

UMA NOVA ENTROPIA DE ENTRADAS PARA A CLASSIFICAÇÃO
AUTOMÁTICA DE AUTÔMATOS CELULARES USANDO SIMULAÇÃO
PARALELA

Fernando Marcos Nogueira Miranda

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

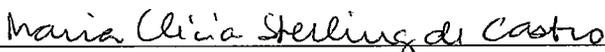
Aprovada por:



Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.



Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.



Prof. Maria Clícia Stelling de Castro, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 2004

MIRANDA, FERNANDO MARCOS N.

Uma nova entropia de entradas para a classificação automática de autômatos celulares usando simulação paralela [Rio de Janeiro] 2004

X, 77 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Autômatos Celulares
2. Entropia de Entradas
3. Computação Paralela

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedico à minha mãe,
aos meus avós,
à *Aimèe, João Pedro,*
Laura, Cecília, Lídia
e aos meus irmãos

Agradecimentos

Estou certo de que esta página tomou-me um esforço que não foi dispensado em nenhuma outra parte deste trabalho. É extremamente difícil escolher palavras que possam expressar a minha sincera gratidão a todas as pessoas que colaboraram de alguma forma para que eu pudesse concluir esta tese de mestrado.

Agradeço aos meus avós maternos e minha mãe que nunca exitaram em me apoiar e participar das minhas decisões, respeitando minhas escolhas e muitas vezes renunciando aos seus sonhos em favor dos meus.

Agradeço ao Professor Valmir Carneiro Barbosa, por acreditar em mim e por me brindar com um interessantíssimo tema de pesquisa, sendo um interlocutor disposto a oferecer estímulos e, principalmente, a percorrer novos caminhos, ouvindo com interesse todas as questões que surgiam durante o processo de reflexão e síntese. Por ser paciente e generoso e pela coragem de ousar trabalhar com novas idéias e conceitos. Pela compreensão silenciosa dos momentos difíceis, permitindo, respeitosamente, que meu tempo fluísse. Pela alegria de trabalharmos juntos.

Agradeço à Professora Maria Clícia Stelling de Castro, pelo carinho e amizade desde os tempos da graduação e principalmente por despertar em mim o interesse pelas ciências e suas revelações. O seu apoio foi indispensável, assim como sua presença trouxe segurança, conforto e muita alegria. Me sentirei sempre honrado por ter tido a oportunidade de conhecê-la.

Agradeço a todos os professores do PESC pelos indispensáveis ensinamentos, em especial ao Professor Felipe Maia Galvão França pelo interesse neste trabalho.

Agradeço ao Cléber pelo carinho e pela paciência, à Rosimar, por sua amizade e sua presença elucidativa, ao amigo Antônio Marcelo Azevedo Alexandre, pelas intermináveis discussões de assuntos dos mais variados âmbitos, ao Matheus e à Graziela, pelo companheirismo desde os tempos da graduação.

A todos, agradeço sinceramente.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

UMA NOVA ENTROPIA DE ENTRADAS PARA A CLASSIFICAÇÃO
AUTOMÁTICA DE AUTÔMATOS CELULARES USANDO SIMULAÇÃO
PARALELA

Fernando Marcos Nogueira Miranda

Dezembro/2004

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho apresentamos um novo mecanismo para a classificação das regras de atualização de autômatos celulares dentro das quatro classes de Wolfram. Começamos com a noção de entropia de entradas de um bloco espaço-temporal na evolução de um autômato celular e a partir deste conceito introduzimos uma nova medida de entropia baseada nas entradas da tabela da regra de atualização. Nossa nova entropia está voltada para a classificação das regras de atualização de autômatos celulares simulados em paralelo e, desta forma, leva em conta todas as restrições de comunicação necessárias; nós a chamamos de entropia de entradas centrada na célula. Baseamo-nos em extensivos experimentos computacionais em autômatos celulares de uma e duas dimensões. Tais experimentos nos permitiram concluir que esta nova classificação possui forte capacidade discriminatória, fornecendo uma ajuda valiosa.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfilment of the requirements for the degree of Mater of Science (M.Sc.).

A NEW INPUT ENTROPY FOR THE CLASSIFICATION OF CELLULAR AUTOMATA USING PARALLEL SIMULATION

Fernando Marcos Nogueira Miranda

December/2004

Advisor: Valmir Carneiro Barbosa

Department: Systems Engineering and Computing

This work presents a study of the classification of cellular-automaton update rules into Wolfram's four classes. We start with the notion of the input entropy of a spatiotemporal block in the evolution of a cellular automaton, and build on it by introducing a novel entropy measure based on inputs to the cells. Our new entropy is targeted at the classification of update rules by parallel machines, being therefore mindful of the necessary communications requirements; we call it cell-centric input entropy to reflect this fact. We report on extensive computational experiments on both one- and two-dimensional cellular automata. These experiments allow us to conclude that the new entropy possess strong discriminatory capabilities, therefore providing valuable aid in the classification process.

Sumário

Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
2 Autômatos celulares	5
2.1 Conceitos essenciais	5
2.2 Estratégias de classificação	9
3 Classificação por entropia de entradas	18
3.1 Entropia de entradas	18
3.2 Heurística centrada na célula	23
3.3 Limite superior	30
4 Experimentos e análise de resultados	33
4.1 Autômatos celulares infinitos	33
4.2 O valor de T	38
4.3 Análise de resultados	56
4.4 Discussão	67
5 Considerações finais	70
Referências Bibliográficas	74

Lista de Figuras

2.1	Atualização dos estados do autômato celular de uma dimensão do tempo t para o tempo $t + 1$	6
2.2	Vizinhança de Moore e vizinhança de von Neumann	7
2.3	Esquema de numeração para os autômatos uni-dimensionais	9
2.4	Exemplos de padrões evolutivos de autômatos celulares de uma dimensão	10
3.1	Janela de tamanho T com $X_1 \times \dots \times X_d \times T$ estados de um autômato uni-dimensional	21
3.2	Padrões espaço-temporais da evolução de autômatos celulares uni-dimensionais, curva de entropia de entradas e histograma de acessos .	24
3.3	Simulação paralela de autômatos celulares usando N processadores .	26
4.1	Simulação de um autômato celular uni-dimensional infinito	35
4.2	Aglomerado 15×10 de células	38
4.3	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - uni-dimensional com 150 células e raio $r_1 = 2$. . .	41
4.4	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - uni-dimensional com 300 células e raio $r_1 = 2$. . .	42
4.5	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - uni-dimensional com 150 células e raio $r_1 = 3$. . .	43
4.6	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - uni-dimensional com 300 células e raio $r_1 = 3$. . .	44

4.7	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - bi-dimensional com (15×15) células sob von Neumann	45
4.8	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - bi-dimensional com (30×30) células sob von Neumann	46
4.9	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - bi-dimensional com (15×15) células sob Moore .	47
4.10	Média e variância da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T - bi-dimensional com (30×30) células sob Moore .	48
4.11	Padrões espaço-temporais de autômatos uni-dimensionais infinitos . .	51
4.12	Padrões espaço-temporais de autômatos bi-dimensionais infinitos . . .	52
4.13	Padrões espaço-temporais de autômatos uni-dimensionais cilíndricos .	53
4.14	Padrões espaço-temporais de autômatos bi-dimensionais cilíndricos . .	54
4.15	Distribuição de células de um autômato celular bi-dimensional ao longo de N processadores	58
4.16	Ocorrência de pares de média-variância para autômatos celulares uni-dimensionais de raio $r_1 = 2$	61
4.17	Ocorrência de pares de média-variância para autômatos celulares uni-dimensionais com raio $r_1 = 3$	62
4.18	Ocorrência de pares média-variância dentro de um conjunto de experimentos para autômatos celulares bi-dimensionais sob von Neumann	64
4.19	Ocorrência de pares média-variância dentro de um conjunto de experimentos para autômatos celulares bi-dimensionais sob Moore	65

