tag{4.3.6}$$

(2c) *o problema* $(Q_{x,y})$ *satisfaz a condição tipo Mangasarian-Fromowitz, Hipótese 3.21.*

(3) *O problema* $(PMRGE)$ *tem solução .*

(4) *O problema* (PDN^{**}) *satifaz a condição do crescimento quadrático, item a) do Teorema 4.7.*

(5) *O problema* PND^{**} *é* calmo.

(6) *A condição de compacidade, relação (4.3.5), é satisfeita.*

Observação 4.14 **1)** *As hipótesis (1a)-(1b), são as condições que garantem que a função* g_T *é uma* função gap genralizada.

2) *A condição 1c) assegura que para cada* $x \in C_1$ *existe* $y \in I\!R^m$ *tal que* $y \in Y(x)$ *e* $G_T(x,y) = 0$.

3) *Da hipótese (2a) se deduz que* $(-G_T)$ *é e.s.c.i. em cada ponto solução do* $(PMREG)$.

4) *A condição (2b) garante que, o subdiferencial de* $G_T(x,y) \neq \emptyset$ *em pontos onde* $G_T(.)$ *é finita Proposição 3.19.*

5) *Das hipóteses 2a) e 5) obtem-se que* $p(u)$ *é s.c.i. numa vizinhança de* $u = 0$.

6) *As condições 2a), 5) e 6) garantem que a função marginal do problema* (PDN^{**})*, equivalente ao* $(PMRGE)$*, tem subdiferencial não vazio,* $\partial p(0) \neq \emptyset$*, Proposição 4.12.*

No Capítulo 3 na Proposição 3.17, provamos que a função generalizada, $-G_T$, é estritamente semicontínua inferior em (x,y) e convexa na segunda variável, sob a condição de maleabilidade do problema $Q_{x,y}$. Assim, o problema (PDN^{**}) equivalente com $(PMRGE)$ envolve duas funções estendidas, F (ou $F + \Phi_{C_1 \times C_2}$) e a função G_T sendo que, G_T não é necessariamente localmente Lipschitziana. Por estas razões é que aplicamos a teoria de presubdiferencias e multiplicadores do Lagrangeano aumentado.

4.4 O subdiferencial da função marginal do problema (PDN^{**})

Lembremos que sob as condições 1a)-1c), Hipótese(4.13), reformulamos o problema $(PMRGE)$ como o problema equivalente (PDN^{**}). Na seção 2 usamos uma notação menos recargada para este último problema resultando então

$$
\begin{aligned}
(P): \quad \text{minimizar} \quad & F(\zeta) \\
\text{s. a} \quad & f_i(\zeta) \leq 0, i = 1, \ldots, k_1 + k_2 \\
& G_T(\zeta) = 0, \\
& \zeta \in C_1 \times C_2.
\end{aligned}
$$

sendo que o vetor ζ representa as variáveis (x, y), as funções G_i e g_i do problema original foram substituidas por f_i e agora retomamos a função G_T para a restrição de igualdade.

Nesta seção estendemos os resultados do Teorema 2 e o seu Corolário 4, ROCKAFELLAR (1982), convenientemente adequados para o problema (P). No teorema citado precisa-se a condição de que, todas as funções envolvidas sejam localmente Lipschitzianas, hipótese que não se satisfaz no problema (P) pois, a função G_T é e.s.c.i. em cada ponto solução da Desigualdade Variacional Generalizada. Substituimos F por $F + \Phi_{C_1 \times C_2}$ e aplicamos os resultados do cálculo de subdiferenciais.

Dado um ponto ζ viável para o problema (P), com $\partial(-G_T)(\zeta) \neq \emptyset$, definimos os conjuntos de multiplicadores

$$
M_P^1(\zeta) := \left\{ v \in I\!R^{k_1+k_2+1} : \begin{array}{l} 0 \in \partial F(\zeta) + N_{C_1 \times C_2}(\zeta) + \sum_1^{k_1+k_2} v_i \partial f_i(\zeta) + \\ v_{k_1+k_2+1} \partial G_T(\zeta), v_i \geq 0, \ v_i f_i(\zeta) = 0, \ \forall i \end{array} \right\}
$$

e

$$
M_P^0(\zeta) := \left\{ v \in I\!R^{k_1+k_2+1} : \begin{array}{l} 0 \in \sum_1^{k_1+k_2} v_i \partial f_i(\zeta) + v_{k_1+k_2+1} \partial G_T(\zeta) \\ v_i \geq 0, \ v_i f_i(\zeta) = 0, \ i = 1, \ldots, k_1 + k_2 \end{array} \right\}.
$$

Lembremos que a $\partial(F + \Phi_{C_1 \times C_2})(\zeta) \subseteq \partial F(\zeta) + \partial \Phi_{C_1 \times C_2}(\zeta)$ sendo

$$
\partial \Phi_{C_1 \times C_2} = N_{C_1 \times C_2} = N_{C_1} \times N_{C_2},
$$

a última igualdade é resultado do item 1) Lema 2.27.

