


MÉTODOS DE PROJEÇÃO PARA O PROBLEMA DE DESIGUALDADES
VARIACIONAIS GERAIS

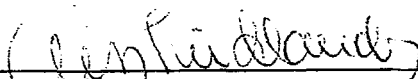
Paulo Sérgio Marques dos Santos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



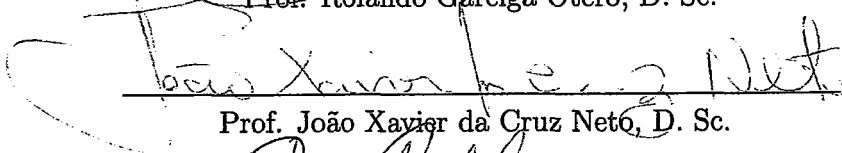
Prof. Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.



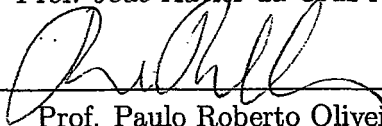
Prof. Ana Friedlander Martínez Perez, D. Sc.



Prof. Rolando Gárciga Otero, D. Sc.



Prof. João Xavier da Cruz Neto, D. Sc.



Prof. Paulo Roberto Oliveira, D. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 2007

SANTOS, PAULO SÉRGIO MARQUES DOS

Métodos de Projeção para o Problema
de Desigualdades Variacionais Gerais [Rio de
Janeiro] 2007

IX, 74 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2007)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1 - Desigualdade Variacional Geral

2 - Convergência Variacional

3 - Monotonicidade Generalizada

4 - Métodos de Projeção

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

- Aos meus pais, à minha esposa Iaci e à minha filha Ana Júlia.
- À memória de meu irmão Luis.

Agradecimentos

- À Professora Susana Scheimberg pela orientação, incentivo, apoio e amizade;
- Aos demais componentes da banca examinadora: Ana Friedlander, Rolando Gárciga, João Xavier e Paulo Roberto pelas sugestões dadas que contribuíram para a melhoria da tese;
- À minha esposa Iaci, minha filha Ana Júlia, aos meus familiares, em especial, ao Jocimar, Nelcy e família;
- Aos amigos de fé Gilvan, Jurandir, Barnabé, João Xavier e Prof. Paulo Roberto pelos estudos, momentos de descontração e agradável convívio;
- Aos colegas do PESC/COPPE/UFRJ. Ao Disney, Eduardo, Erik, Felipe, Gêvane, Kely, Leizer, Morgana, Nilomar, Roberto Cristóvão, Sérgio, Sissy, Valtemir, Vinicius, Xandão e aos amigos do LABOTIM, LCG e IMPA pela amizade;
- Aos amigos Aldo, Alex, Alfredo, Geci, Rodrigo, Rosely, Vera, Socorrinha, Ribamar, Wanderley e aos de Brás de Pina pelo apoio no início do curso;
- Aos professores do PESC, em especial, Mário Benevides, Antonio Oliveira e Ricardo Farias pelas conversas agradáveis no cafezinho;
- Aos funcionários do PESC, a saber: Adilson, Ana, Ari, Carol, Cláudia, Deda, Fátima, Gutierrez, Itamar, Julinho, Leandro, Lúcia, Lourdes, Mercedes, Patricia, Solange, Sônia, Sueli, Taisa pela atenção em todas as ocasiões;
- Aos professores Hélder, Vieira e aos demais colegas do Departamento de Informática e Estatística da UFPI, pelo apoio direto e indireto durante toda a realização do curso;
- Aos amigos do DM-UFPI e à todas as pessoas cujos nomes não constam nesta lista, mas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho;
- À CAPES e a UFPI, pelo financeiro e institucional.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

MÉTODOS DE PROJEÇÃO PARA O PROBLEMA DE DESIGUALDADES VARIACIONAIS GERAIS

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Janeiro/2007

Orientadora: Susana Scheimberg de Makler

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, consideramos o Problema de Desigualdades Variacionais Gerais (PDVG). Apresentamos o problema e sua motivação. Obtemos um resultado sobre a existência de soluções do (PDVG) em espaços de Hilbert sob condições mais fracas que aquelas assumidas por Noor em uma publicação recente. Propomos um algoritmo para resolver o problema com um operador não-monótono em dimensão finita. Em cada iteração o método considera uma única projeção sobre uma aproximação do conjunto de restrições, que é importante do ponto de vista computacional. Analisamos a convergência do algoritmo sob uma condição de cocoercividade enfraquecida, usando noções de convergência variacional. Ilustramos o comportamento numérico do método usando problemas-testes e fazemos comparações com dois outros algoritmos para o caso monótono. Na parte final, introduzimos um esquema de aproximações do problema (PDVG) em espaços de Hilbert que inclui aproximações no mesmo espaço do problema original e aproximações de dimensão finita. Obtemos resultados de limitação e convergência fraca da seqüência gerada pelo esquema.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

PROJECTION METHODS FOR THE GENERAL VARIATIONAL
INEQUALITIES PROBLEM

Paulo Sérgio Marques dos Santos

January/2007

Advisor: Susana Scheimberg de Makler

Department: Systems and Computation Engineering

In this work, we consider the General Variational Inequality Problem (GVIP). We present the problem and its motivation. We obtain a result about the existence of solutions of the (GVIP) in Hilbert spaces under weaker conditions than those assumed by Noor in a recent publication. We propose an algorithm to solve the problem with nonmonotone operator in a finite-dimensional space. At each iteration the method considers only one projection on a constraint approximation set, which is important from the computational point of view. We analyse the convergence of the algorithm under a weak cocoercivity condition, using notions of variational convergence. We illustrate the numerical behavior of the method using test problems and we make comparisons with other two algorithms for the monotone case. Finally, we introduce an approximation scheme of the problem (GVIP) in Hilbert spaces which includes approximations in the same space of the original problem and finite dimensional approximations. We obtain boundedness and weak convergence results of the sequence generated by the scheme.

Sumário

Introdução	ix
1 Preliminares	4
1.1 Conceitos básicos	4
1.2 Operadores de projeção	7
1.3 Convergência variacional	10
1.4 Aproximações de dimensão finita	14
2 Reformulações, algoritmos e existência de soluções	17
2.1 Reformulações de desigualdades variacionais gerais	17
2.2 Existência de soluções	20
2.3 Algoritmos existentes	25
3 Problema de Desigualdade Variacional Geral em dimensão finita	29
3.1 Um algoritmo de projeções e convergência variacional	29
3.2 Análise de convergência	31
3.3 Experiências numéricas	41
4 Problema de Desigualdade Variacional Geral em espaços de Hilbert	45
4.1 Um esquema de aproximações	45
4.2 Análise de convergência	51
5 Considerações finais	65
Referências Bibliográficas	67

Lista de Tabelas

3.1	(PDVG) Não-linear com restrições convexas	42
3.2	Problema não-monótono	43
3.3	Problema de Complementaridade Implícita	44
3.4	(PDVG) com restrições numa caixa	44

Notações

$\arg \min$	Conjunto dos pontos que realizam o mínimo.
\mathcal{H}	Espaço de Hilbert real.
$\mathcal{P}(\mathcal{H})$	Conjunto das partes de \mathcal{H} .
$Im(T)$	Imagem do operador T .
$D(T)$	Domínio do operador T .
$Gr(T)$	Gráfico do operador T .
i_C	Função indicadora do conjunto C .
P_C	Operador de projeção sobre o conjunto C .
$[\phi_1, \dots, \phi_n]$	Subespaço gerado por $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$;
$CCFN(\mathcal{H})$	$\{D \subset \mathcal{H} : D \text{ é um conjunto convexo fechado e não-vazio}\}$.
$G^{-1}(C)$	$\{u \in \mathcal{H} : G(u) \in C\}$.
\rightarrow	Convergência forte.
\rightharpoonup	Convergência fraca.
\xrightarrow{M}	Convergência Mosco.
$int(B)$	Interior topológico do conjunto $B \subset \mathcal{H}$.
\overline{C}	Fecho topológico do conjunto $C \subset \mathcal{H}$.
$aff(B)$	Envoltória afim do conjunto B .
$conv(p_1, \dots, p_n)$	Envoltória convexa do conjunto $\{p_1, \dots, p_n\}$.
0^+C	Cone de recessão do conjunto convexo C .
PDVG	Problema de Desigualdade Variacional Geral.
PCG	Problema de Complementaridade Generalizada.
PCI	Problema de Complementaridade Implícita.
PDV	Problema de Desigualdade Variacional.
$Sol(PDVG)$	Conjunto das soluções de PDVG.

Introdução

Seja C um subconjunto convexo fechado de um espaço de Hilbert real \mathcal{H} , e sejam F, G operadores de \mathcal{H} em \mathcal{H} . Consideramos o Problema de Desigualdade Variacional Geral:

$$(PDVG) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \bar{u} \in \mathcal{H}, \quad G(\bar{u}) \in C \text{ tal que} \\ \langle F(\bar{u}), G(u) - G(\bar{u}) \rangle \geq 0 \quad \forall G(u) \in C, \end{array} \right. \quad (1)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno de \mathcal{H} . Esta formulação foi introduzida em 1988 por M.A. Noor [51]. Dentre as aplicações de (PDVG) destacamos a Oceanografia Física, Processamento de Imagens e Mecânica, veja [11, 39, 53, 54] e suas referências.

Se C é um cone convexo com $0 \in C$ e $C^* = \{u \in \mathcal{H} : \langle u, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in C\}$ é o seu cone polar, então, (PDVG) reduz-se ao problema:

$$(PCG) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \bar{u} \in \mathcal{H} \text{ tal que} \\ G(\bar{u}) \in C, \quad F(\bar{u}) \in C^*, \text{ e } \langle F(\bar{u}), G(\bar{u}) \rangle = 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

que é conhecido como o Problema de Complementaridade Generalizada (ou Problema de Complementaridade Implícita (PCI)), veja [4, 33] e suas referências.

Quando G é o operador Identidade, o (PDVG) reduz-se ao problema de Desigualdade Variacional clássico:

$$(PDV) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \bar{u} \in C \text{ tal que} \\ \langle F(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in C. \end{array} \right. \quad (3)$$

Abaixo, apresentamos um problema de obstáculo de ordem 3 dado por Noor [53] que está contido propriamente na formulação (PDVG):

$$(PO3) \left\{ \begin{array}{lll} -u'''(x) \geq 0, & \text{em} & \Omega \\ u(x) \geq \psi(x), & \text{em} & \Omega \\ [-u'''(x)][u(x) - \psi(x)] = 0, & \text{em} & \Omega \\ u(0), & & u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0, \end{array} \right.$$

onde $\Omega = [0, 1]$ e ψ é a função obstáculo dada. Em [53], é mostrado que encontrar uma solução do problema (PO3) é equivalente a resolver o (PDVG) definido por $C :=$

$\{u \in \mathcal{H} := H_0^2(\Omega)^* : u(x) \geq \psi(x) \text{ em } \Omega\}$, $G(u) = u'$ e F tal que $\langle F(u), G(v) \rangle = \int_{\Omega} u''(x)v''(x)dx$.

Condições para existência de solução do (PDVG) foram analisadas em [63, 67, 89, 90]. Os algoritmos propostos para resolver o problema (PDVG) podem ser divididos em duas classes: explícitos ([51, 55, 81]) e implícitos ([11, 18, 27, 55, 59, 62, 80]). Observamos que a técnica de projeção e suas variantes têm sido consideradas extensivamente em ambas classes. Quando o conjunto de restrições não tem uma estrutura especial a projeção pode se tornar uma tarefa computacional muito complexa. Em geral, observamos que os exemplos numéricos utilizados nos testes desses algoritmos apresentam restrições simples como bolas ou caixas.

Este trabalho é dedicado ao estudo do Problema de Desigualdade Variacional Geral em espaços de Hilbert.

No primeiro capítulo, apresentamos definições básicas, noções de convergência de conjuntos e de aproximações de dimensão finita. Na Seção 1.3, introduzimos uma propriedade que relaciona convergência de conjuntos, projeções e convergência pontual. Este resultado serviu de referência na análise de convergência de algoritmos para resolver problemas de viabilidade [83] e processamento de imagens [84].

No segundo capítulo, fazemos uma síntese da revisão bibliográfica contendo formulações, resultados de existência de solução para o problema (PDVG) e algoritmos dados na literatura. Na Seção 2.2, introduzimos um teorema de existência de solução para o problema (PDVG) que estende um resultado estabelecido em [30], para o problema (PCG).

No terceiro capítulo, para o caso em que \mathcal{H} é de dimensão finita, definimos e analisamos a convergência de um algoritmo baseado em projeções e aproximações do conjunto C usando noções de convergência variacional. Ilustramos o comportamento numérico do algoritmo através de problemas-testes e comparações com dois outros métodos. Os resultados deste capítulo foram publicados em [72].

No Capítulo 4, consideramos o caso em que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert de

*Espaço de Sobolev de ordem 2, mais detalhes em [53] e suas referências.

dimensão infinita. Introduzimos um esquema de aproximações que permite aproximações no mesmo espaço do problema original (como regularizações) e aproximações cujos subproblemas podem ser resolvidos em espaços de dimensão finita (por exemplo, usando um esquema de Galerkin). Mostramos como o passo iterativo de vários algoritmos da literatura, podem reescritos como subproblemas do nosso esquema. Apresentamos uma análise de convergência com resultados de limitação e convergência fraca da seqüência gerada pelo esquema.

Finalmente, no Capítulo 5, discutimos os resultados obtidos nos capítulos anteriores, apresentamos nossas conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, relembremos noções conhecidas e apresentamos definições e propriedades que são necessárias para o desenvolvimento dos demais capítulos. De agora em diante, \mathcal{H} é um espaço de Hilbert real, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno e $\|\cdot\|$ sua norma associada.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1.1.1. *Seja $\{u^n\} \subset \mathcal{H}$, dizemos que:*

- A seqüência $\{u^n\} \subset \mathcal{H}$ **converge fortemente** para $u \in \mathcal{H}$ ($u^n \rightarrow u$) quando
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u^n - u\| = 0;$$
- A seqüência $\{u^n\} \subset \mathcal{H}$ **converge fracamente** para $u \in \mathcal{H}$ ($u^n \rightharpoonup u$) quando
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u^n - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.1.2. *Dada $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ uma aplicação ponto-conjunto, dizemos que T é **localmente limitada** em $\bar{u} \in D(T)$, se existe uma vizinhança U de \bar{u} tal que o conjunto*

$$T(U) = \{T(u) : u \in U \cap D(T)\}$$

é limitado. Uma aplicação T é localmente limitada, se é localmente limitada em todos os pontos de $D(T)$ ([68, p.103]).

Observação 1.1.1. *Se T é localmente limitada em $\bar{u} \in D(T)$, então, para qualquer seqüência $\{u^n\} \subset D(T)$ fortemente convergente a \bar{u} , a seqüência formada pelas imagens $\{w^n \in T(u^n)\}$ é limitada.*

A definição abaixo é uma generalização dos conceitos de monotonicidade e continuidade de Lipschitz no contexto de desigualdades variacionais gerais (veja, [63, Definição 2.1, p.4]).

Definição 1.1.3. *Dados os operadores $F, G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e o conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$, dizemos que:*

- F é **G -fortemente monótono** em C , se existe $\alpha > 0$ tal que

$$\langle F(u) - F(v), G(u) - G(v) \rangle \geq \alpha \|G(u) - G(v)\|^2 \quad \forall G(u), G(v) \in C. \quad (1.1)$$

- F é **G -monótono** em C , se

$$\langle F(u) - F(v), G(u) - G(v) \rangle \geq 0 \quad \forall G(u), G(v) \in C. \quad (1.2)$$

- F é **G -pseudomonótono** em C , se para $G(u), G(v) \in C$

$$\langle F(u), G(v) - G(u) \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle F(v), G(v) - G(u) \rangle \geq 0. \quad (1.3)$$

- F é **G -Lipschitziano** em C , se existe $\beta > 0$ tal que

$$\|F(u) - F(v)\| \leq \beta \|G(u) - G(v)\| \quad \forall G(u), G(v) \in C. \quad (1.4)$$

Quando $\beta < 1$, dizemos que F é uma G -contração em C .

A seguinte definição não foi encontrada em outros trabalhos, mas, surge de maneira natural como um enfraquecimento da definição de operador fortemente monótono.

Definição 1.1.4. *Dados os operadores $F, G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e o conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$, dizemos que F é **G -estritamente monótono** em C , se*

$$G(u), G(v) \in C, G(u) \neq G(v) \Rightarrow \langle F(u) - F(v), G(u) - G(v) \rangle > 0. \quad (1.5)$$

Em Pang-Yao [67], os autores definem monotonicidade forte para o par F, G no conjunto C da seguinte forma:

Definição 1.1.5. *Dados os operadores $F, G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e o conjunto $C \subseteq \mathcal{H}$, dizemos que F é **fortemente monótono com respeito a G em C** , se existe $\alpha > 0$ tal que*

$$G(u), G(v) \in C \Rightarrow \langle F(u) - F(v), G(u) - G(v) \rangle \geq \alpha \|u - v\|^2. \quad (1.6)$$

Observação 1.1.2. *Assumindo a monotonicidade forte do operador F com respeito a G , seja pela Definição 1.1.3 ou Definição 1.1.5, temos que F é G -estritamente monótono em C , conforme Definição 1.1.4.*

Introduzimos o conceito de pseudomonotonicidade no sentido de Brézis, na teoria de desigualdades variacionais gerais, considerando o caso ponto-ponto da definição encontrada em [69, p.21].

Definição 1.1.6. *Sejam $F, G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e um conjunto convexo fechado C . Dizemos que o operador F é **pseudomonótono, no sentido de Brézis**, com respeito a G em C , se para qualquer seqüência $\{u^n : G(u^n) \in C\}$ com $G(u^n) \rightharpoonup G(\bar{u})$, para algum $\bar{u} \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\limsup_n \langle F(u^n), G(u^n) - G(\bar{u}) \rangle \leq 0, \quad (1.7)$$

implica que

$$\langle F(\bar{u}), G(\bar{u}) - z \rangle \leq \liminf_n \langle F(u^n), G(u^n) - z \rangle \quad \forall z \in C. \quad (1.8)$$

Definição 1.1.7. ([2]) *Dizemos que o operador ponto-conjunto F é **sw-demifechado** (da tradução fortemente-fracamente-demifechado) em $M \subset D(F)$ se para todo par de seqüências $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ e $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tal que $\xi^n \in F(u^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $u^n \rightarrow u$ e $\xi^n \rightharpoonup \xi$, temos que $\xi \in F(u)$.*

Observação 1.1.3. *O conceito de sw-demifechado, é usado quando o operador de uma desigualdade variacional é monótono, mas não é necessariamente monótono maximal, veja [2].*

Definição 1.1.8. (por exemplo, [28]) *Seja $\{C_n\}$ uma seqüência de subconjuntos de \mathcal{H} . Dizemos que $\{C_n\}$ é **uniformemente limitada**, se existe um conjunto limitado $D \subseteq \mathcal{H}$ tal que $C_n \subseteq D \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*

Definição 1.1.9. ([30]) *Dizemos que o operador $G: D \rightarrow E$ é **próprio**, se a imagem inversa de qualquer subconjunto compacto de $G(D)$ é um conjunto compacto, isto é, se $G^{-1}(B)$ é compacto para todo compacto $B \subset \text{Im}(G)$.*

Definição 1.1.10. ([86, Definição 11.13, p. 498]) *Dizemos que o operador $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é **seqüencialmente fortemente contínuo** ou (fraco-forte seqüencialmente contínuo), se para qualquer seqüência $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ fracamente convergente a $\bar{u} \in \mathcal{H}$, a seqüência $\{F(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é fortemente convergente a $F(\bar{u})$, isto é,*

$$u^n \rightharpoonup \bar{u} \Rightarrow F(u^n) \rightarrow F(\bar{u}).$$

Definição 1.1.11. ([59]) Seja $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que G é **não-singular**, se existe $\mu > 0$ tal que

$$\|G(u) - G(v)\| \geq \mu \|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 1.1.4. É fácil ver que se G é não-singular, então, G é injetivo.

Definição 1.1.12. ([68]) Um operador F é dito **hemicontínuo** em $v \in D(F)$ se $D(F)$ é convexo e para qualquer $u \in D(F)$ a aplicação $t \mapsto F((1-t)v + tu)$ é contínua de $[0, 1]$ na topologia fraca de \mathcal{H} . F é dito **hemicontínuo**, se a propriedade acima é válida para todo $v \in D(F)$.

Introduzimos a seguir, uma definição que é usada no Capítulo 4.

Definição 1.1.13. Um ponto \bar{g} é uma **G -solução** do problema (PDVG), se $\bar{g} = G(\bar{u})$ para algum $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$.

1.2 Operadores de projeção

Nesta seção, apresentamos fatos básicos sobre operadores de projeção em espaços de Hilbert. Primeiramente, definimos o operador de projeção de $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ sobre um conjunto convexo fechado e estabelecemos importantes propriedades para a definição do algoritmo proposto no Capítulo 3.

Projeção sobre conjuntos convexos

Seja $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica definida positiva. A norma induzida por D é definida por

$$\|v\|_D^2 := \langle v, v \rangle_D = \langle v, Dv \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \quad (1.9)$$

Naturalmente, as aplicações $\|\cdot\|_D$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$, acima definidas, são contínuas. Incluímos a prova da seguinte propriedade que foi usada também em [74, p. 376].