Lista de Tabelas

4.1	Regras de atualização conhecidas	40
4.2	Médias e variâncias extraídas de uma média de 5 simulações com estados iniciais escolhidos aleatoriamente	55

Capítulo 1

Introdução

Autômatos celulares são modelos matemáticos para sistemas naturais complexos contendo um grande número de componentes idênticos, simples e com interações locais. Eles consistem de um reticulado de células, cada uma com um grupo finito de valores possíveis. Os valores das células evoluem sincronamente em passos de tempo discretos de acordo com regras idênticas. O valor de uma célula particular é determinado pelos valores prévios de uma vizinhança de células ao seu redor.

O comportamento de um grupo simples de autômatos celulares foi discutido em [28], onde extensivas referências foram fornecidas. Foi mostrado que apesar de sua construção simples, alguns autômatos celulares são capazes de comportamentos complexos. Em [30, 13], é possível encontrar um sumário de resultados importantes e muitas outras referências. Um dos tópicos da investigação que mais chamam a atenção é a classificação de regras de atualização f , e conseqüentemente do autômato celular baseado nesta, considerando sua “complexidade”.

O interesse nesta questão recebeu sua atenção inicial a partir do estudo dos

autômatos celulares infinitos uni-dimensionais por Stephen Wolfram [29], que resultaram na descoberta empírica de que, praticamente desconsiderando o estado inicial do autômato, f consistentemente recai dentro de uma das quatro possíveis categorias qualitativas: (i) a evolução do autômato leva a uma configuração homogênea, i.e., uma configuração na qual todas as células possuem o mesmo estado; (ii) a evolução leva a um ponto fixo não-homogêneo ou a um ciclo; (iii) a evolução leva a uma sucessão caótica de configurações; ou (iv) a evolução leva a estruturas espaço-temporais localizadas que são algumas vezes “persistentes”. Embora concebida inicialmente para o caso uni-dimensional, não existe, a princípio, uma razão pela qual esta classificação qualitativa não possa ser aplicada aos casos de dimensões maiores. De fato, estudos similares para o caso bi-dimensional apareceram em [22] pouco tempo depois.

Naturalmente, as regras de atualização da classe (iv) são intuitivamente associadas à realização de computação “complexa” pelos autômatos celulares que são construídos a partir dessas regras. Esta computação é tida como de grande interesse para ser utilizada como ferramenta de modelagem. Por isso, grandes esforços têm sido feitos para encontrar métodos capazes de categorizar automaticamente as regras de atualização dentro das classes (i) a (iv). Formalmente, todos os esforços pairam sobre o chamado conjunto limite de uma regra de atualização f no caso infinito, que é o conjunto de configurações que resultam de todas as configurações iniciais possíveis depois de decorrido um longo tempo. Como consequência, toda propriedade não trivial de um conjunto limite (i.e., propriedade que existe pelo menos

para um autômato celular e não existe para pelo menos um outro) pode ser provada como sendo indecidível através da redução do problema de decidir se existe um grupo limite como um único elemento [15], este conhecido por ser indecidível [14].

Como consequência desta incerteza inerente, toda estratégia capaz de categorizar regras de atualização deve, necessariamente, ser de natureza heurística ou então recair em uma heurística caso haja algum uso prático. O intuito deste trabalho é estudar uma heurística que pode ser acoplada à simulação paralela de autômatos celulares visando analisar os padrões espaço-temporais que surgem, objetivando a categorização de regras de atualização dentro das quatro classes de Wolfram. Por isso, a eficiência no uso mínimo de comunicação é essencial, levando ao que chamamos de heurística centrada na célula, isto é, a heurística que depende o mínimo possível da troca de informações entre os processadores durante a simulação de um autômato celular em máquinas paralelas.

No intuito de aproximar o leitor dos conceitos fundamentais para o bom entendimento do assunto, abordamos no capítulo 2 os temas mais importantes de autômatos celulares e revisamos de algumas heurísticas proeminentes que têm sido propostas para a classificação automática das regras de atualização. Tendo, a partir de então, uma proximidade maior destes conceitos, prosseguimos no capítulo 3 com uma discussão sobre as chamadas medidas de entropia de entradas e em seguida apresentamos nossa heurística definida como centrada na célula. Após todas as considerações a respeito de nossa heurística, os resultados dos experimentos computacionais feitos com autômatos celulares de uma e duas dimensões são mostrados e

analisados no capítulo 4, onde estendemos a discussão sobre o assunto. Finalmente, no capítulo 5, fizemos alguns outros apontamentos e observações conclusivas.

Capítulo 2

Autômatos celulares

2.1 Conceitos essenciais

Autômatos celulares são sistemas dinâmicos, discretos no tempo, que possuem unidades que podem assumir um número finito de estados. Estas unidades são denominadas células, cujos estados evoluem no tempo como resultado da interação com outras células. Desde sua introdução há aproximadamente cinco décadas por von Neumann [26], os autômatos celulares têm adquirido um *status* cada vez mais proeminente como uma ferramenta de modelagem em várias áreas de pesquisa (cf., ex., [16, 2] e suas referências), e foi até mesmo apontado como uma abstração central na modelagem do processo fundamental da natureza [31].

Para um conjunto de estados possíveis $S = \{0, \dots, s-1\}$ e para um inteiro $t \geq 0$, um autômato celular com n células evolui do tempo t para o tempo $t+1$ através da atualização sincronizada de todos os n estados pela aplicação de um mapeamento determinístico F_f de S^n em S^n , como está ilustrado na Figura 2.1. Este mapeamento F_f é global em sua natureza e depende da regra de atualização local f que indica

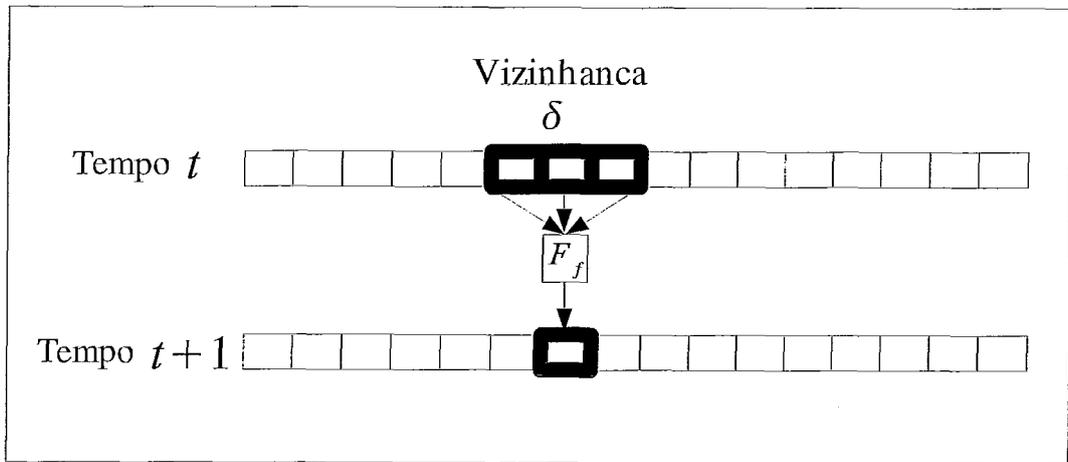


Figura 2.1: Atualização dos estados do autômato celular de uma dimensão do tempo t para o tempo $t + 1$, aplicando o mapeamento determinístico F_f , sendo f a regra de atualização local.

como cada estado individual deve ser atualizado, dado o estado da célula no tempo t bem como o estado das células que estão dentro de uma vizinhança de tamanho δ . A regra de atualização f é então o mapeamento de $S^{1+\delta}$ em S .