A seguinte proposição , análoga à Proposição 7 [44], mostra que existe uma relação maior entre $M_P^1(\zeta)$ e $M_P^0(\zeta)$ em termos do cone de recessão do conjunto $M_P^1(\zeta)$, $0^+M_P^1(\zeta)$. O cone de recessão está determinado por

$$0^+M_P^1(\zeta) := \limsup_{\lambda\downarrow 0} \lambda M_P^1(\zeta) = \{\lim_{j\to\infty} \lambda_j v^j : \lambda_j \downarrow 0, v^j \in M_P^1(\zeta)\} \tag{4.4.7}$$

A relação (4.4.7) é equivalente à Definição 2.15 item (iii), de cone de recessão mas, aqui é usado o limite superior de uma seqüência de conjuntos (Definição 2.56, item (i)).

Proposição 4.15 *Seja ζ viável para o problema (P), tal que $\partial G_T(\zeta) \neq \emptyset$. Os conjuntos $M_P^1(\zeta)$ e $M_P^0(\zeta)$ são fechados e*

$$0^+M_P^1(\zeta) \subset M_P^0(\zeta). \tag{4.4.8}$$

Prova:

Vejamos que $M_P^1(\zeta)$ é fechado. Seja $\{v^j\} \subset M_P^1(\zeta)$ tal que $v^j \to v$. Então, para cada j, temos que

$$v_i^j \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k_1 + k_2, \text{ e } v_i^j f_i(\zeta) = 0.$$

Logo,

$$v_i = \lim_{j\to\infty} v_i^j \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k_1 + k_2, \text{ e } v_i f_i(\zeta) = 0. \tag{4.4.9}$$

Por outro lado, desde que para cada j se verifica que

$$0 \in \partial F(\zeta) + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i^j \partial f_i(\zeta) + v_{k_1+k_2+1}^j \partial g_T(\zeta),$$

devem exister $\eta_j^0 \in \partial F(\zeta)$, $\eta_j^i \in \partial f_i(\zeta)$ e $\eta_j^{k_1+k_2+1} \in \partial g_T(\zeta)$ tais que

$$0 = \eta_j^0 + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i^j \eta_j^i + v_{k_1+k_2+1}^j \eta_j^{k_1+k_2+1}. \tag{4.4.10}$$

Da compacidade de $\partial F(\zeta)$ e $\partial f_i(\zeta)$, dado que, F e f_i são localmente Lipschitzianas, podemos supor, passando a subseqüências se for necessário, que existem $\eta^0 \in \partial F(\zeta)$ e $\eta^i \in \partial f_i(\zeta)$, para todo i, tais que $\eta_j^0 \to \eta^0$ e $\eta_j^i \to \eta^i$.

Assim, passando ao limite na relação (4.4.10), verifica-se que

$$0 = \eta^0 + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i \eta^i + v_{k_1+k_2+1}\eta^{k_1+k_2+1},$$

$$\text{onde } \eta^{k_1+k_2+1} \in \partial G_T(\zeta), \ \text{quando} \lim v^j \neq 0, \tag{4.4.11}$$

pois $\partial G_T(\zeta)$ é fechado. Em outro caso a condição de $v \in M_P^0(\zeta)$.

Portanto, da relação anterior e da relação (4.4.9), obtemos que $v \in M_P^1(\zeta)$, i.e., o conjunto $M_P^1(\zeta)$ é fechado.

Analogamente, provamos que $M_P^0(\zeta)$ é fechado. Para provar a relação (4.4.8), consideremos as seqüências $\{\lambda_j\} \subset I\!R_+$ e $\{v^j\} \subset M_P^1(\zeta)$ tais que $\lambda_j \downarrow 0$ e $\lambda_j v^j \to v$. Então,

$$0 \in \lambda_j \partial F(\zeta) + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \lambda_j v_i^j \partial f_i(\zeta) + \lambda_j v_{k_1+k_2+1}^j \partial g_T(\zeta).$$

Desta relação , passando ao limite, usando a compacidade de $\partial F(\zeta)$ e $\partial f_i(\zeta)$, para todo i, e o fato de ser $\partial g_T(\zeta)$ fechado, temos

$$0 \in \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i \partial f_i(\zeta) + v_{k_1+k_2+1} \partial g_T(\zeta),$$

i.e., $v \in M_P^0(\zeta)$.

