DEDUÇÃO NATURAL E CÁLCULO DE SEQÜENTES PARA "GERALMENTE"

Leonardo Bruno Vana

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Mario B. Benevides

Prof. Mário Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.

Sheila Regina Murgel Veloso

Profª. Sheila Regina Murgel Veloso, D. Sc.

Prof. Paulo Augusto Silva Veloso, Ph.D.

Gerson Zaverucha

Prof. Gerson Zaverucha, Ph.D.

Prof. Edward Hermann Haeusler, D. Sc.

Prof. Luiz Carlos Pinheiro Dias Pereira, Ph.D.

Prof. Marcelo da Silva Corrêa, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2008

VANA, LEONARDO BRUNO

Dedução Natural e Cálculo de Sequentes para 'Geralmente' [Rio de Janeiro] 2008

VII, 320 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2008)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Lógica de "Geralmente"
2. Dedução Natural
3. Normalização
4. Cálculo de Seqüentes
5. Eliminação do corte

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

DEDUÇÃO NATURAL E CÁLCULO DE SEQÜENTES PARA "GERALMENTE"

Leonardo Bruno Vana

Março/2008

Orientadores: Mário Roberto Folhadela Benevides
Sheila Regina Murgel Veloso

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

As lógicas de "geralmente" (LG's) foram introduzidas para tratar de maneira formal e precisa afirmações com noções vagas, tais como, "geralmente", "muitos" etc, que ocorrem freqüentemente em linguagem natural e em muitos ramos da ciência. As LG's capturam as distintas noções de "geralmente", isto é, constrói-se uma lógica específica para cada uma das noções de "geralmente". Nesta tese apresentamos sistemas dedutivos no estilo de dedução natural e cálculo de seqüentes para as LG's, mostramos o resultado de normalização e a consistência para os diferentes sistemas de dedução natural e examinamos o resultado de eliminação do corte para os diversos cálculos de seqüentes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

NATURAL DEDUCTION AND SEQUENT CALCULUS FOR "GENERALLY"

Leonardo Bruno Vana

March/2008

Advisors: Mário Roberto Folhadela Benevides
Sheila Regina Murgel Veloso

Department: Systems Engineering and Computer Science

Logics for 'generally' (LG's) were introduced for handling assertions with vague notions (e.g. 'generally', 'most', 'several'), which occur often in ordinary language and in science. LG's provide a framework for distinct notions of 'generally': one builds a specific logic for the notion one has in mind. In this thesis we present deductive systems, in natural deduction and sequent calculus style for LG's. We show that these natural deduction systems are normalizable and consistent. We examine cut elimination in the several sequent calculi.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Afirmações que contêm noções vagas, tais como "geralmente", "muitos", "raramente" etc. ocorrem freqüentemente em linguagem natural e em vários ramos da ciência. Diversos tratamentos para tais noções são encontradas na literatura, como, por exemplo, lógicas de "geralmente" [1, 2], lógica fuzzy [3], lógica default [4] e enfoques lógico-lingüísticos [5].

Nesta tese utilizamos como tratamento para as noções vagas as lógicas de "geralmente" (LG's). O *objetivo* é desenvolver sistemas dedutivos no estilo de dedução natural e cálculo de seqüentes e estudar a estrutura das provas e as propriedades dos sistemas.

A escolha das LG's como tratamento para as noções vagas foi motivada pelo fato que as LG's são extensões conservativas da lógica de primeira ordem (FOL) que possuem algumas propriedades características da FOL, tais como, a propriedade de interpolação [6] e de Löwenheim-Skolem [2].

As LG's captam as distintas noções de "geralmente", são lógicas monotônicas e são obtidas estendendo a FOL pela introdução de um novo quantificador ∇ para representar 'geralmente', 'muitos' etc. Intuitivamente, o quantificador ∇ é utilizado para expressar "objetos geralmente têm uma dada propriedade".

A semântica das LG's é obtida a partir do acréscimo de famílias de conjuntos a uma estrutura usual para a FOL, dando o significado para o novo quantificador ∇. Os valores de verdade nas LG's são *verdadeiro* ou *falso*, como na FOL. Diferentemente das LG's, na lógica fuzzy temos, *verdade*, *muito verdade*, *não muito verdade*, *falso* etc. como valores de verdade e a lógica default é não-monotônica.

Inicialmente, foram desenvolvidos sistemas axiomáticos corretos e completos [2] para as LG's, estendendo-se o sistema axiomático para a lógica de primeira ordem. Estes sistemas se caracterizam por introduzir esquemas e axiomas específicos à manipulação de fórmulas com o quantificador ∇ como símbolo lógico principal, denominadas de *fórmulas generalizadas*, a um sistema axiomático para FOL. Os esquemas e axiomas específicos correspondem às propriedades características das famílias de conjuntos.

A obtenção de procedimentos de construção de provas, muitas vezes chamados provadores automáticos de teoremas, tem sido objeto de estudo de pesquisadores em diversas áreas da computação, revelando aplicações em questões envolvendo verificação de programas, bases de dados dedutivas, sistemas baseados em conhecimentos entre outras. Diferentes formalismos lógicos têm sido utilizados como base para provadores, tais como cálculo de seqüentes, dedução natural e os métodos de resolução e de tableaux.

Com a motivação de obter sistemas dedutivos mais adequados à automação, nesta tese desenvolvemos um arcabouço de dedução natural e de cálculo de seqüentes para as LG's. Inicialmente adaptamos o método geral de obtenção de sistemas dedutivos corretos e completos, desenvolvido na construção dos sistemas axiomáticos para as LG's, para obtermos os sistemas dedutivos no estilo de dedução natural para as diferentes noções de "geralmente". Em seguida, demonstramos o resultado de normalização, estudamos a estrutura das provas e demonstramos a consistência dos sistemas de dedução natural.

Os cálculos de seqüentes para as LG's são obtidos a partir da tradução das regras dos sistemas de dedução natural para as LG's em regras no estilo de cálculo de seqüentes e a introdução destas regras no cálculo de seqüentes para a lógica clássica, intuicionista e minimal de primeira ordem [8]. Os resultados de corretude e completude dos cálculos de seqüentes para as LG's são obtidos em relação ao cálculo de seqüentes para a lógica de primeira ordem.

Em [7] foram desenvolvidos sistemas de dedução natural corretos e completos para a lógica de ultrafiltros e para a lógica de filtros, que a princípio se aplicam apenas a essas duas interpretações de "geralmente". Estes sistemas se caracterizam principalmente pela utilização de fórmulas rotuladas por seqüências de variáveis.

Os sistemas desenvolvidos em [7] são construidos a partir da reescrita das regras do sistema de dedução natural para a lógica clássica de primeira ordem para a manipulação das seqüências de variáveis e da introdução de novas regras para o quantificador generalizado ∇. Assim sendo, nestes sistemas as regras e suas respectivas restrições determinam o gerenciamento da manipulação de fórmulas e o gerenciamento da manipulação das seqüências de variáveis.

Diferentemente dos sistemas em [7], nos sistemas dedutivos desenvolvidos para as LG's utilizamos uma abordagem de modo a não existir a necessidade de um gerenciamento de seqüências de variáveis.

Tanto a nossa construção do sistema de dedução natural quanto o de cálculo de seqüentes foram feitos de maneira modular. Estruturamos as diversas lógicas a serem tratadas como parametrizadas: um parâmetro se refere à lógica subjacente (minimal, intuicionista ou clássica) e o outro percorre as distintas noções de "geralmente" (e.g. básica, reticulados etc). Construimos um sistema de dedução natural e um cálculo de seqüentes que se instanciam a cada uma dessas lógicas.

A seguir tecemos alguns comentários sobre a obtenção desses sistemas e a análise de algumas de suas propriedades.

A construção dos sistemas de dedução para as LG's consiste em introduzir novas regras a um sistema de dedução natural, originalmente desenvolvido para a lógica de primeira ordem [9, 8].

Intuitivamente, os sistemas de dedução natural para as LG's são construidos do seguinte modo. Inicialmente acrescentamos regras a um dado sistema de dedução natural para a FOL que correspondem ao significado extensional do quantificador ∇, obtendo assim, um sistema de dedução natural para a lógica de "geralmente" em que a família de conjuntos não possui restrições, denominado de lógica básica de "geralmente". Posteriormente, introduzimos novas regras ao sistema de dedução natural para a lógica básica de "geralmente". As regras correspondem a restrições ou propriedades impostas à família de conjuntos.

As regras introduzidas em um dado sistema de dedução natural para a FOL na construção dos sistemas de dedução natural para as LG's correspondem à tradução dos esquemas e axiomas específicos dos sistemas axiomáticos para as LG's.

Os resultados de corretude e completude dos sistemas de dedução natural para as LG's são obtidos em relação ao sistema de dedução natural para a Lógica de Primeira Ordem.

O método de construção dos sistemas de dedução natural e as características das LG's nos remetem a examinar as propriedades dos sistemas de dedução natural nos sistemas dedutivos desenvolvidos para as LG's: analizamos o resultado que garante a existência de derivações normais (sem ocorrências de 'redundâncias' ou 'desvios'), propriedade de subfórmula e a consistência dos sistemas de dedução para as LG's.

Em [9, 10] o resultado de normalização para os sistema de dedução natural para a lógica intuicionista utiliza uma estratégia de restringir as aplicações da regra de absurdo intuicionista a fórmulas atômicas, ou seja, as aplicações da regra de absurdo intuicionista têm apenas fórmulas atômicas como conclusão, simplificando a obtenção do resultado de normalização (i.e. sem a necessidade de considerar 'desvios' envolvendo aplicações da regra de absurdo intuicionista). Adaptamos essa estratégia para a normalização dos sistemas de dedução natural para as LG's obtidos a partir do sistema de dedução natural para a lógica intuicionista de primeira ordem: restringimos as aplicações da regra de absurdo intuicionista apenas a fórmulas atômicas ou generalizadas.

Nos sistemas de dedução natural para as LG's obtidos, a partir da introdução de regras no sistema de dedução natural para a lógica clássica de primeira ordem, o resultado de normalização é demonstrado utilizando uma estratégia análoga a de transformar provas em derivações que contêm no máximo uma aplicação da regra de absurdo clássico, como desenvolvida em [11, 12].

A partir do resultado de normalização caracterizamos a estrutura das provas normais nos diferentes sistemas de dedução natural para as LG's.

Para demonstrarmos a consistência dos sistemas de dedução natural utilizamos o fato que toda derivação em um dado sistema de dedução natural para uma lógica de "geralmente" pode ser transformada, em uma derivação em um sistema de dedução natural para FOL. Em [7] o resultado de normalização é demonstrado apenas para o sistema de dedução natural para a lógica de ultrafiltros.

Como já mencionado, construímos nossos sistemas dedutivos acrescentando regras (que intuitivamente captam distintos significados de "geralmente") a sistemas da lógica subjacente. Essa construção transfere algumas propriedades sem contudo, transferir todas as propriedades estruturais. Assim sendo, podemos garantir a propriedade da subfórmula e o resultado de eliminação do corte para alguns sistemas, como por exemplo a lógica básica de "geralmente".

Para os sistemas dedutivos sem a propriedade de subfórmulas apresentamos um resultado que controla a aplicação da regra que gera ocorrências de fórmulas que não satisfazem a propriedade de subfórmulas. Nos cálculos de seqüentes em que não temos o resultado de eliminação do corte, caracterizamos exatamente as ocorrências de aplicação da regra do corte que não podem ser eliminadas.

As principais *contribuições* desta tese são: a construção de sistemas dedutivos no estilo de dedução natural e cálculo de seqüentes para as diferentes noções de "geralmente" e uma análise das propriedades carcterísticas de cada um dos sistemas dedutivos.

A estrutura da tese é descrita a seguir. No Capítulo 2 serão apresentados noções básicas sobre sistema de dedução natural e cálculo de sequentes e no Capítulo 3 serão apresentadas as lógicas de "geralmente" (motivação, sintaxe, semântica e sistemas axiomáticos). No próximo capítulo será introduzida a idéia de fórmula marcada e serão apresentados os sistemas de dedução natural para as LG's. No Capítulo 6 serão demonstrados o resultado de normalização e a consistência para os diferentes sistemas de dedução natural para as LG's. No Capítulo 7 serão apresentados os cálculos de sequentes para as LG's e no próximo capítulo examinaremos o resultado de eliminação do corte para os cálculos de sequentes para as LG's. No Capítulo 9 será examinado a propriedade de subfórmulas para os sistemas dedutivos e serão apresentados resultados que controlam a aplicação de regra que gera ocorrências de fórmulas que não satisfazem a propriedade de subfórmulas. As conclusões obtidas, como também uma previsão de trabalhos futuros e correlacionados, serão apresentados no Capítulo 10.

Capítulo 2

Noções Básicas

Gentzen desenvolveu formalizações para a noção de dedução baseadas em sistemas de regras, buscando se aproximar da prática dos matemáticos em suas diversas áreas de atuação e buscando enunciar e demonstrar o resultado denominado *Hauptsatz*, que garantia a existência de deduções "livres de redundâncias", distintamente de Frege, Russell e Hilbert que desenvolveram formalismos baseados em sistemas axiomáticos.

Inicialmente, Gentzen apresenta um sistema de regras denominado Cálculo de Dedução Natural, com versões para a Lógica Clássica e para a Lógica Intuicionista, que se mostrou não muito adequado para os seus objetivos. Convém ressaltar que, anos mais tarde, Prawitz [9] demonstrou um problema análogo no Cálculo de Dedução Natural para a Lógica Minimal, Intuicionista e Clássica, enunciado a partir da noção de forma normal para deduções.

2.1 Dedução Natural

Nesta seção é apresentado o Sistema de Dedução Natural para a Lógica de Primeira Ordem [8, 9].

Dada uma assinatura ρ, $L(\rho)$ é a linguagem usual de primeira ordem da assinatura ρ. No sistema de dedução natural, as fórmulas $A \leftrightarrow B$ e $\neg A$, são definidas respectivamente como $(A \to B) \wedge (B \to A)$ e $A \to \bot$, tomando como conectivos: $\wedge$, $\vee$, $\to$, quantificadores: $\forall$, $\exists$ e constante lógica: $\bot$ (absurdo).

A noção de ocorrência de variável livre ($free(A)$) em uma fórmula A é a usual. Usa-se a notação $occ[A]$ para o conjunto de variáveis que ocorrem em uma fórmula A e $free[\Gamma]$ para o conjunto de variáveis que ocorrem livres em alguma fórmula do conjunto de fórmulas Γ. Usaremos a notação $A[x/y]$ para a noção de substituição das ocorrências da variável livre x pela variável y em uma fórmula A.

A seguir, é apresentado o conjunto de regras do sistema de dedução natural contendo regras de eliminação (E) e introdução (I) para cada um dos conectivos e quantificadores. Utilizamos as seguintes convenções:

- $\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \alpha\end{array}$ representa uma derivação de α a partir de Γ; e

- $(R)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \vdots\\ B\end{array}}{C}\, i$ representa o descarte da hipótese A pela aplicação da regra (R) (com $i \in \mathbb{N}$).

Regras de inferência:

$$(\wedge I)\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad\qquad (\wedge E)\dfrac{A \wedge B}{A} \quad \dfrac{A \wedge B}{B}$$

$$(\vee I)\dfrac{A}{A \vee B} \quad \dfrac{B}{A \vee B} \qquad\qquad (\vee E)\dfrac{A \vee B \quad \begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \vdots\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i\\ \vdots\\ C\end{array}}{C}\, i$$

$$(\to I)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \vdots\\ B\end{array}}{A \to B}\, i \qquad\qquad (\to E)\dfrac{A \quad A \to B}{B}$$

$$(\forall I)\frac{A}{\forall x A[a/x]} \qquad (\forall E)\frac{\forall x A}{A[x/t]}$$

$$(\exists I)\frac{A[x/t]}{\exists x A} \qquad (\exists E)\frac{\exists x A \qquad \begin{array}{c}\Gamma, [A[x/a]]^i \\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\, i$$

$$(Abs)\frac{\perp}{A} \qquad (RaA)\frac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{A}\, i$$

As seguintes restrições são impostas sobre as aplicações das regras:

regra $(\forall I)$: a não ocorre livre em qualquer hipótese da qual A depende,

regra $(\exists E)$: a não ocorre em $\exists x A$, nem em B e nem em Γ,

regra (Abs): A é diferente de $\perp$,

regra (RaA): A não tem a forma $B \rightarrow \perp$.

Denota-se por $(A_1, ..., A_n/B)$ uma aplicação de uma regra de inferência (R) onde $1 \leq n \leq 3$, $A_1, ..., A_n$ são denominadas de premissas e B é a conclusão da aplicação da regra (R). Deste modo, numa aplicação da regra $(\rightarrow E)$: $(A, A \rightarrow B/B)$, ou numa aplicação da regra $(\vee E)$: $(B \vee C, A, A/A)$ ou numa aplicação da regra $(\exists E)$: $(\exists x B, A/A)$, a premissa A é denominada de premissa menor. Uma premissa que não é dita ser menor é uma premissa maior.

O sistema de dedução natural para a lógica minimal (ML) contém todas as regras de introdução e eliminação para os conectivos e quantificadores apresentadas anteriormente. O sistema de dedução natural para a lógica intuicionista (IL) contém as regras de ML e a regra (Abs). O sistema de dedução natural para a lógica clássica (CL) é obtido a partir da inclusão da regra (RaA) ao sistema de dedução natural IL.

A seguir define-se a noção de derivação ou prova e posteriormente a noção de comprimento de uma derivação nos sistemas ML, IL e CL.

Definição 2.1.1 *Uma derivação ou prova consiste em um número finito (não nulo) de fórmulas dispostos em forma de árvore e combinadas de acordo com aplicações das regras de inferência, de tal modo que cada fórmula (com exceção da fórmula final) é uma premissa de pelo menos uma regra de inferência cuja conclusão também está na prova.*

Definição 2.1.2 *Seja π uma derivação. Então, o comprimento de π, denotado por $l(\pi)$, é o número de ocorrências de fórmulas em π. Mais precisamente, $l(\pi)$ é definido por indução, como segue:*

(i) se π é constituída de apenas uma única fórmula, então $l(\pi) = 1$,

(ii) se $\pi = \dfrac{\Sigma_1 \quad ... \quad \Sigma_n}{C}$, então $l(\pi) = l(\Sigma_1) + ... + l(\Sigma_n) + 1$; $n \leq 3$.

Em [9, 10] demonstra-se a existência de derivações "livres de redundâncias", a partir da noção de forma normal para derivações, como definido a seguir.

Definição 2.1.3 *Seja π uma derivação. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, π não contém ocorrência de segmento maximal e aplicação supérflua de $(\vee E)$ ou de $(\exists E)$.*

A seguir definem-se as noções de caminho, segmento e segmento maximal.

Definição 2.1.4 *Seja π uma derivação em $ND \in \{ML, IL, CL\}$. Então, um caminho em π é uma seqüência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas tais que:*

(i) A_1 é uma hipótese que não é descarregada por uma aplicação de $(\vee E)$ e nem de $(\exists E)$;

(ii) *se* A_i *não é uma premissa menor de* $(\rightarrow E)$*, não é premissa maior de* $(\vee E)$ *e de* $(\exists E)$ *e nem é a fórmula final de* π*, então* A_{i+1} *é a fórmula que ocorre imediatamente abaixo de* A_i*;*

(iii) *se* A_i *é premissa maior de uma aplicação de* $(\vee E)$ *ou de* $(\exists E)$*, então* A_{i+1} *é qualquer hipótese descarregada em função destas aplicações;*

(iv) A_n *é premissa menor de uma aplicação de* $(\rightarrow E)$ *ou é a fórmula final da derivação.*

Definição 2.1.5 *Seja* π *uma derivação em* $ND \in \{ML, IL, CL\}$*. Uma sequência* $A_1, ..., A_n$ *de ocorrências consecutivas em um caminho de* π *é um segmento se, e somente se,*

- A_1 *não é a conclusão de uma aplicação de* $(\vee E)$ *ou* $(\exists E)$*;*
- $\forall i < n$ A_i *é uma premissa menor de uma aplicação de* $(\vee E)$ *ou* $(\exists E)$*; e*
- A_n *não é premissa menor de uma aplicação de* $(\vee E)$ *ou* $(\exists E)$*.*

Definição 2.1.6 *Seja* π *uma derivação em* $ND \in \{ML, IL, CL\}$*. Então, um segmento* $A_1, ..., A_n$ *de* π *é um segmento maximal se, e somente se,* A_1 *é conclusão de uma aplicação de regra de introdução ou* (Abs) *ou* (RaA) *e* A_n *é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação.*

Intuitivamente, uma aplicação (α) de $(\vee E)$ ou de $(\exists E)$ é dita supérflua se existe uma subderivação de uma premissa menor de (α) a partir de Γ tal que Γ não contém hipótese descarregada na aplicação de (α).

Exemplo 2.1.1 *Seja π uma derivação de $A \to B$ a partir de $B \vee C$ e $\neg(A \wedge \neg B)$.*

$$\pi = (\vee E)\dfrac{B \vee C \qquad (\to I)\dfrac{(RaA)\dfrac{(\to I)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{[A]^1 \quad [\neg B]^2}{A \wedge \neg B} \qquad \neg(A \wedge \neg B)}{\bot}\,2}{B}\,1}{(A \to B)^*} \qquad (\to I)\dfrac{[B]^3}{A \to B}}{A \to B}\,3$$

Note que, o conjunto de hipóteses $\Gamma = \{\neg(A \wedge \neg B)\}$ da subderivação da premissa menor $(A \to B)^*$ da aplicação de $(\vee E)$ não contém hipóteses descarregadas na aplicação da regra $(\vee E)$. Portanto, a aplicação da regra $(\vee E)$ é uma aplicação supérflua.

Teorema 2.1.1 *Seja o sistema de dedução natural $ND \in \{ML, IL, CL\}$ e seja π uma derivação de A a partir de Γ em ND. Então, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em ND.*

Para os sistemas de dedução natural ML e IL, a prova do teorema acima, apresentada em [9, 10], é feita por indução sobre o par (d, n) onde d é o mais alto grau de um segmento maximal[1] e n é o número de fórmulas de grau d que pertence a um segmento maximal.

No sistema CL a prova do teorema anterior é feita de modo similar [11, 12]. Porém, para minimizar as complicações envolvendo aplicações da regra de absurdo clássico (RaA) demonstra-se o teorema a seguir para o sistema de dedução natural $CL^{\exists}$ obtido a partir da exclusão das regras de introdução e eliminação para o quantificador universal $(\forall)$.

Teorema 2.1.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL^{\exists}$. Então, π pode ser transformado em uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL^{\exists}$ tal que π' contém no máximo uma aplicação (α) de regra de absurdo clássico e, caso esta aplicação ocorra, (α) é a última inferência de π'.*

A prova do teorema acima é feita por indução sobre o comprimento de uma derivação.

[1]Se S um segmento maximal em uma derivação π, então o grau de S é o grau da fórmula que ocorre em S.

2.2 Cálculo de Seqüentes

Nesta seção apresentaremos o cálculo de seqüentes para a lógica de primeira ordem [8].

O cálculo de sequentes foi apresentado por Gentzen como um formalismo mais adequado que o Cálculo de Dedução Natural para enunciar e demonstrar o resultado denominado *Hauptsatz*, que garantia a existência de deduções "livres de redundâncias".

Dada uma assinatura ρ, $L(\rho)$ é a linguagem usual de primeira ordem da assinatura ρ tomando como conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, quantificadores: $\forall$, $\exists$ e constante lógica: $\perp$ (absurdo).

Um seqüente tem a seguinte forma:

$$A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_k$$

onde as partes esquerdas e direita do seqüente, em relação ao separador $\Rightarrow$, são seqüências possivelmente vazias de fórmulas, sendo chamadas de antecedente e de conseqüente, respectivamente.

Intuitivamente, um seqüente $A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_k$ da Lógica de Primeira Ordem pode ser lido como a possibilidade de derivar $B_1 \vee ... \vee B_k$ a partir de $A_1 \wedge ... \wedge A_n$. Então,

- se o conseqüente e o antecedente de um seqüente não são vazios, ou seja, o seqüente tem a forma $A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_k$, então o seqüente pode ser lido como a fórmula $A_1 \wedge ... \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee ... \vee B_k$.
- se o antecedente de um seqüente é vazio, ou seja, o seqüente tem a forma $\Rightarrow B_1, ..., B_k$, então o seqüente pode ser lido como a fórmula $B_1 \vee ... \vee B_k$.
- se o conseqüente de um seqüente é vazio, ou seja, o seqüente tem a forma

$A_1, ..., A_n \Rightarrow$, então o seqüente pode ser lido como a fórmula $\neg(A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ ou $(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow \bot$.

- se o antecedente e o conseqüente de um seqüente são vazios, então o seqüente pode ser lido como $\bot$, ou seja, proposição falsa.

Cálculos de seqüentes possuem um conjunto de regras de inferências escritas do seguinte modo:

$$\frac{S_1, ..., S_m}{S}$$

onde $S_1, ..., S_m$, $m \geq 1$, e S são seqüentes, sendo que $S_1, ..., S_m$ são denominados seqüentes superiores e S seqüente inferior.

Apresentaremos a coleção de regras do cálculo de sequentes para a lógica de primeira ordem, considerando-se que $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ são seqüências de fórmulas e A e B são fórmulas.

Regras Estruturais

Atenuação:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Aa) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (Ac)$$

Contração:

$$\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Ca) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}\ (Cc)$$

Permutação:

$$\frac{\Delta, A, B, \Gamma \Rightarrow \Lambda}{\Delta, B, A, \Gamma \Rightarrow \Lambda}\ (Pa) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Lambda}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B, A, \Lambda}\ (Pc)$$

Regras Lógicas

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\neg a) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}(\neg c)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge a_1) \qquad \frac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge a_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}(\wedge c) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\vee a)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}(\vee c_1) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}(\vee c_2)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Pi \Rightarrow \Lambda}{A \rightarrow B, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}(\rightarrow a) \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}(\rightarrow c)$$

$$\frac{A[x/t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\forall a) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A[a/x]}(\forall c)$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A[a/x], \Gamma \Rightarrow \Delta}(\exists a) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}(\exists c)$$

As seguintes restrições são impostas sobre as aplicações das regras:

regra $(\forall c)$: a não ocorre livre em Γ e Δ.

regra $(\exists a)$: a não ocorre livre em Γ e Δ.

Regra do Corte

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}\ (corte)$$

O cálculo de seqüentes para a lógica clássica ($SCCL$) contém todas as regras de inferência apresentadas anteriormente. O cálculo de seqüentes para a lógica intuicionista ($SCIL$) contém as regras de $SCCL$ e o conseqüente de um seqüente contém no máximo uma fórmula. O cálculo de seqüentes para a lógica minimal ($SCML$) é obtido a partir da exclusão da regra (Ac) (atenuação no conseqüente) do cálculo de seqüentes $SCIL$.

Definição 2.2.1 *Uma derivação ou prova consiste em um número finito (não nulo) de seqüentes dispostos em forma de árvore e combinados de acordo com aplicações das regras de inferência, de tal modo que:*

(i) *Os seqüentes iniciais de uma derivação são seqüentes iniciais da forma $A \Rightarrow A$ onde A é uma fórmula.*

(ii) *Cada seqüente (com exceção do seqüente final) é um seqüente superior de uma regra de inferência cujo seqüente inferior também está na prova.*

A notação $\dfrac{\underline{\Gamma \Rightarrow \Theta}}{\Delta \Rightarrow \Lambda}$ é usada para representar a derivação do seqüente $\Delta \Rightarrow \Lambda$ a partir do seqüente $\Gamma \Rightarrow \Theta$ por aplicações de regras estruturais.

Apresentaremos a seguir a noção de comprimento de uma derivação em cálculo de seqüentes.

Definição 2.2.2 *Seja π uma derivação. O comprimento de π, denotado por $l(\pi)$, é o número de ocorrências de seqüentes em π. Mais precisamente, $l(\pi)$ é definido por indução, como segue:*

(i) se π é constituída de apenas um único seqüente, então $l(\pi) = 1$,

(ii) se $\pi = \dfrac{\Sigma_1 \quad ... \quad \Sigma_m}{S}$, então $l(\pi) = l(\Sigma_1) + ... + l(\Sigma_m) + 1$; $m \leq 2$.

Na proposição a seguir mostraremos que o sistema de dedução natural e o cálculo de seqüentes para a lógica minimal têm o mesmo poder dedutivo.

Proposição 2.2.1 *Existe uma derivação de A a partir de Γ em ML se, e somente se, existe uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ em $SCML$.*

A prova da proposição 2.2.1 é feita por indução sobre o comprimento da derivação e é apresentada no apêndice.

Ao considerarmos a instância mais simples da regra do corte (A, B e C são fórmulas)

$$\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}(corte)$$

destaca-se que ela é a única regra, em comparação com as demais, onde uma fórmula, chamada de fórmula de corte B, pode *desaparecer* sem deixar qualquer traço na conclusão. Em termos do formalismo de seqüentes, seria mais adequado dizer que em todas as outras regras, necessariamente, as fórmulas que ocorrem nos seqüentes superiores ocorrem também nos inferiores ou são subfórmulas de fórmulas que lá ocorrem.

Assim, costuma-se dizer que provas que envolvem aplicações da regra do corte são "provas indiretas", visto que dependem da obtenção de duas outras provas para seqüentes que envolvem uma fórmula completamente estranha ao seqüente original. Assim, o *Hauptsatz*, como enunciado por Gentzen [8], estipula que cada derivação pode ser transformada em uma derivação com o mesmo seqüente terminal que não possui aplicações da regra do corte. Esse resultado passou a ser conhecido como *Teorema de Eliminação do corte*, que é encontrado freqüentemente com a seguinte formulação:

Teorema 2.2.1 *Se existe uma derivação π para um sequente S, então existe uma derivação livre de corte, π', para S.*

A prova é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ onde $gr(\pi)$ é o grau e $r(\pi)$ é o rank da derivação π [8, 30][2].

[2]Note que a prova do resultado de Hauptsatz para $SCML$ é análoga à prova deste resultado para $SCIL$.

Capítulo 3

Lógicas de “Geralmente”

Neste capítulo apresentaremos as lógicas de “geralmente” (LG’s) e os seus sistemas axiomáticos como desenvolvidos em [13, 2].

3.1 Motivação

Noções vagas, tais como “geralmente”, “raramente”, “muitos” etc. aparecem frequentemente em afirmações e argumentos em linguagem natural e em alguns ramos da ciência. As LG’s foram desenvolvidas para capturar as distintas noções de “geralmente”. Agora ilustraremos esta idéia.

Em primeiro lugar, considere o universo dos brasileiros e imagine que são aceitas as seguintes afirmações: (α) “Brasileiros geralmente ganham um salário mínimo” e (β) “Brasileiros geralmente comem bacalhau três vezes por ano[1]”. Neste caso, provavelmente também aceitamos a seguinte afirmação:

($\cup$) “Brasileiros geralmente ganham um salário mínimo ou gostam de futebol”;

mas provavelmente, não aceitamos a seguinte afirmação;

($\cap$) “Brasileiros geralmente ganham um salário mínimo e comem bacalhau três vezes por ano”.

[1] O Brasil é o maior consumidor mundial de bacalhau.

Agora, considerando o universo dos números naturais, imaginemos que são aceitas as seguintes afirmações: (γ) "Os números naturais geralmente são maiores que quinze" e (δ) "Os números naturais geralmente não dividem doze". Então, podemos provavelmente aceitar também as seguintes afirmações:

($\vee$) "Números naturais geralmente são maiores que quinze ou são pares"; e

($\wedge$) "Números naturais geralmente são maiores que quinze e não dividem doze".

Note que, nos exemplos acima temos dois tipos distintos de conseqüências lógicas envolvendo "geralmente": no exemplo mais abaixo teremos ($\wedge$), porém no primeiro exemplo não desejamos ter ($\cap$).

As LG's estabelecem uma maneira formal e precisa para capturar as distintas noções intuitivas de "geralmente". A idéia básica é: constrói-se um lógica específica de "geralmente" dependendo da noção de "geralmente" que temos em mente. Assim, teremos um sistema que permite inferir ($\cup$) (mas não podemos obter ($\cap$)) a partir de $\{\alpha, \beta\}$ e um outro sistema que permite concluir ($\vee$) e ($\wedge$) a partir de $\{\gamma, \delta\}$, embora ($\cap$) e ($\wedge$) tenham estruturas sintáticas similares.

Expressões envolvendo "geralmente", ou noções vagas similares, ocorrem freqüentemente em afirmações e argumentos, como nos exemplos acima. Deseja-se expressar tais afirmações de uma maneira formal e precisa. Para expressar "objetos geralmente têm uma dada propriedade", adiciona-se à Lógica de Primeira Ordem (FOL) um novo quantificador ∇ para representar "geralmente".

3.2 Sintaxe

A sintaxe das LG's são obtidas adicionando-se o novo quantificador ∇ à sintaxe usual para FOL.

Dada uma linguagem de primeira ordem L, usa-se L^{∇} para a extensão de L pelo novo quantificador ∇. As fórmulas da linguagem L^{∇} são contruídas pelas regras de formação usuais [14], acrescidas de uma nova regra para *fórmulas generalizadas*: se v é uma variável e A é uma fórmula de L^{∇}, então $\nabla v A$ também é uma fórmula de L^{∇}.

3.3 Semântica

Intuitivamente, a afirmação "Brasileiros geralmente ganham um salário mínimo" é entendida como "Brasileiros que ganham um salário mínimo formam um subconjunto de tamanho considerável do universo dos brasileiros". Assim, afirmações tais como "Objetos geralmente têm a propriedade P"podem ser entendidas como "o conjunto de objetos que têm a propriedade P é importante (entre os subconjuntos do universo em discussão)". Então, dá-se a semântica para "geralmente" adicionando-se famílias de conjuntos (que são considerados os subconjuntos importantes) a uma estrutura usual de primeira ordem e estende-se a definição de satisfação para ∇.

Uma *estrutura modulada* $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} = \langle \mathcal{M}, \mathcal{K} \rangle$ consiste em uma estrutura usual de primeira ordem $\mathcal{M}$ e um *complexo* $\mathcal{K}$: uma família de subconjuntos do universo M de $\mathcal{M}$. Como é usual, a noção de satisfação de uma fórmula numa estrutura está associada à atribuição de valores $s : V \to M$ a suas variáveis livres. Para uma fórmula $\nabla v A$ define-se:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models \nabla v A[s] \text{ sse } \{b \in M : \mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models A[s(v \mapsto b)]\} \text{ pertence ao complexo } \mathcal{K}.$$

Outros conceitos, tais como o conceito de *modelo* ($\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models A$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models \Gamma$), são como de costume.

Por outro lado, o conceito de consequência lógica depende da noção específica de "geralmente" envolvida. Por exemplo, dadas as afirmações "Amantes de esportes assistem SporTV"e "Meninos geralmente adoram esportes", pode-se inferir que "Meninos geralmente assistem SporTV". Isto será correto se os complexos forem fechados sob super-conjuntos, o que é razoável no caso de 'muitos'. Mais precisamente, diz-se que uma fórmula A é *consequência lógica sob superconjuntos* de um conjunto Γ de sentenças se, e somente se, $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models A$ sempre que $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models \Gamma$, para todo modelo $\mathcal{M}^{\mathcal{K}}$ cujo complexo $\mathcal{K}$ é fechado sob superconjuntos (do seu universo). Usa-se a notação $\Gamma \models_{\mathcal{S}} A$, onde $\mathcal{S}$ é a classe dos complexos fechados superiormente.

Deste modo, cada noção de "geralmente" dá origem a uma relação de conseqüência correspondente. Assim, dada uma classe dos complexos (módulo) $\mathcal{C}$, tem-se uma relação de conseqüência $\models_{\mathcal{C}}$: $\Gamma \models_{\mathcal{C}} A$ se, e somente se, para todo complexo $\mathcal{K}$ em $\mathcal{C}$, $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models A$ sempre que $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models \Gamma$.

Além do *módulo básico* $\mathcal{B}$ (complexos sem restrições), também são considerados alguns módulos específicos, dados pelas suas propriedades características.

A tabela abaixo mostra algumas propriedades dos complexos[2].

Nome	Propriedade
não-vazio	$\emptyset \notin \mathcal{K}$
universo	$M \in \mathcal{K}$
interseção	$S \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{K} \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{K}$
união	$S \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{K} \Rightarrow S \cup T \in \mathcal{K}$
super-conjunto	$S \cap T \in \mathcal{K} \Rightarrow S \in \mathcal{K}$ e $T \in \mathcal{K}$
primo	$S \cup T \in \mathcal{K} \Rightarrow S \in \mathcal{K}$ ou $T \in \mathcal{K}$
rejeição	$\overline{S} \in \mathcal{K} \Rightarrow S \notin \mathcal{K}$
atração	$S \notin \mathcal{K} \Rightarrow \overline{S} \in \mathcal{K}$

Em princípio, cada combinação de propriedades da tabela acima pode ser usada para definir uma noção de "geralmente", originando uma relação de conseqüência lógica. Alguns destes módulos são familiares. Entre estes pode-se destacar:

- *Próprio* ($\mathcal{P}$): universo ($M \in \mathcal{K}$) e não-vazio ($\emptyset \notin \mathcal{K}$).
- *Fechado superiormente* ($\mathcal{S}$): superconjunto.
- *Reticulados* ($\mathcal{L}$): interseção e união.

[2]Note que $S \subseteq T$ se, e somente se, $S = S \cap T$.

- *Filtro Próprio* ($\mathcal{F}$): universo, não-vazio, interseção e superconjunto.

- *Ultrafiltro Próprio* ($\mathcal{U}$): filtro próprio que é primo (ou tem atração)[3].

3.4 Sistemas Axiomáticos para as LG's

Os Sistemas Axiomáticos para as LG's são obtidos a partir de um sistema axiomático para FOL adicionando-se novos axiomas e esquemas envolvendo o quantificador ∇ [2]. A seguir indica-se como isto é feito. Cada propriedade característica dos complexos pode ser expressa por meio de um axioma/esquema correspondente, como mostrado na tabela abaixo[4]. Por exemplo, $[\nabla\wedge]$ expressa a propriedade de interseção.

Nome	Axioma/Esquema
não-vazio	$\neg\nabla v\bot$
universo	$[\nabla\top]$:$\nabla v(A \to A)$
interseção	$[\nabla\wedge]$: $(\nabla vA \wedge \nabla vB) \to \nabla v(A \wedge B)$
união	$[\nabla\vee]$: $(\nabla vA \wedge \nabla vB) \to \nabla v(A \vee B)$
superconjunto	$[\wedge\nabla]$: $\nabla v(A \wedge B) \to (\nabla vA \wedge \nabla vB)$
primo	$[\vee\nabla]$: $\nabla v(A \vee B) \to (\nabla vA \vee \nabla vB)$
rejeição	$[\neg\nabla]$: $\nabla v\neg A \to \neg\nabla vA$
atração	$[\nabla\neg]$: $\neg\nabla vA \to \nabla v\neg A$

Considere também os dois esquemas abaixo

- $[\leftrightarrow \nabla]$: $\forall v(A \leftrightarrow B) \to (\nabla vA \to \nabla vB)$

- $[\nabla\alpha]$: $\nabla xA \leftrightarrow \nabla yA[x/y]$ (y é uma variável nova para A: $y \notin occ[A]$).

Os esquemas $[\leftrightarrow\ \nabla]$ e $[\nabla\alpha]$, denotados por $[\mathcal{B}]$ axiomatizam a lógica básica para "geralmente", isto é, os esquemas $[\leftrightarrow\ \nabla]$ e $[\nabla\alpha]$ adicionados a um sistema axiomático (correto e completo) para FOL, fornecem uma axiomatização correta e completa com respeito à classe $\mathcal{B}$ de todos os complexos (sem restrição): $\Gamma \models_{\mathcal{B}} A$ sse $\Gamma\cup[\mathcal{B}]\vdash_{FOL} A$.

[3] As propriedades primo e atração são equivalentes para Filtro Próprio se a lógica subjacente é clássica.

[4] $\neg\nabla v\bot$ é axioma e $[\nabla\top]$, $[\nabla\wedge]$, $[\nabla\vee]$, $[\wedge\nabla]$, $[\vee\nabla]$, $[\neg\nabla]$ e $[\nabla\neg]$ são esquemas de axiomas.

Sistemas axiomáticos corretos e completos para as outras LG's são obtidos adicionando-se a [$\mathcal{B}$] os axiomas/esquemas correspondentes às propriedades dos seus complexos [2]. Denotaremos estas axiomatizações por $\mathcal{B}(\Omega)$.

Capítulo 4

Fórmulas Marcadas

Neste capítulo introduzimos o conceito de fórmula marcada e estendemos a linguagem L^{∇}.

Uma fórmula marcada tem a forma $\langle A(\_)\rangle$ e pretende ser um representante da fórmula generalizada $\nabla x A(x)$. Intuitivamente, "$\_$" representa um objeto genérico e os símbolos "$\langle$" e "$\rangle$" enfatizam que $A(x)$ está no escopo de um quantificador generalizado.

Mais formalmente, consideremos um novo símbolo "$\_$" (i.e. "$\_$" não pertence a L^{∇}). Dada uma fórmula A e uma variável v de L^{∇}, uma *instanciação genérica* da fórmula A com respeito à variável v é o resultado (denotado por $A[v/\_]$) de trocarmos todas as ocorrências livres de v em A, se alguma, pelo novo símbolo "$\_$".

Exemplo 4.0.1 *Por exemplo, dada a fórmula* $\alpha = \nabla v(P(v) \wedge \forall y Q(y, v))$ *temos que* $P(\_) \wedge \forall y Q(y, \_)$ *é uma instanciação genérica da fórmula* $P(v) \wedge \forall y Q(y, v)$.

O *dialeto genérico* associado a L^{∇} consiste em todas as instanciações genéricas $A[v/\_]$, para uma fórmula A de L^{∇} e uma variável v. No dialeto genérico associado a L^{∇}, permitimos a substituição do novo símbolo "$\_$": note que $A[v/\_][\_/w] = A[v/w]$. Assim, uma *fórmula marcada* tem a forma $\langle A\rangle$, onde A é uma fórmula do dialeto genérico associado a L^{∇}.

Note que no exemplo acima, a fórmula $P(\_) \wedge \forall y Q(y, \_)$, (a instanciação genérica de $P(v) \wedge \forall y Q(y, v)$), pode ser lida como sendo a conjunção das instanciações genéricas das fórmulas $P(v)$ e $\forall y Q(y, v)$, isto é, $P(\_) \wedge \forall y Q(y, \_)$ é interpretada como sendo a fórmula $\nabla v P(v) \wedge \nabla v \forall Q(y, v)$ e não a fórmula original α. Então, para evitar esta ambigüidade utilizamos os símbolos "$\langle$" e "$\rangle$" para marcar o escopo de um quantificador generalizado.

Seja $L^{\nabla -}$ o conjunto contendo todas as fórmulas marcadas associadas a L^{∇}. Adicionamos $L^{\nabla -}$ a L^{∇} e obtemos L^{∇^*}, isto é, $L^{\nabla^*} = L^{\nabla} \cup L^{\nabla -}$. Note que em L^{∇^*} as fórmulas são marcadas ou não, e.g. $\langle A \rangle \wedge \langle B \rangle$ não é uma fórmula em L^{∇^*}.

As fórmulas marcadas têm o mesmos significado dado às fórmulas generalizadas, isto é, $\mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models \langle A \rangle$ se, e somente se, $\{b \in M : \mathcal{M}^{\mathcal{K}} \models A[s(\_ \mapsto b)]\}$ pertence ao complexo $\mathcal{K}$.

Estendemos a familiar definição recursiva de *grau de uma fórmula* A (notação $gr(A)$) em L^{∇^*} do seguinte modo:

Definição 4.0.1 *Seja A uma fórmula em L^{∇^*}. Então,*

($Base$) *se A é uma fórmula atômica ou $\perp$, então $gr(A) := 0$;*

($\neg$) *se $A = \neg B$, então $gr(A) := gr(B) + 1$;*

(b) *se $A = (B_1 b B_2)$ e b é um conectivo binário, então $gr(A) := gr(B_1) + gr(B_2) + 1$;*

($\langle\rangle$) *se $A = \langle B[v/\_] \rangle$, então $gr(A) := gr(B) + 0.5$;*

(Q) *se $A = QvB$, onde Q é $\forall$ ou $\exists$ ou ∇, então $gr(A) := gr(B) + 1$.*

Capítulo 5

Sistemas de Dedução Natural

Neste capítulo apresentaremos sistemas dedutivos no estilo de dedução natural para as lógicas de "geralmente". Enfatizaremos o tratamento das fórmulas generalizadas.

Em [7] foram apresentados sistemas de dedução natural para a Lógica de ultrafiltros e para a Lógica de filtros, que aparentemente só são aplicáveis a essas lógicas. Nosso sistema dedutivo se aplica a diferentes lógicas de "geralmente": lógica de filtros, lógica de reticulados etc., apropriadas à manipulação de diferentes interpretações para "geralmente" tais como "muitos", "a maioria" etc.

Ainda, diferentemente do sistema apresentado em [7], a linguagem intermediária usada na aplicação das regras para tratar fórmulas generalizadas é bastante simples. Nos sistemas desenvolvidos nesta tese, utilizaremos "fórmulas marcadas" devido à necessidade de gerenciamento de aninhamento dos quantificadores ∇'s nas fórmulas.

Inicialmente, tomamos um sistema de dedução natural para a lógica subjacente FOL e estendemos este sistema para tratar as fórmulas generalizadas e as novas fórmulas, estas denominadas de "fórmulas marcadas". A estrutura de uma derivação é definida no capítulo 2 seção 2.1, com manipulação local de ∇.

Os sistemas de dedução natural para as LG's terão dois parâmetros:

- um sistema de dedução natural ND para a lógica de primeira ordem subjacente (conservando seus conectivos e quantificadores originais) apresentados no capítulo 2, seção 2.1; e

- uma lógica particular de "geralmente".

Mais precisamente, consideraremos a Lógica Clássica, Intuicionista ou Minimal como lógicas subjacentes de primeira ordem [9]. Usaremos as seguintes versões de sistemas de dedução natural ND para as lógicas subjacentes de primeira ordem:

(ML) Lógica Minimal: ML,

(IL) Lógica Intuicionista: $IL = ML \cup \{(Abs)\}$,

(CL) Lógica Clássica: $CL := IL \cup \{(RaA)\}$;

5.1 Sistemas de Dedução Natural para a Lógica Básica de "Geralmente"

Apresentaremos a seguir as regras dos sistemas de dedução natural para a lógica básica de "geralmente" (complexos sem restrição).

Iniciaremos com um sistema de dedução natural ND para a lógica clássica, intuicionista ou minimal [9] e estenderemos o sistema ND para tratar fórmulas generalizadas e marcadas, obtendo, o sistema $ND(\mathcal{B})$.

Estenderemos algumas regras de eliminação de ND para a obtenção de fórmulas marcadas como conclusão. Mais especificamente, as regras de eliminação para a disjunção $(\vee E)$ e para o quantificador existencial $(\exists E)$, permitem uma fórmula marcada como conclusão, obtendo o *sistema estendido* ND^*.

As regras $(\vee E)$ e $(\exists E)$ do sistema estendido ND^*:

$$(\vee E)\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma_1 \\ \underline{M}\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\, i \qquad (\exists E)\dfrac{\exists x A \quad \begin{matrix}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma \\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\, i$$

$\underline{M}$ denota que M pode ser uma fórmula marcada ou não. Estendemos esta notação, de maneira usual, para um conjunto Γ de fórmulas em L^{∇^*}:

$$\text{se } \Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}, \text{ então } \underline{\Gamma} = \{\underline{\gamma_1}, ..., \underline{\gamma_n}\}.$$

Assim sendo, no sistema ND^* as únicas regras que permitem ter como conclusão uma fórmula marcada ou uma fórmula não marcada, são as regras $(\vee E)$ e $(\exists E)$. Para todas as outras regras, teremos apenas fórmulas não-marcadas como conclusão.

Teremos *regras* de *introdução* e *eliminação* para ∇ (para entrar e sair de um ambiente onde se faz a manipulação de fórmulas marcadas). As regras abaixo correspondem ao esquema $[\nabla\alpha]$:

$$(\nabla E)\dfrac{\nabla v A}{\langle A[v/\_]\rangle} \qquad (\nabla I)\dfrac{\langle A\rangle}{\nabla z A[\_/z]}$$

restrição da regra (∇I): $z \notin occ[A]$

Teremos, também, uma regra de substituição de equivalência para fórmulas marcadas, que correspondem ao esquema $[\leftrightarrow \nabla]$. A *regra de equivalência* $(\Updownarrow)$ é:

$$(\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{matrix}\Gamma,\ [A]^i \\ \Sigma_1 \\ B\end{matrix} \quad \langle A[v/\_]\rangle \quad \begin{matrix}\Delta,\ [B]^i \\ \Sigma_2 \\ A\end{matrix}}{\langle B[v/\_]\rangle}\, i$$

restrição da regra $(\Updownarrow)$: $v \notin free(\Gamma \cup \Delta)$

Em $(\Updownarrow)$, a fórmula marcada $\langle A[v/\_]\rangle$ é denominada de *premissa maior* e as fórmulas não-marcadas A e B são denominadas de *premissas menores*.

Usaremos $(\mathcal{B})$ para o conjunto contendo as *regras básicas* $(\nabla I), (\nabla E)$ e $(\Updownarrow)$:

$(\mathcal{B})$ =$\{(\nabla I), (\nabla E), (\Updownarrow)\}$.

Podemos agora, apresentar o sistema básico $ND(\mathcal{B}) = ND^{*} \cup (\mathcal{B})$. Mais precisamente, obtemos os três sistemas básicos, dependendo da lógica de primeira ordem subjacente:

- $ML(\mathcal{B}) = ML^{*} \cup (\mathcal{B})$;
- $IL(\mathcal{B}) = IL^{*} \cup (\mathcal{B})$; e
- $CL(\mathcal{B}) = CL^{*} \cup (\mathcal{B})$.

Exemplo 5.1.1 *Por exemplo, em um sistema básico* $ND(\mathcal{B})^{1} = ND^{*} \cup (B)$*, temos a derivação de* $\nabla x \nabla y B(x,y)$ *a partir de* $\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))^{2}$ *e* $\nabla x \nabla y A(x,y)$*, isto é,*

$$\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))\,,\ \nabla x \nabla y A(x,y) \vdash_{ND(\mathcal{B})} \nabla x \nabla y B(x,y)$$

como mostrado a seguir.

1. *Seja* π *uma derivação de* $B(x,y)$ *a partir de* $\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))$ *e* $A(x,y)$ *e seja* π' *uma derivação de* $A(x,y)$ *a partir de* $\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))$ *e* $B(x,y)$*.*

$$\pi = (\rightarrow E)\dfrac{A(x,y) \qquad (\wedge E)\dfrac{(\forall E)\dfrac{(\forall E)\dfrac{\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))}{\forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))}}{A(x,y) \leftrightarrow B(x,y)}}{A(x,y) \rightarrow B(x,y)}}{B(x,y)}$$

$$\pi' = (\rightarrow E)\dfrac{B(x,y) \qquad (\wedge E)\dfrac{(\forall E)\dfrac{(\forall E)\dfrac{\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))}{\forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))}}{A(x,y) \leftrightarrow B(x,y)}}{B(x,y) \rightarrow A(x,y)}}{A(x,y)}$$

[1] $ND \in \{ML^{*}, IL^{*}, CL^{*}\}$

[2] $\forall x \forall y (A(x,y) \leftrightarrow B(x,y)) = \forall x \forall y ((A(x,y) \rightarrow B(x,y)) \wedge (B(x,y) \rightarrow A(x,y)))$

2. *Daí, construímos a derivação ρ de $\nabla y B(x,y)$ a partir de $\forall x \forall y(A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))$ e $\nabla y A(x,y)$ (onde $C = \forall x \forall y(A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))$).*

$$\rho = (\nabla I)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c} C,[A(x,y)]^1 \\ \pi \\ B(x,y)\end{array} \qquad (\nabla E)\,\dfrac{\nabla y A(x,y)}{\langle A(x,\_)\rangle} \qquad \begin{array}{c} C,[B(x,y)]^1 \\ \pi' \\ A(x,y)\end{array}}{\langle B(x,\_)\rangle}\;1}{\nabla y B(x,y)}$$

3. *De mesmo modo, podemos construir uma derivação ρ' de $\nabla y A(x,y)$ a partir de $\forall x \forall y(A(x,y) \leftrightarrow B(x,y))$ e $\nabla y B(x,y)$.*

4. *Com as derivações ρ e ρ', construimos uma derivação de $\nabla x \nabla y B(x,y)$ a partir de $\forall x \forall y(A(x,y) \leftrightarrow B(x,y)) = C$ e $\nabla x \nabla y A(x,y)$:*

$$(\nabla I)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c} C,[\nabla y A(x,y)]^3 \\ \rho \\ \nabla y B(x,y)\end{array} \qquad (\nabla E)\,\dfrac{\nabla x \nabla y A(x,y)}{\langle \nabla y A(\_,y)\rangle} \qquad \begin{array}{c} C,[\nabla y B(x,y)]^3 \\ \rho' \\ \nabla y A(x,y))\end{array}}{\langle \nabla y B(\_,y)\rangle}\;3}{\nabla x \nabla y B(x,y)}.$$

Outros exempos de $ND(\mathcal{B})$-derivações aparecem na prova d0 Teorema 5.1.1 a seguir.

Mostraremos que cada um dos sistemas básicos $ML(\mathcal{B})$, $IL(\mathcal{B})$ e $CL(\mathcal{B})$ é equivalente à lógica básica de "geralmente" correspondente. Para isto, usaremos uma tradução $T : L^{\nabla^*} \to L^{\nabla}$ (que desmarca as fórmulas marcadas), dada por:

$$T(A) = \begin{cases} \nabla z F[\_/z], & \text{se } A = \langle F \rangle; \\ A, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde z é a primeira variável nova, tal que $z \notin occ[F]$.

Teorema 5.1.1 *Para um conjunto de fórmulas Γ e uma fórmula M em L^{∇^*}:*

$$\Gamma \vdash_{ND(\mathcal{B})} M \textit{ se, e somente se, } T(\Gamma) \cup [\mathcal{B}]^3 \vdash_{ND^*} T(M).$$

[3]Relembramos que $[\mathcal{B}]$ é o conjunto formado pelos esquemas $[\leftrightarrow \nabla]$ e $[\nabla\alpha]$ (c.f. 3.4).

Para demostrarmos que se $T(\Gamma) \cup [\mathcal{B}] \vdash_{ND^*} T(M)$, então $\Gamma \vdash_{ND(\mathcal{B})} M$ basta mostramos que toda instância dos esquemas em $[\mathcal{B}]$ pode ser demonstrada em $ND(\mathcal{B})$. Por outro lado, a prova de que se $\Gamma \vdash_{ND(\mathcal{B})} M$, então $T(\Gamma) \cup [\mathcal{B}] \vdash_{ND^*} T(M)$ é feita por indução sobre o comprimento de uma derivação.

A prova do teorema 5.1.1 é apresentada no apêndice.

5.2 Sistemas de Dedução Natural para as Lógicas Específicas de "Geralmente"

Nesta seção apresentaremos os sistemas dedutivos no estilo de dedução natural para as diversas lógicas específicas de "geralmente".

Os sistemas de dedução natural para as lógicas específicas de "geralmente" são obtidas estendendo-se o sistema básico $ND(\mathcal{B})$ com regras apropriadas, ou seja, $ND(\mathcal{B})$ é estendido com regras que correspondem aos axiomas/esquemas que axiomatizam as LG's apresentados anteriormente [16].

Desejamos criar novas regras que correspondem aos esquemas específicos (c.f. 3.4). A construção baseia-se em adicionar novas regras para tratar fórmulas marcadas.

Para introduzir a idéia básica, considere a propriedade de fechamento sobre interseção, expressado pelo esquema $[\nabla\wedge] : (\nabla v A \wedge \nabla v B) \to \nabla v (A \wedge B)$. O esquema $[\nabla\wedge]$ pode ser formulado como a regra:

$$(\nabla\wedge)\frac{\nabla v A \quad \nabla v B}{\nabla v (A \wedge B)}.$$

A regra $(\nabla\wedge)$ pode ser facilmente reformulada como a seguinte regra $(\wedge^* I)$ para introdução da conjunção em um ambiente marcado.

$$(\wedge^* I)\ \frac{\langle A[v/\_] \rangle \quad \langle B[v/\_] \rangle}{\langle (A \wedge B)[v/\_] \rangle}$$

De modo análogo, podemos obter regras correspondentes para os esquemas em 3.4. Por exemplo, correspondendo ao axioma não-vazio $\neg\nabla v \bot$, obtemos a seguinte regra de eliminação para absurdo marcado:

$$(\bot^* E)\ \ \frac{\langle \bot \rangle}{\bot}$$

Consideremos as seguintes regras operacionais que correspondem às propriedades dos complexos.

Introdução	Eliminação
$(\top^* I)\ \ \dfrac{}{\langle F \to F \rangle}$	$(\bot^* E)\ \ \dfrac{\langle \bot \rangle}{\bot}$
$(\wedge^* I)\ \ \dfrac{\langle F \rangle \ \ \langle G \rangle}{\langle F \wedge G \rangle}$	$(\wedge^* E)\ \ \dfrac{\langle F \wedge G \rangle}{\langle F \rangle} \quad \dfrac{\langle F \wedge G \rangle}{\langle G \rangle}$
$(\vee^* I)\ \ \dfrac{\langle F \rangle \ \ \langle G \rangle}{\langle F \vee G \rangle}$	$(\vee^* E)\ \ \dfrac{\langle F \vee G \rangle \quad \begin{array}{c} \Gamma, [\langle F \rangle]^i \\ \vdots \\ \underline{M} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta, [\langle G \rangle]^i \\ \vdots \\ \underline{M} \end{array}}{\underline{M}}\ i$
$(\neg^* I)\ \ \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma, [\langle F \rangle]^i \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\langle \neg F \rangle}\ i$	$(\neg^* E)\ \ \dfrac{\langle F \rangle \ \ \langle \neg F \rangle}{\bot}$

A correspondência entre axioma ou esquemas e regras é como descrito abaixo:

axioma	esquemas						
$\neg \nabla v \bot$	$\nabla \top$	$\nabla \wedge$	$\nabla \vee$	$\nabla \neg$	$\wedge \nabla$	$\vee \nabla$	$\neg \nabla$
$(\bot^* E)$	$(\top^* I)$	$(\wedge^* I)$	$(\vee^* I)$	$(\neg^* I)$	$(\wedge^* E)$	$(\vee^* E)$	$(\neg^* E)$

Relembramos que uma lógica específica de “geralmente” consiste em:

- uma lógica subjacente L; e
- uma lógica específica de "geralmente", axiomatizada por $\mathcal{B}(\Omega)$ (cf.3.4).

Podemos construir um sistema de dedução natural para esta lógica específica considerando:

- um sistema de dedução natural ND para L; e
- a extensão de $ND(\mathcal{B})$ pelas regras Ω^* correspondentes aos esquemas em Ω.

$$\Omega^* = \{(\top^* I), (\bot^* E), (\wedge^* I), (\vee^* I), (\neg^* I), (\wedge^* E), (\vee^* E), (\neg^* E)\}$$

Assim, obtemos o sistema $ND(\Omega) = ND(\mathcal{B}) \cup \Omega^*$.

