EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES E DUALIDADE PARA UM PROBLEMA DE EQUILÍBRIO GENERALIZADO

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Profa. Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.

Prof. Alfredo Noel Iusem, D. Sc.

Prof. Jose Herskovits Norman, D. Sc.

Prof. Paulo José da Silva e Silva, D. Sc.

Prof. Paulo Roberto Oliveira, D. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 2007

JACINTO, FLÁVIA MORGANA DE OLIVEIRA

Existência de Soluções e Dualidade para um Problema de Equilíbrio Generalizado [Rio de Janeiro] 2007

IX, 103 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2007)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Problemas de Equilíbrio

2 - Resultados de Existência

3 - Análise Dual

4 - Teoria KKM

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao meu querido esposo Aldemir
e amado filho Lwidge Elian.

Agradecimentos

- À professora Susana Scheimberg pela orientação e pelo incentivo constantes.
- Aos professores Alfredo Iusem, José Herskovits, Paulo Roberto e Paulo Silva e Silva, demais componentes da banca examinadora, pelas sugestões dadas que contribuiram para a melhoria desta tese.
- Ao meu esposo Aldemir e ao meu filho Lwidge Elian pelo amor e compreensão. Aos meus familiares, em especial à minha prima Margarete, por todos os esforços feitos em meu auxílio.
- Aos amigos Kely e Felipe cujo apoio e amizade foram fundamentais, principalmente nestes últimos 20 meses, para a conclusão do curso.
- Aos amigos Eduardo, Gêvane, Paulo, Roberto Cristóvão, Rogério, Sissy e Valéria, companheiros de sala, pelos importantes momentos de descontração.
- Ao Adilson, Alexandre, Ari, Cláudia, Deda, Fátima, Gutierrez, Itamar, Leandro, Lúcia, Lourdes, Mercedes, Solange, Sônia e Sueli, funcionários do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação-PESC, pela atenção e ajuda em todas as ocasiões.
- Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas-UFAM, em especial aos professores Alfredo, Disney, Domingos, Ivan, Nilomar, Raul, Renato, Roberto Cristóvão, Ruy e Sheila, pelo apoio direto ou indireto durante toda a realização do curso.
- Aos amigos da UFAM e a todos aqueles que de algum modo contribuiram para a conclusão deste trabalho cujos nomes não constam desta lista, mas em minha memória.
- Ao PESC pelas boas condições materiais e humanas oferecidas para a realização do curso de Doutorado.
- À Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES e à UFAM, pelo apoio financeiro e institucional.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES E DUALIDADE PARA UM PROBLEMA DE EQUILÍBRIO GENERALIZADO

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

Novembro/2007

Orientadora: Susana Scheimberg de Makler

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, introduzimos o Problema de Equilíbrio Generalizado, PEG. Mostramos que esta formulação fornece uma estrutura unificada para uma família abrangente de problemas importantes que inclui, por exemplo, otimização convexa, desigualdades variacionais e quasevariacionais generalizadas, desigualdade variacional do tipo Minty e programação semidefinida convexa, bem como esquemas de equilíbrio e quase-equilíbrio. Para estabelecer um teorema de existência para o problema PEG estendemos o Princípio KKM e o Lema FKKM. Aplicando nossa teoria de existência ao problema de equilíbrio clássico estudado por Blum e Oettli obtemos novos resultados. Também desenvolvemos um esquema dual para PEG, baseado no conceito de funções conjugadas, que fornece uma análise dual unificada para vários problemas. De fato, mostramos que os problemas duais lagrangianos clássicos de problemas de programação não linear convexa e semidefinida convexa são casos particulares de nosso problema dual. Além disso, estabelecemos condições necessárias e suficientes de otimalidade para soluções primais e duais que tornam-se as propriedades duais obtidas por Mosco e por Morgan e Romaniello para problemas de desigualdades variacionais e quasevariacionais, respectivamente. Finalmente, aplicamos a nossa teoria dual a um problema de programação semidefinida convexa e obtemos um teorema de gap de dualidade zero.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (D.Sc.)

EXISTENCE RESULTS AND DUALITY FOR A GENERALIZED EQUILIBRIUM PROBLEM

Flávia Morgana de Oliveira Jacinto

November/2007

Advisor: Susana Scheimberg de Makler
Department: Systems and Computation Engineering

In this work, we introduce a Generalized Equilibrium Problem, GEP. We show that this formulation gives a unified framework for a wide class of interesting problems that includes, for example, convex optimization, variational and quasi-variational inequality, the Minty variational inequality, convex semidefinite programming, well as equilibrium and quasi-equilibrium schemes. In order to establish an existence theorem for the problem GEP, we extend the KKM Principle and the FKKM Lemma. By applying our existence theory to the classical equilibrium problem studied by Blum and Oettli we get new results. We also develop a dual scheme for GEP, based on the conjugate functions, that furnishes a unified dual analysis for several problems. Indeed, the classical lagrangian dual problems of nonlinear convex problems and convex semidefinite programs are particular cases of our dual problem. Moreover, we establish necessary and sufficient optimality conditions for primal and dual solutions of GEP that become dual properties obtained by Mosco and by Morgan and Romaniello for variational and quasi-variational inequalities problems. Finally, we apply our dual theory to a problem of convex semidefinite programming and we obtain a zero duality gap theorem.

Sumário

Notações

PEG	Problema de Equilíbrio Generalizado.
Sol (PEG)	Conjunto solução de PEG.
X	Espaço vetorial topológico.
X^*	Espaço vetorial topológico dual de X.
$\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$	Produto de dualidade entre X^* e X.
δ_C	Função indicadora do conjunto $C \subseteq X$.
$X \setminus C$	Complementar de C relativo a X.
$\operatorname{int} C$	Interior do conjunto C.
$\operatorname{ir} C$	Interior relativo do conjunto C.
$\operatorname{cl} C$	Fecho do conjunto C.
$\operatorname{cl}_B C$	Fecho do conjunto C relativo a $B \subseteq X$.
$\operatorname{aff} C$	Envoltória afim de C.
$\operatorname{co} C$	Envoltória convexa de C.
S_n^+	Conjunto de todas as matrizes simétricas e semidefinidas positivas de ordem $n \times n$.
$Tr[UV]$	Traço da matriz UV.
$\operatorname{dom} f$	Domínio efetivo da função f.
$\operatorname{epi} f$	Epígrafo da função f.
f^*	Função conjugada da função f.
$\partial f(u)$	Subdiferencial da função f em u.
$\partial_\epsilon f(u)$	ϵ-subdiferencial da função f em u.
$f \oplus g$	Infimal convolução das funções f e g.
$\mathscr{P}(C)$	Conjunto das partes de C.
$T : A \to \mathscr{P}(C)$	Aplicação ponto-conjunto de A no conjunto das partes de C.
$\operatorname{Im} T$	Conjunto das imagens de T.
$\operatorname{Gr} T$	Gráfico de T.
$\mathcal{F}(C)$	Conjunto das bifunções escalares definidas sobre $C \times C$.

Introdução

Seja D um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X e sejam $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e $h : X \to (-\infty, +\infty]$ funções. Nesta tese, consideramos o Problema de Equilíbrio Generalizado:

$$\text{(PEG)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases}$$

onde f, φ e h verificam as seguintes condições:

- $f(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;
- h é convexa;
- $\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ para todo $x \in D$.

Introduzimos esta formulação visando estabelecer uma estrutura unificada flexível para o estudo de vários problemas da literatura no contexto de equilíbrio.

Se D é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de X, f é a extensão natural de uma função $\mathrm{f} : D \times D \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{f}(x, x) = 0$ para todo $x \in D$, $\varphi \equiv 0$ e $h \equiv \delta_D$, então (PEG) reduz-se ao problema:

$$\text{(PE)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ \mathrm{f}(\bar{x}, y) \geq 0, \text{ para todo } y \in D, \end{cases} \tag{1}$$

que é o problema de equilíbrio estudado por Blum e Oettli em [11]. Nesse mesmo trabalho, Blum e Oettli mostraram que a formulação (PE) inclui, como casos particulares, vários problemas importantes da literatura, tais como os problemas de otimização convexa, equilíbrio de Nash, complementaridade, pontos fixos e desigualdades variacionais.

Ao longo dos últimos anos vários trabalhos relacionados com o problema (PE) têm sido publicados, veja por exemplo [13, 18, 22, 27, 32, 34, 44, 55, 58]. Assim como Blum e Oettli em [11], a maioria deles estabelecem resultados de existência de soluções para os problemas estudados [13, 18, 22, 27, 32, 34, 44, 58].

Por outro lado, existem trabalhos na literatura que apresentam esquemas duais para reformulações do problema de equilíbrio (PE). Em [51], Konnov e Schaible estabelecem um esquema dual para o problema (PE) com $f(x, x) \geq 0$ para cada $x \in D$ ao invés de $f(x, x) = 0$, cujo principal objetivo é que o problema dual do dual seja o primal. Enquanto em [55], Martínez-Legaz e Sosa apresentam uma teoria de dualidade baseada sobre o conceito de funções conjugadas, introduzida por Fenchel e desenvolvida por Rockafellar em [61, 62], cuja pricipal meta é estender o conceito de dualidade convexa.

A idéia de intoduzirmos um esquema de equilíbrio que inclua os esquemas dados em [11, 32] e os problemas de desigualdades variacionais mistas e quase-variacioanais generalizadas dados em [50, 57, 56] conduziu-nos ao Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG).

Esta tese tem como principais objetivos estudar a existência de soluções e estabelecer uma teoria de dualidade para o problema (PEG). Além disso, mostramos a eficiência do nosso modelo verificando que esquemas de quase-equilíbrio, desigualdades variacionais do tipo Minty (DVM) e problemas de programação semidefinida convexa (PSDC) podem ser colocados como casos particulares de (PEG) de um modo bastante natural. Também mostramos a flexibilidade, obtendo tanto resultados de existência de soluções e resultados duais para esquemas de equilírio e problemas particulares de (PEG) quando usamos convenientemente a forma como um dado problema pode se tornar um problema (PEG). Conseguimos provar também que o esquema dual de Martínez-Legáz e Sosa [55] é um caso particular de nossa formulação dual.

No Capítulo 1, listamos noções básicas e definições, bem como propriedades e notações, existentes na literatura da teoria de topologia, de análise funcional e da teoria KKM. Nosso enfoque desses tópicos tem em vista os aspectos teóricos que efetivamente contribuem para o desenvolvimento e compreensão deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos nossas duas contribuições à teoria KKM. Primeiro, generalizamos o resultado conhecido como Princípio KKM. Em seguida, usando o nosso resultado anterior generalizamos o Lema de Ky Fan. Essas generalizações são usadas em nosso teorema de existência.

No Capítulo 3, mostramos que nossa formulação (PEG) inclui, por exemplo, as formulações de equilíbrio estudadas por Flores-Bazán [32] e Martínez-Legáz e Sosa [55], bem como os problemas estudados por Baiocchi e Capelo [5] e Noor e Oettli [58]. Para finalizar, descrevemos quatro exemplos particulares de (PEG) que justificam nossa formulação e também são considerados em nossas aplicações.

No Capítulo 4, estudamos a existência de soluções para o problema (PEG) sob condições mais fracas do que as usadas em alguns de seus casos particulares. Em seguida, aplicamos nossa teoria de existência ao problema de equilíbrio (PE) obtendo novos resutados. Também obtemos resultados já existentes na literatura.

No Capítulo 5, introduzimos um esquema dual para o problema (PEG) e mostramos que ele mantém características duais clássicas. Também apresentamos condições necessárias e suficientes de otimalidade para soluções dos problemas primal (PEG) e do dual (DPEG). Finalizamos, relacionando o nosso esquema dual com os de Martínez-Legáz e Sosa [55] e Konnov e Schaible [51], ambos propostos para casos particulares de nossa formulação de equilíbrio (PEG).

No Capítulo 6, mostramos que a nossa teoria dual permite uma análise unificada para vários problemas importantes. Primeiro, provamos que o dual clássico Lagrangiano de um problema de otimização convexa é um exemplo do problema dual de (PEG). Depois, recuperamos as condições de otimalidade dos problemas de desigualdade variacional mista e de desigualdade quasevariacional generalizada, dadas em [57] e [56] respectivamente, a partir das nossas condições de otimalidade estabelecidas para (PEG). Em seguida, aplicamos o problema dual e as condições de otimalidade de (PEG) a um problema de programação semidefinida convexa obtendo resultados duais relativos a este problema.

No Capítulo 7, fazemos nossas considerações finais e indicamos nossos trabalhos e pesquisas futuras como continuação deste trabalho.

Observamos ainda que qualquer outro termo usado e não definido nesta tese deve ser considerado como em Zeidler [73, 74] e ou como em Ekeland e Temam [26].

Capítulo 1

Preliminares

A finalidade deste capítulo é facilitar a leitura desta tese fornecendo as definições necessárias para torná-la o mais autocontida possível. Lembramos algumas noções topológicas. Listamos conceitos e propriedades básicas sobre análise funcional e teoria KKM que são essenciais ao desenvolvimento e à compreensão deste trabalho.

1.1 Tópicos de Topologia

Nesta parte, revisamos algumas definições e propriedades referentes a espaços topológicos de Hausdorff e localmente convexos.

Os espaços topológicos que nos interessam neste trabalho são:.

Definição 1.1.1 [52, Definição 1.2.19., pág. 18] *Um espaço topológico X é um espaço* ***de Hausdorff*** *quando ele é munido de uma topologia na qual dados dois pontos distintos $x, y \in X$, existem abertos A, B em X tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B \neq \emptyset$.*

Agora, consideramos um conceitos que é usado no próximo teorema.

Definição 1.1.2 [5, Capítulo 9, pág. 206] *Seja X um espaço topológico. Uma família de conjuntos $\{A_\alpha \subseteq X : \alpha \in I\}$ possui a* ***Propriedade da Interseção Finita (PIF)*** *se para todo subconjunto finito $\tilde{I}$ de I vale que $\bigcap_{\alpha \in \tilde{I}} A_\alpha \neq \emptyset$.*

O teorema abaixo relaciona dois axiomas topológicos envolvendo um conjunto compacto e a interseção finita de conjuntos relativamente fechados nele.

Teorema 1.1.1 [7, Teorema 6, pág. 69] *Seja C um subconjunto não vazio de um espaço topológico X. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1)(Axioma de Borel-Lebesgue) O conjunto C é **compacto**, *ou seja, toda família de conjuntos abertos $\{F_i : i \in I\}$ de X formando uma cobertura de C possui uma subfamília finita $F_{i1}, \ldots, F_{is}$ cuja união ainda contém C;*

(2)(Axioma da Interseção Finita) Se $\{G_i : i \in I\}$ é uma família de conjuntos relativamente fechados em C que possui a propriedade da interseção finita, então $\bigcap_{i \in I} G_i \neq \emptyset$.

Um resultado importante envolvendo conjuntos fechados é o seguinte:

Teorema 1.1.2 [7, Teorema 2, pág. 68] *Seja X um espaço vetorial topológico. Se F é um conjunto fechado contido em um conjunto compacto de X, então F também é compacto.*

Definição 1.1.3 [7, pág. 249] *Um espaço topológico de Hausdorff X é* ***localmente convexo*** *se a origem possui uma base fundamental de vizinhanças convexas.*

Espaços vetoriais topológicos localmente convexos são generalizações de espaços normados e métricos.

1.2 Tópicos de Análise Funcional

Nesta parte, recordamos definições e propriedades úteis para o desenvolvimento teórico desta tese.

Funções ponto-conjunto. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de dois espaços vetoriais topológicos X e Y, respectivamente. Diremos que $T : A \to \mathscr{P}(B)$ é uma aplicação **ponto-conjunto** se a cada elemento $a \in A$ associamos um subconjunto $T(a) \subseteq B$, ou seja, $T(a)$ é um elemento do conjunto de partes de B, $\mathscr{P}(B)$.

A seguir, listamos algumas definições relativas a esse conceito.

Definição 1.2.1 *Seja $T : A \to \mathscr{P}(B)$ uma aplicação ponto-conjunto.*

a) [6, pág. 184] *O* ***gráfico*** *de T, $\operatorname{Gr} T$, é definido por*

$$\operatorname{Gr} T := \{(x, y) \in A \times B : y \in T(x)\}.$$

a) [6, pág. 184] *O **domínio** de T, $\operatorname{dom} T$, é definido por*

$$\operatorname{dom} T := \{x \in A : T(x) \neq \emptyset\}.$$

b) [6, pág. 184] *A **imagem** de T, $\operatorname{Im} T$, é dado por*

$$\operatorname{Im} T := \bigcup_{x \in A} T(x) = \{u \in B : \exists\, x \in A \ \ \textit{tal que} \ \ u \in T(x)\}.$$

c) [6, pág. 184] *A **imagem de um conjunto** $C \subseteq A$ segundo T, $T(C)$, é*

$$T(C) := \bigcup_{x \in C} T(x) = \{u \in B : \exists\, x \in C \ \ \textit{tal que} \ \ u \in T(x)\}.$$

d) [6, pág. 184] *A **imagem inversa** de um conjunto $D \subseteq B$, $T^{-1}(D)$, é*

$$T^{-1}(D) := \{x \in A : T(x) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Sejam A um conjunto não-vazio de X e $T : A \to \mathscr{P}(A)$ uma aplicação com $\operatorname{dom} T \neq \emptyset$. Um ponto $a \in A$ é dito ser um **ponto fixo** de T se, e somente se, $a \in T(a)$.

Abaixo, consideramos um teorema de ponto fixo que é uma generalização do teorema do ponto fixo de Browder [14, Teorema 1, p.285]. Este resultado é usado como ferramenta na prova de nossa primeira contribuição à Teoria KKM no Capítulo 2.

Teorema 1.2.1 [67, Teorema 1] *Sejam K um subconjunto não-vazio de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X e $T : K \to \mathscr{P}(K)$ uma aplicação ponto-conjunto. Se:*

(i) O conjunto K é convexo e compacto;

(ii) para cada $x \in K$, $T(x)$ é um subconjunto não-vazio de K;

(iii) para cada $y \in K$, $T^{-1}(y) = \{x \in K : y \in T(x)\}$ contém um subconjunto aberto $\mathcal{O}_y$ em K, ou seja, existe um conjunto aberto $A_y \subseteq X$ tal que $\mathcal{O}_y = A_y \cap K$;

(iv) $\bigcup_{y \in K} \mathcal{O}_y = K$.

Então existe um ponto $x_0 \in K$ tal que $x_0 \in T(x_0)$.

Funções Estendidas.

Definição 1.2.2 *Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função.*

a) [70, Definição 5.11] *O **domínio efetivo** de f,* $\operatorname{dom} f$*, é dado por*

$$\operatorname{dom} f := \{x \in X : f(x) < +\infty\}.$$

b) [52, Definição 6.1.3.] *O **epígrafo** de f,* $\operatorname{epi} f$*, é definido como*

$$\operatorname{epi} f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Diremos que uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é própria se, e somente se, o seu domínio efetivo, $\operatorname{dom} f$, é não vazio e $f(x) > -\infty$ para todo $x \in X$.

Definição 1.2.3 [6, pág. 213] *Uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ cujo* $\operatorname{dom} f$ *é um conjunto convexo é dita **quaseconvexa** se cada um de seus conjuntos de nível é um conjunto convexo ou, equivalentemente, se para todo $x, y \in X$ e todo $\lambda \in [0, 1]$*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

É imediato ver que convexidade implica em quaseconvexidade, enquanto a recíproca não é verdadeira em geral. Uma função f é dita **quasecôncava** se $-f$ é quaseconvexa.

Agora consideramos a seguinte definição:

Definição 1.2.4 *Seja K um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico X. Uma função $g : K \times K \to [-\infty, +\infty]$ é **γ- quaseconvexa diagonal (γ-QCXD) na segunda variável** para algum $\gamma \in [-\infty, +\infty]$ se para qualquer subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq K$ e qualquer $y_0 \in \operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_m\}$ vale que*

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{g(y_0, y_i)\} \geq \gamma.$$

A γ- quaseconvexidade diagonal na segunda variável foi introduzida em [75, Definição 2.3] no contexto de espaços vetoriais topológicos localmente convexos.

Observação 1.2.1 *Afirmamos que se g é γ-QCXD, então $g(y, y) \geq \gamma$ para todo $y \in K$. Com efeito, para qualquer $y \in K$ tomando-se o conjunto $\{y\} \subset K$, temos que $y_0 = y$ e da definição de γ-quaseconvexidade diagonal segue a afirmação.*

Dizemos que g é ***γ-quasecôncava diagonal (γ-QCVD) na segunda variável*** para algum $\gamma \in [-\infty, +\infty]$ se $-g$ é γ-QCXD na segunda variável.

Similarmente, definem-se γ- quaseconvexidade e γ- quaseconcavidade diagonal na primeira variável. Em [8, 37], a definição de 0- quaseconcavidade diagonal na primeira variável aparece com o nome de quasemonotonicidade própria.

Funções semicontínuas inferior e superior. Vários resultados importantes em análise funcional podem ser estabelecidos sob condições mais fracas do que a continuidade clássica usual, por exemplo a semicontinuidade inferior e superior.

Definição 1.2.5 [70, Definição 5.2] *Seja $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função definida sobre um espaço topológico X. A função f é* ***semicontínua inferior*** *em $a \in X$ se, para cada $r \in \mathbb{R}$ com $f(a) > r$ existe uma vizinhança $U(a)$ de a tal que $f(z) > r$ para todo $z \in U(a)$.*

Uma função f é semicontínua inferior se ela é semicontínua inferior em cada ponto de X. O próximo resultado estabelece algumas caracterizações de semicontinuidade inferior que usamos ao longo deste trabalho.

Proposição 1.2.1 [70, Teorema 5.3] *Seja $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função definida sobre um espaço topológico X. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A função f é semicontínua inferior sobre X.*

(ii) *Para cada $r \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) > r\}$ é aberto em X.*

(iii) *Para cada $r \in \mathbb{R}$, o conjunto $\{x \in X : f(x) \leq r\}$ é fechado em X.*

(iv) *O conjunto* $\operatorname{epi} f$ *é fechado em $X \times \mathbb{R}$.*

Definição 1.2.6 *Seja $f : X \to (-\infty, +\infty]$ uma função definida sobre um espaço vetorial X. Diremos que f é* ***semicontínua superior*** *se a função $-f$ é semicontínua inferior.*

Abaixo, definimos as propriedades de transferência de semicontinuidade inferior e superior. Em seguida, estabelecemos as relações entre estas definições e os conceitos clássicos de semicontinuidade inferior e superior.

Definição 1.2.7 [68, Definição 8] *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $g : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ tem a propriedade de* ***λ-transferência de semicontinuidade inferior na segunda variável (λ-tsciy)*** *se para todo $x \in X$ e $y \in Y$, $g(x, y) > \lambda$ implica que existem um ponto $x' \in X$ e uma vizinhança $V(y)$ de y tais que $g(x', z) > \lambda$ para todo $z \in V(y)$.*

Este conceito é mais fraco que a semicontinuidade inferior. Com efeito, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2 *Seja uma função $g : X \times Y \to (-\infty, +\infty]$. Se*

P6: *para cada $x \in X$ fixo, $g(x, \cdot)$ é semicontínua inferior.*

Então g tem a propriedade λ-(tsciy) para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Seja $x \in X$. Pela Proposição 1.2.1 temos que $g(x, \cdot)$ é semicontínua inferior se, e somente se, o conjunto $\{y \in Y : g(x, y) > \lambda\}$ é aberto em Y para cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, dados y e λ tais que $g(x, y) > \lambda$, existe uma vizinhança $V(y)$ de y em Y tal que $g(x, z) > \lambda$ para todo $z \in V(y)$ e e cada $\lambda \in \mathbb{R}$. Portanto, basta considerar $x' = x$ e obtemos a afirmação desejada para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo. ■

Analogamente, temos os seguintes conceito e resultado:

Definição 1.2.8 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $g : X \times Y \to [-\infty, +\infty]$ tem a propriedade de* ***λ-transferência de semicontinuidade superior na primeira variável (λ-tscsx)*** *se para todo $x \in X$ e $y \in Y$, $g(x, y) < \lambda$ implica que existem um ponto $y' \in Y$ e uma vizinhança $V(x)$ de x tais que $g(z, y') < \lambda$ para todo $z \in V(x)$.*

Proposição 1.2.3 *Seja uma função $g : X \times Y \to (-\infty, +\infty]$. Se*

P7: *para cada $y \in Y$ fixo, $g(\cdot, y)$ é semicontínua superior.*

Então g tem a propriedade λ-(tscsx) para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Prova. Seja $y \in Y$. Pela Definição 1.2.6 temos que $-g(\cdot, y)$ é semicontínua inferior para cada $y \in Y$. Assim, aplicando a Proposição 1.2.1 obtém-se o resultado desejado. ■

Agora, relacionamos os conceitos de transferência de semicontinuidade inferior na segunda variável com transferência de semicontinuidade superior na primeira variável para algum $\gamma \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2.4 *Sejam A, B dois subconjuntos não vazios de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X tais que B é convexo e $A \subseteq B$. Sejam um número real γ e uma função $\phi : A \times B \to [-\infty, +\infty]$ tais que:*

A4. *ϕ tem a propriedade de $\gamma-$transferência de semicontinuidade inferior na segunda variável ($\gamma-$tsciy).*

Então $-\phi \circ f$ tem a propriedade de $(-\gamma)-$transferência de semicontinuidade superior na primeira variável ($\gamma-$tscsx), onde $f : X \times Y \to X \times Y$ é $f(x, y) := (y, x)$.

Prova. De fato, lembrando que $A \subseteq B$ basta reescrever a $\gamma-$transferência de semicontinuidade inferior na segunda variável ($\gamma-$tsciy) para $\phi \circ f(x, y)$, e ver que significa $(-\gamma)-$transferência de semicontinuidade superior na primeira variável ($(-\gamma)-$tscsx) para $g(x, y) := -\phi(y, x)$. O que completa a prova. ■

Funções conjugadas. Nesta parte designamos por X^* o espaço dual de um espaço vetorial topológico X e a aplicação bilinear de dualidade entre X e X^* por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.2.9 [26, pág. 17] *A* ***conjugada*** *de uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é a função $f^* : X^* \to [-\infty, +\infty]$ definida por*

$$f^*(\xi) := \sup_{x \in X} \{\langle \xi, x \rangle - f(x)\} \quad \textit{para cada } \xi \in X^*. \tag{1.1}$$

Observação 1.2.2 *A partir da definição acima, temos que:*

1) Em cada ponto de X^*, f^* é o supremo da família das funções afins contínuas $\langle \cdot, x \rangle - f(x)$, para $x \in \operatorname{dom} f$. Logo f^* é uma função convexa e semicontínua inferior [26, Proposição 3.1, pág. 14]*;*

2) Se $f \equiv +\infty$, então $f^* \equiv -\infty$;

3) Se existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = -\infty$, então $f^*(\xi) = +\infty$ para todo $\xi \in X^*$. Em particular, se $f \equiv -\infty$, então $f^* \equiv +\infty$;

4) Se $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$ são funções tais que $f \leq g$, então $f^* \geq g^*$;

5) Para quaisquer $x \in X$ e $\xi \in X^*$ sempre vale a ***Desigualdade de Fenchel*** [70, pág. 87] *ou* ***de Young Generalizada*** [74, pág. 490] *dada por*

$$f^*(x) + f(x) \geq \langle \xi, x \rangle, \tag{1.2}$$

desde que a soma do lado esquerdo faça sentido.

Similarmente, a conjugada de uma função $\varphi : X^* \to [-\infty, +\infty]$ é definida por

$$\varphi^*(x) := \sup_{\xi \in X^*} \{\langle \xi, x \rangle - \varphi(\xi)\} \text{ para cada } x \in X. \tag{1.3}$$

É fácil verificar que $f^{**} \leq f$ onde $f^{**} = (f^*)^*$ é a **biconjugada** da função f. A igualdade $f^{**} = f$ é verificada se, e somente se, f é uma função convexa e semicontínua inferior ou $f \equiv +\infty$ ou $f \equiv -\infty$ [26, Proposição 4.1, pág. 18].

O **subdiferencial** de uma função $f : X \to [-\infty, +\infty]$ no ponto $x \in X$ com $f(x) \in \mathbb{R}$ é o seguinte subconjunto de X^*

$$\partial f(x) := \{\xi \in X^* : f(y) \geq \langle \xi, y - x \rangle + f(x)\} \tag{1.4}$$

Se $f(x) \notin \mathbb{R}$ consideramos que $\partial f(x) = \emptyset$. É claro que pode ocorrer $\partial f(x) = \emptyset$ para $x \in \operatorname{dom} f$. Diremos que f é subdiferenciável em x se $\partial f(x) \neq \emptyset$. A seguir, destacamos a seguinte caracterização dos elementos do subdiferencial de uma função f em termos de sua conjugada f^*:

Proposição 1.2.5 [74, Proposição 51.2,(8b)] *Seja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ uma função. Então $\xi \in \partial f(x)$ se, e somente se,*

$$f(x) + f^*(x) = \langle \xi, x \rangle.$$

para todo $x \in X$ e todo $\xi \in X^*$ tais que $+\infty - \infty$ não ocorra.

Seja $\epsilon \geq 0$, o **ϵ-subdiferencial** de $f : X \to [-\infty, +\infty]$ no ponto $x \in X$ com $f(x) \in \mathbb{R}$, $\partial_\epsilon f(x)$, possui também a seguinte caracterização em termos de f^* [72, Teorema 2.4.2, (ii)]:

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon f(x) &:= \{\xi \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle - \epsilon \; \forall \, y \in X\} \\ &= \{\xi \in X^* : f^*(\xi) + f(x) - \langle \xi, x \rangle \leq \epsilon\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Como para o subdiferencial, se $f(x) \notin \mathbb{R}$ consideramos que $\partial_\epsilon f(x) = \emptyset$. Notamos que se $0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 < +\infty$ então

$$\partial f(x) = \partial_0 f(x) \subset \partial_{\epsilon_1} f(x) \subset \partial_{\epsilon_2} f(x). \tag{1.6}$$

Em [61], Rockafellar apresenta vários resultados envolvendo funções conjugadas em espaços de dimensão finita, os quais são generalizados para espaços vetoriais em [62] e para espaços localmente convexos em [26, 65, 74].

Os próximos resultados envolvendo funções conjugadas são usados na seção 6.4.

Lema 1.2.1 [42, Proposição 2.1] *Sejam* $\Phi : E \to (-\infty, +\infty]$ *uma função própria, convexa e semicontínua inferior e um ponto* $x \in \operatorname{dom} \Phi$. *Então o epígrafo de* Φ^*, $\operatorname{epi} \Phi^*$, *verifica*

$$\operatorname{epi} \Phi^* = \bigcup_{\epsilon \geq 0} \{(v, \langle v, x\rangle + \epsilon - \Phi(x)) \ : \ v \in \partial_\epsilon \Phi(x)\}. \tag{1.7}$$

Observemos que a expressão anterior independe da escolha do ponto x no domínio da função Φ.