■

Consideremos, agora, a seguinte família de problemas perturbados de (P)

$$\begin{aligned}
(P_u): \quad & \text{minimizar} \quad F(\zeta) \\
& \text{s. a} \quad f_i(\zeta) + u_i \leq 0, i = 1, \ldots, k_1 + k_2 \\
& \qquad\quad G_T(\zeta) + u_{k_1+k_2+1} = 0, \\
& \qquad\quad \zeta \in I\!R^n \times I\!R^m.
\end{aligned}$$

Definição 4.16 *Dizemos que o problema (P) é maleável, se o problema (P_u) é maleável para $u = 0$ (ver Capítulo 3).*

A condição 5) da Hipótese 4.13 implica que P é maleável, sendo

$$A = \Pi_{I\!R^{n+m}} S = \{\zeta \in I\!R^{n+m} : \exists u, \ \|u\| \leq \epsilon, \ \zeta \text{ viável para } P_u, F(\zeta) \leq \alpha\},$$

o conjunto da Definição 3.16, sobre maleabilidade.

A seguinte proposição restablece o Teorema 2 em [44] para o problema (P).

Teorema 4.17 *Sob a Hipótese (4.13) verifica-se*

$$\partial p(0) = \overline{co}\{[\cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^1(\zeta)] \cap \partial p(0) + [\cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^0(\zeta)] \cap \partial^0 p(0)\}, \tag{4.4.12}$$

$$\partial^0 p(0) \supset \overline{co}\{[\cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^0(\zeta)] \cap \partial^0 p(0)\}, \tag{4.4.13}$$

sendo $\mathcal{Z}$ qualquer subconjunto de soluções ótimas de (P) que ao menos inclui o conjunto A da definição de maleabidade para (P).

A igualdade se satisfaz na relação (4.4.13) se $[\cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^1(\zeta)] \cap \partial p(0) = \emptyset$ ou se o cone $[\cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^0(\zeta)] \cap \partial^0 p(0)$ é pontudo, neste último caso $\partial^0 p(0)$ é pontudo e a operação de fecho nas relações (4.4.12) e (4.4.13) é superflua.

Prova:

Esta prova é essencialmente a mesma apresentada para o Teorema 2, [44], introduzindo, naturalmente, as modificações necessárias para atender ao fato de não termos todas as funções localmente Lipschitzianas no nosso problema de equilíbrio (como sim acontece no teorema de Rockafeller).

Pela, Proposição 13, [44], dado que o problema (P) é calmo assumimos sem perda de generalidade que existe um conjunto $D \subset I\!R^n$ compacto, tal que o problema (P_u) é equivalente a

$$\begin{aligned}
(P_u): \quad & \text{minimizar} \quad F(\zeta) \\
& \text{s. a} \quad f_i(\zeta) + u_i \leq 0, i = 1, \ldots, k_1 + k_2 \\
& \qquad\quad G_T(\zeta) + u_{k_1+k_2+1} = 0, \\
& \qquad\quad \zeta \in D.
\end{aligned}$$

Logo, para todo $u \in I\!R^{k_1+k_2+1}$ tal que o conjunto viável de (P_u) é não vazio, (P_u) tem solução ótima e a função marginal p é s.c.i. e limitada inferiormente . Então, do Teorema 4.7 e a Observação 4.8, temos que

$$\partial p(0) = \overline{co}[Y + Y_0] \text{ e } \partial^0 p(0) = \overline{co}[Y_0], \tag{4.4.14}$$

onde

$$Y := \widehat{\partial}p(0) = \{\lim v^j : \ \exists\, u^j \to_p 0 \text{ e}$$
$$v^j \text{ multiplicador aumentado do } (P_{u^j})\} \quad (4.4.15)$$

e

$$Y_0 := \widehat{\partial}^0 p(0) = \{\lim \lambda_j v^j : \ \exists\, u^j \to_p 0, \ \ \lambda_j \downarrow 0$$
$$\text{e } v^j \text{ multiplicador aumentado do } (P_{u^j})\}. \quad (4.4.16)$$

O Lagrangeano quadrático aumentado para uma seqüência de pontos (u^j, r_j), com $r_j > 0$ suficientemente grande, para o problema (P_{u^j}) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} L(u^j, \zeta, v, r_j) := F(\zeta) \ &+ \ \frac{1}{2r_j} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} [v_i + r_j(f_i(\zeta) + u_i^j)]_+^2 \\ &+ \ \frac{1}{2r_j}[v_{k_1+k_2+1} + r_j(g_T(\zeta) + u^j_{k_1+k_2+1})]^2 - \frac{1}{2r_j}\|v\|^2, \end{aligned}$$

para $(\zeta, v) \in D \times I\!R^{k_1+k_2+1}$, onde $[a]_+ := \max\{a, 0\}$.