Lema 1.2.1. Para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in [0, 1]$

$$\|\lambda u + (1 - \lambda)v\|_D^2 = \lambda \|u\|_D^2 + (1 - \lambda) \|v\|_D^2 - \lambda(1 - \lambda) \|u - v\|_D^2. \quad (1.10)$$

Prova. Observe que desenvolvendo o lado direito da equação, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda\|u\|_D^2 + (1-\lambda)\|v\|_D^2 - \lambda(1-\lambda)\|u-v\|_D^2 &= \lambda\|u\|_D^2 + (1-\lambda)\|v\|_D^2 \\
&- \lambda(1-\lambda)(\|u\|_D^2 + \|v\|_D^2 - 2\langle u, v \rangle_D) \\
&= \lambda\|u\|_D^2 + \|v\|_D^2 - \lambda\|v\|_D^2 - \lambda\|u\|_D^2 \\
&+ \lambda^2\|u\|_D^2 + 2\lambda\langle u, v \rangle_D - 2\lambda^2\langle u, v \rangle_D \\
&- \lambda\|v\|_D^2 + \lambda^2\|v\|_D^2 \\
&= \lambda^2\|u\|_D^2 + (1-2\lambda+\lambda^2)\|v\|_D^2 \\
&+ 2\lambda\langle u, v \rangle_D - 2\lambda^2\langle u, v \rangle_D \\
&= \lambda^2\|u\|_D^2 + (1-\lambda)^2\|v\|_D^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle u, v \rangle_D \\
&= \|\lambda u + (1-\lambda)v\|_D^2.
\end{aligned}$$

A prova está completa. □

Definição 1.2.1. *Seja C um subconjunto convexo fechado de \mathbb{R}^n . O operador de D -projeção em C é definido por:*

$$P_C^D: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad P_C^D(u) = \arg \min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} \|u - v\|_D^2 \right\}. \quad (1.11)$$

Nos próximos dois lemas, apresentamos a caracterização e a propriedade não-expansiva do operador de D -projeção, veja por exemplo [8].

Lema 1.2.2. *Seja $u \in \mathbb{R}^n$. O ponto p_u é a projeção $P_C^D(u)$ se, e somente se, satisfaz a seguinte desigualdade,*

$$\langle u - p_u, D(p_u - v) \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C. \quad (1.12)$$

Prova. Primeiro, observamos que para quaisquer $u, v, z \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u - z\|_D^2 - \|u - v\|_D^2 = -\|z - v\|_D^2 - 2\langle u - z, D(z - v) \rangle. \quad (1.13)$$

Se, vale (1.12), então, tomando $z = p_u$ em (1.13), obtemos que

$$\|u - p_u\|_D^2 - \|u - v\|_D^2 \leq 0 \quad \forall v \in C. \quad (1.14)$$

Portanto, $\frac{1}{2}\|u - p_u\|_D^2 \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_D^2 \quad \forall v \in C$. Logo, deve ser $p_u = P_C^D(u)$.

Reciprocamente, para ver que $P_C^D(u)$ satisfaz a desigualdade (1.12), consideramos um elemento arbitrário $v \in C$. Como C é convexo, temos que

$$z_t := P_C^D(u) + t(v - P_C^D(u)) \in C, \forall t \in (0, 1].$$

Pela definição (1.11),

$$\|u - P_C^D u\|_D^2 - \|u - z_t\|_D^2 \leq 0, \forall t \in (0, 1].$$

Pela igualdade (1.13) com $z = P_C^D(u)$ e $v = z_t$ para $t \in (0, 1]$, resulta

$$-t^2 \|P_C^D u - v\|_D^2 - 2t \langle u - P_C^D u, D(P_C^D u - v) \rangle \leq 0.$$

Dividindo por $-t$ e fazendo $t \rightarrow 0$ obtemos a desigualdade (1.12), e o resultado segue do fato que $v \in C$ foi tomado arbitrário. \square

Lema 1.2.3. *O operador $P_C^D(\cdot)$ é não-expansivo com respeito a norma D , isto é,*

$$\|P_C^D(u) - P_C^D(v)\|_D \leq \|u - v\|_D, \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Prova. Pelo lema anterior,

$$\langle u - P_C^D(u), D(P_C^D(u) - P_C^D(v)) \rangle \geq 0$$

e,

$$\langle v - P_C^D(v), D(P_C^D(v) - P_C^D(u)) \rangle \geq 0.$$

Somando as duas desigualdades, resulta que

$$\langle u - v + P_C^D(v) - P_C^D(u), D(P_C^D(u) - P_C^D(v)) \rangle \geq 0.$$

Portanto,

$$\|P_C^D(u) - P_C^D(v)\|_D^2 \leq \langle u - v, D(P_C^D(u) - P_C^D(v)) \rangle.$$

Finalmente, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, concluímos que

$$\|P_C^D(u) - P_C^D(v)\|_D \leq \|u - v\|_D.$$

\square

1.3 Convergência variacional

Nesta seção, apresentamos noções de convergência de conjuntos que são importantes na definição e na análise de convergência dos métodos apresentados no Capítulo 3 e Capítulo 4. Inicialmente, denotamos $CCFN(\mathcal{H})$ a família dos subconjuntos convexos fechados e não-vazios do espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Definição 1.3.1. ([49]) *A seqüência $\{C_n \in CCFN(\mathcal{H}_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a C no sentido de Mosco ($\{C_n\}$ é **M-convergente** a C ou $C_n \xrightarrow{M} C$) se:*

- (a) *Para cada $z \in C$, existe $\{z^n \in C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z^n \rightarrow z$;*
- (b) *Se $\{z^{n_j} \in C_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ satisfaz $z^{n_j} \rightarrow z \in \mathcal{H}$, então $z \in C$;*

Uma interpretação geométrica da convergência Mosco de conjuntos convexos é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.3.1. ([6, Teorema 3.33, p. 322]) *Sejam $C, \{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $CCFN(\mathcal{H})$.*

As seguintes sentenças são equivalentes:

- (a) $C_n \xrightarrow{M} C$;
- (b) *Para todo $u \in \mathcal{H}$, $P_{C_n}(u) \rightarrow P_C(u)$;*
- (c) *Para todo $u \in \mathcal{H}$, $dist(u, C_n) \rightarrow dist(u, C)$.*

Exemplo 1.3.1. ([49, Lema 1.5, p.527]) *Sejam $C \in CCFN(\mathcal{H})$ e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de operadores lineares simétricos definidos em \mathcal{H} tal que*

$$\|T_n(v) - v\| \rightarrow 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Se vale uma das seguintes condições:

- (a) C é limitado;
 - (b) $T_n C \subseteq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- então, $\{C_n := T_n C\}$ é Mosco-convergente a C .*

Apresentamos mais um exemplo de aproximações $\{C_n\}$ de um conjunto convexo fechado $C \subset \mathcal{H}$, onde \mathcal{H} é um espaço de Hilbert separável.

Exemplo 1.3.2. (Aproximações polidrais internas, [6]) *Por definição de espaço de Hilbert separável, existe um conjunto $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ enumerável denso em \mathcal{H} . Desse modo, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos a aproximação polidral interna de C (veja Figura 1.1):*

$$C_n := conv(P_C \phi_1, \dots, P_C \phi_n),$$

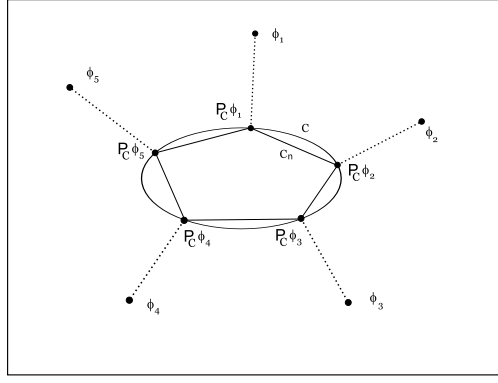


Figura 1.1: Aproximações internas de C .

como a envoltória convexa do conjunto das projeções em C dos pontos ϕ_1, \dots, ϕ_n . Pelo [6, Teorema 3.43, p.334], $\{C_n\}$ é M -convergente a C .

Quando \mathcal{H} é um espaço de dimensão finita, é usado o termo *epiconvergência* em lugar de convergência Mosco, escrevendo $C_k \xrightarrow{epi} C$ quando $C_k \xrightarrow{M} C$, veja por exemplo [7].

A seguinte propriedade relaciona epiconvergência de conjuntos, D -projeções e convergência pontual. Este resultado estabelecido por nós em [71, Proposição 2.5, p. 3] serviu de referência na análise de convergência de algoritmos para resolver problemas de viabilidade [83] e processamento de imagens [84].

Proposição 1.3.2. *Sejam C , $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em $CCFN(\mathbb{R}^n)$. Se a seqüência $\{C_k\}$ epi-converge a C , e a seqüência $\{u^k\} \subset \mathbb{R}^n$ converge a u , então,*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{C_k}^D(u^k) = P_C^D(u).$$

Prova. Pela Definição 1.3.1, dado $w \in C$, como $C_k \xrightarrow{epi} C$, existe uma seqüência $\{w^k\}$ tal que $\lim_{k \rightarrow +\infty} w^k = w$ e $w^k \in C_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Logo, as seqüências $\{u^k\}$ e $\{w^k\}$ são limitadas. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \|P_{C_k}^D(u^k) - w\|_D &\leq \|P_{C_k}^D(u^k) - w^k\|_D + \|w^k - w\|_D \\ &= \|P_{C_k}^D(u^k) - P_{C_k}^D(w^k)\|_D + \|w^k - w\|_D, \end{aligned}$$

e, pelo Lema 1.2.3, resulta que $\{P_{C_k}^D(u^k)\}$ é limitada. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{P_{C_k}^D(u^k)\}$ admite uma subsequência $\{P_{C_j}^D(u^j)\}_{j \in \overline{\mathbb{N}}}$ convergente. Seja $\bar{u} = \lim_{j \rightarrow +\infty, j \in \overline{\mathbb{N}}} P_{C_j}^D(u^j)$. Pela Definição 1.3.1, $\bar{u} \in C$. Usando a caracterização da projeção para cada $P_{C_j}^D(u^j)$, obtemos

$$\langle P_{C_j}^D(u^j) - u^j, D(P_{C_j}^D(u^j) - w^j) \rangle \leq 0, \quad j \in \overline{N}.$$

Considerando o limite quando $j \rightarrow \infty$, para $j \in \overline{N}$. Da continuidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ e do fato que $w^k \rightarrow w$, resulta que

$$\langle \bar{u} - u, D(\bar{u} - w) \rangle \leq 0.$$

Como $w \in C$ é arbitrário, do Lema 1.2.2 conclui-se que $\bar{u} = P_C^D u$. Para mostrar a convergência de toda a seqüência $\{P_{C_k}^D(u^k)\}$ é suficiente provar que ela tem um único ponto de aderência. Seja $\{P_C^D(u^j)\}_{j \in \tilde{N}}$ uma outra subseqüência convergente para $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$. Considerando w e $\{w^k\}$ como definidos acima, pelo mesmo argumento anterior segue que

$$\langle \tilde{u} - u, D(\tilde{u} - w) \rangle \leq 0.$$

Como $w \in C$ foi tomado arbitrário, do Lema 1.2.2 concluímos que $\tilde{u} = P_C^D u$. Logo, a seqüência $\{P_{C_k}^D(u^k)\}$ tem um único ponto de aderência, isto é, é convergente. Portanto, $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{C_k}^D(u^k) = P_C^D(u)$. \square

A seguir, introduzimos uma distância* entre conjuntos baseada em [3, 7], que é utilizada na análise de convergência do algoritmo definido no Capítulo 3.

Definição 1.3.2. *Sejam $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos convexos, fechados e não-vazios, para $\gamma \geq 0$. Definimos $d_\gamma^D(C_1, C_2)$ por*

$$d_\gamma^D(C_1, C_2) := \sup_{\|u\|_D \leq \gamma} \|P_{C_1}^D(u) - P_{C_2}^D(u)\|_D, \quad (1.15)$$

onde P_C^D é a D -projeção, ver (1.11).

Observação 1.3.1. *Em algoritmos de projeção para resolver problemas de desigualdades variacionais, a idéia de substituir nos subproblemas o conjunto original por aproximações não é original, veja por exemplo Makler-Scheimberg et al. [47]. Porém, a filosofia usada em nossos trabalhos [71, 72] e apresentada no Capítulo 3, que consiste em estabelecer condições sobre d_γ^D , isto é, sobre a velocidade de convergência dos conjuntos, para obter resultados de convergência da seqüência gerada pelo algoritmo, tem inspirado novas abordagens para problemas de viabilidade, veja por exemplo [16].*

*A função d_γ^D não é uma **distância**, uma vez que $d_\gamma^D(C_1, C_2) = 0$ não implica $C_1 = C_2$.

Observação 1.3.2. A métrica d_γ^D torna-se a distância de funções dada em [7] quando aplicada às funções indicadoras de C_1 e C_2 . Além disso, a Definição 1.3.2 corresponde a métrica variacional de operadores definida em [3], quando considerada para os cones normais N_{C_1} e N_{C_2} .

Lema 1.3.1. Se $C_k \xrightarrow{epi} C$ então $d_\gamma^D(C_k, C) \rightarrow 0 \quad \forall \gamma > 0$.

Prova. Como $C_k \xrightarrow{epi} C$, temos que i_{C_k} epiconverge a i_C . Então, aplicamos o [7, Corolário 2.53], considerando o espaço de Hilbert \mathbb{R}^n munido com o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$. □

Para finalizar a seção, relacionamos a convergência Mosco de conjuntos a uma convergência baseada na métrica de Hausdorff para conjuntos fechados. Antes, relembremos algumas definições e notações, seguindo Mosco [49].

De acordo com [49], para cada $R > 0$ podemos definir um **gap local** ou a abertura entre dois conjuntos $U, V \in CCFN(\mathcal{H})$ por:

$$\sigma_R(U, V) := \max\{\sigma(U^R, V), \sigma(V^R, U)\},$$

onde

- $U^R := \{v \in \mathcal{H} : v \in U, \|v\| \leq R\}$;
- $\sigma(U, V) := \sup\{d(u, V) : u \in U\}$;
- $d(u, U) := \inf\{\|u - v\| : v \in U\}$.

Agora, apresentamos a conexão entre a convergência Mosco e a convergência com respeito a $\sigma_R(\cdot, \cdot)$.

Lema 1.3.2. ([49, Lema 1.1, p.523]) Sejam $C, C_n \in CCFN(\mathcal{H})$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(a) Se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_R(C_n, C) = 0 \quad \forall R > R_0, R_0 > 0,$$

então, $C_n \xrightarrow{M} C$.

(b) Se \mathcal{H} tem dimensão finita, então, vale a recíproca de (a);

Corolário 1.3.1. Sejam $C, C_k \in CCFN(\mathbb{R}^n)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_R(C_k, C) = 0 \quad \forall R > R_0, R_0 > 0;$

(b) $C_k \xrightarrow{\text{epi}} C$;

(c) $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_\gamma^D(C_k, C) \rightarrow 0 \quad \forall \gamma \geq 0$.

Prova. É uma conseqüência do Lema 1.3.2 e do [7, Corolário 2.53, p.46]. \square

1.4 Aproximações de dimensão finita

Nesta seção, apresentamos os conceitos de base em \mathcal{H} e esquema de Galerkin que são usados no Capítulo 4.

Definição 1.4.1. ([87, p.271]) *Uma base em \mathcal{H} é um conjunto enumerável $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, cujos subconjuntos finitos são linearmente independentes e*

$$\mathcal{H} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n},$$

onde, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n = [\phi_1, \dots, \phi_n]$.

Na seguinte definição, $P_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n$ é o operador de projeção ortogonal de \mathcal{H} sobre o subespaço \mathcal{H}_n .

Definição 1.4.2. ([87, Definição 21.46, p. 271]) *Um esquema de Galerkin em \mathcal{H} é uma seqüência $\{\mathcal{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subespaços vetoriais de \mathcal{H} satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) $\dim(\mathcal{H}_n) < +\infty$, $\mathcal{H}_n \neq \{0\}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - P_{\mathcal{H}_n}(u)\| = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}$.

Definição 1.4.3. ([86, p.770]) *Um espaço de Hilbert \mathcal{H} é separável se contém um subconjunto denso enumerável.*

A proposição abaixo estabelece um resultado de existência para bases e esquemas de Galerkin.

Proposição 1.4.1. ([87, Proposição 21.49, p.272]) *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert separável. Então:*

(a) \mathcal{H} tem uma base;

(b) Se $\{\phi_n\}$ é uma base em \mathcal{H} , então $\{\mathcal{H}_n\}$ com $\mathcal{H}_n = [\phi_1, \dots, \phi_n]$ é um esquema de Galerkin em \mathcal{H} ;

(c) Se $\{\mathcal{H}_n\}$ é um esquema de Galerkin em \mathcal{H} , então podemos construir uma base em \mathcal{H} em termos de $\{\mathcal{H}_n\}$.

Observação 1.4.1. Segundo o [86, Teorema 52, p.787], se \mathcal{H} é um espaço de Hilbert separável, então, \mathcal{H} tem um sistema ortonormal completo.

Exemplo 1.4.1. ([87, Exemplo 21.47, p.270]) Seja $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ um sistema ortonormal completo em \mathcal{H} . Então, $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma base em \mathcal{H} . Além disso, se definimos

$$P_n(u) := \sum_{k=1}^n \langle u_k, u \rangle u_k,$$

então, $P_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um operador de projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}_n = [\phi_1, \dots, \phi_n]$, e $\{\mathcal{H}_n\}$ é um esquema de Galerkin em \mathcal{H} , pois $\text{dist}(u, \mathcal{H}_n) = \|u - P_n(u)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, para todo $u \in \mathcal{H}$.

A seguir, ilustramos esquemas de Galerkin para alguns espaços de dimensão infinita.

Exemplo 1.4.2. (Base de polinômios, [87, Exemplo 21.48, p.271]) Seja

$$\phi_k(t) = t^{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Consideremos o espaço dos polinômios de coeficientes reais e grau $\leq n - 1$,

$$\mathcal{H}_n = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n].$$

Então, $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base e $\{\mathcal{H}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um esquema de Galerkin em $\mathcal{H} = L^2(a, b) := \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty\}$, sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

A afirmação segue do fato que o conjunto dos polinômios é denso em $L^2(a, b)$.

A seguir, consideramos uma aproximação de dimensão finita $\{\mathcal{H}_h\}_{h>0}$ do espaço \mathcal{H} para relembrar noções que serão necessárias no Capítulo 4. Na análise de convergência de um esquema de aproximações de desigualdades variacionais, Adly-Goeleven [1] e Gwinner [24] usam a seguinte definição de convergência de conjuntos convexos fechados:

Definição 1.4.4. ([22, p. 12]) Dizemos que a seqüência $\{C_h\}_{h>0}$ converge a C (no sentido de Glowinski) se são válidas as duas condições abaixo:

- (a) Se $\{u^h\}$ satisfaz $u^h \in C_h$ para todo $h > 0$ e $\{u^h\}$ é limitada, então os pontos de acumulação fracos de $\{u^h\}$ estão em C ;
- (b) Existe um subconjunto D denso em C e existem aplicações $r_h: D \rightarrow C_h$, com a propriedade de, para cada $z \in D$, $r_h(z) \rightarrow z$ (quando $h \rightarrow 0+$).

Abaixo estabelecemos a equivalência entre a definição de convergência Mosco (Definição 1.3.1) e a convergência no sentido de Glowinski, este resultado foi mostrado por Stummel [77].

Proposição 1.4.2. *A seqüência de conjuntos $\{C_n \subset \mathcal{H}_n\}$ converge a C no sentido da Definição 1.4.4, se e somente se, $\{C_n\}$ converge a C no sentido de Mosco.*

Prova. Veja parágrafo 1.2, p. 10 em [77]. □

Capítulo 2

Reformulações, algoritmos e existência de soluções

Neste capítulo, apresentamos uma revisão bibliográfica sobre o Problema de Desigualdade Variacional Geral (PDVG) e estabelecemos um novo resultado de existência de solução. Nossa análise está dividida em três partes. Na primeira, apresentamos as reformulações do problema estudado. Na segunda parte, mostramos três abordagens utilizadas no estudo da existência de solução de (PDVG) e introduzimos um teorema de existência de solução para o problema (PDVG) que estende um resultado estabelecido em [30], para o problema (PCG). Na parte final do capítulo, descrevemos alguns dos algoritmos existentes, com ênfase nos dois métodos explorados no Capítulo 3. Lembramos que \mathcal{H} é um espaço de Hilbert, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno e $\|\cdot\|$ sua norma associada.

2.1 Reformulações de desigualdades variacionais gerais

Nesta seção, apresentamos três formulações equivalentes ao problema estudado.

Equação de projeção em C

A relação entre as soluções do problema de desigualdade variacional clássico (PDV) e as soluções da equação: $\bar{u} = P_C[\bar{u} - F(\bar{u})]$ é um fato bem conhecido (veja Eaves [21]). No caso geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.1.1. *O ponto $\bar{u} \in \mathcal{H}$ resolve a equação*

$$G(\bar{u}) = P_C[G(\bar{u}) - \rho F(\bar{u})], \quad \rho > 0, \quad (2.1)$$

se e somente se,

$$G(\bar{u}) \in C, \quad e \quad \langle F(\bar{u}), w - G(\bar{u}) \rangle \geq 0 \quad \forall \quad w \in C. \quad (2.2)$$

Prova. Uma conseqüência direta da caracterização da projeção sobre um conjunto convexo fechado C . □

Observação 2.1.1. *Não há registros da primeira vez em que foi estabelecida a equivalência acima. Em [67], é feito um estudo sobre a estabilidade e a existência de solução da equação (2.1) em espaços de dimensão finita.*

O resultado abaixo é de grande importância para o estudo do problema (PDVG).

Corolário 2.1.1. *Se $C \subseteq Im(G)$, então, os problemas (PDVG), (2.1) e (2.2) possuem o mesmo conjunto solução.*

Observação 2.1.2. *Em [57], o autor usa o resultado acima sem assumir a hipótese $C \subseteq Im(G)$.*

Em [52], Noor analisa novos algoritmos para (PDVG), associando o problema (2.1) a uma generalização da Equação de Wiener-Hopf [73], e estabelecendo o seguinte.

Teorema 2.1.1. *([52, Teorema 3.1]) Assuma a existência da função inversa, G^{-1} , e fixe $\rho > 0$. Se \bar{u} resolve o problema (PDVG), então $\bar{z} = G(\bar{u}) - \rho F(\bar{u})$ é solução da equação:*

$$F(G^{-1}(P_C(\bar{z}))) + \rho^{-1}(I - P_C)(\bar{z}) = 0. \quad (2.3)$$

Reciprocamente, se \bar{z} resolve (2.3), então $\bar{u} = G^{-1}(P_C(\bar{z}))$ é solução de (PDVG).