Lema 1.2.2 [15, Lema 1] *Sejam* $\Phi, \Gamma : E \to (-\infty, +\infty]$ *funções próprias, convexas e semicontínuas inferiores com* $\operatorname{dom} \Phi \cap \operatorname{dom} \Gamma \neq \emptyset$. *Então temos que:*

(a) $(\Phi + \Gamma)^* = \operatorname{cl}(\Phi^* \oplus \Gamma^*)$;

(b) $\operatorname{epi} \operatorname{cl}(\Phi^* \oplus \Gamma^*) = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} \Phi^* + \operatorname{epi} \Gamma^*) = \operatorname{epi}(\Phi + \Gamma)^*$.

onde $\Phi^* \oplus \Gamma^*(v) := \inf_{v_1+v_2=v}\{\Phi^*(v_1) + \Gamma^*(v_2)\}$ *é a infimal convolução de* Φ^* *com* Γ^* [65, I, 5].

A propriedade abaixo foi estabelecida em [43, Proposição 2.2]. Aqui, apresentamos uma diferente prova usando caracterizações clássicas de derivadas direcionais para o caso em dimensão finita.

Lema 1.2.3 *Seja* $\varphi : E \to \mathbb{R}$ *uma função convexa onde* E *é um espaço vetorial de dimensão finita. Então*

$$0^+(\operatorname{epi} \varphi^*) = \{(0, \nu) \in E \times \mathbb{R} : \nu \geq 0\}, \tag{1.8}$$

onde $0^+(\cdot)$ *é o cone de recessão do* $\operatorname{epi} \varphi^*$ [61, II, 8].

Prova. Desde que φ é uma função convexa finita, segue que φ^* é própria, convexa e semicontínua inferior. Logo, $\operatorname{epi}\varphi^* \neq \emptyset$ e pela definição de cone de recessão temos que

$$0^+(\text{epi } \varphi^*) := \{(v,\nu) : (w,\mu) + \lambda(v,\nu) \in \text{epi } \varphi^*, \ \forall\, \lambda \geq 0, \ \forall\, (w,\mu) \in \text{epi } \varphi^*\}.$$

Seja $(0,\nu) \in E \times \mathbb{R}$ tal que $\nu \geq 0$. Então, para cada $(w,\mu) \in \text{epi } \varphi^*$, vale que $\varphi^*(w) \leq \mu + \lambda\nu$ para todo $\lambda \geq 0$. Portanto, $(w,\mu) + \lambda(0,\nu) = (w, \mu + \lambda\nu) \in \text{epi } \varphi^*$ para todo $(w,\mu) \in \text{epi } \varphi^*$ e para todo $\lambda \geq 0$. Assim,

$$\{(0,\nu) \in E \times \mathbb{R} : \nu \geq 0\} \subseteq 0^+(\text{epi } \varphi^*).$$

Agora, seja $(v,\nu) \in 0^+(\text{epi } \varphi^*)$. Supondo que $v \neq 0$, para cada $w \in \operatorname{dom}\varphi^*$ e $(w,\mu) := (w, \varphi^*(w)) \in \text{epi } \varphi^*$ obtemos $\varphi^*(w + \lambda v) \leq \varphi^*(w) + \lambda\nu$ para todo $\lambda \geq 0$. Logo,

$$\frac{\varphi^*(w + \lambda v) - \varphi^*(w)}{\lambda} \leq \nu \ \ \forall\, w \in \operatorname{dom}\varphi^*, \ \forall\, \lambda > 0. \tag{1.9}$$

Por outro lado, temos que a derivada direcional $(\varphi^*)'(w;v)$ existe e satisfaz [61, Teorema 23.1]:

$$(\varphi^*)'(w;v) = \inf_{\lambda > 0} \frac{\varphi^*(w + \lambda v) - \varphi^*(w)}{\lambda} \ \ \forall\, w \in \operatorname{dom}\varphi^*. \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10) temos que

$$(\varphi^*)'(w;v) \leq \nu \ \ \forall\, w \in \operatorname{dom}\varphi^*. \tag{1.11}$$

Além disso, usando a caracterização de $(\varphi^*)'(w;v)$ em termos de $\partial\varphi^*$ [61, Teorema 23.4], obtém-se

$$(\varphi^*)'(w;v) = \sup\{\langle z, v\rangle : z \in \partial\varphi^*(w)\} \ \ \forall\, w \in \operatorname{ri}(\operatorname{dom}\varphi^*). \tag{1.12}$$

Como $v \neq 0$, fazemos

$$v^* := \mu \frac{v}{\|v\|^2} \in E \ \text{ with } \ \mu > \nu. \tag{1.13}$$

Desde que φ é uma função convexa finita, segue que $\varphi^{**} = \varphi$ [61, Teorema 12.2] e $\partial\varphi(v^*) \neq \emptyset$ [61, Teorema 23.4]. Além disso, dado $w^* \in \partial\varphi(v^*)$, temos que $v^* \in \partial\varphi^*(w^*)$ [61, Teorema 23.5], então, $w^* \in \operatorname{dom}\varphi^*$. Portanto, usando a definição de v^* e (1.11)–(1.12) obtemos $\mu = \langle v^*, v\rangle \leq (\varphi^*)'(w^*;v) \leq \nu$, o que contraria a desigualdade em (1.13). Logo, devemos ter $v = 0$ e a relação (1.11) se reduz a $0 = (\varphi^*)'(w^*; 0) \leq \nu$. Assim,

$$0^+(\text{epi}\ \varphi^*) \subseteq \{(0, \nu) \in E \times \mathbb{R} : \nu \geq 0\}.$$

A prova está completa. ■

Para finalizar esta parte, considerando E_1, E_2 espaços vetoriais de dimensão finita, temos que uma **aplicação afim** $A : E_1 \to E_2$ pode ser expressa por

$$A(x) = B(x) + A_0, \tag{1.14}$$

onde $B : E_1 \to E_2$ é linear e $A_0 \in E_2$ [61, Teorema 1.5].

A aplicação **adjunta** de uma aplicação linear $B : E_1 \to E_2$, $B^\diamond : E_2 \to E_1$, verifica

$$\langle x, B(w)\rangle = \langle B^\diamond(x), w\rangle \text{ para todo } x \in E_2, \text{ para todo } w \in E_1, \tag{1.15}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica o produto interno entre E_1 e E_2.

A função composta $\Phi \circ A : E_1 \to (-\infty, +\infty]$ definida por $\Phi(A(x))$ para todo $x \in E_1$ é convexa. E é própria quando $A(E_1)$ intersecta $\text{dom}\,\Phi$.

1.3 Tópicos da Teoria KKM

Nesta seção, apresentamos conceitos e resultados da Teoria KKM que utilizamos no desenvolvimento do Capítulo 2 desta tese.

Começamos lembrando que dado um subconjunto A de um espaço vetorial X, $\text{co}\,A$ denota a **envoltória convexa** do conjunto A e é dada por:

$$\text{co}\,A := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : a_i \in A, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Em [48], Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz estabeleceram o seguinte resultado conhecido na literatura como Lema KKM:

Teorema 1.3.1 [24, pág. 679] *Sejam o conjunto de vértices S de um simplex em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação $T : S \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ tais que:*

(i) $T(x)$ é compacto para cada $x \in S$;

(ii) A envoltória convexa de todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$ *de* S *está contida em* $\bigcup_{i=1}^{k} T(x_i)$.

Então $\bigcap_{x \in S} T(x) \neq \emptyset$.

Agora apresentamos o Princípio KKM que generaliza o Lema KKM (Teorema 1.3.1) para o contexto de espaços localmente convexos.

Teorema 1.3.2 (Pricípio KKM, [6, pág. 210]) *Sejam* A *um subconjunto não vazio de um espaço localmente convexo* E *e* $T : A \to \mathscr{P}(E)$ *uma aplicação ponto-conjunto tais que:*

(i) $T(a)$ *é um conjunto fechado para cada* $a \in A$*;*

(ii) A envoltória convexa de todo subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *de* A *está contida em* $\bigcup_{i=1}^{k} T(a_i)$.

Então a família de conjuntos $\{T(a) : a \in A\}$ *tem a propriedade da interseção finita.*

Em [28], Ky Fan também generalizou o Lema KKM (Teorema 1.3.1) garantindo que, sob certas condições, a interseção arbitrária de subconjuntos de um espaço topológico é não vazia.

Teorema 1.3.3 (Lema FKKM) *Sejam* A *um subconjunto não vazio de um espaço vetorial topológico de Hausdorff* X *e* $T : A \to \mathscr{P}(X)$ *é uma aplicação ponto-conjunto tais que:*

1. $T(a)$ *é fechado em* X *para cada* $a \in A$*;*

2. $T(a_0)$ *é compacto para ao menos um ponto* $a_0 \in A$*;*

3. *A envoltória convexa de todo subconjunto finito* $\{a_1, \ldots, a_k\}$ *de* A *está contida em* $\bigcup_{i=1}^{k} T(a_i)$.

Então $\bigcap_{a \in A} T(a) \neq \emptyset$.

Este resultado possui várias generalizações, por exemplo, em [13, 23, 27, 44, 68], a condição dada no ítem *3* é mantida enquanto as dos ítens *1* e *2* são substituídas por hipóteses mais fracas. Já em [1, 20], ocorre exatamente o contrário.

Com a finalidade de enunciarmos alguns resultados da literatura que estendem o Lema FKKM (Teorema 1.3.3) e aos quais faremos referência nesta tese, consideramos a condição *3* deste lema como a definição de função KKM.

Definição 1.3.1 [6, Definição 6.4.1, pág. 208] *Seja X um espaço vetorial real topológico de Hausdorff e seja A um subconjunto não vazio de X. Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \to \mathscr{P}(X)$ é denominada **KKM** se para todo subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ vale que*

$$\operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G(a_i). \tag{1.16}$$

Esta definição é amplamente utilizada na literatura [1, 11, 13, 18, 20, 27] com pequenas mudanças ou com outros nomes. Por exemplo, em [68], Tian denomina a aplicação $G(\cdot)$ verificando a definição acima por $FS-$convexa. Já em [11, 13, 20, 27], ela aparece considerando que o conjunto A é um subconjunto convexo de um espaço topológico de Hausdorff.

Observação 1.3.1 *Se $G : A \to \mathscr{P}(X)$ é KKM, então para todo $a \in A$ vale que $a \in G(a)$. De fato, para cada $a \in A$, temos que $\{a\} = \operatorname{co}\{a\} \subseteq G(a)$.*

Ilustramos a definição acima com o seguinte exemplo:

Exemplo 1.3.1 *Sejam $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 3]$ e $G : A \to \mathscr{P}(X)$ uma aplicação dada por*

$$G(a) = \begin{cases} (0, 2], & se \;\; 0 < a < 1 \\ [1, a+1], & se \;\; 1 \leq a \leq 3. \end{cases}$$

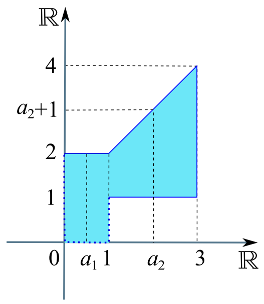

Figura 1.3.1.

Seja $\{a_1, \ldots, a_m\}$ um subconjunto finito de A, se:

(a) $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq (0, 1)$, *então*

$$\operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq (0, 2] = \bigcup_{i=1}^{m} G(a_i);$$

(b) $\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq [1, 3]$ *e* $\tilde{a} = \max\{a_1, \ldots, a_m\}$, *então*

$$\operatorname{co}\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq [1, \tilde{a} + 1] = \bigcup_{i=1}^{m} G(a_i);$$

(c) existem $\bar{a}$ e $\tilde{a}$ em $\{a_1, \ldots, a_m\}$ tais que $\bar{a} \in (0,1)$ e $\tilde{a} = \max\{a_i : a_i \in [1,3], i = 1, \ldots, m\}$, então

$$\mathrm{co}\,\{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq (0, \tilde{a}+1] = \bigcup_{i=1}^{m} G(a_i).$$

Logo, concluímos que G é KKM.

Em [20], Chang e Zhang introduziram o conceito de uma aplicação KKM generalizada que enfraquece o conceito de aplicação KKM visto na Definição 1.3.1.

Definição 1.3.2 *Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff X e Y, respectivamente, sendo B um conjunto convexo. Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é chamada **KKM generalizada** se para todo subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ existe um subconjunto $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ tal que, para qualquer subconjunto $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$, $1 \leq k \leq n$, temos que*

$$\mathrm{co}\,\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G(a_{i_j}). \tag{1.17}$$

Observação 1.3.2 *Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff X e Y, respectivamente, com B convexo.*

(a) *Se $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é uma aplicação KKM generalizada, então para todo $a \in A$ vale que $G(a) \neq \emptyset$. De fato, por definição temos que para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $\{b\} = \mathrm{co}\{b\} \subseteq G(a)$. Assim, $G(a) \neq \emptyset$ para todo $a \in A$.*

(b) *Se a aplicação $G : A \to \mathscr{P}(X)$ é KKM, então G é KKM generalizada. De fato, considere $Y := X$ e $B := A$ e para qualquer subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ faça $b_i := a_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

c) *Se $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é KKM generalizada, então a aplicação $\mathrm{cl}_B\, G : A \to \mathscr{P}(B)$ também é KKM generalizada, onde $\mathrm{cl}_B\,(C)$ é o fecho de C relativo a B. De fato, para qualquer subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de A sempre vale que $\bigcup_{i=1}^{n} G(a_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{cl}_B\, G(a_i)$.*

Em [20, pág. 211] é apresentado um exemplo de uma aplicação G que é KKM generalizada mas que não é KKM. A seguir, consideramos outro exemplo deste tipo que permitirá descrever outros conceitos.

Exemplo 1.3.2 *Sejam* $X = Y = B = \mathbb{R}$, $A = (-\infty, 0) \cup \{1, 2, 3\}$ *e* $G : A \to \mathscr{P}(X)$ *definida como*

$$G(a) = \begin{cases} (0, +\infty), & se \;\; a = 1 \\ (-2, -1) \cup [1, +\infty), & se \;\; a = 2 \\ (-\infty, 2], & se \;\; a = 3 \\ \mathbb{R}, & se \;\; a \notin \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

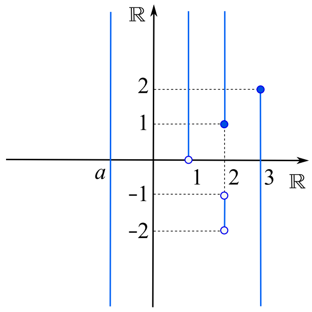

Figura 1.3.2.

Notamos que $3 \notin G(3)$. *Logo,* G *não é uma aplicação KKM. No entanto, afirmamos que* G *é KKM generalizada. De fato, se, para qualquer subconjunto finito* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, *escolhermos* $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq [1, 2]$, *então para todo subconjunto* $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$ *temos que*

$$\operatorname{co}\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq [1, 2] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G(a_{i_j}). \tag{1.18}$$

Agora apresentamos um exemplo de uma aplicação G que não é KKM generalizada, no entanto $\mathrm{cl}_B\, G$ é KKM generalizada.

Exemplo 1.3.3 *Sejam* $X = Y = \mathbb{R}$, $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ *e* $B = [1, 3]$. *Considere* $G : A \to \mathscr{P}(B)$ *definida como* $G(a) = [a + 1, a + 2) \cap \mathbb{Q}$. *Afirmamos que* G *não é KKM generalizada. De fato, seja* $\{a_1, a_2\} = \{0, 1\}$, *se escolhermos* $b_i \in G(a_i)$ *com* $b_1 \neq b_2$, *então temos que*

$$\operatorname{co}\{b_1, b_2\} = [b_1, b_2] \nsubseteq G(a_1) \cup G(a_2) = [1, 3) \cap \mathbb{Q}. \tag{1.19}$$

Se, por outro lado, escolhermos $b_i = b$, *então temos que* $b \in G(a_1) = G(0)$ *ou* $b \in G(a_2) = G(1)$ *de modo exclusivo, pois* $G(0) \cap G(1) = \emptyset$. *Logo, para algum* $i \in \{1, 2\}$ *vale que*

$$\operatorname{co}\{b_i\} = \{b\} \notin G(a_i). \tag{1.20}$$

Portanto G *não é KKM generalizada. Agora, considerando* $\mathrm{cl}_B\, G(a) = [a+1, a+2]$ *para cada* $a \in A$, *afirmamos que a aplicação* $\mathrm{cl}_B\, G$ *é KKM generalizada, veja a Figura 1.3.3. De fato, para qualquer subconjunto finito* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, *basta tomarmos* $b_i = 2$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ *e obtemos que*

$$\operatorname{co}\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} = \{2\} \in \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{cl}_B\, G(a_{i_j}), \;\; pois \; \{2\} = \bigcap_{a \in A} \mathrm{cl}_B\, G(a).$$

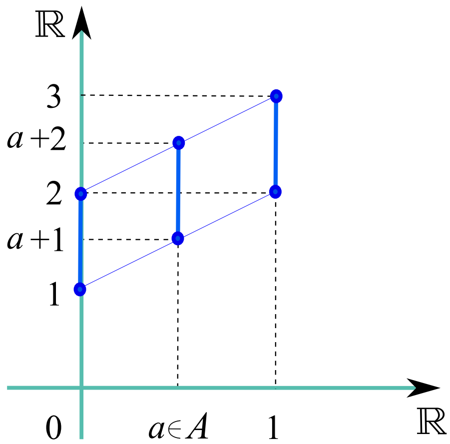

Figura 1.3.3.

Baseando-se na definição de aplicação KKM generalizada, Chang e Zhang obtiveram a seguinte generalização do Princípio KKM (Teorema 1.3.2).

Teorema 1.3.4 [20, Teorema 3.1] *Sejam A um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X e $G : A \to \mathscr{P}(E)$ tais que:*

1. *$G(a) \cap L$ é um conjunto fechado em E, na topologia Euclideana, para todo $a \in A$ e para todo subespaço de dimensão finita L de X.*

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é KKM generalizada;

(ii) A família de conjuntos $\{G(a) : a \in A\}$ tem a propriedade da interseção finita.

Além disso, aplicando este último resultado, Chang e Zhang também estabeleceram uma extensão do Lema FKKM (Teorema 1.3.3) como segue:

Teorema 1.3.5 [20, Teorema 3.2] *Sejam A um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X e $G : A \to \mathscr{P}(X)$ uma aplicação tais que:*

1. *$G(a)$ é um conjunto fechado em X para cada $a \in A$;*

2. *$G(a_0)$ é compacto para ao menos um ponto $a_0 \in A$.*

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) G é KKM generalizada;

(ii) $\bigcap_{a\in A} G(a) \neq \emptyset$.

Em [21], Chang e outros consideram o seguinte conceito:

Definição 1.3.3 *Sejam A um conjunto não vazio, B um subconjunto não vazio convexo de um espaço vetorial e Z um espaço topológico. Sejam $S : A \to \mathscr{P}(B)$, $T : B \to \mathscr{P}(Z)$ e $G : A \to \mathscr{P}(Z)$ três aplicações. Diremos que S é **S-KKM generalizada com respeito a T** se para todo subconjunto finito $\{a_1, \dots, a_m\}$ de A tem-se*

$$T(\operatorname{co} S(\{a_1, \dots, a_m\})) \subset G(\{a_1, \dots, a_m\}).$$

Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff X e Y, respectivamente, sendo B um conjunto convexo. Observamos que se $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é uma aplicação KKM generalizada, então G é S-KKM generalizada com respeito a T. Basta considerarmos $Z = X$, S a aplicação que associa a cada subconjunto finito $\{a_1, \dots, a_m\}$ de A o conjunto $\{b_1, \dots, b_m\}$ de B da Definição 1.3.2 e T é a inclusão de B em Z. Para os objetivos desta tese é suficiente considerarmos este caso particular.

Agora, considerando A e B subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff X e Y, respectivamente. Lembramos que $\operatorname{cl}_B G(A)$ indica o fecho de $G(A)$ relativo a B. Abaixo, enunciamos a seguinte definição introduzida por Tian em [68] do mesmo modo como é usada por Fakhar e Zafarani em [27]:

Definição 1.3.4 *Uma aplicação $G : A \to \mathscr{P}(B)$ tem a **propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi)**, se dados $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b \notin G(a)$, então existe um ponto $a' \in A$ tal que $b \notin \operatorname{cl}_B G(a')$.*

Observação 1.3.3 *Uma aplicação $G : A \to \mathscr{P}(B)$ com imagens fechadas tem a propriedade tfi. Com efeito, dado que $G(a) = \operatorname{cl}_B G(a)$, se $b \notin G(a)$ basta considerarmos $a' := a$.*

Notamos que a recíproca desta afirmação não é verdadeira. De fato, o lema dado a seguir é uma caracterização da propriedade (tfi) que permite uma visualização geométrica do seu significado, possibilitando-nos construir exemplos de aplicações ponto-conjunto verificando (tfi) e que não possuem imagens fechadas.

Proposição 1.3.1 [68] *Sejam A e B subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff X e Y, respectivamente. Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \to \mathscr{P}(B)$ tem a propriedade (tfi) se, e somente se,*

$$\bigcap_{a \in A} G(a) = \bigcap_{a \in A} \mathrm{cl_B} G(a). \tag{1.21}$$

Usando a caracterização de (tfi) é imediato verificar que a aplicação G do Exemplo 1.3.2 verifica (tfi) e, no entanto, as imagens de G não são todas fechadas. Logo, a propriedade (tfi) enfraquece a condição clássica de imagens fechadas.

Para finalizar esta seção, enunciamos dois resultados da literatura sobre interseção arbitrária de conjuntos em espaços topológicos que envolvem aplicações com a propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi).

Teorema 1.3.6 [68, Teorema 2] *Seja B um subconjunto convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X e seja A um subconjunto não vazio de B. Se $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é uma aplicação tal que:*

i) $\mathrm{cl}_B\, G : A \to \mathscr{P}(B)$ *é KKM;*

ii) G possui a propriedade de transferência a fechos de imagens sobre A;

iii) existe um subconjunto não vazio A_0 de A tal que a interseção $\bigcap_{a \in A_0} \mathrm{cl}_B\, G(a)$ é um conjunto compacto e A_0 está contido em um subconjunto compacto e convexo de B.

Então, $\bigcap_{a \in A} G(a) \neq \emptyset$.

Teorema 1.3.7 [1, Teorema 2.1] *Seja A um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X. Seja $G : A \to \mathscr{P}(X)$ uma aplicação tal que:*

(i) G é KKM generalizada;

(ii) G possui a propriedade de transferência a fechos de imagens;

(iii) $\mathrm{cl}\, G(a_0)$ *é compacto para ao menos um ponto $a_0 \in A$.*

Então, $\bigcap_{a \in A} G(a) \neq \emptyset$.

Capítulo 2

Teoria KKM: algumas generalizações

Neste capítulo, apresentamos uma nova extensão do Lema de Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz conhecido na literatura como Lema FKKM [28] (Teorema 1.3.3 do Capítulo 1 desta tese). Além disso, também generalizamos o Princípio KKM (Teorema 1.3.2 do Capítulo 1 desta tese). Finalizamos mostrando que os nossos resultados estendem aqueles obtidos em [1, 13, 20, 23, 27, 44].

Aqui usamos o conteúdo do Capítulo 1, referente a espaços topológicos, análise funcional e teoria KKM.

2.1 Uma generalização do Princípio KKM

Nesta seção, obtemos uma nova versão do Princípio KKM (Teorema 1.3.2) referente a propriedade da interseção finita de uma família de conjuntos usando o conceito de aplicação KKM generalizada.

Sejam A e B dois subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais topológicos reais de Hausdorff X e Y, respectivamente, sendo B um conjunto convexo. Na Definição 1.3.2 vimos que uma aplicação ponto-conjunto $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é chamada KKM generalizada se para cada subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ existe um subconjunto $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq B$ tal que, para qualquer subconjunto $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$, $1 \leq k \leq n$, vale que

$$\mathrm{co}\,\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G(a_{i_j}).$$

A seguir, estabelecemos nossa primeira contribuição à Teoria KKM. Mais precisamente, obtemos a propriedade de interseção finita de uma família de conjuntos sob condições mais gerais do que aquelas consideradas no capítulo anterior como mostramos na próxima seção.

Teorema 2.1.1 *Sejam A, B dois subconjuntos não vazios de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X sendo B convexo. Considere $G : A \to \mathscr{P}(B)$. Então, $\operatorname{cl}_B G : A \to \mathscr{P}(B)$ é KKM generalizada se e somente se, a família dos conjuntos $\{\operatorname{cl}_B G(a) : a \in A\}$ tem a Propriedade da Interseção Finita (PIF).*

Prova. Seja $\operatorname{cl}_B G$ uma aplicação KKM generalizada. Suponha, por absurdo, que existe $\tilde{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ um subconjunto finito de A tal que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_B G(a_i) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Por hipótese, sabemos que existe um subconjunto $B_{\tilde{A}} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de B tal que para todo $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$, com $k \in I := \{1, \ldots, n\}$ vale que

$$\operatorname{co}\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{cl}_B G(a_{i_j}). \tag{2.2}$$

De (2.1) obtemos que, para cada $b \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ existe $i \in I$ tal que $b \notin \operatorname{cl}_B G(a_i)$. Defina o seguinte conjunto não vazio

$$I_b := \{i \in I : b \notin \operatorname{cl}_B G(a_i)\}. \tag{2.3}$$

Agora considere a seguinte aplicação $T : \operatorname{co} B_{\tilde{A}} \to \mathscr{P}(\operatorname{co} B_{\tilde{A}})$ definida por

$$T(b) := \operatorname{co}\{b_i \in B_{\tilde{A}} : i \in I_b\}. \tag{2.4}$$

A seguir, vamos provar que T verifica todas as hipóteses do Teorema 1.2.1 de ponto fixo dado no Capítulo 1.

(i) O conjunto $\operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ é não vazio, convexo e compacto;

(ii) Para cada $b \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$, o conjunto $T(b) \subseteq \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ é não vazio e convexo;

(iii) Afirmamos que, para cada $w \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$, $T^{-1}(w) = \{b \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}} : w \in T(b)\}$ contém um aberto $\mathcal{O}_w$ em $\operatorname{co} B_{\tilde{A}}$. De fato, seja $w \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$. Sabemos que $T^{-1}(w)$ é vazio se $w \notin \operatorname{Im} T$. Neste caso, tomamos $\mathcal{O}_w = \emptyset$. Caso contrário, seja $b \in T^{-1}(w)$. Então, de (2.4) sabemos que $w \in \operatorname{co}\{b_i \in B_{\tilde{A}} : i \in I_b\} \subseteq B$, pois B é um conjunto convexo. Assim, $b \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ e $b \notin \operatorname{cl}_B G(a_i)$ para todo $i \in I_b$. Ou seja,

$$b \in C_b := \operatorname{co} B_{\tilde{A}} \bigcap \left(B \setminus \left(\bigcup_{i \in I_b} \operatorname{cl}_B G(a_i) \right) \right). \tag{2.5}$$

Como o conjunto $\bigcup_{i \in I_b} \operatorname{cl}_B G(a_i)$ é fechado em B por ser união finita de fechados, temos que, o conjunto $B \setminus \left(\bigcup_{i \in I_b} \operatorname{cl}_B G(a_i) \right)$ é um aberto em B. Assim, existe um aberto V^b de X tal que $B \setminus \left(\bigcup_{i \in I_b} \operatorname{cl}_B G(a_i) \right) = V^b \bigcap B$. Portanto, o conjunto

$$C_b = \operatorname{co} B_{\tilde{A}} \bigcap \left(V^b \bigcap B \right) = V^b \bigcap \operatorname{co} B_{\tilde{A}} \tag{2.6}$$

é um aberto em $\operatorname{co} B_{\tilde{A}}$. Mais ainda, de (2.5) tem-se que $b \in C_b$. Logo, o conjunto

$$\mathcal{O}_w := \bigcup_{b \in T^{-1}(w)} C_b = \left(\bigcup_{b \in T^{-1}(w)} V^b \right) \bigcap \operatorname{co} B_{\tilde{A}} \tag{2.7}$$

também é um aberto em $\operatorname{co} B_{\tilde{A}}$.

Afirmamos que $\mathcal{O}_w \subseteq T^{-1}(w)$. De fato, dado $z \in \mathcal{O}_w$, então $z \in C_b$ para algum $b \in T^{-1}(w)$. De (2.5), $z \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ e $z \notin \bigcup_{i \in I_b} \operatorname{cl}_B G(a_i)$. Portanto, $I_b \subseteq I_z$ para todo $b \in T^{-1}(w)$ tal que $z \in C_b$. Logo, de (2.4) temos que $w \in T(b) \subseteq T(z)$, ou seja, $z \in T^{-1}(w)$. Assim concluímos que, para cada $w \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$, $T^{-1}(w)$ contém um aberto $\mathcal{O}_w$ em $\operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ que é o que queríamos provar.

(iv) Afirmamos que $\operatorname{co} B_{\tilde{A}} = \bigcup_{w \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}} \mathcal{O}_w$. De fato, de (2.7) temos que $\bigcup_{w \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}} \mathcal{O}_w \subseteq \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$. Agora tomamos $z \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$, logo pelo ítem (ii) existe $w \in T(z) \subseteq \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$, isto é, $z \in T^{-1}(w)$. Substituindo z por b em (2.5) e (2.7) resulta que $z \in C_z \subseteq \mathcal{O}_w \subseteq \bigcup_{v \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}} \mathcal{O}_v$. Logo, obtemos a inclusão $\operatorname{co} B_{\tilde{A}} \subseteq \bigcup_{w \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}} \mathcal{O}_w$. De onde segue a afirmação inicial.

Portanto, podemos aplicar o Teorema 1.2.1 à aplicação T com $K := \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ obtendo que existe $b^* \in \operatorname{co} B_{\tilde{A}}$ tal que

$$b^* \in T(b^*). \tag{2.8}$$

Então, de (2.4) e (2.2) temos que

$$b^* \in T(b^*) = \operatorname{co}\{b_i \in B_{\tilde{A}} : i \in I_{b^*}\} \subseteq \bigcup_{i \in I_{b^*}} \operatorname{cl}_B G(a_i) \tag{2.9}$$

Por outro lado, da definição de I_{b^*} resulta que $b^* \notin \operatorname{cl}_B G(a_i)$ para todo $i \in I_{b^*}$. Logo,

$$b^* \notin \bigcup_{i \in I_{b^*}} \operatorname{cl}_B G(a_i),$$

o que contradiz (2.9). Logo, para todo subconjunto finito $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$ vale que $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{cl}_B G(a_i) \neq \emptyset$, ou seja, a família $\{\operatorname{cl}_B G(a) : a \in A\}$ tem a propriedade da intersecção finita.

Provamos agora, a outra implicação. Assumamos que a família dos conjuntos $\{\operatorname{cl}_B G(a) : a \in A\}$ tem a Propriedade da Interseção Finita (PIF). Devemos provar que $\operatorname{cl}_B G : A \to \mathscr{P}(B)$ é KKM generalizada. De fato, considere um conjunto finito $\tilde{A} = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$. Então, por hipótese temos que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_B G(a_i) \neq \emptyset. \tag{2.10}$$

Portanto, existe $b \in \bigcap_{i=1}^n \operatorname{cl}_B G(a_i) \subseteq B$. Definimos $b_i = b$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Então, para todo $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_n\}$, com $k \in I := \{1, \ldots, n\}$ vale que

$$\operatorname{co}\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} = \{b\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{cl}_B G(a_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \operatorname{cl}_B G(a_{i_j}). \tag{2.11}$$

Portanto, concluimos que $\operatorname{cl}_B G : A \to \mathscr{P}(B)$ é KKM generalizada como queriamos provar. ∎

Mostramos a seguir que o Princípio KKM é obtido a partir deste teorema.