Desde que os conjuntos $M_P^0(\zeta)$ e $\partial^0 p(0)$ são cones convexos e fechados, provaremos as relações (4.4.12) e (4.4.13) provando que

$$v \subset \cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^1(\zeta) \text{ e } Y_0 \subset \cup_{\zeta \in \mathcal{Z}} M_P^0(\zeta). \quad (4.4.17)$$

Sejam as seqüências $v^j \to v$ e $u^j \to_p 0$ como na relação (4.4.15). Desde que D é compacto e (P) é calmo, existe uma seqüência de pontos ζ^j tal que, para j suficientemente grande, ζ^j é solução ótima do problema (P_{u^j}) e $dist(\zeta^j, A) \to 0$. Passando a subseqüências se for necessário, podemos supor que existe $\overline{\zeta} \in A$ tal que $\zeta^j \to \overline{\zeta}$. Notemos que $f_i(\zeta^j) + u_i^j \to f_i(\overline{\zeta})$, para todo i.

Além disso, desde que G_T é estritamente s.c.i. em $\overline{\zeta}$ e $G_T(\zeta^j) + u^j_{k_1+k_2+1} = 0 \to 0$, temos que $\lim_{j\to\infty} G_T(\zeta^j) = 0$ e existe $\alpha \in I\!R_+$ tal que $\alpha \leq G_T(\overline{\zeta}) \leq 0$, satisfazendo $\liminf_{j\to\infty} \min\{\alpha, G_T(\zeta^j)\} = \min\{\alpha, G_T(\overline{\zeta})\}$. Portanto, $0 = \min\{\alpha, G_T(\overline{\zeta})\} = G_T(\overline{\zeta})$.

Em conseqüência, $\overline{\zeta}$ é viável para o problema (P) e, desde que, $p(u^j) \to p(0)$ e $F(\zeta^j) \to F(\overline{\zeta})$, resulta que $\overline{\zeta} \in \mathcal{Z}$. Vejamos a seguir que $v \in M_P^1(\overline{\zeta})$.

Desde que (ζ^j, v^j) é um ponto de sela global da função $L(u^j, \zeta, v, r_j)$, para $(\zeta, v) \in D \times I\!R^{k_1+k_2+1}$, com $r^j > 0$ suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned} f_i(\zeta^j) + u_i^j &\leq 0, && (4.4.18)\\ v_i^j[f_i(\zeta^j) + u_i^j] &= 0,\ v_i^j \geq 0, i = 1, \dots, k_1 + k_2 && (4.4.19)\\ G_T(\zeta^j) + u_{k_1+k_2+1}^j &= 0, && (4.4.20)\\ L(u^j, \zeta^j, v^j, r_j) &\leq L(u^j, \zeta, v^j, r_j),\ \zeta \in D. && (4.4.21) \end{aligned}$$

Então, passando ao limite nas relações (4.4.18)-(4.4.20) e usando a relação (4.4.21), obtemos que

$$\begin{aligned} f_i(\overline{\zeta}) &\leq 0,\ v_i \geq 0,\ v_i[f_i(\overline{\zeta})] = 0,\ i = 1, \dots, k_1 + k_2\\ g_T(\overline{\zeta}) &= 0,\\ L(u^j, \zeta^j, v^j, r_j) &\leq L(u^j, \zeta, v^j, r_j) + \Phi_D(\zeta),\ \zeta \in I\!R^n \times I\!R^m. \end{aligned}$$

Desde que ζ^j é mínimo global da função $L(u^j, \zeta, v^j, r_j) + \Phi_D(\zeta)$, da Proposição 4.1 e da Proposição 4.6, [49], temos que

$$0 \in \partial_\zeta[L(u^j, \zeta, v^j, r_j) + \Phi_D(\zeta)]_{\zeta=\zeta^j} \subset \partial_\zeta L(u^j, \zeta^j, v^j, r_j) + N_D(\zeta^j).$$

Pela proposição 13, [44], $\zeta^j \in int\ D$. Portanto, do Teorema 5, [44], e da relação anterior, definindo $\widehat{G_T}(\zeta) := G_T(\zeta) + \Phi_D(\zeta)$, resulta que

$$\begin{aligned} 0 \in \partial_\zeta L(u^j, \zeta^j, v^j, r_j) \subset \partial F(\zeta^j) &+ \frac{1}{2r_j}\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \partial_\zeta[v_i^j + r_j(f_i(\zeta) + u_i^j)]_{+\zeta=\zeta^j}^2\\ &+ \frac{1}{2r_j}\partial_\zeta[v_{k_1+k_2+1}^j + r_j(\widehat{G_T}(\zeta) + u_{k_1+k_2+1}^j)]_{\zeta=\zeta^j}^2. \end{aligned}$$

Agora, usando as regras do cálculo de subgradientes da soma e do quadrado de uma função (Proposições 2.37, 2.39, 2.40), temos que

$$0 \in \partial F(\zeta^j) + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i^j \partial f_i(\zeta^j) + v_{k_1+k_2+1}^j \partial g_T(\zeta^j). \qquad (4.4.22)$$

A relação (4.4.22) implica que para cada j existem $\eta_j^0 \in \partial F(\zeta^j)$, $\eta_j^i \in \partial_i(\zeta^j)$, para todo i, e $\eta_j^{k_1+k_2+1} \in \partial g_T(\zeta^j)$ tais que

$$\eta_j^0 + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i^j \eta_j^i + v_{k_1+k_2+1}^j \eta_j^{k_1+k_2+1} \to 0, \qquad (4.4.23)$$

quando $j \to +\infty$.

