ROTEIROS DE COLABORAÇÃO PARA O SOFTWARE TABULAE: ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS PARA UM MODELO DE APRENDIZAGEM COLABORATIVA APOIADA POR COMPUTADOR À DISTÂNCIA EM GEOMETRIA

Francisco Roberto Pinto Mattos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Nelson Maculan Filho, Ph.D.

Prof. Luiz Carlos Guimarães, Ph.D.

Prof. Jano Moreira de Souza, Ph.D.

Prof. Marcia Helena Costa Fampa, D.Sc.

Prof. Victor Augusto Giraldo, D.Sc.

Prof. Rafael Garcia Barbastefano, D.Sc.

Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho, D.Sc.

Prof. Siobhan Victoria Healy, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2007

MATTOS, FRANCISCO ROBERTO PINTO

Roteiros de Colaboração para o Software Tabulæ: Estratégias Didáticas para um Modelo de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador à Distância em Geometria [Rio de Janeiro] 2007

XIV, 289 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2007)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador

2 - Tecnologias Educacionais

3 - Educação Matemática

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À Moema,

aos meus pais,

Pagú e Tábata.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente ao professor Nelson Maculan, pela acolhida e pelo apoio e generosidade, mesmo à distância contribuiu muito para que esta tese fosse possível.

Ao professor Jano pelas discussões durante sua disciplina que me proporcionaram muitas das idéias desenvolvidas na pesquisa e por todo o seu apoio.

Aos professores que contribuiram de forma direta ou indireta para a concepção da pesquisa.

Agradeço à Fátima, assistente do professor Maculan, sempre pronta a ajudar os alunos, solícita e generosa.

Ao Thiago Moraes que foi parceiro direto nesta pesquisa, providenciando cada idéia nova que discutíamos para o Tabulae Colaborativo.

Ao Rafael Barbastefano pelas idéias que muito ajudaram na concepção da tese e pelo acompanhamento direto do nosso trabalho.

Aos companheiros do LIMC por todo apoio: Hausen, Devolder, Aline.

Aos alunos da Iniciação Científica Jr e do curso de licenciatura do IM que participaram dos experimentos.

Aos alunos do mestrado para professores do IM e do CEFET que participaram dos experimentos: Quaranta, Luciana, Victor, Claiton, Magda e Thiago.

Aos meus colegas do Instituto de Aplicação da UERJ e do Colégio Pedro II que sempre me apoiaram durante a pesquisa. Em especial às direções das duas instituições, professor Lincoln e professora Vera Maria, que me apoiaram efetivamente concedendo licença para que eu pudesse me dedicar à pesquisa desta tese. Um agradecimento especial à professora Neide Santana pelo apoio e incentivo.

Aos professores Victor Giraldo e Beth Belfort pelo apoio. Aos colegas parceiros dos projetos de formação continuada agradeço por tudo que temos aprendido juntos.

Um agradecimento muito especial aos meus pais, Francisco e Alvacir, por tudo que me ensinaram por toda a vida e que me permitiu trilhar este caminho até aqui. Claudia, João e amigos pela torcida.

Um agradecimento à Moema, companheira de muitas linhas, por todo amor e compreensão pelas horas ausentes consumidas pelo trabalho, principalmente por todo o conforto afetuoso, paz e alegria que me proporciona.

Ao Pagú e Tábata pela “compreensão"pelos passeios curtos, e pelas longas horas de companhia alegre que proporcionam.

E, finalmente, um agradecimento especial ao professor Luiz Carlos Guimarães pela confiança demonstrada por todo este tempo, oferecendo a oportunidade de desenvolvermos esta pesquisa, viabilizando-a e oferecendo todas as condições para a concretização da tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ROTEIRO DE COLABORAÇÃO PARA O SOFTWARE TABULÆ: ESTRATÉGIAS DIDÁTICAS PARA UM MODELO DE APRENDIZAGEM COLABORATIVA APOIADA POR COMPUTADOR À DISTÂNCIA EM GEOMETRIA

Francisco Roberto Pinto Mattos

Novembro/2007

Orientadores: Nelson Maculan Filho
Luiz Carlos Guimarães
Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho apresenta a viabilidade de estratégias didáticas para modelos de interação professor-estudante e estudante-estudante. Descrevemos as funcionalidades desenvolvidas no projeto do software Tabulæ Collaborativo que tornaram possível a modelagem dos diversos modos de interação desenvolvidos no ensino presencial de matemática, aplicados em atividades síncronas no ensino a distância. Estudamos estratégias didáticas baseadas em roteiros de colaboração para aprendizagem colaborativa apoiada por computador, projetadas para facilitar a colaboração entre estudantes dispostos de modo remoto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

COLLABORATIVE SCRIPTS FOR THE SOFTWARE TABULÆ: DIDACTCS STRATEGIES FOR A MODEL OF COMPUTER SUPPORTED COLLABORATIVE LEARNING AT A DISTANCE IN GEOMETRY

Francisco Roberto Pinto Mattos

November/2007

Advisors: Nelson Maculan Filho
Luiz Carlos Guimarães
Department: Systems Engineering and Computer Science

This work presents strategies didactics available for the model of teacher-student and student-student interaction. We describe some features developed on project of software Tabulæ Collaborative that make possible the modelling of the several modes of interaction in a mathematics classroom, allowing different modes of synchronous distance teaching of mathematics. Collaborative learning strategies in mathematics, for the case of a face to face classroom, are studied and applied using the software Tabulæ Collaborative. The strategies didactics are based on collaborative scripts for computer-supported collaborative learning (CSCL), designed to support collaboration among distant learners.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Foco do Estudo 1

1.2 Motivação 2

1.3 Objetivos do Estudo 7

1.4 Relevância do Trabalho 8

1.5 Detalhamento do Trabalho 8

2 Formação dos Professores de Matemática **13**

2.1 Experiências Nacionais e Internacionais 13

2.2 Formação dos Professores 23

2.3 A Formação Matemática 31

2.3.1 Formação Matemática do Professor 33

2.3.2 Escola Básica 39

2.3.3 Tecnologia na Formação do Professor 58

3 Resultados do Exame Nacional de Cursos e Formação Continuada **60**

3.1 Exame Nacional de Cursos - ENC 60

3.2 Análise dos Resultados do ENC 62

3.2.1 Raciocínio Espacial e Visualização 63

3.2.2 Considerações sobre a questão 14 68
3.3 Formação Continuada 82
3.3.1 Redes de Apoio 85

4 Aprendizagem, Linguagem Matemática e Tecnologia no Ensino 91
4.1 Compreensão dos Conteúdos Pedagógicos 94
4.2 Linguagem e Signos Matemáticos 99
4.3 Abordagens por Soluções de Problemas 108
4.4 Aprendizagem Colaborativa 114
4.5 Tecnologia no Ensino de Matemática 116

5 Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador: Aplicações à Matemática 122
5.1 Aprendizagem Colaborativa 123
5.2 Aprendizagem Colaborativa em Matemática 129
5.2.1 Aprendizado em Grupos Pequenos 132
5.3 Aprendizado Cooperativo em Matemática 135
5.4 Estratégias para Aprendizagem: colaboração e grupos pequenos 138
5.4.1 O papel do professor nas atividades em grupo 141
5.5 Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador - CSCL 143
5.6 Aprendizado Colaborativo On-line em Matemática 145
5.7 Dificuldades e Soluções para CSCL 149
5.7.1 Características dos cenários de Aprendizagem On-line . 150
5.8 Níveis de Suporte a Ambientes CSCL 158
5.8.1 Roteiros de Colaboração 160

6 Educação a Distância e Ambientes Computacionais para Aprendizagem Colaborativa 164

6.1 Ensino à Distância - EAD 164

6.1.1 Breve Histórico 165

6.1.2 Impactos da Rede Mundial de Computadores (WWW) na EAD 169

6.2 Plataformas para Ensino à Distância 170

6.3 Tabulæ Colaborativo: Geometria Dinâmica e Colaboração Matemática à Distância 173

6.3.1 Estrutura de Colaboração: Geometria Dinâmica e Comunicação 174

6.3.2 Área Administrativa: Módulo TC no Moodle 177

7 Metodologia Análise de Experimentos 182

7.1 Estudo Empírico 183

7.2 Características e Funcionalidades agregadas ao *Tabulæ Colaborativo* 187

7.2.1 Revisor Passo a Passo 187

7.2.2 Glossário 189

7.2.3 Transferência Público $\rightleftharpoons$ Privada 190

7.2.4 Histórico da Mensagens de Chat 191

7.2.5 Mudanças na Interface 194

7.2.6 Identidade para a Área Pública e Privada 194

7.2.7 Comunicação durante as sessões colaborativas 196

7.2.8 Integração com o Moodle 198

7.3 Descrição das Estratégias Simuladas com o Tabulæ Colaborativo. . . . 199
7.3.1 Estratégias escolhidas 200
7.3.2 Concepção para a abordagem dos casos estudados . . . 210

8 Conclusões 257

8.1 Reflexões Específicas 260
8.1.1 Discurso Matemático 260
8.1.2 Fatores Cognitivos e Metacognitivos e Investigação Matemática 263
8.1.3 Redes de Aprendizado em Matemática e Suporte . . . 265
8.2 Considerações Finais 266

Lista de Figuras

3.1 Questão 14 do Provão 2000 69

3.2 Solução para escolha da opção (a) 70

3.3 Solução para escolha da opção (b) 71

3.4 Conceitos da UNIaaa 73

3.5 Resposta da pergunta relativa às dificuldades encontradas por alunos da UNIaaa 74

3.6 Opções dos alunos da UNIaaa 75

3.7 Conceitos da UNIeee 75

3.8 Resposta de pergunta relativa às dificuldades encontradas por alunos da UNIeee 76

3.9 Opções dos alunos da UNIeee 77

6.1 Processo de colaboração 175

6.2 Estrutura de comunicação: público - privada 177

6.3 Tópico de um curso no *Moodle* com duas atividades adicionadas 178

6.4 Tela de edição de uma nova atividade com o TC 179

6.5 Escolha dos grupos do curso que participarão da atividade . . 179

6.6 Editor do roteiro do grupo G2 180

6.7 Escolha de atribuições de cada membro do grupo G2 181

6.8 O que cada componente do grupo vê quando acessa a atividade 181

7.1 Revisando passo a passo uma atividade 188
7.2 Exemplo de acesso ao Glossário, clicando sobre a palavra retângulo 190
7.3 Um exemplo de acesso ao histórico da discussão no Chat . . . 193
7.4 Representação visual para os elementos grupo 194
7.5 Caderno de anotações 195
7.6 Caderno de anotações e Quadro negro 196
7.7 Tela inicial da criação de uma atividade no TC integrado ao Moodle 199
7.8 Final da Atividade 1 214
7.9 O problema proposto no roteiro 215
7.10 A solução da Atividade 2 218
7.11 A figura que originou o Problema proposto 225
7.12 O Roteiro para o Problema 230
7.13 Um momento da solução no quadro negro 231
7.14 Roteiro para a atividade analisada 236
7.15 Tela referente às primeiras idéias 237
7.16 Tela que caracteriza a procura por um caminho alternativo . . 238
7.17 Exploração das propriedades dinâmicas do software 240
7.18 Exploração permite encontrar o ponto solução 241
7.19 Testando a conjectura 242
7.20 Testando a conjectura 243
7.21 Roteiro do problema principal 244
7.22 A sessão colaborativa planejada para usar *Jigsaw - Grupos Especialistas* 245
7.23 A solução apresentada para o grupo no *Tópico 1* 248
7.24 A solução apresentada para o grupo no *Tópico 2* 251

7.25 A solução apresentada para o grupo no *Tópico 3* 253
7.26 A solução após atividades nos *Grupos Especialistas* 256

Capítulo 1

Introdução

1.1 Foco do Estudo

O presente estudo focaliza as possíveis contribuições proporcionadas pela introdução da tecnologia no ensino de matemática, aplicada em projetos baseados na Aprendizagem Colaborativa mediada por computadores. Neste trabalho, investigamos como novos paradigmas contribuem para contornar obstáculos que o uso de ferramentas computacionais acarretam à prática de ensino e aprendizagem. E, em uma perspectiva que visa ampliar o acesso ao ensino de matemática, o estudo analisou e propôs funcionalidades para sistemas com atuação remota visando a prática de processos de Ensino a Distância de Matemática.

As ferramentas que têm como referencial o Aprendizado Colaborativo possuem projetos baseados na interação social, pela qual há a possibilidade de estimular a elaboração do entendimento conceitual dos temas relacionados ao ensino e aprendizagem de Matemática (Johnson & Johnson em [53]). Nesta concepção, as ações dos estudantes são orientadas por elaborações, discussões e verbalizações, relacionadas com o pensar–ler–redigir proposto nos processos de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador. As premissas do Aprendizado Colaborativo indicam que, a partir das relações entre pensamento e linguagem, é possível melhor entender o processo de desenvolvimento intelectual, conforme demonstrou Vigotsky [139], em seu trabalho, quando define Zona de Desenvolvimento Proximal, estabelecendo uma forte relação entre o pensamento e a linguagem que a traduz.

O desenvolvimento de tecnologias para comunicação e informação (TIC) aplicadas ao ensino permitiram novas possibilidades para estudos referentes a métodos de ensino e aprendizagem. Em nosso trabalho de pesquisa, exploramos a utilização de ambientes para Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador. Estes ambientes computacionais são projetados de modo a permitir que os participantes do processo de aprendizagem construam seu conhecimento através da discussão e da reflexão, produzindo elaborações a partir da geração de conflitos, comparações e avaliações de discursos (Dalgarno [20]). Neste contexto, os recursos tecnológicos proporcionados pela informática atuam como mediadores do processo de ensino e aprendizagem.

1.2 Motivação

Este trabalho tem origem na observação da prática de ensino e na verificação de deficiências na formação matemática dos professores. As constatações das deficiências no domínio de conceitos básicos de matemática são fruto de nossa experiência em cursos de extensão e de formação continuada para professores. Nesse sentido, foi importante a observação de meus pares, num primeiro momento ainda na condição de cursista, e posteriormente na atuação como formador. Desde então, procuramos entender as possíveis causas das deficiências na formação dos professores, e a pensar as contribuições que possibilitariam a reversão deste processo, por meio do estudo de formas alternativas de apreensão dos conceitos matemáticos e posterior transmissões dos mesmos pelos professores ou futuros professores de matemática. Outro campo de observação que se enquadra no mesmo processo são alunos licenciando em matemática, do IME/UERJ, na disciplina de prática de ensino.

Fizemos uma leitura do desempenho dos formandos em matemática no Exame Nacional de Cursos[1], e percebemos deficiências no aprendizado de certos conteúdos matemáticos. Isto pode ser inferido por concentração de respostas erradas em conteúdos específicos, e, em alguns casos, erros concentrados em determinada opção, o que sugere a possibilidade de conceitos errados ensinados a estes alunos. Estas deficiências têm origem no ensino básico, e, em grande parte, não são eliminadas no curso de graduação.

Quando observamos os resultados referentes ao desempenho dos alunos brasileiros do ensino básico nos exames PISA[2] – Programme for International Student Assessment e no SAEB[3] – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, temos um quadro que confirma as deficiências na qualidade do ensino de matemática que é oferecido na maioria das escolas brasileiras. O conjunto destes dados indicam que, possivelmente, as deficiências na formação dos professores têm uma contribuição nestes resultados.

Este processo vem sendo alimentado num *'feedback'* negativo ao longo de décadas. Acreditamos que o caminho para a quebra deste ciclo passa por

[1]Dados INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira para o Provão/1999 a 2003.

[2]O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes é uma avaliação internacional padronizada desenvolvida conjuntamente por países participantes e administrada nas escolas aos alunos de 15 anos.

[3]Desenvolvido pelo INEP, na sua Diretoria de Avaliação da Educação Básica – DAEB, coleta dados sobre alunos, professores, diretores de escolas públicas e privadas em todo o Brasil.

uma atenção maior à formação matemática básica do professor, juntamente com a renovação dos conteúdos e a implementação de políticas destinadas a promover a incorporação de novas tecnologias educacionais às atividades escolares, como sinaliza o texto publicado pela UNESCO: O Perfil dos Professores Brasileiros([1] pgs 123-124).

Tomando por base esta pesquisa da UNESCO, verificamos a necessidade da valorização profissional, suportada por medidas que possibilitem ao professor buscar seu aprimoramento. A existência de um processo de formação continuada, pertencente à carreira de professor, a exemplo do implantado na China [73], com bons resultados, segundo os padrões de avaliação, mostrou-se um bom caminho a ser seguido.

Com relação à formação necessária ao professor, Shulman [124] introduziu em 1986 o termo *'Compreensão dos Conteúdos Pedagógicos'*, apontando para pesquisas em ensino e formação de professores que explorem a ligação entre a compreensão dos conteúdos e pedagogia. Ball & Bass [6] ressaltam que a compreensão dos conteúdos pedagógicos é uma forma especial de domínio do conhecimento que ajusta o conhecimento matemático com conhecimento do aluno, aprendizagem e pedagogia. Segundo este ponto de vista, o domínio de um conjunto de saberes permite aos professores atuarem de modo antecipado, identificando possíveis problemas na aprendizagem dos alunos. A compreensão dos conteúdos possibilita a elaboração de modelos alternativos e ações pedagógicas visando a eliminação destas dificuldades.

Em pesquisa desenvolvida com alunos americanos, Brenner [15] indica que as dificuldades com os registros matemáticos são obstáculos para a boa comunicação matemática. Infere-se que a linguagem adquirida por estes estudantes foi insuficiente para que desenvolvessem adequadamente as competências relativas à sintaxe e ao vocabulário matemáticos. Observando a prática de ensino, o aprendizado estaria relacionado ao domínio da linguagem matemática, e as deficiências relativas à leitura e escrita matemática poderiam implicar em dificuldades de compreensão dos conceitos.

A comunicação dos conceitos abstratos, de certa forma, é dependente da linguagem que os constrói, seja formal ou não, e, se esta não é compreendida, torna-se obstáculo ao desenvolvimento do pensamento. A linguagem é, na verdade, o sentido que atribuímos à simbologia, e, neste caso, a escrita matemática. No dia-a-dia da sala de aula, encontramos muitos exemplos de escrita matemática, em sua maioria restrita a procedimentos realizados para soluções de problemas, e à execução de tarefas algébricas ou aritméticas, sem a preocupação com o raciocínio matemático que esta representa. Assim, cumprem-se rituais de procedimentos padrões para execução de algoritmos, sem que sejam pensados os conceitos envolvidos, as hipóteses formuladas e os argumentos utilizados.

Estudos sobre cognição indicam que o aprendizado ocorre quando os estudantes são submetidos a algum tipo de elaboração sobre o objeto de estudo. Segundo Kramarski & Mevarech [67], um dos mais efetivos modos de elaboração de conceitos ocorre por meio da explicação do que se faz ao outro.

De acordo com padrões formulados por estudo patrocinado pela NCTM – National Council of Teachers of Mathematics, o raciocínio matemático exige habilidades para a construção de conjecturas, a avaliação de argumentos e a escolha da representação. Com este objetivo, a NCTM sugere a importância do discurso matemático em sala de aula. Segundo o estudo, os estudantes devem ser apresentados a estratégias didáticas que incentivem a discussão dos conteúdos com os seus pares, como forma de desenvolver o raciocínio matemático, considerando as suas diversas representações, tanto escritas quanto oral.

Dentro deste campo, encontramos o Aprendizado Cooperativo, que, segundo Slavin [127] [128], é capaz de promover discussões, suporte em processos interativos, desenvolver idéias criativas, análise critica, observações de erros e ainda a procura por melhores soluções. Em aplicações no ensino de matemática, buscamos os estudos de Davidson [21], que apresentou diversificadas estratégias baseadas na organização de grupos pequenos de estudantes em sala de aula. Autores como Kramarski & Mevarech [67] e Cohen [18], sob uma perspectiva cognitiva, defendem que grupos pequenos facilitam a comunicação entre os membros dos grupos e entre grupos, e que este processo interativo tem relação direta com os benefícios proporcionados pelo Aprendizado Cooperativo. Durante os procedimentos, os estudantes comunicam idéias aos colegas, elaborando questionamentos sobre o objeto de estudo, refletindo sobre as soluções, principalmente quando solicitados a explicá-las a seus pares.

A MAA – The Mathematical Association of America promoveu *'workshops'*, nos EUA, com o objetivo de reunir relatos de professores universitários sobre experiências com Aprendizagem Colaborativa em Matemática. Neste trabalho, contaram com a contribuição de um conjunto de autores (Rogers et al. [113], Hagelgans et al. [47], Davidson [21]), que relataram suas experiências e apresentaram casos de sucesso com a utilização desta estratégia pedagógica para o ensino de matemática em cursos de graduação nos EUA.

A nossa pesquisa nos motivou a estudar a possibilidade de aplicar os métodos do Aprendizado Cooperativo ou Colaborativo[4] em ambientes computacionais, especificamente o estudo dos ambientes projetados para o Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador (CSCL)[5]. Com relação ao uso de am-

[4]Neste trabalho não consideramos relevante distinguir as duas denominações, o que justificamos no capítulo 5.

[5]Durante o trabalho justificamos a escolha por não traduzir a sigla CSCL – Computer

bientes computacionais para aprendizagem de matemática, há na literatura diversos trabalhos que indicam as dificuldades relacionadas às ferramentas para comunicação matemática. Em um destes trabalhos, Nason & Woodruff [91] discutem as limitações presentes em muitos ambientes de ensino on-line de matemática. As principais apontadas pelos autores dizem respeito às dificuldades para a integração de ferramentas que permitam a representação matemática e a realização de atividades que possibilitem a construção de conhecimento pelo estudante.

Este estudo nos motivou a propor novas características e funcionalidades ao Tabulæ Colaborativo, um software de Geometria Dinâmica implementado por Moraes [88], tendo como referências as ferramentas síncronas propostas por Barbastefano [8], Guimaraes et al.[43].

1.3 Objetivos do Estudo

Considerando as questões que motivaram nossa pesquisa, apresentaremos a viabilidade da aplicação de modelos que simulam atividades didáticas, já testadas no ensino tradicional, ao ambiente do *Tabulæ Colaborativo*. Os modelos que adequamos ao projeto do software compõem o conceito de Roteiros de Colaboração adaptados ao ambiente computacional. Neste contexto, estendemos as atividades a aplicações remotas, possibilitando sua utilização no Ensino a Distância (EAD). A nossa pesquisa nos orienta na proposição das características funcionais e de interface discutidas no trabalho. As propostas são referenciadas na pesquisa bibliográfica e nos aspectos pedagógicos e técnicos, bem como nos experimentos iniciais com o software Tabulæ. É nosso propósito promover um ambiente favorável ao aprendizado de mate-

Supported Collaborative Learning.

mática, de modo a diminuir as dificuldades relatadas na literatura, por conta das limitações próprias às representações matemáticas dos ambientes CSCL. Procuramos, assim, criar condições que possibilitem a modelagem de métodos aplicados em sala de aula, no ensino presencial, através da implementação das estratégias colaborativas.

1.4 Relevância do Trabalho

Este trabalho propõe um uso pedagógico a uma inovação tecnológica aplicada ao ensino. As estratégias didáticas propostas como componentes de Roteiros de Colaboração permitem a aplicação a procedimentos indicados para o Ensino a Distância. A relevância deste trabalho pode ser confirmada por publicações em revistas e anais de congressos nacionais e internacionais, na área de Educação e Tecnologia, a partir de trabalhos realizados no Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento no Ensino de Matemática e das Ciências – LIMC/UFRJ (Mattos et al. [80] [81] [82] [83] [84] [85] [86] [87], Guimarães et al. [44], Vivacqua et al. [138]). Por conta das características implementadas no software, este trabalho pode contribuir para o desenvolvimento de pesquisas que pretendam observar a construção do conhecimento matemático e possíveis análises de como a tecnologia pode influir neste processo.

1.5 Detalhamento do Trabalho

O capítulo 2 traz algumas considerações sobre a formação de professores de matemática. Neste capítulo, estudamos dois documentos propostos por organismos educacionais da França e dos Estados Unidos: a *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* e *CBMS – Conference Board* *of the Mathematical Sciences*, respectivamente. Fazemos uma análise breve destas proposições, comparando-as com os resultados *Exames Nacionais de Cursos* – ENC, do *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* – SAEB [115], e do *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes* – PISA ([102], [103]). Fazemos ainda um breve histórico da implantação de mecanismos de avaliação do Ensino Superior, no Brasil. Buscamos na literatura relatos de experiências sobre a formação dos professores e recomendações de diversos estudos sobre a necessidade da capacitação dos professores nos conteúdos de matemática, apontando para a urgência de habilitar os professores ao uso das diversas Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC. Outro aspecto presente no capítulo 2 são os estudos sobre a formação matemática necessária ao professor. Apresentamos alguns estudos que produziram documentos com o objetivo de elaboração de planos educacionais, nos diversos níveis de ensino, ressaltando a importância da aquisição de uma formação matemática consistente, e indicando a possibilidade da integração da tecnologia como importante para a formação profissional do professor.

No capítulo 3, ainda como parte da nossa motivação a este estudo, discutimos resultados do Exame Nacional de Cursos, antigo Provão. Reconhecemos a importância dos instrumentos de avaliação para análise do processo educativo. Apresentamos detalhes do resultado para duas Instituições de Ensino, em particular problemas de Geometria, observando os padrões apresentados para a solução.

Buscamos na literatura referências sobre o objeto de análise, envolvendo o Raciocínio Espacial e Visualização, necessários para a análise da questão observada no ENC–2000 de matemática. Inferimos, a partir dos dados disponibilizados pelo INEP, a existência de lacunas no processo de aprendizagem para determinados conteúdos de matemática. Neste capítulo apontamos para a necessidade de implementar processos de formação continuada visando suprir certas deficiências na formação do professor. Neste processo, ressaltamos que a tecnologia passa a ter papel fundamental.

No capítulo 4 apresentamos fundamentos da teoria educacional que dão suporte ao nosso trabalho. Apresentamos estudos sobre aprendizagem fundamentados em *'learning with understanding'*, propostos pelo National Research Council [95]. Estudos e pesquisas realizadas por Shulman[124], Ball [3] [4] [5], Veloso [135] e Ma [73] discutem a formação necessária aos professores de matemática, e apontam para um necessário profundo entendimento dos fundamentos matemáticos.

Fazemos, ainda, a discussão sobre como o domínio da linguagem e dos signos matemáticos podem contribuir para o desenvolvimento matemático. Neste contexto, Duval [32] ressalta o importante papel da comunicação e interações sociais na aquisição do conhecimento. Discutimos o papel das Tecnologias de Informação e Comunicação - TIC que possibilitaram o desenvolvimento de projetos de softwares aplicados ao ensino, ampliando a comunicação matemática e abrindo espaço para o Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computadores. Tratamos, neste capítulo, da abordagem por soluções de problemas que utilizamos em nossos experimentos com o software *Tabulæ Colaborativo*.

No capítulo 5 fazemos uma revisão bibliográfica que fundamenta a tese aqui apresentada. Descrevemos a Aprendizagem Colaborativa em abordagens de pequenos grupos e aplicada no ensino presencial de matemática. Apresentamos diversas pesquisas que focalizaram o Aprendizado Colaborativo sob diferentes aspectos, como a realizada pelo National Council of Teachers of Mathematics, NCTM-2000, e a Mathematical Association of América – MAA. Neste capítulo, descrevemos alguns dos problemas relatados na literatura sobre o Aprendizado Colaborativo on-line em Matemática, que nos serviu de base para formularmos propostas ao projeto do *Tabulæ Colaborativo*. Ressaltamos a importância do suporte na composição dos Roteiros de Colaboração, que apresentamos como fundamentais para projetos aplicados ao Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computadores – CSCL.

No capítulo 6, fazemos uma caracterização dos sistemas desenvolvidos para Ensino a Distância - EAD, além de um pouco de história e revisão teórica, abordando as concepções educacionais do projeto. Apresentamos, ainda, a concepção do projeto do *Tabulæ Colaborativo*, e, em destaque, as características CSCL do software.

No capítulo 7 apresentamos a metodologia que utilizamos para a análise dos experimentos realizados para a concepção da tese. Fazemos uma descrição do estudo empírico e de como organizamos os experimentos. Descrevemos as características e funcionalidades agregadas ao software para viabilizar a aplicação das estratégias didáticas propostas com o *Tabulæ Colaborativo*, juntamente com as justificativas e usos pedagógicos para cada uma delas. Neste capítulo, descrevemos cada uma das estratégias escolhidas dentre as apresentadas em Fenton et al. [35], e simuladas com o *Tabulæ Colaborativo*, compondo os roteiros de Colaboração para o software.

No Capítulo 8, concluímos o trabalho com questões específicas que sugerem reflexões posteriores. Apontamos para possíveis investigações que, orientada a aspectos qualitativos, podem gerar futuras pesquisas em educação matemática. Fazemos algumas inferências sobre temas tratados durante o trabalho, tais como o Discurso Matemático, processos de investigação Matemática, Redes de Aprendizado e Suporte. Apresentamos os Roteiros de Colaboração para o Software Tabulæ: Estratégias Didáticas para um Modelo de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computadores à Distância em Geometria, como uma ferramenta que possibilita aplicações diversas em pesquisas relacionadas ao Ensino de Matemática.

Capítulo 2

Formação dos Professores de Matemática

2.1 Experiências Nacionais e Internacionais

Neste capítulo apresentamos algumas considerações sobre a formação dos professores de matemática. Estudos realizados em diferentes países têm apontado a possibilidade de novos caminhos para a formação de professores. No decorrer de nosso texto, apresentamos e comentamos alguns dos documentos propostos. Estudamos dois documentos apresentados por organismos educacionais da França e dos Estados Unidos: a *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* e *CBMS-Conference Board of the Mathematical Sciences*, respectivamente.

Embora os estudos tenham como referências as realidades francesa e americana, encontramos muitos pontos comuns com a realidade do ensino de matemática no Brasil. Corrobora para esta inferência a análise de dados obtidos dos resultados dos *Exames Nacionais de Cursos* - ENC, do *Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica* - SAEB[115], e do *Programa Internacional* *de Avaliação de Estudantes* - PISA ([102], [103]). Este conjunto de dados merece um estudo aprofundado que identifique os principais problemas e apontem caminhos para melhorar a realidade atual do ensino de matemática, o que não é o objetivo principal neste trabalho. Estamos usando estes resultados como motivadores de nossa pesquisa em desenvolvimento de novas tecnologias aplicads ao ensino. Para entender melhor a nossa realidade, consultamos estudos e pesquisas relativas ao ensino em diferentes países. Nos reportamos a estes estudos como apoio às nossas discussões sobre que tipo de ensino de matemática é necessário aos futuros professores. Estes trabalhos apontam sugestões e recomendações para os diversos níveis de ensino.

O trabalho da *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques*, sobre a formação necessária aos professores de matemática, resultou em um conjunto de recomendações cuja filosofia pode ser resumida na seguinte frase extraída do texto:

> *"une fonction essentielle de l'enseignement est de donner aux adultes de demain les possibilités de comprendre le monde et de participer à la construction de l'environnement (encore imprévisible) qui sera le leur, en leur fournissant un socle de connaissances solide et adaptable."* (Kahane [61], pg5)

Ao lado da formação científica e didática, a comissão reforça a importância da formação profissional dos professores, reservando espaço para a discussão referente à formação continuada.

O trabalho da CBMS teve como uma das motivações a constatação de deficiências no conhecimento matemático dos professores americanos, baseada em pesquisas e estudos realizados por educadores matemáticos como Liping Ma [73] e Deborah Ball [3] [4] [5] [6]. O relatório produzido ofereceu dados para reformas curriculares a fim de melhorar os programas, de modo a torná-los mais apropriados à formação de professores de matemática, estabelecendo recomendações gerais, de modo similar à comissão francesa, fazendo uma análise por nível de ensino. O enfoque da CBMS é maior no aspecto dos conteúdos necessários a uma boa formação para cada um dos níveis, apontando, mesmo que de forma tímida, a necessidade de se inserir o uso das novas Tecnologias na formação dos professores.

> *"During the careers of the prospective teachers now in college classes, new technologies now unimaginable are likely to enter classrooms. Hence prospective teachers' most important need with regard to technology in college mathematics classes is in building a framework that will aid them in teaching with technology throughout their careers."* ([19], pg 47)

O relatório ressalta a natureza especial dos conhecimentos matemáticos necessários para um bom processo de ensino/aprendizagem:

> *"The mathematical knowledge needed for teaching is quite different from that required by college students pursuing other mathematics related professions. Prospective teachers need a solid understanding of mathematics so that they can teach it as a coherent, reasoned activity and communicate its elegance and power. Mathematicians are particularly qualified to teach mathematics in the connected, sense-making way that teachers need. For maximum effectiveness, the design of this instruction requires collaboration between mathematicians and mathematics educators and close connections with classroom practice."* ([19], pg xiii)

A implementação de mecanismos de avaliação tem orientado, em muitos países, as políticas públicas para a educação a partir de referências nacionais e internacionais[1]. A performance dos alunos nestes exames tem colocado os governos diante da realidade educacional de seus países, e tem servido como parâmetro para se buscar mecanismos que aprimorem os sistemas educacionais.

No Brasil, os primeiros movimentos para implementação de processos de avaliação do Ensino Superior se deu através do GERES[2](1985), seguido pelo PAIUB[3] (1993). A partir da LDB-Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional -Lei nº 9.394/1996, novos mecanismos de avaliação do Ensino Superior foram implementados. O que causou maiores discussões no meio acadêmico e provocou mudanças nas instituições universitárias brasileiras foi o ENC[4]. Neste sistema de avaliação, *"a ênfase recai sobre os resultados, com a produtividade, a eficiência, com o controle do desempenho frente a um padrão estabelecido e com a prestação de contas"* (dados retirados do SINAES[125]). Recentemente o governo criou o ENADE[5](2004), parte de um processo de avaliação mais amplo que é o SINAES[6]:

> *O enfoque a ser adotado considera a Avaliação Institucional não como um fim em si, mas como parte de um conjunto de políticas públicas, no campo da educação superior, voltadas para a expansão do sistema pela democratização do acesso, para que a qualificação do mesmo faça parte de um processo mais amplo de revalorização da educação superior como parte de um projeto de desenvolvimento da nação brasileira.*
>
> (SINAES [125], pg. 22)

[1]PISA Newsletter disponível para consulta em http://www.pisa.oecd.org/
[2]Grupo Executivo para a Reforma da Educação Superior
[3]Programa de Avaliação Institucional das Universidades Brasileiras
[4]Exame Nacional de Cursos - Provão
[5]Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes
[6]Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior

Em relação ao Ensino Básico, foi criado, em 1988, o SAEB[7], e em 1990 foi realizado o primeiro levantamento para avaliação. A partir de 1995, a avaliação passou a ter caráter comparativo e realizado ao final de cada ciclo escolar, ou seja, na 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Esta avaliação contempla Língua Portuguesa, cujo foco é a leitura, e Matemática, que focaliza a resolução de problemas. Além dos aspectos referentes às disciplinas citadas, o SAEB avalia, através de questionários, aspectos sócio-econômicos e culturais dos alunos, professores e toda a comunidades escolar. Participam do processo alunos das redes: federal, estadual, municipal e particular. A amostra do SAEB 2003 abrange os alunos matriculados em 2003 nas escolas urbanas constantes do Censo Escolar 2002 (4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio) dos 26 estados e Distrito Federal[8].

Os dados relativos aos processos de avaliação encontram-se disponíveis para pesquisas. Da observação de alguns resultados do ENC, referentes aos formandos em matemática, inferimos que a maioria dos cursos apresenta problemas quanto à formação matemática dos futuros professores. Se compararmos estes resultados com os dados relativos ao SAEB e PISA, que fornecem o desempenho dos alunos do Ensino Básico, concluimos que há indícios de que os cursos de formação de professores não têm oferecido uma boa formação profissional. Fazemos a leitura de alguns resultados do ENC no capítulo 3, com o objetivo de verificar o desempenho dos futuros professores.

Os professores recém-formados, em sua maioria, receberam um ensino de matemática insuficiente enquanto alunos na Escola Básica, o que pode ser inferido a partir dos dados fornecidos pelos resultados no SAEB e PISA. Estes

[7] Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

[8] Dados disponíveis em http://www.inep.gov.br/basica/saeb/

alunos, ao ingressarem nos cursos de formação de professores, são apresentados a currículos que não associam a matemática do Ensino Superior com a matemática do Ensino Básico, de modo a resgatar conhecimentos não adquiridos. A maioria dos currículos não é orientada de modo que os conteúdos sejam revistos e aprofundados durante a graduação. Como fruto deste processo, os professores recém-formados são colocados em sala de aulas para ensinar o que não aprenderam na Escola Básica e não foi revisitado na graduação, restando a estes professores a prática de seguirem livros textos e apostilas, que exercem um papel de formador da prática do professor. Esta conjectura nos leva a concluir sobre a necessidade de uma formação para os professores de matemática que favoreça ao desenvolvimento de uma melhor compreensão do que se aprende na graduação, associado ao que se ensina na Escola Básica.

As questões de matemática do ENC, em sua maioria, são possíveis de serem resolvidas por um bom aluno que acabou de cursar a 3º série do Ensino Médio. Porém, os resultados obtidos no ENC pelos futuros professores de matemática são, na maioria dos casos, muito ruins, o que pode ser confirmado pelos dados expostos no capítulo 3. E, neste processo, o professor sai da Universidade *formado* para ensinar o que não aprendeu, enquanto aluno do Ensino Básico, e durante o curso universitário não teve oportunidade de aprender. O que acontece, na maioria dos casos, é que este professor será formado *continuamente* pelos livros didáticos e manuais escolares. Conforme observado na revisão bibliográfica, comissões internacionais constituídas para estudar alternativas que melhorem a qualidade do ensino de matemática em seus países apontam para a implantação de processos de formação continuada como uma alternativa para os professores em exercício. Na França, a *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques*(Kahane [61], pg

22) recomenda:

> *[...] nous proposons deux modalités de formation continue:*
> *(a) une formation continue obligatoire: pour accompagner des évolutions majeures du système éducatif, comme pour tout organisme qui veut accroître ses compétences, par exemple lors de changements de programmes;*
> *(b) une formation continue au choix: avec éventuellement, valorisation de carrière ou visée certificative.*

Ainda sobre a formação continuada, a mesma comissão ([61], pg 69) afirma:

> *La formation continue des enseignants est sans aucun doute, aujourd'hui encore plus que dans le passé, un levier essentiel pour l'évolution et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.*

Em relação às mudanças propostas aos currículos, a CBMS ([19], pg 7-8) propõe nos EUA:

> *Although the quality of mathematical preparation is more important than the quantity, the following amount of mathematics coursework for prospective teachers is recommended.*
> *(a) Prospective elementary grade teachers should be required to take at least 9 semester-hours on fundamental ideas of elementary school mathematics.*
> *(b) Prospective middle grades teachers of mathematics should be required to take at least 21 semester-hours of mathematics, that includes at least 12 semester-hours on fundamental ideas of school*

mathematics appropriate for middle grades teachers.

(c) Prospective high school teachers of mathematics should be required to complete the equivalent of an undergraduate major in mathematics, that includes a 6-hour capstone course connecting their college mathematics courses with high school mathematics.

As perguntas que se colocam hoje são:

- Como fazer um processo de formação continuada em um país com as dimensões do Brasil?
- Haverá formadores suficientes?

A partir de nossa revisão bibliográfica, e de estudos realizados em diferentes países sobre a formação dos seus professores, destacamos algumas das experiências com objetivo de subsidiar as discussões que propomos neste trabalho, principalmente em relação à necessidade de se criarem alternativas viáveis para auxiliar os procesos de formação regular e continuadas dos professores dematemática.

Em estudos onde analisa a formação de professores americanos, Hung-Hsi Wu [144] escreve:

" There are many ways to explain why so many mathematics teachers perform poorly in the classroom. One obvious reason is that they never learned the subject properly all the way from kindergarten through college. This then precludes the possibility of good teaching because one cannot teach what one does not know. [...] In most cases, these teachers have never seen any kind of mathematics teaching other than their teachers' and professors' equally stilted, constricted, and rigid style all through school and college.

Years and years of exposure to bad teaching naturally takes its toll. In theory, such flaws in one's teaching would be eliminated in classes on pedagogy in the school of education, but there are two reasons why this theory fails. The first is that undoing this kind of pedagogical problem requires a deep knowledge of the subject on the part of the prospective teachers and their instructors alike, as we shall see below. The second one is that one cannot undo the harmful effects of years and years of direct observations of bad teaching in a semester or two of gentle discussions of good manners in teaching".

Ainda o mesmo Wu, descreve o que considera essencial ao ensino de matemática para professores:

"Content knowledge of mathematics includes the knowledge of how mathematics is usually done: the unending trials and errors, the need to search for concrete examples and counterexamples to guide one's intuition, and the need to make wild guesses as well as subject these guesses to logical scrutiny. This knowledge is indispensable to effective teaching because it directly impacts on class presentations, problem solving, and assessment of students'work."

Segundo Paulo Abrantes[9], em resenha sobre a formação necessária aos professores de matemática em Portugal:

"[...] haverá uma parte da formação inicial em Matemática que é sobre Matemática e não sobre como ensiná-la, mas em que - para um futuro professor - poderá ser muito importante a relação que ele estabelece com a Matemática enquanto aluno".

[9]Citação em [135]

Uma pesquisa conceituada a respeito da formação matemática do professor foi feita por Liping Ma em [73]. Neste trabalho ela compara o conhecimento dos professores de matemática da China e dos Estados Unidos. É importante observar que o desempenho no exame PISA dos alunos chineses é bastante superior ao dos alunos americanos (ver tabelas demonstrativas de desempenho em PISA-2003 [103], pgs 80, 87, 91, 94). Na conclusão de seu trabalho, Ma escreve:

> *"Having considered teachers' knowledge of school mathematics in depth, I suggest that to improve mathematics education for students, an important action that should be taken is improving the quality of their teachers' knowledge of school mathematics.*
> *Although the intent of my study was not to evaluate U.S. and Chinese teacher' mathematical knowledge, it has revealed some important differences in their knowledge of school mathematics."*

Em linhas gerais, o que unifica os discursos é a identificação de falhas na formação dos professores no que diz respeito à Matemática Escolar. Observando alguns estudos publicados, encontramos diversos trabalhos que apontam para a reconstrução dos currículos dos cursos de formação. Tais trabalhos são unânimes em apontar a necessidade dos professores adquirirem os conceitos necessários ao sólido entendimento da matemática da Escola Básica. Alguns autores identificam esta formação como aquisição de *conhecimentos matemáticos avançados* a respeito dos conceitos matemáticos básicos, e geralmente restritos às primeiras séries do Ensino Básico. Estas idéias estão presentes em trabalhos de Selden & Selden [121]; Edwards et al. [33]; Harel & Solder [48]; Rasmussen et al. [111].

Leonor Santos, que trabalhou em comissões constituídas para a reforma do currículo de matemática para o curso de formação de professores em Portugal, defende a reestruração do currículo de modo a atender o caráter específico desta formação.

> *"[...]o conhecimento matemático passa pelo conhecimento da matemática, conhecimento de tipo substantivo, no qual se inclui o proposicional, procedimental, estrutural e relacional, pelo conhecimento sobre a matemática, que diz respeito à compreensão sobre ideias matemáticas básicas, sobre a natureza e actividade matemática, e ainda a atitude que temos face à matemática".*
> ([116], pg 9)

Em nossa pesquisa bibliográfica encontramos, em linhas gerais, o entendimento comum do que se espera de um professor de matemática: competências relacionadas a um profissional reflexivo, com formação matemática que o torne seguro e capaz para adaptar-se à diversidade. Entendemos que a disponibilidade para um aprendizado contínuo é fundamental neste processo.

2.2 Formação dos Professores

Em 1996, Tommy Bryan [14] fez um estudo com nove futuros professores do ensino secundário, de um curso de licenciatura de uma universidade americana, onde procurou identificar qual a formação matemática deles com relação à matemática que teriam que lecionar. A metodologia utilizada foi a de entrevistas, nas quais pedia para que explicassem tópicos do currículo escolar, com o objetivo de explorar o conhecimento conceitual dos conteúdos matemáticos do ensino secundário. Nas entrevistas, Bryan utilizou alunos em diversos estágios do curso. Em cada um dos tópicos, pedia-se a justificativa para um resultado ou uma explicação referente a um determinado conceito matemático. Os tópicos explorados nas entrevistas foram: expoentes; divisões e frações; operações com inteiros; retas e seus elementos; tópicos de álgebra; trigonometria e fórmulas da geometria. Reproduzo o relato de uma aluna que é bastante similar aos que ouvimos dos nossos alunos, quando cursam a disciplina de prática de ensino.

> *" There is a certain feeling of insecurity when it is hard to explain something that's so easy, and I'm supposed to be able to do that. I'm working on very hard things right now and I'm having enough trouble getting that, but (...) It's harder to do this than some of the hard stuff that we're supposed to be doing. And this is what I should have a better focus on, on this type of information, because that's what I'm going to be teaching (...) I've spent a lot of time in the schools observing and everything, but I haven't gotten to think this deeply about stuff".*
> ([14], pg 10)

Pesquisas isoladas, como a apresentada acima, ou fruto de grupos de trabalho (CBMS [19], Commission de Réflexion sur L´enseignement des mathématiques [61]), apontam para a necessidade de oferecer aos futuros profissionais a *compreensão*, com consistência, dos conteúdos matemáticos que ensinarão, e acesso a uma cultura matemática epistemológica e aplicação social. É um consenso no meio acadêmico que o conhecimento matemático demandado pelos professores, em sua formação inicial, difere do demandado por estudantes de outras profissões onde a matemática é ferramenta acessória. A formação de professores necesita de um processo diferenciado, privilegiando a compreensão dos conceitos matemáticos praticados em salas de aula na escola básica.

Shulman utilizou em 1986 o termo *conhecimento pedagógico dos conteúdos* para se referir à natureza específica do objeto de conhecimento necessário ao professor em sua disciplina. Shulman [124] estabelece a distinção entre três categorias para conhecimento dos conteúdos:

(a) conhecimento da estrutura dos conteúdos,

(b) conhecimento pedagógico dos conteúdos, e

(c) conhecimento dos currículos.

O primeiro se refere à quantidade e à organização dos conhecimentos apropriados pelos professores; o segundo, refere-se às formas de representar e formular o objeto de ensino de modo a torná-lo compreensível ao ser apresentado; e por último o conhecimento da totalidade dos programas para que saiba onde um dado assunto pode interferir em conteúdos futuros, ou já fora abordado em tópicos anteriores. Em relação à natureza do conhecimento, Shulman escreve:

> *"A conceptual analysis of knowledge for teachers would necessarily be based on a framework for classifying both the domains and categories of teacher knowledge, on the one hand, and the forms for representing that knowledge, on the other. I would like to suggest three forms of teacher knowledge: propositional knowlodge, case knowledge, and strategic knowledge"*([124], pg 10)

Alguns estudos sobre reformas curriculares e que conhecimento matemático é necessário aos professores de matemática, têm sido produzidos. Segundo Ball & Bass:

> *"That teachers' own knowledge of the subject affects what they teach and how they teaching seems so obvious as to be trivial.*

> *However, the empirical support for this 'obvius' fact has been surprisingly elusive. And although conceptions of what is meant by 'subject matter knowledge', as well as valid measures thereof, have been developing, we lack an adequate understanding of what and how mathematical knowledge is used in practice"* ([6], pg 86)

Professores com conhecimentos pedagógicos sobre o que vão ensinar, segundo diversos pesquisadores e estudiosos em educação matemática, possuem melhores instrumentos para diagnósticos das dificuldades de aprendizagem dos seus alunos. Ainda sugerem que este conhecimento permite aos professores a elaboração de modelos alternativos ou novas explicações que permitam enfrentar estas dificuldades. No capítulo 3 destacamos um tópico especial do currículo de geometria e fizemos observações sobre o desempenho de grupos de formandos pertencentes a uma determinada região do Brasil. Estas observações serão relacionadas com os experimentos que realizamos para nosso estudo. A partir destes dados faremos algumas análises à luz dos resultados do ENC para inferir como os nossos professores têm se formado no que diz respeito ao conhecimento dos conteúdos matemáticos. Os experimentos realizados em nosso estudo para a tese foram desenvolvidos sobre tópicos de Geometria. Estes têm como objetivo o desenvolvimento de processos didático/pedagógicos que interfiram no processo de aprendizagem de modo a influir na *compreensão* com mais qualidade dos conteúdos de geometria.

Encontramos em nossos estudos diversas recomendações para a necessidade de uma formação que capacite os professores a fazer experimentações, construir modelos, criticar e criar representações, dominar procedimentos de cálculo e construir provas. Ainda segundo estas recomendações, este processo deve estar relacionado ao desenvolvimento de um pensamento matemático atento à flexibilidade dos currículos e à possibilidade de interação com novas tecnologias aplicadas ao ensino. Os usos de tecnologia têm motivado muitos estudos e pesquisas em Educação Matemática. Não há nenhum estudo conclusivo a este respeito, porém muitos estudos apontam para a existência de uma correlação positiva entre o uso das *Tecnologias de Informação e Comunicação - TIC* e possíveis melhoras no processo de ensino/aprendizagem. Assim, as recomendações defendem que o professor deve estar preparado para as possíveis utilizações de tecnologia no ensino. Alguns estudos a partir da observação de projetos pilotos como os feitos por Ponte, Oliveira & Varandas [105], na disciplina *Interdisciplinaridade Ciências-Matemática* que integra o 4º ano da licenciatura em ensino da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, apontam para influências positivas do uso das *Tecnologias de Informação e Comunicação - TIC*, incluindo softwares próprios à disciplina, bem como softwares de uso geral.

> *"Estas tecnologias permitem perspectivar o ensino da matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica. Além disso, permitem que o professor dê maior atenção ao desenvolvimento de capacidades de ordem superior, valorizando as possibilidades de realização, na sala de aula, de actividades e projectos de exploração, investigação e modelação (...) Deste modo, as TIC podem favorecer o desenvolvimento nos alunos de importantes competências, bem como de atitudes mais positivas em relação à matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência."*. ([105], pg 1)

> *"Ao procurarmos fazer um balanço desta disciplina, concluímos que a exploração do software educativo para a Matemática foi, no*

aspecto qualitativo, bastante conseguida. Os futuros professores interessaram-se, em especial, pelo programa GSP[10]*, que diversos grupos usaram nas suas páginas. Alguns usaram mesmo o Java Sketch para realizar animações. No aspecto quantitativo, não houve tempo para abordar todos os programas que seriam relevantes, uma limitação que decorre do tempo atribuído à disciplina. Entre os dois aspectos, o quantitativo e o qualitativo, parece-nos que este é o decisivo, uma vez que os futuros professores poderão mais tarde explorar outros programas. Na sua formação inicial, o importante é terem um contacto aprofundado com um bom exemplo de software que pode ser usado na disciplina de Matemática."* ([105], pg 10)

A partir da publicação de um conjunto de artigos em Educational Studies in Mathematics [34], K. Jones, A. Gutiérrez e M. A. Mariotti escrevem:

"This Special Issue provides a range of evidence that working with dynamic geometry software affords students possibilities of access to theoretical mathematics, something that can be particularly elusive with other pedagogical tools. Yet it has to be noted, as Hanna points out in her introductory paper, that the examples of successful access to mathematical theory presented in the four research studies did not happen without carefully designed tasks, professional teacher input, and opportunities for students to conjecture, to make mistakes, to reflect, to interpret relationships among objects, and to offer tentative mathematical explanations. The research presented in this Special Issue needs replication and

[10] *Geometer's Sketchpad* (GSP), software de Geometria Dinâmica

amplification. In particular, research in the use dynamic geometry software to support the development of students' mathematical thinking could usefully focus on the nature of the tasks students tackle, the form of teacher input and the role of the classroom environment and culture. For teachers in particular, that something works is one thing - further examples of how it can be made to work in the variety of classrooms are crucial." ([34], pg 3)

Baldin, em [10], cita Cornu:

"Mathematics is evolving and changing under the influence of computers and informatics. Therefore, teachers need to maintain their mathematics knowledge and to practice mathematics from an informatics viewpoint. Mathematics is becoming more experimental, more algorithmic, more numerical; teachers must be able to follow the evolution of mathematics, and to acquire new competencies and new attitudes and to be able to carry out new activities in mathematics.". ([10], pg 2)

Ainda em [10], Baldin coloca as seguintes questões, pertinentes à nossa pesquisa:

"What is teaching with technology?
What may change if one uses technology to teach?
What are the different ways of the use of technology in education, and which one is the most effective to reach educational objectives?"
([10], pg 2)

Ministrando aulas na disciplina *Informática aplicada à Educação*, no curso de Licenciatura Matemática na Universidade Federal de São Carlos(UFSCar), Baldin reconhece a importância dos currículos se adequarem ao uso das TIC no ensino de matemática:

> *"Os alunos ficaram motivados e interessados quando perceberam que a disciplina oferecia momentos para integrar os conhecimentos de matemática, adquiridos de maneira fragmentada através das disciplinas do curso de licenciatura, com uma metodologia inovadora de resolução de problemas utilizando recursos de tecnologia. A realização das aulas simuladas, planejadas por eles mesmos, lhes deu a oportunidade de descobrir o seu próprio potencial e criar disposição para pesquisar e aprender novidades. Muitas monografias finais sobre as aulas realizadas mostram esta mudança de postura".*([11], pg 6)

Estes estudos indicam que os alunos dos cursos de formação de professores precisam manter contato e estarem habituados ao uso das TIC, que devem estar disponíveis durante o processo de formação dos professores. A partir do uso em atividades de aulas durante os cursos de graduação, os futuros professores poderão incorporá-las aos procedimentos de ensino-aprendizagem em sua prática profissional.

Em artigo na revista Educational Studies in Mathematics [34], Hanna discute a importância da demonstração para compreensão dos conceitos matemáticos. Ao fazer a análise de casos empíricos apresentados em outros artigos, ele observa o seguinte:

> *"It should be noted that in all four cases this use was accompanied by carefully designed tasks, by professional teacher input, and by opportunities for students to notice details, to conjecture, to make mistakes, to reflect, to interpret relationships among objects, and*

to offer tentative mathematical explanations. It seems reasonable to assume that the use of dynamic software in the classroom might not be as effective in the absence of these supporting factors."
([34], pg 21)

Este estudo observa que a introdução das TIC no ensino deve estar acompanhada de uma série de suportes referenciados nos conteúdos e conceitos matemáticos. Ao projetar os suportes necessários ao ambiente de ensino, favorável à aprendizagem com tecnologia, o professor estará apto a interpretar resultados, propor caminhos alternativos e criar suas próprias atividades de acordo com a realidade na qual estão inseridos. A compreensão matemática permitirá o conhecimento dos limites e limitações próprias às ferramentas tecnológicas que são, muitas vezes, enriquecedoras do processo de aprendizagem, como relatam Giraldo, et al [39], [40] quando descrevem os *Conflitos Teórico-Computacionais*:

"[...] utilizamos o termo conflito teórico-computacional para nos referirmos a qualquer situação na qual uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada"
([40], pg 4)

2.3 A Formação Matemática

Desde a promulgação da LDB-Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional -Lei nº9.394/1996, há o entendimento de que o aprendizado matemático necessário ao professor deve estar inserido em uma formação geral que contenha aspectos literários, artísticos e relacionados às ciências, além de modelos representativos de situações reais. Porém, deve-se tomar cuidado para que a formação matemática do professor não adquira caráter superficial. Uma boa formação matemática pode torná-lo capacitado para relacionar conhecimentos transversais com a didática necessária ao processo de ensino/aprendizado de matemática, aplicando aspectos didáticos às formas de apresentar conteúdos, relacionando-os com outras áreas do conhecimento. A respeito sa formação dos professores americanos, Ball, Lubienski & Mewborn escrevem:

> *"Observers note that interpreting reform ideas, managing the challenges of chance, using new curriculum materials, enacting new practices, and teaching new content all depend on teachers' knowledge of mathematics."* ([5], pg 437)

O objetivo do aprendizado matemático *não é* fundamentalmente o suporte técnico a outras disciplinas. O ensino de matemática cumpre papel fundamental na formação geral, contribuindo com o desenvolvimento de formas de pensar, estimulando a abstração, o desenvolvimento da imaginação e a capacidade de formulação. Contribui, assim, para uma melhor compreensão do mundo, uma vez que pode contribuir para o desenvolvimento de habilidades próprias ao racicínio matemático, tais como realização de previsões, racionalizações, deduções e a modelagem de situações reais.

Neste processo, é fundamental levar em conta especificidades da matemática como a natureza de sua escrita pela representação simbólica, diferente da escrita em outras disciplinas. Outro aspecto a se considerar é relacionado à argumentação matemática, que, no processo de ensino, pode contribuir para o desenvolvimento de aptidões referentes à estrutura do pensamento.

Algumas questões precisam ser cuidadosamente estudadas:

> Qual o nível de conceituação necessária para uma boa formação do aluno do Ensino Básico?

> Como devemos aplicar estes conceitos matemáticos nos diversos níveis de ensino?

E ainda cabe perguntar:

> Quais conhecimentos matemáticos são suficientes para o nível desejado de conceituação?

Não é objetivo deste trabalho responder a estas questões que merecem estudos específicos. Faremos apenas ilações relacionadas ao uso de tecnologia neste processo.