Equação de projeção tangente

Em [82], Xiu, Zhang e Noor estabelecem a equivalência entre o problema (PDVG) e a equação de projeção tangente em espaços de dimensão finita, para analisar a convergência local de uma classe de algoritmos para resolver (PDVG). Antes de apresentar a proposição, definimos o cone tangente, segundo [82].

Definição 2.1.1. *Dado $u \in \mathbb{R}^n$ com $G(u) \in C$, o cone tangente $T(G(u))$ é o fecho do cone de todas as direções viáveis, onde $v \in \mathbb{R}^n$ é uma direção viável para o ponto $G(u)$ se $G(u) + tv \in C$ para todo t suficientemente pequeno.*

O conjunto $T(G(u))$ é convexo fechado e não-vazio. Portanto, dado $w \in \mathbb{R}^n$ e $u \in G^{-1}(C)$, existe e é única a projeção ortogonal de w em $T(G(u))$. Agora, estamos em condições de enunciar a equivalência.

Proposição 2.1.2. ([82, Teorema 2.1, p.758]) *Se $C \subseteq \text{Im}(G)$, então, $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$ resolve (PDVG) se, e somente se, \bar{u} é solução do problema:*

$$\text{Encontrar } u \in \mathbb{R}^n, G(u) \in C \text{ tal que } P_{T(G(u))}(-F(u)) = 0. \quad (2.4)$$

Observação 2.1.3. *No estudo de desigualdades variacionais clássicas ($G = I$), a reformulação de (PDV) como o problema de encontrar um zero da soma dos operadores $F(x) + N_C(x)$ é bem conhecida, veja por exemplo [79]. No caso de (PDVG), temos:*

$$\begin{aligned} 0 \in F(\bar{u}) + N_C(G(\bar{u})) &\Leftrightarrow -F(\bar{u}) \in N_C(G(\bar{u})) \\ &\Leftrightarrow \langle F(\bar{u}), z - G(\bar{u}) \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C \\ &\Leftrightarrow \bar{u} \text{ é solução de (PDVG)}. \end{aligned}$$

Não temos conhecimento do uso desta equivalência no desenvolvimento teórico de desigualdades variacionais gerais.

Desigualdades Quasivariacionais

Consideramos o problema de Desigualdade Quasivariacional, definido por:

$$\text{Encontrar } \bar{u} \in \tilde{C}(\bar{u}) \text{ tal que } \langle F(\bar{u}), u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \tilde{C}(\bar{u}), \quad (2.5)$$

onde $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $\tilde{C}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ são, respectivamente, aplicações ponto-ponto e ponto-conjunto (veja [8] e suas referências).

Formalizamos a seguir, as idéias encontradas no artigo de Chan e Pang [17].

Lema 2.1.1. *Sejam $a: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ uma função e $C \subseteq \mathcal{H}$ um conjunto convexo fechado e não-vazio. Se $\tilde{C}(u) := a(u) + C$, então, verificamos a seguinte relação:*

$$P_{\tilde{C}(u)}[v] = a(u) + P_C[v - a(u)] \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Prova. Se $\tilde{C}(u) = a(u) + C$, então $P_{\tilde{C}(u)}[v] = a(u) + \bar{v}$ para algum $\bar{v} \in C$. Pela definição de projeção,

$$\|v - P_{\tilde{C}(u)}[v]\| \leq \|v - w\| \quad \forall w \in \tilde{C}(u),$$

e como $w = a(u) + \bar{w}$ para um elemento $\bar{w} \in C$, temos que

$$\|v - a(u) - \bar{v}\| \leq \|v - a(u) - \bar{w}\| \quad \forall \bar{w} \in C.$$

Portanto, $\bar{v} = P_C[v - a(u)]$, e concluímos que

$$P_{\tilde{C}(u)}[v] = a(u) + \bar{v} = a(u) + P_C[v - a(u)].$$

□

Proposição 2.1.3. *Assuma que $C \subseteq \text{Im}(G)$ e as hipóteses do Lema 2.1.1. Então, o problema de (2.5) é equivalente ao problema de (PDVG).*

Prova. Seja \bar{u} uma solução do problema (2.5), então

$$\bar{u} = P_{\tilde{C}(\bar{u})}[\bar{u} - F(\bar{u})] \Leftrightarrow \bar{u} = a(\bar{u}) + P_C[\bar{u} - F(\bar{u}) - a(\bar{u})],$$

isto é,

$$\bar{u} = P_{\tilde{C}(\bar{u})}[\bar{u} - F(\bar{u})] \Leftrightarrow \bar{u} - a(\bar{u}) = P_C[\bar{u} - a(\bar{u}) - F(\bar{u})].$$

O resultado segue da definição de $G(u) := u - a(u)$ e da caracterização da projeção.

□

2.2 Existência de soluções

Conforme nossa revisão, existem poucos artigos sobre a existência de solução para o problema de Desigualdade Variacional Geral. Dividimos os resultados obtidos de acordo com as seguintes linhas de trabalho:

Teoria do grau topológico

Esta teoria criada por L.E.J. Brouwer (conforme [67]) tem o propósito de estabelecer resultados de existência. A injetividade do operador G é uma hipótese comum nesses trabalhos, vejamos como exemplo o seguinte resultado:

Proposição 2.2.1. *([67, Proposição 3.9, p.175]) Seja C um subconjunto convexo fechado de \mathbb{R}^n , sejam F e G duas funções contínuas de \mathbb{R}^n nele mesmo, sendo G injetiva. Suponha que existe $u \in G^{-1}(C)$ e constantes positivas α e L tais que para todo $x \in G^{-1}(C)$ com $\|x\| \geq \alpha$, $\|G(x) - G(u)\| \leq L\|x - u\|$. Se F é fortemente*

monótona com respeito a G em C (Definição 1.1.5), então existe um único ponto $x \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo

$$G(x) = P_C[G(x) - F(x)].$$

Em [89, 90], encontramos elementos de teoria do grau em espaços de dimensão finita, mas, sua principal característica é descrita no próximo tópico.

Família Excepcional de Elementos

Nesta abordagem, a existência de uma seqüência denominada Família Excepcional de Elementos que atende certas propriedades implica na inexistência de solução para o (PDVG). Vejamos como exemplo a definição dada em [89], onde o conjunto C é ilimitado e definido por funções reais diferenciáveis convexas e afins $E_i (i = 1, \dots, m)$ e $H_j (j = 1, \dots, s)$, respectivamente.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : E_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, H_j(x) = 0, j = 1, \dots, s\},$$

onde $\beta \in [0, 1]$, $d \in \mathbb{R}^n$, $d > 0$.

Definição 2.2.1. ([89, Definição 2.1, p. 171]) *Sejam F, G aplicações de \mathbb{R}^n nele mesmo. Dizemos que uma seqüência $\{x^r\}_{r>0} \subset \mathbb{R}^n$ é uma **Família Excepcional** para o (PDVG), se a seqüência satisfaz as seguintes condições:*

(p1) *A seqüência $\{G(x^r)\}_{r>0} \subset C$ e $\|G(x^r)\| \rightarrow +\infty$ quando $r \rightarrow +\infty$;*

(p2) *Para cada $r > 0$ existe $\mu_r > 0$ e dois pontos $\lambda_r \in \mathbb{R}_+^m$, $u^r \in \mathbb{R}^s$ tais que:*

$$F(x^r) = -\mu_r[\beta G(x^r) + \frac{1}{2}(1 - \beta)d] - \frac{1}{2}(\nabla E(G(x^r)))^T \lambda^r + (\nabla H(G(x^r)))^T u^r$$

$$\lambda^r E_i(G(x^r)) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m.$$

Para estabelecer o resultado de existência em [89], são assumidas as seguintes hipóteses:

(a) O conjunto C satisfaz alguma *restrição de qualificação* usual. Por exemplo, Condição de Slater, isto é, existe $x^* \in C$ tal que $E_i(x^*) < 0$ para todo $i = 1, \dots, m$;

(b) Existe uma seqüência de números positivos $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ com $r_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$, tal que o (PDVG) restrito ao conjunto $C_{r_j} := C \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \beta x^T x + (1 - \beta)x^T d \leq r_j\}$ tem solução para cada $j \in \mathbb{N}$.

A seguir, apresentamos o principal resultado de existência dado em [89].

Teorema 2.2.1. ([89, Teorema 2.1, p. 174]) *Suponha que F e G são funções contínuas de R^n nele mesmo, então, o problema (PDVG) ou tem uma solução ou tem uma família excepcional.*

Em [33], os autores, também, usam um teorema de alternativas e uma definição diferente de *família excepcional de elementos* para obter existência de solução do problema de complementaridade implícita (PCI) em espaços de Hilbert.

Pontos fixos com respeito a G

Neste método, consideramos a equivalência entre os problemas (PDVG) e (2.1), para definir uma seqüência $\{G(x^k) := P_C[G(x^{k-1}) - \eta F(x^{k-1})]\}$ que converge para um ponto G -fixo da aplicação $P_C[G(\cdot) - \eta F(\cdot)]$, $\eta > 0$.

O seguinte teorema de existência de soluções para problemas de complementaridade generalizada (PCG) (veja problema (2)) estabelecido em Isac [30] nos motivou a desenvolver um teorema para o caso de desigualdades variacionais gerais.

Teorema 2.2.2. ([30, Teorema 1, p.254]) *Seja C um cone convexo fechado contido no espaço de Hilbert \mathcal{H} . Se $F, G : C \rightarrow \mathcal{H}$ satisfazem as seguintes condições*:*

- (a) F é G -Lipschitziano módulo β ;
 - (b) F é G -fortemente monótono módulo α ;
 - (c) $\alpha^2 < 2\beta$;
 - (d) G é um operador contínuo próprio, com $G(C) = C$;
- então, existe uma solução $\bar{u} \in \mathcal{H}$ para o problema (PCG).

Uma contribuição à teoria de existência de (PDVG)

Agora, apresentamos uma modificação do Teorema 2.2.2 para estabelecer existência de solução para o problema (PDVG). Consideramos hipóteses mais fracas. Em efeito, não é assumida a condição (c), e a hipótese (d) é substituída por $C \subseteq Im(G)$.

Teorema 2.2.3. *Sejam F, G operadores de \mathcal{H} em \mathcal{H} , e seja $C \in CCFN(\mathcal{H})$. Se as seguintes condições são satisfeitas:*

*Hipóteses (a) e (b) estão cf. Definição 1.1.3, e hipótese (d) cf. Definição 1.1.9.

- (a) F é G -Lipschitziano módulo β ;
- (b) F é G -fortemente monótono módulo α ;
- (c) $C \subseteq \text{Im}(G)$,

então, existe uma solução \bar{u} para o problema (PDVG). Além disso, se G ou F é injetivo, então \bar{u} é única.

Prova. Do Corolário 2.1.1, é suficiente provar que existe $\bar{u} \in \mathcal{H}$ satisfazendo (2.1). Começamos definindo o operador $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ por $T(x) := P_C[G(x) - \mu F(x)]$, para algum $\mu > 0$. Inicialmente, vamos encontrar um intervalo para μ de modo que o operador T seja uma G -contração (veja Definição 1.1.3). Dados $x, y \in \mathcal{H}$, considerando as hipóteses (a) e (b) e a propriedade não-expansiva do operador de projeção $P_C(\cdot)$ (cf. Lema 1.2.3), resulta

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\|^2 &= \|P_C[G(x) - \mu F(x)] - P_C[G(y) - \mu F(y)]\|^2 \\
&\leq \|G(x) - G(y) - \mu(F(x) - F(y))\|^2 \\
&= \|G(x) - G(y)\|^2 + \mu^2\|F(x) - F(y)\|^2 \\
&\quad - 2\mu\langle F(x) - F(y), G(x) - G(y) \rangle \\
&\leq \|G(x) - G(y)\|^2 + \mu^2\beta^2\|G(x) - G(y)\|^2 - 2\mu\alpha\|G(x) - G(y)\|^2 \\
&= (1 - 2\mu\alpha + \mu^2\beta^2)\|G(x) - G(y)\|^2.
\end{aligned}$$

Observe que $q(\mu) := 1 - 2\mu\alpha + \mu^2\beta^2$ é uma função quadrática convexa e, portanto, o conjunto $\{\mu > 0: q(\mu) > 0\}$ é não-vazio. Para obter $\mu > 0$ tal que $q(\mu) \in (0, 1)$, devemos considerar a relação entre α e β . Se $\alpha < \beta$, tome $\mu \in \left(0, \frac{2\alpha}{\beta^2}\right)$, caso contrário, escolha $\mu \in \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta^2}, \frac{2\alpha}{\beta^2}\right)$. Fixe $\mu > 0$ tal que $\theta := q(\mu)^{\frac{1}{2}} < 1$.

Agora construímos uma seqüência $\{x^k\}$ tal que $\{G(x^k)\}$ é convergente. Considere $x^0 \in \mathcal{H}$, como $T(x^0) \in C \subseteq \text{Im}(G)$, logo existe x^1 tal que $G(x^1) = T(x^0)$. Repetimos o processo sucessivamente, isto é, dado $x^k \in \mathcal{H}$, existe x^{k+1} tal que

$$G(x^{k+1}) = T(x^k) = P_C[G(x^k) - \mu F(x^k)] \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Afirmamos que a seqüência $\{G(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. De fato,

$$\begin{aligned}
\|G(x^{k+1}) - G(x^k)\| &= \|T(x^k) - T(x^{k-1})\| \\
&\leq \theta \|G(x^k) - G(x^{k-1})\| \\
&= \theta \|T(x^{k-1}) - T(x^{k-2})\| \\
&\leq \theta^2 \|G(x^{k-1}) - G(x^{k-2})\| \\
&\dots \dots \\
&\leq \theta^k \|G(x^1) - G(x^0)\|.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Logo, para $p \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
\|G(x^{k+p}) - G(x^k)\| &\leq \sum_{j=k}^{k+p-1} \|G(x^{j+1}) - G(x^j)\| \\
&\leq \sum_{j=k}^{k+p-1} \theta^j \|G(x^1) - G(x^0)\| \\
&\leq \sum_{j=k}^{+\infty} \theta^j \|G(x^1) - G(x^0)\| \\
&= \|G(x^1) - G(x^0)\| \sum_{j=k}^{+\infty} \theta^j.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

A série geométrica $\sum_{j=1}^{+\infty} \theta^j$ é convergente, pois $\theta \in (0, 1)$. Portanto, $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\sum_{j=k}^{+\infty} \theta^j) = 0$. Desse modo, $\{G(x^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy, logo, é convergente. Assim, existe $\bar{y} \in \mathcal{H}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} G(x^k) = \bar{y}.$$

Finalmente, provamos que todo ponto de $G^{-1}(\bar{y})$ é uma solução de (PDVG). Com efeito, como $\{G(x^k)\} \subset C$, conjunto fechado, obtemos que $\bar{y} \in C \subseteq \text{Im}(G)$. Logo, existe $\bar{x} \in \mathcal{H}$ tal que $\bar{y} = G(\bar{x})$, e pela hipótese (a), resulta

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(x^k) = F(\bar{x}),$$

que junto com (2.6), usando a continuidade do operador de projeção, da norma e a convergência de $\{G(x^k)\}$, implica que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|G(x^k) - G(x^{k+1})\| \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} \|G(x^k) - P_C[G(x^k) - \mu F(x^k)]\| \\
&= \|G(\bar{x}) - P_C[G(\bar{x}) - \mu F(\bar{x})]\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\bar{u} = \bar{x}$ resolve (2.1), ou seja, \bar{u} resolve (PDVG). Além disso, se \tilde{u} é outra solução, então

$$\langle F(\bar{u}), G(\tilde{u}) - G(\bar{u}) \rangle \geq 0, \quad \text{e} \quad \langle F(\tilde{u}), G(\bar{u}) - G(\tilde{u}) \rangle \geq 0.$$

Adicionando as duas desigualdades acima, e usando a monotonicidade forte, temos

$$0 \geq \langle F(\tilde{u}) - F(\bar{u}), G(\tilde{u}) - G(\bar{u}) \rangle \geq \alpha \|G(\tilde{u}) - G(\bar{u})\|^2.$$

Logo $G(\tilde{u}) = G(\bar{u})$, usando que F é G -Lipschitziano temos que $F(\tilde{u}) = F(\bar{u})$. Portanto, pela injetividade de G ou F , resulta $\tilde{u} = \bar{u}$. \square

Observação 2.2.1. *Na mesma época em que desenvolvemos o teorema acima, Noor [63, Teorema 2.1 p.740] obteve o mesmo resultado de existência e unicidade assumindo condições mais fortes. De fato, as seguintes hipóteses adicionais são consideradas:*

- G é não-singular módulo $\sigma > 0$ (cf. Def. 1.1.11);
- G é Lipschitziano módulo $\delta > 0$;
- Existe $\rho > 0$ tal que

$$\left| \rho - \frac{\alpha}{\beta^2} \right| \leq \frac{\sqrt{\alpha^2 \delta^2 - \delta(\delta - \sigma)}}{\beta^2 \delta}, \quad \alpha \delta > \sqrt{\delta(\delta - \sigma)}.$$

Observação 2.2.2. *A condição (b) do Teorema 2.2.3 é verificada em Alber et al. ([2, p.266]) para aproximações de desigualdades variacionais clássicas ($G = I$), onde o operador F em (PDVG) está dado por $A + \alpha J$, sendo A um operador monótono, $\alpha > 0$ e J a aplicação de dualidade normalizada.*

2.3 Algoritmos existentes

Nesta seção, fazemos uma síntese dos algoritmos existentes para resolver (PDVG) ou alguma de suas reformulações. A teoria de desigualdades variacionais gerais, que no início era explorada somente por M.A. Noor, tem recebido cada vez mais atenção da comunidade científica. A seguir, destacamos alguns exemplos:

- Uma aplicação de (PDVG) ao problema de Entropia máxima, em [11];
- Uma aplicação do Método de Newton ao (PDVG) restrito a caixas, em [18];

- Uma aplicação de Redes Neurais a um problema (PDVG), em [80].

Pelo que foi observado na revisão da literatura, em todos os algoritmos de projeção para o (PDVG), a projeção é feita sobre o conjunto original e os exemplos numéricos apresentados, sempre têm uma estrutura simples como uma bola ou uma caixa. Esses algoritmos podem ser divididos em duas classes: explícitos e implícitos. Abaixo, apresentamos suas principais características e referências, com ênfase nos dois métodos usados para comparações com o algoritmo proposto no Capítulo 3.

Algoritmos explícitos

Em geral, a convergência desses métodos é garantida sob a hipótese de monotonicidade forte e continuidade de Lipschitz para cada um dos operadores F e G . Em [51], encontramos o seguinte esquema iterativo:

Algoritmo 2.3.1.

Passo inicial: Escolha $u^0 \in \mathcal{H}$, $\eta > 0$. Faça $k = 0$.

Passo iterativo : Dado $u^k \in \mathcal{H}$,

$$u^{k+1} = u^k - G(u^k) + P_C[G(u^k) - \eta F(u^k)].$$

A escolha da constante positiva η deve ser feita em função dos módulos de monotonicidade forte e continuidade Lipschitz dos operadores F e G , para permitir a convergência da seqüência gerada pelo Algoritmo 2.3.1 para uma solução do problema (PDVG).

Em [46, 55], encontramos generalizações do esquema apresentado acima.

Algoritmos implícitos

Nestes métodos, que incluem o algoritmo proposto no Capítulo 3, em cada iteração, é necessário determinar um elemento da imagem inversa do operador G . A condição de G -monotonicidade ou G -pseudomonotonicidade do operador F é uma hipótese usualmente assumida na análise de convergência (veja por exemplo [10, 11, 18, 27, 55, 59, 80]).

A seguir, apresentamos em detalhe, dois algoritmos que são utilizados para

comparações nas experiências numéricas do método analisado no Capítulo 3.

Em [59], Noor et al. apresentam um algoritmo para resolver o problema (PDVG), em espaços de dimensão finita, baseado em vários métodos iterativos para resolver o problema de desigualdade variacional clássica (PDV) [26, 31, 41]. Em [59], os autores usam a equivalência estabelecida no Corolário 2.1.1, e resolvem o problema de encontrar um zero do resíduo de projeção $R_\rho(\cdot)$:

$$R_\rho(u) := G(u) - P_C[G(u) - \rho F(u)].$$

Algoritmo 2.3.2. Método de Dupla Projeção

Passo inicial: Escolha $u^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(u^0) \in C$, e constantes $\sigma, \gamma \in (0, 1)$, $\rho \in (0, +\infty)$. Faça $k = 0$.

Passo iterativo : Dado $u^k \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(u^k) \in C$, calcule $P_C[G(u^k) - \rho F(u^k)]$. Se $\|R_\rho(u^k)\| = 0$, então pare, senão calcule $v^k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$G(v^k) = G(u^k) - \eta_k R_\rho(u^k),$$

onde $\eta_k = \gamma^{m_k}$, com m_k o menor inteiro tal que v^k , obtido a partir de η_k , satisfaça

$$\rho \langle F(u^k) - F(v^k), R_\rho(u^k) \rangle \leq \sigma \|R_\rho(u^k)\|^2. \quad (2.9)$$

Obtenha u^{k+1} resolvendo a seguinte equação

$$G(u^{k+1}) = P_C[G(u^k) - \alpha_k d^k],$$

onde

$$d^k = (\eta_k R_\rho(u^k) + \eta_k F(u^k) + \rho F(v^k)), \quad \alpha_k = \frac{(1 - \sigma)\eta_k \|R_\rho(u^k)\|^2}{\|d^k\|^2}.$$

A seguir apresentamos o resultado de convergência.

Teorema 2.3.1. ([59, Teorema 3.4, p.4]) *Suponha que:*

- (a) *O conjunto solução do problema (PDVG) é não vazio;*
- (b) *F é G -monótono;*
- (c) *G é não-singular.*

Se o Algoritmo 2.3.2 gera uma seqüência infinita $\{u^k\}$, então, ela converge para uma solução de (PDVG).