Desde que $v^j \to v$, $\limsup_j \partial F(\zeta^j) \subset \partial F(\overline{\zeta})$ e $\limsup_j \partial f_i(\zeta^j) \subset \partial f_i(\overline{\zeta})$, pois F e f_i são localmente Lipschitzianas, temos que

$$\eta_j^0 \to \eta^0 \in \partial F(\overline{\zeta}) \text{ e } \eta_j^i \to \eta^i \in \partial f_i(\overline{\zeta})$$

(passando em ambos os casos a subseqüências se for necessário).

Portanto, da relação (4.4.23), resulta que existe $\eta^{k_1+k_2+1}$ tal que

$$0 = \eta^0 + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i \eta^i + v_{k_1+k_2+1}\eta^{k_1+k_2+1}. \tag{4.4.24}$$

Usando o fato de que $\partial^0 G_T(\overline{\zeta})$ é pontudo (ver Capítulo 3), o Teorema 4.4-(ii) e a Proposição 2.2, [45], obtemos que $\eta^{k_1+k_2+1} \in \partial g_T(\overline{\zeta})$.

Finalmente, deste último resultado e da relação (4.4.24), temos que

$$0 \in \partial F(\overline{\zeta}) + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i \partial f_i(\overline{\zeta}) + v_{k_1+k_2+1}\partial g_T(\overline{\zeta}),$$

i.e., $v \in M_P^1(\overline{\zeta})$, como queriamos provar.

Para provar que $Y_0 \subset \cup_{\zeta \in Z} M_P^0(\zeta)$, consideramos v^j, u^j e λ_j como na relação (4.4.16) e seguimos passos análogos à demonstração de $Y \subset \cup_{\zeta \in Z} M_P(\zeta)$, sendo a diferença que na relação (4.4.22) multiplicamos cada termo por λ_j para obter

$$0 \in \lambda_j \partial F(\zeta^j) + \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \lambda_j v_i^j \partial f_i(\zeta^j) + \lambda_j v_{k_1+k_2+1}^j \partial G_T(\zeta^j).$$

Considerando que $\lambda_j \downarrow 0$ e $\lambda_j v^j \to v$, com o mesmo raciocinio anterior, resulta que

$$0 \in \sum_{i=1}^{k_1+k_2} v_i \partial f_i(\overline{\zeta}) + v_{k_1+k_2+1}\partial G_T(\overline{\zeta}),$$

i.e., $v \in M_P^0(\overline{\zeta})$.

Portanto, a relação (4.4.17) se cumpre e conseqüêntemente, da relação (4.4.14), como já foi dito, as relações (4.4.12) e (4.4.13) são satisfeitas.

Para terminar, da Proposição 4.7 e a Proposição 15, [44], mostra-se a segunda parte deste teorema como no Teorema 2, [44].

■

4.5 Condições necessárias de otimalidade

Nesta seção , aplicamos o Teorema 4.17 ao problema

$$
\begin{array}{rcl}
(PDN^{**}): & \text{minimizar} & F(x,y) \\
 & \text{s. a} & G(x,y) \leq 0 \\
 & & g(x,y) \leq 0 \\
 & & G_T(x,y) = 0 \\
 & & (x,y) \in C_1 \times C_2.
\end{array}
$$

Formulamos assim, as condições necessárias de otimalidade para o problema $(PMRGE)$ baseados nas condições que garantem as estimativa do subdiferencial da função gap generalizada. Lembremos que dado $(x,y) \in I\!R^{n+m}$, $\Sigma(x,y)$ representa o conjunto de soluções do problema $Q_{x,y}$.