Corolário 2.1.1 [6, Princípio KKM][Tese, Teorema 1.3.2] *Seja X um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real de Hausdorff localmente convexo E. Seja $T : X \to \mathscr{P}(E)$ uma aplicação ponto-conjunto tal que $T(x)$ é fechado para todo $x \in X$ e T é KKM. Então a família de conjuntos $\{T(x) : x \in X\}$ tem a propriedade da interseção finita.*

Prova. Definamos $A = X$ e $B = E$. Como $T(x)$ é fechado para todo $x \in X$ temos que $\operatorname{cl}_B T(x) = T(x)$ é KKM. Portanto, $\operatorname{cl}_B T(x)$ é KKM generalizada (Observação

1.3.2). Logo, como a aplicação ponto-conjunto T verifica as condições do Teorema 2.1.1 concluimos que a família de conjuntos $\{T(x) : x \in X\}$ tem a propriedade da interseção finita que é o resultado desejado. ■

Finalizamos esta parte com um exemplo que verifica as hipóteses do nosso Teorema 2.1.1 e não atende às hipóteses do Corolário 2.1.1. Portanto, o nosso resultado estende o Pricípio KKM,

Exemplo 2.1.1 *Sejam* $X = Y = A = B = \mathbb{R}$ *e a aplicação ponto-conjunto* $G : A \to \mathscr{P}(X)$ *definida como*

$$G(a) = \begin{cases} [0, +\infty), & se \;\; a = 1 \\ (-\infty, 1], & se \;\; a = 2 \\ \mathbb{R}, & se \;\; a \notin \{1, 2\}. \end{cases}$$

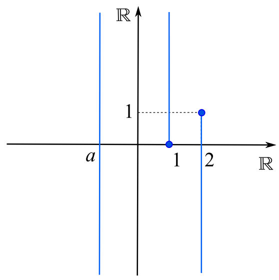

Figura 2.1.1.

Notamos que $2 \notin G(2)$. *Logo,* G *não é uma aplicação KKM. Portanto, o Corolário 2.1.1 (Princípio KKM) não é aplicável a este caso.*

No entanto, afirmamos que G *é KKM generalizada. De fato, se, para qualquer subconjunto finito* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, *escolhermos* $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq [0, 1]$, *então para todo subconjunto* $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$ *temos que*

$$\operatorname{co}\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq [0, 1] = \bigcap_{a \in A} G(a) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G(a_{i_j}).$$

Como $\operatorname{cl} G(\cdot) = G(\cdot)$, *obtemos que* $\operatorname{cl} G(\cdot)$ *é KKM generalizada. Portanto, podemos aplicar o nosso Teorema 2.1.1 à* $\operatorname{cl} G$, *obtendo que para todo subconjunto finito* $\tilde{A}$ *de* $\mathbb{R}$ *vale que*

$$\bigcap_{a \in \tilde{A}} G(a) = \bigcap_{a \in \tilde{A}} \operatorname{cl} G(a) \neq \emptyset.$$

Isto é, a família $\{G(a) : a \in A\}$ *tem a propriedade da interseção finita. (Este exemplo também mostra que o conceito de aplicações KKM generalizadas enfraquece o de aplicações KKM).*

2.2 Uma generalização do Lema FKKM

Nesta parte, apresentamos uma versão mais refinada do Lema FKKM [28] (Teorema 1.3.3) usando o resultado obtido na seção anterior e a propriedade de transferência a fechos de imagens.

Sejam A e B subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais topológicos reais de Hausdorff X e Y, respectivamente. Na Definição 1.3.4 vimos que uma aplicação $G : A \to \mathscr{P}(B)$ tem a propriedade de transferência a fechos de imagens se dados $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b \notin G(a)$, então existe um ponto $a' \in A$ tal que $b \notin \mathrm{cl}_B G(a')$. Além disso, a Proposição 1.3.1 diz que G tem a propriedade (tfi) se, e somente se,

$$\bigcap_{a \in A} G(a) = \bigcap_{a \in A} \mathrm{cl_B} G(a). \tag{2.12}$$

Agora podemos estabelecer a nossa segunda contribuição à Teoria KKM.

Teorema 2.2.1 *Sejam A, B dois subconjuntos não vazios de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X sendo B convexo. Se $G : A \to \mathscr{P}(B)$ é tal que:*

(i) $\mathrm{cl}_B\, G : A \to \mathscr{P}(B)$ *é KKM generalizada;*

(ii) *G tem a propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi);*

(iii) *Existe um subconjunto não vazio e finito A_0 de A tal que $\bigcap_{z \in A_0} \mathrm{cl}_B\, G(z)$ é um conjunto compacto em B.*

Então $\bigcap_{a \in A} G(a) \neq \emptyset$.

Prova. Seja $\tilde{B} = \bigcap_{z \in A_0} \mathrm{cl}_B\, G(z)$. Desde que a aplicação $\mathrm{cl}_B\, G(\cdot)$ é KKM generalizada, do Teorema 2.1.1, obtemos que a família de conjuntos $\{\mathrm{cl}_B\, G(a) \cap \tilde{B} : a \in A\}$ tem a propriedade da interseção finita. Em particular, obtemos que $\tilde{B}$ é não vazio.

Mais ainda, os elementos da família $\{\mathrm{cl}_B\, G(a) \cap \tilde{B} : a \in A\}$ são conjuntos compactos por serem conjuntos fechados em B contidos no compacto $\tilde{B}$ ([7], [Teorema 1.1.2 da tese]). Portanto, pela propriedade de conjuntos compactos ([7], [Teorema 1.1.1 da tese]) obtemos que

$$\bigcap_{a \in A} \left\{ \mathrm{cl}_B\, G(a) \bigcap \left(\bigcap_{z \in A_0} \mathrm{cl}_B\, G(z) \right) \right\} \neq \emptyset. \tag{2.13}$$

Por outro lado, usando que $A_0 \subseteq A$, valem as seguintes igualdades

$$\bigcap_{a\in A}\left\{\operatorname{cl}_B G(a)\bigcap\left(\bigcap_{z\in A_0}\operatorname{cl}_B G(z)\right)\right\} = \bigcap_{a\in A}\operatorname{cl}_B G(a). \tag{2.14}$$

De (2.13), (2.14) e do Proposição 1.3.1 que caracteriza a propriedade de transferência a fecho de imagens (tfi), obtemos que

$$\bigcap_{a\in A} G(a) = \bigcap_{a\in A}\operatorname{cl}_B G(a) \neq \emptyset,$$

como queriamos demonstrar. ∎

A seguir, obtemos o Lema FKKM [28], o teorema de Chang e Zhang [20] e o teorema de Ansari e outros [1] como casos particulares deste teorema.

Corolário 2.2.1 [28][Tese, Teorema 1.3.3] *Seja X um subconjunto não vazio de um espaço vetorial toplógico de Hausdorff E. Seja $G : X \to \mathscr{P}(E)$ uma aplicação ponto-conjunto tal que $G(x)$ é fechado para todo $x \in X$, $G(x_0)$ é compacto para ao menos um ponto $x_0 \in X$ e G é KKM. Então, $\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset$.*

Prova. Definamos $A = X$ e $B = E$. Como $G(x)$ é fechado para todo $x \in X$ temos que $\operatorname{cl}_B G(x) = G(x)$ é KKM e portanto é KKM generalizada. Mais ainda, G verifica a condição (tfi), pois G tem imagens fechadas. Finalmente, definimos $A_0 = \{x_0\}$ sendo $x_0 \in X$ com $G(x_0)$ compacto. Logo, como a aplicação ponto-conjunto G verifica as condições do Teorema 2.2.1 concluimos que $\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset$ como queriamos provar. ∎

Corolário 2.2.2 [20][Tese, Teorema 1.3.5] *Seja X um subconjunto convexo não vazio de um espaço vetorial toplógico de Hausdorff E. Seja $g : X \to \mathscr{P}(E)$ uma aplicação ponto-conjunto tal que $G(x)$ é fechado para todo $x \in X$ e $G(x_0)$ é compacto para ao menos um ponto $x_0 \in X$. Então $\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset$ se e somente se G é KKM generalizada.*

Prova. Definamos $A = X$ e $B = E$. Temos que $\operatorname{cl}_B G(x) = G(x)$ pois $G(x)$ é fechado para todo $x \in X$. Primeiro vamos supor que $\bigcap_{x\in X} G(x) \neq \emptyset$ o que implica que a família dos conjuntos $\{\operatorname{cl}_B G(x) : x \in X\}$ tem a Propriedade da

Interseção Finita (PIF). Então, pelo Teorema 2.1.1 concluimos que $G = \mathrm{cl}_B G$ é KKM generalizada.

Consideremos agora que a aplicação G é KKM generalizada. Devemos provar que $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$. De fato, a conclusão é válida pois, como no corolário anterior, todas as condições do Teorema 2.2.1 são satisfeitas. ■

Corolário 2.2.3 [1][Tese, Teorema 1.3.7] *Seja X um subconjunto convexo não vazio de um espaço vetorial toplógico de Hausdorff E. Seja $G : X \to \mathscr{P}(E)$ uma aplicação ponto-conjunto com a propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi) e que $G(x_0) = K$ é compacto para ao menos um ponto $x_0 \in X$. Então $\bigcap_{x \in X} G(x) \neq \emptyset$ se e somente se G é KKM generalizada.*

Prova. É conseqüência imediata dos Teoremas 2.1.1 e 2.2.1 tomando $A = X$, $B = E$ e $A_0 = \{x_0\}$. ■

Observação 2.2.1 *O Teorema 2 de Tian dado em [68], que consta nesta tese como Teorema 1.3.6, não pode ser colocado como um caso particular do nosso Teorema 2.2.1, pois a condição (iii) usada por Tian é mais geral que a nossa. E vice-versa, o nosso teorema também não é caso particular do teorema de Tian, uma vez que o conceito de aplicação KKM generalizada estende o conceito de aplicação KKM.*

A seguir damos um exemplo que ilustra a observação acima.

Exemplo 2.2.1 *Sejam $X = Y = \mathbb{R}$, $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ e $B = [1,3]$ e considere $G : A \to \mathscr{P}(B)$ definida como*

$$G(a) = [a+1, a+2] \cap \mathbb{Q}.$$

Notamos que A não é um subconjunto de B e que $\mathrm{cl}_B G$ não é KKM, já que $a \notin \mathrm{cl}_B G(a)$ para todo $a \in A$. Portanto, o Teorema 1.3.6 não pode ser aplicado a este exemplo.
No entanto, todas as condições do nosso Teorema 2.2.1 são verificadas pela aplicação G:

(1) *A aplicação* $\mathrm{cl}_B G$ *é KKM generalizada. Com efeito, para cada* $a \in A$ *temos que* $\mathrm{cl}_B\, G(a) = [a+1, a+2]$ *e para qualquer subconjunto finito* $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$*, tomando-se* $b_i = 2$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*, obtemos que*

$$\mathrm{co}\,\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} = \{2\} \in \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{cl}_B\, G(a_{i_j}), \;\; pois\; \{2\} = \bigcap_{a\in A} \mathrm{cl}_B\, G(a).$$

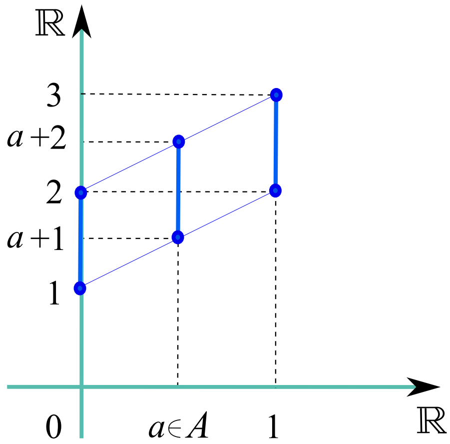

Figura 2.2.1.

(2) *É imediato ver que* $\bigcap_{a\in A} \mathrm{cl}_B G(a) = \bigcap_{a\in A} G(a)$*. Assim, pela Proposição 1.3.1 temos que* G *tem a propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi);*

(3) *Tomando-se* $A_0 = \{0, 1\}$ *temos que* A_0 *é tal que* $\bigcap_{a\in A_0} \mathrm{cl}_B G(a) = \{2\}$ *que é um conjunto compacto em* $B = [1, 3]$.

Assim, pelo Teorema 2.2.1 concluímos que $\bigcap_{a\in A} G(a) \neq \emptyset$.

Concluimos esta seção apresentando mais um exemplo que verifica as hipóteses do nosso teorema e não verifica as dos outros resultados.

Exemplo 2.2.2 *Sejam* $X = Y = B = \mathbb{R}$ *e* $A = (-\infty, 0) \cup \{1, 2, 3\}$*. Agora consideramos a aplicação* $G : A \to B$ *definida por*

$$G(a) = \begin{cases} (0, +\infty), & se \;\; a = 1 \\ (-2, -1) \cup [1, +\infty), & se \;\; a = 2 \\ (-\infty, 2], & se \;\; a = 3 \\ \mathbb{R}, & se \;\; a \notin \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

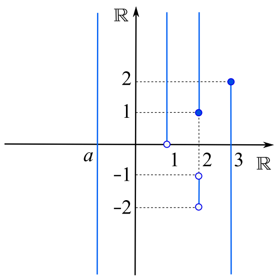

Figura 2.2.2.

Observamos que:

(1) O conjunto A não é convexo e nem fechado em $X = \mathbb{R}$;

(2) $G(a)$ não é compacto para todo $a \in A$;

(3) G não é KKM, pois $3 \notin G(3)$ e

(4) $\mathrm{cl}_B\, G$ também não é KKM, já que $3 \notin \mathrm{cl}_B\, G(3)$.

Portanto, os Corolários 2.2.2 e 2.2.3 não podem ser aplicados a este exemplo pelos ítens (1) e (2), enquanto o Corolário 2.2.1 também não pode pelos ítens (2) e (3) e o Teorema de Tian [68] (Teorema 1.3.6 desta tese) também não pelo ítem (4). Entretanto, as hipóteses do nosso Teorema 2.2.1 são todas satisfeitas. De fato:

(1) *Se para qualquer subconjunto finito $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$, escolhermos $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq [1, 2]$, então para todo subconjunto $\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$ temos que*

$$\mathrm{co}\,\{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\} \subseteq [1, 2] \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{cl}_B\, G(a_{i_j}).$$

Logo, $\mathrm{cl}_B G$ também é KKM generalizada;

(2) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $b \notin G(a)$. Se $a \neq 1$ ou $a \neq 2$, por definição temos que $b \notin \mathrm{cl}_B G(a)$ e então fazemos $a' = a$ nesse caso.*

Se $a = 1$, então $b \in (-\infty, 1]$. Se $b < 1$, tome $a' = a = 1$ e se $b = 1$ faça $a' = 2$. Enquanto, se $a = 2$, então $b \in (-\infty, -2] \cup [-1, 1]$. Se $b < -2$ ou $b \in (-1, 1)$, tome $a' = a = 2$ e se $b \in \{1, -1, -2\}$ faça $a' = 1$.

Em todos os casos, temos que $b \notin \mathrm{cl}_B\, G(a')$. Assim, concluimos que G tem a propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi);

(3) *Tomando-se $A_0 = \{2, 3\}$ temos que A_0 é tal que $\bigcap_{a \in A_0} \mathrm{cl}_B G(a) = [1, 2]$ que é um conjunto compacto em $B = \mathbb{R}$.*

Assim, do Teorema 2.2.1 obtemos que

$$\bigcap_{a \in A} G(a) \neq \emptyset.$$

Capítulo 3

Um Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG)

Neste capítulo, mostramos a relação entre o Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG), introduzido por nós, e outros esquemas de equilíbrio existentes na literatura. Em seguida, ilustramos a abrangência e flexibilidade de nossa formulação de equilíbrio através de exemplos, que são usados posteriormente em nossas aplicações.

Recordamos que o problema de interesse deste trabalho é o **Problema de Equilíbrio Generalizado** (PEG) que consiste em:

$$\text{(PEG)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X. \end{cases} \tag{3.1}$$

Onde:

1. D é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X;

2. As funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e $h : X \to (-\infty, +\infty]$ satisfazem as seguintes condições:

   (a) $f(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;

   (b) h é convexa;

   (c) $\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ para todo $x \in D$.

Destacamos que, na nossa formulação de equilíbrio, as funções f, φ são definidas no espaço inteiro $X \times X$ e, enquanto a solução do problema $\bar{x}$ é procurada em um subconjunto D de X a segunda variável, y, percorre todo o espaço X. Isso possibilita a inclusão de certos problemas de desigualdades variacionais e quase-variacionais em nosso esquema de um modo muito natural, como veremos na seção 3.2 e no Capítulo 5. Esses fatores junto com o fato de considerar três funções f, φ e h com características diferentes permitem uma maior flexibilidade de nossa formulação (3.1) quando comparada a outras da literatura como veremos na próxima seção. Além disso, vale ressaltar que:

- A condição 2(a) é usada nos contextos de equilíbrio, seja como uma hipótese nas formulações consideradas em [11, 12, 34, 35, 36, 37, 55, 63] ou diretamente nos seguintes resultados de existência: [8, Proposição 2.2], [9, Lema 2.1], [17, Teorema 4.3], [32, Lema 4.1] e [44, Teorema 4.1]. Ainda ressaltamos que na formulação considerada em [5, pág. 253 e 254] é usada a condição $f(x, x) \leq 0$ ao invés de 2(a), no entanto todos os exemplos considerados para ilustrar tal problema atendem à condição $f(x, x) = 0$.

- A condição 2(b) é usada nos problemas que podem ser colocados sob a formulação (PEG). Por exemplo, o problema estudado por Mosco em [57] atende diretamente esta condição. Enquanto Baiocchi e Capelo em [5] a usam quando $\varphi(x, y) = h(y)$ em sua formulação. Neste último caso, vemos que esta condição é uma extensão natural das formulações de equilíbrio existentes na literatura que consideram o problema de encontrar uma solução num conjunto convexo e fechado.

- A condição 2(c) evita o que denominamos de soluções triviais para o problema (PEG). Com efeito, se existe $\bar{x} \in D$ tal que

  $$f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) = +\infty \text{ para todo } y \in X,$$

  então $\bar{x}$ resolve (PEG) trivialmente. Esta condição é uma extensão das hipóteses usadas por Flores-Bazán em [32] para os casos particulares de (PEG) quando $\varphi \equiv 0$ (pág. 678) e $h = \delta_K$ (pág. 686) onde K é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de X.

3.1 (PEG) e outras formulações

Nesta seção, mostramos que o problema considerado por Baiocchi e Capelo em [5], os esquemas de equilíbrio estudados por Flores-Bazán em [32] e por Martínez-Legaz e Sosa em [55], bem como o esquema de quase-equilíbrio considerado por Noor e Oettli em [58] podem ser formulados como Problemas de Equilíbrio Generalizado (PEG).

Formulação de Baiocchi e Capelo: Seja o problema 11.10 dado em [5] e que consiste em:

$$\text{(BC)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in C \text{ tal que} \\ \varphi_1(\bar{x}, y) \geq f_1(\bar{x}, y) + \varphi_1(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in K, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde K é um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff localmente convexo X, $C \subseteq K$ é um conjunto não vazio e as funções $f_1 : K \times K \to \mathbb{R}$ e $\varphi_1 : C \times K \to (-\infty, +\infty]$ são tais que:

1) $f_1(x, x) \leq 0$ para todo $x \in K$;

2) $f_1(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ é côncava para todo $x \in K$;

3) $\varphi_1(x, \cdot) : K \to (-\infty, +\infty]$ é própria e convexa para todo $x \in C$.

Notamos que todos os exemplos considerados em [5, pág. 253 e 254] para ilustrar tal problema atendem à condição $f_1(x, x) = 0$. Portanto, é válido considerar o problema (3.2) quando:

$$f_1(x, x) = 0 \ \text{ para todo } \ x \in C. \tag{3.3}$$

Neste caso, afirmamos que (BC) corresponde a um caso particular de (PEG). De fato, considerando $D := C$, as funções f, φ as extensões naturais de $-f_1$ e φ_1 sobre todo o espaço X e $h \equiv \delta_K$ em (3.1), obtemos o seguinte problema

$$\text{(BC)}_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

(a) $f(x, x) = -f_1(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;

(b) h é própria e convexa, pois K é não vazio e convexo;

(c) para cada $x \in D$ resulta

$$\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h = K \cap \operatorname{dom} \varphi_1(x, \cdot) = \operatorname{dom} \varphi_1(x, \cdot) \neq \emptyset.$$

Logo $(\mathrm{BC})_1$ é um problema de equilíbrio generalizado. Além disso, os problemas (3.2) e (3.4) são equivalentes no sentido de que um ponto $\bar{x} \in X$ é uma solução de (3.2) se, e somente se, sob 3.3), $\bar{x}$ é uma solução de (3.4) com $f(\bar{x}, \bar{x}) = 0$.

Formulação de Flores-Bazán: Seja X um espaço de Banach reflexivo. O problema de equilíbrio considerado em [32] é o seguinte:

$$(\mathrm{FB}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f_1(\bar{x}, y) + \varphi_1(\bar{x}, y) \geq \varphi_1(\bar{x}, \bar{x}) \text{ para todo } y \in K, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde K é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de X, $f_1 : K \times K \to \mathbb{R}$ e $\varphi_1 : K \times X \to (-\infty, +\infty]$ são funções.

As seguintes condições são usadas em [32, seção 4] na obtenção de resultados de existência para o problema (3.5):

(1) $K \cap \operatorname{dom} \varphi_1(x, \cdot) \neq \emptyset$ para todo $x \in K$;

(2) $f_1(x, x) = 0$ para todo $x \in K$,

Afirmamos que a formulação (3.5) acrescida das hipóteses (1) e (2) corresponde a um caso particular de (PEG). De fato, considerando em (3.1) $D := K$, as funções f, φ sendo as extensões naturais de f_1 e φ_1 sobre todo o espaço X e $h \equiv \delta_K$ satisfazendo as condições (1) e (2) acima, obtemos o seguinte problema

$$(\mathrm{FB})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

(a) $f(x, x) = f_1(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;

(b) h é própria e convexa, pois K é não vazio e convexo;

(c) para cada $x \in D$ verifica-se que

$$\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h = K \cap \operatorname{dom} \varphi_1(x, \cdot) \neq \emptyset.$$

Logo $(\mathrm{FB})_1$ é um problema de equilíbrio generalizado. Mais ainda, os problemas (FB) e $(\mathrm{FB})_1$ são equivalentes no seguinte sentido: um ponto $\bar{x}$ resolve (3.5) se, e somente se, $\bar{x}$ resolve (3.6).

Fazendo $\varphi_1 \equiv 0$ na formulação de Flores-Bazán acrescida da condição (1), obtemos, em espaços de Banach, as formulações estudadas em [12, 34, 35, 36, 37].

Formulação de Martínez-Legaz e Sosa: Seja X um espaço vetorial real topológico de Hausdorff localmente convexo. O problema de equilíbrio estudado em [55] consiste em:

$$\text{(MLS)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f_1(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in K, \end{cases} \tag{3.7}$$

onde $K \subseteq X$ é convexo e não vazio e $f_1 : X \times X \to [-\infty, +\infty]$ é uma função tal que:

1) $f_1(x, x) = 0$ para todo $x \in K$;

2) para cada $x \in K$, $f_1(x, \cdot) : X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa e semicontínua inferior e existe y_x tal que $f_1(x, y_x) < +\infty$ e, $y_x \in \operatorname{int} K$ ou $f_1(x, \cdot)$ é contínua em y_x.

Observamos que se existe $(x, y) \in X \times X$, tal que $f_1(x, y) = -\infty$, então $x \notin K$. Assim, x não é solução de (3.7). Portanto, podemos obter um problema sob a formulação (PEG) equivalente ao problema (3.7) considerando $D := K$, $\varphi \equiv 0$, $h \equiv \delta_K$ e, sem perda de generalidade, f como a restrição de f_1 ao conjunto $K \times X$. De fato, a partir dos dados considerados temos o seguinte problema

$$\text{(MLS)}_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \tag{3.8}$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

a) $f(x, x) = f_1(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;

b) h é própria e convexa, pois K é não vazio e convexo;

c) para cada $x \in D$ tem-se que

$$\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h = \operatorname{dom} f_1(x, \cdot) \cap K \neq \emptyset.$$

Além disso, os problemas (MLS) e $(\text{MLS})_1$ são equivalentes no sentido de que um ponto $\bar{x}$ é solução de um se, e somente se, ele é solução do outro.

Claramente, o problema (3.7) também inclui o problema de equilíbrio estudado por Blum e Oettli em [11] conhecido como *problema de equilíbrio clássico*.

Formulação de Noor e Oettli: Sejam X e Y espaços vetoriais topológicos. O problema de quase-equilíbrio estudado em [58] consiste em:

$$\text{(NO)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in C, \ \bar{y} \in Y \text{ tais que } \bar{x} \in S(\bar{x}), \ \bar{y} \in T(\bar{x}), \\ f_1(z, \bar{y}) \geq f_1(\bar{x}, \bar{y}) \text{ para todo } z \in S(\bar{x}), \end{cases} \tag{3.9}$$

onde $C \subseteq X$ é um conjunto convexo e não vazio, $f_1 : C \times Y \to \mathbb{R}$ e $S : C \to \mathscr{P}(X)$, $T : C \to \mathscr{P}(Y)$ são aplicações ponto-conjunto.

Considerando o espaço vetorial topológico $E := X \times Y$, seja

$$D := \{u = (x, y) \in E : x \in C, S(x) \cap C \neq \emptyset, y \in T(x)\} \tag{3.10}$$

Assumimos que $D \neq \emptyset$, pois caso contrário teríamos $S(x) \cap C = \emptyset$ ou $T(x) = \emptyset$ para todo $x \in C$, o que equivale a dizer que o problema (3.9) não possui solução.

Tomando-se em (3.1) as funções $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ e $h : E \to (-\infty, +\infty]$ definidas por $f \equiv 0$, $\varphi(u, v) = \varphi((x, y), (z, w)) := F(z, y) + \delta_{T(x)}(y) + \delta_{S(x)}(z)$ e $h \equiv 0$, onde

$$F(z, y) := \begin{cases} f_1(z, y), & \text{se } z \in C \\ +\infty, & \text{c.c.} \end{cases}$$

obtemos o seguinte problema

$$(\mathrm{NO})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{u} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{u}, v) + \varphi(\bar{u}, v) + h(v) \geq \varphi(\bar{u}, \bar{u}) + h(\bar{u}) \text{ para todo } v \in E, \end{cases} \tag{3.11}$$

sendo que f, φ e h satisfazem:

a) $f(u, u) = 0$ para todo $u \in D$;

b) h é convexa;

c) para cada $u = (x, y) \in D$ tem-se que

$$\operatorname{dom} f(u, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(u, \cdot) \cap \operatorname{dom} h = \operatorname{dom} \varphi(u, \cdot) = (S(x) \cap C) \times Y \neq \emptyset.$$

A seguir mostramos que os problemas (3.9) e (3.11) são equivalentes.

Lema 3.1.1 *Os pontos $\bar{x} \in X$ e $\bar{y} \in Y$ resolvem (3.9) se, e somente se, o ponto $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$ é uma solução de (3.11).*

Prova. Supondo que $\bar{x} \in X$ e $\bar{y} \in Y$ resolvem (3.9), obtemos que $\bar{x} \in C$, $\bar{x} \in S(\bar{x})$, $\bar{y} \in T(\bar{x})$ e vale que

$$f_1(z, \bar{y}) \geq f_1(\bar{x}, \bar{y}) \text{ para todo } z \in S(\bar{x}). \tag{3.12}$$

Fazendo $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$, temos que $\bar{u} \in E = X \times Y$. E de (3.10) concluimos que $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in D$ e

$$\varphi(\bar{u}, \bar{u}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = f_1(\bar{x}, \bar{y}). \tag{3.13}$$

Seja $v = (z, w) \in E$. Observamos que se $z \notin S(\bar{x}) \cap C$, então $\varphi(\bar{u}, v) = +\infty$, caso contrário

$$\varphi(\bar{u}, v) = f_1(z, \bar{y}). \tag{3.14}$$

Logo, sempre vale que

$$\varphi(\bar{u}, v) \geq f_1(z, \bar{y}) \text{ para todo } v = (z, w) \in E. \tag{3.15}$$

Assim, de (3.15), (3.13) e (3.12) obtemos que

$$\varphi(\bar{u}, v) \geq f_1(z, \bar{y}) \geq f_1(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{u}, \bar{u}) \text{ para todo } v = (z, w) \in E. \tag{3.16}$$

Ou seja, $\bar{u}$ é solução de (3.11).

Reciprocamente, seja $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y}) \in E = X \times Y$ uma solução de (3.11), então $\bar{u} \in D$ e vale que

$$\varphi(\bar{u}, v) \geq \varphi(\bar{u}, \bar{u}) \text{ para todo } v = (z, w) \in E. \tag{3.17}$$

De (3.10), segue que $\bar{x} \in C$, $\bar{y} \in T(\bar{x})$ e existe $\tilde{z} \in C \cap S(\bar{x})$ tal que para $\tilde{v} = (\tilde{z}, w)$ com $w \in Y$ vale que

$$+\infty > \varphi(\bar{u}, \tilde{v}) \geq \varphi(\bar{u}, \bar{u}). \tag{3.18}$$

Assim, da definição de φ segue que $\bar{x} \in S(\bar{x})$.

Agora, considere $z \in S(\bar{x}) \cap C$. Seja $v = (z, w)$ com $w \in Y$. Então de (3.17) e da definição de φ tem-se que

$$f_1(z, \bar{y}) = \varphi(\bar{u}, v) \geq \varphi(\bar{u}, \bar{u}) = f_1(\bar{x}, \bar{y}). \tag{3.19}$$

Com isso completamos a prova. ■

3.2 Exemplos particulares de (PEG)

A abrangência e flexibilidade de nossa formulação (PEG) é ilustrada a seguir por meio de quatro exemplos, sendo que três deles são considerados em nossas aplicações no Capítulo 6.

O primeiro deles é o problema de *Desigualdade Variacional* estudado por Mosco em [57] e que consiste em:

$$\text{(DV)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in \text{dom} A \text{ tal que} \\ \langle A(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \tag{3.20}$$

onde A é um operador de um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo X em seu espaço topológico dual X^*, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a aplicação bilinear de dualidade entre X^* e X e $z : X \to (-\infty, +\infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferior. Observamos que $y \in X$, e portanto y pode não estar em $\operatorname{dom} A$, isto é, enquanto a solução $\bar{x}$ pertence a um subconjunto de X, a desigualdade tem de ser válida para todo y do espaço inteiro X.

Este problema também é conhecido como um problema de *Desigualdade Variacional Mista* [50] e corresponde a um problema sob a formulação (PEG). De fato, fazendo em (3.1)

$$D := \operatorname{dom} A, \ f(x,y) := \begin{cases} \langle A(x), y - x \rangle, & \text{se } x \in \operatorname{dom} A \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases}, \varphi \equiv 0, \ h \equiv z. \quad (3.21)$$

obtemos o seguinte problema

$$(\mathrm{DV})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \quad (3.22)$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

a) $f(x,x) = \langle A(x), x - x \rangle = 0$ para todo $x \in D$;

b) h é própria e convexa, pois $h \equiv z$;

c) para cada $x \in D$ tem-se que

$$\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h = X \cap \operatorname{dom} z = \operatorname{dom} z \neq \emptyset.$$

A asserção é obtida observando que os problemas (DV) e $(\mathrm{DV})_1$ são equivalentes, isto é, toda solução de (DV) é solução de $(\mathrm{DV})_1$ e vice-versa.