2.3.1 Formação Matemática do Professor

Em nossa revisão bibliográfica, encontramos pesquisas empíricas e estudos a respeito do tema *'formação necessária ao ensino de matemática'*. Preocupados com a melhora da aprendizagem matemática por parte dos alunos do ensino básico, alguns países têm investido em estudos a respeito do tema. Alguns destes trabalhos já citamos anteriormente. Das recomendações e estudos, podemos reconhecer pontos de vista comuns. Apesar de apresentarem diferentes abordagens, de modo geral concordam sobre a necessidade de uma formação combinando saber matemático, domínio de técnicas pedagógicas e capacitação para o uso das TIC. Assim qualificado, o professor de matemática será capaz de atuar em sintonia com as diferentes realidades dos alunos que irá atender no bom exercício profissional. O pressuposto de que a formação deve estar orientada pelo domínio dos conceitos matemáticos é baseado no que estabelece Shulman [124], o que permitiria uma atuação profissional de qualidade independentemente do contexto encontrado. Segundo Shulman, a compreensão dos conteúdos de modo mais profundo pode permitir ao professor a elaboração de caminhos alternativos às suas práticas de ensino, quando assim a realidade exigir.

Um exemplo descrito por Ball, et al [5], exemplifica o que Shulman [124] define como *Compreensão dos Conteúdos Pedagógicos*:

> *"The teacher had to know more than how to multiply decimals correctly herself. She had to understand why the algorithm for multiplying decimals works and what might be confusing about it for students. She had to understand multiplication as iterated addition and as area, and she had to know representations for multiplication. She had to be familiar with base-ten blocks and to know to use them to make such ideas more visible to her students. Place value and the meaning of the places in a number were at play here as well. She needed to see the connections between multiplication of decimals in ways that enabled her to help her students make this extension. She also needed to recognize were the children's knowledge of multiplication of whole numbers might interfere with or obscure important aspects of multiplications of decimals. And she needed to clearly understand and articulate why the rule for placing the decimal point in the answer - that one counts the number of decimal places in the numbers being multiplied and counts over that number of places from the right - works. In addition, she needed an understanding of linear and area measurement and of how they could be used to model multiplication. She even needed to anticipate that a fourth-grade student might ask why one does not do this magic when adding or subtracting decimals and to have in mind what she might say. All this represents an intertwining of content and pedagogical content knowledge"*. ([5], pg 448)

De acordo com os nossos referenciais teóricos, a construção do conhecimento matemático deve tomar em conta as questões referentes à prática do ensino e ao entendimento matemático dos conteúdos necessários para que o processo de ensino e aprendizagem seja satisfatório. Conforme esses princípios, a formação dos professores deve combinar os conhecimentos matemáticos com os elementos da pedagogia presentes na educação matemática. Com base em pesquisas e consultas que fizemos documentos publicados como recomendações de diversos organismos governamentais, ou promovidos por sociedades preocupadas com o ensino de matemática, acreditamos que estudos correlatos devam ser propostos por educadores matemáticos aos organismos governamentais brasileiros. Os documentos produzidos por estes estudos seriam importantes para futuras elaborações de planos educacionais. O debate em torno deste tema pode contribuir para ações governamentais no sentido da organização e aprovação de programas de formação de professores que levem em conta parâmetros culturais próprios e mantenha a referência a bons padrões internacionais de ensino de matemática.

Destacaremos algumas das recomendações apresentadas por diversas comissões internacionais. Assim, como os documentos ressaltam, acreditamos como necessário à formação dos professores, além da formação matemática própria ao nível superior, um entendimento dos conteúdos relativos a todo o Ensino Básico. Deste modo, os professores estarão capacitados a compreender de maneira global, por exemplo, como um determinado tópico se insere e se apresenta no conjunto do Ensino Básico, compreendendo o contexto de aprendizagem, relativo a diferentes escolas e ainda a diferentes classes.

O trabalho realizado pela CBMS [19] destaca:

> *"There are a number of statements in this report about prospective teachers acquiring a 'deep understanding' of school mathematics*

> *concepts and procedures. The emphasis is on the mathematics that teachers need to know but also there is a recognition that teachers must develop 'mathematical knowledge for teaching'."* ([19], pg 13)

Dentre as recomendações presentes em trabalhos e pesquisas apresentados por educadores matemáticos e pelas comissões com o propósito de melhorar o ensino de matemática, destacamos a necessidade de desenvolver nos professores uma compreensão do papel da justificação e da prova na matemática.

> *"Prospective teachers at all levels need experience justifying conjectures with informal, but valid arguments if they are to make mathematical reasoning and proof a part of their teaching. Future high school teachers must develop a sound understanding of what it means to write a formal proof."* ([19], pg 14)

Outro tópico freqüentemente presente em pesquisas e estudos diz respeito à importância do domínio dos conteúdos *fundamentais* do Ensino Básico. Este domínio visa dar ao professor a liberdade para atuar de forma crítica em relação à formulação de currículos e a produção de materiais didáticos. Isto o permite continuar sua formação profissional, não sendo, portanto, excluído do processo de produção do saber. Ao dominar os conteúdos, os professores têm em mãos ferramentas que os possibilitarão o confronto e análise de várias práticas, estando capacitados a observar pontos positivos e negativos, e, ainda, promover a articulação entre conteúdos, métodos e procedimentos a serem aplicados em classe.

Seguindo os modelos utilizados nos trabalhos da *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* ([61]), na França, e *CBMS-Conference Board of the Mathematical Sciences* ([19]), nos EUA, vamos destacar dois aspectos da formação: o ensino na Escola Básica e o ensino nos cursos superiores de Licenciatura em Matemática. Há vários aspectos a serem abordados e várias variáveis envolvidas.

Os currículos das licenciaturas de matemática devem estar voltados, por um lado, para a formação de um professor de Matemática que seja capaz de adaptar-se às evoluções da sua disciplina, por meio do uso de novas tecnologias, e por outro, ainda, por mudanças nos conteúdos dos programas, que resultem de estudos elaborados pela comunidade acadêmica voltada para o ensino de matemática.

> *"Un des objectifs actuels des plans de formation (initiale et continue) des PLC2*[11] *est l'intégration des TICE*[12]*. Il est clair que cet objectif se heurte à de multiples difficultés et que sa mise en place va nécessiter beaucoup de temps. La question plus générale qui est ainsi soulevée est celle des adaptations aux nouveautés. Comme nous l'avons évoqué en introduction, un objectif (ambitieux) des formations est de donner une culture permettant des adaptations tout au long de la carrière."*
> (Kahane [61], pg 73)

Acreditamos que, juntamente com o domínio da matemática presente nos programas, os cursos de formação de professores devem procurar apoiar esse conhecimento matemático na prática real de sala de aula dos futuros professores. O domínio dos conteúdos permite a aquisição de uma cultura didática que capacite os professores para a prática, em função do nível da classe em

[11] Professeur de Lycée et Collège (de deuxième année)

[12] Techniques de l'Information et de la Communication (appliquées à l'Enseignement). PS. mesma designação que utilizamos para TIC

que ensinam, compreendendo, ainda, as relações que unem a matemática às outras disciplinas.

Neste processo, uma possibilidade é constituir uma associação de formadores que reuna pesquisadores universitários e professores do ensino básico para uma atuação conjunta no processo de formação de professores, integrando os conhecimentos da prática com os da formação acadêmica. Deste modo, podemos construir um processo de estreita colaboração entre os cursos de formação e os professores que já atuam na escola básica, envolvendo profissionais com experiências importantes para o ensino, qualificando-os através da formação continuada, e transformando-os em agentes de qualificação. Envolver professores da escola básica nos cursos de formação é uma maneira concreta para conectar e receber *feedback* para a concepção de cursos de matemática com a prática *real* do ensino. Em contrapartida, os formadores envolvidos devem ter papel importante junto às atividades profissionais e no desenvolvimento destes professores.

A formação dos professores, segundo os estudos realizados, deve envolver estratégias usadas em situações práticas bem como instrumentalizar o estudo procedimental. Para que esse processo obtenha êxito, acreditamos que será necessário reorganizar e valorizar a carreira de professores da Escola Básica, estimulando o desenvolvimento profissional. Os professores em atividade devem ser incentivados a participar de cursos de qualificação através de convênios com instituições credenciadas, ou ainda estudos dirigidos efetivos nas escolas, em horários previstos na carga horária do professor. Observando relatos de estudos e pesquisas realizadas em países onde o ensino de matemática obtêm maior êxito, acreditamos que a carreira profissional do professor, desde a graduação, deve conter mecanismos para que o futuro professor não encerre sua participação acadêmica ao receber o seu diploma.

Observando os dados contidos no relatório da UNESCO [1], constatamos que a grande maioria dos professores, após a formatura na graduação, perde contato com o mundo acadêmico, ou o faz de forma esporádica. Este procedimento ocorre com a maioria dos profissionais que atuam no ensino. Corrobora com estes dados o número reduzido de professores que participam de encontros e atividades formativas das sociedades de matemática, ou mesmo que se associam a estas.

2.3.2 Escola Básica

Os documentos produzidos pelas comissões especiais e trabalhos acadêmicos consultados em nossa revisão bibliográfica destacam alguns tópicos importantes e que devem constar dos currículos dos cursos de formação de professores, relacionados a conteúdos específicos do Ensino Básico. Os tópicos são apresentados separados por níveis de ensino: Séries Iniciais, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Esta divisão visa destacar pontos específicos de cada fase considerados importantes para a formação dos professores. Entendemos, assim como muitos autores ressaltam, que a formação dos professores deve cobrir os conteúdos do Ensino Básico, aprofundando a formação dos professores sobre estes conteúdos curriculares. A preparação dos professores do Ensino Básico deve cuidar para que as características próprias a este nível de ensino sejam abordadas e discutidas. Aspectos sócio-culturais, quando abordados, podem contribuir para a inserção da matemática na vida cotidiana do aluno, porém não devem ocupar espaço das disciplinas específicas da matemática. A grande maioria dos alunos do ensino básico não serão futuros especialistas em matemática. Porém, os conteúdos não devem ser apresentados de modo superficial. Os conceitos matemáticos propostos a este nível de escolaridade, se bem assimilados, são suficientes para que os alunos do Ensino Básico adquiram a formação necessária para dedicar-se a um curso superior que tenha a matemática como pré-requisito. O professor de matemática deve estar preparado a proporcionar este conhecimento aos alunos. Observando a prática de ensino de futuros professores no último ano de graduação, percebemos que os alunos mestres reproduzem, em suas primeiras experiências, o modelo didático que receberam quando alunos do Ensino Básico. Na maioria das vezes, repetem algoritmos para resolução de problemas e fórmulas decoradas, sem as referências conceituais necessárias ao entendimento dos conteúdos curriculares a serem ensinados.

Ensino Fundamental - séries iniciais

Professores da Escola Básica que atuam nas séries iniciais do ensino fundamental, em particular nos 1º e 2º ciclos, em sua maioria, não são especialistas em matemática. Grande parte cursou a escola Normal e daqueles que possuem formação superior, há poucos com formação específicamente em matemática. Assim, o ensino de matemática fica restrito a atividades nas quais, na maioria dos casos relatados, não se reconhece objetivos relacionados à aprendizagem matemática. A formação matemática destes professores vem da leitura e repetição de livros didáticos que para eles representam, freqüentemente, a referência absoluta. Por apresentarem dificuldades em relação aos conhecimentos matemáticos elementares, não estão capacitados a avaliar as dificuldades enfrentadas pelos alunos, ou a eficácia ou não de um método de ensino aplicado, muitas vezes transcrito diretamente de manuais.

Em 2001, *The National Academy of Sciences* publicou um estudo através do National Research Council sobre o aprendizado matemático do pré-escolar até o ensino fundamental, nos EUA. Formou-se um Comitê do qual faziam parte 16 indivíduos com diferentes pontos de vista sobre o assunto, dentre eles Deborah Ball, Hyman Bass e Hung-Hsi Wu. O produto deste trabalho deu origem ao *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics* [96], onde a comissão faz algumas sugestões a respeito do aprendizado necessário aos estudantes nesta fase do ensino. Portanto, é preciso preparar os professores desta fase inicial do ensino para esta tarefa.

> *"Despite the value of mathematics as a model of deductive reasoning, the teaching of mathematics has often taken quite a different form. For centuries, many students have learned mathematical knowledge-whether the rudiments of arithmetic computation or the complexities of geometric theorems - without much understanding. Of course, many students tried to make whatever sense they could of procedures such as adding common fractions or multiplying decimals. No doubt many students noticed underlying regularities in the computations they were asked to perform. Teachers who themselves were skilled in mathematics might have tried to explain those regularities. But mathematics learning has often been more a matter of memorizing than of understanding."* ([96], pg 16)

Encontramos muitos professores especialmente nas séries iniciais que concebem a matemática como um conjunto de regras arbitrárias. E estas são transmitidas como algo que fora pré-estabelecido, sem qualquer componente conceitual, considerando o aprendizado de matemática como um processo de memorização para aplicação de tais regras.

A *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* destaca a fragilidade da formação matemática dos professores de séries iniciais na França:

> *"Les futurs professeurs des écoles n'ont pas tous une formation scientifique, loin de là. Selon la note d'information 01-46 du Ministère de l'Education Nationale, ' les nouveaux professeurs des écoles sont issus à 78% des filières lettres et sciences humaines'. Bien qu'actuellement recrutés au niveau licence, pour un grand nombre, ils ont très souvent abandonné l'étude des mathématiques dès la seconde. Leurs souvenirs sont donc lointains et leurs connaissances souvent fragiles et lacunaires. À cela s'ajoute, pour un certain nombre, un désamour des mathématiques, voire une phobie."* (Kahane [61], pg 8)

Corroborando para a situação descrita acima, muitos cursos de formação de professores das séries iniciais apresesentam em seus currículos um grande número de disciplinas pedagógicas, e praticamente não existem disciplinas ligadas às especificidades próprias do conhecimento matemático. Tomando como base dados extraídos de nossa revisão bibliográfica, observamos a importância da implementação de disciplinas específicas em didática da matemática na formação destes professores. Investigações desta natureza têm sido desenvolvidas em trabalhos de *Deborah Ball* e *Liping Ma*[13]. O aprendizado de matemática nas séries iniciais deve receber especial atenção. Os contatos iniciais do aluno com o conhecimento matemático pode influenciar sua trajetória escolar, de modo positivo ou negativo. Para muitos alunos, se o que é ensinado não *faz sentido*, por consequência terá dificuldades em aprende-lo. Os alunos devem dominar o conhecimento matemático para realizar suas próprias formulações dentro de um pensamento matemático, ou seja, nos processos de formação e desenvolvimento dos conceitos iniciais do

[13]As autoras produziram vários trabalhos com este tema, analisando professores do ensino básico das séries iniciais da China e EUA.

aprendizado matemático.

A estrutura do ensino das séries iniciais possui aspectos interdisciplinares que podem ser explorados com a finalidade de formar um olhar positivo em relação aos conhecimentos matemáticos, por parte dos professores. Um exemplo desta abordagem, integrando matemática e história:

> *"Prenons l'exemple des nombres: il est nécessaire d'avoir une culture mathematique, épistemologique et sociale du numérique, notamment sur les entiers, décimaux, rationnels et même les réels, de comprende la complexitée de leur genèse et d'avoir des repères historiques (par exemple de savoir que les décimaux ne datent que du XVIème siècle; de percevoir les enjeux de leur utilisation sociale (par exemple de savoir que les décimaux ont été imposés à la société par une loi sur l'usage du système métrique au XIXème siècle); de les relier à l'histoire de l'evolution des idées."*
> (Kahane [61], pg 11)

Os trabalhos das comissões destinadas a estudar possíveis inovações curriculares na formação dos professores das séries iniciais têm proposto, em linhas gerais, um domínio da cultura e do conhecimento matemáticos suficientes à reflexão sobre os conteúdos a serem aplicados e as atividades a serem desenvolvidas. Aspectos relacionados à contextualização histórica do desenvolvimento do conhecimento matemático poderiam contribuir para a desmistificação da matemática como ciência distante da realidade social.

> *"The overriding premise of our work is that throughout the grades from pre-K through 8 all students should learn to think mathematically. (...) The research over the past two decades, much of*

which is synthesized in this report, convinces us that all students can learn to think mathematically." ([96], pg 16)

O uso das *Tecnologias para Informação e Comunicação - TIC* podem ter papel importante para a formação profissional do professor. Softwares específicos de matemática podem ser introduzidos integrando-os às situações de ensino e aprendizagem. O enquadramento das TIC em um novo modelo do conhecimento e da aprendizagem pode ampliar e criar canais para processos contínuos de formação, necessários aos professores das séries iniciais.

O *National Research Council* faz as seguintes observações acerca do uso de calculadoras por alunos das séries iniciais nos EUA:

> *"A large number of empirical studies of calculator use, including longterm studies, have generally shown that the use of calculators does not threaten the development of basic skills and that it can enhance conceptual understanding, strategic competence, and disposition toward mathematics. For example, students who use calculators tend to show improved conceptual understanding, greater ability to choose the correct operation, and greater skill in estimation and mental arithmetic without a loss of basic computational skills. They are also familiar with a wider range of numbers than students who do not use calculators and are better able to tackle realistic mathematics problems."* ([96], pg 427)

Freqüentemente, os professores do 1º e 2º ciclos do ensino fundamental relatam que enfrentam, no cotidiano da sala de aula, situações objetivas relacionadas ao processo de ensino/aprendizagem que os levam a adaptar-se e adaptar o seu ensino à grande diversidade dos alunos.

Em relação aos currículos, os diversos estudos consultados apontam para a necessidade, desde as séries iniciais, do desenvolvimento das habilidades dos alunos com números. Desde os primeiros anos escolares, os alunos iniciam a resolução de problemas numéricos utilizando métodos intuitivos e concretos.

> *Mathematics programs in the early grades should make extensive use of appropriate objects, diagrams, and other aids to ensure that all children understand and are able to use number words and the base-10 properties of numerals, that all children can use the language of quantity (hundreds, tens, and ones) in solving problems, and that all children can explain their reasoning in obtaining solutions.* ([96], pg 412)

Dentre as propostas curriculares para as séries iniciais, destacamos a preocupação com a conceitualização. Nesta fase da aprendizagem, os alunos são capazes de resolver determinados problemas e entender conceitos, sem que estes sejam formulados explicitamente, porém podem compreender os conceitos envolvidos. Nos trechos seguintes, observamos recomendações gerais, sobre *que* matemática deve conter os currículos das séries iniciais.

> *"[...] les jeunes élèves sont capables de comparer des longueurs, des aires (bien avant de savoir les mesurer); la recherche d'un rapport entre certaines longueurs commensurables peut permettre d'introduire des rationnels (par leur écriture fractionnaire); plus tard, la recherche d'un rapport entre deux longueurs incommensurables peut permettre d'inférer l'existence de nombres irrationnels."* (Kahane [61], pg 13)

> *"La géométrie fournit un autre domaine riche en niveaux de conceptualisation et d'interprétation: pour l'enfant de cycle 3 (8 à*

10 ans), la recherche de tous les triangles possibles à partir de baguettes de 4 cm, 8 cm et 10 cm l'amène, entre autres, à expliciter des conditions de non-existence de triangles définis par des longueurs, validées par la perception et l'expérience." (Kahane [61], pg 13)

Em relação à formação necessária aos professores das séries iniciais, a *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* sugere:

"En ce qui concerne la formation des enseignants, on voit bien, sur ce dernier exemple, en quoi les études supérieures classiques (même scientifiques) restent incomplètes: il est sans doute nécessaire que les étudiants, dans une perspective d'enseignement de la géométrie, aient l'occasion de faire un point sur les différents paradigmes géométriques en présence dans la scolarité (dont les premiers ne sont pas théoriques mais référés au sensible et aidés par des instruments), mis en relation avec des éléments épistémologiques de la géométrie. Ce faisant, ils seront amenés à étudier des preuves qu'ils n'avaient pas nécessairement envisagées (ou acceptées) dans leur cursus antérieur et à replacer ces preuves dans le cadre adapté. La même remarque vaut aussi pour des situations de calcul (comme celle de la tirelire)." (Kahane [61], pg 13)

Ensino Fundamental - 5ª a 8ª séries

Os professores habilitados a lecionarem para alunos de 3º e 4º ciclos, (5ª a 8ª séries do ensino fundamental) apresentam características que os diferem bastante, quanto à formação, daqueles professores que atuam no 1º e 2º ciclos do ensino fundamental. A começar pela formação, que exige diploma de graduação em licenciatura matemática. Porém, encontramos os mesmos problemas de formação entre estes professores, principalmente no que diz respeito ao objeto de ensino.

O ensino de matemática nesta fase do ensino básico deve ser realizado por profissionais com formação matemática. Os estudos consultados em nossa revisão bibliográfica apontam para a necessidade do professor proporcionar aos alunos a compreensão dos conceitos matemáticos fundamentais. Ressaltam ainda que esta compreensão permitirá uma melhor aprendizagem durante o Ensino Médio. Desse modo, o professor que trabalha com esta fase intermediária do ensino básico deve dominar os componentes curriculares presentes em todas as fases do Ensino Básico, o que permite aos professores relacionarem tópicos, priorizando e destacando o entendimento necessário a uma boa compreensão dos componentes curriculares do Ensino Médio.

As recomendações da *CBMS-Conference Board of the Mathematical Sciences*, referentes à preparação dos professores que atuam nesta fase do ensino, destacam:

> *"It is during their elementary years that young children begin to lay down those habits of reasoning upon which later achievement in mathematics will crucially depend. Thus, for example, it is unrealistic to expect students who failed to develop early an understanding of how to manipulate arithmetic expressions to later manipulate algebraic expressions with confidence. And those students who have never had experience with decomposing and recomposing shapes in their early education are unlikely to attach meaning to the succession of assertions in typical proofs in Euclidean geometry."* ([19], pg 15)

Dos tópicos relacionados como fundamentais para que os professores promovam um bom ensino, de modo que se crie um processo de aprendizagem satisfatório aos alunos, a CBMS destaca que os seguintes tópicos devem receber especial atenção:

- **Números e Operações**

  Para um bom entendimento da aritmética o estudo dos números e das operações fornecem oportunidades para os futuros professores criarem significados para procedimentos realizados através de algoritmos decorados, mas raramente entendidos.

- **Álgebra e noções sobre Funções**

  Embora o estudo de álgebra e funções geralmente tenham início no Ensino Médio, alguns conceitos iniciais e aplicações práticas aparecem muito mais cedo. Para que os professores promovam o desenvolvimento destas idéias em aulas das séries elementares, precisam entender esses conceitos e práticas.

- **Geometria e Medida**

  Geralmente, o currículo de geometria para os níveis elementares consiste em reconhecer e nomear formas bidimensionais básicas, medindo comprimentos com diferentes padrões e unidades, além da memorização das fórmulas para a área e perímetro de figuras (retângulos, triângulos, etc). Um curso de geometria para professores deve promover o desenvolvimento de habilidades de visualização - construir e manipular representações geométricas em duas e três dimensões e desenvolver a percepção de objetos através de diferentes perspectivas. Apesar de em geral, conhecerem o uso dos instrumentos de medida, é preciso explorar os conceitos envolvidos.

  "L'importance d'une éducation à la vision dans l'espace a été

évoqué-cidessus comme l'une des raisons majeures en faveur de l'existence d'un enseignement de géométrie élémentaire."
(Kahane [61], pg 19)

- **Análise de Dados, noções de Estatística, e Probabilidade**
  Apesar da exposição diária a dados nos meios de comunicação, os professores do ensino fundamental têm pouca ou nenhuma experiência com Estatística. Há a necessidade de desenvolverem habilidades no projeto e condução de investigações de dados presentes no dia a dia dos alunos. Nos níveis iniciais, a introdução de probabilidade permite às crianças explorarem idéias e fazerem julgamentos sob condições de incerteza. Os professores devem ser capazes de estender estas idéias e determinar medidas de probabilidade: resultados igualmente possíveis, a probabilidade de um acontecimento particular relacionado a um conjunto de dados relacionados a este acontecimento.

Observamos que os professores do Ensino Fundamental devem estar preparados para criar modelos e fazer conexões entre os conceitos, e destes com situações do cotidiano, discutindo suas representações.

A partir da observação da prática didática, inferimos que, neste período escolar, os alunos começam a construir as primeiras formulações a respeito de conceitos matemáticos para os quais já desenvolveram um raciocínio intuitivo. Conceitos primitivos a respeito de números, medidas, juntar/remover operando quantidades começam a ser entendidos e formalizados. Investigações, conjecturas e provas podem ser introduzidas nesta fase do ensino, em que os alunos estão descobrindo a matemática. Neste processo, a formação dos professores pode ter influência direta. Estes devem estar capacitados a orientar os alunos a formularem questões e conjecturas, testá-las e construir argumentos que as sustentem. Para um bom desenvolvimento pedagógico destas atividades, o professor precisa de uma capacitação que o permita planejar as atividades a serem implementadas e preparar aulas que possiblitem a exploração dos conceitos envolvidos. Acreditamos que esta prática será possível a partir de uma boa formação em relação aos conhecimentos matemáticos, permitindo ao professor recorrer a diferentes estratégias de ensino e metodologias.

Ensino Médio

A formação dos professores para atuarem no Ensino Médio não difere da formação dos demais professores, como já relacionamos na seção 2.3.2. Cabe observar apenas a necessidade de uma abordagem mais sofisticada aos mesmos temas abordados nas fases anteriores. A *CBMS-Conference Board of the Mathematical Sciences* apresenta as seguintes recomendações a esta fase do ensino:

> *"Work with rational numbers and operations builds on earlier work with whole numbers and number operation knowledge. Concepts of symmetry and similarity depend on knowledge of shapes acquired in earlier grades. Developing a deeper understanding of measurement and new types of measures uses previously learned counting skills and their applications to finding areas and volumes of simple shapes. Graphing and interpreting both discrete and continuous data in a variety of ways follows graphing simple sets of discrete data in earlier grades. Middle grades teachers need to have a thorough understanding of the mathematics of the middle grades so that they can instill in their students the belief that they can make sense of the mathematics they are learning*

and the confidence to seek it."

"A strong foundation in work with rational numbers is absolutely essential for teaching in the middle grades. Prospective teachers often think that they have this knowledge if they know the algorithms for operations, for example, to invert and multiply when they divide fractions. They are sometimes surprised to learn that there is something to understand about the usual algorithm for dividing fractions and that there are other, equivalent algorithms. Understanding division of fractions requires a deep understanding of what fractions are, and of what division means."([19], pg 29)

Para muitos dos estudantes de cursos de licenciatura aprender matemática significou aprender um conjunto de procedimentos. A desenvoltura com esta habilidade, provavelmente, proporcionou boas notas no curso de matemática, o que é bastante desejável aos futuros professores. Porém, inferimos não ser o bastante para ensinar matemática. É preciso acrescentar o entendimento dos conceitos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem.

Os estudos consultados propõem um currículo que permita uma *revisão* da matemática estudada no ensino básico, com objetivo de adquirir uma compreensão necessária não somente para ensinar aos futuros estudantes, mas também reconhecer quando estes compreenderam o que está sendo proposto. Apresentamos pontos importantes das diversas áreas do conhecimento que necessitam um tratamento especial, baseados nos estudos consultados, principalmente *CBMS* [19], que poderiam contribuir para alcançar um nível de *compreensão mais profundo dos fundamentos matemáticos básicos.*

- **Números e Operações**

  Os estudantes do Ensino Médio devem ser capazes de reconhecer que operações aritméticas podem ser usadas de modo apropriado para resolver um problema em particular, e executá-las de forma correta. Eles também devem ser capazes de utilizar os números de maneira coerente, reconhecendo quando uma resposta faz sentido no conjunto numérico considerado.

> *"Teachers should be able to recognize valid procedures that students sometimes invent to carry out calculations, and to reward those that are based on good number sense. Many times the traditional algorithms can build on students' invented procedures and thus lead students to a better understanding of the standard procedures."*
> ([19], pg 29)

- **Álgebra e Funções**

  Somente quando os professores trabalham com problemas preparados para desenvolver uma visão ampliada da Álgebra é que entendem o conhecimento que lhes é exigido para ensinar álgebra. O conhecimento de álgebra inclui seu papel tradicional de desenvolver a capacidade de trabalhar eficientemente e apropriadamente com símbolos. A álgebra possui uma relação estreita com a aritmética. Podemos considerá-la uma linguagem que codifica propriedades de operações aritméticas.

- **Álgebra e Teoria de Números**

  Os cursos de cálculo e álgebra linear são uma boa oportunidade para adquirir prática com a manipulação algébrica, oferecendo oportunidades para o desenvolvimento necessário ao ensino da álgebra escolar. O estudo das teorias da álgebra abstrata e dos números é muito importante, por aprofundar os conhecimento sobre as estruturas matemáticas que fundamentam os sistemas numéricos e as operações algébricas.

> *"These courses should assure that future teachers "**know why**" the number systems and algebra operate as they do. Unfortunately, too many prospective high school teachers fail to understand connections between those advanced courses and the topics of school algebra."* (CBMS [19], pg 40)

- **Geometria e Medida**

  A maioria dos futuros professores sabe reconhecer as formas geométricas, porém a maioria não é preparada ao estudo das suas propriedades. Para exercer um bom ensino e aprendizagem, deve-se incluir a construção de conjecturas e as possibilidades de prová-las, ampliando o raciocínio geométrico e compreendendo o papel da prova em geometria. Os professores devem desenvolver o raciocínio espacial, sendo capazes de visualizar secções de figuras tridimensionais. O uso de softwares de Geometria Dinâmica pode facilitar procedimentos investigativos e construções de conjecturas. Outro ponto importante é entender o significado de medir, como relação com uma unidade previamente selecionada. É fundamental reconhecer o papel das unidades de medida e dos instrumentos apropriados para fazê-lo, de modo a relacionar diferentes escalas.

  > *"Exploring area and perimeter by holding one measurement constant is such an experience. Other learning situations could involve scale changes in planes and in space, leading first to problems involving proportional reasoning and measurements of similar figures, and then to the meaning of congruence of both two and three-dimensional space. Other*

forms of common measurement, such as angle measurement, should be introduced in ways that help prospective teachers make sense of the manner in which these forms of measurement were devised and are used."(CBMS [19], pg 34)

"(...) identifier un probléme, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié." (Kahane [61], pg 23)

- **Geometria, Tranformações e Trigonometria**

  Os cursos de Cálculo e de Álgebra Linear desenvolvem competências em representações geométricas importantes para o ensino em nível médio. Nestes cursos, os futuros professores adquirem habilidades com diferentes sistemas de coordenadas: polar, cartesiana, esféricas, etc. Estudam propriedades vetoriais, transformações no plano e trigonometria. A associação da trigonometria à geometria, e o desenvolvimento de habilidades em usar a trigonometria para resolver problemas, capacitam o professor a ensinar com segurança estes assuntos no Ensino Médio.

- **Funções e Análise**

  O conceito de função é um dos mais importante da matemática do Ensino Médio. Porém, nem sempre é abordado pelos professores através do estudo dos conceitos envolvidos nas definições. Ao observar a prática de ensino dos futuros professores, percebemos que o aprendizado de funções que tiveram e que portanto reproduzem, é, na maioria das vezes, restrita à construção de gráficos, utilizando tabelas e, em alguns casos, uma análise restrita destes gráficos. A abordagem não leva em consideração a discussão de existência e as possibilidades de funções discretas, por exemplo. É importante para a capacitação ao ensino em nível médio um estudo aprofundado das funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas, racionais e periódicas que ultrapasse os procedimentos de construção de gráficos a partir da construção de tabelas. Estes aspectos precisam de um aprofundamento em cursos de análise e cálculo.

Outro ponto a ser explorado na formação dos professores é o uso de computadores e calculadoras gráficas para a produção de tabelas e gráficos de funções, com objetivos de explorar o estudo de conceitos.

> *"(...) most acquire only procedural facility in using formulas involving functions for calculations, not a deep understanding of functions and related concepts like limits or continuity. Thus, it is important for prospective teachers to revisit the elementary functions of high school mathematics from an advanced standpoint, in much the same way that they revisit algebraic and number system operations."*([19], pg 43)

- **Análise de Dados, Estatística, e Probabilidade**

  Na mídia existe grande quantidade de informações que podem ser transformados em dados para análise. Porém, são poucos os professores de ensino médio que estão capacitados a este trabalho. A Estatística é a ciência que os capacita a utilizar dados do cotidiano, dando-lhes um tratamento crítico, através de técnicas para organizar, exibir e detectar diferentes padrões. Os futuros professores devem estar preparados a usar o estudo das distribuições de probabilidade, aplicando-a modelos do dia dia, avaliando o grau de incerteza das conclusões. Para os professores, é fundamental entender os conceitos básicos de probabilidade e desenvolver habilidades para o cálculo de probabilidade associado ao conceito de probabilidade condicional e a eventos independentes. É importante o uso de calculadoras e computadores em atividades envolvendo estatística.

> *"Because modern statistical work depends on extensive calculations, the prospective teachers should also be able to use statistical computation software to organize, display, and analyze complex data sets. It is essential to carefully consider the important goals of statistical education in designing courses that reflect new conceptions of the subject. Such courses will be appropriate for most mathematics majors, as well as prospective teachers."*([19], pg 44)

- **Matemática Discreta e Ciências da Computação**

  Na maioria dos cursos de formação, os professores têm pouco contato com matemática discreta. Os professores devem desenvolver habilidade com indução matemática, e matemática combinatória. Os conceitos de matemática discreta são úteis para o estudo de algoritmos e linguagens de programação. O domínio dos conceitos e notações da matemática discreta são importantes para o processo de ensino aprendizagem de análise combinatória do Ensino Médio. A matemática discreta envolve problemas de lógica, teoria de conjuntos, funções, teoria de números, teoria elementar das probabilidades, etc, necessários a uma boa formação do professor. A formação dos professores deve incluir trabalhos em ciência da computação, relacionando-os à matemática. Este processo pode envolver o estudo dos algoritmos e suas aplicações, e das estruturas matemáticas necessárias à construção dos conceitos da teoria da computação.

O conjunto de componentes curriculares apresentados representa uma compilação das diversas recomendações consultadas. Em relação à inserção de tecnologia nos componentes curriculares, destacamos algumas considerações:

> *"Dynamic geometry software permits experiments with geometric constructions that provide opportunities for students and teachers to explore the visual world mathematically."* ([19], pg 130)

> *"For example, after constructing a triangle and its medians with software like Cabri Geometry or Geometer's Sketchpad, one can grab a vertex and drag it across the screen to form an infinite number of new triangles. [...] These kinds of geometric explorations lay a foundation for high school students' understanding of formal proof. They also illustrate an important aspect of creative mathematical work and of the way in which software can embody a mathematical definition."* ([19], pg 132)

A *CBMS-Conference Board of the Mathematical Sciences* defende uma estrutura curricular baseada nos tópicos apresentados:

> *"This sequence is an opportunity for prospective teachers to look deeply at fundamental ideas, to connect topics that often seem unrelated, and to further develop the habits of mind that define mathematical approaches to problems. By including the historical*

development of major concepts and examination of conceptual difficulties, this capstone sequence connects individual mathematics courses with school mathematics and contributes to the mathematical understanding and pedagogical skills of teachers."

"(...) One might argue that teacher preparation should focus on very thorough grounding in a few core subjects. However, current high school curricula cannot be taught successfully by teachers with such limited preparation. As mathematics departments work to develop the kinds of courses needed to provide better preparation for future high school teachers, those efforts will also be useful in work with in-service teachers as well. In both cases, a teacher's preparation needs to be viewed as a foundation for a career of continuing professional development."([19], pg 46)

2.3.3 Tecnologia na Formação do Professor

A introdução das novas tecnologias nas aulas de matemática tem por desafio a construção de uma estrutura que permita ao futuro professor ensinar com tecnologia durante toda a sua carreira. Para que isto seja possível, é necessário que durante a graduação estes professores tenham a tecnologia presente em sua formação.

É bastante claro o impacto da informática sobre as atividades matemáticas. Em especial, este impacto tem ressonância nos processos de ensino e aprendizagem. É fundamental que ocorra uma investigação sobre possíveis contribuições e prováveis limites apresentados por diferentes tecnologias quando aplicadas ao ensino e aprendizagem de matemática. Durante o curso de formação são necessários estudos críticos sobre a integração das tecnologias em atividades matemáticas.

O professor, ao introduzir uma ferramenta tecnológica, deve orientar-se por objetivos e competências a serem adquiridas pelos estudantes, caso contrário, a introdução de tecnologia transforma-se apenas em *'perfumaria'* no ensino. Este processo pode envolver a compreensão da relação matemática-informática, ou sob que perspectiva didática ocorre a integração da tecnologia.

Os processos de integração do ensino com a informática trarão novos problemas e novas abordagens para resolvê-los. Novos tratamentos podem ser aplicados a conceitos matemáticos pela informática, potencializados pelas possibilidades e limites impostos pelas diferentes tecnologias para o ensino de matemática. Dentre as tecnologias disponíveis para o ensino e aprendizagem, temos: calculadoras gráficas, programas de manipulação algébrica, planilhas de cálculo, software de Geometria Dinâmica, Internet, etc. Os futuros professores devem estar capacitados à análise crítica das potencialidades e dificuldades associadas à integração destas ferramentas nos processos de visualização, investigação, cálculos, resolução de problemas e possíveis validações, e programação. Para cumprir cada um destes passos é necessário que o professor adquira uma sólida formação matemática, para que não use as ferramentas tecnológicas como meros aplicativos aos quais cumpre-se uma rotina pré-estabelecida, sem entender os conceitos envolvidos nas atividades.

Capítulo 3

Resultados do Exame Nacional de Cursos e Formação Continuada

Os instrumentos criados para avaliação das diversas etapas do ensino têm como objetivos a análise do processo educativo e a coleta de subsídios para estabelecer um marco regulatório para a educação superior, determinando critérios, exigências e prerrogativas. Em função destas avaliações, os governos estabelecem políticas públicas para a educação, de modo que a Avaliação Institucional não seja um fim em si, mas oriente o processo educacional como um todo, oferecendo subsídios aos gestores, em todos os níveis e em todas as etapas do processo educacional.

3.1 Exame Nacional de Cursos - ENC

Os sistemas criados para avaliações de cursos buscam estabelecer referências a padrões de ensino, através de um olhar crítico sobre o processo educacional. O **Exame Nacional de Cursos**, **ENC-Provão**, foi aplicado aos formandos de diversos cursos de graduação no período de 1996 a 2003[1] com objetivo de avaliar os resultados do processo de ensino e aprendizagem.

O nosso interesse é por um fragmento do processo de avaliação, de natureza formativa, relacionado à incidência de questões de Geometria nos exames. Usamos a performance dos graduandos em matemática nestas questões como motivação para nossa pesquisa. E, a partir da observação de comportamentos de respostas apresentados nos exames, sinalizamos deficiências no aprendizado de certos conceitos em determinados conteúdos. Tendo como referência a discussão a respeito da formação necessária aos professores feita no capítulo 2, faremos um breve estudo comparativo com as proposições sobre currículos, consultadas em nossa pesquisa. O objetivo desta comparação será observar o desempenho dos professores formandos, no ENC.

Faremos, a seguir, a apresentação de uma destas questões[2] com os padrões de respostas apresentados. Em nossa pesquisa, estes dados funcionam como motivadores para tratarmos o problema central da tese. Como método de investigação aplicamos esta questão, juntamente com outras de geometria, a diversos grupos de estudantes, como parte das atividades que compõem as estratégias didáticas aplicadas com o software *Tabulæ Colaborativo*[3].

O que motivou esta análise foram os padrões de soluções apresentados, em relação a esta questão, e divulgados pelo **Inep**[4] (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira).

Apresentamos em detalhes os resultados obtidos por duas das Instituições avaliadas pelo ENC. Ao fim do processo, as Instituições obtinham graus que

[1]Fonte: Inep/MEC.

[2]A questão escolhida foi a questão 14 do ENC-2000.

[3]Software de Geometria Dinâmica que compartilha construções e textos através da Internet.

[4]Utilizamos os resultados gerais obtidos por Instituições de Ensino pertencentes a uma determinada região geográfica.

variavam de E até A, em ordem crescente. As instituições relatadas aqui, obtiveram resultados muito diferentes: a denominada UNIaaa obteve grau A nos três anos seguidos de realização dos exames: 1998, 1999 e 2000; a UNIeee que obteve grau E, seguidamente, nos mesmos anos. Propositalmente escolhemos duas instituições com desempenhos diametralmente opostos.

Para a questão analisada, apresentamos um quadro com diversas Instituições da mesma região relacionando o grau de acerto obtido na questão. Podemos perceber que o grau de aproveitamento na *questão 14* independe do grau obtido no exame. A escolha da região observada foi uma decisão aleatória, e, dentro desta região, escolhemos aquelas que obtiveram diferenciados conceitos nas avaliações dos três anos considerados. Observamos nesta análise, um número mínimo de 20 participantes[5] por Instituição, referentes a mais de 90% dos habilitados[6] a fazer o exame.

3.2 Análise dos Resultados do ENC

Apresentamos, a seguir, evidências de dificuldades dos futuros professores, graduandos, que prestaram o ENC-2000 de Matemática, observando o desempenho em Geometria. Faremos uma breve discussão sobre fundamentos teóricos envolvidos na solução da *questão 14*. À luz da argumentação teórica, analisamos os resultados obtidos pelos graduandos no ENC-2000.

[5]Para evitar distorções como o caso do baixo comparecimento de estudantes habilitados para fazer a prova

[6]Na maioria dos casos temos a participação de 100% dos formandos, referentes ao ano de 2000.

3.2.1 Raciocínio Espacial e Visualização

Analisando os currículos dos cursos de Matemática[7] observamos que o ensino de Geometria representa uma fatia pequena na formação dos professores. Este processo é reproduzido nos currículos da Escola Básica e se reflete nas composições dos livros didáticos, onde os conteúdos de Geometria são colocados nos capítulos finais, e, em muitos dos casos, não são ensinados. No ensino universitário, o ensino de Geometria é tratado, muitas vezes, como um tópico menor, o que pode ser exemplificado pelo texto abaixo, atribuído a Bourbaki:

> *"[...] victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie 'élémentaire', qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volanté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géometrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux resultats classiques, et il rest là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc). Mais pour mathématicien professionnel, la mine est taire ... "* (Kahane et al.[62], pg 38)

Este comentário atribuído a Bourbaki é compartilhado por grande parte dos matemáticos profissionais. Esta visão, sobre a geometria, talvez tenha contribuído para o afastamento destes conteúdos dos programas de matemá-

[7]Foram consultados diversos currículos de cursos de graduação em matemática disponíveis na Internet.

tica. Os cursos de Geometria na graduação ficam condensados em um ou dois semestres, muitas vezes fazendo parte das disciplinas eletivas.

Neste contexto, a Geometria Espacial fica ainda mais relegada a um segundo plano, principalmente nos cursos de formação de professores. O estudo dos elementos de Geometria Espacial tem grande importância na estrutura do pensamento matemático, não só a Geometria Espacial Euclidiana por sua estreita ligação com os objetos do dia a dia, como o estudo espaço Não Euclidiano, pela importância que esta dispensa ao raciocínio matemático mas também por sua estreita ligação com o mundo físico através dos estudos da curvatura terrestre e das representações planas para elementos do espaço.

Segundo Keith Jones, desde muito pequeno o ser humano começa a desenvolver duas modalidades de pensamento: o raciocínio verbal e o raciocínio espacial.

> *"Verbal reasoning is the process of forming ideas by assembling symbols into meaningful sequences. Spatial reasoning is the process of forming ideas through the spatial relationships between objects.[...] because space is a fundamental feature of the human environment, spatial thinking plays a crucial role in even the most ordinary human problem solving. [...] Investigative tasks in geometry and measurement provide opportunities for students to analyze mathematically their spatial environment, to describe characteristics and relationships of geometric objects, and to use number concepts in a geometric context. In this way, students develop and use spatial thinking."* (Keith Jones em Oldknow et al. [134], pg 55)

Keith Jones [134] destaca a importância do espaço como elemento fundamental do ambiente humano, e o desenvolvimento do pensamento espacial essencial para melhor compreendê-lo e projetá-lo. Em aplicações teóricas, muito do pensamento exigido na matemática superior é de natureza espacial e a solução de muitos problemas depende do domínio deste raciocínio.

A análise das respostas, escolhidas pelos alunos para a questão 14, apresentada na figura 3.1, indica que a grande maioria não desenvolveu as habilidades matemáticas necessárias para a solução. A análise das respostas mostra, que as soluções apresentadas com maior freqüência são as três primeiras opções, o que sinaliza, a existência de dificuldades na visualização dos elementos do espaço.

Outra habilidade explorada nesta questão é a visualização, definida por Hershkowitz e citada por K. Jones em [134]:

> *"The ability to represent, transform, generate, communicate, document, and reflect on visual information".* ([134], pg 55)

Estudos apresentados em Oldknow et al. [134] para o *Joint Mathematical Council working group*, o domínio da visualização espacial permite que os alunos dêem forma a procedimentos de formação e manipulação de imagens, concretizando-as. A visualização tem importância, não somente, para procedimentos abstratos, em resoluções de problemas de matemática, mas também em aplicações a outras ciências, e relacionadas a inúmeras práticas profissionais. O domínio das planificações de objetos representados em 3-dimensões e a representação destes, por meio de planos, é fundamental no processo de visualização e localização espacial.

Segundo Duval [31], a Geometria possui três categorias específicas no processo de aprendizagem: visualização, construção e raciocínio.

> *"Procesos de **visualización** con referencia a las representaciones espaciales para la ilustración de proposiciones, para la exploración heurística*

de una situación compleja, para echar un vistazo sinóptico sobre ella, o para una verificación subjetiva."

"Procesos de ***construcción*** *mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como un modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que éstos representan."*

"El ***razonamiento*** *en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración, para la explicación."*

Estes processos podem ocorrer separadamente. A visualização não depende diretamente da construção, que funciona como guia para a visualização. Ainda segundo Duval [31], os processos de construção dependem das conexões entre propriedades matemáticas e as restrições técnicas das ferramentas usadas. A visualização funciona como recurso intuitivo, muitas vezes, necessário para encontrarmos demonstrações, auxiliando o raciocínio associado ao corpo de proposições de que se dispõe: definições, axiomas, teoremas. Em algumas situações, a visualização por si pode ser enganosa ou mesmo impossível, como o caso de dimensões maiores que três, por exemplo. E assim, a interação entre três classes de processos cognitivos é necessária para que o aluno adquirira competência em Geometria.

Em procedimentos envolvendo demonstrações e provas, a visualização do problema pode facilitar a organização das hipóteses dadas, guiando o desenvolvimento analítico de uma solução. Resultados construídos, obtidos por meio de visualização, podem ser memorizados com mais facilidade pelos alunos, contribuindo para um maior entendimento dos conceitos envolvidos no processo de construção. Observamos alguns destes elementos durante atividades relacionadas à resolução de problemas.

Entendemos que o processo de visualização não é restrito a representações gráficas, mas abrange representações visuais, que têm por objetivo a criação e a transferência do conhecimento.

Burkard [16], define visualização do conhecimento:

> *"the use of visual representations to tranfer knowledge between at least two persons"* (Burkard [16], pg 450)

O mesmo autor defende a inserção dos computadores como ferramenta capaz de compor processos de visualização, para melhorar a transferência do conhecimento. No capítulo 4 faremos uma revisão dos conceitos de *Visualização do Argumento*, quando aplicados a procedimentos apoiados por computadores.

Segundo Keith Jones,

> *"This leads to a consideration of various aspects of visualization and imagery in mathematics education including the relationship between imagery and perception, imagery and memory, the nature of dynamic images, and the interaction between imagery and concept development."* (Jones [56], pg 124)

Em estudos sobre o uso de Geometria Dinâmica para explorar procedimentos de visualização e as possíveis interferências na aquisição de conceitos geométricos, Jones ([57], pg 20) concluiu:

> *"Dynamic geometry software used inappropriately makes no significant difference (and might make things worse);"*
>
> *"Dynamic geometry software integrated intelligently with curriculum and pedagogy produces measurable learning gains (although it is difficult to tease out whether the gains are the direct result of using the*

technology or of the rethought curriculum and pedagogy, see the work of Gawlick[8]*);"*

"What matters is ***how****dynamic geometry software is used;"*

"Using dynamic geometry software for conceptual exploration leads to conceptual gain;"

"Dynamic geometry software facilitates some types of learning activities, for example, exploration and visualisation, and can enhance some others, such as proof and proving."

Da observação da prática de ensino através de experiências com o uso de GD, inferimos que o uso do software deve estar vinculado a processos investigativos programados pelos professores, que orientem os alunos nas abordagens dos conceitos que devem ser explorados. Estudos consultados indicam a necessidade do uso orientado, para que o software se configure numa ferramenta de aprendizagem. O uso de Geometria Dinâmica em atividades de aprendizagem facilitam experimentações, testes, conjecturas, etc, porém, para que isto ocorra as condições devem ser dadas.

3.2.2 Considerações sobre a questão 14

Apresentamos o estudo referente a uma questão de Geometria apresentada no ENC-2000, questão 14 (figura 3.1) que fez parte do ENC (Provão) 2000 de Matemática. Trata-se de uma questão de Geometria Espacial, em que o grau de acerto foi muito abaixo da média esperada. Para a sua solução são exigidos procedimentos de visualização que possibilitem a sua construção,

[8]Ver artigo [38] nas referências bibliográficas, em que o autor aborda o uso do *Cabri géomètre* nas aulas de Matemática, na Alemanha.

neste caso, fundamentais para o raciocínio espacial que ela requer. Como discutido em 3.2.1, observamos que as opções mais escolhidas pelos alunos revelam muitas vezes dificuldades com a representação espacial. Nos diversos resultados apresentados, ora temos uma distribuição igualitária entre as três primeiras opções, e em outras, observamos a concentração de respostas em uma das três opções.

14

Em um cubo, CC' é uma aresta e ABCD e A'B'C'D' são faces opostas. O plano que contém o vértice C' e os pontos médios das arestas AB e AD determina no cubo uma seção que é um

(A) triângulo isósceles.
(B) triângulo retângulo.
(C) quadrilátero.
(D) pentágono.
(E) hexágono.

Figura 3.1: Questão 14 do Provão 2000

A escolha da opção de resposta **(a) triângulo isósceles** revela que a maioria dos estudantes (futuros professores) têm dificuldades para visualizá-lo no espaço tridimensional, apesar de conhecerem as características deste triângulo. Entendemos que esta escolha deve-se ao fato do estudante perceber que o ponto C´ é eqüidistante dos pontos médios dos segmentos AB e AD. Se denominarmos estes pontos médios por M e N, o triângulo MNC´ é realmente isósceles. Porém, estes estudantes não conseguem construir a imagem concreta destes pontos, como componentes de um plano, interceptando o cubo. Esta opção foi escolhida por 56% dos alunos da UNIaaa, como pode ser visto em destaque na figura 3.6.

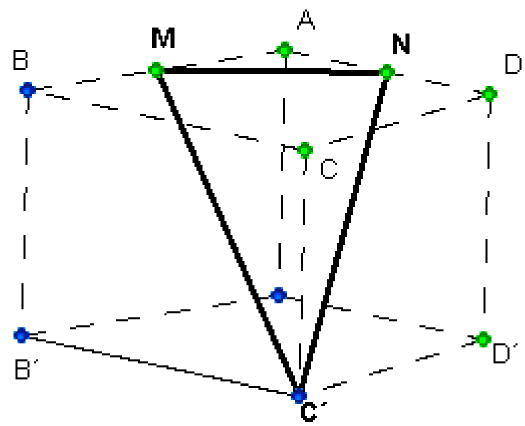

Figura 3.2: Solução para escolha da opção (a)

A escolha da opção de resposta **(b) triângulo retângulo**, pode ser o resultado de um conjunto de deficiências. Sinalizamos com a dificuldade para construir a imagem espacial do cubo, e o erro cometido ao considerar que todo plano que corte o diedro CDABA´B´, reto, o faz de modo a determinar um ângulo reto. A prática de ensino confirma, que esta idéia errônea é muito presente em respostas às questões deste tipo. Podemos observar pela figura 3.3, a seguir, que a idéia de ângulo reto deve vir do fato de MN estar sobre um plano que forma diedro com outro plano sob ângulo de 90 graus. Novamente, a generalização de um resultado particular, MN perpendicular à face ABA´B´, levou primeiramente a uma generalização que por dificuldades com o raciocínio espacial, não permitiu aos estudantes que escolheram esta opção de resposta analisarem que um ângulo reto no referido diedro jamais permitiria a construção de um triângulo com vértice em C´. A figura 3.9 mostra que esta foi a opção preferencial dos estudantes da UNIeee, com de 29,4%. E, mesmo na UNIaaa, esta opção foi a escolhida por 12%, e representa um percentual maior que o da média nacional de acertos para esta questão (figura 3.6).

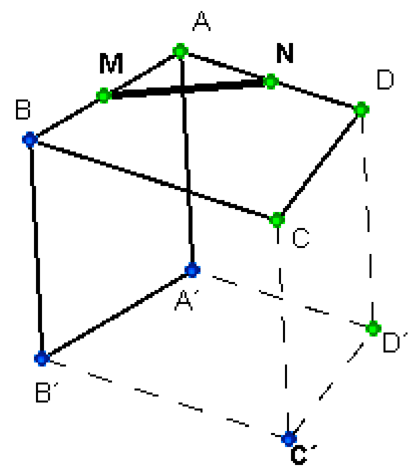

Figura 3.3: Solução para escolha da opção (b)

A escolha pela resposta **(c) quadrilátero**, pode ser explicado pelo fato de um cubo ser formado por faces quadrangulares. Por mais improvável que pareça, esta escolha foi feita por 27,9% dos da UNIeee. E, em muitas instituições de ensino superior, esta opção representou o maior percentual de escolha. Estes alunos, provavelmente, não adquiriram as habilidades referentes ao *raciocínio espacial* e à *visualização*, e provavelmente muitos não mantiveram qualquer contato com Geometria Espacial, durante a escola básica e curso superior, ou a mantiveram de forma inadequada, como revela o conjunto de respostas do questionário apresentado pelas figuras 3.5 e 3.8. A escolha feita por alunos pela opção **(e) hexágono** apresentou sempre baixo percentual, apesar de, em muitos casos, apresentar maior percentual de escolha que a opção correta[9] **(d) pentágono**, como na UNIeee, conforme apresentado na

[9]O gabarito apresentado nas figuras 3.6 e 3.9 refere-se à prova número 1, definida como padrão, disponível no endereço <http://www.inep.gov.br>

figura 3.9.

Os estudantes responderam a um questionário de avaliação sócio-educacional. Analisando algumas respostas, relacionadas aos maiores problemas encontrados pelos estudantes ao responder as questões da prova, o gráfico da figura 3.8 revela, que na UNIeee, um grande percentual dos estudantes desconhece os conteúdos, quase 40%, ou considera a forma de abordagem dos conteúdos, no Provão, diferente daquela a que está acostumado, mais de 50%. Este resultado é preocupante, considerando que os dois itens, juntos, representam mais de 90% do total de estudantes formados pela UNIeee. Isto nos sugere, que para a maioria, os conteúdos não foram aplicados, ou o foram, de modo superficial ou inadequado.

Observando o quadro referente à situação nacional, e da região, bem como as outras subdivisões relativas à dependência administrativa e natureza, explicitadas pelas legendas da figura 3.8, verificamos que o resultado é praticamente o mesmo. Somando-se as opções: desconhecimento dos conteúdos e a forma de abordagem dos conteúdos, diferente daquela a que os alunos estão acostumados, temos sempre agrupados um percentual maior que 70% dos alunos. E, mesmo a UNIaaa, que recebeu grau A nos três anos de realização dos exames, o percentual de alunos que respondem estes dois itens como principais problemas que encontraram, representa mais que 40% dos alunos que responderam ao exame. O que, sem dúvida, representa um percentual muito alto.

Apresentamos a seguir, em destaque, detalhes dos relatórios de duas das instituições pertencentes à região escolhida. A UNIaaa, com conceito A nos anos de 1998, 1999 e 2000, (figura 3.4), e a UNIeee, com conceito E nos mesmos anos (figura 3.7). Participaram do ENC-2000, 24 alunos da UNIaaa, correspondendo a 96% dos graduandos daquele ano, enquanto na UNIeee participaram do exame 68 alunos, correspondendo a 100% dos graduandos de 2000[10]. Para estas duas instituições apresentamos os desempenhos globais em toda a prova de matemática do ENC-2000 (figuras 3.6 e 3.9).

Ano	Conceito	Percentual de respondentes
2000	**A**	**100,0**
1999	A	100,0
1998	A	100,0

Figura 3.4: Conceitos da UNIaaa

Junto às questões de matemática os estudantes responderam a um questionário sócio-educacional, para avaliação da prova que fizeram. Neste questionário foram formuladas questões sobre o modo como a prova foi aplicada, adequação dos conteúdos, tempo, extensão e dificuldades enfrentadas frente às questões. Destacamos uma das perguntas feitas relativa às dificuldades encontradas:

> *Com que tipo de problema você se deparou, mais freqüentemente, ao responder a prova?*

Na figura 3.8, apresentamos as respostas referentes aos alunos da UNIeee, e, na figura 3.5, as respostas referentes aos alunos da UNIaaa.