A vizinhança de um autômato celular é determinada por um reticulado multi-dimensional subjacente de acordo com vários critérios possíveis. Por exemplo, um vizinho de uma célula relativo a uma certa dimensão do reticulado pode ser uma das células que estão afastadas $r > 0$ posições da célula em questão ao longo desta dimensão, mas nenhuma posição afastada em nenhuma outra dimensão, sendo r sempre referenciado como o raio da regra de atualização naquela dimensão. Para o raio $r = 1$ em todas as dimensões, caracteriza-se o que é conhecido como vizinhança de von Neumann (c.f., Figura 2.2), contudo, neste trabalho empregamos a mesma denominação para raios maiores. Um outro exemplo de vizinhança seria permitir

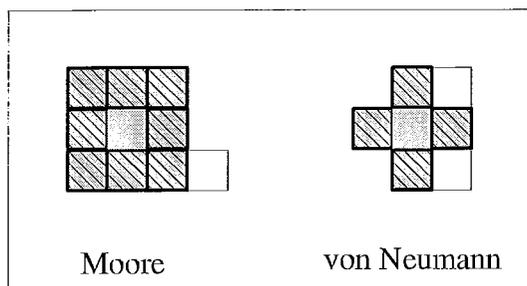


Figura 2.2: Vizinhança de Moore e vizinhança de von Neumann, respectivamente. Em ambos os casos temos $r = 1$.

que duas células sejam vizinhas uma da outra sempre que uma puder alcançar a outra sem ultrapassar nenhuma fronteira ao longo de uma certa dimensão, sendo esta fronteira demarcada pelo raio r da regra de atualização naquela dimensão. Para o raio $r = 1$ esta é chamada de vizinhança de Moore (c.f., Figura 2.2), mas, outra vez, empregamos a mesma denominação para raios maiores. Quando n é finito, é comum considerar que o reticulado tenha bordas cilíndricas, ou seja, permitir que toda célula tenha exatamente duas vizinhanças mais próximas ao longo de cada dimensão.

Para autômatos celulares finitos, aqueles cujo n é finito, F_f leva, necessariamente, a um ponto fixo ou a um ciclo de configurações em S^n , isto é, x tal que $F_f(x) = x$ ou x_0, \dots, x_{p-1} , com $p > 0$, de forma que $x_0 = F_f(x_{p-1})$, $x_1 = F_f(x_0)$, e assim por diante [33]. O caso dos autômatos celulares infinitos, por outro lado, é bem mais complicado e intrigante, já que n é totalmente infinito e nenhuma periodicidade é garantida de se formar a partir da aplicação sucessiva de F_f . Contudo, mesmo nesse caso, essa possibilidade existe.

Em [28], Wolfram propôs um esquema de numeração para os autômatos uni-dimensionais de raio $r = 1$, no qual os *bits* de saídas são ordenados lexicograficamente, como na regra de atualização da Figura 2.3, e são lidos da direita para a esquerda para formar um número na base decimal entre 0 e 255. Por exemplo, a regra apresentada na Figura 2.3 (em binário: 10010101) é a regra de atualização 169. Este esquema de numeração, a partir de uma ordenação lexográfica dos *bits* de saída, é também adotado para autômatos celulares uni-dimensionais de raio $r > 1$. Entretanto, para raios maiores, o que se faz normalmente é traduzir o código binário da regra para a base hexadecimal. Por exemplo, a regra de raio $r = 2$ dada pelos *bits* 11101010110000111000101011101000 é equivalente à regra *EAC38AE8*. O número de regras de atualização distintas nestes casos é dado por $2^{2^{1+2r}}$.

Uma notação similar é adotada para o caso de autômatos celulares bi-dimensionais sob a vizinhança de von Neumann, entretanto o *bit* mais significativo corresponde a $00\dots 0$, o próximo a $00\dots 0 + 1$ e assim por diante. Nesse caso, as entradas são lidas em uma ordem própria; *célula*, norte, leste, sul, oeste [27]. O número de regras distintas neste caso é dado por $2^{2^{1+2(r_1+r_2)}}$. Já as regras de atualização de autômatos celulares sob a vizinhança de Moore são totalísticas [22], isto é, os *bits* de saída são obtidos através da soma dos *bits* da vizinhança e não pelo valor discreto de cada um. Para estas regras, é adotada a notação do “Jogo da vida” de Conway [11, 5] como se segue: bx indica que o estado da célula move-se de 0 para 1 (está “viva”) se a célula tem x vizinhos com estado 1; sx significa que o estado da célula permanece 1 (“sobrevivente”) se a célula tem x vizinhos com estado 1;

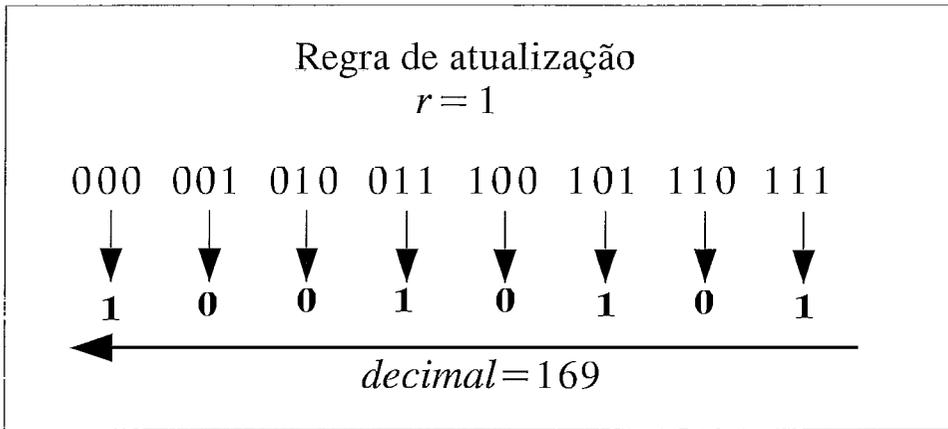


Figura 2.3: Exemplo de regra de atualização de raio $r = 1$, com vizinhança $\delta = 3$ e 8 combinações de 3 *bits*, gerando 8 *bits* de saída ordenados lexicograficamente. O binário 10010101 é a regra de atualização 169 expressa em decimal.

em todos os outros casos não especificados o estado da célula se torna 0 [27](e.g., $b1b3b4s2s5$). Neste caso, o número de regras distintas é $2^{2(1+2r_1)(1+2r_2)}$.