Teorema 4.18 *Seja* $(\overline{x},\overline{y})$ *uma solução do problema* $(PMRGE)$ *tal que a Hipótese 4.13 é satisfeita.*
Então, existem vetores ρ,θ *e* α *satisfazendo* $\rho \in I\!R_+^{k_1}$, $\theta \in I\!R_+^{k_2}$, $\alpha \in I\!R_+^{k_1} \cup \{0\}$ *com* $\sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i = 1$ *e o escalar* $\xi \in I\!R$ *tais que*

$$
\begin{aligned}
0 &= F_x(\overline{x},\overline{y}) + \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i G_{x_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \theta_j g_{x_j} + \xi \overline{v}_x + N_{C_1}, \\
0 &= F_y(\overline{x},\overline{y}) + \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i G_{y_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \theta_j g_{y_j} + \xi \overline{v}_y + N_{C_2}, \\
0 &= z_i - \overline{y} + N^w_{GrafT}(\overline{x}, z_i, w), \\
0 &= \langle \rho, G(\overline{x},\overline{y}) \rangle, \\
0 &= \langle \theta, g(\overline{x},\overline{y}) \rangle,
\end{aligned}
$$

onde $F_x \in \partial_1 F(\overline{x},\overline{y})$, $F_y \in \partial_2 F(\overline{x},\overline{y})$, $G_{x_i} \in \partial_1 G_i(\overline{x},\overline{y})$, $G_{y_i} \in \partial_2 G_i(\overline{x},\overline{y})$, $g_{x_j} \in \partial_1 g_j(\overline{x},\overline{y})$, $g_{y_j} \in \partial_2 g_j(\overline{x},\overline{y})$ *e os vetores* $\overline{v}_x$ *e* $\overline{v}_y$ *estão definidos por*

$$
\overline{v}_x = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i v_{x_i}\ , \quad \overline{v}_y = \sum_{i=1}^{k_1} \alpha_i v_{y_i},
$$

$$v_{x_i} \in \sum_{j=1}^{k_2} \lambda_j^i \partial_1 g_j(\overline{x}, z_i) \; + \; N^x_{GrafT}(\overline{x}, z_i, w_i), \quad \lambda_j \geq 0 \; , \; \langle \lambda_j, g_j(\overline{x}, z_i) \rangle = 0,$$

$$v_{y_i} \in \sum_{j=1}^{k_2} \lambda_j^i \partial_2 g_j(\overline{x}, z_i) \; + \; N^x_{GrafT}(\overline{x}, z_i, w_i), \qquad com \; (z_i, w_i) \in \Sigma(\overline{x}, \overline{y}).$$

Prova:

Do Teorema 4.17 e do Teorema 3.27 obtemos o resultado. ■

Conclusões

Neste trabalho introduzimos o problema de Programação Matemática com Restrições Generalizadas de Equilíbrio $(PMRGE)$, que é um problema de otimização com uma das restrições sendo uma Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica. Esta restrição é denominada Problema de Equilíbrio por BLUM, OETTLI (1993).

O problema $(PMRGE)$ estende o problema de Dois Níveis Generalizado (YE *et al.*, 1997) e o problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (LOU *et al.*, 1996).

Definimos o conceito de função *gap generalizada* paramétrica, que é uma generalização de função gap, associada a uma Desigualdade Variacional e utilizamos a análise de sensibilidade na derivação de um conjunto limitante superior do subdiferencial da função *gap generalizada* assumindo, como hipótese, a condição de *maleabilidade* do problema de otimização equivalente à Desigualdade Variacional Generalizada Paramétrica.

Sob a condição de qualificação de *calma* do problema $(PMRGE)$ refinamos e estendemos resultados da teoria dos multiplicadores de Lagrange em Programação Não linear, existente em ROCKAFELLAR (1982), os que utilizamos para o cálculo do subdiferencial da função marginal do problema $(PMRGE)$. Com estos resultado obtemos as condições de otimalidade do tipo Karush-Kuhn-Tucker para o problema $(PMRGE)$.

Consideramos que procurar uma aproximação numérica de pontos (x, y) que satisfazem as condições de otimalidade, tipo cálculo dos pontos estacionarios, constituem uma linha de pesquisa importante.

Bibliografia

[1] ANANDALINGAM, G.; FRIESZ, T.L. (Eds.) Hierarchical Optimization. *Annals of Operations Research, Vol. 34 (1992). J.C. Baltzer, Basel.*

[2] ARICA, J. O Problema de Programação Matemática de Dois Níveis: Condições de Otimidade e Proposta Numérica. *Tese D.Sc. Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1995.*

[3] ARICA, J.; SCHEIMBERG, S. The Bilevel Programming Problem: Optimality Conditions. *Publicação Técnica Interna N. 03/95. Universidade Estadual do Norte Fluminense, CCT-LCENG, Campos dos Goytacazes, RJ. Brasil, 1995.*

[4] ARICA, J.; SCHEIMBERG, S. The Bilevel Programming Problem: A Numerical Approach. *Publicação Técnica Interna N. 01/96. Universidade Estadual do Norte Fluminense, CCT-LCENG, Campos dos Goytacazes, RJ. Brasil, 1996.*

[5] AUBIN, J.-P.; EKELAND, I. Applied Nonlinear Analysis. *John Wiley and Sons, Inc., New York, 1984.*