[10]Dados fornecidos pelo INEP e que constam do *Relatório da Instituição*, enviados a todas as IES que participaram do ENC-2000

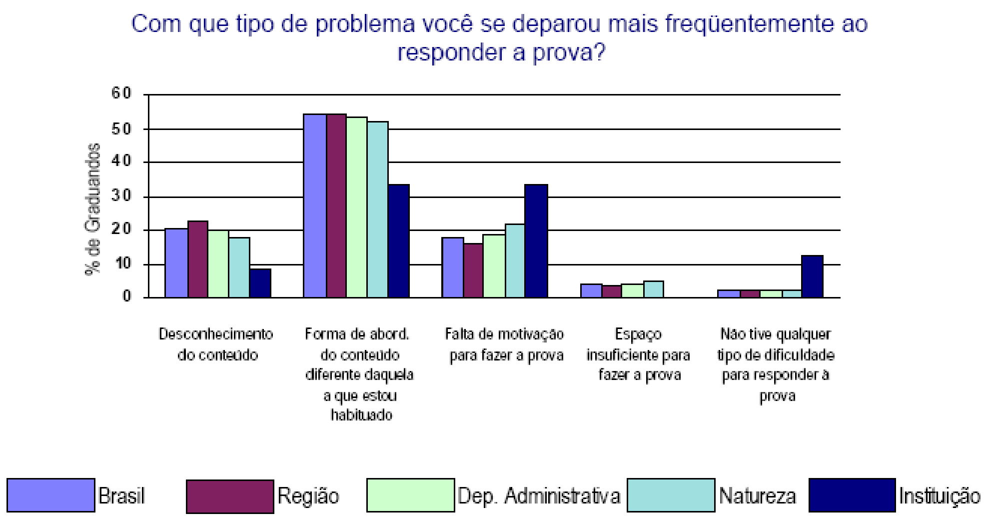

Figura 3.5: Resposta da pergunta relativa às dificuldades encontradas por alunos da UNIaaa

2000

Percentual de acerto na questões de Múltipla Escolha (Brasil, Região, Dep. Administrativa, Natureza e Instituição)

Questão	Percentual de Acerto				
	Brasil	Região	Dep.Adm.	Natureza	Instituição
1	49,4	48,5	50,3	48,8	40,0
2	26,6	25,6	29,6	29,4	56,0
3	32,7	31,3	37,7	36,1	60,0
4	31,8	31,7	34,2	33,2	36,0
5	49,7	49,7	50,3	51,1	56,0
6	23,6	22,9	25,1	26,3	48,0
7	6,4	6,3	8,2	7,3	8,0
8	20,0	19,8	22,3	21,5	28,0
9	27,8	28,6	28,9	30,0	44,0
10	31,4	31,4	32,0	31,7	44,0
11	40,5	40,0	45,0	42,9	64,0
12	10,7	11,4	11,6	11,0	4,0
13	17,3	17,9	17,6	17,7	16,0
14	9,3	9,2	11,2	10,9	24,0
15	35,0	35,2	34,1	35,4	44,0
16	26,6	25,2	30,8	29,8	32,0
17	15,7	15,8	15,4	15,6	12,0
18	18,3	17,9	20,0	19,7	8,0
19	20,0	18,9	23,3	23,2	52,0
20	31,7	31,1	34,5	33,1	28,0
21	14,7	14,7	15,3	15,5	12,0
22	25,1	23,9	25,8	26,6	28,0
23	23,7	23,3	26,5	25,4	36,0
24	30,3	30,0	27,9	29,4	20,0
25	16,3	15,6	18,9	17,4	16,0

2000

Percentual de Respostas em cada alternativa das questões de Múltipla Escolha - Institução

Gabarito	Resposta da Instiuição					
	A	B	C	D	E	SI
E	0,0	56,0	4,0	0,0	40,0	0,0
D	16,0	4,0	4,0	56,0	20,0	0,0
B	4,0	60,0	20,0	16,0	0,0	0,0
D	20,0	20,0	8,0	36,0	16,0	0,0
A	56,0	12,0	12,0	8,0	12,0	0,0
D	40,0	0,0	8,0	48,0	4,0	0,0
D	16,0	48,0	20,0	8,0	8,0	0,0
C	4,0	16,0	28,0	8,0	44,0	0,0
C	16,0	4,0	44,0	20,0	16,0	0,0
C	24,0	16,0	44,0	4,0	12,0	0,0
C	4,0	12,0	64,0	8,0	12,0	0,0
E	40,0	16,0	20,0	20,0	4,0	0,0
E	40,0	28,0	8,0	8,0	16,0	0,0
D	56,0	12,0	8,0	24,0	0,0	0,0
D	24,0	16,0	16,0	44,0	0,0	0,0
B	0,0	32,0	36,0	8,0	20,0	4,0
A	12,0	16,0	16,0	28,0	24,0	4,0
C	44,0	32,0	8,0	16,0	0,0	0,0
E	4,0	36,0	4,0	4,0	52,0	0,0
B	16,0	28,0	44,0	4,0	8,0	0,0
C	44,0	28,0	12,0	12,0	4,0	0,0
A	28,0	24,0	28,0	4,0	16,0	0,0
B	4,0	36,0	24,0	24,0	12,0	0,0
A	20,0	40,0	4,0	12,0	24,0	0,0
A	16,0	36,0	4,0	16,0	24,0	4,0

Figura 3.6: Opções dos alunos da UNIaaa

Ano	Conceito	Percentual de respondentes
2000	**E**	**100,0**
1999	E	100,0
1998	E	100,0

Figura 3.7: Conceitos da UNIeee

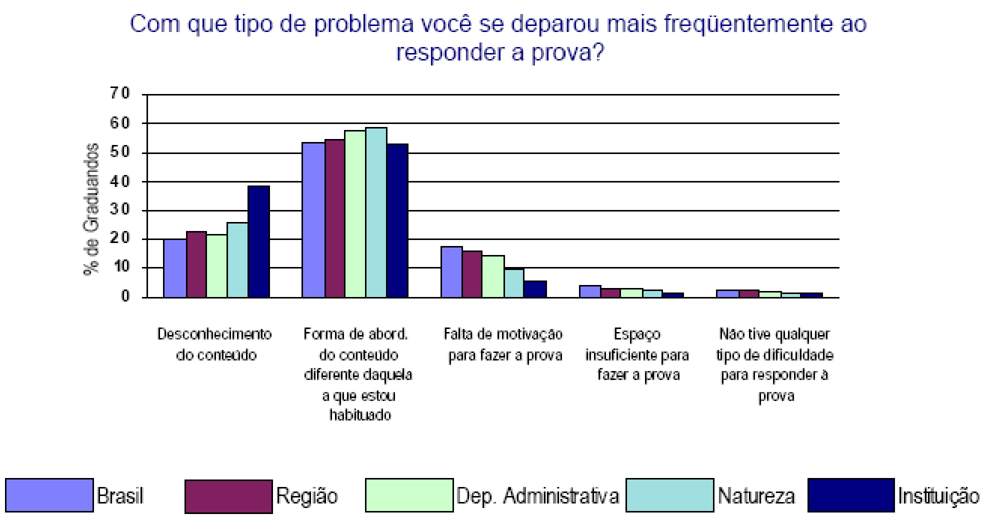

Figura 3.8: Resposta de pergunta relativa às dificuldades encontradas por alunos da UNIeee

2000

Percentual de acerto na questões de Múltipla Escolha (Brasil, Região, Dep. Administrativa, Natureza e Instituição)

Questão	Percentual de Acerto				
	Brasil	Região	Dep.Adm.	Natureza	Instituição
1	49,4	48,5	47,6	52,0	61,8
2	26,6	25,6	22,0	21,7	11,8
3	32,7	31,3	28,3	27,4	23,5
4	31,8	31,7	30,2	28,8	27,9
5	49,7	49,7	49,1	46,9	45,6
6	23,6	22,9	21,2	18,5	11,8
7	6,4	6,3	5,4		
8	20,0	19,8	17,2	17,1	10,3
9	27,8	28,6	25,9	22,6	19,1
10	31,4	31,4	30,3	32,2	36,8
11	40,5	40,0	36,9	35,9	32,4
12	10,7	11,4	10,0	10,3	7,4
13	17,3	17,9	16,6	16,8	14,7
14	9,3	9,2	8,0	6,0	5,9
15	35,0	35,2	35,5	35,1	41,2
16	26,6	25,2	21,6	20,0	4,4
17	15,7	15,8	15,4	16,4	13,2
18	18,3	17,9	16,7	15,0	23,5
19	20,0	18,9	16,2	14,3	13,2
20	31,7	31,1	28,6	29,0	23,5
21	14,7	14,7	14,1	13,5	14,7
22	25,1	23,9	24,1	22,1	13,2
23	23,7	23,3	21,3	21,2	17,6
24	30,3	30,0	31,0	31,7	38,2
25	16,3	15,6	14,5	14,2	16,2

2000

Percentual de Respostas em cada alternativa das questões de Múltipla Escolha - Institução

Gabarito	Resposta da Instiuição					
	A	B	C	D	E	SI
E	0,0	32,4	2,9	2,9	61,8	0,0
D	57,4	7,4	7,4	11,8	16,2	0,0
B	0,0	23,5	48,5	16,2	11,8	0,0
D	17,6	16,2	14,7	27,9	22,1	1,5
A	45,6	17,6	17,6	19,1	0,0	0,0
D	64,7	14,7	2,9	11,8	4,4	1,5
D	64,7	2,9	27,9	0,0	4,4	0,0
C	11,8	20,6	10,3	0,0	57,4	0,0
C	41,2	8,8	19,1	10,3	20,6	0,0
C	4,4	19,1	36,8	0,0	39,7	0,0
C	23,5	23,5	32,4	8,8	10,3	1,5
E	20,6	32,4	20,6	19,1	7,4	0,0
E	26,5	47,1	1,5	10,3	14,7	0,0
D	27,9	29,4	27,9	5,9	7,4	1,5
D	4,4	8,8	16,2	41,2	29,4	0,0
B	26,5	4,4	23,5	4,4	41,2	0,0
A	13,2	13,2	10,3	38,2	25,0	0,0
C	48,5	16,2	23,5	7,4	4,4	0,0
E	4,4	22,1	36,8	23,5	13,2	0,0
B	29,4	23,5	22,1	14,7	10,3	0,0
C	38,2	22,1	14,7	7,4	17,6	0,0
A	13,2	5,9	55,9	7,4	17,6	0,0
B	41,2	17,6	16,2	13,2	10,3	1,5
A	38,2	10,3	27,9	11,8	11,8	0,0
A	16,2	8,8	20,6	27,9	26,5	0,0

Figura 3.9: Opções dos alunos da UNIeee

Com o objetivo de enriquecer a análise construímos as tabelas 3.1 e 3.2 com o desempenho de algumas instituições, escolhidas ao acaso e pertencentes à mesma região geográfica. A identificação das IES é feita pelo prefixo UNI seguido por três letras minúsculas, que representam da esquerda para a direita os conceitos obtidos nos anos de 1998, 1999 e 2000. Deste modo, os sigilos relativos às IES e à região ficam mantidos. Na tabela 3.1, identificamos o conceito obtido pela instituição, o total de respondentes ao ENC-2000, o percentual destes respondentes que apontaram como dificuldades o desconhecimento dos conteúdos cobrados no ENC, e o percentual dos respondentes que apontaram como maior problema a forma de abordagem dos conteúdos diferente daquela a que estavam acostumados. Podemos observar, que em algumas IES, estas duas opções representam quase que a totalidade dos respondentes. Isto pode ser observado para UNIddd (99%), UNIdee (98%) e UNIeee (91%).

DIFICULDADES RELATADAS PELOS ALUNOS NO ENC-2000				
IES	**CONCEITO**	**TOTAL**	**CONTEÚDOS(%)**	**ABORDAGEM(%)**
UNIaaa1	A	24	8	33
UNIaaa2	A	45	10	25
UNIaab	B	67	25	39
UNIaba	A	33	19	58
UNIbbb1	B	29	20	61
UNIbbb2	B	44	11	46
UNIbbc	C	22	28	50
UNIccc1	C	21	23	58
UNIccc2	C	279	42	38
UNIccd1	D	20	15	64
UNIccd2	D	61	18	68
UNIcce	E	25	36	56
UNIcdc1	C	87	8	46
UNIcdc2	C	28	14	76
UNIcdd	D	270	18	60
UNIcde1	E	32	38	57
UNIcde2	E	32	31	57
UNIcec	C	30	40	47
UNIdcb	B	11	10	46
UNIdcc1	C	19	6	59
UNIdcc2	C	18	17	43
UNIddd	D	53	28	71
UNIdee	E	80	61	37
UNIeee	E	68	39	52

Tabela 3.1: Principais dificuldades apontadas pelos respondentes ao ENC-2000

Na tabela 3.2, apresentamos o desempenho de 24 IES, escolhidas ao acaso, e pertencentes à região analisada. A tabela mostra a distribuição percentual das respostas, em cada opção, e o número de alunos que participaram dos exames, em cada IES. Analisando as respostas escolhidas pelos estudantes de cada instituição, observamos que em nenhuma das IES a *opção preferencial* foi a opção correta: item **(d)**. Em muitas IES esta opção obteve 0% das escolhas. A grande maioria escolheu o item **(a)** como opção correta, o que podemos verificar na tabela. As opções de escolha pelos itens **(b)** ou **(c)** possui uma considerável freqüência. A análise referente a estas opções de respostas foi realizada em 3.2.2.

Percentual de Escolha - Questão 14 (gabarito *D*)							
IES	**TOTAL**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**SI**
UNIaaa1	24	56	12	8	24	0	0
UNIaaa2	45	49	15,7	11,8	24,6	0	2
UNIaab	67	55,7	20	11,4	11,4	1,4	0
UNIaba	33	41,7	30,6	11,1	13,9	2,8	0
UNIbbb1	29	48,3	31	10,3	0	6,9	3,4
UNIbbb2	44	45,5	25	18,2	6,8	4,5	0
UNIbbc	22	45,5	40,9	9,1	4,5	0	0
UNIccc1	21	33,3	33,3	19	14,3	0	0
UNIccc2	279	40,5	37,3	13,7	4,2	3,5	0,7
UNIccd1	20	42,9	33,3	19	0	4,8	0
UNIccd2	61	23,8	28,6	31,7	7,9	7,9	0
UNIcce	25	20	36	28	4	12	0
UNIcdc1	87	32,6	28,1	27	6,7	5,6	0
UNIcdc2	28	27,6	20,7	41,4	0	6,9	3,4
UNIcdd	270	19,8	32,2	31,1	8,1	8,4	0,4
UNIcde1	32	21,9	40,6	21,9	9,4	6,3	0
UNIcde2	32	28,1	31,3	31,3	6,3	3,1	0
UNIcec	30	50	26,5	17,3	5,9	0	0
UNIdcb	11	58,3	25	0	8,3	8,3	0
UNIdcc1	19	42,1	26,3	21,1	0	10,5	0
UNIdcc2	18	36,8	26,3	26,3	5,3	5,3	0
UNIddd	53	20	40	16,4	14,5	7,3	1,8
UNIdee	80	17,3	29,6	35,8	6,2	8,6	2,5
UNIeee	68	27,9	29,4	27,9	5,9	7,4	1,5

Tabela 3.2: Percentual de escolha para cada alternativa para questão 14 do ENC-2000

3.3 Formação Continuada

A discussão realizada nas seções 3.2.1 e 3.2.2 sinaliza para a existência de deficiências no aprendizado de Geometria. Os estudantes que participaram dos ENC-2000, provavelmente, não adquiriram estes conhecimentos enquanto alunos do Ensino Básico e, na maioria dos casos, deve ter passado pelo curso de formação sem adquireir a competência em geometria, o que pode ser resultado de abordagens inadequadas à geometria necessária aos cursos de formação de professores de matemática, conforme leitura da tabela 3.1. Esta situação nos remete ao problema da formação dos professores, estudado no capítulo 2.

A formação dos profissional não deve terminar quando estes conquistam o diploma de licenciatura. Os professores em atividade devem ter a oportunidade de acesso contínuo ao conhecimento matemático, e às técnicas de ensino, ao longo da carreira. Isto poderia ocorrer por meio de programas de qualificação que combinem a autoformação desenvolvida com seus pares dentro das escolas, e qualificação contínua através das instituições responsáveis por formação de professores. De maneira conjunta, os programas desenvolvidos para melhoria do ensino podem propor ações que dêem à profissão de professor reconhecimento social e valorização financeira.

Consideramos fundamentais para um ensino de qualidade a constituição de uma carreira profissional na qual a formação contínua esteja inserida. Assim, o professor pode acompanhar as evoluções do sistema educacional em sua formação específica, e adquirir qualificação em relação às novas tecnologias e aspectos pedagógicos. Os planos de trabalho e carga horária devem prever o tempo de formação, computado como tempo efetivo de trabalho. O planejamento escolar deve prever a disponibilidade do professor para sua formação, reservando tempo livre, durante o qual se especializa e, em contrapartida, obtém reconhecimento da instituição de ensino à qual está vinculado.

A formação contínua dos professores é justificada pela necessidade de acompanhar as possíveis evoluções curriculares e evoluções tecnológicas, que hoje permitem o uso de métodos, que a maioria dos professores não teve acesso em sua formação. Outro aspecto, é o fato de muitos dos atuais professores lecionarem conteúdos que estiveram ausentes de sua trajetória escolar e universitária, criando assim a oportunidade para que as deficiências sejam constatadas e supridas.

A partir deste ponto, passamos a enfrentar outro problema:

- Como implementar um processo continuado de formação em um país com dimensões continentais?
- Como disponibilizar formadores para executar esta tarefa? Existirão em números suficientes?

A *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* na França, em suas recomendações no capítulo referente à formação continuada dos professores, coloca o problema:

> *"La qualité et l'efficacité de la formation professionnelle des enseignants dépend, pour une large part, de la richesse et de la diversité du potentiel des formateurs qui s'y consacrent et l'expérience montre qu'une des difficultés majeures dans le développement des politiques de formation consiste à mobiliser un nombre adapté de formateurs compétents, disponibles et porteurs des réponses correspondant aux besoins constatés."* (Kahane [61], pg 89)

As novas possibilidades proporcionadas pelo desenvolvimento da tecnologia aplicada ao ensino, nos processos de educação continuada, abriram espaços às discussões sobre como fazê-lo no ensino de matemática. A *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques* propõe:

> *"Une formation assurant notamment aux formateurs les connaissances en mathématiques, en épistémologie et histoire des mathématiques, en didactique, qu'il semble raisonnable d'attendre d'eux aujourd'hui, mais qui soit conçue comme une véritable formation professionnelle, c'est-à-dire une formation pensée en fonction du travail du formateur et non comme une formation universitaire académique."* (Kahane [61], pg 83)

Os planos educacionais, ver PCN's [99], têm enfatizado a necessidade do ensino de matemática oferecer opções de apresentação contextualizada e inter-relacionada a outras disciplinas, participando de forma ativa, na compreensão do mundo e sua evolução. Esta é uma tarefa para a qual a maioria dos professores não foram formados, e portanto necessitam de apoio formativo contínuo, pois este processo é por natureza dinâmico, e sempre haverá necessidade de atualização.

A consciência da necessidade de continuidade do aprendizado deve ser adquirida durante a formação inicial dos professores, de modo a antecipar o desejo de estar a par das evoluções futuras. O professor, durante o exercício profissional, é levado permanentemente a tomar decisões, elaborar soluções aos problemas que encontra, e adaptar aos contextos educacionais os conhecimentos necessários. Muitas das incertezas vivenciadas pelos professores em início de carreira têm origem em situações que aparecem somente no decorrer do trabalho, no dia-a-dia, e que nem sempre é possível abordá-los durante o processo de formação universitária. Muitos são relacionados a aspectos didáticos e deficiência de conteúdos.

Os programas de formação continuada podem desenvolver a cultura matemática e científica dos professores, de modo que estejam presentes no dia-a-dia das salas de aula as atualizações resultantes de pesquisas relacionadas ao ensino de matemática. É importante que os alunos dos cursos de formação de professores tenham consciência que estarão lecionando uma disciplina viva, diversificada e em contínuo processo de evolução. É imperativo que a formação leve em conta a constituição da cultura teórica da ciência matemática relacionada ao contexto histórico em que se desenvolveu. A história da matemática e a relação com o processo de desenvolvimento da ciência matemática estão freqüentemente ausentes dos cursos de graduação. Na formação contínua, os professores podem adquirir essa cultura, aprendendo a aplicá-las em suas práticas de ensino.

As possibilidades criadas pelo uso de tecnologia no ensino podem contribuir para a formação continuada, principalmente por meio da Internet. Esta, tem introduzido muitos recursos ao ensino, diversificando as possibilidades colocadas à disposição dos professores, através de *sites* acadêmicos ou de páginas pessoais. Com a difusão da *rede de computadores*, a pesquisa ficou a um toque no teclado. Porém, é preciso tratar esta ferramenta com o discernimento e a compreensão do que se está acessando: um canal livre e aberto no qual devemos saber separar o científico do que é lixo eletrônico. E ainda mais, saber usá-las de modo que promova o aprendizado, e não seja mais uma 'perfumaria' disponível. Nesse processo, o professor pode desempenhar um papel importante, desde que preparado.

3.3.1 Redes de Apoio

A criação de *redes de apoio ao aprendizado* pode permitir a discussão de diversas abordagens sobre conteúdos matemáticos. Dispositivos de ajuda individual à disciplina de matemática podem ser desenvolvidos, através de redes colaborativas de apoio, externos à sala de aula e utilizando computadores conectados à Internet. Para que estas ferramentas sejam eficazes ao ensino, é necessário que os professores se qualifiquem a utilizá-las.

As *redes de apoio ao aprendizado* são referenciadas no Aprendizado Colaborativo[11] e utilizam computadores como mediadores do processo interativo. Nestes ambientes os participantes, orientados por tutores, apresentam suas dúvidas, discutem-nas e as resolvem.

A formação continuada dos professores juntamente com a formação matemática, deve acompanhar as evoluções das abordagens dos conteúdos de ensino e as possibilidades metodológicas proporcionadas pelo uso de novas tecnologias. A formação contínua não tem ter o caráter, somente de atualização do conhecimento. Pode estabelecer relações com o desenvolvimento dos conteúdos e estratégias para desenvolvê-los. É esperado que os professores desenvolvam habilidades para a aplicação de técnicas diversificadas. Um aspecto relevante na formação e para o qual o professor deve estar preparado, diz respeito à antecipação às dúvidas dos alunos.

Acompanhamos nas últimas décadas evoluções tecnológicas representadas pelo desenvolvimento de uma série de ferramentas aplicadas ao ensino. Ressaltamos que a inserção das novas tecnologias, simplesmente, não representa avanços nas perspectivas de um aprendizado melhor. Quando analisamos a grande massa de professores de escolas do ensino básico, observamos que são poucos os que integram tecnologia à sua prática. Por outro lado uma pesquisa rápida sobre o assunto revelará grande número de ferramentas, TIC, aplicadas ao ensino: calculadoras, softwares de “Geometria Dinâmica", planilhas de cálculo, editores de texto, ferramentas de comunicação, micromundos

[11]Discutido no capítulo 5

computacionais e aplicativos os mais diversos. As dificuldades em relação ao uso destas ferramentas têm origem no pouco ou quase nenhum contato dos professores com estas tecnologias, aplicadas ao ensino, durante a graduação. E a utilização não é uma questão de convencimento, e nem a tecnologia é uma panacéia que salvará o ensino de matemática, mas a investigação sobre como inseri-las em atividades que visem o aprendizado necessita de procedimentos formativos para que efetivamente se transformem em instrumentos que promovam melhorias no ensino de matemática.

Dentre as possibilidades que a evolução tecnológica pode oferecer estão: o desenvolvimento de trabalhos em colaboração, criação de fóruns de discussões, e expansão da formação à distância.

As novas possibilidades criadas pelo desenvolvimento de plataformas para *Ensino a Distância* (EAD) tornaram possíveis a estruturação de cursos usando a Internet, com variações síncronas[12] e assíncronas[13]. Estas plataformas possibilitaram a implementação e expansão de iniciativas institucionais para oferecer formação continuada aos professores.

Como escrevemos anteriormente, o desejo por uma formação continuada deve ser incentivada e trabalhada com os futuros professores durante o curso de formação. Durante os estágios de prática de ensino surgem, na maioria das vezes, as primeiras dificuldades relativas à prática escolar e a insegurança relativa aos conteúdos a serem ensinados é uma desses problemas. Portanto é necessário que durante o curso os futuros professores exercitem a reflexão sobre conteúdos e aspectos didáticos, pois no contato efetivo com o dia-a-dia das salas de aula surgem, as inseguranças relativas à formação adquirida,

[12]Todos os participantes estão conectados ao mesmo tempo e ocorre uma interação imediata.

[13]Cada participante acessa de modo independente sem que haja uma interação imediata, ocorre em tempos distintos.

que muitas vezes transforma-se em incertezas em relação à carreira profissional. Parece-nos fundamental apoiar e acompanhar estes professores com maior intensidade em seus primeiros anos de profissão, fornecendo-lhes apoio e recursos que lhes permitam adaptar-se a estas situações, possibilitando que proporcionem uma boa aprendizagem aos seus alunos. Deste acompanhamento e conseqüente continuidade na formação, pode-se desenvolver a consciência da necessidade de transformar a formação em um processo contínuo, em busca do aperfeiçoamento do conhecimento matemático e do desenvolvimento de novas técnicas que dêem mais eficácia e segurança ao ofício de ensinar.

Para enfrentar o problema da necessidade de formação continuada e as dificuldades colocadas pela demanda por esta formação, concordamos com as proposições da *Commission de réflexion sur l´enseignement des mathématiques*, quando propõe:

> *"Reconnaître qu'une amélioration substantielle de l'enseignement des mathématiques nécessite aujourd'hui de rompre avec la vision individualiste qui prévaut et requiert une conception collaborative du travail des enseignants."*
>
> *"Reconnaître les possibilités nouvelles offertes par les technologies informatiques en termes de ressources et de moyens de travail collaboratif et de formation à distance, et se donner les moyens de les exploiter sans avoir la naïveté de croire qu'elles vont permettre une économie substantielle des moyens humains de formation."* (Kahane [61], pg 83)

Como parte de nossos estudos para a tese, implementamos *redes de apoio* ao ensino utilizando o Moodle [89], uma plataforma para EAD baseada no *Aprendizado Colaborativo*. Observamos benefícios pontuais destas atividades, como parte do processo de formação. O objeto de observação foi composto por programas de formação continuada oferecidos a professores da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro SEE-RJ/PROMED-MEC. Implementamos ainda cursos de apoio à aprendizagem para alunos do curso de licenciatura em matemática e para alunos no nível básico. Desde as primeiras observações utilizamos o software de Geometria Dinâmica Tabulæ, em conjunto com a plataforma para EAD. Faremos uma descrição destes softwares no capítulo 6.

Utilizando a plataforma de EAD, Moodle, oferecemos um curso de apoio ao aprendizado de modo a estabelecer uma rede de apoio entre os professores participantes. Os professores inscritos para o curso pertenciam a um grupo bastante heterogêneo em relação à formação matemática, idade, e, principalmente habilidades com o uso de computadores. Muitos dos professores não tinham tido contato com as TIC, e muitos não usavam correio eletrônico. Entretanto, após algumas aulas, estas habilidades passaram a fazer parte da sua formação. O curso teve em média dois encontros presenciais por mês, sendo continuado através do curso de apoio estruturado na plataforma Moodle. Este foi estruturado como uma rede de colaboração entre os participantes, e entendemos como fundamental para que aqueles professores adquirissem a capacitação em relação a determinados conteúdos matemáticos abordados, adquirindo também proficiência em relação à tecnologia utilizada. Apresentamos a seguir alguns trechos de Fóruns retirados do curso. Cabe ressaltar que o interlocutor que mais aparece nos diálogos, o professor Wilian, no início do curso, apresentava acentuadas dificuldades com a tecnologia utilizada. Cada mensagem destacada apresentava em anexo uma construção realizada com o software de *Geometria Dinâmica - Tabulae* [42]. Optamos por manter os diálogos, com o mínimo de alterações, estando os discursos basicamente na forma como foram escritos. Os nomes dos professores foram trocados.

Um dos benefícios proporcionados na implementação de redes de apoio colaborativo ao ensino está na possibilidade da continuidade do processo de discussão entre os cursistas fora do ambiente da aula presencial. A análise das discussões promovidas pelos fóruns criados para discutir temas curriculares ou tarefas direcionadas aos grupos tem revelado indícios de como estas ferramentas tecnológicas podem interferir positivamente na formação continuada dos professores.

Capítulo 4

Aprendizagem, Linguagem Matemática e Tecnologia no Ensino

Partindo da motivação para a pesquisa, apresentada nos capítulos 2 e 3, expomos neste capítulo a fundamentação teórica para o problema a ser tratado nesta tese e definido no capítulo 1. Apresentamos a seguir, alguns princípios teóricos educacionais que dão suporte à nossa proposta.

Nas últimas décadas, encontramos muitos estudos sobre diferentes maneiras de aquisição de conhecimento e como estas se desenvolvem em diferentes sujeitos. Um destes estudos foi apresentado pelo *Committee on Programs for Advanced Study of Mathematics and Science in American High Schools* [95], no qual, um conjunto de princípios fundamenta o processo de aprendizagem humana. A compreensão de como *se aprende* tem por objetivo influenciar a natureza do que se ensina e os resultados da aprendizagem.

Os estudos realizados pelo *Committee on Programs for Advanced Study of Mathematics and Science in American High Schools* teve por objetivo diagnosticar problemas e propor uma orientação para a estrutura do ensino de Matemática e Ciências. O estudo envolveu a análise de diversos componentes do processo de ensino e aprendizagem: currículos, conteúdos, avaliação, e o desenvolvimento profissional necessário para promover uma aprendizagem com que denominaram *'deep conceptual understanding of a domain'* ou *'learning with understanding'* [95], pg 198. O Comitê encarregado dos estudos elaborou um conjunto de propostas intituladas como *'os sete princípios da aprendizagem'*, que descrevemos a seguir.

Aprendizagem com Compreensão: Sete Princípios Nas últimas décadas muitas pesquisas têm se desenvolvido sobre como o ser humano aprende e como promover o aprendizado com *compreensão mais profunda dos conceitos.* Visando a aprendizagem com compreensão o *Committee on Programs for Advanced Study of Mathematics and Science in American High Schools* elaborou um conjunto, de sete princípios ([95], pg.118-129), que apresentamos agora.

(i) Principled Conceptual Knowledge

- *Learning with understanding is facilitated when new and existing knowledge is structured around the major concepts and principles of the discipline.*

(ii) Prior Knowledge

- *Learners use what they already know to construct new understandings.*

(iii) Metacognition

- *Learning is facilitated through the use of metacognitive strategies that identify, monitor, and regulate cognitive processes.*

(iv) Differences Among Learners

- *Learners have different strategies, approaches, patterns of abilities, and learning styles that are a function of the interaction between their heredity and their prior experiences.*

(v) Motivation

- *A learner's motivation to learn and sense of self affects what is learned, how much is learned, and how much effort will be put into the learning process.*

(vi) Situated Learning

- *The practices and activities in which people engage while learning to shape what is learned.*

(vii) Learning Communities

- *Learning is enhanced through socially supported interactions.*

Os *sete princípios da aprendizagem* representam uma síntese de pesquisas em educação realizadas, em sua maior parte, nos EUA, e patrocinadas pelo National Reseach Council, com o objetivo de propor melhorias no processo de ensino e aprendizagem. Os estudos abordaram as formas de organização do conhecimento para diferentes indivíduos, e como este é organizado, permitindo aos indivíduos adquirirem habilidades relacionadas aos objetos de estudo. Este conjunto de princípios é proposto como passo inicial para processos investigativos que tenham como objetivo a compreensão dos conteúdos pedagógicos, ou, como define o texto do *Committee on Programs for Advanced Study of Mathematics and Science in American High Schools*: ***"learning with understanding"***.

4.1 Compreensão dos Conteúdos Pedagógicos

O aprendizado com compreensão tem por objetivo o aprofundamento dos fundamentos dos conteúdos matemáticos associados ao desenvolvimento de técnicas pedagógicas. O que nos remete à seguinte questão:

- Que conhecimento matemático é importante para a prática profissional dos professores de modo a melhorar o aprendizado dos estudantes?

Uma resposta possível:

- Aquele que possibilita saber ensinar bem e possibilite o aprendizado dos seus alunos, promovendo a compreensão do conhecimento matemático necessário aos conteúdos que serão ensinados.

Estudos e pesquisas realizadas por Shulman[124], Ball [3] [4] [5], Veloso [135], Ma [73] têm sinalizado que a maioria dos cursos de formação de professores não oferecem esta formação aos professores, nem os preparam para que a adquiram ao longo da carreira profissional . Na medida que o professor domina o conhecimento, acreditamos, como o fazem alguns dos autores pesquisados, que ele estará capacitado a antecipar-se às dúvidas dos alunos, justificar soluções e procurar alternativas pedagógicas aplicáveis ao contexto de ensino proposto.

Liping Ma [73], em seus estudos comparativos entre professores americanos e chineses, observou:

> *"From a perspective of ataining mathematical competence, teaching elementary mathematics does not mean bringing students merely to the end of arithmetic or to the beginning of 'pre-algebra'. Rather it means providing them with a groundwork on which to build future mathematics learning".* (Ma [73], pg 117)

Em suas pesquisas, Ma observou que os professores chineses apresentaram um nível de compreensão da matemática elementar muito superior ao dos professores americanos. Ela atribui isso, em parte, à forma como estes tópicos são ensinados desde as séries iniciais.

> *"They believe that elementary mathematics is the foundation for their students' future mathematical learning, and will contribute to their students' future life. students' later mathematical learningis like a multistoried building. The foundation may be invisible from the upper stories, but it is the foundation that supports them and makes all the stories (branches) cohere."* (Ma [73], pg 118)

No trabalho que Ma [73] desenvolveu com os professores, podemos perceber a diferença entre a habilidade para executar uma operação matemática e a dificuldade em explicá-la. A primeira pode ser fruto do conhecimento de um algoritmo que leva à solução, enquanto a explicação é algo que tem relação sobre o que foi desenvolvido durante o algoritmo, um olhar sobre a matemática desenvolvida. Para o exercício profissional, o professor não necessita apenas conhecer algoritmos que levam a soluções corretas, é preciso entendê-los. Quando Liping Ma relata os casos envolvendo operações com frações, isto fica bastante claro. A pesquisa realizada por Ma [73] foi desenvolvida com 23 professores americanos, com aproveitamento considerado acima da média durante os cursos de graduação. Onze destes professores são experientes, e o restante são professores com até 1 ano de profissão. Para ilustrar reproduzimos um relato de Ma, sobre uma das atividades com frações aplicadas aos professores americanos. Foi-lhes apresentada a seguinte questão:

> *"Como você resolve o seguinte problema*[1]*:*
>
> *(a)* $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = ...$*, qual o procedimento e que método você usou para encontrar a resposta?*
>
> *(b) Imagine que você está ensinando divisão com frações, formule um problema que possa ser modelado através da expressão anterior. Descreva para os seus alunos, através do problema modelado, cada passo da resolução."*

Em relação ao item *(a)*, apenas 43% dos professores utilizaram corretamente o algoritmo para a divisão entre frações, encontrando a resposta correta, enquanto 9% dos professores sabiam o algoritmo mas não completaram ou erraram a resposta. 48% não souberam usar corretamente o algoritmo. Em relação ao item *(b)*, apenas 1 professor, 4,7% do total, apresentou uma correta representação para o modelo proposto.

Estes resultados descritos acima sinalizam duas hipóteses: a compreensão inadequada dos procedimentos impede a criação de uma representação para estes; o fato de realizar as operações de modo correto, no caso a divisão entre frações, não implica em *fazer matemática*, no sentido definido por Ball. Assim, podemos verificar a distinção entre o conhecimento *da* matemática e o conhecimento *sobre* a matemática.

[1]Problema traduzido de Ma [73], pag 55

> *"[...] proposed a distinction between knowledge of mathematics and knowledge about mathematics, corresponding roughly to knowledge of concepts, ideas, and procedures and how they work, on one hand, and knowledge about* ***doing mathematics****, for example, how one decides that a claim is true, a solution complete, or a representation accurate- on the other hand."* (Ball [7], pg 14)

Observamos que a mesma questão sobre divisão de frações foi apresentada aos 72 professores Chineses. A caracterização do grupo era a seguinte: 60% deles com menos de 5 anos de profissão, 30% entre 5 e 18 anos de profissão e 10% com mais de 18 anos de exercício profissional. Segundo relatos de Ma, todos os professores questionados desenvolveram corretamente o algoritmo da divisão entre frações, relacionando-o aos conceitos envolvidos, e cerca de 40% apresentaram respostas por mais de um modo. Somente 8% revelaram-se incapazes de criar uma estória que tivesse a expressão resolvida como modelo. Isso indica que o *fazer matemática* dos professores chineses é mais sólido que o dos professores americanos entrevistados (Ma [73]). O fato dos professores apresentarem mais de uma forma de solução, talvez revele o hábito de olhar a solução encontrada e pensar sobre o resultado alcançado, e, deste olhar *sobre*, procurar novas alternativas que confirmem o alcançado e o aprimorem.

Com base em sua pesquisa, Ma definiu duas caracterizações para o aprendizado matemático:

> *"****Understand a topic with depth*** *as connecting it with more conceptually powerful ideas of the subject".*
>
> *"****Understand a topic with breadth****, on the other hand, is to connect it with those of similar or less conceptual power.* (Ma [73], pg 121)

Em seu texto, Liping Ma descreve quatro propriedades para o que traduzimos como *Profundo Entendimento dos Fundamentos Matemáticos - PEFM*[2], relativos ao processo de ensino e aprendizagem [3]:

Coerência Longitudinal

Professores com *PEFM* possuem um conhecimento profundo de todo o currículo matemático elementar. Preocupam-se em rever conceitos fundamentais estudados anteriormente pelos alunos, ligando-os aos tópicos que estão ensinando. Do mesmo modo, sabem o que os alunos vão aprender a seguir, e aproveitam as oportunidades para estabelecer as bases para a aprendizagem futura. Não ficam restritos aos conteúdos ensinados somente naquele período de escolaridade.

Idéias Básicas

Professores com *PEFM* estão atentos aos conceitos simples e princípios básicos da matemática, procurando revê-los e enfatizá-los para reforçar as idéias básicas. Ao darem atenção às idéias básicas, as abordagens dos problemas pelos alunos são conduzidas por atividades relacionadas com a realidade.

Múltiplas Perspectivas

Os professores que possuem *PEFM* se utilizam de várias abordagens para resoluções de questões, reconhecendo vantagens e inconveniências, fornecendo explicações matemáticas para essas abordagens. Assim, esses professores estão capacitados a orien-

[2]Profound Understand of Fundamental Mathematics (PUFM), [73], pg 120

[3]Estas propriedades são caracterizadas por Ma em [73], pg 122

tar os alunos para uma compreensão matemática, sob diferentes perspectivas.

Conectividade

Um professor com *PEFM* atua de modo a fazer conexões entre conceitos matemáticos e procedimentos. Está capacitado a realizar conexões entre partes isoladas do conhecimento, desde as mais simples e superficiais às mais complexas, e entre diferentes operações e subdomínios matemáticos, evitando que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada. Em lugar de aprenderem tópicos isolados, os alunos aprenderão um corpo unificado de conhecimentos.

É desejável que os professores, durante os processos de formação, façam conexões entre os temas matemáticos dos cursos de graduação e os tópicos da matemática elementar, e, estabeleçam relações entre estes temas e os contextos históricos a que pertencem.

4.2 Linguagem e Signos Matemáticos

A comunicação dos conceitos abstratos, em matemática, é por vezes, dependente da linguagem que os constrói, e se esta não é compreendida, o desenvolvimento do pensamento matemático é dificultado. Alguns estudos sobre cognição, em matemática, mostram que o aprendizado ocorre quando os estudantes são submetidos a algum tipo de elaboração sobre o objeto de estudo. Segundo Kramarski & Mevarech [67], um processo de elaboração pode ter origem na explicação do que se faz a outro participante do mesmo processo.

Em procedimentos para resolução de problemas ou para construir demonstrações, nos deparamos com dificuldades relativas à linguagem, seja esta estruturada na rigidez formal ou mesmo utilizando discurso informal. As dificuldades com a linguagem surgem na organização e estrutura do discurso matemático coerente com as idéias que representa. O processo de resolução é estruturado por um discurso que leva a uma argumentação consistente com as idéias organizadas durante o processo de investigação. Este exercício passa por procedimentos compostos por leitura, escrita, formulações orais e composições visuais.

De acordo com os padrões estabelecidos pelo NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics-USA), o raciocínio matemático requer habilidades para a construção de conjecturas, avaliação de argumentos e escolha de representações. Visando atingir estes padrões a NCTM [94] enfatiza a importância do discurso matemático em sala de aula. Segundo o mesmo estudo, os alunos devem ser apresentados a estratégias didáticas fundamentadas na discussão dos conteúdos com seus pares, tendo como base o raciocínio matemático desenvolvido por cada um, formalizado através do discurso matemático.

As formas de argumentação, em procedimentos para encontrar uma prova matemática, ou resolver um problema, possibilitam o estabelecimento de um discurso matemático, estruturado a partir de procedimentos investigativos. Inferimos que a construção do argumento, em procedimentos que envolvem leitura, discurso e conflitos resultantes do processo discursivo, permite a condução à solução do problema matemático ou à prova.

Duval [32], conforme destacado abaixo, ressalta o importante papel da comunicação e das interações sociais na aquisição do conhecimento e reconhece um vínculo entre a prova e a convicção da prova, obtido após um processo intermediado pela linguagem, através do discurso.

> *"El trabajo de Nicolas Balacheff sobre la prueba y la demostración en el ciclo básico de la escuela secundaria [...] propuso una aproximación más completa a la iniciación a la prueba, partiendo de las actividades de investigación de un problema. Es dentro de esta nueva perspectiva que se comenzó a desarrollar un interés en las formas de argumentación que aparecen en el marco de una resolución de problemas. [...] la argumentación se sitúa en el punto de convergencia de un doble reconocimiento. El reconocimiento del papel importante de la comunicación y de las interacciones sociales en la adquisición de conocimientos; lo que conduce ipso facto a reconocer la importancia de la lengua natural. Y el reconocimiento del vínculo estrecho entre la prueba y la convicción, lo que conduce igualmente a privilegiar la comunicación para favorecer la confrontación de puntos de vista."* (Duval [32], html)

Pretende-se que os alunos, ao trabalharem com problemas em matemática, sejam capazes de analisá-los, resolvê-los e comunicá-los matematicamente. Este processo exige o domínio de um vocabulário específico em relação aos signos matemáticos, que pode vir da utilização freqüente da expressão oral, escrita e representações gráficas.

O desenvolvimento e domínio da linguagem matemática, e conseqüentemente dos seus símbolos, tem como campo fértil os procedimentos investigativos para resolução de problemas. A disponibilidade de ferramentas tecnológicas pode interferir nos processos de investigação. Um exemplo é a utilização de softwares de Geometria Dinâmica para resolução de problemas de Geometria.

De acordo com K. Jones,

> *"(...) student use of a DGE could have an important role to play in enabling students to formulate deductive explanations and provide a foundation for developing ideas of proof and proving."* (Jones [58], pag 56)

A partir de experimentos realizados com estudantes de nível básico (12 anos), K. Jones argumenta:

> *"(...) this is augmented by extracts from the transcribed recordings of the student oral explanations. The reason for focusing on the student explanations is to reveal how they progressively mathematise the sense they made of the software environment and how this impacts on their developing mathematical reasoning."* (Jones [58], pag 73)

O desenvolvimento das Tecnologias de Informação e Comunicação - TIC possibilitou muitos projetos de softwares aplicados ao ensino. Ferramentas educacionais interativas, disponíveis hoje em dia, utilizam a comunicação escrita e/ou gráfica. O uso destas, no aprendizado de matematica, trás a demanda por uma linguagem para comunicação matemática, por meio destas mídias, e demandam representações, na linguagem matemática. Softwares interativos utilizados em resolução de problemas, possibilitam a comunicação de procedimentos, questionamentos e conclusões, das quais, podem participar grupos, com os membros comunicando suas estratégias em procedimentos de troca. A partir da leitura e reflexão sobre a argumentação de um colega, o estudante pode construir ou melhorar sua argumentação sobre um problema de matemática. O uso de softwares apropriados pode transformar o ensino e aprendizado de matemática em um ambiente onde a tecnologia facilite a investigação, a elaboração de conjecturas e a verificação de resultados (NCTM, [94]).

Os processos interativos de aprendizagem, que incluem tecnologia de informação e comunicação, têm permitido a comunicação matemática. Destes, viemos estudado, em particular, os de características colaborativas ou cooperativas. Nos contextos de resolução de problemas, a investigação adquire uma relevância especial, e o uso da linguagem natural, como observa Duval [32], para comunicar impressões, conjecturas e correlações, desempenha um papel importante, principalmente quando o canal de comunicação é o escrito. Assim, inferimos que a troca de impressões a respeito de um problema, onde cada estudante articula suas idéias para explicá-las aos outros componentes do grupo, pode favorecer o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

Em nossa pesquisa encontramos estudos referentes a procedimentos colaborativos em aulas presenciais, em sua maioria baseados em tradicionais trabalhos em grupos (Davidson [21], Dubinsky et al. [30], Hagelgans et al.[47], Rogers et al. [113]). Com a disponibilidade cada vez maior, de ferramentas de comunicação para uso em sistemas de ensino, pesquisas referentes ao uso de ambientes virtuais e o impacto destes no aprendizado precisam ser aprofundadas. Nestes ambientes, a comunicação escrita é a ferramenta principal para implementação de processos interativos de aprendizagem.

Com o desenvolvimento de ambientes colaborativos projetados com características de *CSCL - Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computadores*, abre-se mais uma possibilidade para investigações em Educação Matemática: a análise dos possíveis benefícios cognitivos proporcionados pela introdução destas ferramentas em processos de ensino e aprendizagem. Um aspecto a ser investigado é o nível de influência da introdução destas ferramentas na aquisição de determinadas competências matemáticas. Nos capítulos 5 e 6, discutimos o uso do *Aprendizado Colaborativo* em sala de aula, e as novas possibilidades para esta metodologia de ensino, proporcionadas por ambientes baseados no *Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador*. Um aspecto a ser observado é a expansão da capacidade para comunicação matemática em ambientes que utilizam técnicas de ensino baseada em colaboração.

Muitos estudos ainda serão realizados para avaliar a introdução das TIC como ferramentas didáticas. Em especial, no ensino de matemática, pesquisamos a respeito dos acessórios didáticos necessários para uma utilização eficiente destas ferramentas. Dentre os acessórios didáticos, estariam roteiros de apoio, orientados à promoção de discussões e análises de procedimentos matemáticos. Estes roteiros atuam como mediadores, na aprendizagem. Um aspecto importante é o da instrumentalização do ambiente tecnológico para facilitar a comunicação matemática, por meio de implementações que facilitem a comunicação. Os projetos de software baseados em diferentes concepções didáticas necessitam de ajustes para se adequarem às especificidades dos conteúdos matemáticos. E é tema central desta tese a apresentação de estratégias didáticas para aprendizagem colaborativa, discutidas no capítulo 7.

O uso de ferramentas tecnológicas no ensino deve ser orientado para cumprir os objetivos formativos dos alunos. Em matemática, de modo geral, existe uma cultura de resultados. Tradicionalmente um bom aluno é aquele que resolve o maior número de problemas, chegando a um resultado correto. Não há como negar que provavelmente este aluno atingiu um nível satisfatório de aprendizagem, tomando como referência resultados individuais. Existem ferramentas tecnológicas aplicadas ao ensino que exploram esta concepção, que são, na verdade, a transposição das tradicionais listas de exercícios para uma nova mídia. Não negamos a aplicabilidade deste tipo de software e nem sua importância em algumas situações. O que propomos com a utilização de ferramentas projetadas para *ambientes colaborativos* é uma mudança no modelo. Tradicionalmente, ao resolvermos um problema de matemática, encontrar a solução correta significa terminar o problema, passando em seguida para o problema seguinte. Em ambientes de *Aprendizagem Colaborativa*, é preciso dar mais atenção aos procedimentos *durante a resolução.* Isto pode ocorrer através das discussões relativas às soluções encontradas, às dúvidas durante a resolução, e ainda por mecanismos de negociação entre os participantes do processo para chegar à solução correta. Esta, uma vez encontrada, deve ser discutida e explicada a algum membro do grupo cujo tempo de assimilação seja diferente dos demais. O processo deve compreender a investigação, a discussão e a comunicação da solução, onde um ambiente de aprendizagem colaborativo tem papel fundamental.

Para esta mudança de paradigma, há a necessidade do desenvolvimento de atividades adequadas ao ambiente computacional e à apresentação dos conteúdos. A análise da produção neste modelo apresenta características diferentes das formas tradicionais, em muitos aspectos, e a avaliação necessita do desenvolvimento de instrumentos adequados, o que merece estudos específicos. A aprendizagem desenvolvida por meios de atividades colaborativas em grupos e mediada por comutador é, na maioria das vezes, baseada em instrumentos de comunicação escrita: *Chats* e *Fóruns.*

Neste sentido, Duval afirma:

> *"(...) la argumentación implica siempre la puesta en funcionamiento de la lengua natural. Aun cuando los argumentos utilizados dan cuenta de otros registros de representación!"* (Duval [32], html)

Os processos de comunicação escrita em matemática intercalam o uso da *linguagem natural*, como escreve Duval, e a produção de discursos matemáticos através da *linguagem matemática formal*. Esta utiliza os signos matemáticos e seus processos visuais (representações geométricas, simbologia algébrica, etc.).

Em trabalho publicado por Mattos et al. [80], encontramos relatos sobre a dificuldade dos estudantes em conseguir comunicar-se em linguagem matemática durante uma sessão de Chat. Naquele caso, os estudantes estabeleceram uma *rede de apoio à aprendizagem* na forma como foi descrita na seção 3.3.1, porém encontraram dificuldades em comunicar-se utilizando apenas a *linguagem natural*, única possível naquela ferramenta utilizada. A dificuldade em descrever através da *linguagem natural* o processo de construção para $\sqrt{2}$ contribuiu para que um estudante não entendesse a explicação de sua colega via texto de *Chat*.

Cabe fazer uma observação em relação ao uso da *linguagem natural* para representação matemática. Uma frase escrita pode dificultar a comunicação e confundir o entendimento do colega, quando a comunicação ocorre, somente, através da comunicação escrita em *Fóruns* ou através de salas de *bate-papo*. No caso analisado por Mattos et al. [80], o estudante que pede ajuda não domina o que está sendo *'dito'*, e portanto, não consegue entender a explicação da colega, apenas lendo que *"2 ao quadrado, mais 2 ao quadrado vão dar o equivalente à raiz de 8"*. Isto porque, no momento do discurso, a estudante pensou, mas não comunicou que aplicava o *teorema de Pitágoras*, e que *'2 (dois) ao quadrado'* representava um dos catetos elevado ao quadrado.

No caso citado, a criatividade da aluna criou uma ferramenta acessória para a visualização do que queria comunicar. Fez uma fotografia digital da construção em papel e anexou em um Fórum disponível. Cabe observar que estes alunos, não possuíam o *Tabulæ*, ou qualquer outro software de

Geometria Dinâmica. Utilizavam somente um editor de texto comum, do Chat do Moodle.

Atividades realizadas em ambientes CSCL utilizam o recurso da leitura e da escrita, exigindo dos participantes uma total atenção à produção do grupo, uma vez que a dinâmica dos procedimentos colaborativos exige participação ativa de cada um, seja expondo suas idéias relativas a uma solução proposta ou expondo suas dúvidas. Em procedimentos colaborativos, os componentes trabalham em grupos, mas cada um desenvolve e apresenta o seu próprio trabalho, o que evita atitudes passivas encontradas em muitas atividades tradicionais realizadas em grupo, permitindo a avaliação da competência relativa à comunicação matemática desenvolvida pelos estudantes durante o processo. Utilizando a definição dada por McInnerney & Roberts:

> *"Collaborative is an adjective that implies working in a group of two or more to achieve a common goal, while respecting each individual's contribuition to the whole."* (McInnerney & Roberts [76], pg 205)

A expectativa é de que quando os estudantes atuam em grupo, em propostas de *Aprendizagem Colaborativa*, elaboram a construção do discurso matemático. Quando comunicam suas estratégias de resolução ou apresentam suas dúvidas em relação a um problema proposto, os estudantes têm a possibilidade de efetivamente desenvolver a aprendizagem matemática. Ao adquirirem capacidades de elaborarem processos para solucionar um problema, com colegas, em grupos pequenos, como propõe Davidson [21], inferimos que a organização do discurso matemático contribui para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar e argumentar, contribuindo para a solução, e potencializando o aprendizado matemático.

4.3 Abordagens por Soluções de Problemas

As abordagens por solução de problemas enfatizam o ensino de tópicos de matemática em que o professor orienta os alunos a construir o conhecimento matemático relacionado com o conceito explorado, Pólya [106] [107] [108] [109]. Visando desenvolver as estruturas conceituais e maior apreciação da matemática, o professor atua mediando as atividades de ensino, para que os estudantes desenvolvam as atividades propostas. Esta mediação orienta os alunos a executarem procedimentos investigativos baseados em construções de conjecturas, exploração, testes e verificação de resultados válidos.

Segundo Schoenfeld [122], o aprendizado matemático deve ser orientado a aprender *"how to think"*. Ele descreve ainda, o processo de resolução de problemas como uma ponte entre os conhecimentos prévios e o conhecimento que adquire durante o processo, definindo um bom processo de solução de problemas aquele em que o estudante:

> *"(...) may not fully understand the problem, and may simply explore it for a while until he feels comfortable with it. He will probably try to match it to familiar problems, in the hope it can be transformed into a (nearly) schema-driven solution. He will bring up a variety of plausible things: related facts, related problems, tentative approaches, etc. All of these will have to be juggled and balanced. He may make an attempt solving it in a particular way, and then back off. He may try two or three things for a couple of minutes and then decide which to pursue. In the midst of pursuing one direction he may back and say 'that's harder than it should be' and try something else. Or, after the comment, he may continue in the same direction. With luck, after some aborted attempts, he*

> *will solve the problem."*(Schoenfeld [122], pags. 32-33)

Os estudos do NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics-USA) [94], definem o método por resolução de problemas como:

> *"Problem solving means engaging in a task for which the solution method is not known in advance. In order to find a solution, students must draw on their knowledge, and through this process, they will often develop new mathematical understandings."*(NCTM [94], pag. 51)

Ainda Schoenfeld [122]:

> *"Mathematics is a discipline of clear and logical analysis that offers us tools to describe, abstract, and deal with the world (and later, world of ideas) in a coherent and intelligent fashion."*(Schoenfeld [122], pag. 32)

Schoenfeld em [123], cita o trabalho de Burkhardt sobre as dificuldades enfrentadas pelos professores quando aplicam estratégias baseadas em resolução de problemas. As dificuldades enumeradas são de três tipos:

> **Dificuldades Matemáticas** - os professores devem perceber as diferentes abordagens apresentadas pelos estudantes, reconhecer se podem estar corretas, e caso não estejam, indicar o caminho correto.
>
> **Dificuldades Pedagógicas** - o professor deve decidir quando faz intervenções, e que sugestões poderão ajudar os estudantes a encontrarem suas próprias soluções.
>
> **Dificuldades Pessoais** - o professor freqüentemente estará na

> posição, raro para professores de matemática e inconfortável para muitos, de não saber; trabalhar bem sem saber todas as respostas exige experiência, confiança, e autoconsciência.

Pólya em [110] relaciona o desenvolvimento do pensamento matemático com o *fazer matemática* a partir de estratégias baseadas em resolução de problemas.

> *"To understand mathematics means to be able to do mathematics. And what does it mean doing Mathematics? In the first place it means to be able to solve mathematical problems. (...) And the part that mathematics plays is mostly about thinking. Mathematics is a good school of thinking. But what is thinking? The thinking that you can learn in mathematics is, for instance, to handle abstractions."*(Pólya [110])

A resolução de problemas proposta por Pólya admite a elaboração de estratégias para se chegar a uma solução. Fazer uma representação gráfica, tentar resolver outro mais simples relacionado com o problema inicial, dividir este em outros de solução mais simples, elaborar conjecturas, testar soluções, fazer pesquisa bibliográfica.(Pólya [106])

A aprendizagem por soluções de problemas pode contribuir para o domínio da linguagem matemática, permitindo a elaboração de procedimentos que promovam discussões, difusões de idéias e reflexões sobre os conteúdos e algoritmos eventualmente utilizados. Procedimentos próprios podem ser desenvolvidos durante o processo de construção das soluções para os problemas propostos. Esta abordagem pode ser utilizada para estimular os estudantes a fazerem generalizações sobre regras e conceitos matemáticos.

Ball [4], escreve:

> *"Teaching and learning would be improved, so the argument goes, if classrooms were organized to engage students in authentic tasks, guided by teachers with deep disciplinary understandings. Students would conjecture, experiment, and make arguments; they would frame and solve problems; they would read, write, and create things that mattered to them. Teachers would guide and extend students' intellectual and practical forays, helping them to extend their ways of thinking and what they know as they develop disciplined ways of thinking and encounter others' texts and ideas."* (Ball [4], pg 3)

Entendemos que as atividades relacionadas com resoluções de problemas são apropriadas a ambientes para *Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador*, pois apresentam as seguintes características:

- Interações entre estudantes, e entre professor e estudantes, facilitando a criação de *Redes de Apoio*[4];
- Abertura de canais para comunicação entre os estudantes durante as atividades;
- O professor fornece informações suficientes para dar suporte ao problema apresentado, intervindo quando considera conveniente ou quando solicitado pelos alunos;
- Ocorrência de diferentes soluções para um mesmo problema proposto;
- Promoção de discussões sobre regras e conceitos orientadas para que os estudantes façam generalizações;

[4] Conforme definido na seção 3.3.1

- Utilização de roteiros para atividades realizadas por grupos de estudantes.