As Figuras em 2.4 mostram padrões evolutivos de autômatos celulares de uma dimensão, com $n = 300$ células, à medida em que t é incrementado. Nos casos apresentados, os dois estados possíveis são representados graficamente por pontos com coloração preta ($s = 1$) e branca ($s = 0$). Cada caso leva a um padrão evolutivo diferente que pode ser classificado qualitativamente segundo as quatro classes de Wolfram [29].

2.2 Estratégias de classificação

De forma generalizada, distinguimos duas classes essenciais de estratégia para a categorização de regras de atualização. A primeira classe abrange as técnicas

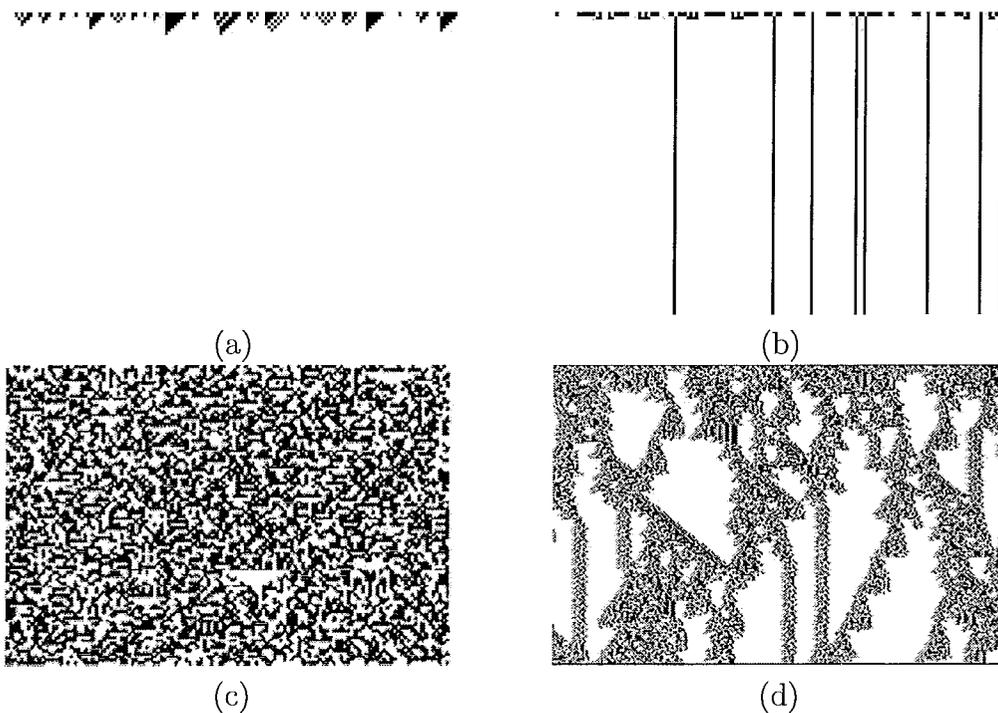


Figura 2.4: Exemplos de padrões evolutivos de autômatos celulares de uma dimensão. As Figuras (a)–(d) mostram a evolução de autômatos celulares baseados em quatro regras de atualização diferentes a partir de estados iniciais escolhidos aleatoriamente. Nestes casos, temos dois estados possíveis $S = \{0, 1\}$ e vizinhança $\delta = 5$, sendo que, no caso (a) a regra de atualização leva, depois de um certo número de passos, a um estado homogêneo único; no caso (b), leva a um conjunto de estruturas estáveis e distintas; no caso (c), a regra de atualização leva a um padrão caótico e instável; e no caso (d), leva a padrões complexos e muitas vezes de longa duração.

que procuram extrair as capacidades computacionais das regras de atualização considerando unicamente as próprias regras de atualização, sem nenhuma simulação de autômatos celulares para análise dos resultados dos padrões espaço-temporais. Abordagens deste tipo concentraram-se em autômatos celulares uni-dimensionais e, portanto, o tamanho da vizinhança de uma célula é de fato $\delta = 2r$.

O primeiro passo dentro desta classe foi dado por Langton [17], que propôs classificar uma regra de atualização f dentro das quatro classes de Wolfram, examinando um único parâmetro, denominado por λ_f , que expressa a probabilidade de uma vizinhança aplicada em f leve a um estado invariável σ , conhecido como “estado mudo”. Quando $\lambda_f = 0$, todas as vizinhanças levam ao estado mudo σ e então, à medida em que t aumenta, o autômato celular evolui para um estado homogêneo ou ordenado. Por outro lado, quando $\lambda_f = 1$, nenhuma vizinhança leva a σ , assim o autômato evolui para um estado caótico ou desordenado.

Em (2.1), q é o número de linhas da regra de atualização de tamanho $(1 + 2r)$ para as quais f tem σ como saída, onde $\sigma \in S$ é o estado mudo.

$$\lambda_f = 1 - \frac{q}{s^{1+2r}}. \quad (2.1)$$

O relato inicial do uso do parâmetro λ_f indicou que ele se comporta como um parâmetro de ordem com relação à ocorrência de transição de fase: ao se gerar regras de atualização f com λ_f aumentando, encontra-se inicialmente o comportamento de classe (i), em seguida de classe (ii), classe (iv) em torno de $\lambda_f = 0.5$, e finalmente o

comportamento classe (iii). Este comportamento parece sugerir que a complexidade é encontrada em uma região no espaço λ_f conhecida como “fronteira do caos”. Mas, considerando algumas dificuldades em relação à existência e escolha de um estado mudo, críticas em relação à existência e à natureza da transição de fase logo surgiram de várias fontes (cf., ex., [21, 20, 19]). Em particular, regras de atualização pertencentes a várias classes, não somente a classe (iv), foram encontradas próximo de $\lambda_f = 0.5$.

Duas outras abordagens interessantes foram introduzidas, tais que também não exigem simulações de autômatos celulares. Estas duas partilham do mesmo objetivo de investigar como a informação contida em uma regra de atualização f afeta o comportamento geral dos autômatos celulares construídos em f . Uma das abordagens é topológica em sua natureza, ou seja, procura analisar o comportamento global dos autômatos celulares através da identificação de padrões espaço-temporais de tamanho finito [6]. Em contraste, a outra referência [8] é algorítmica e visa a caracterização das regras de atualização f sob a perspectiva da complexidade de Kolmogorov [18], ou seja, a perspectiva da descrição mais curta de f . Ambas as abordagens estão claramente relacionadas à classificação de Wolfram, entretanto, cada uma sob sua própria perspectiva. Além disso, a última abordagem pode ser um ponto chave para algumas incongruências que são inerentes ao parâmetro λ_f , como as regras de atualização pertencentes a várias classes, não somente a classe (iv), encontradas próximas de $\lambda_f = 0.5$. Contudo, é importante ressaltar que, considerando que as duas abordagens induzem ao seu próprio sistema de classe, nenhuma

delas refere-se claramente à classe (iv). Neste ponto, indicamos ao leitor a fonte original para detalhes mais apurados.