Observação 2.3.1. *Vejam que em cada iteração, o algoritmo acima precisa de duas inversões do operador G e de duas projeções no conjunto C .*

Em [27], B. He propõe um algoritmo para encontrar um zero do resíduo de projeção $R_\rho(\cdot)$, $\rho > 0$. A motivação vem do seguinte fato: se $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz positiva definida e γ, δ são parâmetros positivos, então

$$R_\rho(\bar{u}) = 0 \Leftrightarrow \gamma\delta D^{-1}R_\rho(\bar{u}) = 0 \Leftrightarrow G(\bar{u}) + F(\bar{u}) = G(\bar{u}) + F(\bar{u}) + \gamma\delta D^{-1}R_\rho(\bar{u}).$$

Algoritmo 2.3.3. Método Implícito Inexato

Passo inicial: Dados $u^0 \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in (0, 2)$, uma matriz D positiva definida e uma seqüência $\{\eta_k\}$ tal que $\sum_{k=0}^{+\infty}(\eta_k)^2 < +\infty$. Faça $k = 0$.

Passo iterativo: Dado $u^k \in \mathbb{R}^n$. Se $\|R_1(u^k)\| \neq 0$, então encontre u^{k+1} tal que

$$\|\Theta_k(u^{k+1})\| \leq \eta_k \|R_1(u^k)\|,$$

onde

$$\begin{aligned} \Theta_k(u) &= G(u) + F(u) - G(u^k) - F(u^k) + \gamma\delta(u^k)D^{-1}R_1(u^k), \\ \delta(u) &= \frac{\|R_1(u)\|^2}{\langle R_1(u), D^{-1}R_1(u) \rangle}. \end{aligned}$$

No Capítulo 3, comparamos o algoritmo proposto com a versão exata do Algoritmo 2.3.3, que é obtida considerando $\eta_k = 0 \ \forall \ k \in \mathbb{N}$. Agora, apresentamos o resultado de convergência.

Teorema 2.3.2. ([27, Teorema 5, p. 207]) *Suponha que:*

- (a) *O conjunto solução do problema 2.1 é não vazio;*
- (b) *O operador $G + F$ é não singular;*
- (c) *O operador F é G -monótono.*

Então, a seqüência $\{u^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.3.3 converge para uma solução \bar{u} do problema (2.1).

Capítulo 3

Problema de Desigualdade Variacional Geral em dimensão finita

Neste capítulo, apresentamos nossa principal contribuição à teoria de desigualdades variacionais gerais em dimensão finita. Propomos um método motivado pela equivalência do problema (PDVG), estabelecida pelo Corolário 2.1.1, ao problema de encontrar um zero do resíduo de projeção:

$$\text{Encontrar } \bar{u} \in \mathbb{R}^n : G(\bar{u}) - P_C[G(\bar{u}) - \mu F(\bar{u})] = 0, \quad (3.1)$$

para todo $\mu > 0$.

Nosso estudo está dividido em três partes. Na primeira, desenvolvemos um algoritmo implícito de projeções em conjuntos que são aproximações do conjunto de restrições C . Na segunda parte, apresentamos uma análise de convergência diferente daquelas encontradas na teoria de desigualdades variacionais gerais, pois, relaxamos as hipóteses usuais e obtemos vários resultados de convergência dependendo das condições impostas aos operadores F e G . Finalmente, apresentamos as experiências numéricas para ilustrar o bom desempenho do algoritmo.

3.1 Um algoritmo de projeções e convergência variacional

Nesta seção, apresentamos o algoritmo. Em cada iteração, consideramos uma projeção sobre uma aproximação do conjunto C , o que é importante do ponto de vista numérico.

Para descrever o algoritmo, especificamos algumas hipóteses:

R1. $C_k \in CCFN(\mathbb{R}^n)$, $C_k \subseteq C_{k+1} \subseteq C \subseteq \text{Im}(G)$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\{C_k\}$ é epiconvergente a C , isto é, $C = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k}$;

R2. $\{\lambda_k\} \subset (0, 1]$, $\alpha > 0$, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica positiva definida.

Consideramos a seguinte notação:

- $T(u) := P_C^D[G(u) - \alpha D^{-1}F(u)]$;
- $T_k(u) := P_{C_k}^D[G(u) - \alpha D^{-1}F(u)]$;
- $R_k(u) := G(u) - T_k(u)$;
- $R(u) := G(u) - T(u)$;
- $e^k := T(u^k) - T_k(u^k)$.

A denominação PPM vem do inglês "Perturbed Projection Method" usada no relatório técnico [71] e no artigo [72], que apresentam o estudo do algoritmo.

Algoritmo 3.1.1. (*Algoritmo PPM*)

Passo inicial: Escolha $u^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(u^0) \in C_0$, faça $k = 0$.

Passo iterativo : Dado $u^k \in \mathbb{R}^n$ tal que $G(u^k) \in C_k$.

Se $\|R_k(u^k)\|_D = 0$, então,

Passo nulo : Seja $u^{k+1} := u^k$

Caso contrário,

Passo sério : Encontrar u^{k+1} tal que

$$\begin{aligned} G(u^{k+1}) &= G(u^k) - \lambda_k R_k(u^k) \\ &= (1 - \lambda_k)G(u^k) + \lambda_k P_{C_k}^D[G(u^k) - \alpha D^{-1}F(u^k)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observação 3.1.1. Quando G é o operador identidade e $C_k \equiv C$, o Algoritmo PPM torna-se o esquema de aproximações sucessivas relaxadas definido em [20].

Observação 3.1.2. A projeção na aproximação do conjunto de restrições C , é uma característica importante do algoritmo. De fato, do ponto de vista computacional, o método nos permite escolher aproximações convenientes e, assim, tornar a resolução numérica mais fácil que se projetássemos no conjunto original C . Estratégias de

aproximações do conjunto de restrições têm sido consideradas para desigualdades variacionais (veja por exemplo [2, 36, 47, 70] e suas referências). Uma segunda vantagem deste método, comparado com vários algoritmos de projeção para resolver desigualdades variacionais gerais (veja por exemplo [10, 55, 59]), é que apenas uma projeção e, conseqüentemente, um elemento da imagem inversa do operador G são requeridos por iteração, reduzindo os custos computacionais.

3.2 Análise de convergência

Nesta seção, consideramos as seguintes hipóteses:

A1. O conjunto solução de (PDVG), $Sol(PDVG)$, é não-vazio.

A2. O operador F é G -cocoercivo em C com respeito a $\bar{u} \in Sol(PDVG)$, com módulo $\beta > 0$, isto é,

$$\langle F(u) - F(\bar{u}), G(u) - G(\bar{u}) \rangle \geq \beta \|F(u) - F(\bar{u})\|^2 \quad \forall G(u) \in C. \quad (3.3)$$

Dizemos que F é G -cocoercivo em C com respeito ao conjunto $Sol(PDVG)$ quando A2 é satisfeita para toda solução de (PDVG).

Observação 3.2.1. A condição A1 é usual em desigualdades variacionais gerais, veja [10, 11, 27, 55, 59]. A condição A2 é uma relaxação de uma hipótese padrão no contexto de desigualdades variacionais quando apenas uma projeção é considerada. De fato, em [25, 91] verifica-se a condição de cocoercividade no conjunto de restrições, enquanto em [50] ela é assumida no conjunto solução.

No exemplo abaixo, ilustramos um problema onde o operador F é G -cocoercivo em C com respeito a uma solução, mas, não é G -monótono nem G -pseudomonótono em C .

Exemplo 3.2.1. Considere o problema (PDVG) em \mathbb{R} definido por $F(u) = e^u \sin u$, $G(u) = 8u$ e $C = [0, 8\pi]$. O conjunto solução é $Sol(PDVG) = \{0, \pi\}$. Observe que F é G -cocoercivo em C módulo $\beta = 1$ com respeito a $\bar{u} = 0$. Com efeito, para $u \in [0, \pi]$ o sinal de

$$\langle F(u) - F(0), G(u) - G(0) \rangle - \|F(u) - F(0)\|^2 = e^u \sin(u) [8u - e^u \sin(u)]$$

é o mesmo sinal do termo $8u - e^u \sin(u)$, que se anula em $u = 0$ e é crescente, uma vez que o valor mínimo de sua primeira derivada em $[0, \pi]$ é $\{8 - e^{\frac{\pi}{2}} [\sin(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2})]\} > 0$. Por outro lado, se $u^1 = \pi$ e $u^2 = \frac{\pi}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \langle F(u^1), G(u^2) - G(u^1) \rangle &= 8e^\pi \sin(\pi) \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle F(u^2), G(u^2) - G(u^1) \rangle &= 8e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -4e^{\frac{\pi}{2}} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto, F não é G -pseudomonótona em C , conseqüentemente, não é G -monótona.

Seja $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a seqüência gerada pelo Algoritmo PPM. Se as iteradas permanecem iguais a partir um determinado ponto da seqüência, provamos que o último passo sério é uma solução do problema (PDVG). No outro caso, fazemos uma análise detalhada, mostrando vários resultados de convergência. Por exemplo, sob condições fracas obtemos a existência de pontos de acumulação da seqüência $\{u^k\}$ que são soluções de (PDVG), e podem ser identificados pelo algoritmo. No último resultado, estabelemos que a seqüência inteira $\{u^k\}$ converge para uma solução \bar{u} sob a G -cocoercividade de F com respeito a $Sol(PDVG)$ e a hipótese usual de existência e continuidade da função inversa G^{-1} .

A próxima propriedade, que é uma conseqüência direta da Definição 1.3.2, relaciona $T, T_k(\cdot)$ e a distância entre conjuntos $d_\gamma^D(C_k, C)$.

Lema 3.2.1. *Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Se $\gamma \geq \|G(u) - \alpha D^{-1}F(u)\|_D$, então,*

$$\|T_k(u) - T(u)\|_D \leq d_\gamma^D(C_k, C) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Para mostrar nossos resultados de convergência precisamos da seguinte propriedade não-expansiva.

Proposição 3.2.1. *Seja F um operador G -cocoercivo em C com respeito a $v \in \mathbb{R}^n$ módulo β e $\alpha \in [0, 2\beta\lambda_{\min}(D)]$, onde $\lambda_{\min}(D)$ é o menor autovalor de D . Então,*

$$\|T_k(u) - T_k(v)\|_D \leq \|G(u) - G(v)\|_D \quad \forall G(u) \in C_k \quad (3.5)$$

e

$$\|T(u) - T(v)\|_D \leq \|G(u) - G(v)\|_D \quad \forall G(u) \in C. \quad (3.6)$$

Prova. Pela definição de T_k e a propriedade não-expansiva do operador P_{C_k} temos que

$$\begin{aligned}
\|T_k(u) - T_k(v)\|_D^2 &= \|P_{C_k}^D[G(u) - \alpha D^{-1}F(u)] - P_{C_k}^D[G(v) - \alpha D^{-1}F(v)]\|_D^2 \\
&\leq \|G(u) - G(v) - \alpha D^{-1}(F(u) - F(v))\|_D^2 \\
&= \|G(u) - G(v)\|_D^2 - 2\alpha \langle G(u) - G(v), F(u) - F(v) \rangle \\
&\quad + \alpha^2 \langle F(u) - F(v), D^{-1}(F(u) - F(v)) \rangle.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Como F é G -cocoercivo em C com respeito a v e D^{-1} é uma matriz simétrica definida positiva, de (3.7) obtemos que

$$\|T_k(u) - T_k(v)\|_D^2 \leq \|G(u) - G(v)\|_D^2 + (\alpha^2 \lambda_{\max}(D^{-1}) - 2\alpha\beta) \|F(u) - F(v)\|^2.$$

Desse modo, tomando $\alpha \in [0, 2\beta\lambda_{\min}(D)]$ concluímos a prova da desigualdade (3.5). De um modo similar, obtemos a validade de (3.6). \square

O primeiro resultado de convergência concerne a possibilidade do Algoritmo PPM gerar uma seqüência $\{u^k\}$ definida por passos nulos a partir de uma determinada iteração.

Teorema 3.2.1. *Seja $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a seqüência gerada pelo Algoritmo PPM tal que $u^k = \bar{u}$ para todo $k \geq \bar{k} \in \mathbb{N}$ e para algum $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$. Se as condições R1 e R2 são satisfeitas, então, \bar{u} é uma solução de (PDVG).*

Prova. Assuma que R1 e R2 são satisfeitas. Como $u^{k+1} = u^k = \bar{u}$ para todo $k \geq \bar{k}$, temos que $R_k(u^k) = 0$ implica que $G(u^k) = T_k(u^k)$ e $G(u^k) \in C_k \subseteq C$ para todo $k \geq \bar{k}$.

Logo, temos que $G(\bar{u}) \in C$ e

$$G(\bar{u}) = P_{C_k}^D[G(\bar{u}) - \alpha D^{-1}F(\bar{u})] \quad \forall k \geq \bar{k}. \tag{3.8}$$

De (3.8) e da Proposição 1.3.2, obtemos que

$$G(\bar{u}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P_{C_k}^D[G(\bar{u}) - \alpha D^{-1}F(\bar{u})] = P_C^D[G(\bar{u}) - \alpha D^{-1}F(\bar{u})]. \tag{3.9}$$

Portanto, pelo Corolário 2.1.1 resulta que \bar{u} é uma solução de (PDVG). \square

Daqui em diante, assumimos que a seqüência $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo PPM tem uma subseqüência infinita de passos sérios. Neste caso, começamos a análise de convergência com um importante lema sobre seqüências de números reais, que pode ser encontrado no Lema 2.2. [20].

Lema 3.2.2. *Sejam $\{\delta_k\}$ e $\{\mu_k\}$ seqüências de números reais não negativos satisfazendo as seguintes condições:*

- a) $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k < +\infty$,
- b) $\mu_{k+1} \leq \mu_k + \delta_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Então, $\{\mu_k\}$ é uma seqüência convergente.

A proposição seguinte nos permite concluir que a seqüência $\{G(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Teorema 3.2.2. *Assuma que as hipóteses R1, R2, A1 e A2 (com respeito a $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$) são satisfeitas. Se, além disso, as seguintes condições sobre os dados são verificadas:*

R3. $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k d_\gamma^D(C_k, C) < +\infty \quad \forall \gamma \geq 0$;

R4. $\alpha \in [0, 2\beta\lambda_{\min}(D)]$.

Então, resulta que

- a) *A seqüência $\{\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente.*
- b) *A seqüência $\{G(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Prova. Seja \bar{u} uma solução de (PDVG) verificando A2. Então, pelo Corolário 2.1.1, temos $G(\bar{u}) = T(\bar{u})$. Tome $G(\bar{u}) = (1 - \lambda_k)G(\bar{u}) + \lambda_k T(\bar{u})$. Considerando o passo iterativo do Algoritmo PPM. Se u^{k+1} é obtido por um passo sério, então, obtemos que

$$\begin{aligned} \|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D &= \|(1 - \lambda_k)(G(u^k) - G(\bar{u})) + \lambda_k(T_k(u^k) - T(\bar{u}))\|_D \\ &\leq (1 - \lambda_k)\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D + \lambda_k\|T_k(u^k) - T_k(\bar{u})\|_D \\ &\quad + \lambda_k\|T_k(\bar{u}) - T(\bar{u})\|_D. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Usando a Proposição 3.2.1 em (3.10) e o Lema 3.2.1 para $\bar{\gamma} \geq \|G(\bar{u}) - \alpha D^{-1}F(\bar{u})\|_D$ resulta que

$$\begin{aligned} \|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D &\leq \|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D + \lambda_k\|T_k(\bar{u}) - T(\bar{u})\|_D \\ &\leq \|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D + \lambda_k d_\gamma^D(C_k, C). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Agora, se u^{k+1} é definido por um passo nulo, então, $u^{k+1} = u^k$ e a desigualdade acima é também satisfeita. Logo, combinando (3.11) com o Lema 3.2.2 para $\mu_k = \|G(u^k) -$

$G(\bar{u})\|_D$ and $\delta_k = \lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C)$, obtemos que a seqüência $\{\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D\}_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente. Portanto, a seqüência $\{G(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada. Isto completa a prova. \square

Seja $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a seqüência gerada pelo Algoritmo PPM com infinitos passos sérios. Para apresentar o teorema que serve de base para os outros resultados de convergência, devemos analisar as seguintes possibilidades:

- a) Existe uma subseqüência $\{u^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\|R_{k_j}(u^{k_j})\|_D = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$;
- b) Existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\|R_k(u^k)\|_D > 0$ para todo $k \geq \bar{n}$.

Teorema 3.2.3. *Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.2. Se, além disso, a seguinte condição é satisfeita*

$$\mathbf{R5} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k (1 - \lambda_k) = +\infty.$$

Então,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|R_k(u^k)\|_D = 0. \quad (3.12)$$

Prova. Se existe uma subseqüência $\{u^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\|R_{k_j}(u^{k_j})\|_D = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, então, a conclusão (3.12) é direta.

Agora, assumimos que existe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\|R_k(u^k)\|_D > 0 \quad \forall k \geq \bar{n}$.

Primeiramente, mostramos que a seqüência $\{G(u^k) - \alpha D^{-1}F(u^k)\}$ é limitada. Supondo que vale A2 para \bar{u} , temos que $\|F(u^k) - F(\bar{u})\| \leq \frac{1}{\beta} \|G(u^k) - G(\bar{u})\|$. Desse modo, pelo Teorema 3.2.2 segue que a seqüência $\{F(u^k)\}$ é limitada. Logo, $\{G(u^k) - \alpha D^{-1}F(u^k)\}$ é também limitada. Tome $\bar{\gamma} > 0$ tal que

$$\|G(u^k) - \alpha D^{-1}F(u^k)\|_D \leq \bar{\gamma} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.13)$$

Agora, procedemos a prova de (3.12) por contradição. Suponha que existe $\epsilon > 0$ verificando

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \|R_k(u^k)\|_D = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_{k \geq n} \{\|R_k(u^k)\|_D\} \right) > \epsilon.$$

Assim, temos que existem $\hat{\epsilon} > \epsilon$ e $\hat{n} > \bar{n}$ tais que

$$\|G(u^k) - T_k(u^k)\|_D = \|R_k(u^k)\|_D > \hat{\epsilon} \quad \forall k \geq \hat{n}. \quad (3.14)$$

Afirmamos que

$$\|G(u^k) - T(u^k)\|_D > \epsilon \quad \forall k \geq \bar{k} \text{ for some } \bar{k} \geq \hat{n}. \quad (3.15)$$

De fato, expandindo o quadrado da norma- D em (3.14) e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\epsilon}^2 &< \|G(u^k) - T(u^k) + T(u^k) - T_k(u^k)\|_D^2 \\
&\leq \|G(u^k) - T(u^k)\|_D^2 + 2\|G(u^k) - T(u^k)\|_D \|T(u^k) - T_k(u^k)\|_D \\
&\quad + \|T(u^k) - T_k(u^k)\|_D^2.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando o Lema 3.2.1 em (3.16) segue que

$$\epsilon^2 < \hat{\epsilon}^2 < \|G(u^k) - T(u^k)\|_D^2 + 2\|G(u^k) - T(u^k)\|_D d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C) + (d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C))^2. \tag{3.17}$$

Como R1 é satisfeita, pelo Lema 1.3.1, obtemos que $\{d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C)\}$ converge a zero. Além disso, por (3.13) e da propriedade não-expansiva de P_C^D , deduzimos que $\{G(u^k) - T(u^k)\}$ é limitada. Logo, de (3.17) concluímos que existe $\bar{k} \geq \hat{n}$ tal que

$$\|G(u^k) - T(u^k)\|_D > \epsilon \quad \forall k \geq \bar{k}. \tag{3.18}$$

Agora, garantimos que

$$\|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 \leq \|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D^2 + \sigma_k - \lambda_k(1 - \lambda_k)\epsilon^2, \tag{3.19}$$

onde

$$\sigma_k := 2L\lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C) + (\lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C))^2, \tag{3.20}$$

onde L é uma cota superior de $\{\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D\}$. De fato, considerando um argumento similar àquele usado para obter (3.10) junto com (1.10) e a definição de e^k obtemos que

$$\begin{aligned}
\|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 &= \|(1 - \lambda_k)[G(u^k) - G(\bar{u})] + \lambda_k[T(u^k) - T(\bar{u})] \\
&\quad + \lambda_k(T_k(u^k) - T(u^k))\|_D^2 \\
&= \|(1 - \lambda_k)(G(u^k) - G(\bar{u}) - \lambda_k e^k) \\
&\quad + \lambda_k(T(u^k) - T(\bar{u}) - \lambda_k e^k)\|_D^2 \\
&= (1 - \lambda_k)\|G(u^k) - G(\bar{u}) - \lambda_k e^k\|_D^2 + \lambda_k\|T(u^k) - T(\bar{u}) \\
&\quad - \lambda_k e^k\|_D^2 - \lambda_k(1 - \lambda_k)\|G(u^k) - T(u^k)\|_D^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Expandindo do quadrado da norma- D na igualdade acima e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\begin{aligned}
\|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 &\leq (1 - \lambda_k)[\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D^2 + 2\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D\|\lambda_k e^k\|_D \\
&\quad + \|\lambda_k e^k\|_D^2] + \lambda_k[\|T(u^k) - T(\bar{u})\|_D^2 \\
&\quad + 2\|T(u^k) - T(\bar{u})\|_D\|\lambda_k e^k\|_D \\
&\quad + \|\lambda_k e^k\|_D^2] - \lambda_k(1 - \lambda_k)\|G(u^k) - T(u^k)\|_D^2,
\end{aligned}$$

que junto com a Proposição 3.2.1 implica que

$$\begin{aligned}
\|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 &\leq \|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D^2 + 2\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D\|\lambda_k e^k\|_D \\
&\quad + \|\lambda_k e^k\|_D^2 - \lambda_k(1 - \lambda_k)\|G(u^k) - T(u^k)\|_D^2.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Desse modo, combinando (3.22) com o Lema 3.2.1 ($e^k = T(u^k) - T_k(u^k)$) e usando a cota L de $\{\|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D\}$ no segundo termo da soma, segue que

$$\begin{aligned}
\|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 &\leq \|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D^2 + 2L\lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C) + (\lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C))^2 \\
&\quad - \lambda_k(1 - \lambda_k)\|G(u^k) - T(u^k)\|_D^2.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Considerando (3.23), (3.18) e (3.20) obtemos (3.19). Assim, resulta que

$$\lambda_k(1 - \lambda_k)\epsilon^2 \leq \|G(u^k) - G(\bar{u})\|_D^2 - \|G(u^{k+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 + \sigma_k, \tag{3.24}$$

para todo $k \geq \bar{k}$. Agora, somamos (3.24) para $k = \bar{k}, \bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, \bar{k} + m$ obtendo

$$\epsilon^2 \sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+m} \lambda_k(1 - \lambda_k) \leq \|G(u^{\bar{k}}) - G(\bar{u})\|_D^2 - \|G(u^{\bar{k}+m+1}) - G(\bar{u})\|_D^2 + \sum_{k=\bar{k}}^{\bar{k}+m} \sigma_k. \tag{3.25}$$

Observe que $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C) < +\infty$ implica que $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda_k d_{\bar{\gamma}}^D(C_k, C))^2 < +\infty$, assim, obtemos que $\sum_{k=\bar{k}}^{+\infty} \sigma_k < +\infty$. Logo, deve ser $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k(1 - \lambda_k) < +\infty$, que junto com a condição R5 resulta em uma contradição. \square

Este teorema nos permite obter vários resultados de convergência. De fato, temos a seguinte propriedade.