A elaboração de estratégias de ensino para serem usadas em abordagens por soluções de problemas tem como referência o desenvolvimento do pensamento matemático do aluno. Segundo Piggott,

> *"We are taking **mathematical thinking** to mean particular mathematical strategies that are employed in solving problems of different types."* (Piggott [101], pg 6)

Piggott [101] descreve estratégias desenvolvidas na resolução de problemas e que estariam relacionadas ao desenvolvimento do *Pensamento Matemático*:

- Conjecturar/Teorizar/Sistematizar
- Generalizar
- Especializar/ Clarificar/ Procurar por exemplos específicos
- Considerar os casos especiais
- Resolver problemas mais simples que estejam relacionados
- Refletir sobre experiências anteriores, relacionando-as ao problema atual
- Realizar múltiplas representações
- Identificar e descrever padrões
- Representar as informações e resoluções

Para Piggott, as abordagens por resoluções de problemas se dividem em quatro etapas: **Compreensão**; **Análise** e **Síntese**; **Planejamento** e **Execução**; e **Avaliação**. A estrutura proposta por Piggott possui características semelhantes àquelas desenvolvidas para os projetos baseados no *Aprendizado Colaborativo*. A estrutura proposta por Piggott atende as necessidades identificadas por Nason & Woodruff, como fundamentais para projetos que pretendem implementar o *Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador em Matemática*, e ressaltam que esta ausência seria uma das

> *"[...] major reasons why mathematics educators have had much less success in establishing online knowledge-building communities than their peers in other discipline areas [...]"* (Nason & Woodruff [91], pg 126).

A mediação é um aspecto muito relevante em abordagens por resolução de problemas. O papel desempenhado e o modo de atuar do mediador caracterizam o tipo de suporte oferecido aos estudantes. Os níveis de suporte e os processos de avaliação são aspectos relevantes e que necessitam estudos que contribuam para abordagens que introduzam o trinômio *pensar-resolver-refletir* nos processos de ensino e aprendizagem em matemática. Durante as atividades os alunos podem ser encorajados a formular perguntas aos colegas, levantar dúvidas em relação aos conteúdos abordados no problema, e ainda incentivados a construir suas soluções através de argumentações com os membros do grupo.

Uma atividade baseada em resolução de problemas possibilita aos estudantes uma participação ativa, através da leitura, resolução escrita e comunicação dos seus resultados. A resolução de problemas permite, através de apresentações dos resultados, debates e questionamentos sobre a atividade matemática proposta.

Entendemos que os procedimentos relativos à solução de problemas em Matemática são próprios a ambientes interativos, principalmente aqueles baseados em *Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador - CSCL*. De acordo com o nosso estudo a introdução das *Tecnologias de Informação e Comunicação - TIC*, em conjunto com metodologias de ensino, baseadas em abordagens por solução de problemas permite aos estudantes pensarem sobre o problema, organizar as idéias, e discutir possíveis soluções, e estabelecer um canal para a comunicação com os colegas. Com base nestes princípios, contribuímos com o projeto do software *Tabulæ Colaborativo*, apresentando *Roteiros de Colaboração* que procuram agregar tais características ao ambiente computacional.

4.4 Aprendizagem Colaborativa

Consideramos a *Aprendizagem Colaborativa* como um método de ensino e aprendizagem nos quais os estudantes organizados em grupos trabalham juntos em algum objeto de ensino. O método pressupõe um envolvimento ativo dos estudantes na condução do processo de aprendizagem.

Em uma perspectiva social, o conceito de aprendizagem é descrito como um processo de transformação através da interação com o ambiente social. Representante deste pensamento, Vigotsky [139] apresentou o conceito de *Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP*: a distância entre o nível atual de conhecimentos de uma pessoa ao resolver problemas de modo independente, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela resolução de problemas sob orientação ou em conjuntocom pares mais capacitados. Poderíamos caracterizá-la como diferença entre a capacidade que um indivíduo possui para resolver problemas individualmente e a capacidade para resolvê-los com alguma ajuda. Esta ajuda pode vir de um professor ou de um colega que já desenvolveu a habilidade necessária para resolvê-lo, caracterizando deste modo o chamado *aprendizado social*. Em suas pesquisas com crianças, Vigotsky caracterizou o aprendizado como o despertar de processos desenvolvidos internamente e que vêm à tona quando ocorrem interações com outro sujeito social.

A Aprendizagem Colaborativa é baseada em mecanismos de suporte a grupos de aprendizagem, estabelecendo uma rede de suporte ao grupo. Sua fundamentação é baseada na concepção construtivista em que aprendizagem e conhecimento vêm de nossa interação com o ambiente. Ao comunicarmos idéias em atividades intragrupos, estamos expondo nossas idéias a nós mesmos e justificando-as, de modo a ratificá-las e aprofundá-las.

Em procedimentos de aprendizagem colaborativa, o estudante é conduzido a expor idéias, em discussões internas com seus pares em um grupo de trabalho, ou, quando expõe idéias formadas ou formula suas dúvidas. Um ambiente para o *Aprendizado Colaborativo* é pensado para proporcionar conhecimento, a partir de procedimentos interativos, podendo ter algum tipo de mediação externa. Os procedimentos internos aos grupos, ou mesmo externos, dependem de apoio e suportes específicos, de acordo com o tipo atividade desenvolvida. De um modo geral, o Aprendizado Colaborativo tem por princípio a mudança da referência única centralizada no professor, e considera que os estudantes, com algum apoio, podem construir conhecimento. Podemos observar este mecanismo no caso relatado na página 106, quando os alunos discutiam a construção de $\sqrt{n}$ na reta real.

Segundo Schwartz [120],

> *"Many of the current discussions view collaborative learning as the appropriation of ideas from others. [...] People appropriate kno-*

wledge when they are given opportunities to produce knowledge." ([120], pg 200)

4.5 Tecnologia no Ensino de Matemática

A utilização de ferramentas da *Tecnologia de Comunicação e Informação - TIC* é objeto de pesquisas tanto do campo das Tecnologias quanto da Educação. É significativo o crescente uso que se faz das tecnologias, em especial no ensino de matemática. Porém, como destaca Yeh & Nason,

> *" Unfortunately, most of these ICT-based tools for 'learning math' can be criticised as being ineffective as supports for the construction of mathematical knowledge. According to Papert (1996a)*[5]*, the ideas about what mathematics is and why the students should learn mathematics implicit in these ICT tools are 'flimsy'. Therefore, in Papert's opinion, many ICT-based tools end up in teaching 'junk maths' to the students."* (Yeh & Nason [146], pg 1)

Como causas do uso ineficiente das TIC, os mesmos autores, e fontes citadas em [146], relacionam:

> *(a) Uso dos computadores mais como ferramenta computacional, do que como ferramenta para construção do conhecimento;*
> *(b) Uso em tópicos impróprios;*
> *(c) As dificuldades tecnológicas se sobrepõem às dificuldades matemáticas a tal ponto que o foco de atenção dos estudantes é maior na tecnologia que na matemática;*

[5]Artigo de Seymor Papert: The wonderful discovery of nothing. Citado em Yeh & Nason[146]

De um modo geral, não existem muitas discordâncias em relação às facilidades e às novas possibilidades que os computadores oferecem às tarefas cotidianas. Em relação às atividades de ensino, existe grande variedade de aplicações possíveis. Porém, o que encontramos nos relatos acadêmicos é ainda uma sub-utilização em situações efetivas de ensino e aprendizagem.

Lagrange [68] comenta a estrutura utilizada para análise das TIC no ensino de matemática:

> *"In my understanding, the framework that authors generally use to analyse ICT in mathematics is limited to the interaction between the student, the computer and the knowledge. This limited framework explains the discrepancy between the potentialities and the reality of the integration."*
> *"The goal is to enlarge this framework by putting this interaction inside the long-term process of conceptualisation and in the context of schools institutions. To this aim, new dimensions of the integration of ICT are to be considered. Then, the focus is to be put on the teacher trying to integrate ICT, because of his obvious central role in this enlarged context."* (Lagrange [68], pg 1)

Por observações de práticas escolares e dos exemplos obtidos da revisão bibliográfica, concordamos que as dificuldades para o uso de ferramentas TIC no ensino vão além da necessidade de projetos de bons softwares, e de suportes eficazes aos professores e alunos. Há grandes dificuldades relacionadas às complexas realidades de sala de aula e à relação dos alunos com a matemática e a tecnologia. A análise e discussão da integração das TIC no processo educacional deve incluir aspectos institucionais e instrumentais. Apresentar aos professores as inovações tecnológicas não é suficiente, pois os professores precisam do conhecimento didático sobre o uso da tecnologia e das representações matemáticas que podem ser realizadas. Lagrange [68], sustenta a necessidade de orientar a aprendizagem dos professores para a construção do conhecimento tecnológico e matemático. O acesso às TIC é uma condição necessária, embora não suficiente, para que se estabeleçam novos padrões de uso destas tecnologias nos sistemas de ensino.

Esta tarefa, entendemos, cabe aos processos formativos dos professores, seja nos cursos de licenciaturas ou em programas de formação continuada. Ponte [104] analisa a difícil relação inicial de futuros professores com as TIC, por meio de um estudo em disciplina semestral, de fim de curso, da formação inicial de professores de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa[6]. Uma aluna do curso, neste relato, exemplifica a resistência à utilização das TIC:

> *"O computador, e tudo o que com ele se relacionasse, para mim era algo distante e que representava, por vezes, algo até desagradável. Confesso que a Internet não me suscitava interesse... A partir daqui comecei a interessar-me profundamente e a reconhecer o importante contributo que esta tem nas nossas vidas e, em particular, para os futuros professores"* ([104], pg 85)

O programa do curso explorou a aprendizagem da construção de páginas na Internet, e utilizou softwares educacionais na perspectiva de sua integração à prática de ensino, priorizando a exploração das potencialidades das atividades, desenvolvidas para trabalhar tópicos matemáticos. Durante o curso, os professores exploraram tarefas de modelagem matemática por meio de planilhas de cálculo e atividades com um programa de *Geometria Dinâmica*,

[6]Nota: *"As atividades da disciplina envolvem trabalho com toda a turma, em pequenos grupos e individual, e desenvolvem-se através do Web site que é usado desde o primeiro dia."* (Ponte [104], pg 79)

o *Geometer´s Sketchpad - GSP*. Ao mesmo tempo, organizados em grupo, construiram uma página na Internet, relacionada a um tópico curricular de Matemática, tendo como público alvo professores e futuros professores de matemática.

Segundo relata Ponte, durante o semestre as opiniões dos futuros professores em relação à utilização das tecnologias foram se modificando, ele escreve:

> *"... a grande maioria dos futuros professores nunca tinha sequer consultado a Internet e o seu sentimento face às novas tecnologias era de total incapacidade, pelo que são comuns comentários tais como: 'até então eu nem tinha navegado na Internet' ou 'nunca tinha pensado navegar na Internet, foi algo de novo e apaixonante'. No entanto, aqueles que inicialmente tinham uma postura negativa foram mudando a sua perspectiva, referindo as grandes potencialidades que esta rede representa para os professores: 'agora é uma ferramenta que eu utilizo como aluna e que espero, no futuro, utilizar como professora'."* (Ponte [104], pg 84)

Em relação à construção do conhecimento tecnológico e matemático, observamos que a inserção das TIC tem criado novos paradígmas no ensino. Com o objetivo de inserir a tecnologia como parte da prática acadêmica e profissional dos professores, os nossos estudos indicam a necessidade do desenvolvimento de materiais instrucionais baseados nas novas ferramentas. O uso em atividades relacionadas ao currículo de matemática pode ser uma forma de qualificação, por parte dos professores à tecnologia. Uma estrutura de *capacitação* dirigida às salas de aula do professor, pode aplicar a tecnologia a alguns tópicos do currículo de matemática, por meio de atividades que focalizem modelagens e investigações, por exemplo.

A Internet, em relação às TIC, é a tecnologia que apresenta maior visibilidade social. O desenvolvimento de plataformas de ensino que utilizam a Internet como mídia tem proporcionado novas possibilidades de projetos para construção do conhecimento, baseados em discussões e compartilhamento de saberes. Estes softwares têm possibilitado maior acesso ao Ensino a Distância - EAD, e a criação de redes de apoio à aprendizagem, conforme definido na seção 3.3.1.

A criação de redes de aprendizagem que utilizam a Internet tem possibilitado, por sua vez a observação de algumas inovações nos processos de construção do conhecimento. Podemos destacar as possibilidades de interação e colaboração entre os componentes das comunidades de ensino, permitindo um prolongamento dos ambientes de aulas, antes restritos aos bancos escolares e aos horários específicos dos cursos. A qualquer momento, pode-se retomar uma discussão inacabada ou propor um novo tema ou novo problema a ser discutido. Outro aspecto importante é a disponibilidade de materiais técnicos científicos para acesso imediato, atividades de resolução de problemas com discussões e roteiros de atividades programadas. Destacamos também como relevante, a forma transparente que podem ser implementadas as discussões, uma vez que estas ocorrem e permanecem disponíveis para todos tomarem conhecimento e opinarem quando desejarem. A utilização destas plataformas para promover aprendizagem matemática será discutida por seus aspectos de aplicação aos ensino no capítulo 5 e faremos a sua descrição técnica no capítulo 6.

Ponte escreve:

> *"a formação deixa de se circunscrever aos momentos de trabalho presenciais, complementados por trabalho individual ou de grupo, mas sempre de natureza discreta, para passar a ter um desenro-*

lar permanente: basta aceder ao computador e adentra-se num mundo de discussões, problemáticas e interacções. Isto é, no ciberespaço a aula não funciona às segundas e quarta feiras das 9:00 às 11:00 horas mas vai conhecendo novos desenvolvimentos ao longo de toda a semana." (Ponte [104], pg 87)

Capítulo 5

Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador: Aplicações à Matemática

O termo *Aprendizado Colaborativo* é utilizado em abordagens de ensino e aprendizagem que pressupõem atividade intelectual, resultante de trabalho em conjunto, em grupos compostos exclusivamente por estudantes ou com algum tipo de tutoria. Esta abordagem se contrapõe a procedimentos tradicionais de ensino baseado em aulas expositivas e centrado no professor. Na *Aprendizagem Colaborativa*, o professor assume um papel de orientador do processo de ensino. Como pressuposto, o aprendizado ocorre quando o estudante trabalhando em grupo se depara com um problema para o qual necessita de ajuda. Então, negocia suas dúvidas com os colegas, que discutem e encontram a solução. Os mediadores do processo de aprendizagem são responsáveis por orientar os estudantes, através de canais de comunicação, a atingirem o objetivo.

Smith & MacGregor, em [130], definiram:

"Collaborative learning is an umbrella term for a variety of educational approaches involving joint intellectual effort by students, or students and teachers together. Usually, students are working in groups of two or more, mutually searching for understanding, solutions, or meanings, or creating a product." ([130])

5.1 Aprendizagem Colaborativa

A *Aprendizagem Colaborativa - AC* envolve diferentes atividades de educacionais em que os estudantes trabalham em grupos. Segundo Panitz [98], AC tem como premissa básica a construção do consenso através de processos de colaboração entre os membros do grupo, destacando as habilidades e contribuições individuais de cada membro.

MacGregor [74] destaca que as raízes da *Aprendizagem Colaborativa* estão na psicologia social e na utilização de grupos pequenos. A teoria que defende o uso de grupos grupos pequenos, juntamente com a psicologia educacional, foi, segundo MacGregor, o que fundamentou as teorias do *Aprendizado Cooperativo* desenvolvidas por David Johnson e Roger Johnson na Universidade de Minnesota, e por Robert Slavin na Universidade Johns Hopkins. As principais referências teóricas para os primeiros trabalhos sobre AC foram o filósofo americano John Dewey e os estudos sobre psicologia cognitiva de Piaget e Vygotsky.

A *Aprendizagem Colaborativa* possui como fundamento a concepção construtivista em que aprendizagem e conhecimento estão relacionados à nossa interação com o meio social. Ao comunicarmos idéias, aoutros, em atividades em grupos, estamos expondo nossas idéias a nós mesmos e justificando-as, de modo a ratificá-las e aprofundá-las. Dalgarno [20] relaciona três princípios teóricos que, em conjunto, definem a aprendizagem do ponto de vista construtivista. O primeiro, atribuído a Kant e depois adotado por Dewey, é que *'each person forms their own representation of knowledge'*. A segunda, atribuída a Piaget, defende que as pessoas aprendem através de processos exploratórios, *'learning occurs when the learner's exploration uncovers an inconsistency between their current knowledge representation and their experience'* (Slavin [127]). A terceira, atribuída a Vygotsky, defende que *'learning occurs within a social context, and that interaction between learners and their peers is a necessary part of the learning process'*(Vygotsky [140]).

Na literatura, encontramos diferenças conceituais entre *Aprendizagem Colaborativa* e *Aprendizagem Cooperativa*, porém, muitas vezes ambos os termos são usados para descrever os mesmos processos metológicos. McInnerney & Roberts [76], estabelecem diferenças para os dois métodos de aprendizagem, caracterizando-os da seguinte forma:

> *"Collaborative is an adjective that implies working in a group of two or more to achieve a common goal, while respecting each individual's contribution to the whole.*
> *Colaborative learning is a learning method that uses social interaction as a means of knowledge building"*

Enquanto,

> *"Cooperative is an adjective meaning to work or act together as one to achieve a common goal, while tending to de-emphasize the input of particular individuals".* ([76], pags.205-206)

Panitz ressalta que as premissas fundamentais de ambas estão na epistemologia construtivista. Panitz, em [98], faz uma comparação entre os dois conceitos, ressaltando o que os diferencia, no que diz respeito à natureza do processo interativo durante o aprendizado. Em nossa pesquisa não nos preocupamos com as diferenças entre os dois métodos de ensino, pois o que os distingue em orientação metodológica pode ser orientado no sentido de completá-las, enriquecendo o campo do *aprendizado em grupo*. Utilizamos inclusive as duas expressões para representar o mesmo processo de aprendizagem. Davidson, Reynolds & Rogers relacionam em [113] várias das abordagens para o *Aprendizado Colaborativo* ou *Cooperativo* enfatizando que:

> *"Actually, there are more similarities than diferences when we compare cooperative and collaborative approaches"* ([22], pg. 5)

Davidson comparou e contrastou as duas abordagens e encontrou cinco atributos comuns:

(i) Tarefas comuns ou atividades de aprendizagem aplicadas ao trabalho em grupo.

(ii) Grupos pequenos focados na interação em atividades de aprendizagem.

(iii) Comportamento de ajuda mútua entre os estudantes.

(iv) Interdependência no trabalho conjunto.

(v) Responsabilidades e deveres individuais.

Slavin [128], que utiliza a denominação *Cooperative Learning*, caracteriza-o como um método de ensino aplicado a grupos pequenos durante as aulas, preferencialmente heterogêneos, para que ocorram interações que promovam a ajuda entre os estudantes. O autor ressalta ainda que

> *"Cooperative Learning methods have been found to have strong and consistent positive effects on such outcomes as race relations, attitudes toward academically classmates, self-esteem, and*

predisposition to cooperate in other settings." (Slavin [128], pg. 73)

Slavin considera que a afirmação acima já é suficiente para justificar a utilização do método.

A estrutura das atividades propostas para o *Aprendizado Colaborativo* é baseada em situações nas quais dois ou mais estudantes são incentivados a trabalharem juntos em alguma tarefa, coordenando os procedimentos para completá-la. Assim, os estudantes participam diretamente do aprendizado dos colegas, de modo que, cada um pode contribuir para o aprendizado de outros estudantes do grupo. Os processos de avaliação das atividades podem estar sujeitos a diferentes critérios, porém, o mais comum é a avaliação individual do que foi agregado por cada indivíduo, durante o processo de colaboração. Alguns autores (Slavin [128], Johnson & Johnson [53] [54]) defendem que os possíveis efeitos benéficos do estudo em grupo dependem do uso de algum tipo de incentivo estruturado.

O *Aprendizado Colaborativo* apresenta a possibilidade de envolver os estudantes em atividades que explorem a compreensão de conceitos, compartilhando idéias, elaborando questionamentos, gerando conflitos e, ainda, comparando e avaliando explanações feitas por membros do grupo.

Fjuk [36] argumenta que o *Aprendizado Colaborativo* não implica necessariamente na construção em conjunto do conhecimento e em negociação de alternativas. Mais precisamente, o método baseia-se na confiança nos colegas de grupo e no professor para dar suporte ao aprendizado. Soransen [131], Dillenbourg, et al. [23] [24], Fjuk [36], sublinham como a característica fundamental da Aprendizagem Colaborativa o princípio da *interação interpessoal*.

Fujk descreve,

> *"Perspectives on collaborative learning thus place emphasis on potential different goals:*
>
> *(i) Joint construction of problem solutions by mutual refinement;*
>
> *(ii) Exploring different opposed alternatives in argumentation;*
>
> *(iii) The students are using each other as a resource.*
>
> *"* ([36], pg. 23)

Dillenbourg, et al., conclui:

> *"Collaboration is a social structure in which two or more people interact with each other and, in some circumstances, some types of interaction occur that have a positive effect."* ([23], pg. 21)

Vygotsky [139] [140], definiu um conceito importante baseado em processos interativos, e que influenciou muitas pesquisas no campo do aprendizado em grupo: *Zona de Desenvolvimento Proximal - ZDP*.
Vygotsky definiu ZPD:

> *"[...] the distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers."* (em [23], pg. 6)

Segundo Vygotsky [139] [140], nos processos de aprendizagem, a diferença entre os estágios de aquisição de conhecimentos podem ser representados por níveis, e a *Zona Proximal* representa a diferença entre níveis de conhecimento adquiridos por um estudante, quando trabalha em grupo, em resolução de problemas. A *Zona Proximal* seria a diferença entre seu nível atual e o nível de desenvolvimento potencial, determinado pela atuação sob orientação e/ou em conjunto com pares mais capacitados. Poderíamos caracterizá-la como diferença entre a capacidade que um indivíduo possui para resolver problemas individualmente e a capacidade para resolvê-los com alguma ajuda. Esta ajuda pode vir de um professor, ou de um colega que já tenha desenvolvido a habilidade necessária para resolvê-lo. Em suas pesquisas com crianças, Vigotsky estudou a hipótese de que *aprender* é despertar processos internos que vêm à tona quando ocorrem interações com pares sociais.

Segundo Schwartz [120],

> *"Many of the current discussions view collaborative learning as the appropriation of ideas from others. [...] People appropriate knowledge when they are given opportunities to produce knowledge."*
> ([120], pg 200)

Slavin [128] investigou, porque em alguns casos, o aprendizado cooperativo enfrentava problemas e os resultados não eram positivos. Neste trabalho, afirma que existem condições específicas sob as quais um curso que utiliza *Aprendizado Cooperativo* deve ser estruturado, para atinjir o objetivo de melhorar o aprendizado. Neste trabalho, Slavin conclui que o aprendizado cooperativo tem um efeito positivo sobre o desempenho dos estudantes, quando os elementos do grupo são cobrados individualmente, e o desempenho de cada membro possui um componente do desempenho do grupo. Slavin [128] sugere pesquisas que apontem métodos de avaliações, e condições específicas para aplicação destas.

5.2 Aprendizagem Colaborativa em Matemática

Os usos de técnicas de ensino baseados em grupos pequenos são estudas pelo menos desde os anos sessenta. Nos anos oitenta, Johnson et al. [53] [54] [55], divulgou uma análise, em que agrupou uma série de estudos, com mais de 120 pesquisadores, que indicavam que os trabalhos em grupo, para aprendizagem, foram considerados mais eficazes, que outras estruturas com objetivos competitivos ou individualistas.

Em geral, o aprendizado de matemática é caracterizado por atividades isoladas e que ocorrem de maneira individualista. A partir dos anos 90, matemáticos publicam relatos de casos em que o aprendizado cooperativo é introduzido em classes presenciais de matemática, em cursos de graduação. Em Davidson [21] são apresentadas várias estratégias para aprendizagem cooperativa em matemática, utilizando grupos pequenos de estudantes. As estratégias presentes em Davidson [21], Davidson et al.. [22], Hagelgans at al. [47], são apresentadas como alternativas didáticas às aulas expositivas e à aprendizagem individual. Segundo Swan [133], *Aprendizado Colaborativo* representa a contraposição entre uma *'cultura' colaborativa* e a *'cultura' de transmissão*. Nesta última, a matemática é vista como um corpo de conhecimentos e procedimentos a serem assimilados em atividades individuais, baseados na *'escuta'*, e na reprodução, através de um ensino orientado por uma estrutura linear de currículo, em atividades expositivas, e avaliações através da prática de exercícios e correções de erros. A *'cultura' colaborativa* pretende apresentar a Matemática através de uma rede de idéias, propondo a construção do conhecimento em conjunto. O aprendizado é visto como uma atividade social, em que os estudantes são colocados frente a desafios, e atingem a compreensão através da discussão. Nesta abordagem, o ensino é visto como um diálogo não linear, com foco no processo e nas conexões entre os conhecimentos, dando importância ao reconhecimento dos erros, explicitando-os, e aprendendo com eles.

> *"Collaborative group work is necessary when the purpose of the session is to develop conceptual understanding or strategies for solving more challenging problems. In these cases, learners need to share alternative views, interpretations or approaches."* (Swan [133], pg. 36)

Fenton et al. [35], Davidson et al. [22], relatam casos de sucesso em abordagens de aprendizado cooperativo com alunos de cursos de graduação de universidades americanas, em disciplinas de Cálculo, Álgebra, Estatística, Matemática Discreta, dentre outras. As diferentes abordagens são baseadas em atividades presenciais realizadas em grupos pequenos trabalhando em sala de aula, trabalhos de casa ou utilizando computadores em laboratórios. Cohen [18] defende que o *Aprendizado Cooperativo* é um método eficiente para o ensino e aprendizagem, quando aplicado em grupos pequenos.

Davidson et al. [22] destacam algumas vantagens relacionadas com aprendizagem em grupo em matemática:

- Os problemas em matemática, muitas vezes apresentam mais de uma forma de resolução. A aprendizagem em grupo possibilita a verificação destas soluções.
- A possibilidade para explorar problemas mais sofisticados, que não seriam adequados às restrições de uma sala de aula tradicional.
- A discussão de conjecturas criadas pelos estudantes e o trabalho em grupo para verificá-las e resolver um problema.

- O fato dos estudantes, em geral, ficarem mais à vontade para fazer perguntas aos seus pares quando estão em grupos pequenos, mais do que quando estão diante do professor na sala de aula tradicional, ou participando em discussões que envolvem toda a classe.

- Problemas de matemática são apropriados para discussões em grupo pois as soluções podem ser discutidas e demonstradas através de raciocínio lógico.

- Quando os estudantes trabalham em grupos pequenos são maiores as possibilidades para visualizarem abordagens alternativas do que quando assistem às resoluções do professor, que geralmente é visto como autoridade no objeto de ensino.

- Quando estudantes trabalham em grupos pequenos são maiores as possibilidades de diferentes grupos apresentarem soluções distintas para o mesmo problema.

Vários autores em Davidson [21], Davidson et al. [22], Hagelgans at al. [47], Dubinsky et al. [30] defendem a utilização de grupos pequenos para o *Aprendizado Cooperativo* ou *Colaborativo* em Matemática, uma vez que aumenta as possibilidades de participação de cada estudante, reduzindo o isolamento individual que ocorre muitas vezes nas classes tradicionais. Neste sentido Burns em [21], afirma que:

> *Students' learning is supported when they have opportunities to describe their own ideas, hear others explain their thoughts, speculate, question, and explore various approaches. To provide for this, learning together in small groups gives students more opportunities to interact with concepts than do class discussions.*

> *(...) they may be more comfortable taking the risks of trying out their thinking during problem-solving situations in the setting of a small group*([21], pg. 25)

Leikin [71] pesquisou como o *Aprendizado Cooperativo* contribui para a formação dos professores, tendo como foco o conhecimento matemático, pedagógico e curricular. Analisou atividades específicas num curso de formação de professores e relata dificuldades por parte dos professores em aplicar o *Aprendizado Cooperativo* principalmente em função da necessidade de esforço intelectual e na disponibilidade de tempo de preparação das atividades. A sugestão da pesquisa é a criação de *redes de colaboração* entre os professores para que tenham sucesso na implementação de *Aprendizado Cooperativo* em escolas.

Essa pesquisa expõe uma realidade muito próxima de nossos professores em que o tempo disponível para preparação de aulas e para própria formação é pequeno, e toda mudança que solicita disponibilidade de tempo enfrenta dificuldades para serem implantadas. E, no caso, o *Aprendizado Colaborativo* ou *Cooperativo* exige muito mais que tempo, exige mudanças nos paradigmas.

5.2.1 Aprendizado em Grupos Pequenos

Davidson realizou as primeiras experiências utilizando o método de ensino com grupos pequenos de estudantes, em um curso de cálculo no início da década de setenta, tendo como inspiração o trabalho do início do século desenvolvido por Dewey. A aprendizagem em grupo, em nossa abordagem, inclui todas as atividades nas quais estudantes trabalham em conjuntos de 2 a 5 estudantes.

O ensino de matemática em cursos de graduação em universidades americanas, adotou, em alguns casos, a partir dos anos noventa, o aprendizado em grupos pequenos (Davidson [21], Davidson et al. [22], Jonhson & Jonhson [53] [54], Jonhson et al. [55]). Fundamentados em teorias construtivistas, organizaram os estudantes, em suas classes, em grupos pequenos para resolução de problemas, o que representou uma nova abordagem para o ensino e aprendizagem de matemática (Hagelgans et al.[47], Davidson [21], Rogers et al. [113], Jonhson & Jonhson [53] [54], Vidakovic [136]).

A justificativa para o uso de grupos pequenos é a crença que quando os estudantes discutem suas idéias com os colegas através de ajuda mútua, estes desenvolvem maior compreensão dos conceitos matemáticos. Isto se daria por uma melhor organização das idéias relacionadas ao assunto estudado, fruto da troca com os pares. Vidakovic & Martin [137] apresentam relatos de professores de matemática que experimentaram um melhor entendimento de um tópico do currículo, aparentemente, depois de explicá-los, em aula, ou a estudantes em particular. Tais crenças e experiências dão suporte à idéia que o aprendizado colaborativo, em grupos pequenos, aplicados a determinados tópicos da matemática pode ser uma estratégia de ensino eficiente.

O **National Council of Teachers of Mathematics**, **NCTM-2000**, ressalta a importância da discussão matemática em grupos pequenos:

> *"An important step in communicating mathematical thinking to others is organizing and clarifying one's ideas. When students struggle to communicate ideas clearly, they develop a better understanding of their own thinking. Working in pairs or small groups enables students to hear different ways of thinking and refine the ways in which they explain their own ideas. Having students share the results of their small-group findings gives teachers opportunities to ask questions for clarification and to model mathematical language".* (NCTM-2000 [94], pg 128)

O NCTM-2000 destaca a importância do professor nos processos de aprendizagem através de grupos pequenos de estudantes. Neste cenário de ensino, o professor deve atuar orientando os estudantes.

> *"Even when students are working in small groups, the teacher has an important role to play in ensuring that the discourse contributes to the mathematics learning of the group members and helps to further the teacher's mathematical goals."* (NCTM-2000 [94], pg. 272)

Vidakovic & Martin [137] acreditam que por meio de resolução de problemas em grupos pequenos, os estudantes compartilham conhecimentos individuais presentes na *Zona de Desenvolvimento Proximal*[1] de cada membro do grupo.

> *"From the standpoint of an observer, we could say that the development of a group's understanding of a mathematical idea, both collectively and at the level of individuals in the group, consists of a series of internalization and externalization transformations or representations alternating with one another. The notion of internalization implies a critical transition or transformation from perceived external social experiences to individual inner thinking, invoking new mental functions within the individual. The formation of new mental functions takes into account the individual's previous experience, their mental structure, and the dynamic nature of group interactions."* (Vidakovic & Martin [137])

[1]Conceito desenvolvido por Vigotsky e discutida na seção 5.1 pg. 127

5.3 Aprendizado Cooperativo em Matemática

Em 1995, a *MAA - Mathematical Association of America* realizou uma série de atividades com objetivo de estudar e acompanhar o desenvolvimento de experiências sobre o *Aprendizado Cooperativo* em diversas universidades americanas, o projeto *CLUME - Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics Education* [2].

Segundo Rogers et al.[113] aproximadamente 150 professores universitários participaram de workshops no Projeto *CLUME*. O projeto apresentou e discutiu diversas experiências em *Aprendizagem Cooperativa*, incluindo o desenvolvimento de sistemas para suporte às estratégias de aprendizagem cooperativa, e a apresentação de relatos, de parte dos participantes, de como utilizaram o aprendizado cooperativo, e quais foram os resultados obtidos.

Rogers et al [113] descrevem o *aprendizado cooperativo* como, no mínimo, tão eficaz quanto estratégias tradicionais, no que diz respeito ao sucesso do aprendizado em matemática. Como resultado, os autores têm se dedicado a pesquisas que procuram responder duas questões: *Porque o aprendizado cooperativo funciona, e como torná-lo ainda mais eficiente?*

Johnson & Johnson descrevem a importância da função do professor no processo de implementação do *aprendizado cooperativo*,

> *"When using cooperative learning in math class, the teacher functions as both an academic expert and a classroom manager to promote effective group functioning."* (Johnson&Johnson [53], pg. 112)

> *"Cooperative learning is essential if math teachers are to promote the goals of problem-solving competency, ability to com-*

[2] O projeto foi reeditado anualmente até 1999

municate mathematically, ability to reason mathematically, valuing of mathematics, and self-confidence in one's ability to apply mathematical knowledge to new problem situations in one's world." (Johnson&Johnson [53], pg. 122)

Sempre que necessário, o professor atua esclarecendo dúvidas relacionadas ao conhecimento matemático necessário para a solução de problemas e incentivando a colaboração nos grupos. Johnson & Johnson destacam questões que devem estar presentes nos grupos quando trabalham em estratégias colaborativas:

(i) *What are you doing?*

(ii) *Why are you doing it?*

(iii) *How will it help?*

As perguntas acima têm por objetivo estimular questionamentos que permitam aos componentes de um grupo ampliar o senso crítico relacionado ao conhecimento matemático abordado em um problema. A primeira pretende levar os estudantes a discutirem a natureza do problema e as possíveis estratégias para resolvê-los. A segunda procura questionar porque usar determinada estratégia, e se é a melhor? O terceiro verifica se o caminho escolhido para buscar uma solução se mostra eficaz.

No trabalho publicado por Hagelgans et al. [47] para a **MAA - The Mathematical Association of America**, encontramos a publicação de resultados de questionários aplicados a professores e estudantes, sobre experiências com *Aprendizado Cooperativo em Matemática*. Algumas das idéias presentes nestes relatos são:

- Durante o trabalho em grupo, os estudantes entendem melhor as explicações dos colegas que as dos profesores.

- As discussões geram, com freqüência, variedades de modos para resolver um problema, e a solução do grupo é geralmente melhor que a maioria das soluções individuais.

- Os estudantes alcançam um melhor nível de compreensão de conceitos, desenvolvendo habilidades para transmissão do conhecimento matemático.

Há na literatura estudos afirmando que nem todos os estudantes se beneficiam do *Aprendizado Colaborativo*. Na tentativa de encontrar respostas para este fato Webb & Mastergeorge [141] [142], Schoenfeld [123], Goos [41], pesquisaram aspectos metacognitivos do pensamento matemático, em processos interativos, onde os estudantes trabalham em resoluções de problemas em grupo. A linha geral das conclusões destes trabalhos aponta para a importância dos mecanismos de suporte aos grupos, através da criação de condições que incentivem questionamentos, e, forneçam orientações e apoio para a colaboração entre os componentes do grupo.

Segundo Webb & Mastergeorge [141] [142] as atividades devem ser preparadas de modo a orientar os estudantes para a elaboração de questionamentos relacionados com o problema, solicitando ao colega explicações a respeito de todos os passos de uma solução, até que esta seja entendida por todos. As pesquisas desenvolvidas apontam o suporte como fundamental, para que uma atividade por meio de *Aprendizagem Colaborativa* obtenha êxito.

> *"Perhaps the most significant implication for teachers is the need to establish participation structures that facilitate students' active engagement with each other's thinking. In particular, holding*

students accountable for explaining and justifying their thinking may afford similar forms of discourse and reasoning when students work collaboratively with peers.
(Goos [41], pag. 301)

Dillenbourg [23], Dillenbourg et al. [23] argumentam que *colaboração* é uma estrutura com origem social em que duas ou mais pessoas interagem e, em algumas circunstâncias, certas interações, podem apresentar efeitos positivos na aprendizagem. Sugerem ainda a necessidade de aprofundar as pesquisas para melhor entender os mecanismos de negociação em atividades que envolvem colaboração.

5.4 Estratégias para Aprendizagem: colaboração e grupos pequenos

Em 1986, a Conferência de Tulane em New Orleans foi o ponto de partida para o movimento de *Reforma no Ensino de Cálculo*. A conferência foi proposta com o objetivo de rediscutir o conteúdo e pedagogia no ensino de cálculo. A partir desta conferência muitas propostas de estratégias pedagógicas foram apresentadas. Neste contexto, o *Aprendizado Cooperativo* foi um modelo que atraiu muita atenção e foi aplicado em diversas universidades americanas.

A partir de 1995, aproximadamente 150 professores de matemática participaram, na **Mathematical Association of America - MAA**, do projeto **CLUME** (**Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics Education**), um seminário para discutir a implementação do *Aprendizado Cooperativo* e para relatos de experências sobre os modelos já aplicados.

Apresentamos aqui algumas das iniciativas que utilizaram o *Aprendizado Cooperativo*, em diversas disciplinas de matemática, relatadas por Rogers et al. [113], onde encontramos exemplos de estratégias didáticas colocadas em prática. Fenton et al. [35] apresentam exemplos em cursos universitários de estatística, matemática elementar para professores, álgebra abstrata, pré-calculo, cálculo diferencial, matemática discreta e topologia. Para cada estratégia, são apresentados: a descrição, os tipos de aplicação, e problemas utilizados nos cursos. As técnicas são flexíveis e dependendo dos objetivos de cada curso e do currículo é sugerida uma estratégia em particular.

> *"Activities then can be planned to develop an understanding of the relevant mathematical concepts and, at the same time, develop these broader skills"* (Fenton et al. [35], pg 49)

As estratégias descritas no trabalho de Fenton et al. [35], apresentam particularidades que são próprias a um tipo de conteúdo ou a uma determinada abordagem. Porém, de um modo geral destacam-se o enfoque na identificação de erros, a ênfase na explicação aos colegas de grupo de conceitos matemáticos utilizados, soluções e dúvidas compartilhadas, e o incentivo à interação, através da comunicação escrita e verbal nos grupos. Algumas estratégias apontam para possíveis benefícios, quando associadas ao uso de tecnologia. Uma característica presente nas estratégias didáticas é a utilização de resolução de problemas, com os estudantes trabalhando em grupos pequenos, e associando mecanismos de avaliação individual.

Segundo estes autores, as estratégias aplicadas em sala de aula são ajustáveis a diferentes atividades, dependendo do objetivo curricular. Encontramos as seguintes classes de atividades: exibir exemplos e contra-exemplos, comunicar idéias matemáticas, leitura e interpretação de definições e teoremas, exposição de idéias oralmente e através da escrita, leitura crítica sobre as explicações dos colegas. Exploram ainda a procura por padrões e generalizações, elaboração de conjecturas e a investigação, de modo a prová-las ou negá-las. Os estudantes são incentivados a aplicar conhecimentos prévios em novos problemas. Cada estratégia pode ser aplicada em alguns destes exemplos, dependendo do objetivo pretendido.

Uma das vantagens apontadas nos trabalhos consultados é a possibilidade de trabalhar com problemas mais complexos, com maior grau de dificuldade, em atividades fora da sala de aula. Quando atuam juntos, em grupos pequenos, os estudantes freqüentemente apresentam abordagens alternativas para um mesmo problema.

Fenton et al. [35] destacam algumas categorias de problemas nas quais as estratégias didáticas seriam aplicáveis:

- Problemas que podem ser resolvidos em mais de uma maneira.
- Problemas que admitem diferentes respostas.
- Problemas que levam a questões relacionadas, ou a tópicos mais sofisticados.
- Problemas que incluem uma variedade de operações e podem ser divididos entre os membros do grupo.
- Problemas que não possuem solução óbvia.
- Problemas que incentivem investigações e elaboração de conjecturas.
- Revisão de problemas.

> *"We want that students to have a deeper understanding of the course material, an increased ability to apply concepts and solve*

problems in new contexts or new situations, and a longer retention of important skills and concepts" (Reynolds et al. [112], pg. 55)

5.4.1 O papel do professor nas atividades em grupo

Segundo Reynolds et al. [112], para que o *Aprendizado Colaborativo em Matemática* funcione é necessário que os professores utilizem métodos que avaliem o aproveitamento individual dos estudantes.

Na literatura encontramos alguns estudos que destacam a importância da atuação do professor, em técnicas didáticas para aprendizagem em grupo, em atividades baseadas na *colaboração* (Rogers et al. [113], Dubinsky et al. [30] e vários autores citados nestas edições). Atividades aplicadas a grupos de alunos têm caráter diferenciado em sua preparação, e necessitam de artifícios que incentivem a troca de idéias de modo a promover o aprendizado dos conceitos matemáticos, discutidos em grupo. Para desenvolver estas habilidades, o professor necessita de conhecimentos sobre a matemática, sobre aspectos pedagógicos do conteúdo bem como sobre processos cognitivos dos alunos. Na preparação da aula, o professor precisa cuidar para que as atividades aplicadas estejam de acordo com os objetivos a serem atingidos, e estes estudos indicam a preparação de roteiros específicos como fundamentais para o sucesso desta técnica pedagógica no ensino de matemática.

Em Rogers et al. [114] encontramos exemplos de atividades planejadas para serem aplicadas em grupos pequenos de alunos e exemplos da atuação do professor junto ao grupo de alunos com objetivo de questionar os resultados obtidos pelos estudantes, induzindo-os a identificarem erros e refletir sobre estes. Nos procedimentos de ensino presencial, estas intervenções são enfatizadas através de verbalizações das idéias envolvidas na atividade.

"Verbalization occurs naturally in cooperative small-group discus-

sions, were students articulate their thinking and reasoning, ask each other questions, challenge others' reasoning, offer alternative approaches, and provide detailed explanations. The introduction of writing into mathematics classes strengthens this verbalization further."

(Rogers et al. [114], pg. 90)

Segundo os mesmos autores, a troca de idéias, durante as atividades em grupo nas salas de aula, é importante para desenvolver nos estudantes habilidades relacionadas com a escrita matemática.

Leikin [71] estudou durante 10 anos diversas formas de integração da *Aprendizagem Colaborativa* em programas regulares de formação e desenvolvimento profissional de professores de matemática. Em suas pesquisas, observou possíveis benefícios da *Aprendizagem Colaborativa* como método facilitador no processo de aquisição de conhecimentos matemáticos necessários ao professor. Leikin utilizou como referência em suas pesquisas, a definição de conhecimento necessário ao professor apresentada por Shulman [124] e discutido aqui na seção 4.1.

Durante o trabalho com professores, as atividades eram focadas nas mudanças ocorridas no *saber matemático dos professores*, após processos interativos de orientação colaborativa e em grupos pequenos. O fundamento utilizado por Leikin, para esta análise, é a teoria de Vygotsky ([139] [140]) sobre a *Zona de Desenvolvimento Proximal - ZPD*, apresentada na seção 5.1.

"Those who could not solve the problem alone at the beginning of the activity could solve it in several different ways at the end."

(Leikin, [71], pag 237)

Leikin descreve *ZPD colaborativa*:

> *"The analysis of the teachers learning reveals several interrelated mechanisms for development of teacher knowledge through their participation in the course: teacher' authentic participation in CL settings, the combination of different CL methods, explanations, the non-routine nature of mathematical problems, and designing activities. These mechanisms strengthened each other and added to each other's potential through the creation of collaborative ZPD."* (Leikin, [71], pag 246)

Neste contexto, a *ZPD colaborativa* contribui para a aquisição de conhecimento matemático do professor, apoiado por processos interativos, associando o conhecimento dos conteúdos curriculares e pedagógicos.

> *"At the end of each course most participants reported that they had come to believe that CL methods were a useful tool to enforce the effectiveness of the learning processes. Still, many teachers thought that it would be difficult to use such methods in school for technical reasons: class size and density of the curriculum."* (Leikin, [71], pag 246)

5.5 Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador - CSCL

As novas *Tecnologias de Comunicação e Informação - TIC* oferecem ao ensino novas possibilidades para diferentes modelos de aprendizagem. Um destes, é o que utiliza ambientes computacionais para aprendizado em grupo, e é denominado por *Ambiente Colaborativo Apoiado por Computador*, uma tradução para *Computer Supported Collaborative Learning (CSCL)*.

Utilizamos em nosso trabalho esta tradução, associada à sigla *CSCL*, por conta da forte representação e do significado universal desta, para o meio acadêmico. Sendo assim, optamos por não criar uma sigla traduzida. Os ambientes *CSCL* utilizam sistemas de *Comunicação Mediada por Computadores* - *CMC*[3] para conectá-los à *Internet*.

A *Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador* - *CSCL* é baseada em aplicações computacionais com objetivo de construir e compartilhar conhecimentos, tendo como referência a teoria sócio-construtivista. As ferramentas *CSCL* possibilitaram novos recursos ao *Aprendizado Colaborativo*. Os projetos baseiam-se em sistemas computacionais que podem dar suporte dinâmico para os componentes dos grupos, que atuam em modo remoto. O processo de ensino e aprendizagem é interativo, baseado em grupos de alunos trabalhando em conjunto, e em diferentes locais.

> *To understand an idea is to understand the ideas that surround it, including those that stand in contrast to it. Idea diversity creates a rich environment for ideas to evolve into new and more refined forms. Facilities for linking ideas and for bringing different combinations of ideas together in different notes and views promote the interaction that makes productive use of diversity.* (Scardamalia [118], pag. 75)

No ensino presencial, quando os estudantes são questionados a respeito de algum assunto, geralmente, é esperada uma resposta imediata. Em um ambiente CSCL, há a possibilidade, em atividades assíncronas, dos estudantes pensarem sobre o problema por algum tempo, antes de responder. Outra possibilidade é a consulta a uma resposta de um colega para comentá-la, ou

[3]Computer-Mediated Communication (CMC) pode ser defina como toda forma de troca de informações entre pessoas que utilizam dois ou mais computadores conectados em rede.

completá-la. Em algumas estratégias didáticas que utilizam o *Aprendizado Colaborativo* tais procedimentos são desejáveis.

5.6 Aprendizado Colaborativo On-line em Matemática

Sobre a *Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador*, encontramos, na literatura, diversos estudos e pesquisas relacionadas às concepções dos projetos de desenvolvimento das ferramentas computacionais. Além dos aspectos técnicos, são discutidas: as concepções pedagógicas, metodologias de ensino aplicadas, influências nos currículos. Um aspecto importante é a adequação aos objetos de aprendizagem específicos. (Bonk & Cunningham [13], Scardamalia & Bereiter [119], Fischer at al. [37], Hron & Friedrich [51], Dillenbourg & Schneider [26], Lowyck [72], Barron & Rickelman [9], Nason & Woodruff [91])

As técnicas de aprendizado colaborativo permitem aos estudantes observarem o que outros colegas estão fazendo, e interagir nesta ação. Davidson [21] descreve que, desse modo, o estudante poderá ajustar o seu modelo mental para aquele objeto de estudo, de modo a construir e internalizar os conceitos ali envolvidos. Observa ainda que os estudantes aumentam suas possibilidades de aprendizado quando interagem entre si e com os professores, principalmente, através das discussões das atividades que estão realizando. No entanto, quando se trata de aprendizado colaborativo on-line em matemática, Nason & Woodruff, e diversas fontes por eles citadas em [91], descrevem:

> *"[...]establishing and maintaining knowledge-building communities [...] in the domain of mathematics has been found to be a*

rather intractable problem .”

Quanto às causas principais, destas dificuldades, aqueles autores citam, entre outras:

> *“Limitations inherent in most CSCL environments' math representational tools and their failure to promote constructive discourse or other mathematical knowledge-building activities.”*
> *“Inability of most ‘textbook' math problems to elicit ongoing discourse and other knowledge-building activity either during or after the process of problem solving”.* ([91], pg 104)

Um problema a ser tratado pelos projetos de ferramentas CSCL para o aprendizado de matemática diz respeito aos instrumentos necessários à comunicação. A construção de ambientes colaborativos de ensino é referenciado por aspectos relacionados ao tipo de atividade desenvolvida e à representação utilizada, e no caso específico que estudamos, às ferramentas matemáticas necessárias à colaboração.

Misfeldt [90] realizou um estudo empírico, por entrevistas, em que procurou identificar como matemáticos escrevem, em processos colaborativos[4]. As entrevistas foram realizadas com 11 matemáticos que não mantiveram contatos face-a-face.

> *“Pen and paper play a central role in the heuristic phase of almost all the mathematicians' work; none of them uses a computer in that phase. This suggests that the computer systems that mathematicians use do not support their heuristic mathematical writing. Since none of the mathematicians connects support for*

[4]A pesquisa simulava a produção de um artigo colaborativamente à distância

heuristics directly to saving information or to communication, it can be argued that computer support for heuristic treatment is not essential for collaboration. But on the other hand one feature with an improved digital writing tool for mathematics could be that it supported heuristic treatment, this could potentially change the mathematical writing process." (Misfeldt [90], pg 9)

"Although each CSCL platform may have different functions, one general characteristic is to promote reflection and inquiry that assist the in-depth learning, and second one is to provide more opportunity of communication with faculty members comparing with traditional environments. Besides those great enriched environments provided by CSCL platforms we, math educators, still have some problems which are specific in terms of math communication and also math education." (Karadag [60])

Nason & Woodruff propõem em [91] atividades com problemas matemáticos que envolvam os estudantes na produção de modelos que possam ser discutidos, criticados e melhorados. Sugerem também que as ferramentas desenvolvidas para dar suporte, permitam a representação de problemas matemáticos, e facilitem a comunicação entre os participantes. Estas proposições têm por objetivos promover e apoiar o discurso matemático em ambientes CSCL. Observamos, no caso tratado na página 106, as dificuldades na comunicação entre os estudantes para a representação dos procedimentos matemáticos necessários à construção de $\sqrt{n}$ na reta real.

A maioria dos relatos sobre as dificuldades com a comunicação matemática diz respeito às limitações com a representação, em diversos aplicativos *CSCL*, tanto no que diz respeito à representação quanto à comunicação em aplicações síncronas. Isto restringe o uso para aplicações que utilizam tópicos de matemática e suas representações, devido às dificuldades para comunicar representações de Algébra e Geometria, por exemplo. A maioria das plataformas que suportam atividades colaborativas apresentam restrições em relação ao uso de figuras no processo de comunicação. Outro aspecto que pode ser considerado um obstáculo ao uso de *CSCL* em *Matemática* são as particularidades de procedimentos do raciocínio matemático, de difícil representação.

Projetos desenvolvidos no **LIMC/UFRJ** procuram por soluções para a representação e comunicação que permitam a modelagem dos diversos modos de atuação em uma sala de aula. Uma das ferramentas é um Chat matemático, o *MathChat*, desenvolvido como um módulo de uma plataforma para EAD, Guimarães et al. [45]. Este permite a comunicação matemática por meio de uma sala de bate papo. O *MathChat* agrega funcionalidades de geração de textos, expressões matemáticas, gráficos e processamento de comandos em um programa de computação algébrica. Para a comunicação de objetos geométricos desenvolvemos o *Tabulæ Colaborativo* que será descrito com mais detalhes no capítulo 6. Construído dentro da classe de aplicativos conhecidos como Geometria Dinâmica (GD), é voltado para a *Aprendizagem Colaborativa* à distância, e possibilita o compartilhamento de construções geométricas. No ambiente do *Tabulæ Colaborativo*, múltiplos usuários participam de sessões eletrônicas manipulando construções geométricas, conectados à Internet, ou numa sala de laboratório, por meio de uma rede local. Todos os participantes podem atuar simultaneamente (isto é, num processo síncrono), no que chamamos de sessão colaborativa, Guimarães et al. [44].

5.7 Dificuldades e Soluções para CSCL

Aplicar a *Aprendizagem Colaborativa* como método de ensino é mais que dividir os alunos em grupos, atribuindo tarefas a serem cumpridas. Há relatos na literatura sobre dificuldades para a verificação do aprendizado, em atividades realizadas em grupos, Hron [51]. Outros autores, como Dillenbourg [27], defendem que os efeitos da *Aprendizagem Colaborativa* dependem da qualidade da interação desenvolvida nos grupos. Slavin [127] e Cohen [17] apresentam resultados positivos para o aprendizado quando ocorreram incentivos através de suporte às atividades colaborativas, devido às dificuldades dos estudantes colaborarem de modo espontâneo. Eles analisaram casos aplicados em atividades em grupo no ensino presencial. Segundo Hron [51], a comunicação, usando ferramentas *CSCL*, apresenta características específicas, e aponta algumas, que podem justificar as dificuldades na comunicação e no aprendizado quando usamos *CSCL*. Por outro lado, sustenta que o reconhecimento das dificuldades pode ajudar a superar as limitações.

Uma grande dificuldade diz respeito à ausência física dos participantes. A não existência de componentes gestuais, voz, identificação física indicam uma limitação, uma vez que estes, muitas vezes, funcionam como mecanismos didáticos importantes nas salas de aula tradicionais. Assim, consideramos que são necessários suportes instrucionais que compensem estas ausências, e diminuam os problemas que estas causam. Como conseqüência, para os ambientes *CSCL*, serão formulados novas características para representações de modelos de ensino, reescritos sob novos paradigmas.

Os sistemas de troca de mensagens apresentam dois aspectos a se destacar. Em atividades síncronas, a troca de mensagens nem sempre é coordenada com o tempo das idéias, do mesmo modo que ocorre quando utilizamos a comunicação oral, pois escrever uma mensagem leva certo tempo, por mais ágil que seja o interlocutor. Por outro lado, atividades que utilizam comunicação assíncrona permitem que mensagens enviadas tenham um tempo maior para serem entendidas, podendo ser lidas e pensadas, com o tempo necessário a cada um dos participantes.

Outro fator a ser considerado, é a necessidade dos estudantes aprenderem *sobre* a tecnologia. Por mais próximo que esteja dos estudantes, este aprendizado é mais uma carga a ocupar espaço na grade de estudo, que no ensino tradicional limita-se ao conteúdo da matéria.

O nível de participação nos grupos é heterogêneo. Na maioria dos casos os estudantes seguem o ritual de leitura das mensagens, formulação de questionamentos, comentários e respostas. Alguns destes processos apresentam dificuldades, quando comparados aos métodos tradicionais de ensino. De acordo com a atividade, os estudantes se confrontam com as limitações das máquinas, e com a velocidade das redes utilizadas para comunicação. A heterogeneidade dos equipamentos e das conexões representa um forte ruído na comunicação. Há muitas evidências deste fato nas transcrições dos experimentos realizados para a nossa pesquisa de tese.

5.7.1 Características dos cenários de Aprendizagem Online

Em vista de experiências positivas com métodos que aplicaram o aprendizado colaborativo em sala de aula (Slavin, [127]), e em cursos matemática no ensino superior (Davidson et al. [22], Dubinsky et al. [30], Fenton et al. [35]) acreditamos que a aplicação dos métodos de *Aprendizagem Colaborativa*, em atividades baseadas em *CSCL*, é apropriada. Por conta das dificuldades já relatadas em sessões anteriores, e tendo como referências os casos de sucesso em experiências em sala de aula com a aplicação de suporte (Webb & Mastergeorge [142]), *roteiros de colaboração* em projetos de ambientes CSCL podem contribuir para melhorar a eficiência no aprendizado *on-line*.

Hron & Friedrich [51] reforçam que:

> *"Instructional support is essential to alleviate possible communication and learning problems"* (Hron & Friedrich [51], pag 72)

Um aspecto a ser tratado nos ambientes de ensino on-line é a grande demanda exigida da moderação, que exige técnicas diferentes das usadas no ensino presencial. A moderação atua na organização da atividade, controla a interação do grupo, determina os objetivos, e atua na motivação dos componentes, uma vez que incentiva a discussão, corrigindo ou indicando erros. Faz parte ainda da ação moderadora a indução a *conflitos cognitivos* através de estímulo a questionamentos e contradições, fornecendo informações que propiciem a reorganização das idéias. O mediador estimula, através das situações propostas, a superação de dificuldades pelos estudantes por meio da elaboração de procedimentos que os levem a argumentar e justificar as idéias.

Esta atuação caracteriza, em muitos casos, o que definimos como *roteiro dinâmico* no capítulo 7. Um aspecto muito relevante é o conhecimento sobre o objeto de ensino, pelo moderador, para que prepare as atividades de modo a induzir as discussões que contribuam para o aprendizado dos estudantes, selecionando tópicos relacionados ao assunto, contemplando os conteúdos curriculares, adequando-os a métodos didáticos que facilitem a aprendizagem.