Por exemplo, para a lógica fechada superiormente adicionamos as regras de eliminação $(\wedge^* E)$ para obter $ND(\mathcal{S})$, e para a lógica dos filtros próprios adicionamos as regras específicas $(\top^* I)$, $(\bot^* E)$, $(\wedge^* I)$ e $(\wedge^* E)$ para obter $ND(\mathcal{F})$.

Exemplo 5.2.1 *No sistema específico $ND(\mathcal{S})$, teremos uma derivação π de $\nabla v B$ a partir de $\forall v(A \to B)$ e $\nabla v A$.*

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{(\wedge^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}[A]^1, \forall v(A \to B)\\ \Sigma \\ A \wedge B\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{\nabla v A}{\langle A[v/\_]\rangle} \qquad (\wedge E)\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}}{\langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle}1}{\langle B[v/\_]\rangle}}{\nabla v B}$$

onde

$$\Sigma = (\wedge I)\dfrac{[A]^1 \qquad (\to E)\dfrac{[A]^1 \qquad (\forall E)\dfrac{\forall v(A \to B)}{A \to B}}{B}}{A \wedge B}$$

Teorema 5.2.1 *Para um conjunto de fórmulas Γ e uma fórmula M em L^{∇^*}:*

$\Gamma \vdash_{ND(\Omega)} M$ *se, e somente se,* $T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega) \vdash_{ND^*} T(M)$.

Similarmente, ao teorema 5.1.1, na direção ($\Leftarrow$) é suficiente mostrarmos que toda instância dos esquemas em $\mathcal{B}(\Omega)$ pode ser demonstrado em $ND(\Omega)$ e na direção ($\Rightarrow$), por indução sobre o comprimento de uma derivação, podemos mostrar que para toda derivação π em $ND(\Omega)$, existe uma derivação correspondente $T(\pi)$ em ND^*.

A prova do teorema 5.2.1 é apresentada no apêndice.

Estendemos o conceito de premissa maior e menor [9] para as regras com fórmulas marcadas. Dada uma aplicação da regra ($\vee^* E$)

$$(\vee^* E)\dfrac{\langle A \vee B \rangle \quad \begin{matrix} \Gamma, [\langle A \rangle]^i \\ \vdots \\ \underline{C} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \Delta, [\langle B \rangle]^i \\ \vdots \\ \underline{C} \end{matrix}}{\underline{C}}\ i$$

$\langle A \vee B \rangle$ é a premissa maior de ($\vee^* E$) enquanto que $\underline{C}$ é premissa menor.

Dada uma aplicação da regra ($\neg^* E$), $\langle \neg A \rangle$ é a premissa maior enquanto que $\langle A \rangle$ é premissa menor.

Capítulo 6

Normalização e Consistência

Neste capítulo apresentaremos a prova do resultado de normalização para os sistemas de dedução natural para as LG's.

Para os sistemas com a Lógica Minimal (ML) ou a Lógica Intuicionista (IL) como lógica subjacente, demonstraremos o resultado de normalização utilizando a estratégia de prova apresentada em [9, 10] para ML e IL. Por outro lado, os sistemas com a Lógica Clássica (CL) como lógica subjacente, utilizaremos a estratégia de prova apresentada em [11, 12] para CL.

Intuitivamente, o resultado de normalização garante a existência de derivações sem ocorrências de redundâncias ou desvios, denominado de segmento maximal.

A seguir definiremos as noções de caminho e segmento de uma derivação em $ND(\Omega)$[1] e posteriormente a noção de segmento maximal.

Definição 6.0.1 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$. Então, um caminho em π é uma seqüência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas tais que:*

(i) A_1 é uma hipótese que não é descarregada por uma aplicação de $(\vee^* E)$, nem de $(\vee E)$ e nem de $(\exists E)$;

[1]Note que, $ND \in \{ML^*, IL^*, CL^*\}$ e se $\Omega = \emptyset$, então $ND(\Omega) = ND(\mathcal{B})$.

(ii) *se A_i não é uma premissa menor de $(\rightarrow E)$ ou $(\Updownarrow)$ ou $(\neg^* E)$, não é premissa maior de $(\vee^* E)$, $(\vee E)$, $(\exists E)$ e nem é a fórmula final de π, então A_{i+1} é a fórmula que ocorre imediatamente abaixo de A_i;*

(iii) *se A_i é premissa maior de uma aplicação de $(\vee^* E)$, $(\vee E)$ ou $(\exists E)$, então A_{i+1} é qualquer hipótese descarregada em função destas aplicações;*

(iv) *A_n é premissa menor de uma aplicação de $(\rightarrow E)$ ou de $(\Updownarrow)$ ou de $(\neg^* E)$ ou a fórmula final da derivação.*

Definição 6.0.2 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$. Uma seqüência $A_1, ..., A_n$ de fórmulas em um caminho é um segmento se, e somente se:*

(i) $A_1 = ... = A_n$

(ii) *A_1 não é conclusão de uma aplicação de $(\vee E)$, nem de $(\vee^* E)$ e nem de $(\exists E)$;*

(iii) *Para todo $i < n$, se A_i é premissa menor de $(\vee E)$ ou $(\vee^* E)$ ou $(\exists E)$,*
então A_{i+1} é a fórmula que ocorre imediatamente abaixo de A_i;

(iv) *A_n não é premissa menor de $(\vee E)$, nem de $(\vee^* E)$ e nem de $(\exists E)$.*

Exemplo 6.0.2 *Na derivação abaixo as três ocorrências consecutivas da fórmula $\langle G \wedge H \rangle$ formam um segmento.*

$$
(\wedge^* E)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\langle F \vee F' \rangle \quad (\exists E)\dfrac{\exists y C \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}[C]^1, [\langle F \rangle]^2, [A]^3 \\ \Sigma_1 \\ G \wedge H\end{matrix} \quad \langle A \rangle \quad \begin{matrix}[C]^1, [\langle F \rangle]^2, [G \wedge H]^3 \\ \Sigma_2 \\ A\end{matrix}}{\langle G \wedge H \rangle}3}{\langle G \wedge H \rangle}1 \quad \begin{matrix}[\langle F' \rangle]^2 \\ \Sigma_3 \\ \langle G \wedge H \rangle\end{matrix}}{\langle G \wedge H \rangle}2}{\langle G \rangle}
$$

Definição 6.0.3 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$ e seja S um segmento em π. S é segmento maximal se, e somente se,*

- *a primeira fórmula de S é conclusão de uma aplicação de regra de introdução e a fórmula final de S é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação.*

- $S = A_1, ..., A_n$ *(com $n > 1$), A_1 é conclusão de uma aplicação de regra (Abs) ou (RaA) ou $(\Updownarrow)$ e A_n é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação.*

- $S = A_1, ..., A_n$ *(com $n > 1$), A_1 é conclusão de uma aplicação de uma regra de introdução ou da regra $(\Updownarrow)$ e A_n é premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.*

- $S = A$*, A é conclusão de uma aplicação de regra (Abs) ou (RaA) e A é a premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação de ND^*.*

- $S = A$*, A é conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e a A é premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.*

Exemplo 6.0.3 *O segmento do exemplo 6.0.2 é um segmento maximal $S = A_1, A_2, A_3$ tal que $A_1 = A_2 = A_3 = \langle G \wedge H\rangle$, A_1 é conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e A_3 é premissa maior de uma aplicação da regra de eliminação $(\wedge^* E)$.*

Nas derivações em $ND(\Omega)$ podem ocorrer um outro tipo de redundância denominada de *aplicação supérflua* de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$. Uma aplicação (α) da regra $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ é dita supérflua se existe uma subderivação de uma premissa menor de (α) a partir de Γ tal que Γ não contém hipótese descarregada na aplicação (α).

Exemplo 6.0.4 *Seja π uma derivação de $\langle A \wedge B\rangle$ a partir de $\langle B \vee C\rangle$, $\langle A\rangle$ e $\forall x(A \leftrightarrow B)$.*

$$
{\scriptstyle(\vee^* E)}\dfrac{\langle B\vee C\rangle \qquad {\scriptstyle(\wedge^* I)}\dfrac{\langle A\rangle \quad {\scriptstyle(\Updownarrow)}\dfrac{\dfrac{[A]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\forall x(A\leftrightarrow B)}{A\leftrightarrow B}}{A\to B}}{B} \quad \langle A\rangle \quad \dfrac{[B]^1 \quad \dfrac{\dfrac{\forall x(A\leftrightarrow B)}{A\leftrightarrow B}}{B\to A}}{A}}{\langle B\rangle}{\scriptstyle 1}}{(\langle A\wedge B\rangle)^*} \qquad {\scriptstyle(\wedge^* I)}\dfrac{\langle A\rangle \quad [\langle B\rangle]^2}{\langle A\wedge B\rangle}}{\langle A\wedge B\rangle}{\scriptstyle 2}
$$

Note que, o conjunto de hipóteses $\Gamma = \{\forall x(A \leftrightarrow B), \langle A\rangle\}$ da subderivação da premissa menor $(\langle A \wedge B\rangle)^*$ da aplicação de $(\vee^* E)$ não contém hipóteses descarregadas na aplicação da regra $(\vee^* E)$. Portanto, a aplicação da regra $(\vee^* E)$ é uma aplicação supérflua.

Definição 6.0.4 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, π não contém ocorrência de segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.*

No lema a seguir demonstraremos que as aplicações supérfluas podem ser eliminadas.

Lema 6.0.1 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$. Então, π pode ser transformada em um derivação π' de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$ sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.*

A prova do lema 6.0.1 é feita por indução sobre o número de aplicações supérfluas e é apresentada no apêndice.

A seguir, definiremos algumas noções utilizadas na prova do resultado de normalização.

Definição 6.0.5 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$ e seja S um segmento maximal em π. Então, o grau de S, denotado por $gr(S)$, é o grau da fórmula que ocorre em S.*

Definição 6.0.6 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$. Então, o grau de π, denotado por $g(\pi)$, é o mais alto grau de um segmento maximal de π, ou seja, $g(\pi) = 0$ se π não tem segmento maximal e caso contrário, $g(\pi) = max\{gr(S)/\, S \text{ é segmento maximal em } \pi\}$.*

Definição 6.0.7 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$. O rank de π, denotado por $r(\pi)$, é o par (d, n) onde $d = g(\pi)$ e n é o número de fórmulas que pertencem aos segmentos maximais de π de grau d.*

Note que se π não tem segmento maximal, então $r(\pi) = (0, 0)$. A ordem sobre $r(\pi)$ é lexicográfica: $(d, n) < (d', n')$ se, e somente se, $d < d'$ ou ($d = d'$ e $n < n'$).

Nas seções posteriores mostraremos o resultado de normalização para os diversos sistemas de dedução natural para as LG's.

6.1 Normalização: Lógica Minimal + LG's

Nesta seção, mostraremos o resultado de normalização para o sistema $ML(\mathcal{B})$, utilizando a estratégia de prova apresentada em [9, 10] para ML e estenderemos o resultado para os sistemas de dedução natural para as lógicas específicas de "geralmente" $ML(\Omega)$.

6.1.1 Normalização para o Sistema $ML(\mathcal{B})$

Inicialmente, examinaremos os segmentos maximais e as suas respectivas reduções no sistema $ML(\mathcal{B})$.

Em adição aos segmentos maximais de ML^*, os seguintes novos tipos de segmentos maximais podem ocorrer em uma derivação em $ML(\mathcal{B})$.

- O segmento maximal S contém uma única fórmula.

  ($\Updownarrow$) Chamamos de $(\Updownarrow);(\Updownarrow)$ um segmento maximal que contém uma fórmula marcada $\langle B[x/\_]\rangle$ que é conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$:

$$
(\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2,[B[x/y]]^j\\ \Sigma_3\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c} (\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Pi_1\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_1,[B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\ i \\ \| \\ \langle B[x/y][y/\_]\rangle \end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_2,[C]^j\\ \Sigma_4\\ B[x/y]\end{array}}{\begin{array}{c}\langle C[y/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}\ j
$$

  onde $x \notin free(\Gamma_1 \cup \Delta_1)$ e $y \notin free(\Gamma_2 \cup \Delta_2)$.

  (∇) Chamamos de $(\nabla I);(\nabla E)$ um segmento maximal que contém uma fórmula generalizada $\nabla v A[\_/v]$ que é conclusão de uma aplicação da regra (∇I) e premissa de uma aplicação da regra (∇E):

$$\begin{array}{c}\Pi_1\\ (\nabla E)\;\dfrac{(\nabla I)\;\dfrac{\langle A\rangle}{\nabla v A[\_/v]}}{\langle A[\_/v][v/\_]\rangle}\\ \Pi_2\end{array}$$

onde $v \notin occ[A]$

- O segmento maximal S é uma seqüência de ocorrências de fórmulas $A_1, ..., A_n$, com $n > 1$.

  [$\vee_{(\nabla E)}$] Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\vee E)$ seguida por uma aplicação da regra (∇E):

$$\begin{array}{c}(\nabla E)\;\dfrac{(\vee E)\;\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A \vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_1\\ \nabla x C\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i\\ \Sigma_2\\ \nabla x C\end{array}}{\nabla x C}\,i}{\langle C[x/\_]\rangle}\\ \Pi_2\end{array}$$

  [$\vee_{(\Updownarrow)}$] Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\vee E)$ seguida por uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$:

$$\begin{array}{c}(\Updownarrow)\;\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array}\quad (\vee E)\;\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A \vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2, [A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_2, [B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}\\ \Pi_2\end{array}$$

  [$\exists_{(\nabla E)}$]Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\exists E)$ seguida por uma aplicação da regra (∇E):

$$\begin{array}{c}(\nabla E)\;\dfrac{(\exists E)\;\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists x A\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma, [A[x/a]]^i\\ \Sigma_1\\ \nabla x C\end{array}}{\nabla x C}\,i}{\langle C[x/\_]\rangle}\\ \Pi_2\end{array}$$

[$\exists_{(\Updownarrow)}$] Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra ($\exists E$) seguida por uma aplicação da regra ($\Updownarrow$):

$$(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array} \qquad (\exists E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A[x/a]]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,i \qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}$$

As reduções para estes segmentos maximais são como se segue.

($\Updownarrow$) Redução $(\Updownarrow);(\Updownarrow) \Rightarrow (\Updownarrow)$

$$(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2,[B[x/y]]^j\\ \Sigma_3\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i\\ \parallel\\ \langle B[x/y][y/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[C]^j\\ \Sigma_4\\ B[x/y]\end{array}}{\begin{array}{c}\langle C[y/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}\,j$$

$$\Downarrow$$

$$(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A[x/z]]^k\\ \Sigma_1[x/z]\\ \Gamma_2,B[x/z]\\ \Sigma_3[y/z]\\ C[y/z]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_1\\ \langle A[x/\_]\rangle\\ \parallel\\ \langle A[x/z][z/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[C[y/z]]^k\\ \Sigma_4[y/z]\\ \Delta_1,B[x/z]\\ \Sigma_2[x/z]\\ A[x/z]\end{array}}{\begin{array}{c}\langle C[y/z][z/\_]\rangle\\ \parallel\\ \langle C[y/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}\,k$$

onde z é x se $x = y$ e, se $x \neq y$, z é uma variável nova (z é uma variável que não ocorre em qualquer subderivação acima de $\langle B[x/\_]\rangle$).

Esta redução pode criar um novo segmento maximal envolvendo a fórmula não-marcada $B[x/z]$, mas note que $gr(B[x/z]) = gr(\langle B[x/\_]\rangle) - 0.5$.

(∇) Redução $(\nabla I); (\nabla E) \Rightarrow Id$ (note que, $\langle A[\_/v][v/\_]\rangle = \langle A\rangle$).

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \langle A\rangle\end{matrix}}{\nabla v A[\_/v]}(\nabla I)}{\begin{matrix}\langle A[\_/v][v/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{matrix}}(\nabla E)
\quad\Rightarrow\quad
\begin{matrix}\Pi_1\\ \langle A\rangle\\ \Pi_2\end{matrix}
$$

Esta redução pode criar um novo segmento maximal envolvendo a fórmula marcada $\langle A\rangle$, mas note que $gr(\langle A\rangle) = gr(\nabla v A[\_/v]) - 0.5$.

Nos casos onde o segmento maximal $S = A_1, ..., A_n$ e $n > 1$, temos que uma aplicação de regra de introdução para o conectivo ou quantificador c ou ($\Updownarrow$) não precede imediatamente uma aplicação de regra de eliminação para c ou ($\Updownarrow$). Assim sendo, nenhuma das reduções apresentadas anteriormente pode ser aplicada para eliminarmos S. Logo, invertemos a ordem das aplicações das regras, denominadas de *reduções permutativas*, para reduzirmos S a um segmento maximal S' que contém uma única fórmula. Posteriormente, aplicando uma das reduções apresentadas anteriormente, o segmento S' é eliminado.

Note que, se não estendêssemos o sistema ML, obtendo o sistema ML^*, as reduções permutativas a seguir não seriam possíveis.

[$\vee_{(\nabla E)}$]Redução permutativa $(\vee E); (\nabla E) \Rightarrow (\nabla E); (\vee E)$:

$$
(\nabla E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\vee B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_1\\ \nabla x C\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta, [B]^i\\ \Sigma_2\\ \nabla x C\end{matrix}}{\nabla x C}i}{\langle C[x/\_]\rangle}
$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array}\quad (\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^i\\ \Sigma_1\\ \nabla xC\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\quad (\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta,[B]^i\\ \Sigma_2\\ \nabla xC\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}}{\langle C[x/\_]\rangle}$$

Note que, o número de ocorrências da fórmula ∇xC é diminuído de uma unidade.

[$\vee_{(\Updownarrow)}$]Redução permutativa $(\vee E);(\Updownarrow)\Rightarrow(\Updownarrow);(\vee E)$:

$$\begin{array}{c}(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array}\quad (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_2,[B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,i\quad \begin{array}{c}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,j\\ \Pi_2\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{c}(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array}\quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,j\quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_2,[B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle}\,i\\ \Pi_2\end{array}$$

Note que, o número de ocorrências da fórmula $\langle C[x/\_]\rangle$ é diminuído de uma unidade.

[$\exists_{(\nabla E)}$]Redução permutativa $(\exists E);(\nabla E)\Rightarrow(\nabla E);(\exists E)$:

$$(\nabla E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma,[A[x/a]]^i\\ \Sigma_1\\ \nabla xC\end{array}}{\nabla xC}\,i}{\langle C[x/\_]\rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array} \quad (\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A[x/a]]^i\\ \Sigma_1\\ \nabla xC\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}}{\langle C[x/\_]\rangle}$$

Note que, o número de ocorrências da fórmula ∇xC é diminuído de uma unidade.

$[\exists_{(\Updownarrow)}]$Redução permutativa $(\exists E);(\Updownarrow) \Rightarrow (\Updownarrow);(\exists E)$:

$$(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array} \quad (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A[x/a]]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{array}{c}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array} \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A[x/a]]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}$$

Note que, o número de ocorrências da fórmula $\langle C[x/\_]\rangle$ é diminuído de uma unidade.

Notemos que as reduções anteriores, não geram aplicações supérfluas de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$, os novos segmentos maximais criados sempre têm o grau menor e nas reduções permutativas o número de fórmulas dos segmentos maximais é diminuído de uma unidade.

A seguir definiremos a noção de devivação crítica em $ML(\mathcal{B})$.

Definição 6.1.1 *Seja π uma derivação em $ML(\mathcal{B})$. π é uma derivação crítica se, e somente se, a premissa maior da última inferência de π pertence a um segmento maximal com grau igual ao de π e para toda subderivação σ de π, $g(\sigma) < g(\pi)$.*

Lema 6.1.1 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.*

A prova do lema 6.1.1 é apresentada no apêndice.

A partir do lema 6.1.1 demonstraremos o resultado de normalização para o sistema $ML(\mathcal{B})$, apresentado a seguir.

Teorema 6.1.1 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$. Então, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.*

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.

Se π não contém nenhuma ocorrência de segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$, então $\pi' = \pi$.

Caso contrário, se π contêm aplicações supérfluas de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$, então pelo lema 6.0.1 π pode ser transformada em uma derivação ρ sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e $(\exists E)$.

Por outro lado, se π contêm segmentos maximais, então por indução sobre $r(\rho) = (g(\rho), n)$ mostraremos que podemos obter uma derivação π' de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$ sem ocorrências de segmentos maximais.

Passo base: $r(\rho) = (0.5, 1)$.

Logo,

$$\rho = (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2,[B[x/y]]^j\\ \Sigma_3\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c} (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array}\qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i \\ \| \\ \langle B[x/y][y/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[C]^j\\ \Sigma_4\\ B[x/y]\end{array}}{\langle C[y/\_]\rangle}\,j$$

onde $B[x/y][y/\_]$ é uma fórmula atômica ou $\perp$.

Daí, eliminamos o segmento maximal $\langle B[x/y][y/\_]\rangle$ de ρ aplicando a redução $(\Updownarrow);(\Updownarrow) \Rightarrow (\Updownarrow)$ e obtemos:

$$\pi' = (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A[x/z]]^k\\ \\ \Sigma_1[x/z]\\ \\ \Gamma_2, B[x/z]\\ \\ \Sigma_3[y/z]\\ \\ C[y/z]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\langle A[x/\_]\rangle\\ \| \\ \langle A[x/z][z/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[C[y/z]]^k\\ \\ \Sigma_4[y/z]\\ \\ \Delta_1, B[x/z]\\ \\ \Sigma_2[x/z]\\ \\ A[x/z]\end{array}}{\begin{array}{c}\langle C[y/z][z/\_]\rangle\\ \| \\ \langle C[y/\_]\rangle\end{array}}\,k$$

onde z é x se $x = y$ e, se $x \neq y$, z é uma variável nova (z é uma variável que não ocorre em qualquer subderivação acima de $\langle B[x/\_]\rangle$).

Como $B[x/y][y/\_]$ é uma fórmula atômica ou $\perp$, então $B[x/z]$ não pode ser um novo segmento maximal em π'.

Logo, π' não possui segmento maximal ($r(\pi') = (0,0)$) e nem aplicações supérfluas de

$(\vee E)$ ou $(\exists E)$.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.

Hipótese de indução: O teorema é válido para toda ρ tal que $r(\rho) < (d, n)$.

Seja ρ uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$ tal que $r(\rho) = (d, n)$.

Tomemos uma subderivação crítica D em ρ tal que $g(D) = d$.

Pelo lema 6.1.1 a subderivação D poder ser transformada em uma subderivação D' tal que $r(D') < r(D)$.

- Suponhamos que $n = 1$.

  Logo, $S = A$, S pertence a D e todos os outros segmentos maximais de ρ têm grau menor que d.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d', n') com $d' < d$.

  Assim $r(\rho') = (d', n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.

- Suponhamos que $n > 1$.

  Logo, temos que o segmento maximal de D é a sequência $A_1, ..., A_m$ com $1 < m \leq n$.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d, n') com $n' < n$.

  Assim $r(\rho') = (d, n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.

■

6.1.2 Normalização para os Sistemas Específicos $ML(\Omega)$

Nesta seção demonstraremos o resultado de normalização para os sistemas de dedução natural para as lógicas específicas de "geralmente" $ML(\Omega)$.

Consideraremos os sistemas de dedução natural $ML(\Omega) = ML(\mathcal{B}) \cup \Omega^*$, obtidos a partir da adição do conjunto de regras Ω^* para fórmulas marcadas ao sistema $ML(\mathcal{B})$.

Em um dado sistema $ML(\Omega)$, cada conectivo c com (c^*E) e (c^*I) em Ω^* pode dar origem a ocorrências de segmentos maximais. Assim sendo, as ocorrências dos segmentos maximais (com uma fórmula marcada como elemento da seqüência) dependem das regras específicas em Ω^*.

Logo, dado um sistema $ML(\Omega)$, além dos casos de segmentos maximais para o sistema $ML(\mathcal{B})$, temos os seguintes casos de segmentos maximais com uma fórmula marcada $\langle F \rangle$ como conclusão de uma aplicação da regra (c^*I) e premissa maior de uma aplicação da regra (c^*E).

Detalharemos abaixo as reduções para esses casos. Antes disso, porém, notamos que as reduções envolvendo segmentos maximais (c^*I); (c^*E) são muitos se-melhantes aos casos onde não ocorrem fórmulas marcadas (segmentos maximais (cI); (cE)). Algumas reduções, introduzem novos segmentos maximais, cuja fórmula repetida tem grau menor que a do segmento maximal em questão.

As reduções de segmentos maximais envolvendo aplicações de regras $(\vee^*E)$, $(\vee E)$ e $(\exists E)$ resultam em reduções permutativas.

- O segmento maximal S contém uma única fórmula.

$[(\wedge^* I);(\wedge^* E)$] A fórmula marcada $\langle F_1 \wedge F_2 \rangle$ é conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* I)$ e premissa de uma aplicação da regra $(\wedge^* E)$:

$$\cfrac{(\wedge^* I)\,\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2 \\ \langle F_1\rangle & \langle F_2\rangle\end{matrix}}{(\wedge^* E)\,\cfrac{\langle F_1 \wedge F_2\rangle}{\begin{matrix}\langle F_i\rangle \\ \Sigma\end{matrix}}}}{}$$

onde $i \in \{1, 2\}$

Podemos remover este segmento maximal com a redução:

$$\begin{matrix}\Pi_i \\ \langle F_i\rangle \\ \Sigma\end{matrix}$$

Esta redução pode criar um novo segmento maximal envolvendo a fórmula marcada $\langle F_i\rangle$. Note que, $gr(\langle F_1 \wedge F_2\rangle) > gr(\langle F_i\rangle)$.

$[(\vee^* I);(\vee^* E)$] A fórmula marcada $\langle F_1 \vee F_2 \rangle$ é conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* I)$ e premissa maior de uma aplicação da regra $(\vee^* E)$:

$$(\vee^* E)\,\cfrac{(\vee^* I)\,\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 & \Pi_2 \\ \langle F_1\rangle & \langle F_2\rangle\end{matrix}}{\langle F_1 \vee F_2\rangle} \qquad \begin{matrix}\Gamma_1, [\langle F_1\rangle]^k \\ \Sigma_1 \\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2, [\langle F_2\rangle]^k \\ \Sigma_2 \\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\ k$$

Podemos remover este segmento maximal com a redução:

$$\begin{matrix} & \Pi_i \\ \Gamma_i, & \langle F_i\rangle \\ & \Sigma_i \\ & \underline{M}\end{matrix}$$

Esta redução pode criar um novo segmento maximal envolvendo a fórmula marcada $\langle F_i\rangle$. Note que, $gr(\langle F_1 \vee F_2\rangle) > gr(\langle F_i\rangle)$.

$[(\neg^* I);(\neg^* E)\ ]$ A fórmula marcada $\langle \neg F\rangle$ é conclusão de uma aplicação da regra $(\neg^* I)$ e premissa maior de uma aplicação da regra $(\neg^* E)$:

$$(\neg^* E)\ \dfrac{(\neg^* I)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle F\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\langle \neg F\rangle}\,i \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ \langle F\rangle\end{array}}{\begin{array}{c}\bot\\ \Xi\end{array}}$$

Podemos remover este segmento maximal com a redução:

$$\begin{array}{c}\qquad\Pi\\ \Gamma,\ \ \langle F\rangle\\ \Sigma\\ \bot\\ \Xi\end{array}$$

Esta redução pode criar um novo segmento maximal envolvendo a fórmula marcada $\langle F\rangle$. Note que, $gr(\langle \neg F\rangle) > gr(\langle F\rangle)$.

- O segmento maximal S é uma seqüência de ocorrências de fórmulas $A_1, ..., A_n$, com $n > 1$.

$[\vee^*_{\Updownarrow}\ ]$ Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ seguida por uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$:

$$(\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c}[C]^i\\ \Sigma_3\\ D\end{array} \quad (\vee^* E)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \langle F\vee G\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[\langle F\rangle]^j\\ \Sigma_1\\ \langle C[v/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[\langle G\rangle]^j\\ \Sigma_2\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,j \quad \begin{array}{c}[D]^i\\ \Sigma_4\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Sigma'\end{array}}\,i$$

Teremos a seguinte redução permutativa:

$$
(\vee^*E)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \langle F\vee G\rangle\end{matrix}\quad (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{matrix}[C]^i\\ \Sigma_3\\ D\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\langle F\rangle]^j\\ \Sigma_1\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}[D]^i\\ \Sigma_4\\ C\end{matrix}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,i\quad (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{matrix}[C]^i\\ \Sigma_3\\ D\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\langle G\rangle]^j\\ \Sigma_2\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}[D]^i\\ \Sigma_4\\ C\end{matrix}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,i}{\begin{matrix}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Sigma'\end{matrix}}\,j
$$

[$\vee_R$] Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\vee E)$ seguido por uma aplicação de uma regra de eliminação $(R) \in \Omega^{*}$[2]:

$$
(R)\,\dfrac{(\vee E)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ F\vee G\end{matrix}\quad \begin{matrix}[F]^i\\ \Sigma_1\\ \underline{M}\end{matrix}\quad \begin{matrix}[G]^i\\ \Sigma_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\,i\qquad \Sigma_3}{\begin{matrix}\underline{N}\\ \Sigma'\end{matrix}}
$$

Teremos a seguinte redução permutativa:

$$
(\vee E)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ F\vee G\end{matrix}\quad (R)\,\dfrac{\begin{matrix}[F]^i\\ \Sigma_1\\ \underline{M}\end{matrix}\quad \Sigma_3}{\underline{N}}\quad (R)\,\dfrac{\begin{matrix}[G]^i\\ \Sigma_2\\ \underline{M}\end{matrix}\quad \Sigma_3}{\underline{N}}}{\begin{matrix}\underline{N}\\ \Sigma'\end{matrix}}
$$

[$\vee_R^*$] Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ seguido por uma aplicação de uma regra de eliminação (R):

$$
(R)\,\dfrac{(\vee^* E)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \langle F\vee G\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\langle F\rangle]^i\\ \Sigma_1\\ \underline{M}\end{matrix}\quad \begin{matrix}[\langle G\rangle]^i\\ \Sigma_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\,i\qquad \Sigma_3}{\begin{matrix}\underline{N}\\ \Sigma'\end{matrix}}
$$

[2] Σ_3 pode ser vazio

Teremos a seguinte redução permutativa:

$$
(\vee^* E)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \langle F \vee G\rangle\end{array} \quad (R)\ \dfrac{\begin{array}{c}[\langle F\rangle]^i\\ \Sigma_1\\ M\end{array} \quad \Sigma_3}{N} \quad (R)\ \dfrac{\begin{array}{c}[\langle G\rangle]^i\\ \Sigma_2\\ M\end{array} \quad \Sigma_3}{N}}{\begin{array}{c}N\\ \Sigma'\end{array}}
$$

[$\exists_R$] Um segmento maximal envolvendo uma aplicação da regra $(\exists E)$ seguido por uma aplicação de uma regra de eliminação $(R) \in \Omega^{*3}$:

$$
(R)\ \dfrac{(\exists E)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \exists x F\end{array} \quad \begin{array}{c}[F[x/a]]^i\\ \Sigma\\ M\end{array}}{M}\, i \quad \Sigma_2}{\begin{array}{c}N\\ \Pi'\end{array}}
$$

Teremos a seguinte redução permutativa:

$$
(\exists E)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \exists x F\end{array} \quad (R)\ \dfrac{\begin{array}{c}[F[x/a]]^i\\ \Sigma_1\\ M\end{array} \quad \Sigma_2}{N}}{\begin{array}{c}N\\ \Pi'\end{array}}\, i
$$

Podemos observar que cada uma das reduções apresentada anteriormente é independente, isto é, nas reduções não ocorre nenhuma aplicação de regra que não existia na derivação original. Por exemplo, no caso onde a derivação π contém um segmento maximal $\langle F_1 \wedge F_2\rangle$ do tipo $[(\wedge^* I); (\wedge^* E)]$, a derivação obtida a partir da remoção do segmento

[3] Σ_2 pode ser vazio

maximal $\langle F_1 \wedge F_2 \rangle$ contém as aplicações de regras das subderivações $\begin{array}{c}\Pi_i\\ \langle F_i\rangle\end{array}$ e $\begin{array}{c}\langle F_i\rangle\\ \Sigma\end{array}$ de π.

Daí, se π é uma derivação em um dado sistema $ML(\Omega)$, então a derivação obtida após a aplicação de m reduções, ainda é uma derivação em $ML(\Omega)$.

A seguir, é dado um exemplo de uma ocorrência de um segmento maximal com três ocorrências consecutivas da fórmula marcada $\langle G \wedge H \rangle$.

Exemplo 6.1.1 *Considere a seguinte derivação π:*

$$(\wedge^* E)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\langle F \vee F' \rangle \quad (\exists E)\dfrac{\exists y C \quad (\wedge^* I)\dfrac{\begin{array}{c}[C]^1, [\langle F \rangle]^2\\ \Sigma_1\\ \langle G \rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]^1, [\langle F \rangle]^2\\ \Sigma_2\\ \langle H \rangle\end{array}}{\langle G \wedge H \rangle}}{\langle G \wedge H \rangle}1 \quad \begin{array}{c}[\langle F' \rangle]^2\\ \Sigma_3\\ \langle G \wedge H \rangle\end{array}}{\langle G \wedge H \rangle}2}{\langle G \rangle}$$

Na derivação π, as três ocorrências consecutivas da fórmula marcada $\langle G \wedge H \rangle$ formam o segmento maximal $S = A_1, A_2, A_3$ onde $A_1 = A_2 = A_3 = \langle G \wedge H \rangle$, A_1 é conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* I)$ e A_3 é premissa de uma aplicação da regra $(\wedge^* E)$.

Suponhamos que na derivação π do exemplo 6.1.1 todos os segmentos maximais acima de S tenham grau menor. Mostraremos que a derivação π pode ser tranformada em uma derivação ρ tal que $r(\rho) < r(\pi)$.

Inicialmente, aplicamos uma redução permutativa na ocorrência mais inferior de uma aplicação da regra $(\vee^* E)$, obtendo uma derivação π' que contém um segmento maximal com duas ocorrências consecutivas da fórmula $\langle G \wedge H \rangle$:

$$\pi' = (\vee^* E)\dfrac{\langle F \vee F' \rangle \quad (\vee^* E)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\exists y C \quad \dfrac{\begin{array}{c}[C]^3, [\langle F \rangle]^4\\ \Sigma_1\\ \langle G \rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[C]^3, [\langle F \rangle]^4\\ \Sigma_2\\ \langle H \rangle\end{array}}{\langle G \wedge H \rangle}}{\langle G \wedge H \rangle}3}{\langle G \rangle} \quad (\wedge^* E)\dfrac{\begin{array}{c}[\langle F' \rangle]^4\\ \Sigma_3\\ \langle G \wedge H \rangle\end{array}}{\langle G \rangle}}{\langle G \rangle}4$$

Em seguida, aplicamos duas outras reduções permutativas para as aplicações de regras

$(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ em π', obtendo:

$$\pi'' = (\vee^*E)\dfrac{\langle F \vee F' \rangle \quad (\exists E)\dfrac{\exists y C \quad (\wedge^*E)\dfrac{(\wedge^*I)\dfrac{\begin{matrix}[C]^5, [\langle F \rangle]^6 \\ \Sigma_1 \\ \langle G \rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[C]^5, [\langle F \rangle]^6 \\ \Sigma_2 \\ \langle H \rangle\end{matrix}}{\langle G \wedge H \rangle}}{\langle G \rangle}}{\langle G \rangle}5 \quad (\wedge^*E)\dfrac{\begin{matrix}[\langle F' \rangle]^6 \\ \Sigma_3 \\ \langle G \wedge H \rangle\end{matrix}}{\langle G \rangle}}{\langle G \rangle}6$$

Finalmente, removemos o segmento maximal que contém uma única ocorrência da fórmula $\langle G \wedge H \rangle$, aplicando a redução $[(\wedge^* I); (\wedge^* E)]$, obtemos a derivação:

$$\rho = (\vee^*E)\dfrac{\langle F \vee F' \rangle \quad (\exists E)\dfrac{\exists y C \quad \begin{matrix}[C]^7, [\langle F \rangle]^8 \\ \Sigma_1 \\ \langle G \rangle\end{matrix}}{\langle G \rangle}7 \quad (\wedge^*E)\dfrac{\begin{matrix}[\langle F' \rangle]^8 \\ \Sigma_3 \\ \langle G \wedge H \rangle\end{matrix}}{\langle G \rangle}}{\langle G \rangle}8$$

Logo, como as subderivações Σ_1 e Σ_3 não são alteradas, $gr(\langle G \wedge H \rangle) > gr(\langle G \rangle)$ e todos os segmentos maximais acima de S têm grau menor, então o grau de todos os segmentos maximais que ocorrem em ρ é menor que o grau de S. Portanto, $r(\rho) < r(\pi)$.

Definição 6.1.2 *Seja π uma derivação em $ML(\Omega)$. π é uma derivação crítica se, e somente se, a premissa maior da última inferência de π pertence a um segmento maximal com grau igual ao de π e para toda subderivação σ de π, $g(\sigma) < g(\pi)$.*

Lema 6.1.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.*

A prova do lema 6.1.2 é similar à prova de lema 6.1.1 e é apresentada no apêndice.

A partir do lema 6.1.2 demonstraremos o resultado de normalização para $ML(\Omega)$, apresentado a seguir.

Teorema 6.1.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$. Então, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$.*

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$.

Se π não contém nenhuma ocorrência de segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$, então $\pi' = \pi$.

Caso contrário, pelo lema 6.0.1, π pode ser transformado em uma derivação ρ sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$.

Por indução sobre $r(\rho) = (g(\rho), n)$ mostraremos que podemos obter derivações sem ocorrências de segmentos maximais.

Passo base: $r(\rho) = (0.5, 1)$.

Mesma prova do passo base do teorema 6.1.1.

Hipótese de indução: O teorema é válido para toda ρ tal que $r(\rho) < (d, n)$.

Seja ρ uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$ tal que $r(\rho) = (d, n)$.

Tomemos uma subderivação crítica D em ρ tal que $g(D) = d$.

Pelo lema 6.1.2 a subderivação D poder ser transformada em uma subderivação D' tal que $r(D') < r(D)$.

- Suponhamos que $n = 1$.

  Logo, $S = A$, S pertence a D e todos os outros segmentos maximais de ρ têm grau menor que d.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d', n') com $d' < d$.

  Assim $r(\rho') = (d', n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$.

- Suponhamos que $n > 1$.

  Logo, temos que o segmento maximal de D é a seqüência $A_1, ..., A_m$ com $1 < m \leq n$.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d, n') com $n' < n$.

  Assim $r(\rho') = (d, n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$. ■

6.2 Normalização: Lógica Intuicionista + LG's

Nesta seção demonstraremos o resultado de normalização para o sistema $IL(\mathcal{B})$ e estenderemos este resultado para os sistemas $IL(\Omega)$.

No sistema de dedução natural para a Lógica Intuicionista [9, 10], as inferências da regra de absurdo (Abs) são limitadas a aplicações de (Abs) com fórmulas atômicas como conclusão. Assim, no sistema $IL(\mathcal{B})$ e nos sistemas $IL(\Omega)$ as aplicações de regra de absurdo (Abs) podem ser limitadas a aplicações de (Abs) com fórmulas atômicas ou fórmulas generalizadas como conclusão.

Proposição 6.2.1 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$. Então, π pode ser transformado em uma derivação π' de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$ tal que em π' todas as aplicações da regra de absurdo intuicionista (Abs) têm como conclusão uma fórmula atômica ou uma fórmula generalizada.*

A prova da proposição 6.2.1 é feita de modo similar à demonstração do resultado análogo para o sistema de dedução natural IL [9, 10] e é apresentada no apêndice.

Assim sendo, seja π uma derivação em $IL(\Omega)$ e seja α uma aplicação de regra em π que tem como premissa a conclusão de uma aplicação da regra (Abs)

$$\cfrac{(\alpha)\cfrac{(Abs)\cfrac{\Pi_1}{\perp}}{A}}{B}$$
$$\Pi_2$$

pela proposição 6.2.1 temos que α é uma aplicação de regra de introdução do sistema IL^* ou α é uma aplicação da (∇E). Logo, mostraremos a seguir que se α é uma aplicação da (∇E), então α precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Proposição 6.2.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$. Então, π pode ser transformado em uma derivação π' de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$ tal que em π' uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.*

A prova da proposição 6.2.2 é feita por indução sobre o comprimento de uma derivação e é apresentada no apêndice.

Por outro lado, em adição aos segmentos maximais do sistema IL^* envolvendo aplicações da regra (Abs), no sistema $IL(\mathcal{B})$ e nos sistemas $IL(\Omega)$ temos um tipo especial de segmento maximal, denominado (Abs) *segmento maximal*, que envolve aplicações das regras (Abs) e $(\Updownarrow)$.

Definição 6.2.1 *Seja π uma derivação em $IL(\Omega)$[4]. Um (Abs) segmento maximal é um par consistindo de uma fórmula generalizada $\nabla x A$, que é a conclusão de uma aplicação de (Abs), e uma fórmula marcada $\langle A[x/\_]\rangle$, que é a conclusão de uma aplicação de (∇E) e premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$. O grau de um (Abs) segmento maximal é $gr(\nabla x A)$.*

[4]Note que, se $\Omega = \emptyset$, então $IL(\Omega) = IL(\mathcal{B})$.

Exemplo 6.2.1 *Na derivação abaixo, $(\nabla vA, \langle A[v/\_]\rangle)$ é um (Abs) segmento maximal.*

$$
\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i\\ \Sigma'\\ B\end{array} \quad (\nabla E)\,\dfrac{(Abs)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \bot\end{array}}{\nabla vA}}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}[B]^i\\ \Sigma''\\ A\end{array}}{\langle B[v/\_]\rangle}\,(\Updownarrow)\, i
$$

6.2.1 Normalização para o Sistema $IL(\mathcal{B})$

Nesta seção demonstraremos o resultado de normalização para $IL(\mathcal{B})$.

Os tipos de segmentos maximais que podem ocorrer em uma derivação no sistema $IL(\mathcal{B}) = IL^* \cup (\mathcal{B})$ são:

- segmentos maximais de $ML(\mathcal{B})$, e
- segmentos maximais envolvendo aplicações da regra (Abs).

Agora, estenderemos a definição 6.0.4 para o sistema $IL(\mathcal{B})$.

Definição 6.2.2 *Seja π uma derivação em $IL(\mathcal{B})$. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, π não contém ocorrência de segmento maximal, nem de (Abs) segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$ ou de $(\exists E)$.*

Assim como em $ML(\mathcal{B})$, as aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e de $(\exists E)$ em $IL(\mathcal{B})$ podem ser eliminadas pelo lema 6.0.1.

Teorema 6.2.1 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\mathcal{B})$. Então, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $IL(\mathcal{B})$.*

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\mathcal{B})$.

Se π não contém nenhuma ocorrência de segmento maximal, nem de (Abs) segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$ e de $(\exists E)$, então $\pi' = \pi$.

Caso contrário, pela proposição 6.2.1, π pode ser transformado em uma derivação ρ de A a partir de Γ em $IL(\mathcal{B})$ tal que em ρ todas as aplicações da regra de absurdo intuicionista (Abs) têm como conclusão uma fórmula atômica ou uma fórmula generalizada.

Então, na derivação ρ temos apenas ocorrências de segmentos maximais dos tipos apresentados em $ML(\mathcal{B})$, (Abs) segmentos maximais ou aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e $(\exists E)$.

Pelo lema 6.0.1 e pela proposição 6.2.2, ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e $(\exists E)$ e (Abs) segmentos maximais.

Então, em ρ' temos apenas ocorrências de segmentos maximais de $ML(\mathcal{B})$, que podem ser eliminados, pelo Teorema 6.1.1, obtendo a derivação normal π'.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $IL(\mathcal{B})$.

■

6.2.2 Normalização para os Sistemas Específicos $IL(\Omega)$

Nesta seção demonstraremos o resultado de normalização para os sistemas de dedução natural $IL(\Omega)$.

Inicialmente examinaremos os segmentos maximais dos sistemas $IL(\Omega)$.

Como nos sistemas $ML(\Omega)$, as ocorrências dos segmentos maximais (com uma fórmula marcada como elemento da sequência) dependem das regras específicas em Ω^*. Assim, dado um sistema $IL(\Omega)$, além dos casos de segmentos maximais para o sistema $ML(\Omega)$, temos segmentos maximais que envolvem aplicações da regra (Abs).

Por outro lado, as aplicações supérfluas de $(\vee E)$, de $(\exists E)$ e de $(\vee^* E)$ podem ser eliminadas pelo lema 6.0.1.

Agora, estenderemos a definição 6.0.4 para o sistema $IL(\Omega)$.

Definição 6.2.3 *Seja π uma derivação em $IL(\Omega)$. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, π não contém ocorrência de segmento maximal, nem de (Abs) segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$, de $(\exists E)$ e de $(\vee^* E)$.*

Teorema 6.2.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$. Então, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$.*

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$.

Se π não contém nenhuma ocorrência de segmento maximal, nem de (Abs) segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$, de $(\exists E)$ e de $(\vee^* E)$, então $\pi' = \pi$.

Caso contrário, pela proposição 6.2.1, π pode ser transformado em uma derivação ρ de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$ tal que em ρ todas as aplicações da regra de absurdo intuicionista (Abs) têm como conclusão uma fórmula atômica ou uma fórmula generalizada.

Então, na derivação ρ temos apenas ocorrências de segmentos maximais dos tipos apresentados em $ML(\Omega)$, (Abs) segmentos maximais ou aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\vee^* E)$ e $(\exists E)$.

Pelo lema 6.0.1 e pela proposição 6.2.2, ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\vee^* E)$ e $(\exists E)$ e (Abs) segmentos maximais.

Então, em ρ' temos apenas ocorrências de segmentos maximais de $ML(\Omega)$, que podem ser eliminados, pelo Teorema 6.1.2, obtendo a derivação normal π'.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$.

■

6.3 Normalização: Lógica Clássica + LG's

Nesta seção, mostraremos o resultado de normalização para o sistema $CL(\mathcal{B})$, utilizando a estratégia de prova apresentada em [11, 12] para CL e estenderemos o resultado para os sistemas de dedução natural para as lógicas específicas de "geralmente" $CL(\Omega)$.

Para evitar as possíveis complicações na prova do resultado de normalização com respeito aos segmentos maximais envolvendo aplicações da regra (RaA), demonstraremos que as derivações em $CL(\mathcal{B})$ ou em um dado sistema $CL(\Omega)$ contêm no máximo uma aplicação da regra de absurdo clássico e esta aplicação é a última inferência da derivação ou precede uma aplicação da regra (∇E), que por sua vez, é a última inferência da derivação.

Inicialmente, tomemos um fragmento $L(\exists)$ da lógica clássica de primeira ordem que contém apenas $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$ como conectivos binários, $\bot$ como constante lógica e o quantificador existencial $\exists$. O quantificador universal é definido como: $\forall xA = \neg\exists x\neg A$.

O sistema de dedução natural para $L(\exists)$, denominado $CL^{\exists}$, é obtido a partir da exclusão das regras de inferência de introdução e eliminação para o quantificador $\forall$ do sistema de dedução natural CL^*. Podemos facilmente demonstrar que os sistemas $CL^{\exists}$ e CL^* são equivalentes.

Assim sendo, $CL^{\exists}(\mathcal{B})$ =$CL^{\exists}\cup(\mathcal{B})$ é o sistema de dedução natural para a lógica básica de "geralmente" e para as lógicas específicas teremos os sistemas $CL^{\exists}(\Omega)$ =$CL^{\exists}(\mathcal{B})\cup\Omega^*$.

Agora, seja π uma derivação em $CL^{\exists}(\mathcal{B})$ que contém uma única aplicação da regra de absurdo clássico que precede uma aplicação da regra de equivalência, que por sua vez, é a última inferência de π.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^j,[\neg B]^i\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array}}{B}\,i \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta,[B]^j\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

Logo, comutamos a ordem de aplicação das regras $(RaA);(\Updownarrow)$ obtendo a derivação ρ onde a aplicação da regra de absurdo clássico (RaA) é a última regra de inferência ou (RaA) precede uma aplicação da regra (∇E), que, por sua vez, é a última regra de inferência da derivação.

$$\rho = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{(\bot^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^i, \begin{array}{c}[\neg\nabla xB]^j\\ \Sigma\\ \neg B\end{array}\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad (Abs)\dfrac{[\bot]^i}{A}}{\langle\bot\rangle}\,i}{\bot}}{\nabla xB}}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

Porém, $(\bot^* E)$ não é uma regra dos sistema $CL^{\exists}(\mathcal{B})$ e $\neg B$ não é derivável a partir de $\neg\nabla xB$ em $CL^{\exists}(\mathcal{B})$.

Portanto, para este propósito alteraremos a regra de equivalência do sistema $CL^{\exists}(\mathcal{B})$ para:

$$(\Updownarrow)^*\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg A]^i\\ \Sigma_1\\ \neg B\end{array} \qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \begin{array}{c}\Delta,[\neg B]^i\\ \Sigma_2\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i$$

obtendo o sistema $CL(\mathcal{B})^*$.

Assim, transformamos a derivação π em:

$$\pi' = (\Updownarrow)^*\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta,[\neg A]^i,[\neg(\neg B)]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\neg B}\,j \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma,[\neg B]^i\\ \Sigma_1\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i$$

e posteriormente eliminamos a aplicação da regra de absurdo clássico (RaA), obtendo a seguinte derivação:

$$\pi'' = (\Updownarrow)^* \dfrac{(\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta,\quad [\neg A]^i,\quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{[B]^l \quad [\neg B]^k}{\bot}}{\neg(\neg B)}k \\ \Sigma'_2 \\ \bot\end{array}}{\neg B}l \qquad \begin{array}{c}\Pi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma,[\neg B]^i\\ \Sigma'_1\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}i$$

No lema a seguir mostraremos que os sistemas $CL(\mathcal{B})$ e $CL(\mathcal{B})^*$ têm o mesmo poder dedutivo.

Lema 6.3.1 *Seja* Γ *um conjunto de fórmulas e seja* A *uma fórmula em* L^{∇^*}*. Então,*

$$\Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})} A \textit{ se, e somente se, } \Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})^*} A$$

A prova do lema 6.3.1 é apresentada no apêndice.

Assim, estendemos $CL(\mathcal{B})^*$ para os sistemas de dedução natural para as lógicas específicas de "geralmente" do seguinte modo: $CL(\Omega)^* = CL(\mathcal{B})^* \cup \Omega^*$

onde $\Omega^* \subseteq \{(\top^* I), (\bot^* E), (\wedge^* I), (\wedge^* E), (\vee^* I), (\vee^* E), (\neg^* I), (\neg^* E)\}$

Teorema 6.3.1 *Seja* π *uma derivação de* A *a partir de* Γ *em* $CL(\Omega)^*$*. Então,* π *pode ser transformado em uma derivação* π' *de* A *a partir de* Γ *em* $CL(\Omega)^*$ *tal que* π' *contém no máximo uma aplicação* (α) *de regra de absurdo clássico e, caso esta aplicação ocorra,* (α) *é a última inferência de* π' *ou* (α) *precede uma aplicação da regra* (∇E) *que é a última inferência de* π'*.*

A prova do teorema 6.3.1 é feita por indução sobre o comprimento da derivação π e é apresentada no apêndice.

O teorema 6.3.1 e a proposição 6.2.2 irão ser úteis na normalização de derivações em $CL(\Omega)^{*}$[5] A subderivação localizada acima das aplicações das regras (RaA) e (Abs) vai ser normalizada como nos sistemas de dedução para as LG's que contêm a lógica minimal como lógica subjacente.

6.3.1 Normalização para o Sistema $CL(\mathcal{B})^*$

Nesta seção demonstraremos o resultado de normalização para o sistema $CL(\mathcal{B})^*$.

Os tipos de segmentos maximais que podem ocorrer em uma derivação no sistema $CL(\mathcal{B})^*$ são:

- segmentos maximais envolvendo aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$, (∇E), (∇I) e (Abs), e
- segmentos maximais envolvendo aplicações da regra (RaA).

Assim, em adição ao segmentos maximais do sistema de dedução natural $CL^{\exists}$ envolvendo aplicações da regra (RaA), no sistema $CL(\mathcal{B})^*$ temos um tipo especial de segmento maximal, denominado (RaA) *segmento maximal*, que envolve aplicações das regras (RaA) e $(\Updownarrow)^*$.

Definição 6.3.1 *Seja π uma derivação em $CL(\mathcal{B})^*$. Então, um (RaA) segmento maximal é um par consistindo de uma fórmula generalizada ∇xA, que é a conclusão de uma aplicação de (RaA), e uma fórmula marcada $\langle A[x/\_]\rangle$, que é a conclusão de uma aplicação de (∇E) e premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)^*$. O grau de um (RaA) segmento maximal é $gr(\nabla xA)$.*

Exemplo 6.3.1 *Na derivação abaixo, $(\nabla xA, \langle A[x/_]\rangle)$é um (RaA) segmento maximal.*

[5] Note que se $\Omega^* = \emptyset$, então $CL(\Omega)^*$= $CL(\mathcal{B})^*$.

$$
(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[\neg A]^i\\ \Sigma_1\\ \neg B\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Phi,[\neg\nabla x A]^j\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x A}\,j}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{matrix}\Delta,[\neg B]^i\\ \Sigma_2\\ \neg A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i
$$

Definição 6.3.2 *Seja π uma derivação em $CL(\mathcal{B})^*$. π é uma derivação crítica se, e somente se, π não possui ocorrências de segmentos maximais envolvendo aplicações das regras (RaA) e (Abs) e a premissa maior da última aplicação de π pertence a um segmento maximal com grau igual ao de π e para toda subderivação ρ de π, $g(\rho) < g(\pi)$.*

Lema 6.3.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.*

A prova do lema 6.3.2 é apresentada no apêndice.

Agora estenderemos a definição 6.0.4 para o sistema $CL(\mathcal{B})^*$.

Definição 6.3.3 *Seja π uma derivação em $CL(\mathcal{B})^*$. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, π não contém ocorrência de segmento maximal, nem de (RaA) segmento maximal, nem de (Abs) segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$ e de $(\exists E)$.*

Assim como em $IL(\mathcal{B})$, as aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e de $(\exists E)$ em $CL(\mathcal{B})^*$ podem ser eliminadas pelo lema 6.0.1.

Lema 6.3.3 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$. Se em π não temos ocorrências de segmentos maximais envolvendo aplicações das regras (RaA) e (Abs), então existe uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.*

A prova do lema 6.3.3 é apresentada no apêndice.

A partir do lema 6.3.3 demonstraremos o resultado de normalização para o sistema $CL(\mathcal{B})^*$, apresentado a seguir.

Teorema 6.3.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$. Então, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.*

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Eliminamos as aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e de $(\exists E)$ de π pelo lema 6.0.1, obtendo a derivação ρ de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Daí, pelo teorema 6.3.1, ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$ tal que em ρ' ocorre no máximo uma aplicação (α) de regra de absurdo clássico e, caso esta aplicação ocorra, (α) é a última inferência de ρ' ou (α) precede uma aplicação da regra (∇E), que é a última inferência de ρ'.

$$\text{Logo, } \rho' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg \nabla x A]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{\nabla x A}i}{\langle A[x/\_]\rangle} \text{ ou } \rho' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{A}$$

Então, em Σ temos apenas segmentos maximais envolvendo aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$, (∇E), (∇I) e (Abs).

Pela proposição 6.2.2 a derivação Σ pode ser transformado em uma derivação Σ' tal que em Σ' uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa a conclusão de uma aplicação da regra (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$ ou $(\exists E)$.

Logo em Σ' existem apenas segmentos maximais envolvendo aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$,

(∇E) e (∇I).

Assim, pelo lema 6.3.3 a derivação Σ' pode ser normalizada, obtendo a derivação Σ''.

Então substituindo Σ por Σ'' na derivação ρ' obtemos a derivação normal π' de A a partir de Γ.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

∎

6.3.2 Normalização para os Sistemas Específicos $CL(\Omega)^*$

Nesta seção demonstraremos o resultado de normalização para os sistemas de dedução natural $CL(\Omega)^*$.

Como nos sistemas $IL(\Omega)$, as ocorrências dos segmentos maximais (com uma fórmula marcada como elemento da seqüência) dependem das regras específicas em Ω^*. Logo, em adição aos segmentos maximais de $IL(\Omega)$ e $CL(\mathcal{B})^*$, em um sistema $CL(\Omega)^*$ temos os segmentos maximais envolvendo aplicações da regra (RaA).

Definição 6.3.4 *Seja π uma derivação em $CL(\Omega)^*$. π é uma derivação crítica se, e somente se, π não possui ocorrências de segmentos maximais envolvendo aplicações das regras (RaA) e (Abs) e a premissa maior da última aplicação de π pertence a um segmento maximal com grau igual ao de π e para toda subderivação ρ de π, $g(\rho) < g(\pi)$.*

Lema 6.3.4 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.*

A prova do lema 6.3.4 é apresentada no apêndice.

Agora estenderemos a definição 6.3.3 para os sistemas $CL(\Omega)^*$.

Definição 6.3.5 *Seja π uma derivação em $CL(\Omega)^*$. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, π não contém ocorrência de segmento maximal, nem de (RaA) segmento* *maximal, nem de (Abs) segmento maximal e nem aplicação supérflua de* $(\vee E)$*, de* $(\exists E)$ *e de* $(\vee^* E)$*.*

Lema 6.3.5 *Seja* π *uma derivação de* A *a partir de* Γ *em* $CL(\Omega)^*$*. Se em* π *não temos ocorrências de segmentos maximais envolvendo aplicações das regras (Abs) e (RaA), então existe uma derivação normal de* A *a partir de* Γ *em* $CL(\Omega)^*$*.*

A prova do lema 6.3.5 é apresentada no apêndice.

A partir do lema 6.3.5 demonstraremos o resultado de normalização para o sistema $CL(\Omega)^*$, apresentado a seguir.

Teorema 6.3.3 *Seja* π *uma derivação de* A *a partir de* Γ *em* $CL(\Omega)^*$*. Então, existe uma derivação normal* π' *de* A *a partir de* Γ *em* $CL(\Omega)^*$*.*

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

Eliminamos as aplicações supérfluas de $(\vee E)$, de $(\vee^* E)$ e de $(\exists E)$ de π pelo lema 6.0.1, obtendo a derivação ρ de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

Daí, pelo teorema 6.3.1, ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$ tal que em ρ' ocorre no máximo uma aplicação (α) de regra de absurdo clássico e, caso esta aplicação ocorra, (α) é a última inferência de ρ' ou (α) precede uma aplicação da regra (∇E), que é a última inferência de ρ'.

Logo, $\rho' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\nabla x A]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle}$ ou $\rho' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{A}$

Então, em Σ temos apenas segmentos maximais envolvendo aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$,

(∇E), (∇I), (Abs) e regras específicas.

Pela proposição 6.2.2 a derivação Σ pode ser transformado em uma derivação Σ' tal que em Σ' uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa a conclusão de uma aplicação da regra (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Logo em Σ' existem apenas segmentos maximais envolvendo aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$, (∇E) e (∇I) e regras específicas.

Assim, pelo lema 6.3.5 a derivação Σ' pode ser normalizada, obtendo a derivação Σ''.