Corolário 3.2.1. *Assuma as hipóteses do Teorema 3.2.3. Então, existe uma subsequência de $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, denotada por $\{u^j\}_{j \in \bar{\mathbb{N}}}$, tal que a seqüência dos resíduos $\{R_j(u^j)\}_{j \in \bar{\mathbb{N}}}$ converge a zero.*

Prova. É uma conseqüência direta do Teorema 3.2.3. \square

Notemos que, esta subseqüência convergente é fácil de ser identificada numericamente.

A seguir, estabelecemos um resultado de convergência relativo às G -iteradas, $G(u^k)$.

Teorema 3.2.4. *Assuma as hipóteses consideradas no Teorema 3.2.3. Então, o conjunto dos pontos de acumulação da seqüência $\{G(u^k)\}$ é não-vazio e está contido em $Im(G)$. Além disso, se F é G -Lipschitziano em C , então, existe uma solução do (PDVG) \tilde{u} tal que $G(\tilde{u})$ é um ponto de acumulação de $\{G(u^k)\}$.*

Prova. Pelo Corolário 3.2.1, existe uma subseqüência $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j \in \mathbb{N}, j \rightarrow +\infty} R_j(x^j) = 0$. Pelo Teorema 3.2.2 temos que $\{G(u^j)\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{G(u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ é limitada. Logo, existe uma subseqüência $\{u^{j_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $\{G(u^{j_m})\}$ converge para algum \bar{g} . Como C é um conjunto convexo fechado e $G(u^{j_m}) \in C_{j_m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, pela condição R1 concluímos que $\bar{g} \in C \subseteq Im(G)$. Isto mostra a primeira afirmação do teorema.

Agora, assumimos que F é G -Lipschitziano em C . Seja \tilde{u} um G -ponto de acumulação de $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, isto é, existe uma subseqüência $\{G(u^{j_m})\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{G(u^j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergindo para $G(\tilde{u})$. Logo, a seqüência $\{F(u^{j_m})\}$ converge a $F(\tilde{u})$. Estas conclusões junto com a Proposição 1.3.2 garantem que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{m \rightarrow \infty} R_{j_m}(u^{j_m}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \{G(u^{j_m}) - P_{C_{j_m}}^D [G(u^{j_m}) - \alpha D^{-1} F(u^{j_m})]\} \\ &= G(\tilde{u}) - P_C^D [G(\tilde{u}) - \alpha D^{-1} F(\tilde{u})] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Portanto, a segunda afirmação segue do Corolário 2.1.1. \square

Observamos que o operador F dado no Exemplo 3.2.1 é G -Lipschitziano em C .

A proposição seguinte estabelece que todo ponto de acumulação da seqüência $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma solução de (PDVG).

Lema 3.2.3. *Assuma as hipóteses consideradas no Teorema 3.2.3. Se um ponto \tilde{u} é um ponto de acumulação da seqüência $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$, então, \tilde{u} é uma solução de (PDVG).*

Prova. Seja \tilde{u} um ponto limite de $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Assim, existe uma subseqüência que denotamos novamente por $\{u^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ convergindo a \tilde{u} . Como G e F são operadores contínuos e C é um conjunto fechado, segue que $\lim_{j \in \mathbb{N}, j \rightarrow +\infty} G(u^j) = G(\tilde{u}) \in C$ e

$\lim_{j \rightarrow +\infty} F(u^j) = F(\tilde{u})$. Portanto, pela Proposição 1.3.2 resulta que

$$R(\tilde{u}) = \lim_{j \in \bar{\mathbb{N}}, j \rightarrow +\infty} \left\{ G(u^j) - P_{C_j}^D [G(u^j) - \alpha D^{-1} F(u^j)] \right\} = 0. \quad (3.27)$$

Logo, a afirmação segue do Corolário 2.1.1. \square

Agora, mostramos que o conjunto dos pontos de acumulação da seqüência $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não-vazio sob a condição que a aplicação ponto-conjunto G^{-1} é localmente limitada em C . Como C é fechado, isto significa que G^{-1} leva subconjuntos limitados de C em conjuntos limitados.

Teorema 3.2.5. *Assuma as hipóteses consideradas no Teorema 3.2.3. Se a aplicação ponto-conjunto $G^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é localmente limitada em C , então, o conjunto dos pontos de acumulação de $\{u^j\}_{j \in \bar{\mathbb{N}}}$ é não-vazio e está contido em $Sol(PDVG)$.*

Prova. Da hipótese R1 e do Teorema 3.2.2, temos que $\{G(u^j)\}_{j \in \bar{\mathbb{N}}} \subset C$ é limitado. Como G^{-1} é localmente limitada em C , segue que a seqüência $\{u^j\}_{j \in \bar{\mathbb{N}}}$ é limitada. Logo, ela tem pontos de acumulação. A conclusão do teorema segue do Lema 3.2.3. \square

Por exemplo, o problema (PDVG) definido por $F(u) = u^2$, $G(u) = u^4 + 1$ e $C = [2, +\infty)$, verifica as hipóteses A1 e A2 do teorema acima. De fato, vemos que, como $Sol(PDVG) = \{-1, 1\}$, o operador F é G -cocoercivo em C com módulo $\beta = 2$. Além disso, a aplicação ponto-conjunto G^{-1} , dada por $G^{-1}(y) = \{-\sqrt[4]{y-1}, \sqrt[4]{y-1}\}$ para $y \in C$, é localmente limitada em C .

Agora, obtemos resultados mais fortes supondo que o operador F satisfaz uma hipótese forte.

Teorema 3.2.6. *Assuma que a condição A2 é verificada com respeito ao conjunto $Sol(PDVG)$. Se as outras hipóteses do Teorema 3.2.5 são satisfeitas, então, existe uma solução \tilde{u} de (PDVG) tal que a seqüência $\{G(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ inteira converge a $G(\tilde{u})$.*

Prova. Pelo Teorema 3.2.5, existe uma subseqüência $\{u^{j_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\{u^j\}_{j \in \bar{\mathbb{N}}}$, tal que ela converge a uma solução \tilde{u} . Pela continuidade de G , temos que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|G(u^{j_i}) - G(\tilde{u})\| = 0. \quad (3.28)$$

Como, vale a condição A2 para \tilde{u} , o Teorema 3.2.2 implica que a seqüência $\{\|G(u^k) - G(\tilde{u})\|_D\}$ inteira é convergente. Logo, por (3.28) deve ser

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|G(u^k) - G(\tilde{u})\| = 0. \quad (3.29)$$

Desse modo, concluímos que a seqüência $\{G(u^k)\}$ inteira converge a $G(\tilde{u})$. \square

Teorema 3.2.7. *Assuma as hipóteses consideradas no Teorema 3.2.6. Então, o conjunto dos pontos de acumulação da seqüência $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ inteira é não-vazio e está contido em $Sol(PDVG)$.*

Prova. Pelo Teorema 3.2.6 existe uma solução de (PDVG) \tilde{u} tal que $\{G(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $G(\tilde{u})$. Pelo Teorema 3.2.5, o conjunto dos pontos de acumulação de $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é não-vazio. Seja \hat{u} um ponto limite de uma subseqüência $\{u^{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Então, pela continuidade de G , temos que

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} G(u^{k_i}) = G(\hat{u}) = G(\tilde{u}).$$

Agora, considerando A2 com respeito a $\tilde{u} \in Sol(PDVG)$ e tomando $u = \hat{u}$ em (3.3) temos que $F(\hat{u}) = F(\tilde{u})$. Portanto, $R(\hat{u}) = R(\tilde{u}) = 0$. Logo, pelo Corolário 2.1.1, \hat{u} é uma solução de (PDVG). A prova está completa. \square

Observe que no Exemplo 3.2.1, $\tilde{u} = \pi$ é uma solução de (PDVG), mas a hipótese A2 não é satisfeita para esse ponto.

Finalmente, obtemos que a seqüência $\{u^k\}$ inteira converge para uma solução de (PDVG), considerando condições fortes sobre G , mais precisamente, a existência e continuidade do operador inverso em C , isto é, se a seqüência $\{y^k\} \subset C$ converge a y , então, $\{G^{-1}(y^k)\}$ converge a $G^{-1}(y)$. Essas condições são usuais e podem ser encontradas, por exemplo, em [10, 11, 46, 55]. Em [27] e [59], a convergência das iteradas têm sido estabelecida sob a hipótese de não-singularidade (em $G + F$ ou G , respectivamente) que implica na existência e continuidade do operador considerado.

Teorema 3.2.8. *Assuma que a condição A2 é verificada com respeito ao conjunto $Sol(PDVG)$. Se as outras hipóteses do Teorema 3.2.3 são satisfeitas e G^{-1} é um operador contínuo em C , então, a seqüência $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gerada pelo Algoritmo PPM converge para uma solução de (PDVG).*

Prova. Seja G^{-1} um operador contínuo em C . Como C é um conjunto fechado, segue que G^{-1} é localmente limitado em C . Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.2.6 para concluir que existe $\tilde{u} \in Sol(GVI)$ tal que a seqüência $\{G(u^k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ inteira converge a $G(\tilde{u})$. Da continuidade de G^{-1} em C , concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = \tilde{u} \in Sol(GVI).$$

A prova está completa. \square

Observação 3.2.2. Quando G é inversível, encontrar $G(\bar{u})$ tal que $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$ é equivalente a resolver um problema de desigualdade variacional clássico definido pelo operador $F \circ G^{-1}$ e o conjunto de restrições C .

Observação 3.2.3. A estrutura do Algoritmo PPM e sua análise convergência, nos permitem, com poucas modificações, substituir o parâmetro fixo α por uma seqüência $\{\alpha_k\}$ verificando as seguintes condições:

$$i) \quad 0 \leq \alpha_k \leq 2\beta\lambda_{\min}(D) \quad ii) \quad \exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \alpha \quad iii) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k |\alpha_k - \alpha| < +\infty.$$

3.3 Experiências numéricas

Nesta seção, apresentamos nossos experimentos numéricos. O primeiro problema ilustra a performance do algoritmo considerando aproximações poliedrais internas do conjunto de restrições. A motivação do segundo exemplo é aplicar o algoritmo a um problema onde o operador F não é monótono, mas, é G -cocoercivo com respeito a uma solução. No terceiro problema, consideramos um Problema de Complementaridade Generalizada definido em [65]. Finalmente, resolvemos um problema, considerado em [59], usando três métricas diferentes. Para os últimos dois problemas apresentamos uma comparação do Algoritmo PPM com o Algoritmo 2.3.3 analisado em [27] e Algoritmo 2.3.2 em [59]. Como pode ser visto no Capítulo 2, o método dado em [27] usa apenas uma projeção e gera a seqüência $\{(G + F)(u^k)\}$ ao invés de $\{G(u^k)\}$. O esquema definido em [59], considera duas projeções e uma busca linear. As implementações foram feitas em MATLAB 6 e executadas em um computador IBM Pentium II com Windows 98. Escolhemos dois critérios de parada:

- a) $\max\{\|R_k(u^k)\|_D, d_k\} < 10^{-8}$, onde d_k é a distância entre C e C_k ;
- b) Número máximo de iterações (Iter.) igual a 1000.

Se o processo iterativo parar pela condição a) apresentamos o número de iterações, caso contrário, mostramos a norma do resíduo $\|R_{1000}(u^{1000})\|_D$. Observe que, se $C_k \equiv C$, então, $d_k \equiv 0$.

Exemplo 3.3.1. ((PDVG) não-linear com restrições convexas) O problema seguinte ilustra o comportamento do Algoritmo PPM, quando o conjunto de restrições C não é uma bola ou uma caixa. Consideramos o (PDVG) definido por

$$F(u_1, u_2) = (u_2, -u_1), \quad G(u_1, u_2) = \begin{cases} (u_2^2, -u_1) & \text{if } u_2 \geq 0 \\ (0, -u_1), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $C = \{v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2: h_i(v) \leq 0, \quad i = 1, \dots, 4\}$ com $h_1(v) = -v_1 + 1$, $h_2(v) = v_1 - 5$, $h_3(v) = v_2 - 16$, $h_4(v) = (v_1 - 1)^2 - v_2$.

O operador F é G -cocoercivo em C módulo $\beta = 1$ com respeito a $Sol((PDVG)) = \{(0, 1)\}$. Definimos C_0 como o fecho convexo de seis pontos pertencendo a fronteira de C , $C_0 = conv\{p_0, \dots, p_5\}$, $p_i \in \partial C$ (fronteira de C), $i = 0, \dots, 5$. Dado C_k , o conjunto C_{k+1} é definido por $C_{k+1} := conv\{C_k, p_{k+6}\}$ onde $p_{k+6} \in \partial C$. Uma escolha adequada de $p_i \in \partial C$ implica que a condição R3 é satisfeita. Tome $\alpha \in (0, 2)$, $\lambda_k = \frac{k}{k+1}$, $D = I$ e o ponto inicial $u^0 = (-9, \sqrt{3})$. A Tabela 3.1 mostra o comportamento do algoritmo com a variação do parâmetro α .

Tabela 3.1: (PDVG) Não-linear com restrições convexas

α	$\ R_k(u^k)\ $	d_k	Iter.
0.3	$8.9959e - 009$	$9.2151E - 009$	60
0.5	$1.2442e - 009$	$9.3789E - 009$	37
1.0	$6.6168e - 043$	$9.3789E - 009$	37
1.5	$6.5389e - 043$	$9.3789E - 009$	37
1.9	$6.5389e - 043$	$9.3789E - 009$	37

Exemplo 3.3.2. (Problema não-monótono)

Neste problema, o operador F é G -cocoercivo em C módulo 1 com respeito a solução $\bar{u} = (0, \dots, 0)$. Entretanto, o operador F não é G -monótono ou mesmo G -pseudomonótono em C . Definimos F, G e C por

$$F(u_1, \dots, u_n) = (e^{u_1} \sin(u_1), \dots, e^{u_n} \sin(u_n)),$$

$$G(u) = Au = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 8 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 8 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

e $C = A([0, \pi]^n)$.

Aqui $C_k \equiv C$, $D = I$, $\lambda_k = \frac{k}{k+1}$, $\beta = 1$ e $\alpha = 2$. Quando o Algoritmo 2.3.2 é aplicado a este exemplo (de um modo heurístico, já que o problema não é monótono) o método converge para uma solução usando três vezes o número de iterações do Algoritmo PPM. Observamos também que o Algoritmo 2.3.3 é difícil de ser aplicado

neste problema devido a necessidade de inversão de $G + F$. Tabela 3.2 apresenta o número de iterações para dimensões diferentes, a norma do resíduo de projeção $\|R_\alpha(u^k)\|$ e o erro entre a última iterada e a solução do problema, $\|u^k - \bar{u}\|$.

Tabela 3.2: Problema não-monótono

Dim.	Iter.	$\ u^k - \bar{u}\ $	$\ R_\alpha(u^k)\ $
10	91	$3.9908E - 009$	$9.9711E - 009$
20	94	$3.3037E - 009$	$8.2444E - 009$
50	96	$3.5852E - 009$	$8.9426E - 009$
80	97	$3.6927E - 009$	$9.2098E - 009$
100	98	$3.3275E - 009$	$8.2988E - 009$
200	99	$3.8116E - 009$	$9.5059E - 009$

Exemplo 3.3.3. (Problema de Complementaridade Implícita) *Este problema de complementaridade generalizada foi sugerido por Outrata e Zowe [65]. Os operadores F , G e conjunto C são definidos por*

$$F(u) = Au + b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$G(u) = u - \phi(Au + b)$ onde $\phi_i(v) = -0.5 - v_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, e $C = \{u \in \mathbb{R}^4 : u \geq 0\}$.

Escolhemos $C_k \equiv C$, $D = I$, $\beta = 0.0436$, $\alpha = 0.0873$, $\lambda_k = \frac{k}{k+1}$. Para o Algoritmo 2.3.3, tomamos $D = I$, $\gamma = 1$ e para o Algoritmo 2.3.2 consideramos $\gamma = 0.8$, $\rho = 1$, $\sigma = 0.5$. Usamos os mesmos três pontos iniciais sugeridos em [65]. A Tabela 3.3 mostra o comportamento dos métodos com os diferentes pontos iniciais. Além disso, os resultados de nossa abordagem são comparáveis com os resultados do Algoritmo 2.3.3 e são, muito superiores aos resultados obtidos pelo Algoritmo 2.3.2. Na verdade, o último algoritmo requer mais que 1000 iterações para satisfazer o primeiro critério de parada.

Exemplo 3.3.4. ((PDVG) com restrições numa caixa) *Este problema é uma desigualdade variacional geral com $F(u) = u$, $G(u) = Au + q$, onde*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & -2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tabela 3.3: Problema de Complementaridade Implícita

Ponto inicial	Alg.2.3.3	Alg.2.3.2	PPM
(0.0, 0.0, 0.0, 0.0)	23	0.0073	33
-(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	20	0.0044	22
-(1.0, 1.0, 1.0, 1.0)	23	0.0043	16

$$e C = \{v \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq v_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Usamos $C_k \equiv C$, $\beta = 3$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 6.9798$, $\alpha_3 = 0.8888$, $\lambda_k = \frac{k}{k+1}$ e o ponto inicial $x^0 = -A^{-1}q$ sugerido em [59]. Para melhorar a velocidade de convergência, consideramos as métricas $D_1 = I$, $D_2 = \frac{1}{2}[A^{-1} + (A^{-1})^T] + I$, $D_3 = \frac{1}{2}[(I + A)^{-1} + ((I + A)^{-1})^T]$. Tomamos $\gamma_1 = 0.5, \gamma_2 = \gamma_3 = 1.9$ para o Alg. 2.3.3. Na Tabela 3.4, apresentamos os resultados obtidos pelo Alg. 2.3.3 e o Alg. PPM. Também incluímos os resultados do Alg. 2.3.2 apresentados em [59].

Tabela 3.4: (PDVG) com restrições numa caixa

Dim.	Alg.2.3.3			Alg.2.3.2		PPM	
	D_1	D_2	D_3	D_1	D_1	D_2	D_3
10	42	54	30	492	22	12	12
20	42	54	30	489	22	13	12
50	42	54	30	484	22	13	13
80	42	54	31	481	22	13	13
100	42	54	31	480	22	13	13
200	42	54	31	476	22	13	13

Capítulo 4

Problema de Desigualdade Variacional Geral em espaços de Hilbert

Neste capítulo, estabelecemos um esquema de aproximações para resolver o problema de Desigualdade Variacional Geral em espaços de Hilbert. Analisamos a convergência das seqüências $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, onde $\{u^n\}$ é a seqüência de soluções dos subproblemas do esquema proposto, e, sempre que possível, comparamos as nossas hipóteses com aquelas existentes na literatura, por exemplo [1, 2, 28, 29, 32, 36, 42, 44, 61, 72]. Pelo que sabemos, este é o primeiro trabalho a apresentar um esquema genérico de aproximações para o Problema de Desigualdade Variacional Geral (PDVG) e para Problemas de Desigualdades Variacionais clássicas (PDV), isto é, a formulação proposta nos permite incluir, por exemplo, aproximações no mesmo espaço do problema original [2, 36, 42, 44, 61, 72] e aproximações cujos subproblemas são resolvidos em espaços de dimensão finita [1, 28, 29, 32].

Para facilitar a leitura, lembramos o problema estudado:

$$(PDVG) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{u} \in \mathcal{H}, & G(\bar{u}) \in C \text{ tal que} \\ \langle F(\bar{u}), G(u) - G(\bar{u}) \rangle \geq 0 & \forall G(u) \in C, \end{cases}$$

onde $C \subseteq \text{Im}(G)$.

4.1 Um esquema de aproximações

Consideramos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um espaço de Hilbert \mathcal{H}_n , operadores F_n, G_n definidos em \mathcal{H}_n com valores em \mathcal{H} e subconjuntos C_n de \mathcal{H}_n . As seqüências de operadores $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e de conjuntos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisfazem as seguintes condições:

A1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, C_n é um subconjunto convexo fechado e não-vazio de \mathcal{H}_n ($C_n \in CCFN(\mathcal{H}_n)$) e $C_n \subseteq \text{Im}(G_n)$;

A2. A seqüência $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a C no sentido de Mosco ($\{C_n\}$ é M-convergente a C ou $C_n \xrightarrow{M} C$, [49]) isto é:

- (i) Para cada $z \in C$, existe $\{z^n \in C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z^n \rightarrow z$;
- (ii) Se $\{z^{n_j} \in C_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ satisfaz $z^{n_j} \rightarrow z \in \mathcal{H}$, então $z \in C$.