O desenvolvimento de atividades que interessem aos estudantes e que dêem transparência às atuações individuais é fator de estímulo à participação ativa de cada membro do grupo, evitando que alguns tenham participação ativa, enquanto outros somente assistem. A inclusão nos projetos de ferramentas com componentes visuais, que facilitam os processos interativos são fundamentais para as atividades colaborativas.

Em nossos experimentos para a tese percebemos que a prática de ensino, utilizando ambientes CSCL, solicita um tempo diferente daquele disposto por um professor no ensino tradicional. A preparação de uma sessão colaborativa exige tarefas associadas a objetivos específicos e padrões de avaliação distintos dos tradicionais. A preparação das estruturas que permitem a colaboração é uma tarefa que difere bastante dos procedimentos tradicionais de preparação de aulas. Na Aprendizagem Colaborativa há espaço para que o professor atue, apresentando informações com as funções de demonstrar e transmitir o seu diferencial de conhecimento, sobre o assunto a ser tratado. O que há de diferente é que o exercício do papel de *instrutor* vem acompanhado por uma *rede de apoio* criada para dar oportunidades para os alunos praticarem e discutirem as atividades relacionadas aos assuntos desenvolvidos. A ação do professor em atividades baseadas na *Aprendizagem Colaborativa* ocorre no que Vigotsky definia como *Zona de Desenvolvimento Proximal*.

Alguns elementos importantes nos projetos de ambientes colaborativos são **tempo**, **avaliação** e **formação de grupos e resistência dos alunos**. Estes tópicos necessitam de estudos que contribuam para a adequação das ferramentas tecnológicas baseadas em *CSCL* e das práticas de ensino.

Tempo

Atividades que utilizam *CSCL* são, por características próprias, restritivas em relação ao tempo, quando relacionamos ao *tempo* no ensino tradicional. Durante as atividades síncronas que realizamos em nossa pesquisa os estudantes utilizaram o ambiente colaborativo on-line do TC, para a resolução de problemas. Observamos que o tempo médio gasto, não apresentou grandes diferenças, quando comparado com soluções de problemas com o *Tabulæ* individualmente. Em algumas situações inferimos que o ambiente de colaboração contribuiu para que todos atingissem o objetivo mais rápido. Porém, esta é uma pesquisa que ainda precisa ser realizada com os devidos cuidados. O que nos sugere um diferencial é em relação aos alunos com mais agilidade e com melhor desempenho. Estes, talvez, se trabalhassem de modo individual, com o software ou com lápis e papel, resolvessem os problemas de modo mais ágil, do que discutindo com o grupo.

Comparando o tempo do grupo, com o tempo do aluno com bom domínio do conteúdo, percebemos que o aumento do tempo é resultado da dinâmica própria dos procedimentos que compõem o método de ensino. A *Aprendizagem Colaborativa* tem como pressuposto a participação de todos os componentes do grupo no processo. Isto demanda de cada participante, um tempo de discussão com os outros componentes e explicações, mais detalhadas, por parte dos estudantes. Um estudante que conclui a solução, mais rápido, em relação ao colega que apresenta dificuldades, gasta este diferencial de tempo discutindo com os colegas com dificuldades, de modo que estes atinjam os objetivos propostos no problema. Porém, observando o grupo como um todo, percebemos que o tempo médio gasto é comparável ao do procedimento individual.

Em atividades utilizando ferramentas assíncronas, fóruns ou similares, o tempo adquire outra dimensão. Por exemplo, um problema proposto num fórum pode permanecer por um curso inteiro sendo discutido pelos componentes de um grupo. Geralmente, estes casos são referentes a problemas mais elaborados e que não 'cabem' em sala de aula. No método tradicional de sala de aulas os problemas são resolvidos, geralmente, durante o período da aula, mesmo que em grupo. O professor quando submete um problema para discussão fora da sala de aula, não tem mecanismos de controle sobre a realização do problema. No sistema tradicional não tem como saber se os alunos daquele grupo participaram da solução e como cada um colaborou. Nos processos que utilizam CSCL, as participações e contribuições ficam registradas. Cabe ao professor estabelecer um roteiro de colaboração, de modo que sejam explorados os aspectos relevantes do problema.

Avaliação

O processo de avaliação dos alunos em métodos que usam *CSCL* deve ser objeto de estudos e pesquisas. Sentimos a necessidade de mecanismos que permitam, dentro do processo colaborativo, uma referência ao saber adquirido, resultante da atividade desenvolvida. Este é mais um aspecto que exige do professor uma preparação diferenciada, pois se refere a aspectos subjetivos relativos à participação e contribuição construtiva nas atividades. Tomando-se em conta que as experiências do ensino tradicional são centradas na avaliação individual, é preciso que se estabeleçam mecanismos que permitam avaliar o progresso individual, quando submetidos a atividades em grupo. Serão necessários estudos sobre como avaliar sob novos parâmetros.

Os ambientes *CSCL* geralmente possuem mecanismos que registram as participações individuais e a interação com o coletivo, os registros metacognitivos. Em particular, o software que utilizamos em nosso estudo da tese, o *Tabulæ Colaborativo* possui ferramentas que permitem a reprodução de todos os passos realizados pelo grupo para solucionar um problema, o *revisor passo a passo*, discutido na seção 7.2.1, além de análises das discussões ocorridas no Chat. As estratégias didáticas defendidas nesta tese e apresentadas no capítulo 7 permitem a avaliação das atividades individuais e em grupo.

Formação de grupos e resistência dos alunos

O processo de formação dos grupos geralmente não obedece a critérios rígidos. Em nossas pesquisas, na maioria dos casos, utilizamos a organização dos grupos de modo aleatório. Muitos autores defendem diferentes composições, e que o professor deve interferir sempre que perceber dificuldades na dinâmica de funcionamento de um grupo. Os processos de discussão podem gerar conflitos, o que, enquanto forem restritos às discussões dos problemas, é desejável. Porém, se o conflito atingir as relações pessoais, cabe ao professor avaliar até que ponto está contribuindo positivamente, para a construção do conhecimento do grupo. Quando o conflito apenas provoca distensão entre componentes, bloqueando o bom andamento do trabalho colaborativo, o professor pode mudar a composição ou intervir de modo a eliminar o problema causado.

Outro aspecto a se levar em conta, e que observamos em algumas situações de nossas pesquisas, é a resistência por parte de alguns alunos em participar de atividades em grupo. No início de nossa pesquisa observamos a participação de um grupo de estudantes de duas turmas do ensino tradicional, em atividades de apoio, utilizando um curso na plataforma *Moodle*. Certamente, cada indivíduo leva para a sua vida escolar e acadêmica a sua forma de agir em sociedade. E, não são poucos, os que têm dificuldades quando lhes é exigido um comportamento interativo com os colegas. Contornar estes problemas, despertando o interesse por uma atitude socialmente mais participativa, e sem ser autoritário, é mais um problema a ser enfrentado. Nestas observações encontramos um estudante que tinha facilidade de aprendizagem em matemática e não demonstrava interesse em participar das atividades colaborativas, alegando que *"... isso não passa de perda de tempo"*.

Observamos outro estudante, que apresentava baixo rendimento e desinteresse pelas aulas. Segundo ele, por não conseguir *"... entender matemática"*. Este estudante apenas entrava no ambiente de colaboração, mas, não participava do processo de discussão, com o argumento que *"... não entendo matemática, prefiro decorar os exercícios que caem em provas"*. Provavelmente, apenas olhava as soluções apresentadas pelos colegas e tentava *"decorá-las"*.

Há ainda os que, por timidez, não se sentem confiantes para participar dos processos de discussão. Porém, estes casos foram poucos e isolados e não houve nenhum estudante, de um universo de aproximadamente 70, que tenha se recusado a participar das atividades propostas, durante os 3 meses. Neste universo percebemos que as participações apresentam diferentes graus de motivação e interesse.

Há também, em contrapartida, aqueles que, em sala de aula, têm uma participação apagada, e, quando atuam em discussões mediadas por computador, mostram-se desenvoltos e 'falantes'. No mesmo grupo descrito acima destacamos dois casos distintos: um estudante com ótimas notas, porém com participação nula em sala de aula; e uma aluna com baixo desempenho e da qual o professor jamais ouviu qualquer palavra. O primeiro foi atuante durante as atividades colaborativas, discutia com os colegas através de Chats e Fóruns de forma bastante propositiva. A estudante também passou a interagir bastante com os colegas e com o professor através dos mecanismos de Chat e Fórum presentes na plataforma Moodle. O experimento ocorreu de forma paralela às aulas formais nos últimos três meses do curso, e a estudante conseguiu reverter uma situação de estar praticamente reprovada (possuía notas muito baixas na primeira parte do curso - dois primeiros trimestres), porém, ao final conseguiu atingir os graus necessários para aprovação em matemática.

Muitas das dificuldades observadas, para a implementação da aprendizagem colaborativa têm origem na resistência de estudantes e professores acostumados, por tradição, a considerar a aprendizagem de matemática como uma atividade individual. A *Aprendizagem Colaborativa* exige muitas mudanças na prática de ensino.

Yerion & Rinehart destacam:

> *"Within this model, students are expected to regard themselves and each other as sharing responsibility with the teacher for creating the conditions for learning and for fulfilling the tasks of developing skills and understanding of the subject matter. Teachers also are actively participating. During the group work they are available, when necessary, for consultation, guidance and correction. Perhaps more importantly, before the group work teachers must design and structure the group activities carefully. After the group work they must provide some closure to and feedback on the activities. These tasks are essential in order for collaborative learning to produce satisfying results for both teachers and students."* (Yerion & Rinehart [145], pg 29)

Em relatos na literatura e observações dos experimentos, inferimos que a reação dos professores à utilização de atividades colaborativas está relacionada à necessidade de redefinir sua função. Os processos de *aprendizagem colaborativa* envolvem maiores responsabilidades e menos controle prévio do processo educacional. Isto gera uma compreensível insegurança. Em atividades baseadas em *CSCL*, as 'dificuldades' dos professores são maiores, pois a presença de tecnologia no ensino já torna o processo como um todo menos previsível. Yerion & Rinehart fizeram um estudo específico sobre a implantação de *Aprendizagem Colaborativa* em um curso de Ciência da Computação em uma universidade dos EUA,

> *"Teachers are also afraid because collaborative learning involves redefining our role. It does involve a shift of responsibility and a loss of control. Since course material is developed through student group work, the concepts may not be developed as 'cleanly' or emphasized as 'well'. It is not as easy to know what to do on each class day or what to consider when grading student work. Collaborative learning demands a great deal of reflection, a willingness to experiment, and acceptance of struggle and failure. For teachers who have achieved professional competence and recognition in the more traditional format, practicing collaboration can seem dangerous and certainly uncomfortable".* (Yerion & Rinehart [145], pag 33)

5.8 Níveis de Suporte a Ambientes CSCL

Kollar et al. [66] defendem o uso de *Roteiros de Colaboração* (collaboration scripts) com objetivo de melhorar a qualidade da interação entre os estudantes quando desempenham atividades em grupo.

> *"There is a need for instructional support that guarantees a higher quality of both collaborative learning processes and individual learning outcomes."* (Kollar et al. [66], pag 160)

Utilizamos o termo *Roteiros de Colaboração* para toda a estrutura que permite e incentiva o processo colaborativo em uma atividade. A função desta estrutura é definir a seqüência das atividades, e, atribuir papéis e funções. A estrutura destes roteiros define as características da interação, criando mecanismos e artifícios para que esta ocorra efetivamente no ambiente colaborativo. Este tipo de suporte (*scaffolding*) foi concebido a partir do conceito de *Zona de Desenvolvimento Proximal* de Vigotsky e apresentado na seção 5.1, página 127 (Pea [100]).

> *"Therefore, scripts aim to enhance the probability that knowledge generative interactions such as conflict resolution, explanation or mutual regulation occur during the collaboration process."*
> (Dillenbourg & Tchounikinew [27], pg 1)

***Scaffolding*: Um pouco mais que suporte**

A tradução literal de *'Scaffold'* nos leva a andaime, que é um tipo de apoio utilizado para que algo seja realizado de modo mais fácil, e ao mesmo tempo, fornecendo certa autonomia a quem o utiliza. Nos processos de aprendizagem, este suporte se caracteriza por oferecer assistência ao estudante durante uma atividade, habilitando-o a prosseguir com certa autonomia. Para os aplicativos em ambientes *CSCL* este suporte envolve pessoas e máquinas, de modo que o apoio às atividades de aprendizagem é atribuição do professor e dos colegas, e outra parcela é proporcionada pelas características da interação com o software.

> *"Scaffolds are not found in software but are functions of processes that relate people to performances in activity systems over time."*
> (Pea [100], pag 446).

Pea [100] em estudos sobre este tipo de suporte formula a seguinte consideração:

> *"A theory of scaffolding should successfully predict for any given learner and any given task what forms of support provided by*

what agent(s) and designed artifacts would suffice for enabling that learner to perform at a desirable level of proficiency on that task, which is known to be unachievable without such scaffolding." (Pea [100], pag 443)

"If not explicitly scaffolded, learners may fail to show substantive argumentation, leading to little acquisition of domain-general knowledge about argumentation." (Kollar et al. [65], pag 331)

"More recently, as computer tools have become increasingly used for supporting learning and educational processes in school and beyond, the concept of scaffolding has been more commonly employed to describe what features of computer tools and the processes employing them are doing for learning." (Pea [100], pags 429-430)

5.8.1 Roteiros de Colaboração

Em relação ao aprendizado colaborativo, o suporte ocorre em duas linhas: o instrucional oferecido pelo roteiro em cada atividade; e aquele que define a estratégia de colaboração aplicada. Em relação a este último, propomos modelos para o ensino de matemática, nesta tese[5].

Os roteiros têm por objetivo o suporte aos estudantes em atividades colaborativas à distância ou realizadas em laboratórios conectados à rede local. O roteiro deve fornecer as informações necessárias para a realização da atividade. Em particular, deve encaminhar o grupo para o melhor aproveitamento do objeto de ensino, criando artifícios através das discussões.

[5] Apresentados e discutidos no capítulo 7.

Kollar et al. [66] apontam as principais características dos roteiros de colaboração: objetivos específicos, coordenando as atividades em uma situação particular; engajamento em atividades específicas, de acordo com os objetivos pré-definidos do roteiro; seqüência de ações para orientar o processo colaborativo durante as atividades; mecanismos de gerenciamento das funções de cada estudante enquanto trabalha em grupo; e as formas de representação.

> *"As a working definition, a collaboration script can now be described as an instructional means that provides collaborators with instructions for task-related interactions, that can be represented in different ways, and that can be directed at specific learning objectives. These objectives can be reached by inducing different kinds and sequences of activities, which are implicitly or explicitly clustered to collaboration roles. Scripted activities can be broken down into individual acts that together form a larger activity, and scripts can vary with respect to how much structure they provide".*
> (Kollar et al. [66], pags 162-163)

Um tipo de roteiro aplicado em ambientes colaborativos apresenta uma seqüência de frases pré-definidas que podem ser utilizadas durante uma discussão de um problema. Em alguns sistemas as frases apresentam típicos termos usados durante uma argumentação, ou respostas típicas de contra-argumento. Baker & Lund [2] descrevem uma interface de comunicação onde os estudantes selecionam frases, utilizando botões, enquanto realizam uma atividade. Os botões apresentam inícios de frases típicas de um processo de discussão, tais como: *'Eu proponho ...'; 'Eu penso que ...'; 'Porquê?'; 'O que podemos fazer agora?'; 'Você concorda?';* etc. Este tipo de roteiro estabelece um controle sobre os diálogos, e direciona os estudantes durante uma atividade. Há dúvidas se, em um processo bastante direcionado como este, os estudantes perderiam o foco no objeto de estudo, dedicando-se mais à interface, procurando por frases que melhor encaixem no que gostaria de comentar com os colegas.

A concepção que adotamos em nossas pesquisas é a do diálogo livre, não existindo formatos de expressões pré-definidos. Os questionamentos são propostos nos roteiros, e/ou quando ocorre mediação em uma atividade. O professor pode incentivar um processo de argumentação através do que definimos como *roteiro dinâmico*. Este é definido pela atuação do mediador, que orienta os participantes com frases que questionam uma solução, ou promovem algum conflito para que os estudantes concluam algum resultado esperado. É um procedimento baseado na apresentação de *argumentos* e *contra-argumentos* e *aceitação*. Kollar et al. [66] investigaram *roteiros de colaboração* em ambientes *CSCL* quando os estudantes seguiam a seqüência de argumentos, contra-argumentos e aceitação.

Um tópico central nas pesquisas em *CSCL*, segundo Weinberger et al. [143], é a dificuldade dos estudantes em estabelecer uma discussão baseada em argumentação sem algum tipo de suporte à colaboração. Weinberger et al. [143] concluíram, em suas pesquisas, com *roteiros de colaboração* em ambientes *CSCL* no ensino superior, que a presença dos roteiros pode melhorar a qualidade do discurso e a capacidade de argumentação dos estudantes.

> *"Scripts could be integrated into a CSCL environment and proved to facilitate the percentage of grounds and counterarguments that learners construct in argumentative discourse".* (Weinberger et al. [143], pag 725)

Um aspecto que observamos nos estudos e pesquisas desenvolvidas pelos autores consultados, diz respeito à relação que estabelecem entre a maior eficácia dos roteiros e a aplicação a atividades que utilizam conhecimentos prévios. Seria mais fácil construir processos de argumentação quando já existe um certo domínio sobre o objeto que será discutido. No caso específico do aprendizado de matemática, isto se aplica às estratégias baseadas em resoluções de problemas. Nestes, os estudantes desenvolvem uma discussão orientada por *roteiros de colaboração* utilizando conhecimentos prévios para construir os argumentos. Isto pode ser verificado nos fragmentos das discussões apresentados no capítulo 7.

Capítulo 6

Educação a Distância e Ambientes Computacionais para Aprendizagem Colaborativa

Apresentaremos neste capítulo definições, um pouco de história e uma revisão das teorias sobre sistemas desenvolvidos para *Ensino a Distância - EAD*, explorando métodos e estratégias para o desenvolvimento desta forma de instrução. Faremos uma breve descrição dos aspectos técnicos, e as concepções educacionais de projetos das plataformas desenvolvidas para *EAD*. Apresentamos a concepção do projeto do *Tabulæ Colaborativo*, destacando as características **CSCL** do software.

6.1 Ensino à Distância - EAD

O termo *Educação à Distância* representa uma variedade de modelos educacionais que possuem uma característica em comum: estudantes e professores separados fisicamente e interligados através de algum canal de comunicação.

Em muitas das situações os estudantes e professores estão separados também em relação ao tempo. Como em outros modelos de ensino, a *Educação a Distância* pode ser construída com os seguintes componentes: conteúdos curriculares; interação com professores, colegas e equipamentos; aplicações práticas; e avaliação. Atualmente, muitos dos modelos de *Educação a Distância* usam diferentes tecnologias e aplicações diversas.

Keegan [63] utiliza o termo *Educação a Distância* como representante da relação entre *Ensino a Distância* e *Aprendizado a Distância*. Neste mesmo trabalho apresenta algumas definições para *EAD*. Destacamos a definição:

Definição 6.1 (Educação a Distância)**.** *Distance education is planned learning that normally occurs in a different place from teaching and as a result requires special techniques of course design, special instructional techniques, special methods of communication by electronic and other technology, as well as special organizational and administrative arrangements. (Moore & Kearsley [79], pg. 2)*

6.1.1 Breve Histórico

Segundo Keegan ([63], pg 7), a história da educação à distância teve início no início do século XIX, associada às demandas da revolução industrial. A tecnologia utilizada no início foi a comunicação impressa, que sustentou por muito tempo os famosos cursos por correspondência, que utizavam os serviços de correios. Os objetivos principais, ao utilizar ensino à distância, eram: fornecer instrução de qualidade ao estudante separado geograficamente dos locais de ensino, e por conseqüência diminuir os custos do processo instrucional, oferecendo acesso a uma grande parcela de estudantes.

Alguns críticos dos cursos por correspondência, consideram o seu o êxito limitado, por conta de sua fundamentação no atendimento individual. Os estudantes recebem a instrução individual de um especialista (professor) da matéria, que analisa cada correspondência recebida, reenviando-a com as considerações cabíveis. Efetivamente, este sistema torna-se caro pelas dificuldades em alcançar um grande número de estudantes e manter um bom padrão de qualidade no ensino.

Segundo dados publicados pela UNESCO (IITE [52], pag. 4), o primeiro curso à distância que se têm notícia foi oferecido por Isaac Pitman, em 1840, por correio aos estudantes do Reino Unido. Em 1850, Gustav Langenscheidt publicou *Lehrbriefe*, curso de linguagem por cartas. Como relata a mesma fonte, as oportunidades para estudos à distância de nível superior tiveram início com a fundação da *Universidade de Londres* em 1836, quando se permitiu que estudantes de outras instituições conveniadas fizessem os exames da universidade. A partir de 1858, os exames foram abertos para candidatos de todo o mundo, o que acabou por influenciar os currículos de diversas instituições, de acordo com o currículo estabelecido pela Universidade de Londres.

Nos EUA, várias iniciativas ocorreram a partir de 1870. Segundo a mesma fonte, em 1873, Anna Eliot Ticknor criou um sistema de estudos por correspondência para mulheres, denominado Ticknor's Society e, em 1874, um programa de estudos por correspondencia foi criado na Illinois State University. Devido ao sucesso de publicações num jornal diário na Pensilvânia, chamado The Colliery Engineer, sobre recomendações para evitar acidentes em minas, foi criado, em 1891, um curso independente que serviu de modelo para uma série de outros, sobre diversos assuntos. William Rainey Harper é considerado como o pai do ensino por correspondência nos EUA, por ter criado o primeiro departamento de ensino por correspondência, em 1892, na Universidade de Chicago.

De acordo com a linha histórica, o documento da IITE destaca três fases do desenvolvimento da *Educação a Distância*. A primeira fase pode ser caracterizada por material impresso, proporcionado pelas facilidades de impressão e da difusão dos serviços postais. Eram produzidos cadernos e apostilas com roteiros de instruções especialmente desenvolvidos por tutores por correspondência. A invenção do rádio, na década de 1920, e da TV, na de 1950, fizeram com que estes passassem a ser incluídos como ferramentas em muitos programas de *Educação a Distância*.

A segunda fase é marcada pela criação da **Open University** do Reino Unido, em 1969, integrando pela primeira vez múltiplas mídias, apesar de prevalecer a mídia impressa. A **Open University** caracterizou-se nesta fase pela produção de materiais (incluindo as fitas cassetes, de áudio) em grandes quantidades, que eram distribuídos pela universidade para os estudantes, em processo de comunicação em sentido único. Também foram criados modelos de dupla comunicação, através da correspondência entre tutores e estudantes. A característica deste sistema é um alto custo inicial, porém, o custo de cada aluno adicional é baixo, uma vez que os materiais já foram produzidos.

A terceira fase da *Educação a Distância* é demarcada a partir do uso das ferramentas *Tecnológicas de Informação e Comunicação - TIC*, como base do processo de difusão do ensino. Nesta fase, passou-se a usar sistemas que utilizam comunicações síncronas ou assíncronas. A característica principal da tecnologia utilizada nesta fase é a interatividade, tanto nos procedimentos síncronos quanto nos assíncronos. A utilização das TIC possibilitou planejar sistemas com maiores facilidades para interação estudantes-tutores e estudantes-estudantes. Estas ferramentas tornaram disponíveis aos estudantes recursos que o desenvolvimento tecnológico proporciona. As caracterizações principais são altos custos iniciais, na produção, e custos diluídos devido a possibilidade de atendimento massificado. Outra tendência a se destacar são os softwares gratuitos, muito utilizados nos processos de ensino e aprendizagem, e são, atualmente, uma tendência cada vez mais presente.

O desenvolvimento das TIC e as novas possibilidades de inserí-las nos processos educacionais, abriram novas possibilidades para EAD. A adaptação de ferramentas da mídia, como áudio e vídeo, ou desenvolvidas com finalidades educacionais, tranformou o Ensino a Distância em processo de ensino com características próprias, e assim é tratado por pesquisas no campo da educação. A partir da década de 1990, com o desenvolvimento de ferramentas tecnológicas voltadas para aplicações no ensino, os cursos de EAD começam utilizar computadores pessoais (PC). Inicialmente, como forma de suprir a demanda complementar ao ensino tradicional em locais onde a escola e a universidade têm dificuldades em atender à demanda.

Keegan descreve a evolução, com o passar do tempo, na *Educaçao a Distância*:

> *"The message of this presentation is that the first 100 years of distance education were fraught with problems and criticism. A major breakthrough occurred in the1970's with the foundation of the Open Universities, of which the Hellenic Open University is an important example. Distance education finally triumphed in the1990's. Today distance education is a rich and complex form of education and training provision with 5 main subdivisions: distance education courses, e-learning, synchronous e-learning systems, use of WWW on-campus, mobile learning".*
> (Keegan, [64], pag. 1)

6.1.2 Impactos da Rede Mundial de Computadores (WWW) na EAD

Hoje, a **World Wide Web** é entre as novidades tecnológicas a de maior sucesso educacional. A *rede mundial de computadores* é considerada uma ferramenta poderosa para a *Educação a Distância*, pois integra texto, áudio e vídeo, permitindo estas aplicações em procedimentos interativos (Mioduser & Nachmias, [78]).

A *rede mundial de computadores*, popularmente chamada de *Web*, é utilizada de modo assíncrono nos diversos aplicativos com referências educacionais (hipertextos, Fóruns de discussão, etc.), mas ampliou as possibilidades dos aplicativos educacionais por meio do suporte a eventos síncronos. Cada vez mais as instituições de ensino têm utilizado a *rede* para treinamentos e cursos, ministrados total ou parcialmente à distância.

Em um de seus estudos mais recentes, num seminário organizado pela **Open University**, Keegan [64] apresentou dados sobre a ampliação do uso da **World Wide Web** a partir da virada do século XXI. Segundo Keegan, o uso de meios eletrônicos para o ensino (e-learning) por volta do ano 2000 era de cerca de um milhão de cursos, sendo, 30.000 deles oferecidos no formato on-line.

Segundo Keegan,

> *"(...) e-learning includes online learning, web-based training, virtual universities and classrooms, digital collaboration and technology assisted distance learning."*

Somente o *WebCT*[1] possuía 5.100.000 estudantes cadastrados em 123.000 cursos, desenvolvidos por 33.000 universidades e faculdades para 1.100 insti-

[1] Um CMS - Sistema de Gerenciamento de Cursos

tuições em 48 países.

Em 1998, a *Open University* do Reino Unido declarou que 50.000 de seus estudantes participaram de atividades on-line e enviaram 70.000.000 mensagens por correio eletrônico e que estas foram lidas 700.000.000 de vezes. Em 1999, a *Open University* de Hong Kong relatou que a biblioteca virtual era composta por 500.000 volumes destinados para consultas de estudantes à distância, e que estes foram consultados 5.200.000 vezes por seus 25.000 estudantes.

Keegan revela que o estágio atual da *Educação à Distância* compreende diversificadas e complexas formas de educação e treinamento compostos por diferentes sistemas: *Universidades Abertas* e cursos de educação à distância; sistemas eletrônicos de ensino (*e-learning*); Sistemas eletrônicos síncronos; *Rede Mundial de Computadores* nos campus; Sistemas de aprendizado móveis (*Mobile Learning*)[2].

As perspectivas de difusão da EAD são grandes, principalmente com a popularização do acesso a dispositivos móveis. Em 2005, a *Ericsson* anunciou que o número de dispositivos móveis no mundo era 2 bilhões e que em 2010 serão provavelmente 3 bilhões, para uma população de 6 bilhões de pessoas.

6.2 Plataformas para Ensino à Distância

A partir dos anos 1980's os computadores tornaram-se mais acessíveis e criaram uma demanda para uso instrucional. Na década de 1990, surgiram sistemas específicos para gerenciamento das técnicas instrucionais. Os sistemas para *Instrução Gerenciada por Computador- CMI*[3] foram desenvolvidos

[2]Uso de tecnologias móveis aplicadas ao aprendizado, telefones celulares, PDA's, PC's de bolso, conectados à Internet.

[3]Computer-managed Instruction

para permitir o gerenciamento de registros, o controle, a inscrição e as tarefas relacionadas às atividades instrucionais, quando utilizadas ferramentas computacionais, operando de modo remoto. Estes sistemas permitem que estudantes trabalhem de modo independente, através de terminais conectados a um computador de grande porte. Este computador geralmente é um servidor de rede, dedicado ao processamento de um volume grande de informações. Com o crescimento das possibilidades de acesso à *Internet*, os sistemas CMI começaram a despertar maior interesse junto às instituições educacionais. Uma pesquisa nos EUA, realizada pelo *National Center for Education Statistics*, mostrou que 58% das instituições com cursos pós-secundários ofereciam cursos assíncronos via *Internet* no final dos anos 1990's. E ainda indicavam que 82% pretendiam oferecer cursos neste modelo ou aprimorar os que já existiam, para o período 2000-2001. (Barron & Rickelman[9], pag. 58)

Embora a literatura não faça grandes distinções entre os *Sistemas de Gerenciamento de Cursos -CMS*[4] e *Sistemas de Gerenciamento de Aprendizagem - LMS*[5], uma vez que estas duas categorias de softwares possuem características coincidentes, Barron & Rickelman [9] delimitam as diferenças entre ambos.

> **Sistemas de Gerenciamento de Cursos - CMS**: softwares que são projetados especificamente para a distribuição e gerenciamento de cursos on-line e de funcionamento assíncrono.
>
> **Sistemas de Gerenciamento de Aprendizado - LMS**: pacotes de softwares, de características mais amplas, oferecendo uma seqüência de atividades programadas, conteúdos e ferramentas

[4]Courses Management Systems

[5]Learning Management Systems

> de comunicação, que dão suporte ao projeto e à distribuição dos cursos baseados em computador, registrando e acompanhando usuários através dos registros de seus progressos. (Barron & Rickelman[9], pag. 58)

Em nossa pesquisa trabalhamos junto ao **LIMC - Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e das Ciências**[6], que utiliza em seus diversos projetos o *Moodle*. O *Moodle* é um CMS de código aberto (*open source*) projetado para dar suporte ao ensino e aprendizagem. Tem por objetivo criar cursos *on-line* com ênfase em pedagogia baseada no *construtivismo social* (seção 5.1). O *Moodle*, descrito por Dougiamas [28] [29], é muitas vezes identificado como *Sistema de Gerenciamento de Aprendizado (LMS)* ou *Ambiente Virtual de Aprendizagem (VLE)*.

A plataforma foi desenvolvida por Dougiamas com o objetivo de criar um sistema referenciado em teorias de leitura e escrita, baseadas no *construtivismo social*. Este traz para o aprendizado elementos de reflexão e interação ativa relacionadas aos objetos de ensino, aos professores e principalmente entre os estudantes. Segundos estes princípios, o Moodle pretendeu em sua concepção inicial implementar um software para suporte a cursos on-line que utilizam texto em diferentes modelos.

> *"Reading and writing can be a powerful way to learn, if conducted in an environment that supports it. Both reading and writing are skills that can be developed. Reading well requires critical literacy, metacognition, and reading strategy while writing can be a powerful way to develop knowledge in the writer while construc-*

[6]Uma parceria de diversas universidades coordenadas pela UFRJ. O LIMC produz diversos materiais para uso em escolas de nível fundamental e médio, incluindo o *Tabulæ Colaborativo*, livros, sítios na *Internet* etc.

ting texts for others. An Internet environment that fosters reading and writing can encourage the participant to be a reflective, active learner, by prompting written responses of various kinds. By mixing constructivist classroom approaches with reading and writing there are potentially many powerful benefits to be realized for both students and teachers."
(Dougiamas, [28])

O *Moodle* foi desenvolvido como um sistema *'web'* em que a criação de cursos não exige grandes conhecimentos de informática, sendo acessível a todo usuário da *rede mundial de computadores*. Neste sistema, os professores podem criar cursos e adicionar módulos didáticos baseados em atividades de leitura e escrita. A maior vantagem em utilizar uma plataforma *CMS* para ensino aprendizagem é a menor dependência dos estudantes estarem no mesmo lugar e ao mesmo tempo.

6.3 Tabulæ Colaborativo: Geometria Dinâmica e Colaboração Matemática à Distância

O *Tabulæ Colaborativo* - *TC* foi concebido como uma ferramenta para *CSCL*, com características de *Geometria Dinâmica* e compartilhamento de construções geométricas através da Internet, ou utilizando redes locais (Guimaraes et al. [44], Moraes [88]). Assim, o software permite a aplicação de estratégias didáticas colaborativas em cursos à distância ou em atividades realizadas em aulas em laboratório (Mattos et al. [81] [80]).

A modelagem dos diversos modos de atuação em uma sala de aula de matemática tem guiado o desenvolvimento, pelo grupo coordenado pelo professor Luiz Carlos Guimarães, na UFRJ, de ferramentas de ensino que diminuam as limitações dos sistemas *CSCL*, apresentadas na seção 5.6 (Nason & Woodruff [91], Misfeldt [90]). O *Tabulæ Colaborativo* está em desenvolvimento há alguns anos, e versões preliminares de sua implementação foram descritas anteriormente (Barbastefano [8], Guimaraes et al. [43]). A configuração que permite a formação de grupos de estudantes foi desenvolvida para os experimentos iniciais (Moraes [88]) e cada sessão é preparada previamente por meio de um aplicativo *web*[7] que denominamos *Área Administrativa do Tabulæ – AAT*, descrito na seção 6.3.1, página 176.

A versão atual é bastante mais sofisticada, como descrevemos na seção 6.3.1, e inclui um software servidor que permite a escolha entre configurações que variam de um modo totalmente expositivo a modos totalmente colaborativos. Quando conectados em grupo, os estudantes interagem livremente, recebendo todo o suporte matemático necessário dentro do ambiente de *Geometria Dinâmica*, além do *apoio* das características implementadas para suporte às estratégias didáticas colaborativas. Na seção 6.3.2, descrevemos a nova estrutura de gerenciamento das *atividades colaborativas* por meio de um módulo do *Moodle*.

6.3.1 Estrutura de Colaboração: Geometria Dinâmica e Comunicação

Construído dentro da classe de aplicativos conhecidos como Geometria Dinâmica (GD), o *Tabulæ Colaborativo* é um software projetado para a aprendizagem colaborativa à distância, e possibilita o compartilhamento de construções geométricas e texto. No ambiente do *Tabulæ Colaborativo*, múltiplos usuários participam de sessões eletrônicas manipulando construções geométricas. Todos os participantes podem trabalhar simultaneamente (isto é, num processo

[7] J2EE© da Sun Microsystems

síncrono), no que chamamos de sessão colaborativa. Naturalmente, sessões assíncronas são também possíveis (Mattos, et al. [80], Guimaraes et al. [44], Moraes [88]).

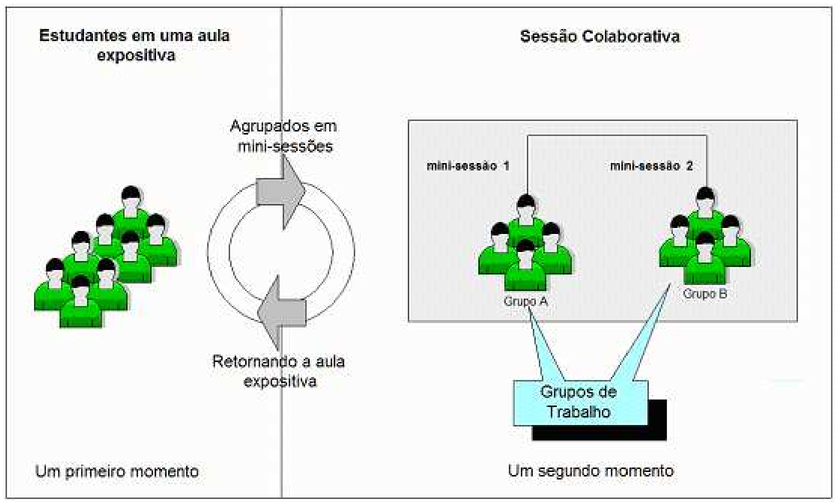

Figura 6.1: Processo de colaboração

Para os primeiros experimentos, o gerenciamento das sessões colaborativas era feito por meio de uma interface *web*, onde eram criados as estruturas de cursos, disciplinas, sessões colaborativas e mini-sessões. A organização dessas sessões apresentava um contexto de ensino no qual eram criadas uma ou mais mini-sessões, consecutivas ou não, em que os estudantes eram reorganizados em grupos (figura 6.1). O *aprendizado colaborativo* ocorre nas mini-sessões, onde os participantes de cada grupo interagem usando *Geometria Dinâmica - GD* e as *funcionalidades*[8] especiais agregadas (Chat, interface, roteiros didáticos, etc.) para dar suporte à colaboração, compondo o *roteiro de colaboração*. Toda sessão colaborativa é baseada numa tela em branco com funcionalidades próprias à *GD*, seguindo um *roteiro de colaboração*.

[8]Ver seção 7.2

O aplicativo *web* é responsável por inscrever e autenticar os participantes em uma sessão colaborativa. Com características de CMS descritos na seção 6.2, e, na AAA são atribuídos, previamente, os seguintes papéis a cada participante: **Coordenador**, **Expositor** e **Aluno** (Moraes [88]). Nas sessões, todos os participantes são cadstrados como alunos, podendo ainda ser expositores, papel que assumirão um de cada vez. O coordenador de uma sessão é aquele que gerencia a dinâmica da sessão, atribuindo funções aos colegas quando acha conveniente, se solicitado por um participante, ou ainda, seguindo o *roteiro de colaboração*.

Todos os participantes inscritos numa sessão ou grupo de mini-sessões trabalham simultaneamente sobre a mesma atividade de aprendizagem. A comunicação dos objetos geométricos ocorre por meio do que definimos inicialmente como **área pública**, e atualmente denominamos **quadro negro** (ver seção 7.2.3), que é o espaço de trabalho compartilhado entre os membros da sessão. Os objetos criados neste local tornam-se instantaneamente comuns a todos os participantes da sessão colaborativa. A manipulação desses objetos compartilhados é gerenciada por um *coordenador* da sessão. Este permite que cada participante da sessão acesse a área pública por vez e assim propague as suas construções. Porém, cada participante pode copiar os objetos da *área pública* para a sua *área privada*, e, como na simulação do **caderno de anotações**, anotar sobre o objeto copiado, ou refazê-lo. O estudante pode salvar o conteúdo de seu **caderno de anotações** quantas vezes desejar. O gerenciamento desta estrutura de colaboração vai respeitar o *Roteiro de Colaboração* definido pela *estratégia didática*[9] aplicada.

A comunicação matemática é realizada, então, em uma área pública (visível a todos os participantes), que representa o *quadro negro* existente em uma

[9]Apresentadas e discutidas no capítulo 7

sala tradicional, e que tem disponível todas as ferramentas de um ambiente de *Geometria Dinâmica*. A solicitação de escrever na área pública é feita através do Chat, em tempo real. No *caderno de anotações* (visível somente a cada estudante) pode-se copiar elementos da área pública, e desenvolver as atividades propostas. Na figura 6.2 temos a representação do *quadro negro* no alto e à esquerda e abaixo e mais à direita temos o *caderno de anotações* (Mattos, et al. [80], Guimaraes et al. [44], Moraes [88]).

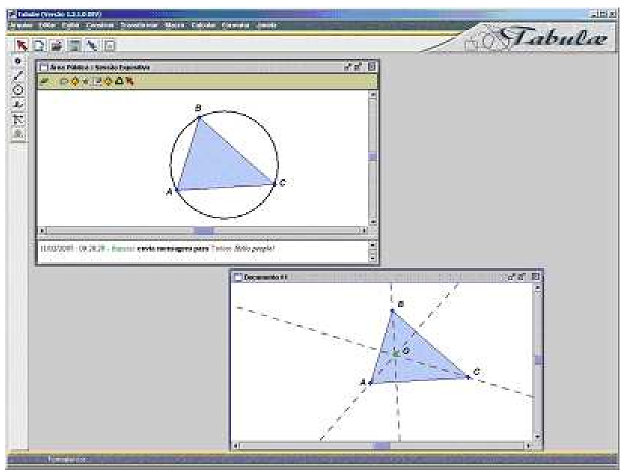

Figura 6.2: Estrutura de comunicação: público - privada

6.3.2 Área Administrativa: Módulo TC no Moodle

Como parte da integração dos projetos desenvolvidos no **LIMC - Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e das Ciências**, o de gerenciamento do processo colaborativo do *TC* foi reformulado e desenvolvido como um módulo[10] da plataforma *Moodle* [89]. Na atual versão a *sessão colaborativa* é representada por *atividades colaborativas* que podem ser agregadas à estrutura de cursos do *Moodle*. Para usar o

[10]As justificativas pedagógicas são apresentadas na seção 7.2.8

Tabulæ Colaborativo devemos instalar o *módulo TC* na plataforma Moodle.

O gerenciamento das *atividades colaborativas* mantém, basicamente, as mesmas funcionalidades que o modelo anterior, através da *AAT*. O módulo proposto utiliza a autenticação de usuários do *Moodle* para os cursos da plataforma e usa a estrutura de formação de grupos em um curso. Por meio desta ferramenta, podemos administrar as funções de cada participante nos grupos (Coordenador, Expositor, Aluno), bem como a edição dos roteiros didáticos aplicáveis a cada estratégia proposta. Esta integração permite agregar as funcionalidades já existentes na plataforma a uma atividade desenvolvida com o *Tabulae Colaborativo*, potencializando as possibilidades didáticas da ferramenta.

Ilustramos o processo de preparação de uma atividade com o *TC* usando o *Moodle* por meio das figuras em seqüência.

Em qualquer *tópico* de um curso, por meio da janela de opções 'Acrescentar atividade ...', o professor acessa uma tela em que escolhe as características que deseja para a sessão colaborativa. A figura 6.3, apresenta duas atividades criadas: **Áreas Equivalentes** e **Grupos Especialistas**.

Figura 6.3: Tópico de um curso no *Moodle* com duas atividades adicionadas

Na tela apresentada na figura 6.4 o professor escolhe o nome da sessão, faz uma descrição resumida, e determina o período de tempo que o grupo deverá realizar a atividade. Nesta tela o professor determina como será a organização dos grupos.

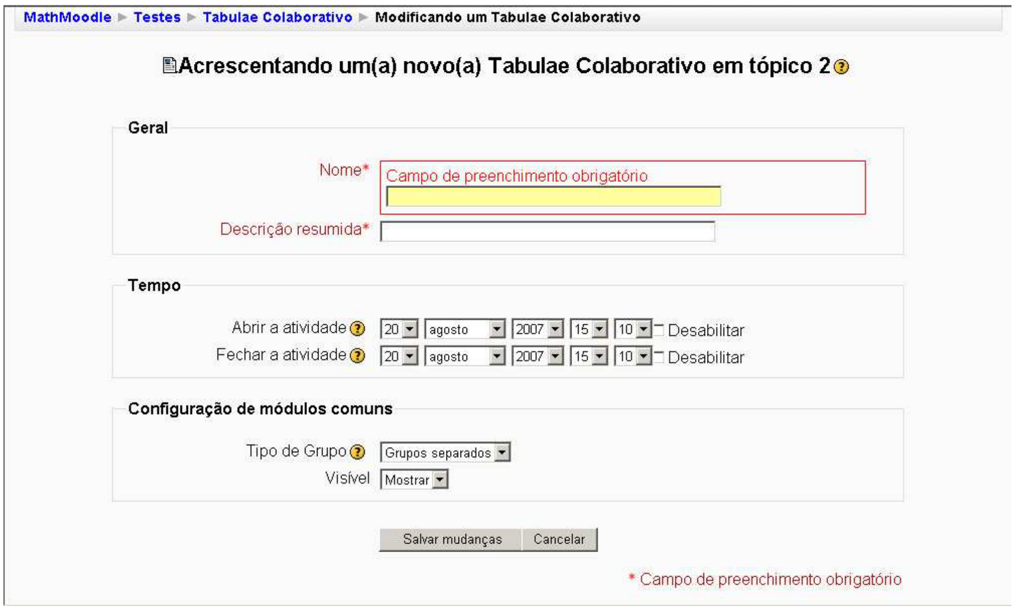

Figura 6.4: Tela de edição de uma nova atividade com o TC

Na figura 6.5, o professor determina quais grupos do curso farão a atividade programada.

Figura 6.5: Escolha dos grupos do curso que participarão da atividade

Na figura 6.6, uma nova tela apresenta um editor de texto do *Moodle* para a criação do *roteiro do grupo*. O professor pode criar um roteiro diferente para cada atividade, se assim o desejar. Pode ainda, 'copiar do grupo... ' se desejar aplicar ao grupo G2 o mesmo roteiro que já criou para o grupo G1. A navegação entre os roteiros é facilitada pelo *link de navegação*, dispostos no alto da tela, neste caso o professor pode seguir para o roteiro do próximo grupo ou se preferir para o do grupo anterior. Isto facilita quando o professor prevê pequenas mudanças de um roteiro para outro podendo, de modo ágil, 'passear' entre os roteiros.

Figura 6.6: Editor do roteiro do grupo G2

Como parte do *Roteiro de Colaboração*, a designação de funções de cada estudante nos grupos (Coordenador, Expositor) é determinada nesta fase de preparo da atividade. A figura 6.7 apresenta os participantes do curso no grupo G2, neste exemplo o Clayton seria *Coordenador* e Rodrigo *Expositor*. Cabe informar que este exemplo é um exemplo fictício de um grupo em um curso do *Moodle*. Portanto o grupo G2 foi formado, por escolha aleatória, com 3 estudantes pertencentes ao Banco de Dados da plataforma *Moodle*, e os três apenas compõem um exemplo de grupo.

Figura 6.7: Escolha de atribuições de cada membro do grupo G2

A figura 6.8 apresenta o que será visível pelos participantes do grupo G2 quando acessarem a atividade no curso.

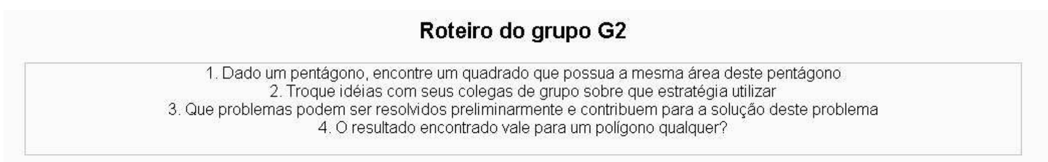

Figura 6.8: O que cada componente do grupo vê quando acessa a atividade

Capítulo 7

Metodologia
Análise de Experimentos

Nosso objetivo nesta tese, conforme detalhado no capítulo 1 é apresentar os modelos de estratégias de Aprendizagem Cooperativa em Matemática, viáveis em um ambiente computacional à distância, a partir da introdução de novas características e funcionalidades ao software *Tabulæ Colaborativo*. Pretendemos, assim, propor atividades didáticas aplicadas anteriormente à Aprendizagem Cooperativa em Matemática, estendendo-as às atividades realizadas por meio de computadores e à distância. Cabe ressaltar que não pretendemos fazer uma *'transposição fotográfica'* das estratégias apresentadas em sala de aula para o ambiente computacional, e sim mostrar uma alternativa viável para apresentar atividades colaborativas em matemática. Para as implementações, utilizamos um software de Geometria Dinâmica que possibilita conexão remota por meio de *redes locais* e *Internet*.

As características e funcionalidades agregadas ao software têm por objetivo viabilizar as implementações das estratégias didáticas que propomos para o ensino de matemática. Buscamos assim, através desta pesquisa, potencializar os aspectos positivos do *Aprendizado Cooperativo*, já descritos no capítulo 5. Os modelos e estratégias que propomos compõem o conceito de *Roteiros de Colaboração*, apresentados na literatura e discutido na seção 6.3.1.

Este trabalho apresenta-se relevante por propor o uso pedagógico de uma inovação tecnológica para o ensino, e contribuir para o desenvolvimento do software, de modo a permitir a implementação das estratégias didáticas propostas para o *Ensino a Distância de Matemática*. Utilizamos estratégias já testadas no ensino presencial de matemática em universidades americanas, que serão descritas na seção 7.3.1.

Novas características funcionais e de interface foram propostas tendo como referências a pesquisa bibliográfica, relacionada aos aspectos pedagógicos e técnicos, e nos experimentos iniciais utilizando o *Tabulæ*. Pretendemos criar um ambiente favorável ao aprendizado de matemática visando diminuir dificuldades relatadas na literatura, devidas às limitações presentes nas representações matemáticas dos ambientes *CSCL*. Para implementar melhorias ao ambiente de ensino e aprendizagem, propomos também a adequação do gerenciamento do conhecimento proveniente do uso da ferramenta, por meio da integração a uma plataforma para ensino à distância - *Moodle*.

7.1 Estudo Empírico

O nosso estudo empírico compreendeu uma série de experimentos com o software *Tabulæ Colaborativo*. No início, pesquisamos a viabilidade do ambiente colaborativo proposto por Moraes [88] para o software *Tabulæ*, tendo como referência as ferramentas síncronas propostas por Barbastefano [8], Guimaraes et al. [43]. Após a implementação de novas características e funcionalidades agregadas ao software, partimos para a investigação central desta tese. Utilizamos, para o conjunto de experimentos, grupos diferenciados de estudantes de diversos cursos: licenciatura em matemática do IM/UFRJ, estudantes do Ensino Médio do CAp-UFRJ que participam da ICJr - Iniciação Científica Jr em Matemática - IM/UFRJ, estudantes do Mestrado em Ensino de Matemática do IM/UFRJ e do Mestrado em Ensino de Ciências para professores de Matemática do CEFET/RJ. Os dois últimos grupos são formados por professores da rede pública do Rio de Janeiro.

Consideramos para nossa análise experimentos realizados com seis alunos de licenciatura do IM/UFRJ, três alunos do ensino Médio do Colégio de Aplicação da UFRJ, quatro alunos do Mestrado em Ensino de Matemática do IM/UFRJ e dois alunos do Mestrado em Ensino de Ciências para professores de Matemática do CEFET/RJ. A partir das atividades desenvolvidas com estes grupos, realizamos a análise das *estratégias didáticas* aqui propostas. Em nossa abordagem, programamos alguns experimentos com o grupo de estudantes do CAp-UFRJ em atividades controladas e planejadas para serem executadas no laboratório de Informática, com a mediação através dos computadores em rede. Os estudantes pertencentes aos dois programas de mestrado supra citados trabalharam sempre em atividades realizadas à distância, nas quais trabalharam de forma remota, conectados através da Internet. O grupo de estudantes de licenciatura participou de atividades à distância conectados remotamente pela Internet, e de outras atividades conectados através de redes locais no laboratório.

A depender das características de cada atividade proposta, e segundo o tipo de estratégia didática analisada, as sessões colaborativas foram agendadas e programadas em determinado dia e horário, podendo ter ou não a mediação de tutoria.

As atividades propostas eram pertencentes a tópicos de Geometria relacionados a conhecimentos prévios, ou a novos assuntos dos programas regulares dos respectivos cursos. Alguns problemas estão relacionados com o livro de Legendre [70], usado no curso de Geometria da Licenciatura em Matemática do **IM-UFRJ**. Roteiros didáticos foram previamente desenvolvidos e anexados para cada sessão colaborativa realizada. As atividades foram desenvolvidas em pares ou grupos pequenos, conforme nossa pesquisa bibliográfica (Davidson [21], Davidson et al. [22], Cohen [18], Hagelgans et al [47]), com foco sobre o processo interativo desenvolvido para a solução dos problemas propostos. De um modo geral, a elaboração das atividades propostas em nosso estudo inclui os questionamentos observados por Johnson & Johnson e apresentados na seção 5.2, página 136.

A análise dos dados foi feita a partir dos registros coletados no banco de dados do servidor do *Tabulæ Colaborativo*, que forneceram elementos para a análise de viabilidade das estratégias didáticas que propomos com o software. As atividades são baseadas na resolução de problemas, com a introdução de *roteiros* para incentivar discussões e formulações para as resoluções. Os *roteiros* utilizados tiveram duas características básicas: *estático* e *dinâmico*. O *estático* era restrito a um texto exibido para cada atividade e que cumpria o papel de orientar os estudantes nas tarefas a serem desenvolvidas e encaminhar discussões a respeito do problema apresentado. Os *roteiros dinâmicos* se caracterizaram por intervenções de tutoria com objetivo de induzir a colaboração e encaminhar discussões para a solução do problema apresentado. Em muitas situações, onde não ocorria uma participação explícita do tutor, o roteiro conduzia a um processo dinâmico e induzia a discussões além dos roteiros.

Descrevemos neste trabalho um conjunto de atividades que fazem referência às propostas para o *Aprendizado Cooperativo em Matemática* no ensino presencial. Porém, o que estamos propondo vai além da simples transposição das estratégias de Aprendizado Cooperativo apresentadas em Rogers et al, ([113] pp. 23-53) para um ambiente mediado por computadores. Adaptações próprias ao ambiente computacional colaborativo foram introduzidas aos modelos, com o objetivo de proporcionar outras possibilidades de investigações nos processos de aprendizado, constituindo *roteiros de colaboração* próprios ao ambiente computacional. As atividades desenvolvidas com o *Tabulæ Colaborativo* propiciam estudos metacognitivos relacionados ao processo de construção das soluções dos problemas, uma vez que permitem a análise *passo a passo* do que foi construído, sincronizado com a comunicação escrita utilizada para conceber a solução. Uma característica, em algumas das atividades colaborativas propostas, é a sugestão de *'mais um passo'* nos métodos de resolução de problemas em grupos pequenos: *a busca por um método adequado para comunicar os resultados obtidos*.

Em nossa pesquisa, estudamos como a introdução de tecnologias baseadas no *Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computador* pode contribuir no processo de *Ensino e Aprendizagem de Matemática*. De modo mais objetivo, pretendemos criar condições que possibilitam a modelagem de métodos de atuação em sala de aula, através da implementação das *estratégias colaborativas* apresentadas aqui nesta tese. Contribuímos assim para o desenvolvimento de pesquisas que tenham por objetivo a construção do conhecimento matemático, e possíveis análises de como a tecnologia pode influir neste processo.

7.2 Características e Funcionalidades agregadas ao *Tabulæ Colaborativo*

Em nossa pesquisa inicial, estudamos possíveis inovações necessárias a projetos de ambientes de ensino baseado em *Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador*. O objetivo foi agregar ao ambiente computacional características e funcionalidades que viabilizam o uso de estratégias didáticas para aprendizado colaborativo de matemática.

Apresentamos, a seguir, justificativas e usos pedagógicos para cada uma das funcionalidades desenvolvidas no projeto do *Tabulæ Colaborativo*.

7.2.1 Revisor Passo a Passo

Quando abrimos uma sessão, para realização de uma atividade com o *Tabulæ Colaborativo*, fica gravado no Banco de Dados todo o contexto gerado durante o processo de construção do problema. O *Passo a Passo* acessa os contextos individuais das sessões e os reproduz por meio de um *visualizador*, que possui botões de controle, como os visualizadores de arquivos de vídeo e som. A reprodução não permite a edição e exibe *'todas'* as ações transcorridas durante a sessão, sejam relacionadas à *Geometria Dinâmica*, ou aos diálogos durante os procedimentos. Na figura 7.1, temos um exemplo de uma revisão da sessão **Ufrj-01abr2007-a**. Ao lado dos botões que controlam a reprodução encontramos o acesso ao roteiro do problema revisado. Na parte inferior uma barrinha indica a evolução da revisão passo a passo. Assim, quem assiste a revisão da atividade tem a idéia do tempo de reprodução.

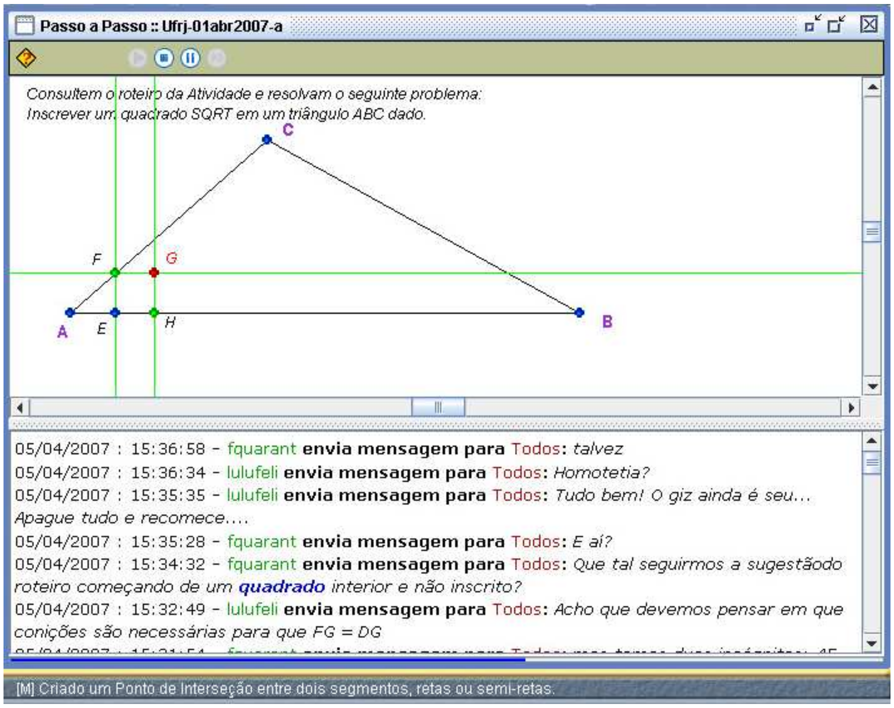

Figura 7.1: Revisando passo a passo uma atividade

O *revisor passo a passo* agrega uma funcionalidade ao TC, que permite enriquecer o seu uso didático, e ainda apresenta-se como uma ferramenta útil para pesquisas dos processos de resolução de problemas, uma vez que permite acompanhar todo o contexto de uma resolução.