Então substituindo Σ por Σ'' na derivação ρ' obtemos a derivação normal π' de A a partir de Γ.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

■

6.3.3 Estrutura de uma derivação normal

Nesta seção examinaremos a estrutura de uma derivação normal nos diferentes sistemas de dedução natural para as LG's.

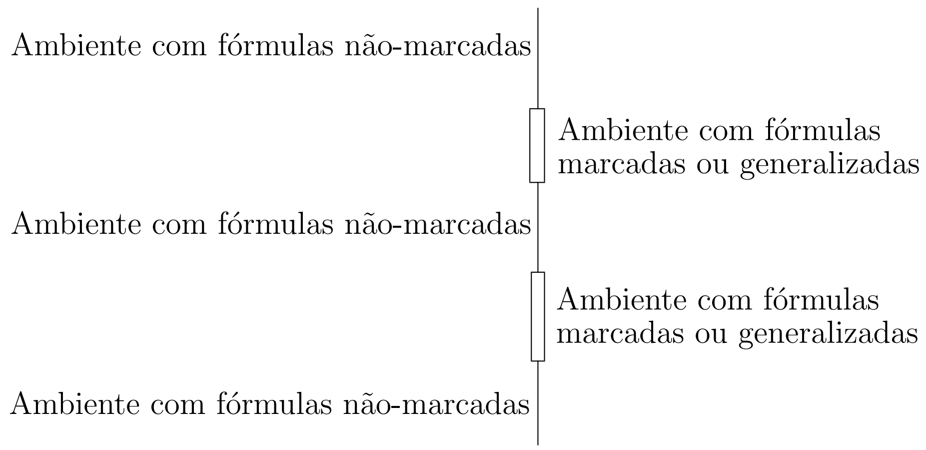
Em [9] tem-se o resultado de existência de fórmula mínima para derivações normais em ND, ou seja, em um dado caminho existe uma ocorrência de uma fórmula A (denominada de fórmula mínima) tal que todas as ocorrências de fórmulas acima de A são premissas de aplicações de regras de eliminação e todas as ocorrências de fórmulas abaixo de A (exceto a última) são premissas de aplicações de regras de introdução.

Demonstraremos um resultado análogo à existência de fórmula mínima para os sistemas $ND(\Omega)$. Provaremos que em um dado caminho de uma derivação normal em $ND(\Omega)$ existe um ambiente (denominada de região marcada) tal que todas as ocorrências de fórmulas acima da região marcada são premissas de aplicação de regras de eliminação e todas as ocorrências de fórmulas abaixo da região marcada (exceto a última) são premissas de aplicações de regras de introdução.

Inicialmente, dividiremos os caminhos de uma derivação em $ND(\Omega)$ em dois ambientes:

- um ambiente que contém apenas fórmulas não-marcadas, e
- um ambiente que contém apenas fórmulas marcadas ou generalizadas.

Então, dada uma derivação π em $ND(\Omega)^*$, dividindo os caminhos de π nos tipos de ambientes descritos acima, um caminho na derivação π terá a seguinte configuração:



Agora, demonstraremos que uma aplicação de uma regra de introdução de ND^* não precede uma aplicação de regra de eliminação de ND^* em um caminho de uma derivação normal em $ND(\Omega)$.

Lema 6.3.6 *Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$. Então, nenhuma aplicação de regra de introdução de ND^* precede uma aplicação de regra de eliminação de ND^* em um caminho de π.*

A prova do lema 6.3.6 é apresentada no apêndice.

Então, a partir do fato de que as aplicações de regras de introdução de ND^* não podem ter como conclusão fórmulas marcadas ou generalizadas e pelo lema 6.3.6 temos que um caminho em uma derivação normal terá a seguinte configuração:

fórmulas não-marcadas que são premissas de regras de eliminação de ND^*	
	Ambiente com fórmulas marcadas ou generalizadas
fórmulas não-marcadas que são premissas de regras de introdução de ND^*	

Agora, examinaremos a estrutura do ambiente que contém apenas fórmulas marcadas ou generalizadas.

Os diferentes sistemas de dedução natural para as LG's contêm um regra de substituição de equivalência, denominada de regra de equivalência ($\Updownarrow$), que não possui as características originais das regras de introdução e eliminação de ND^*. Notemos que, diferentemente das regras de introdução e eliminação de ND^*, a regra ($\Updownarrow$) não elimina ou introduz conectivos ou quantificadores, isto é, em uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) efetuamos a substituição de uma fórmula A por uma fórmula B equivalente.

Então, a regra ($\Updownarrow$) é classificada como uma regra de eliminação da fórmula A e introdução da fórmula B. Daí, uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) divide o ambiente que contém apenas fórmulas marcadas ou generalizadas de um caminho em dois sub-ambientes, denominados de *subcaminhos marcados.*

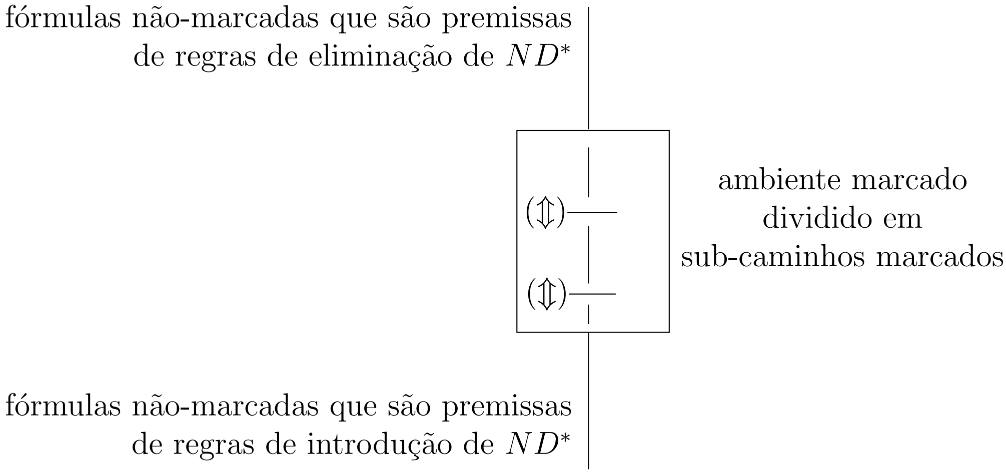
Definição 6.3.6 *Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$ e seja $\mathcal{C}$ um caminho em π. Então, um subcaminho marcado de $\mathcal{C}$ é uma sequência de ocorrências de fórmulas $A_1, ..., A_n$ em $\mathcal{C}$ tal que A_1 é a conclusão de uma aplicação de (∇E) ou $(\Updownarrow)$ e A_n é premissa maior de uma aplicação de $(\Updownarrow)$ ou (∇I).*

Analogamente ao lema 6.3.6, mostraremos que nos sub-caminhos marcados em um caminho $\mathcal{C}$ de uma derivação normal, uma aplicação de regra de introdução não precede uma aplicação de regra de eliminação.

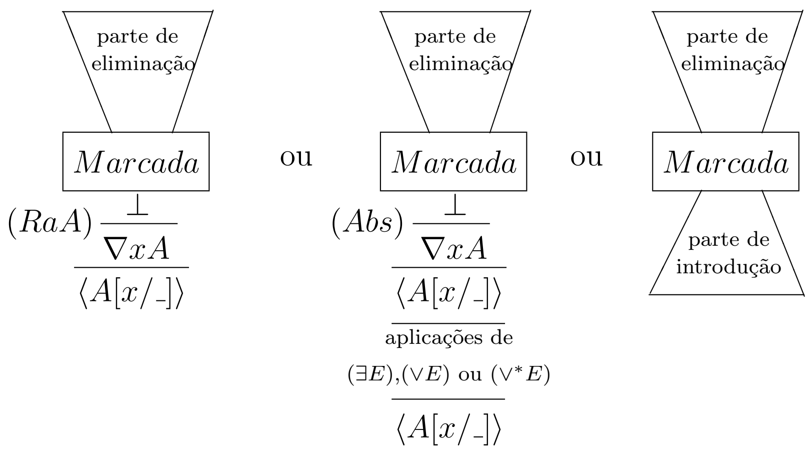
Lema 6.3.7 *Seja* π *uma derivação normal em* $ND(\Omega)$ *e seja* $\mathcal{C}$ *um caminho de* π*. Então, nenhuma aplicação de regra de introdução precede uma aplicação de regra de eliminação em um subcaminho marcado de* $\mathcal{C}$*.*

A prova do lema 6.3.7 é apresentada no apêndice.

Assim, um caminho em uma derivação normal terá a seguinte configuração:



Então, a partir do teorema 6.3.1, da proposição 6.2.2 e da configuração dos caminhos em uma derivação normal, apresentada anteriormente, temos que a estrutura de uma derivação normal em $ND(\Omega)$ é a seguinte:



Cada uma das partes acima pode ser vazia.

6.3.4 A consistência dos sistemas para as LG's

Nesta seção demonstraremos que os diferentes sistemas de dedução natural para as LG's são consistentes.

A estratégia usada para tal é "desmarcar" as fórmulas de L^{∇^*} de tal forma que uma fórmula A é derivável a partir do conjunto de fórmulas Γ em $ND(\Omega)$ se, e somente se, a sua tradução é derivável em ND a partir da tradução de Γ.

Inicialmente, provaremos que toda derivação em $ND(\Omega)$ pode ser transformada em uma derivação em ND a partir da seguinte tradução.

Definição 6.3.7 *Seja φ uma fórmula em L^{∇^*} e seja c uma constante da linguagem. Então, traduz-se φ denotado por $(\varphi)_c$ do seguinte modo:*

- *se $\varphi = \langle\theta[x/\_]\rangle$, então $(\varphi)_c = (\theta[x/\_][\_/c])_c$;*
- *se $\varphi = \nabla x\theta$, então $(\varphi)_c = (\theta[x/c])_c$;*
- *se $\varphi = Qx\theta$, então $(\varphi)_c = Qx(\theta)_c$ onde $(Q \in \{\forall, \exists\})$;*
- *se $\varphi = \neg\theta \Rightarrow$, então $(\varphi)_c = \neg(\theta)_c$;*
- *se $\varphi = \theta_1 * \theta_2$, então $(\varphi)_c = (\theta_1)_c * (\theta_2)_c$ onde $(* \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\})$;*
- *se φ é uma fórmula atômica ou $\perp$, então $(\varphi)_c = \varphi$;*

Estendemos a definição 6.3.7 para um conjunto de fórmulas de maneira usual, ou seja, se $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$, então $(\Gamma)_c = \{(\gamma_1)_c, ..., (\gamma_n)_c\}$.

O teorema a seguir prova que toda derivação em $ND(\Omega)$ pode ser transformada em uma derivação em ND.

Lema 6.3.8 *Seja A uma fórmula em L^{∇^*} e seja Γ um conjunto de fórmulas em L^{∇^*}. Se $\Gamma \vdash_{ND(\Omega)} A$ e c é uma constante de L^{∇^*} que não ocorre na derivação de A a partir de Γ, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A)_c$.*

A prova do lema 6.3.8 é apresentada no apêndice.

Teorema 6.3.4 *Seja $ND(\Omega)$ um sistema de dedução natural. Então, $ND(\Omega)$ é consistente; em particular, $\perp$ não é derivável em $ND(\Omega)$.*

Prova: Seja $ND(\Omega)$ um sistema de dedução natural.

Suponhamos que $\vdash_{ND(\Omega)} \perp$. Então pelo lema 6.3.8 temos que $\vdash_{ND} (\perp)_c$.

Como $(\perp)_c = \perp$, então $\vdash_{ND} \perp$.

Absurdo, pois ND é consistente.

Portanto, $\nvdash_{ND(\Omega)} \perp$.

■

Capítulo 7

Cálculo de Seqüentes

Neste capítulo apresentaremos sistemas dedutivos no estilo de cálculo de seqüentes para as lógicas de "geralmente". Enfatizaremos o tratamento das fórmulas generalizadas e marcadas.

Como nos sistemas de dedução natural, inicialmente tomamos um cálculo de sequentes para a lógica subjacente de primeira ordem (FOL) e estendemos este cálculo para tratar as fórmulas generalizadas e as fórmulas marcadas. A estrutura de uma derivação é como definido no capítulo 2 seção 2.2.

Os cálculos de seqüentes para as LG's terão dois parâmetros:

- um cálculo de seqüentes SC para FOL subjacente (conservando seus conectivos e quantificadores originais) apresentado no capítulo 2 seção 2.2; e
- uma lógica particular de "geralmente".

Mais precisamente, consideraremos a Lógica Clássica, Intuicionista ou Minimal como lógicas subjacentes de primeira ordem [8]. Teremos as seguintes versões de cálculos de seqüentes SC para as lógicas subjacentes de primeira ordem:

(ML) Lógica Minimal: $SCML$,

(IL) Lógica Intuicionista: $SCIL$,

(CL) Lógica Clássica: $SCCL$;

Estenderemos os cálculos SC para tratar fórmulas generalizadas e marcadas, obtendo assim, cálculos de seqüentes para as diversas lógicas de “geralmente”.

Um seqüente S em L^{∇^*} tem a seguinte forma:

$$A_1, ..., A_n \Rightarrow B_1, ..., B_m$$

onde $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m$ são fórmulas (marcadas ou não-marcadas).

O sequente S tem o mesmo significado que a fórmula:

$$T(A_1) \wedge ... \wedge T(A_n) \rightarrow T(B_1) \vee ... \vee T(B_m)$$

onde T é a tradução que desmarca as fórmulas marcadas como definida no capítulo 5 seção 5.1.

Note que necessitamos desmarcar as fórmulas marcadas do seqüente S com a tradução T para obtermos a fórmula que corresponde ao seu significado devido ao fato que, uma conjunção, uma disjunção ou uma implicação que contêm uma fórmula marcada como componente não é uma fórmula da linguagem L^{∇^*}.

7.1 Cálculos de Seqüentes para Lógica Básica de “Geralmente”

Nesta seção apresentaremos as regras dos cálculos de seqüentes para a lógica básica de “geralmente” (complexos sem restrição).

As regras do cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{B})$ para as fórmulas generalizadas e fórmulas marcadas localizadas no antecedente e no conseqüente de um seqüente são obtidas a partir da tradução das regras do sistema de dedução natural $ND(\mathcal{B})$, ou seja, de modo análogo à lógica de primeira ordem as regras de introdução (eliminação) do sistema de dedução natural correspondem as regras do cálculo de seqüentes para o conseqüente (antecedente).

Assim sendo, as regras de introdução e eliminação para ∇ em $ND(\mathcal{B})$ correspondem respectivamente às regras (∇c) e (∇a), apresentadas a seguir.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla y A}(\nabla c) \qquad \frac{\langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\nabla y A, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\nabla a)$$

restrição das regras (∇c) e (∇a): $y \notin occ[A]$

Por outro lado, a regra de equivalência de $ND(\mathcal{B})$

$$(\Updownarrow)\ \frac{\begin{matrix}\Gamma_1,\ [A]^i \\ \Sigma_1 \\ B\end{matrix} \qquad \langle A[v/\_]\rangle \qquad \begin{matrix}\Gamma_2,\ [B]^i \\ \Sigma_2 \\ A\end{matrix}}{\langle B[v/\_]\rangle}\ i$$

que intuitivamente é uma regra de eliminação da fórmula marcada $\langle A[v/\_]\rangle$ e uma regra de introdução da fórmula marcada $\langle B[v/\_]\rangle$ é traduzida na seguinte regra:

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow)$$

restrição da regra $(\Updownarrow)$: $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$

Assim, obtemos o cálculo de seqüentes

$$SC(\mathcal{B}) = SC \cup \{(\nabla a), (\nabla c), (\Updownarrow)\}^1$$

para a lógica básica de "geralmente" (onde Γ e Δ são seqüências de fórmulas).

Demonstraremos a seguir que os cálculos de seqüente $SC(\mathcal{B})$ são equivalentes a lógica básica de "geralmente" de modo similar ao teorema 5.1.1.

Teorema 7.1.1 *Sejam Γ e Δ sequências de fórmulas em L^{∇^*} e seja $\Phi \subseteq [\mathcal{B}]$. Então, o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\mathcal{B})$ se, e somente se, $T(\Gamma), \Phi \Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em SC.*

[1]Note que, $SC \in \{SCML, SCIL, SCCL\}$ e se $SC = SCML$ ou $SC = SCIL$, então Δ é uma seqüência vazia.

Para demostrarmos que se o seqüente $T(\Gamma), \Phi \Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em SC, então o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\mathcal{B})$ basta mostramos que o seqüente $\Rightarrow B$ é derivável em $SC(\mathcal{B})$ (onde B é uma instanciação de um esquema em Φ). Por outro lado, a prova de que se o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\mathcal{B})$, então o seqüente $T(\Gamma), \Phi \Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em SC é feita por indução sobre o comprimento de uma derivação.

A prova do teorema 7.1.1 é apresentada no apêndice.

7.2 Cálculos de Seqüentes para as Lógicas Específicas de "Geralmente"

Nesta seção apresentaremos os cálculos de seqüentes para as diversas lógicas específicas de "geralmente".

Um cálculo de seqüentes para uma lógica específica de "geralmente" $\mathcal{L}$ é obtido a partir da adição de regras ao cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{B})$ que correspondem à tradução das regras do sistema de dedução natural para $\mathcal{L}$ em regras no estilo de cálculo de seqüentes de modo que, as regras de introdução (eliminação) do sistema de dedução natural para $\mathcal{L}$ correspondem às regras do cálculo de seqüentes para o conseqüente (antecedente).

Para introduzir a idéia básica, considere o sistema de dedução natural $ND(\Omega)$ para uma lógica específica de "geralmente" $\mathcal{L}$ que contém a regra:

$$(\wedge^* I)\frac{\langle A\rangle \quad \langle B\rangle}{\langle A \wedge B\rangle}.$$

A regra $(\wedge^* I)$ pode ser formulada como a seguinte regra no estilo de cálculo de seqüente:

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \langle A\rangle \quad \Gamma_2 \Rightarrow \langle B\rangle}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \langle A \wedge B\rangle}(\nabla\wedge)$$

A regra $(\nabla\wedge)$ pode ser facilmente reformulada como a regra $(\wedge^* c)$ para introdução da conjunção para fórmulas marcadas no conseqüente.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B \rangle}(\wedge^* c)$$

De modo análogo, podemos obter regras correspondentes às regras específicas em 5.2. Considere as seguintes regras operacionais para fórmulas marcadas (Γ e Δ são seqüências de fórmulas):

$$\frac{\langle A \to A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\top^* a) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \bot \rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\bot^* c)$$

$$\frac{\langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\langle A \wedge B \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad \frac{\langle B \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\langle A \wedge B \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge^* a) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B \rangle}(\wedge^* c)$$

$$\frac{\langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \langle B \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\langle A \vee B \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\vee^* a) \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \vee B \rangle}(\vee^* c)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle}{\langle (\neg A) \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\neg^* a) \qquad \frac{\langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle (\neg A) \rangle}(\neg^* c)$$

Note que, se $SC = SCML$ ou $SC = SCIL$, então a seqüência Δ nas regras $(\bot^* c)$, $(\wedge^* c)$, $(\vee^* c)$, $(\neg^* a)$ e $(\neg^* c)$ é a seqüência vazia e nas regras $(\top^* a)$, $(\wedge^* a)$ e $(\vee^* a)$ a seqüência Δ é uma seqüência contendo no máximo uma fórmula.

Um cálculo de seqüentes $SC(\Omega)$ para uma lógica específica de "geralmente" consiste em uma extensão de $SC(\mathcal{B})$ pelas regras

$$\Omega^* \subseteq \{(\top^* a), (\bot^* c), (\wedge^* a), (\wedge^* c), (\vee^* a), (\vee^* c), (\neg^* a), (\neg^* c)\}$$

que correspondem à tradução das regras do sistema de dedução natural $ND(\Omega)$. Assim sendo, o cálculo de seqüentes $SC(\Omega)$ é obtido adicionando-se as regras em Ω^* a $SC(\mathcal{B})$: $SC(\Omega) = SC(\mathcal{B}) \cup \Omega^*$.

Por exemplo, o sistema de dedução natural para a lógica dos filtros próprios $ND(\mathcal{F})$ contém as regras específicas $(\top^* I)$, $(\bot^* E)$, $(\wedge^* I)$ e $(\wedge^* E)$. Então, o cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{F})$ $=SC(\mathcal{B})\cup\{(\top^* a), (\bot^* c), (\wedge^* a), (\wedge^* c)\}$

Teorema 7.2.1 *Sejam Γ e Δ seqüências de fórmulas em L^{∇^*} e seja $\Phi \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$. Então, o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\Omega)$ se, e somente se, o seqüente $T(\Gamma), \Phi \Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em SC.*

Similarmente como no teorema 7.1.1, na direção ($\Leftarrow$) é suficiente mostrar que o seqüente $\Rightarrow B$ é derivável em $SC(\Omega)$ onde B é uma instância de um esquema de $\mathcal{B}(\Omega)$. Na direção ($\Rightarrow$), por indução sobre o comprimento de uma derivação, podemos mostrar que dada uma derivação Π em $SC(\Omega)$ teremos uma derivação correspondente $T(\Pi)$ em SC.

A prova do teorema 7.2.1 é apresentada no apêndice.

Exemplo 7.2.1 *Derivação do seqüente $\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle$ no cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{F})$.*

Seja

$$\Pi_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(Pa) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}(\to a)}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow B}(\forall a)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow B}(Pa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A \wedge B}(\wedge c)$$

e seja

$$\Pi_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(Pa)}{A \wedge B, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(\wedge a)$$

Então, temos a seguinte derivação para o seqüente $\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle$.

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \qquad \dfrac{\langle B[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}(\wedge^* a)}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}(corte)$$

Capítulo 8

Eliminação do corte

Neste capítulo apresentaremos a prova do resultado de eliminação do corte (Hauptsatz) para os cálculos de seqüentes para as LG's.

O resultado de eliminação do corte garante a existência de derivações sem ocorrência de aplicação da regra do corte. Inicialmente, como em [8], introduzimos uma nova regra de inferência, denominada de *Mix*, que corresponde a uma nova versão da regra do corte.

A regra Mix:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Δ e Θ são seqüências de fórmulas em L^{∇^*} que contêm pelo menos uma ocorrência da fórmula M (denominada de *fórmula mix*) e Δ^* e Θ^* são seqüências de fórmulas obtidas a partir de Δ e Θ, respectivamente, em que todas as ocorrências da fórmula M são excluídas. $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e $\Theta \Rightarrow \Lambda$ são denominados, respectivamente, de seqüente superior esquerdo e seqüente superior direito da regra (Mix).

Exemplo 8.0.2 *Exemplo de uma aplicação da regra (Mix):*

$$\frac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow A, B, C, B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ B, D \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, D \Rightarrow A, C, \Lambda}(Mix)$$

Na aplicação acima da regra (Mix), B é a fórmula mix.

Mostraremos a seguir que o cálculo de seqüentes SC^* obtido a partir da substituição da regra do corte pela regra (Mix) em SC e o cálculo de seqüentes SC têm o mesmo poder dedutivo [9].

Lema 8.0.1 *Seja* Γ *e* Δ *seqüências de fórmulas em* L^{∇^*}*. Então, o seqüente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *é derivável em* SC *se, e somente se, o sequente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *é derivável em* SC^**.*

Para demonstrarmos o lema 8.0.1 basta mostrarmos que a regra $(corte)$ é derivável em SC^* e que a regra (Mix) é derivável em SC. A prova do lema 8.0.1 é apresentada no apêndice.

Assim sendo, $SC^*(\mathcal{B}) = SC^* \cup \{(\nabla a), (\nabla c), (\Updownarrow)\}$ e $SC^*(\Omega)$[1] $= SC^*(\mathcal{B}) \cup \Omega^*$.

Uma derivação π é denominada de *derivação especial* se π contém uma única aplicação α da regra (Mix) e α é a última inferência de π.

Exemplo 8.0.3 *Substituindo a plicação da regra* $(corte)$ *do exemplo 7.2.1 por uma aplicação da regra* (Mix) *obtemos a derivação* π *abaixo, que é uma derivação especial.*

$$\pi = \cfrac{\cfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \qquad \cfrac{\langle B[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}(\wedge^* a)}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}(Mix)$$

onde

$$\Pi_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(Pa) \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}(\to a)}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow B}(\forall a)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow B}(Pa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A \wedge B}(\wedge c)$$

$$\Pi_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(Pa)}{A \wedge B, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(\wedge a)$$

[1]Note que, $SC^*(\Omega) = SC^*(\mathcal{B})$ se $\Omega^* = \emptyset$.

A seguir definiremos as noções de grau e rank de uma derivação especial.

Definição 8.0.1 *Seja π uma derivação especial em $SC^*(\Omega)$. Então, o grau de π (denotado por $gr(\pi)$) é o grau da fórmula mix, ou seja, $gr(\pi) = gr(M)$ onde M é a fórmula mix em π.*

Definição 8.0.2 *Seja π uma derivação especial em $SC^*(\Omega)$. Então, o rank de π, denotado por $r(\pi)$, é igual à soma do rank esquerdo com o rank direiro.*

- *o rank esquerdo de π é o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ de π, tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no conseqüente.*

- *o rank direito de π é o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ de π, tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente.*

Note que, o menor rank possível é 2.

Exemplo 8.0.4 *A derivação do exemplo 8.0.3 é uma derivação de rank 2 e $gr(\pi) = gr(\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle)$.*

8.1 Eliminação do corte para $SC(\mathcal{B})$

Nesta seção apresentaremos o resultado de eliminação do corte para os cálculos de seqüentes $SC(\mathcal{B})$ ($SC \in \{SCML, SCIL, SCCL\}$).

Primeiramente, examinaremos as aplicações da regra (Mix) nas derivações em $SC^*(\mathcal{B})$ e posteriormente mostraremos que as aplicações da regra (Mix) podem ser eliminadas.

Nos cálculos de seqüentes $SC^*(\mathcal{B})$, além dos casos em que a fórmula mix é uma fórmula clássica, temos os seguintes casos de fórmula mix:

- a fórmula mix é uma fórmula generalizada; ou
- a fórmula mix é uma fórmula marcada.

Nos casos em que a fórmula mix é uma fórmula generalizada temos os seguintes casos de aplicação da regra (Mix).

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é um seqüente inicial.

$$\dfrac{\nabla xA \Rightarrow \nabla xA \qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\nabla xA, \Theta^* \Rightarrow \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é um seqüente inicial.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \nabla xA \Rightarrow \nabla xA}{\Gamma \Rightarrow \Delta^*, \nabla xA}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo ou direito da aplicação da regra (Mix) é obtido a partir de aplicação de regra estrutural.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

  Na derivação acima, as seqüências de fórmulas Θ^* e Δ^* são obtidas a partir da exclusão da fórmula mix ∇xA (fórmula generalizada) das seqüências Θ e Δ, respectivamente.

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra (∇c) e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra (∇a).

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla xA}(\nabla c) \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle A[x/\_]\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\nabla xA, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\nabla a)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Por outro lado, se a fórmula mix é uma fórmula marcada temos os seguintes casos de aplicação da regra (Mix).

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é um seqüente inicial.

$$\dfrac{\langle A[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[x/\_]\rangle \qquad \begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é um seqüente inicial.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \langle A[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[x/\_]\rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta^*, \langle A[x/\_]\rangle}(Mix)$$

- Tanto o seqüente superior esquerdo como o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é obtido a partir de aplicação de regra estrutural.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}}{}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

  Na derivação acima, as seqüências de fórmulas Θ^* e Δ^* são obtidas a partir da exclusão da fórmula mix $\langle A[x/\_]\rangle$ (fórmula marcada) das seqüências Θ e Δ, respectivamente.

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação de uma regra estrutural e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}}{}}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2 \\ A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_3 \\ B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}(Mix)$$

- O seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação de uma regra estrutural e o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \qquad & \Sigma_2\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B & \qquad & B,\Gamma\Rightarrow\Delta, A\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle,\Gamma\Rightarrow\Delta,\langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ \Xi\Rightarrow\Lambda\end{matrix}}{\qquad}}{\Theta\Rightarrow\Lambda}}{\langle A[x/\_]\rangle,\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\Lambda}(Mix)$$

- Tanto o seqüente superior esquerdo como o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é obtido a partir da aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \qquad & \Sigma_2\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B & \qquad & B,\Gamma\Rightarrow\Delta, A\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle,\Gamma\Rightarrow\Delta,\langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3 & \qquad & \Sigma_4\\ C,\Theta \Rightarrow \Lambda, D & \qquad & D,\Theta\Rightarrow\Lambda, C\end{matrix}}{\langle C[y/\_]\rangle,\Theta\Rightarrow\Lambda,\langle D[y/\_]\rangle}(\Updownarrow)}{\langle A[x/\_]\rangle,\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\Lambda,\langle D[y/\_]\rangle}(Mix)$$

onde $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$, $y \notin free(\Theta \cup \Lambda)$ e $\langle B[x/\_]\rangle = \langle C[y/\_]\rangle$

Com o lema abaixo temos que cada um dos novos casos de aplicação da regra (Mix), apresentados anteriormente, pode ser eliminado.

Lema 8.1.1 *Seja π uma derivação para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$. Então, se π é uma derivação especial, então π pode ser transformada em uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.*

A prova do lema 8.1.1 é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ e é apresentada no apêndice. A ordem é lexicográfica: $(gr(\pi), r(\pi)) < (gr(\pi'), r(\pi'))$ se, e somente se, $gr(\pi) < gr(\pi')$ ou $(gr(\pi) = gr(\pi')$ e $r(\pi) < r(\pi'))$.

Lema 8.1.2 *Seja π uma derivação para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$. Então, existe uma derivação π' para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$ livre de aplicação da regra (Mix).*

A prova do lema 8.1.2 é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) e é apresentada no apêndice.

A partir do lema 8.1.2 demonstraremos o teorema de eliminação do corte.

Teorema 8.1.1 *Seja π uma derivação para o seqüente S em $SC(\mathcal{B})$. Então, existe uma derivação π' para o seqüente S livre de aplicação da regra $(corte)$.*

Prova: Seja π uma derivação para o seqüente S em $SC(\mathcal{B})$.

Inicialmente, temos que uma ocorrência de uma aplicação da regra $(corte)$ em uma derivação π para o seqüente S pode ser substituída por uma aplicação da regra (Mix), obtendo uma derivação ρ para o seqüente S.

Logo, se

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Upsilon \Rightarrow \Theta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1 \\ A, \Psi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\begin{matrix}\Upsilon, \Psi \Rightarrow \Theta, \Lambda \\ \Sigma_3\end{matrix}}(corte)$$

então, substituindo a aplicação da regra $(corte)$ em π por uma aplicação da regra (Mix) obtemos a derivação:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Upsilon \Rightarrow \Theta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1 \\ A, \Psi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Upsilon, \Psi^* \Rightarrow \Theta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\begin{matrix}\Upsilon, \Psi \Rightarrow \Theta, \Lambda \\ \Sigma_3\end{matrix}}}$$

Assim, substituindo todas as ocorrências de aplicação da regra $(corte)$ em π por aplicações da regra (Mix), como anteriormente, obtemos uma derivação σ para o seqüente

S que contém apenas aplicações da regra (Mix).

Então, a partir da derivação σ e pelo lema 8.1.2 existe uma derivação π' para o seqüente S livre de aplicação da regra (Mix).

Portanto, π' é uma derivação para o seqüente S livre de aplicação da regra $(corte)$.

■

8.2 Eliminação do corte para $SC(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$)

Nesta seção apresentaremos o resultado de eliminação do corte para os cálculos de seqüentes $SC(\Omega)$ (com $SC \in \{SCML, SCIL, SCCL\}$ e $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$).

Nos cálculo de seqüentes $SC^*(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$), além dos casos de fórmula mix de $SC^*(\mathcal{B})$, temos os seguintes casos de fórmula marcada como fórmula mix.

- O seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\top^*a)$.

$$\dfrac{\dfrac{\langle A \to A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\top^*a) \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\bot^*c)$.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\bot\rangle}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\bot^*c) \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Como em $SC^*(\mathcal{B})$, temos que cada um dos novos casos de aplicação da regra (Mix), apresentados anteriormente, pode ser eliminado.

Lema 8.2.1 *Seja π uma derivação para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$). Então, se π é uma derivação especial, então π pode ser transformada em uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.*

A prova do lema 8.2.1 é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ e é apresentada no apêndice.

Lema 8.2.2 *Seja π uma derivação para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$). Então, existe uma derivação π' para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ livre de aplicação da regra (Mix).*

A prova do lema 8.2.2 é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) e é apresentada no apêndice.

A partir do lema 8.2.2 demonstraremos o teorema de eliminação do corte.

Teorema 8.2.1 *Seja π uma derivação para o seqüente S em $SC(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$). Então, existe uma derivação π' para o seqüente S livre de aplicação da regra $(corte)$.*

Prova: Seja π uma derivação para o seqüente S em $SC(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^*a), (\bot^*c)\}$).

Inicialmente, temos que uma ocorrência de uma aplicação da regra $(corte)$ em uma derivação π para o seqüente S pode ser substituída por uma aplicação da regra (Mix), obtendo uma derivação ρ para o seqüente S.

Logo, se

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Upsilon \Rightarrow \Theta, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ A, \Psi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\begin{array}{c}\Upsilon, \Psi \Rightarrow \Theta, \Lambda\\ \Sigma_3\end{array}}(corte)$$

então, substituindo a aplicação da regra ($corte$) em π por uma aplicação da regra (Mix) obtemos a derivação:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Upsilon \Rightarrow \Theta, A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ A, \Psi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Upsilon, \Psi^* \Rightarrow \Theta^*, \Lambda}(Mix)}{\qquad}}{\begin{array}{c}\Upsilon, \Psi \Rightarrow \Theta, \Lambda\\ \Sigma_3\end{array}}$$

Assim, substituindo todas as ocorrências de aplicação da regra ($corte$) em π por aplicações da regra (Mix), como anteriormente, obtemos uma derivação σ para o seqüente S que contém apenas aplicações da regra (Mix).

Então, a partir da derivação σ e pelo lema 8.2.2 existe uma derivação π' para o seqüente S livre de aplicação da regra (Mix).

Portanto, π' é uma derivação para o seqüente S livre de aplicação da regra ($corte$).

∎

8.3 Eliminação do corte para $SC(\Omega)$ (com $\Omega^* \nsubseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$)

Nesta seção examinaremos o resultado de eliminação do corte para os cálculos de seqüentes $SC(\Omega)$ (com $SC \in \{SCML, SCIL, SCCL\}$ e $\Omega^* \nsubseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$)).

Assim, como nos sistemas de dedução natural as ocorrências de segmentos maximais dependem das regras específicas em Ω^*, temos que nos cálculos de seqüentes as ocorrências de fórmulas marcadas como fórmula mix também dependem das regras específicas em Ω^*. Logo, dado um cálculo de seqüentes $SC^*(\Omega)$, além dos casos de fórmula mix de $SC^*(\mathcal{B})$ e $SC(\Omega)$ com $\Omega^* \subseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$), temos os seguintes casos de fórmula marcada como fórmula mix.

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* c)$ e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* a)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B\rangle}(\wedge^* c) \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\langle A \wedge B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\wedge^* a)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* c)$ e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* a)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \vee B\rangle}(\vee^* c) \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_3\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_4\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\langle A \vee B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\vee^* a)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\neg^* c)$ e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\neg^* a)$.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \neg A\rangle}(\neg^* c) \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{matrix}}{\langle \neg A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\neg^* a)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação de uma regra operacional para fórmula marcada e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_3\\ B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A\end{matrix}}{\langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B\rangle}(\Updownarrow)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B\rangle}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação de uma regra operacional para fórmula marcada.

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array}}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle}(\Updownarrow) \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

- O seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmula marcada (R).

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Omega \Rightarrow \Xi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(R) \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Exemplo 8.3.1 *Na aplicação da regra (Mix) do exemplo 8.0.3 o seqüente superior esquerdo é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* a)$.*

As aplicações da regra (Mix) que contêm uma fórmula marcada como fórmula mix e são análogas às aplicações da regra (Mix) com uma fórmula não-marcada como fórmula mix são eliminadas de modo similar à eliminação das aplicações da regra (Mix) no cálculo de sequentes $SCCL$.

Por exemplo, seja π a derivação especial abaixo de rank 2 e $gr(\pi) = gr(\langle A \wedge B\rangle)$:

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A\rangle \Rightarrow \langle A\rangle}{\nabla x A \Rightarrow \langle A\rangle}(\nabla a)}{\nabla x A \wedge \nabla x B \Rightarrow \langle A\rangle}(\wedge a) \quad \dfrac{\dfrac{\langle B\rangle \Rightarrow \langle B\rangle}{\nabla x B \Rightarrow \langle B\rangle}(\nabla a)}{\nabla x A \wedge \nabla x B \Rightarrow \langle B\rangle}(\wedge a)}{\nabla x A \wedge \nabla x B \Rightarrow \langle A \wedge B\rangle}(\wedge^* c) \quad \dfrac{\langle A\rangle \Rightarrow \langle A\rangle}{\langle A \wedge B\rangle, \Rightarrow \langle A\rangle}(\wedge^* a)}{\nabla x A \wedge \nabla x B \Rightarrow \langle A\rangle}(Mix)$$

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação π' abaixo.

$$\pi' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A\rangle \Rightarrow \langle A\rangle}{\nabla xA \Rightarrow \langle A\rangle}(\nabla a)}{\nabla xA \wedge \nabla xB \Rightarrow \langle A\rangle}(\wedge a) \qquad \langle A\rangle \Rightarrow \langle A\rangle}{\nabla xA \wedge \nabla xB \Rightarrow \langle A\rangle}(Mix)$$

A derivação π' contém uma nova aplicação da regra (Mix) com $\langle A\rangle$ como fórmula mix. Note que, $gr(\langle A\rangle) = gr(\pi') < gr(\pi) = gr(\langle A \wedge B\rangle)$.

Daí, obtemos a derivação ρ abaixo sem ocorrência de aplicação da regra (Mix).

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\langle A\rangle \Rightarrow \langle A\rangle}{\nabla xA \Rightarrow \langle A\rangle}(\nabla a)}{\nabla xA \wedge \nabla xB \Rightarrow \langle A\rangle}(\wedge a)$$

Agora, seja π a derivação para o seqüente $S = \langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \rightarrow B) \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle$ do exemplo 8.0.3. Note que, π é uma derivação especial de rank 2 tal que o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* a)$.

Neste caso, a derivação π para o seqüente S não pode ser transformada em uma derivação para S que contém uma aplicação da regra (Mix) com uma fórmula C como fórmula mix tal que $gr(C) < gr(\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle)$.

Assim sendo, as derivações nos cálculos de seqüentes $SC^*(\Omega)$ contêm subderivações irredutíveis que são derivações especiais de rank 2, tal que o seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmula marcada.

Uma derivação π é denominada de *derivação especial restrita* se, e somente se:

- π contém uma aplicação (α) da regra (Mix) como última inferência de π;
- toda aplicação da regra (Mix), exceto (α), da derivação π tem as seguintes propriedades:

- o seqüente superior esquedo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;
- o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no conseqüente é 1; e
- e o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.

Note que uma derivação especial π também é uma derivação especial restrita, ou seja, como π não contém uma aplicação (α) da regra (Mix) acima da última inferência de π, então todas as propriedades acima são satisfeitas.

Exemplo 8.3.2 *A derivação π abaixo é uma derivação especial restrita.*

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \quad \dfrac{\langle B[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}(\wedge^* a)}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \langle B[x/\_]\rangle}(Mix)}{\langle A[x/\_]\rangle, \forall x(A \to B) \Rightarrow \nabla x B}(\nabla c)}{\nabla x A, \forall x(A \to B) \Rightarrow \nabla x B}(\nabla a)}{\forall x(A \to B) \Rightarrow \nabla x A \to \nabla x B}(\to c) \quad \Pi_3}{\forall x(A \to B) \Rightarrow \neg(\nabla x A \wedge \neg \nabla x B)}(Mix)$$

onde

$$\Pi_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(Pa) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A \to B, A \Rightarrow B}(\to a)}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow B}(\forall a)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow B}(Pa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A \wedge B}(\wedge c)$$

$$\Pi_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A}{\forall x(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(Pa)}{A \wedge B, \forall x(A \to B) \Rightarrow A}(\wedge a)$$

$$
\Pi_3 =
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\nabla xA \Rightarrow \nabla xA$}
\RightLabel{$(\wedge a)$}
\UnaryInfC{$\nabla xA \wedge \neg\nabla xB \Rightarrow \nabla xA$}
\AxiomC{$\nabla xB \Rightarrow \nabla xB$}
\RightLabel{$(\neg a)$}
\UnaryInfC{$\neg\nabla xB, \nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{$(\wedge a)$}
\UnaryInfC{$\nabla xA \wedge \neg\nabla xB, \nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{(Pa)}
\UnaryInfC{$\nabla xB, \nabla xA \wedge \neg\nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{$(\rightarrow a)$}
\BinaryInfC{$\nabla xA \rightarrow \nabla xB, \nabla xA \wedge \neg\nabla xB, \nabla xA \wedge \neg\nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{(Pa)}
\UnaryInfC{$\nabla xA \wedge \neg\nabla xB, \nabla xA \rightarrow \nabla xB, \nabla xA \wedge \neg\nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{(Pa)}
\UnaryInfC{$\nabla xA \wedge \neg\nabla xB, \nabla xA \wedge \neg\nabla xB, \nabla xA \rightarrow \nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{(Ca)}
\UnaryInfC{$\nabla xA \wedge \neg\nabla xB, \nabla xA \rightarrow \nabla xB \Rightarrow$}
\RightLabel{$(\neg c)$}
\UnaryInfC{$\nabla xA \rightarrow \nabla xB \Rightarrow \neg(\nabla xA \wedge \neg\nabla xB)$}
\end{prooftree}
$$

A seguir definiremos as noções de grau e rank de uma derivação especial restrita.

Definição 8.3.1 *Seja* π *uma derivação especial restrita em* $SC^*(\Omega)$ *e seja* (α) *a aplicação da regra* (Mix) *que é a última inferência de* π. *Então, o grau de* π *(denotado por* $gr(\pi)$*) é o grau da fórmula mix da aplicação* (α), *ou seja,* $gr(\pi) = gr(M)$ *onde* M *é a fórmula mix da aplicação* (α).

Definição 8.3.2 *Seja* π *uma derivação especial restrita em* $SC^*(\Omega)$ *e seja* (α) *a aplicação da regra* (Mix) *que é a última inferência de* π. *Então, o rank de* π, *denotado por* $r(\pi)$, *é igual à soma do rank esquerdo com o rank direiro.*

- *o rank esquerdo de* π *é o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho* ρ *de* π, *tal que o seqüente mais inferior de* ρ *é o seqüente superior esquerdo da aplicação* (α) *e cada um dos seqüentes de* ρ *contém a fórmula mix* M *no consequente.*
- *o rank direito de* π *é o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho* ρ *de* π *tal que o seqüente mais inferior de* ρ *é o seqüente superior direito da aplicação* (α) *e cada um dos seqüentes de* ρ *contém a fórmula mix* M *no antecedente.*

Exemplo 8.3.3 *Dado que* π *é a derivação especial restrita do exemplo 8.3.2, temos que* $gr(\pi) = gr(\nabla xA \rightarrow \nabla xB)$ *e* $r(\pi) = 6$.

Lema 8.3.1 *Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$. Então, se π é uma derivação especial restrita, então π pode ser transformada em uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tal que toda as aplicações da regra (Mix), caso exista alguma, têm as seguinte propriedades:*

- *o seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;*
- *o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ, tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no conseqüente é 1; e*
- *e o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ, tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.*

A prova do lema 8.3.1 é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ e é apresentada no apêndice.

Lema 8.3.2 *Seja π uma derivação para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$. Então, existe uma derivação π' para o seqüente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC(\Omega)$ tal que todas as aplicações da regra (Mix), caso exista alguma, têm as seguinte propriedades:*

- *o seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;*
- *o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no conseqüente é 1; e*

- *e o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.*

A prova do lema 8.3.2 é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π que não têm as propriedades descritas no lema.

Teorema 8.3.1 *Seja π uma derivação para o seqüente S em $SC(\Omega)$. Então, existe uma derivação π' para o seqüente S tal que todas as ocorrências de aplicação da regra $(corte)$, caso exista alguma, têm as seguinte propriedades:*

- *o seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra $(corte)$ é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o seqüente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;*

- *o maior número de sequentes consecutivos em um caminho ρ tal que o sequente mais inferior de ρ é o sequente superior esquerdo da aplicação da regra $(corte)$ e cada um dos sequentes de ρ contém a fórmula mix M no consequente é 1; e*

- *e o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior direito da aplicação da regra $(corte)$ e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.*

Prova: Seja π uma derivação para o seqüente S em $SC(\Omega)$.

Inicialmente, temos que uma ocorrência de uma aplicação da regra $(corte)$ em uma derivação π para o seqüente S pode ser substituída por uma aplicação da regra (Mix), obtendo uma derivação ρ para o seqüente S.

Logo, se

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Upsilon \Rightarrow \Theta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ A, \Psi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\begin{matrix}\Upsilon, \Psi \Rightarrow \Theta, \Lambda \\ \Sigma_3\end{matrix}}(corte)$$

então, substituindo a aplicação da regra ($corte$) em π por uma aplicação da regra (Mix) obtemos a derivação:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Upsilon \Rightarrow \Theta, A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ A, \Psi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Upsilon, \Psi^* \Rightarrow \Theta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\begin{matrix}\Upsilon, \Psi \Rightarrow \Theta, \Lambda \\ \Sigma_3\end{matrix}}}$$

Assim, substituindo todas as ocorrências de aplicação da regra ($corte$) em π por aplicações da regra (Mix), como anteriormente, obtemos uma derivação σ para o seqüente S que contém apenas aplicações da regra (Mix).

Então, a partir da derivação σ e pelo lema 8.3.2 existe uma derivação σ' para o seqüente S tal que todas as ocorrências de aplicação da regra (Mix), caso exista alguma, têm as seguinte propriedades:

- o seqüente superior esquerdo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) e o seqüente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;

- o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no conseqüente é 1; e

- e o maior número de seqüentes consecutivos em um caminho ρ tal que o seqüente mais inferior de ρ é o seqüente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos seqüentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.

Logo, substituindo as aplicações da regra (Mix) por aplicações da regra $(corte)$ em σ' obtemos a derivação π' para o seqüente S que satisfaz as propriedades do teorema para as aplicações da regra do corte.

$\blacksquare$

Capítulo 9

Controle da Regra de Equivalência

Neste capítulo apresentaremos uma alternativa para o resultado de normalização e examinaremos a interferência da regra ($\Updownarrow$) na obtenção da propriedade de subfórmulas.

9.1 Alternativa de normalização

Nesta seção apresentaremos uma alternativa de formulação do resultado de normalização para os diferentes sistemas dedutivos.

Nos sistemas de dedução natural para a lógica de primeira ordem as regras são classificadas, fundamentalmente, como regras de introdução ou de eliminação. As regras classificadas como regras de introdução possuem a característica de construir fórmulas a partir de uma ou mais fórmulas e da introdução de um novo conectivo ou quantificador como símbolo principal. As regras de elimінção se caracterizam pela desconstrução de fórmulas.

Os sitemas de dedução natural para as LG's desenvolvidos nesta tese possuem a regra de inferência

$$(\Updownarrow)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma,\ [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array}\qquad \langle A[v/\_]\rangle \qquad \begin{array}{c}\Delta,\ [B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[v/\_]\rangle}\ i$$

que a princípio não se caracteriza nem como uma regra de introdução e nem como uma regra de eliminação, ou seja, a conclusão $\langle B[v/\_]\rangle$ não é obtida a partir das suas premissas e da introdução de um conectivo ou quantificador como símbolo principal e nem é obtida a partir da desconstrução de uma das suas premissas.

Porém, notemos que a premissa maior $\langle A[v/\_]\rangle$ é eliminada em uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$ e a partir do fato que as fórmulas A e B são equivalentes e $\langle A[v/\_]\rangle$, a fórmula $\langle B[v/\_]\rangle$ é introduzida na aplicação (α). Assim sendo, podemos classificar a regra $(\Updownarrow)$ como sendo uma regra de eliminação e introdução.

Assim, se considerarmos a regra $(\Updownarrow)$ como sendo uma regra de eliminação e introdução teremos dois novos tipos de segmentos maximais. Dado o segmento $S = A_1, ..., A_n$ (com $n \geq 1$) em uma derivação teremos que:

- Se A_1 é a conclusão de uma aplicação de regra de introdução e A_n é premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$, então $S = A_1, ..., A_n$ é uma segmento maximal;
- Se A_1 é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e A_n é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação, então $S = A_1, ..., A_n$ é uma segmento maximal.

Exemplo 9.1.1 *Na derivação de ∇vB a partir de $\forall v(A \to B)$ e ∇vA em $ND(\mathcal{S})$ se considerarmos a regra $(\Updownarrow)$ como sendo uma regra de eliminação e introdução teremos que $S = \langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle$ é um segmento maximal.*

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{(\wedge^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^1, \forall v(A \to B)\\ \Sigma \\ A \wedge B\end{array} \qquad (\nabla E)\dfrac{\nabla v A}{\langle A[v/\_]\rangle} \qquad (\wedge E)\dfrac{[A \wedge B]^1}{A}}{\langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle}\,1}{\langle B[v/\_]\rangle}}{\nabla v B}$$

Notemos que o segmento maximal da derivação do exemplo anterior é irredutível.

Nos casos em que o segmento maximal $S = A_1, ..., A_n$, $n > 1$ e S é um dos dois novos tipos de segmento maximal, aplicando n reduções permutativas (apresentadas no capítulo 6) podemos reduzir S a um segmento maximal que contém uma única fórmula.

Assim sendo, podemos definir alternativamente a noção de derivação normal do seguinte modo.

Definição 9.1.1 *Seja π uma derivação em $ND(\Omega)$. Então, π é uma derivação normal se, e somente se, o únicos segmentos maximais que ocorrem em π são dos seguintes tipos:*

- *S é um segmento com uma única fórmula A que é a conclusão de uma aplicação de regra de introdução e A é premissa maior de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$;*
- *S é um segmento com uma única fórmula A que é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e A é premissa maior de uma aplicação de regra de eliminação.*

e π não contém aplicação supérflua de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Notemos que os segmentos maximais irredutivos são correlatos às aplicações da regra (*corte*) nos cálculos de seqüentes para as LG's que não podem ser eliminadas.

Exemplo 9.1.2 *A derivação do exemplo 9.1.1 em cálculo de sequentes.*

$$\pi = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\langle A[v/\_]\rangle, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow \langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle}(\Updownarrow) \quad \cfrac{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}{\langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\wedge^* a)}{\langle A[v/\_]\rangle, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(corte)}{\langle A[v/\_]\rangle, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow \nabla v B}(\nabla c)}{\nabla v A, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow \nabla v B}(\nabla a)$$

onde

$$\Pi_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\forall v(A \rightarrow B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow A}(Pa) \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A \rightarrow B, A \Rightarrow B}(\rightarrow a)}{\forall v(A \rightarrow B), A \Rightarrow B}(\forall a)}{A, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow B}(Pa)}{A, \forall v(A \rightarrow B) \Rightarrow A \wedge B}(\wedge c)$$

$$\Pi_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{A \Rightarrow A}{\forall v(A \to B), A \Rightarrow A}(Aa)}{A, \forall v(A \to B) \Rightarrow A}(Pa)}{A \wedge B, \forall v(A \to B) \Rightarrow A}(\wedge a)$$

Assim como no exemplo 9.1.1 o segmento maximal $S = \langle (A \wedge B)[v/\_] \rangle$ é irredutível temos que a aplicação do corte do exemplo anterior não pode ser eliminado.

9.2 Propriedade de subfórmulas

Nesta seção examinaremos a interferência da regra ($\Updownarrow$) na obtenção da propriedade de subfórmulas.

Propriedade de subfórmulas: *Toda fórmula que ocorre em uma derivação normal de A a partir de Γ é subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ, exceto as hipóteses descarregadas nas aplicações da regra (RaA) e para as ocorrências de $\perp$ que estão abaixo das hipóteses descarregadas nas aplicações da regra (RaA).*

Intuitivamente, no sistema de dedução natural para a lógica clássica, intuicionista ou minimal temos que a(s) premissa(s) de uma aplicação de uma regra de introdução são subfórmula(s) da conclusão e em uma aplicação de uma regra de eliminação, a conclusão é uma subfómula da(s) premissa(s), o que sugere a propriedade de subfórmulas.

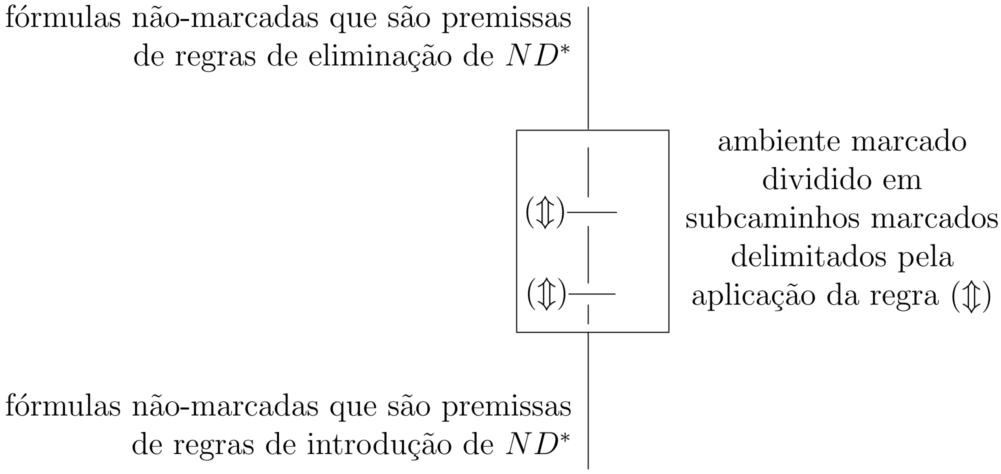
Notemos que a regra

$$(\Updownarrow)\ \frac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \qquad \langle A[v/\_] \rangle \qquad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[v/\_] \rangle}\ i$$

não contém características usuais das regras do sistema de dedução natural para a lógica clássica, intuicionista ou minimal, ou seja, a conclusão $\langle B[v/\_] \rangle$ é obtida a partir de

$\langle A[v/\_]\rangle$ e do fato de que $A[v/\_][\_/v]$ e $B[v/\_][\_/v]$ são fórmulas equivalentes.

No capítulo 6 demonstramos que um caminho em uma derivação normal tem a seguinte configuração:



onde os subcaminhos marcados possuem aplicações de regra para fórmulas marcadas (regras específicas) e uma regra de introdução não precede uma aplicação de uma regra de eliminação.

Assim sendo, a partir da noção de subfórmula para fórmulas marcadas e generalizadas, definida a seguir, dado um caminho ρ em uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$ com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$, temos ocorrências de fórmulas entre as aplicações da regra $(\Updownarrow)$ em ρ que não são subfórmulas de A e nem são subfórmulas de alguma fórmula de Γ.

À definição usual de subfórmula da lógica de primeira ordem (FOL) acrescentamos as noções de subfórmulas para fórmulas generalizadas e marcadas.

Definição 9.2.1 *Seja A uma fórmula em L^{∇^*}. Então, indutivamente, as subfórmulas de A são:*

- *A é uma subfórmula de A;*

- *se $B \wedge C$, $B \vee C$ ou $B \rightarrow C$ é uma subfórmula de A, então B e C são subfórmulas de A;*

- *se $\forall xB$ ou $\exists xB$ é uma subfórmula de A, então $B[x/t]$ é uma subfórmula de A;*

- *se ∇xB é uma subfórmula de A, então $\langle B[x/\_]\rangle$ e $B[x/t]$ são subfórmulas de A; e*

- *se $\langle B\rangle$ é uma subfórmula de A, então $B[\_/x]$ (com $x \notin occ[B]$) é uma subfórmula de A.*

Exemplo 9.2.1 *Na derivação normal da fórmula generalizada $\nabla v\neg(\neg B \vee \neg C)$, abaixo, a partir de $\Gamma = \{\forall v(A \rightarrow (B \wedge C)), \nabla vA\}$ em $ND(\mathcal{S}) = \mathcal{ND}(\mathcal{B})\cup\{(\wedge^* E)\}$, temos que as fórmulas $\langle A \wedge (B \wedge C)[v/\_]\rangle$, $\langle(B \wedge C)[v/\_]\rangle$ não são subfórmulas de $\nabla v\neg(\neg B \vee \neg C)$ e nem são subfórmulas de alguma fórmula de Γ.*

$$(\nabla I)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}[B \wedge C]^2\\ \Sigma_2\\ \neg(\neg B \vee \neg C)\end{array} \qquad (\wedge^* E)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}[A]^1, \forall v(A \rightarrow (B \wedge C))\\ \Sigma_1\\ A \wedge (B \wedge C)\end{array} \quad (\nabla E)\,\dfrac{\nabla vA}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad (\wedge E)\,\dfrac{[A \wedge (B \wedge C)]^1}{A}}{\langle (A \wedge (B \wedge C))[v/\_]\rangle}\,{}^{1}}{\langle (B \wedge C)[v/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}[\neg(\neg B \vee \neg C)]^2\\ \Sigma_3\\ (B \wedge C)\end{array}}{\langle \neg(\neg B \vee \neg C)[v/\_]\rangle}\,{}^{2}}{\nabla v\neg(\neg B \vee \neg C)}$$

Logo, é de grande interesse obtermos um controle sobre as aplicações da regra ($\Updownarrow$) nos sistemas de dedução natural para as LG's. Assim, a partir da noção de derivação normal definida no capítulo 6, das noções de caminho maximal e de ordem para caminhos, definidas a seguir, nesta seção utilizaremos uma estratégia de inverter a ordem de aplicações das regras específicas com a regra de equivalência para obtermos o controle de aplicações da regra ($\Updownarrow$) nos seguintes sistemas de dedução natural (cf. capítulo 5):

- $ND(\mathcal{B})$= $ND^* \cup \{(\nabla I), (\nabla E), (\Updownarrow)\}$ (sistema para a lógica básica),

- $ND(\mathcal{P})$= $ND(\mathcal{B})\cup\{(\top^* I), (\bot^* E)\}$ (sistema para a lógica própria);

- $ND(\mathcal{S})$= $ND(\mathcal{B})\cup\{(\wedge^* E)\}$ (sistema para a lógica fechada superiormente)

- $ND(\mathcal{L})$= $ND(\mathcal{B})\cup\{(\wedge^* I), (\vee^* I)\}$ (sistema para a lógica dos reticulados);e

- $ND(\mathcal{F})$= $ND(\mathcal{B})\cup\{(\top^*I),(\perp^*E),(\wedge^*I),(\wedge^*E)\}$ (sistema para a lógica dos filtros).

Notemos que no sistema de dedução natural para a lógica de ultrafiltros próprios não temos o controle de aplicações da regra ($\Updownarrow$) pela não possibilidade de inversão da ordem de aplicações das regras $(\neg^*I)$ e ($\Updownarrow$).

As definições de caminho maximal e de ordem para caminhos em uma derivação são as usuais [10].