O problema (PDVG) é aproximado pela seguinte seqüência de desigualdades variacionais gerais:

$$(PDVG)_n \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u^n \in \mathcal{H}_n, \quad G_n(u^n) \in C_n \text{ tal que} \\ \langle F_n(u^n), G_n(w) - G_n(u^n) \rangle \geq 0 \quad \forall G_n(w) \in C_n, \end{array} \right. \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

Observação 4.1.1. *Em relação as condições A1, A2 temos que:*

- *A condição A1 não é restritiva, uma vez que é natural pedir aos subproblemas as mesmas propriedades requeridas ao problema original ou ainda condições mais fortes (veja por exemplo [2, 42]). Em particular, esta condição nos permite aplicar o Corolário 2.1.1 e obter a equivalência entre o problema $(PDVG)_n$ e o seguinte problema:*

$$\text{Encontrar } u^n \in \mathcal{H}_n : G_n(u^n) - P_{C_n}[G_n(u^n) - \mu F_n(u^n)] = 0, \quad (4.2)$$

para todo $\mu > 0$. Quando o problema $(PDVG)$ é uma desigualdade variacional ($G \equiv I, G_n \equiv I$), esta equivalência é automaticamente satisfeita, dado que $C_n \subseteq \mathcal{H}_n = \text{Im}(I)$, onde I é o operador identidade no espaço adequado, \mathcal{H} ou \mathcal{H}_n .

Lembramos que a equação (4.2) é usada como motivação para definição de algoritmos baseados em projeções para resolver problemas de desigualdades variacionais gerais, veja por exemplo [72] e suas referências;

- *Como já foi dito no Capítulo 3, a condição A2 é importante quando o conjunto de restrições não tem uma estrutura especial, como uma bola ou uma caixa. Neste caso, se escolhidos os subconjuntos C_n de maneira conveniente, torna-se mais fácil resolver numericamente os subproblemas $(PDVG)_n$ do que o problema original com o conjunto de restrições C .*

Este esquema de aproximações é bem geral. Com efeito, ele inclui muitos dos métodos de resolução do (PDVG), que aparecem na literatura e usam técnicas diferentes como aproximações no mesmo espaço (perturbações regulares ou não) ou em

espaços de dimensão finita (como aproximações de Galerkin). No exemplo seguinte mostramos como o Algoritmo PPM, analisado no Capítulo 3, pode ser inserido na família de problemas $(PDVG)_n$.

Exemplo 4.1.1. *Seja $\mathcal{H}_n \equiv \mathcal{H}$ ($\dim(\mathcal{H}) < +\infty$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos os operadores G_n , F_n e conjuntos C_n a partir da iteração do PPM. De fato,*

$$G(u^n) = (1 - \lambda_{n-1})G(u^{n-1}) + \lambda_{n-1}P_{\Omega_{n-1}}^D[G(u^{n-1}) - \rho D^{-1}F(u^{n-1})] \quad (4.3)$$

onde

- $\rho \in \mathbb{R}_{++}$ e D é uma matriz simétrica definida positiva;
- $0 < \lambda_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\Omega_{n-1} \subseteq \Omega_n \subseteq \dots \subseteq C \subseteq \text{Im}(G)$ e $\Omega_n \xrightarrow{M} C$.

Usando a equação (4.3) obtemos

$$\frac{G(u^n) + (\lambda_{n-1} - 1)G(u^{n-1})}{\lambda_{n-1}} = P_{\Omega_{n-1}}^D[G(u^{n-1}) - \rho D^{-1}F(u^{n-1})]. \quad (4.4)$$

Definimos $C_n := \Omega_{n-1}$ e o operador G_n por

$$G_n(u) := \frac{G(u) + (\lambda_{n-1} - 1)G(u^{n-1})}{\lambda_{n-1}}.$$

Pela caracterização da projeção em C_n e usando (4.4), sabemos que o ponto $G_n(u^n)$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\langle G_n(u^n) - [G(u^{n-1}) - \rho D^{-1}F(u^{n-1})], D(w - G_n(u^n)) \rangle \geq 0 \quad \forall w \in C_n. \quad (4.5)$$

Usando a simetria de D e multiplicando (4.5) por ρ^{-1} obtemos um candidato natural a $F_n(\cdot)$, isto é,

$$F_n(u) := D\rho^{-1} \{G_n(u) - [G(u^{n-1}) - \rho D^{-1}F(u^{n-1})]\}$$

Portanto, a iteração (4.3) é reescrita como

$$\text{Encontrar } u^n \in H, G_n(u^n) \in C_n \text{ tal que } \langle F_n(u^n), w - G_n(u^n) \rangle \geq 0 \quad \forall w \in C_n.$$

A condição A2 é assumida no Algoritmo PPM. Desse modo, o problema acima é equivalente ao $(PDVG)_n$ desde que a condição A1 seja satisfeita. Como $C_n =$

$\Omega_{n-1} \in CCFN(\mathcal{H})$, se $w \in C_n \subseteq C$, é suficiente exibir $u \in \mathcal{H}_n \equiv \mathcal{H}$ tal que $G_n(u) = w$. Com efeito, como $G(u^{n-1}) \in C$ e $0 < \lambda_{n-1} < 1$ então

$$(1 - \lambda_{n-1})G(u^{n-1}) + \lambda_{n-1}w \in C$$

Logo, usando que $C \subseteq \text{Im}(G)$, existe $u \in \mathcal{H}$ tal que

$$G(u) = (1 - \lambda_{n-1})G(u^{n-1}) + \lambda_{n-1}w \Leftrightarrow w = \frac{G(u) + (\lambda_{n-1} - 1)G(u^{n-1})}{\lambda_{n-1}} = G_n(u).$$

Portanto, concluímos que o Algoritmo PPM pode ser inserido no esquema $(PDVG)_n$.

Observação 4.1.2. *Ilustramos a seguir outros métodos para resolver os problemas $(PDVG)$ ou (PDV) que estão incluídos no esquema:*

1. *Desigualdades variacionais gerais ($G \neq I$).*

Vejamos os seguintes exemplos:

- *Em He [27], a versão exata do algoritmo analisado satisfaz as condições A1 e A2 e pode ser inserida na família de problemas $(PDVG)_n$. De fato, neste método tem-se $C_n \equiv C \subseteq \mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ e portanto a condição A2 é satisfeita. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o autor assume a existência de solução para o seguinte sistema de equações, que corresponde à iteração do algoritmo:*

$$(G+F)(u) = (G+F)(u^{n-1}) - \gamma \delta(u^{n-1}) D^{-1} \{G(u^{n-1}) - P_C[G(u^{n-1}) - F(u^{n-1})]\},$$

onde D é uma matriz simétrica definida positiva, $\gamma \in (0, 2)$ e

$$\delta(v) = \frac{\|G(v) - P_C[G(v) - F(v)]\|^2}{\langle G(v) - P_C[G(v) - F(v)], D^{-1}\{G(v) - P_C[G(v) - F(v)]\} \rangle}.$$

Desse modo, existe $u \in \mathcal{H}$ verificando

$$\frac{D[(G+F)(u) - (G+F)(u^{n-1})]}{\gamma \delta(u^{n-1})} + G(u^{n-1}) = P_C[G(u^{n-1}) - F(u^{n-1})]. \quad (4.6)$$

Logo, definindo $G_n(u)$ como o lado esquerdo da equação (4.6), vale a condição A1, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $C_n \equiv C \subseteq \text{Im}(G_n)$.

Por outro lado, usando a caracterização de projeção na equação

$$G_n(u) = P_C[G(u^{n-1}) - F(u^{n-1})],$$

obtemos a expressão do operador F_n , $F_n(u) := F(u^{n-1}) + G_n(u) - G(u^{n-1})$;

- Em Noor [61], onde $\mathcal{H}_n \equiv \mathcal{H}$, as condições A1 e A2 são satisfeitas, uma vez que $C_n \equiv C$, $G_n \equiv G$ e $C \subseteq \text{Im}(G)$. Podemos recuperar os subproblemas (4.1) definindo os operadores F_n como:

- Algoritmo 3.1: $F_n(u) := F(u^{n-1}) + \rho^{-1} [G(u) - G(u^{n-1})]$;
- Algoritmo 7.1: $F_n(u) := F(u) + \rho^{-1} [G(u) - G(u^{n-1})]$;
- Algoritmo 7.3: $F_n(u) := F(u) + \rho^{-1} \{G(u) - G(u^{n-1}) + \alpha_{n-1} [G(u^{n-1}) - G(u^{n-2})]\}$.

Sendo $\rho > 0$, $\alpha_{n-1} \in [0, 1]$ coeficientes considerados em [61];

- Em Xiu-Zhang-Noor [82, Algoritmo 3.2, p.760], a condição A2 é satisfeita, pois $C_n \equiv C \subseteq \mathbb{R}^n$. Reescrevemos esse esquema, definindo subproblemas (4.1) com os seguintes operadores G_n, F_n :

$$G_n(u) := u - u^{n-1} + G(u^{n-1}), \quad F_n(u) := F(u^{n-1}) + \rho^{-1} [G_n(u) - G(u^{n-1})]$$

É fácil ver que G_n é sobrejetivo. De fato, na n -ésima iteração o termo $[u^{n-1} - G(u^{n-1})]$ é uma constante, isto é, o operador G_n é uma translação. Logo, vale A1.

2. *Desigualdades variacionais: Métodos que consideram aproximações no mesmo espaço do problema original ($\mathcal{H}_n \equiv \mathcal{H}, G \equiv I, G_n \equiv I$).*

Neste caso, a família de problemas $(PDVG)_n$ consiste em aproximações do operador F e do conjunto de restrições C . A seguir, apresentamos alguns exemplos de algoritmos da literatura que verificam o esquema proposto, considerando o caso em que o operador F envolvido é ponto-ponto. Lembramos que a hipótese A1 é sempre satisfeita, uma vez que, $C_n \subseteq \text{Im}(G_n) = \text{Im}(I) = \mathcal{H}$.

- Em Alber-Butnariu-Ryazantseva [2], a condição A2 é assumida explicitamente. Os autores definem as regularizações de F , o operador do problema, por $F_n := (A_n + \alpha_n J)$, onde A_n tem as mesmas propriedades de F (monótono e *sw-demifechado*), $\{\alpha_n \in \mathbb{R}_{++}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a zero e J é a aplicação de dualidade;
- Em Kaplan-Tichatschke [36], é considerado um esquema (no caso exato) de aproximações externas do conjunto C por conjuntos convexos e fechados C_n , $n \in \mathbb{N}$, no espaço \mathcal{H} . A condição A2-i é automaticamente verificada, pois, como $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, dado $z \in C$, a seqüência $z^n \equiv z$ converge

fortemente a z . Por outro lado, as hipóteses dadas na p.525 em [36] incluem a condição A2-ii, isto é, se $\{z^{n_j} \in C_{n_j}\}$ converge fracamente a z , então $z \in C$. A regularização do operador F é uma generalização do Método do Ponto Proximal, e tem as seguintes características: $F_n := (F - \tilde{F})_{\epsilon_n} + \tilde{F} + \mu_n(\nabla h(\cdot) - \nabla h(u^n))$, onde \tilde{F} é um operador contínuo tal que $F - \tilde{F}$ é monótono. A notação F_ϵ é usada para denominar o alargamento* do operador F , $\{\mu_n \in \mathbb{R}_{++}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e h é um funcional contínuo convexo e diferenciável, no sentido de Gâteaux, em $\text{int}(D(h))$;

- Em Lignola-Morgan [42], a condição A2 é assumida explicitamente. O operador F é aproximado por uma seqüência de operadores uniformemente limitados $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- Em Liu-Nashed [44], a condição A2 também é assumida explicitamente. O operador $F(u) - f$, onde $f \in \mathcal{H}$, é aproximado por uma seqüência de operadores $F_n(u) = F(u) + \epsilon_n u - f_{\epsilon_n}$, com $\epsilon_n > 0$ e $\|f - f_{\epsilon_n}\| \leq \epsilon_n$;
- Em Scheimberg-Nguyen-Strodiot [47], quando o problema é aproximado por um esquema onde a condição A2 é assumida explicitamente. Cada subproblema é resolvido usando uma aproximação do operador F definida por $F_n(u) := \mu_n F(u^{n-1}) + \nabla h_n(u) - \nabla h_n(u^{n-1})$, onde $\mu_n > 0$ e h_n é um funcional diferenciável e fortemente convexo, para cada $n \in \mathbb{N}$;
- Em Burachik-Scheimberg [14], a condição A2 é válida, pois $C_n \equiv C$. A regularização do operador F é definida por $F_n(u) := F(u) + \mu_n(\nabla h(u) - \nabla h(u^{n-1}))$, onde $\mu_n > 0$ e h é uma função de Bregman.

3. Desigualdades variacionais: Métodos que consideram aproximações em espaços diferentes do original ($\mathcal{H}_n \neq \mathcal{H}$).

Estes métodos são, geralmente, aplicados em um espaço de Hilbert separável, \mathcal{H} , onde a seqüência de aproximações $\{\mathcal{H}_n\}$ pode ser obtida usando uma Base de Galerkin (veja Seção 1.4). Neste caso, cada um dos problemas $(PDVG)_n$ tem dimensão finita. Lembremos, novamente, que para métodos de desigualdades variacionais, a condição A1 é satisfeita, pois $G_n \equiv I$, além disso:

- Em Huang-Zhou [28] e em Isac [29], os autores resolvem um problema de desigualdade variacional sobre um cone C convexo fechado satis-

* $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$, $\epsilon \geq 0$, $T_\epsilon(x) := \{u \in \mathcal{H} : \langle v - u, y - x \rangle \geq -\epsilon \forall y \in \mathcal{H}, v \in T(y)\}$, veja [15].

fazendo $C \cap (-C) = \{0\}$, ou seja, um problema de complementaridade não-linear. O conjunto C é aproximado por uma seqüência de cones $\{C_n \in CCFN(\mathcal{H}) : C_n \cap (-C_n) = \{0\}\}_{n \in \mathbb{N}}$, com as seguintes propriedades:

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{C_n}(x) = x, \forall x \in C$; (b) $C_n \subset C$; (c) $\dim(\text{aff}(C_n)) < +\infty$.

Por (a) vale a condição A2-i, e por (b), vale a condição A2-ii. Os operadores dos problemas aproximados (veja [29, problema (1), p.567]), são os mesmos do problema original;

- Em Adly-Goeleven [1], a convergência dos conjuntos é definida no sentido de Glowinski (ver Definição 1.4.4 no Capítulo 1). Conforme a Proposição 1.4.2 no Capítulo 1, este conceito coincide com a convergência Mosco. Logo, a condição A2 é satisfeita. As aproximações do operador $F(u) := Au - f, f \in \mathcal{H}$, são definidas por $F_n(u) = Au + \epsilon_n u$, onde, $\epsilon_n > 0$;
- Em Jingan-Yiqiang-Chunlei [32], os autores resolvem um problema de obstáculo, modelado como uma desigualdade variacional, através de aproximações de dimensão finita. De acordo com o Exemplo 1.3.1, a seqüência de conjuntos $\{C_n = P_n C\}$, onde $C_n \subset C$ e $P_n: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n$ é o operador de projeção ortogonal em \mathcal{H}_n , converge para C no sentido de Mosco, portanto vale A2. O operador $F = A - B$ do problema analisado não é aproximado;
- Em Spann [75], o Lema 3.2 p. 108, ítem (d), implica em A2-ii. Entretanto, dado $v \in C$, o autor assume, apenas, a existência de uma subseqüência $\{v_{n_j} \in C_{n_j}\}$, que converge fortemente a v (veja [75, condição 3.2, p. 106]). Portanto, a condição A2 é mais forte.

4.2 Análise de convergência

Inicialmente, estabelecemos que os pontos de acumulação fracos da seqüência $\{G_n(u^n)\}$, onde u^n é uma solução do problema $(PDVG)_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, são G -soluções do problema $(PDVG)$, isto é, para cada \bar{g} ponto de acumulação fraco de $\{G_n(u^n)\}$, existe $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$ tal que $\bar{g} = G(\bar{u})$. Sob hipóteses adicionais, obtemos a convergência fraca da seqüência toda para uma G -solução de $(PDVG)$ e, em seguida, obtemos que todo ponto de acumulação fraco de $\{u^n\}$ é uma solução de $(PDVG)$. Na segunda parte, obtemos resultados que garantem a existência de

pontos de acumulação fracos das seqüências $\{G_n(u^n)\}$ e $\{u^n\}$.

Em nossa análise, consideramos as seguintes condições envolvendo as seqüências $\{F_n\}$, $\{G_n\}$ e $\{C_n\}$ e os subproblemas $(PDVG)_n$ do esquema definido na seção anterior.

A3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto solução do problema $(PDVG)_n$ é não-vazio;

A4. Seja uma seqüência $\{v^n \in G_n^{-1}(C_n)\}$, com $G_n(v^n) \rightarrow \bar{g}$, para algum $\bar{g} \in Im(G)$.

$$\text{Se } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \langle F_n(v^n), G_n(v^n) - P_{C_n}(\bar{g}) \rangle \leq 0, \quad (4.7)$$

então, existe $\bar{v} \in G^{-1}(\bar{g})$, tal que

$$\langle F(\bar{v}), G(\bar{v}) - z \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \langle F_n(v^n), G_n(v^n) - P_{C_n}(z) \rangle \quad \forall z \in C. \quad (4.8)$$

Observação 4.2.1. *A teoria de existência de solução do Problema de Desigualdade Variacional Geral é discutida com mais detalhes no Capítulo 2. Em particular, o Teorema 2.2.3 garante a existência de solução do problema $(PDVG)_n$ sob a condição A1, e verificando as seguintes hipóteses:*

(i) F_n é G_n -fortemente monótono módulo $\alpha_n > 0$;

(ii) F_n é G_n -Lipschitziano módulo $\beta_n > 0$.

A seguir, mostramos que os subproblemas do Algoritmo PPM, vistos como problemas (4.1), satisfazem a condição A3.

Exemplo 4.2.1. *Lembremos que subproblemas do Algoritmo PPM podem ser reescritos como problemas $(PDVG)_n$ onde os operadores $G_n(\cdot)$ e $F_n(\cdot)$ são definidos por*

$$G_n(u) := \frac{G(u) + (\lambda_{n-1} - 1)G(u^{n-1})}{\lambda_{n-1}}, \quad F_n(u) := D\rho^{-1} [G_n(u) - G(u^{n-1})] + F(u^{n-1}).$$

Fixando $n \in \mathbb{N}$ e usando a equivalência das normas em espaços de dimensão finita, temos:

$$\begin{aligned} \langle F_n(u) - F_n(v), G_n(u) - G_n(v) \rangle &= \langle D\rho^{-1}[G_n(u) - G_n(v)], G_n(u) - G_n(v) \rangle \\ &= \rho^{-1} \|G_n(u) - G_n(v)\|_D^2 \\ &\geq \alpha_{(D,\rho)} \|G_n(u) - G_n(v)\|^2, \end{aligned}$$

e pela definição de F_n obtemos

$$\begin{aligned}\|F_n(u) - F_n(v)\|^2 &= \|D\rho^{-2}[G_n(u) - G_n(v)]\|^2 \\ &\leq \beta_{(D,\rho)}\|G_n(u) - G_n(v)\|^2\end{aligned}$$

Portanto, valem as condições (i) e (ii) da Observação 4.2.1. Logo, a condição A3 é satisfeita.

Observação 4.2.2. A condição A3 também é verificada nos seguintes algoritmos:

- Os operadores F_n, G_n definidos na Observação 4.1.2 e que correspondem aos trabalhos de [27], [61, Algoritmo 3.1] e [82, Algoritmo 3.2], satisfazem as seguintes propriedades:

$$\langle F_n(u) - F_n(v), G_n(u) - G_n(v) \rangle = \rho^{-1}\|G_n(u) - G_n(v)\|^2,$$

$$\|F_n(u) - F_n(v)\| = \rho^{-1}\|G_n(u) - G_n(v)\| \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Portanto, conforme a Observação 4.2.1 e as propriedades acima, a condição A3 é satisfeita;

- No caso de desigualdades variacionais, as aproximações regulares do tipo Tichonov (veja por exemplo [44] e suas referências), do tipo Proximal, por exemplo [2, 14], e que usam o princípio do problema auxiliar [35, 47] satisfazem a condição A3. Se os operadores F_n não são regularizações do operador F , a hipótese A3 é usualmente assumida, veja por exemplo [42, 48];
- Nas aproximações de dimensão finita consideradas em [1], os operadores F_n são regularizações de Tichonov. Em [28], o operador contínuo $F_n \equiv F$ satisfaz uma condição de coercividade que garante a existência de solução para os subproblemas. Portanto, nos dois casos a condição A3 é verificada;
- Em [32] e em [75], a existência de solução dos subproblemas de dimensão finita é assumida (Teorema 3.1, p. 789 e Teorema 3.1, p.107, respectivamente).

Em relação a condição A4, temos o seguinte comentário.

Observação 4.2.3. Comparamos a condição A4 com a pseudomonotonicidade no sentido de Brézis, definida para desigualdades variacionais clássicas [69], restrita ao caso em que o operador F é ponto-ponto. Para isso, consideramos o caso em que os problemas $(PDVG)_n$ coincidem com o problema original ($F_n \equiv F$, $C_n \equiv C$, $G = I$ e $G_n \equiv I$). Neste caso, o operador F é pseudomonótono no sentido de Brézis em C se, e somente se, ele satisfaz a condição A4.

Observação 4.2.4. *No caso de desigualdade variacional clássica ($G = I$), a condição de pseudomonotonicidade no sentido de Brézis do operador original é usada, por exemplo, para mostrar que os pontos de acumulação fracos da seqüência gerada pelo Método do Ponto Proximal são soluções do problema (veja, por exemplo, [14, Teorema 3.4, p.1643], [37, Lema 3, p.131] e [64, Teorema 3.6, p.78]). Essa propriedade é satisfeita por operadores monótonos maximais F tais que $D(F) = \mathcal{H}$, e também por operadores monótonos e hemicontínuos, [68, Proposição 1, p.106-107]. Além disso, a condição de pseudomonotonicidade no sentido de Brézis, é usada em [43, Teorema 8.1, p. 245], para mostrar a existência de solução de um problema de desigualdade variacional em um espaço de Banach separável, onde o conjunto de restrições é convexo fechado e limitado.*

A seguir, o primeiro resultado de convergência.

Teorema 4.2.1. *Assuma que as condições A1-A4 são satisfeitas. Então, os pontos de acumulação fracos de $\{G_n(u^n)\}$ são G -soluções de (PDVG).*

Prova. Seja $\bar{g} \in \mathcal{H}$ um ponto de acumulação fraco de $\{G_n(u^n)\}$, então existe uma subsequência $\{G_{n_j}(u^{n_j})\} \subseteq \{G_n(u^n)\}$ com $G_{n_j}(u^{n_j}) \rightharpoonup \bar{g}$. Por A2 e A1, temos que $\bar{g} \in C \subseteq \text{Im}(G)$ (em particular, $G^{-1}(\bar{g}) \neq \emptyset$).