Aspectos metacognitivos da solução de problemas podem ser estudados, na medida que o *revisor passo a passo* permite uma interpretação dos processos de aprendizagem, ao mesmo tempo habilita, a quem revisa, uma ação sobre este processo. O estudante que revê uma atividade sua ou de um colega tem a possibilidade de refletir sobre o próprio conhecimento, monitorar o desempenho e em alguns casos reconhecer processos alternativos de construção de uma solução.

Algumas das estratégias didáticas que apresentamos se tornaram viáveis pelo uso do *revisor passo a passo*. A ferramenta foi fundamental para as análises dos experimentos, durante os estudos das simulações das estratégias didáticas, que descrevemos nesta tese.

7.2.2 Glossário

O *glossário* foi concebido para dar suporte aos estudantes durante as sessões colaborativas. Muitas vezes, em uma conversa sobre assuntos que não dominamos completamente, podem surgir dúvidas relacionadas ao significado de uma palavra ou outra. Nos experimentos iniciais percebemos que no discurso matemático não é diferente. Então, resolvemos agregar um *glossário* que reconhece termos matemáticos dentro de um texto, destacando-os por meio de um *link*. Quando clicamos no *link*, uma janela exibe a definição para o termo. O professor ao elaborar uma atividade, utilizando o *Tabulæ Colaborativo*, deve enriquecer o *Glossário* com definições que digam respeito ao problema proposto. Ao preparar o *Glossário* para uma atividade, é esperado que o professor tenha um olhar sobre o que propôs e pense as possíveis soluções, enriquecendo o próprio conhecimento sobre o problema.

Uma vez que os problemas são resolvidos à distância, na maioria das estratégias aqui propostas, o *Glossário* oferece um conforto ao aluno que pode não entender um termo usado por um colega ou ter dúvidas em relação ao seu significado. Muitas vezes, os estudantes se sentem inibidos de perguntar algo que eles imaginam que devessem saber e efetivamente não sabem. Neste caso, basta clicar sobre a palavra, e a definição será exibida em uma pequena janela. Um exemplo está representado na figura 7.2.

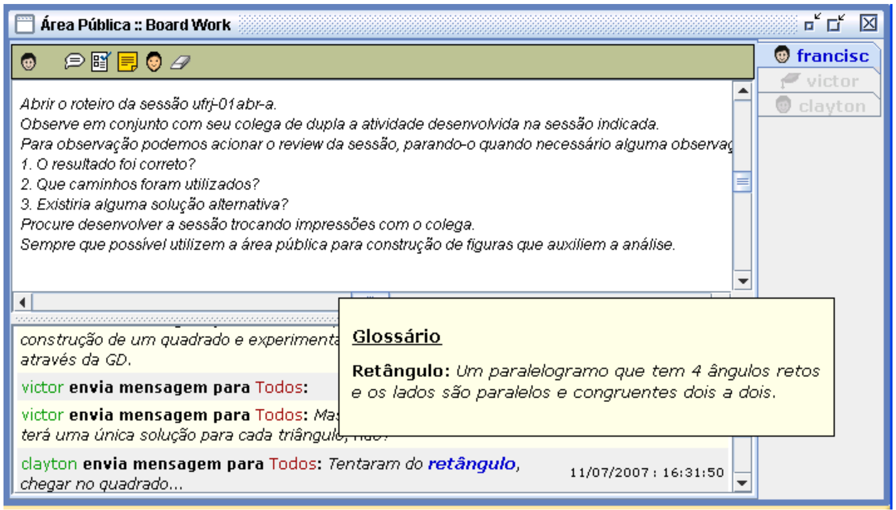

Figura 7.2: Exemplo de acesso ao Glossário, clicando sobre a palavra retângulo

7.2.3 Transferência Público $\rightleftharpoons$ Privada

Como já descrito na seção 6.3.1, em nossa concepção a área pública representa o paradigma do *quadro negro*, para as aulas convencionais em salas presenciais. A área privada é a representação do *caderno de anotações*, para o qual os estudantes podem copiar as construções geométricas do quadro negro, refazer construções, anotar comentários, etc. O estudante pode selecionar todo o contexto geométrico da tela ou, se preferir, ele seleciona apenas os objetos geométricos a copiar.

A forma de transferência entre o quadro negro e caderno de anotações é o tradicional *'copia e cola'*, que transfere os objetos construídos e propagados da área pública (*quadro negro*) para a área privada (*caderno de anotações*) e vice-versa. Em algumas estratégias didáticas há momentos que os estudantes trabalham individualmente em seus *cadernos de anotações*, e em outros há a necessidade de mostrar no *quadro negro* o que fizeram individualmente.

Para que estas transferências ocorram de modo ágil o *'copia e cola'* é sempre permitido, quando realizado do *quadro negro* para o *caderno de anotações*, e cada cópia significa uma página nova (documento Tabulæ) no caderno. A cópia do caderno de anotações para o *quadro negro* ocorre somente após a permissão do coordenador da sessão, ou se o estudante já possui a atribuição de expositor.

Observamos, em alguns experimentos, que os estudantes associaram o *'mouse'* ao *'Giz'* quando escreviam no *quadro negro*. Em alguns diálogos encontramos as expressões *'me passe o giz'*, quando os estudantes solicitavam escrever no *quadro negro*. Isto pode indicar que o paradigma do *quadro negro* foi bem assimilado pelos estudantes.

7.2.4 Histórico da Mensagens de Chat

Quando um grupo se conecta para uma atividade, nem sempre todos os componentes estão reunidos no horário previsto. Por motivos diversos, observamos nos experimentos que é comum alguns estudantes chegarem atrasados, com a atividade já iniciada. Neste caso, é importante que este saiba o que ocorreu desde o início, antes de participar das discussões. Os estudantes que se conectam ao grupo com a sessão já em andamento geralmente procuram olhar o início do *Chat*. A cada mensagem enviada por um estudante, o texto é atualizado e a leitura das mensagens antigas é interrompida por conta da entrada da última mensagem. Isto representa um problema para quem consulta mensagens anteriores.

Segue abaixo um trecho onde os alunos tentam contornar o problema, quando a funcionalidade *Histórico da Mensagens de Chat* ainda não estava implementada. Mantivemos os detalhes de tempo pois assim, percebemos as dificuldades enfrentadas por Jose, e o tempo que demorou este processo.

(...)

23/02/2007 : 21:26:46 - `Jose` envia mensagem para Todos: *oi gente... consegui !! UFA !!*

23/02/2007 : 21:27:03 - `Laura` envia mensagem para Todos: *Até que em fim...*

23/02/2007 : 21:27:11 - `Joao` envia mensagem para Todos: *oi Jose!*

23/02/2007 : 21:27:16 - `Laura` envia mensagem para Todos: *Alelúia...*

23/02/2007 : 21:27:43 - `Laura` envia mensagem para Todos: *Vai lendo o diálogo para se inteirar, Jose.*

23/02/2007 : 21:29:02 - `Joao` envia mensagem para Todos: *Jose, estamos tentando conjecturar sobre a homotetia entre dois círculos*

(...)

23/02/2007 : 21:33:16 - `Laura` envia mensagem para Todos: *Jose, concorda com Joao?*

23/02/2007 : 21:34:25 - `Jose` envia mensagem para Todos: *to tentando ler o diálogo, mas a cada mensagem nova que chega o texto volta ao inicio...*

23/02/2007 : 21:37:43 - `Laura` envia mensagem para Todos: *não precisa ler todo o diálogo...*

(...)

Jose se conectou quando Laura e João já discutiam o problema proposto. Laura pede que Jose leia os diálogos, mas quase sete minutos após o acesso à sessão ele externava sua dificuldade para conseguir ler os diálogos anteriores ao seu acesso. Então, Laura e João interrompem a discussão, que mantinham, para resumir o que fizeram até ali.

Para diminuir este problema, criamos um botão que exibe, em uma janela especial, todos os diálogos da sessão desde o início, sem a interferência das atuais mensagens. Este *histórico* pode ser acessado a qualquer momento por um membro do grupo que sinta a necessidade de consultar os diálogos anteriores. Um exemplo deste uso está na figura 7.3.

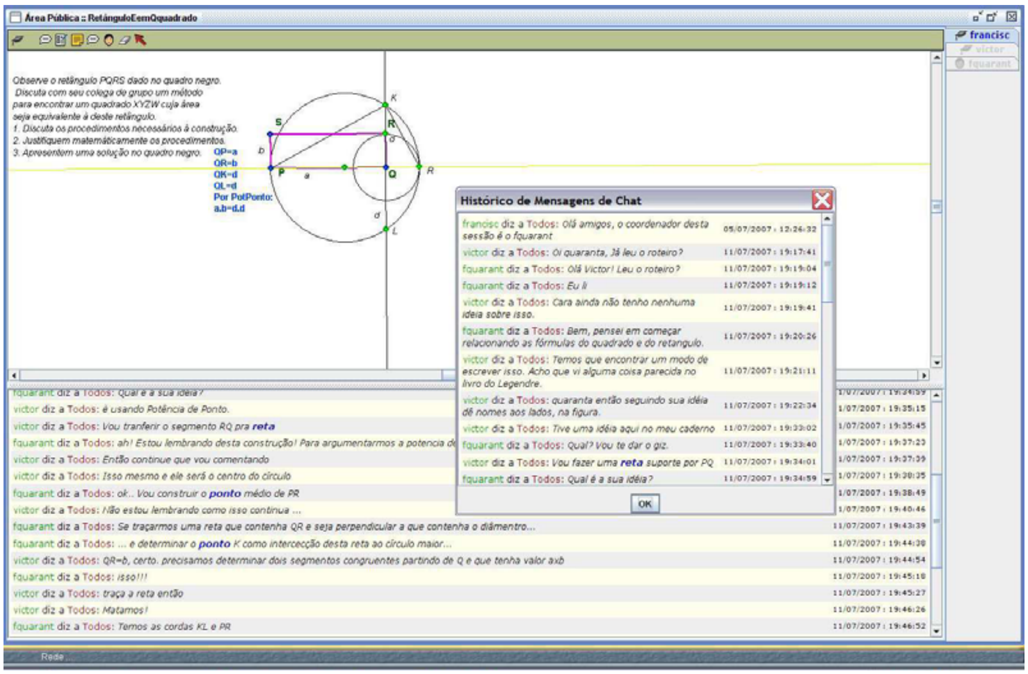

Figura 7.3: Um exemplo de acesso ao histórico da discussão no Chat

A figura 7.3 apresenta um participante da sessão colaborativa que fez o acesso depois desta ter começado, ou deseja consultar algum diálogo da discussão no *Chat*. Assim, abre a janela *Histórico de Mensagens de Chat* e localiza através da rolagem, as mensagens que procura. Este procedimento é independente da comunicação on-line, que continua acontecendo no modo síncrono.

7.2.5 Mudanças na Interface

A interface tem papel importante nos ambientes *CSCL*. O projeto do *Tabulæ Colaborativo* procura agregar componentes à interface de modo a facilitar a colaboração, considerados aspectos visuais e funcionais. Com esta perspectiva, adicionamos a relação de componentes dos grupos com a indicação dos participantes *on-line* e a indicação de quem é expositor durante uma sessão. Esta relação é importante para que os estudantes identifiquem os colegas de grupo e saibam quantos e quais, já estão conectados à atividade. Modificações visuais em relação aos ícones e *'layout'* têm recebido tratamento especial no projeto.

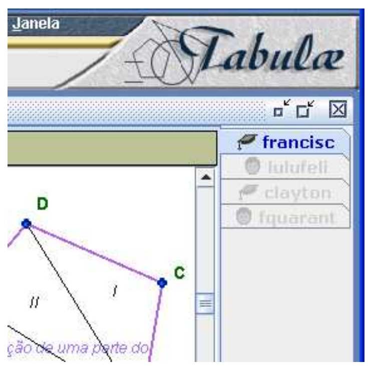

Figura 7.4: Representação visual para os elementos grupo

7.2.6 Identidade para a Área Pública e Privada

Foi proposta uma identidade para a área pública e privada que as aproxime do *quadro negro* e do *caderno de anotações* do estudante. Em relação às funcionalidades restritas à *Geometria Dinâmica* não existem diferenças entre as áreas pública e privada. Porém, é importante que o aluno disponha de recursos que as diferenciem, e identifiquem, uma vez que desempenham funções distintas no ambiente do Tabulæ Colaborativo. Para tal, apresentamos uma proposta para identificar cada uma. A área privada apresenta um espiral desenhado à esquerda da tela, buscando a identificação com um caderno, como na figura 7.5. A área pública apresenta o contorno, desenhado como o acabamento dos quadros negros, nas salas de aula.

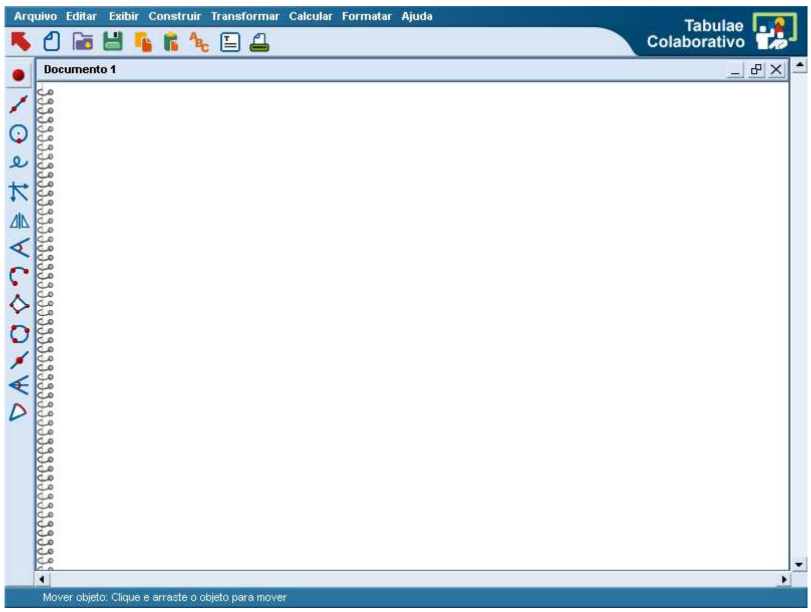

Figura 7.5: Caderno de anotações

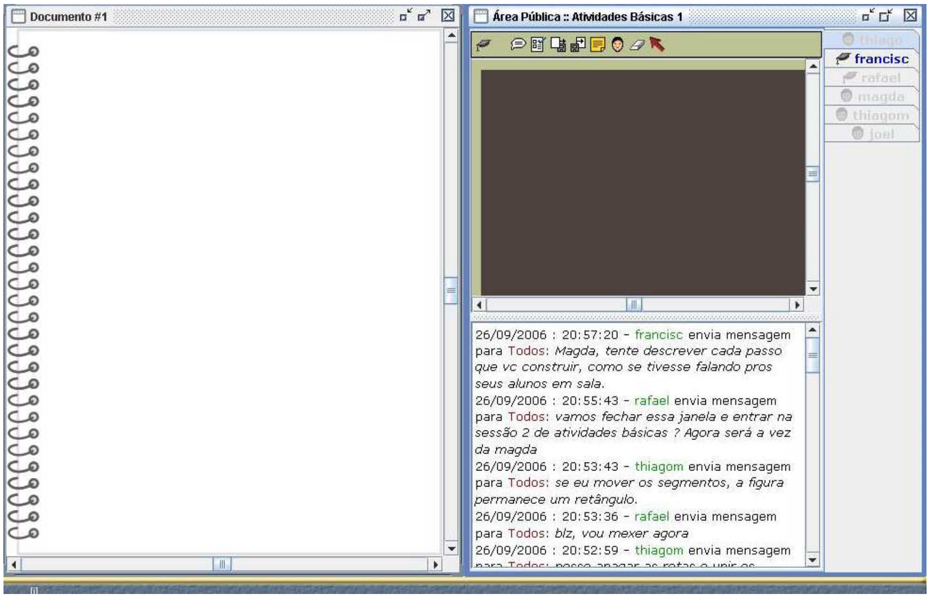

Figura 7.6: Caderno de anotações e Quadro negro

7.2.7 Comunicação durante as sessões colaborativas

Para aprimorar os canais de comunicação durante as sessões colaborativas e, de certa forma, oferecer mais conforto aos usuários, foram agregados um *sinalizador de mensagens* para o *Chat* e um *apontador* para as ações na área pública. O sinalizador faz a janela de *Chat* 'piscar' quando recebe alguma mensagem, chamando atenção do estudante. Muitas vezes, o estudante está com atenção somente na tela do *quadro negro*, ou trabalhando em seu caderno de anotações e não percebe os comentários dos colegas. A sinalização ajuda na comunicação. Pode ocorrer, ainda, uma situação em que a janela de Chat esteja minimizada, por descuido.

O apontador de objetos na tela, representado por uma seta vermelha, indica aos componentes do grupo as intervenções do expositor no quadro negro. A seta acompanha os movimentos do mouse na tela do expositor. Na última versão trocamos a seta vermelha por uma figura que representa um *giz*.

A seta tem como função apontar aos colegas que não estão escrevendo no quadro os caminhos percorridos pelo expositor, enquanto este faz as construções. É um artifício para eliminar o hiato de tempo, entre uma ação e outra, permitindo aos componentes do grupo acompanhar melhor as ações do *expositor*.

Propomos que duas funcionalidades relacionadas à comunicação sejam implementadas no ambiente colaborativo: criação de um canal de comunicação por voz, e descrição, detalhada, dos eventos geométricos desenvolvidos pelo expositor, por texto. Quando um estudante está desenvolvendo uma atividade que prevê momentos individuais, muitas vezes, este se concentra no *caderno de anotações* sem prestar atenção em sugestões de colegas, ou mesmo em discussões que sejam de interesse para a solução do problema. O canal de voz é um sinalizador mais eficiente, para diminuir este fato indesejado.

Algumas vezes, o expositor não descreve com detalhes as construções que realiza, e se preocupa apenas com a justificativa. Nestes casos é bastante desejável que, à medida que o expositor vá construindo na área pública, um pequeno texto traduza suas ações sobre os objetos geométricos. Acreditamos, que as duas funcionalidades, ainda não implementadas, irão enriquecer o ambiente, aumentando o conforto dos participantes de uma sessão colaborativa.

Relatos da prática indicam que o medo da exposição e a insegurança levam os estudantes a buscar caminhos paralelos de comunicação, quando realizam atividades em grupo, principalmente, em atividades realizadas de modo assíncrono, como por exemplo, os Fóruns. A busca de caminhos paralelos, pode ser minimizada, se oferecemos ferramentas que proporcionem maior eficiência na comunicação interna à atividade.

Um texto que detalha as ações do expositor funciona como suporte ao grupo, na medida que aumenta as possibilidades de compreensão, diminuindo as dúvidas e as tentativas de recorrer a meios paralelos para resolvê-las. Assim, teremos o máximo de informações disponíveis, sobre o processo de resolução de um problema, nos registros do servidor *Tabulæ*. Isto é importante para as análises *metacognitivas* do processo de aprendizagem.

7.2.8 Integração com o Moodle

Para os primeiros experimentos, o gerenciamento das sessões com o *Tabulæ Colaborativo* foi feito por meio da **AAT** (**Área Administrativa do Tabulæ**), descrito na seção 6.3.1, página 176. Neste ambiente, funciona um sistema de criação de cursos, sessões colaborativas, autenticação de usuários e tudo que diz respeito à habilitação e criação de atividades (Moraes [88]). Com o objetivo de disponibilizar o *Tabulæ Colaborativo*, como uma atividade que pode ser adicionada a cursos na plataforma **Moodle**, propomos um módulo para gerenciamento das atividades com o TC agregado à plataforma. Através deste módulo o professor cria atividades, em data e horário específicos, adiciona os grupos já existentes no **Moodle**, e cria o roteiro da atividade. Nesta fase de preparação da atividade, o professor pode editar roteiros distintos para cada grupo, ou utilizar o mesmo para todos os grupos. A figura 7.7 exemplifica a criação da atividade ***"Áreas Equivalentes"*** por meio do módulo desenvolvido para o gerenciamento do TC no **Moodle**.

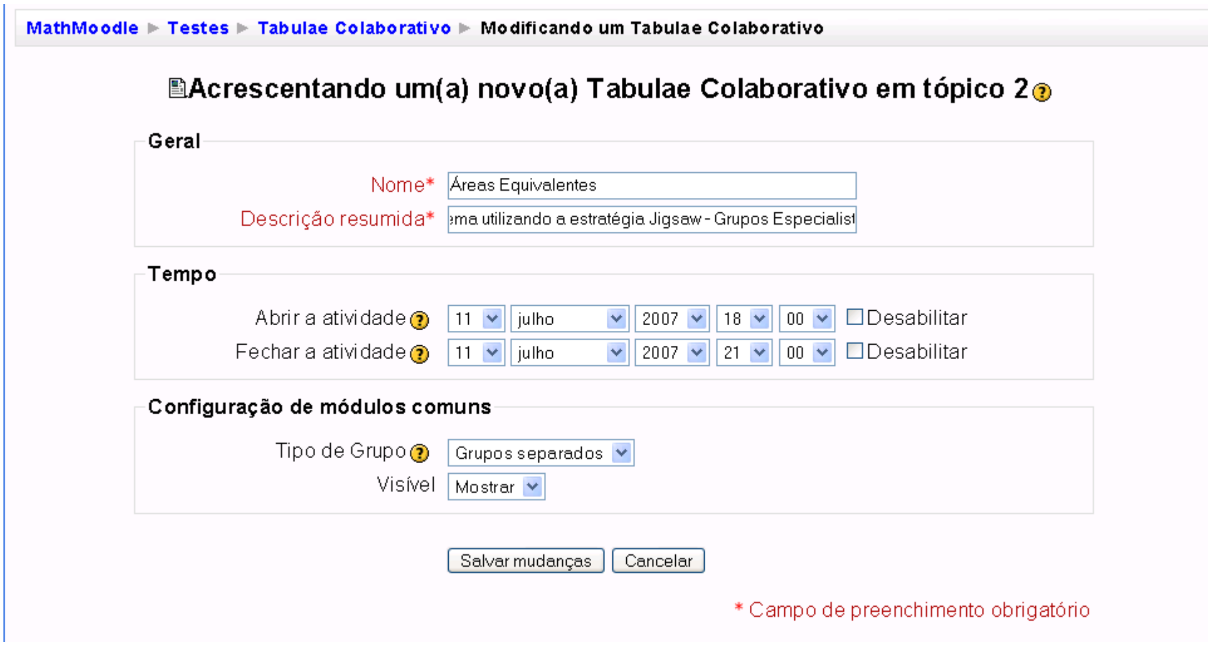

Figura 7.7: Tela inicial da criação de uma atividade no TC integrado ao Moodle

Pretendemos que o gerenciamento das sessões através do **Moodle** agregue ao ambiente síncrono do *Tabulæ Colaborativo*, outras funcionalidades assíncronas da plataforma, que podem ser utilizadas em conjunto com o TC, para o desenvolvimento de uma atividade colaborativa. O funcionamento integrado ao Moodle, pode ampliar as possibilidades de aplicações de *estratégias didáticas colaborativas* no ensino de matemática.

7.3 Descrição das Estratégias Simuladas com o Tabulæ Colaborativo.

O nosso trabalho tem como referências iniciais os estudos sobre *Aprendizagem Cooperativa* no ensino presencial e aplicados às disciplinas de Matemática, realizados por Rogers, et al [113], Hagelgans, et al [47], Davidson [21], e os projetos de ferramentas computacionais para *Aprendizado Colaborativo Apoiado por Computadores - CSCL*, Silverman [126], Sorensen [131], Brett, at al. [93]. Em relação aos projetos *CSCL* consideramos sugestões para o **Aprendizado *On-line* de Matemática**, propostas por Nason & Woodrooff [91] [92].

Partindo do que foi proposto por Barbastefano [8], Guimarães, et al. [43], e especificado e implementado para *Geometria Dinâmica* por Moraes [88], por meio do *Tabulæ Colaborativo*, propusemos ao desenvolvimento do projeto do software algumas *características* e *funcionalidades*. Estas visam permitir, através do *Tabulæ Colaborativo*, atividades propostas para *Aprendizado Cooperativo*, simulando-as em um ambiente de *Aprendizado Colaborativo Síncrono*, baseado em atividades realizadas por estudantes, em grupos pequenos, e dispostos de modo remoto.

De um modo geral, as estratégias didáticas são fundamentadas em resoluções de problemas, associados a procedimentos de comunicação. Por enquanto, restritos à comunicação escrita, e compartilhamento de construções geométricas. O que diferencia uma estratégia das outras são as diversas formas de agrupamentos possíveis, os conteúdos dos roteiros didáticos, e as funcionalidades utilizadas em cada atividade, compondo o *Roteiro de Colaboração.*

7.3.1 Estratégias escolhidas

Faremos nesta seção a descrição de algumas das estratégias apresentadas em Fenton et al. [35], considerando suas principais características. As aplicações que indicamos em cada estratégia são sugestões relacionadas aos processos didáticos aplicados ao ensino de matemática.

(A)Pensar-Compartilhar-Concluir

Esta estratégia pode ser realizada em duplas ou ainda em grupos pequenos com três a quatro componentes. Para alguns problemas pode ser mais interessante usar um grupo pequeno ao invés de duplas.

Descrição:

- Um problema é apresentado para cada grupo;
- Durante um tempo fixo, cada estudante deve pensar individualmente, como solucioná-lo;
- Em um momento seguinte é iniciado um processo de discussão com os estudantes do grupo; neste momento, cada um deve expor suas impressões sobre o problema;
- Após o processo de discussão cada grupo, ou dupla, deve procurar um consenso para apresentar uma solução para o problema.

Aplicações: Esta estratégia pode ser aplicada nos seguintes casos:

- Discussões de conceitos, idéias gerais ou procedimentos;
- Discussões livres sem roteiros predefinidos, próprios à apresentação de novos conteúdos;
- Soluções de problemas e análise de resultados;
- Tentativas para identificar confusões e equívocos conceituais;
- Introdução de fundamentos para futuras discussões.

Um dos objetivos da aplicação desta estratégia é orientar os estudantes a organizarem as idéias sobre um assunto a ser discutido, ou problema a ser resolvido. Podem-se observar perguntas significativas internas ao grupo. Esta estratégia incentiva a prática de interpretação de material escrito, uma vez que cada estudante no momento inicial recebe um problema para o qual deve pensar alguma solução. O problema pode ser apresentado por meio de um roteiro didático anexado à sessão colaborativa, ou na tela do *quadro negro*.

O estudante tem a possibilidade de cotejar as múltiplas formas de resolução de um problema, o que possibilita aprender a encontrar um consenso com seus pares para uma solução a ser apresentada.

(B)Pensar-Compartilhar-Escrever

Uma variação da estratégia Pensar-Compartilhar-Concluir, com ênfase na avaliação individual.

Descrição:

- Um problema é apresentado aos estudantes, que pensam individualmente sobre possíveis estratégias para a resolução, durante alguns minutos;

- Num momento seguinte os estudantes são orientados a trocar idéias sobre as soluções pensadas individualmente. São reservados alguns minutos para este processo de discussão;

- Durante o período de interação os estudantes podem compartilhar informações sobre a solução utilizando plenamente as ferramentas de comunicação presentes no software;

- Em um terceiro momento, cada estudante deve construir sua própria solução, no *caderno de anotações* e remetê-la para avaliação individual.

Aplicações:

- Checagem e avaliação sobre o entendimento de conceitos críticos, de modo individual;
- Procurar possíveis diferentes abordagens para a solução de um problema;
- Para avaliações mistas, podemos observar o comportamento interativo no grupo e aspectos individuais relacionados à solução final remetida por cada um.

Na primeira fase da atividade, os estudantes são incentivados a escrever as idéias iniciais para que sejam remetidas aos colegas durante a interação. Cada estudante pode solicitar e receber os escritos dos *cadernos de anotações* dos colegas, podendo ainda solicitar o acesso ao *quadro negro* para expor idéias. Porém, observamos que a solução final para o problema deverá ser escrita individualmente por cada estudante do grupo e remetida para avaliação.

Ao final da sessão, cada componente pode consultar a solução dos colegas e comparar as possíveis diferentes abordagens.

(C)Solução Orientada

Trabalho para ser realizado com até três componentes.

Descrição:

- Atividade para ser realizada em duas etapas;
- Na primeira etapa, o grupo recebe um problema para resolver;
- Cada grupo escolhe um representante para desenvolver o problema na área pública sob a orientação dos demais estudantes. Na verdade, este estudante funciona como o *expositor* do grupo;
- Na segunda etapa, que pode ser na mesma data, porém em outra sessão colaborativa, cada grupo acessa a *revisão passo a passo* de outro grupo, e faz a correção do trabalho, avaliando a solução proposta.

Aplicações:

- Resolução de problemas relacionados.
- Resolução de problemas cujo algoritmo de resolução exija muitos passos.
- Construção de demonstrações.
- Comparação de múltiplas abordagens para um problema.

Neste processo, mais de um grupo pode analisar o mesmo trabalho, permitido maior diversidade para a análise de um problema, e seus resultados. As resoluções dos grupos, com as correções, permanecem disponíveis para os estudantes consultarem as *revisões passo a passo*. Durante a primeira fase, o grupo deve chegar a um consenso em relação a uma solução, exercitando a comunicação das idéias de forma clara e objetiva, para que o *expositor* consiga representá-la. Ao proceder a análise e correção do trabalho desenvolvido por outro grupo, através do *revisor passo a passo*, há a necessidade de se estabelecer uma *compreensão solidária* entre os estudantes do grupo

(D)Mesa Redonda

Trabalho que pode ser desenvolvido em grupos pequenos de três a quatro estudantes.

Descrição:

- Um problema é apresentado ao grupo junto a um roteiro que orienta o rodízio entre os estudantes para a resolução;
- Cada estudante é responsável por um passo da resolução;
- Enquanto um estudante trabalha no *quadro negro*, os outros estudantes analisam o passo realizado pelo colega, apoiando ou fornecendo uma crítica;
- Para o caso de constatação de erro por um colega, o próximo expositor deverá corrigir e continuar o próximo passo, seguindo o roteiro;
- Ao final da resolução o review da sessão estará disponível para consultas.

Aplicações:

- Revisar conceitos, estratégias para solução de problemas;
- Gerar exemplos;
- Praticar um conceito.

(E)Troca-Troca Crítica

Atividade programada para ser desenvolvida em pares ou grupos pequenos.

Descrição:

- Cada grupo ou par de estudantes elabora uma questão sobre um assunto;
- A questão elaborada é passada para outro grupo resolvê-la;
- O grupo que elaborou a questão acessa a *revisão passo a passo* com a solução apresentada pelos colegas e critica a solução apresentada;
- O modo como os grupos 'trocam' pode acontecer em troca-troca circular, o grupo A corrige o grupo B, que corrige C, [...] que corrige o grupo A;
- O professor terá como analisar tanto a resolução como a correção feita por um grupo.

Aplicações:

- Praticar a leitura do trabalho dos colegas com olhos críticos;
- Reforço em conceitos;
- Explorar exemplos variados.

Esta atividade impõe ao grupo que formula a questão, o cuidado para que esta esteja corretamente proposta. O grupo deve elaborar o roteiro, planejado para incentivar as discussões entre os colegas. Os estudantes, ao analisarem a *revisão passo a passo* de uma sessão, devem estar preparados para a possibilidade de novas abordagens nas soluções apresentadas. Os estudantes do grupo devem verificar se o problema formulado não apresenta questões abertas que permitam outras interpretações, diferentes daquelas que haviam sido pensadas. Uma variação para esta estratégia pode ser obtida propondo-se aos grupos um mesmo problema. Na segunda fase, os grupos devem corrigir e comentar os trabalhos dos colegas.

(F)***Resolvedor*** **& Orientador**

Os estudantes são organizados em grupos de quatro elementos. Dentro do grupo são formados dois pares (sub-grupos), com um dos estudantes resolvendo no *quadro negro* e outro orientando a resolução.

Descrição:

- Os grupos recebem dois problemas, um para cada sub-grupo;
- O *"Resolvedor"* trabalha no problema no *quadro-negro* enquanto o *"Orientador"* observa, faz sugestões, aponta erros ou confirma os acertos;
- Para o segundo problema, são trocadas as funções entre *"Orientador"* e *"Resolvedor"* dentro do sub-grupo;
- Dentro do grupo de quatro, os estudantes verificam as soluções dos pares, acionando a *revisão passo a passo* das resoluções, discutindo-as com a dupla que as resolveu, quando houver discordância;
- Ao final, o grupo deve apresentar uma solução de consenso para cada problema.

Aplicações:

- Em revisões de conteúdos antecedendo a exames;
- Para praticar procedimentos de resolução de problemas;
- Resolução de listas de exercícios.

Durante a atividade, o *"Resolvedor"* exercita a atuação com desembaraço quando observado e orientado por um colega durante a resolução de um problema. O *"Orientador"* deve fazer críticas atento às diferentes formas de resolução do problema proposto. A troca de atribuições é importante para o grupo atuar de forma colaborativa e desenvolver as habilidades descritas acima.

(G)Jigsaw - Grupos Especialistas

Esta estratégia pode ser usada em problemas com múltiplos componentes, ou com diferentes abordagens. Dependendo das características dos problemas, os estudantes podem ser organizados em pares, em grupos de três, ou quatro componentes.

Descrição:

- Um problema com múltiplos itens é proposto aos grupos;
- Nos grupos, cada estudante fica responsável por estudar um componente do problema, tornando-se especialista naquele item;
- Os especialistas de cada item participam de uma sessão colaborativa para estudar o componente;

- Havendo muitos especialistas para cada item, cada especialidade é organizada em grupos de até quatro estudantes;
- Após os especialistas discutirem os seus tópicos, voltam a conectar-se com seus colegas de grupo para construir a solução do problema completo;
- Cada especialista *'ensinará'* aos demais o que discutiram nas sessões. Assim, cada um é responsável por orientar os demais em relação ao seu tópico.

Aplicações:

- Trabalhos extra classe;
- Examinar problemas grandes, ou com diferentes abordagens;
- Estudar vários casos em uma prova de teoremas;
- Investigar diferentes estratégias para resolver o mesmo problema;
- Desenvolvimento de tópicos do curso, através de projetos de grupo;
- Estudo de problemas mais sofisticados, envolvendo conhecimentos diversos, não possíveis de serem apresentados em aula;
- Resolução de um conjunto de problemas preliminares antes de abordar o problema principal.

No projeto das atividades, os roteiros orientam as discussões nos grupos especialistas, destacando aspectos relevantes para o problema. Os roteiros para a conclusão dos trabalhos nos grupos originais devem priorizar questionamentos, que orientem os estudantes a utilizarem a experiência adquirida nos grupos especialistas.

7.3.2 Concepção para a abordagem dos casos estudados

A análise a seguir pretende identificar a viabilidade das estratégias propostas, a partir dos experimentos realizados com os grupos descritos anteriormente. Nesta tese, não foi o objetivo principal a análise dos aspectos quantitativos e qualitativos relacionados à aprendizagem. Este estudo necessita de uma concepção específica de casos, bem controlados, e com parâmetros próprios a tal análise, que fica como sugestão para pesquisas posteriores.

Dentro de nossa perspectiva, buscamos analisar os diversos experimentos realizados e, por meio de fragmentos de alguns deles, explicitamos as estratégias propostas, e sua viabilidade. A coleta de dados foi obtida dos registros das atividades, e da análise, passo a passo, de cada atividade desenvolvida. Para tal, utilizamos a ferramenta de *revisão passo a passo*. Em algumas situações que se tornam explícitas, realizamos ponderações de natureza qualitativa relacionadas com o aprendizado, tendo como referência a revisão bibliográfica que apresentamos neste trabalho. Pretendemos contribuir por meio desta pesquisa para a oferta de mais uma concepção de ensino, que utiliza a tecnologia para implementação de técnicas pedagógicas no ensino de matemática.

Os nomes dos participantes nos experimentos foram trocados e a linguagem utilizada para comunicação escrita foi adequada de modo a manter a estrutura do discurso original, alterando o texto apenas quando este apresentava dificuldades ao entendimento da mensagem. Foram mantidas as estruturas de comunicação via *Chat*, recolhidas no servidor. A estrutura de comunicação gravada no servidor apresenta uma estrutura com dia, hora, quem fala, para quem fala e texto. Para a reprodução dos fragmentos aqui apresentados, utilizamos apenas quem fala e texto, o restante da estrutura será omitida, e apresentada apenas quando algum destes componentes é relevante para a descrição da atividade. Para cada estratégia apresentada reproduzimos uma figura com a 'fotografia' de um momento da sessão. Em alguns casos, usamos a figura com o roteiro da atividade, para apresentar o problema proposto, noutras descrevemos o problema por texto.

Estratégia 1

O problema proposto:

> Dado um segmento AB encontrar um ponto F de modo que
> $AB : AF = AF : FB$.

No *quadro negro* foi dado um segmento, como indica o enunciado. A partir daí as construções para a solução foram negociadas pelos estudantes no formato da estratégia *Pensar-Compartilhar-Concluir*. Apresentamos, a seguir, fragmentos que identificam as características didáticas apresentadas na seção 7.3.1, página 201, referentes a esta estratégia.

> `alex`: *Você está fazendo na área pública.*
>
> `alex`: *Já sabe a construção?*
>
> `claudia`: *estou fazendo em doc # 1*
>
> `professor`: *Vocês podem fazer os rascunhos em uma área privada e depois expor ao colega na área pública*
>
> `claudia` *estou começando a construção*
>
> `miguel`: *não esquece de nomear os pontos...*

Os estudantes acessam o roteiro de atividades e tomam ciência do problema proposto. Após um tempo de reflexão, em seus *cadernos de anotações*, os estudantes iniciam as discussões, e começam a apresentar suas impressões a respeito das possíveis soluções para o problema. Como deverão apresentar uma solução comum, iniciam um processo de cooperação, para entenderem o que o colega está sugerindo como solução, fruto desta ação colaborativa.

`alex`: *Marca o ponto E intersecção da reta AD com a circunferencia com centro em C.*

`alex`: *E diferente de D.*

`alex`: *Fiz uma construção ao lado direito da construção da Claudia. Dêem uma olhada lá e vejam se está tudo bem.*

`miguel`: *e a justificativa?*

`alex`: *Vamos lá!*

`alex`: *Temos que* $AB^2 = AD * AE$, *OK?*

`miguel`: *por construçao temos* $AF = ADeBC = DC$

`miguel`: *por que* $AB^2 = AD * AE$?

`miguel`: *cadê o ponto E?*

`miguel`: *achei...*

`alex`: *Por potência. A é potencia com o círculo de centro em O.*

`miguel`: *me liguei, por potencia...*

`alex`: *Vamos escrever* $AB/AD = AE/AB$.

`miguel`: *eu tava tentando por semelhança.*

`miguel`: *depois te falo como...*

`professor`: *Alex, a sua construção é esta que apontei agora?*

Observamos que, sem a intervenção de tutoria, os estudantes interagem, e através de questionamentos elaborados a partir das suas dúvidas, e das indicações do roteiro da atividade, utilizam argumentações livres, sem modelos pré-definidos. Assim, elaboram uma solução. Percebemos que o aluno Miguel tinha uma idéia inicial para resolver o problema, utilizando semelhança, porém, foi convencido pelo colega a usar um método alternativo ao que havia pensado. Resolveram o problema usando conceitos de *Potência de Ponto*.

alex: *Agora façamos* $AB/AD-1 = AE/AB-1 => (AB-AD)/AD = (AE-AB)/AB$

professor: *A solução é por potencia relativa ao ponto A*

miguel: *a primeira parte foi* $AB/AD = AE/AB$ *mas* $AD = AF$ *entao* $AB/AF = AE/AB$, $AB = AF + FB$ *e agora?*

alex: $AB - AD = FB$ *e* $AE - AB = (AD + 2DC) - 2BM = (AF + 2BM) - 2BM = AF$

alex: *Daí* $FB/AF = AF/AB => AF^2 = AB * FB$

miguel:*ae matamos!!*

Observamos através do texto que a justificativa é escrita colaborativamente através da discussão, e o mediador interfere apenas para confirmar a correção do caminho escolhido, na condução da solução do problema. A figura abaixo representa o retrato final da solução do problema.

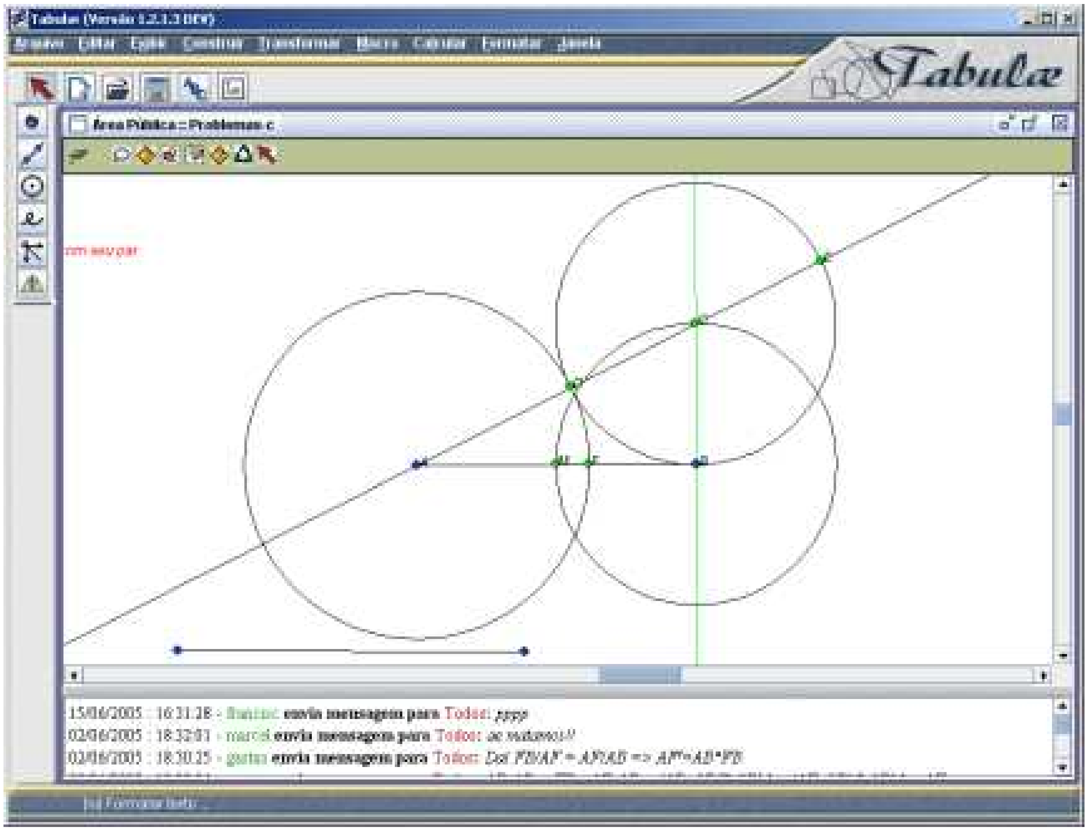

Figura 7.8: Final da Atividade 1

Estratégia 2

O problema proposto:

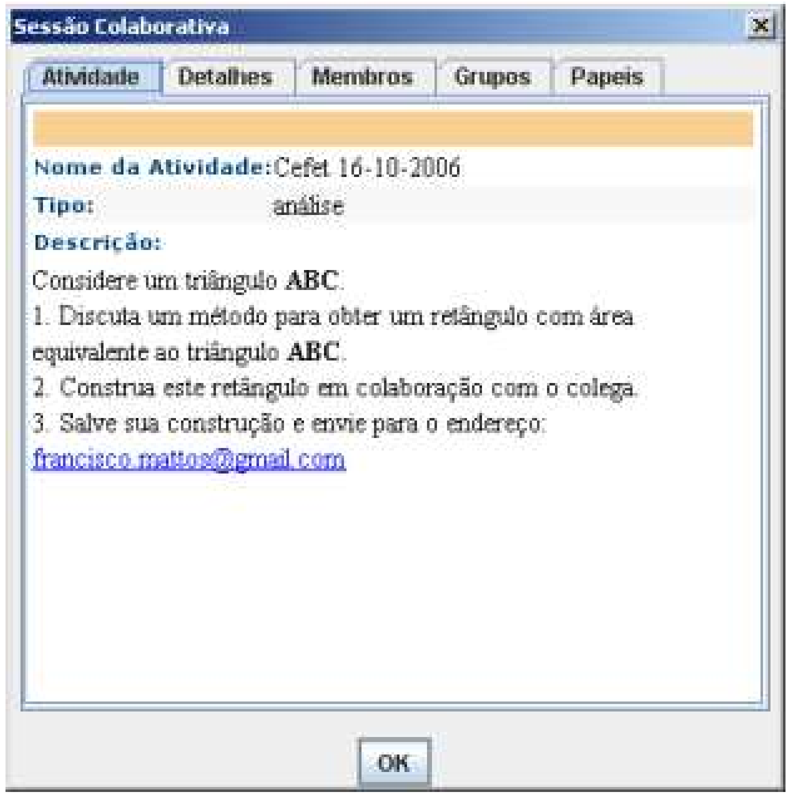

Figura 7.9: O problema proposto no roteiro

O problema simula a estratégia *Pensar-Compartilhar-Escrever* apresentada na seção 7.3.1, página 202, da qual destacamos e comentamos o fragmento abaixo. Observamos um processo de negociação inicial, na tentativa de encontrarem um método que solucione o problema.

`mario`: *viu o problema ai?*

`mario`: *acho que não é difícil*

`mario`: *se a gente traçar uma paralela passando pelos pontos médios de dois lados e levantar as perpendiculares à base passando pelos vértices resolve, não?*

`professor`: *Já estão discutindo o problema?*

`lucia`: *Que tal, utilizando como base do retângulo BC e a metade da altura como o outro lado. É similar à sua idéia.*

`mario`: *Começamos agora!*

`mario`: *Fechou...*

`lucia`: *Oi professor já estamos discutindo.*

`professor`: *Assim cada um faça a sua solução e logo em seguida envie para o Moodle.*

`lucia`: *A estratégia é tomar um dos lados do triângulo como lado do retângulo e outro lado sendo a metade a altura relativa ao lado do triângulo escolhido como o primeiro lado.*

`professor`: *Vc concorda com esta estratégia Mario?*

`mario`: *Sim.*

`professor`: *Enviem suas soluções.*

Observamos que, após argumentarem, sobre os possíveis caminhos para a solução, os estudantes chegam a um consenso, partindo para a próxima parte da estratégia que é formalizar individualmente a solução e enviar para avaliação.

Neste processo, conseguimos perceber que a dupla de estudantes participa ativamente na construção da solução. Cada um apresenta a sua estratégia pensada inicialmente, e após um breve diálogo, concordam com a construção que deveria ser realizada e enviada por cada um. Observamos que esta abordagem possui características muito próximas da anterior. As diferenças são explicitadas em função do uso do software, pela necessidade de comunicá-la ao colega, no momento da troca de informações exigida pela estratégia didática. Após concordarem com a solução correta, cada um remete a sua própria solução, onde exibe o seu conhecimento prévio sobre a solução. De modo individual cada um tem a oportunidade de exibir o que absorveu do processo de discussão, agregando, ou não, ao seu conhecimento prévio mudanças, resultantes das possíveis trocas de informações com os colegas. Esta característica a distingue da estratégia *Pensar-Compartilhar-Concluir*.

Uma vez que as soluções remetidas individualmente podem ser consultadas, os estudantes têm a oportunidade de observarem diferentes abordagens para a solução do problema que resolveram. Apesar de trocarem idéias, e dialogarem sobre a solução de um problema, no ato de construir a própria solução, percebemos que, muitas vezes, o resultado final difere entre os componentes do grupo, o que pode revelar como cada um interpreta o assunto discutido. Neste experimento as soluções individuais foram remetidas para um curso criado na plataforma **Moodle**. O curso foi criado visando a integração do *TC* aos cursos da plataforma como descrito na seção 7.2, página 198. A consulta à solução do colega pode ser observada no fragmento abaixo no qual Mario comenta a solução que Lucia enviou.

> `mario`: *A construção da Lucia baseia-se na fórmula da área do triângulo... base vezes a metade da altura relativa à esta base.*

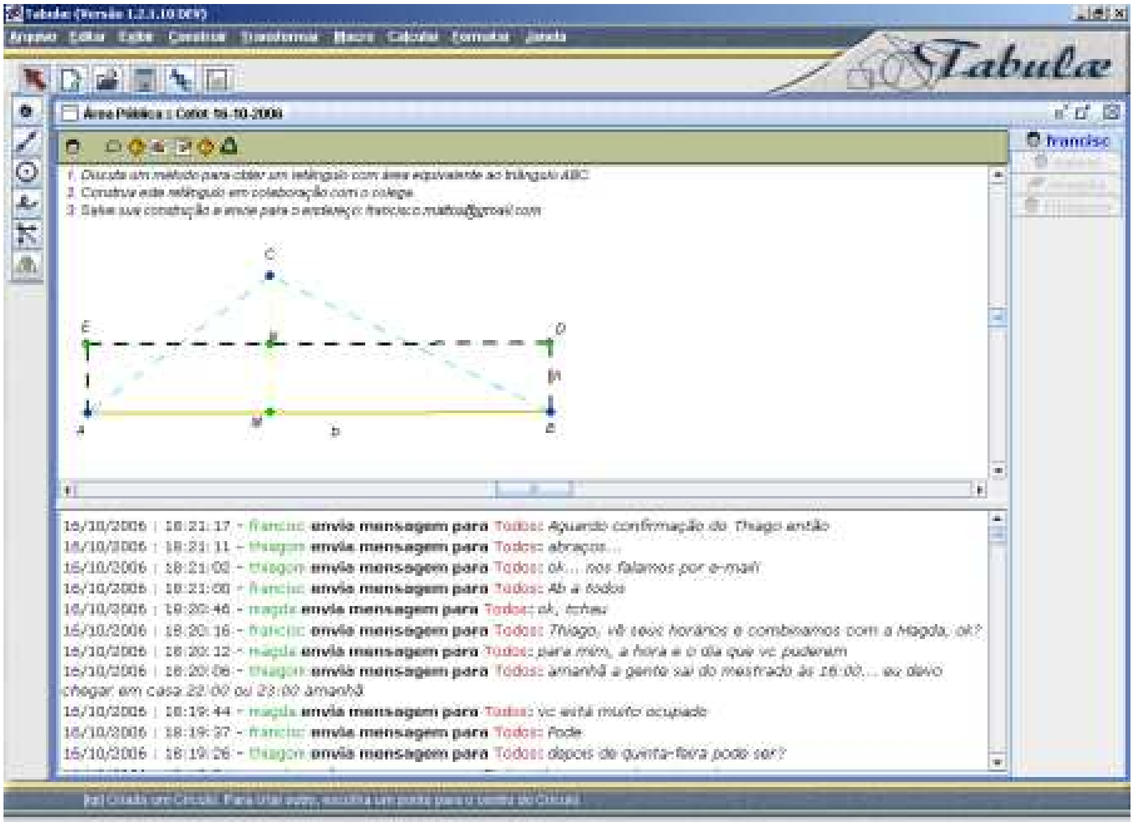

Figura 7.10: A solução da Atividade 2

Estratégia 3

Em outro fragmento da mesma atividade, desenvolvida pelo mesmo grupo de estudantes, encontramos na parte destinada a escrever uma justificativa para a construção geométrica, um fragmento que justifica a estratégia *Pensar-Compartilhar-Escrever*.

Neste caso, o grupo assume uma das soluções, a que a Lucia descreveu, para apresentá-la no *quadro negro* e, orientados pelo professor (mediador) exibem a construção geométrica. Com a construção feita no *quadro negro*, os estudantes iniciam uma série de argumentações e experimentações para construirem a justificativa matemática à construção geométrica realizada. Neste caso, observamos que os estudantes exploraram as funcionalidades de Geometria Dinâmica do *Tabulæ Colaborativo*, e desenvolvem um processo negociado entre os membros do grupo para elaborarem a justificativa enviada individualmente para avaliação.

A atuação do tutor é orientada por *roteiro dinâmico*, como descrito na seção 5.7.1, baseado em argumentação, contra-argumento e réplicas, quando necessárias, conforme apresentado na literatura (Kollar at al. [66] e Weinberger at al. [143]) e discutido em seção 5.8.1. O objetivo da tutoria é conduzir o processo de colaboração no modelo da estratégia *Pensar-Compartilhar-Escrever*.

> `professor`: *Agora quero que vcs justifiquem matematicamente porque a solução é verdadeira.*
>
> `mario`: *A construção da Lucia baseia-se na fórmula da área do triângulo... base vezes a metade da altura relativa à esta base.*
>
> `professor`: *Vou pedir para a Lucia escrever aqui a solução. Enquanto vc faz a construção, descreva o que fez em cada passo. Ok?*

Lucia inicia a construção no **quadro negro** e vai descrevendo cada passo que realiza, enquanto Mario contribui e argumenta sobre a justificativa.

> `professor`: *Mas o que justifica dizer que as congruências ocorrem?*
>
> `lucia`: *primeiro construa uma perpendicular a AB passando por C*
>
> `professor`: *Vai lá o mouse é todo seu!*
>
> `lucia`: *Agora construa o mediatriz do segmento CM, onde M é o pé da altura*
>
> `professor`: *Tudo bem, Mario?*

`lucia`: *Agora construa a perpendicular a AB passando por A e B*

`mario`: *até agora ok...*

`professor`: *Nomeie os vértices do retângulo.*

`lucia`: *Ok*

`professor`: *Agora me digam: o que garante que os dois polígonos possuem mesma área?*

`mario`: *Lucia, coloca nome na interseção entre as perpendiculares!*

`mario`: *a figura apresenta dois pares de triângulos congruentes*

`professor`: *Continue então Mario. Porque vc pode concluir isto?*

`professor`: *escreva com a ajuda da Lucia , uma sequencia lógica que possa justificar sua frase.*

`mario`: *a paralela a base corta o lado AC em um ponto (O por exemplo)... os triângulos NOC e EOA são congruentes*

`mario`: *por ALA por exemplo!*

`professor`: *Pq eles são congruentes?*

`mario`: *EOA=CON (opostos pelo vértice)*

`mario`: $EAO = OCN$ *(ângulos alternos internos)*

`lucia`: $CN = AE = BD$, *o ângulo adjacente a este lado é reto por construção e o ângulo oposto a este lado*

`professor`: *Começamos por aí ...*

`mario`: $EA = CN$ *(metada da altura por construção)*

`professor`: *Isto. Perceberam o caminho para construir esta prova? Devemos usar a congruência de triuângulos para justificar a equivalência das "fórmulas"*

`mario`: *isso!*

`lucia`: *Ok*

`mario`: *que vale mesmo se o triângulo é obtusângulo!*

`professor`: *Por favor, cada um organize sua prova e envie.*

`mario`: *como a Lucia traçou a perpendicular à base, quando ele é obtusângulo a construção some ...*

`lucia`: *Não some não*

`professor`: *Um modo para não dar problema qd a altura eh exterior ao triângulo é ...*

`mario`: *ah é?*

`mario`: *Lucia teve um momento que vc mexeu e sumiu...*

`professor`: *Traçar a reta suporte à AB e fazer a perpendicular à ela e depois escondê-la*

`mario`: *viu?*

`professor`: *Perceberam pq sumiu?*

`lucia`: *sim*

`mario`: *sim... ela poderia traçar a perpendicular em relação à reta suporte da base*

É possível observar as contribuições de cada estudante para a solução, e ao final, o que cada um absorveu do processo, uma vez que os estudantes escrevem suas soluções em seus *caderno de anotações* e as remetem individualmente. Este processo permite observações a cerca de processos individualizados de aprendizagem de um mesmo objeto, permitindo a checagem sobre entendimentos de conceitos, tendo antes ocorrido a colaboração. Esta estratégia permite, se for o caso, avaliações mistas, com aspectos da colaboração entre componentes do grupo e aspectos da produção individual.

Estratégia 4

Esta atividade foi desenvolvida nos moldes da *Mesa Redonda*. Foi dado um problema de *geometria espacial* para os estudantes Jair, Lucas, Claudia e

Miguel. O roteiro do problema[1] pedia a construção da figura que serve como base para a solução do problema, sobre a interseção de um sólido por um plano. Seguindo um roteiro, os estudantes do grupo fazem a construção em rodízio, ao mesmo tempo em que comentam as construções desenvolvidas por cada expositor no *quadro negro*. Neste experimento, temos quatro estudantes participando ativamente da construção, o que pode ser constatado pelo rodízio entre os membros do grupo.

A *Mesa Redonda* exige total atenção entre os membros da sessão, sobre o que os colegas comentam, e constroem, no *quadro negro*. Quando um estudante é chamado a dar prosseguimento à atividade, é necessário que tenha acompanhado e entendido o que foi feito até aquele momento. Observamos, nos trechos selecionados, que os estudantes se preocupam em transmitir aos colegas as explicações sobre o que está sendo construído, e por outro lado, intervindo com perguntas quando não entendem algum passo executado. As intervenções exemplificam o que relata Davidson [21] e outros autores citados em nossa revisão bibliográfica, quando afirmam ser mais fácil aos estudantes intervirem em dúvidas quando estão trabalhando em grupo. Neste caso, eles se sentem mais à vontade para perguntarem, quando não entendem algum passo. Observamos que o papel do professor foi orientar o processo de colaboração, através de intervenções baseadas no roteiro de trabalho da atividade.