[6] AUBIN, J.-P.; FRANKOWSKA, H. Set-Valued Analysis. *Birkhäuser, Boston, 1990.*

[7] AUCHMUTY, G. Variational Principles for Variational Inequalities. *Numerical Functional Analysis and Optimization 10, 1989, pp. 863-874.*

[8] *BARD, J.F.* Optimality Conditions for Bilevel Programming Problems. *Naval Research Logistic Quartly, Vol. 31, 1984, pp. 13-26.*

[9] *BARD, J.F.* Convex Two-level Optimization. *Mathematical Programming 40, 1988, pp. 15-27.*

[10] *BERGE, C.* Topological Spaces. *MacMillam, New York, 1963.*

[11] *BLUM, E.; OETTLI, W.* Variational Principles for Equilibrium Problems. *Parametrics Optimizations and Related Topics III, Ed. J. Guddat, H. Jormen, B. Kummer, F. Nozick, Verlag P. Lang. Manhäim, Alemania, 1993, pp. 79-88.*

[12] *BURACHIK, R.* Proximal Point Methods for the Variational Inequality Problems. *Tese D.Sc. em Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1995.*

[13] *CÉA, J.* Optimization: Theory and Algorithms. *Springer-Verlag, Berlin, 1978.*

[14] *CLARKE, F.H.* Nonsmooth Analysis and Optimization. *Wiley-Interscience, New York, 1983.*

[15] *CLARKE, F.H.* Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization. *Monography CBMS 57, Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, 1989.*

[16] *FANG, S.-C; PETERSON, E. L.* Generalized Variational Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Aplications 38, 1982, pp. 363-383.*

[17] *HARKER, P.T.; PANG, J.S.* On the Existence of Optimal Solutions to Mathematical Program with Equilibrium Constraints. *Operations Research Letters 7, 1988, pp. 61-64.*

[18] *HEARN, D.W.; LAWPHONGPANICH, S.; NGUYEN, S.* Convex Programming Formulations of the Simetric Traffic Assignment Problem. *Transportation Research 18B, 1984, pp. 357-365.*

[19] *HIRIART-URRUTY, J.–B.* Gradients Generalises de Fonctions Marginales. *SIAM Journal on Control and Optimization 16, Nro. 2, 1978, pp. 302-316.*

[20] *HIRIART-URRUTY, J.–B.; LEMARÉCHAL, C.* Convex Analysis and Minimization Algorithm, I : Funddamentals, II : Advanced Theory and Bundle Methods. *Springer-Verlag Berlin, Heidelbeg, 1993.*

[21] *LARSON, M.; PATRIKSSON, M.* A Class of Gap Functions for Variational Inequalities. *Mathematical Programming 64, 1994, pp. 53-79.*

[22] *LOU, Z-Q.; PANG, J-S.; RALPH, D.; WU, S-Q.* Exact Penalization and Stationary Conditions of Mathematical Programs with Equilibrium Constraints. *Mathematical Programming 75, 1996, pp. 19-76.*

[23] *MARCOTTE, P.* Network Design Problem with Congestion Effcets: A Case of Bilevel Programming. *Mathematical Programming 34, 1986, pp. 142-162.*

[24] *MARCOTTE, P.; DUSSAULT, J.-P.* A Sequential Linear Programming Algorithm for Strongly Monotone Variational Inequality. *SIAM Journal in Control and Optimization 27, 1989, pp. 1260-1278.*

[25] *MERKOVSKY, R.R, WARD, D.E.* General Constraint Qualification in Nondifferentiable Programming. *Mathematical Programming 47, 1990, pp. 381-405.*

[26] *NESTEROV, Y.E.; NEMIROVSKII, A. S.* Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Algorithms. *Studies in Applied Mathematics, SIAM Publications, PhiladelPhia, 1994.*

[27] *NGUYEN, S.; DUPUIS, C.* An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Networks with Assymetric Transportation Cost. *Transportation Science 18, 1984, pp. 185-202.*

[28] *NOOR, M. A.* General Nonlinear variational Inequalities. *Journal of Mathematic Analysis and Applications, 126, 1987, pp. 78-84.*

[29] *NOOR, M. A.* General Algorithms for Variational Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications, 73, 1992, pp. 409-413.*

[30] *OUTRATA, J.V.* On Numerical Solution of a class of Stackelberg Problems. *Zetschriftfür Operations Research 34, 1990, pp. 255-278.*

[31] *OUTRATA, J.V.* Necessary Optimality Conditions for Stackelberg Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications 76, 1993, pp. 305-360.*

[32] *OUTRATA, J.V.* On Optimization Problems with Variational Inequality Constrains. *SIAM Journal on Optimization 4, Nro. 2, 1994.*

[33] *PARKER, P.T.; PANG, J.-S.* Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementary Problems: A Survey of Theory and Applications. *Mathematical Programming 40, Serie B, 1990.*