Como u^{n_j} resolve o $(\text{PDVG})_{n_j}$ e a seqüência $\{P_{C_{n_j}}(\bar{g})\}$ satisfaz que $P_{C_{n_j}}(\bar{g}) \in C_{n_j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$, a condição A1 implica que $P_{C_{n_j}}(\bar{g}) = G_{n_j}(w^{n_j})$ para algum $w^{n_j} \in \mathcal{H}_{n_j}$ e resulta que

$$\langle F_{n_j}(u^{n_j}), G_{n_j}(u^{n_j}) - P_{C_{n_j}}(\bar{g}) \rangle \leq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

de onde obtemos que

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \langle F_{n_j}(u^{n_j}), G_{n_j}(u^{n_j}) - P_{C_{n_j}}(\bar{g}) \rangle \leq 0.$$

Pela condição A4 aplicada a seqüência $\{u^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, existe $\bar{u} \in G^{-1}(\bar{g})$ tal que

$$\langle F(\bar{u}), G(\bar{u}) - z \rangle \leq \liminf_j \langle F_{n_j}(u^{n_j}), G_{n_j}(u^{n_j}) - P_{C_{n_j}}(z) \rangle \quad \forall z \in C. \quad (4.9)$$

Usando, novamente, o fato de que u^{n_j} resolve o $(\text{PDVG})_{n_j}$, que $P_{C_{n_j}}(z) \in C_{n_j}$, e a condição A1 resulta que fixado $z \in C$ temos

$$\langle F_{n_j}(u^{n_j}), G_{n_j}(u^{n_j}) - P_{C_{n_j}}(z) \rangle \leq 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Logo, de (4.9) e (4.10) concluímos que

$$\langle F(\bar{u}), z - G(\bar{u}) \rangle \geq 0 \quad \forall z \in C. \quad (4.11)$$

Portanto, \bar{g} é uma G -solução do problema (PDVG). \square

Agora, estabelecemos um resultado muito importante em nossa análise.

Teorema 4.2.2. *Assuma que as condições A1-A4 são satisfeitas. Se a seqüência $\{G_n(u^n)\}_n$ é limitada, e o operador F é G -estritamente monótono em $G(\text{Sol}(PDVG))$, então, a seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para uma G -solução de (PDVG).*

Prova. Sejam \tilde{g} e \bar{g} dois pontos de acumulação fracos da seqüência $\{G_n(u^n)\}$. Pelo Teorema 4.2.1, existem $\tilde{u}, \bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$ tais que $G(\tilde{u}) = \tilde{g}$ e $G(\bar{u}) = \bar{g}$.

Logo, usando que F é G -estritamente monótono em $G(\text{Sol}(PDVG))$ e supondo $G(\tilde{u}) \neq G(\bar{u})$ temos

$$\begin{aligned} 0 &< \langle F(\bar{u}) - F(\tilde{u}), G(\bar{u}) - G(\tilde{u}) \rangle \\ &= \langle F(\bar{u}), G(\bar{u}) - G(\tilde{u}) \rangle - \langle F(\tilde{u}), G(\bar{u}) - G(\tilde{u}) \rangle \\ &= -\langle F(\bar{u}), G(\tilde{u}) - G(\bar{u}) \rangle - \langle F(\tilde{u}), G(\bar{u}) - G(\tilde{u}) \rangle \quad (4.12) \\ &= -[\langle F(\bar{u}), G(\tilde{u}) - G(\bar{u}) \rangle + \langle F(\tilde{u}), G(\bar{u}) - G(\tilde{u}) \rangle] \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é obtida usando que $\tilde{u}, \bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$. Por conseguinte, chegamos a uma contradição, que se deu ao assumirmos $G(\tilde{u}) \neq G(\bar{u})$. Portanto, a seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem apenas um ponto de acumulação fraco. Lembrando que $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, a prova está completa. \square

Observação 4.2.5. *De acordo com a desigualdade (4.12), o conjunto das G -soluções de um problema (PDVG) cujo operador F é G -estritamente monótono em $G(\text{Sol}(PDVG))$, é unitário.*

A seguir, estabelecemos condições para que os pontos limites fracos da seqüência $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sejam soluções do (PDVG).

A5. Se v é um ponto de acumulação fraco de $\{v^n\}$ e $G_n(v^n) \in C_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, então, $G(v)$ é um ponto de acumulação fraco de $\{G_n(v^n)\}$;

A6. Se $v \in \text{Sol}(PDVG)$ e $G(\bar{u}) = G(v)$, então, $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$.

Observação 4.2.6.

- No caso em que $G_n \equiv G$, se o operador G é injetivo e fracamente contínuo, então, as condições A5 e A6 são satisfeitas. Veja, por exemplo, o Algoritmo 7.1 em [61], onde G é um operador contínuo e o espaço \mathcal{H} tem dimensão finita;
- No Capítulo 3 e em [72], apresentamos um resultado de convergência onde é assumido que o operador F é G -cocoercivo com respeito ao conjunto $\text{Sol}(PDVG) \neq \emptyset$. Desse modo, se $v \in \text{Sol}(PDVG)$ e $G(\bar{u}) = G(v)$, então, $F(\bar{u}) = F(v)$. Portanto, a condição A6 é satisfeita;
- Quando o problema (PDVG) se reduz a um problema de desigualdades variacionais ($G \equiv I, G_n \equiv I$), as condições A5 e A6 são obviamente válidas.

Teorema 4.2.3. Assuma que as condições A1-A6 são satisfeitas. Então, todo ponto de acumulação fraco de $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma solução de (PDVG).

Prova. Seja $\bar{u} \in \mathcal{H}$ um ponto de acumulação fraco de $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então, existe uma subsequência $\{u^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $u^{n_j} \rightharpoonup \bar{u}$. Pela condição A5 vale que $G_{n_j}(u^{n_j}) \rightharpoonup G(\bar{u})$. Logo, usando o Teorema 4.2.1, $\bar{g} := G(\bar{u}) \in C$ é uma G -solução, isto é, existe $v \in \mathcal{H}$ tal que $G(v) = G(\bar{u})$ e $v \in \text{Sol}(PDVG)$. Pela condição A6, temos que $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$. A prova está completa. \square

A seguir, introduzimos uma condição sobre as seqüências $\{F_n\}$, $\{G_n\}$ e $\{C_n\}$, que junto com a condição A3 garante a existência de pontos de acumulação fracos da seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

A7. Existe um conjunto infinito de índices $J \subseteq \mathbb{N}$ e uma seqüência de números reais positivos $\{\alpha_n\}_{n \in J}$, tais que as seqüências de operadores $\{F_n\}_{n \in J}, \{G_n\}_{n \in J}$ e conjuntos $\{C_n\}_{n \in J}$ verificam a seguinte propriedade:

Se $u, v \in G_n^{-1}(C_n)$ e $\langle F_n(u), G_n(v) - G_n(u) \rangle \geq 0$, então,

$$\langle F_n(v), G_n(v) - G_n(u) \rangle \geq \alpha_n \|G_n(v) - G_n(u)\|^2.$$

Observação 4.2.7.

- Se F_n é G_n -fortemente monótono módulo $\alpha_n > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, então, vale A7. De fato, fixado $n \in \mathbb{N}$, se $u, v \in G_n^{-1}(C_n)$ e $\langle F_n(u), G_n(v) - G_n(u) \rangle \geq 0$, então,

$$\begin{aligned} \langle F_n(v), G_n(v) - G_n(u) \rangle &= \langle F_n(v) - F_n(u), G_n(v) - G_n(u) \rangle + \langle F_n(u), G_n(v) - G_n(u) \rangle \\ &\geq \alpha_n \|G_n(v) - G_n(u)\|^2 + \langle F_n(u), G_n(v) - G_n(u) \rangle \\ &\geq \alpha_n \|G_n(v) - G_n(u)\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, a condição A7 é verificada com $J = \mathbb{N}$;

- Conforme a Observação 4.1.2, [27], [61, Algoritmo 3.1], [71] e [82, Algoritmo 3.2], os operadores F_n são G_n -fortemente monótonos módulo $\alpha_n \equiv \rho^{-1}$, portanto, satisfazem a condição A7;
- Em [2], [44] e nas aproximações de dimensão finita de [1], como $G_n \equiv I$ e as regularizações do operador F são fortemente monótonas, a condição A7 é satisfeita;
- Quando $J = \mathbb{N}$, $G_n \equiv I$, $F_n \equiv F$, $C_n \equiv C$ e $\alpha_n \equiv \alpha > 0$, a condição A7 é equivalente a condição do operador F ser fortemente pseudomonótono em C (cf. [38, Definição 6.4, p.44]), isto é, existe $\alpha > 0$ tal que, para todo par de pontos distintos $u, v \in C$, temos que

$$\langle F(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle F(v), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|^2.$$

Teorema 4.2.4. *Assuma que as condições A1, A2, A3 e A7 são satisfeitas. Suponha que existe uma seqüência $\{v^n \in G_n^{-1}(C_n)\}$ tal que as seqüências $\{G_n(v^n)\}_{n \in J}$ e $\{\alpha_n^{-1} F_n(v^n)\}_{n \in J}$, são limitadas. Então, o conjunto de pontos de acumulação fracos da seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não-vazio.*

Prova. É suficiente mostrar que $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência limitada. De fato, suponha que existam subsequências $\{u^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{v^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{u^n\}_{n \in J}$, $\{v^n\}_{n \in J}$ tais que $\{G_{n_j}(u^{n_j}) = G_{n_j}(v^{n_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$, então, como $\{G_n(v^n)\}_{n \in J}$ é limitada, a prova está concluída. Assuma agora, que $\|G_n(v^n) - G_n(u^n)\| > 0 \quad \forall n \in J$.

Fixamos $n \in J$. Como u^n resolve o problema $(PDVG)_n$, e $G_n(v^n) \in C_n$ temos que

$$\langle F_n(u^n), G_n(v^n) - G_n(u^n) \rangle \geq 0. \quad (4.13)$$

Da Desigualdade de Cauchy-Schwartz e de A7, temos que

$$\begin{aligned} \|F_n(v^n)\| \|G_n(v^n) - G_n(u^n)\| &\geq \langle F_n(v^n), G_n(v^n) - G_n(u^n) \rangle \\ &\geq \alpha_n \|G_n(v^n) - G_n(u^n)\|^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Portanto, para cada $n \in J$, obtemos

$$\alpha_n^{-1} \|F_n(v^n)\| \geq \|G_n(v^n) - G_n(u^n)\|. \quad (4.15)$$

Como $\{\alpha_n^{-1} F_n(v^n)\}_{n \in J}$ e $\{G_n(v^n)\}_{n \in J}$ são seqüências limitadas, a desigualdade acima implica que $\{G_n(u^n)\}_{n \in J}$ é limitada. \square

Observação 4.2.8.

- *No caso de desigualdades variacionais gerais, decorre das Observações 4.1.2, 4.2.2 e 4.2.7, que as hipóteses do Teorema 4.2.4 são satisfeitas pelos operadores F_n, G_n correspondentes aos trabalhos de [27], [61, Algoritmo 3.1], [72] e [82, Algoritmo 3.2], desde que exista uma seqüência $\{G_n(v^n) \in C_n\}$ limitada tal que $\{F_n(v^n)\}$ também seja limitada. No próximo exemplo, discutimos o caso particular obtido a partir do algoritmo analisado em [72];*
- *Para desigualdades variacionais, o Teorema 4.2.4 generaliza o Lema 4.5 de [2]. De fato, lembrando da observação anterior e que os operadores aproximados de [2] são fortemente monótonos, a condição A7 é satisfeita. De acordo com a hipótese [2, Condição C2, p.275], existe uma seqüência limitada $\{v^n \in C_n\}$ tal que a seqüência $\{\alpha_n^{-1} F_n(v^n)\}$ é, também, limitada. Portanto, a outra hipótese do Teorema 4.2.4 é assumida.*

Exemplo 4.2.2. *Conforme a Observação 4.2.8, para aplicar o Teorema 4.2.4 e obter a limitação da seqüência $\{G_n(u^n)\}$, formada a partir das soluções dos problemas $(PDVG)_n$ correspondentes às iteradas do algoritmo PPM [72], falta verificar que existe uma seqüência $\{G_n(v^n) \in C_n\}$ limitada tal que $\{F_n(v^n)\}$ seja limitada. Assumindo as condições[†] requeridas em [72] e, escolhendo os parâmetros λ_n adequadamente, obtemos algo mais forte: (*) Existem seqüências $\{G_n(v^n) \in C_n\}$ limitadas. Além disso, se $\{G_n(v^n)\}$ é limitada, então, a seqüência $\{F_n(v^n)\}$ é limitada. De fato, assumindo a limitação de $\{G(u^n)\}$ e que $\lim \lambda_n = 1$, temos que:*

[†]Veja o Teorema 3.2.2 do Capítulo 3, que garante a limitação de $\{G(u^n)\}$.

(a) Dado $v \in G^{-1}(C_0)$, resulta que $G(v) \in C_n \forall n \in \mathbb{N}$, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G(v) + (\lambda_{n-1} - 1)G(u^{n-1})}{\lambda_{n-1}} = G(v),$$

em particular, $\{G_n(v) \in C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada.

(b) Pela G -cocoercividade de F com respeito a $\bar{u} \in \text{Sol}(PDVG)$, a limitação de $\{G(u^n)\}$ implica na limitação de $\{F(u^n)\}$. A conclusão da validade de (*) segue da expressão de $F_n(v^n)$,

$$F_n(v^n) = \rho^{-1}[G_n(v^n) - G(u^{n-1})] + F(u^{n-1}),$$

onde $\{G_n(v^n)\}$, $\{G(u^n)\}$ e $\{F(u^n)\}$ são limitadas.

Ainda no caso em que C não é limitado, introduzimos condições para a obtenção de um resultado de existência de pontos de acumulação fracos da seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, no caso de aproximações externas do conjunto C .

A8. O conjunto C satisfaz $C \subseteq C_n \forall n \in \mathbb{N}$. Além disso, para qualquer seqüência $\{z^n \in C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, existe uma seqüência $\{g^n \in C\}$ tal que $\{\|z^n - g^n\|\}$ é limitada;

A9. Existe um conjunto infinito de índices $J \subseteq \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in J$:

$$\langle F_n(v) - F(w), G_n(v) - G(w) \rangle \geq 0 \quad \forall G_n(v) \in C_n, G(w) \in C;$$

A10. Existe $w \in G^{-1}(C)$ tal que

$$F(w) \in \text{int}(0^+C)^*.$$

Observação 4.2.9.

- A condição A8 trata da precisão das aproximações C_n do conjunto de restrições C . É inspirada em Kaplan-Tichatschke [36, Hipótese A5 e comentário na p. 525];
- Para perceber as diferenças entre a condição A8, condição A2 e a convergência na métrica[‡] de conjuntos d_γ , consideremos dois casos de seqüências $\{z^n \in C_n\}$:

[‡]Definição 1.3.2 Capítulo 1, usada na convergência do algoritmo analisado no Capítulo 3.

- A seqüência $\{z^n \in C_n\}$ é limitada: Se \mathcal{H} tem dimensão finita, pelo Lema 1.3.1 a convergência Mosco (condição A2) implica na convergência da métrica d_γ para todo $\gamma > 0$ e seja $\bar{\gamma} > 0$ tal que $\|z^n\| \leq \bar{\gamma}, \forall n \in \mathbb{N}$, definimos $g^n := P_C z^n$ e obtemos que:

$$\|z^n - g^n\| = \|P_{C_n} z^n - P_C z^n\| \leq \sup_{\|z\| \leq \bar{\gamma}} \|P_{C_n}(z) - P_C(z)\| = d_{\bar{\gamma}}(C_n, C),$$

isto é, temos que $\{\|z^n - g^n\|\}$ converge a zero. No caso de dimensão infinita, devemos pedir que $\{d_\gamma(C_n, C)\}$ seja limitada para todo $\gamma > 0$, para obter a limitação de $\{\|z^n - g^n\|\}$;

- A seqüência $\{z^n \in C_n\}$ é ilimitada: Mesmo assumindo a condição de $\{d_\gamma(C_n, C)\}$ convergir a zero, para todo $\gamma > 0$ (que implica em A2), não há como garantir a validade da condição A8;
- Em [2], os autores consideram uma hipótese mais forte que A2, quando assumem a existência de uma seqüência de números reais que converge a zero mais rápido que $\{C_n\}$ converge Mosco a C . Porém, assim como em A2 ela não estabelece propriedades para o caso em que a seqüência $\{z^n \in C_n\}$ é ilimitada;
- A flexibilidade na escolha da aproximação $\{C_n\}$ do conjunto C é uma vantagem do esquema. Esta vantagem deve ser usada para construir C_n convenientemente e satisfazer as condições A2 e A8;
- No caso de $G \equiv I, G_n \equiv I$, a condição A9 é uma modificação de um tipo de monotonicidade considerada por Kaplan-Tichatschke [36, condição (2), p. 524]. Além disso, se $F_n = F$ e $C_n = C$, a condição A9 equivale a pedir que o operador F seja monótono em C ;
- A validade da condição A10 significa que existe $v \in G^{-1}(C)$ tal que:

$$\langle F(v), d \rangle > 0 \quad \forall d \in 0^+C,$$

onde 0^+C é o cone de recessão do conjunto C ,

$$\begin{aligned} 0^+C &= \{d \in \mathcal{H} : x + td \in C, \forall x \in C, \forall t > 0\} \\ &= \{d \in \mathcal{H}, \exists t_n \downarrow 0, \exists g^n \in C, t_n g^n \rightarrow d\}, \end{aligned}$$

veja por exemplo [5, notação C^∞ , p. 321]. Esta condição, foi usada em Pang-Yao [67, Proposição 3.11, p.177], juntamente com outras hipóteses, para mostrar existência de solução para o problema (PDVG) em dimensão finita.

No exemplo seguinte, obtemos a validade da condição A8 para uma seqüência de aproximações, $\{C_n\}$, de um conjunto C definido por restrições lineares em um espaço de dimensão finita.

Exemplo 4.2.3. *Seja um operador linear $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\text{posto}(A) = m < n$, seja $b \in \mathbb{R}^m$. Defina $C = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b\}$ e $C_n = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b + \epsilon_n\}$, onde $\{\epsilon_n\} \subset \mathbb{R}_+^m$ converge a zero. Então, $C \subseteq C_n$ e para $z^n \in C_n$, a seqüência $\{g^n := (z^n - A^T(AA^T)^{-1}\epsilon_n)\}$ satisfaz:*

$$Ag^n = A(z^n - A^T(AA^T)^{-1}\epsilon_n) = Az^n - \epsilon_n \leq b + \epsilon_n - \epsilon_n = b \Rightarrow \{g^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$$

e

$$\|z^n - g^n\| = \|A^T(AA^T)^{-1}\epsilon_n\| \Rightarrow \{\|z^n - g^n\|\} \text{ converge a zero.}$$

Teorema 4.2.5. *Se as condições A1, A2, A3, A8, A9 e A10 são satisfeitas, então, a seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subseqüência limitada.*

Prova. Vamos assumir que a seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não possua uma subseqüência limitada, que existe $w \in G^{-1}(C)$ verificando a condição A10, e chegar a uma contradição.

Com efeito, usando que u^n é solução do problema (PDVG) $_n$, que $G(w) \in C_n \forall n \in \mathbb{N}$ e a condição A9, existe um conjunto de índices $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \langle F(w), G(w) - G_n(u^n) \rangle &= \langle F_n(u^n), G(w) - G_n(u^n) \rangle + \langle F(w) - F_n(u^n), G(w) - G_n(u^n) \rangle \\ &\geq \langle F_n(u^n), G(w) - G_n(u^n) \rangle \\ &\geq 0 \quad \forall n \in J. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Sem perda de generalidade, suponha que

$$\|G_n(u^n)\| \xrightarrow{n \in J} +\infty, \text{ e que } \|G_n(u^n)\| > 0 \quad \forall n \in J. \tag{4.17}$$

Usando (4.16), temos que

$$\left\langle F(w), \frac{G_n(u^n) - G(w)}{\|G_n(u^n)\|} \right\rangle \leq 0 \quad \forall n \in J. \tag{4.18}$$

Como a seqüência $\left\{ \frac{G_n(u^n)}{\|G_n(u^n)\|} \right\}_{n \in J}$ é limitada, ela contém uma subseqüência fracamente convergente

$$\frac{G_{n_j}(u^{n_j})}{\|G_{n_j}(u^{n_j})\|} \rightharpoonup d, \tag{4.19}$$

para algum $d \in \mathcal{H}$.

Conforme a segunda parte da condição A8, temos que existe uma seqüência $\{g^n \in C\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\{G_n(u^n) - g^n\}$ é limitada. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{g^{n_j}}{\|G_{n_j}(u^{n_j})\|} &= \frac{g^{n_j} - G_{n_j}(u^{n_j}) + G_{n_j}(u^{n_j})}{\|G_{n_j}(u^{n_j})\|} \\ &= \frac{g^{n_j} - G_{n_j}(u^{n_j})}{\|G_{n_j}(u^{n_j})\|} + \frac{G_{n_j}(u^{n_j})}{\|G_{n_j}(u^{n_j})\|} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Logo, sabendo que a seqüência $\left\{ \frac{g^{n_j} - G_{n_j}(u^{n_j})}{\|G_{n_j}(u^{n_j})\|} \right\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge fortemente a zero e da definição de cone de recessão do conjunto C , 0^+C , temos que $d \in 0^+C$.

Passando ao limite em (4.18), nos termos da subseqüência e usando que a seqüência $\left\{ \frac{G(w)}{\|G_n(u^n)\|} \right\}$ converge fortemente a zero, obtemos que

$$\langle F(w), d \rangle \leq 0. \quad (4.21)$$

Pela definição de cone polar do cone convexo 0^+C , e de interior topológico, temos

$$\text{int}(0^+C)^* = \{f \in \mathcal{H} : \langle f, d \rangle > 0 \ \forall \ d \in 0^+C\}.$$

Portanto, $F(w) \notin \text{int}(0^+C)^*$, isto é, a condição A10 não é satisfeita.