O caso em que A é um operador ponto-conjunto também foi considerado por Mosco em [57] e será mencionado no Capítulo 5.

O segundo problema é o de *Desigualdade Quasevariacional Generalizada* considerado em [19, 56, 64] e corresponde a:

$$(\mathrm{DQVG}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in G(\bar{x}) \text{ tal que existe } \bar{\xi} \in A(\bar{x}) \\ \text{satisfazendo } \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}), \end{cases} \quad (3.23)$$

onde G e A são operadores ponto-conjunto de um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo X em $\mathscr{P}(X)$ e em $\mathscr{P}(X^*)$, respectivamente.

Afirmamos que este problema pode ser visto como um caso particular de (PEG). De fato, considerando o espaço vetorial topológico de Hausdorff $E := X \times X^*$, definimos o conjunto

$$D := \{(x,\xi) \in X \times X^* : x \in \operatorname{dom} G,\ \xi \in A(x)\}. \tag{3.24}$$

É natural assumirmos que $D \neq \emptyset$, pois caso contrário o problema (3.23) não tem solução. Sejam $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ e $h : E \to (-\infty, +\infty]$ funções definidas por $f(v,w) = f((x,\xi),(y,\rho)) := \langle \xi, y - x\rangle + \delta_D(v)$, $\varphi(v,w) = \varphi((x,\xi),(y,\rho)) := \delta_{G(x)}(y)$ e $h \equiv 0$, obtemos o seguinte problema

$$(\mathrm{DQVG})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{v} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{v},w) + \varphi(\bar{v},w) + h(w) \geq \varphi(\bar{v},\bar{v}) + h(\bar{v}) \text{ para todo } w \in E, \end{cases} \tag{3.25}$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

a) $f(v,v) = \langle \xi, x - x\rangle = 0$ para todo $v \in D$;

b) h é própria e convexa por definição;

c) para cada $v = (x,\xi) \in D$ temos que $x \in \operatorname{dom} G$ e $\xi \in A(x)$, logo

$$\operatorname{dom} f(v,\cdot) = \{w = (y,\rho) \in E : \langle \xi, y - x\rangle < +\infty\} = E,$$

e

$$\operatorname{dom} \varphi(v,\cdot) = \{w = (y,\rho) \in E : \delta_{G(x)}(y) < +\infty\} = G(x) \times X^* \neq \emptyset.$$

Assim,

$$\operatorname{dom} f(v,\cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(v,\cdot) \cap \operatorname{dom} h = \operatorname{dom} \varphi(v,\cdot) \neq \emptyset.$$

Notamos ainda que $v \in D$ enquanto w percorre todo o espaço E. Abaixo mostramos que os problemas (3.23) e (3.25) são equivalentes.

Lema 3.2.1 *Um ponto $\bar{x}$ resolve (3.23) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$ se, e somente se, $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi})$ é uma solução de (3.25).*

Prova. Supondo que $\bar{x} \in X$ resolve (3.23) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$, obtemos que $\bar{x} \in G(\bar{x})$ e vale que

$$\langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}). \tag{3.26}$$

Fazendo $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi})$, temos que $\bar{v} \in E = X \times X^*$. De (3.24) concluimos que $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{\xi}) \in D$ e

$$\varphi(\bar{v},\bar{v}) = \delta_{G(\bar{x})}(\bar{x}) = 0. \tag{3.27}$$

Seja $w = (y,\rho) \in E$. Observamos que se $y \notin G(\bar{x})$, então

$$\langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varphi(\bar{v},w) = +\infty. \tag{3.28}$$

Caso contrário, de (3.26) e da definição de φ temos, respectivamente, que

$$\langle\bar{\xi}, y-\bar{x}\rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \varphi(\bar{v}, w)=0. \tag{3.29}$$

Assim, de (3.27), (3.28) e (3.29) sempre vale que

$$\langle\bar{\xi}, y-\bar{x}\rangle+\varphi(\bar{v}, w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) \text{ para todo } w \in E. \tag{3.30}$$

Ou seja, $\bar{v}$ é solução de (3.25).

Reciprocamente, seja $\bar{v}=(\bar{x}, \bar{\xi}) \in E=X \times X^*$ uma solução de (3.25), então $\bar{v} \in D$ verifica (3.30). De (3.24), segue que $\bar{x} \in \operatorname{dom} G$ e $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$. Logo, existe $\tilde{z} \in G(\bar{x})$ tal que para $\tilde{w}=(\tilde{z}, \bar{\xi})$ tem-se

$$\varphi(\bar{v}, \tilde{w})=\varphi((\bar{x}, \bar{\xi}),(\tilde{z}, \bar{\xi}))=\delta_{G(\bar{x})}(\tilde{z})=0. \tag{3.31}$$

Fazendo $w=\tilde{w}$ em (3.30), de (3.31) obtemos

$$+\infty>\langle\bar{\xi}, \tilde{z}-\bar{x}\rangle+\varphi(\bar{v}, \tilde{w}) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}).$$

Assim, da definição de φ segue que

$$\varphi(\bar{v}, \bar{v})=0. \tag{3.32}$$

Logo, $\bar{x} \in G(\bar{x})$.

Agora, considere $y \in G(\bar{x})$. Seja $w=(y, \rho)$ com $\rho \in X^*$ e usando (3.32) na desigualdade (3.30) reencontramos (3.26), isto é, $\bar{x}$ é solução de (3.23) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$. Com isso completamos a prova. ■

Quando $G(\cdot)$ é definida por meio de desigualdades, a flexibilidade de nosso esquema nos permite considerar, no Capítulo 6, uma outra formulação (PEG) de (DQVG), com pequenas variações desta apresentada aqui.

O terceiro problema é o de *Desigualdade Variacional de Minty* considerado em [45] e dado por:

$$(\mathrm{DVM}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in C \text{ tal que} \\ \langle v, y-\bar{x}\rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in C, \text{ para todo } v \in T(y), \end{cases} \tag{3.33}$$

onde C é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial topológico de Hausdorff Y e T é um operador ponto-conjunto de C, com $\operatorname{dom} T=C$, em partes de um outro espaço vetorial topológico de Hausdorff X.

Afirmamos que este problema pode ser visto como um caso particular de (PEG). De fato, considerando o espaço vetorial topológico de Hausdorff $E := Y \times X$, sejam $D := C \times X$ e $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ e $h : E \to (-\infty, +\infty]$ funções definidas por $f(\mu, \nu) = f((x, z), (y, v)) := \langle v, y - x \rangle$, $\varphi(\mu, \nu) = \varphi((x, z), (y, v)) := \delta_{T(y)}(v) + \delta_C(y)$ e $h \equiv 0$, obtemos o seguinte problema

$$
(\mathrm{DVM})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{\mu} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{\mu}, \nu) + \varphi(\bar{\mu}, \nu) + h(\nu) \geq \varphi(\bar{\mu}, \bar{\mu}) + h(\bar{\mu}) \text{ para todo } \nu \in E, \end{cases} \tag{3.34}
$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

a) $f(\mu, \mu) = \langle z, x - x \rangle = 0$ para todo $\mu \in D$;

b) h é convexa;

c) para cada $\mu = (x, z) \in D$ temos que $x \in C$ e vale que

$$
\operatorname{dom} f(\mu, \cdot) = \{\nu = (y, v) \in E : \langle v, y - x \rangle < +\infty\} = E,
$$

e

$$
\begin{aligned}
\operatorname{dom} \varphi(\mu, \cdot) &= \{\nu = (y, v) \in E : y \in C, \delta_{T(y)}(v) < +\infty\} \\
&= \{\nu = (y, v) \in E : y \in C, v \in T(y)\} = \operatorname{Gr} T \neq \emptyset.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\operatorname{dom} f(\mu, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(\mu, \cdot) \cap \operatorname{dom} h = \operatorname{dom} \varphi(\mu, \cdot) \neq \emptyset.
$$

A seguir mostramos que os problemas (3.33) e (3.34) são equivalentes.

Lema 3.2.2 *O ponto $\bar{x}$ resolve (DVM) se, e somente se, $\bar{\mu} = (\bar{x}, \bar{z})$ é uma solução de (DVM)$_1$ com $\bar{z} \in T(\bar{x})$.*

Prova. Se $\bar{x}$ resolve (DVM) então $\bar{x} \in C \subseteq Y$ e para todo $y \in C$ vale que

$$
\langle v, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } v \in T(y). \tag{3.35}
$$

Como $\operatorname{dom} T = C$, sabemos que existe $\bar{z} \in Y$ tal que $\bar{z} \in T(\bar{x})$. Seja $\bar{\mu} = (\bar{x}, \bar{z}) \in D$ temos que

$$
\varphi(\bar{\mu}, \bar{\mu}) = \varphi((\bar{x}, \bar{z}), (\bar{x}, \bar{z})) = \delta_{T(\bar{x})}(\bar{z}) + \delta_C(\bar{x}) = 0.
$$

Seja $\nu = (y, v) \in E = Y \times X$.

Se $y \notin C$ e/ou $v \notin T(y)$, então $\varphi(\bar{\mu}, \nu) = +\infty$, logo,

$$
f(\bar{\mu}, \nu) + \varphi(\bar{\mu}, \nu) + h(\nu) = +\infty > \varphi(\bar{\mu}, \bar{\mu}) + h(\bar{\mu}) = 0. \tag{3.36}
$$

Caso contrário, usando (3.35) temos que

$$f(\bar{\mu},\nu)+\varphi(\bar{\mu},\nu)+h(\nu)=\langle v,y-\bar{x}\rangle \geq 0=\varphi(\bar{\mu},\bar{\mu})+h(\bar{\mu}). \tag{3.37}$$

Portanto, de (3.37) resulta que $\bar{\mu}=(\bar{x},\bar{z})$ verifica

$$f(\bar{\mu},\nu)+\varphi(\bar{\mu},\nu)+h(\nu)\geq \varphi(\bar{\mu},\bar{\mu})+h(\bar{\mu}), \tag{3.38}$$

isto é, $\bar{\mu}=(\bar{x},\bar{z})$ resolve $(\mathrm{DVM})_1$.

Reciprocamente, seja agora $\bar{\mu}=(\bar{x},\bar{z})$ uma solução de $(\mathrm{DVM})_1$. Como $C\neq\emptyset$ e $\operatorname{dom} T=C$, existe $\nu=(y,v)$ com $y\in C$ e $v\in T(y)$. Temos que

$$f(\bar{\mu},\nu)=\langle v,y-\bar{x}\rangle \quad \text{e} \quad \varphi(\bar{\mu},\nu)=\delta_{T(y)}(v)+\delta_C(y)=0,$$

que juntamente com a definição de h e a desigualdade (3.38) resulta

$$+\infty>\langle v,y-\bar{x}\rangle=f(\bar{\mu},\nu)+\varphi(\bar{\mu},\nu)+h(\nu)\geq\varphi(\bar{\mu},\bar{\mu})+h(\bar{\mu}). \tag{3.39}$$

Logo, deve ser

$$\varphi(\bar{\mu},\bar{\mu})+h(\bar{\mu})=\delta_{T(\bar{x})}(\bar{z})+\delta_C(\bar{x})=0. \tag{3.40}$$

Assim, $\bar{x}\in C$ e $\bar{z}\in T(\bar{x})$, o que junto com (3.39) e (3.40) implica em

$$\langle v,y-\bar{x}\rangle\geq 0$$

para quaisquer $y\in C$ e $v\in T(y)$, logo, $\bar{x}$ resolve (DVM). ■

O quarto e último problema é o de *Programação Semidefinida Convexa* dado em [41] por:

$$\text{(PSDC)} \ \inf_{x\in\mathbb{R}^m}\psi(x), \ \text{ sujeito a } \ x\in C,\ F_0+\sum_{i=1}^{m}x_iF_i\succeq 0, \tag{3.41}$$

onde $\psi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ é convexa, C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^m$ e, para $i=0,1,\ldots,m$, $F_i\in S_n$ que corresponde ao espaço das matrizes simétricas reais de ordem $n\times n$. O símbolo " $\succeq$ " denota a ordem parcial de Löwner sobre o espaço S_n, induzida pelo cone convexo e fechado das matrizes simétricas semidefinidas positivas $S_n^+:=\{M\in S_n : x^TMx\geq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}^n\}$, isto é, para todo $M,N\in S_n$, $M\succeq N$ significa que $M-N\in S_n^+$. Os problemas de programação semidefinida aparecem em uma grande variedade de aplicações da teoria de otimização até a teoria de controle [47, 69, 71]

Definimos a seguinte função $G : \mathbb{R}^m \to S_n$ dada por

$$G(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i. \tag{3.42}$$

Lembrando que $G^{-1}(S_n^+) = \{x \in \mathbb{R}^m : G(x) \in S_n^+\}$, é natural assumirmos que o conjunto viável de (PSDC), $C \cap G^{-1}(S_n^+)$, é não vazio, pois caso contrário o problema (3.41) não tem solução.

Afirmamos que (PSDC) pode ser incluído no nosso esquema de equilíbrio generalizado como um caso particular. De fato, considerando $E := \mathbb{R}^m \times S_n$, $D := E$, $w = (x, W)$ e $u = (y, U) \in E$ e $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ e $h : E \to (-\infty, +\infty]$ funções dadas por $f \equiv 0$, $\varphi(w, u) := \psi(y) + \delta_{S_n^+}(G(y) - U) + \delta_C(y)$ e $h(u) := \delta_{S_n^+}(U)$, obtemos o seguinte problema

$$(\text{PSDC})_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{w} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{w}, u) + \varphi(\bar{w}, u) + h(u) \geq \varphi(\bar{w}, \bar{w}) + h(\bar{w}) \text{ para todo } u \in E, \end{cases} \tag{3.43}$$

onde $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

a) $f(w, w) = 0$ para todo $w \in D$;

b) h é própria e convexa;

c) para cada $w = (x, W) \in D$ tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} \varphi(w, \cdot) &= \{u = (y, U) \in E : \psi(y) + \delta_{S_n^+}(G(y) - U) + \delta_C(y) < +\infty\} \\ &= \{u = (y, U) \in E : G(y) - U \succeq 0,\ y \in C\} \end{aligned}$$

Desde que $C \cap G^{-1}(S_n^+) \neq \emptyset$, da expressão de $\operatorname{dom} \varphi(w, \cdot)$, temos que

$$\operatorname{dom} f(w, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(w, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \supseteq (C \cap G^{-1}(S_n^+)) \times \{0\} \neq \emptyset.$$

Os problemas (PSDC) e $(\text{PSDC})_1$ são equivalentes no seguinte sentido: $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ é uma solução de (PSDC) se, e somente se, $(\bar{x}, \bar{W})$ é uma solução de $(\text{PSDC})_1$ para algum $\bar{W} \in S_n^+$. A verificação desta afirmação segue diretamente dos dados dos problemas.

Capítulo 4

Existência de soluções para (PEG)

Neste capítulo, aplicamos as nossas generalizações da teoria KKM à análise de existência de soluções do Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG) obtendo resultados que assumem condições mais fracas do que as comumente usadas nos casos particulares de (PEG).

4.1 Introdução

Nesta parte, consideramos definições e propriedades que envolvem os conceitos de quaseconvexidade diagonal e transferência de semicontinuidades inferior e superior definidos no Capítulo 1 e que são usadas ao longo deste capítulo.

Seja K um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X. Definimos, na seção 1.2, que uma função $g : K \times K \to [-\infty, +\infty]$ é γ- quaseconvexa diagonal (γ-QCXD) na segunda variável para algum $\gamma \in [-\infty, +\infty]$ se para qualquer subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq K$ e qualquer $y_0 \in \operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_m\}$ vale que

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{g(y_0, y_i)\} \geq \gamma.$$

A γ- quaseconvexidade diagonal na segunda variável foi introduzida em [75, Definição 2.3] no contexto de espaços vetoriais topológicos localmente convexos. Vimos também que g é dita γ- quasecôncava diagonal (γ-QCVD) na segunda variável para algum $\gamma \in [-\infty, +\infty]$ se $-g$ é γ-QCXD na segunda variável.

Definem-se γ- quaseconvexidade e γ- quaseconcavidade diagonal na primeira variável de modo inteiramente análogo.

A seguir obtemos dois resultados que relacionam hipóteses clássicas da literatura como convexidade e quaseconvexidade com o conceito de γ-quaseconvexidade diagonal na segunda variável.

Proposição 4.1.1 *Sejam uma função $f : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e um subconjunto K não vazio e convexo do espaço vetorial real topológico de Hausdorff X. Se para cada $x \in K$ tem-se que:*

P1: $f(x, x) \geq \gamma$;

P2: *O conjunto $\{y \in K : f(x, y) < \gamma\}$ é convexo.*

Então f é γ-QCXD na segunda variável.

Prova. Vamos mostrar que P1 e P2 implicam que f é γ-QCXD na segunda variável. Suponha que não é o caso, então existe um subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_n\}$ de K e $y_0 \in \operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_n\}$ tal que

$$f(y_0, y_i) < \gamma \ \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4.1}$$

Isto significa que

$$y_i \in \{y \in K : f(y_0, y) < \gamma\} \ \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.2}$$

e junto com P2 resulta que $y_0 \in \operatorname{co}\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq \{y \in K : f(y_0, y) < \gamma\}$. Assim, temos que $f(y_0, y_0) < \gamma$, o que contradiz P1. Logo, vale o resultado desejado. ∎

Como conseqüência deste resultado obtemos a propriedade dada em [66]:

Corolário 4.1.1 [66, Lema 2.3.] *Sejam K um subconjunto não vazio e convexo do espaço vetorial topológico de Hausdorff X e $f : K \times K \to (-\infty, +\infty]$ tais que:*

(a) $f(x, x) \leq 0$ *para cada* $x \in K$;

(b) *para cada $y \in K$, o conjunto $\{x \in K : f(x, y) > 0\}$ é convexo.*

Então, para todo conjunto finito A de K e cada $y \in \operatorname{co} A$ resulta

$$\min_{x \in A} f(x, y) \leq 0, \tag{4.3}$$

ou seja, f restrita a cada A é 0-quasecôncava diagonal na primeira variável.

Prova. Seja a função $\tilde{f}$ a extensão natural da função f sobre todo o espaço X. Considerando $g : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $g(y, x) = -\tilde{f}(x, y)$ e $\gamma = 0$, obtemos o resultado desejado aplicando o teorema anterior a este caso. ■

Observação 4.1.1 *Seja $g : K \times K \to \mathbb{R}$. Se, para todo $x \in K$, $g(x, x) = 0$ e $g(x, \cdot)$ é convexa ou quaseconvexa, então g é 0-quaseconvexa diagonal na segunda variável. Com efeito, tanto a convexidade quanto a quaseconvexidade implicam a condição P2 da Proposição 4.1.1 para $\gamma = 0$.*

Observação 4.1.2 *Notamos que o Lema 4.1 dado em [17] é obtido diretamente do resultado anterior. Com efeito, a desigualdade em (4.3) junto com a definição de supremo implicam que*

$$\sup_{y_0 \in \operatorname{co} A} \min_{y \in A} f(y, y_0) \leq 0.$$

A seguinte definição generaliza o conceito de γ-quaseconvexidade diagonal.

Definição 4.1.1 [20, Definição 2.2] *Sejam A, B dois subconjuntos não vazios e convexos de dois espaços vetoriais topológicos X e Y, respectivamente. Uma função $g : A \times B \to (-\infty, +\infty]$ é* ***γ-quaseconvexa generalizada (γ-QCG) na segunda variável*** *para algum $\gamma \in (-\infty, +\infty]$ se para qualquer subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset B$ existe um subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset A$ tal que para qualquer $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ e qualquer $x_0 \in \operatorname{co}\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\}$ vale que*

$$\max_{1 \leq j \leq k} \{g(x_0, y_{ij})\} \geq \gamma.$$

Observação 4.1.3 *Sejam A e B dois subconjuntos não vazios e convexos de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff X e Y, respectivamente.*

(a) *Se $g : A \times B \to (-\infty, +\infty]$ é γ- quaseconvexa generalizada na segunda variável, então para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $g(x, y) \geq \gamma$.*

(b) *Seja $g : A \times B \to (-\infty, +\infty]$. Se $Y := X$, $B := A$ e g é γ-quaseconvexa diagonal na segunda variável, então g é γ-quaseconvexa generalizada na segunda variável. De fato, para qualquer subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A$ faça $x_i := y_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Agora damos um exemplo mostrando que a recíproca não é verdadeira em geral.

Exemplo 4.1.1 *Sejam $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$ e $g : A \times A \to \mathbb{R}$ dada por*

$$g(x,y) = \begin{cases} x - y, & \textit{se } x \geq \frac{3}{4} \\ -|x-y|, & \textit{c.c.} \end{cases}$$

Para qualquer subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de $A = [0,1]$, tomando-se o subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset A$ tal que $x_i = 1, i = 1, \ldots, m$, observamos que $x_0 \in \operatorname{co}\{x_1, \ldots, x_m\} = \{1\}$ e pela definição da g vale

$$g(1, y_i) \geq 0 \textit{ para todo } y_i \in \{y_1, \ldots, y_m\}.$$

Ou seja, g é 0-quaseconvexa generalizada na segunda variável. Por outro lado, para o conjunto finito $\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ de A temos que para $y_0 = \frac{1}{2} \in \operatorname{co}\{\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\} = [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ tem-se

$$\max\left\{g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), g\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right\} = \max\left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Logo, g não é 0-quaseconvexa diagonal na segunda variável.

4.2 Teorema de Existência

Nesta seção, apresentamos o nosso resultado de existência de soluções para o problema (PEG), portanto, o recolocamos aqui por comodidade:

$$(\text{PEG}) \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X. \end{cases} \tag{4.4}$$

Onde:

1. D é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X;

2. As funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e $h : X \to (-\infty, +\infty]$ satisfazem as seguintes condições:

   (a) $f(x,x) = 0$ para todo $x \in D$;

   (b) h é convexa;

   (c) $\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ para todo $x \in D$.

Começamos definindo uma aplicação ponto-conjunto envolvendo um conjunto D e funções f, φ e h que verifiquem as condições (a)–(c) do problema acima.

Definição 4.2.1 *Seja $T : X \to \mathscr{P}(D)$ a aplicação ponto-conjunto definida por*

$$T(y) := \{x \in D : f(x,y) + \varphi(x,y) + h(y) \geq \varphi(x,x) + h(x)\}. \tag{4.5}$$

A principal motivação para definirmos a aplicação acima é que ela nos permite caracterizar as soluções do problema (PEG) do seguinte modo: um ponto $\bar{x} \in D$ é solução de (PEG) se, e somente se,

$$\bar{x} \in \bigcap_{y \in X} T(y). \tag{4.6}$$

Este tipo de definição é usada na obtenção de teoremas de existência, veja por exemplo [5, pág. 255, eq. (11.64)], [11, Lema 4.1], [18, Teorema 2.2], [32, Lema 4.1] e [63, Teorema 2.2].

Precisamos estabelecer condições sobre o conjunto D e as funções f, φ e h que definem a aplicação ponto-conjunto T de tal maneira que nos possibilitem garantir que a interseção dada em (4.6) seja não vazia utilizando o nosso Teorema 2.2.1. Tais condições são descritas no teorema abaixo e são comparadas na próxima seção com as hipóteses existentes na literatura para casos particulares de (PEG).

A seguir, o nosso primeiro resultado de existência.

Teorema 4.2.1 *Sejam um subconjunto D não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X e funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$, $h : X \to (-\infty, +\infty]$ satisfazendo as seguintes condições:*

H1. *Para todo $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset X$ existe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset D$ tal que: para cada $x \in \operatorname{co}\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\}$, onde $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$, e para cada vizinhança de x, $V(x)$, existe $x^V \in V(x) \cap D$ verificando*

$$\max_{1 \leq j \leq k} \{f(x^V, y_{ij}) + \varphi(x^V, y_{ij}) + h(y_{ij})\} \geq \varphi(x^V, x^V) + h(x^V);$$

H2. *Se $f(x,y) + \varphi(x,y) + h(y) < \varphi(x,x) + h(x)$ para algum $x \in D$ e $y \in X$, então existem $y' \in X$ e uma vizinhança $U(x)$ de x tais que*

$$f(z,y') + \varphi(z,y') + h(y') < \varphi(z,z) + h(z) \ \text{ para todo } \ z \in U(x) \cap D;$$

H3. *Existem um subconjunto compacto não vazio $B \subseteq D$ e um subconjunto finito $\{w_1, \ldots, w_l\} \subset X$ tais que: para todo $z \in D \setminus B$ existem um índice $j \in L = \{1, 2, \ldots, l\}$ e uma vizinhança de z, $W(z)$, tais que*

$$f(s, w_j) + \varphi(s, w_j) + h(w_j) < \varphi(s, s) + h(s) \ \ \textit{para todo} \ \ s \in W(z) \cap D.$$

Então existe um ponto $\bar{x} \in D$ tal que

$$f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \ \textit{para todo} \ y \in X.$$

Prova. Seja $T : X \to \mathscr{P}(D)$ a aplicação ponto-conjunto definida em (4.5).

a) Afirmamos que a condição H1 implica que $\mathrm{cl}_D\, T$ é KKM generalizada. De fato, seja $\{y_1, \ldots, y_m\}$ um subconjunto finito de X, então existe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset D$ verificando H1. Seja $x \in \mathrm{co}\,\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$, com $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$, então para cada vizinhança de x, $V(x)$, existe $x^V \in V(x) \cap D$ tal que

$$\max_{1 \leq j \leq k} \{f(x^V, y_{i_j}) + \varphi(x^V, y_{i_j}) + h(y_{i_j})\} \geq \varphi(x^V, x^V) + h(x^V). \tag{4.7}$$

Logo, a rede $\{x^V\} \subseteq D$ é tal que x^V converge para x e cada $x^V \in T(y_{i_j})$ para algum $i_j \in I = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Como I é finito significa que existe $i_l \in I$ e uma sub-rede de $\{x^V\}$ convergindo a x tal que todos os seus elementos pertencem a $T(y_{il})$. Então

$$x \in \mathrm{cl}_D\, T(y_{il}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{cl}_D\, T(y_{i_j}).$$

Portanto,

$$\mathrm{co}\,\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{cl}_D\, T(y_{i_j}). \tag{4.8}$$

Ou seja, $\mathrm{cl}_D\, T$ é KKM generalizada como havíamos inicialmente afirmado.

b) Agora, afirmamos que a condição H2 assegura que T tem a propriedade de transferência a fechos de imagens (tfi). Com efeito, sejam $y \in X$ e $x \in D$ tais que $x \notin T(y)$, isto é,

$$f(x, y) + \varphi(x, y) + h(y) < \varphi(x, x) + h(x). \tag{4.9}$$

Então de H2 temos que existem $y' \in X$ e uma vizinhança $U(x)$ de x tais que

$$f(z, y') + \varphi(z, y') + h(y') < \varphi(z, z) + h(z) \text{ para todo } z \in U(x) \cap D. \quad (4.10)$$

Portanto, $U(x) \cap D \cap T(y') = \emptyset$. Logo, $x \notin \mathrm{cl}_D\, T(y')$. Assim, T tem a propriedade (tfi).

c) Finalmente, sejam $B \subseteq D$ e $\{w_1, \ldots, w_l\} \subset X$ conjuntos verificando a condição H3, vamos provar que existe um subconjunto finito de X, A_0, tal que $\cap_{a \in A_0} \mathrm{cl}_D\, T(a)$ é um subconjunto compacto de D. Primeiro vamos mostrar que $\cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i) \subseteq B$. De fato, se $\cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i) = \emptyset$ então a afirmação é trivialmente válida. No outro caso, vamos supor que a inclusão não é verdadeira, isto é, existe $x \in \cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i) \subseteq D$ tal que $x \notin B$. Como $x \in D \setminus B$ por H3 existem $w_j \in \{w_1, \ldots, w_l\}$ e uma vizinhança $W(x)$ de x satisfazendo

$$f(s, w_j) + \varphi(s, w_j) + h(w_j) < \varphi(s, s) + h(s) \text{ para todo } s \in W(x) \cap D.$$

Donde resulta que $x \notin \mathrm{cl}_D\, T(w_j)$. Concluimos que $x \notin \cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i)$, portanto, chegamos a uma contradição. Logo, deve ser

$$\cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i) \subseteq B. \quad (4.11)$$

E desde que B é um conjunto compacto de D, segue que $\cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i)$ também é compacto em D [7, Teorema 2, pág. 68].

Considerando os conjuntos $A := X$, $B := D$ e a aplicação $G := T$, é imediato ver que os ítens a) e b) acima implicam as propriedades i) e ii) do Teorema 2.2.1, respectivamente. Do ítem c) concluimos que a aplicação T verifica a propriedade (iii) do Teorema 2.2.1 para $A_0 := \{w_1, \ldots, w_l\}$ temos que o conjunto $\cap_{i=1}^{l} \mathrm{cl}_D\, T(w_i)$ é compacto em D. Então, podemos aplicar o Teorema 2.2.1 à aplicação T obtendo que

$$\bigcap_{y \in X} T(y) \neq \emptyset,$$

o que significa que existe $\bar{x} \in T(y)$ para todo $y \in X$, ou seja,

$$f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X.$$

De onde segue a afirmação desejada. ■

Como conseqüencia imediata estabelecemos os seguintes resultados de existência de soluções para os problemas de equilíbrio generalizado e clássico. Aqui, o problema de equilíbrio clássico é aquele estudado em [11, 34], como foi considerado no Capítulo 3.

Corolário 4.2.1 *Sejam um subconjunto D não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X e funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$, $h : X \to (-\infty, +\infty]$ satisfazendo as condições (a)–(c) de (PEG) e as hipóteses H2 e H3. Se:*

H4. *para cada $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset X$ existe $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset D$ tal que:*

$$\max_{1\leq j\leq k}\{f(x, y_{i_j}) + \varphi(x, y_{i_j}) + h(y_{i_j})\} \geq \varphi(x, x) + h(x)$$

para todo $x \in \operatorname{co}\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$,

então o problema (PEG) admite pelo menos uma solução.

Prova. De fato, para cada vizinhança V de x supondo H4 temos que a rede $\{x^V\}_V$ tal que $x^V = x$ verifica a condição H1. Então H1 é verificada. Portanto, podemos aplicar o Teorema 4.2.1 obtendo o resultado. ∎

Corolário 4.2.2 *Seja $g : K \times K \to \mathbb{R}$ onde K é um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X. Se:*

H5. *g é 0- quaseconvexa generalizada (0-QCG) na segunda variável.*

H6: *g tem a propiedade de 0-transferência de semicontinuidade superior na primeira variável;*

H7: *Existem um conjunto compacto não vazio $B \subseteq K$ e um conjunto finito $\{w_1, \ldots, w_l\} \subset K$ tais que: para todo $w \in K \setminus B$ existem $j \in L = \{1, 2, \ldots, l\}$ e uma vizinhança $V(w)$ de w verificando*

$$g(w, w_j) < 0.$$

Então existe um ponto $\bar{x} \in K$ tal que

$$g(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in K.$$

Além disso, se para cada $x \in K$ tem-se $g(x,x) = 0$, então o problema de equilíbrio clássico tem solução.