[34] *PATRIKSSON, M.* A Unified Framework of Descent Algorithms for Nonlinear Programs and Variational Inequalities. *Ph. D. Thesis. Departament of Mathematics Linköping University, Sweden, 1993.*

[35] *ROCKAFELLAR, R.T.* Local Boundedness of Nonlinear, Monotone Operator. *Michigan Mathematical Journal 16, 1969, pp. 397-407.*

[36] *ROCKAFELLAR, R.T.* On the Maximality of Sums of Nonlinear Monotone Operator. *Transaction of the American Mathematical Society 149, 1970 pp. 75-88.*

[37] *ROCKAFELLAR, R.T.* On Maximal Monotonicity of Subdifferential Mapping. *Pacific Journal of Mathemathics 33, 1970, pp. 209-216.*

[38] *ROCKAFELLAR, R.T.* Convex Analysis. *Princeton University Press, New Jersey, 1972.*

[39] *ROCKAFELLAR, R.T.* Augmented Lagrange Multiplier Functions and Duality in Nonconvex Programming. *SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 12, N. 2, 1974, pp. 268-285.*

[40] *ROCKAFELLAR, R.T.* Directionally Lipschitzian Functions and Subdifferential Calculus. *Proc. London Mathematics Society Vol. 3, Nro. 39, 1979, pp. 331-355.*

[41] *ROCKAFELLAR, R.T.* Generalized Directional Derivatives and Subgradients of Nonconvex Functions. *Canadian Journal of Mathematics, Vol. 32, N. 2, 1980, pp. 257-280.*

[42] *ROCKAFELLAR, R.T.* The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization: Convex and Nonconvex Functions. *Hofmann K.H. and Wille R. eds. Heldermann Verlag Berlin. 1981.*

[43] *ROCKAFELLAR, R.T.* Proximal Subgradient, Marginal Values and Augmented Lagrangeans in Nonconvex Optimization. *Mathematics of Operations Research, Vol. 6, N. 3, 1981, pp. 424-436.*

[44] *ROCKAFELLAR, R.T.* Lagrange Multipliers and Subderivatives of Optimal Value Functions in Nonlinear Programming. *Mathematical Programming Study 17, 1982, pp. 28-66.*

[45] *ROCKAFELLAR, R.T.* Extensions of subgradients calculus with Applications to Optimization. *Nonlinear Analysis, Theory Methods and Applications, Vol. 9, N. 7, 1985, pp. 665-698.*

[46] *ROCKAFELLAR, R.T.* Lagrange Multipliers and Optimality *Preprint 1992, pp.1-73*

[47] *SAIGAL, R.* Extensions of the Generalized Complementary Problem. *Mathematics of Operations Research, Vol. 1, 1976, pp. 260-266.*

[48] *VAN TIEL, J.* Convex Analysis: an Introdutory Text. *John Wiley, New York, 1984.*

[49] *WARD, D. E., BORWEIN, J. M.* Nonsmooth Calculus in finite Dimensions. *SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 25, N. 5, 1987, pp. 1312-1340.*

[50] *WARD, D. E.* Dini Derivatives of the Marginal Function of a Non-Lipschitzian Program. *SIAM Journal Optimization, Vol. 6, N. 1, 1996, pp. 198-211.*

[51] *WARD, D. E.* Dini Derivatives of the Marginal Function of a Non-Lipschitzian Program. *SIAM Journal on Optimization, Vol. 6, Nro. 1, 1996, pp. 198-211.*

[52] *YE, J.J.; ZHU, D.L.* Optimality Conditions for Bilevel Programming Problems. *Optimization Vol. 33, 1995, pp. 9-27.*

[53] *YE, J.J.; ZHU, D.L.; ZHU, Q.J.* Exact Penalization and Necessary Optimality Conditions for Generalized Bilevel Programming Problem.*SIAM Journal of Optimization. Vol. 7, Nro. 2, 1997, pp. 481-507.*

[54] *YEZZA, A.* A First Order Necessary Optimality Conditions for General Bilevel Programming Problem. *Journal Optimization Theory and Applications. Vol. 89 Nro. 1, 1996, pp. 189-219.*

[55] *ZHANG, R.* Problems Hierarchical Optimization: Nonsmoothness and Analysis of Solution. *Tese Ph.D. do Department of Applied Mathematics, University of Washington, Seattle, 1990.*

[56] *ZHANG, R.* Problems of Hierarchical Optimization in Finite Dimension. *SIAM Journal on Optimization 4, 1994, pp. 521-536.*

[57] *ZUHOVICKIĨ, I.; POLJAK, R.A.; PRIMAK, M.E.* Two Methods of Search for Equilibrium Points of n-person Concave Games . *Soviet Mathematics Doklady 10, 1969, pp. 279-282.*