Uma classe de estratégias para categorizar as regras de atualização de autômatos celulares completamente distinta concentra-se na análise dos padrões espaço-temporais à medida em que estes vão se formando durante a evolução dos autômatos celulares a partir de uma configuração inicial. Naturalmente, agora é preciso levar em conta o fato de que os autômatos celulares, sob observação, são formalmente infinitos; voltamos a este assunto mais tarde, mas por agora ignoramos qualquer dificuldade que este conceito de infinito possa causar na prática. Mesmo assim, é importante mencionar que algumas abordagens de sucesso foram construídas a partir da suposição de que o número de células é finito. Um exemplo disso é a “mecânica computacional” exemplificada em [12], para a qual os autômatos celulares uni-dimensionais baseiam-se fortemente em máquinas de estados-finitos [23], derivadas de padrões na evolução de autômatos celulares, para definir as características espaço-temporais fundamentais que são inerentes a cada regra de atualização.

As abordagens nesta classe, que são centrais ao nosso interesse, são aquelas que se baseiam em alguma forma de medida de entropia como base dos esforços de caracterização. A abordagem inicial ao longo destas linhas apareceram no mesmo trabalho que apresentou as quatro classes de Wolfram [29]. Essencialmente, o que se faz é considerar a distribuição de probabilidade dos blocos espaço-temporais conforme eles ocorrem durante a evolução dos autômatos celulares para uma regra de atualização fixa f e então usa-se essa distribuição para definir as entropias desejadas.

Para uma caracterização mais precisa, consideremos que $d > 0$ seja o número de dimensões dos autômatos celulares em questão, e que X_1, \dots, X_d denote números de células contíguas ao longo de cada dimensão. Sendo $t_+ \geq 0$ um número sucessivo de passos no tempo durante a evolução do autômato celular que emprega a regra de atualização f , queremos saber como o autômato celular se comporta, dado f , dentro do espaço de tempo compreendido em t_+ .

Para um passo de tempo t , $0 \leq t < t_+$, temos que o bloco de estados $X_1 \times \dots \times X_d$ no tempo t é obtido aplicando-se a regra de atualização f sobre o bloco de estados $X_1 \times \dots \times X_d$ no tempo $t - 1$. Para melhor visualizar a aplicação da regra de atualização f sobre $X_1 \times \dots \times X_d$, vamos considerar a construção de uma tabela de regra baseada em f , isto é, uma tabela que reflita o mapeamento de $S^{1+\delta}$ em S , onde cada entrada da tabela é formada por uma $(1 + \delta)$ -upla distinta que uma vizinhança de tamanho δ pode assumir mais sua saída correspondente. Desta forma, para cada estado que é atualizado no bloco de estados $X_1 \times \dots \times X_d$ um acesso é feito à tabela de regra.

Esta abordagem é extremamente útil quando mantemos um histórico da frequência de acessos à tabela de regra no tempo t da evolução do autômato celular, pois a partir deste histórico obtemos uma medida efetiva para a classificação do comportamento do autômato dentro do espaço de t_+ passos de tempo, isto é, as entropias dos acessos às entradas da tabela de regras para cada passo de tempo t em conjunto com a variância dessas quantidades dentro do espaço de tempo compreendido em t_+ [32]. A frequência de acessos à tabela pode ser representada por um histograma

que distribui o total de $X_1 \times \dots \times X_d$ acessos em cada tempo da evolução sobre as $s^{1+\delta}$ vizinhanças (i.e., as entradas da tabela).

A entropia de Shannon [24] desta distribuição de frequência de acessos, entropia de entradas E , no tempo t , é dada por:

$$E_f^t(X_1, \dots, X_d) = - \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \left(\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d} \right) \log_s \left(\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d} \right) \quad (2.2)$$

Onde q_i^t expressa a quantidade de acessos à entrada i da tabela de regras no tempo t . Logo, a partir de 2.2 temos a média das entropias de entradas para t_+ passos de tempo da execução:

$$\overline{E}_f(X_1, \dots, X_d) = - \frac{1}{t_+} \sum_{t=0}^{t_+-1} \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \left[\left(\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d} \right) \log_s \left(\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d} \right) \right] \quad (2.3)$$

A entropia de entradas estabelecida em (2.2) expressa uma distribuição de probabilidade, já podemos considerar $\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d}$ uma aproximação da probabilidade de que a i -ésima entrada da tabela seja acessada no tempo t . Isto é, a entropia pode nos dizer se os acessos à tabela de regra estão mais concentrados ou mais uniformemente distribuídos (i.e., todas as entradas têm a mesma probabilidade de ocorrer no tempo t). Assim, o valor médio em (2.3) das entropias de entradas pode ser usado para categorizar o comportamento do autômato celular no espaço de tempo compreendido em t_+ . Mais detalhadamente, temos que os valores baixos das entropias de entradas refletem o fato de que os acessos estão mais concentrados em algumas entradas, o que mostra, em termos práticos, a tendência do autômato celular a um ponto fixo ou estado global ordenado; enquanto valores altos das entropias de entradas expressam a tendência ao caos, visto que, neste caso, os acessos estão mais uniformemente

distribuídos. Entretanto, como categorizar através das entropias de entradas o comportamento de autômatos celulares complexos? Neste caso, a variância das entropias de entradas dentro do espaço de tempo compreendido em t_+ , expressa em (2.4), nos fornece uma boa medida do comportamento do autômato celular ao longo de sua evolução.

$$\begin{aligned} \sigma^2(E_f(X_1, \dots, X_d)) \\ = \frac{1}{t_+} \sum_{t=0}^{t_+-1} [E_f^t(X_1, \dots, X_d) - \overline{E_f}(X_1, \dots, X_d)]^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

A complexidade que buscamos identificar é marcada pelo desequilíbrio das frequências de acessos em alguns passos da evolução do autômato celular e pela uniformidade em outros. Isso é claramente refletido pela variância das entropias de entradas dentro do espaço de tempo compreendido em t_+ .

Esta estratégia de classificação foi introduzida por Wuensche [32] e constitui uma tentativa de fusão de algumas características importantes das classes de estratégias quantitativas e qualitativas; tanto pela análise estatística sobre a frequência dos acessos à tabela de regra, que está fortemente ligada ao estudo de Langton sobre o potencial da regra de atualização f expresso através do parâmetro λ_f , quanto pelo exame do padrão espaço-temporal da evolução do autômato celular na tentativa de categorizá-lo dentro do espaço de tempo compreendido em t_+ . No capítulo que se segue, voltamos a abordar esta estratégia de uma forma mais prática, com mais detalhes e com o auxílio de alguns exemplos.

Neste capítulo, mostramos a idéia central da construção de autômatos celulares,

assim como o mapeamento global F_f , onde f é a regra de atualização local que indica como cada estado individual do conjunto $S = \{0, \dots, s-1\}$ de estados possíveis que cada célula do autômato pode assumir. Ainda nesta abordagem, distinguimos duas classes essenciais de estratégias para a classificação dessas regras de atualização: as técnicas quantitativas, que procuram extrair as capacidades computacionais das regras de atualização considerando somente as próprias regras; e as técnicas qualitativas, que se concentram na análise dos padrões espaço-temporais à medida em que estes vão se formando ao longo da evolução do autômato celular. As estratégias desta última classe, foco do nosso interesse, são baseadas em alguma forma de medida de entropia, isto é, o que se faz é considerar a distribuição de probabilidade dos blocos espaço temporais conforme eles aparecem na evolução do autômato.