Definição 9.2.2 *Seja π uma derivação de A a partir de Γ e seja $\rho = B_1, ..., B_n$ um caminho em π. Então, ρ é um caminho maximal se, e somente se, B_1 é uma hipótese em π ou B_1 é a conclusão de uma aplicação da regra $(\top^*I)$ e $B_n = A$.*

Definição 9.2.3 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ. Então, a ordem sobre os caminhos de π, denotado por $o(t)$ (onde t é um caminho em π), é:*

$$\begin{array}{lcl} o(t) & = & 0 \textit{ se } t \textit{ é um caminho maximal;} \\ o(t) & = & o(t')+1, \textit{ se a última fórmula de } t \textit{ é uma premissa menor} \\ & & \textit{de uma aplicação de regra de } t'. \end{array}$$

Proposição 9.2.1 *Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$. Então, existe pelo menos um caminho maximal em π.*

A prova da proposição 9.2.1 é feita por indução sobre o comprimento de uma derivação e é apresentada no apêndice.

9.2.1 Sistema $ND(\mathcal{B})$

Nesta seção examinaremos a propriedade de subfórmulas no sistema $ND(\mathcal{B})$.

Como resultado inicial, temos que o número de aplicações da regra ($\Updownarrow$) em cada caminho de uma derivação normal em $ND(\mathcal{B})$ é no máximo um.

Proposição 9.2.2 *Seja π uma derivação normal em $ND(\mathcal{B})$. Então, em cada um dos caminhos de π existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.*

A prova da proposição 9.2.2 é apresentada no apêndice.

Exemplo 9.2.2 *Considere a derivação π de $\nabla x \neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \nabla y \neg \exists x \neg P(x,y)$ a partir de $\Gamma = \{\nabla x(P(x) \to Q(x)), \nabla y \forall x P(x,y)\}$ em $ND(\mathcal{B})$.*

$$\pi = (\wedge I)\frac{(\nabla I)\dfrac{D_1}{\nabla x \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))} \qquad (\nabla I)\dfrac{D_2}{\nabla y \neg \exists x \neg P(x,y)}}{\nabla x \neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \wedge \nabla y \neg \exists x \neg P(x,y)}$$

onde

$$D_1 = (\Updownarrow)\frac{\begin{matrix}[P(x) \to Q(x)]^1 \\ \Pi_1 \\ \neg(P(x) \wedge \neg Q(x))\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{\nabla x(P(x) \to Q(x))}{\langle P(\_) \to Q(\_)\rangle} \qquad \begin{matrix}[\neg(P(x) \wedge \neg Q(x))]^1 \\ \Pi_2 \\ P(x) \to Q(x)\end{matrix}}{\langle \neg(P(\_) \wedge \neg Q(\_))\rangle}1$$

e

$$D_2 = (\Updownarrow)\frac{\begin{matrix}[\forall x P(x,y)]^2 \\ \Pi_3 \\ \neg \exists x \neg P(x,y)\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{\nabla y \forall x P(x,y)}{\langle \forall x P(x,\_)\rangle} \qquad \begin{matrix}[\neg \exists x \neg P(x,y)]^2 \\ \Pi_4 \\ \forall x P(x,y)]^2\end{matrix}}{\langle \neg \exists x \neg P(x,\_)\rangle}2$$

Note que π é uma derivação normal que em cada um dos caminhos existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$, no entanto, as aplicações da regra $(\Updownarrow)$ na derivação π não podem ser reduzidas a uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

De uma maneira geral a situação exemplificada no exemplo 9.2.2 é o pior caso de aplicação da regra $(\Updownarrow)$ em derivações normais em $ND(\mathcal{B})$.

Assim sendo, a partir das noções de caminho maximal e de ordem para caminhos mostraremos a propriedade de subfórmulas para o sistema $ND(\mathcal{B})$.

Proposição 9.2.3 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{B})$. Então, toda fórmula que ocorre em π é subfórmula de A ou de alguma fórmula de Γ, exceto as hipóteses descarregadas nas aplicações da regra (RaA) e para as ocorrências de $\perp$ que estão abaixo das hipóteses descarregadas nas aplicações da regra (RaA).*

Prova: Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{B})$.

Seja φ uma fórmula em π e seja ρ um caminho que contém φ.

Dada a estrutura de um caminho em uma derivação normal, a fórmula φ pode ocorrer na parte que contém aplicações de regras de eliminação para fórmulas não marcadas, na parte que contém aplicações de regras para fórmulas marcadas ou na parte que contém ocorrências de aplicações de regras de introdução para fórmulas não marcadas.

Se φ ocorre na parte de ρ que contém aplicações de regras de eliminação de ND^*, então φ é uma subfórmula da hipótese no topo de ρ.

Se φ ocorre na parte de ρ que contém aplicações de regras para fórmulas marcadas, então temos os seguintes casos:

caso 1: $\varphi = \langle A[v/\_]\rangle$ e é a conclusão de uma aplicação de (∇E).

Neste caso temos que $\varphi = \langle A[v/\_]\rangle$ é uma subfórmula de ∇vA que por sua vez é uma subfórmula da hipótese no topo de ρ.

Logo, $\varphi = \langle A[v/\_]\rangle$ é uma subfórmula da hipótese no topo de ρ.

caso 2: $\varphi = \langle B[v/\_]\rangle$ e é a conclusão de uma aplicação de $(\Updownarrow)$.

Neste caso temos que φ é uma subfórmula da fórmula final φ_1 de ρ.

Logo, se φ_1 é uma subfórmula de uma fórmula de um caminho ρ_1 com $o(\rho_1) < o(\rho)$, então, repetindo este processo, teremos que φ é uma subfórmula de uma hipótese ou da conclusão.

Por outro lado, se φ_1 é a conclusão de π, então φ é uma subfórmula de A.

Se φ ocorre na parte de ρ que contém aplicações de regras de introdução de ND^*, então φ é uma subfórmula da fórmula final φ_1 de ρ.

Logo, de modo análogo ao caso 2, temos que φ é uma subfórmula de uma hipótese ou da conclusão.

Portanto, φ é uma subfórmula de A ou é subfórmula de alguma fórmula de Γ.

$\blacksquare$

No cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{B})$ para a lógica básica de "geralmente" podemos mostrar um resultado análogo à propriedade de subfórmula, obtido a partir do resultado de eliminação do corte (Hauptsatz).

Proposição 9.2.4 *Seja π uma derivação livre de corte para o seqüente S em $SC(\mathcal{B})$. Então, toda fórmula que ocorre em π é uma subfórmula de alguma fórmula de S.*

9.2.2 Sistema $ND(\mathcal{P})= ND(\mathcal{B})\cup\{(\top^* I), (\perp^* E)\}$

Nesta seção examinaremos as aplicações da regra ($\Updownarrow$) em $ND(\mathcal{P})$.

Como no sistema $ND(\mathcal{B})$, mostraremos que em cada um dos caminhos de uma derivação normal em $ND(\mathcal{P})$ existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Proposição 9.2.5 *Seja π uma derivação normal em $ND(\mathcal{P})$. Então, em cada um dos caminhos de π existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).*

Notemos que a regra $(\top^* I)\dfrac{}{\langle A \to A\rangle}$ é também uma regra que não possui as características usuais das regras do sistema de dedução natural para a lógica clássica, intuicionista ou minimal, ou seja, a conclusão de uma aplicação da regra $(\top^* I)$ é obtida a partir de um conjunto vazio de premissas. Deste modo, os sistemas de dedução natural que contêm a regra $(\top^* I)$ não possuem a propriedade de subfórmulas, em particular o sistema $ND(\mathcal{P})$.

Exemplo 9.2.3 *Na derivação normal de $\nabla v(\neg A \vee A)$ a partir de $\Gamma = \emptyset$ em $ND(\mathcal{P})$ a fórmula $\langle A \to A\rangle$ não é uma subfórmula da conclusão.*

$$
(\nabla I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}[A \to A]^1\\ \Sigma_1\\ \neg A \vee A\end{array} \quad (\top^* I)\dfrac{}{\langle A \to A\rangle} \quad \begin{array}{c}[\neg A \vee A]^1\\ \Sigma_2\\ A \to A\end{array}}{\langle \neg A \vee A\rangle}1}{\nabla v \neg A \vee A}
$$

De mesmo modo como no sistema de dedução natural, apesar da obtenção do resultado de eliminação do corte (Hauptsatz) para o cálculo de seqüentes para a lógica própria de "geralmente" $SC(\mathcal{P})$ não temos a propriedade de subfórmula.

Exemplo 9.2.4 *Na derivação livre de corte abaixo temos que a fórmula $\langle A \to A\rangle$ não é subfórmula de nenhuma fórmula do seqüente $\Rightarrow \nabla v \neg A \vee A$.*

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A \to A \Rightarrow \neg A \vee A\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_2\\ \neg A \vee A \Rightarrow A \to A\end{array}}{\langle A \to A\rangle \Rightarrow \langle \neg A \vee A\rangle}(\Updownarrow)}{\Rightarrow \langle \neg A \vee A\rangle}(\top^* a)}{\Rightarrow \nabla v \neg A \vee A}(\nabla c)
$$

9.2.3 Sistema $ND(\mathcal{S})$= $ND(\mathcal{B}) \cup \{(\wedge^* E)\}$

Nesta seção examinaremos as aplicações da regra $(\Updownarrow)$ no sistema de dedução natural $ND(\mathcal{S})$.

Como mencionado anteriormente, as derivações em $ND(\mathcal{S})$ podem conter ocorrências de fórmulas que não são subfórmulas da conclusão e nem são subfórmulas de alguma fórmula do conjunto de hipóteses. Assim, teremos como resultado que uma derivação normal π pode ser transformada em uma derivação normal π' tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$. Caso tal aplicação (α) ocorra, temos que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.

Inicialmente ilustraremos o processo de redução do número de aplicações da regra $(\Updownarrow)$ através de um exemplo.

Exemplo 9.2.5 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$, tal que existe um caminho ρ com duas aplicações da regra $(\Updownarrow)$.*

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2,[D]^j\\ \Pi_3\\ E\end{array} \quad (\wedge^*E)\dfrac{(\wedge^*E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A]^i\\ \Pi_1\\ B\wedge C\wedge D\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1,[B\wedge C\wedge D]^i\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B\wedge C\wedge D\rangle}\,i}{\langle C\wedge D\rangle}}{\langle D\rangle} \quad \begin{array}{c}\Delta_2,[E]^j\\ \Pi_4\\ D\end{array}}{\begin{array}{c}\langle E\rangle\\ \Sigma_2\end{array}}\,j$$

Mostraremos a seguir que o caminho da derivação π que contém duas aplicações da regra $(\Updownarrow)$ pode ser transformado em um caminho com um única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

A partir da inversão das aplicações das regras $(\wedge^*E)$ e $(\Updownarrow)$, obtemos a derivação π' abaixo:

$$(\wedge^*E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{\dfrac{[C\wedge D]^j}{C} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2,\dfrac{[C\wedge D]^j}{D}\\ \Pi_3\\ E\end{array}}{C\wedge E} \quad (\wedge^*E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[A]^i\\ \Pi_1\\ B\wedge C\wedge D\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1,[B\wedge C\wedge D]^i\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B\wedge C\wedge D\rangle}\,i}{\langle C\wedge D\rangle} \quad (\wedge I)\dfrac{\dfrac{[C\wedge E]^j}{C} \quad \begin{array}{c}\Delta_2,\dfrac{[C\wedge E]^j}{E}\\ \Pi_4\\ D\end{array}}{C\wedge D}}{\langle C\wedge E\rangle}\,j}{\begin{array}{c}\langle E\rangle\\ \Sigma_2\end{array}}$$

Repetindo a inversão das aplicações das regras $(\wedge^*E)$ e $(\Updownarrow)$, obtemos a derivação π'' abaixo:

$$
(\wedge^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[A]^i\\ \Pi_1\\ B\wedge C\wedge D\end{matrix}}{B} \qquad \begin{matrix}(\wedge E)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[A]^i\\ \Pi_1\\ B\wedge C\wedge D\end{matrix}}{C\wedge D}\\ \Sigma\\ C\wedge E\end{matrix}}{B\wedge C\wedge E} \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[B\wedge C\wedge E]^i}{B} \qquad \begin{matrix}(\wedge E)\dfrac{[B\wedge C\wedge E]^i}{C\wedge E}\\ \Psi\\ C\wedge D\end{matrix}}{B\wedge C\wedge D}\\ \Pi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B\wedge C\wedge E\rangle}\,i}{\langle E\rangle}
$$

onde $\Sigma = (\wedge I)\dfrac{\dfrac{C\wedge D}{C} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2,\dfrac{C\wedge D}{D}\\ \Pi_3\\ E\end{matrix}}{C\wedge E}$ *e* $\Psi = (\wedge I)\dfrac{\dfrac{C\wedge E}{C} \qquad \begin{matrix}\Delta_2,\dfrac{C\wedge E}{E}\\ \Pi_4\\ D\end{matrix}}{C\wedge D}$

Notemos que as inversões de aplicações das regras $(\wedge^* E)$ e $(\Updownarrow)$ podem criar novos segmentos maximais, mas estes podem ser eliminados com as reduções apresentadas no capítulo 6, sem a introdução de novas aplicações da regra $(\Updownarrow)$ ao caminho, que antes das inversões possuía n aplicações da regra $(\Updownarrow)$ e após as inversões possui uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Deste modo, a partir da noção de rank para caminho, mostraremos que se ρ é um caminho com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ em uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$, então ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Definição 9.2.4 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ e seja ρ um caminho de π. Então, o rank de ρ é o par (n, r) onde n é o número de aplicações de regras específicas que ocorrem entre duas aplicações da regra $(\Updownarrow)$ em ρ e r é o número de ocorrências de aplicações da regra $(\Updownarrow)$.*

Os rank de caminhos podem ser ordenados usando a ordem lexicográfica:

$$(n, r) < (n', r') \text{ se, e somente se, } n < n' \text{ ou } (n = n' \text{ e } r < r').$$

Lema 9.2.1 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$ e seja ρ um caminho com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$. Então, ρ pode ser transformada em* *um caminho com no máximo uma aplicação* (α) *da regra* $(\Updownarrow)$ *tal que todas as aplicações da regras específicas* $(\wedge^* E)$ *estão abaixo de* α*.*

A prova da proposição 9.2.1 é feita por indução sobre o par (n, r) e é apresentada no apêndice.

A partir da proposição 9.2.1 e da noção de grau de equivalência de uma derivação, definida a seguir, iremos mostrar que uma derivação normal π de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$ pode ser transformada em uma derivação normal π', tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Definição 9.2.5 *Seja* π *uma derivação normal de* A *a partir de* Γ *em* $ND(\mathcal{S})$ *e seja* ρ *o caminho em* π*, tal que* ρ *contém mais de uma aplicação da regra* $(\Updownarrow)$ *e tal que* $o(\rho) < o(\rho')$ *para todo caminho* ρ' *com mais de uma aplicação da regra* $(\Updownarrow)$*. Então, o grau de equivalência da derivação* π *é o par* $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$ *onde* $n(\Updownarrow)$ *é igual ao número de elementos do conjunto*

$$B = \{\rho' / \rho' \textit{ é um caminho em } \pi \textit{ com uma única aplicação da regra } (\Updownarrow) \textit{ e } o(\rho') > o(\rho)\}$$

e $n(\Updownarrow, \Updownarrow)$ *é o número de caminhos de* π *que contém mais de uma aplicação da regra* $(\Updownarrow)$*.*

Os grau de derivações podem ser ordenados usando a ordem lexicográfica:

$$(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow)) < (n(\Updownarrow)', n(\Updownarrow, \Updownarrow)')$$

se, e somente se,

$$n(\Updownarrow) < n(\Updownarrow)' \text{ ou } (n(\Updownarrow) = n(\Updownarrow)' \text{ e } n(\Updownarrow, \Updownarrow) < n(\Updownarrow, \Updownarrow)')$$

Note que se uma derivação normal π não possui caminhos com mais de uma aplicação de regra $(\Updownarrow)$, então o grau de equivalência de π é o par $(0, 0)$.

Exemplo 9.2.6 *Na derivação normal π abaixo temos que o grau de equivalência de π é o par $(2,1)$.*

$$\pi = {\scriptstyle(\Updownarrow)}\dfrac{\Pi_1 \quad \dfrac{{\scriptstyle(\Updownarrow)}\dfrac{\dfrac{{\scriptstyle(\Updownarrow)}\dfrac{\begin{array}{c}A \to B\\ \Sigma_1\\ (\neg A \vee B)\end{array} \quad \dfrac{\nabla y(A \to B)}{\langle A \to B\rangle} \quad \begin{array}{c}(\neg A \vee B)\\ \Sigma 2\\ A \to B\end{array}}{\langle \neg A \vee B\rangle}}{\nabla y(\neg A \vee B)} \quad \dfrac{\nabla x \nabla y(A \to B)}{\langle \nabla y(A \to B)\rangle} \quad \dfrac{{\scriptstyle(\Updownarrow)}\dfrac{\begin{array}{c}\neg A \vee B\\ \Sigma_3\\ A \to B\end{array} \quad \dfrac{\nabla y(\neg A \vee B)}{\langle \neg A \vee B\rangle} \quad \begin{array}{c}A \to B\\ \Sigma_4\\ \neg A \vee B\end{array}}{\langle A \to B\rangle}}{\nabla y(A \to B)}}{\langle \nabla y(\neg A \vee B)\rangle} \quad \dfrac{\nabla x \nabla y C}{\langle \nabla y C[x/\_]\rangle}} \quad \Pi_2}{\dfrac{\langle \nabla y(\neg A \vee B) \wedge \nabla y C\rangle}{\langle \neg(\neg \nabla y(\neg A \vee B) \vee \neg \nabla y C)\rangle}}$$

onde

$$\Pi_1 = \begin{array}{c}\nabla y(\neg A \vee B) \wedge \nabla y C\\ \Sigma_5\\ \neg(\neg \nabla y(\neg A \vee B) \vee \neg \nabla y C)\end{array}$$

e

$$\Pi_2 = \begin{array}{c}\neg(\neg \nabla y(\neg A \vee B) \vee \neg \nabla y C)\\ \Sigma_6\\ \nabla y(\neg A \vee B) \wedge \nabla y C\end{array}$$

Proposição 9.2.6 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$. Então, π pode ser transformada em uma derivação normal π' tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.*

Prova: A prova é feita por indução sobre o grau de equivalência de uma derivação.

Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$.

Passo base: o grau de equivalência de π é o par (0,1), ou seja, a derivação π possui um único caminho ρ com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e não existem caminhos de ordem superior a de ρ que possua uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Logo, pelo lema 9.2.1 ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$, obtendo a derivação ψ de A a partir de Γ.

Note que ao tranformarmos o caminho ρ em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ podemos criar segmentos maximais apenas em caminhos ρ_i tal que $o(\rho_i) > o(\rho)$

(com $i = 1, ..., n$).

Assim sendo, caso a derivação ψ não seja normal, normalizamos ψ obtendo a derivação normal ψ'.

Caso contrário, $\psi = \psi'$.

Por outro lado, como não existem caminhos de ordem superior à de ρ que possua uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) e o processo de normalização não altera o caminho ρ' e não cria novos caminhos com aplicações da regra ($\Updownarrow$), então nem a transformação de ρ em um caminho com um única aplicação da regra ($\Updownarrow$) e nem processo de normalização cria novos caminhos com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Portanto, π' é uma derivação normal, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Hipótese de indução: a proposição é válida para toda derivação de grau de equivalência menor que $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$.

Seja π uma derivação normal de grau de equivalência $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$.

Tomemos um caminho ρ em π tal que $o(\rho) < o(\rho')$ para todo caminho ρ' em π.

Logo, pelo lema 9.2.1 ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$), obtendo a derivação ψ de A a partir de Γ.

Note que ao tranformarmos o caminho ρ em um caminho com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$) podemos criar segmentos maximais apenas em caminhos ρ_i tal que $o(\rho_i) > o(\rho)$ (com $i = 1, ..., n$).

Assim sendo, caso a derivação ψ não seja normal, normalizamos ψ obtendo a derivação normal ψ', de grau de equivalência igual a $(n(\Updownarrow)', n(\Updownarrow, \Updownarrow)')$.

Caso contrário, $\psi = \psi'$.

Temos que as reduções de normalização não cria novos caminhos com uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Daí, se nas reduções do processo de normalização de ψ juntamos caminhos que anteriormente tinham apenas uma aplicação da regra de equivalência formando um novo caminho com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$, então $n(\Updownarrow) > n(\Updownarrow)'$.

Logo, por hipótese de indução a derivação ψ' pode ser transformada em uma derivação normal π' de A a partir de Γ tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Se nas reduções do processo de normalização de ψ não juntamos caminhos que anteriormente tinham apenas uma aplicação da regra de equivalência, então $n(\Updownarrow) \geq n(\Updownarrow)'$ e $n(\Updownarrow, \Updownarrow) > n(\Updownarrow, \Updownarrow)'$.

Logo, por hipótese de indução, a derivação ψ' pode ser transformada em uma derivação normal π' de A a partir de Γ tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Portanto, π' é derivação normal de A a partir de Γ, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

■

Exemplo 9.2.7 *A derivação do exemplo 9.2.1 é transformada na derivação normal π' onde em cada caminho temos no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.*

$$\pi' = {\scriptstyle(\nabla I)}\dfrac{{\scriptstyle(\wedge^* E)}\dfrac{{\scriptstyle(\Updownarrow)}\dfrac{{\scriptstyle(\wedge I)}\dfrac{[A]^1 \quad \begin{array}{c}{\scriptstyle(\to E)}\dfrac{[A]^1 \quad {\scriptstyle(\forall E)}\dfrac{\forall v(A \to (B \wedge C))}{A \to (B \wedge C)}}{B \wedge C}\\ \Sigma_2 \\ \neg(\neg B \vee \neg C)\end{array}}{A \wedge \neg(\neg B \vee \neg C)} \quad {\scriptstyle(\nabla E)}\dfrac{\nabla v A}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad {\scriptstyle(\wedge E)}\dfrac{[A \wedge \neg(\neg B \vee \neg C)]^1}{A}}{\langle A \wedge \neg(\neg B \vee \neg C)[v/\_]\rangle}{\scriptstyle 1}}{\langle \neg(\neg B \vee \neg C)[v/\_]\rangle}}{\nabla v \neg(\neg B \vee \neg C)}$$

Note que mesmo com a transformação da derivação do exemplo 9.2.1 em uma derivação normal do exemplo anterior, tal que em cada um dos caminhos existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) temos que a fórmula $\langle A \wedge \neg(\neg B \vee \neg C)[v/\_]\rangle$ não é uma subfórmula de $\nabla v \neg(\neg B \vee \neg C)$ (a conclusão) e nem é uma subfórmula de $\forall v(A \rightarrow (B \wedge C))$.

Portanto, no sistema de dedução natural $ND(\mathcal{S})$ não temos a propriedade de subfórmula de acordo com a definição usual. Porém, pela proposição 9.2.6 nas derivações normais em $ND(\mathcal{S})$ podemos eliminar algumas aplicações da regra ($\Updownarrow$), obtendo derivações em que os caminhos são subdivididos em no máximo dois subcaminhos marcados.

No cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{S})$ não temos o resultado de eliminação do corte (Hauptsatz). Logo, uma derivação em $SC(\mathcal{S})$ para o seqüente S pode conter ocorrências de fórmulas que não são subfórmulas de nenhuma fórmula de S.

9.2.4 Sistema $ND(\mathcal{L})= ND(\mathcal{B})\cup\{(\wedge^* I), (\vee^* I)\}$

Nesta seção examinaremos as aplicações da regra ($\Updownarrow$) no sistema de dedução natural $ND(\mathcal{L})$.

Como no sistema de dedução natural $ND(\mathcal{S})$, mostraremos que um caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) em uma derivação normal pode ser transformado em uma caminho com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$) e posteriormente demonstraremos que dada uma derivação normal π de A a partir de Γ, π pode ser transformada em uma derivação normal π' tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Lema 9.2.2 *Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{L})$ e seja ρ um caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$). Então, ρ pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra ($\Updownarrow$), tal que todas as aplicações da regras específicas ($\wedge^* I$) e ($\vee^* I$) estão acima de α.*

A prova da proposição 9.2.2 é feita por indução sobre o par (n, r) e é apresentada no apêndice.

Proposição 9.2.7 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{L})$. Então, π pode ser transformada em uma derivação normal π' tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$.*

Prova: A prova é feita por indução sobre o grau de equivalência de uma derivação.

Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{L})$.

Passo base: o grau de equivalência de π é o par (0,1), ou seja, a derivação π possui um único caminho ρ com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e não existem caminhos de ordem superior a de ρ que possua uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Logo, pelo lema 9.2.2 ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$, obtendo a derivação ψ de A a partir de Γ.

Note que ao tranformarmos o caminho ρ em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ podemos criar segmentos maximais apenas em caminhos ρ_i tal que $o(\rho_i) > o(\rho)$ (com $i = 1, ..., n$).

Assim sendo, caso a derivação ψ não seja normal, normalizamos ψ obtendo a derivação normal ψ'.

Caso contrário, $\psi = \psi'$.

Por outro lado, como não existem caminhos de ordem superior a de ρ que possua uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o processo de normalização não altera o caminho ρ' e não cria novos caminhos com aplicações da regra $(\Updownarrow)$, então nem a transformação de ρ em um caminho com um única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e nem processo de normalização cria novos caminhos com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Portanto, π' é uma derivação normal, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Hipótese de indução: a proposição é válida para toda derivação de grau de equivalência menor que $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$.

Seja π uma derivação normal de grau de equivalência $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$.

Tomemos um caminho ρ em π tal que $o(\rho) < o(\rho')$ para todo caminho ρ' em π.

Logo, pelo lema 9.2.2 ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$), obtendo a derivação ψ de A a partir de Γ.

Note que ao tranformarmos o caminho ρ em um caminho com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$) podemos criar segmentos maximais apenas em caminhos ρ_i tal que $o(\rho_i) > o(\rho)$ (com $i = 1, ..., n$).

Assim sendo, caso a derivação ψ não seja normal, normalizamos ψ obtendo a derivação normal ψ' de grau de equivalência igual a $(n(\Updownarrow)', n(\Updownarrow, \Updownarrow)')$.

Caso contrário, $\psi = \psi'$.

Temos que as reduções de normalização não criam novos caminhos com uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Daí, se nas reduções do processo de normalização de ψ juntamos caminhos que anteriormente tinham apenas uma aplicação da regra de equivalência formando um novo caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$), então $n(\Updownarrow) > n(\Updownarrow)'$.

Logo, por hipótese de indução, a derivação ψ' pode ser transformada em uma derivação normal π' de A a partir de Γ tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Se nas reduções do processo de normalização de ψ não juntamos caminhos que anteriormente tinham apenas uma aplicação da regra de equivalência, então $n(\Updownarrow) \geq n(\Updownarrow)'$ e $n(\Updownarrow, \Updownarrow) > n(\Updownarrow, \Updownarrow)'$.

Logo, por hipótese de indução, a derivação ψ' pode ser transformada em uma derivação normal π' de A a partir de Γ, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Portanto, π' é derivação normal de A a partir de Γ, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

■

Exemplo 9.2.8 *A derivação normal em $ND(\mathcal{L})$ de $\nabla v \neg(\neg B \vee \neg C)$ a partir do conjunto $\Gamma = \{\forall v(A \leftrightarrow B), \nabla vA, \nabla vC\}$ é transformada na derivação normal π', tal que em cada caminho temos no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).*

$$
(\nabla I)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}[B \wedge C]^2\\ \Sigma_3\\ \neg(\neg B \vee \neg C)\end{array} \quad (\wedge^* I)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}[A]^1, \forall v(A \leftrightarrow B)\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \quad (\nabla E)\,\dfrac{\nabla vA}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}[B]^1, \forall v(A \leftrightarrow B)\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[v/\_]\rangle}\,1 \quad (\nabla E)\,\dfrac{\nabla vC}{\langle C[v/\_]\rangle}}{\langle (B \wedge C)[v/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}[\neg(\neg B \vee \neg C)]^2\\ \Sigma_4\\ (B \wedge C)\end{array}}{\langle \neg(\neg B \vee \neg C)[v/\_]\rangle}}{\nabla v \neg(\neg B \vee \neg C)}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[A \wedge C]^1}{A}, \forall v(A \leftrightarrow B)\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \quad \dfrac{[A \wedge C]^1}{C}}{\begin{array}{c}B \wedge C\\ \Sigma_3\\ \neg(\neg B \vee \neg C)\end{array}} \quad \dfrac{\dfrac{\nabla vA}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad \dfrac{\nabla vC}{\langle C[v/\_]\rangle}}{\langle (A \wedge C)[v/\_]\rangle} \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\neg B \vee \neg C)]^1\\ \Sigma_4\\ B \wedge C\end{array}}{B}, \forall v(A \leftrightarrow B)\\ \Sigma_2\\ A\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\neg B \vee \neg C)]^1\\ \Sigma_4\\ B \wedge C\end{array}}{C}}{A \wedge C}}{\langle \neg(\neg B \vee \neg C)[v/\_]\rangle}\,1}{\nabla v \neg(\neg B \vee \neg C)}
$$

Note que mesmo com a transformação da derivação do exemplo 9.2.8 em uma derivação normal do exemplo anterior, tal que em cada um dos caminhos existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) e todas as aplicações da regra específica ($\wedge^* I$) estão acima da aplicação da regra ($\Updownarrow$) temos que a fórmula $\langle (A \wedge C)[v/\_] \rangle$ não é uma subfórmula de $\nabla v \neg(\neg B \vee \neg C)$ (a conclusão) e nem de alguma fórmula de Γ.

Portanto, no sistema de dedução natural $ND(\mathcal{L})$ não temos a propriedade de subfórmula de acordo com a definição usual. Porém, pela proposição 9.2.7 nas derivações normais em $ND(\mathcal{L})$ podemos eliminar algumas aplicações da regra ($\Updownarrow$), obtendo derivações em que os caminhos são subdivididos em no máximo dois subcaminhos marcados.

No cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{L})$ não temos o resultado de eliminação do corte (Hauptsatz). Logo, uma derivação em $SC(\mathcal{L})$ para o seqüente S pode conter ocorrências de fórmulas que não são subfórmulas de nenhuma fórmula de S.

9.2.5 Sistema $ND(\mathcal{F})$=$ND(\mathcal{B}) \cup \{(\top^* I), (\perp^* E), (\wedge^* I), (\wedge^* E)\}$

Nesta seção examinaremos as aplicações da regra ($\Updownarrow$) nas derivações em $ND(\mathcal{F})$.

Como na seção anterior, mostraremos inicialmente que um caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) em uma derivação normal pode ser transformado em um caminho com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$) e posteriormente demonstraremos que dada uma derivação normal π de A a partir de Γ, π pode ser transformada em uma derivação normal π', tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Lema 9.2.3 *Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{F})$ e seja ρ um caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$). Então, ρ pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra ($\Updownarrow$), tal que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.*

A prova da proposição 9.2.3 é feita por indução sobre o par (n, r) e é apresentada no apêndice.

Proposição 9.2.8 *Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{F})$. Então, π pode ser transformada em uma derivação normal π', tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$, caso (α) exista, temos que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.*

Prova: A prova é feita por indução sobre o grau de equivalência de uma derivação.

Seja π uma derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{F})$.

Passo base: o grau de equivalência de π é o par (0,1), ou seja, a derivação π possui um único caminho ρ com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e não existem caminhos de ordem superior a de ρ que possua uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Logo, pelo lema 9.2.3 ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$, obtendo a derivação ψ de A a partir de Γ.

Note que ao tranformarmos o caminho ρ em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ podemos criar segmentos maximais apenas em caminhos ρ_i tal que $o(\rho_i) > o(\rho)$ (com $i = 1, ..., n$).

Assim sendo, caso a derivação ψ não seja normal, normalizamos ψ obtendo a derivação normal ψ'.

Caso contrário, $\psi = \psi'$.

Por outro lado, como não existem caminhos de ordem superior a de ρ que possua uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o processo de normalização não altera o caminho ρ' e não cria novos caminhos com aplicações da regra $(\Updownarrow)$, então nem a transformação de ρ em um caminho com um única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e nem o processo de normalização cria novos caminhos com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Portanto, π' é uma derivação normal, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Hipótese de indução: a proposição é válida para toda derivação de grau de equivalência menor que $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$.

Seja π uma derivação normal de grau de equivalência $(n(\Updownarrow), n(\Updownarrow, \Updownarrow))$.

Tomemos um caminho ρ em π tal que $o(\rho) < o(\rho')$ para todo caminho ρ' em π.

Logo, pelo lema 9.2.3 ρ pode ser transformado em um caminho ρ' com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$), obtendo a derivação ψ de A a partir de Γ.

Note que ao tranformarmos o caminho ρ em um caminho com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$) podemos criar segmentos maximais apenas em caminhos ρ_i tal que $o(\rho_i) > o(\rho)$ (com $i = 1, ..., n$).

Assim sendo, caso a derivação ψ não seja normal, normalizamos ψ obtendo a derivação normal ψ' de grau de equivalência igual a $(n(\Updownarrow)', n(\Updownarrow, \Updownarrow)')$.

Caso contrário, $\psi = \psi'$.

Temos que as reduções de normalização não cria novos caminhos com uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Daí, se nas reduções do processo de normalização de ψ juntamos caminhos que anteriormente tinham apenas uma aplicação da regra de equivalência formando um novo caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$), então $n(\Updownarrow) > n(\Updownarrow)'$.

Logo, por hipótese de indução, a derivação ψ' pode ser transformada em uma derivação normal π' de A a partir de Γ, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Se nas reduções do processo de normalização de ψ não juntamos caminhos que anteriormente tinham apenas uma aplicação da regra de equivalência, então $n(\Updownarrow) \geq n(\Updownarrow)'$ e

$n(\Updownarrow, \Updownarrow) > n(\Updownarrow, \Updownarrow)'$.

Logo, por hipótese de indução, a derivação ψ' pode ser transformada em uma derivação normal π' de A a partir de Γ, tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Portanto, π' é derivação normal de A a partir de Γ tal que em todo caminho de π' existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$\blacksquare$

Como mencionamos anteriormente, em sistemas de dedução natural $ND(\Omega)$ com $(\top^* I) \in \Omega$ não temos a propriedade de subfórmula de acordo com a definição usual. Logo, em particular o sistema $ND(\mathcal{F})$ não tem a propriedade de subfórmula.

Porém, pela proposição 9.2.8 nas derivações normais em $ND(\mathcal{F})$ podemos eliminar algumas aplicações da regra $(\Updownarrow)$ obtendo derivações em que os caminhos são subdivididos em no máximo dois sub-caminhos marcadas.

No cálculo de seqüentes $SC(\mathcal{F})$ não temos o resultado de eliminação do corte (Hauptsatz). Logo, uma derivação em $SC(\mathcal{F})$ para o seqüente S pode conter ocorrências de fórmulas que não são subfórmulas de nenhuma fórmula de S.

Capítulo 10

Conclusão

Apresentamos sistemas dedutivos, no estilo de dedução natural e cálculo de seqüentes, para diversas lógicas de "geralmente".

Nos sistemas dedutivos utilizamos fórmulas auxiliares, denominadas de fórmulas marcadas, para expressar e tratar mais facilmente a interação do quantificador ∇ com os operadore da lógica de primeira ordem, pois essa interação depende da lógica de "geralmente" considerada.

Tanto a construção do sistema de dedução natural quanto o de cálculo de seqüentes foram feitos de maneira modular. Cada sistema de dedução natural é obtido do acréscimo de regras específicas que correspondem aos esquemas e axiomas dos sistemas axiomáticos para as LG's. Os sistemas dedutivos têm dois parâmetros: um sistema para a FOL subjacente (lógica minimal, intuicionista ou clássica) e outro para a noção específica de "geralmente" envolvida.

Demonstramos o resultado de normalização para os diferentes sistemas de dedução natural para as LG's e analisamos as derivações. As reduções envolvendo aplicações de regras para fórmulas marcadas são similares às reduções correspondentes para o sistema de dedução natural para a FOL, no entanto, há a necessidade de renomeações nas reduções envolvendo aplicações da regra de equivalência.

A estrutura das derivações normais nos diferentes sistemas de dedução natural para as LG's se assemelham à estrutura de uma derivação normal no sistema de dedução natural para a FOL no seguinte sentido. A estrutura de uma derivação normal nos sistemas para a FOL segue o padrão: eliminações; fórmula mínima; introduções, enquanto que numa derivação normal nos sistemas para as LG's a fórmula mínima é substituida por uma região com manipulações de fórmulas marcadas.

Obtivemos a consistência dos diversos sistemas de dedução para as LG's utilizando a estratégia de "desmarcar" as fórmulas marcadas.

Em [7] é apresentado um sistema de dedução natural para a lógica de filtros e ultrafiltros, tendo como lógica subjacente apenas a lógica clássica, utilizando fórmulas rotuladas. Os rótulos consistem de uma sequência de variáveis marcadas ou não-marcadas que guardam o histórico das aplicações de regras de eliminação. Assim sendo, as fórmulas rotuladas usam uma estrutura mais complexa que as fórmulas marcadas e a estrutura das fórmulas marcadas simplificam a construção modular dos sistemas de dedução natural para as diversas lógicas de "geralmente".

Os cálculos de seqüentes para as LG's são obtidos traduzindo as regras dos sistemas de dedução em regras no estilo de cálculo de seqüentes. Assim sendo, temos regras para fórmulas marcadas localizadas no antecedente ou no conseqüente de um seqüente.

A construção dos sistemas dedutivos para as LG's não transfere todas as propriedades estruturais dos sistemas dedutivos das lógicas subjacentes devido à regra ($\Updownarrow$). Esta regra não contém características usuais das regras dos sistemas dedutivos para a lógica clássica, intuicionista ou minimal. Assim sendo, as derivações nos sistemas de dedução natural para as LG's podem conter ocorrências de fórmulas que não satisfazem à propriedade de subfórmulas e as derivações nos cálculos de seqüentes para as LG's podem conter aplicações da regra do corte irredutíveis.

Demonstramos um resultado que controla as aplicações da regra ($\Updownarrow$) nos sistemas de dedução natural para as LG's e demonstramos o resultado de eliminação do corte para os cálculos de seqüentes para a lógica básica e própria de "geralmente". Para todos os outros cálclulos de seqüentes para as lógicas específicas caracterizamos as ocorrências de aplicações da regra do corte que são irredutíveis.

As aplicações da regra do corte envolvendo fórmulas marcadas que são similares às aplicações da regra do corte para fórmulas não-marcadas puderam ser eliminadas. Porém, nas aplicações da regra do corte que contêm, imediatamente acima, uma aplicação simultânea de uma regra específica e da regra ($\Updownarrow$) não podem ser eliminados devido a não interação de fórmulas marcadas e não-marcadas.

Devemos destacar que na obtenção dos resultados de corretude, de completude, de normalização e a análise da eliminação do corte utilizamos uma estratégia de não particularizar a lógica de "geralmente", ou seja, inicialmente demonstramos um dado resultado para a lógica básica de "geralmente" e instanciamos este resultado para as lógicas específicas sem demonstrarmos para cada uma delas individualmente. Porém, para o resultado que controla a aplicação da regra ($\Updownarrow$) nas derivações normais consideramos sistemas de dedução natural para as lógicas específicas com módulos familiares.

Métodos de prova que se utilizam de fórmulas em forma prenex parecem que não podem ser aplicados em LG's em geral, já que essas formas são obtidas através da interação da negação com os demais operadores, (obtendo-se fórmulas equivalentes) e nas LG's a negação não se distribui sobre o operador ∇, em geral.

Podemos concluir que o estudo desenvolvido nesta tese promove um melhor entendimento do comportamento do operador ∇ com relação aos outros operadores, além disso, dadas à ausência das propriedades de subfórmula e eliminação do corte em algumas LG's, uma alternativa às LG's seria considerar como lógica para as noções vagas a lógica básica de "geralmente" (que é bem comportada), e as demais LG's como teorias. No entanto, ver as LG's como teorias não seria justificável a priori. Nosso trabalho contribui nessa direção.

Referências Bibliográficas

[1] CARNIELLI, A. W., VELOSO, P. A. S. "Ultrafilter logic and generic reasoning". In: G. Gottlob, A. Leitsch & D. Mundici (eds.) *Computational Logic and Proof Theory (LNCS 1289)*, pp. 34-53, Berlin, Springer-Verlag, 1997.

[2] VELOSO, P. A. S., CARNIELLI, A. W., "Logics for qualitative reasoning". In: *D. Gabbay, S. Rahman, J. Symons & J. P. van Bendegem.(eds.) Logic, Epistemology and the Unity of Science*, pp. 487-526, Kluwer Press, Dordretch, 2004.

[3] Bellman, R. E., Zadeh, L. A., "Local and Fuzzy Logics".

[4] Reiter, R., "A Logic for Default Reasoning", *Journal of Artificial Intelligence 13*: 81-132, 1980.

[5] Keenan, E. L., Westerståhl, D. "Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic". In: van Benthem, J., ter Meulen, A. (eds.) *HANDBOOK OF LOGIC AND LANGUAGE*, chapter 15, Elsevier Science B. V., 1997.

[6] Veloso, S. R. M., Veloso, P A. S. "On a Logical Framework for 'Generally"'. *Logic, Artificial Intelligence and Robotics - LAPTEC 2001*, pp. 279-286, 2001.

[7] RENTERÍA, C. J., HAEUSLER, E. H., VELOSO, P. A. S., "NUL: Natural Deduction for Ultrafilter", In: *Bulletin of Section of Logic*, v. 32, n. 4, pp. 191-199,2003.

[8] GENTZEN, G., *Investigations into Logical Deduction.* In: M. E. Szabo (ed.), "The Collected Papers of Gerhard Gentzen", North-Holland, Amsterdan, 1969.

[9] PRAWITZ, D., *Natural Deduction* A Proof-Theoretical Study. Almquist & Wiksdell, Stockholm, 1965.

[10] VAN DALEN, D., *Logic and Structure*. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

[11] Seldin, J., *On the proof-theory of the intermidiate logic MH*, Jornal of Symbolic Logic, 51, pp. 626-647, 1986.

[12] DE MEDEIROS, M. da P. N., *Traduções via Teoria da Prova: Aplicações à Lógica Linear*, Tese de D.Sc., PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.

[13] BARWISE, J., COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. *Linguistics and Philosophy* 4, 159-219, 198.

[14] ENDERTON, H. B. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York, 1972.

[15] VANA, L. B., VELOSO, P. A. S., VELOSO, S. R. M. Sobre lógicas de Geralmente em ambiente de Dedução Natural. In *Anais do V Encontro Nacional de Inteligência Artificial*: 622-630, UNISINOS - São Leopoldo/RS, 2005.

[16] VELOSO, P. A. S., VANA, L. B., VELOSO, S. R. M. "Natural deduction strategies for 'generally' ". In: *Actas de la XI Conferencia de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial* pp.173-182, Santiago de Compostela, 2005.

[17] VELOSO, S. R. M., VELOSO, P. A., VANA, L. B. "Natural Deduction for 'Generally': proof strategies and normalization ". In: *XIV Encontro Brasileiro de Lógica 2006*, Itatiaia, Caderno de Resumo, 2006.

[18] VANA, L. B., VELOSO, P. A., VELOSO, S. R. M. "Natural Deduction for 'Generally' ", *Logic journal of the IGPL*, v. 15, pp. 775-800, 2007.

[19] VANA, L. B., VELOSO, P. A., VELOSO, S. R. M. "Sequent Calculi for 'Generally' ". In: *Pre-Proceedings of the Workshop on Logical and Samantic Frameworks with Applications*, pp. 19-34, Ouro Preto, MG, Brazil, Aug. 2007.

[20] CARNIELLI, A. W., SETTE, A. M., *'Default Operators'*, Abstracts of Workshop on Logic, Language, Information and Computation, Recife, 1994.

[21] CARNIELLI, A. W., VELOSO, P. A. S., *Ultrafilter Logic and Generic Reasoning* em G. Gottlob, A. Leitsch e D. Mundici (eds.), Computational Logic and Proof Theory, Berlin, Springer-Verlag (LNCS 1289), pp. 34-53, 1997.

[22] MOSTOWSKI, A., *On a Generalization of Quantifiers*, Fundamenta Mathematicae 44, 1236, 1957.

[23] ANTONIOU, G., *Nonmonotonic Reasoning*, Cambridge, MIT Press, 1997.

[24] BREWKA, G., *Nonmonotonic Reasoning: Logical Foundations of Commonsense*, Cambridge, Cambridge University Press, 1991.

[25] BREWKA, G., DIX, J., KONOLIGE, K., *Nonmonotonic Reasoning: Overview*, Stanford, CSLI, 1997.

[26] BARWISE, J., COOPER, R. *Generalized Quantifiers and Natural Language*, Linguistics and Philosophy 4, 159-219, 1981.

[27] KEISLER, J. H., *Logic with the Quantifier there Exist Uncountably Many*, Annals of Mathematical Logic 1, 1-93, 1970.

[28] SELDIN, J., *Normalization and Excluded Middle I*, Studia Logica 48, pp. 193-217, 1989.

[29] SLANLEY, J., *A Note on 'Most'*, Analysis 48, 134-135, 1988.

[30] Takeuti, G. *Proof Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdan, 1975.

[31] RESCHER, N., *Plurality Quantification*, Journal of Symbolic Logic 27, 373-374,1962.

[32] BESNARD, P. *An Introduction to Default Logic*, Berlin, Springer-Verlag, 1989.

[33] PETERSON, P. L., *On the Logic of 'Few', 'Many', and 'Most'*, Notre Dame Journal of Formal Logic 20, 155-179, 1979.

[34] VELOSO, P. A. S., VELOSO, S. R. M., *On Logics for 'Generally': Function Interpretation with Applications to Theorem Proving*. COPPE-UFRJ, September 2003.

[35] VELOSO, Sheila R. M., VELOSO, P. A. S., *On Special Functions & Theorem Proving in Logics for 'Generally'* . In G. Bittencourt & G. L. Ramamlho (orgs.) SBIA 2002, LNAI 2507: 1-10, Springer-Verlag, Berlin 2002.

[36] MAREK, V. W., TRUSZCZYŃSKI, M., *Nonmonotonic Logic: Context-dependent Reasoning*, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[37] LUKASZEWICZ, W., *Non-monotonic Reasoning: Formalization of Commonsense Reasoning*, Chichester, Ellis Horwood, 1990.

Apêndice A

Provas de Resultados

Por questões de simplicidade as fórmulas do tipo $A \to B \wedge B \to A$ serão denotadas por $A \leftrightarrow B$ e nos resultados envolvendo os sistemas de dedução natural as fórmulas do tipo $A \to \bot$ serão denotadas por $\neg A$.

A.1 Resultado do capítulo 2

Proposição2.2.1: Existe uma derivação de A a partir de Γ em ML se, e somente se, existe uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ em $SCML$.

Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos que existe uma derivação π de A a partir de Γ em ML.

Substituimos todas as ocorrências de $\bot$ em π por $C \wedge \neg C$, obtendo a derivação ρ de A a partir de Γ em ML.

Passo base: Considere uma derivação ρ de A a partir de Γ em ML, tal que $l(\rho) = 1$.

Logo, ρ é uma árvore contendo um único nó ratulado por A e $A \in \Gamma$.

Então, temos a seguinte derivação de $\Gamma \Rightarrow A$ em $SCML$:

$$\pi' = \cfrac{\cfrac{}{A \Rightarrow A}}{\Gamma \Rightarrow A}$$

Hipótese de indução: a proposição é válida para toda derivação ρ tal que $l(\rho) \leq k$.

Seja ρ uma derivação de A a partir de Γ em ML tal que $l(\rho) = k + 1$.

Então, temos os seguintes casos:

- $\rho = (\wedge I) \dfrac{\begin{array}{cc} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A & B \end{array}}{A \wedge B}$

  Como $l(\rho) = k + 1$, então por hipótese de indução os sequentes $\Gamma_1 \Rightarrow A$ e $\Gamma_2 \Rightarrow B$ são deriváveis em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A}{\quad}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow B}{\quad}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B} (\wedge c)$$

- $(\wedge E) \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma \\ A \wedge B \end{array}}{A}$

  Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução o sequente $\Gamma \Rightarrow A \wedge B$ é derivável em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow A$:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B \quad \dfrac{A \Rightarrow A}{A \wedge B \Rightarrow A} (\wedge a)}{\Gamma \Rightarrow A} (corte)$$

- $\rho = (\vee I) \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma \\ A \end{array}}{A \vee B}$

Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ é derivável em $SCML$.

Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow A \vee B$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}(\vee c)$$

- $\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_2, [A]^i \\ \Sigma_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Gamma_3, [B]^i \\ \Sigma_3 \\ C\end{matrix}}{C}i$

  Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução os sequentes $\Gamma_1 \Rightarrow A \vee B$, $\Gamma_2, A \Rightarrow C$ e $\Gamma_3, B \Rightarrow C$ são deriváveis em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow C$:

$$\dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A \vee B \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma_2, A \Rightarrow C}{}}{A, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma_3, B \Rightarrow C}{}}{B, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow C}}{A \vee B, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow C}(\vee a)}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow C}(corte)$$

- $\rho = (\rightarrow I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma \\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}$

  Logo, $B = \bot$ ou $B \neq \bot$.

  Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução o sequente $A, \Gamma \Rightarrow B$ é derivável em $SCML$.

  Caso 1: $B = \bot$.

  Como $B = \bot$, então $A \rightarrow B = \neg A$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{A,\Gamma \Rightarrow C\wedge\neg C \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{C\Rightarrow C}{C\wedge\neg C\Rightarrow C}(\wedge a)}{\neg C, C\wedge\neg C\Rightarrow}(\neg a)}{C\wedge\neg C, C\wedge\neg C\Rightarrow}(\wedge a)}{C\wedge\neg C\Rightarrow}(Ca)}{A,\Gamma\Rightarrow}(corte)}{\Gamma\Rightarrow\neg A}(\neg c)$$

Caso 2: $B \neq \bot$.

Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \neg A$:

$$\dfrac{A,\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}(\rightarrow c)$$

- $\rho = (\rightarrow E)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2\\ \Sigma_2\\ A\rightarrow B\end{matrix}}{B}$

  Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução os sequentes $\Gamma_1 \Rightarrow A$ e $\Gamma_2 \Rightarrow A \rightarrow B$ são deriváveis em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \Rightarrow A\rightarrow B \qquad \dfrac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad B\Rightarrow B}{A\rightarrow B, \Gamma_1 \Rightarrow B}(\rightarrow a)}{\Gamma_2, \Gamma_1 \Rightarrow B}(corte)}{\dfrac{}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow B}}$$

- $\rho = (\forall I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \Sigma\\ A\end{matrix}}{\forall x A}\ (x \notin free(\Gamma))$

  Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ é derivável em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \forall x A$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}(\forall c)$$

Note que como por hipótese $x \notin free(\Gamma)$, então a regra $(\forall c)$ pode ser aplicanda na derivação acima.

- $\rho = (\forall E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \forall x A\end{array}}{A[x/t]}$

  Como $l(\rho) = k + 1$, então por hipótese de indução o sequente $\Gamma \Rightarrow \forall x A$ é derivável em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow A[x/t]$:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \forall x A \qquad \dfrac{A[x/t] \Rightarrow A[x/t]}{\forall x A[x/t][t/x] \Rightarrow A[x/t]}(\forall a)}{\Gamma \Rightarrow A[x/t]}(corte)$$

  Note que, $\forall x A[x/t][t/x] = \forall x A$.

- $\rho = (\exists I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ A\end{array}}{\exists x A}$

  Como $l(\rho) = k+1$, então por hipótese de indução o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ é derivável em $SCML$.

  Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \exists x A$:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}(\exists c)$$

- $(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma_1\\ \exists x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [A[x/a]]^i\\ \Sigma_2\\ B\end{array}}{B}\ (a \notin occ(\Delta))$

Como $l(\rho) = k + 1$, então por hipótese de indução os sequentes $\Gamma \Rightarrow \exists x A$ e $A[x/a], \Delta \Rightarrow B$ são deriváveis em $SCML$.

Daí, temos a seguinte derivação para o sequente $\Gamma, \Delta \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \exists x A \qquad \dfrac{A[x/a], \Delta \Rightarrow B}{\exists x A[x/a][a/x], \Delta \Rightarrow B}(\exists a)}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B}(cut)$$

Note que como por hipótese $a \notin occ(\Delta)$, então a regra $(\exists a)$ pode ser aplicanda na derivação acima.

$(\Leftarrow)$Suponhamos que existe uma derivação π para o sequente $\Gamma \Rightarrow A$ em $SCML$.

Passo base: Seja π uma derivação de comprimento 1, ou seja, $l(\pi) = 1$.

Logo, π é uma árvore contendo um único nó ratulado pelo sequente $A \Rightarrow A$.

Então, uma árvore contendo um único nó ratulado peala fórmula A é uma derivação de A a partir de A em ML.

Hipótese de indução: a proposição é válida para toda derivação π tal que $l(\pi) \leq k$.

Seja π uma derivação do sequente $\Gamma \Rightarrow A$ em $SCML$ tal que $l(\pi) = k + 1$.

Então, temos os seguintes casos:

- $\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{B, \Gamma \Rightarrow A}(Aa)$

  Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

  Daí, existe uma derivação de A a partir de Γ em ML, então existe uma derivação de A a partir de $\{B\} \cup \Gamma$.

- Os outros casos ondem a última regra aplicada na derinação π é uma regra estrutural é demonstrado de modo análogo.

- $$\pi = \dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow A & \Gamma \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}(\wedge c)$$

  Como $l(\pi) = k+1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

  De mesmo modo, existe uma derivação de B a partir de Γ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de $A \wedge B$ a partir de Γ em ML:

  $$(\wedge I)\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Gamma\\ \Sigma_1' & \Sigma_2'\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$$

- $$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ B, \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{B \wedge C, \Gamma \Rightarrow A}(\wedge a)$$

  Como $l(\pi) = k+1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de $\{B\} \cup \Gamma$ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de A a partir de $\{B \wedge C\} \cup \Gamma$ em ML:

  $$\begin{array}{c}\Gamma, \; \dfrac{B \wedge C}{B}\\ \Sigma'\\ A\end{array}$$

- $$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}(\vee c)$$

  Como $l(\pi) = k+1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $A \vee B$ a partir de Γ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de $A \vee B$ a partir de Γ em ML:

$$
(\vee I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma\\ \Sigma'\\ A\end{matrix}}{A \vee B}
$$

- $\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ B, \Gamma \Rightarrow A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ C, \Gamma \Rightarrow A\end{matrix}}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow A}(\vee a)$

  Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de $\{B\} \cup \Gamma$ em ML.

  De mesmo modo, existe uma derivação de A a partir de $\{C\} \cup \Gamma$ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de A a partir de $\{B \vee C\} \cup \Gamma$ em ML:

$$
(\vee E)\dfrac{B \vee C \qquad \begin{matrix}B, \Gamma\\ \Sigma'_1\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}C, \Gamma\\ \Sigma'_2\\ A\end{matrix}}{A}
$$

- $\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ A, \Gamma \Rightarrow B\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}(\rightarrow c)$

  Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de B a partir de $\{A\} \cup \Gamma$ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de $A \rightarrow B$ a partir de Γ em ML:

$$
(\rightarrow I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma'\\ B\end{matrix}}{A \rightarrow B}i
$$

- $\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ B, \Delta \Rightarrow C\end{matrix}}{A \rightarrow B, \Gamma, \Delta \Rightarrow C}(\rightarrow a)$

Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

De mesmo modo, existe uma derivação de C a partir de $\{B\} \cup \Delta$ em ML.

Logo, temos a seguinte derivação de C a partir de $\{A \to B\} \cup \Delta \cup \Gamma$ em ML:

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma'\\ A\end{array} \quad A \to B}{\begin{array}{c}B \quad , \Delta\\ \Sigma_2'\\ C\end{array}}(\to E)$$

- $\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}(\forall c)\ (x \notin free(\Gamma))$

Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

Logo, temos a seguinte derivação de $\forall x A$ a partir de Γ em ML:

$$(\forall I)\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma'\\ A\end{array}}{\forall x A}$$

Note que como por hipótese $x \notin free(\Gamma)$, então a regra $(\forall I)$ pode ser aplicanda na derivação acima.

- $\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ B, \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{\forall x B, \Gamma \Rightarrow A}(\forall a)$

Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de $\{B\} \cup \Gamma$ em ML.

Logo, temos a seguinte derivação de A a partir de $\{\forall x B\} \cup \Gamma$ em ML:

$$\cfrac{(\forall E)\cfrac{\forall xB}{B,} \quad \Gamma}{\begin{array}{c}\Sigma' \\ A\end{array}}$$

- $\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow A[x/a]\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \exists xA}(\exists c)$

  Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de $\exists xA$ a partir de Γ em ML:

$$(\exists I)\cfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \Sigma' \\ A[x/a]\end{array}}{\exists xA}$$

- $\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ B[x/a], \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{\exists xB, \Gamma \Rightarrow A}(\exists a)\ (a \notin occ(\Gamma \cup \{A\}))$

  Como $l(\pi) = k + 1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de $\{B[x/a]\} \cup \Gamma$ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de A a partir de $\{\exists xB\} \cup \Gamma$ em ML:

$$(\exists E)\cfrac{\exists xB \qquad \begin{array}{c}\Gamma, [B[x/a]]^i \\ \Sigma' \\ A\end{array}}{A}i$$

  Note que como por hipótese $a \notin occ(\Gamma \cup \{A\})$, então a regra $(\exists E)$ pode ser aplicanda na derivação acima.

- $\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ A, \Gamma \Rightarrow\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \neg A}(\neg c)$

Como $l(\pi) = k+1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $\perp$ a partir de $\{A\} \cup \Gamma$ em ML.

Logo, temos a seguinte derivação de $\neg A = A \to \perp$ a partir de Γ em ML:

$$\begin{array}{c} \Gamma, [A]^i \\ \Sigma' \\ \dfrac{\perp}{A \to \perp}\, i \end{array} \quad (\to I)$$

- $\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow A\end{array}}{\neg A, \Gamma \Rightarrow} (\neg a)$

  Como $l(\pi) = k+1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de $\perp$ a partir de $\{A \to \perp\} \cup \Gamma$ em ML:

$$(\to E)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \Sigma' \\ A\end{array} \qquad A \to \perp}{\perp}$$

- $\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ A, \Delta \Rightarrow B\end{array}}{\Gamma, \Delta \Rightarrow B} (corte)$

  Como $l(\pi) = k+1$, então por hipótese de indução existe uma derivação de A a partir de Γ em ML.

  De mesmo modo, existe uma derivação de B a partir de $\{A\} \cup \Delta$ em ML.

  Logo, temos a seguinte derivação de B a partir de $\Delta \cup \Gamma$ em ML:

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma'_1 \\ \Delta, \quad A \\ \Sigma'_2 \\ B \end{array}$$

■

A.2 Resultados do capítulo 5

A.2.1 Resultado da seção 5.1

Teorema5.1.1: Para um conjunto Γ e uma fórmula M em L^{∇^*}:

$$\Gamma \vdash_{ND(\mathcal{B})} M \text{ se, e somente se, } T(\Gamma)\cup[\mathcal{B}] \vdash_{ND^*} T(M).$$

Prova:

($\Leftarrow$)Para demostrarmos que, se $T(\Gamma)\cup[\mathcal{B}] \vdash_{ND^*} T(M)$, então $\Gamma \vdash_{ND(\mathcal{B})} M$, basta mostramos que toda instância dos esquemas em $[\mathcal{B}]$ pode ser demonstrado em $ND(\mathcal{B})$.