Prova. Como foi visto no Capítulo 3, seção 3.1, este problema admite a formulação (PEG) para $D := K$, f a extensão natural de g para o espaço X, $\varphi \equiv 0$ e $h \equiv \delta_K$. Afirmamos que:

a) A condição H5 acarreta H1. Com efeito, seja $\{y_1, \ldots, y_m\}$ um subconjunto finito de X e $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Se:

   i) $y_i \in K$ para todo $i \in I$, por H5 existe um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de K tal que para qualquer $A = \{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $x \in \operatorname{co} A$ tem-se que

$$\max_{1 \leq j \leq k} \{f(x, y_{ij}) + \varphi(x, y_{ij}) + h(y_{ij})\} = \max_{1 \leq j \leq k} g(x, y_{ij}) \geq 0 = \varphi(x,x) + h(x). \tag{4.12}$$

   ii) $y_i \notin K$ para algum $i \in I$, então para todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de D, pelas definições de f, φ e h, vale que

$$+\infty = \max_{1 \leq j \leq k} \{f(x, y_{ij}) + \varphi(x, y_{ij}) + h(y_{ij})\} \geq \varphi(x,x) + h(x) \tag{4.13}$$

   para quaisquer $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $x \in \operatorname{co}\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\}$.

   De (4.12) e (4.13) obtemos que H4 é válida. No Corolário 4.2.1, vimos que H4 implica H1 e obtemos o resultado desejado.

b) A condição H6 acarreta H2. De fato, se existe $y \in X$ tal que

$$f(x, y) + \varphi(x, y) + h(y) < \varphi(x, x) + h(x) \tag{4.14}$$

   para algum $x \in D = K$, então temos que $f(x,y) + \varphi(x,y) + h(y) < 0$. Logo, pelas definições de D, f, φ e h segue que

$$y \in \operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h(\cdot) = K.$$

Assim, a desigualdade (4.14) pode ser reescrita como

$$g(x,y) < 0 \tag{4.15}$$

para algum $x \in K$ e $y \in K$.

Como g tem a propriedade 0-tscsx, por definição existe $y' \in K$ e uma vizinhança $V(x)$ de x tal que

$$g(z,y') < 0 \ \text{ para todo } \ z \in V(x). \tag{4.16}$$

Em particular, a desigualdade é válida para todo $z \in V(x) \cap K$, logo

$$f(z,y') + \varphi(z,y') + h(y') < g(z,y') < 0 = \varphi(z,z) + h(z) \ \text{ para todo } \ z \in V(x) \cap D.$$

c) Por último, obtém-se a condição H7 diretamente de H3 reescrevendo-a para o caso particular de $D = K$, f a extensão de g, $\varphi \equiv 0$ e $h \equiv \delta_K$.

Logo, aplicando o Teorema 4.2.1 obtemos o resultado desejado. ∎

Agora, mostramos que o resultado de Ky Fan para desigualdades min-max [35, Teorema 1.1] também é um caso particular de nosso resultado de existência.

Corolário 4.2.3 *Seja K um subconjunto não vazio, convexo e compacto de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X. Se a função $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

1. *para cada $x \in K$, $\phi(x,\cdot) : K \to \mathbb{R}$ é quaseconvexa;*

2. *para cada $y \in K$, $\phi(\cdot,y) : K \to \mathbb{R}$ é semicontínua superior.*

Então existe um ponto $\bar{x} \in K$ tal que

$$\inf_{y \in K} \phi(\bar{x},y) \geq \inf_{w \in K} \phi(w,w)$$

Prova. Desde que K é um conjunto compacto, consideramos $\lambda = \inf_{w \in K} \phi(w,w)$ e definimos a função $g : K \times K \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,y) := \phi(x,y) - \inf_{w \in K} \phi(w,w).$$

Notamos que $g(x,x) \geq 0$ para todo $x \in K$. Além disso, a condição 1 implica que o conjunto $\{y \in K : \phi(x,y) < \gamma\}$ é convexo. Logo, o conjunto $\{y \in K : g(x,y) < 0\}$ é convexo. Pela Proposição 4.1.1 temos que g é 0-quaseconvexa diagonal na segunda variável. Da Observação 4.1.3, obtemos que g é 0-quaseconvexa generalizada na segunda variável que é a condição H5 do nosso Corolário 4.2.2.

Da condição 2 e da Proposição 1.2.3 temos que ϕ tem a propriedade $\tilde{\lambda}$-(tscsx) para qualquer $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$. Em particular, para $\tilde{\lambda} = \lambda = \inf_{w \in K} \phi(w,w)$ temos que ϕ é λ-(tscsx). Logo, g tem a propiedade de 0-transferência de semicontinuidade superior na primeira variável que é a condição H6 do nosso Corolário 4.2.2.

Observamos ainda que a condição H7 é satisfeita trivialmente por vacuidade fazendo $B = K$.

Portanto, podemos aplicar o Corolário 4.2.2 a este caso e obtemos que existe $\bar{x} \in K$ tal que

$$\phi(\bar{x}, y) \geq \inf_{w \in K} \phi(w,w) \ \text{ para todo } y \in K.$$

Usando a definição de ínfimo, chegamos ao resultado desejado. ∎

Observação 4.2.1 *Em relação às hipóteses H1, H2 e H3 temos que:*

- *Em [32], Flores-Bazán estuda existência de soluções do problema (3.5) onde* $f : K \times K \to \mathbb{R}$, $\varphi : K \times X \to (-\infty, +\infty]$ *são funções e* K *é um subconjunto não vazio e convexo de um espaço de Banach* X*. Ele considera separadamente dois casos: i) quando* $\varphi(x,y) = h(y)$ *(veja seção 3); ii) o caso geral (veja seção 4). Em ambos os casos, para cada* $x \in K$ *é usado que* $f(x,x) = 0$ *e que* $f(x,\cdot) + \varphi(x,\cdot)$ *é quaseconvexa que implicam H1. Com efeito, na Observação 4.1.1 vimos que* $f(x,x) = 0$ *e quaseconvexidade implica 0-quaseconvexidade diagonal, que por sua vez, pela Observação 4.1.3, implica 0-quaseconvexidade generalizada na segunda variável. No Corolário 4.2.2, verificamos que 0-quaseconvexidade generalizada na segunda variável implica a condição H4. E no Corolário 4.2.1 obtemos a asserção.*

  Em [68, Teorema 4, (4ii)]*, Tian estuda a existência de soluções de uma desigualdade min-max considerando uma diferente condição, que está relacionada com a hipótese H1 da seguinte forma.*

Corolário 4.2.4 *Sejam A, B dois subconjuntos não vazios de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X tais que B é convexo e $A \subseteq B$. Sejam um número real γ e uma função $\phi : A \times B \to [-\infty, +\infty]$ satisfazendo:*

H8. *para cada $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset A$ tem-se*

$$\mathrm{co}\,\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{cl}_B\,\{w \in B : \phi(w, y_j) \geq \gamma\}.$$

Então, fazendo $D := B$ temos que as funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$, $h : X \to (-\infty, +\infty]$ dadas por

$$f(x,y) = \begin{cases} \phi(x,y) - \gamma, & \text{se } x \in A,\ y \in B,\ \phi(x,y) > -\infty \\ +\infty, & \text{c.c.} \end{cases}, \quad \varphi \equiv 0 \ \ e \ \ h \equiv 0, \tag{4.17}$$

verificam a condição H1.

Prova. *Com efeito, seja um subconjunto finito $\{y_1, \ldots, y_m\}$ de X e o conjunto de índices $I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Se:*

i) $y_i \in A$ para todo $i \in I$, fazendo $x_i := y_i$ para todo $i \in I$, por H8 temos que para qualquer $\bar{A} = \{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $x \in \mathrm{co}\,\bar{A}$ existe $i_j \in I$ tal que $x \in \mathrm{cl}_D\,\{w \in D : \phi(w, y_{ij}) \geq \gamma\}$. Logo, existe uma rede $\{x_\alpha\} \subset \{w \in D : \phi(w, y_{ij}) \geq \gamma\}$ tal que $x_\alpha \to x$. Assim, para cada vizinhança $V(x)$ de x existe $x_\alpha^V \in V(x) \cap D$, para algum α, tal que

$$\phi(x_\alpha^V, y_{ij}) \geq \gamma$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq k} \{f(x_\alpha^V, y_{ij}) + \varphi(x_\alpha^V, y_{ij}) + h(y_{ij})\} &= \max_{1 \leq j \leq k} \big(\phi(x_\alpha^V, y_{ij}) - \gamma\big) \geq 0 \\ &= \varphi(x_\alpha^V, x_\alpha^V) + h(x_\alpha^V). \end{aligned} \tag{4.18}$$

ii) $y_i \in D$ para todo $i \in I$ tal que $y_l \in D \setminus A$ para algum $l \in I$, fazendo $x_i := y_l$ para todo $i \in I$, então $\mathrm{co}\,\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\} = \{y_l\}$ para qualquer subconjunto $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}\}$ de $\{x_1, \ldots, x_m\}$, e pelas definições de f, φ e h, temos que

$$+\infty = \max_{1 \leq j \leq k} \{f(y_l, y_{ij}) + \varphi(y_l, y_{ij}) + h(y_{ij})\} \geq 0 = \varphi(y_l, y_l) + h(y_l) \tag{4.19}$$

iii) $y_i \notin D$ *para algum* $i \in I$*, então para todo conjunto finito* $\{x_1, \dots, x_m\}$ *de* D*, pelas definições de* f, φ *e* h*, vale que*

$$+\infty = \max_{1 \leq j \leq k} \{f(x, y_{i_j}) + \varphi(x, y_{i_j}) + h(y_{i_j})\} \geq 0 = \varphi(x, x) + h(x) \quad (4.20)$$

para quaisquer $\{x_{i1}, \dots, x_{ik}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ *e* $x \in \operatorname{co}\{x_{i1}, \dots, x_{ik}\}$.

De (4.18), (4.19) e (4.20) obtemos que H1 é sempre válida. ■

- *A condição H2 estende a condição de* $(\gamma)-$*transferência de semicontinuidade inferior na segunda variável (*$\gamma-$*tsciy) como usada, por exemplo, no Torema 4 dado em [68]. De fato, seja* A, B *dois subconjuntos não vazios de um espaço vetorial topológico de Hausdorff* X *tais que* B *é convexo e* $A \subseteq B$*. Sejam um número real* γ *e uma função* $\phi : A \times B \to [-\infty, +\infty]$ *tais que* ϕ *tem a propriedade* $\gamma-$*tsciy. Então para* $D := B$*,* $f(x, y) := \gamma - \phi(y, x)$*,* $\varphi \equiv 0$ *e* $h \equiv 0$*, da (*$\gamma-$*tsciy) de* ϕ *obtemos que*

$$f(x, y) + \varphi(x, y) + h(y) = \gamma - \phi(y, x) < 0$$

implica que existem um ponto $y' \in B = D$ *e uma vizinhança* $U(x)$ *de* x *tais que*

$$\gamma - \phi(y', z) < 0 \ \text{ para todo } z \in U(x).$$

O que equivale a

$$f(z, y') + \varphi(z, y') + h(y') = \gamma - \phi(y', z) < 0 \ \text{ para todo } z \in U(x) \cap D,$$

que corresponde a H2 nesse caso.

- *A condição H3 estende as seguintes condições clássicas de coercividade usadas na literatura:*

  1) Em [10], Bianchi e Schaible estudam o problema de equilíbrio clássico onde K *é um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff* X *e* $\mathrm{f} : K \times K \to \mathbb{R}$ *é uma função tais que* $\mathrm{f}(x, x) \geq 0$ *para todo* $x \in K$*. No entanto, é usado também que* $\mathrm{f}(x, y)$ *é quasemonótona em* $K \times K$*, o que resulta em* $\mathrm{f}(x, x) = 0$ *para todo* $x \in K$ [10, pág. 34]*. Além disso, consideram a seguinte condição de coercividade:*

A1. *Existem um subconjunto compacto* B *de* X *e um ponto* $y_0 \in B \cap K$ *tais que*

$$\mathrm{f}(x, y_0) < 0 \ \ \textit{para todo } x \in K \setminus B.$$

Neste caso, H3 segue diretamente de A1 reescrevendo-a para $D := K$, f *a extensão natural de* f, $\varphi \equiv 0$, $h \equiv \delta_K$ *e considerando* $\{w_1, \ldots, w_l\}$ *tal que* $w_i := y_0$ *para todo* i.

2) Em [23], Chowdhury e Tan estudam um problema de desigualdade min-max envolvendo funções $\mathrm{f} : K \times K \to [-\infty, +\infty]$ *e* $\mathrm{h} : K \to \mathbb{R}$ *onde* K *é um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff* X. *A seguinte condição de coercividade é considerada:*

A2. *Existem um subconjunto não vazio compacto* B *de* K *e um ponto* $y_0 \in B$ *tais que*

$$\mathrm{f}(y_0, z) + \mathrm{h}(z) - \mathrm{h}(y_0) > 0 \ \ \textit{para todo } z \in K \setminus B.$$

Neste caso, H3 segue de A2 reescrevendo-a para $D := K$, $f(x, y) = -\mathrm{f}(y, x)$ *sempre que* $\mathrm{f}(y, x) \neq +\infty$, $\varphi \equiv 0$, $h \equiv \mathrm{h}$ *e considerando* $\{w_1, \ldots, w_l\}$ *tal que* $w_i := y_0$ *para todo* i.
Um caso particular importante de A5 é quando $\mathrm{f} : K \times K \to \mathbb{R}$ *e* $h \equiv 0$, *que é considerado, por exemplo, no Teorema 3.1 de [17].*

3) Em [1], Ansari e outros consideram um problema de desigualdade min-max com uma função $\phi : K \times K \to \mathbb{R}$ *onde* K *é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço vetorial topológico de Hausdorff* X. *Seja* $\gamma \in \mathbb{R}$, *então a seguinte condição de coercividade é considerada:*

A3. *Existem um subconjunto não vazio compacto* B *de* K *e um ponto* $y_0 \in B$ *tais que*

$$\phi(z, y_0) > \gamma \ \ \textit{para todo } z \in K \setminus B.$$

Neste caso, H3 segue de A3 reescrevendo-a para $D := K$, f *sendo a extensâo natural de* $\tilde{f}(x, y) := \gamma - \phi(x, y)$ *ao espaço inteiro*, $\varphi \equiv 0$, $h \equiv 0$ *e considerando* $\{w_1, \ldots, w_l\}$ *tal que* $w_i := y_0$ *para todo* i.

4) Em [27], Fakhar e Zafarani estudam um problema de equilíbrio para uma função $\mathrm{f} : K \times K \to \mathbb{R}$ *onde* K *é um subconjunto não vazio e convexo* *de um espaço vetorial topológico de Hausdorff X. A seguinte condição de coercividade é considerada:*

A4. *Existem um subconjunto não vazio compacto B de K e um subcon-conjunto não vazio e finito M de K tais que para cada $z \in K \setminus B$ existe $x \in M$ verificando*

$$\mathrm{f}(x, z) > 0.$$

Neste caso, H3 segue de A4 reescrevendo-a para $D := K$, f sendo a extensâo natural de $\tilde{f}(x, y) = -\mathrm{f}(y, x)$ ao espaço inteiro, $\varphi \equiv 0$, $h \equiv 0$ e considerando $\{w_1, \ldots, w_l\} = M$.

Capítulo 5

Dualidade para (PEG)

Neste capítulo, introduzimos um esquema dual para (PEG) que preserva algumas características duais clássicas. Em seguida apresentamos condições de otimalidade para a existência de soluções primais-duais. Finalizamos relacionando o nosso esquema dual com aqueles propostos por Martinez-Legaz e Sosa em [55] e Konnov e Schaible em [51].

5.1 Resultados básicos

Lembramos que o Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG) consiste em:

$$\text{(PEG)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X. \end{cases} \tag{5.1}$$

Onde:

1. D é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X;

2. As funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e $h : X \to (-\infty, +\infty]$ satisfazem as seguintes condições:

   (a) $f(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;

   (b) h é convexa;

   (c) $\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ para todo $x \in D$.

Ao longo deste capítulo, denotamos o conjunto solução de (5.1) por $\operatorname{Sol}(\text{PEG})$ e assumimos a seguinte condição sobre esse conjunto:

Hipótese 5.1.1 *O conjunto* $\mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG})$ *é não vazio.*

Considerando f, φ e h funções verificando as condições (a)–(c) de (5.1), estabelecemos os seguintes resultados básicos sobre o conjunto $\mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG})$.

Lema 5.1.1 *Se* $\bar{x} \in \mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG})$*, então* $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi(\bar{x}, \cdot) \cap \mathrm{dom}\,h$*.*

Prova. Seja $\bar{x} \in \mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG})$. Então $\bar{x} \in D$ e existe, pelo ítem 2(c) de (PEG), $y \in X$ tal que

$$+\infty > f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}).$$

Concluímos que $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi(\bar{x}, \cdot) \cap \mathrm{dom}\,h$, obtendo-se o resultado desejado. ∎

Fixado $x \in X$, seja $F_x : X \to (-\infty, +\infty]$ a função dada por $F_x(y) := f(x, y) + \varphi(x, y)$ e seja $v : X \to (-\infty, +\infty]$ a função definida por $v(x) := \varphi(x, x) + h(x)$.

Lema 5.1.2 *A soma* $F_x + h$ *é uma função própria para todo* $x \in D$*. Além disso, sob a Hipótese 5.1.1, a função* v *também é própria.*

Prova. Para cada $x \in D$, a primeira afirmação segue diretamente da definição de F_x e do ítem 2(c) de (PEG). Além do mais, da Hipótese 5.1.1 e do Lema 5.1.1 temos que

$$\emptyset \neq \mathrm{Sol}\,(PEG) \subseteq \mathrm{dom}\,v.$$

Logo $v(\cdot)$ é própria. ∎

O último resultado desta seção caracteriza uma solução de (PEG) como uma solução de um problema de minimização e estende um resultado dado por Martínez-Legaz e Sosa em [55].

Lema 5.1.3 *Seja* $\bar{x} \in D$*. O ponto* $\bar{x}$ *é uma solução de* (PEG) *se, e somente se, verifica*

$$\inf_{y \in X} \{F_{\bar{x}}(y) + h(y)\} = v(\bar{x}). \tag{5.2}$$

Prova. Seja $\bar{x} \in \mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG})$. Portanto, temos que $\bar{x} \in D$ e

$$f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \;\forall\; y \in X,$$

isto é,

$$\inf_{y\in X}\{F_{\bar{x}}(y)+h(y)\}\geq \varphi(\bar{x},\bar{x})+h(\bar{x}). \tag{5.3}$$

Por outro lado, usando as definições de $v(\cdot)$ e $F_{\bar{x}}(\cdot)$ e a condição 2(a) de (5.1) temos que:

$$v(\bar{x})=\varphi(\bar{x},\bar{x})+h(\bar{x})=F_{\bar{x}}(\bar{x})+h(\bar{x})\geq \inf_{y\in X}\{F_{\bar{x}}(y)+h(y)\}. \tag{5.4}$$

De (5.3) e (5.4), obtemos a igualdade (5.2).

Inversamente, suponha que (5.2) é verificada para algum $\bar{x}\in D$, então vale que

$$F_{\bar{x}}(y)+h(y)\geq v(\bar{x})\ \ \forall\, y\in X.$$

Usando as definições de $F_{\bar{x}}(\cdot)$ e $v(\cdot)$ concluímos que $\bar{x}\in \mathrm{Sol}\,(PEG)$. ∎

5.2 Esquema dual

Sejam X^* o espaço dual de um espaço vetorial topológico real de Hausdorff X e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a aplicação bilinear de dualidade entre X^* e X. Sejam f, φ e h funções verificando as condições (a)–(c) do problema (5.1). A seguir, introduzimos conceitos duais relativos ao problema (PEG) baseados no conceito de funções conjugadas.

Definição 5.2.1 *A **função primal-dual** $L : X\times X^*\to[-\infty,+\infty]$ é dada por*

$$L(x,\xi)=\begin{cases} -h^*(-\xi)-F_x^*(\xi), & \textit{se } D_\xi\neq\emptyset \textit{ e } x\in D_\xi\\ +\infty, & \textit{se } D_\xi\neq\emptyset \textit{ e } x\notin D_\xi\\ -\infty, & \textit{se } D_\xi=\emptyset,\end{cases}$$

onde h^* e F_x^* denotam as conjugadas de h e F_x, respectivamente, e $D_\xi:=\{x\in D : F_x^*(\xi)<+\infty\}$ para cada $\xi\in X^*$.

Definição 5.2.2 *O **problema dual** de* (PEG) *é definido como:*

$$\text{(DPEG)}\ \begin{cases}\sup g(\xi)\\ \xi\in X^*,\end{cases} \tag{5.5}$$

*onde $g : X^*\to[-\infty,+\infty)$ é a **função dual** dada por*

$$g(\xi)=\inf_{x\in X}L(x,\xi)=\begin{cases}-h^*(-\xi)-\sup_{x\in D_\xi}F_x^*(\xi), & \textit{se } D_\xi\neq\emptyset\\ -\infty, & \textit{c.c.}\end{cases} \tag{5.6}$$

Observamos que as funções $L(\cdot,\cdot)$ e $g(\cdot)$ estão bem definidas. De fato, pelo Lema 5.1.2 resulta que $h(\cdot)$ and $F_x(\cdot)$ são funções próprias para todo $x \in D$, implicando que $h^*(\xi) > -\infty$ and $F_x^*(\xi) > -\infty$ para todo $\xi \in X^*$.

Definição 5.2.3 *Um ponto $(x, \xi) \in X \times X^*$ é denominado* ***ponto primal-dual viável*** *sempre que $x \in D_\xi$.*

A próxima propriedade mostra que nosso esquema dual preserva uma característica dual clássica, a saber a dualidade fraca, em relação ao conjunto dos pontos primais-duais viáveis do problema (PEG).

Propriedade 5.2.1 *(quase dualidade fraca) Seja $(x, \xi) \in X \times X^*$ um ponto primal-dual viável. Então, para todo $y \in X$ se verifica*

$$L(x, \xi) \leq F_x(y) + h(y) \ \ e \ \ g(\xi) \leq F_x(y) + h(y). \tag{5.7}$$

Além disso, $L(x, \xi) \leq v(x)$ e $g(\xi) \leq v(x)$.

Prova. Desde que $x \in D_\xi$, temos que $x \in D$ e $F_x^*(\xi) < +\infty$. Mais ainda, $F_x^*(\cdot)$ é própria pela condição (c) de (5.1). Portanto, $F_x^*(\xi)$ é finito. Logo, da desigualdade de Fenchel [70] (ou Desigualdade Generalizada de Young, veja por exemplo [73]), para todo $y \in X$, segue que

$$F_x^*(\xi) + F_x(y) + h(y) \geq \langle \xi, y \rangle + h(y).$$

Usando que $F_x^*(\xi)$ é finito, a definição de função conjugada aplicada à função h em $-\xi$ e a desigualdade acima, obtemos

$$\inf_{y \in X}\{F_x(y) + h(y)\} \geq -\sup_{y \in X}\{\langle -\xi, y \rangle - h(y)\} - F_x^*(\xi) = -h^*(-\xi) - F_x^*(\xi).$$

Da relação acima e da Definição 5.2.1, concluímos que

$$L(x, \xi) \leq F_x(y) + h(y) \ \text{ para todo } y \in X. \tag{5.8}$$

Além do mais, de (5.6) temos, para todo $y \in X$, que

$$F_x(y) + h(y) \geq L(x, \xi) \geq \inf_{u \in D_\xi} L(u, \xi) = \inf_{u \in X} L(u, \xi) = g(\xi) \tag{5.9}$$

Finalmente, fazendo $y := x$ em (5.8) e em (5.9), e usando a condição 2(a) de (PEG) segue que

$$L(x, \xi) \leq v(x) \ \text{ and } \ g(\xi) \leq v(x).$$

O que completa a prova. ∎

5.3 Condições de otimalidade

Agora, estabelecemos condições necessárias e suficientes de otimalidade para soluções do problema (PEG).

Teorema 5.3.1 (Condições Necessárias de Otimalidade) *Sejam f, φ e h funções satisfazendo as condições (a)–(c) de (5.1). Seja $\bar{x} \in X$ uma solução de (PEG) verificando:*

Hipótese 5.3.1 *A função $F_{\bar{x}}(\cdot)$ é convexa;*

Hipótese 5.3.2 $\partial(F_{\bar{x}} + h) = \partial F_{\bar{x}} + \partial h$.

Então existe um $\bar{\xi} \in X^*$ tal que

$$(\bar{x}, \bar{\xi}) \ \text{ é um ponto primal-dual viável e } \ L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x}). \tag{5.10}$$

Prova. Seja $\bar{x} \in \mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG})$ verificando as Hipóteses 5.3.1 e 5.3.2. Pelo Lema 5.1.2 e a condição (b) de (PEG) temos que a função $F_{\bar{x}} + h$ é própria e convexa. Então, pelo Lema 5.1.3 segue que

$$0 \in \partial(F_{\bar{x}}(\bar{x}) + h(\bar{x})) = \partial F_{\bar{x}}(\bar{x}) + \partial h(\bar{x}).$$

Logo, existe $\bar{\xi} \in X^*$ tal que $\bar{\xi} \in \partial F_{\bar{x}}(\bar{x})$ e $-\bar{\xi} \in \partial h(\bar{x})$. Pela relação entre subgradientes e funções conjugadas [26, Cap. 1, Proposição 5.1] obtemos que

$$F^*_{\bar{x}}(\bar{\xi}) + F_{\bar{x}}(\bar{x}) = \langle \bar{\xi}, \bar{x} \rangle \ \text{ e } \ h^*(-\bar{\xi}) + h(\bar{x}) = \langle -\bar{\xi}, \bar{x} \rangle. \tag{5.11}$$

Assim, vale que $F^*_{\bar{x}}(\bar{\xi}) < +\infty$. Além do mais, $\bar{x} \in \mathrm{Sol}\,(\mathrm{PEG}) \subseteq D$. Portanto, concluímos que $\bar{x} \in D_{\bar{\xi}}$. A primeira parte da afirmação segue da Definição 5.2.3.

Agora, somando-se as duas igualdades em (5.11) e usando a caracterização de uma solução de (PEG) estabelecida em (5.2) chegamos a

$$-F^*_{\bar{x}}(\bar{\xi}) - h^*(-\bar{\xi}) = F_{\bar{x}}(\bar{x}) + h(\bar{x}) = v(\bar{x}).$$

A segunda e última parte é consequência da expressão da função primal-dual $L(\cdot, \cdot)$ dada na Definição 5.2.1. ∎

Observação 5.3.1 *A Hipótese 5.3.2 é verificada sob alguma restrição de qualificação. Por exemplo, ela é válida nas seguintes situações:*
(a) Se X é um espaço real localmente convexo, F_x e h são funções próprias e convexas e existe um ponto $y \in \operatorname{dom} F_x \cap \operatorname{dom} h$ onde F_x (ou h) é contínua [73, Teorema 47.B]*;*
(b) Se X é um espaço de Banach, F_x e h são funções próprias, convexas e semicontínuas inferiormente com $\operatorname{dom} F_x \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ e o conjunto $(\operatorname{epi} F_x^*) + (\operatorname{epi} h^*)$ é fracamente fechado em $X \times \mathbb{R}$, onde $\operatorname{epi} f$ indica o epígrafo da função f [15, Teorema 3.1]*;*
(c) Se $X = \mathbb{R}^n$, F_x e h são funções próprias e convexas e $\operatorname{ir}(\operatorname{dom} F_x) \cap \operatorname{ir}(\operatorname{dom} h) \neq \emptyset$, onde $\operatorname{ir}(C)$ denota o interior relativo do conjunto C [61, Teorema 23.8].

Teorema 5.3.2 (Condições Suficientes de Otimalidade) *Sejam f, φ e h funções satisfazendo as condições (a)–(c) do problema (5.1). Se um ponto $(\bar{x}, \bar{\xi}) \in X \times X^*$ é um ponto primal-dual viável e*

$$L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x}).$$

Então $\bar{x}$ é uma solução de (5.1).

Prova. Como $(\bar{x}, \bar{\xi})$ é um ponto primal-dual viável tal que $L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x})$, aplicando a Propriedade 5.2.1 temos que

$$F_{\bar{x}}(y) + h(y) \geq L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X.$$

Assim, usando a definição da função $v(\cdot)$, a hipótese (a) de (PEG) e a desigualdade acima obtemos que

$$v(\bar{x}) = F_{\bar{x}}(\bar{x}) + h(\bar{x}) \geq \inf_{y \in X} \{F_{\bar{x}}(y) + h(y)\} \geq v(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X,$$

Logo, o Lema 5.1.3 implica que $\bar{x}$ resolve o problema (PEG). ∎

5.4 Outros esquemas duais

Nesta parte, apresentamos os esquemas duais para os problemas de equilíbrio estudados por Martínez-Legáz e Sosa [55] e Konnov e Schaible [51]. Aplicamos esses esquemas a um problema de otimização convexa (OC) e observamos que o dual clássico lagrangiano não . Enquanto que no Capítulo 6, mostramos que nosso esquema dual aplicado à formulação (PEG) de (OC) recupera exatamente o dual clássico.

Esquema dual de Martínez-Legaz e Sosa

Em [55], Martínez-Legaz e Sosa estudam o seguinte problema de equilíbrio:

$$\text{(MLS)}\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ \mathrm{f}(\bar{x}, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in K, \end{cases} \tag{5.12}$$

onde K é um subconjunto não vazio e convexo de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff localmente convexo X e $\mathrm{f} : X \times X \to [-\infty, +\infty]$ é tal que:

1) $\mathrm{f}(x, x) = 0$ para todo $x \in K$;

2) para cada $x \in K$, $\mathrm{f}(x, \cdot) : X \to (-\infty, +\infty]$ é convexa e semicontínua inferior e existe y_x tal que $\mathrm{f}(x, y_x) < +\infty$ e, $y_x \in \operatorname{int} K$ ou $\mathrm{f}(x, \cdot)$ é contínua em y_x.

Martínez-Legaz e Sosa apresentam o seguinte problema dual para o problema (5.12):

$$\text{(DMLS)}\begin{cases} \text{Maximizar} & g(\xi) \\ \text{sujeito a} & \xi \in X^*, \end{cases} \tag{5.13}$$

onde a função objetivo $g : K^* \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ é dada por

$$g(\xi) := i_K(\xi) - \inf_{x \in K} \mathrm{f}_x^*(\xi), \tag{5.14}$$

tal que $i_K(\xi) := \inf_{x \in K}\langle \xi, x\rangle$, com $K^* = \{\xi \in X^* : i_K(\xi) > -\infty\}$, e f_x^* é a conjugada da função f_x para cada $x \in X$ fixo.

O próximo resultado, dado em [55], relaciona as soluções do problema de equilíbrio (5.12) com as de seu dual (5.13).

Teorema 5.4.1 [55, Teorema3.1] *Seja $\bar{x} \in K$. Os seguintes resultados são equivalentes:*

1) $\bar{x}$ é uma solução de (5.12);

2) Existe um $\bar{\xi} \in K^*$ tal que $\mathrm{f}_{\bar{x}}^*(\bar{\xi}) = i_K(\bar{\xi})$.

Portanto, se (5.12) tem uma solução, então (5.13) tem uma solução ótima e seu valor ótimo é zero.