A prova está concluída, uma vez que chegamos a uma contradição ao supor que $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ não tem subseqüência limitada. \square

Observação 4.2.10. *No teorema acima podemos substituir a condição A9 por uma condição mais fraca. De fato, é suficiente pedirmos a existência de um conjunto infinito de índices $J \subseteq \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in J$:*

Se $G_n(v) \in C_n, G(w) \in C$ e

$$\langle F_n(v), G(w) - G_n(v) \rangle \geq 0, \text{ então, } \langle F(w), G(w) - G_n(v) \rangle \geq 0.$$

Quando $F_n \equiv F, G_n \equiv G$ e $C_n \equiv C$, a condição A9 assim como a condição A7 são mais fortes que a hipótese do operador F ser G -pseudomonótono em C , veja por exemplo [12, 85].

Corolário 4.2.1. *Assuma que as condições do Teorema 4.2.4 (ou Teorema 4.2.5) são satisfeitas para $J = \mathbb{N}$. Então, a seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.*

Prova. É uma consequência direta do Teorema 4.2.4 (e do Teorema 4.2.5). \square

Nos resultados anteriores, estabelecemos a existência de um ponto de acumulação fraco da seqüência $\{G_n(u^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sob diferentes hipóteses. A seguir, apresentamos uma condição para existência de pontos limites fracos da seqüência $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

A11. Se a seqüência $\{G_{n_j}(v^{n_j}) \in C_{n_j}\}$ é limitada, então, a seqüência $\{v^{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ possui uma subseqüência limitada.

Observação 4.2.11.

- Se $G_n \equiv G$, $C_n \equiv C$ e a aplicação ponto-conjunto G^{-1} é limitada, então, vale a condição A11. Veja por exemplo em Noor [61], na análise de convergência do Algoritmo 7.1 o autor assume a hipótese sem enunciá-la;
- Em geral, na análise de convergência de algoritmos para resolver problemas de desigualdades variacionais gerais ($\mathcal{H}_n \equiv \mathcal{H}$, $G_n \equiv G$), os resultados de convergência são obtidos para a seqüência $\{G(u^n)\}$ e para a derivação de resultados para $\{u^n\}$, os autores assumem condições mais fortes que A11, por exemplo:
 - Em [59], $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, o operador G^{-1} é Lipschitziano. Portanto, a condição A11 é satisfeita;
 - Em [72], onde $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, assumimos que a aplicação ponto-conjunto, G^{-1} , é localmente limitada em C . Logo, vale a condição A11;
 - Em [12, 13, 62], o espaço \mathcal{H} tem dimensão finita[§] e o operador G^{-1} é contínuo. Portanto, vale A11;
 - Em [85], o conjunto C é compacto e o operador G^{-1} é compacto em C . Em particular, a condição A11 é satisfeita.
- Em esquemas de Galerkin (veja por exemplo, [88, Teorema 34.A, p.966]), a seguinte propriedade é conhecida como estabilidade do esquema de aproximações $\{G_n, \mathcal{H}_n\}$:

$$\text{Existe } \mu > 0 \text{ tal que } \|G_n(u) - G_n(v)\| \geq \mu \|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathcal{H}_n. \quad (4.22)$$

Em particular, ela implica na validade da condição A11;

[§]Há casos em que $\dim(\mathcal{H}) < +\infty$ é assumido somente para o teorema de convergência de $\{u^n\}$.

- Se $G = I, G_n \equiv I$, então, A11 é obviamente satisfeita.

Teorema 4.2.6. *Assuma que a condição A11 é satisfeita. Suponha também a validade das condições do Teorema 4.2.4 (ou Teorema 4.2.5). Então, o conjunto de pontos de acumulação fracos da seqüência $\{u^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é não-vazio.*

Prova. É uma consequência direta do Teorema 4.2.4, do Teorema 4.2.5 e da condição A11. □

Observação 4.2.12. *Sobre como a limitação foi considerada em outros trabalhos.*

- Em [85], onde $G_n \equiv G$, o autor analisa um algoritmo para resolver o problema (PDVG) em um espaço de Hilbert. A limitação da seqüência gerada é assumida por hipótese, uma vez que, o algoritmo gera uma seqüência $\{G(u^n)\} \subset C$, e o conjunto de restrições C é convexo e compacto;
- Em [42], a limitação da seqüência das soluções dos subproblemas é assumida nas hipóteses, uma vez que, a análise de convergência parte da convergência fraca da seqüência gerada pelo algoritmo para resolver um problema de desigualdade variacional;
- No esquema de aproximações de dimensão finita de [28], a seqüência $\{u^n\}$ das soluções, satisfaz $u^n \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde a seqüência de conjuntos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada ou equilimitada. Por outro lado, na análise de convergência de [32] e [75], a limitação da seqüência de soluções aproximadas é assumida explicitamente.

Capítulo 5

Considerações finais

Neste trabalho, consideramos o Problema de Desigualdades Variacionais Gerais (PDVG). Na parte inicial, apresentamos o problema, sua motivação, outras formulações que aparecem na literatura e uma breve revisão dos métodos existentes para a sua resolução. Estendemos um teorema de existência de solução do Problema de Complementaridade Generalizada (PCG) para o (PDVG), que assume condições mais fracas para o próprio (PCG) e que aquelas assumidas em Noor [63] para o (PDVG).

Propomos um algoritmo, denominado PPM, para resolver o problema em dimensão finita com um operador não necessariamente monótono, que considera em cada iteração uma única projeção sobre uma aproximação do conjunto de restrições. Esta é uma característica importante do algoritmo. De fato, do ponto de vista computacional, o método nos permite escolher aproximações convenientes e, assim, tornar a resolução numérica mais fácil que se projetássemos sobre o conjunto original C . Uma segunda vantagem deste método, comparado com vários algoritmos de projeção para resolver desigualdades variacionais gerais (veja por exemplo [10, 55, 59]), é que apenas um elemento da imagem inversa do operador G é requerido por iteração, reduzindo os custos computacionais. Analisamos a convergência do algoritmo sob uma condição de cocoercividade sobre o conjunto solução. Usamos noções de convergência variacional e estabelecemos condições sobre a velocidade de convergência dos conjuntos para obter resultados de convergência da seqüência gerada pelo algoritmo. Ilustramos o comportamento numérico do método através de vários problemas-testes incluindo um exemplo de aproximações internas de um conjunto C sem a estrutura de caixa ou de bola. Considerando o número de iterações, mostramos que nosso método é competitivo quando comparamos o PPM com dois

outros algoritmos. O algoritmo PPM foi publicado em [72].

Na parte final, introduzimos um esquema de aproximações do problema (PDVG) em espaços de Hilbert que inclui aproximações no mesmo espaço do problema original e aproximações de dimensão finita. Mostramos como o passo iterativo e as condições assumidas na definição de vários algoritmos da literatura, estão incluídos em nosso esquema. Na análise de convergência, obtemos a existência de pontos de acumulação fracos da seqüência formada pelas soluções dos subproblemas e da seqüência formada pelas imagens dessas soluções. Mostramos que os pontos de acumulação fracos da seqüência das imagens das soluções aproximadas são G -soluções do problema estudado. Também, estabelecemos condições para que os pontos de acumulação fracos da seqüência das soluções aproximadas sejam soluções do (PDVG).

A seguir, mencionamos alguns pontos que, de um modo natural, dão continuidade ao nosso trabalho:

1. Para o caso de dimensão finita, devemos ampliar as experiências numéricas fornecendo mais indicadores de eficiência do algoritmo PPM. Nesta pesquisa, podemos incluir os experimentos apresentados no artigo recente de Bnouhachem [13] que compara numericamente vários outros algoritmos para desigualdades variacionais gerais;
2. Para o esquema de aproximações em espaços de Hilbert, nossa meta é obter resultados de convergência forte e enfraquecer as hipóteses assumidas. É muito importante, também, estabelecer uma correspondência entre os resultados de convergência do esquema e os teoremas já existentes para os casos particulares;
3. Ilustrar o comportamento numérico do esquema de aproximações através de exemplos.

Referências Bibliográficas

- [1] Adly, S., Goeleven, D., A discretization theory for a class of semi-coercive unilateral problems, *Numerische Mathematik*, 87, 1-34, 2000.
- [2] Alber, Y., Butnariu, D. e Ryazantseva, I., Regularization of Monotone Variational Inequalities with Mosco Approximations of the Constraint Sets, *Set Valued Analysis*, 13, 265-290, 2005.
- [3] Alexandre, P., Nguyen, V. H. e Tossings, P., The perturbed generalized proximal point algorithm, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 32, 223-253, 1998.
- [4] Andreani, R., Friedlander, A. e Santos, S. A., On the resolution of the generalized nonlinear complementarity problem, *SIAM J. Optimization*, 12-2, 303-321, 2001.
- [5] Ansari, Q. H., Flores-Bazán, F., Recession methods for generalized vector equilibrium problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 321, 132-146, 2006.
- [6] Attouch, H., *Variational convergence for functions and operators*, Pitman, London, England, 1984.
- [7] Attouch, H. e Wets, R.B., Isometries for the Legendre-Fenchel transform., *Transactions of AMS*, 296, 33-60, 1986.
- [8] Baiocchi, C. e Capelo, A., *Variational and Quasi Variational Inequalities: Applications to free-boundary problems*, Wiley, New York, 1984.
- [9] Bensoussan, A. e Lions, J. L., Nouvelle Formulation des Problèmes de Contrôle impulsif et Applications, *Comptes Rendus Acad. Sciences Paris*, 276, 1189-1192, 1973.

- [10] Bnouhachem, A., A self-adaptive method for solving general mixed variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 309, 136-150, 2005.
- [11] Bnouhachem, A. e Liu, Z. B., Alternating Direction Method for Maximum Entropy Subject to Simple Constraint Sets, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 121, 259-277, 2004.
- [12] Bnouhachem, A. e Noor, M. A., Inexact proximal point methods for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 324, 1195-1212, 2006.
- [13] Bnouhachem, A. e Noor, M. A., Numerical comparison between prediction-correction methods for general variational inequalities, *Applied Mathematics and Computation*, aceito para publicação, 2006.
- [14] Burachik, R. S. e Scheimberg, S., A Proximal Point Method for the Variational Inequality in Banach Spaces, *Siam Journal on Control and Optimization*, 39-5, 1633-1649, 2001.
- [15] Burachik, R. S. e Svaiter, B. F., ϵ -Enlargements of Maximal Monotone Operators in Banach Spaces, *Set-Valued Analysis*, 7, 117-132, 1999.
- [16] Censor, Y., Motova, A. e Segal, A., Perturbed projections and subgradient projections for the multiple-sets split feasibility problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 327-2, 1244-1256, 2006.
- [17] Chan, D. e Pang, J. S., The Generalized Quasi-Variational Inequality Problem, *Mathematics of Operations Research*, 7-2, 211-222, 1982.
- [18] Chen, X., Qi, L. e Sun, D., Global and superlinear convergence of the smoothing Newton Method and its applications to General Box Constrained Variational Inequalities, *Mathematics of Computation*, 67, 519-540, 1998.
- [19] Ciarlet, P. G., *The finite element method for elliptic problem*, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
- [20] Combettes, P. L. e Pennanen, T., Generalized Mann iterates for contracting fixed points in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 275, 521-536, 2001.

- [21] Eaves, B. C., On the basic theorem of complementarity, *Math. Program.*, 1, 68-75, 1971.
- [22] Glowinski, R., *Lectures on Numerical methods for nonlinear variational problems*, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1980.
- [23] Gunzburger, M. D. e Hou, L. S., Finite-Dimensional approximation of a class of constrained nonlinear optimal control problems, *Siam Journal on Control and Optimization*, 34-3, 1001-1043, 1996.
- [24] Gwinner, J., Discretization of semicoercive variational inequalities, *Aequationes Mathematicae*, 42, 72-79, 1991.
- [25] Han, D. e Lo, H. K., Solving non-additive traffic assignments problems: A descent method for co-coercive variational inequalities, *European Journal of Operational Research*, 159-3, 529-544, 2004. .
- [26] He, B. S., A class of projection and contraction methods for monotone variational inequalities, *Appl. Math. Optim.*, 35, 69-76, 1997.
- [27] He, B. S., Inexact implicit methods for monotone general variational inequalities, *Math. Programming*, 86, 199-217, 1999.
- [28] Huang, Y. e Zhou, Y., Finite-dimensional approximation for a class of elliptic obstacle problems, *Nonlinear Analysis*, 52, 1745-1754, 2003.
- [29] Isac, G., Nonlinear Complementarity Problem and Galerkin Method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 108, pp. 563-574, 1985.
- [30] Isac, G., On the Implicit Complementarity Problem in Hilbert Spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 32, 251-260, 1985.
- [31] Iusem, A. N. e Svaiter, B. F., A variant of Korpelevich's method for variational inequalities with a new search strategy, *Optimization*, 42, 309-321, 1997.
- [32] Jingan, L., Yiqiang, R. e Chunlei, L., Finite dimensional approximate bifurcation for obstacle problems, *Numerical functional analysis and optimization*, 17-7, 785-795, 1996.
- [33] Kalashnikov, V. V. e Isac, G., Solvability of Implicit Complementarity Problems, *Annals of Operations Research*, 116, 199-221, 2002.

- [34] Kaplan, A. e Tichatschke, R., Auxiliary problem principle and the approximation of variational inequalities with non-symmetric multi-valued operators, *Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings*, 27, 185-209, 2000.
- [35] Kaplan, A. e Tichatschke, R., Auxiliary problem principle and proximal point methods, *Journal of Global Optimization*, 17, 201-224, 2000.
- [36] Kaplan, A. e Tichatschke, R., Proximal-based regularization methods and successive approximation of variational inequalities in Hilbert spaces, *Control and Cybernetics*, 31-3, 521-544, 2002.
- [37] Kaplan, A. e Tichatschke, R., Convergence Analysis of non-quadratic proximal methods for variational inequalities in Hilbert spaces, *Journal of Global Optimization*, 22-1, 119-136, 2002.
- [38] Karamardian, S. e Schaible, S., Seven kinds of monotone maps, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 66, 37-46, 1990.
- [39] Kocvara, M. e Outrata, J. V., *On implicit complementarity problems with application in mechanics*, In Proc. of the IFIP Conf. on Numerical Analysis and Optimization, (J.-P.Zolesio, ed.), Rabat, 15-17, 1993.
- [40] Kocvara, M. e Outrata, J. V., On optimization systems governed by implicit complementarity problems, *Numer. Funct. Anal. and Optimiz.*, 15-7, 869-887, 1994.
- [41] Korpelevich, G. M., The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Matecon*, 12, 747-756, 1995.
- [42] Lignola, M. B. e Morgan, J., Generalized Variational Inequalities with Pseudomonotone Operators Under Perturbations, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 101-1, 213-220, 1999.
- [43] Lions, J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [44] Liu, F., Nashed, M. Z., Regularization of Nonlinear Ill-Posed Variational Inequalities and Convergence Rates, *Set Valued Analysis*, 6, 313-344, 1998.

- [45] Liu, Z., Some convergence results for evolution Hemivariational inequalities, *Journal of Global Optimization*, 29, 85-95, 2004.
- [46] Liu, Z. e Kang, S. M., Convergence and stability of perturbed three-step iterative algorithm for completely generalized nonlinear quasivariational inequalities, *Applied Mathematics and Computation*, 149, 245-258, 2004.
- [47] Makler-Scheinberg, S., Nguyen, V. H. e Strodiot, J. J., Family of perturbation methods for variational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 89, 423-452, 1996.
- [48] Mansour, M. A., Two remarks on the stability of generalized hemivariational inequalities, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, Vol. 3-2, Art. 28, 2002.
- [49] Mosco, U., Convergence of convex sets and solutions of variational inequalities, *Adv. Math.*, 3, 512-585, 1969.
- [50] Moudafi, A. e Oliny, M., Convergence of splitting inertial proximal method for monotone operators, *J. Comput. Appl. Math.*, 155, 447-454, 2003.
- [51] Noor, M. A., General Variational Inequalities, *Appl. Math. Letters*, 1, 119-122, 1988.
- [52] Noor, M. A., Wiener-Hopf Equations and Variational Inequalities, *Journal of Optim. Theory and Appl.*, 79-1, 197-206, 1993.
- [53] Noor, M. A., Noor, K.I. e Rassias, T.M. Some aspects of variational inequalities, *J.Comput. Appl. Mathematics*, 47, 285-312, 1993.
- [54] Noor, M. A., *Variational inequalities in physical oceanography*, in Ocean Waves Engineering, (M.Rahman, Ed.), Advances in Fluid Mechanics, No. 2, WIT Press, 1994.
- [55] Noor, M. A., Algorithms for general monotone mixed variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 229, 330-343, 1999.
- [56] Noor, M. A. Projection-splitting methods for general monotone variational inequalities, *J. Comput. Anal. Appl.*, 4-1, 47-61, 2002.
- [57] Noor, M. A. New approximation schemes for general monotone variational inequalities, *J. Comput. Anal. Appl.*, 251, 217-229, 2000.

- [58] Noor, M. A. A predictor-corrector algorithm for general variational inequalities, *Appl. Math. Letters*, 14, 53-58, 2001.
- [59] Noor, M. A., Wang, Y.J. e Xiu, N., Projection iterative schemes for general variational inequalities, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, 34-3, 2002.
- [60] Noor, M. A. e Al-Said, E.A., Finite-Difference Method for a System of Third-Order Boundary-Value Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 112-3, 627-637, 2002.
- [61] Noor, M. A. Some developments in general variational inequalities, *Applied Mathematics and Computation*, 152-1, 199-277, 2004.
- [62] Noor, M. A., Projection-proximal methods for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318-1, 53-62, 2006.
- [63] Noor, M. A., Merit functions for general variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 316-2, 736-752, 2006.
- [64] Otero, R. G. e Iusem, A. N., Proximal Methods with Penalization Effects in Banach Spaces, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 25-1, 69-91, 2004.
- [65] Outrata, J. V. e Zowe, J., A Newton method for a class of quasi-variational inequalities, *Computational Optimization and Applications*, 4, 5-21, 1995.
- [66] Pang, J. S., Newton's method for B-differentiable equations, *Mathematics of Operations Research*, 15, 311-341, 1990.
- [67] Pang, J. S. e Yao, J. C., On a generalization of a normal map and equation, *SIAM J. Control. Optim.*, 33, 168-184, 1995.
- [68] Pascali, D. e Sburlan, S., *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Stijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, Holanda, 1978.
- [69] Salmon, G., *Perturbed Auxiliary Problem Methods to Solve Generalized Variational Inequalities*, PhD Thesis, Presses Universitaires de Namur, Namur, Belgium, 2001.

- [70] Salmon, G., Nguyen, V.H. e Strodiot, J.J., Coupling the Auxiliary Problem Principle and Epiconvergence Theory to Solve General Variational Inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 104, 629-657, 2000.
- [71] Santos, P. S. M. e Scheimberg, S., *Perturbed Projection Method for General Variational Inequalities*, Technical Report ES-627/04, PESC-COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil; <http://isis.cos.ufrj.br/cos/uploadfiles/es62704.pdf>.
- [72] Santos, P. S. M. e Scheimberg, S., A projection algorithm for general variational inequalities with perturbed constraint sets, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 649-661, 2006.
- [73] Shi, P., Equivalence of variational inequalities with Wiener-Hopf equations, *Proc. of the Amer. Math. Society*, 111, 339-346, 1991.
- [74] Solodov, M. V. e Svaiter, B. F., Error bounds for proximal point subproblems and associated inexact proximal point algorithms, *Mathematical Programming*, Ser. B, 88, 371-389, 2000.
- [75] Spann, W., Error estimates for the approximation of semicoercive variational inequalities, *Numerische Mathematik*, 69, 103-116, 1994.
- [76] Stampacchia, G., Formes Bilinéares Coercitives sur les Ensembles Convexes, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris, 258, 4413-4416, 1964.
- [77] Stummel, F. Perturbation theory for Sobolev spaces, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 73A, 5-49, 1974/75.
- [78] Tossings, P., Convergence Variationelle et Operateurs Maximaux Monotones D'Un Espace de Hilbert Reel, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 60, 2-3, 103-132, 1991.
- [79] Tossings, P., The Perturbed Proximal Point Algorithm and Some of its Applications, *Appl. Math. Optim.*, 29, 125-159, 1994.
- [80] Xia, Y. e Wang, J., A General Projection Neural Network for Solving Monotone Variational Inequalities and Related Optimization Problems, *IEEE Transactions on Neural Network*, 15, 318-328, 2004.
- [81] Xieping, D., Proximal Point Algorithm with errors for generalized strongly nonlinear quasivariational Inequalities, *Appl. Math. Mech.*, 19-7, 637-643, 1998.

- [82] Xiu, N., Zhang, J. e Noor, M. A., Tangent Projection Equations and General Variational Inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258, 755-762, 2001.
- [83] Yang Q., Zhao, J., Several solution methods for the split feasibility problem, *Inverse Problems*, 21, 1791-1799, 2005.
- [84] Yang Q., Zhao, J., Generalized KM theorems and their applications, *Inverse Problems*, 22, 833-844, 2006.
- [85] Yin, H., An iterative method for general variational inequalities, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 1-2, 201-209, 2005.
- [86] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, I: Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, 1990.
- [87] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, II-A: Linear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.
- [88] Zeidler, E., *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, II-B: Nonlinear Monotone Operators, Springer-Verlag, 1990.
- [89] Zhao, Y. B. e Yuan, J.Y., An alternative theorem for generalized variational inequalities and solvability of nonlinear quasi- P^M -complementarity problems, *Applied Mathematics and Computation*, 109, 167-182, 2000.
- [90] Zhao, Y., e Sun, D., Alternative theorems for nonlinear projection equations and applications to generalized complementarity problems, *Nonlinear Analysis*, 46, 853-868, 2001.
- [91] Zhu, D. L., e Marcotte, P., Co-coercivity and its role in the convergence of iterative schemes for solving variational inequalities, *SIAM J. Optim.*, 9-3, 714-726, 1996.