[$\nabla\alpha$]: Para uma instância $\nabla xA \leftrightarrow \nabla yA[x/y]$ (com $y \notin occ[A]$) de $[\nabla\alpha]$, teremos a seguinte derivação:

$$(\wedge I)\dfrac{(\rightarrow I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla xA]^1}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\nabla yA[x/\_][\_/y]}}{\nabla xA \rightarrow \nabla yA[x/y]}1 \quad (\rightarrow I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla yA[x/y]]^2}{\langle A[x/y][y/\_]\rangle}}{\nabla xA}}{\nabla yA[x/y] \rightarrow \nabla xA}2}{(\nabla xA \rightarrow \nabla yA[x/y]) \wedge (\nabla yA[x/y] \rightarrow \nabla xA)}$$

[$\leftrightarrow \nabla$]: Para uma instância $\forall v(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\nabla vA \rightarrow \nabla vB)$ de $[\leftrightarrow \nabla]$, teremos a seguinte derivação:

$$\text{Seja } \Pi_1 = (\rightarrow E)\dfrac{A \quad (\wedge E)\dfrac{(\forall E)\dfrac{\forall v(A \leftrightarrow B)}{A \leftrightarrow B}}{A \rightarrow B}}{B}$$

$$\text{Seja } \Pi_2 = (\rightarrow E)\dfrac{B \quad (\wedge E)\dfrac{(\forall E)\dfrac{\forall v(A \leftrightarrow B)}{A \leftrightarrow B}}{B \rightarrow A}}{A}$$

Então,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \quad \dfrac{[\nabla v A]^2}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad \Pi_2}{\langle B[v/\_]\rangle}(\Updownarrow)\,1}{\nabla v B}(\nabla I)}{\nabla v A \to \nabla v B}(\to I)\,2}{\forall v(A \leftrightarrow B) \to (\nabla v A \to \nabla v B)}(\to I)\,3
$$

($\Rightarrow$)Por indução sobre o comprimento de uma derivação, demonstraremos que para toda derivação π em $ND(\mathcal{B})$, existe uma derivação correspondente $T(\pi)$ em ND^*.

Passo base: Considere uma derivação π de M a partir de Γ em $ND(\mathcal{B})$, tal que $l(\pi) = 1$.

Como $l(\pi) = 1$, então $M \in \Gamma$.

Daí, se $M \in \Gamma$, então $T(M) \in T(\Gamma)$.

Portanto, $T(M)$ (uma árvore contendo um único nó rotulado por $T(M)$) é uma derivação de $T(M)$ a partir de $T(\Gamma)$ em ND^*.

Hipótese de indução: o teorema é válida para toda derivação π tal que $l(\pi) \leq k$.

Seja π uma derivação de M a partir de Γ em $ND(\mathcal{B})$ tal que $l(\pi) = k + 1$.

Logo, teremos os seguintes caso:

- π é uma derivação em $ND(\mathcal{B})$ cuja última regra aplicada é (∇E):

$$
\pi = (\nabla E)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ \nabla v A\end{matrix}}{\langle A[v/\_]\rangle}
$$

Como $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\nabla v A) = \nabla v A$ a partir de $T(\Gamma)$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma) \\ \Sigma' \\ \nabla v A \end{array}$$

Por outro lado, temos que $T(\langle A[v/\_]\rangle) = \nabla z A[v/\_][\_/z] = \nabla z A[v/z]$.

Portanto, a partir de Σ' e $\nabla v A \leftrightarrow \nabla z A[v/z]$ (uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$) em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\rightarrow E)\dfrac{\begin{array}{c} T(\Pi) \\ \Sigma' \\ \nabla v A \end{array} \quad (\wedge E)\dfrac{\nabla v A \leftrightarrow \nabla z A[v/z]}{\nabla v A \rightarrow \nabla z A[v/z]}}{\nabla z A[v/z]}$$

- π é uma derivação em $ND(\mathcal{B})$ cuja última regra aplicada é (∇I):

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma \\ \langle A[x/\_]\rangle \end{array}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}.$$

Como $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle A[x/\_]\rangle) = \nabla z A[x/\_][\_/z] = \nabla z A[x/z]$ a partir de $T(\Gamma)$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma) \\ \Sigma' \\ \nabla z A[x/z] \end{array}$$

Por outro lado, temos que $T(\nabla y A[x/\_][\_/y]) = \nabla y A[x/\_][\_/y] = \nabla y A[x/y]$.

Portanto, a partir de Σ' e $\nabla z A[x/z] \leftrightarrow \nabla y A[x/z][z/y]$ (uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$) em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\rightarrow E)\dfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma) \\ \Sigma' \\ \nabla z A[x/z] \end{array} \quad (\wedge E)\dfrac{\nabla z A[x/z] \leftrightarrow \nabla y A[x/z][z/y]}{\nabla z A[x/z] \rightarrow \nabla y A[x/z][z/y]}}{\nabla y A[x/y]}$$

- π é uma derivação em $ND(\mathcal{B})$ cuja última regra aplicada é $(\Updownarrow)$:

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma\\ \langle A[v/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[v/\_]\rangle}\, i$$

Como $l(\Sigma_1) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(B)$ a partir de $T(\Gamma), T(A)$ em ND^*:

$$\begin{array}{c}T(\Gamma), [T(A)]\\ \Sigma_1'\\ T(B)\end{array}$$

De mesmo modo, como $l(\Sigma_2) < l(\pi)$ e $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução temos as seguintes derivações em ND^*, respectivamente:

$$\begin{array}{c}T(\Delta), [T(B)]\\ \Sigma_2'\\ T(A)\end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}T(\Gamma_1)\\ \Sigma'\\ T(\langle A[v/\_]\rangle)\end{array}$$

Por outro lado, $T(B) = B$, $T(A) = A$ (A e B não podem ser fórmulas marcadas), $T(\langle A[v/\_]\rangle) = \nabla z A[x/\_][\_/z] = \nabla z A[x/z]$ e $T(\langle B[v/\_]\rangle) = \nabla y B[v/y]$.

Seja, Π_1 a seguinte derivação (onde $\forall v(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\nabla v A \rightarrow \nabla v B)$ é uma instância do esquema $[\leftrightarrow \nabla]$):

$$\Pi_1 = (\rightarrow E)\dfrac{(\forall I)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}T(\Gamma), [A]^k\\ \Sigma_1'\\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\,k \qquad \dfrac{\begin{array}{c}T(\Delta), [B]^j\\ \Sigma_2'\\ A\end{array}}{B \rightarrow A}\,j}{A \leftrightarrow B}}{\forall v(A \leftrightarrow B)} \qquad \forall v(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\nabla v A \rightarrow \nabla v B)}{\nabla v A \rightarrow \nabla v B}$$

Note que, como $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$, então $x \notin free(T(\Gamma) \cup T(\Delta))$. Logo, a restrição para a aplicação da regra $(\forall E)$ na derivação acima é satisfeita.

Seja, Π_2 a seguinte derivação ($\nabla x A[v/x] \leftrightarrow \nabla v A$ é uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$):

$$\Pi_2 = (\to E)\dfrac{\begin{array}{c} T(\Phi) \\ \Sigma' \\ \nabla x A[v/x] \end{array} \quad (\wedge E)\dfrac{\nabla x A[v/x] \leftrightarrow \nabla v A}{\nabla x A[v/x] \to \nabla v A}}{\nabla v A}$$

Portanto, em ND^* teremos a seguinte derivação:

$$(\to E)\dfrac{(\to E)\dfrac{\begin{array}{c} \Pi_2 \\ \nabla v A \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi_1 \\ \nabla v A \to \nabla v B \end{array}}{\nabla v B} \quad (\wedge E)\dfrac{\nabla v B \leftrightarrow \nabla B[v/y]}{\nabla v B \to \nabla B[v/y]}}{\nabla y B[v/y]}$$

■

A.2.2 Resultado da seção 5.2

Teorema5.2.1:Para um conjunto Γ e uma fórmula M em L^{∇^*}:

$$\Gamma \vdash_{ND(\Omega)} M \text{ se, e somente se, } T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega) \vdash_{ND^*} T(M).$$

Prova:

($\Leftarrow$) Para demostrarmos que, se $T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega) \vdash_{ND} T(M)$, então $\Gamma \vdash_{ND(\Omega)} M$, basta mostrarmos que toda instância dos esquemas em $\mathcal{B}(\Omega)$ pode ser demonstrado em $ND(\Omega)$.

[$\nabla\top$]: Para uma instância $\nabla v(A \to A)$ de $[\nabla\top]$, teremos a seguinte derivação:

$$(\top^* I)\dfrac{\overline{\langle A \to A\rangle}}{\nabla v(A \to A)[\_/v]}$$

[$\bot\nabla$]: Para o axioma $\neg\nabla v\bot$ teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\bot^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla v\bot]^1}{\langle\bot\rangle}}{\bot}}{\neg\nabla v\bot}1$$

[$\nabla\wedge$] Para uma instância $\nabla vA \wedge \nabla vA \to \nabla v(A \wedge B)$ de [$\nabla\wedge$], teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\wedge^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[\nabla vA \wedge \nabla vB]^1}{\nabla vA}}{\langle A[v/\_]\rangle} \qquad (\wedge E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla vA \wedge \nabla vB]^1}{\nabla vB}}{\langle B[v/\_]\rangle}}{\langle A[v/\_] \wedge B[v/\_]\rangle}}{\nabla v(A \wedge B)}}{\nabla vA \wedge \nabla vB \to \nabla v(A \wedge B)}\,1$$

Note que, $\langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle = \langle A[v/\_] \wedge B[v/\_]\rangle$

[$\nabla\vee$] Para uma instância $\nabla vA \wedge \nabla vA \to \nabla v(A \vee B)$ de [$\nabla\vee$], teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\vee^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[\nabla vA \wedge \nabla vB]^1}{\nabla vA}}{\langle A[v/\_]\rangle} \qquad (\wedge E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla vA \wedge \nabla vB]^1}{\nabla vB}}{\langle B[v/\_]\rangle}}{\langle A[v/\_] \vee B[v/\_]\rangle}}{\nabla v(A \vee B)}}{\nabla vA \wedge \nabla vB \to \nabla v(A \vee B)}\,1$$

[$\wedge\nabla$] Para uma instância $\nabla v(A \wedge B) \to \nabla vA \wedge \nabla vB$ de [$\wedge\nabla$], teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\wedge^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla v(A \wedge B)]^1}{\langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle}}{\langle A[v/\_]\rangle}}{\nabla vA} \qquad (\nabla I)\dfrac{(\wedge^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla v(A \wedge B)]^1}{\langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle}}{\langle B[v/\_]\rangle}}{\nabla vB}}{\nabla vA \wedge \nabla vB}}{\nabla v(A \wedge B) \to \nabla vA \wedge \nabla vB}\,1$$

[$\vee\nabla$] Para uma instância $\nabla v(A \vee B) \to \nabla vA \vee \nabla vB$ de [$\vee\nabla$], teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla v(A \vee B)]^1}{\langle (A \vee B)[v/\_]\rangle} \qquad (\vee I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{[\langle A[v/\_]\rangle]^2}{\nabla vA}}{\nabla vA \vee \nabla vB} \qquad (\vee I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{[\langle B[v/\_]\rangle]^2}{\nabla vB}}{\nabla vA \vee \nabla vB}}{\nabla vA \vee \nabla vB}\,2}{\nabla v(A \vee B) \to \nabla vA \vee \nabla vB}\,1$$

[$\nabla\neg$] Para uma instância $\neg\nabla vA \to \nabla v\neg A$ de [$\nabla\neg$], teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\neg^* I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{[\neg\nabla vA]^2 \quad (\nabla I)\dfrac{[\langle A[v/\_]\rangle]^1}{\nabla vA}}{\bot}}{\langle(\neg A)[v/\_]\rangle}1}{\nabla v\neg A}}{\neg\nabla vA \to \nabla v\neg A}2$$

[$\neg\nabla$] Para uma instância $\nabla v\neg A \to \neg\nabla vA$ de [$\neg\nabla$], teremos a seguinte derivação:

$$(\to I)\dfrac{(\neg I)\dfrac{(\neg^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla vA]^1}{\langle A[v/\_]\rangle} \quad (\nabla E)\dfrac{[\nabla v(\neg A)]^2}{\langle(\neg A)[v/\_]\rangle}}{\bot}}{\neg\nabla vA}1}{\nabla v\neg A \to \neg\nabla vA}2$$

($\Rightarrow$) Por indução sobre o comprimento de uma derivação, demonstraremos que para toda derivação π em $ND(\Omega)$, existe uma derivação correspondente $T(\pi)$ em ND^*.

Passo base: Considere uma derivação π de M a partir de Γ em $ND(\Omega)$, tal que $l(\pi) = 1$.

Logo, temos os seguintes casos:

`Caso 1:` π é uma derivação contendo um único nó rotulado por $M \in \Gamma$.

Como $M \in \Gamma$, então $T(M) \in T(\Gamma)$.

Logo, $T(M)$ (uma árvore contendo um único nó rotulado por $T(M)$) é a derivação de $T(M)$ a partir de $T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*.

`Caso 2:` $\pi = (\top^* I)\dfrac{}{\langle A \to A\rangle}$

Como $\pi = (\top^* I)\dfrac{}{\langle A \to A \rangle}$, então $T(\pi) = T(\langle A \to A \rangle) = \nabla x(A \to A) \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Logo, $\nabla x(A \to A)$ (uma árvore contendo um único nó rotulado por $\nabla x(A \to A)$) é a derivação de $\nabla x(A \to A)$ a partir de $T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*.

Hipótese de indução: o teorema é válida para toda derivação π tal que $l(\pi) \leq k$.

Seja π uma derivação de M a partir de Γ em $ND(\Omega)$ tal que $l(\pi) = k + 1$.

Logo, teremos os seguintes caso:

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\perp^* E)$:

$$\pi = (\perp^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \Sigma \\ \langle \perp \rangle\end{array}}{\perp}$$

  Como $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle \perp \rangle) = \nabla x \perp$ a partir de $T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma' \\ \nabla x \perp \end{array} \quad .$$

  Por outro lado, $T(\perp) = \perp$

  Portanto, a partir de Σ' e o axioma $\neg \nabla x \perp$ temos a seguinte derivação de $\perp$ (a partir de $T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega)$) em ND^*:

$$\dfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma) \\ \Sigma' \\ \nabla x \perp \end{array} \qquad \neg \nabla x \perp}{\perp}$$

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\wedge^* I)$:

$$\pi = (\wedge^* I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \langle A[u/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \langle B[v/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[u/\_] \wedge B[v/\_]\rangle}$$

Como $l(\Sigma_1) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle A[u/\_]\rangle) = \nabla y A[u/\_][\_/y] = \nabla y A[u/y]$ a partir de $T(\Gamma_1) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{matrix} T(\Gamma_1)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_1' \\ \nabla y A[u/y] \end{matrix} \quad .$$

Como $l(\Sigma_2) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle B[v/\_]\rangle) = \nabla z B[v/\_][\_/z] = \nabla z B[v/z]$ a partir de $T(\Gamma_2) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{matrix} T(\Gamma_2)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_2' \\ \nabla z B[v/z] \end{matrix}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} T(\langle(A[u/\_] \wedge B[v/\_])\rangle) &= \nabla w(A[u/\_][\_/w] \wedge B[v/\_][\_/w]) = \\ &= \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w]) \end{aligned}$$

Seja Π_1 a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix} T(\Gamma_1)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_1' \\ \nabla y A[u/y] \end{matrix} \qquad (\wedge E)\dfrac{\nabla y A[u/y] \leftrightarrow \nabla w A[u/y][y/w]}{\nabla y A[u/y] \rightarrow \nabla w A[u/y][y/w]}}{\nabla w A[u/y][y/w]}$$

onde $\nabla y A[u/y] \leftrightarrow \nabla w A[u/y][y/w]$ é uma intância do esquema $[\nabla\alpha]$

Seja Π_2 a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix} T(\Gamma_2)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_2' \\ \nabla z B[v/z] \end{matrix} \qquad (\wedge E)\dfrac{\nabla z B[v/z] \leftrightarrow \nabla z B[v/z][z/w]}{\nabla z B[v/z] \rightarrow \nabla z B[v/z][z/w]}}{\nabla w B[v/z][z/w]}$$

onde $\nabla z B[v/z] \leftrightarrow \nabla z B[v/z][z/w]$ é uma intância do esquema $[\nabla\alpha]$

Seja $\alpha = \nabla w A[u/w] \wedge \nabla w B[v/w] \rightarrow \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w])$ uma instância do esquema $[\nabla\wedge]$.

Note que, $\nabla w A[u/y][y/w] = \nabla w A[u/w]$ e $\nabla w B[v/z][z/w] = \nabla w B[v/w]$

Portanto, em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\rightarrow E)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\nabla w A[u/w] \wedge \nabla w B[v/w]} \qquad \alpha}{\nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w])}$$

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\vee^* I)$:

$$(\vee^* I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \langle A[u/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \langle B[v/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[u/\_] \vee B[v/\_]\rangle}$$

Como $l(\Sigma_1) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle A[u/\_]\rangle) = \nabla y A[u/\_][\_/y] = \nabla y A[u/y]$ a partir de $T(\Gamma_1) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{matrix} T(\Gamma_1) \cup \mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_1' \\ \nabla y A[u/y] \end{matrix} \quad .$$

Como $l(\Sigma_2) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle B[v/\_]\rangle) = \nabla z B[v/\_][\_/z] = \nabla z B[v/z]$ a partir de $T(\Gamma_2) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{matrix} T(\Gamma_2) \cup \mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_2' \\ \nabla z B[v/z] \end{matrix}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} T(\langle(A[u/\_] \wedge B[v/\_])\rangle) &= \nabla w(A[u/\_][\_/w] \wedge B[v/\_][\_/w]) = \\ &= \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w]) \end{aligned}$$

Seja Π_1 a seguinte derivação:

$$\Pi_1 = \cfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma_1)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_1' \\ \nabla y A[u/y] \end{array} \qquad (\wedge E)\cfrac{\nabla y A[u/y] \leftrightarrow \nabla w A[u/y][y/w]}{\nabla y A[u/y] \rightarrow \nabla w A[u/y][y/w]}}{\nabla w A[u/y][y/w]}$$

onde $\nabla y A[u/y] \leftrightarrow \nabla w A[u/y][y/w]$ é uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$.

Seja Π_2 a seguinte derivação:

$$\Pi_2 = \cfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma_2)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma_2' \\ \nabla z B[v/z] \end{array} \qquad (\wedge E)\cfrac{\nabla z B[v/z] \leftrightarrow \nabla z B[v/z][z/w]}{\nabla z B[v/z] \rightarrow \nabla z B[v/z][z/w]}}{\nabla w B[v/z][z/w]}$$

onde $\nabla z B[v/z] \leftrightarrow \nabla z B[v/z][z/w]$ é uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$.

Seja $\alpha = \nabla w A[u/w] \wedge \nabla w B[v/w] \rightarrow \nabla w(A[u/w] \vee B[v/w])$ uma instância do esquema $[\nabla\vee]$.

Note que, $\nabla w A[u/y][y/w] = \nabla w A[u/w]$ e $\nabla w B[v/z][z/w] = \nabla w B[v/w]$

Portanto, em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\rightarrow E)\cfrac{(\wedge I)\cfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\nabla w A[u/w] \wedge \nabla w B[v/w]} \qquad \alpha}{\nabla w(A[u/w] \vee B[v/w])}$$

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\wedge^* E)$:

$$(\wedge^* E)\cfrac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma \\ \langle A[u/\_] \wedge B[v/\_]\rangle \end{array}}{\langle A[u/\_]\rangle}$$

Como $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle A[u/\_] \wedge B[v/\_]\rangle) = \nabla w(A[u/\_][\_/w] \wedge B[v/\_][\_/w] = \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w])$ a partir de $T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma' \\ \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w]) \end{array}$$

Por outro lado, temos que: $T(\langle\langle(A[u/\_]\rangle\rangle) = \nabla y(A[u/\_][\_/y] = \nabla yA[u/y]$.

Seja Π_1 a seguinte derivação:

$$\Pi_1 = (\wedge E)\dfrac{(\to E)\dfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma' \\ \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w]) \end{array} \qquad \alpha}{\nabla wA[u/w] \wedge \nabla wB[v/w]}}{\nabla wA[u/w]}$$

onde

$\alpha = \nabla w(A[u/w] \wedge B[v/w]) \to \nabla wA[u/w] \wedge \nabla wB[v/w])$ é uma instância do esquema $[\wedge\nabla]$.

Portanto, em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\to E)\dfrac{\Pi_1 \qquad (\wedge E)\dfrac{\nabla wA[u/w] \leftrightarrow \nabla yA[u/w][w/y]}{\nabla wA[u/w] \to \nabla yA[u/w][w/y]}}{\nabla yA[u/y]}$$

onde $\nabla wA[u/w] \leftrightarrow \nabla yA[u/w][w/y]$ é uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$.

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\vee^* E)$:

$$\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma_1 \\ \Sigma \\ \langle\langle(A \vee B)\rangle\rangle \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Gamma, [\langle A\rangle]^i \\ \Sigma_1 \\ \underline{C} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta, [\langle B\rangle]^i \\ \Sigma_2 \\ \underline{C} \end{array}}{\underline{C}}\, i$$

Como $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle\langle(A \vee B)\rangle\rangle) = \nabla v(A \vee B)[\_/v]$ a partir de $T(\Gamma_1)\cup\mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma_1) \cup \mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma' \\ \nabla v(A \vee B)[\_/v] \end{array}$$

Como $l(\Sigma_1) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\underline{C})$ a partir de $T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ e $T(\langle A \rangle) = \nabla y A[\_/y]$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega), \nabla y A[\_/y] \\ \Sigma_1' \\ T(\underline{C}) \end{array}$$

Como $l(\Sigma_2) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\underline{C})$ a partir de $T(\Delta) \cup \mathcal{B}(\Omega)$ e $T(\langle B \rangle) = \nabla z B[\_/z]$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Delta) \cup \mathcal{B}(\Omega), \nabla z B[\_/z] \\ \Sigma_2' \\ T(\underline{C}) \end{array}$$

Seja Π_1 a seguinte derivação:

$$\Pi_1 = \dfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma_1) \cup \mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma' \\ \nabla v(A \vee B)[\_/v] \end{array} \qquad \nabla v(A \vee B) \to \nabla v A \vee \nabla v B}{\nabla v A \vee \nabla v B}$$

onde $\nabla v(A \vee B) \to \nabla v A \vee \nabla v B$ é uma instância do esquema $[\vee\nabla]$.

Seja Π_2 a seguinte derivação:

$$\Pi_2 = \quad \begin{array}{c} T(\Gamma) \cup \mathcal{B}(\Omega), \; (\to E) \dfrac{[\nabla v A]^i \quad (\wedge E) \dfrac{\nabla v A \leftrightarrow \nabla y A[v/y]}{\nabla v A \to \nabla y A[v/y]}}{\nabla y A[v/y]} \\ \Sigma_1' \\ T(\underline{C}) \end{array}$$

onde $\nabla vA \leftrightarrow \nabla yA[v/y]$ é uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$.

Seja Π_3 a seguinte derivação:

$$\Pi_3 = \quad \begin{array}{c} T(\Delta)\cup\mathcal{B}(\Omega), \quad (\to E)\dfrac{[\nabla vB]^i \quad (\wedge E)\dfrac{\nabla vB \leftrightarrow \nabla zB[v/z]}{\nabla vB \to \nabla zB[v/z]}}{\nabla zB[v/z]} \\ \Sigma_2' \\ T(\underline{C}) \end{array}$$

onde $\nabla vB \leftrightarrow \nabla zB[v/z]$ é uma instância do esquema $[\nabla\alpha]$.

Portanto, em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \nabla vA \vee \nabla vB\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_2 \\ T(\underline{C})\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi_3 \\ T(\underline{C})\end{array}}{T(\underline{C})}\, i$$

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\neg^* I)$:

$$\begin{array}{c} \Gamma, [\langle A\rangle]^i \\ \Sigma \\ (\neg^* I)\dfrac{\perp}{\langle\neg A\rangle}\, i \end{array}$$

Como $l(\Sigma) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\perp) = \perp$ a partir de $T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega)$ e $T(\langle A\rangle) = \nabla vA[\_/v]$ em ND^*:

$$\begin{array}{c} T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega), \nabla vA[\_/v] \\ \Sigma' \\ \perp \end{array} .$$

Por outro lado, $T(\langle\neg A\rangle) = \nabla v(\neg A)[\_/v]$.

Portanto, em ND^* temos a seguinte derivação:

$$(\to E)\dfrac{\begin{array}{c} T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega), \nabla vA[\_/v] \\ \Sigma' \\ (\to I)\dfrac{\perp}{\neg\nabla vA[\_/v]} \end{array} \quad \neg\nabla vA[\_/v] \to \nabla v(\neg A)[\_/v]}{\nabla v(\neg A)[\_/v]}$$

onde $\neg\nabla vA[\_/v] \to \nabla v(\neg A)[\_/v]$ é uma instância do esquema $[\nabla\neg]$.

- π é uma derivação em $ND(\Omega)$ cuja última regra aplicada é $(\neg^* E)$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma_1 \\ \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta \\ \Sigma_2 \\ \langle\neg A\rangle\end{matrix}}{\bot}\,(\neg^* E)$$

Como $l(\Sigma_1) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle A\rangle) = \nabla vA[\_/v]$ a partir de $T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{matrix}T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma'_1 \\ \nabla vA[\_/v]\end{matrix}$$

Como $l(\Sigma_2) < l(\pi)$, então por hipótese de indução existe uma derivação de $T(\langle\neg A\rangle) = \nabla v(\neg A)[\_/v]$ a partir de $T(\Delta)\cup\mathcal{B}(\Omega)$ em ND^*:

$$\begin{matrix}T(\Delta)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma'_2 \\ \nabla v(\neg A)[\_/v]\end{matrix}$$

Por outro lado, $T(\bot) = \bot$.

Portanto, em ND^* temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\begin{matrix}T(\Gamma)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma'_1 \\ \nabla vA[\_/v]\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}T(\Delta)\cup\mathcal{B}(\Omega) \\ \Sigma'_2 \\ \nabla v(\neg A)[\_/v]\end{matrix} \qquad \nabla v(\neg A)[\_/v] \to \neg\nabla vA[\_/v]}{\neg\nabla vA[\_/v]}\,(\to E)}{\bot}\,(\to E)$$

onde $\nabla v(\neg A)[\_/v] \to \neg\nabla vA[\_/v]$ é uma instância do esquema $[\neg\nabla]$.

■

A.3 Resultados do capítulo 6

Lema6.0.1:Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$. Então, π pode ser transformada em um derivação π' de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$ sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Prova:

A prova é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações supérfluas.

Seja π uma derivação de A a partir de Γ.

Passo base: π tem uma aplicação supérflua de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Logo, temos os seguintes casos:

- π tem uma aplicação supérflua de $(\vee E)$.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma_1\\ \underline{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta\\ \Sigma_2\\ \underline{C}\end{array}}{\begin{array}{c}\underline{\mathrm{C}}\\ \Pi_2\end{array}}$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que Γ não contém uma hipótese dercarregada na aplicação de $(\vee E)$.

Então, a derivação π é transformada na derivação π' abaixo sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

$$\pi' = \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma_1\\ \underline{C}\\ \Pi_2\end{array}$$

- π tem uma aplicação supérflua de $(\exists E)$.

$$\pi = (\exists E)\frac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \underline{C}\end{array}}{\begin{array}{c}\underline{C}\\ \Pi_2\end{array}}$$

Logo, Γ não contém uma hipótese dercarregada na aplicação de $(\exists E)$.

Então, a derivação π é transformada na derivação π' abaixo sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

$$\pi' = \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \underline{C}\\ \Pi_2\end{array}$$

- π tem uma aplicação supérflua de $(\vee^* E)$.

$$\pi = (\vee^* E)\frac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \langle A \vee B\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma_1\\ \underline{C}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta\\ \Sigma_2\\ \underline{C}\end{array}}{\begin{array}{c}\underline{C}\\ \Pi_2\end{array}}$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que Γ não contém uma hipótese dercarregada na aplicação de $(\vee E)$.

Então, a derivação π é transformada na derivação π' abaixo sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

$$\pi' = \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma_1\\ \underline{C}\\ \Pi_2\end{array}$$

Hipótese de indução: O lema é satisfeita para toda derivação π com n aplicações supérfluas.

Seja π uma derivação com $n+1$ aplicações supérfluas.

Seja R uma aplicação supérflua de π tal que todas as outras aplicações supérfluas estejam abaixo de R.

Logo, temos os seguintes casos:

- R é uma aplicação supérflua de $(\vee E)$.

  Daí,

$$\pi = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{ccc} & \Gamma & \Delta \\ \Pi_1 & \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A \vee B & \underline{C} & \underline{C} \end{array}}{\begin{array}{c} \underline{C} \\ \Pi_2 \end{array}}$$

  Sem perda de generalidade, suponhamos que Γ não contém uma hipótese dercarregada na aplicação de $(\vee E)$.

  Então, a derivação π é transformada na derivação ρ com n ocorrências de aplicações supérfluas.

$$\rho = \begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma_1 \\ \underline{C} \\ \Pi_2 \end{array}$$

  Por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- R é uma aplicação supérflua de $(\exists E)$.

Daí,

$$\pi = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \exists xA\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \underline{C}\end{array}}{\begin{array}{c}\underline{\mathrm{C}}\\ \Pi_2\end{array}}$$

Logo, Γ não contém uma hipótese dercarregada na aplicação de $(\exists E)$.

Então, a derivação π é transformada na derivação ρ com n ocorrências de aplicações supérfluas.

$$\rho = \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \underline{C}\\ \Pi_2\end{array}$$

Por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- R é uma aplicação supérflua de $(\vee^* E)$.

  Daí,

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ \langle A \vee B\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma_1\\ \underline{C}\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta\\ \Sigma_2\\ \underline{C}\end{array}}{\begin{array}{c}\underline{\mathrm{C}}\\ \Pi_2\end{array}}$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que Γ não contém uma hipótese dercarregada na aplicação de $(\vee E)$.

Então, a derivação π é transformada na derivação ρ com n ocorrências de aplicações supérfluas.

$$\rho = \begin{array}{c} \Gamma \\ \Sigma_1 \\ \underline{C} \\ \Pi_2 \end{array}$$

Por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

■

A.3.1 Resultado da subseção 6.1.1

Lema6.1.1: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.

Prova: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\mathcal{B})$.

Suponhamos que π é uma derivação crítica, tal que $g(\pi) = d$.

Seja R a última inferência de π e seja F uma premissa de R que pertence ao segmento maximal de grau d.

Logo, teremos os seguintes casos (além dos casos demonstrado em [9]):

- F é a conclusão de uma aplicação da regra (∇I), R é (∇E) e $F = \nabla v A[\_/v]$:

$$\pi = (\nabla E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \langle A \rangle\end{array}}{\nabla v A[\_/v]}}{\langle A[\_/v][v/\_] \rangle}$$

$$\Downarrow (\text{redução}\,(\nabla I);(\nabla I) \Rightarrow Id)$$

$$\rho = \begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \langle A \rangle \end{array}$$

Como π é uma derivação crítica de grau d, então o grau de ρ é menor que d; $g(\rho) < d$. Logo, $r(\rho) < r(\pi)$.

Por outro lado, $\langle A \rangle = \langle A[\_/v][v/\_] \rangle$.

Portanto, $\pi' = \rho = \begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \langle A \rangle \end{array}$ e $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$, R é $(\Updownarrow)$ e $F = \langle B[x/\_] \rangle$:

$$\pi = (\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma_2, [B[x/y]]^j \\ \Sigma_3 \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} (\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma_1, [A]^i \\ \Sigma_1 \\ B \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi \\ \langle A[x/\_] \rangle \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta_1, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ A \end{array}}{\langle B[x/\_] \rangle}\ i \\ \| \\ \langle B[x/y][y/\_] \rangle \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta_2, [C]^j \\ \Sigma_4 \\ B[x/y] \end{array}}{\langle C[y/\_] \rangle}\ j$$

$$\Downarrow \text{(redução } (\Updownarrow); (\Updownarrow) \Rightarrow (\Updownarrow))$$

$$\pi' = (\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c} \Gamma_1, [A[x/z]]^k \\ \Sigma_1[x/z] \\ \Gamma_2, B[x/z] \\ \Sigma_3[y/z] \\ C[y/z] \end{array} \quad \begin{array}{c} \Pi \\ \langle A[x/\_] \rangle \\ \| \\ \langle A[x/z][z/\_] \rangle \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta_2, [C[y/z]]^k \\ \Sigma_4[y/z] \\ \Delta_1, B[x/z] \\ \Sigma_2[x/z] \\ A[x/z] \end{array}}{\begin{array}{c} \langle C[y/z][z/\_] \rangle \\ \| \\ \langle C[y/\_] \rangle \end{array}}\ k$$

Como π é uma derivação crítica de grau d ($g(\pi) = d$), então o grau das derivações a seguir é menor que d.

$$\rho = \begin{array}{c}\Pi \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \rho_1 = \begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i \\ \Sigma_1 \\ B\end{array} \quad \rho_2 = \begin{array}{c}\Delta_1, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ A\end{array} \quad \rho_3 = \begin{array}{c}\Gamma_2, [B[x/y]]^j \\ \Sigma_3 \\ C\end{array}$$

$$\rho_4 = \begin{array}{c}\Delta_2, [C]^j \\ \Sigma_4 \\ B[x/y]\end{array}$$

Como $g(\rho_i) < d$ com $i = 1, ..., 4$, então o grau das derivações a seguir também é menor que d.

$$\rho'_1 = \begin{array}{c}\Gamma_1, [A[x/z]]^i \\ \Sigma_1[x/z] \\ B[x/z]\end{array} \quad \rho'_2 = \begin{array}{c}\Delta_1, [B[x/z]]^i \\ \Sigma_2[x/z] \\ A[x/z]\end{array} \quad \rho'_3 = \begin{array}{c}\Gamma_2, [B[x/y][y/z]]^j \\ \Sigma_3[y/z] \\ C[y/z]\end{array}$$

$$\rho'_4 = \begin{array}{c}\Delta_2, [C[y/z]]^j \\ \Sigma_4[y/z] \\ B[x/y][y/z]\end{array}$$

Por outro lado, $gr(B[x/y][y/z]) = gr(\langle B[x/y][y/\_]\rangle) - 0.5$.

Logo, $g(\pi') \leq gr(B[x/y][y/z]) < d$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee E)$, R é (∇E) e $F = \nabla x C$:

$$(\nabla E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma_1 \\ \nabla x C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ \nabla x C\end{array}}{\nabla x C}\, i}{\langle C[x/\_]\rangle}$$

$$\Downarrow \text{(redução permutativa } [\vee_{(\nabla E)}])$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ A \vee B\end{array} \quad (\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma_1 \\ \nabla x C\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle} \quad (\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ \nabla x C\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}}{\langle C[x/\_]\rangle}$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém ∇xC é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \nabla xC$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\nabla xC), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém ∇xC foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal contém $n-1$ ocorrências da fórmula ∇xC.

Daí, $r(\pi') = (gr(\nabla xC), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee E)$, R é $(\Updownarrow)$ e $F = \langle C[x/\_]\rangle$:

$$(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{matrix} \quad (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\vee B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Gamma_2,[A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_2,[B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{matrix}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix}}{\begin{matrix}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{matrix}}\,j$$

$$\Downarrow \text{(redução permutativa } [\vee_{(\Updownarrow)}])$$

$$(\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\vee B\end{matrix}\quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Gamma_2,[A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,j \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[C]^j\\ \Sigma_1\\ D\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_2,[B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_1,[D]^j\\ \Sigma_2\\ C\end{matrix}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,j}{\begin{matrix}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{matrix}}\,i$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \langle C[x/\_]\rangle$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal contém $n-1$ ocorrências da fórmula $\langle C[x/\_]\rangle$.

Daí, $r(\pi') = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\exists E)$, R é (∇E) e $F = \nabla x B$:

$$\pi = (\nabla E)\cfrac{(\exists E)\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \exists x A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma_2 \\ \nabla x B\end{matrix}}{\nabla x B}\, i}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

$$\Downarrow \text{(redução permutativa } [\exists_{(\nabla E)}])$$

$$\pi' = (\exists E)\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \exists x A\end{matrix} \qquad (\nabla E)\cfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^i \\ \Sigma_2 \\ \nabla x B\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}}{\langle B[x/\_]\rangle}\, i$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\nabla x B$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \nabla x B$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\nabla x B), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\nabla x B$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal contém $n-1$ ocorrências da fórmula $\nabla x B$.

Daí, $r(\pi') = (gr(\nabla x B), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\exists E)$, R é $(\Updownarrow)$ e $F = \langle B[x/\_]\rangle$:

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[B]^j\\ \Xi_1\\ C\end{matrix} \quad (\exists E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists xA\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Gamma,[A]^i\\ \Sigma_2\\ \langle B[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{matrix}\Delta_1,[C]^j\\ \Xi_2\\ B\end{matrix}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,j$$

$\Downarrow$ (redução permutativa $[\exists_{(\Updownarrow)}]$)

$$\pi' = (\exists E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists xA\end{matrix} \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[B]^j\\ \Xi_1\\ C\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Gamma,[A]^i\\ \Sigma_2\\ \langle B[x/\_]\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_2,[C]^j\\ \Xi_2\\ B\end{matrix}}{\langle C[x/\_]\rangle}\,j}{\langle C[x/\_]\rangle}\,i$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\langle B[x/\_]\rangle$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \langle B[x/\_]\rangle$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\langle B[x/\_]\rangle), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\langle B[x/\_]\rangle$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal contém $n-1$ ocorrências da fórmula $\langle B[x/\_]\rangle$.

Daí, $r(\pi') = (gr(\langle B[x/\_]\rangle), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

■

A.3.2 Resultado da subseção 6.1.2

Lema6.1.2:Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $ML(\Omega)$.

Suponhamos que π é uma derivação crítica, tal que $g(\pi) = d$.

Seja R a última inferência de π e seja F uma premissa de R que pertence ao segmento maximal de grau d.

Logo, teremos os seguintes casos (além dos casos demonstrados no lema 6.1.1):

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* I)$, R é $(\wedge^* E)$ e $F = \langle F_1 \wedge F_2 \rangle$:

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \langle F_1 \rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \langle F_2 \rangle\end{matrix}}{\langle F_1 \wedge F_2 \rangle}(\wedge^* I)}{\begin{matrix}\langle F_i \rangle \\ \Sigma\end{matrix}}(\wedge^* E) \qquad \text{com } i \in \{1,2\}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \begin{matrix}\Pi_i \\ \langle F_i \rangle \\ \Sigma\end{matrix}$$

Como π é uma derivação crítica de grau d ($g(\pi) = d$), então o grau da derivação a seguir é menor que d.

$$\rho = \begin{matrix}\Pi_1 \\ \langle F_1 \rangle\end{matrix}$$

Por outro lado, $gr(\langle F_1 \wedge F_2 \rangle) > gr(F_i)$, com $i \in \{1, 2\}$.

Logo, $g(\pi') \leq gr(F_i) < d$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* I)$, R é $(\vee^* E)$ e $F = \langle F_1 \vee F_2 \rangle$:

$$
(\vee^* E)\,\dfrac{(\vee^* I)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \langle F_1 \rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \langle F_2 \rangle\end{matrix}}{\langle F_1 \vee F_2 \rangle} \qquad \begin{matrix}\Gamma_1, [\langle F_1 \rangle]^k \\ \Sigma_1 \\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2, [\langle F_2 \rangle]^k \\ \Sigma_2 \\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\, k
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{matrix} & \Pi_i \\ \Gamma_i, & \langle F_i \rangle \\ & \Sigma_i \\ & \underline{M} \end{matrix}
$$

Como π é uma derivação crítica de grau d ($g(\pi) = d$), então o grau das derivações a seguir é menor que d.

$$
\rho = \begin{matrix}\Pi_i \\ \langle F_i \rangle\end{matrix} \qquad \rho' = \begin{matrix}\Gamma_i, [\langle F_i \rangle]^k \\ \Sigma_i \\ \underline{M}\end{matrix}
$$

Por outro lado, $gr(\langle F_1 \vee F_2 \rangle) > gr(F_i)$ (com $i \in \{1, 2\}$).

Logo, $g(\pi') \leq gr(F_i) < d$ (com $i \in \{1, 2\}$).

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\neg^* I)$, R é $(\neg^* E)$ e $F = \langle \neg F \rangle$:

$$
\pi = (\neg^* E)\,\dfrac{(\neg^* I)\,\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\langle F \rangle]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{\langle \neg F \rangle}\, i \qquad \begin{matrix}\Pi \\ \langle F \rangle\end{matrix}}{\bot}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\pi' = \begin{matrix} & \Pi \\ \Gamma, & \langle F \rangle \\ & \Sigma \\ & \bot \end{matrix}
$$

Como π é uma derivação crítica de grau d ($g(\pi) = d$), então o grau das derivações aseguir é menor que d.

$$\rho = \begin{array}{c}\Pi\\ \langle F\rangle\end{array} \qquad \rho' = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle F\rangle]^i\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\langle \neg F\rangle}$$

Por outro lado, $gr(\langle F_1 \vee F_2\rangle) > gr(F_i)$ (com $i \in \{1, 2\}$).

Logo, $g(\pi') \leq gr(F_i) < d$ (com $i \in \{1, 2\}$).

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* E)$, R é $(\Updownarrow)$ e $F = \langle C[x/\_]\rangle$:

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}[C]^i\\ \Sigma_3\\ D\end{array}\quad (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \langle F \vee G\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}[\langle F\rangle]^j\\ \Sigma_1\\ \langle C[v/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}[\langle G\rangle]^j\\ \Sigma_2\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}j\quad \begin{array}{c}[D]^i\\ \Sigma_4\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Sigma'\end{array}}i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \langle F \vee G\rangle\end{array}\quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}[C]^i\\ \Sigma_3\\ D\end{array}\quad \begin{array}{c}[\langle F\rangle]^j\\ \Sigma_1\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}[D]^i\\ \Sigma_4\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}i\quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}[C]^i\\ \Sigma_3\\ D\end{array}\quad \begin{array}{c}[\langle G\rangle]^j\\ \Sigma_2\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}[D]^i\\ \Sigma_4\\ C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}i}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Sigma'\end{array}}j$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \langle C[x/\_]\rangle$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal de grau d em π' tem $n-1$ elementos.

Daí, $r(\pi') = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* E)$, R é uma aplicação de uma regra de eliminação e $F = \underline{M}$:

$$\pi = (R)\,\dfrac{(\vee^*E)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \langle F\vee G\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\langle F\rangle]^i\\ \Sigma_1\\ \underline{M}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\langle G\rangle]^i\\ \Sigma_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\,i \qquad \Sigma_3}{\begin{matrix}\underline{N}\\ \Sigma'\end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\vee^*E)\,\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \langle F\vee G\rangle\end{matrix} \quad (R)\,\dfrac{\begin{matrix}[\langle F\rangle]^i\\ \Sigma_1\\ \underline{M}\end{matrix} \quad \Sigma_3}{\underline{N}} \quad (R)\,\dfrac{\begin{matrix}[\langle G\rangle]^i\\ \Sigma_2\\ \underline{M}\end{matrix} \quad \Sigma_3}{\underline{N}}}{\begin{matrix}\underline{N}\\ \Sigma'\end{matrix}}$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\underline{M}$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \underline{M}$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\underline{M}), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\underline{M}$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal de grau d em π' tem $n-1$ elementos.

Daí, $r(\pi') = (gr(\underline{M}), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\exists E)$, R é uma aplicação de uma regra de eliminação e $F = \underline{M}$:

$$\pi = (R)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \exists xF\end{array}\qquad \begin{array}{c}[F[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \underline{M}\end{array}}{\underline{M}}\,i \qquad \Sigma_2}{\begin{array}{c}\underline{N}\\ \Pi'\end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \exists xF\end{array}\qquad (R)\dfrac{\begin{array}{c}[F[x/a]]^i\\ \Sigma_1\\ \underline{M}\end{array}\qquad \Sigma_2}{\underline{N}}}{\begin{array}{c}\underline{N}\\ \Pi'\end{array}}\,i$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\underline{M}$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \underline{M}$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\underline{M}), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\underline{M}$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal de grau d em π' tem $n - 1$ elementos.

Daí, $r(\pi') = (gr(\underline{M}), n - 1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

■

A.3.3 Resultados da seção 6.2

Proposição6.2.1: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$. Então, π pode ser transformado em uma derivação π' de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$ tal que em π' todas as aplicações da regra de absurdo intuicionista (Abs) têm como conclusão uma fórmula atômica ou uma fórmula generalizada.

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$ em que o maior grau de uma conclusão da aplicação de (Abs) é d, com $d > 0$.

Seja F a conclusão de uma aplicação de (Abs) em π tal que $gr(F) = d$ e mais nenhuma conclusão de uma aplicação de (Abs) em π que esteja acima de F é de grau d.

Então, π tem a seguinte forma:

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ (Abs)\dfrac{\bot}{F} \\ \Sigma_2 \end{array}$$

Logo, temos os casos abaixos e sua respectivas reduções:

- $F = A \wedge B$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ (Abs)\dfrac{\bot}{A \wedge B} \\ \Sigma_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} (\wedge I)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \bot\end{array}}{A} \quad (Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \bot\end{array}}{B}}{A \wedge B} \\ \Sigma_2 \end{array}$$

- $F = A \vee B$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ (Abs)\dfrac{\bot}{A \vee B} \\ \Sigma_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} (\vee I)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \bot\end{array}}{A}}{A \vee B} \\ \Sigma_2 \end{array}$$

- $F = A \rightarrow B$

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ (Abs)\dfrac{\bot}{A \rightarrow B} \\ \Sigma_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} (\rightarrow I)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \bot\end{array}}{B}}{A \rightarrow B} \\ \Sigma_2 \end{array}$$

- $F = \forall x A$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \bot\end{array}}{\forall x A}(Abs) \atop \Sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \bot\end{array}}{A[x/a]}(Abs)}{\forall x A}(\forall I) \atop \Sigma_2$$

a é um parâmetro que não ocorre em π.

- $F = \exists x A$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \bot\end{array}}{\exists x A}(Abs) \atop \Sigma_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \bot\end{array}}{A[x/t]}(Abs)}{\exists x A}(\exists I) \atop \Sigma_2$$

As novas aplicações de (*Abs*) que aparecem a partir destas reduções têm como conclusão uma fórmula de grau menor que d. Assim, por sucessivas aplicações das reduções acima, obtemos uma derivação π' de A a partir de Γ em Ω em que todas as aplicações da regra de absurdo intuicionista (*Abs*) tem como conclusão uma fórmula atômica ou uma fórmula generalizada.

■

Proposição6.2.2: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$. Então, π pode ser transformado em uma derivação π' de A a partir de Γ em $IL(\Omega)$ tal que em π' uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (*Abs*), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Prova: Prova por indução sobre o comprimento de π.

Passo base: $l(\pi) = 1$

Se $l(\pi) = 1$, então π não têm aplicação de (Abs).

Logo, $\pi' = \pi$.

Hipótese de indução: A proposição é satisfeita para toda derivação π de comprimento menor ou igual a k.

Seja π uma derivação de comprimento $k + 1$.

Se $l(\pi) = k + 1$ e $\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ A_1 & A_2 & A_3\end{matrix}}{C}$, então $l(\Sigma_i) \leq k$, para $i = 1, 2$ *ou* 3.

Então, por hipótese de indução podemos tranformar Σ_1, Σ_2 e Σ_3 nas derivações Σ'_1, Σ'_2 e Σ'_3, respectivamente, tais que se existem aplicações (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Se nenhuma Σ'_i, $i \leq 3$, termina com uma aplicação (α) de (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs) ou a aplicação (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$, então

$$(R)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_1 & \Sigma'_2 & \Sigma'_3 \\ A_1 & A_2 & A_3\end{matrix}}{C}$$

é a derivação desejada.

Caso contrário temos os seguintes casos:

(i) (R) é uma aplicação de (∇I).

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e (∇I).

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e (∇I).

$$\text{Logo, } \pi = (\nabla I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}$$

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}$$

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e (∇I).

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e (∇I).

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra (∇I).

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ C \vee D\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ C \vee D\end{matrix} \qquad (\nabla I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\bot}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]} \qquad (\nabla I)\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra (∇I).

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\bot}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle}\, i}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C\vee D\rangle\end{array} \quad (\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]} \quad (\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta,[\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra (∇I).

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists x C\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}\, i}{\nabla y A[x/\_][\_/y]}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists xC\end{array} \quad (\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\nabla yA[x/\_][\_/y]}}{\nabla yA[x/\_][\_/y]}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

(ii) (R) é uma aplicação de $(\Updownarrow)$.

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e (∇I).

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\Updownarrow)$.

Logo, $\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \Psi_1\\ B\end{array} \quad (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i\\ \Psi_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}$

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla xB}}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\Updownarrow)$.

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\Updownarrow)$.

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{array} \quad (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ C\vee D\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[D]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{array}{c}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ C\vee D\end{array} \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[D]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{matrix} \qquad (\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ \langle C\vee D\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{matrix}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta,[\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i \qquad \begin{matrix}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ \langle C\vee D\rangle\end{matrix} \qquad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{matrix}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j \qquad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta,[\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{matrix} \qquad (\exists E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ \exists x C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma,[C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{matrix}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i \qquad \begin{matrix}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists xC\end{array} \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[A]^j\\ \Psi_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[B]^j\\ \Psi_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

(iii) (R) é uma aplicação de $(\bot^* E)$.

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\bot^* E)$.

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\bot^* E)$.

Logo, $$\pi = (\bot^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla x\bot}}{\langle \bot[x/\_]\rangle}}{\bot}$$

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = \begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \bot\end{array}$$

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\bot^* E)$.

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\bot^* E)$.

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra (∇I).

$$\pi = (\bot^* E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ C \vee D\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x \bot}}{\langle \bot[x/\_] \rangle}\\ \Xi\\ \langle \bot[x/\_] \rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle \bot[x/\_] \rangle\end{array}}{\langle \bot[x/\_] \rangle}\, i}{\bot}$$

  onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

  Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ C \vee D\end{array} \qquad (\bot^* E)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x \bot}}{\langle \bot[x/\_] \rangle}\\ \Xi\\ \langle \bot[x/\_] \rangle\end{array}}{\bot} \qquad (\bot^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle \bot[x/\_] \rangle\end{array}}{\bot}}{\bot}\, i$$

  Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra $(\perp^* E)$.

$$\pi = (\perp^* E)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c} (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{array}}{\nabla x\perp}}{\langle\perp[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle\perp[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta,[\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle\perp[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle\perp[x/\_]\rangle}\, i}{\perp}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad (\perp^* E)\dfrac{\begin{array}{c} (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{array}}{\nabla x\perp}}{\langle\perp[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle\perp[x/\_]\rangle\end{array}}{\perp} \quad (\perp^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta,[\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle\perp[x/\_]\rangle\end{array}}{\perp}}{\perp}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra $(\perp^* E)$.

$$\pi = (\perp^*E)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists xC\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma,[C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\perp}{\nabla x\perp}}{\langle\perp[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle\perp[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle\perp[x/\_]\rangle}\,i}{\perp}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists xC\end{array} \qquad (\perp^*E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\perp}{\nabla x\perp}}{\langle\perp[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle\perp[x/\_]\rangle\end{array}}{\perp}}{\perp}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

(iv) (R) é uma aplicação de $(\otimes^* I)$ (com $\otimes \in \{\wedge, \vee\}$).

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\otimes^* I)$.

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\otimes^* I)$.

Logo, $$\pi = (\otimes^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A\otimes B\rangle}$$

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla z(A\otimes B)}}{\langle A\otimes B\rangle}$$

onde z é uma variável que não ocorre em $\langle A[x/\_]\rangle$ e nem em $\langle B\rangle$.

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\otimes^* I)$.

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\otimes^* I)$.

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra $(\otimes^* I)$.

$$\pi = (\otimes^* I)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ C\vee D\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta,[D]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}{}^{i} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A\otimes B\rangle}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ C \vee D\end{matrix} \quad (\otimes^* I)\dfrac{\begin{matrix} (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2'\\ \langle B\rangle\end{matrix}}{\langle A \otimes B\rangle} \quad (\otimes^* I)\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2'\\ \langle B\rangle\end{matrix}}{\langle A \otimes B\rangle}}{\langle A \otimes B\rangle}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra $(\otimes^* I)$.

$$\pi = (\otimes^* I)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix} (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle}\, i \quad \begin{matrix}\Sigma_2'\\ \langle B\rangle\end{matrix}}{\langle A \otimes B\rangle}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$
\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi \\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad (\otimes^* I)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle C\rangle]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle} \\ \Xi \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A \otimes B\rangle} \quad (\otimes^* I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\langle D\rangle]^i \\ \Phi \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A \otimes B\rangle}}{\langle A \otimes B\rangle}\, i
$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra $(\otimes^* I)$.

$$
\pi = (\otimes^* I)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi \\ \exists x C\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle} \\ \Xi \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}\, i \quad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A \otimes B\rangle}
$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$
\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi \\ \exists x C\end{array} \quad (\otimes^* I)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle} \\ \Xi \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A \otimes B\rangle}}{\langle A \otimes B\rangle}\, i
$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

(v) (R) é uma aplicação de $(\wedge^* E)$.

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\wedge^* E)$.

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\wedge^* E)$.

Logo, $\pi = (\wedge^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{\nabla x(A \wedge B)}}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}}{\langle A[x/\_]\rangle}$

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = (\nabla E)\frac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}$$

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\wedge^* E)$.

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\wedge^* E)$.

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra $(\wedge^* E)$.

$$
\pi = (\wedge^* E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ C \vee D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x(A \wedge B)}}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle}
$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$
\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ C \vee D\end{matrix} \qquad (\wedge^* E)\dfrac{\begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x(A \wedge B)}}{\langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad (\wedge^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i
$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra $(\wedge^* E)$.

$$\pi = (\wedge^* E)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\perp}{\nabla x(A\wedge B)}}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}\, i}{\langle A[x/\_]\rangle}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad (\wedge^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\perp}{\nabla x(A\wedge B)}}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad (\wedge^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\langle A[x/\_]\rangle}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra $(\wedge^* E)$.

$$\pi = (\wedge^* E)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists x C\end{array}\qquad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A\wedge B)}}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists x C\end{array}\qquad (\wedge^* E)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A\wedge B)}}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

(vi) (R) é uma aplicação de $(\vee^* E)$.

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\vee^* E)$.

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\vee^* E)$.

Logo, $\pi = (\vee^* E) \dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_1\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x(A \vee B)}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle} \qquad \begin{matrix}\Gamma, [\langle A\rangle]^i\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta, [\langle B\rangle]^i\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}$

Se $\underline{M} = \langle C\rangle$, então a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_1\\ \bot\end{matrix}}{\nabla z C[\_/z]}}{\langle C[\_/z][z/\_]\rangle}$$

onde z não ocorre em C.

Note que, $\langle C[\_/z][z/\_]\rangle = \langle C\rangle$

Se $\underline{M}$ não é uma fórmula marcada, então a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = (Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma'_1\\ \bot\end{matrix}}{\underline{M}}$$

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\vee^* E)$.

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\vee^* E)$.

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra $(\vee^* E)$.

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ C \vee D\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x(A \vee B)}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_1, [D]^i\\ \Phi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}{\scriptstyle i} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}{\scriptstyle j}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ C \vee D\end{matrix} \qquad (\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x(A \vee B)}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}{\scriptstyle j} \qquad \Pi_1}{\underline{M}}{\scriptstyle i}$$

onde $\Pi_1 = (\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [D]^i\\ \Phi\\ \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}\,j$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra $(\vee^* E)$.

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{matrix}}{\nabla x(A \vee B)}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_1, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{matrix}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}{\scriptstyle i} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{matrix}}{\underline{M}}{\scriptstyle j}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \qquad (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A \vee B)}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{array}}{\underline{M}}\,j \qquad \Pi_1}{\underline{M}}\,i$$

$$\text{onde } \Pi_1 = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle (A \wedge B)[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{array}}{\underline{M}}\,j$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra $(\vee^* E)$.

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists x C\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A \vee B)}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle}\,i \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{array}}{\underline{M}}\,j$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists xC\end{array} \quad (\vee^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A \vee B)}}{\begin{array}{c}\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\\ \Xi\\ \langle (A \vee B)[x/\_]\rangle\end{array}} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2, [\langle A\rangle]^j\\ \Psi_1\\ \underline{M}\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^j\\ \Psi_2\\ \underline{M}\end{array}}{\underline{M}}\, j}{\underline{M}}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

(vii) (R) é uma aplicação de $(\neg^* E)$.

Por indução sobre o número de ocorrências de aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\neg^* E)$.

Passo base: Nenhuma aplicação de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\neg^* E)$.

Logo, $\pi = (\neg^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle \neg A\rangle\end{array}}{\bot}$

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\pi' = \begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \bot\end{array}$$

Hipótese de indução: o resultado é válido para n aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou

$(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\neg^* E)$.

Seja π uma derivação tal que existem $n+1$ aplicações de $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$ entre as aplicações das regras (∇E) e $(\neg^* E)$.

Temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\vee E)$ precede a aplicação da regra $(\neg^* E)$.

$$
\pi = \begin{prooftree}
\AxiomC{Ψ}
\noLine
\UnaryInfC{$C \vee D$}
\AxiomC{$\Gamma, [C]^i$}
\noLine
\UnaryInfC{Σ}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{(Abs)}
\UnaryInfC{$\nabla x A$}
\LeftLabel{(∇E)}
\UnaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\noLine
\UnaryInfC{Ξ}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\AxiomC{$\Delta, [D]^i$}
\noLine
\UnaryInfC{Φ}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\LeftLabel{$(\vee E)$}
\RightLabel{i}
\TrinaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\AxiomC{Σ_2'}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle \neg A\rangle$}
\LeftLabel{$(\neg^* E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\end{prooftree}
$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$
\rho = \begin{prooftree}
\AxiomC{Ψ}
\noLine
\UnaryInfC{$C \vee D$}
\AxiomC{$\Gamma, [C]^i$}
\noLine
\UnaryInfC{Σ}
\noLine
\UnaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{(Abs)}
\UnaryInfC{$\nabla x A$}
\LeftLabel{(∇E)}
\UnaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\noLine
\UnaryInfC{Ξ}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\AxiomC{Σ_2'}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle \neg A\rangle$}
\LeftLabel{$(\neg^* E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\AxiomC{$\Delta, [D]^i$}
\noLine
\UnaryInfC{Φ}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle A[x/\_]\rangle$}
\AxiomC{Σ_2'}
\noLine
\UnaryInfC{$\langle \neg A\rangle$}
\LeftLabel{$(\neg^* E)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\LeftLabel{$(\vee E)$}
\RightLabel{i}
\TrinaryInfC{$\bot$}
\end{prooftree}
$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ precede a aplicação da regra $(\neg^* E)$.

$$\pi = (\neg^* E)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle\neg A\rangle\end{array}}{\bot}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \langle C \vee D\rangle\end{array} \quad (\neg^* E)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle C\rangle]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle\neg A\rangle\end{array}}{\bot} \quad (\neg^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\langle D\rangle]^i\\ \Phi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle\neg A\rangle\end{array}}{\bot}}{\bot}\,i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

- Uma aplicação da regra $(\exists E)$ precede a aplicação da regra $(\neg^* E)$.

$$\pi = (\neg^* E)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists x C\end{array} \quad \begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}\,i \quad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle\neg A\rangle\end{array}}{\bot}$$

onde em Ξ temos n aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

Então, a derivação π pode ser transformada em:

$$\rho = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Psi\\ \exists x C\end{array} \quad (\neg^* E)\dfrac{\begin{array}{c}(\nabla E)\dfrac{(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [C[x/a]]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle}\\ \Xi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2'\\ \langle \neg A\rangle\end{array}}{\bot}}{\bot}\, i$$

Então, por hipótese de indução a derivação ρ pode ser transformada em uma derivação π' tal que para uma aplicação (α) da regra (∇E) que tem como premissa, a conclusão de uma aplicação da regra de absurdo intuicionista (Abs), (α) é a última inferência de π' ou (α) precede apenas aplicações das regras $(\vee E)$, $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$.