Capítulo 3

Classificação por entropia de entradas

3.1 Entropia de entradas

A estratégia de classificação utilizando entropia de entradas abordada na Seção 2.2 tem fundamentos essencialmente estatísticos e exige a execução de um número considerável de passos de tempo do autômato para que os dados colhidos tenham algum sentido classificatório. Na verdade, é preciso que o autômato celular seja executado algumas vezes com estados iniciais escolhidos aleatoriamente. Na prática, isto garante que os blocos de estados que são analisados estejam em lugares diferentes no traço espaço-temporal do autômato, o que nos fornece uma classificação mais apurada de seu comportamento global.

Outro ponto importante a ser considerado é que o cálculo da entropia de (2.2), para um único passo de tempo, reflete o comportamento do autômato apenas naquele tempo, desconsiderando o que pode ter ocorrido antes. Entretanto, esta informação não é inútil, mas ela teria um valor maior se pudesse refletir o comportamento do

autômato em passos de tempo anteriores. Para tanto, Wuensche propôs a idéia de calcular a entropia de entradas para cada passo de tempo t considerando não apenas t , mas uma janela de T passos de tempo que começa em $T - t$ e termina em $T - 1$, sendo $0 < T < t_+$ e $t_+ > 0$ o número de passos da execução do autômato [32]. Desta forma, a frequência de acessos às entradas da tabela de regra seria relativa não somente aos $s^{1+\delta}$ acessos do tempo t , mas relativa aos $s^{(1+\delta)T}$ acessos de todos os tempos dentro da janela, onde s é o número de estados diferentes que uma célula pode assumir e δ o tamanho da vizinhança da célula. Assim, a entropia de entradas, a média das entropias e variância são reescritas a seguir.

Para uma janela de T passos de tempo temos que, dado um dos blocos de estados de tamanho $X_1 \times \dots \times X_d \times T$, começamos considerando a probabilidade de que dentro do bloco cada uma das possíveis $s^{1+\delta}$ entradas para uma célula ocorra. Denotando a probabilidade de ocorrência da i -ésima entrada por Q_i , $1 \leq i \leq s^{1+\delta}$, a entropia de entradas para o tempo t dentro da janela de tamanho T é definida por

$$E_f(X_1, \dots, X_d, T) = - \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} Q_i \log_s Q_i. \quad (3.1)$$

O uso da entropia de entradas começa na prática fixando-se o valor de X_1, \dots, X_d e de T e então escolhendo as células $X_1 \dots X_d$ para serem observadas durante a simulação do autômato celular construído em f . Cada simulação é conduzida a partir de uma configuração inicial selecionada aleatoriamente e então prossegue por t_+ passos de tempo, para algum $t_+ \geq T - 1$, gerando uma nova configuração a cada passo de tempo. Para cada tempo t no intervalo $[t_0, t_+]$ com $T - 1 \leq t_0 \leq t_+$, a

probabilidade Q_i de que a i -ésima entrada ocorra dentro de um bloco de tamanho $X_1 \times \cdots \times X_d \times T$ pode ser aproximada por $\frac{q_i^t}{X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d \times T}$, onde q_i^t é o número de ocorrências da i -ésima entrada dentro do bloco de estados que termina no tempo t . Desta forma, o valor da entropia que origina-se de (3.1) e refere-se ao bloco que termina no tempo t é

$$E_f^t(X_1, \dots, X_d, T) = - \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \left(\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d T} \right) \log_s \left(\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d T} \right). \quad (3.2)$$

A média e a variância das quantidades em (3.2) para $t = t_0, \dots, t_+$ são

$$\overline{E_f}(X_1, \dots, X_d, T) = \frac{1}{t_+ - t_0 + 1} \sum_{t=t_0}^{t_+} E_f^t(X_1, \dots, X_d, T) \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} & \sigma^2(E_f(X_1, \dots, X_d, T)) \\ &= \frac{1}{t_+ - t_0 + 1} \sum_{t=t_0}^{t_+} [E_f^t(X_1, \dots, X_d, T) - \overline{E_f}(X_1, \dots, X_d, T)]^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

respectivamente. Naturalmente, o primeiro valor de entropia é calculado para o tempo $t = T$, pois é nesse tempo que temos o primeiro bloco de estados de tamanho $X_1 \times \cdots \times X_d \times T$. A Figura 3.1 ilustra a forma com que a janela de tamanho T corre à partir do tempo $t = T$ até o final da execução do autômato de uma dimensão. A cada passo de tempo da evolução do autômato, a janela avança uma linha, desprezando os acessos feitos à tabela de regra no tempo $t - T - 1$ (i.e., primeira linha da janela no tempo $t - 1$) e incorporando os acessos do tempo atual, quando então a entropia de entradas para este tempo é calculada.

Assim como pudemos observar na Seção 2.2, estas quantidades podem ser usadas para revelar a classe de Wolfram à qual a regra de atualização f pertence, após tê-las

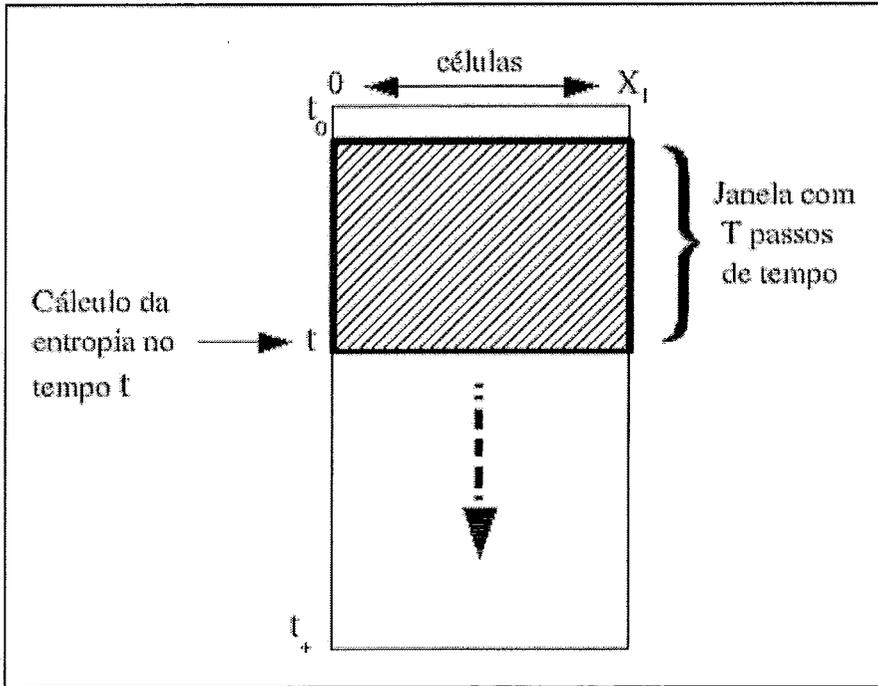


Figura 3.1: Janela de tamanho T com $X_1 \times \dots \times X_d \times T$ estados de um autômato uni-dimensional. A cada passo de tempo da evolução do autômato, a janela avança um linha, desprezando os acessos feitos à tabela de regra no tempo $t - T - 1$ e incorporando os acessos do tempo atual, quando então calcula a entropia para este tempo.

ponderadas para um determinado número de simulações para configurações iniciais escolhidas aleatoriamente. A grosso modo, o cálculo da entropia de entradas é “suavizado” quando é feito dentro de uma janela de passos de tempo, mas isso nos leva a uma discussão a respeito de qual seria o tamanho ideal da janela, ou seja, é possível que qualquer valor de T nos leve a uma boa classificação? Ou deve existir um valor de T capaz de otimizar o processo de classificação? Esta questão tem grande importância em nosso estudo e é discutida no próximo capítulo.