`jair`: *objetivo: desenhar um cubo*

`claudia`: *ok*

`jair`: *escolha um ponto O para ser o ponto de fuga*

`jair`: *a partir desse ponto trace duas semi retas*

`jair`: *agora vamos traçar outra reta que corte as duas anteriores*

[1]Baseado em problema do Provão/2000 e já discutido na seção 3.2.2

`jair`: *os pontos de interseção serão dois vertices do cubo*

`jair`: *trace uma paralela CD a AB, esta sera outra aresta do cubo*

`jair`: *alguém quer continuar????*

`lucas`: *eu continuo*

`jair`: *nao use o DEL, quando precisar use esconder objetos.*

`lucas`: *valeu.*

`professor`: *Todo mundo está acompanhando?*

`lucas`: *continuando...*

`claudia`: *sim*

`lucas`: *nos traçamos uma reta perpendicular à reta que passa por CD*

`professor`: *A construção das arestas laterais devem continuar ortogonais às semiretas partindo de O.*

`lucas`: *agora marcamos um ponto E nesta reta e apos isso tracemos uma perpendicular ao segmneto CD.*

`miguel`: *seria* $AE = AB$*?*

`lucas`: *Ai eu acho que vc nao está preocupado com a dimensão, Miguel*

`miguel`: *blz.*

`jair`envia mensagem para Todos: *a gente tá fazendo um prisma retangular, na verdade.*

`lucas`: *primeiro traçamos a perpendicular a AB*

`lucas`: *seguindo a construção traçaríamos agora uma paralela a AE e que passa pelo ponto D*

`lucas`: *agora ligue o ponto E ao ponto de fuga*

`lucas`: *seja F o ponto de intersecao da perpendicular a CD com a reta que passa por OE*

`professor`: *Lucas, movimente um pouco o ponto B para nao coincidir com a reta CD.*

`professor`: *Determine as arestas EA, EF, FD, BC e depois esconda as retas suporte*

`professor`: *Em seguida vamos pedir à Claudia para traçar as outras duas arestas laterais.*

`claudia`: *Devemos construir uma reta paralela a reta AE passando por B*

`claudia`: *E outra reta paralela a reta FD passando por C.*

`professor`: *Como obter o G e o H da face superior?*

`claudia`: *Vamos traçar uma reta paralela a reta AB passando por E*

`claudia`: *E outra reta paralela a CD passando por F.*

`professor`: *Determine G e H.*

`miguel`: *tem pontos demais ae esconde alguns!!*

A *Mesa Redonda* explora a participação de todos os componentes do grupo, uma vez que todos os estudantes são chamados a contribuir para a solução do problema, no *quadro negro*. Para esta estratégia, grupos até quatro pessoas permitem intensa participação dos estudantes.

Estratégia 5

A estratégia **Troca-Troca Crítica** considera a capacidade dos alunos, em grupo ou em duplas, formularem um problema que deverá ser resolvido por outro grupo. Neste experimento, consideramos a construção de um trapézio e suas diagonais, e a partir desta construção foi solicitado que a dupla elaborasse um problema a ser resolvido. Neste caso o problema elaborado foi uma conjectura sobre áreas de triângulos obtidos na construção, e representados na figura 7.11.

Observando e analisando a figura construída, a dupla de estudantes foi orientada a estabelecer um problema a ser resolvido por colegas de outro grupo. O problema proposto pelo grupo foi: 'Qual a prova para a conjectura que estabelece a equivalência entre as áreas dos triângulos EGD e GCF?' Os diálogos indicam que durante a elaboração da conjectura foi necessário um processo interativo, no qual a comunicação visual por meio do ambiente de *Geometria Dinâmica* foi bastante utilizada.

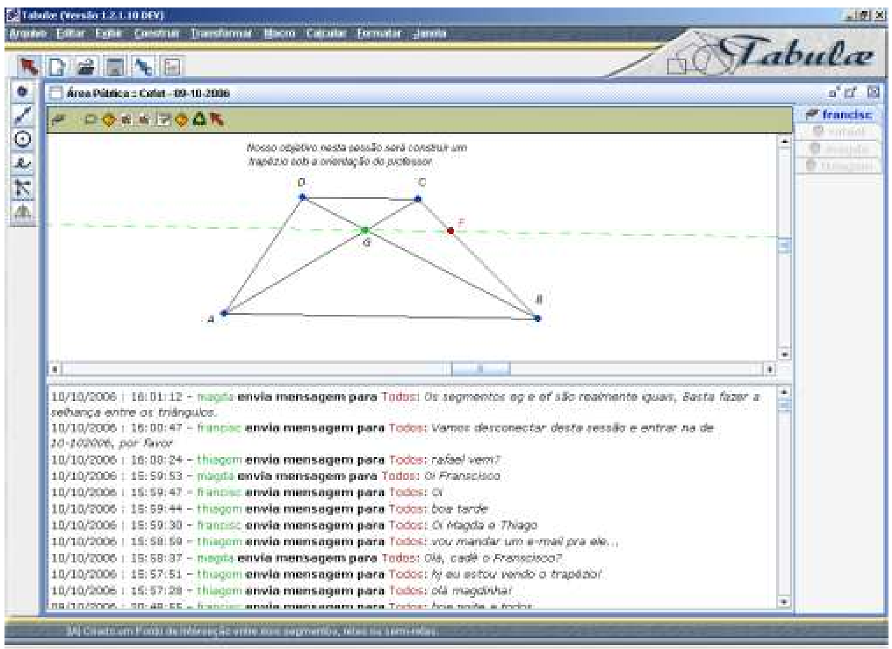

Figura 7.11: A figura que originou o Problema proposto

Destacamos fragmentos do processo colaborativo relacionado à formulação do problema:

`professor`: *Com a ajuda das possibilidades da Geometria Dinâmica, arraste os pontos do trapézio que foi criado e gere uma CONJECTURA sobre as áreas dos triângulos EGD e GCF.*

`mario`: *parece que as áreas são iguais* `professor`: *Entenderam a minha proposta?*

`mario`: *as alturas são as mesmas*

`professor`: *Tente convencer a Lucia disto.*

`professor`: *Esta sua afirmação depende só da altura?*

`lucia`: *As alturas são as mesmas, mas a área?*

`mario`: *mas as base têm a mesma medida*

`mario`: *eu medi os comprimentos*

`professor`: *Movimente os pontos C e D.*

`mario`: *e parece que eles têm o mesmo comprimento mesmo que eu movimente o trapézio...*

`professor`: *Então vamos lá, Lucia, o Mario estabeleceu uma conjectura sobre as áreas. Peça para que ele a formule para que possamos tentar prová-la.*

`mario`: *e a demonstração para isso me parece bem simples...*

`lucia`: *Vamos lá Mario, realmente, parece ter a mesma medida. Me convença.*

`professor`: *Não vamos prová-la hoje, quero que apenas formulem a Conjectura e digam no que a Geometria Dinâmica ajudou neste processo.*

`mario`: *bem... acho que encontrei um furo aqui... deixa eu pensar rapidinho*

`professor`: *Movimentem enquanto pensam.*

`mario`: *bom, nesse problema, o fato de você medir o segmento, movimentá-lo e ter em cada instante a sua medida é um teste muito forte a meu ver para esta conjectura!*

`professor`: *Qual é a conjectura que o Mario estabeleceu então? Diga lá Lúcia.*

`lucia`: *Como os vértices C e D estão sobre paralelas a EF, Verificamos que a altura é a mesma, e a dinâmica nos conduz a achar que ef e fg tem o mesmo comprimento.*

`professor`: *e portanto ...*

`mario`: *áreas iguais*

`lucia`: *As figuras tem a mesma área*

`professor`: *o que podemos dizer sobre as áreas?*

Apresentamos a seguir fragmentos, que apresentam a resolução do problema elaborado por Lucia e Mario. Os alunos, Joao e Laura, discutem a solução (não apresentada aqui), e Joao apresenta o resultado monitorado por Laura. O professor atua na sessão orientando o roteiro de colaboração.

`joao`: *Agora vou começar a justificativa*

`professor`: *Escreva a prova que vocês discutiram.*

`joao`: *O triângulo ABC é semelhante a GFC (caso AA). Logo* $FG/AB = CR/CO$

`professor`: *sim*

`joao`: *Idem para ABD e DEG. Logo, temos GE/AB=DQ/DP*

`joao`: *Como*$CR = DQ$ *e* $CQ = DP$ *temos* $FG/AB = GE/AB$. *Logo* $GE = FG$

`professor`: *Concorda Laura?*

`laura`: *Concordo!*

`joao`: *Logo as áreas de CFG e GDE são iguais pois têm a mesma base e a mesma altura.*

Após apresentarem a solução do problema, o grupo formado por Laura e

Joao é orientado a consultar a solução apresentada por outro grupo, representando a terceira parte da estratégia, que é a crítica da solução apresentada por um terceiro grupo. Assim, Laura e João comentam a solução, apresentada pelo grupo Jose e Flavio, de um problema formulado por Mario e Lucia.

> `professor`: *Quero que consultem o segundo ítem da barrinha e dêem uma olhada na solução lá apresentada.*
>
> `professor`: *Encontraram?*
>
> `joao`: *Encontrei e vi as soluções do Jose e da Laura*
>
> `professor`: *Gostaria que comentassem o que de diferente há nas soluções? E se há?*
>
> `laura`: *Já li tudo. Confrontando as soluções vejos que são muito parecidas...*
>
> `professor`: *Há algum detalhe da sua que difere do grupo do Jose?*
>
> `laura`: *O José fala na razão de semelhança...*
>
> `professor`: *Laura use a figura para descrever o caminho que vc percorreu na sua solução*
>
> `joao`: *Li a do José e achei idêntica à que apresentei.*
>
> `laura`: *Acho que trilhei o mesmo caminho do Flavio e José*
>
> `professor`: *A estrutura foi a mesma? mesma sequencia lógica?*
>
> `professor`: *Ok, a idéia dos problemas que vamos resolver aqui neste espaço será esta, seguindo estes passos de questionamento.*
>
> `professor`: *Neste caso as soluções são muito próximas, mas em outros casos pode não ser.*

Este experimento tem como um dos objetivos incentivar os estudantes à leitura crítica do trabalho dos colegas. Pudemos relatar, a solução de um problema elaborado por um grupo, resolvido por um segundo grupo, que por sua vez analisou o trabalho de um terceiro grupo. Neste caso o problema foi o mesmo para os grupos, porém, podemos elaborar diferentes problemas para cada grupo, relacionados a um tópico. A aplicação de diferentes problemas, relacionados a um tópico, possibilita que estes sejam resolvidos por um grupo que não o formulou, e que poderá analisar a solução de um terceiro problema. A possibilidade de analisar diferentes proposições enriquece as atividades por resolução de problemas, por conta da possível diversidade de enfoques e soluções.

Estratégia 6

O experimento apresentado foi desenvolvido utilizando a estratégia *Resolvedor & Orientador*. O estudante Julio tem papel de orientador, enquanto o estudante Mauricio desenvolvia a atividade no *quadro negro*. Nesta sessão, além de Julio e Mauricio, haviam a estudante Maria e um monitor, Pedro, que observaram a atividade, interrompendo a dupla quando não entendiam algum passo dado, ou quando o monitor achou necessário fazer algum questionamento, ou orientou a dupla no desenvolvimento da sessão colaborativa.

Apresentamos abaixo um fragmento da atividade que explicita uma das fases da estratégia *Resolvedor & Orientador*, em outro momento os dois estudantes, Mauricio e Julio, resolveram um segundo problema com as atribuições de *"Resolvedor"* e *"Orientador"* trocadas.

O roteiro para a atividade trazia o seguinte problema:

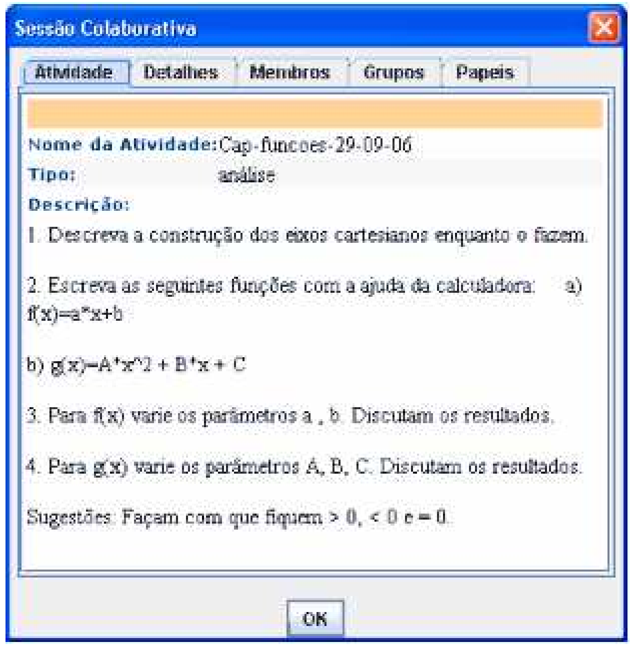

Figura 7.12: O Roteiro para o Problema

A figura 7.13 apresenta o *quadro negro* em determinado momento da solução escrita por Mauricio e orientada por Julio:

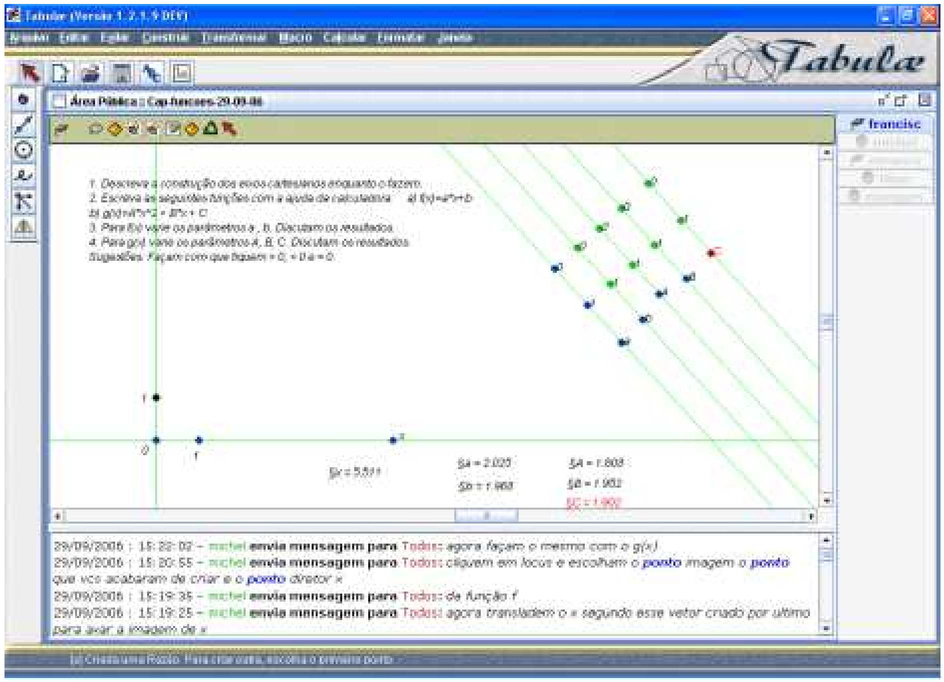

Figura 7.13: Um momento da solução no quadro negro

Observando alguns fragmentos da colaboração percebemos que os estudantes consultaram o roteiro apresentado na figura 7.12, iniciando os procedimentos para a solução. Mauricio fez a solução em seu *caderno de anotações* seguindo as orientações do Julio, e em seguida, quando entendeu melhor as orientações do colega, utilizou o *quadro negro*.

`mauricio`: *o A é qualquer número?*

`julio`: *crie 5 retas paralelas*

`julio`: *e em cada uma delas, crie a razão por 3 pontos, q serão a, b da função $f(x)$, e nas outras 3 serão A, B e C da função $g(x)$.*

`mauricio`: *explica de novo*

`julio`: *tá escrito aí no chat*

`mauricio`: *preciso fazer algum vetor?*

`julio`: *tá escrito aí no chat meu filho é só rolar a tela... sabe fazer isso ou querer que eu te ensine também?*

`mauricio`: *não entendi.*

`julio`: *gente!!! Vocês vão achar os valores pra a, b, A, B, C e depois calcular com a calculadora pra achar o y*

`mauricio`: *fazendo o gráfico*

`julio`: *não*

`mauricio`: *fiz os tres pontos no grafico ....sem fazer nenhum vetor pq eu naum sei se precisa e fiz a razão entre os tres*

`mauricio`: *e aí?*

`julio`: *aí então termina... tô fazendo do jeito que eu sei fazer*

`mauricio`: *e depois*

`mauricio`: *eu faço três pontos nelas?*

`julio`: *já calculou os 5 valores de a, b, A, B e C através de razão por 3 pontos?*

`julio`: *aih vc faz um vetor do 0 para o valor unitário que tá no y*

`mauricio`: *mas pq 5 valorers se eu tenho 6 retas?*

`mauricio`: *vcs me disseram q era pra fazer 5 parallelas*

`mauricio`: *depois de fazer isso e o vetor unitario no eixo y eu faço o q ?*

`julio`: *vc calculou com a calculadora* $a * x + b$ *e* $A * x^2 + B * x + C$*??*

(...)

`julio`: *pode fazer no quadro negro, na publica?*

`julio`: *faça do lado direito desse texto.*

`julio`: *crie os eixos x e y*

`pedro`: *porque a necessidade de criar uma reta inicialmente?*

`julio`: *para que os eixos não fiquem se movimentando, entaum cria-*

mos paralelas e escondo a reta inicial para que não seja possível movimentar as retas

`pedro`: *e pegar depois sua paralela*

`julio`: *é... a paralela e a perpendicular, passando por um mesmo ponto que é o 0*

`pedro`: *entendi*

`julio`: *crie o ponto para o valor unitário e o valor x*

`julio`: *agora crie o valor unitário pro eixo y.*

`pedro`: *como??*

`julio`: *rotacionando 90 graus o valor unitário pro eixo x*

`julio`: *ok?*

`pedro`: *ok!*

`pedro`: *desculpe, mas não vi esse ultimo passo. o que foi feito?*

`julio`: *Mauricio crie uma reta e em seguida 5 paralelas... e escondeu a reta inicial pelo mesmo motivo da reta inicial dos eixos*

`mauricio`: *porque?*

`julio`: *pra criar os valores para usar nas funções afim e de* 2^o *grau*

`mauricio`: *mas vc soh pode criar esses valores criando retas?*

`julio`: *não, mas para poder alterá-los mais tarde acho q só pode ser com retas.*

`mauricio`: *entendi*

`pedro`: *talvez seja mais simples*

`julio`: *o q?*

`pedro`: *não entendo como são achados os valores*

`mauricio`: *nem eu*

`julio`: *através de razão por 3 pontos*

`mauricio`: *qual a ordem ?*

`pedro`: *a utilização da reta*

`julio`: *o primeiro ponto escolhido eh o* 0*, o segundo eh o valor* $+1$ *e o terceiro é o valor que vai variar*

`pedro`: *os pontos* a*,* b*,* A*,* B *e* C *são aletorios?*

`mauricio`: *qual a ordem nas retas [...] nas retas naum tem ponto zero e 1*

`julio`: *está na reta para que seja calculado os valores, se naum fossem colineares, naum seriam calculados valores exatos*

`pedro`: *digo aleatorios na reta*

`julio`: *como assim?*

`mauricio`: *agora eu entendi*

`pedro`: *acho que entendi*

`mauricio`: *paro aqui?*

`maria`: *vc poderia descrever + devagar por favor para facilitar o nosso entendimento*

`mauricio`: *apoio a Maria*

`pedro`: *uma pergunta. Porque pegar razão entre segmentos e não apenas comprimentos de segmentos*

(...)

`julio`: *calculem o valor de* $f(x) = a * x + b$

`julio`: *e calculem o valor de* $g(x) = A * x^2 + B * x + C$

`mauricio`: *o q eu faço depois de calcular as equações ?*

`julio`: *já calcularam* $f(x)$ *e* $g(x)$*?*

`maria`: *sim*

`maria`: *o q eh p/ fazer?*

`julio`: *espera o renan*

`mauricio`: *jah fiz*

`julio`: *aí criem um vetor que tenha origem em* $(0,0)$ *e extremidade em* $(0,1)$

`mauricio`: *e aí?*

`julio`: *renan, vc fez com a extremidade em* $(1,0)$

`mauricio`: *fiz em (0, 1)*

`julio`: *agora criem um produto por escalar com esse vetor que vcs acabaram de criar e o valor de* $f(x)$

`julio`: *agora transladem o* x *segundo esse vetor criado por ultimo para achar a imagem de* x

`julio`: *da função* f

`julio`: *cliquem em locus e escolham o ponto imagem o ponto que vcs acabaram de criar e o ponto diretor* x

`julio`: *agora façam o mesmo com o* $g(x)$

Estratégia 7

Neste problema, o professor designou ao grupo formado por Flavio e José a tarefa de analisar e comentar a atividade **Ufrj-01abr2007-a**. Flávio e Jose, conectados à atividade *Solução Orientada*, encontram o roteiro representado na figura 7.14. O roteiro pede aos alunos acessem o *revisor passo a passo* e em seguida comentem a solução do outro grupo de acordo com os questionamentos propostos no roteiro.

A estratégia *Solução Orientada* possui semelhanças com a estratégia *Troca-Troca Crítica* em sua primeira fase, onde um estudante orienta o colega que escreve no *quadro negro*, podendo ainda, mais de um estudante orientar a solução desenvolvida pelo colega. No *Solução Orientada* o problema a ser resolvido é estabelecido pelo professor. A segunda parte, diz respeito à correção (crítica) do trabalho. Neste experimento, a crítica ocorre por meio da análise do *revisor passo a passo*, do problema desenvolvido na sessão **Ufrj-01abr2007-a**. O fragmento apresentado, traz em destaque, a análise feita por Flavio e José sobre um problema resolvido por Laura e Joao.

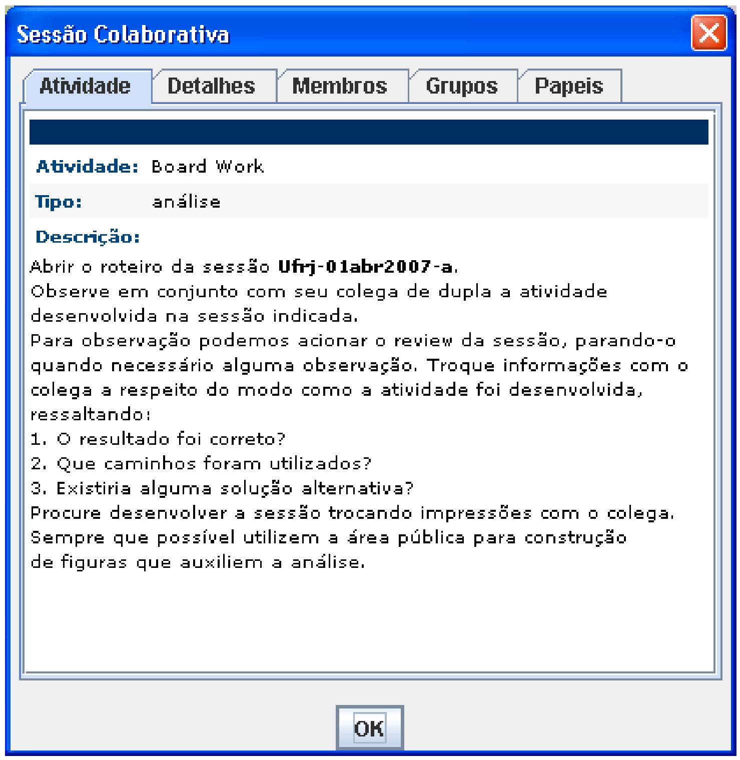

Figura 7.14: Roteiro para a atividade analisada

A seguir apresentamos fragmentos da discussão desenvolvida a partir da análise dos estudantes que acessaram o *revisor passo a passo* da sessão, como indicava o roteiro. Apresentamos, uma sequência de telas capturadas do *passo a passo* da sessão, e relacionadas aos comentários do grupo que analisou o *revisor*.

(...)

`Flavio`: *Me parece que ele está tentando inscrever um retângulo.*

`Jose`: *Começou fazendo duas perpendiculares à base do triângulo...*

`Flavio`: *Pois é mas eles começaram a inscrever os pontos , não era o caminho melhor.*

`Jose`: *Acho que tentaram semelhança ...*

`Flavio`: *Tentaram do retângulo, chegar no quadrado...*

(...)

Neste trecho, os estudantes observam, que a dupla tentou iniciar o problema construindo um retângulo inscrito, o que podemos observar na tela do *passo a passo* na figura 7.15.

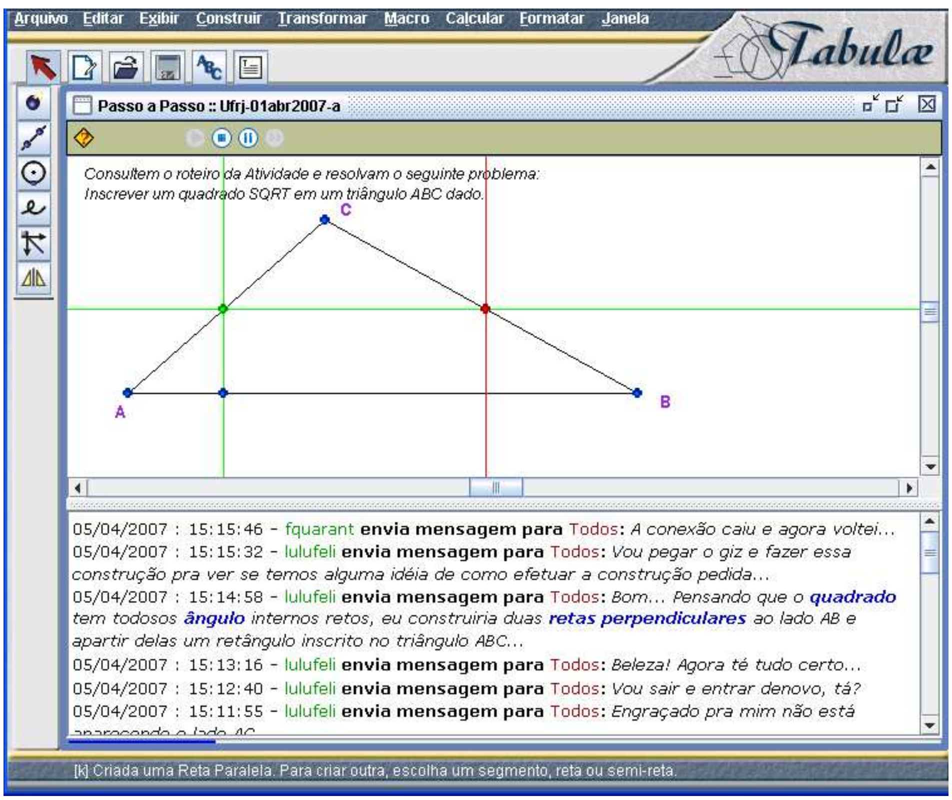

Figura 7.15: Tela referente às primeiras idéias

(...)

`Jose`: *Depois eles passaram à construção de um quadrado e experimentaram várias posições movimentando ...*

`Jose`: *Que é a idéia de usar Homotetia de um quadrado interior.*

`Flavio`: *Chegaram a conclusão que era melhor ter a garantia que era o quadrilátero fosse um quadrado.*

(...)

Este fragmento, descrito acima, indica ter relação com a análise da tela que apresenta a configuração que mostra a figura 7.16. Jose e Flavio percebem que o grupo procurava rever as idéias iniciais para a solução do problema.

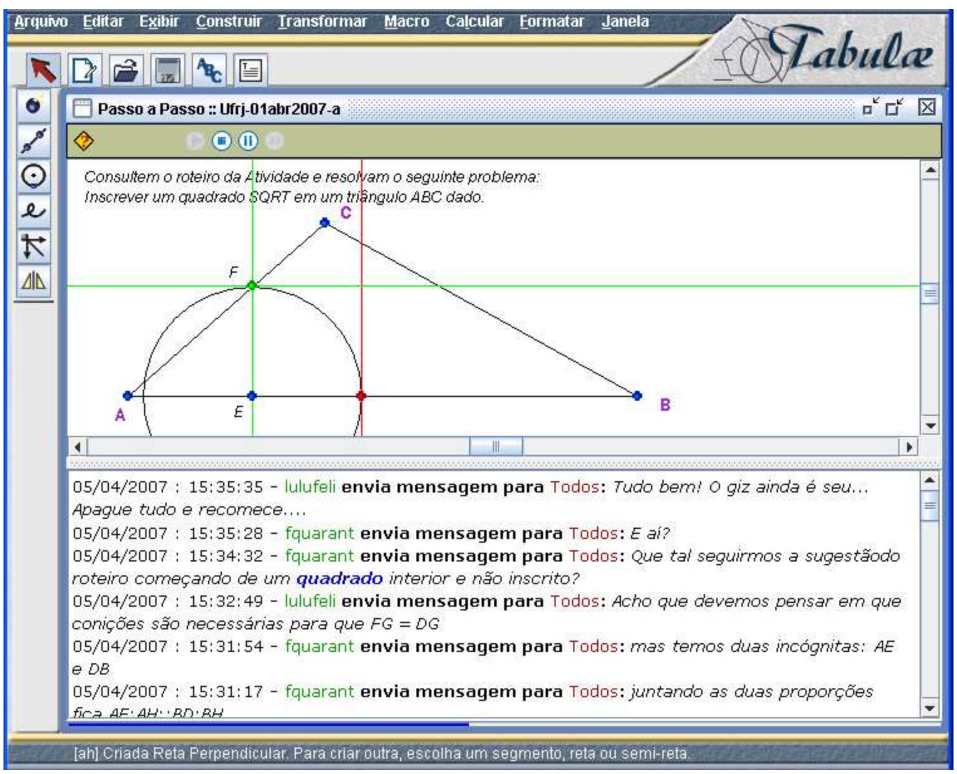

Figura 7.16: Tela que caracteriza a procura por um caminho alternativo

A seguir selecionamos trechos da discussão entre Jose e Flavio, e procuramos captar, na tela da atividade revisada *passo a passo*, situações que podem representar os comentários da dupla.

(...)

`Jose`: *Movimentaram e perceberam que o quarto vértice percorria uma linha reta*

`Flavio`: *Isso. A homotetia é para o quadrado...*

`Jose`: *e cruzava o terceiro lado no ponto que soluciona o problema e na verdade é o primeiro a ser construído.*

(...)

`Jose`: *Daí o Ponto I é o primeiro a ser encontrado.*

`Flavio`: *Dai, traçaram os pontos I e J para formar um novo quadrado.*

`Flavio`: *I e J não J e L*

`Jose`: *Eles justificaram usando a razão de homotetia*

`Flavio`: *Usaram a razão AG/AI*

`Jose`: *E está correto né?*

`Flavio`: *Sim.*

(...)

`Jose`: *Agora não me vem nenhuma idéia que não seja esta usando homotetia, e vc?*

(...)

Os trechos de análise acima têm relação com o que observaram, no *revisor passo a passo*, e pode ser representado pelas telas apresentadas e comentadas a seguir.

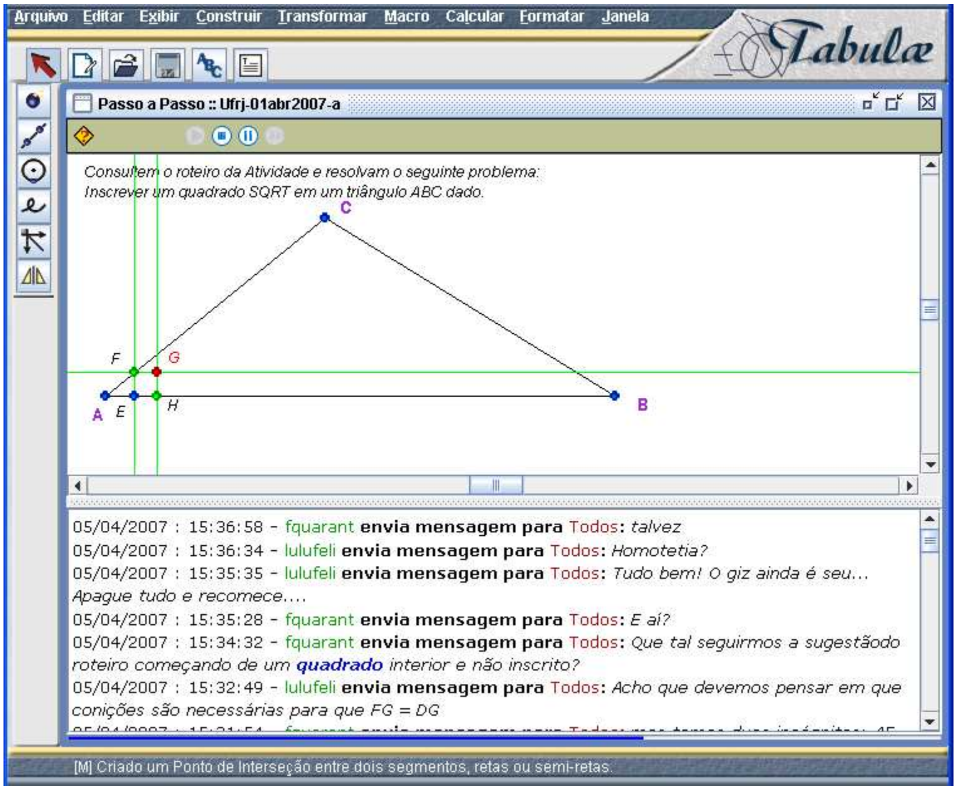

Figura 7.17: Exploração das propriedades dinâmicas do software

A figura 7.17 sugere que após seguir a sugestão do roteiro o grupo começa a explorar as propriedades dinâmicas do software, na tentativa de encontrar a solução.

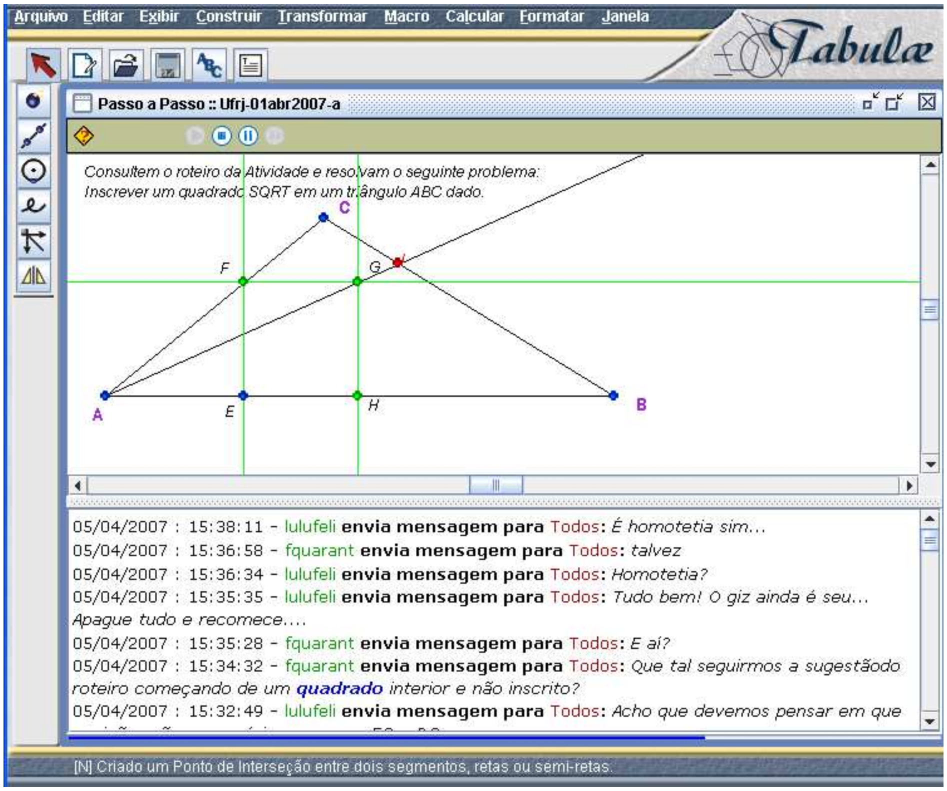

Figura 7.18: Exploração permite encontrar o ponto solução

A figura 7.18 mostra o momento que o grupo encontra a solução do problema apresentado na atividade **Ufrj-01abr2007-a**, através da observação do caminho percorrido pelo ponto G, uma linha reta.

A figura 7.19 permite as conclusões que Flavio e Jose fazem no último trecho do fragmento da estratégia *Solução Orientada* destacado na página 239.

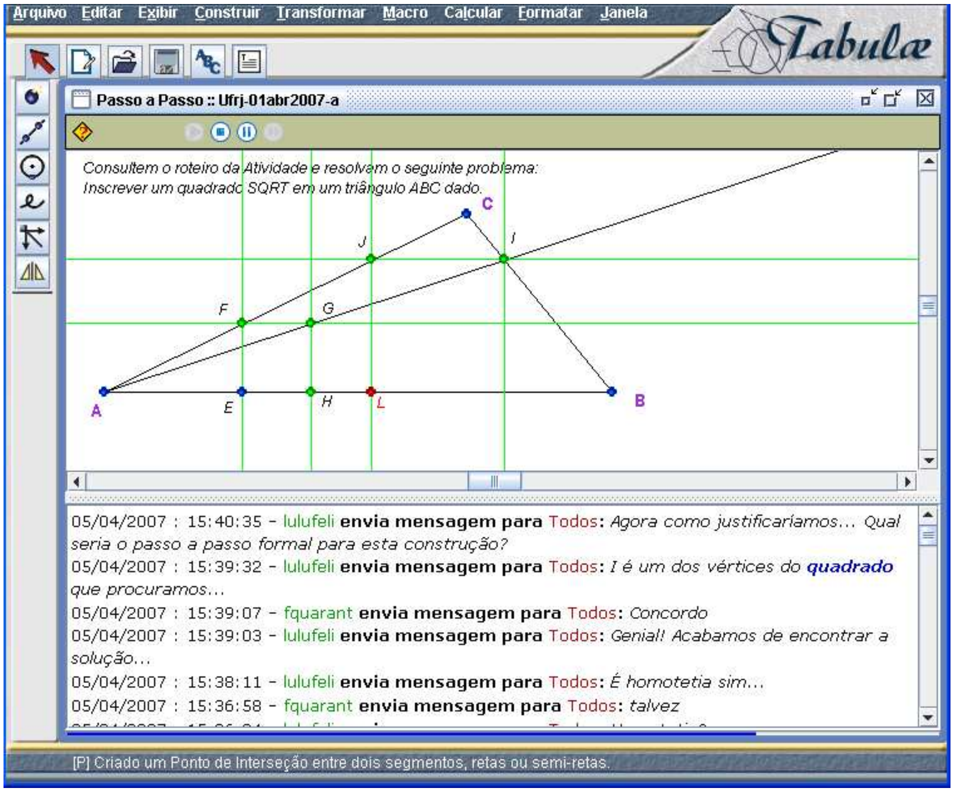

Figura 7.19: Testando a conjectura

Neste experimento, observamos que os estudantes observaram e comentaram a resolução da atividade **Ufrj-01abr2007-a**, realizada pelo outro grupo, e no *quadro negro* copiaram o roteiro que deveriam seguir. Flavio e Jose não utilizaram o software para tentar investigações a respeito do que o grupo de colegas fez na atividade **Ufrj-01abr2007-a**. Isto fica claro na figura 7.20, que representa a tela final do trabalho. Não deram pista, também, de terem usado seus *cadernos de anotações* no *Tabulæ Colaborativo*, para investigações a respeito da solução do problema. Porém, ao que parece, leram os diálogos e acompanharam o desenvolvimento da questão, concordando com a solução apresentada. Jose e Flavio não fizeram nenhuma sugestão para uma solução alternativa, limitaram-se a responder minimamente o que pedia o roteiro.

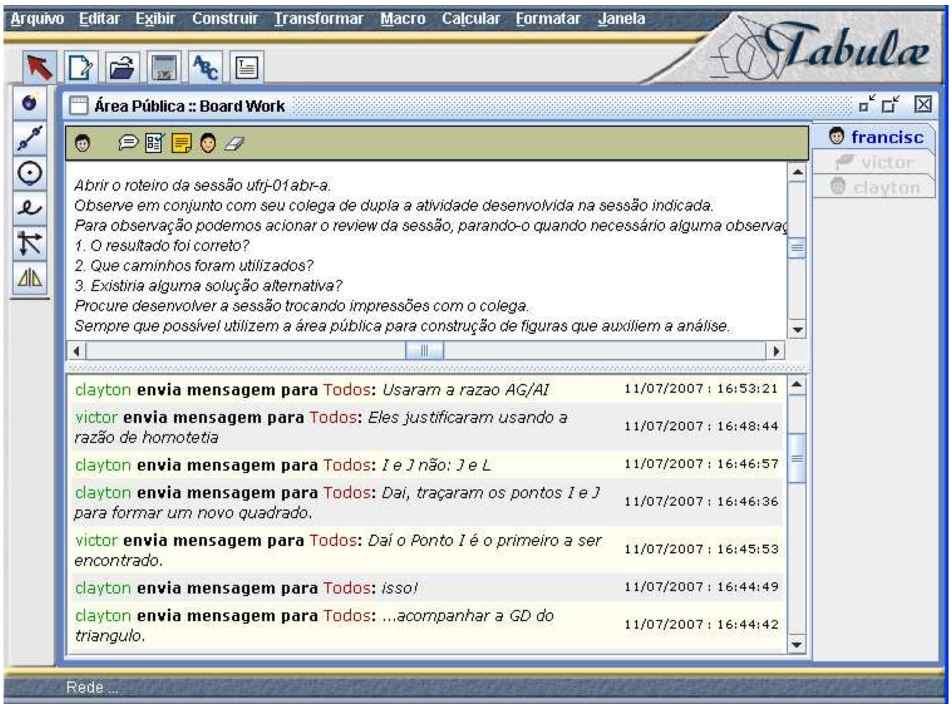

Figura 7.20: Testando a conjectura

Esta estratégia permite, que em muitas situações, os estudantes que analisam uma atividade, proponham soluções alternativas, ou mesmo, não concordem com a solução feita pelo grupo criticado. Para tal, podem apresentar argumentos, através de texto no *Chat* e/ou visualmente, através de construções com o software.

Estratégia 8

A atividade descrita aqui foi desenvolvida de acordo com a estratégia **Jigsaw - Grupos especialistas**, descrita na seção 7.3.1, página 208. Foram formados grupos de três estudantes para resolver o problema abaixo:

Dado um pentágono encontrar um quadrado cuja área seja equivalente à área do pentágono.

Os estudantes ao conectarem a sessão, encontraram roteiro e tela, representados respectivamente nas figuras 7.21 e 7.22. Os grupos recebem o problema, se desconectam do grupo inicial e em seguida acessam os *grupos especialistas*. Cada componente do grupo inicial é conectado a uma especialidade diferente.

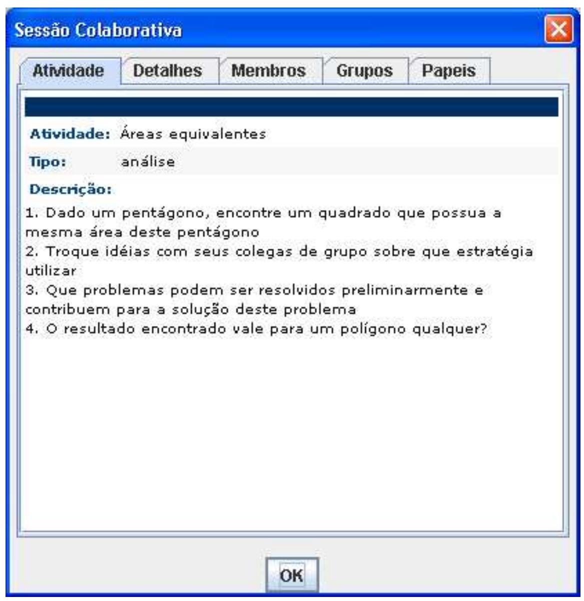

Figura 7.21: Roteiro do problema principal

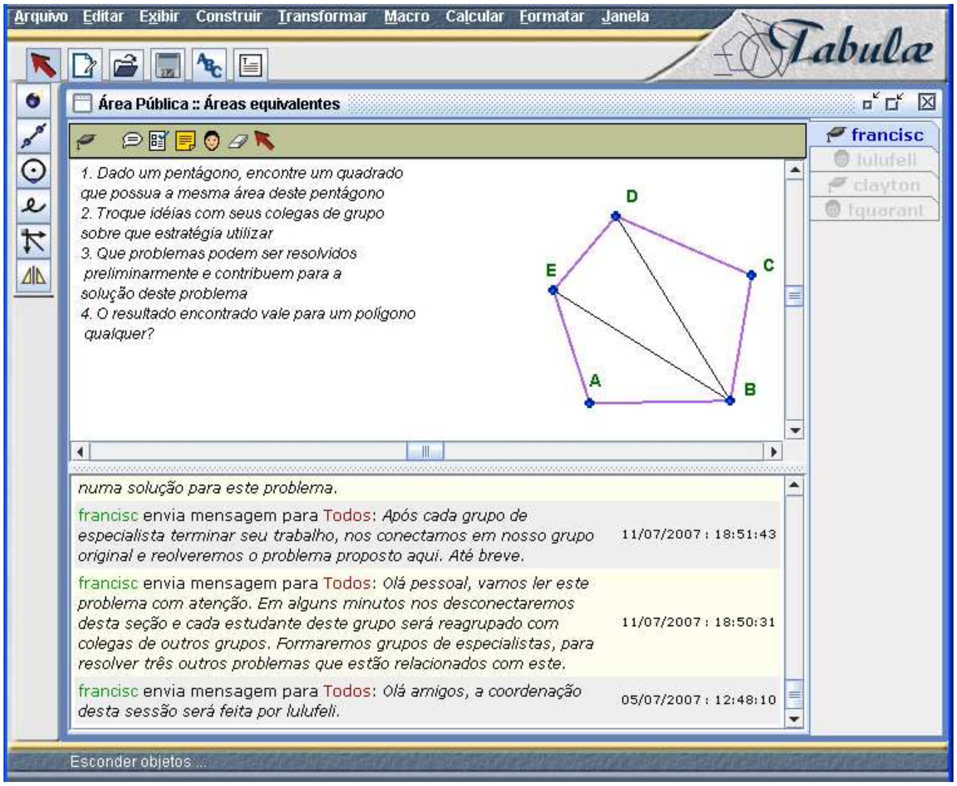

Figura 7.22: A sessão colaborativa planejada para usar *Jigsaw - Grupos Especialistas*

A estratégia **Jigsaw - Grupos Especialistas** pressupõe o rearranjo em grupos que estudam um determinado tópico ou conceito, que faz parte do problema tratado pelo grupo inicial. Para este experimento, dividimos o problema em três tópicos especiais:

Tópico 1

> *Como transformar um triângulo ABC qualquer num retângulo PQRS, de mesma área?*

Neste grupo, Laura e Rodolfo trocam, inicialmente, idéias sobre o caminho que deveriam seguir para solucionar o problema, iniciando a discussão. Os estudantes encontram a solução, e colaboram para desenvolvê-la.

(...)

`Laura`: *E aí Já leu o roteiro?*

`Rodolfo`: *Já. Tem alguma idéia?*

`Laura`: *Pra ter a mesma área, estou pensando em um retâgulo de dimensões iguais à base e à altura do triângulo, o q vc acha?*

`Rodolfo`: *Pela fórmula da área do retângulo, teremos o dobro desta área!*

`Laura`: *Desculpe eu quis dizer a metade da altura, certo?*

(...)

`Rodolfo`: *Vou construir o ponto médio da altura.*

`Laura`: *Trace as retas por A e B.*

`Laura`: *Isso.*

`Laura`: *Rodolfo nomeie o que vc está fazendo pra que eu possa acompanhar.*

`Rodolfo`: *Construi o ponto médio da altura e os lados do retângulo.*

`Laura`: *Identifique por favor os pontos, Rodolfo.*

`Rodolfo`: *Vou chamar de M o ponto médio da altura.*

`Rodolfo`: *Vou te passar o giz. Continua ai!*

(...)

Em seguida, os alunos apresentam uma justificativa para a construção.

(...)

`Rodolfo`: *Podemos justificar pela fórmula!*

`Rodolfo`: $base \times altura/2$

`Rodolfo`: *Podemos olhar como* $(base) \times (altura/2)$

`Laura`: *Seguinte: CM é congruente a QR e temos dois triângulos congruentes UQR e UCM.*

`Laura`: *O que acha?*

`Rodolfo`: *Sim. Argumentando que acontece o mesmo com PSK e CMK.*

`Laura`: *Então resolvemos a nossa tarefa, ok.*

`Laura`: *Então complete.*

`Rodolfo`: *ok?*

`Laura`: *Agora é só formalizar isto escrevendo as propriedades e estará demonstrado. Feito! OK!!!*

(...)

Ao final da atividade, no grupo especialista, os estudantes apresentaram a relação entre as áreas de um triângulo e um retângulo, construindo e justificando a solução.

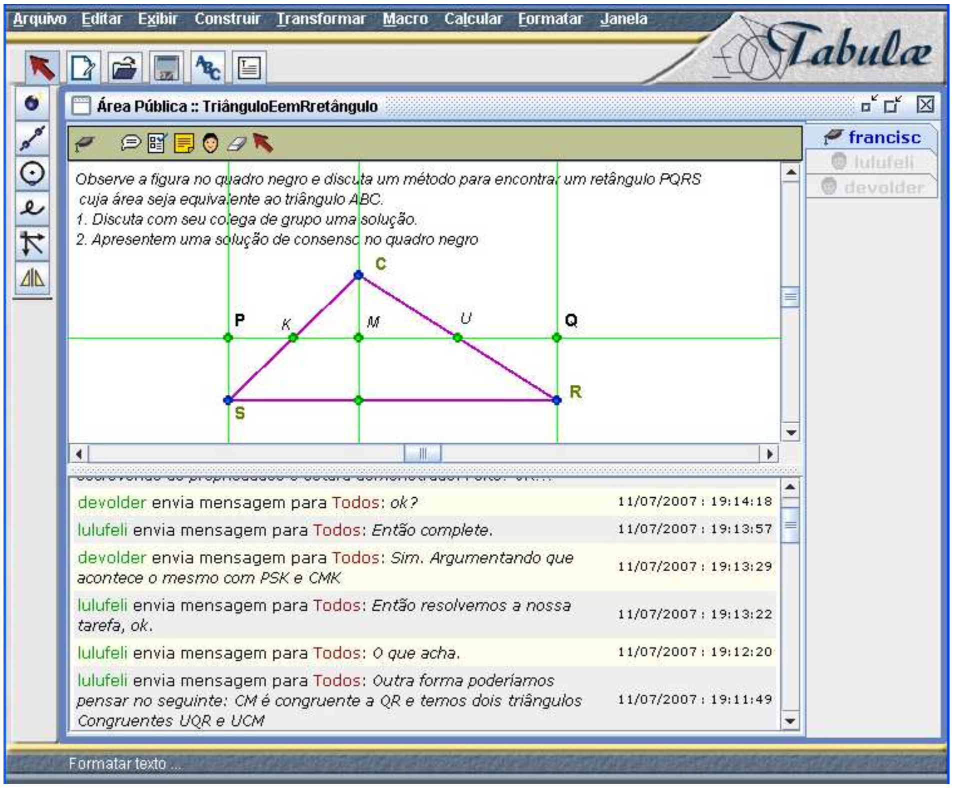

Figura 7.23: A solução apresentada para o grupo no *Tópico 1*

Tópico 2

> *Como transformar um retângulo PQRS em um quadrado XYZW de mesma área?*

Os estudantes João e José iniciam a discussão enquanto José trabalha em seu *caderno de anotações* no *Tabulæ Colaborativo.*

(...)

`Joao`: *Bem, pensei em começar relacionando as fórmulas do quadrado e do retângulo.*

`Jose`: *Temos que encontrar um modo de escrever isso. Acho que vi* *alguma coisa parecida no livro do Legendre.*

Jose: *João então seguindo sua idéia dê nomes aos lados, na figura.*

Jose: *Tive uma idéia aqui no meu caderno*

Joao: *Qual? Vou te dar o giz.*

(...)

João e José concordam, e iniciam a construção no *quadro negro*.

(...)

Jose: *É usando Potência de Ponto.*

Jose: *Vou tranferir o segmento RQ pra reta.*

Joao: *ah! Estou lembrando desta construção! Para argumentarmos a potencia de pontos devemos construir um círculo, lembra?*

(...)

Jose: *Não estou lembrando como isso continua ...*

Joao: *Se traçarmos uma reta que contenha QR e seja perpendicular a que contenha o diâmentro...*

Joao: *... e determinar o ponto K como intercecção desta reta ao círculo maior...*

Jose: $QR = b$*, certo. Precisamos determinar dois segmentos congruentes partindo de Q e que tenha valor* $a \times b$.

(...)

Joao: *Temos as cordas KL e PR*

Jose: $QP \times QR = QK \times KL$

Joao: *Mas como* $QK = QL$*, podemos chamá-los de d*

Jose: *Isso*

Joao: *Vou te passar o giz*

Jose: *Assim teremos um quadrado com este lado igual a* ***d***.

(...)

E ainda, João enxerga uma solução alternativa para a justificativa da construção que fizeram:

(...)

`Joao`: *Se construirmos os triângulos PKR, PQR e PKQ, podemos conseguir a mesma relação por semelhança de triângulos!*

`Jose`: *Agora é só formalizar isso escrevendo a prova.*

Observamos, pela discussão, que o grupo iniciou a tarefa com muitas dúvidas e bastante inseguros, porém à medida que faziam as figuras, foram se ajudando, até encontrarem a saída para a solução do problema. Ao final, apresentaram mais de uma solução, para justificar a construção que fizeram.

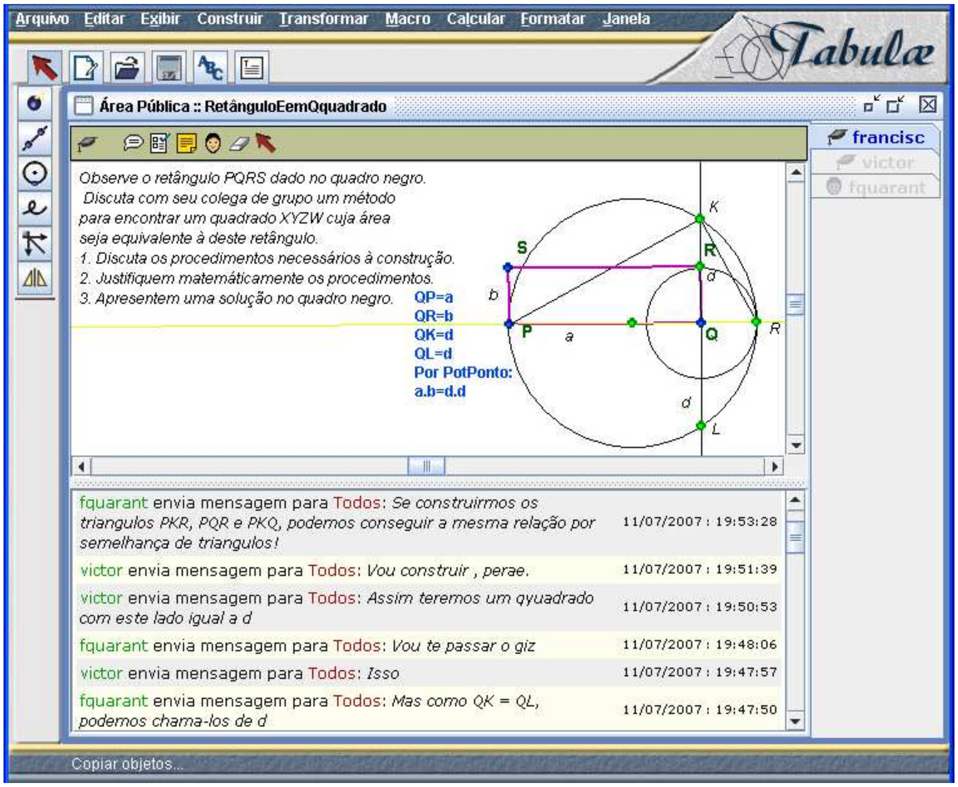

Figura 7.24: A solução apresentada para o grupo no *Tópico 2*

Tópico 3

Como transformar dois quadrados XYZW e MNOP num terceiro de mesma área que a soma dos dois?

(...)

`Mario`: *Não tenho a menor idéia de como vamos fazer isso!*

`Flavio`: *bem a área do tal quadrado deve ser igual a* $a^2 + b^2$ *né não?*

`Mario`: *Quase o teorema de Pitágoras, né?*

`Flavio`: *A solução deve ter haver com isso! Precisamos de um lado que se elevado ao quadrado dê isso!!!*

`Mario`: *Os quadrados um em cima do outro deve ter alguma coisa a* *ver com a solução.*

`Flavio`: *Cara fiz aqui no meu caderno de anotações e vê se isso ajuda: se os quadrados forem iguais, este lado novo seria a diagonal de um deles!*

`Mario`: *Não entendi. Como assim?*

(...)

Flavio tenta mostrar a Mario, o que havia pensado para a solução, usa o artifício de fazer $a = b$, ao que parece usando a figura. Percebemos, que logo em seguida, Mario consegue viasualizar, na figura proposta, qual seria a solução.

(...)