■

A.3.4 Resultados da seção 6.3

Lema6.3.1: Seja Γ um conjunto de fórmulas e seja A uma fórmula em L^{∇^*}. Então,

$$\Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})} A \text{ se, e somente se, } \Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})^*} A$$

Prova:

$(\Rightarrow)$)Para demostrarmos que, se $\Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})} A$, então $\Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})^*} A$, basta mostramos que existe uma derivação da regra $(\Updownarrow)$ em $CL(\mathcal{B})^*$.

$$\text{Temos a regra } (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \begin{array}{c}\Delta, [B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\, i$$

$x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$

Então em $CL(\mathcal{B})^*$ temos a seguinte derivação de $(\Updownarrow)$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ A\end{matrix} \qquad [\neg A]^j}{\bot}(\neg E)}{\neg B}(\neg I)\, i \qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^k \\ \Sigma_1 \\ B\end{matrix} \qquad [\neg B]^j}{\bot}(\neg E)}{\neg A}(\neg I)\, k}{\langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow)^*\, j
$$

Como $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$, então a regra $(\Updownarrow)^*$ na derivação acima pode ser aplicada.

$(\Leftarrow)$ Para demostrarmos que, se $\Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})^*} A$, então $\Gamma \vdash_{CL(\mathcal{B})} A$, basta mostramos que existe uma derivação da regra $(\Updownarrow)^*$ em $CL(\mathcal{B})$.

Temos a regra $(\Updownarrow)^*$
$$
\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg A]^i \\ \Sigma_1 \\ \neg B\end{matrix} \qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \begin{matrix}\Delta, [\neg B]^i \\ \Sigma_2 \\ \neg A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\, i
$$

$x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$

Então em $CL(\mathcal{B})$ temos a seguinte derivação de $(\Updownarrow)^*$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [\neg B]^i \\ \Sigma_2 \\ \neg A\end{matrix} \qquad [A]^j}{\bot}(\neg E)}{B}(RaA)\, i \qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg A]^k \\ \Sigma_1 \\ \neg B\end{matrix} \qquad [B]^j}{\bot}(\neg E)}{A}(RaA)\, k}{\langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow)\, j
$$

Como $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$, então a regra $(\Updownarrow)$ na derivação acima pode ser aplicada.

■

Teorema 6.3.1:Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$. Então, π pode ser transformado em uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$ tal que π' contém no máximo uma aplicação (α) de regra de absurdo clássico e, caso esta aplicação ocorra, (α)

é a última inferência de π' ou (α) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência de π'.

Prova:

Prova por indução sobre o comprimento de π.

Passo base: $l(\pi) = 1$

Se $l(\pi) = 1$, então π não têm aplicação de (RaA).

Logo, $\pi' = \pi$.

Hipótese de indução: O teorema é satisfeito para toda derivação π de comprimento menor ou igual a k.

Seja π uma derivação de comprimento $k+1$.

Se $l(\pi) = k+1$ e $\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ A_1 & A_2 & A_3\end{matrix}}{C}$, então $l(\Sigma_i) \leq k$, para $i = 1, 2$ *ou* 3.

Então, por hipótese de indução podemos tranformar Σ_1, Σ_2 e Σ_3 nas derivações Σ_1', Σ_2' e Σ_3', respectivamente, tais que se existem aplicações (α) da regra (RaA) em cada uma delas, (α) é a única aplicação da regra de absurdo clássico e (α) é a última inferência ou (α) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência de π'.

Se nenhuma Σ_i', $i \leq 3$, termina com uma aplicação de (RaA) ou a aplicação de (RaA) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência, então

$$(R)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1' & \Sigma_2' & \Sigma_3' \\ A_1 & A_2 & A_3\end{matrix}}{C}$$

é a derivação desejada.

Caso contrário temos os seguintes casos:

(i) (R) é uma aplicação de (∇I).

$$\pi = (\nabla I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\nabla xA]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\nabla yA[x/\_][\_/y]}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla xA]^i}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\nabla yA[x/\_][\_/y]} \qquad [\neg\nabla yA]^j}{\bot}}{\neg\nabla xA}\,i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla yA}\,j$$

(ii) (R) é uma aplicação de $(\Updownarrow)$

- Apenas em Σ'_2 (RaA) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^j\\ \Sigma'_1\\ \neg B\end{array} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Phi, [\neg\nabla xA]^i\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [\neg B]^j\\ \Sigma'_3\\ \neg A\end{array}}{\langle B[y/\_]\rangle}\,j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Phi, \quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^j\\ \Sigma'_1\\ \neg B\end{array} \qquad (\nabla E)\dfrac{[\nabla xA]^k}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [\neg B]^j\\ \Sigma'_3\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\nabla xB} \qquad [\neg\nabla xB]^i}{\bot}}{\neg\nabla xA}\,k\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla xB}\,i}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

- Apenas em Σ'_1 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg A]^j,[\neg(\neg B)]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg B}i \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta,[\neg B]^j\\ \Sigma'_3\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\Updownarrow)\dfrac{(\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad [\neg A]^j, \quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{[B]^l \quad [\neg B]^k}{\bot}}{\neg(\neg B)}k\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg B}l \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta,[\neg B]^j\\ \Sigma'_3\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}j$$

- Apenas em Σ'_3 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg A]^j\\ \Sigma'_1\\ \neg B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Delta,[\neg B]^j,[\neg(\neg A)]^i\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\neg A}i}{\langle B[x/\_]\rangle}j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg A]^j\\ \Sigma'_1\\ \neg B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad (\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, \quad [\neg B]^j, \quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{[A]^l \quad [\neg A]^k}{\bot}}{\neg(\neg A)}k\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\neg A}l}{\langle B[x/\_]\rangle}j$$

- Em Σ'_1 (RaA) é a última inferência e em Σ'_2 (RaA) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg A]^j,[\neg(\neg B)]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg B}i \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Phi,[\neg\nabla xA]^l\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla xA}l}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta,[\neg B]^j\\ \Sigma'_3\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Phi,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{\Pi_1 \quad [\neg\nabla xB]^i}{\bot}}{\neg\nabla xA}\,k \\ \Sigma'_2 \\ \bot\end{matrix}}{\nabla xB}\,i}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\nabla I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{(\neg I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, \quad [\neg A]^j,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{[B]^l \quad [\neg B]^k}{\bot}}{\neg(\neg B)}\,k \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{matrix}}{\neg B}\,l \quad \dfrac{[\nabla xA]^k}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad \begin{matrix}\Delta, [\neg B]^j \\ \Sigma'_3 \\ \neg A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\nabla xB}$$

- Em Σ'_3 (RaA) é a última inferência e em Σ'_2 (RaA) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg A]^j \\ \Sigma'_1 \\ \neg B\end{matrix} \quad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Phi, [\neg\nabla yA]^l \\ \Sigma'_2 \\ \bot\end{matrix}}{\nabla yA}\,l}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Delta, [\neg B]^j, [\neg(\neg A)]^i \\ \Sigma'_3 \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\,i}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}(\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{\Pi_1 \quad [\neg\nabla xB]^i}{\bot}}{\Phi, \neg\nabla xA}\,k \\ \Sigma'_2 \\ \bot\end{matrix}}{\nabla xB}\,i}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\nabla I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg A]^j \\ \Sigma'_1 \\ \neg B\end{matrix} \quad \dfrac{[\nabla xA]^k}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad (\neg I)\dfrac{\begin{matrix}\Delta, \quad [\neg B]^j,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{[A]^l \quad [\neg A]^k}{\bot}}{\neg(\neg A)}\,k \\ \Sigma'_3 \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\,l}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\nabla xB}$$

- Em Σ'_1 e Σ'_3 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg A]^j, [\neg(\neg B)]^i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{matrix}}{\neg B}\,i \quad \begin{matrix}\Sigma'_2 \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{matrix}\Delta, [\neg B]^j, [\neg(\neg A)]^k \\ \Sigma'_3 \\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\,k}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\Updownarrow)\,\dfrac{\Pi_1 \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \qquad \Pi_2}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

onde

$$\Pi_1 = (\neg I)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad [\neg A]^j, \quad (\neg I)\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{[B]^l \quad [\neg B]^k}{\bot}}{\neg(\neg B)}\,k\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg B}\,l$$

$$\Pi_2 = (\neg I)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, \quad [\neg B]^j, \quad (\neg I)\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{[A]^l \quad [\neg A]^k}{\bot}}{\neg(\neg A)}\,k\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\neg A}\,l$$

- Em Σ'_1, Σ'_3 (RaA) é a última inferência e em Σ'_2 (RaA) precede uma aplicação da regra (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\Updownarrow)\,\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^j, [\neg(\neg B)]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg B}\,i \qquad (\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Phi, [\neg\nabla y A]^l\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla y A}\,l}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\neg B]^j, [\neg(\neg A)]^k\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\neg A}\,k}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}(\neg I)\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{(\nabla I)\,\dfrac{(\Updownarrow)\,\dfrac{\Pi_1 \qquad \dfrac{[\nabla x A]^k}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \Pi_2}{\langle B[x/\_]\rangle}\,j}{\nabla x B} \qquad [\neg\nabla x B]^i}{\bot}}{\Phi, \neg\nabla x A}\,k\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla x B}\,i}{\langle B[x/\_]\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\neg I)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad [\neg A]^j, \quad (\neg I)\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{[B]^l \quad [\neg B]^k}{\bot}}{\neg(\neg B)}\,k\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg B}\,l$$

$$\Pi_2 = (\neg I)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, \quad [\neg B]^j, \quad (\neg I)\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{[A]^l \quad [\neg A]^k}{\bot}}{\neg(\neg A)}\,k\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\neg A}\,l$$

(iii) (R) é uma aplicação de $(\wedge^* I)$ ou $(\vee^* I)$.

- Em Σ'_1 (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última regra aplicada.

$$\pi = (\otimes^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg\nabla xA]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{matrix}}{\nabla xA}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{matrix}\Sigma'_2\\ \langle B\rangle\end{matrix}}{\langle A\otimes B\rangle} \quad (\text{com } \otimes \in \{\wedge, \vee\})$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, \quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{\Pi_1 \quad [\neg\nabla y(A\otimes B)]^j}{\bot}}{\neg\nabla xA}\,i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{matrix}}{\nabla y(A\otimes B)}\,j}{\langle A\otimes B\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\nabla I)\dfrac{(\otimes^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla xA]^i}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{matrix}\Sigma'_2\\ \langle B\rangle\end{matrix}}{\langle (A\otimes B)\rangle}}{\nabla y(A\otimes B)}$$

- Em Σ'_2 (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última regra aplicada.

  Demonstrado de maneira análoga.

- Em Σ'_1 e Σ'_2 (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência em π

$$\pi = (\otimes^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg\nabla xA]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{matrix}}{\nabla xA}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Delta, [\neg\nabla yB]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{matrix}}{\nabla yB}\,j}{\langle B[y/\_]\rangle}}{\langle A\otimes B\rangle} \quad (\text{com } \otimes \in \{\wedge, \vee\})$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}(\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}(\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{\Pi_1 \qquad [\neg\nabla x(A\otimes B)]^j}{\bot}}{\Gamma, \neg\nabla xA}\,i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{\Delta, \neg\nabla yB}\,j \\ \Sigma'_2 \\ \bot\end{array}}{\nabla z(A\otimes B)}}{\langle A\otimes B\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\nabla I)\dfrac{(\otimes^* I)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla xA]^i}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \dfrac{[\nabla yB]^j}{\langle B[y/\_]\rangle}}{\langle A\otimes B\rangle}}{\nabla x(A\otimes B)}$$

(iv) (R) é uma aplicação de $(\wedge I)$.

- Em Σ'_1 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\wedge I)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{A}\,i \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ B\end{array}}{A\wedge B}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \; (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{[A]^i \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ B\end{array}}{(A\wedge B)} \qquad [\neg(A\wedge B)]^j}{\bot}}{\neg A}\,i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{A\wedge B}\,j$$

- Em Σ_2' (RaA) é a última inferência.

  Demonstrado de maneira análoga.

- Em Σ_1' e Σ_2' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\wedge I)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{A} \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\neg B]^j \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{array}}{B}\, j}{A \wedge B}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta,\ (\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{[A]^i \quad [B]^j}{(A \wedge B)} \qquad [\neg(A \wedge B)]^k}{\bot}}{\neg A}\, i \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{\neg B}\, j \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{array}}{A \wedge B}\, k$$

(v) (R) é uma aplicação de $(\wedge^* E)$.

$$\pi = (\wedge^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg \nabla x(A \wedge B)]^i \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{\nabla x(A \wedge B)}\, i}{\langle (A \wedge B)[x/\_] \rangle}}{\langle A[x/\_] \rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\wedge^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x(A\wedge B)]^i}{\langle (A\wedge B)[x/\_]\rangle}}{\langle A[x/\_]\rangle}}{\nabla x A} \qquad [\neg\nabla x A]^j}{\bot}}{\neg\nabla x(A\wedge B)}\, i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{\nabla x A}\, j}{\langle A[x/\_]\rangle}$$

(vi) (R) é uma aplicação de $(\wedge E)$.

$$\pi = (\wedge E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg(A\wedge B)]^i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{A\wedge B}\, i}{A}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[(A\wedge B)]^i}{A} \qquad [\neg A]^j}{\bot}}{\neg(A\wedge B)}\, i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{A}\, j$$

(vii) (R) é uma aplicação de $(\vee^* E)$.

- Apenas em Σ'_1 (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\nabla x(A\vee B)]^i \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{\nabla x(A\vee B)}\, i}{\langle (A\vee B)[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A[x/\_]\rangle]^j \\ \Sigma'_2 \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B[x/\_]\rangle]^j \\ \Sigma'_3 \\ C\end{array}}{C}\, j$$

– C não é uma fórmula marcada

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ (\neg E)\dfrac{\qquad\qquad [\neg C]^l}{\bot}\end{array}}{\neg\nabla x(A\vee B)}\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{C}\,l$$

onde

$$\Pi_1 = (\vee^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x(A\vee B)]^i}{\langle (A\vee B)[x/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A[x/\_]\rangle]^j\\ \Sigma_2'\\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B[x/\_]\rangle]^j\\ \Sigma_3'\\ C\end{array}}{C}$$

– C é uma fórmula marcada

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x(A\vee B)]^i}{\langle (A\vee B)[x/\_]\rangle} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A[x/\_]\rangle]^j\\ \Sigma_2'\\ \langle C\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B[x/\_]\rangle]^j\\ \Sigma_3'\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle C\rangle}}{\nabla y C} \quad [\neg\nabla y C]^l}{\bot}}{\neg\nabla x(A\vee B)}\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla y C}\,l}{\langle C\rangle}$$

- Apenas em Σ_2' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \langle A\vee B\rangle\end{array} \quad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A\rangle]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{C}\,j \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^i\\ \Sigma_3'\\ C\end{array}}{C}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \langle A\vee B\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A\rangle]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array} \quad (\neg E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^i\\ \Sigma_3'\\ C\end{array} \quad [\neg C]^j}{\bot}}{\bot}\,i}{C}\,j$$

- Apenas em Σ_3' (RaA) é a última inferência.

O caso

$$
(\vee^* E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\vee B\rangle\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[\langle A\rangle]^i\\ \Sigma_2\\ C\end{array}\qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B\rangle]^i,[\neg C]^j\\ \Sigma_3\\ \bot\end{array}}{C}\,j}{C}\,i
$$

é demonstrado como no caso anterior.

- Em Σ'_2 e Σ'_3 (RaA) é a última inferência.

$$
\pi=(\vee^* E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \langle A\vee B\rangle\end{array}\qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg C]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{C}\,j\qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B\rangle]^i,[\neg C]^l\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{C}\,l}{C}\,i
$$

$$\Downarrow$$

$$
\pi'=(RaA)\,\dfrac{(\vee^* E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \langle A\vee B\rangle\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg C]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}\qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B\rangle]^i,[\neg C]^j\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{C}\,j
$$

- Em Σ'_1 (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência e em Σ'_2 (RaA) é a última inferência.

$$
\pi=(\vee^* E)\,\dfrac{(\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg\nabla x(A\vee B)]^j\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A\vee B)}\,j}{\langle (A\vee B)[x/\_]\rangle}\qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A[x/\_]\rangle]^i,[\neg C]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{C}\,j\qquad (RaA)\ \begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B[x/\_]\rangle]^i\\ \Sigma'_3\\ C\end{array}}{C}\,i
$$

$$\Downarrow$$

$$
\pi'=(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\quad (\neg I)\,\dfrac{(\vee^* E)\,\dfrac{(\nabla E)\,\dfrac{[\nabla x(A\vee B)]^j}{\langle (A\vee B)[x/\_]\rangle}\qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A[x/\_]\rangle]^i,[\neg C]^k\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}\qquad \Pi_1}{\bot}\,i}{\neg\nabla x(A\vee B)}\,j\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{C}\,k
$$

onde

$$
\Pi_1=(\neg E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B[x/\_]\rangle]^i\\ \Sigma'_3\\ C\end{array}\qquad [\neg C]^k}{\bot}
$$

- Em Σ_1' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência e em Σ_3' (RaA) é a última inferência.

  Demonstrado de maneira análoga.

- Em Σ_1' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência e em Σ_2' e Σ_3' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee^* E)\,\dfrac{(\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\nabla x(A \vee B]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A \vee B)}\,j}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle} \qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A[x/\_]\rangle]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{C}\,j \qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B[x/\_]\rangle]^i, [\neg C]^l\\ \Sigma_3'\\ \bot\end{array}}{C}\,l}{C}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad (\neg I)\,\dfrac{(\vee^* E)\,\dfrac{(\nabla E)\,\dfrac{[\nabla x(A \vee B)]^j}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A\rangle]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma_2\\ \bot\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma_3\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{\neg\nabla x(A \vee B)}\,j\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array}}{C}\,k$$

- Apenas em Σ_2' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee^* E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \langle A \vee B\rangle\end{array} \qquad \dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A\rangle]^i, [\neg\nabla x D]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\nabla x D}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^i\\ \Sigma_3'\\ \langle D[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{(\vee^* E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \langle A \vee B\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A\rangle]^i, [\neg\nabla x D]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array} \qquad (\neg E)\,\dfrac{(\nabla I)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2, [\langle B\rangle]^i\\ \Sigma_3'\\ \langle D[x/\_]\rangle\end{array}}{\nabla x D} \qquad [\neg\nabla x D]^j}{\bot}}{\bot}\,i}{\nabla x D}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle}$$

- Apenas em Σ_3' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

  Demonstrado de moaneira análoga.

- Em Σ_2' e Σ_3' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee^*E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \langle A\vee B\rangle\end{array} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla xD}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle B\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\nabla xD}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{(\vee^*E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ \langle A\vee B\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[\langle B\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{\nabla xD}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle}$$

- Em Σ'_1 e Σ'_2 (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee^*E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg\nabla x(A\vee B]^j\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A\vee B)}\,j}{\langle(A\vee B)[x/\_]\rangle} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla xD}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B\rangle]^i\\ \Sigma'_3\\ \langle D[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,\mathrm{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\quad (\neg I)\dfrac{(\vee^*E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x(A\vee B)]^j}{\langle(A\vee B)[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^k\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array} \qquad \Pi_1}{\bot}}{\neg\nabla x(A\vee B)}\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla xD}\,k}{\langle D[x/\_]\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,[\langle B\rangle]^i\\ \Sigma'_3\\ \langle D[x/\_]\rangle\end{array}}{\nabla xD} \qquad [\neg\nabla xD]^k}{\bot}$$

- Em Σ'_1 e Σ'_3 (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência. Demonstrado de modo análogo.
- Em Σ'_1, Σ'_2 e Σ_3 (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee^*E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,[\neg\nabla x(A\vee B]^j\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\nabla x(A\vee B)}\,j}{\langle(A\vee B)[x/\_]\rangle} \qquad \dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle A\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{\nabla xD}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle} \qquad \dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1,[\langle B\rangle]^i,[\neg\nabla xD]^j\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\nabla xD}\,j}{\langle D[x/\_]\rangle}}{\langle D[x/\_]\rangle}\,\mathrm{i}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad (\neg I)\dfrac{(\vee^* E)\dfrac{\Pi_1}{\bot}\,i}{\neg\nabla x(A \vee B)}\,j \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{\nabla x D}\,k}{\langle D[x/\_]\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\nabla E)\dfrac{[\nabla x(A \vee B)]^j}{\langle (A \vee B)[x/\_]\rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle A\rangle]^i, [\neg\nabla x D]^k \\ \Sigma'_2 \\ \bot\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [\langle B\rangle]^i, [\neg\nabla x D]^k \\ \Sigma'_3 \\ \bot\end{array}$$

(viii) (R) é uma aplicação de $(\vee E)$.

- Apenas em Σ'_1 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg(A \vee B)]^j \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{A \vee B}\,j \quad \begin{array}{c}[A]^i \\ \Sigma'_2 \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^i \\ \Sigma'_3 \\ C\end{array}}{C}$$

$$\Downarrow$$

  - C não é uma fórmula marcada.

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad (\neg I)\dfrac{\Pi_1}{\neg(A \vee B)}\,j \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{C}\,k$$

onde

$$\Pi_1 = (\neg E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{[A \vee B]^j \quad \begin{array}{c}[A]^i \\ \Sigma'_2 \\ C\end{array} \quad \begin{array}{c}[B]^i \\ \Sigma'_3 \\ C\end{array}}{C}\,i \qquad [\neg C]^k}{\bot}$$

  - C é uma fórmula marcada.

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{\Pi_1}{\bot}}{\neg(A \vee B)}\\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{\nabla x C}\,j}{\langle C[x/\_]\rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = (\nabla I)\dfrac{(\vee E)\dfrac{[A \vee B]^j \qquad \begin{array}{c}[A]^i\\ \Sigma_2'\\ \langle C\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^i\\ \Sigma_3'\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle C\rangle}}{\nabla x C} \qquad [\neg \nabla x C]^j$$

- Apenas em Σ_2' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ A \vee B\end{array} \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{C}\,j \qquad \begin{array}{c}[B]^i\\ \Sigma_3'\\ C\end{array}}{C}\,i$$

$\Downarrow$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ [A \vee B]^j\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array} \qquad (\neg E)\dfrac{\begin{array}{c}[B]^i\\ \Sigma_3'\\ C\end{array} \qquad [\neg C]^k}{\bot}}{\bot}}{C}$$

- Apenas em Σ_3' (RaA) é a última inferência.
  caso análogo ao anterior.
- Em Σ_1' e Σ_2' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg(A \vee B)]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{A \vee B} \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{C}\,k \qquad \begin{array}{c}[B]^i\\ \Sigma_3'\\ C\end{array}}{C}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\vee E)\dfrac{[A \vee B]^j \qquad \begin{array}{c}[A]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array} \qquad (\neg E)\dfrac{\begin{array}{c}[B]^i\\ \Sigma'_3\\ C\end{array} \qquad [\neg C]^k}{\bot}}{\bot}}{\neg(A \vee B)}\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{C}\,k$$

- Em Σ'_1 e Σ'_3 (RaA) é a última inferência.
  análogo ao anterior.
- Em Σ'_2 e Σ'_3 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ A \vee B\end{array} \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{C}\,k \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[B]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{C}\,j}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma'_1\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{C}\,j$$

- Em Σ'_1, Σ'_2 e Σ'_3 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg(A \vee B))]^i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{A \vee B} \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^j, [\neg C]^l\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{C}\,l \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[B]^i, [\neg C]^k\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{C}\,k}{C}$$

$\Downarrow$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}(\neg E)\dfrac{(\vee E)\dfrac{[A \vee B]^i \qquad \begin{array}{c}[A]^j, [\neg C]^l\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]^j, [\neg C]^l\\ \Sigma'_3\\ \bot\end{array}}{\bot}\,j}{\Gamma, [\neg(A \vee B))]}\,i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{C}\,l$$

- Apenas em Σ'_2 (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1' \\ A \vee B\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}[A]^i, [\neg \nabla x C]^j \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{matrix}}{\nabla x C}\, j}{\langle C \rangle} \qquad \begin{matrix}[B]^i \\ \Sigma_3 \\ \langle C \rangle\end{matrix}}{\langle C \rangle}\, i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1' \\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^i, [\neg \nabla x C]^j \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{matrix} \qquad (\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{\begin{matrix}[B]^i \\ \Sigma_3 \\ \langle C \rangle\end{matrix}}{\nabla x C} \qquad [\neg \nabla x C]^j}{\bot}}{\bot}\, i}{\nabla x C}\, j}{\langle C \rangle}$$

- Apenas em Σ_3' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência. Demonstrado de maneira análoga.
- Em Σ_2' e Σ_3' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\vee)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1' \\ A \vee B\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}[A]^i, [\neg \nabla x C]^j \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{matrix}}{\nabla x C}}{\langle C \rangle} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}[B]^i, [\neg \nabla x C]^l \\ \Sigma_3' \\ \bot\end{matrix}}{\nabla x C}\, l}{\langle C \rangle}}{\langle C \rangle}\, i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{(\vee)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1' \\ A \vee B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A]^i, [\neg \nabla x C]^j \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^i, [\neg \nabla x C]^j \\ \Sigma_3' \\ \bot\end{matrix}}{\bot}\, i}{\nabla x C}\, j}{\langle C \rangle}$$

- Em Σ_2' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência e em Σ_1' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg(A \vee B)]^i \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{A \vee B} \quad (\nabla E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^j, [\neg \nabla x C]^l \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{array}}{\nabla x C}\, l}{\langle C \rangle} \quad \begin{array}{c}[B]^j \\ \Sigma_3' \\ \langle C \rangle\end{array}}{\langle C \rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \ (\neg I)\dfrac{(\vee E)\dfrac{\Pi_1}{\bot}}{\neg(A \vee B)} \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{\nabla x C}\, l}{\langle C \rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = \quad [(A \vee B)]^i \quad \begin{array}{c}[A]^j, [\neg \nabla x C]^l \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{array} \quad (\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}[B]^j \\ \Sigma_3' \\ \langle C \rangle\end{array}}{\nabla x C} \quad [\neg \nabla x C]^l}{\bot}$$

- Em Σ_3' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência e em Σ_1' (RaA) é a última inferência.

  demonstrado de modo análogo.
- Em Σ_2' e Σ_3' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência e em Σ_1' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg(A \vee B)]^i \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{array}}{A \vee B} \quad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A]^j, [\neg \nabla x C]^l \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{array}}{\nabla x C}\, l}{\langle C \rangle} \quad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[B]^j, [\neg \nabla x C]^m \\ \Sigma_3' \\ \bot\end{array}}{\nabla x C}\, m}{\langle C \rangle}}{\langle C \rangle}\, j$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, \; (\neg I)\dfrac{(\vee E)\dfrac{[(A\vee B)]^i \quad \begin{matrix}[A]^j, [\neg\nabla x C]^l \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^j, [\neg\nabla x C]^l \\ \Sigma_3' \\ \bot\end{matrix}}{\bot}\, j}{\neg(A\vee B)} \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{matrix}}{\nabla x C}\, l}{\langle C\rangle}$$

(ix) (R) é uma aplicação de $(\neg^* E)$.

- Apenas em Σ_1' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\neg^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg\nabla x A]^i \\ \Sigma_1' \\ \bot\end{matrix}}{\nabla x A}}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle\neg A\rangle\end{matrix}}{\bot}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \begin{matrix}\Gamma, \; (\neg I)\dfrac{(\neg^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x A]^i}{\langle A[x/\_]\rangle} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle\neg A\rangle\end{matrix}}{\bot}}{\neg\nabla x A} \\ \Sigma_1 \\ \bot\end{matrix}$$

- Apenas em Σ_2' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

O caso $\pi = (\neg^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1' \\ \langle A\rangle\end{matrix} \qquad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\neg\nabla x\neg A]^i \\ \Sigma_2' \\ \bot\end{matrix}}{\nabla x\neg A}}{\langle(\neg A[x/\_])\rangle}}{\bot}$ é demonstrado como no caso anterior.

- Em Σ_1' e Σ_2' (RaA) precede a aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\neg^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\nabla x A]^i\\ \Sigma_1\\ \bot\end{array}}{\nabla x A}\,i}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\neg\nabla x\neg A]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\nabla x\neg A}\,j}{\langle(\neg A)[x/\_]\rangle}}{\bot}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \begin{array}{c}\Delta,\ (\neg I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x A]^i}{\langle A[x/\_]\rangle} \quad (\nabla E)\dfrac{[\nabla x\neg A]^j}{\langle(\neg A)[x/\_]\rangle}}{\bot}}{\neg\nabla x A}\,i\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\neg\nabla x\neg A}\,j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}$$

(x) (R) é uma aplicação de $(\bot^* E)$.

$$\pi = (\bot^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\nabla x\bot]^i\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla x\bot}\,i}{\langle\bot\rangle}}{\bot}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = \begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\bot^* E)\dfrac{(\nabla E)\dfrac{[\nabla x\bot]^i}{\langle\bot\rangle}}{\bot}}{\neg\nabla x\bot}\,\mathrm{i}\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}$$

(xi) A conclusão de (RaA) é $\nabla x\top$ e (RaA) precede uma aplicação de (∇E).

$$\pi = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg \nabla x \top]^i\\ \Sigma\\ \bot\end{array}}{\nabla x \top}}{\langle \top \rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\top^* I)\dfrac{}{\langle \top \rangle}$$

(xii) (R) é uma aplicação de $(\vee I)$.

- Em Σ_1' (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\vee I)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{A}\, i}{A \vee B}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \quad (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\vee I)\dfrac{[A]^i}{(A \vee B)} \quad \neg(A \vee B)}{\bot}}{\neg A}\, i \;\; \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{{\scriptstyle A \vee B}}\, j$$

(xiii) (R) é uma aplicação de $(\exists E)$.

- Apenas em Σ_1' (RaA) é a última regra de inferência.

$$\pi = (\exists E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg \exists x A]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\exists x A}\, j \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i\\ \Sigma_2'\\ B\end{array}}{B}\, i$$

$$\Downarrow$$

– B não é uma fórmula marcada.

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{\Pi_1}{\bot}}{\neg\exists x A}\,j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{B}\,k$$

onde

$$\Pi_1 = (\exists E)\dfrac{[\exists x A]^j \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i\\ \Sigma_2'\\ B\end{array}}{B}\,i \qquad [\neg B]^k$$

– B é uma fórmula marcada.

$$\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\nabla I)\dfrac{(\exists E)\dfrac{[\exists x A]^j \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i\\ \Sigma_2'\\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle B\rangle}\,i}{\nabla x B} \qquad [\neg\nabla x B]^k}{\bot}}{\neg\exists x A}\,j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla x B}\,k}{\langle B\rangle}$$

- Apenas em Σ_2' (RaA) é a última regra de inferência.

$$\pi = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \exists x A\end{array} \qquad (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg B]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{B}\,j}{B}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{(\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \exists x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg B]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{B}\,j$$

- Em Σ_1' e Σ_2' (RaA) é a última regra de inferência.

$$\pi = (\exists E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\exists xA]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\exists xA}\,j \qquad (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg B]^k\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{B}\,k}{B}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad (\neg I)\,\dfrac{(\exists E)\,\dfrac{[\exists xA]^j \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg B]^k\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{\neg\exists xA}\,j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{B}\,k$$

- Apenas em Σ_2' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$\pi = (\exists E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \exists xA\end{array} \qquad (\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg\nabla xB]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\nabla xB}\,j}{\langle B\rangle}}{\langle B\rangle}\,i$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (\nabla E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{(\exists E)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1'\\ \exists xA\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg\nabla xB]^j\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{\nabla xB}\,j}{\langle B\rangle}$$

- Em Σ_1' (RaA) é a última inferência e em Σ_2' (RaA) precede uma aplicação de (∇E) que é a última inferência.

$$
\pi = (\exists E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\exists x A]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\exists x A}\,j \quad (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg\nabla x B]^k\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\nabla x B}\,k}{\langle B\rangle}}{\langle B\rangle}\,i
$$

$$\Downarrow$$

$$
\pi' = (\nabla E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, \quad (\neg I)\dfrac{(\exists E)\dfrac{[\exists x A]^j \qquad \begin{array}{c}[A[x/a]]^i, [\neg\nabla x B]^k\\ \Sigma_2'\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{\neg\exists x A}\,j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\nabla x B}\,k}{\langle B\rangle}
$$

(xiv) (R) é uma aplicação de $(\to I)$.

$$
\pi = (\to I)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [A]^i, [\neg B]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{B}\,j}{A \to B}\,i
$$

$$\Downarrow$$

$$
(RaA)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\to I)\dfrac{(Abs)\dfrac{\Pi_1}{B}}{A \to B} \qquad [\neg(A \to B)]^k}{\bot}}{A \to B}
$$

onde

$$\Pi_1 = \quad \begin{array}{c} \Gamma, [A]^i, (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\to I)\dfrac{[B]^j}{A \to B} \qquad [\neg(A \to B)]^k}{\bot}}{\neg B}\, j \\ \Sigma'_1 \\ \bot \end{array}$$

(xv) (R) é uma aplicação de $(\to E)$.

- Apenas em Σ'_1 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\to E)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A] \\ \Sigma'_1 \\ \bot\end{array}}{A} \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ A \to B\end{array}}{B}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c} \Gamma, (\neg I)\dfrac{(\neg E)\dfrac{(\to E)\dfrac{[A]^i \qquad \begin{array}{c}\Sigma'_2 \\ A \to B\end{array}}{B} \qquad [\neg B]^j}{\bot}}{\neg A}\, i \\ \Sigma'_1 \\ \bot \end{array}}{B}\, j$$

- Apenas em Σ'_2 (RaA) é a última inferência.

  demonstrado de maneira análoga.

- Em Σ'_1 e Σ'_2 (RaA) é a última inferência.

$$\pi = (\to E)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Delta, [\neg(A \to B)]^j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{A \to B}\,j}{B}$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' = (RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Delta, (\neg I)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, (\neg I)\,\dfrac{(\neg E)\,\dfrac{(\to E)\,\dfrac{[A]^i \quad [A \to B]^j}{B} \qquad [\neg B]^k}{\bot}}{\neg A}\,i\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\neg(A \to B)}\,j\\ \Sigma'_2\\ \bot\end{array}}{B}\,k$$

(xvi) (R) é uma aplicação de (RaA).

$$(RaA)\,\dfrac{(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\bot]^i, [\neg C]^j\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{\bot}\,i}{C}\,j$$

$$\Downarrow$$

$$(RaA)\,\dfrac{\begin{array}{c}(\neg I)\,\dfrac{[\bot]^i}{\neg\bot}\,i \qquad [\neg C]^j\\ \Sigma'_1\\ \bot\end{array}}{C}$$

(xvii) (R) é uma aplicação de (Abs).

$$
(Abs)\dfrac{(RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg\bot]^j\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{\bot}\,j}{C}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
(Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma,\ (\neg I)\dfrac{[\bot]^i}{\neg\bot}\,i\\ \Sigma_1'\\ \bot\end{array}}{C}
$$

■

A.3.5 Resultados da subseção 6.3.1

Lema6.3.2: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.

Prova: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Suponhamos que π é uma derivação crítica, tal que $g(\pi) = d$.

Seja R a última inferência de π e seja F uma premissa de R que pertence ao segmento maximal de grau d.

Logo, teremos os seguintes casos (além dos casos que não envolvem a regra $(\Updownarrow)$ demonstrados no lema 6.1.1):

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)^*$, R é $(\Updownarrow)^*$ e $F = \langle B[x/\_]\rangle$:

$$
\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [\neg B[x/y]]^j\\ \Sigma_3\\ \neg C\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [\neg A]^i\\ \Sigma_1\\ \neg B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Pi\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [\neg B]^i\\ \Sigma_2\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i\\ \|\\ \langle B[x/y][y/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\neg C]^j\\ \Sigma_4\\ \neg B[x/y]\end{array}}{\langle C[y/\_]\rangle}\,j
$$

$$\Downarrow (\text{redução}\,(\Updownarrow);(\Updownarrow) \Rightarrow (\Updownarrow))$$

$$\rho = (\Updownarrow)\;\dfrac{\begin{array}[b]{c}\Gamma_1,[\neg A[x/z]]^k\\ \Sigma_1[x/z]\\ \Gamma_2,\neg B[x/z]\\ \Sigma_3[y/z]\\ \neg C[y/z]\end{array} \quad \begin{array}[b]{c}\Pi\\ \langle A[x/\_]\rangle \\ \| \\ \langle A[x/z][z/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}[b]{c}\Delta_2,[\neg C[y/z]]^k\\ \Sigma_4[y/z]\\ \Delta_1,\neg B[x/z]\\ \Sigma_2[x/z]\\ \neg A[x/z]\end{array}}{\begin{array}[t]{c}\langle C[y/z][z/\_]\rangle\\ \|\\ \langle C[y/\_]\rangle\end{array}}\,k$$

Note que esta redução pode criar um novo segmento maximal envolvendo a fórmula não-marcada $\neg B[x/z]$ e $gr(\neg B[x/z]) > gr(\langle B[x/\_]\rangle)$.

Se o segmento S de comprimento $n \geq 1$ da derivação ρ que contém a fórmula $\neg B[x/z]$ é um segmento maximal, então eliminas o segmento maximal S aplicando $n-1$ reduções permutativas e a seguinte redução $(\neg I);(\neg E) \Rightarrow id$:

$$(\neg E)\dfrac{\begin{array}[b]{c}\Gamma\\ \Xi_1\\ B\end{array} \quad (\neg I)\dfrac{\begin{array}[b]{c}\Delta,[B]^i\\ \Xi_2\\ \bot\end{array}}{\neg B}\,i}{\bot} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c}\Delta,\ \begin{array}[b]{c}\Gamma\\ \Xi_1\\ B\end{array}\\ \Xi_2\\ \bot\end{array}$$

Obtendo assim a seguinte derivação:

$$\pi' = (\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [\neg A[x/z]]^k \\ \\ \Sigma_1[x/z] \\ \\ \Gamma_2, \bot \\ \\ \Sigma_3[y/z] \\ \\ \neg C[y/z]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi \\ \langle A[x/\_]\rangle \\ \| \\ \langle A[x/z][z/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\neg C[y/z]]^k \\ \\ \Sigma_4[y/z] \\ \\ \Delta_1, \bot \\ \\ \Sigma_2[x/z] \\ \\ \neg A[x/z]\end{array}}{\begin{array}{c}\langle C[y/z][z/\_]\rangle \\ \| \\ \langle C[y/\_]\rangle\end{array}}\ k$$

Como π é uma derivação crítica de grau d ($g(\pi) = d$), então o grau das derivações a seguir é menor que d.

$$\rho = \begin{array}{c}\Pi \\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \rho_1 = \begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i \\ \Sigma_1 \\ B\end{array} \quad \rho_2 = \begin{array}{c}\Delta_1, [B]^i \\ \Sigma_2 \\ A\end{array} \quad \rho_3 = \begin{array}{c}\Gamma_2, [B[x/y]]^j \\ \Sigma_3 \\ C\end{array}$$

$$\rho_4 = \begin{array}{c}\Delta_2, [C]^j \\ \Sigma_4 \\ B[x/y]\end{array}$$

Como $g(\rho_i) < d$ com $i = 1, ..., 4$, então o grau das derivações a seguir também é menor que d.

$$\rho'_1 = \begin{array}{c}\Gamma_1, [\neg A[x/z]]^i \\ \Sigma_1[x/z] \\ \bot\end{array} \quad \rho'_2 = \begin{array}{c}\Delta_1, \bot \\ \Sigma_2[x/z] \\ \neg A[x/z]\end{array} \quad \rho'_3 = \begin{array}{c}\Gamma_2, \bot \\ \Sigma_3[y/z] \\ \neg C[y/z]\end{array}$$

$$\rho'_4 = \begin{array}{c}\Delta_2, [\neg C[y/z]]^j \\ \Sigma_4[y/z] \\ \bot\end{array}$$

Logo, $g(\pi') \leq gr(B[x/y][y/z]) < d$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

Se o segmento S de comprimento $n \geq 1$ da derivação ρ que contém a fórmula $\neg B[x/z]$ não é um segmento maximal, então $\pi' = \rho$ e $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee E)$, R é $(\Updownarrow)^*$ e $F = \langle C[x/\_]\rangle$:

$$(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[\neg C]^j\\ \Sigma_1\\ \neg D\end{array} \quad (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_2,[B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}i \quad \begin{array}{c}\Delta_1,[\neg D]^j\\ \Sigma_2\\ \neg C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}j$$

$$\Downarrow \text{(redução permutativa } [\vee_{(\Updownarrow)}])$$

$$(\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1\\ A\vee B\end{array}\quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[\neg C]^j\\ \Sigma_1\\ \neg D\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma_2,[A]^i\\ \Sigma_3\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_1,[\neg D]^j\\ \Sigma_2\\ \neg C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}j \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[\neg C]^j\\ \Sigma_1\\ \neg D\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_2,[B]^i\\ \Sigma_4\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}\quad \begin{array}{c}\Delta_1,[\neg D]^j\\ \Sigma_2\\ \neg C\end{array}}{\langle D[x/\_]\rangle}j}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Pi_2\end{array}}i$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \langle C[x/\_]\rangle$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal contém $n-1$ ocorrências da fórmula $\langle C[x/\_]\rangle$.

Daí, $r(\pi') = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

- F é a conclusão de uma aplicação da regra $(\exists E)$, R é $(\Updownarrow)^*$ e $F = \langle B[x/\_]\rangle$:

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1,[\neg B]^j\\ \Xi_1\\ \neg C\end{array}\quad (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \exists x A\end{array}\quad \begin{array}{c}\Gamma,[A]^i\\ \Sigma_2\\ \langle B[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}i \quad \begin{array}{c}\Delta_1,[\neg C]^j\\ \Xi_2\\ \neg B\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}j$$

$$\Downarrow \text{(redução permutativa } [\exists_{(\Updownarrow)}])$$

$$\pi' = (\exists E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \exists x A\end{matrix} \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1, [\neg B]^j\\ \Xi_1\\ \neg C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_2\\ \langle B[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta_2, [\neg C]^j\\ \Xi_2\\ \neg B\end{matrix}}{\langle C[x/\_]\rangle}\, j}{\langle C[x/\_]\rangle}\, i$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\langle B[x/\_]\rangle$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \langle B[x/\_]\rangle$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\langle B[x/\_]\rangle), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\langle B[x/\_]\rangle$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal contém $n-1$ ocorrências da fórmula $\langle B[x/\_]\rangle$.

Daí, $r(\pi') = (gr(\langle B[x/\_]\rangle), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

■

Lema6.3.3: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$. Se em π não temos ocorrências de segmentos maximais envolvendo aplicações das regras (RaA) e (Abs), então existe uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Se π não contém nenhuma ocorrência de segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$, então $\pi' = \pi$.

Caso contrário, se π contêm aplicações supérfluas de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$, então pelo lema

6.0.1 π pode ser transformada em uma derivação ρ sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$ e $(\exists E)$.

Por outro lado, se π contêm segmentos maximais envolvendo apenas aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$, (∇E) e (∇I), então por indução sobre $r(\rho) = (g(\rho), n)$ mostraremos que podemos obter uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$ sem ocorrências de segmentos maximais.

Passo base: $r(\rho) = (0.5, 1)$.

Logo,

$$\rho = (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [\neg B[x/y]]^j\\ \Sigma_3\\ \neg C\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [\neg A]^i\\ \Sigma_1\\ \neg B\end{array} \qquad \langle A[x/\_]\rangle \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [\neg B]^i\\ \Sigma_2\\ \neg A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle}\,i\\ \|\\ \langle B[x/y][y/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\neg C]^j\\ \Sigma_4\\ \neg B[x/y]\end{array}}{\langle C[y/\_]\rangle}\,j$$

onde $B[x/y][y/\_]$ é uma fórmula atômica ou $\perp$.

Daí, eliminamos o segmento maximal $\langle B[x/y][y/\_]\rangle$ de ρ aplicando a redução $(\Updownarrow);(\Updownarrow) \Rightarrow (\Updownarrow)$ e $(\neg I);(\neg E) \Rightarrow id$ se necessário, obtemos:

$$\pi' = (\Updownarrow)\,\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [\neg A[x/z]]^k\\ \\ \Sigma_1[x/z]\\ \\ \Gamma_2, \perp\\ \\ \Sigma_3[y/z]\\ \\ \neg C[y/z]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\langle A[x/\_]\rangle\\ \|\\ \langle A[x/z][z/\_]\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [\neg C[y/z]]^k\\ \\ \Sigma_4[y/z]\\ \\ \Delta_1, \perp\\ \\ \Sigma_2[x/z]\\ \\ \neg A[x/z]\end{array}}{\begin{array}{c}\langle C[y/z][z/\_]\rangle\\ \|\\ \langle C[y/\_]\rangle\end{array}}\,k$$

onde z é x se $x = y$ e, se $x \neq y$, z é uma variável nova (z é uma variável que não ocorre em qualquer subderivação acima de $\langle B[x/\_]\rangle$).

Como $r(\rho) = (0.5, 1)$, então em Σ_i com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ não temos segmentos maximais.

Então, em $\Sigma_1[x/z]$, $\Sigma_2[x/z]$, $\Sigma_3[y/z]$ e $\Sigma_4[y/z]$ também não temos segmentos maximais.

Logo, π' não possui segmento maximal ($r(\pi') = (0, 0)$) e nem aplicações supérfluas de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Hipótese de indução: O teorema é válido para toda ρ tal que $r(\rho) < (d, n)$.

Seja ρ uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$ tal que $r(\rho) = (d, n)$.

Tomemos uma subderivação crítica D em ρ tal que $g(D) = d$.

Pelo lema 6.3.2 a subderivação D poder ser transformada em uma subderivação D' tal que $r(D') < r(D)$.

- Suponhamos que $n = 1$.

  Logo, $S = A$, S pertence a D e todos os outros segmentos maximais de ρ têm grau menor que d.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d', n') com $d' < d$.

  Assim $r(\rho') = (d', n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

- Suponhamos que $n > 1$.

  Logo, temos que o segmento maximal de D é a sequência $A_1, ..., A_m$ com $1 < m \leq n$.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d, n')

com $n' < n$.

Assim $r(\rho') = (d, n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\mathcal{B})^*$.

■

A.3.6 Resultados da subseção 6.3.2

Lema6.3.4: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$. Se π é uma derivação crítica, então existe uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$ tal que $r(\pi') < r(\pi)$.

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

Suponhamos que π é uma derivação crítica, tal que $g(\pi) = d$.

Seja R a última inferência de π e seja F uma premissa de R que pertence ao segmento maximal de grau d.

Logo, teremos os seguintes casos (além dos casos demonstrados nos lemas 6.1.2 e 6.3.2):

- F é conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* E)$, R é $(\Updownarrow)^*$ e $F = \langle C[x/\_]\rangle$:

$$
\pi = (\Updownarrow)\ \dfrac{\begin{array}{c}[\neg C]^i\\ \Sigma_3\\ \neg D\end{array} \quad (\vee^* E)\ \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \langle F \vee G\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[\langle F\rangle]^j\\ \Sigma_1\\ \langle C[v/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[\langle G\rangle]^j\\ \Sigma_2\\ \langle C[x/\_]\rangle\end{array}}{\langle C[x/\_]\rangle}\, j \quad \begin{array}{c}[\neg D]^i\\ \Sigma_4\\ \neg C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D[x/\_]\rangle\\ \Sigma'\end{array}}\, i
$$

$$\Downarrow$$

$$\pi' =$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi \\ \langle F \vee G\rangle\end{matrix} \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}[\neg C]^i \\ \Sigma_3 \\ \neg D\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\langle F\rangle]^j \\ \Sigma_1 \\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg D]^i \\ \Sigma_4 \\ \neg C\end{matrix}}{\langle D[x/\_]\rangle}i \quad (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}[\neg C]^i \\ \Sigma_3 \\ \neg D\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\langle G\rangle]^j \\ \Sigma_2 \\ \langle C[x/\_]\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg D]^i \\ \Sigma_4 \\ \neg C\end{matrix}}{\langle D[x/\_]\rangle}i}{\begin{matrix}\langle D[x/\_]\rangle \\ \Sigma'\end{matrix}}(\vee^* E)\, j$$

Temos que na derivação π o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ é uma sequência $A_1, ..., A_n$ de ocorrências de fórmulas em π tal que $n \geq 2$ e $A_i = \langle C[x/\_]\rangle$, $i = 1, ..., n$.

Logo, como π é uma derivação crítica, então $r(\pi) = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n)$.

Por outro lado, na derivação π' o segmento maximal S que contém $\langle C[x/\_]\rangle$ foi decrescido de um elemento, ou seja, o segmento maximal de grau d em π' tem $n-1$ elementos.

Daí, $r(\pi') = (gr(\langle C[x/\_]\rangle), n-1)$.

Portanto, $r(\pi') < r(\pi)$.

■

Lema6.3.5: Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$. Se em π não temos ocorrências de segmentos maximais envolvendo aplicações das regras (Abs) e (RaA), então existe uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

Prova:

Seja π uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

Se π não contém nenhuma ocorrência de segmento maximal e nem aplicação supérflua de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$, então $\pi' = \pi$.

Caso contrário, se π contêm aplicações supérfluas de $(\vee E)$ ou $(\exists E)$ ou $(\vee^* E)$, então pelo lema 6.0.1 π pode ser transformada em uma derivação ρ sem ocorrências de aplicações supérfluas de $(\vee E)$, $(\exists E)$ e $(\vee^* E)$.

Por outro lado, se π contêm segmentos maximais envolvendo apenas aplicações das regras $(\Updownarrow)^*$, (∇E), (∇I) e regras específicas, então por indução sobre $r(\rho) = (g(\rho), n)$ mostraremos que podemos obter uma derivação π' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$ sem ocorrências de segmentos maximais.

Passo base: $r(\rho) = (0.5, 1)$.

Mostrado de modo análogo ao passo base do lema 6.3.3.

Hipótese de indução: O teorema é válido para toda ρ tal que $r(\rho) < (d, n)$.

Seja ρ uma derivação de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$ tal que $r(\rho) = (d, n)$.

Tomemos uma subderivação crítica D em ρ tal que $g(D) = d$.

Pelo lema 6.3.4 a subderivação D poder ser transformada em uma subderivação D' tal que $r(D') < r(D)$.

- Suponhamos que $n = 1$.

  Logo, $S = A$, S pertence a D e todos os outros segmentos maximais de ρ têm grau menor que d.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d', n') com $d' < d$.

  Assim $r(\rho') = (d', n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

- Suponhamos que $n > 1$.

  Logo, temos que o segmento maximal de D é a sequência $A_1, ..., A_m$ com $1 < m \leq n$.

  Daí, a derivação ρ' obtida a partir da substituição de D por D' em ρ tem rank (d, n') com $n' < n$.

  Assim $r(\rho') = (d, n') < r(\pi) = (d, n)$. Por hipótese de indução, existe uma derivação normal π' de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

Portanto, π' é uma derivação normal de A a partir de Γ em $CL(\Omega)^*$.

■

A.3.7 Resultados da subseção 6.3.3

Lema6.3.6: Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$. Então, nenhuma aplicação de regra de introdução de ND^* precede uma aplicação de regra de eliminação de ND^* em um caminho de π.

Prova:

Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$.

Suponhamos que existe uma aplicação de regra de introdução de ND^* que precede uma aplicação de regra de eliminação de ND^* em um caminho de π.

Como π é uma derivação normal, então a conclusão da aplicação da regra de introdução de ND^* não pode ser premissa da aplicação da regra de eliminação de ND^*.

Logo, existe pelo menos uma aplicação de regra (α) entre as aplicações das regras de introdução e eliminação de ND^*.

Daí, temos os seguintes caso possíveis para (α):

- (α) é uma aplicação de (RaA) ou (Abs),

- $(\alpha) \in \{(\nabla E), (\nabla I), (\Updownarrow)\} \cup \Omega^*$.

Suponhamos que (α) é uma aplicação de (RaA) ou (Abs).

Se (α) é uma aplicação de (RaA) ou (Abs), então a conclusão da regra de introdução de ND^* é $\perp$, que é um absurdo, pois $\perp$ não pode ser a conclusão de uma regra de introdução em ND^*.

Suponhamos que $(\alpha) \in \{(\nabla E), (\nabla I), (\Updownarrow)\} \cup \Omega^*$.

Então a conclusão da regra de introdução de ND^* é uma fórmula generalizada ou uma fórmula marcada, que é um absurdo, pois uma fórmula generalizada ou uma fórmula marcada não pode ser a conclusão de uma regra de introdução em ND^*.

Portanto, uma regra de introdução de ND^* não pode preceder uma aplicação de regra de eliminação de ND^* em um caminho de uma derivação normal.

■

Lema6.3.7: Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$ e seja $\mathcal{C}$ um caminho de π. Então, nenhuma aplicação de regra de introdução precede uma aplicação de regra de eliminação em um subcaminho marcado de $\mathcal{C}$.

Prova: Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$ e seja $\mathcal{C}$ um caminho de π.

Seja $\mathcal{S}$ um sub-caminho marcado de $\mathcal{C}$.

Suponhamos que em $\mathcal{S}$ uma aplicação de regra de introdução precede uma aplicação de regra de eliminação.

Como π é uma derivação normal, então existe pelo menos uma inferência (α) entre as aplicações das regras de introdução e eliminação.

Logo, (α) é (Abs), (RaA) ou $(\Updownarrow)$.

Como as regras de introdução não tem como conclusão $\perp$, então (α) não pode ser

(Abs) e nem (RaA).

Por outro lado, se (α) é $(\Updownarrow)$, então a partir da definição 6.3.6 teremos que a conclusão da regra de introdução e a premissa da regras de eliminação estarão em sub-caminhos marcados distintos e não em $\mathcal{S}$.

Portanto, nenhuma aplicação de regra de introdução precede uma aplicação de regra de eliminação. ■

A.3.8 Resultado da subseção 6.3.4

Lema6.3.8: Seja A uma fórmula em L^{∇^*} e seja Γ um conjunto de fórmulas em L^{∇^*}. Se $\Gamma \vdash_{ND(\Omega)} A$ e c é uma constante de L^{∇^*} que não ocorre na derivação de A a partir de Γ, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A)_c$.

Prova: Prova por indução sobre o comprimento de uma derivação.

Suponhamos que $\Gamma \vdash_{ND(\Omega)} A$ e seja c uma constante em L^{∇^*} que não ocorre na derivação de A a partir de Γ.

Passo base: derivação de comprimento 1 ($n = 1$).

Se $n = 1$, então $A \in \Gamma$ ou a derivação de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$ contém uma única aplicação da regra $(\top^* I)$.

Se $A \in \Gamma$, então $(A)_c \in (\Gamma)_c$.

Logo, $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A)_c$

Por outro lado, se a derivação π de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$ contém uma única aplicação da regra $(\top^* I)$, então

$$\pi = \frac{}{\langle (A \rightarrow A)[x/\_] \rangle}$$

Temos que, $(\langle(A \to A)[x/\_]\rangle)_c = (A \to A)[x/\_][\_/c] = A[x/\_][\_/c] \to A[x/\_][\_/c]$.

Logo,

$$\pi' = (\to I)\frac{[A[x/\_][\_/c]]^1}{A[x/\_][\_/c] \to A[x/\_][\_/c]}1$$

é a derivação de $(A)_c$ a partir de $(\Gamma)_c$ em ND.

Hipótese de indução: o teorema é válido para toda derivação de comprimento igual ou menor que k.

Seja π a derivação de A a partir de Γ em $ND(\Omega)$ com comprimento $n = k + 1$.

Então, temos os seguintes casos:

- $\pi = (\nabla I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \langle A\rangle\end{array}}{\nabla y A[\_/y]}\ (y \notin occ[A])$

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \langle A\rangle\end{array}$ tem comprimento k. Por hipótese de indução $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A[\_/c])_c$.

  Por outro lado, $(\nabla y A[\_/y])_c = (A[y/c])_c = (A[\_/c])_c$.

  Como $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A[\_/c])_c$ e $(\nabla y A[\_/y])_c = (A[\_/c])_c$, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\nabla y A[\_/y])_c$.

- $\pi = (\nabla E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \nabla x A\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle}$

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \nabla x A\end{array}$ tem comprimento k. Por hipótese de indução $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A[x/c])_c$.

Por outro lado, $(\langle A[x/\_]\rangle)_c = (A[x/\_][\_/c])_c = (A[x/c])_c$.

Como $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A[x/c])_c$ e $(\langle A[x/\_]\rangle)_c = (A[x/c])_c$, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\langle A[x/\_]\rangle)_c$.

- $$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \Sigma_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Gamma_3, [B]^i\\ \Sigma_3\\ A\end{array}}{\langle B[x/\_]\rangle} i \ (x \notin free(\Gamma_1 \cup \Gamma_2))$$

Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1, Σ_2 e Σ_3 têm comprimento k.

Como Σ_1, Σ_2 e Σ_3 têm comprimento menor ou igual k, então por hipótese de indução $(\Gamma_1)_c, (A)_c \vdash_{ND} (B)_c$, $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (\langle A[x/\_]\rangle)_c$ e $(\Gamma_3)_c, (B)_c \vdash_{ND} (A)_c$.

Como $(\Gamma_1)_c, (A)_c \vdash_{ND} (B)_c$, então aplicando as regras $(\rightarrow I)$ e $(\forall I)$ obtemos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\forall I)\dfrac{(\rightarrow I)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_1)_c, [(A)_c]^j\\ \Sigma_1'\\ (B)_c\end{array}}{(A)_c \rightarrow (B)_c} j}{\forall x((A)_c \rightarrow (B)_c)}$$

A regra $(\forall I)$ pode ser aplicada porque se $x \notin free(\Gamma_1 \cup \Gamma_3)$, então $x \notin free((\Gamma_1)_c \cup (\Gamma_3)_c)$

Logo, a partir de π' obtemos a seguinte derivação:

$$\pi'' = (\forall E)\dfrac{(\forall I)\dfrac{(\rightarrow I)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_1)_c, [(A)_c]^j\\ \Sigma_1'\\ (B)_c\end{array}}{(A)_c \rightarrow (B)_c} j}{\forall x((A)_c \rightarrow (B)_c)}}{((A)_c \rightarrow (B)_c)[x/c]}$$

Temos que $((A)_c \rightarrow (B)_c)[x/c] = ((A[x/c])_c \rightarrow (B[x/c])_c)$.