Em seus experimentos iniciais Wuensche se concentrou apenas na classificação de autômatos celulares uni-dimensionais. Nestes experimentos foi descoberto que médias e variâncias baixas indicam comportamento de classe (i) ou (ii), o que revela um comportamento ordenado, enquanto médias altas e variâncias baixas indicam uma regra de atualização classe (iii), de comportamento caótico. O comportamento da classe (iv), complexo, é caracterizado pelos valores intermediários da média e por variâncias altas [32].

A Figura 3.2 apresenta três blocos de estados gerados a partir da evolução de autômatos celulares de uma dimensão baseados em regras de atualização de comportamento ordenado, classe (i) (ii); caótico, classe (iii) e complexo, classe (iv), respectivamente. Estas regras de atualização estão presentes nos experimentos de Wuensche encontrados em [32]. Ao lado dos blocos encontram-se os gráficos das entropias de entradas obtidas para cada tempo em t_+ da evolução desses autômatos (coluna do centro) e gráficos de barras que refletem o histograma de acessos (coluna da direita). No caso (a), podemos observar que o padrão espaço-temporal do autômato tende

a um comportamento ordenado com baixa entropia e baixa variância, isso é bem claro no histograma, onde é possível observar que os acessos se concentraram em poucas entradas da tabela, enquanto outras sequer foram acessadas; já no caso (b), o comportamento se mantém caótico, e isso é refletido no gráfico de entropia de entradas através dos valores altos e baixa variância, e também pela uniformidade apresentada pelo histograma. No caso (c), é possível observar a formação de estruturas (*gliders*), ao longo do traço espaço-temporal, que ao se colidirem dão origem a outras estruturas, caracterizando um comportamento complexo. Neste caso, a curva de entropia se mantém em uma faixa intermediária, mas com uma alta variância, também a distribuição dos acessos ao longo da execução, com exceção da primeira entrada, se mantém bem equilibrada.

3.2 Heurística centrada na célula

Computar a média e a variância da entropia de entradas, como indicado respectivamente em (3.3) e (3.4), requer a simulação do autômato celular que é baseado em f por t_+ passos de tempo e requer também que as quantidades obtidas por (3.2) sejam colecionadas, à medida que a janela de tamanho $X_1 \times \dots \times X_d \times T$ corre à ao longo da evolução do autômato. Quando a simulação é realizada em paralelo, as células $X_1 \dots X_d$ podem não residir no mesmo processador. Assim, computando as entropias de entradas, da forma que foi apresentada em (3.2) para todos os valores de t , requer uma quantidade considerável de comunicação envolvendo os processadores onde as células se encontram.

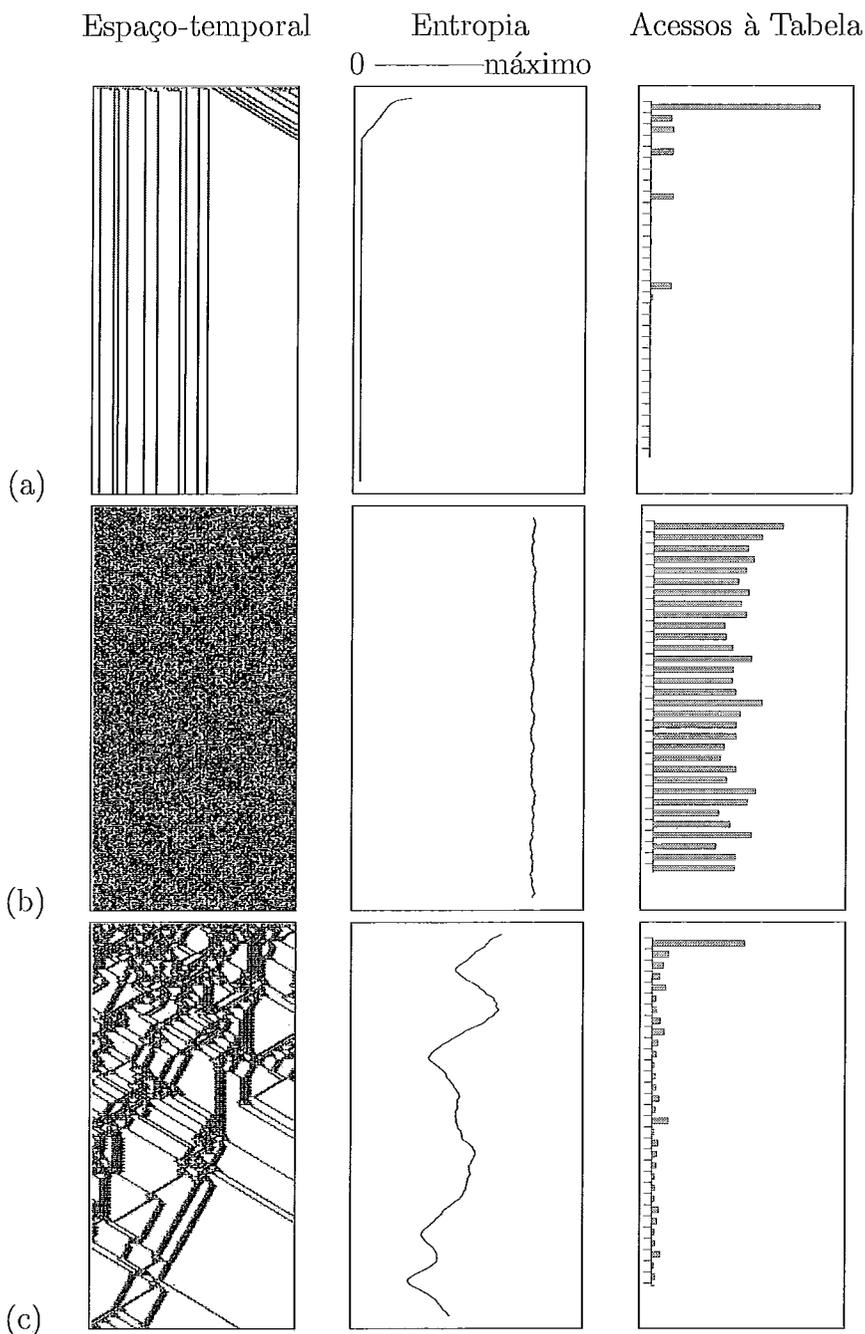


Figura 3.2: Padrões espaço-temporais da evolução de autômatos celulares unidimensionais, curva de entropia de entradas e histograma de acessos. Para cada caso temos 150 células e vizinhança $\delta = 4$, sendo que no caso (a) temos a regra de atualização `01DC3610`, no caso (b) temos a regra `994A6A65` e no caso (c) a regra `6C1E53A8`, nas suas respectivas representações hexadecimais. Cada execução foi feita para $t_+ = 200$ passos de tempo.