`Flavio`: $a^2 + a^2$ *e isso é a diagonal ao quadrado, certo?*

`Mario`: *certo*

`Mario`: *Então liga PZ!*

`Flavio`: *Faz aí, pega o Giz!*

`Mario`: *Isso! Pois então PZ é o lado do nosso quadrado!*

`Flavio`: *o teorema de Pitágoras ajudando novamente!*

`Flavio`: *Se colocar N em cima de Z fica aquilo que falei e tá valendo.*

`Flavio`: *movimente o N com o mouse!*

`Mario`: *Entendi!*

`Flavio`: *Viu nesse caso* $a = b$

(...)

Observamos que Flavio e Mario utilizaram as propriedades dinâmicas do software para explorar várias possibilidades, para a solução. É notório, a partir da análise do *revisor passo a passo*, que Flavio explorou o movimento do ponto N (como ele ressalta acima), para construir a conjectura que apresenta a Mario. A figura apresentada no problema contribuiu para que visualisassem o *Teorema de Pitágoras*, como justificativa para a solução, como mostra a figura 7.25.

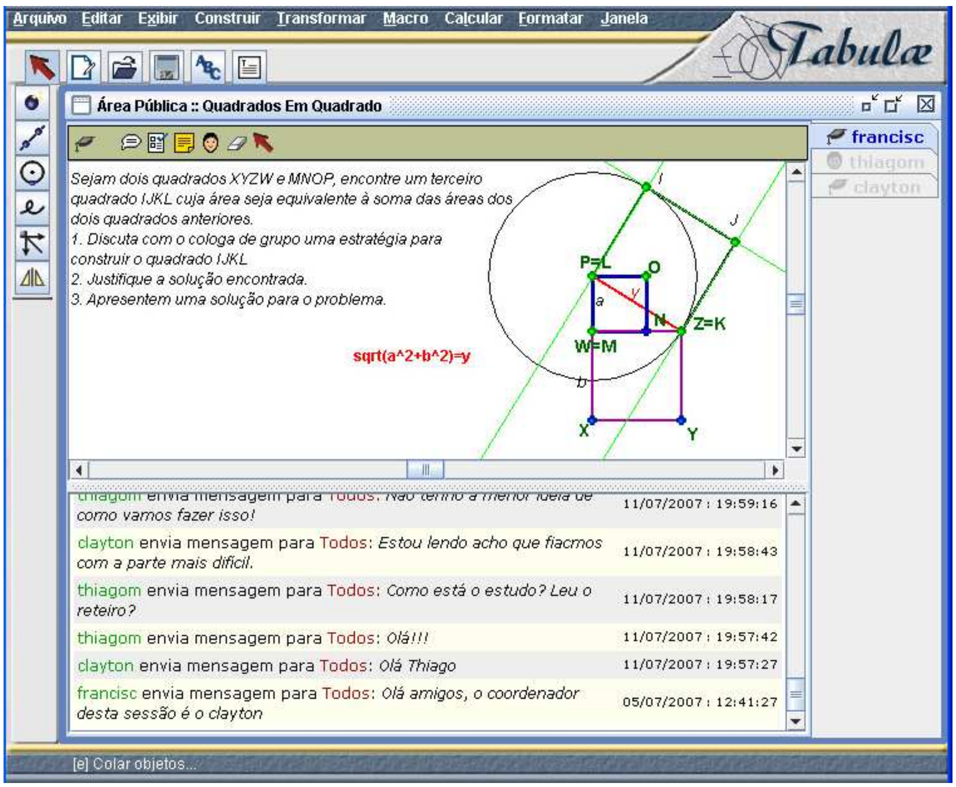

Figura 7.25: A solução apresentada para o grupo no *Tópico 3*

Após o estudo *especializado*, os estudantes se conectam nos grupos originais e iniciam a solução do problema proposto. Observamos que por já conhecerem o problema principal desde o início, eles retornam do grupo de especialistas sabendo que a tarefa lá desenvolvida os ajudaria de algum modo. É interessante observar que os componentes do grupo começam logo a descrever a atividade que cada um fez. É importante ressaltar que um grupo não tinha idéia do que ocorria na atividade de outro grupo especialista. Seguem abaixo fragmentos da discussão final. O roteiro pedia apenas que escrevessem uma estratégia para solucionar o problema: *encontrar um quadrado de área equivalente ao pentágono dado*. A construção da resolução proposta fez parte de outra atividade.

Seguem abaixo fragmentos do discurso desenvolvido para a solução do problema e apresentada na figura 7.26.

(...)

`Joao`: *No meu grupo, tranformamos retângulo em quadrado!*

`Laura`: *Mas aí teremos quadrados diferentes...*

`Flavio`: *No meu grupo transformamos dois quadrados quaisquer em um de área igual a soma dos dois*

`Laura`: *E como podemos organizar isso, tá confuso!*

`Joao`: *Então vamos por partes...*

`Joao`: *...dividimos a figura em triangulos ABE, EBD, DBC*

`Flavio`: *Cada um destes então pelo que a Laura disse poderá ser transformado num retângulo*

`Laura`: *Daí teremos então três retângulos, é como se recortassemos a figura e reagrupasse, né?*

`Flavio`: *Usamos potência de ponto para transformar um retângulo em um quadrado. Então podemos transformar este pentágono em três quadrados diferentes.*

`Laura`: *diferentes um do outro ... e agora ...*

`Flavio`: *Vou dar nomes às áreas I II III*

`Joao`: *Pegamos primeiro dois e aplicando o que descobrimos...*

`Joao`: *Quadrado I com o quadrado II dá um novo...*

`Joao`: *... que juntando com o III resulta no quadrado equivalente!*

`Laura`: *Muito bem, conseguimos!*

(...)

`Flavio`: *Temos que fazer tudo isso numa próxima sessão. Mas tá perguntando se vale para qq polígono.*

`Laura`: *Sim pelo estudamos aqui todo polígono pode ser dividido em triângulos. E dai vale o que fizemos para o pentágono.*

(...)

A estratégia *Jigsaw - Grupos Especialistas*, permite ao professor desenvolver atividades com múltiplos itens, estudados separadamente. Após o estudo *especializado*, cada participante destes grupos retorna aos grupos originais e contribui para a solução do problema completo. O desenvolvimento desta estratégia permite que, nesta fase da atividade, os estudantes compartilhem suas experiências e os conhecimentos adquiridos nos *grupos especialistas*.

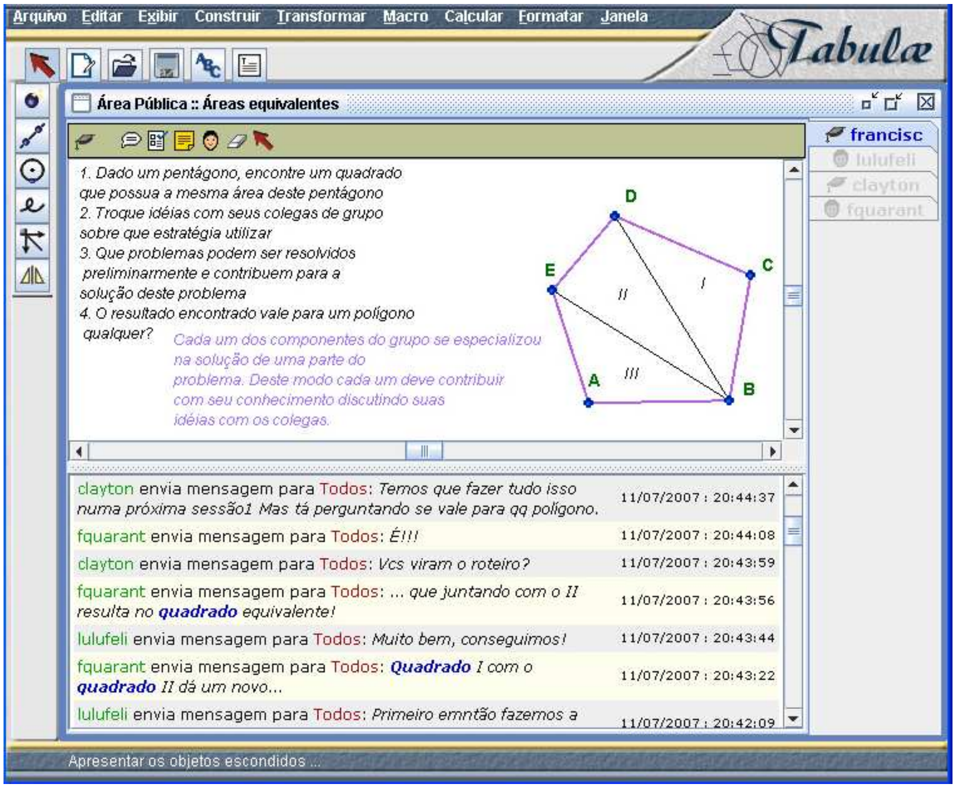

Figura 7.26: A solução após atividades nos *Grupos Especialistas*

Capítulo 8

Conclusões

A idéia central desta pesquisa foi apresentar uma contribuição ao *Ensino e Aprendizagem de Matemática*, por meio do estudo de novas metodologias de ensino relacionadas à utilização da tecnologia.

A nossa tese apresenta a viabilidade da formulação de estratégias de ensino baseadas nos modelos de *Aprendizagem Colaborativa*, quando utilizamos ferramentas *CSCL* projetadas com a orientação de *roteiros de colaboração*. As possíveis aplicações destes modelos aqui propostos abrem caminhos para diversas pesquisas e reflexões no campo da *Educação Matemática*.

O estudo sobre a implantação de ambientes computacionais baseados no *Aprendizado Colaborativo* mostrou que este traz ao ensino, de modo geral, e, em particular, ao ensino de matemática, novos horizontes. Entendemos que a implantação de *redes de ensino on-line* em matemática pode oferecer à prática instrucional desta disciplina muitos e oportunos benefícios.

Da análise dos experimentos que desenvolvemos para esta tese, observamos que as possibilidades de exercer o aprendizado através das **TIC** trazem ao estudante motivações distintas. Porém, de um modo geral, os registros revelam que a possibilidade de uso de recursos tecnológicos é vista de forma positiva pelos estudantes.

Dentro deste quadro, modelos colaborativos oferecem mais uma alternativa possível ao ensino e aprendizagem de matemática. Numa perspectiva mais ampla, o fato destas estratégias de ensino que aqui apresentamos serem aplicáveis por meio de ferramentas *CSCL*, e, portanto, realizadas de modo remoto, podem contribuir para as demandas de acesso ao *Ensino de Matemática*, via *Ensino a Distância*. Assim, a adequação do *Tabulæ Colaborativo* a plataformas de ensino à distância, em nosso caso específico o *Moodle*, pode contribuir para projetos que tenham como objetivo o desenvolvimento de cursos à distância, como, por exemplo, os processos de formação de professores.

A nossa pesquisa confirmou a necessidade da concepção de **roteiros de colaboração** nos projetos de ferramentas para *Aprendizado Colaborativo*, que funcionam como suporte à colaboração. Os **roteiros de colaboração** em um ambiente colaborativo abrangem desde as funcionalidades disponíveis ao ambiente de colaboração, aos artifícios didáticos anexados a uma atividade. Em nossos estudos, observamos que não basta reunir pessoas em torno de um problema para que desenvolvam um processo interativo produtivo em relação ao conhecimento matemático. Pelo contrário, o que motiva a atuação com trocas de idéias e conhecimentos relacionados ao objeto estudado são as *'motivações externas'* agregadas, e que orientam um processo produtivo relacionado à aquisição de conhecimento. As *'motivações externas'* podem ser de diversos tipos: roteiros didáticos anexados às atividades; presença de *mediador* apresentando um *roteiro dinâmico*; etc.

Em nossas pesquisas iniciais, aplicamos um problema para ser resolvido com o *Tabulæ Colaborativo* pelos estudantes de uma turma do curso regular de licenciatura. Conectados em dupla, alguns tiveram acesso a um roteiro com perguntas e indicações que poderiam levar à solução, além de indicações para uso das ferramentas de comunicação do software. Outros apenas acessaram o problema e não receberam nenhum suporte. Verificamos que os que acessaram o roteiro desenvolveram algum tipo de interação que apontava para solução do problema. Os grupos sem acesso ao roteiro não conseguiram usar o *Chat* para troca de idéias ou informações, e estes grupos nada fizeram, ou cada estudante tentou a solução de modo individual.

Estes estudos, em conjunto com a revisão bibliográfica (Nason, Woodruff, Brett, etc), nos indicaram a necessidade de prover o projeto do software com funcionalidades que instrumentalizem o ambiente colaborativo e indiquem procedimentos roteirizados que contribuam de modo objetivo para a construção de conhecimentos através da colaboração entre os componentes dos grupos. As funcionalidades foram agregadas na medida em que avançamos nossas observações com a prática.

Buscamos, nos estudos de Davidson, Reynolds, Rogers, entre outros trabalhos consultados, referências para conceber as estratégias de colaboração apresentadas nesta tese, utilizando o *Tabulæ Colaborativo*. Mais especificamente, aplicamos ao ambiente do software algumas estratégias apresentadas em Fenton et al., viabilizando-as como componentes de um *roteiro de colaboração*. As estratégias foram aplicadas a atividades relacionadas à resolução de problemas, na maioria dos casos, de geometria. Utilizamos problemas apresentados por Pólya [109], Legendre [70], Martin [79], Hartshorne [49] e ENEM-2000, com pequenas adaptações. Consideramos bastante relevantes os resultados das pesquisas envolvendo os experimentos com resolução de problemas modelados pelas diversas estratégias apresentadas, uma vez que nenhum dos problemas formulados deixou de ser resolvido, quando aplicados de acordo com as estratégias aqui propostas.

Entendemos que estes modelos mostraram-se viáveis e atraentes às diversas pesquisas que podem ser desenvolvidas. Como prosseguimento deste trabalho, pretendemos aplicar os modelos com objetivo de realizar pesquisas em *Educação Matemática*, produzindo análises qualitativas de diversos aspectos da aprendizagem estudadas com o emprego das estratégias didáticas simuladas com o *Tabulæ Colaborativo*.

8.1 Reflexões Específicas

A seguir algumas questões específicas que merecem reflexões posteriores em estudos mais orientados a aspectos qualitativos da aplicação das estratégias. Aqui fazemos pequenas reflexões e inferências a respeito de cada uma.

8.1.1 Discurso Matemático

A interação com outros estudantes, durante a resolução de problemas, fornece a oportunidade para que uma solução apresente diferentes abordagens sobre o problema tratado, discutindo soluções diferentes, aqui verificados nas estratégias **Pensar-Compartilhar-Escrever** e **Pensar-Trocar-Compartilhar**, através dos fragmentos das **Estratégias 1**, **2** e **3**. Percebemos na Estratégia 1 que o estudante Miguel tinha uma idéia inicial para a solução e é convencido pelo colega a aceitar uma solução alternativa.

Compartilhar o aprendizado com outros estudantes, durante uma atividade, exige articulação de idéias, e é uma oportunidade para reflexão sobre os conceitos envolvidos e os raciocínios utilizados para a resolução de um problema. As estratégias elaboradas possibilitam que estes processos sejam investigados, verificando-se que nível de influência exerce sobre o aprendizado.

Pelas características do software, que possui uma interface de comunicação gráfica com *Geometria Dinâmica*, as comunicações através de recursos de visualização mostraram-se recorrentes. A utilização deste recurso sustentou alguns discursos e mostrou-se fundamental para investigações relacionadas a problemas de maior complexidade. Na **estratégia 7**, José, em sua análise, percebe que João e Laura utilizam as propriedades dinâmicas do software para elaborar e comunicar a conjectura que apresentaram. Na **estratégia 5**, os diálogos entre Lucia e Mario revelam que utilizaram intensamente as propriedades do software para comunicar as idéias que elaboravam sobre a solução.

Em nossa proposta para a composição dos roteiros de colaboração, priorizamos o diálogo não estruturado, diferentemente de outras propostas para estruturação dos discursos de colaboração, como as que fazem Hron & Friedrich [51], Hirsch et al. [50]. As estratégias didáticas que apresentamos utilizam os roteiros como indicativos dos passos previstos durante a resolução de um problema colaborativamente pelo grupo. Ou, ainda, por mediação de um *roteiro dinâmico* que podemos observar nas intervenções do professor com Mario e Lucia na **estratégia 3**. Porém, a troca de mensagens e o discurso decorrente do processo interativo são livres.

Se, por um lado, este processo gera discursos com erros, ruídos e em certos casos aumenta a dificuldade de análise, também torna o discurso livre para associações de idéias, próprias aos estudantes. Acreditamos que esta estrutura adotada motiva mais os estudantes que *preencher lacunas*, num discurso estruturado.

Nos diálogos obtidos dos registros dos experimentos, encontramos diversificadas formas de discurso. Alguns revelam a tentativa dos estudantes em se expressarem usando a linguagem matemática formal, tentando representar símbolos e estruturas, o que muitas vezes os levava a procurar artifícios para representações não presentes no software. Na **estratégia 1**, Alex e Miguel utilizaram *potência de ponto* para resolver o problema. Em outros casos, o que prevalece é o uso da *linguagem matemática informal*, baseada em explanações utilizando a *linguagem usual* nos diálogos no Chat onde apresentam as idéias que utilizam na resolução. Observamos, ainda, a argumentação por meio de recursos visuais utilizando os recursos da *Geometria Dinâmica* no ambiente colaborativo.

Em qualquer destes, verificamos que a participação nas atividades implica necessariamente na leitura das argumentações e conseqüentes elaborações sobre a leitura, na condução dos diálogos entre os participantes. Observamos que este mecanismo é intenso durante as atividades. Nos registros, identificamos argumentações, contra-argumentos, réplicas e concordâncias com o interlocutor.

Não é nosso objetivo discutir o que é um bom discurso matemático. Porém, a aplicação das estratégias didáticas simuladas com o *Tabulæ Colaborativo* pode gerar material de análise para alimentar estudos que pretendam investigar a construção do discurso matemático, principalmente quando a análise tem como foco atividades aplicadas em ambientes para *Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador*. Outro ponto que pode ser abordado em pesquisas específicas é uma avaliação sobre a influência da qualidade da comunicação matemática dos estudantes (leitura, expressão escrita e oral) quando atuam em resolução de problemas utilizando estratégias didáticas aplicadas em ambientes *CSCL*.

8.1.2 Fatores Cognitivos e Metacognitivos e Investigação Matemática

Os intensos processos de trocas estabelecidas durante as estratégias apontam para atividades que priorizam o *'pensar sobre o que foi pensado'*. Assim, o *Tabulæ Colaborativo* se constitui numa ferramenta com funções complementares na medida em que apresenta um objeto a ser investigado e uma ferramenta para investigações. A **estratégia 3**, **Pensar-Compartilhar-Escrever**, que prevê o envio individual de cada solução, o **Troca-Troca Crítica**, onde os grupos têm a oportunidade de examinar as resoluções de outros grupos, permitindo que os estudantes tenham acesso a diferentes soluções possíveis. O quanto isto pode incentivar a criatividade dos estudantes, na medida em que podem aparecer diversas soluções para um mesmo problema, pode ser objeto de futuras investigações. A possibilidade de monitorar os processos permite a análise de diferentes modos de raciocínio nas resoluções de problemas. Da observação dos experimentos, percebemos que os estudantes apresentam diferentes estratégias e abordagens a um problema, que podem ser diagnosticadas e estudadas.

As estratégias didáticas têm por objetivo sugerir atividades que permitam elaborações sobre o objeto de estudo, e que favoreçam, aos estudantes, mudanças cognitivas. Elas foram formuladas com a preocupação de permitir inferências sobre a relação entre o saber final e o que cada um trouxe de conhecimento prévio. A possibilidade de ocorrerem ganhos cognitivos pós processos interativos é uma referência à ZPD colaborativa descrita por Lavy [69]. Como já foi dito, não foi nossa proposta fazer esta verificação, mas criar mecanismos para que esta análise fosse possível, em estudos que definam parâmetros para tal.

Acreditamos que uma ferramenta que permite a análise do discurso e os processos de argumentação, durante resoluções de problemas, pode ser bastante útil para investigações dos aspectos metacognitivos da aprendizagem e de interesse das pesquisas em *Educação Matemática*. Outro aspecto que pode ser analisado é como os estudantes aprendem a construir um argumento matemático que exponha idéias de forma clara e coerente. Os procedimentos incluídos nas estratégias, e que pressupõem a revisão de uma resolução feita por outro grupo de estudantes, incentivam o pensar sobre o que se lê.

De um modo geral, os processos de resolução de exercícios, em matemática, terminam quando encontramos uma resposta correta. Não é da cultura do aprendizado de matemática o retorno ao problema para analisá-lo pós-resolução. Este é um problema, segundo Nason & Woodruff [91], que influencia negativamente a aplicação de métodos de *Aprendizagem Colaborativa* em disciplinas de matemática.

Inferimos que os processos de revisão, ou mesmo a simples leitura de um argumento, apresentado por um colega, incentiva o interlocutor a pensar sobre o que lê. Isto se torna mais evidente, pois o estudante tem a necessidade de formular algo sobre o que lê para comunicar suas idéias durante os processos interativos. Na medida em que o estudante é capaz de construir argumentos sobre o objeto de estudo, ele fica muito próximo da construção do conhecimento a respeito daquele objeto (Lavy [69]). Com o *Tabulæ Colaborativo*, muitas vezes, os argumentos são baseados em evidências visuais, proporcionadas pelo ambiente de *Geometria Dinâmica*, podendo ser confirmados, ou não, durante a discussão do problema.

Uma característica presente, na maioria das estratégias que apresentamos nesta tese, é o acesso a problemas resolvidos. Estes, fazem parte dos roteiros de colaboração, e foram concebidos com a finalidade de permitir aos estudantes a reflexão sobre os passos dos procedimentos realizados por eles próprios ou pelos colegas. Este pensar sobre o já feito, ou sobre o modo como o outro fez (que geralmente não é uma prática do ensino de matemática), pode motivar os estudantes a alcançar um nível de compreensão mais profundo dos conceitos.

Os roteiros didáticos alimentam questionamentos sobre os procedimentos realizados de modo a incentivar um discurso que aponte para justificativas e provas das formulações, elaboradas e discutidas, durante as resoluções de problemas. Na elaboração dos roteiros, procuramos explorar as características do software que possibilitam a realimentação do processo de construção do aprendizado. Os questionamentos têm por objetivo permitir a compreensão dos conteúdos induzindo os estudantes a refletirem sobre o que fazem.

8.1.3 Redes de Aprendizado em Matemática e Suporte

Acreditamos que a resolução de problemas, tendo como suporte roteiros de colaboração, e dos quais fazem parte as estratégias simuladas com o *Tabulæ Colaborativo*, permitem a expansão do *Aprendizado Colaborativo em Matemática*, para além do contexto da sala de aula. As estratégias permitem a criação de uma estrutura de suporte à colaboração, que indica, como viável, a criação de redes *on-line*, para resolução de problemas em matemática.

Com as estratégias colaborativas, realizamos sessões coordenadas por um membro do grupo. Isto permite, que os estudantes adquiram autonomia, e independência de tutoria. A autonomia é possível por conta das características e funcionalidades do ambiente colaborativo do *Tabulæ*, e compõem o **roteiro de colaboração**, do qual faz parte o *roteiro didático.* O suporte, que permite aos estudantes trabalharem de modo independente, nos grupos, é determinado pelo roteiro , que simulam cada *estratégia didática* apresentada nesta tese. Este estudo pode ser aprofundado para explorar o tipo de informação, necessária, para que o estudante se sinta confortável, em atividades realizadas à distância, e os materiais didáticos próprios, aos *roteiros de colaboração*.

Os *roteiros de colaboração* funcionam como guia da ação, e proporcionam aos estudantes, o suporte necessário para não se sentirem confusos, ou perdidos, durante uma atividade. Os experimentos revelam que no início das sessões quase sempre encontramos expressões do tipo: *'Por onde Começar?' 'Que fazer?' 'Você tem alguma idéia?'* Invariavelmente, os componentes dos grupos procuram os roteiros didáticos, para consultarem as indicações e observarem os dados do problema.

8.2 Considerações Finais

Consideramos que as estratégias simuladas com o *Tabulæ Colaborativo* foram aplicadas a contextos específicos do *Ensino de Matemática* e como tal devem ser apreciados. Nos orientamos por desenvolver atividades, escolhidas de modo a viabilizar as estratégias. Os roteiros didáticos anexados a cada uma delas, juntamente com todo o suporte dos roteiros de colaboração, mostraram-se viáveis às aplicações, nos experimentos analisados aqui. Não temos dados sobre a viabilidade, em aplicações em larga escala, ou em outros conteúdos matemáticos. As sugestões de aplicações que fazemos em cada estratégia, e que apresentamos no capítulo 7, são apenas sugestões, que necessitam serem verificadas. Assim, nossos resultados apresentam a viabilidade de aplicarmos tais estratégias de ensino, como componentes de um **roteiro de colaboração**, aplicáveis às atividades com as características aqui abordadas. Outros contextos, e uma aplicação mais ampla, podem fazer parte de futuros desdobramentos desta pesquisa.

O que apresentamos são dados extraídos de experimentos, que mostraram a viabilidade do que propomos nesta tese. Outro possível desdobramento deste trabalho é a elaboração de materiais didáticos, orientados pelas estratégias, em diversos tópicos do currículo de matemática. Por outro lado, os resultados aqui apresentados, deixam espaço para futuras investigações no campo da cognição e avaliação, que poderão se desenvolver por meio de pesquisas em *Educação Matemática*.

> *"Students understand more completely and remember better the ideas that they have acquired when taking an active role in explorations of a mathematical concept"*
> (Roger et al. [114] pag 82)

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, E. R., NUNES, M. F. R., NETO, M. F., et al. *Perfil dos Professores Brasileiros: o que fazem, o que pensam, o que almejam.* UNESCO, São Paulo, Ed. Moderna, 2004.

[2] BAKER, M., LUND, K. "Promoting reflective interactions in a CSCL environment". *Journal of Computer Assisted Learning*, 13, 175-193, 1997.

[3] BALL, D., "What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?", *Remarks prepared for the Secretary's Summit on Mathematics*, U. S. Departmentof Education, February 6, Washington, DC, 2003.

[4] BALL, D., "With on eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics". *The Elementary School Journal*, 93(4), 373-397, Chicago, 1993.

[5] BALL, D. L., LUBIENSKI, S., MEWBORN, D., "Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge", In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching.* 4 ed., New York, Macmillan, 2001.

[6] BALL, D. L., BASS, H., "Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics", In J. Boaler

(Ed.), *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, pp. 83-104. Westport, CT: Ablex, 2000.

[7] BALL, D. L., SHILLING, S.G., and HILL, H.C., "Developing Measures of Teachers´ Mathematics Knowledge for Tesching", *The Elementary School Journal*, volume 105, n.1, The University of Chicago, 2004.

[8] BARBASTEFANO, R. G., *Ferramentas Síncronas para o Ensino A Distância em Matemática*, D.Sc., Programa de Engenharia de Produção - COPPE/UFRJ, 2002.

[9] BARRON, A.E., RICKELMAN, C., "Management Systems", in *Handbook on Information Technologies for Education and Training*. Adelsberger, H.H., Collis, B., Pawlowski, J.M. (Eds.), pp. 57-62, Springer-Verlag, Berlim, 2002.

[10] BALDIN, Y.Y., "On Some Important Aspects in Preparing Teachers to Teach Mathematics With Technology", *Proccedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*, Greece, , 2002.

[11] BALDIN, Y.Y., "Uma nova disciplina no Currículo de Licenciatura em Matemática: Informática aplicada ao ensino". *I Bienal da SBM*, Depto. de Matemática - Icex/UFMG, 2002.

[12] BONK, J.C., WISHER, R. A., LEE, J. Y., "Moderating Learner-Centered E-Learning:Problems and Solutions, Benefits and Implications", In T.Roberts (Ed.), *Online Collaborative Learning: Theory and Practice*, pp.103-131, London:Infosci, 2004.

[13] BONK, C.,CUNNINGHAM, D., "Searching for constructivist, learner-centered and sociocultural components for collaborative educational le-

arning tools". In C. Bonk, C., King, K., editors, *Electronic Collaborators: Learner-Centered Technologies for Literacy, Apprenticeship, and Discourse*, pages 25-50. Lawrence Erlbaum, 1998.

[14] BRYAN, T.J., “The Conceptual Knowledge of Preservice Secondary Mathematics Teachers: How Well Do They Know the Subject Matter They Will Teach?", *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, 1999.

[15] BRENNER, M. E., “Development of Mathematical Communication in Problem Solving Groups By Language Minority Students", *Bilingual Research Journal*, Spring, Summer, & Fall 1998, v 22, n 2-4, pp 149-174, 1998.

[16] BURKHARD, R., MEIER, M., “Tube Map: Evaluation of a Visual Metaphor for Interfunctional Communication of Complex Projects", *Proceedings of I-KNOW '04*, Graz, Austria, 449-456, 2004.

[17] COHEN, E. G. , “Restructuring the Classroom: Conditions for Productive Small Groups", In Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), *Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics.* MAA notes 44, pp.135-156, The Mathematical Association of America, Washington, 1997.

[18] COHEN, E. G. “A sociologist looks at talking and working together in the mathematics classroom", *American Educational Research Association*, New York, 1996.

[19] CONFERENCE BOARD OF MATHEMATICAL SCIENCES – CBMS, “The Mathematical Education of Teachers", *Issues in Mathematics Education*, volume 11, American Mathematical Society, USA, 2001.

[20] DALGARNO, B., “Interpretations of construtivism and consequences for Computer Assisted Learning", *British of Educational Tecnology Agency*, vol 32. num.2, pp 183-194. Blackwell Publishers, Oxford, 2001.

[21] DAVIDSON, N. *Cooperative Learning in Mathematics*. Addison-Wesley, Menlo Park, 1990

[22] DAVIDSON, N.A., Reynolds, B. E., Rogers, E. C., “Introdution to Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics", *Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics: Issues that Matter and Strategies that Work*. Rogers, E. C., Reynolds, B. E., Davidson, N.A., Thomas, A. D. (eds), MAA notes 55, pp. 1-11, The Mathematical Association of America, Washington, 2001.

[23] DILLENBOURG, P., BAKER, M., BLAYE, A. , et al., “The evolution of research on collaborative learning". In E. Spada & P. Reiman (Eds) *Learning in Humans and Machine:Towards an interdisciplinary learning science*. pp. 189-211. Oxford: Elsevier,1996.

[24] DILLENBOURG, P. , “What do you mean by collaborative learning?"In P. Dillenbourg (Ed) *Collaborative-learning: Cognitive and Computational Approaches*. (pp.1-19). Oxford: Elsevier, 1999.

[25] DILLENBOURG, P., SELF, J.A. “A computational approach to socially distributed cognition". *European Journal of Psychology of Education*, 3 (4), 353-372, 1992.

[26] DILLENBOURG P., SCHNEIDER D. “Mediating the mechanisms which make collaborative learning sometimes effective". *International Journal of Educational Telecommunications* , 1 (2-3), 131-146, 1995.

[27] DILLENBOURG P.,TCHOUNIKINE, P., "Flexibility in macro-scripts for computer-supported collaborative learning", *Journal of Computer Assisted Learning* 23, pp 1-13 ,2007.

[28] DOUGIAMAS, M., "Developing tools to foster online educational dialogue". In K. Martin, N. Stanley and N. Davison (Eds), *Teaching in the Disciplines/ Learning in Context*, (pp. 119-123). Proceedings of the 8th Annual Teaching Learning Forum, The University of Western Australia, February 1999. Perth: UWA. isponível em http://cleo.murdoch.edu.au/asu/pubs/tlf/tlf99/dj/dougiamas.html

[29] DOUGIAMAS, M., "Improving the effectiveness of tools for Internet based education". In A. Herrmann and M.M. Kulski (Eds), *Flexible Futures in Tertiary Teaching*. Proceedings of the 9th Annual Teaching Learning Forum, 2-4 February 2000. Perth: Curtin University of Technology. Disponível em http://lsn.curtin.edu.au/tlf/tlf2000/dougiamas.html

[30] DUBINSKY, E., MATHEWS, D. REYNOLDS, B. E.(eds), *Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics*. MAA notes 44, The Mathematical Association of America, Washington, 1997

[31] DUVAL, R., "La Geometría desde un Punto de Vista Cognitivo", Traducción: Hernádez, V. , Villalba, M., PMME-UNISON. Febrero, 2001. Original: Duval, R., Geometry from a Cognitive Point of View, in *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st Century*, an ICMI study, Mammana & Villani (eds), Kluwer Academic Publishers, 37-52, 1998. PMME-UNISON. Febrero. 2001, em http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm

[32] DUVAL, R., "Algunas cuestiones relativas a la argumentación", Traducción: Patricio Herbst, La lettre de la Preuve, *International Newsletter on the Teaching and Learning of the Mathematical Proof*, ISSN 1292-8763, 1999. Em `http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/`

[33] EDWARDS, B. S., DUBINSKY, E., MACDONALD, M. A., "Perspectives on Advanced Mathematical Thinking", *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25, N.J., Lawrence Earlbaum Associates, Inc, 2005.

[34] ESM, *Educational Studies in Mathematics* , Publisher: Springer Science & Business Media B.V., Formerly Kluwer Academic Publishers B.V. ISSN: 0013-1954 (Paper) 1573-0816 (Online) DOI: 10.1023/A:1012737223465, Issue: Volume 44, Numbers 1-2, March 2000.Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 2001.

[35] FENTON, W. E., REYNOLDS, B. E., DAVIDSON, N. A., et al. "Classroom Strategies for Cooperative Learning", in *Cooperative Learning In Undergraduate Mathematics*, pp. 23-53, The Mathematical Association of America, USA, 2001

[36] FJUK, A., *Computer Support for Distributed Collaborative Learning - Exploring a Complex Problem Area*, D.Sc. thesis, Department of Informatics, University of Oslo, 1998.

[37] FISCHER, F., TRÖNDLE, P., MANDL, H., *Using the Internet to improve university education: Problem-oriented web-based learning and the MUNICS environment*. (N. 138). München: Ludwig-Maximilian-Universität, Institute for Empirical Pedagogy and Pedagogical Psychology, 2001

[38] GAWLICK,T., “On Dynamic Geometry Software in the Regular Classroom". *International Reviews on Mathematical Education*, 34(3), 85-92, Germany, 2002.

[39] GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos Computacionais: o Caso da Derivada.* Tese D.Sc., Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 221p. 2004.

[40] GIRALDO, V., CARVALHO, L.M., TALL, D. O., “Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada". In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 153-164, Rio de Janeiro, Brasil, 2002.

[41] GOOS, M., “Understanding metacognitive failure", *The Journal of Mathematical Behavior* , Elsevier, Volume 21, Issue 3, pages 283-302, 2002.

[42] GUIMARÃES, L.C., BARBASTEFANO, R.G., CARVALHO, D. *Tabulæ*, Registro INPI n.0039192, 2001.

[43] GUIMARAES, L.C., BARBASTEFANO,R., BELFORT, E., “Tabulae and Mangaba: Dynamical geometry with a distance twist", *Technology in Mathematics Teaching*, Borovcnik, M. andKaustsch, H. (Eds). Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, vol. 26,öbv & hpt, Vienna, 2002.

[44] GUIMARAES, L.C., MORAES, T. G., MATTOS, F. R. P., “Cooperative Distance Learning in Mathematics", *US-China Education Review*, ISSN1548-6613, Volume 2, No.9 (Serial No.10), p. 42-45, USA, 2005.

[45] GUIMARAES, L.C., BARBASTEFANO, R., MATTOS, F. R. P., et al., “MathChat-Chat Matemático Integrado a um Ambiente de Educação a

Distância", *Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa*, Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007.

[46] GUZDIAL, M., LODOVICE, P., REALF, M., et al. "When Collaboration Doesn't Work". Paper presented at the The 5th. *International Conference of the Learning Sciences*, Seattle, 2002.

[47] HAGELGANS, N. L., REYNOLDS, B. E., SCHWINGENDORF, K.E., et al. *A practical Guide to Cooperative Learning in Collegiate Mathematics*, MAA notes 37, The Mathematical Association of America, Washington, 1995.

[48] HAREL, G., SOWDER, L., "Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development", *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50, N.J., Lawrence Earlbaum Associates, Inc, 2005.

[49] HARTSHORNE, R., *Geometry: Euclid and beyond*, New York, Springer, 2000.

[50] HIRSCH L., SAEEDI M., CORNILLON J., et al. "A structured dialogue tool for argumentative learning", *Journal of Computer Assisted Learning*, Blackwell Publishing, Volume 20, Number 1, pp. 72-80, 2004.

[51] HRON, A., FRIEDRICH H. F. "A review of web-based collaborative learning: factors beyond technology". *Journal of Computer Assisted Learning*, 19, pp 70-79, 2003.

[52] IITE UNESCO, *Distance Education for the Information Society: policies, pedagogy and professional development*, Ed. N C Farnes , International Centre for Distance Learning, - UK Open University. UNESCO INSTITUTE FOR INFORMATION TECHNOLOGIES IN EDUCATION (IITE), Moscow, 2000.

[53] JOHNSON, D.W., JOHNSON, R.T., “Using Cooperative Learning in Math", *Cooperative Learning in Mathematics: a handbook for teachers.* Neil Davidson Editor, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, pp 103-124, 1990.

[54] JOHNSON, D.W., JOHNSON, R.T., “Social Skills for Successful Group Work". *Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics.* Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), MAA notes 44, pp.201-204, The Mathematical Association of America, Washington, 1997.

[55] JOHNSON, D.W., JOHNSON, R.T., STANNE, M. B., “Cooperative Learning Methods: A Meta-Analysis", *The Cooperative Learning Center at The University of Minnesota*, consultado em 10/05/2007 em `http://www.co-operation.org/`

[56] JONES, K. BILLS, C. , “Visualisation, Imagery and the Development of Geometrical Reasoning". *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Birmingham, pp 123-8, 1998.

[57] JONES, K. “Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom". *MicroMath*,18 (3), 18-20, 2002. Disponível em `http://eprints.soton.ac.uk/14689/`

[58] JONES, K. “Providing A Foundation For Deductive Reasoning: Students´ Interpretations When Using Dynamic Geometry Software And Their Evolving Mathematical Explanations", *Educational Studies in Mathematics* 44: pp 55-85, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 2001.

[59] EDWARDS, J. JONES, K. “Co-learning in the collaborative mathematics classroom". In, Peter-Koop, A., Begg, A., Breen, C. and

Santos-Wagner, V. (eds.) *Collaboration in teacher education: examples from the context of mathematics education*. Dordrecht, NL, Kluwer, 135-151. (Mathematics Teacher Education 1), 2003. Em http://eprints.soton.ac.uk/11249/

[60] KARADAG, Z., “A Proposal for Extending Undergraduate Students’ Math Ability: CSCL", John Wiley & Sons Inc.ISBN: 0471072709, *3rd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level Turkish Mathematical Society*, Turkey, 2006.

[61] KAHANE, J.P., et al. *Commission de Réflexion sur L´enseignement des mathématiques. La formation des maîtres en mathématiques*,90p, 2003 em http://smf.emath.fr/Enseignement /CommissionKahane/RapportFormationMaitres/Formation-des-maitres.pdf.

[62] KAHANE, J.P., et al. *Commission de Réflexion sur L´enseignement des mathématiques. Rapport d´étape sur la géométrie et son enseignement*, 44p, 2000, em http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane /RapportEnseignementGeometrie/RapportEnseignementGeometrie.pdf.

[63] KEEGAN, D., *Foundations of distance Education*, Routledge studies in distance education, 224p., 3rd ed., London, 1996, ISBN 0-415-13909-0.

[64] KEEGAN D., “Distance education today", *Hellenic Open University conference*, Crete, 2006.

[65] KOLLAR, I., FISCHER, F., SLOTTA, J. D., “Internal and External Collaboration Scripts in Webbased Science Learning at Schools", *Computer Support for Collaborative Learning*, archive Proceedings of the 2005 conference on Computer Support for Collaborative Learning, Taiwan, pp 331 - 340 ISBN:0-8058-5782-6, 2005.

[66] KOLLAR, I., FISCHER, F., HESSE, F., “Collaboration Scripts - A Conceptual Analysis", *Educational Psychology Review*, 18, pp 159-185, 2006.

[67] KRAMARSKI, B., MEVARECH, Z.M., “Enhancing Mathematical Reasoning in the Classroom: The Effects of Cooperative Learning and Metacognitive Training", *American Educational Research Journal*, vol. 40, n.1, pp. 281-310, 2003.

[68] LAGRANGE, J.B., “Analysing the Impact of ICT on Mathmatics Teaching Practices", *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Italia, 2003.

[69] LAVY, I., “A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment", *The Journal of Mathematical Behavior*, Volume 25, Issue 2, Pages 153-169, 2006.

[70] LEGENDRE, *Elementos de Geometria*, tradutor: Guimarães, M.F.A., editor: Guimarães L.C., UFRJ, 2003.

[71] LEIKIN R., “The wholes that are greater than the sum of their parts: Employing cooperative learning in mathematics teachers' education". *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 223-256, 2004.

[72] LOWYCK, “Pedagogical Desing", in *Handbook on Information Technologies for Education and Training*. Adelsberger, H.H., Collis, B., Pawlowski, J.M. (Eds.), pp. 199-217, Springer-Verlag, Berlim, 2002.

[73] MA, L., *Knowing and teaching elementary mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 1999.

[74] MACGREGOR, J., "Collaborative Learning: Shared Inquiry as a Process of Reform". In *Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics*. Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), MAA notes 44, pp.27-33, The Mathematical Association of America, Washington, 1997.

[75] MARTIN, G. E., *Geometric Constructions*, New York, Springer, 1997.

[76] MCINNERNEY, J.M., ROBERTS, T.S., "Collaborative or Cooperative Learning?", pp 203-214, In *Online Collaborative Learning: Theory and Practice*, Tim S. Roberts, editor, Information Science Publishing, USA, 2004.

[77] MALTA, I., "Sobre um Método não Tradicional para Aprender Cálculo". In: Carvalho. L. M., Guimarães L. C.(org), *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*, vol. 1. Rio de Janeiro: IME-UERJ, p.179-186, 2003.

[78] MIODUSER, D., NACHMIAS, R., "WWW in Education", in *Handbook on Information Technologies for Education and Training*. Adelsberger, H.H., Collis, B., Pawlowski, J.M. (Eds.), pp. 23-43, Springer-Verlag, Berlim, 2002.

[79] MOORE, M. G., KEARSLEY, G., *Distance education: a systems view, Wadsworth Publishing Company*, 290p., United States, ISBN 0-534-26496-4, 1996.

[80] MATTOS, F. R. P. ; GUIMARAES, L. C. ; MORAES, T. G., "Aprendizagem Colaborativa a Distância em Matemática: Uma Proposta de Ambiente". In: *V CIBEM - Congresso Ibero-americano de Educação Matemática*, Cidade do Porto. ACTAS do V CIBEM. Porto : APM - Associação dos Professores de Matemática, v. único, 2005.

[81] MATTOS, F. R. P. ; MORAES, T. G. ; GUIMARAES, L. C., “Tabulæ, Um Software para Um Modelo Colaborativo de Ensino". In: *Memorias del VII Simposio de Educación Matemática*. Buenos Aires: EDUMAT Editora, v. único, 2005.

[82] MATTOS, F. R. P. , BARBASTEFANO, R. G , GUIMARÃES, T . “Tabulæ, uma ferramenta de colaboração síncrona em geometria dinâmica". In: Luiz M de Carvalho; Carlos A de Moura. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino de Matemática*. 1 ed. Rio de Janeiro: IME-UERJ, v. 2, p. 229–235, 2004.

[83] MATTOS, F. R. P. , GUIMARAES, L. C. ; BARBASTEFANO, R. G ,GUIMARÃES, T . “Tabulæ Colaborativo – Software de Geometria Dinâmica para Ensino Colaborativo de Matemática a Distância". In: *World Congress on Computer Science, Engineering and Technology Education*, 2006, Santos. Proceedings, World Congress on Computer Science, Engineering and Technology Education: New Engineering to a New World. Sâo Paulo : COPEC: Council of Researches in Education and Sciences - IEEE, pp. 905-909, 2006.

[84] MATTOS, F. R. P. , BARBASTEFANO, R G , GUIMARÃES, L. C. , MORAES, T. G. Aprendizagem Cooperativa à Distância em Matemática, In: *III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Águas de Lindóia. v. único, 2006.

[85] MATTOS, F. R. P. , GUIMARAES, L. C., GUIMARAES, T., “Cooperative Distance Learning In Mathematics". In: 4th International Conference on Technology in Teaching and Learning in Higher Education, Beijing – China. *Proceedings in 4th International Conference on Tech-*

nology in Teaching and Learning in Higher Education. Chicago–USA : CAS- Conference, v. 1. p. 42–45, 2005.

[86] MATTOS, F. R. P. , GUIMARÃES, L. C., GUIMARÃES, T. "Collaborative Distance Learning In Mathematics". In: *Washington Interactive Technologies Conference*, Arlington, Virginia. Interactive Technologies 2005 Conference. Washington : SALT Society for Applied Learning Technology, 2005.

[87] MATTOS, F. R. P. , BARBASTEFANO, R. G. , GUIMARAES, T. "Tabulæ, um Programa de Geometria Dinâmica Destinado à Aprendizagem Colaborativa". In: *VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, Recife. ANAIS VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, v. 1, 2004.

[88] MORAES, T.G., *Um Modelo para Colaboração Síncrona em Geometria Dinâmica*, Dissertação M.Sc. Instituto de Matemática e Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Março, 2006.

[89] *Moodle: A Free, Open-Source Course Management System for Online Learning*, `http://moodle.org/`

[90] MISFELDT, M. . "Mathematicians Writing: Tensions Between Personal Thinking and Distributed Collaboration". *Coop, the 6th international conference on the design of cooperative systems*, Nice, 2004.

[91] NASON, R., WOODRUFF, E., "Online Collaborative Learning in Mathematics:Some necessary innovations". In T.Roberts (Ed.), *Online Collaborative Learning: Theory and Practice*, pp.103-131, London:Infosci, 2004.

[92] NASON, R., WOODRUFF, E., "New Ways of Learning Mathematics: Are we Ready for it?"*Proceedings of the International Conference on Computers in Education (ICCE'02)*, IEEE - Computer Society, 2002.

[93] BRETT, C., NASON, R., WOODRUFF, E., "Online Community and Preservice Teachers´ Conceptions of Learning Mathematics", *Computer Support for Collaborative Learning 1999*, pp.57-66, 1999.

[94] NCTM - 2000. *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM, 2000.

[95] NATIONAL RESEARCH COUNCIL, *Learning and Understanding: Improving advanced study mathematics and science in U.S. high schools*, Committee on Programs for Advanced Study of Mathematics and Science in American High Schools. J.P. Gollub, M.W. Bertenthal, J.B. Labov, and P.C. Curtis, Editors. Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press, 2002.

[96] NATIONAL RESEARCH COUNCIL, *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swaford, and B. Findell, Eds. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press, 2001.

[97] O´MALLEY, C.E., SCANLON, E., "Computer-Suported Collaborative Learning: Problem Solving and Distance Education", *Computers Education*, vol.15, No. 1-3, pp. 127-136, Great Britain, 1990

[98] PANITZ, T., "Collaborative Versus Cooperative Learning - A Comparison of the Two Concepts Which Will Help Us Understand the

Underlying Nature of Interactive Learning", *Capecod*, disponível em `http://capecod.net/~tpanitz/tedsarticles/coopdefinition.htm`, acessada em 15/12/2006.

[99] PCN, *Parâmetros Curriculares Nacionais*, MEC,364p. Brasil, 1999.

[100] PEA, R. D., "The Social and Technological Dimensions of Scaffolding and Related Theoretical Concepts for Learning, Education, and Human Activity". *The Journal of the Learning Sciences*, 13, pp 423-451, Lawrence Erlbaum Associates, 2004.

[101] PIGGOTT, J., "Developing a Framework for Mathematical Enrichment", *NRICH Project*, University of Cambridge, UK, disponível em `http://nrich.maths.org/content/id/2719/a-framework-for-enrichment.pdf`

[102] PISA 2000, *Relatório Nacional*, MEC, Brasília, 2001.

[103] PISA 2003 - Programme for International Student Assessment, *Learning for Tomorrow´s World: First Results from PISA 2003*, OECD-Organisation for Economic Co-Operation and Development, 2004.

[104] PONTE, J. P., "Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: quedesafios?", *Revista IberoAmericana de Educación*, No. 24, pp. 63-90, 2000.

[105] PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. M. . "O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional". In D. Fiorentini (Ed.), *Formação de professores de Matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares* pp. 159-192. Campinas: Mercado de Letras, 2003.

[106] POLYA, G., *Generalization, Specialization, Analogy*. The American Mathematical Monthly, vol.55, n. 4, 241-243, 1948.

[107] POLYA, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Volume I: Induction and Analogy in Mathematics, Princeton University Press, New Jersey, 1954.

[108] POLYA, G., *Mathematics and Plausible Reasoning*, Volume II: Patterns and Plausible Inference, 2nd edition, Princeton University Press, New Jersey, 1968.

[109] POLYA, G., *How to Solve It*, Expanded Princeton Science Library Edition, New Jersey, 2004.

[110] POLYA, G. "The goals of mathematical education". *Mathematically Sane*, 1969. Acessado em 23/04/2007:
`http://mathematicallysane.com/analysis/polya.asp`

[111] RASMUSSEN, C., ZANDIEH, M., KING, K., Teppo, A., "Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking", *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), PP. 51-73, N.J., Lawrence Earlbaum Associates, Inc, 2005.

[112] REYNOLDS, B. E., THOMAS, A. D., MILNE, R. J. "Classroom Strategies for Cooperative Learning", in *Cooperative Learning In Undergraduate Mathematics:Issues that Matter & Strategies that Work.*, pp. 55-69, The Mathematical Association of America, USA, 2001.

[113] ROGERS, E. C., REYNOLDS, B. E., DAVIDSON, N.A., Thomas, A. D. (eds), *Cooperative Learning in Undergraduate Mathematics: Issues that Matter and Strategies that Work*. MAA notes 55, The Mathematical Association of America, Washington, 2001.

[114] ROGERS, E. C., DAVIDSON, N.A., REYNOLDS, B. E., et al. "Approaches to Cooperative Learning from Various Perspectives", in *Cooperative Learning In Undergraduate Mathematics:Issues that Matter & Strategies that Work.*, pp. 81-91, The Mathematical Association of America, USA, 2001

[115] SISTEMA NACIONAL DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - SAEB, *Relatório Saeb 2001 - Matemática*, MEC, Brasília, 2002.

[116] SANTOS, L. "A formação inicial de professores: Contributos para uma reflexão", *Educação e Matemática*, 80, 59-64,Portugal, 2004.

[117] SAM, L. C., *Public Images of Mathematics*, Thesis for the degree of Ph.D. in Education submitted to the University of Exeter (1999). In Philosophy of Mathematics Education Journal, n.15, Editor Paul Ernest, 2002.

[118] SCARDAMALIA, M., "Collective cognitive responsibility for the advancement of knowledge". In B. Smith (Ed.), *Liberal education in a knowledge society*, pp.67-98. Chicago: Open Court, 2002.

[119] SCARDAMALIA, M., BEREITER, C., "Knowledge building environments: Extending the limits of the possible in education and knowledge work". In A. DiStefano, K.E. Rudestam, & R. Silverman (Eds.), *Encyclopedia of distributed learning.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2003.

[120] SCHWARTZ, D. L., "The Productive Agency that Drives Collaborative Learning", Dillenbourg, P. (Ed.). *Collaborative Learning: Cognitive and computacional approaches.* pp 197-218,NY: Elsevier Science/Permagon, 1998.

[121] SELDEN, A., SELDEN J., “Perspectives on Advanced Mathematical Thinking", *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13, 2005, N.J., Lawrence Earlbaum Associates, Inc.

[122] SCHOENFELD, A. H. “Some thoughts on problem-solving research and mathematics education". In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research.* pp. 27-37. Philadelphia: Franklin Institute Press, 1982.

[123] SCHOENFELD, A. “Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics". Chapter 15, pp. 334-370, of the *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, Ed.). New York: MacMillan, 1992. Acessado em 23/04/2007: `http://www-gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/AHSchoenfeld.html`

[124] SHULMAN, L. S., “Those who understand: Knowledge growth in teaching". *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14, 1986.

[125] SINAES-SISTEMA NACIONAL DE AVALIAÇÃO DA EDUCAÇÃO SUPERIOR, *Da Concepção à Regulamentação*, 2ª edição ampliada, INEP, Brasília, 2004.

[126] SILVERMAN, B.G., “Computer Supported Collaborative Learning (CSCL)"*Computers Education*, Vol.25, N.3, pp 81-91.Elsevier Science Ltd, Washington, USA, 1995.

[127] SLAVIN, R.E., “Research on Cooperative Learning and Achievement: What We Know, What We Need to Know", *Contemporary Educational Psycology*, vol. 21, pp. 43-69, 1996.

[128] SLAVIN, R.E., "When Does Cooperative Learning Increase Student Achievement?"In Dubinsky, E., Mathews, D. Reynolds, B. E.(eds), *Cooperative Learning for Undergraduate Mathematics*. MAA notes 44, pp.71-84, The Mathematical Association of America, Washington, 1997.

[129] SLOTTA, J. D., CHI, M.T.H. "Helping students understand challenging topics in science through ontology training". *Cognition and Instruction* 24 (2),Pages 261-289, 2006.

[130] SMITH, B., MACGREGOR, J. "What is Collaborative Learning?", in Goodsell, A., M. Mahler, V. Tinto, B.L.Smith, and J. MacGreger, (Eds), *Collaborative Learning: A Sourcebook for Higher Education* pp. 9-22. University Park, PA: National Center on Postsecondary Teaching, Learning and Assessment, 1992.

[131] SORENSEN, E. K., "Intellectual Amplification through Reflection and Didactic Change in Distributed Collaborative Learning". In C. M. Hoadley and J. Roschelle (Eds.), *Proceedings of the Computer Support for Collaborative Learning (CSCL) 1999 Conference* (pp. 582-589). Palo Alto, CA: Stanford University, 1999.

[132] SUYDAM, M. N., "Curriculum and Evaluation Standards for Mathematics Education". ED319630 ERIC/SMEAC *Mathematics Education Digest* No. 1, ERIC Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education, Columbus, 1990.

[133] SWAN, M.B., "Improving Learning in Mathematics: Challenges and Strategies". *Department for Education and Skills Standards Unit.*, University of Nottingham ISBN: 1-84478-537-X, 2005. Consultado em `http://www.maths4life.org/content.asp?CategoryID=1068`

[134] OLDKNOW, A. et al. , "Teaching and learning geometry 11-19", *Report of a Royal Society / Joint Mathematical Council working group*. Ltd Norway Road Hilsea Portsmouth Hants PO3 5HX: The Royal Society, 2001.

[135] VELOSO, E. "Educação matemática dos futuros professores", *MAC*,disponível em http://homepage.mac.com/eduardo.veloso/novohome/textospdf/mateduc.pdf

[136] VIDAKOVIC, D. "Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment". In Dubinsky, E., Mathews, D., & Reynolds, B. (Eds.), *Readings in cooperative learning*. MAA notes no. 44, pp. 173-195, 1997.

[137] VIDAKOVIC, D., MARTIN, W. O. "Small-group searches for mathematical proofs and individual reconstructions of mathematical concepts". *The Journal of Mathematical Behavior*, pgs 465-492, 2004.

[138] VIVACQUA, A., MATTOS, F. R. P., TORNAGHI, A., et al. "Perspectives on Creativity in Web Learning". *Lecture Notes In Computer Science* 2783 Springer 2003, Melbourne – Áustráulia, p. 145–156, 2003.

[139] VYGOTSKY, L.S. *Pensamento e Linguagem*, São Paulo, Martins Fontes, 1995.

[140] VYGOTSKY, L.S. *Mind and Society, The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, 1978. Consultado em http://gfdl.marxists.org.uk/archive/vygotsky/works/mind/index.htm.

[141] WEBB, N. M., MASTERGEORGE, A. M. "The development of students' learning in peer-directed small groups". *Cognition and Instruction*, 21, pp. 361-428, 2003.

[142] WEBB, N. M., MASTERGEORGE, A. M. "Promoting effective helping behavior in peer-directed groups". *International Journal of Educational Research*, 39, pp. 73–97, 2003.

[143] WEINBERGER, A., STEGMANN, K., FISCHER, F. "Computer-supported collaborative learning in higher education: Scripts for argumentative knowledge construction in distributed groups". In T. Koschmann, D. Suthers, & T. W. Chan (Eds.), *Computer Supported Collaborative Learning 2005: The Next 10 Years* pp. 717-726. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2005.

[144] WU, H., "Preservice professional development of mathematics teachers", *Departament of Mathematics 3840*, University of California, Berkeley, USA, 1999, in `http://math.berkeley.edu/~wu/`

[145] YERION, K. A., RINEHART, J. A., "Guidelines for Collaborative Learning in Computer Science", *ACM SIGCSE Bulletin*, Vol. 27, No.4, pgs. 29 – 34, ACM Press, New York, 1995.

[146] YEH, A., NASON, R. "Toward a Semiotic Framework for Using Technology in Mathematics Education: The Case of Learning 3D Geometry", *ICCE2004 Conference*, Asia-Pacific Society for Computers in Education.In Proceedings International Conference on Computers in Education, Australia, 2004.

[147] YIN, R. K. *Case Study Research – Design and Methods*, Third Edition. Sage Publications Inc., USA, 2003, consultado em `http://print.google.com`