Por outro lado, $(\langle A[x/\_]\rangle)_c = (A[x/\_][\_/c])_c = (A[x/c])_c$.

A partir de π'' e como $((A)_c \rightarrow (B)_c)[x/c] = ((A[x/c])_c \rightarrow (B[x/c])_c)$, $(\langle A[x/\_]\rangle)_c = (A[x/c])_c$ e $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (\langle A[x/\_]\rangle)_c$, então temos a seguinte derivação de $(\langle B[x/\_]\rangle)_c = (B[x/\_][\_/c])_c = (B[x/c])_c$ a partir de $(\Gamma)_c$ em ND:

$$\pi''' = (\rightarrow E)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_2)_c\\ \Sigma_2'\\ (A[x/c])_c\end{array} \qquad (\forall E)\dfrac{(\forall I)\dfrac{(\rightarrow I)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_1)_c, [(A)_c]^j\\ \Sigma_1'\\ (B)_c\end{array}}{(A)_c \rightarrow (B)_c}j}{\forall x((A)_c \rightarrow (B)_c)}}{((A[x/c])_c \rightarrow (B[x/c])_c)}}{(B[x/c])_c}$$

- $\pi = (\bot^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \langle\bot\rangle\end{array}}{\bot}$

Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \langle\bot\rangle\end{array}$ tem comprimento k. Por hipótese de indução $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\langle\bot\rangle)_c$.

Como $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\langle\bot\rangle)_c$ e $(\langle\bot\rangle)_c = (\bot)_c = \bot$, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} \bot$.

- $\pi = (\wedge^* I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \Sigma_2\\ \langle B\rangle\end{array}}{\langle A \wedge B\rangle}$

Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1 e Σ_2 têm comprimento menor ou igual a

k. Por hipótese de indução, $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (\langle A \rangle)_c$ e $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (\langle B \rangle)_c$.

Como $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (\langle A \rangle)_c$ e $(\langle A \rangle)_c = (A[\_/c])_c$, então $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (A[\_/c])_c$.

Como $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (\langle B \rangle)_c$ e $(\langle B \rangle)_c = (B[\_/c])_c$, então $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (B[\_/c])_c$.

Por outro lado,

$$(\langle A \wedge B \rangle)_c = ((A \wedge B)[\_/c])_c = (A[\_/c] \wedge B[\_/c])_c = (A[\_/c])_c \wedge (B[\_/c])_c$$

Assim, obtemos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\wedge I)\dfrac{\begin{matrix}(\Gamma_1)_c \\ \Sigma_1' \\ (A[\_/c])_c\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\Gamma_2)_c \\ \Sigma_2' \\ (B[\_/c])_c\end{matrix}}{(A[\_/c])_c \wedge (B[\_/c])_c}$$

- $\pi = (\wedge^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ \langle A \wedge B \rangle\end{matrix}}{\langle A \rangle}$

Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ \langle A \wedge B \rangle\end{matrix}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\langle A \wedge B \rangle)_c$.

Como $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\langle A \wedge B \rangle)_c$ e $(\langle A \wedge B \rangle)_c = ((A \wedge B)[\_/c])_c = (A[\_/c] \wedge B[\_/c])_c = (A[\_/c])_c \wedge (B[\_/c])_c$, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A[\_/c])_c \wedge (B[\_/c])_c$

Por outro lado, $(\langle A \rangle)_c = (A[\_/c])_c$, então obtemos:

$$\pi' = (\wedge E)\dfrac{\begin{matrix}(\Gamma)_c \\ \Sigma' \\ (A[\_/c])_c \wedge (B[\_/c])_c\end{matrix}}{(A[\_/c])_c}$$

De modo análogo para $\langle B \rangle$ como conclusão.

- $$\pi = (\vee^* I)\dfrac{\begin{array}{cc}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \Sigma_1 & \Sigma_2\\ \langle A\rangle & \langle B\rangle\end{array}}{\langle A \vee B\rangle}$$

Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1 e Σ_2 têm comprimento menor ou igual a k. Por hipótese de indução $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (\langle A\rangle)_c$.

Como $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (\langle A\rangle)_c$ e $(\langle A\rangle)_c = (A[\_/c])_c$, temos que $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A[\_/c])_c$.

Por outro lado,

$$(\langle A \vee B\rangle)_c = ((A \vee B)[\_/c])_c = (A[\_/c] \vee B[\_/c])_c = (A[\_/c])_c \vee (B[\_/c])_c$$

Assim, obtemos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\vee I)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_1)_c\\ \Sigma_1'\\ (A[\_/c])_c\end{array}}{(A[\_/c])_c \vee (B[\_/c])_c}$$

- $$\pi = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{ccc}\Gamma_1 & \Gamma_2, [\langle A\rangle]^i & \Gamma_3, [\langle B\rangle]^i\\ \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3\\ \langle A \vee B\rangle & C & C\end{array}}{C}\, i$$

Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1, Σ_2 e Σ_3 têm comprimento menor ou igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (\langle A \vee B\rangle)_c$, $(\Gamma_2)_c, (\langle A\rangle)_c, \vdash_{CL} (C)_c$ e $(\Gamma_3)_c, (\langle B\rangle)_c, \vdash_{CL} (C)_c$.

Por outro lado,

$$(\langle A \vee B\rangle)_c = ((A \vee B)[\_/c])_c = (A[\_/c] \vee B[\_/c])_c = (A[\_/c])_c \vee (B[\_/c])_c$$

Como $(\Gamma)_c \vdash_{CL} (\langle A \vee B\rangle)_c$, $(\Gamma_2)_c, (\langle A\rangle)_c, \vdash_{ND} (C)_c$ e $(\Gamma_3)_c, (\langle B\rangle)_c, \vdash_{ND} (C)_c$ e $(\langle A \vee B\rangle)_c = (A[\_/c])_c \vee (B[\_/c])_c$, então temos

$$\pi' = \dfrac{\begin{matrix}(\Gamma_1)_c \\ \Sigma'_1 \\ (A[\_/c])_c \vee (B[\_/c])_c\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\Gamma_2)_c, [A[\_/c])_c]^i \\ \Sigma'_2 \\ (C)_c\end{matrix} \qquad \begin{matrix}(\Gamma_3)_c, [(B[\_/c])_c]^i \\ \Sigma'_3 \\ (C)_c\end{matrix}}{(C)_c} i$$

- $\pi = (\neg^* I) \dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\langle A \rangle]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}}{\langle \neg A \rangle} i$

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{matrix}\Gamma, [\langle A \rangle]^i \\ \Sigma \\ \bot\end{matrix}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução,
  $(\Gamma)_c, (\langle A \rangle)_c \vdash_{ND} (\bot)_c$.

  Então temos $(\Gamma)_c, (A[\_/c])_c \vdash_{ND} \bot$.

  Por outro lado, $(\langle \neg A \rangle)_c = ((\neg A)[\_/c])_c = \neg(A[\_/c])_c$. Então, obtemos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\to I) \dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [(A[\_/c])_c]^i \\ \Sigma' \\ \bot\end{matrix}}{\neg(A[\_/c])_c} i$$

- $\pi = (\neg^* E) \dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1 \\ \Sigma_1 \\ \langle A \rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Gamma_2 \\ \Sigma_2 \\ \langle \neg A \rangle\end{matrix}}{\bot}$

  Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1 e Σ_2 têm comprimento menor ou igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (\langle A \rangle)_c$ e $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (\langle \neg A \rangle)_c$.

  Então temos $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (A[\_/c])_c$ e $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} \neg(A[\_/c])_c$.

  Assim, obtemos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\to E)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_1)_c\\ \Sigma_1'\\ (A[\_/c])_c\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Gamma_2)_c\\ \Sigma_2'\\ \neg(A[\_/c])_c\end{array}}{\perp}$$

- $\pi = (Abs)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \perp\end{array}}{A}$

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ \perp\end{array}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\perp)_c$.

  Por outro lado, $(\perp)_c = \perp$.

  Então obtemos a seguinte derivação:

$$\pi' = (Abs)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma)_c\\ \Sigma'\\ \perp\end{array}}{(A)_c}$$

- $\pi = (RaA)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{array}}{A}\,i$

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{array}{c}\Gamma, [\neg A]^i\\ \Sigma\\ \perp\end{array}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma)_c, (\neg A)_c \vdash_{ND} (\perp)_c$.

  Por outro lado, $(\neg A)_c = \neg(A)_c$ e $(\perp)_c = \perp$.

  Então temos a seguinte derivação:

$$\pi' = (RaA)\cfrac{\begin{matrix}(\Gamma)_c, [\neg(A)_c]^i \\ \Sigma' \\ \bot\end{matrix}}{(A)_c}\, i$$

- $\pi = (\forall I)\cfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ A\end{matrix}}{\forall x A}$

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ A\end{matrix}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A)_c$.

  Por outro lado, se x não ocorre livre em Γ, então x não ocorre livre em $(\Gamma)_c$, pois c é uma constante nova.

  Como $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A)_c$ e x não ocorre livre em $(\Gamma)_c$, então

$$\pi' = (\forall I)\cfrac{\begin{matrix}(\Gamma)_c \\ \Sigma' \\ (A)_c\end{matrix}}{\forall x (A)_c}$$

- $\pi = (\forall E)\cfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ \forall x A\end{matrix}}{A[x/t]}$ onde t é um termo.

  Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{matrix}\Gamma \\ \Sigma \\ \forall x A\end{matrix}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (\forall x A)_c$.

Temos que $(\forall x A)_c = \forall x (A)_c$, então $(\Gamma)_c \vdash_{ND} \forall x (A)_c$.

Por outro lado, $(A[x/t])_c = (A)_c[x/t]$.

Daí,

$$\pi' = (\forall E)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma)_c\\ \Sigma'\\ \forall x(A)_c\end{array}}{(A[x/t])_c}$$

- $\pi = (\exists I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ A\end{array}}{\exists x A}$.

Como π tem comprimento $k+1$, então $\begin{array}{c}\Gamma\\ \Sigma\\ A\end{array}$ tem comprimento igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma)_c \vdash_{ND} (A)_c$.

Temos que $(\exists x A)_c = \exists x (A)_c$.

Daí,

$$\pi' = (\exists I)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma)_c\\ \Sigma'\\ (A)_c\end{array}}{\exists x(A)_c}$$

- $\pi = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta\\ \Sigma_1\\ \exists x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_1, [A[x/a]]^i\\ \Sigma_2\\ C\end{array}}{C}$

Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1 e Σ_2 têm comprimento menor ou igual a

k. Por hipótese de indução, $(\Delta)_c \vdash_{ND} (\exists x A)_c$ e $(\Delta_1)_c, (A[x/a])_c \vdash_{ND} (C)_c$.

Logo, $(\Delta)_c \vdash_{ND} \exists x(A)_c$.

Por outro lado, c é uma constante nova para as derivações Σ_1 e Σ_2, então $c \neq a$.

Como $(\Delta)_c \vdash_{ND} \exists x(A)_c$, $(\Delta_1)_c, (A[x/a])_c \vdash_{ND} (C)_c$ e c é uma constante nova para as derivações Σ_1 e Σ_2, então temos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\exists E)\dfrac{\begin{array}{c}(\Delta)_c\\ \Sigma_1'\\ \exists x(A)_c\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Delta_1)_c, [(A[x/a])_c]^i\\ \Sigma_2'\\ (C)_c\end{array}}{(C)_c}$$

- $(\wedge I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1\\ \Sigma_1\\ A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_2\\ \Sigma_2\\ B\end{array}}{A \wedge B}$

  Como π tem comprimento $k+1$, então Σ_1 e Σ_2 têm comprimento menor ou igual a k. Por hipótese de indução, $(\Gamma_1)_c \vdash_{ND} (A)_c$ e $(\Gamma_2)_c \vdash_{ND} (B)_c$.

  Por outro lado, $(A \wedge B)_c = (A)_c \wedge (B)_c$, então temos a seguinte derivação:

$$\pi' = (\wedge I)\dfrac{\begin{array}{c}(\Gamma_1)_c\\ \Sigma_1'\\ (A)_c\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Gamma_2)_c\\ \Sigma_2'\\ (B)_c\end{array}}{(A)_c \wedge (B)_c}$$

- os casos $(\wedge I)$, $(\vee I)$, $(\vee E)$, $(\rightarrow I)$ e $(\rightarrow E)$ são análogos ao caso anterior.

■

A.4 Resultados do capítulo 7

A.4.1 Resultado da seção 7.1

Teorema7.1.1: Sejam Γ e Δ sequências de fórmulas em L^{∇^*} e seja $\Phi \subseteq [\mathcal{B}]$. Então, o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\mathcal{B})$ se, e somente se, $T(\Gamma), \Phi \Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em

SC.

Prova: ($\Leftarrow$) Para mostrarmos que se o sequente $T(\Gamma)$,[$\mathcal{B}$]$\Rightarrow$ $T(\Delta)$ é derivável em SC, então o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\mathcal{B})$, basta mostramos que o sequente $\Rightarrow B$ é derivavel em $SC(\mathcal{B})$ onde B é uma instância de um esquema em [$\mathcal{B}$].

[$\nabla\alpha$]: Para uma instância $B = \nabla x A \leftrightarrow \nabla y A[x/y]$ (com $y \notin occ[A]$) de [$\nabla\alpha$], temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[x/y][y/\_]\rangle}{\nabla x A \Rightarrow \langle A[x/y][y/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla x A \Rightarrow \nabla y A[x/y]}(\nabla c)}{\Rightarrow \nabla x A \rightarrow \nabla y A[x/y]}(\rightarrow c) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A[x/y][y/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[x/\_]\rangle}{\langle A[x/y][y/\_]\rangle \Rightarrow \nabla x A}(\nabla c)}{\nabla y A[x/y] \Rightarrow \nabla x A}(\nabla c)}{\Rightarrow \nabla y A[x/y] \rightarrow \nabla x A}(\rightarrow c)}{\Rightarrow \nabla x A \leftrightarrow \nabla y A[x/y]}(\wedge c)$$

Note que, $\langle A[x/\_]\rangle = \langle A[x/y][y/\_]\rangle$, assim $\langle A[x/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[x/y][y/\_]\rangle$ e $\langle A[x/y][y/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[x/\_]\rangle$ são sequentes iniciais.

[$\leftrightarrow \nabla$]: Para uma instância $B = \forall v(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\nabla v A \rightarrow \nabla v B)$ de [$\leftrightarrow \nabla$], temos a seguinte derivação:

Seja

$$\Pi_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Rightarrow A \quad B \Rightarrow B}{A \rightarrow B, A \Rightarrow B}(\rightarrow a)}{A \leftrightarrow B, A \Rightarrow B}(\wedge a)}{\forall v(A \leftrightarrow B), A \Rightarrow B}(\forall a)$$

$$\Pi_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \Rightarrow B \quad A \Rightarrow A}{B \rightarrow A, B \Rightarrow A}(\rightarrow a)}{B \leftrightarrow A, B \Rightarrow A}(\wedge a)}{\forall v(A \leftrightarrow B), B \Rightarrow A}(\forall a)$$

Então,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Pi_1}{A, \forall v(A \leftrightarrow B) \Rightarrow B}(Pa) \quad \cfrac{\Pi_2}{B, \forall v(A \leftrightarrow B) \Rightarrow A}(Pa)}{\langle A[v/\_]\rangle, \forall v(A \leftrightarrow B) \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\Updownarrow)}{\nabla vA, \forall v(A \leftrightarrow B) \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla vA, \forall v(A \leftrightarrow B) \Rightarrow \nabla vB}(\nabla c)}{\forall v(A \leftrightarrow B) \Rightarrow \nabla vA \rightarrow \nabla vB}(\rightarrow c)}{\Rightarrow \forall v(A \leftrightarrow B) \rightarrow (\nabla vA \rightarrow \nabla vB)}(\rightarrow c)$$

($\Rightarrow$)Por indução sobre o comprimento de uma derivação, podemos mostrar que para cada derivação Π em $SC(\mathcal{B})$, existe uma derivação correspondente $T(\Pi)$ em SC.

Seja π uma derivação do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC(\mathcal{B})$.

Passo base: π tem comprimento um.

Logo, $\pi = A \Rightarrow A$.

Então, $T(A) \Rightarrow T(A)$ é uma derivação em SC.

Hipótese de indução: o teorema é válido para toda derivação de comprimento menor ou igual a k.

Seja π uma derivação de comprimento $k+1$.

Então, temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra (∇a) como última inferência de π:

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\nabla vA[\_/v], \Gamma \Rightarrow \Delta}(\nabla a).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\begin{array}{c}\Pi \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}$ tem comprimento k.

Então, por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ para sequente

$T(\langle A\rangle), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)$ em SC.

Por outro lado, temos que $T(\langle A\rangle) = \nabla xA$ e $T(\nabla vA[\_/v]) = \nabla vA[\_/v]$

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla vA[x/v] \Rightarrow \nabla vA[x/v] \qquad \overset{\Pi'}{\nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}}{\nabla vA[x/v] \to \nabla xA, \nabla vA[x/v], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\to a)}{\nabla vA[x/v] \leftrightarrow \nabla xA, \nabla vA[x/v], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\wedge a)}{\nabla vA[x/v], \nabla vA[x/v] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(Pa).$$

- Uma aplicação da regra (∇c) como última inferência de π:

$$\pi = \dfrac{\overset{\Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla vA[\_/v]}(\nabla c).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\overset{\Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle}$ tem comprimento k.

Então por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ para o sequente $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle A\rangle)$ em SC.

Por outro lado, temos que $T(\langle A\rangle) = \nabla xA$ e $T(\nabla vA[\_/v]) = \nabla vA[\_/v]$.

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\Pi'}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla xA} \qquad \nabla vA[x/v] \Rightarrow \nabla vA[x/v]}{\nabla xA \to \nabla vA[x/v], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla vA[x/v]}(\to a)}{\nabla xA \leftrightarrow \nabla vA[x/v], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla vA[x/v]}(\wedge a)$$

- Uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ como última inferência de π:

$$\pi = \dfrac{\overset{\Pi_1}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B} \qquad \overset{\Pi_2}{B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow)$$

Como π tem comprimento $k+1$, então as derivações $\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{array}$ e

$\begin{array}{c}\Sigma_2\\ B,\Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array}$ tem comprimento menor ou igual a k.

Então, por hipótese de indução existem as derivações $T(\Pi_1)$ e $T(\Pi_2)$ em SC para os sequentes $T(A), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(B)$ e $T(B), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(A)$, respectivamente.

Como A e B não são fórmulas marcadas, então $T(A) = A$ e $T(B) = B$.

Por outro lado, $T(\langle A[x/\_]\rangle) = \nabla xA$ e $T(\langle B[x/\_]\rangle) = \nabla xB$.

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

Sejam

$$\Sigma_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ A, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), B\end{array}}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), A \to B}(\to c) \quad \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_2'\\ B, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), A\end{array}}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), B \to A}(\to c)}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), A \leftrightarrow B}(\wedge c)}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \forall x(A \leftrightarrow B)}(\forall c)$$

$$\Sigma_2 = \cfrac{\nabla xA \Rightarrow \nabla xA \quad \nabla xB \Rightarrow \nabla xB}{\nabla xA \to \nabla xB, \nabla xA \Rightarrow \nabla xB}(\to a)$$

Portanto,

$$\cfrac{\cfrac{\Sigma_1 \qquad \Sigma_2}{\forall x(A \leftrightarrow B) \to (\nabla xA \to \nabla xB), T(\Gamma), \nabla xA \Rightarrow T(\Delta), \nabla xB}(\to a)}{\nabla xA, T(\Gamma), \forall x(A \leftrightarrow B) \to (\nabla xA \to \nabla xB) \Rightarrow T(\Delta), \nabla xB}$$

$\blacksquare$

A.4.2 Rasultado da seção 7.2

Teorema7.2.1: Sejam Γ e Δ sequências de fórmulas em L^{∇^*} e seja $\Phi \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$. Então, o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\Omega)$ se, e somente se, o sequente $T(\Gamma), \Phi \Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em SC.

Prova: Sejam Γ e Δ sequências de fórmulas em L^{∇^*}.

($\Leftarrow$) Para mostrarmos que se o sequente $T(\Gamma)$,[$\mathcal{B}$]$\Rightarrow T(\Delta)$ é derivável em SC, então o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em $SC(\Omega)$, basta mostramos que o sequente $\Rightarrow B$ é derivavel em $SC(\Omega)$ onde B é uma instância de um esquema ou um axioma em $[\mathcal{B}(\Omega)]$.

[$\bot\nabla$]:Para $B = \neg\nabla v\bot$, temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle\bot\rangle \Rightarrow \langle\bot\rangle}{\langle\bot\rangle \Rightarrow}(\bot^* c)}{\nabla v\bot \Rightarrow}(\nabla a)}{\Rightarrow \neg\nabla v\bot}(\neg c)$$

[$\nabla\top$]: Para uma instância $B = \nabla x(A \to A)$ de $[\nabla\top]$, temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\langle(A \to A)\rangle \Rightarrow \langle(A \to A)\rangle}{\Rightarrow \langle(A \to A)\rangle}(\top^* a)}{\Rightarrow \nabla x(A \to A)}(\nabla c)$$

[$\nabla\top$]: Para uma instância $B = (\nabla vA \wedge \nabla vB) \to \nabla v(A \wedge B)$ de $[\nabla\wedge]$, temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}{\nabla vA \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle} \quad \dfrac{\dfrac{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}{\nabla vB \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\wedge a)}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \langle (A \wedge B)[v/\_]\rangle}(\wedge^* c)}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \nabla v(A \wedge B)}(\nabla c)}{\Rightarrow (\nabla vA \wedge \nabla vB) \to \nabla v(A \wedge B)}(\to c)}{}$$

[$\nabla\vee$]: Para uma instância $B = (\nabla vA \wedge \nabla vB) \to \nabla v(A \vee B)$ de $[\nabla\vee]$, temos a seguinte derivação:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}}{\nabla vA \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}}{\nabla vB \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\wedge a)
}{
\dfrac{\dfrac{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \langle (A \vee B)[v/\_]\rangle}{\nabla vA \wedge \nabla vB \Rightarrow \nabla v(A \vee B)}(\nabla c)}{\Rightarrow (\nabla vA \wedge \nabla vB) \rightarrow \nabla v(A \vee B)}(\rightarrow c)
}(\vee^* c)
$$

[$\wedge\nabla$]: Para uma instância $B = \nabla v(A \wedge B) \rightarrow (\nabla vA \wedge \nabla vB)$ de $[\wedge\nabla]$, temos a seguinte derivação:

Sejam

$$
\Pi_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}{\langle (A \wedge B)\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}(\wedge^* a)}{\nabla v(A \wedge B) \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla v(A \wedge B) \Rightarrow \nabla vA}(\nabla c)
$$

$$
\Pi_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}{\langle (A \wedge B)\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\wedge^* a)}{\nabla v(A \wedge B) \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}(\nabla a)}{\nabla v(A \wedge B) \Rightarrow \nabla vB}(\nabla c)
$$

Então,

$$
\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \qquad\qquad \Pi_2}{\nabla v(A \wedge B) \Rightarrow (\nabla vA \wedge \nabla vB)}(\wedge c)}{\Rightarrow \nabla v(A \wedge B) \rightarrow (\nabla vA \wedge \nabla vB)}(\rightarrow c)
$$

[$\vee\nabla$]: Para uma instância $B = \nabla v(A \vee B) \rightarrow (\nabla vA \vee \nabla vB)$ de $[\vee\nabla]$, temos a seguinte derivação:

Sejam

$$
\Pi_1 = \dfrac{\dfrac{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \nabla vA}(\nabla c)}{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \nabla vA \vee \nabla vB}(\vee c)
$$

$$\Pi_2 = \dfrac{\dfrac{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle B[v/\_]\rangle}{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \nabla v B}(\nabla c)}{\langle B[v/\_]\rangle \Rightarrow \nabla v A \vee \nabla v B}(\vee c)$$

Então,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\langle (A \vee B)[v/\_]\rangle \Rightarrow \nabla v A \vee \nabla v B}(\vee^* a)}{\nabla v(A \vee B) \Rightarrow \nabla v A \vee \nabla v B}(\nabla a)}{\Rightarrow \nabla v(A \vee B) \rightarrow (\nabla v A \vee \nabla v B)}(\rightarrow c)$$

[$\neg\nabla$]: Para uma instância $B = \nabla v \neg A \rightarrow \neg \nabla v A$ de [$\neg\nabla$], temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}{\langle (\neg A)[v/\_]\rangle, \langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow}(\neg^* a)}{\nabla v(\neg A), \langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow}(\nabla a)}{\langle A[v/\_]\rangle, \nabla v \neg A \Rightarrow}(Pa)}{\nabla v A, \nabla v \neg A \Rightarrow}(\nabla a)}{\nabla v \neg A \Rightarrow \neg \nabla v A}(\neg c)}{\Rightarrow \nabla v \neg A \rightarrow \neg \nabla v A}(\rightarrow c)$$

[$\nabla\neg$]: Para uma instância $B = \neg \nabla v A \rightarrow \nabla v \neg A$ de [$\nabla\neg$], temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \langle A[v/\_]\rangle}{\langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow \nabla v A}(\nabla c)}{\neg \nabla v A, \langle A[v/\_]\rangle \Rightarrow}(\neg a)}{\langle A[v/\_]\rangle, \neg \nabla v A \Rightarrow}(Pa)}{\neg \nabla v A \Rightarrow \langle \neg A[v/\_]\rangle}(\neg^* c)}{\neg \nabla v A \Rightarrow \nabla v \neg A}(\nabla c)}{\Rightarrow \neg \nabla v A \rightarrow \nabla v \neg A}(\rightarrow c)$$

($\Rightarrow$)Por indução sobre o comprimento de uma derivação, podemos mostrar que para cada derivação Π em $SC(\Omega)$, existe uma derivação correspondente $T(\Pi)$ em SC.

Seja π uma derivação do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC(\Omega)$.

Passo base: π tem comprimento um.

Logo, $\pi = A \Rightarrow A$.

Então, $T(A) \Rightarrow T(A)$ é uma derivação em SC.

Hipótese de indução: o teorema é válido para toda derivação de comprimento menor ou igual a k.

Seja π uma derivação de comprimento $k+1$.

Então, temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $(\top^* a)$ como última inferência de π:

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Pi \\ \langle(A \to A)\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\top^* a).$$

  Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\begin{matrix}\Pi \\ \langle(A \to A)\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}$ tem comprimento k.

  Então, por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ em SC para o sequente $T(\langle(A \to A)\rangle), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)$.

  Por outro lado, temos que $T(\langle(A \to A)\rangle) = \nabla x(A \to A)$

  Então, em SC teremos a seguinte derivação:

$$\begin{matrix}\Pi' \\ \nabla x(A \to A), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)\end{matrix}$$

- Uma aplicação da regra $(\top^* c)$ como última inferência de π:

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \bot \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\bot^* c).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\begin{array}{c}\Pi \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \bot \rangle\end{array}$ tem comprimento k.

Então, por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ em SC para o sequente $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle \bot \rangle)$.

Por outro lado, temos que $T(\langle \bot \rangle) = \nabla x \bot$.

Então, em SC temos a seguinte derivação:

$$\cfrac{\begin{array}{c}\Pi' \\ T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla x \bot\end{array}}{\neg \nabla x \bot, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\neg a)$$

- Uma aplicação da regra $(\wedge^* c)$ como última inferência de π:

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B \rangle}(\wedge^* c).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então as derivações $\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Pi_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle\end{array}$ tem comprimento menor ou igual a k.

Então, por hipótese de indução existem as derivações $T(\Pi_1)$ e $T(\Pi_2)$ em SC para os sequentes $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle A \rangle)$ e $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle B \rangle)$, respectivamente.

Por outro lado, temos que $T(\langle A \rangle) = \nabla x A$ e $T(\langle B \rangle) = \nabla y B$ e $T(\langle A \wedge B \rangle) = \nabla z(A \wedge B)[\_/z] = \nabla z(A[\_/z] \wedge B[\_/z])$.

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

Sejam

$$\Sigma_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_1'\\ T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla xA\end{array} \qquad \nabla zA[x/z] \Rightarrow \nabla zA[x/z]}{\nabla xA \to \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}(\to a)}{\nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}(\wedge a)}{\nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z], \nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}(Aa)$$

$$\Sigma_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Pi_2'\\ T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla yB\end{array} \qquad \nabla zB[y/z] \Rightarrow \nabla zB[y/z]}{\nabla yB \to \nabla zB[y/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zB[y/z]}(\to a)}{\nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zB[y/z]}(\wedge a)}{}}{\nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z], \nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}$$

$E_1 = \nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z]$ e $E_2 = \nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z]$

$$\Sigma_3 = \frac{\Sigma_1 \qquad \Sigma_2}{E_2, E_1, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z] \wedge \nabla zB[y/z]}$$

Portanto,

$$\frac{\Sigma_3 \qquad \nabla(A[x/z] \wedge B[y/z]) \Rightarrow \nabla(A[x/z] \wedge B[y/z])}{\nabla zA[x/z] \wedge \nabla zB[y/z] \to \nabla(A[x/z] \wedge B[y/z]), E_2, E_1, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla z(A[x/z] \wedge B[y/z])}$$

- Uma aplicação da regra $(\wedge^* a)$ como última inferência de π:

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\langle A \wedge B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge^* a).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\begin{array}{c}\Pi\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}$ tem comprimento k.

Então, por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ em SC para o sequente $T(\langle A\rangle), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)$.

Por outro lado, temos que $T(\langle A\rangle) = \nabla xA$ e $T(\langle A \wedge B\rangle) = \nabla z(A \wedge B)[\_/z]$.

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

$$\Sigma_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\nabla zA[x/z] \Rightarrow \nabla zA[x/z] \qquad \begin{array}{c}\Pi' \\ \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)\end{array}}{\nabla zA[x/z] \rightarrow \nabla xA, \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\rightarrow a)}{\nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\wedge a)}{\nabla zA[x/z], \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(Pa)}{\nabla zA[x/z] \wedge \nabla zB[y/z], \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}$$

Portanto,

$$\dfrac{\nabla z(A[x/z] \wedge B[y/z]) \Rightarrow \nabla z(A[x/z] \wedge B[y/z]) \qquad \Sigma_1}{\nabla z(A[x/z] \wedge B[y/z]), \nabla z(A[x/z] \wedge B[y/z]) \rightarrow \nabla zA[x/z] \wedge \nabla zB[y/z], \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}$$

- Uma aplicação da regra $(\vee^* c)$ como última inferência de π:

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Pi_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \vee B \rangle}(\vee^* c).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então as derivações $\begin{array}{c}\Pi_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Pi_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle\end{array}$ tem comprimento menor ou igual a k.

Então, por hipótese de indução existem as derivações $T(\Pi_1)$ e $T(\Pi_2)$ em SC para os sequentes $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle A \rangle)$ e $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle B \rangle)$, respectivamente.

Por outro lado, temos que $T(\langle A \rangle) = \nabla xA$ e $T(\langle B \rangle) = \nabla yB$ e $T(\langle A \vee B \rangle) = \nabla z(A \vee B)[\_/z] = \nabla z(A[\_/z] \vee B[\_/z])$.

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

Sejam

$$\Sigma_1 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'_1 \\ T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla xA\end{array} \qquad \nabla zA[x/z] \Rightarrow \nabla zA[x/z]}{\nabla xA \rightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}(\rightarrow a)}{\nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}(\wedge a)}{\nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z], \nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}(Aa)$$

$$\Sigma_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\Pi_2'}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla yB} \qquad \nabla zB[y/z] \Rightarrow \nabla zB[y/z]}{\nabla yB \rightarrow \nabla zB[y/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zB[y/z]}(\rightarrow a)}{\nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zB[y/z]}(\wedge a)}{}}{\nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z], \nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z]}$$

$E_1 = \nabla xA \leftrightarrow \nabla zA[x/z]$ e $E_2 = \nabla yB \leftrightarrow \nabla zB[y/z]$

$$\Sigma_3 = \dfrac{\Sigma_1 \qquad \Sigma_2}{E_2, E_1, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla zA[x/z] \wedge \nabla zB[y/z]}$$

Portanto,

$$\dfrac{\Sigma_3 \qquad \nabla(A[x/z] \vee B[y/z]) \Rightarrow \nabla(A[x/z] \vee B[y/z])}{\nabla zA[x/z] \wedge \nabla zB[y/z] \rightarrow \nabla(A[x/z] \vee B[y/z]), E_2, E_1, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla z(A[x/z] \vee B[y/z])}$$

- Uma aplicação da regra $(\vee^* a)$ como última inferência de π:

$$\pi = \dfrac{\overset{\Pi_1}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \overset{\Pi_2}{\langle B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\langle A \vee B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\vee^* a).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então as dedrivações $\overset{\Pi_1}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ e $\overset{\Pi_2}{\langle B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ tem comprimento menor ou igual a k.

Então, por hipótese de indução existema as derivações $T(\Pi_1)$ e $T(\Pi_2)$ em SC para os sequentes $T(\langle A\rangle), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)$ e $T(\langle B\rangle), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)$, respectivamente.

Por outro lado, $T(\langle A\rangle) = \nabla xA[\_/x]$, $T(\langle B\rangle) = \nabla yB[\_/y]$ e $T(\langle A \vee B\rangle) = \nabla(A \vee B)[\_/z]$.

Então, em SC teremos a seguinte derivação:

$$\Sigma_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\nabla zA[x/z] \Rightarrow \nabla zA[x/z] \qquad \overset{\Pi_1'}{\nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}}{\nabla zA[x/z] \to \nabla xA, \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\to a)}{\nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, \nabla zA[x/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\wedge a)}{\nabla zA[x/z], \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(Pa)}{\overline{\nabla zA[x/z], \nabla zB[y/z] \leftrightarrow \nabla yB, \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}}$$

$$\Sigma_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\nabla zB[y/z] \Rightarrow \nabla zB[y/z] \qquad \overset{\Pi - 2'}{\nabla yB, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}}{\nabla zB[y/z] \to \nabla yB, \nabla zB[y/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\to a)}{\nabla zB[y/z] \leftrightarrow \nabla yB, \nabla zB[y/z], T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\wedge a)}{\nabla zB[y/z], \nabla zB[y/z] \leftrightarrow \nabla yB, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(Pa)}{\overline{\nabla zB[y/z], \nabla zB[y/z] \leftrightarrow \nabla yB, \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}}$$

$E_1 = \nabla zA[x/z] \leftrightarrow \nabla xA$ e $E_2 = \nabla zB[y/z] \leftrightarrow \nabla yB$

$$\Sigma_3 = \frac{\Sigma_1 \qquad \Sigma_2}{\nabla zA[x/z] \vee \nabla zB[y/z], E_1, E_2, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\vee a)$$

Portanto,

$$\cfrac{\cfrac{\nabla z(A[x/z] \vee B[y/z]) \to \nabla z(A[x/z] \vee B[y/z]) \qquad \Sigma_3}{\nabla z(A[x/z] \vee B[y/z]) \Rightarrow \nabla zA[x/z] \vee \nabla zB[y/z], \nabla z(A[x/z] \vee B[y/z]), E_1, E_2, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\to a)}{\nabla z(A[x/z] \vee B[y/z]), \nabla z(A[x/z] \vee B[y/z]) \to \nabla zA[x/z] \vee \nabla zB[y/z], E_1, E_2, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(Pa)$$

- Uma aplicação da regra $(\neg^* c)$ como última inferência de π:

$$\pi = \frac{\overset{\Pi}{\langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \neg A \rangle}(\neg^* c).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\overset{\Pi}{\langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ tem comprimento k.

Então, por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ em SC para o sequente

$T(\langle A\rangle), T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)$.

Por outro lado, temos que $T(\langle A\rangle) = \nabla x A$ e $T(\langle\neg A\rangle) = \nabla x\neg A$.

Então, em SC temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi'\\ \nabla x A, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)\end{array}}{T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \neg\nabla x A}(\neg c) \qquad \nabla x\neg A \Rightarrow \nabla x\neg A}{\neg\nabla x A \rightarrow \nabla x\neg A, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla x\neg A}$$

- Uma aplicação da regra $(\neg^* a)$ como última inferência de π:

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{array}}{\langle\neg A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\neg^* a).$$

Como π tem comprimento $k+1$, então a derivação $\begin{array}{c}\Pi\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{array}$ tem comprimento k.

Então, por hipótese de indução existe uma derivação $T(\Pi)$ em SC para o sequente $T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), T(\langle A\rangle)$.

Por outro lado, temos que $T(\langle A\rangle) = \nabla x A$ e $T(\langle\neg A\rangle) = \nabla x\neg A$.

Então, em SC temos a seguinte derivação:

$$\dfrac{\dfrac{\nabla x\neg A \Rightarrow \nabla x\neg A \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi'\\ T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta), \nabla x A\end{array}}{\neg\nabla x A, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\neg a)}{\nabla x\neg A \rightarrow \neg\nabla x A, \nabla x\neg A, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(\rightarrow a)}{\nabla x\neg A, \nabla x\neg A \rightarrow \neg\nabla x A, T(\Gamma) \Rightarrow T(\Delta)}(Pa)$$

$\blacksquare$

A.5 Resultados do capítulo 8

Lema8.0.1: Seja Γ e Δ sequências de fórmulas em L^{∇^*}. Então, o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em SC se, e somente se, o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em SC^*.

Prova: Seja Γ e Δ sequências de fórmulas em L^{∇^*}.

($\Rightarrow$) Para mostrarmos que se o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em SC, então o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em SC^* basta demonstrarmos que a regra (*corte*) é derivável em SC^*.

A regra do corte:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda}(corte)$$

Então, a partir de $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$ e $A, \Theta \Rightarrow \Lambda$ temos a seguinte derivação de $\Gamma, \Delta \Rightarrow \Theta, \Lambda$ em SC^*:

$$\frac{\frac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad A, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

($\Leftarrow$) Para mostrarmos que se o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em SC^*, então o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ é derivável em SC basta demonstrarmos que a regra (Mix) é derivável em SC.

A regra Mix:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a partir de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ e $\Theta \Rightarrow \Lambda$ e aplicações de regras estruturais de contração e permutação, obtemos os sequentes $\Gamma \Rightarrow \Delta^*, M$ e $M, \Theta^* \Rightarrow \Lambda$ onde Δ^* e Θ^* não contém a fórmula mix M.

Daí, podemos obter a seguinte derivação de $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ em SC.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{}}{\Gamma \Rightarrow \Delta^*, M} \quad \dfrac{\dfrac{\Theta \Rightarrow \Lambda}{}}{M, \Theta^* \Rightarrow \Lambda}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(corte)$$

■

A.5.1 Resultado da seção 8.1

Lema8.1.1: Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$. Então, se π é uma derivação especial, então π pode ser transformada em uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Prova: A prova do lema é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ (onde $gr(\pi)$ é o grau e $r(\pi)$ é o rank da derivação π). No passo base da prova tomaremos uma derivação π de grau zero (menor grau) e rank 2 (menor rank) e mostraremos que a aplicação da regra (Mix) pode ser eliminada. Posteriormente, no passo de indução dividiremos a prova em duas etapas distintas. Na primeira etapa, vamos supor que o rank da derivação é igual a dois e a fórmula mix é uma fórmula de grau $d \geq 0,5$ e mostraremos que podemos diminuir o grau da fórmula mix e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) pela hipótese de indução. Na segunda etapa, vamos supor que o rank da derivação π é maior que 2 e mostraremos que podemos diminuir o rank da derivação e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) pela hipótese de indução.

Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$.

Suponhamos que π é uma derivação especial. Vamos nos concentrar nas regras envolvendo fórmulas generalizadas e fórmulas marcadas.

Temos que $SC^* \in \{SCML^*, SCIL^*, SCCL^*\}$.

Suponhamos inicialmente que $SC^* = SCCL^*$.

Passo base: Seja π é uma derivação em $SC^*(\mathcal{B})$ tal que $(gr(\pi), r(\pi)) = (0, 2)$.

Demonstardo de modo análogo ao caso clássico, pois a fórmula mix não é uma fórmula marcada ou generalizada.

Hipótese de indução: O lema é válido para toda derivação ρ tal que $(gr(\rho), r(\rho)) < (gr(\pi), r(\pi)) = (g, r)$.

Seja π uma derivação tal que $(gr(\pi), r(\pi)) = (g, r)$.

Suponhamos que $r(\pi) = 2$.

Logo, tanto o rank esquerdo como o rank direito é igual a 1.

Se o rank esquerdo é igual a 1, então apenas o sequente superior esquerdo da aplicação da regra Mix contém a fórmula mix no consequente.

Se o rank direito é igual a 1, então apenas o sequente superior direito da aplicação da regra Mix contém a fórmula mix no antecedente.

Em cada um dos casos a seguir mostraremos que podemos diminuir o grau da fórmula mix e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) pela hipótese de indução.

Daí, temos os seguintes casos:

- A fórmula mix é obtida a partir de uma aplicação de uma regra estrutural ou sequente inicial.
  - O sequente superior esquerda da aplicação da regra (Mix) é um sequente inicial.

$$\pi = \cfrac{M \Rightarrow M \qquad \begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{M, \Theta^* \Rightarrow \Lambda} \quad \longrightarrow \quad \pi' = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{}}{M, \Theta^* \Rightarrow \Lambda}$$

Portanto, π' é uma derivação do sequente $M, \Delta^* \Rightarrow \Lambda$ em que nenhuma aplicação da regra Mix ocorre.

– O sequente superior direito da aplicação da regra (Mix) é um sequente inicial: demonstrado de maneira análoga ao item anterior.

– O sequente superiore direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra estrutural (Aa).

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, M\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{M, \Theta \Rightarrow \Lambda}(Aa)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}(Mix) \quad \longrightarrow \quad \pi' = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Portanto, π' é uma derivação do sequente $\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda$ em que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Todos os outros casos são demonstrados de modo análogo ao item anterior.

- A fórmula mix M é obtida a partir de aplicações de regras lógicas.

  – O sequente superior esquerdo da regra Mix é a conclusão de uma aplicação da regra (∇c) e o sequente superior direito é a conclusão de uma aplicação da regra (∇a) (a fórmula mix $M = \nabla x A[\_/x]$).

$$\pi = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]}(\nabla c) \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\nabla x A[\_/x], \Theta \Rightarrow \Lambda}(\nabla a)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}(Mix)$$

A derivação π é transformada na derivação:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle & \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Na derivação ρ temos que $\langle A\rangle$ é fórmula mix.

Como $gr(\langle A\rangle) < gr(\nabla x A[\_/x])$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

– Os sequentes superiores da regra (Mix) são as conclusões de aplicações da regra $(\Updownarrow)$ (a fórmula mix $M = \langle B[x/\_]\rangle = \langle C[y/\_]\rangle$).

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2 \\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B & B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \quad \dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_3 & \Sigma_4 \\ C, \Theta \Rightarrow \Lambda, D & D, \Theta \Rightarrow \Lambda, C\end{array}}{\langle C[y/\_]\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle D[y/\_]\rangle}(\Updownarrow)}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, \langle D[y/\_]\rangle}(Mix)$$

onde $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$, $y \notin free(\Theta \cup \Lambda)$ e $\langle B[x/\_]\rangle = \langle C[y/\_]\rangle$

Seja z uma variável que não ocorre em nenhuma subderivação de π se $x \neq y$ e caso contrário seja $z = x$.

Por outro lado, como $x \notin free(\Gamma \cup \Delta)$ e $y \notin free(\Theta \cup \Lambda)$, então $\Gamma[x/z] = \Gamma$, $\Delta[x/z] = \Delta$, $\Theta[y/z] = \Theta$ e $\Lambda[y/z] = \Lambda$.

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\langle A[x/z][z/\_]\rangle, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, \langle D[y/z][z/\_]\rangle}(\Updownarrow)$$

onde

$$\Pi_1 = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1[x/z] & \Sigma_3[y/z] \\ A[x/z], \Gamma \Rightarrow \Delta, B[x/z] & C[y/z], \Theta \Rightarrow \Lambda, D[y/z]\end{array}}{A[x/z], \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, C[y/z]}(Mix)}{A[x/z], \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, C[y/z]}$$

e

$$\Pi_2 = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_4[y/z]\\ D[y/z], \Theta \Rightarrow \Lambda, C[y/z]\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2[x/z]\\ B[x/z], \Gamma \Rightarrow \Delta, A[x/z]\end{array}}{D[y/z], \Theta, \Gamma^* \Rightarrow \Lambda^*, \Delta, A[x/z]}(Mix)}{}}{D[y/z], \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, A[x/z]}$$

Note que, se $\langle B[x/\_]\rangle = \langle C[y/\_]\rangle$, então $B[x/z] = C[y/z]$.

Como $gr(B) < gr(\langle B\rangle)$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda, \langle D[y/\_]\rangle$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Suponhamos agora que $r(\pi) > 2$.

Agora, mostraremos que podemos diminuir o rank da derivação e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) pela hipótese de indução.

Logo, o rank esquerdo é maior que 1 ou o rank direito é maior que 1.

Inicialmente, suponhamos que o rank direito é maior que 1.

Inicialmente, suponhamos que a fórmula mix M ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix).

Então,

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

(com $M \in \Gamma$)

A derivação π é tranformada na derivação π' abaixo para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

$$\pi' = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Agora, suponhamos que a fórmula mix M não ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix).

Seja (R) a regra que tem como conclusão o sequente superior direito da aplicação da regra (Mix).

Temos os seguintes casos:

- (R) é uma atenuação, contração ou permutação no antecedente.

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}(R)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Xi^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Xi^*, \Gamma \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\Theta^*, \Gamma \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(R)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como o rank direito é maior que 1, então a fórmula mix M ocorre em Ξ.

Se a fórmula mix M ocorre em Ξ, então a aplicação da regra Mix em ρ está correta.

Por outro lado, como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma atenuação, contração ou permutação no consequente.

  Demonstrado de modo análogo ao item anterior.

- (R) é uma regra de inferência com um sequente superior e (R) não é uma regra de atenuação, nem de contração e nem de permutação.

  – (R) é uma aplicação de (∇a).

$$\pi = \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\nabla x A[\_/x], \Theta \Rightarrow \Lambda}(\nabla a)}{\Gamma, (\nabla x A[\_/x])^{*}, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}(Mix)$$

Como o rank direito de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \nabla x A[\_/x]$ ou $M \neq \nabla x A[\_/x]$.

Consideremos os seguintes casos:

$*$ $M \neq \nabla x A[\_/x]$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \langle A \rangle^{*}, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle A \rangle, \Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}}{\nabla x A[\_/x], \Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}(\nabla a)}{}}{\Gamma, \nabla x A[\_/x], \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \rangle, \Delta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\nabla x A[\_/x], \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

$*$ $M = \nabla x A[\_/x]$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \langle A \rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\langle A \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}}{\nabla x A[\_/x], \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\nabla a)}{\Gamma, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\nabla x A[\_/x], \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' tal que em ρ' temos apenas a aplicação da regra (Mix) mais abaixo, ou seja,

$$\rho' = \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{array}{c}\Sigma \\ \nabla x A[\_/x], \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Temos por hipótese que $M = \nabla x A[\_/x] \notin \Gamma$.

Como $\nabla x A[\_/x] \notin \Theta^*$ e $\nabla x A[\_/x] \notin \Gamma$, então o rank direito de ρ' é igual a 1.

Como o rank direito de ρ' é igual a 1 e o rank direito de π é maior que 1, então por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

– (R) é uma aplicação de (∇c).

$$\pi = \cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda, \nabla x A[\_/x]}(\nabla c)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \nabla x A[\_/x]}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \rangle}(Mix)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \nabla x A[\_/x]}(\nabla c)$$

Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{matrix}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda, \nabla x A[\_/x]}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' de $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \nabla x A[\_/x]$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma regra de inferência com dois sequentes superiores.

  - (R) é uma aplicação de $(\Updownarrow)$.

$$\pi = \cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A\end{matrix}}{\langle A[x/\_] \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B[x/\_] \rangle}(\Updownarrow)}{\Gamma, (\langle A[x/\_] \rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_] \rangle}(Mix)$$

Como o rank direito de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \langle A[x/\_] \rangle$ ou $M \neq \langle A[x/\_] \rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

  * $M \neq \langle A[x/\_] \rangle$

    Então, a derivacção π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\Pi_1 \quad \Pi_2}{\langle A[x/\_] \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_] \rangle}(\Updownarrow)}{\Gamma, \langle A[x/\_] \rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_] \rangle}$$

onde

$$\Pi_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \overset{\Sigma_1}{A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B}}{\Gamma, (A)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}(Mix)}{}}{A, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}$$

e

$$\Pi_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \overset{\Sigma_2}{B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A}}{\Gamma, (B)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, A}(Mix)}{}}{B, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, A}$$

Como os ranks de $\overset{\Sigma_1}{A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B}$ e $\overset{\Sigma_2}{B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A}$ são menores que o rank de $\cfrac{\overset{\Sigma_1}{A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B} \qquad \overset{\Sigma_2}{B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente

$$\Gamma, \langle A[x/\_]\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle$$

tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

* $M = \langle A[x/\_]\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}}{}}{\Gamma, \langle A[x/\_]\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}}{\Gamma, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}(Mix)}{\cfrac{}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}}$$

onde

$$\Pi_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \overset{\Sigma_1}{A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B}}{\Gamma, (A)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}(Mix)}{}}{A, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}$$

e

$$\Pi_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \overset{\Sigma_2}{B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A}}{\Gamma, (B)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, A}(Mix)}{}}{B, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, A}$$

Como os ranks de $\overset{\Sigma_1}{A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B}$ e $\overset{\Sigma_2}{B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A}$ são menores que o rank de $\cfrac{\overset{\Sigma_1}{A, \Theta \Rightarrow \Lambda, B} \qquad \overset{\Sigma_2}{B, \Theta \Rightarrow \Lambda, A}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' tal que em ρ' temos apenas a aplicação da regra (Mix) mais abaixo, ou seja,

$$\rho' = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \overset{\Sigma}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}}{\Gamma, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}$$

Temos por hipótese que $M \notin \Gamma$.

Como $M \notin \Theta^*$ e $M \notin \Gamma$, então o rank direito de ρ' é igual a 1.

Como o rank direito de ρ' é igual a 1 e o rank direito de π é maior que 1, então por hipótese de

indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Agora, suponhamos que o rank direito é igual a 1.

Como o rank direito é igual a 1 e $r(\pi) > 2$, então o rank esquerdo é maior que 1.

Suponhamos que a fórmula mix M ocorre no consequente do sequente superior direito da (Mix).

Então,

$$\pi = \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

(com $M \in \Lambda$)

A derivação π é transformada na derivação π' abaixo para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

$$\pi' = \dfrac{\underline{\Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Agora, suponhamos que a fórmula mix M não ocorre no consequente do sequente superior direito da (Mix).

Seja (R) a regra que tem como conclusão o sequente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix).

Logo, temos os seguintes casos:

- (R) é uma regra de atenuação, contração ou permutação no consequente.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(R) \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Psi & \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Psi^*, \Lambda}}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Lambda, \Psi^*}}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Lambda, \Delta^*}\,(R)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Como o rank esquerdo é maior que 1, então a fórmula mix M ocorre em Ψ.

Se a fórmula mix M ocorre em Ψ, então a aplicação da regra Mix em ρ está correta.

Por outro lado, como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma regra de atenuação, contração ou permutação no antecedente.

  Demonstrado de maneira análoga ao item anterior.

- (R) é uma regra com um sequente superior e não é uma regra estrutural.

  - (R) é uma aplicação de (∇a).

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\nabla x A[x/\_], \Gamma \Rightarrow \Delta}\,(\nabla a) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\nabla x A[x/\_], \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma & \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta & \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}\,(Mix)}{\nabla x A[x/\_], \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}\,(\nabla a)$$

Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma\\ \langle A\rangle,\Gamma\Rightarrow\Delta\end{matrix}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \langle A\rangle,\Gamma\Rightarrow\Delta\end{matrix}}{\nabla xA[x/\_],\Gamma\Rightarrow\Delta}$, então o por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\nabla xA[x/\_],\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

– (R) é uma aplicação de (∇c)

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma\Rightarrow\Delta,\langle A\rangle\end{matrix}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla xA[\_/x]}(\nabla c)\qquad \Theta\Rightarrow\Lambda}{\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,(\nabla xA[x/\_])^*,\Lambda}$$

Como o rank esquerdo de π é maior que 1, então a fórmula mix $M=\nabla xA[\_/x]$ ou $M\neq\nabla xA[\_/x]$.

Consideremos os seguintes casos:

* $M\neq\nabla xA[\_/x]$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma\Rightarrow\Delta,\langle A\rangle\end{matrix}\qquad \Theta\Rightarrow\Lambda}{\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,(\langle A\rangle)^*,\Lambda}(Mix)}{\dfrac{}{\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\Lambda,\langle A\rangle}}}{\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\Lambda,\nabla xA[\_/x]}(\nabla c)}{\dfrac{}{\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\nabla xA[\_/x],\Lambda}}$$

  Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma\Rightarrow\Delta,\langle A\rangle\end{matrix}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma\Rightarrow\Delta,\langle A\rangle\end{matrix}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\nabla xA[\_/x]}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma,\Theta^*\Rightarrow\Delta^*,\nabla xA[\_/x],\Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

∗ $M = \nabla x A[\_/x]$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, (\langle A \rangle)^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \rangle}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \nabla x A[\_/x]}(\nabla c) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' tal que em ρ' temos apenas a aplicação da regra (Mix) mais abaixo, ou seja,

$$\rho' = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \nabla x A[\_/x]\end{array} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Temos por hipótese que $M = \nabla x A[\_/x] \notin \Lambda$.

Como $\nabla x A[\_/x] \notin \Delta^*$ e $\nabla x A[\_/x] \notin \Lambda$, então o rank esquerda de ρ' é igual a 1.

Como o rank esquerdo de ρ' é igual a 1 e o rank esquerdo de π é maior que 1, então por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma regra com dois sequentes superiores.

– (R) é uma aplicação de $(\Updownarrow)$

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B & B,\Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, (\langle B[x/\_]\rangle)^*, \Lambda}(Mix)$$

Como o rank esquerdo de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \langle B[x/\_]\rangle$ ou $M \neq \langle B[x/\_]\rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

$*$ $M \neq \langle B[x/\_]\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{array} \quad \Theta \Rightarrow \Lambda}{A,\Gamma,\Theta^* \Rightarrow \Delta^*, B^*, \Lambda}(Mix)}{\quad}}{A,\Gamma,\Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ B,\Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array} \quad \Theta \Rightarrow \Lambda}{B,\Gamma,\Theta^* \Rightarrow \Delta^*, A^*, \Lambda}(Mix)}{\quad}}{B,\Gamma,\Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, A}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow)}{\quad}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle B[x/\_]\rangle, \Lambda}$$

Como os ranks de $\begin{array}{c}\Sigma_1\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{array}$ e $\begin{array}{c}\Sigma_2\\ B,\Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array}$ são menores que o rank de

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Sigma_1 & \Sigma_2\\ A,\Gamma \Rightarrow \Delta, B & B,\Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{array}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle}$$

, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle B[x/\_]\rangle, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

$*$ $M = \langle B[x/\_]\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Pi_1 \qquad \Pi_2}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle}(\Updownarrow) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

onde

$$\Pi_1 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{A, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, B^*, \Lambda}(Mix)}{}}{A, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, B}$$

$$\Pi_2 = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{B, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, A^*, \Lambda}(Mix)}{}}{B, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, A}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1\\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2\\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix}$ são menores que o rank de

$$\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle}$$

então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' para o sequente $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que em ρ' temos apenas a aplicação da regra (Mix) mais abaixo, ou seja,

$$\rho' = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Temos por hipótese que $M = \langle B[x/\_]\rangle \notin \Lambda$.

Como $M = \langle B[x/\_]\rangle \notin \Delta^*$ e $M = \langle B[x/\_]\rangle \notin \Lambda$, então o rank esquerdo de

ρ' é igual a 1.

Como o rank esquerdo de ρ' é igual a 1 e o rank esquerdo de π é maior que 1, então por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente
$\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Suponhamos agora que $SC^* = SCML^*$ ou $SC^* = SCIL^*$.

Note que em todos os casos anteriores (em que $SC^* = SCCL^*$) não existe a obrigatoriedade de o consequente de um sequente conter mais do que uma fórmula. Logo, todos os casos existentes para $SC^* = SCML^*$ ou $SC^* = SCIL^*$ são demonstrados de modo análogo.

■

Lema8.1.2: Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$. Então, existe uma derivação π' para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$ livre de aplicação da regra (Mix).

Prova: A prova é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π.

Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\mathcal{B})$.

Seja n o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π.

Passo base: $n = 0$
Logo, $\pi' = \pi$.

Hipótese de indução: para toda derivação com n menor ou igual a k aplicações da regra (Mix) o teorema é válido.

Seja π um derivação com $n = k + 1$ aplicações da regra (Mix).

Tomemos uma subderivação D da derivação π tal que D seja uma derivação especial.

Pelo lema 8.1.1 a subderivação D pode ser transformada em uma derivação D' para o mesmo sequente sem ocorrência de aplicação da regra (Mix).

Substituindo a subderivação D por D' na derivação π obtemos um derivação ϖ para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ com $n - 1 = k$ aplicações da regra (Mix).

Então, por hipótese de indução existe uma derivação π' para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ livre de aplicação da regra (Mix).

■

A.5.2 Rasultados da seção 8.2

Lema8.2.1: Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$). Então, se π é uma derivação especial, então π pode ser transformada em uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Prova: A prova do lema é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ de modo similar a prova do lema 8.1.1.

Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ (com $\Omega^* \subseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$).

Suponhamos que π é uma derivação especial. Vamos nos concentrar nas regras envolvendo fórmulas generalizadas e fórmulas marcadas.

Temos que $SC^* \in \{SCML^*, SCIL^*, SCCL^*\}$.

Suponhamos inicialmente que $SC^* = SCCL^*$.

Passo base: Seja π é uma derivação em $SC^*(\Omega)$ tal que $(gr(\pi), r(\pi)) = (0, 2)$.

Demonstardo de modo análogo ao caso clássico, pois a fórmula mix não é uma fórmula marcada ou generalizada.

Hipótese de indução: O lema é válido para toda derivação ρ tal que $(gr(\rho), r(\rho)) < (gr(\pi), r(\pi)) = (g, r)$.

Seja π uma derivação tal que $(gr(\pi), r(\pi)) = (g, r)$.

Além dos casos de fórmula mix de $SC^*(\mathcal{B})$, temos os seguintes casos em $SC(\Omega)$.

Suponhamos que $r(\pi) > 2$.

Agora, mostraremos que podemos diminuir o rank da derivação e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) por hipótese de indução.

Logo, o rank esquerdo é maior que 1 ou o rank direito é maior que 1.

Inicialmente, suponhamos que o rank direito é maior que 1.

Inicialmente, suponhamos que a fórmula mix M ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix).

Então,

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

(com $M \in \Gamma$)

A derivação π é tranformada na derivação π' abaixo para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

$$\pi' = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\qquad}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Agora, suponhamos que a fórmula mix M não ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix).

Seja (R) a regra que tem como conclusão o sequente superior direito da aplicação da regra (Mix).

Temos os seguintes casos:

- (R) é uma atenuação, contração ou permutação no antecedente.

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}(R)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Xi^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Xi^*, \Gamma \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\Theta^*, \Gamma \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(R)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como o rank direito é maior que 1, então a fórmula mix M ocorre em Ξ.