Martínez-Legaz e Sosa aplicam seu método dual ao problema de otimização convexa dado por:

$$(\mathrm{OC})\begin{cases}\text{Encontrar } \bar{x}\in\mathcal{K}, \text{ tal que}\\ \psi(y)\geq\psi(\bar{x}) \text{ para todo } y\in\mathcal{K},\end{cases}\tag{5.15}$$

onde $\mathcal{K}\subseteq X$ é não vazio, convexo e fechado e $\psi : X\to(-\infty,+\infty]$ é uma função convexa semicontínua inferior tais que $\operatorname{dom}\psi\cap\mathcal{K}\neq\emptyset$.

Eles consideram o seguinte problema de equilíbrio sob a formulação (5.12) equivalente ao problema (OC):

$$(\mathrm{PE})\begin{cases}\text{Encontrar } \bar{x}\in K \text{ tal que}\\ \mathrm{f}(\bar{x},y)\geq 0 \text{ para todo } y\in K,\end{cases}$$

onde $K := \mathcal{K}\cap\operatorname{dom}\psi$ e $\mathrm{f}(x,y) := \psi(y)-\psi(x)$ para todo $(x,y)\in K\times X$ e $\mathrm{f}(x,y) := +\infty$ em caso contrário. Portanto,

$$\mathrm{f}_x^*(\xi)=\sup_{y\in X}\{\langle\xi,y\rangle-\psi(y)+\psi(x)\}=\psi^*(\xi)+\psi(x).$$

Assim, a função dual objetivo associada é dada por

$$g(\xi)=i_K(\xi)-\psi^*(\xi)-\inf_{x\in K}\psi(x).$$

Logo o problema dual (5.13) é equivalente a

$$(\mathrm{DPE})\begin{cases}\text{Maximizar} & i_K(\xi)-\psi^*(\xi)+\psi^*(0)\\ \text{sujeito a} & \xi\in X^*,\end{cases}\tag{5.16}$$

que corresponde a um problema dual em otimização convexa.

No Capítulo 6 mostramos que nosso esquema dual aplicado a um problema sob a formulação (PEG) equivalente a (OC) resulta o dual clássico lagrangiano.

Agora vamos mostrar que o Teorema 5.4.1 é um caso particular de nossos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2. Com efeito, considerando em (5.1), $D=K$, $f(x,y)=\mathrm{f}(x,y)+\delta_K(x)$, $\varphi(x,y)=0$ e $h(y)=\delta_K(y)$, obtemos um problema equivalente ao problema (5.12) sob nossa formulação (PEG) (veja seção 3.2 do Capítulo 3).

Para cada $x\in K$, pelas expressões de f e φ, temos que

$$F_x(y)=\mathrm{f}(x,y),\tag{5.17}$$

que é uma função convexa, pois $\mathrm{f}(x,.)$ é convexa para cada $x\in K$, por hipótese. Assim, a Hipótese 5.3.1 é satisfeita para cada $x\in K$.

Por outro lado, a condição 2) do problema (5.12) garante que, para cada $x\in K$, existe $y_x\in X$ verificando pelo menos uma das seguintes possibilidades:

- $\mathrm{f}(x, y_x) < +\infty$ e $y_x \in \operatorname{int} K$. Logo, $y_x \in \operatorname{dom} F_x \cap \operatorname{dom} h$ e $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Então h é contínua em $\operatorname{int} K$, ou,

- $\mathrm{f}(x, y_x) < +\infty$ e $\mathrm{f}(x, \cdot)$ é contínua em y_x.

Em ambos os casos, do [74, Teorema 47.B], concluimos que $\partial(F_x + h) = \partial F_x + \partial h$ para cada $x \in K$, ou seja, a Hipótese 5.3.2 é verificada.

Usando (5.17) e as expressões de φ e h, para cada $x \in D = K$ temos que

$$F_x^*(\xi) = \sup_{y \in X}\{\langle \xi, y\rangle - \mathrm{f}(x, y)\} = \mathrm{f}_x^*(\xi), \quad \text{e} \quad \varphi(x, x) + h(x) = 0. \tag{5.18}$$

Dado $\xi \in X^*$, da primeira igualdade em (5.18) temos que

$$D_\xi = \{x \in K : F_x^*(\xi) < +\infty\} = \{x \in K : \mathrm{f}_x^*(\xi) < +\infty\}.$$

Além disso, vale que

$$-h^*(-\xi) = -\sup_{y \in X}\{\langle -\xi, y\rangle - \delta_K(y)\} = -\sup_{y \in K}\langle -\xi, y\rangle = \inf_{y \in K}\langle \xi, y\rangle = i_K(\xi). \tag{5.19}$$

Portanto, usando (5.18) e (5.19) para reescrever nossos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2 em relação à formulação (PEG) de (5.12), obtemos o Teorema 5.4.1.

Esquema de Konnov e Schaible.

Em [51], Konnov e Schaible consideram o seguinte problema de equilíbrio primal:

$$\text{(KS)}\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0, \text{ para todo } y \in K, \end{cases} \tag{5.20}$$

onde K é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X e a função $f : K \times K \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x, x) \geq 0$ para cada $x \in K$.

Esta formulação inclui o problema de equilíbrio estudado por Blum e Oettli em [11].

Denotando por $\mathcal{F}(K)$ o conjunto das bifunções escalares definidas sobre $K \times K$ e considerando H um operador de $\mathcal{F}(K)$ nele mesmo, Konnov e Schaible introduzem o seguinte problema dual (relativo a H):

$$\text{(DKS)}\begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ H(f(\bar{x}, y)) \geq 0, \text{ para todo } y \in K, \end{cases} \tag{5.21}$$

onde H é denominado operador de dualidade. Definindo $\varphi(y,x) := -H(f(x,y))$, (5.21) é reescrito como:

$$(\mathrm{DKS})_1 \left\{ \begin{array}{c} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ \varphi(y,\bar{x}) \leq 0, \text{ para todo } y \in K, \end{array} \right.$$

Observamos que uma família de duais é obtida. Além disso, para que o problema dual do dual seja o primal, eles consideram a seguinte condição sobre H :

$$H \circ H(f(x,y)) = f(x,y) \text{ para todo } x,y \in K,$$

ou equivalentemente,

$$H(-\varphi(y,x)) = f(x,y) \text{ para todo } x,y \in K.$$

Um *esquema dual aditivo*, caso particular de (5.21), também é definido em [51]. Mais precisamente, os autores consideram

$$H(f(x,y)) := -\varphi(y,x) = -f(y,x) + h(y,x) \text{ para alguma } h \in \mathcal{F}(K)$$

e reescrevem o problema dual da seguinte maneira:

$$(\mathrm{DKSD}_h) \left\{ \begin{array}{c} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f(y,\bar{x}) \leq h(y,\bar{x}), \text{ para todo } y \in K, \end{array} \right. \tag{5.22}$$

Uma consequência imediata é que se h é simétrica (i.e., $h(x,y) = h(y,x)$ para todo $x,y \in K$), então o dual de (5.22) é (5.20).

Agora, consideramos o problema de otimização convexa sob a formulação (5.20) dado por:

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{c} \text{Encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f_0(y) - f_0(\bar{x}) \geq 0 \text{ para todo } y \in K, \end{array} \right.$$

onde $K := \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$ e $f_0, f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções convexas.

Observamos que é possível obter um operador $H : \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(K)$ para o qual o dual clássico lagrangiano de (P) não é obtido.

Capítulo 6

Aplicações da Teoria Dual de (PEG)

Neste capítulo, mostramos que, ao aplicar a teoria dual de (PEG), desenvolvida no capítulo anterior, aos problemas de otimização convexa, de desigualdade variacional e quasevariacional generalizada considerados em [57] e em [56], respectivamente, e de programação semidefinida dado em [41], reencontramos os problemas duais clássicos em cada caso. Além disso, reescrevendo as condições de otimalidade para as formulações (PEG) dos problemas estudados em [57, 56, 41], recuperamos resultados duais obtidos em cada um desses trabalhos.

Mais uma vez, com o objetivo de tornar a leitura deste capítulo mais cômoda, relembramos a nossa formulação:

$$\text{(PEG)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X. \end{cases} \tag{6.1}$$

Onde:

1. D é um subconjunto não vazio de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff X;

2. As funções $f, \varphi : X \times X \to (-\infty, +\infty]$ e $h : X \to (-\infty, +\infty]$ satisfazem as seguintes condições:

   (a) $f(x, x) = 0$ para todo $x \in D$;

   (b) h é convexa;

   (c) $\operatorname{dom} f(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(x, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset$ para todo $x \in D$.

6.1 Otimização Convexa

Nesta seção, consideramos o seguinte *problema de programação não-linear primal* dado por:

$$\text{(P)} \quad \min_{y \in K \subset \mathbb{R}^n} \psi(y) \quad \text{tal que} \quad p_i(y) \leq 0, \;\; i = 1, \ldots, m,$$

onde $\psi, p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções convexas e K é um conjunto não-vazio, convexo e fechado tais que $K \cap \{y : p_i(y) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m\} \neq \phi$.

A seguir, apresentamos um problema equivalente a (P) que corresponde a um problema sob nossa formulação (PEG) ao qual aplicamos nosso esquema dual.

Formulação (PEG) para (P). Seja o seguinte problema:

$$(P)_1 \left\{ \begin{array}{c} \text{Encontrar } \bar{v} = (\bar{x}, \bar{z}) \in E \text{ tal que} \\ \varphi(\bar{v}, w) + h(w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) + h(\bar{v}) \text{ para todo } w = (y, u) \in E, \end{array} \right.$$

onde $E := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\varphi(v, w) = \varphi((x, z), (y, u)) := \psi(y) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(p(y) + u) + \delta_K(y)$ é uma *função objetivo perturbada* (ver [25]) e $h(w) = \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u)$. A i-ésima componente da função $p(y) + u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é dada por $(p_i(y) + u_i)$.

Observamos que a formulação $(\text{P})_1$ corresponde a um caso particular de (PEG), considerando em (6.1) $D := E$ e $f \equiv 0$, obviamente temos que $D \neq \emptyset$ e que as funções f, φ e h verificam as condições (a), (b) e (c).

Os problemas (P) e $(\text{P})_1$ estão relacionados segundo o resultado abaixo.

Lema 6.1.1 *Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de (P) se, e somente se, $(\bar{x}, \bar{z})$ é uma solução de $(P)_1$ para algum $\bar{z} \in \mathbb{R}^m$.*

Prova. Denotando-se o conjunto viável do problema (P) por K_0, temos que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de (P) se $\bar{x} \in K_0$ e verifica

$$\psi(y) \geq \psi(\bar{x}) \;\; \text{para todo } y \in K_0.$$

Portanto $p(\bar{x}) \leq 0$. Considerando $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{z})$ com $\bar{z} = -p(\bar{x})$ e as definições de φ e h, obtemos que

$$\varphi(\bar{v}, w) + h(w) \geq \varphi(\bar{v}, \bar{v}) + h(\bar{v}) \;\; \text{para todo } w = (y, u) \in E. \tag{6.2}$$

Logo, $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{z})$ com $\bar{z} = -p(\bar{x})$ é uma solução de $(\text{P})_1$.

Reciprocamente, seja $\bar{v} = (\bar{x}, \bar{z})$ uma solução de $(\mathrm{P})_1$, logo, $\bar{v} \in E$ e verifica (6.2). Desde que a função ψ é finita e o conjunto K é não vazio, das definições de φ e h e da desigualdade (6.2), temos que $\varphi(\bar{v}, \bar{v}) + h(\bar{v}) < +\infty$. Logo, devemos ter

$$\bar{x} \in K, \;\; p(\bar{x}) + \bar{z} \in \mathbb{R}^m_-, \;\; \bar{z} \in \mathbb{R}^m_+ \;\text{ e }\; \varphi(\bar{v}, \bar{v}) = \psi(\bar{x}).$$

Assim, $p(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m_-$ e, portanto, $\bar{x} \in K_0$ e a desigualdade (6.2) torna-se

$$\psi(y) \geq \psi(\bar{x}) \;\text{ para todo } y \in K_0.$$

Portanto, $\bar{x}$ resolve (P). ∎

Funções primal-dual e dual associadas ao problema $(\mathbf{P}_1)$. Agora, obtemos as funções de nossa teoria dual para $(\mathrm{P})_1$.

Inicialmente notamos que

$$F_v(w) = \varphi(v, w) = \varphi((x, z), (y, u)) = \psi(y) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(p(y) + u) + \delta_K(y) \tag{6.3}$$

não depende da variável v. Portanto, podemos omitir v em F_v e em F_v^*.

Recordamos que para cada $\nu = (\xi, \eta) \in E^* = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ temos

$$D_\nu = \{v \in D : F_v^*(\nu) < +\infty\} = \{v \in E : F^*(\nu) < +\infty\}$$

Assim, segue que $D_\nu \neq \emptyset$ se, e somente se, $F^*(\nu) < +\infty$. Então, temos que $D_\nu = \emptyset$ ou $D_\nu = E$. Neste último caso, que é o que interessa, vale que

$$g(\nu) = L(v, \nu) = -h^*(-\nu) - F^*(\nu) \;\text{ para todo }\; v \in E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{6.4}$$

A fim de obtermos a função primal-dual $L(v, \nu)$ e, consequentemente, a função dual $g(\nu)$, vamos calcular $h^*(-\nu)$ e $F^*(\nu)$. Passamos ao cálculo de $h^*(-\nu)$:

$$\begin{aligned} h^*(-\nu) = h^*(-\xi, -\eta) &= \sup_{w=(y,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \{\langle(-\xi, -\eta), (y, u)\rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u)\} \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \{\langle -\xi, y\rangle\} + \sup_{u\in\mathbb{R}^m} \{\langle -\eta, u\rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u)\} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } \xi = 0 \text{ e } \eta \geq 0 \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.5}$$

onde $\eta \geq 0$ significa que $\eta \in \mathbb{R}^m_+$.

De (6.5), concluimos que é suficiente calcularmos $F^*(0,\eta)$ com $\eta \geq 0$, pois $-h^*(-\nu) - F^*(\nu) = -\infty$ nos outros casos. Assim,

$$F^*(0,\eta) = \sup_{(y,u)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} \{\langle \eta, u\rangle - \psi(y) - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(p(y)+u) - \delta_K(y)\}.$$

Fazendo $s = p(y) + u$, temos que $u = s - p(y)$ e podemos reescrever a expressão acima do seguinte modo:

$$F^*(0,\eta) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \{\langle -\eta, p(y)\rangle - \psi(y) - \delta_K(y)\} + \sup_{s\in\mathbb{R}^m} \{\langle \eta, s\rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(s)\}.$$

Então, para $\eta \geq 0$ obtemos que

$$F^*(0,\eta) = \sup_{y\in K}\{\langle -\eta, p(y)\rangle - \psi(y)\}. \tag{6.6}$$

De (6.4), (6.5) e (6.6) temos que

$$g(\nu) = L(v,\nu) = \begin{cases} \inf_{y\in K}\{\psi(y) + \langle \eta, p(y)\rangle\}, & \text{se } \nu = (0,\eta),\ \eta \geq 0 \\ -\infty, & \text{c. c.} \end{cases} \tag{6.7}$$

O problema dual de (P)$_1$. Finalmente, vamos mostrar que o problem dual de (P)$_1$ é o dual lagrangiano clássico de (P).

De fato, de (6.7) segue que $g(\nu) = -\infty$ se $\nu = (\xi,\eta)$ com $\xi \neq 0$ ou $\eta \notin \mathbb{R}^m_+$. Portanto,

$$\sup_{\nu\in E^*} g(\nu) = \sup_{(\xi,\eta)\in E} g(\xi,\eta) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m_+} g(0,\eta) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}^m_+} \{\inf_{y\in K}\{\psi(y) + \langle \eta, p(y)\rangle\}\}. \tag{6.8}$$

Isto é, aplicando a teoria dual ao problema (PEG) correspondente ao problema de Otimização convexa reeencontramos o problema dual clássico lagrangiano associado a (P).

Observação 6.1.1 *O problema de programação linear definido como*

$$(\text{PL}) \begin{cases} \min_{y\in\mathbb{R}^n} & \langle c, y\rangle \\ s.a. & Ay \geq b,\ y \geq 0 \end{cases}$$

é um caso particular de (P)*, onde as funções envolvidas são lineares e K é o espaço todo. Conseqüentemente, o problema dual clássico de* (PL) *é obtido como caso particular deste esquema.*

6.2 Desigualdades variacionais

Em [57], Mosco estuda o problema de *Desigualdade Variacional* dado por:

$$\text{(DV)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in \text{dom}A \text{ tal que} \\ \langle A(\bar{x}), y - \bar{x} \rangle + z(y) \geq z(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \tag{6.9}$$

onde A é um operador de um espaço vetorial topológico de Hausdorff localmente convexo X em seu espaço topológico dual X^*, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a aplicação bilinear de dualidade entre X^* e X e $z : X \to (-\infty, +\infty]$ é uma função própria, convexa e semicontínua inferior.

No mesmo trabalho, Mosco apresenta para o problema (6.9) a seguinte formulação dual:

$$\text{(DDV)} \begin{cases} \text{Encontrar } \; u^* \in \text{dom}\, A' \; \text{ tal que} \\ \langle A'u^*, v^* - u^* \rangle + z^*(v^*) \geq z^*(u^*) \text{ para todo } v^* \in X^*, \end{cases} \tag{6.10}$$

onde $A' : X^* \to X$ é a aplicação dada por $A'(v^*) = -A^{-1}(-v^*)$

Destacamos o seguinte resultado, obtido por Mosco, que relaciona as soluções primais de (6.9) com as soluções duais de (6.10).

Teorema 6.2.1 *Um ponto $\bar{x} \in X$ resolve (6.9) se, e somente se, $u^* = -A\bar{x} \in X^*$ é uma solução de (6.10). Além disso, as desigualdades em (6.9) e (6.10) são verificadas se, e somente se, $u^* = -A\bar{x}$, ou $x = -A'(u^*)$ e a identidade $z(\bar{x}) + z^*(u^*) = \langle u^*, \bar{x} \rangle$ é satisfeita.*

Nesta seção, aplicamos nossa teoria dual à formulação (PEG) do problema (6.9), obtida no Capítulo 3 e dada por

$$\text{(DV)}_1 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in D, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) + \varphi(\bar{x}, y) + h(y) \geq \varphi(\bar{x}, \bar{x}) + h(\bar{x}) \text{ para todo } y \in X, \end{cases} \tag{6.11}$$

onde:

$$D := \text{dom}A, \; f(x,y) := \begin{cases} \langle A(x), y - x \rangle, & \text{se } x \in \text{dom}\, A \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases}, \varphi \equiv 0, \; h \equiv z, \tag{6.12}$$

e reencontramos o Teorema 6.2.1. Finalizamos a seção comentando o caso quando A é uma aplicação ponto-conjunto.

Função primal-dual associada à formulação (PEG) de (DV). Com o objetivo de aplicarmos nossas condições necessárias e suficientes de otimalidade para a formulação (PEG) de (6.9), calculamos a expressão da função primal-dual L deste problema.

Sejam as expressões de D, f, φ e h dadas em (6.12). Recordando que

$$F_x(y) = f(x,y) + \varphi(x,y)$$

temos que

$$F_x(y) \;=\; \begin{cases} \langle Ax, y-x\rangle, & \text{se } x \in \operatorname{dom} A \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases} \tag{6.13}$$

Portanto, pela definição de função conjugada obtemos que

$$F_x^*(\xi) = \begin{cases} \sup_{y\in X}\{\langle \xi, y\rangle - \langle Ax, y-x\rangle\}, & \text{se } x \in \operatorname{dom} A \\ -\infty, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Sabemos que $D_\xi = \{x \in \operatorname{dom} A : F_x^*(\xi) < +\infty\}$ e neste caso vale que

$$\begin{aligned} F_x^*(\xi) &= \sup_{y\in X}\{\langle \xi, y\rangle - \langle Ax, y-x\rangle\} \\ &= \sup_{y\in X}\{\langle \xi - Ax, y\rangle\} + \langle Ax, x\rangle \\ &= \begin{cases} \langle \xi, x\rangle, & \text{se } \xi = Ax \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Assim, de (6.14) temos que $D_\xi = \{x \in \operatorname{dom} A : \xi = Ax\}$, o que implica $D_\xi = \emptyset$ se, e somente se, $\xi \notin \operatorname{Im}(A)$. Logo, considerando $A^{-1}(\xi) = \{z \in \operatorname{dom} A : Az = \xi\}$, escrevemos a função primal-dual associada à formulação (PEG) de (DV) do seguinte modo:

$$L(x,\xi) = \begin{cases} -z^*(-\xi) - \langle \xi, x\rangle, & \text{se } x \in A^{-1}(\xi) \\ +\infty, & \text{se } A^{-1}(\xi) \neq \emptyset \text{ e } x \notin A^{-1}(\xi) \\ -\infty, & \text{se } A^{-1}(\xi) = \emptyset, \end{cases} \tag{6.15}$$

Condições de otimalidade para (DV). O próximo resultado mostra que nossas condições de otimalidade, aplicadas à formulação (PEG) de (DV), tornam-se aquelas obtidas por Mosco em [57] no Teorema 6.2.1.

Proposição 6.2.1 *Seja $\bar{x} \in \operatorname{dom} A$. O ponto $\bar{x}$ é uma solução de (DV) se, e somente se, existe $\xi^* \in X^*$ tal que (ξ^*, u^*) resolve (DDV) com $u^* = -\bar{x} \in A'(\xi^*)$.*

Prova. Como $\bar{x} \in \operatorname{dom} A$, sabemos que $F_{\bar{x}}(\cdot) = \langle A(\bar{x}), \cdot - \bar{x}\rangle$ é um função convexa e contínua com $\operatorname{dom} F_{\bar{x}} = X$. Logo, as Hipóteses 5.3.1 e 5.3.2 são verificadas.

Portanto, podemos aplicar os Teoremas 5.3.1 e 5.3.2 com $v \equiv z$. Então, temos que

$$
\begin{aligned}
\bar{x} \text{ resolve (DV)} \quad \Leftrightarrow \quad & \bar{x} \text{ resolve } (\mathrm{DV})_1, \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \bar{\xi} \in X^* : L(\bar{x}, \bar{\xi}) \geq v(\bar{x}),\ \bar{x} \in D_{\bar{\xi}}, && (6.16) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \bar{\xi} \in X^* : -z^*(-\bar{\xi}) - \langle \bar{\xi}, \bar{x} \rangle \geq z(\bar{x}),\ \bar{x} \in A^{-1}(\bar{\xi}), && (6.17) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \bar{\xi} \in X^* : -z^*(-\bar{\xi}) - \langle \bar{\xi}, \bar{x} \rangle \geq z^{**}(\bar{x}),\ \bar{x} \in A^{-1}(\bar{\xi}), && (6.18) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \bar{\xi} \in X^* : \bar{x} \in A^{-1}(\bar{\xi}), \\
& \langle -\bar{\xi} - \xi, \bar{x} \rangle + z^*(\xi) \geq z^*(-\bar{\xi})\ \forall \xi \in X^*, && (6.19) \\
\Leftrightarrow \quad & \exists \bar{\xi} \in X^* : \bar{x} \in A^{-1}(\bar{\xi}), \\
& \langle \xi - \xi^*, u^* \rangle + z^*(\xi) \geq z^*(\xi^*)\ \forall \xi \in X^* \\
& \text{com } \ \xi^* = -\bar{\xi}, \ \ u^* = -\bar{x}, \\
\Leftrightarrow \quad & (\xi^*, u^*) \ \text{ resolve (DDV) com } \ u^* \in A'(\xi^*).
\end{aligned}
$$

Obtemos (6.17) usando (6.15). Chegamos a (6.18) fazendo $z \equiv z^{**}$ desde que z é uma função convexa semicontínua inferior [74, Theorem 51.A]. Temos (6.19) aplicando a definição de z^{**} e o fato de que $z^*(-\bar{\xi})$ é finito. Esta última asserção segue de (5.7) e de (6.16), usando que $\bar{x} \in D_{\bar{\xi}}$, $z(\bar{x}) > -\infty$ e $\mathrm{dom} z \neq \emptyset$. ■

Observamos que em [2] é desenvolvido um esquema de dualidade para equações generalizadas envolvendo composições de aplicações ponto-conjunto definidas sobre um espaço de dimensão finita X. O resultado de Mosco também é obtido da Proposição 6.9.1 dada em [2] quando ela é aplicada ao problema (DV) definido sobre X.

Caso ponto-conjunto: Desigualdades variacionais com aplicações ponto-conjunto são também consideradas em [57] por Mosco. Para este caso, também é possível mostrar, seguindo um raciocínio similar ao usado anteriormente, que nossos Teoremas 5.3.1 e 5.3.2 tornam-se um teorema análogo obtido por Mosco quando X é um espaço de Banach. Como nossa próxima aplicação envolve aplicações ponto-conjunto, omitimos aqui o estudo detalhado deste caso.

6.3 Desigualdades quasevariacionais generalizadas

Em [56], Morgan e Romaniello consideram o seguinte problema de desigualdade quasevariacional generalizada:

$$\text{(DQVG)} \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{x} \in G(\bar{x}) \text{ tal que existe } \bar{\xi} \in A(\bar{x}) \\ \text{satisfazendo } \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}), \end{cases} \tag{6.20}$$

onde X é um espaço de Banach, $A : X \to \mathscr{P}(X^*)$ e $G : X \to \mathscr{P}(X)$ são aplicações ponto-conjunto tais que $G(x) = \{y \in X : q_i(x, y) \leq 0,\ i = 1, ..., m\}$ onde a função $q_i(x, \cdot) : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é convexa, própria e semicontínua inferior para cada $i = 1, ..., m$.

No mesmo trabalho, os autores estabelecem o seguinte problema dual para (6.20):

$$\text{(DDQVG)} \begin{cases} \text{Encontrar } \eta^* \in \mathbb{R}^m_+, \text{ tal que existe } d^* \in K(\eta^*) \\ \text{satisfazendo } \langle d^*, \eta - \eta^* \rangle \geq 0 \text{ para todo } \eta \in \mathbb{R}^m_+, \end{cases} \tag{6.21}$$

onde para cada $\eta \in \mathbb{R}^m_+$, tem-se

$$K(\eta) := \left\{ -Q(x, x) : 0 \in A(x) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j \partial_2 q_j(x, x) \right\},$$

com

$$Q(x, y) = (q_1(x, y), ..., q_m(x, y))$$

e $\partial_2 q_j(x, \cdot)$ é o subdiferencial de $q_j(x, \cdot)$ dado por

$$\partial_2 q_j(x, t) = \{g^* \in X^* : q_j(x, y) \geq q_j(x, t) + \langle g^*, y - t \rangle \ \forall y \in X\}.$$

A seguir, enunciamos os resultados de Morgan e Romaniello que generalizam as condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), da dualidade Lagrangiana clássica para problemas de otimização com restrições, e estendem o esquema dual obtido por Auslender em [3] para desigualdades variacionais generalizadas.

Teorema 6.3.1 [56, Teorema 2.1] *Seja $\bar{x} \in X$ tal que $V(\bar{x}) = \cap_{j=1}^{m} \mathrm{dom}\,(q_j(\bar{x}, \cdot))$ é um subconjunto aberto de X. Se existe $\eta^* \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $(\bar{x}, \eta^*)$ satisfaz as seguintes condições, denominadas KKT Generalizadas:*

(a) $\bar{x} \in G(\bar{x})$;

(b) $0 \in A(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \eta_j^* \partial_2 q_j(\bar{x}, \bar{x})$;

(c) $Q(\bar{x},\bar{x}) \in N_{\mathbb{R}^m_+}(\eta^*)$.

Então, $\bar{x}$ é uma solução de (6.20) e η^* é uma solução de (6.21).

Teorema 6.3.2 [56, Teorema 2.2] *Seja $\bar{x}$ uma solução de (6.20). Se $V(\bar{x}) = \cap_{j=1}^m \mathrm{dom}\,(q_j(\bar{x},\cdot))$ é um subconjunto aberto de X e existe $y \in X$ tal que $q_j(\bar{x},y) < 0$ para todo $j = 1,...,m$, então existe um ponto $\eta^* \in \mathbb{R}^m_+$ tal que $(\bar{x},\eta^*)$ verifica as condições KKT Generalizadas (a), (b) e (c) (e portanto η^* resolve (6.21) pelo Teorema 6.3.1).*

Nesta seção, aplicamos nossas condições necessárias e suficientes de otimalidade obtidas na seção 5.3 para a formulação (PEG) do problema (6.20) e obtemos os resultados duais de Morgan e Romaniello descritos anteriormente.

Formulação (PEG) do problema (DQVG). Seguindo a metodologia adotada na seção 6.1, usamos as vantagens da estrutura da aplicação ponto-conjunto G para definir o seguinte problema:

$$(\mathrm{DQVG})_2 \begin{cases} \text{Encontrar } \bar{s} \in D \text{ tal que} \\ f(\bar{s},t) + \varphi(\bar{s},t) + h(t) \geq \varphi(\bar{s},\bar{s}) + h(\bar{s}) \text{ para todo } t \in \mathcal{X}, \end{cases} \tag{6.22}$$

onde $\mathcal{X} := X \times X^* \times \mathbb{R}^m$, $\bar{s} := (\bar{x},\bar{\xi},\bar{z})$, $t := (y,\rho,u)$ e o conjunto

$$D := \{(x,\xi,z) \in \mathcal{X} : x \in \mathrm{dom}G,\ \xi \in A(x)\}. \tag{6.23}$$

Enquanto as funções $f,\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to (-\infty,+\infty]$ e $h : \mathcal{X} \to (-\infty,+\infty]$ são dadas por $f(s,t) = f((x,\xi,z),(y,\rho,u)) := \langle \xi, y - x\rangle + \delta_D(s)$, $\varphi(s,t) = \varphi((x,\xi,z),(y,\rho,u)) := \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(x,y)+u)$ e $h(t) = h(y,\rho,u) := \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u)$. Assumimos que $D \neq \emptyset$, pois caso contrário o problema (6.20) não admitiria solução.

Observamos que o problema (6.22) é um problema de equilíbrio generalizado. Com efeito, $D \neq \emptyset$ e as funções f, φ e h verificam:

a) $f(s,s) = \langle \xi, x - x\rangle = 0$ para todo $s \in D$;

b) h é convexa;

c) para cada $s = (x,\xi,z) \in D$ temos que $x \in \mathrm{dom}\,G$ e $\xi \in A(x)$, logo

$$\mathrm{dom}\,f(s,\cdot) = \{t = (y,\rho,u) \in \mathcal{X} : \langle \xi, y - x\rangle < +\infty\} = \mathcal{X},$$

$$\mathrm{dom}\,\varphi(s,\cdot) = \{t = (y,\rho,u) \in \mathcal{X} : \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(x,y)+u) < +\infty\} \supseteq G(x) \times X^* \times \{0\}$$

e

$$\operatorname{dom} h = \{t = (y, \rho, u) \in \mathcal{X} : \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u) < +\infty\} = X \times X^* \times \mathbb{R}^m_+.$$

Assim,

$$\operatorname{dom} f(s, \cdot) \cap \operatorname{dom} \varphi(s, \cdot) \cap \operatorname{dom} h \neq \emptyset.$$

Abaixo, mostramos que os problemas (DQVG) e $(\text{DQVG})_2$ são equivalentes.

Lema 6.3.1 *Um ponto $\bar{x}$ é uma solução de (6.20) se, e somente se, existem $\bar{\xi} \in X^*$ e $\bar{z} \in \mathbb{R}^m$ tais que $(\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{z})$ é uma solução de (6.22).*

Prova. Supondo que $\bar{x} \in X$ resolve (6.20) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$, obtemos que $\bar{x} \in G(\bar{x})$ e vale que

$$\langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}). \tag{6.24}$$

Logo, definindo $\bar{z} = -Q(\bar{x}, \bar{x})$ tem-se que $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+$. Fazendo $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{z})$, temos que $\bar{s} \in \mathcal{X} = X \times X^* \times \mathbb{R}^m$. De (6.23) concluimos que $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{z}) \in D$ e vale que

$$\varphi(\bar{s}, \bar{s}) = \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(\bar{x}, \bar{x}) + \bar{z}) = 0 \ \text{ e } \ h(\bar{s}) = \delta_{\mathbb{R}^m_+}(\bar{z}) = 0. \tag{6.25}$$

Seja $t = (y, \rho, u) \in \mathcal{X}$. Observamos que se $u \notin \mathbb{R}^m_+$, então

$$h(t) = +\infty \tag{6.26}$$

e a desigualdade em (6.22) é trivialmente satisfeita.

Suponha agora que $u \in \mathbb{R}^m_+$. Se $y \notin G(\bar{x})$ então $Q(\bar{x}, y) > 0$, logo

$$h(t) = 0, \ \ f(\bar{s}, t) = \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \varphi(\bar{s}, t) = \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(\bar{x}, t) + u) = +\infty. \tag{6.27}$$

e novamente a desigualdade em (6.22) é verificada.

Se agora $y \in G(\bar{x})$ e $u \in \mathbb{R}^m_+$, de (6.24) temos que

$$h(t) = 0, \quad f(\bar{s}, t) = \langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle \quad \text{e} \quad \varphi(\bar{s}, t) = 0. \tag{6.28}$$

Assim, de (6.24), (6.25), (6.26), (6.27) e (6.28) vale que

$$\langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle + \varphi(\bar{s}, t) + h(t) \geq \varphi(\bar{s}, \bar{s}) + h(\bar{s}) \text{ para todo } t \in \mathcal{X}. \tag{6.29}$$

Ou seja, $\bar{s}$ é solução de (6.22).

Reciprocamente, seja $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{z}) \in \mathcal{X} = X \times X^* \times \mathbb{R}^m$ uma solução de (6.22), então $\bar{s} \in D$ e verifica (6.29). De (6.23), segue que $\bar{x} \in \operatorname{dom} G$ e $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$, logo, existe $\tilde{y} \in G(\bar{x})$. Assim, $\tilde{z} = -Q(\bar{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^m_+$. Portanto, para $\tilde{t} = (\tilde{y}, \bar{\xi}, \tilde{z})$ tem-se

$$\varphi(\bar{s}, \tilde{t}) = \varphi((\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{z}), (\tilde{y}, \bar{\xi}, \tilde{z})) = \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(\bar{x}, \tilde{y}) + \tilde{z}) = 0 \text{ e } h(\tilde{t}) = \delta_{\mathbb{R}^m_+}(\tilde{z}) = 0. \quad (6.30)$$

Portanto, fazendo $t = \tilde{t}$ em (6.29) e usando as igualdades de (6.30) obtemos que

$$+\infty > \langle \bar{\xi}, \tilde{y} - \bar{x} \rangle + \varphi(\bar{s}, \tilde{t}) + h(\tilde{t}) \geq \varphi(\bar{s}, \bar{s}) + h(\bar{s}).$$

Assim, da definição de h segue que $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_+$. Então, usando a definição de φ obtemos que $Q(\bar{x}, \bar{x}) + \bar{z} \in \mathbb{R}^m_-$. Assim,

$$\varphi(\bar{s}, \bar{s}) + h(\bar{s}) = 0 \quad (6.31)$$

Portanto, vale que $\bar{x} \in G(\bar{x})$.

Agora, considere $y \in G(\bar{x})$. Seja $t = (y, \rho, u)$ com $\rho \in X^*$ e $u \in \mathbb{R}^m$. Então de (6.29) e (6.31) obtemos

$$\langle \bar{\xi}, y - \bar{x} \rangle + \varphi(\bar{s}, t) + h(t) \geq \varphi(\bar{s}, \bar{s}) + h(\bar{s}) = 0 \text{ para todo } y \in G(\bar{x}). \quad (6.32)$$

Em particular, fazendo $u = 0$ e usando a definição de φ em (6.32) obtemos (6.24), isto é, $\bar{x}$ é solução de (6.20) com $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$. Com isso completamos a prova. ■

Função primal-dual associada ao problema (DQVG)$_1$. Recordamos que $\mathcal{X}^* = X^* \times X \times \mathbb{R}^m$ [74, pág. 601 (8b), pág. 603 (16)] e a aplicação bilinear de dualidade entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}^*$ é dada pela soma das aplicações de dualidade entre X e X^* e o produto interno usual do $\mathbb{R}^m$, isto é, $\langle (x, \xi, z), (\rho, y, u) \rangle = \langle \rho, x \rangle + \langle \xi, y \rangle + \langle z, u \rangle$ para todo $x, y \in X$, $\xi, \rho \in X^*$ e $z, u \in \mathbb{R}^m$.

Seja $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathcal{X}^*$. A fim de obtermos os resultados duais de Morgan e Romaniello referentes ao problema (DQVG), determinamos $L(s, \nu)$ para pontos primais-duais viáveis. Começamos pelo cálculo das conjugadas de h e F_s. Recordamos que $s = (x, \xi, z), t = (y, \rho, u) \in \mathcal{X}$,

$$F_s(t) = \langle \xi, y - x \rangle + \delta_D(s) + \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(x, y) + u) \text{ e } h(t) = \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u). \quad (6.33)$$

Pela definição de h^* obtemos que

$$h^*(-\nu) = \sup_{y \in X} \{\langle -\nu_1, y \rangle\} + \sup_{\rho \in X^*} \{\langle -\nu_2, \rho \rangle\} + \sup_{u \in \mathbb{R}^m} \{\langle -\nu_3, u \rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_+}(u)\}.$$

Donde segue que

$$h^*(-\nu) = \begin{cases} 0, & \text{se } \nu_1 = \nu_2 = 0 \text{ e } \nu_3 \geq 0 \\ +\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{6.34}$$

Assim, concluimos que é suficiente calcularmos $F_s^*(\nu)$ para $s \in D$ e $\nu = (0, 0, \nu_3)$ com $\nu_3 \geq 0$. Assim,

$$F_s^*(0, 0, \nu_3) = \sup_{(y,\rho,u) \in \mathcal{X}} \{\langle \nu_3, u \rangle - \langle \xi, y - x \rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(Q(x, y) + u)\}. \tag{6.35}$$

Seguindo o argumento usado na seção 6.1, tomamos $r = Q(x, y) + u$ para obtermos

$$\begin{aligned} F_s^*(0, 0, \nu_3) &= \sup_{y \in X, r \in \mathbb{R}^m} \{\langle \nu_3, r - Q(x, y) \rangle - \langle \xi, y - x \rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(r)\} \\ &= \sup_{y \in X} \{\langle \nu_3, -Q(x, y) \rangle - \langle \xi, y - x \rangle\} + \sup_{r \in \mathbb{R}^m} \{\langle \nu_3, r \rangle - \delta_{\mathbb{R}^m_-}(r)\} \\ &= \sup_{y \in X} \{\langle -\nu_3, Q(x, y) \rangle - \langle \xi, y - x \rangle\}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Da Definição 5.2.1 lembramos que os pontos primais-duais viáveis $(s, \nu) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ são tais que $s = (x, \xi, z) \in D_\nu$. Logo, de (6.23) devemos ter $x \in \operatorname{dom} G$ e $\xi \in A(x)$.

Para $\nu \geq 0$ temos que $D_\nu = \emptyset$ ou $D_\nu \neq \emptyset$. No primeiro caso, significa que para $\nu_3 \geq 0$

$$+\infty = F_s^*(0, 0, \nu_3) = -\inf_{y \in X} \{\langle \nu_3, Q(x, y) \rangle + \langle \xi, y - x \rangle\}$$

e por definição temos que $L(s, \nu) = -\infty$. Isto é,

$$L(s, \nu) = \inf_{y \in X} \{\langle \nu_3, Q(x, y) \rangle + \langle \xi, y - x \rangle\} \tag{6.37}$$

Quando $F_s^*(0, 0, \nu_3) < +\infty$ vale que

$$L(s, \nu) = -h(-\nu) - F_x^*(\nu) \tag{6.38}$$

Neste caso, de (6.34) e (6.36) obtemos que

$$L(s, \nu) = \inf_{y \in X} \{\langle \nu_3, Q(x, y) \rangle + \langle \xi, y - x \rangle\}. \tag{6.39}$$

Logo, de (6.37) e (6.39) obtemos o resultado desejado.

Condições de otimalidade. Notamos que, para cada $s = (x, \xi, z) \in D$, a função $F_s(\cdot)$ é convexa. Com efeito, definindo $Q_x(y, u) = Q(x, y) + u$, observamos que Q_x é convexa já que $q_i(x, y) + u_i$ é convexa em (y, u_i) para cada $i = 1, \ldots, m$. Assim, a Hipótese 5.3.1 é verificada.

Para aplicarmos nossas condições necessárias e suficientes de otimalidade para o problema $(\text{DQVG})_1$, mostramos a seguir que a condição de Slater sobre $q_i(\bar{x}, \cdot)$ pedida por Morgan e Romaniello em [56] implica a Hipótese 5.3.2.

Lema 6.3.2 *Seja $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\xi}, \bar{z}) \in D$ tal que existe $y_0 \in X$ verificando $q_i(\bar{x}, y_0) < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Então, a Hipótese 5.3.2 é verificada para $\bar{s}$.*

Prova. Por hipótese, temos que existe $y_0 \in X$ verificando $q_i(\bar{x}, y_0) < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Fazendo $t_0 := (y_0, \bar{\xi}, -Q(\bar{x}, y_0))$, das definições de f, φ e h obtemos que $\varphi(\bar{s}, t_0) = h(t_0) = 0$ e $F_{\bar{s}}(t_0) = \langle \bar{\xi}, y_0 - \bar{x} \rangle$. Então, $t_0 \in \text{dom} F_{\bar{s}}$. Além do mais, $t_0 \in \text{int}(\text{dom} h) = X \times X^* \times \mathbb{R}^m_{++}$. Desde que h é uma função convexa e semicontínua inferior, temos que h é contínua no interior do seu domínio efetivo [26, Corolário 2.5], logo, temos que $\partial(F_{\bar{s}} + h) = \partial F_{\bar{s}} + \partial h$ [74, Teorema 47.B] que corresponde ao resultado procurado. ∎

Agora, vamos obter as condições necessárias e suficientes dadas em [56] como conseqüencias de nosso esquema dual.

Proposição 6.3.1 *Considere o problema (DQVG). Seja $(\bar{x}, \bar{\eta}) \in X \times \mathbb{R}^m_+$. Se $(\bar{x}, \bar{\eta})$ satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker Generalizadas:*

KKT_1*: $\bar{x} \in G(\bar{x})$;*

KKT_2*: $0 \in A(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \bar{\eta}_i \partial_2 q_i(\bar{x}, \bar{x})$;*

KKT_3*: $Q(\bar{x}, \bar{x}) \in N_{\mathbb{R}^m_+}(\bar{\eta})$.*

Então $\bar{x}$ é uma solução de (DQVG) e $\bar{\eta}$ resolve (DDQVG).

Prova. De KKT_2, temos que existe $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$ tal que

$$0 \in \bar{\xi} + \sum_{i=1}^m \bar{\eta}_i \partial_2 q_i(\bar{x}, \bar{x}).$$

Combinando esta relação com KKT_1, definimos $\bar{s} := (\bar{x}, \bar{\xi}, -Q(\bar{x}, \bar{x})) \in D$. Além disso, como $\bar{\xi} = \nabla(\langle \bar{\xi}, \cdot - \bar{x} \rangle)(\bar{x})$ e $\sum_{i=1}^m \bar{\eta}_i \partial_2 q_i(\bar{x}, \bar{x}) \subseteq \partial(\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, \cdot) \rangle)(\bar{x})$ obtemos que

$$0 \in \partial\{\langle \bar{\xi}, \cdot - \bar{x} \rangle + \langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, \cdot) \rangle\}(\bar{x}).$$

Pela convexidade de cada componente de $Q(\bar{x}, \cdot)$, a última relação significa que

$$\min_{y \in X} \{\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, y)\rangle + \langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle\} = \langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, \bar{x})\rangle. \tag{6.40}$$

Da condição KKT_3, para todo $\eta \in \mathbb{R}^m_+$, temos que

$$\langle Q(\bar{x}, \bar{x}), \eta - \bar{\eta}\rangle \leq 0.$$

Em particular, para $\eta = 0$, obtemos que

$$\langle Q(\bar{x}, \bar{x}), \bar{\eta}\rangle \geq 0. \tag{6.41}$$

Por outro lado, combinando a condição KKT_1 com $\bar{\eta} \geq 0$ segue que $\langle Q(\bar{x}, \bar{x}), \bar{\eta}\rangle \leq 0$. o que junto com (6.41) acarreta

$$\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, \bar{x})\rangle = 0. \tag{6.42}$$

Então, usando (6.36), (6.42) e fazendo $\bar{\nu} := (0, 0, \bar{\eta})$ obtemos

$$F^*_{\bar{s}}(\bar{\nu}) = -\inf_{y \in X} \{\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, y)\rangle + \langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle\} = 0. \tag{6.43}$$

Portanto, destas igualdades e da definição de $\bar{s}$ segue que $(\bar{s}, \bar{\nu})$ é um ponto primal-dual viável, isto é, $\bar{s} \in D_{\bar{\nu}}$. Além disso, das definições de φ e h temos que $h(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}, \bar{s}) = 0$. Logo,

$$v(\bar{s}) = 0. \tag{6.44}$$

Então, de (6.39), (6.43) e (6.44) obtemos que

$$L(\bar{s}, \bar{\nu}) = -h^*(-\nu) - F^*_{\bar{s}}(\nu) = 0 = v(\bar{s}).$$

Assim, pelo Teorema 5.3.2 obtemos que $\bar{s}$ é uma solução de $(\mathrm{DQVG})_1$. Logo, $\bar{x}$ resolve (DQVG). De KKT_2 e KKT_3 concluimos que $\bar{\eta}$ é uma solução de (DQVG) com $d^* = -Q(\bar{x}, \bar{x})$. A prova está completa. ■

Observação 6.3.1 *O Teorema 6.3.1 obtido em [56] é um corolário da nossa Proposição 6.3.1, pois ele usa a hipótese adicional de que o ponto $\bar{x} \in X$ verifica que $V(\bar{x}) = \cap_{j=1}^m \mathrm{dom}\,(q_j(\bar{x}, \cdot))$ é um subconjunto aberto de X.*

Para finalizar esta seção obtemos o segundo resultado envolvendo soluções primais-duais obtido em [56] por meio de nossa análise dual.

Proposição 6.3.2 *[Torema 6.3.2] Seja $\bar{x}$ uma solução de (DQVG) tal que:*

(a) $\cap_{i=1}^{m}\mathrm{dom}\,(q_i(\bar{x},\cdot))$ é um subconjunto de X não vazio e aberto;

(b) existe $y_0 \in X$ verificando $q_i(\bar{x}, y_0) < 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Então existe $\bar{\eta} \in \mathbb{R}_+^m$ tal que $(\bar{x}, \bar{\eta})$ satisfaz as condições de Karush-Kuhn-Tucker Generalizadas (e portanto $\bar{\eta}$ resolve (DDQVG)).

Prova. Seja $\bar{x}$ uma solução de (6.20), então temos que $\bar{x} \in G(\bar{x})$ e existe $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$ tal que $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{\xi}, -Q(\bar{x}, \bar{x}))$ é uma solução de (6.22). Assim, obtemos que a condição KKT_1 é válida e $\bar{s} \in D$. Desde que $\bar{x}$ verifica a condição de Slater dada no ítem (b), o Lema 6.3.2 garante que a Hipótese 5.3.2 é satisfeita para $\bar{s}$. Como $F_{\bar{s}}$ é uma função convexa, pelo Teorema 5.3.1, existe $\bar{\nu} \in \mathcal{X}^*$ tal que $(\bar{s}, \bar{\nu})$ é um ponto primal-dual viável verificando

$$L(\bar{s}, \bar{\nu}) \geq v(\bar{s}).$$

Desde que $v(\bar{s}) = \varphi(\bar{s}, \bar{s}) + h(\bar{s}) = \delta_{\mathbb{R}_-^m}(Q(\bar{x}, \bar{x}) - Q(\bar{x}, \bar{x})) + \delta_{\mathbb{R}_+^m}(-Q(\bar{x}, \bar{x})) = 0$ e $L(\bar{s}, \bar{\nu}) \in \mathbb{R}$. De (6.39) a desigualdade acima torna-se

$$\inf_{y \in X}\{\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, y)\rangle + \langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle\} \geq 0.$$

Como $Q(\bar{x}, \bar{x}) \leq 0$ e $\bar{\eta} \geq 0$ segue que $\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, \bar{x})\rangle \leq 0$. Assim, tomando-se $y = \bar{x}$ na desigualdade anterior obtemos que

$$0 \geq \langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, \bar{x})\rangle \geq \inf_{y \in X}\{\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, y)\rangle + \langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle\} \geq 0 \tag{6.45}$$

Logo, $\bar{x}$ é uma solução de $\inf_{y \in X}\{\langle \bar{\eta}, Q(\bar{x}, y)\rangle + \langle \bar{\xi}, y - \bar{x}\rangle\}$, isto é,

$$0 \in \partial\{\sum_{i=1}^{m} \bar{\eta}_i q_i(\bar{x}, \cdot) + \langle \bar{\xi}, \cdot - \bar{x}\rangle\}(\bar{x}). \tag{6.46}$$

Desde que $\cap_{i=1}^{m}\mathrm{dom}(q_i(\bar{x}, \cdot))$ é um conjunto não vazio e aberto, podemos usar os mesmos argumentos considerados no Lema 6.3.2 tomando $Q(\bar{x}, \cdot)$ no lugar de h. Portanto, conseguimos que (6.46) equivale a

$$0 \in \sum_{i=1}^{m} \partial\{\bar{\eta}_i q_i(\bar{x}, \cdot)\}(\bar{x}) + \partial\{\langle \bar{\xi}, \cdot - \bar{x}\rangle\}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\eta}_i \partial_2 q_i(\bar{x}, \bar{x}) + \bar{\xi}.$$

Assim, a condição KKT_2 é verificada desde que $\bar{\xi} \in A(\bar{x})$. Além disso, de (6.45) segue que

$$0 = \langle \bar{\eta}, -Q(\bar{x}, \bar{x}) \rangle = \inf_{\eta \in \mathbb{R}^m_+} \{\langle \eta, -Q(\bar{x}, \bar{x}) \rangle\}.$$

Assim, devemos ter $0 \in \nabla(\langle \cdot, -Q(\bar{x}, \bar{x}) \rangle)(\bar{\eta}) + N_{\mathbb{R}^m_+}(\bar{\eta})$. Logo, obtemos a condição KKT_3, desde que $-Q(\bar{x}, \bar{x}) = \nabla(\langle \cdot, -Q(\bar{x}, \bar{x}) \rangle)(\bar{\eta})$. ■

6.4 Programação Semidefinida

Nesta seção, revisitamos a teoria dual de programação semidefinida convexa no contexto de equilíbrio ao aplicarmos nossa teoria dual para (PEG).

Lembramos que temos considerado o seguinte problema de programação semidefinida convexa dado em [41] por:

$$\text{(PSDC)} \ \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \psi(x), \ \text{ sujeito a } \ x \in C, \ F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \succeq 0, \tag{6.47}$$

onde $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é convexa, C é um subconjunto não vazio, convexo e fechado de $\mathbb{R}^m$ e, para $i = 0, 1, \ldots, m$, $F_i \in S_n$ que corresponde ao espaço das matrizes simétricas reais de ordem $n \times n$.

Definimos a seguinte função $G : \mathbb{R}^m \to S_n$ dada por

$$G(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i. \tag{6.48}$$

Lembrando que $G^{-1}(S_n^+) = \{x \in \mathbb{R}^m : G(x) \in S_n^+\}$, assumimos que o conjunto viável de (PSDC), $C \cap G^{-1}(S_n^+)$, é não vazio. Pois, caso contrário o problema (6.47) não tem solução.

Na seção 3.2, mostramos que (PSDC) é um caso particular do nosso esquema de equilíbrio generalizado, considerando $E := \mathbb{R}^m \times S_n$, $D := E$, $w = (x, W)$ e $u = (y, U) \in E$ e $f, \varphi : E \times E \to (-\infty, +\infty]$ e $h : E \to (-\infty, +\infty]$ funções dadas por $f \equiv 0$,

$$\varphi(w, u) := \psi(y) + \delta_{S_n^+}(G(y) - U) + \delta_C(y) \ \text{ e } \ h(u) := \delta_{S_n^+}(U), \tag{6.49}$$

onde G é a função definida em (6.48).

Aplicando o nosso esquema dual à formulação (PEG) de (PSDC), de modo curto $(PSDC)_1$, determinada pelos dados explicitados acima, obtemos o problema dual clássico Lagrangiano da teoria dual de programação semidefinida convexa.

Começamos calculando as funções primal-dual e dual para $(PSDC)_1$.

O problema dual. Desde que $E = \mathbb{R}^m \times S_n$, temos que o produto interno considerado é dado por

$$\langle (x, U), (y, V)\rangle = \langle x, y\rangle + \langle U, V\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i + Tr[UV].$$

De (6.49), observamos que $\varphi(w, u)$ é uma função que depende somente da variável u para todo $w \in \mathbb{R}^m \times S_n$. Como $F_w(u) = \varphi(w, u)$ para todo w, podemos omitir w em F_w e em F_w^*, logo, temos

$$F(u) = F(y, U) = \psi(y) + \delta_{S_n^+}(G(y) - U) + \delta_C(y). \tag{6.50}$$

Além disso, para cada $\nu = (\xi, \mathcal{Z}) \in \mathbb{R}^m \times S_n$, segue que

$$D_\nu = \{w \in D : F_w^*(\nu) < +\infty\} = \{w \in D : F^*(\nu) < +\infty\}$$

é vazio ou o espaço inteiro E. Assim, a função primal-dual L não depende da primeira variável e torna-se

$$L(w, \nu) = \begin{cases} -h^*(-\nu) - F^*(\nu), & \text{se } D_\nu = E \\ -\infty, & \text{se } D_\nu = \emptyset. \end{cases} \tag{6.51}$$

E por definição temos que

$$g(\nu) = \inf_{w \in E} L(w, \nu) = L(w, \nu). \tag{6.52}$$

Calculamos $h^*(-\nu)$ aplicando a definição de função conjugada e concluimos que

$$\begin{aligned} h^*(-\nu) = h^*(-\xi, -\mathcal{Z}) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m, U \in S_n} \{\langle -\xi, y\rangle + \langle -\mathcal{Z}, U\rangle - \delta_{S_n^+}(U)\} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } \xi = 0,\ \mathcal{Z} \in S_n^+ \\ +\infty, & \text{c. c.,} \end{cases} \end{aligned} \tag{6.53}$$

onde usamos que $\mathcal{Z} \in S_n^+$ se, e somente se, $\langle \mathcal{Z}, X\rangle \geq 0$ para todo $X \in S_n^+$ [71, Teorema 2.3.11].

Assim, $g(\nu) = -\infty$ se $\xi \neq 0$ ou $\mathcal{Z} \notin S_n^+$. Portanto, o problema dual aplicado a $(\text{PSDC})_1$, $(\text{DPSDC})_1$, é tal que

$$\sup_{\nu \in E} g(\nu) = \sup_{(\xi,\mathcal{Z}) \in \mathbb{R}^m \times S_n} g(\xi, \mathcal{Z}) = \sup_{\mathcal{Z} \in S_n^+} g(0, \mathcal{Z}). \tag{6.54}$$

Assim, é suficiente calcularmos $F^*(\nu)$ para $\nu = (0, \mathcal{Z})$ com $\mathcal{Z} \in S_n^+$. Seguindo as mesmas idéias usadas nas seções 6.1 e 6.3, consideramos $V := G(y) - U$. Isto é, fazendo $U = G(y) - V$ em (6.50), resulta

$$\begin{aligned} F^*(0,\mathcal{Z}) &= \sup_{(y,U) \in \mathbb{R}^m \times S_n} \{\langle \mathcal{Z}, U \rangle - F(y, U)\} \\ &= \sup_{(y,V) \in \mathbb{R}^m \times S_n} \{\langle \mathcal{Z}, G(y) \rangle - \psi(y) - \delta_C(y) + \langle -\mathcal{Z}, V \rangle - \delta_{S_n^+}(V)\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$F^*(0, \mathcal{Z}) = \sup_{y \in C} \{\langle \mathcal{Z}, G(y) \rangle - \psi(y)\}. \tag{6.55}$$

De (6.52), (6.53) e (6.55) segue que

$$g(\nu) = \begin{cases} \inf_{y \in C} \{\psi(y) - \langle \mathcal{Z}, G(y) \rangle\}, & \text{se } \nu = (0, \mathcal{Z}),\ \mathcal{Z} \in S_n^+ \\ -\infty, & \text{c.c.} \end{cases} \tag{6.56}$$

Conseqüentemente, para cada $w = (x, W) \in E$, vale que

$$L(w, \nu) = \inf_{y \in C} \{\psi(y) - \langle \mathcal{Z}, G(y) \rangle\}, \ \text{ se } \nu = (0, \mathcal{Z}) \text{ tal que } \mathcal{Z} \in S_n^+. \tag{6.57}$$

Finalmente, (6.54) e (6.56) implicam que

$$(\text{DPSDC})_1 \qquad \sup_{\mathcal{Z} \in S_n^+} \{\inf_{y \in C} \{\psi(y) - \langle \mathcal{Z}, G(y) \rangle\}\},$$

que corresponde ao dual clássico Lagrangiano de (PSDC) [41].

Gap de dualidade zero. Agora, mostramos que as nossas condições de otimalidade quando aplicadas à formulação (PEG) de (PSDC), $(\text{PSDC})_1$, tornam-se um resultado de gap de dualidade zero similar ao Teorema 3.1 dado em [41].

Lembrando que a função $G : \mathbb{R}^m \to S_n$ é dada por $G(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i$, assumimos a seguinte condição utilizada em [41]:

Hipótese 6.4.1 *O problema (PSDC) satisfaz a* ***Condição de Qualificação do Cone Fechado (CQCF)****, isto é, o cone convexo*

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\mathcal{Z} \in S_n^+} (-F^{\diamond}(\mathcal{Z}), Tr[\mathcal{Z}F_0]) + \operatorname{epi} \delta_C^*. \tag{6.58}$$

é fechado, onde $F^{\diamond}(\mathcal{Z}) = (Tr[\mathcal{Z}F_1], \ldots, Tr[\mathcal{Z}F_m])$ *indica a adjunta do operador de* $\mathbb{R}^m$ *em* S_n *dado por* $\sum_{i=1}^m x_i F_i$.

A partir de agora estudamos as propriedades geométricas dos conjuntos $\operatorname{epi} F^*$ e $\operatorname{epi} h^*$ que nos permitam garantir que a soma desses dois conjuntos fechados ainda é um conjunto fechado, asserção fundamental na obtenção do principal resultado dual desta seção. Sabemos que em geral isto nem sempre é verdade.

Começamos com o seguinte resultado envolvendo h^*.

Proposição 6.4.1 *O epígrafo de* h^* *é tal que*

$$\operatorname{epi} h^* = 0 \times -S_n^+ \times \mathbb{R}_+. \tag{6.59}$$

Isto é, $\operatorname{epi} h^*$ *é um cone convexo fechado.*

Prova. De (6.53) observamos que h^* é função indicadora de $\{0\} \times -S_n^+$, donde segue o resultado. ■

Agora, vamos obter a expressão de $\operatorname{epi} F^*$ considerando F como a soma das seguintes funções convexas $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^m \times S_n \to (-\infty, +\infty]$:

$$\varphi_1(u) = \varphi_1(y, U) := \psi(y) + \delta_C(y), \quad \varphi_2(u) = \varphi_2(y, U) := \delta_{S_n^+} \circ A(u) = \delta_{S_n^+}(G(y) - U), \tag{6.60}$$

onde $A : \mathbb{R}^m \times S_n \to S_n$ é dada por

$$A(u) = A(y, U) = G(y) - U = \sum_{i=1}^m y_i F_i - U + F_0. \tag{6.61}$$

Vamos determinar a expressão de $\operatorname{epi} F^* = \operatorname{epi} (\varphi_1 + \varphi_2)^*$.

No que segue, assumimos que o conjunto viável, $C \cap G^{-1}(S_n^+)$, é não vazio. Assim, $\operatorname{dom} \varphi_1 \cap \operatorname{dom} \varphi_2 \neq \emptyset$.

Lema 6.4.1 *As funções* φ_2 *e* $\varphi_1 + \varphi_2$ *são próprias, convexas e semicontínuas inferiores.*

Prova. Desde que C e S_n^+ são conjuntos não vazios fechados e convexos, as funções indicadoras δ_C e $\delta_{S_n^+}$ são próprias, convexas e semicontínuas inferiores (pcsci). Como $C \cap G^{-1}(S_n^+) \neq \emptyset$, segue que $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{dom} \delta_{S_n^+} \neq \emptyset$, logo, obtemos que φ_2 é pcsci [33, Cap. X, Teorema 2.2.1]. Também notamos que ψ é uma função convexa finita, então ela é contínua. Portanto, ψ é uma função pcsci. Assim, obtemos o resultado dejado, pois a soma de funções pcsci ainda é pcsci [70, Section 5.4]. ■

A seguir, caracterizamos o epígrafo de F^* em termos dos espígrafos de φ_1^* e φ_2^*.

Lema 6.4.2 *O epígrago de F^* é tal que*

$$\operatorname{epi} F^* = \operatorname{cl}(\operatorname{epi} \varphi_1^* + \operatorname{epi} \varphi_2^*). \tag{6.62}$$

Prova. A afirmação segue da definição da F e dos Lemas 6.4.1 e 1.2.2, item (ii). ■

A expressão de $\operatorname{epi} \varphi_1^*$ é obtida a seguir.

Lema 6.4.3 *Sejam a função φ_1 dada em (6.60) e um ponto $(y, U) \in \operatorname{dom}\varphi_1$, então*

$$\operatorname{epi} \varphi_1^* = \bigcup_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0,\ \epsilon \geq \epsilon_1 + \epsilon_2 \\ \xi \in \partial_{\epsilon_1} \psi(y) + \partial_{\epsilon_2} \delta_C(y)}} (\xi,\ 0, \langle \xi, y \rangle + \epsilon - \psi(y)). \tag{6.63}$$

Prova. Primeiro provamos que para todo $\epsilon \geq 0$ tem-se

$$\partial_\epsilon \varphi_1(u) = \bigcup_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0, \\ \epsilon \geq \epsilon_1 + \epsilon_2}} [\partial_{\epsilon_1} \psi(y) + \partial_{\epsilon_2} \delta_C(y)] \ \times\ \{0\}. \tag{6.64}$$

para todo $u = (y, U) \in \mathbb{R}^m \times S_n$ com $y \in C$. Com efeito, $(\xi, \mathcal{Z}) \in \partial_\epsilon \varphi_1(u)$ se, e somente se,

$$\psi(x) \geq \psi(y) + \langle \xi, x - y \rangle + \langle \mathcal{Z}, W - U \rangle - \epsilon \ \ \forall\, x \in C,\ \forall\, W \in S_n. \tag{6.65}$$

Fazendo $x = y$ e $W_\lambda = \lambda \mathcal{Z} + U \in S_n$ com $\lambda \geq 0$, a desigualdade acima torna-se $\lambda \langle \mathcal{Z}, \mathcal{Z} \rangle \leq \epsilon$ para todo $\lambda \geq 0$, logo, $\mathcal{Z} \equiv 0$.