Se a fórmula mix M ocorre em Ξ, então a aplicação da regra Mix em ρ está correta.

Por outro lado, como o rank de $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Xi \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma atenuação, contração ou permutação no consequente.

  Demonstrado de modo análogo ao item anterior.

- (R) é uma regra de inferência com um sequente superior e (R) não é uma regra de atenuação, nem de contração e nem de permutação.

  – (R) é uma aplicação de $(\top^* a)$.

$$\pi = \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}(\top^* a)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \langle A \rightarrow A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, (\langle A \rightarrow A \rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\langle A \rightarrow A \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\top^* a)$$

Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A \rangle, \Delta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

  – (R) é uma aplicação de $(\perp^* c)$.

$$\pi = \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle \perp \rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}(\perp^* c)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\bot\rangle\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\bot\rangle}(Mix)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\bot^* c)$$

Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\bot\rangle\end{matrix}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\bot\rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' de $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Agora, suponhamos que o rank direito é igual a 1.

Como o rank direito é igual a 1 e $r(\pi) > 2$, então o rank esquerdo é maior que 1.

Suponhamos que a fórmula mix M ocorre no consequente do sequente superior direito da (Mix).

Então,

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

(com $M \in \Lambda$)

A derivação π é transformada na derivação π' abaixo para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

$$\pi' = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Agora, suponhamos que a fórmula mix M não ocorre no consequente do sequente superior direito da (Mix).

Seja (R) a regra que tem como conclusão o sequente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix).

Logo, temos os seguintes casos:

- (R) é uma regra de atenuação, contração ou permutação no consequente.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(R) \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Psi^*, \Lambda}}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Lambda, \Psi^*}(R)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Lambda, \Delta^*}}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como o rank esquerdo é maior que 1, então a fórmula mix M ocorre em Ψ.

Se a fórmula mix M ocorre em Ψ, então a aplicação da regra Mix em ρ está correta.

Por outro lado, como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Psi\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma regra de atenuação, contração ou permutação no antecedente.

  Demonstrado de maneira análoga ao item anterior.

- (R) é uma regra com um sequente superior e não é uma regra estrutural.

  - (R) é uma aplicação de $(\top^* a)$.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A \to A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\top^* a) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}(Mix)}{\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}(\top^{*}a)$$

Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$, então o por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

- (R) é uma aplicação de $(\perp^{*}c)$

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\perp\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\perp * c) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\perp\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, (\langle\perp\rangle)^{*}, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda, \langle\perp\rangle}}}{\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}, \Lambda}(\perp^{*}c)$$

Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\perp\rangle\end{matrix}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\perp\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^{*} \Rightarrow \Delta^{*}\Lambda$ tal que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Suponhamos agora que $SC^{*} = SCML^{*}$ ou $SC^{*} = SCIL^{*}$.

Note que em todos os casos anteriores (em que $SC^{*} = SCCL^{*}$) não existe a obrigatoriedade de o consequente de um sequente conter mais do que uma fórmula. Logo, todos os casos existentes para $SC^* = SCML^*$ ou $SC^* = SCIL^*$ são demonstrados de modo análogo.

■

Lema8.2.2: Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$
(com $\Omega^* \subseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$). Então, existe uma derivação π' para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ livre de aplicação da regra (Mix).

Prova: A prova é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π.

Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$ com $\Omega^* \subseteq \{(\top^* a), (\bot^* c)\}$).

Seja n o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π.

Passo base: $n = 0$
Logo, $\pi' = \pi$.

Hipótese de indução: para toda derivação com n menor ou igual a k aplicações da regra (Mix) o teorema é válido.

Seja π um derivação com $n = k + 1$ aplicações da regra (Mix).

Tomemos uma subderivação D da derivação π tal que D seja uma derivação especial.

Pelo lema 8.2.1 a subderivação D pode ser transformada em uma derivação D' para o mesmo sequente sem ocorrência de aplicação da regra (Mix).

Substituindo a subderivação D por D' na derivação π obtemos um derivação ϖ para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ com $n - 1 = k$ aplicações da regra (Mix).

Então, por hipótese de indução existe uma derivação π' para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ livre de aplicação da regra (Mix).

■

A.5.3 Rasultados da seção 8.3

Lema8.3.1: Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$. Então, se π é uma derivação especial restrita, então π pode ser transformada em uma derivação π' de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tal que toda as aplicações da regra (Mix), caso exista alguma, têm as seguinte propriedades:

- o sequente superior esquedo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o sequente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;
- o maior número de sequentes consecutivos em um caminho ρ tal que o sequente mais inferior de ρ é o sequente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos sequentes de ρ contém a fórmula mix M no consequente é 1; e
- e o maior número de sequentes consecutivos em um caminho ρ tal que o sequente mais inferior de ρ é o sequente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos sequentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.

Prova: A prova do lema é feita por indução sobre o par $(gr(\pi), r(\pi))$ (onde $gr(\pi)$ é o grau e $r(\pi)$ é o rank da derivação π) de modo análogo ao lema 8.1.1.

Seja π uma derivação de $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$.

Suponhamos que π é uma derivação especial restrita. Vamos nos concentrar nas regras envolvendo fórmulas generalizadas e fórmulas marcadas.

Temos que $SC^* \in \{SCML^*, SCIL^*, SCCL^*\}$.

Suponhamos inicialmente que $SC^* = SCCL^*$.

Passo base: π é uma derivação de grau zero e rank 2, isto é, $(gr(\pi), r(\pi)) = (0, 2)$.

Demonstardo de modo análogo ao caso clássico.

Hipótese de indução: O lema é válido para toda derivação ρ tal que $(gr(\rho), r(\rho)) < (gr(\pi), r(\pi)) = (g, r)$.

Seja π uma derivação em $SC(\Omega)$ tal que $(gr(\pi), r(\pi)) = (g, r)$.

Suponhamos que $SC^* = SCCL^*$.

Suponhamos que $r(\pi) = 2$.

Logo, tanto o rank esquerdo como o rank direito é igual a 1.

Se o rank esquerdo é igual a 1, então apenas o sequente superior esquerdo da aplicação da regra Mix contém a fórmula mix no consequente.

Se o rank direito é igual a 1, então apenas o sequente superior direito da aplicação da regra Mix contém a fórmula mix no antecedente.

Em cada um dos casos a seguir mostraremos que podemos diminuir o grau da fórmula mix e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) pela hipótese de indução.

Daí, além dos casos de $SC^*(\mathcal{B})$, temos os seguintes casos:

- A fórmula mix é obtida a partir de uma aplicação de uma regra estrutural ou sequente inicial.

  - O sequente superior esquerda da aplicação da regra (Mix) é um sequente inicial.

$$\pi = \dfrac{M \Rightarrow M \qquad \begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{M, \Theta^* \Rightarrow \Lambda} \quad \longrightarrow \quad \pi' = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{}}{M, \Theta^* \Rightarrow \Lambda}$$

Portanto, π' é uma derivação do sequente $M, \Delta^* \Rightarrow \Lambda$ em que nenhuma aplicação da regra Mix ocorre.

– O sequente superior direito da aplicação da regra (Mix) é um sequente inicial: demonstrado de maneira análoga ao item anterior.

– O sequente superior direito da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra estrutural (Aa).

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, M\end{array} \quad \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{M, \Theta \Rightarrow \Lambda}(Aa)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}(Mix) \quad \rightarrow \quad \pi' = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Portanto, π' é uma derivação do sequente $\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda$ em que nenhuma aplicação da regra (Mix) ocorre.

Todos os outros casos são demonstrados de modo análogo ao item anterior.

- A fórmula mix M é obtida a partir de aplicações de regras lógicas para fórmula marcada.

  – O sequente superior esquerdo da regra Mix é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* c)$ e o sequente superior direito é a conclusão de uma aplicação da regra $(\wedge^* a)$ (fórmula mix: $\langle A \wedge B \rangle$).

$$\pi = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B \rangle}(\wedge^* c) \quad \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_3\\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A \wedge B \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\wedge^* a)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Como $gr(\langle A\rangle) < gr(\langle A \wedge B\rangle)$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– O sequente superior esquerdo da regra Mix é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* c)$ e o sequente superior direito é a conclusão de uma aplicação da regra $(\vee^* a)$ (fórmula mix: $\langle A \vee B\rangle$).

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \vee B\rangle}(\vee^* c) \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_3\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_4\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A \vee B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\vee^* a)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_3\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

Como $gr(\langle A\rangle) < gr(\langle A \vee B\rangle)$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– O sequente superior esquerdo da regra Mix é a conclusão de uma aplicação da regra $(\neg^* c)$ e o sequente superior direito é a conclusão de uma aplicação da regra $(\neg^* a)$ (fórmula mix: $\langle \neg A\rangle$).

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \neg A\rangle}(\neg^* c) \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{array}}{\langle \neg A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\neg^* a)}{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle \qquad \langle A \rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Theta, \Gamma^* \Rightarrow \Lambda^*, \Delta}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda}}$$

Como $gr(\langle A \rangle) < gr(\langle \neg A \rangle)$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta \Rightarrow \Delta, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

Suponhamos agora que $r(\pi) > 2$.

Agora, mostraremos que podemos diminuir o rank da derivação e assim eliminar a aplicação da regra (Mix) pela hipótese de indução.

Logo, o rank esquerdo é maior que 1 ou o rank direito é maior que 1.

Inicialmente, suponhamos que o rank direito é maior que 1.

Os casos em que a fórmual mix ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix) são demonstrados de modo análogo ao lema 8.1.1.

Suponhamos que a fórmula mix M não ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix).

- (R) é uma regra de atenuação, contração ou permutação no antecedente.

  Demonstrado de modo análogo ao lema 8.1.1.

- (R) é uma regra de inferência com um sequente superior e (R) não é uma regra de atenuação, nem de contração e nem de permutação.

  - (R) é uma aplicação da regra $(\perp^* c)$.

$$\pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle \perp \rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}(\perp^* c)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\bot\rangle\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\bot\rangle}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\bot^* c)$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\bot\rangle\end{array}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\bot\rangle\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

- (R) é uma aplicação de $(\top^* a)$.

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle A \to A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}(\top^* a)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle A \to A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, (\langle A \to A\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle A \to A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\top^* a)$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle A \to A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle A \to A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\neg^* a)$.

$$\pi = \cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{array}}{\langle \neg A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\neg^* a)}{\Gamma, (\langle \neg A \rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Como o rank direito de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \langle \neg A \rangle$ ou $M \neq \langle \neg A \rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

* $M \neq \langle \neg A \rangle$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{array}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \rangle}(Mix)}{\langle \neg A \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\neg^* a)}{\cfrac{}{\Gamma, \langle \neg A \rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

  Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{array}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle\end{array}}{\langle \neg A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \langle \neg A \rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

* $M = \langle \neg A \rangle$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A \rangle}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \rangle}(Mix)}{\langle \neg A \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\neg^* a)}{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\cfrac{}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{array}}{\langle\neg A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que em ρ' temos a aplicação da regra (Mix) mais abaixo e todas as outras aplicações da regra (Mix) que ocorrem em ρ' têm as propriedades do lema.

$$\rho' = \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ \langle\neg A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda\end{array}}{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\quad\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda\quad}}$$

Temos por hipótese que $M = \langle\neg A\rangle \notin \Gamma$.

Como $M = \langle\neg A\rangle \notin \Delta^*$ e $M = \langle\neg A\rangle \notin \Gamma$, então o rank direito de ρ' é igual a 1.

Então por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

- (R) é uma aplicação de $(\neg^* c)$.

$$\pi = \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda, \langle\neg A\rangle}(\neg^* c)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\neg A\rangle}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, (\langle A\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\quad\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda\quad}}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\neg A\rangle}(\neg^* c)$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Theta \Rightarrow \Lambda, \langle \neg A\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\neg A\rangle$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\wedge^* a)$.

$$\pi = \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A \wedge B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\wedge^* a)}{\Gamma, (\langle A \wedge B\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Como o rank direito de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \langle A \wedge B\rangle$ ou $M \neq \langle A \wedge B\rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

* $M \neq \langle A \wedge B\rangle$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\Gamma, (\langle A\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\langle A \wedge B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\wedge^* e)}{\Gamma, \langle A \wedge B\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

  Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{array}}{\langle A \wedge B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' de $\Gamma, \langle A \wedge B\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

$*$ $M = \langle A \wedge B \rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow M \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \quad \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, (\langle A \rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\langle A \wedge B \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\dfrac{}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Como o rank de $\begin{array}{c} \Sigma \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda \end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c} \Sigma \\ \langle A \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda \end{array}}{\langle A \wedge B \rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que em ρ' temos a aplicação da regra (Mix) mais abaixo e todas as outras aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

$$\rho' = \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{array}{c} \Sigma \\ \langle A \wedge B \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda \end{array}}{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\dfrac{}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Temos por hipótese que $M = \langle A \wedge B \rangle \notin \Gamma$.

Como $M = \langle A \wedge B \rangle \notin \Theta^*$ e $M = \langle A \wedge B \rangle \notin \Gamma$, então o rank direito de ρ' é igual a 1.

Então por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

- (R) é uma regra de inferência com dois sequentes superiores.
  - (R) é uma aplicação de $(\otimes^* c)$ $(\otimes \in \{\vee, \wedge\})$.

$$\pi = \cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda, \langle (A \otimes B)\rangle}(\otimes^* c)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle (A \otimes B)\rangle}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A\rangle}(Mix) \qquad \cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B\rangle}(Mix)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle (A \otimes B)\rangle}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B\rangle\end{matrix}$ são menores que o rank de

$$\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Theta \Rightarrow \Lambda, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Theta \Rightarrow \Lambda, \langle (A \otimes B)\rangle}$$

, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle (A \otimes B)\rangle$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\vee^* a)$.

$$\pi = \cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\langle (A \vee B)\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}(\vee^* a)}{\Gamma, \langle (A \vee B)\rangle^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Como o rank direito de π é maior que 1, então a fórmula mix
$M = \langle A \vee B\rangle$ ou $M \neq \langle A \vee B\rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

* $M \neq \langle A \vee B\rangle$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, (\langle A\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, (\langle B\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\langle A \vee B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\dfrac{}{\Gamma, \langle A \vee B\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}$ são menores que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\langle A \vee B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \langle A \vee B\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

$*$ $M = \langle A \vee B\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, (\langle A\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\Gamma, (\langle B\rangle)^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\langle B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}{\langle A \vee B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\vee^* a)}{\dfrac{}{\Gamma, \langle A \vee B\rangle, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}}{\dfrac{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}{\dfrac{}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}$ são menores que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle, \Theta \Rightarrow \Lambda\end{matrix}}{\langle A \vee B, \Theta \Rightarrow \Lambda}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' tal que em ρ' temos apenas a aplicação da regra (Mix) mais abaixo, ou seja,

$$\rho' = \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \begin{matrix} \Sigma \\ \langle A \vee B \rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda \end{matrix}}{\Gamma, \Gamma^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Temos por hipótese que $M = \langle A \vee B \rangle \notin \Gamma$.

Como $M = \langle A \vee B \rangle \notin \Delta^*$ e $M = \langle A \vee B \rangle \notin \Gamma$, então o rank direito de ρ' é igual a 1.

Como o rank direito de ρ' é igual a 1 e o rank direito de π é maior que 1, então $r(\rho') < r(\pi)$.

Então por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

Agora, suponhamos que o rank direito é igual a 1.

Como o rank direito é igual a 1 e $r(\pi) > 2$, então o rank esquerdo é maior que 1.

Os casos em que a fórmual mix ocorre no antecedente do sequente superior esquerdo da regra (Mix) são demonstrados de modo análogo ao lema 8.1.1.

Agora, suponhamos que a fórmula mix M não ocorre no consequente do sequente superior direito da (Mix).

Seja (R) a regra que tem como conclusão o sequente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix).

Logo, temos os seguintes casos:

- (R) é uma regra com um sequente superior e (R) é uma regra estrutural.

Demonstrado do modo análogo ao lema 8.1.1.

- (R) é uma regra com um sequente superior e não é uma regra estrutural.

  – (R) é uma aplicação de $(\top^* a)$.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\top^* a) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\top^* a)$$

  Como o rank de $\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \langle A \rightarrow A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

  – (R) é uma aplicação de $(\bot^* c)$

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \bot \rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}(\bot^* c) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \bot \rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, (\langle \bot \rangle)^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle \bot \rangle}}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\bot^* c)$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\perp\rangle\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\perp\rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\wedge^* a)$.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\langle A \wedge B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\wedge^* a) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A \wedge B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\langle A \wedge B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(\wedge^* a)$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}$ é menor que o rank de $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\langle A \wedge B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\langle A \wedge B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\neg^* a)$.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{array}}{\langle \neg A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\neg^* a) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle \neg A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, (\langle A\rangle)^*, \Lambda}(Mix)}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A\rangle}}{\langle \neg A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como o rank de $\overset{\Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle}$ é menor que o rank de $\dfrac{\overset{\Sigma}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle}}{\langle \neg A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\langle \neg A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\neg^* c)$.

$$\pi = \dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \neg A\rangle}(\neg^* c) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, (\langle \neg A\rangle)^*, \Lambda}$$

Como o rank esquerdo de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \langle \neg A\rangle$ ou $M \neq \langle \neg A\rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

∗ $M \neq \langle \neg A\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\Sigma}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle \neg A\rangle}}{}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle \neg A\rangle, \Lambda}$$

Como o rank de $\overset{\Sigma}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ é menor que o rank de $\dfrac{\overset{\Sigma}{\langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle \neg A\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle\neg A\rangle, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

$*$ $M = \langle\neg A\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array} \quad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\neg A\rangle} \quad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Theta \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Como o rank de $\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}$ é menor que o rank de $\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle\neg A\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação ρ' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que em ρ' temos a aplicação da regra (Mix) mais abaixo e todas as outras aplicações da regra (Mix) que o correm em ρ' têm as propriedades do lema.

$$\rho' = \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma'\\ \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle\neg A\rangle\end{array} \quad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Theta \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{\overline{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}}$$

Temos por hipótese que $\langle\neg A\rangle \notin \Lambda$.

Como $\langle\neg A\rangle \notin \Lambda$ e $\langle\neg A\rangle \notin \Theta^*$, então o rank esquerdo de ρ' é igual a 1.

Então, por hipótese de indução ρ' pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

- (R) é uma regra com dois sequentes superiores.

– (R) é uma aplicação de $(\vee^* a)$.

$$\pi = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\langle A \vee B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}(\vee^* a) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle(A \vee B)\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)$$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle A\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix) \qquad \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\langle B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}(Mix)}{\langle A \vee B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}$ são menores que o rank de

$$\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \langle A\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \langle B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta\end{matrix}}{\langle A \vee B\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

então por hipótese de indução ρ pode ser transformado em uma derivação π' para o sequente $\langle A \vee B\rangle, \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

– (R) é uma aplicação de $(\otimes^* c)$ (com $\otimes \in \{\wedge, \vee\}$).

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \otimes B\rangle}(\otimes^* c) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, (\langle A \otimes B\rangle)^*, \Lambda}(Mix)$$

Como o rank esquerdo de π é maior que 1, então a fórmula mix $M = \langle A \otimes B\rangle$ ou $M \neq \langle A \otimes B\rangle$.

Consideremos os seguintes casos:

* $M \neq \langle A \otimes B\rangle$

  Então, a derivação π é transformada em:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, ((\langle A\rangle))^*, \Lambda}(Mix)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A\rangle} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, ((\langle B\rangle))^*, \Lambda}(Mix)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B\rangle}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \otimes B\rangle}(\otimes^* c)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle A \otimes B\rangle, \Lambda}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}$ são menores que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformada em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle A \otimes B\rangle, \Lambda$, tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorrem em π' têm as propriedades do lema.

* $M = \langle A \otimes B\rangle$

Então, a derivação π é transformada em:

$$\rho = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle A\rangle, \Lambda}(Mix)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A\rangle} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \langle B\rangle, \Lambda}(Mix)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle B\rangle}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \otimes B\rangle}(\otimes^* c) \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Como os ranks de $\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix}$ e $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}$ são menores que o rank de $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B\rangle\end{matrix}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \wedge B\rangle}$, então por hipótese de indução ρ pode ser transformada em uma derivação ρ' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$, tal que em ρ' temos apenas a aplicação da regra (Mix) mais abaixo, ou seja,

$$\rho' = \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\ \Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda, \langle A \otimes B\rangle\end{matrix} \qquad \Theta \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Theta^*, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda^*, \Lambda}(Mix)}{\;}}{\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda}$$

Temos por hipótese que $\langle A \otimes B \rangle \notin \Lambda$.

Como $\langle A \otimes B \rangle \notin \Lambda$ e $\langle A \otimes B \rangle \notin \Delta^*$, então o rank esquerdo de ρ' é igual a 1.

Como o rank esquerdo de ρ' é igual a 1 e o rank esquerdo de π é maior que 1, então $r(\rho') < r(\pi)$.

Então, por hipótese de indução ρ' pode ser transformada em uma derivação π' para o sequente $\Gamma, \Theta^* \Rightarrow \Delta^*, \Lambda$ tal que todas as aplicações da regra (Mix) que ocorre em π' têm as propriedades do lema.

Note que em todos os casos anteriores (em que $SC^* = SCCL^*$) não existe a obrigatoriedade de o consequente de um sequente conter mais do que uma fórmula. Logo, todos os casos existentes para $SC^* = SCML^*$ ou $SC^* = SCIL^*$ são demonstrados de modo análogo.

■

Lema8.3.2: Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$. Então, existe uma derivação π' para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC(\Omega)$ tal que todas as aplicações da regra (Mix), caso exista alguma, têm as seguinte propriedades:

- o sequente superior esquedo (direito) da aplicação da regra (Mix) é a conclusão de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$ e o sequente superior direito (esquerdo) é a conclusão de uma aplicação de regra operacional para fórmulas marcadas;

- o maior número de sequentes consecutivos em um caminho ρ tal que o sequente mais inferior de ρ é o sequente superior esquerdo da aplicação da regra (Mix) e cada um dos sequentes de ρ contém a fórmula mix M no consequente é 1; e

- e o maior número de sequentes consecutivos em um caminho ρ tal que o sequente mais inferior de ρ é o sequente superior direito da aplicação da regra (Mix) e cada um dos sequentes de ρ contém a fórmula mix M no antecedente é 1.

Prova: A prova do lema 8.3.2 é feita por indução sobre o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π que não têm as propriedades descritas no lema.

Seja π uma derivação para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ em $SC^*(\Omega)$.

Seja n o número de ocorrências de aplicações da regra (Mix) em π que não têm as propriedades descritas no lema.

Passo base: $n = 0$
Logo, $\pi' = \pi$.

Hipótese de indução: para toda derivação com n menor ou igual a k aplicações da regra (Mix) que não têm as propriedades descritas no lema, o teorema é válido.

Seja π um derivação com $n = k + 1$ aplicações da regra (Mix) que não têm as propriedades descritas no lema.

Tomemos uma subderivação D da derivação π tal que D seja uma derivação especial restrita.

Pelo lema 8.3.1 a subderivação D pode ser transformada em uma derivação D', para o mesmo sequente, em que todas as ocorrências de aplicações da regra (Mix), caso exista alguma, têm as propriedades descritas no lema.

Substituindo a subderivação D por D' na derivação π obtemos um derivação ϖ para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ com $n - 1 = k$ aplicações da regra (Mix) que não têm as propriedades descritas no lema.

Então, por hipótese de indução existe uma derivação π' para o sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ tal que todas as ocorrências de aplicação da regra (Mix), caso exista alguma, têm as propriedades descritas no lema.

■

A.6 Resultados do capítulo 9

Proposição9.2.1: Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$. Então, existe pelo menos um caminho maximal em π.

Prova: Seja π uma derivação normal em $ND(\Omega)$.

A prova da proposição 9.2.1 é feita por indução sobre o comprimento de π.

Passo base: π tem comprimento um.

Logo, π é uma árvore contendo um único nó rotulado pela fórmula A ou
$\pi = (\top^* I)\dfrac{}{\langle A \rightarrow A\rangle}$.

Se π é uma árvore contendo um único nó rotulado pela fórmula A, então a sequência (A) é um caminho maximal em π.

Se $\pi = (\top^* I)\dfrac{}{\langle A \rightarrow A\rangle}$, então a sequência $(\langle A \rightarrow A\rangle)$ é um caminho maximal em π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

Hipótese de indução: a proposição é válido para toda derivação de comprimento menor ou igual a k.

Seja π uma derivação de comprimento $k+1$.

Então, temos os seguintes casos:

- Uma aplicação da regra $\alpha \in \{(\nabla E), (\nabla I), (\perp^* E), (\wedge^* E)\}$ como última inferência de π:

$$\pi = (\alpha)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ B\end{array}}{C}$$

Então, por hipótese de indução existe um caminho maximal $(A_1, ..., A_n, B)$ na derivação $\begin{matrix}\Sigma\\ B\end{matrix}$.

Daí, a sequência $(A_1, ..., A_n, B, C)$ é uma caminho maximal na derivação π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

- Uma aplicação da regra ($\Updownarrow$) como última inferência de π:

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\\ \Sigma_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Delta, [B]^i\\ \Sigma_3\\ A\end{matrix}}{\langle B[x/\_]\rangle}i$$

Então, por hipótese de indução existe um caminho maximal $(A_1, ..., A_n, \langle A[x/\_]\rangle)$ na derivação $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle A[x/\_]\rangle\end{matrix}$.

Logo, por definição de caminho, a sequência $(A_1, ..., A_n, \langle A[x/\_]\rangle, \langle B[x/\_]\rangle)$ é um caminho em π.

Daí, como $(A_1, ..., A_n, \langle A[x/\_]\rangle)$ é uma caminho maximal, então a sequência $(A_1, ..., A_n, \langle A[x/\_]\rangle, \langle B[x/\_]\rangle)$ é uma caminho maximal na derivação π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

- Uma aplicação da regra $(\otimes^* I)$ como última inferência de π (com $\otimes \in \{\wedge, \vee\}$):

$$\pi = (\otimes^* I)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle B\rangle\end{matrix}}{\langle A \otimes B\rangle}$$

Então, por hipótese de indução existe um caminho maximal $(A_1, ..., A_n, \langle A\rangle)$ na derivação $\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix}$

Daí, a sequência $(A_1, ..., A_n, \langle A\rangle, \langle A \otimes B\rangle)$ é uma caminho maximal na derivação π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

- Uma aplicação da regra $(\vee^* E)$ como última inferência de π:

$$\pi = (\vee^* E)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \wedge B\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Gamma, [\langle A\rangle]^i \\ \Sigma_1 \\ \underline{M}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta, [\langle B\rangle]^i \\ \Sigma_2 \\ \underline{M}\end{array}}{\underline{M}}\, i$$

Então, por hipótese de indução existe um caminho maximal $(A_1, ..., A_n, \langle A \vee B\rangle)$ na derivação $\begin{array}{c}\Sigma \\ \langle A \vee B\rangle\end{array}$ e existe um caminho maximal $(B_1, ..., B_m, \underline{M})$ na derivação $\begin{array}{c}\Gamma, [\langle A\rangle]^i \\ \Sigma_1 \\ \underline{M}\end{array}$.

Se $B_1 = \langle A\rangle$, então, por definição de caminho, a sequência

$$(A_1, ..., A_n, \langle A \vee B\rangle, \langle A\rangle, B_2, ..., B_m, \underline{M}, \underline{M})$$

é um caminho maximal na derivação π.

Caso contrário, a sequência $(B_1, ..., B_m, \underline{M}, \underline{M})$ é um caminho maximal na derivação π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

- Uma aplicação da regra $(\neg^* I)$ como última inferência de π:

$$\pi = (\neg^* I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma, [\langle A\rangle]^i \\ \Sigma \\ \perp\end{array}}{\langle \neg A\rangle}\, i$$

Então, por hipótese de indução existe um caminho maximal $(A_1, ..., A_n, \perp)$ na derivação $\begin{array}{c}\Gamma, [\langle A\rangle]^i \\ \Sigma \\ \perp\end{array}$.

Daí, a sequência $(A_1, ..., A_n, \perp, \langle \neg A\rangle)$ é uma caminho maximal na derivação π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

- Uma aplicação da regra $(\neg^* E)$ como última inferência de π:

$$\pi = (\neg^* E)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle \neg A\rangle\end{matrix}}{\bot}$$

Então, por hipótese de indução existe um caminho maximal $(A_1, ..., A_n, \langle \neg A\rangle)$ na derivação $\begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle \neg A\rangle\end{matrix}$

Daí, a sequência $(A_1, ..., A_n, \langle \neg A\rangle, \bot)$ é uma caminho maximal na derivação π.

Portanto, existe pelo menos um caminho maximal em π.

■

A.6.1 Resultados da subseção 9.2.1

Proposição9.2.2: Seja π uma derivação normal em $ND(\mathcal{B})$. Então, em cada um dos caminhos de π existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Prova: Suponhamos que exista um caminho em uma derivação normal π em $ND(\mathcal{B})$ tal que existam as aplicações α_1 e α_2 da regra $(\Updownarrow)$ em ρ.

Como π é uma derivação normal, então existe pelo menos uma aplicação de regra β entre α_1 e α_2 tal que β não é a regra $(\Updownarrow)$.

Por outro lado, as aplicações α_1 e α_2 têm como conclusão e premissa maior uma fórmula marcada.

$$(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_2, [C]^j\\ \Sigma_3\\ D\end{matrix} \qquad (\beta)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1, [A]^i\\ \Sigma_1\\ B\end{matrix} \qquad \langle A\rangle \qquad \begin{matrix}\Delta_1, [B]^i\\ \Sigma_2\\ A\end{matrix}}{\langle B\rangle}\, i}{\langle C\rangle} \qquad \begin{matrix}\Delta_2, [D]^j\\ \Sigma_4\\ C\end{matrix}}{\langle D\rangle}\, j$$

Como $ND(\mathcal{B})= ND^{*} \cup \{(\nabla I), (\nabla E), (\Updownarrow)\}$ e β está entre α_1 e α_2, então β é uma aplicação da regra (∇I) cuja conclusão é uma fórmula generalizada.

Daí, se β é uma aplicação da regra (∇I) e α_2 tem como premissa maior uma fórmula marcada, então existe uma aplicação da (∇E) entre β e α_2.

Logo, ρ contém uma aplicação de regra (∇I) que precede uma aplicação da regra (∇E). Absurdo, pois π é uma derivação normal.

Portanto, para todo caminho de π existe no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

■

Proposição9.2.4: Seja π uma derivação livre de corte para o sequente S em $SC(\mathcal{B})$. Então, toda fórmula que ocorre em π é uma subfórmula de alguma fórmula de S.

Prova: A prova da proposição 9.2.4 é feita por indução sobre o comprimento de uma derivação em $SC(\mathcal{B})$.

Seja π uma derivação livre de corte para o sequente S em $SC(\mathcal{B})$.

Passo base: π é uma derivação de comprimento 1.

Logo, π é uma árvore contendo um único nó rutulado pelo sequente $A \Rightarrow A$.

Portanto, toda fórmula que ocorre em π é uma subfórmula de alguma fórmula de $S = A \Rightarrow A$.

Hipótese de indução: o resultado é válido para toda derivação π de comprimento menor ou igual a k.

Seja π uma derivação de comprimento $k + 1$.

Logo, além dos casos de SC, em $SC(\mathcal{B})$ temos os seguinte casos:

- a última inferência de π é uma aplicação da regra (∇c)

$$\pi = \cfrac{\begin{array}{c}\Sigma \\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle\end{array}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]}(\nabla c)\ (x \notin occ[A])$$

Seja φ uma fórmula em π.

Se φ é uma fórmula que ocorre em $\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]$, então φ é uma subfórmula de alguma fórmula do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]$,

Caso contrário, φ é uma fórmula que ocorre em Σ ou φ é uma fórmula que ocorre no sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle$.

caso 1: φ é uma fórmula que ocorre em Σ.

Então por hipótese de indução, φ é subfórmula de alguma fórmula do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle$.

Se φ é uma subfórmula de alguma fórmula em Γ ou em Δ, então φ é uma subfórmula de alguma fórmula do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]$.

Se φ é uma subfórmula da fórmula $\langle A \rangle$, então, por definição, φ é subfórmula da fórmula $\nabla x A[\_/x]$ que ocorre no sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]$.

caso 2: φ é uma fórmula que ocorre em $\Gamma \Rightarrow \Delta, \langle A \rangle$.

Se φ ocorre em Γ ou em Δ, então φ é uma subfórmula de alguma fórmula do sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]$.

Se $\varphi = \langle A \rangle$, então, por definição, φ é uma subfórmula de $\nabla x A[\_/x]$.

Portanto, toda fórmula que ocorre em π é uma subfórmula de alguma fórmula de $\Gamma \Rightarrow \Delta, \nabla x A[\_/x]$.

- a última inferência de π é uma aplicação da regra (∇a)

Demonstrado de maneira análoga ao item anterior.

- a última inferência de π é uma aplicação da regra ($\Updownarrow$)

$$\pi = \cfrac{\begin{matrix}\Sigma_1 \\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A\end{matrix}}{\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle} \; (x \notin free(\Gamma \cup \Delta))$$

Seja φ uma fórmula em π.

Se φ é uma fórmula que ocorre em $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle$, então φ é uma subfórmula de alguma fórmula do sequente $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle$,

Caso contrário, φ é uma fórmula que ocorre em Σ_1, Σ_2, φ é uma fórmula que ocorre no sequente $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ ou φ é uma fórmula que ocorre no sequente $B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

caso 1: φ é uma fórmula que ocorre em Σ_1 ou em Σ_2.

Então por hipótese de indução, φ é subfórmula de alguma fórmula do sequente $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ ou do sequente $B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$, respectivamente.

Se φ é uma subfórmula de alguma fórmula em Γ ou em Δ, então φ é uma subfórmula de alguma fórmula do sequente $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle$.

Se φ é uma subfórmula da fórmula A ou da fórmula B, então, por definição, φ é subfórmula da fórmula $\langle A[x/\_]\rangle$ ou da fórmula $\langle B[x/\_]\rangle$, respectivamente, que ocorre no sequente $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle$.

caso 2: φ é uma fórmula que ocorre em $A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B$ ou em $B, \Gamma \Rightarrow \Delta, A$.

Se φ ocorre em Γ ou em Δ, então φ é uma subfórmula de alguma fórmula do sequente

$\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle$.

Se $\varphi = A$, então, por definição, φ é uma subfórmula de $\langle A[x/\_]\rangle$.

Se $\varphi = B$, então, por definição, φ é uma subfórmula de $\langle B[x/\_]\rangle$.

Portanto, toda fórmula que ocorre em π é uma subfórmula de alguma fórmula de $\langle A[x/\_]\rangle, \Gamma \Rightarrow \Delta, \langle B[x/\_]\rangle$.

■

A.6.2 Resultado da subseção 9.2.2

Proposição9.2.5: Seja π uma derivação normal em $ND(\mathcal{P})$. Então, em cada um dos caminhos de π existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Prova: Suponhamos que exista um caminho ρ em uma derivação normal π em $ND(\mathcal{P})$ tal que existam as aplicações α_1 e α_2 da regra ($\Updownarrow$) em ρ.

Como π é uma derivação normal, então existe pelo menos uma aplicação de regra β entre α_1 e α_2 tal que β não é a regra ($\Updownarrow$).

Por outro lado, as aplicações α_1 e α_2 têm como conclusão e premissa maior uma fórmula marcada.

Como $ND(\mathcal{P})$= $ND(\mathcal{B})\cup\{(\top^*I), (\bot^*E)\}$ e β está entre α_1 e α_2, então β é uma aplicação da regra (∇I) ou $(\bot^*E)$ que tem como conclusão uma fórmula generalizada ou $\bot$, respectivamente.

Como vimos na proposição 9.2.2, β não pode ser uma aplicação da regra (∇I).

Por outro lado, se β é uma aplicação da regra $(\bot^*E)$, então a conclusão da aplicação β é $\bot$.

Logo, se a aplicação β tem como conclusão $\bot$, então podemos ter aplicações sucessivas de ($\vee E$) ou de ($\exists E$) e posteriomente uma aplicação de regra de introdução de ND^*, (Abs) ou (RaA).

Se temos aplicações sucessivas de ($\vee E$) ou de ($\exists E$) e posteriomente uma aplicação (ω) de regra de introdução de ND^* e π é uma derivação normal, então em ρ todas as aplicações de regras abaixo de (ω) são aplicações de regras de introdução de ND^*.

Assim sendo, não obtemos a premissa maior da aplicação α_2 de ρ. Logo, α_2 não pode existir.

Se temos aplicações sucessivas de ($\vee E$) ou de ($\exists E$) e posteriomente uma aplicação da regra (Abs) ou (RaA), então para obtermos a premissa maior da aplicação α_2 de ($\Updownarrow$) devemos ter uma aplicação da regra (∇E) entre a aplicação de (Abs) ou (RaA) e α_2.

Logo, em ρ teremos uma ocorrênccia de um (Abs) segmento maximal ou (RaA) segmento maximal.

Absurdo, pois π é uma derivação normal.

Se posteriormente a aplicação β temos uma aplicação (ω) de regra de intrução de ND^*, (Abs) ou (RaA), então em ρ teremos abaixo de ω aplicações de regras de introdução de ND^* e consequentemente α_2 não pode existir, ou uma ocorrência de um (Abs) segmento maximal ou uma ocorrência de um (RaA) segmento maximal que é um absurdo, pois π é uma derivação normal.

Portanto, para todo caminho de π existe no máximo uma aplicação da regra ($\Updownarrow$).

■

A.6.3 Resultado da subseção 9.2.3

Proposição9.2.1: Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$ e seja ρ um caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$). Então, ρ pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra ($\Updownarrow$) tal que todas as aplicações da regras específicas $(\wedge^* E)$ estão abaixo de α.

Prova: Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{S})$.

Seja ρ um caminho em π que contém mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Mostraremos por indução sobre o par (n, r) que ρ pode ser transformado em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Passo base: ρ é um caminho de rank $(1, 2)$, ou seja, em ρ temos duas aplicações da regra $(\Updownarrow)$ e entre essas aplicações existe uma única aplicação de regra específica de $ND(\mathcal{S})$.

$$\text{Logo, } \pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [C]^i\\ \Pi_3\\ D\end{array} \quad (\wedge^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Pi_1\\ B \wedge C\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [B \wedge C]^i\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B \wedge C\rangle}}{\langle C\rangle} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [D]^i\\ \Pi_4\\ C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D\rangle\\ \Sigma_2\end{array}}$$

e ρ é o caminho que contém as ocorrências consecutivas das fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B \wedge C\rangle$, $\langle C\rangle$ e $\langle D\rangle$.

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação:

$$\psi = (\wedge^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{(\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Pi_1\\ B \wedge C\end{array}}{B} \quad \begin{array}{c}\Gamma_2, (\wedge E)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Pi_1\\ B \wedge C\end{array}}{C}\\ \Pi_3\\ D\end{array}}{B \wedge D} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, (\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[B \wedge D]^i}{B} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, (\wedge E)\dfrac{[B \wedge D]^i}{D}\\ \Pi_4\\ C\end{array}}{B \wedge C}\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B \wedge D\rangle}\, i}{\begin{array}{c}\langle D\rangle\\ \Sigma_2\end{array}}$$

Portanto, o caminho ρ é transformado em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Hipótese de indução: o lema é válido para todo caminho de rank menor que (n, r).

Seja ρ um caminho de rank (n, r).

Logo,
$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_2,[D]^j\\ \Pi_3\\ E\end{matrix} \quad (\wedge^*E)\dfrac{\begin{matrix}(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[A]^i\\ \Pi_1\\ B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_1,[B]^i\\ \Pi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B\rangle}i\\ \vdots\\ \langle C\wedge D\rangle\end{matrix}}{\langle D\rangle} \quad \begin{matrix}\Delta_2,[E]^j\\ \Pi_4\\ D\end{matrix}}{\begin{matrix}\langle E\rangle\\ \Sigma_2\end{matrix}}j$$

e ρ é o caminho que contém as ocorrências das fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$, $\langle C \wedge D\rangle$ e $\langle E\rangle$.

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação ψ invertendo a ordem das aplicações das regras $(\wedge^*E); (\Updownarrow)$ em π para $(\Updownarrow); (\wedge^*E)$

$$\psi = (\wedge^*E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\Xi_1 \quad \begin{matrix}(\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[A]^i\\ \Pi_1\\ B\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Delta_1,[B]^i\\ \Pi_2\\ A\end{matrix}}{\langle B\rangle}\\ \vdots\\ \langle C\wedge D\rangle\end{matrix} \quad \Xi_2}{\langle C\wedge E\rangle}j}{\begin{matrix}\langle E\rangle\\ \Sigma_2\end{matrix}}$$

onde

$$\Xi_1 = (\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[C\wedge D]^j}{C} \quad \begin{matrix}\Gamma_2, (\wedge E)\dfrac{[C\wedge D]^j}{D}\\ \Pi_3\\ E\end{matrix}}{C\wedge E} \qquad \Xi_2 = (\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[C\wedge E]^j}{C} \quad \begin{matrix}\Delta_2, (\wedge E)\dfrac{[C\wedge E]^j}{E}\\ \Pi_4\\ D\end{matrix}}{C\wedge D}$$

Como o número de ocorrências de aplicações de regras específicas entre as aplicações da regra $(\Updownarrow)$ do novo caminho contendo as fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$, $\langle C \wedge D\rangle$ e $\langle E\rangle$ em ψ é igual a $n' = n - 1$, então por hipótese de indução este caminho pode ser transformado em um caminho que contém no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Portanto, o caminho ρ pode ser transformado em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$\blacksquare$

A.6.4 Resultado da subseção 9.2.4

Proposição9.2.2: Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{L})$ e seja ρ um caminho com mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$. Então, ρ pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$ tal que todas as aplicações da regras específicas $(\wedge^* I)$ e $(\vee^* I)$ estão acima de α.

Prova: Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{L})$.

Seja ρ um caminho em π que contém mais de uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Mostraremos por indução sobre o par (n, r) que ρ pode ser transformado em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Passo base: ρ é um caminho de rank $(1, 2)$, ou seja, em ρ temos duas aplicações da regra $(\Updownarrow)$ e entre essas aplicações existe uma única aplicação de regra específica de $ND(\mathcal{L})$.

Temos os seguintes casos:

- uma aplicação da regra $(\wedge^* I)$ entre as aplicações da regra $(\Updownarrow)$.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [B \wedge C]^j \\ \Pi_3 \\ D\end{array} \qquad (\wedge^* I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i \\ \Pi_1 \\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \langle A \rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [B]^i \\ \Pi_2 \\ A\end{array}}{\langle B \rangle} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2 \\ \langle C \rangle\end{array}}{\langle B \wedge C \rangle} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [D]^j \\ \Pi_4 \\ B \wedge C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D \rangle \\ \Sigma_3\end{array}}$$

ρ é o caminho que contém as ocorrências consecutivas das fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$, $\langle B\wedge C\rangle$ e $\langle D\rangle$.

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação a seguir transformando a sequência de aplicações das regras $(\Updownarrow);(\wedge^* I);(\Updownarrow)$ em $(\wedge^* I);(\Updownarrow)$.

$$\pi' = (\Updownarrow)\dfrac{\Xi_1 \qquad (\wedge^* I)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle A\wedge C\rangle} \qquad \Xi_2}{\begin{array}{c}\langle D\rangle\\ \Sigma_3\end{array}}$$

onde

$$\Xi_1 = \begin{array}{c}\Gamma_2,(\wedge I)\dfrac{(\wedge E)\dfrac{[A\wedge C]^i}{C} \qquad \begin{array}{c}\Gamma_1,(\wedge E)\dfrac{[A\wedge C]^i}{A}\\ \Pi_1\\ B\end{array}}{B\wedge C}\\ \Pi_3\\ D\end{array}$$

$$\Xi_2 = (\wedge I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,(\wedge E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,[D]^i\\ \Pi_4\\ B\wedge C\end{array}}{B}\\ \Pi_2\\ A\end{array} \qquad (\wedge E)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_2,[D]^i\\ \Pi_4\\ B\wedge C\end{array}}{C}}{A\wedge C}$$

Portanto, o caminho ρ é transformado em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

- uma aplicação da regra $(\vee^* I)$ entre as aplicações da regra $(\Updownarrow)$.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [B \vee C]^j\\ \Pi_3\\ D\end{array} \quad (\vee^* I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Pi_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [B]^i\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B\rangle} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle B \vee C\rangle} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [D]^j\\ \Pi_4\\ B \vee C\end{array}}{\begin{array}{c}\langle D\rangle\\ \Sigma_3\end{array}}$$

ρ é o caminho que contém as ocorrências consecutivas das fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$, $\langle B\vee C\rangle$ e $\langle D\rangle$.

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação a seguir, transformando a sequência de aplicações das regras $(\Updownarrow); (\vee^* I); (\Updownarrow)$ em $(\vee^* I); (\Updownarrow)$.

$$\pi' = (\Updownarrow)\dfrac{\Xi_1 \quad (\vee^* I)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle A \vee C\rangle} \quad \Xi_2}{\langle D\rangle}\, i$$

onde

$$\Xi_1 = (\vee E)\dfrac{[A \vee C]^i \quad \begin{array}{c}\Gamma, [A]^j\\ \Pi_1\\ (\vee I)\dfrac{B}{\Gamma_2, B \vee C}\\ \Pi_3\\ D\end{array} \quad \begin{array}{c}(\vee I)\dfrac{[C]^j}{\Gamma_2, B \vee C}\\ \Pi_3\\ D\end{array}}{D}\, j$$

$$\Xi_2 = (\vee E)\dfrac{\begin{array}{c}[D]^i\\ \Pi_4\\ [B \vee C]^i\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta, [B]^k\\ \Pi_2\\ (\vee I)\dfrac{A}{A \vee C}\end{array} \quad (\vee I)\dfrac{[C]^k}{A \vee C}}{A \vee C}\, k$$

Portanto, o caminho ρ é transformado em um caminho com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

Hipótese de indução: a proposição é válida para todo caminho de rank menor que (n, r).

Seja ρ um caminho de rank (n, r).

Temos os seguintes casos:

- uma aplicação da regra $(\wedge^* I)$ após a primeira aplicação da regra $(\Updownarrow)$ de ρ.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [D]^j\\ \Pi_3\\ E\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\wedge^* I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Pi_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [B]^i\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B\rangle} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle B \wedge C\rangle}\\ \vdots\\ \langle D\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [E]^j\\ \Pi_4\\ D\end{array}}{\begin{array}{c}\langle E\rangle\\ \Sigma_3\end{array}}$$

ρ é o caminho que contém as ocorrências das fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$, $\langle B \wedge C\rangle$, $\langle D\rangle$ e $\langle E\rangle$.

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação:

$$\pi' = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [D]^j\\ \Pi_3\\ E\end{array} \qquad \begin{array}{c}(\Updownarrow)\dfrac{\Xi_1 \quad (\wedge^* I)\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle A \wedge C\rangle} \quad \Xi_2}{\langle B \wedge C\rangle}\, i\\ \vdots\\ \langle D\rangle\end{array} \qquad \begin{array}{c}\Delta_2, [E]^j\\ \Pi_4\\ D\end{array}}{\begin{array}{c}\langle E\rangle\\ \Sigma_3\end{array}}\, j$$

onde

$$\Xi_1 = (\wedge I)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, (\wedge E)\dfrac{[A \wedge C]^i}{A}\\ \Pi_1 \\ B\end{array} \qquad (\wedge E)\dfrac{[A \wedge C]^i}{C}}{B \wedge C}$$

$$\Xi_2 = (\wedge I)\dfrac{\begin{array}{c}\Delta_1, (\wedge E)\dfrac{[B \wedge C]^i}{B}\\ \Pi_2 \\ A\end{array} \qquad (\wedge E)\dfrac{[B \wedge C]^i}{C}}{A \wedge C}$$

Note a inversão da sequência de aplicações $(\Updownarrow); (\wedge^* I)$ em π para $(\wedge^* I); (\Updownarrow)$ em π'.

Como o número de ocorrências de aplicações de regras específicas entre as aplicações da regra $(\Updownarrow)$ do novo caminho contendo as fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B \wedge C\rangle$, $\langle D\rangle$ e $\langle E\rangle$ é igual a $n' = n - 1$, então por hipótese de indução este caminho pode ser transformado em um caminho que contém no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

- uma aplicação da regra $(\vee^* I)$ após a primeira aplicação da regra $(\Updownarrow)$ de ρ.

$$\pi = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_2, [D]^j\\ \Pi_3\\ E\end{array} \quad \begin{array}{c}(\vee^* I)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma_1, [A]^i\\ \Pi_1\\ B\end{array} \quad \begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_1, [B]^i\\ \Pi_2\\ A\end{array}}{\langle B\rangle} \quad \begin{array}{c}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{array}}{\langle B \vee C\rangle}\\ \vdots\\ \langle D\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}\Delta_2, [E]^j\\ \Pi_4\\ D\end{array}}{\begin{array}{c}\langle E\rangle\\ \Sigma_3\end{array}}$$

ρ é o caminho que contém as ocorrências das fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\rangle$, $\langle B\vee C\rangle$, $\langle D\rangle$ e $\langle E\rangle$.

Então, a derivação π pode ser transformada na derivação:

$$\pi' = (\Updownarrow)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_2,[D]^j\\ \Pi_3\\ E\end{matrix}\qquad \begin{matrix}(\Updownarrow)\dfrac{\Xi_1 \quad (\vee^* I)\dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \langle A\rangle\end{matrix}\quad \begin{matrix}\Sigma_2\\ \langle C\rangle\end{matrix}}{\langle A\vee C\rangle}\quad \Xi_2}{\langle B\vee C\rangle}\,i\\ \vdots\\ \langle D\rangle\end{matrix}\qquad \begin{matrix}\Delta_2,[E]^j\\ \Pi_4\\ D\end{matrix}}{\begin{matrix}\langle E\rangle\\ \Sigma_3\end{matrix}}\,j$$

onde

$$\Xi_1 = (\vee E)\dfrac{[A\vee C]^i \quad (\vee I)\dfrac{\begin{matrix}\Gamma_1,[A]^k\\ \Pi_1\\ B\end{matrix}}{B\vee C}\quad (\vee I)\dfrac{[C]^k}{B\vee C}}{B\vee C}\,k$$

$$\Xi_2 = (\vee E)\dfrac{[B\vee C]^i \quad (\vee I)\dfrac{\begin{matrix}\Delta_1,[B]^l\\ \Pi_2\\ A\end{matrix}}{A\vee C}\quad (\vee I)\dfrac{[C]^l}{A\vee C}}{A\vee C}\,l$$

Note a inversão da sequência de aplicações $(\Updownarrow);(\vee^* I)$ em π para $(\vee^* I);(\Updownarrow)$ em π'.

Como o número de ocorrências de aplicações de regras específicas entre as aplicações da regra $(\Updownarrow)$ do novo caminho contendo as fórmulas $\langle A\rangle$, $\langle B\vee C\rangle$, $\langle D\rangle$ e $\langle E\rangle$ é igual a $n' = n-1$, então por hipótese de indução este caminho pode ser transformado em um caminho que contém no máximo uma aplicação da regra $(\Updownarrow)$.

$\blacksquare$

A.6.5 Resultado da subseção 9.2.5

Lema9.2.3: Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{F})$ e seja ρ um caminho com mais de uma aplicação da regra ($\Updownarrow$). Então, ρ pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra ($\Updownarrow$) tal que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.

Prova: Seja π um derivação normal de A a partir de Γ em $ND(\mathcal{F})$.

Mostraremos por indução sobre o par (n, r) que ρ pode ser transformado em um caminho com uma única aplicação da regra ($\Updownarrow$).

Passo base: ρ é um caminho de rank $(1, 2)$, ou seja, em ρ temos duas aplicações da regra ($\Updownarrow$) e entre essas aplicações existe uma única aplicação de regra específica de $ND(\mathcal{F})$.

Temos os seguintes casos:

- uma aplicação da regra ($\wedge^* I$) entre as aplicações da regra ($\Updownarrow$).

  Demonstrado de mesmo modo como em $ND(\mathcal{L})$.

- uma aplicação da regra ($\wedge^* E$) entre as aplicações da regra ($\Updownarrow$).

  Demonstrado de mesmo modo como em $ND(\mathcal{S})$.

Notemos que uma aplição de regra ($\top^* I$) ou da regra ($\bot^* E$) em uma derivação normal não pode ocorrer entre duas aplicações da regra ($\Updownarrow$).

Hipótese de indução: o lema é válido para todo caminho de rank menor que (n, r).

Seja ρ um caminho de rank (n, r).

Tomemos as duas primeiras aplicações da regra ($\Updownarrow$) em ρ.

Suponhamos que entre as duas primeiras aplicações da regra ($\Updownarrow$) temos apenas aplicações da regra $(\wedge^* E)$, isto é, entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$.

$$\text{Logo, } \rho = (\Updownarrow)\cfrac{\begin{array}{c}(\Updownarrow)\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A \rangle\end{array}}{E_1}\\ \vdots\\ E_n\end{array}}{\begin{array}{c}\langle B \rangle\\ \Sigma_2\end{array}}$$

onde $E_1 \cdots E_n$ representa as n aplicações da regra $(\wedge^* E)$.

Assim, entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ em ρ a sequência de aplicações de regras é: $(\Updownarrow); E_1 \cdots E_n; (\Updownarrow)$.

Logo, pelo lema 9.2.1 o caminho ρ pode ser transformada no caminho ρ' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ entre $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ com todas as aplicações das regras de eliminação sucedendo a primeira aplicação da regra $(\Updownarrow)$ em ρ', isto é, entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ em ρ' a sequência de aplicações de regras é: $(\Updownarrow); E_1 \cdots E_n$.

$$\rho' = (\Updownarrow)\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \langle A \rangle\end{array}}{\begin{array}{c}E_1\\ \vdots\\ E_n\\ \langle B \rangle\\ \Sigma_2\end{array}}$$

Então, por hipótese de indução ρ' pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$ tal que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.

Agora, suponhamos que entre as duas primeiras aplicações da regra $(\Updownarrow)$ temos apenas aplicações da regra $(\wedge^* I)$.

$$\text{Logo, } \rho = (\Updownarrow)\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ (\Updownarrow)\cfrac{\langle A \rangle}{I_1} \\ \vdots \\ I_m\end{array}}{\begin{array}{c}\langle B \rangle \\ \Sigma_2\end{array}}$$

onde $I_1 \cdots I_m$ representa as m aplicações da regra $(\wedge^* I)$.

Assim, entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ em ρ a sequência de aplicações de regras é: $(\Updownarrow); I_1 \cdots I_m; (\Updownarrow)$.

Logo, pelo lema 9.2.2 o caminho ρ pode ser transformada no caminho ρ' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ entre $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ com todas as aplicações das regras de eliminação antecedendo a primeira aplicação da regra $(\Updownarrow)$ em ρ', isto é, entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ em ρ' a sequência de aplicações de regras é: $I_1 \cdots I_m; (\Updownarrow)$.

$$\rho' = (\Updownarrow)\cfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1 \\ \langle A \rangle \ I_1 \\ \vdots \\ I_m\end{array}}{\begin{array}{c}\langle B \rangle \\ \Sigma_2\end{array}}$$

Então, por hipótese de indução ρ' pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$ tal que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.

Suponhamos que entre as duas primeiras aplicações da regra $(\Updownarrow)$ temos n aplicações da regra $(\wedge^* E)$ e m aplicações da regra $(\wedge^* I)$.

Como π é uma derivação normal, então as aplicações da regra $(\wedge^* E)$ precedem as aplicações da regra $(\wedge^* I)$ em ρ.

$$\text{Logo, } \rho = \begin{array}{c} \Sigma_1 \\ (\Updownarrow)\dfrac{\langle A \rangle}{E_1} \\ \vdots \\ E_n \\ I_1 \\ \vdots \\ (\Updownarrow)\dfrac{I_m}{\langle B \rangle} \\ \Sigma_2 \end{array}$$

onde $E_1 \cdots E_n$ representa as n aplicações da regra $(\wedge^* E)$ e $I_1 \cdots I_m$ representa as m aplicações da regra $(\wedge^* I)$.

Assim entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ em ρ a sequência de aplicações de regras é: $(\Updownarrow); E_1 \cdots E_n; I_1 \cdots I_m; (\Updownarrow)$.

Por outro lado, temos $E_n; I_1$ é uma derivação da forma:

$$(\wedge^* I)\dfrac{(\wedge^* E)\dfrac{\langle C \wedge D \rangle}{\langle D \rangle} \quad \langle E \rangle}{\langle D \wedge E \rangle}$$

que pode ser transformada na derivação da forma $(\wedge^* I); (\Updownarrow); (\wedge^* E)$:

$$(\wedge^* E)\dfrac{(\Updownarrow)\dfrac{\begin{array}{c}[(C \wedge D) \wedge E]^i \\ \Pi_1 \\ C \wedge (D \wedge E)\rangle\end{array} \quad (\wedge^* I)\dfrac{\langle C \wedge D \rangle \quad \langle E \rangle}{\langle (C \wedge D) \wedge E \rangle} \quad \begin{array}{c}[C \wedge (D \wedge E)]^i \\ \Pi_2 \\ (C \wedge D) \wedge E\end{array}}{\langle C \wedge (D \wedge E) \rangle}\, i}{\langle D \wedge E \rangle}$$

Logo, o caminho ρ pode ser transformado no caminho ρ' onde a sequência de aplicações de regras entre $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$ é: $(\Updownarrow); E_1 \cdots E_{n-1}; I_1; (\Updownarrow); E_n; I_2 \cdots I_m; (\Updownarrow)$.

Considere o caminho $\omega = $

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ (\Updownarrow)\dfrac{\langle A \rangle}{E_1} \\ \vdots \\ E_{n-1} \\ (\Updownarrow)\dfrac{I_1}{E_n} \end{array}$$

com a sequência de aplicação de regras $(\Updownarrow); E_1 \cdots E_{n-1}; I_1; (\Updownarrow); E_n$.

Como o rank de ω é menor que o rank ρ, então por hipótese de indução ω pode ser transformado em ω' com uma única aplicação da regra $(\Updownarrow)$ onde a aplicação da regra $(\wedge^* I)$ está acima desta aplicação e as aplicações das regras de eliminação estão abaixo da aplicação $(\Updownarrow)$, isto é, ω' tem a seguinte sequência de aplicações de regras: $I_1; (\Updownarrow); E_1 \cdots E_n$.

Logo, ρ' pode ser transformado em $\rho'' = $

$$\begin{array}{c} \Sigma_1 \\ \langle A \rangle \\ (\Updownarrow)\dfrac{I_1}{E_1} \\ \vdots \\ E_n \\ I_2 \\ \vdots \\ (\Updownarrow)\dfrac{I_m}{\langle B \rangle} \\ \Sigma_2 \end{array}$$

com a seqência de aplicações de regras $I_1; (\Updownarrow); E_1 \cdots E_n; I_2 \cdots I_m; (\Updownarrow)$ entre as fórmulas $\langle A \rangle$ e $\langle B \rangle$.

Como o rank de ρ'' é menor que o rank de ρ, então por hipótese de indução ρ'' pode ser transformada em um caminho com no máximo uma aplicação (α) da regra $(\Updownarrow)$ tal que todas as aplicações da regras específicas de introdução estão acima de α e todas as aplicações da regras específicas de eliminação estão abaixo de α.

∎