Portanto, a desigualdade (6.65) é equivalente a

$$\psi(x) \geq \psi(y) + \langle \xi, x - y \rangle - \epsilon \ \ \forall\, x \in C.$$

Desde que ψ é uma função convexa definida sobre $\mathbb{R}^m$, temos que

$$\mathrm{ir}(\mathrm{dom}\,\psi) \cap \mathrm{ir}(\mathrm{dom}\,\delta_C) \neq \emptyset.$$

Então, segue que $\partial_\epsilon(\psi + \delta_C)(y) = \bigcup_{\epsilon_i \geq 0,\, \epsilon \geq \epsilon_1+\epsilon_2} [\partial_{\epsilon_1}\psi(y) + \partial_{\epsilon_2}\delta_C(y)]$ onde $\epsilon \geq \epsilon_1 + \epsilon_2$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \geq 0$ [33, Cap. XI, Teorema 3.1.1]. Assim, obtemos (6.64).

Agora, para todo $y \in C$ e todo $U \in S_n$, expressando (1.7) em termos de φ_1 obtemos

$$\mathrm{epi}\,\varphi_1^* \;=\; \bigcup_{(\xi,\,0) \in\, \partial_\epsilon \varphi_1(y,U),\ \epsilon \geq 0} ((\xi,\,0), \langle \xi, y\rangle + \epsilon - \varphi_1(y,U)).$$

Pela definição de φ_1 e de (6.64) chegamos ao resultado desejado. ■

A seguir, obtemos a expressão do epigrafo de φ_2^*.

Lema 6.4.4 *Sejam a função φ_2 dada em (6.60), então vale que*

$$\mathrm{epi}\,\varphi_2^* = \bigcup_{\substack{\mathcal{Z} \in S_n^+ \\ \epsilon \geq 0}} (-F^{\diamondsuit}(\mathcal{Z}), \mathcal{Z},\ Tr[\mathcal{Z}F_0] + \epsilon). \tag{6.66}$$

Prova. Começamos calculando φ_2^*. Pelo Lema 6.4.1, $\varphi_2 = (\delta_{S_n^+} \circ A)$ é pcsci, logo, a conjugada φ_2^* também é pcsci. Seja $(\xi, \mathcal{Z}) \in \mathbb{R}^m \times S_n$. Da definição da conjugada de $\delta_{S_n^+} \circ A$, temos que

$$(\delta_{S_n^+} \circ A)^*(\xi, \mathcal{Z}) = \sup_{(x,W) \in \mathbb{R}^m \times S_n \,:\, G(x) - W \in S_n^+} \{\langle \xi, x\rangle + \langle \mathcal{Z}, W\rangle\}$$

Seguindo as idéias usadas nas seções 6.1 e 6.3, definimos $V := G(x) - W$. Logo, $W = G(x) - V$ e substituindo na expressâo acima obtemos

$$\begin{aligned}
(\delta_{S_n^+} \circ A)^*(\xi, \mathcal{Z}) &= \sup_{(x,V) \in \mathbb{R}^m \times S_n^+} \{\langle \xi, x\rangle + \langle \mathcal{Z}, G(x) - V\rangle\} \\
&= \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \{\langle \xi, x\rangle + \langle \mathcal{Z}, G(x)\} + \sup_{V \in S_n^+} \{\langle \mathcal{Z}, -V\rangle\} \\
&= \begin{cases} \sup_{x\in\mathbb{R}^m}\{\langle \xi, x\rangle + \langle \mathcal{Z}, G(x)\rangle\}, & \text{se } \mathcal{Z} \in S_n^+ \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Sabemos que $G(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i$. Denotamos por $F^\diamond : S_n^+ \to \mathbb{R}^m$ a adjunta do operador $\sum_{i=1}^m x_i F_i$. Assim, temos que

$$\langle \mathcal{Z}, G(x)\rangle = \langle \mathcal{Z}, F_0\rangle + \langle F^\diamond(\mathcal{Z}), x\rangle.$$

Portanto, (6.67) pode ser reescrita como

$$(\delta_{S_n^+} \circ A)^*(\xi, \mathcal{Z}) = \begin{cases} \sup_{x \in \mathbb{R}^m}\{\langle \xi + F^\diamond(\mathcal{Z}), x\rangle + \langle \mathcal{Z}, F_0\rangle\}, & \text{se } \mathcal{Z} \in S_n^+ \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Assim,

$$\varphi_2^*(\xi, \mathcal{Z}) = \begin{cases} \langle \mathcal{Z}, F_0\rangle, & \text{se } \mathcal{Z} \in S_n^+,\ \xi = -F^\diamond(\mathcal{Z}) \\ +\infty, & \text{c. c.} \end{cases} \tag{6.68}$$

Portanto, para cada $(\xi, \mathcal{Z}) \in \mathrm{dom}\varphi_2^*$, vale que

$$\begin{aligned} \mathrm{epi}\,\varphi_2^* &= \{(\xi, \mathcal{Z}, \nu) : \varphi_2^*(\xi, \mathcal{Z}) \leq \nu\} \\ &= \{(-F^\diamond(\mathcal{Z}), \mathcal{Z}, \nu) : \mathcal{Z} \in S_n^+, Tr[\mathcal{Z}F_0] \leq \nu\} \\ &= \{(-F^\diamond(\mathcal{Z}), \mathcal{Z}, Tr[\mathcal{Z}F_0] + \epsilon) : \mathcal{Z} \in S_n^+, \epsilon \geq 0\}. \end{aligned} \tag{6.69}$$

E a prova está completa. ■

Teorema 6.4.1 *Se o conjunto viável do problema (PSDC) é não vazio e a condição de qualificação (CQCF) é válida, então* $\mathrm{epi}\,\varphi_1^* + \mathrm{epi}\,\varphi_2^*$ *é um conjunto fechado.*

Prova. Seja $\{(x_k, \mathcal{B}_k, \mu_k)\}_k$ uma seqüência de pontos de $\mathrm{epi}\,\varphi_1^* + \mathrm{epi}\,\varphi_2^*$ com

$$(x_k, \mathcal{B}_k, \mu_k) \to (x, \mathcal{B}, \mu).$$

De (6.63) e (6.66), para $(y, U) \in \mathrm{dom}\,\varphi_1 \cap \mathrm{dom}\,\varphi_2$ e para cada k, tem-se que

$$\mathcal{B}_k \in S_n^+,\ \ \epsilon_k \geq 0\ \ ,\ \ \tilde{\epsilon}_k \geq 0\ \text{ e }\ \xi_k \in \partial_{\epsilon_k}\varphi_1(y, U)$$

com

$$x_k = \xi_k - F^\diamond(\mathcal{B}_k) \to x\ , \mathcal{B}_k \to \mathcal{B}\ , \mu_k = \langle \xi_k, y\rangle - \psi(y) + Tr[\mathcal{B}_k F_0] + \epsilon_k + \tilde{\epsilon}_k \to \mu. \tag{6.70}$$

Do Lema 6.4.3 , existem $\epsilon_k^1 \geq 0$, $\epsilon_k^2 \geq 0$, $\epsilon_k \geq \epsilon_k^1 + \epsilon_k^2$, $\xi_k^1 \in \partial_{\epsilon_k^1}\psi(y)$ e $\xi_k^2 \in \partial_{\epsilon_k^2}\delta_C(y)$ tais que $\xi_k = \xi_k^1 + \xi_k^2$. Portanto, consideramos

$$z_k :\ = \ \xi_k^2 - F^\diamond(\mathcal{B}_k) \tag{6.71}$$

$$\nu_k :\ = \ \langle \xi_k^2, y\rangle + \epsilon_k^2 + Tr[\mathcal{B}_k F_0]. \tag{6.72}$$

De (6.58) segue que $\{(z_k, \nu_k)\}_k$ é uma seqüência tal que

$$(z_k, \nu_k) \in \mathcal{D} \ \text{ para cada }\ k \tag{6.73}$$

e

$$(x_k, \mu_k) = (z_k, \nu_k) + (\xi_k^1, \langle \xi_k^1, y\rangle + \epsilon_k^1 + \tilde{\epsilon}_k - \psi(y)).$$

Suponha que $\{(z_k, \nu_k)\}_k$ é uma seqüência convergente. Da condição de qualificação (CQCF), temos que $\mathcal{D}$ é fechado, logo $\{(z_k, \nu_k)\}_k$ converge para um elemento de $\mathcal{D}$. O que junto com (6.70) resulta que $\{(\xi_k^1, \langle \xi_k^1, y\rangle + \epsilon_k^1 + \tilde{\epsilon}_k - \psi(y))\}_k$ é uma seqüência convergente. Fazendo $\bar{\epsilon} = \epsilon_k^1 + \tilde{\epsilon}_k$ sabemos que $\xi_k^1 \in \partial_{\epsilon_k^1}\psi(y) \subseteq \partial_{\bar{\epsilon}}\psi(y)$. Assim, temos que a sequência convergente $\{(\xi_k^1, \langle \xi_k^1, y\rangle + \bar{\epsilon}_k - \psi(y))\}_k$ está contida em $\operatorname{epi}\psi^*$.

Como $\operatorname{epi}\psi^*$ e S_n^+ são conjuntos fechados, concluimos que $(x, \mathcal{B}, \mu) \in \operatorname{epi}\varphi_1^* + \operatorname{epi}\varphi_2^*$. Donde segue o resultado desejado.

Agora, suponha que $\{(z_k, \nu_k)\}_k$ é uma seqüência divergente. De (6.70), (6.71) e (6.72) temos que a seqüência $\{(\xi_k^1, \langle \xi_k^1, y\rangle + \bar{\epsilon}_k - \psi(y))\}_k$ não é limitada, isto é, $\|(\xi_k^1, \langle \xi_k^1, y\rangle + \bar{\epsilon}_k - \psi(y))\| \to +\infty$.

- Se $\{\xi_k^1\}_k$ é limitada, então a seqüência $\{\alpha_k\}_k$ de números reais dada por $\alpha_k := \langle \xi_k^1, y\rangle + \bar{\epsilon}_k - \psi(y)$ é ilimitada. Além disso, do Lema 1.2.3 vale que

$$\frac{(\xi_k^1, \alpha_k)}{\alpha_k} \to (0, 1) \in 0^+(\operatorname{epi}\psi^*).$$

Desde que $\frac{(x,\mu)}{\alpha_k} \to (0, 0)$, temos que

$$\frac{(z_k, \nu_k)}{\alpha_k} \to (0, -1) \in 0^+(\mathcal{D})$$

Portanto, dado $(z, \nu) \in \mathcal{D}$ temos que

$$(z, \nu) + t(0, -1) \in \mathcal{D} \;\text{ para todo }\; t > 0. \tag{6.74}$$

Fazendo $\mathcal{Z} = 0$ em (6.58), temos que $\operatorname{epi}\delta_C^* \subset \mathcal{D}$. Logo, a expressão em (6.74) é válida para todo $(z, \nu) \in \operatorname{epi}\delta_C^*$. Em particular, para $(z, \nu) = (0, 0)$ segue que $(0, -1) \in \mathcal{D}$ o que contraria o Lema 2.1 dado em [41].

- Se $\{\xi_k^1\}_k$ não é limitada, então $\|\xi_k^1\| \to +\infty$ quando k cresce. Como ψ é convexa com $\operatorname{dom}\psi = \mathbb{R}^m$, temos que ψ é contínua. Em particular, ψ é contínua em 0, logo, existem constantes $c > 0$ e $d > 0$ tais que para todo y com $\|y\| \leq c$ tem-se $\|\psi(y)\| \leq d$. Logo, para cada k, obtemos a seguinte relação entre α_k e $\|\xi_k^1\|$:

$$\begin{aligned}\alpha_k \geq \psi^*(\xi_k^1) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{\langle \xi_k^1, y\rangle - \psi(y)\} \\ &\geq \sup_{\|y\| \leq c} \{\langle \xi_k^1, y\rangle - d\} = c\|\xi_k^1\| - d.\end{aligned}$$

Usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obtermos a última igualdade acima. Como $\|\xi_k^1\| \to +\infty$, sem perda de generalidade podemos supor que $c\|\xi_k^1\| > d$ para todo k, e da desigualdade acima segue que $\alpha_k \to +\infty$. Assim, obtemos a seguinte relação

$$\frac{\|\xi_k^1\|}{\alpha_k} \leq \frac{\|\xi_k^1\|}{c\|\xi_k^1\| - d}.$$

Donde segue que a seqüência $\{\frac{\|\xi_k^1\|}{\alpha_k}\}_k$ é limitada. Assim, podemos supor que $\frac{\|\xi_k^1\|}{\alpha_k} \to \xi$. Logo,

$$\frac{(\xi_k^1, \alpha_k)}{\alpha_k} \to (\xi, 1).$$

Como $(\xi_k^1, \alpha_k) \in \operatorname{epi} \psi^*$ para cada k, temos que $(\xi, 1) \in 0^+(\operatorname{epi} \psi^*)$ [42, Lema 2.1]. Do Lema 1.2.3 concluimos que $\xi = 0$. Seguindo os mesmos argumentos usados no ítem anterior temos que $(0, -1) \in \mathcal{D}$, que é uma contradição.

Como avaliamos todos casos possíveis, concluimos a prova de que $\operatorname{epi} \varphi_1^* + \operatorname{epi} \varphi_2^*$ é um conjunto fechado. ■

Assim, pelo Lema 6.4.2 e o Teorema 6.4.1 temos que

$$\text{epi } F^* = \text{epi } \varphi_1^* + \text{ epi } \varphi_2^*. \tag{6.75}$$

Agora vamos usar este fato para mostrar que as funções que descrevem o problema $(\text{PSDC})_1$ sob a condição usual de que o conjunto viável é não vazio mais a condição geométrica da existência do cone convexo fechado dado em (6.58) implicam a Hipótese 5.3.2 de nossas condições necessárias de otimalidade.

Corolário 6.4.1 *Se as mesmas condições do Teorema 6.4.1 são satisfeitas, então a Hipótese 5.3.2 é verificada.*

Prova. Da Proposição 6.4.1 temos que $\operatorname{epi} h^* = \{0\} \times -S_n^+ \times \mathbb{R}_+$, isto é, $\operatorname{epi} h^*$ é um cone convexo fechado contendo a origem, logo, $0^+(\text{epi } h^*) = \text{epi } h^*$ ([61, Teorema

8.1]). Então, $-0^+(\text{epi } h^*) \cap 0^+(\text{epi } h^*) = -\text{epi } h^* \cap \text{epi } h^* = \{(0,0,0)\}$. Como $C \cap G^{-1}S_n^+ \neq \emptyset$ e a condição de qualificação (CQCF) é válida, temos (6.75). O que junto com (6.63) e (6.66) implica que não existe direção de recessão do epi h^* cuja direção oposta é direção de recessão do epi F^*. E como epi F^* e epi h^* são conjuntos fechados, resulta que epi F^* + epi h^* também é fechado ([61, Corolário 9.1.2.]). Assim, $\partial(F+h) = \partial F + \partial h$ [15, Teorema 3.1], isto é, a Hipótese 5.3.2 é satisfeita. ∎

Finalmente, estabelecemos o seguinte resultado de gap de dualidade zero para o problema (PSDC) similar aquele obtido em [41].

Teorema 6.4.2 *Seja $\bar{x}$ uma solução do problema (PSDC). Se a condição de qualificação (CQCF) é válida, então existe um $\bar{\mathcal{Z}} \in S_n^+$ satisfazendo*

$$\inf_{x\in C}\{\psi(x) - Tr[\bar{\mathcal{Z}}G(x)]\} = \psi(\bar{x}).$$

Prova. Seja $\bar{x} \in C$ uma solução de (PSDC). Então existe um $\bar{W} \in S_n^+$ tal que $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{W}) \in E$ resolve $(\text{PSDC})_1$ com $G(\bar{x}) - \bar{W} \in S_n^+$. Assim, $G(\bar{x}) = [G(\bar{x}) - \bar{W}] + \bar{W} \in S_n^+$. Das definições de φ e h segue que

$$\begin{aligned} v(\bar{w}) = \varphi(\bar{w},\bar{w}) + h(\bar{w}) &= \psi(\bar{x}) + \delta_{S_n^+}(G(\bar{x}) - \bar{W}) + \delta_C(\bar{x}) + \delta_{S_n^+}(\bar{W}) \\ &= \min\{F(u) + h(u) : u = (x,U) \in \mathbb{R}^m \times S_n\} \\ &= \min\{\psi(x) : x \in C,\ G(x) \succeq 0\} = \psi(\bar{x}). \end{aligned} \tag{6.76}$$

A segunda igualdade em (6.76) segue do Lema 5.1.3. Como $C \cap G^{-1}S_n^+ \neq \emptyset$ e a condição (CQCF) é válida, do Corolário 6.4.1 temos que a Hipótese 5.3.2 é verificada. Desde que a função $F(\cdot)$ é convexa, podemos aplicar o Teorema 5.3.1 à formulação (PEG) de (PSDC). Assim, de (5.10) e (6.76) obtemos que existe $\bar{\nu} = (\bar{\xi}, \bar{\mathcal{Z}}) \in \mathbb{R}^m \times S_n$ tal que $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{W}) \in D_{\bar{\nu}}$ e

$$L(\bar{w}, \bar{\nu}) \geq \varphi(\bar{w}, \bar{w}) + h(\bar{w}) = \psi(\bar{x}).$$

Neste caso, recordamos que as funções primal-dual e dual são iguais e de (6.57) temos que $\mathbb{R} \ni L(\bar{w}, \bar{\nu}) \geq \psi(\bar{x})$ se, e somente se, $\bar{\nu} = (0, \bar{\mathcal{Z}})$ com $\bar{\mathcal{Z}} \in S_n^+$ e $L(\bar{w}, \bar{\nu}) = \inf_{x\in C}\{\psi(x) - \langle \bar{\mathcal{Z}}, G(x)\rangle\}$. Logo, obtemos que

$$\inf_{x\in C}\{\psi(x) - Tr[\bar{\mathcal{Z}}G(x)]\} \geq \psi(\bar{x}).$$

Como a desigualdade contrária é trivialmente verificada segue a conclusão. ∎

Capítulo 7

Considerações finais

Neste trabalho, introduzimos o Problema de Equilíbrio Generalizado (PEG). Verificamos a abrangência e eficiência de nossa formulação de equilíbrio quando conseguimos incluir, de maneira natural, como casos particulares de (PEG), as desigualdades variacionais mistas estudadas por Mosco, as do tipo Minty, as quase-variacionais generalizadas e problemas de programação semidefinida convexa, bem como o problema estudado por Baiocchi e Capelo, além de esquemas de equilíbrio e quase-equilíbrio.

Para estabelecer um teorema de existência de solução para o problema (PEG), estendemos o Princípio KKM e o Lema FKKM, que usamos como ferramentas na obtenção de nossos resultados de existência. Aplicando nosso teorema de existência ao problema de equilíbrio clássico, encontramos novos resultados e reencontramos outros já existentes na literatura.

Propomos também uma teoria de dualidade para (PEG), baseada no conceito de funções conjugadas, que contém como caso particular o esquema dual introduzido por Martínez-Legáz e Sosa. Obtivemos também condições de otimalidade para soluções dos problemas primal e dual. Nosso esquema preserva propriedades clássicas, como por exemplo, a dualidade fraca.

Finalizamos, aplicando nossa teoria dual a vários problemas importantes da literatura para os quais existem esquemas duais propostos. Em todos os casos, recuperamos os problemas duais como casos particulares do nosso problema dual de (PEG) e os resultados duais mais importantes, relativos a cada problema, presentes na literatura.

A seguir, descrevemos linhas de futuras pesquisas que dão continuidade natural a este trabalho:

1. Aplicação dos nossos resultados de existência a outros problemas particulares de (PEG), como por exemplo, para desigualdades variacionais e quasevariacionais.

2. Desenvolvimento de um método numérico para o problema (PEG).

Referências Bibliográficas

[1] Ansari, Q. H., Lin, Y. C. and Yao, J. C., 2000, "General KKM Theorem with applications to minimax and variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 104, n. 1, pp. 41-57.

[2] Auslender, A. and Teboulle, M., 2003, *Asymptotic cones and functions in Optimization and Variational Inequalities*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

[3] Auslender, A. and Teboulle, M., 2000, "Lagrangian duality and related multiplier methods for variational inequality problems", *SIAM Journal on Optimization*, v. 10, n.4, pp. 1097-1115.

[4] Balaj, M. and Muresan, S., 2005, "Generalizations of the Fan-Browder fixed point theorem and minimax inequalities", *Archivum Mathematicum (BRNO),* v. 41, pp. 399-407.

[5] Baiocchi, C. and Capelo, A., 1984, *Variational and Quasivariational Inequalities*, John Wiley and Sons, New York, NY.

[6] Beer, G., 1993, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Series Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

[7] Berge, C., 1997, *Topological Spaces*, Dover Publications, New York, NY.

[8] Bianchi, M. and Pini, R., 2001, "A note on equilibrium problems with properly quasimonotone bifunctions", *Journal of Global Optimization,* v. 20, pp. 67-76.

[9] Bianchi, M. and Pini, R., 2005, "Coercivity conditions for equilibrium problems", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 124, n. 1, pp. 79-92.

[10] Bianchi, M. and Schaible, S., 1996, "Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 90, n. 1, pp. 31-43.

[11] Blum, E. and Oettli, W., 1994, "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *The Mathematics Student,* v. 63, pp. 123-145.

[12] Bounkhel, M. and Al-Senan, B. R., 2006, "An iterative method for nonconvex equilibrium problems", *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* v. 7, n. 2, Article 75.

[13] Brézis, H., Nirenberg, L. and Stampacchia, G., 1972, "A remark on Ky Fan's minimax principle", *Bollettino U. M. I.,* v. 4, n. 6, pp. 293-300.

[14] Browder, F. E., 1968, "The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces"' , *Math. Annalen,* v. 177, pp. 283-301.

[15] Burachik, R.S. and Jeyakumar, V., 2005, "A dual condition for the convex subdifferential sum formula with applications", *Journal of Convex Analysis,* v. 12, n.2, pp. 279-290.

[16] Burachik, R.S. and Jeyakumar, V., 2005, "A new geometric condition for Fenchel's duality in infinite dimensional spaces", *Mathematical Programming,* Série B, v. 104, pp. 229-233.

[17] Chadli, O., Chbani, Z. and Riahi, H., 2000, "Equilibrium problems with generalized monotone bifunctions and applications variational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 105, n. 2, pp. 299-323.

[18] Chadli, O., Schaible, S. and Yao, J. C., 2004, "Regularized equilibrium problems with applications to noncoercive hemivariational inequalities", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 121, n. 3, 571-596.

[19] Chan, D. and Pang, J.S., 1982, "The generalized quasi-variational inequality problem", *Mathematics of Operations Research,* 7(2), 211-222.

[20] Chang, S. S. and Zhang, Y., 1991, "Generalized KKM Theorem and variational inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 159, 208-223.

[21] Chang, T. H. and et all, 1999, "On S-KKM property and related topics", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 229, 212-227.

[22] Chen, M., Lin, L. and Park, S., 2003, "Remarks on generalized quasi-equilibrium problems", *Nonlinear Analysis,* v. 52, 433-444.

[23] Chowdhury, M. S. R. and Tan, K.K., 1996, "Generalizations of Ky Fan's minimax inequality with applications to generalized variational inequalities for pseudo-monotone operators and fixed point theorems", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 204, 910-929.

[24] Dugundji, J. and Granas, A., 1978, "KKM maps and variational inequalities", *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. Classe di Scienze,* v. 5, n. 4, 679-682.

[25] Eckstein, J., 2003, "A practical general approximation criterion for methods of multipliers based on Bregman distances", *Mathematical Programming,* Series A, 96, 61-86.

[26] Ekeland, I. and Temam, R., 1976, *Convex Analysis and Variational Problems*, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 1, New York, NY.

[27] Fakhar, M. and Zafarani, J., 2004, "Generalized equilibrium problems for quasimonotone and pseudomonotone bifunctions", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 123, n. 2, 349-364.

[28] Fan, K., 1961, "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem", *Mathematische Annalen,* v. 142, 305-310.

[29] Fan, K., 1984, "Some properties of convex sets related to fixed point theorems", *Mathematische Annalen,* v. 266, 519-537.

[30] Fenchel, W., 1949, "On conjugate convex functions", *Canadian J. Math.,* v. 1, 73-77.

[31] Fletcher, R., 1985, "Semi-definite matrix constraints in optimization", *SIAM Journal Control and Optimization,* v. 23, n. 4, 493-513.

[32] Flores-Bazán, F., 2000, "Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasi-convex case", *SIAM Journal on Optimization,* v.11, n. 3, 675-690.

[33] Hiriart-Urruty, J.B. and Lemarechal, C., 1993, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Vol. II, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[34] Iusem, A. and Sosa, W., 2003, "Iterative algorithms for equilibrium problems", *Optimization,* v. 52, n. 3, 301-316.

[35] Iusem, A. and Sosa, W., 2003, "New existence results for equilibrium problems", *Nonlinear Analysis,* v. 52, 621-635.

[36] Iusem, A. and Sosa, W., 2007, "A proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces", Preprint on line.

[37] Iusem, A., Kassay, G. and Sosa, W., 2007, "On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems", *Mathematical Programming,* Series B, Preprint on line.

[38] Izmailov, A. and Solodov, M., 2005, *Otimização-volume 1. Condições de Otimalidade, Elementos de Análise Convexa e de Dualidade*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada-IMPA, Rio de Janeiro, Brazil.

[39] Jacinto, F.M.O. and Scheimberg, S., 2005, "Duality for generalized equilibrium problem", *Technical Report* ES-671/05, PESC-COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil; http://www.cos.ufrj.br/uploadfiles/es67105.pdf.

[40] Jacinto, F.M.O. and Scheimberg, S., "Duality for generalized equilibrium problems", *to appear in Optimization.*

[41] Jeyakumar, V. and Dinh, N., 2004, "Avoiding duality gaps in convex semidefinite programming without Slater's condition", *Applied Mathematics report,* AMR04/6, 123-145.

[42] Jeyakumar, V., Lee, G.M. and Dinh, N., 2003, "New sequential Lagrange multiplier conditions characterizing optimality without constraint qualifications for convex programs", *SIAM Journal on Optimization,* 14 (2), 534-547.

[43] Jeyakumar, V., Rubinov, A.M., Glover, B.M. and Ishizuka, Y., 1996, "Inequality systems and global optimization", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 202, 900-919.

[44] Kalmoun, E. M., 2001, "On Ky Fan's minimax inequalities, mixed equilibrium problem and hemivariational inequalities", *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* v. 2, Issue 1, 1-13.

[45] Kassay, G., Kolumbán, J. and Zsolt, P., 2002, "Factorization of Minty and Stampacchia variational inequality systems", *European Journal of Operational Research,* 143, 377-389.

[46] Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G., 1980, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, NY.

[47] Klerk, E., 2002, *Aspects of semidefinite programming*, Interior Point Algorithms and Selected Applications, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht.

[48] Knaster, B., Kuratowski, C. and Mazurkiewicz, S., 1929, "Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe", *Fundamenta Mathematicae,* v. 14, 132-137.

[49] Kong, W., 2007, "Equilibrium problems for KKM set-valued maps", *International Journal of Math. Analysis,* v. 1, n. 2, 55-64.

[50] Konnov, I.V., 1979, "Mixed variational inequalities and exact penalty functions", *Numerical Methods for Continuous Casting and Related Problems,* A.Lapin and E.Laitinen, Eds., DAS, Kazan, 59-63.

[51] Konnov, I.V. and Schaible, S., 2000, "Duality for Equilibrium Problems under Generalized Monotonicity", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 104, n.2, 395-408.

[52] Kurdila, A.J. and Zabarankin, M., 2005, *Convex Functional Analysis*, Systems e Control: Foundations e Applications, Birkhauser Verlag, Berlin.

[53] Lassonde, M., 1983, "On the use of KKM multifunctions in fixed point theory and related topics", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 97, 151-201.

[54] Lima, E.L., 1976, *Elementos de Topologia Geral*, Coleção Elementos de Matemática-IMPA, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, Brasil.

[55] Martínez-Legaz, J.E. and Sosa, W., 2006, "Duality for equilibrium problems", *Journal of Global Optimization,* v. 35, 311-319.

[56] Morgan, J. and Romaniello, M., 2003, "Generalized quasi-variational inequalities and duality", *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics,* 4, Issue 2, Article 28.

[57] Mosco, U., 1972, "Dual variational inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 40, 202-206.

[58] Noor, M.A. and Oettli, W., 1994, "On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria", *Le Matematiche,* XLIX (2), 313-331.

[59] Park, S., 1989, "Generalizations of Ky Fan's matching theorems and their applications", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 141, 164-176.

[60] Ramos, Y.G. and Sosa, W., 2003, "Aplicaciones del Lema de Ky Fan", *TECNIA,* v. 13, n. 2, 75-86.

[61] Rockafellar, R.T., 1970, *Convex Analysis*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, New Jersey.

[62] Rockafellar, R.T., 1974, *Conjugate Duality and Optimization*, Regional Conference Series in Applied Mathematics 16, SIAM, Philadelphia.

[63] Rouhani, B.D., Tarafdar, E. and Watson, P.J., 2005, "Existence of solutions to some equilibrium problems", *Journal of Optimization Theory and Applications,* v. 126, n. 1, 97-107.

[64] Shih, M. and Tan, K., 1985, "Generalized quasi-variational inequalities in locally convex topological vector spaces", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 108, 333-343.

[65] Stromberg, T., 1996, "The operation of infimal convolution", *Diss. Math.,* 352, 1-61.

[66] Tan, K.K. and Yuan, Z.Z., 1993, "A minimax inequaliy with applications to existence of equilibrium points", *Bulletin of the Australian Mathematical Society,* v. 47, n. 1, 483-503.

[67] Tarafdar, E., 1977, "On nonlinear variational inequalities", *Proceedings of the American Mathematical Society,* v. 67, n. 1, 95-98.

[68] Tian, G., 1992, "Generalizations of the FKKM Theorem and the Ky Fan minimax inequality, with applications to maximal elements, price equilibrium, and complementarity", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 170, 457-471.

[69] Todd, M.J., 2001, "Semidefinite optimization", *Acta Numerical,* 10, 515-560.

[70] Van Tiel, J., 1984, *Convex Analysis: an Introductory Text*, John Wiley and Sons.

[71] Wolkowicz, H., Saigal, R. and Vandenberghe, L., 2000, *Handbook of semidefinite programming*, International Series in Operations Research and Management Science, 27, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht.

[72] Zalinescu, C., 2002, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

[73] Zeidler, E., 1986, *Nonlinear Functional Analysis an its Applications*, Vol. I, Springer-Verlag, New York, NY.

[74] Zeidler, E., 1986, *Nonlinear Functional Analysis an its Applications*, Vol. III, Springer-Verlag, New York, NY.

[75] Zhou, J. X. and Chen, G., 1988, "Diagonal convexity conditions for problems in Convex Analysis and Quasi-variational inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* v. 132, 213-225.