Uma estratégia possível para a simulação paralela de um autômato celular consiste basicamente em distribuir suas $X_1 \times \cdots \times X_d$ células entre os N processadores disponíveis para esta computação. Para tanto, cada processador deve possuir uma cópia da tabela de regra e também deve conter uma estrutura de dados capaz de armazenar o histórico de acessos às $s^{(1+\delta)}$ entradas da tabela que acontecem dentro da janela de tamanho T passos de tempo. Além disso, um processador deve ser escolhido para colher todas as informações do histórico de acessos de cada processador participante da computação. Este processador mestre é o responsável pelo cálculo das entropias de entradas, a média dessas entropias ao longo dos t_+ passos da evolução do autômato e também a variância. A Figura 3.3 ilustra como a simulação paralela é realizada e também mostra as mensagens que são enviadas pelos $N - 1$ processadores participantes para o processador mestre. Entretanto, nos abstivemos de mostrar nesta ilustração as mensagens contendo o conjunto de estados necessários para o cálculo do próximo passo de tempo da evolução. Abordamos esse assunto no próximo capítulo.

Considerando a simulação ilustrada em 3.3 e dado que um processador, denominado P , tenha sido escolhido para colher todas as informações necessárias para a computação da média e da variância, temos que o número de inteiros que precisam ser coletados por P (i.e., número de acessos a cada entrada da tabela) é $(N - 1) \times s^{1+\delta} \times t_+$. Em geral, para cada processador participante e cada tempo t , os inteiros que precisam ser trocados são os $s^{1+\delta}$ inteiros, onde cada um corresponde à soma de todos os acessos a uma entrada na tabela dentro da janela que termina

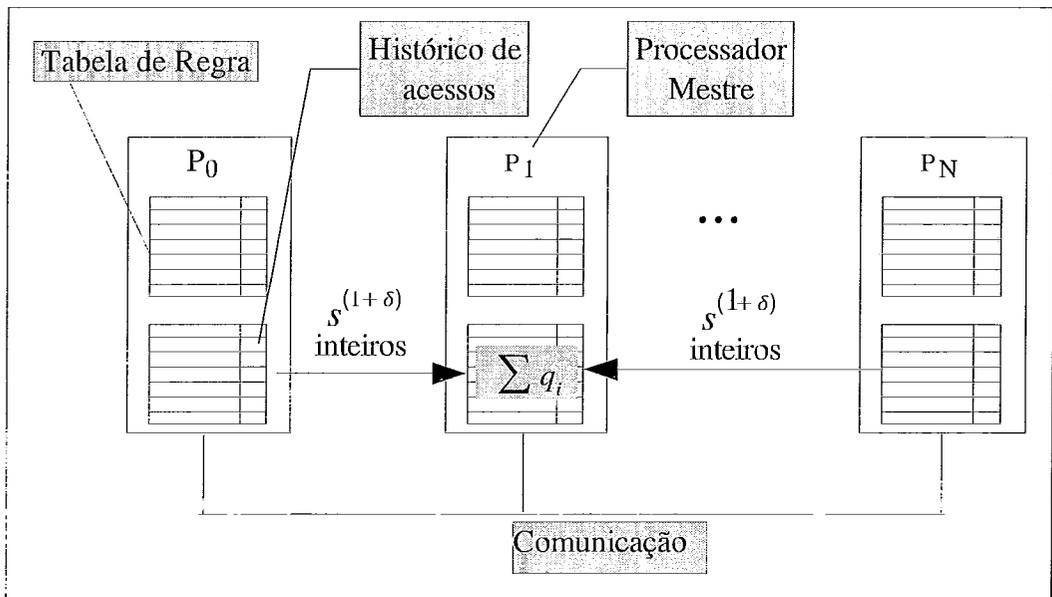


Figura 3.3: Simulação paralela de autômatos celulares usando N processadores. Cada processador contém uma cópia da tabela de regra e também uma estrutura de dados para armazenar o histórico de acessos às entradas da tabela. O histórico de acessos é enviado ao processador mestre que é o responsável pelo cálculo das entropias, da média e da variância.

no tempo t . Assim, o número total de inteiros necessários para os cálculos desejados ao longo dos t_+ passos da evolução do autômato é da ordem de:

$$O(N \times t_+ \times s^{(1+\delta)}). \quad (3.5)$$

Na prática, a simulação paralela de autômatos celulares, da forma que foi abordada, exige muitos recursos; isto é, uma grande capacidade de processamento, necessária para computar a aplicação da regra de atualização f , uma grande capacidade de armazenamento, necessária para guardar os estados das células assim como as estruturas de dados utilizadas no cômputo da entropia, e também a quantidade de comunicação exigida é bem expressiva, já que além das informações do histórico de acessos que são enviadas ao processador mestre (3.5) existe a troca de mensagens contendo os estados remotos necessários para a computação do autômato.

O ponto crucial dos requisitos de comunicação de (3.5) é que o logaritmo que aparece em (3.2) somente pode ser calculado após as contribuições a q_i^t terem sido consideradas para todas as $X_1 \dots X_d$ células, em particular para todas as células alocadas fora do processador P , cujos acessos são armazenados no histórico de acessos dos processadores participantes. O passo inicial para a obtenção de uma aproximação “centrada na célula” para (3.2) que permita que os requisitos de comunicação sejam reduzidos dramaticamente, é examinar mais rigorosamente o argumento deste logaritmo e perceber que $\frac{q_i^t}{X_1 \dots X_d}$ é o número médio de ocorrências da i -ésima entrada por célula dentro da janela de tamanho $X_1 \times \dots \times X_d \times T$ estados.

Seja $q_i^{c,t}$ o número de ocorrências da i -ésima entrada para a c -ésima célula dentro

da janela que termina no tempo t . Logo, $q_i^t = \sum_{c=1}^{X_1 \dots X_d} q_i^{c,t}$ e então (3.2) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
E_f^t(X_1, \dots, X_d, T) &= - \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \frac{\sum_{c=1}^{X_1 \dots X_d} q_i^{c,t}}{X_1 \dots X_d T} \log_s \left(\frac{\sum_{c=1}^{X_1 \dots X_d} q_i^{c,t}}{X_1 \dots X_d T} \right) \\
&= - \frac{1}{X_1 \dots X_d} \sum_{c=1}^{X_1 \dots X_d} \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \left(\frac{q_i^{c,t}}{T} \right) \log_s \left(\frac{\sum_{c'=1}^{X_1 \dots X_d} q_i^{c',t}}{X_1 \dots X_d T} \right). \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Nossa entropia de entradas centrada na célula é definida pela aproximação de $q_i^{c,t}$ por sua média sobre todas as células na janela sempre que conveniente. Isto é, usamos a aproximação:

$$\frac{\sum_{c'=1}^{X_1 \dots X_d} q_i^{c',t}}{X_1 \dots X_d} \approx q_i^{c,t} \quad (3.7)$$

no argumento para o logaritmo em (3.6) para todo c tal que $1 \leq c \leq X_1 \dots X_d$.

Então obtemos:

$$C_f^t(X_1, \dots, X_d, T) = - \frac{1}{X_1 \dots X_d} \sum_{c=1}^{X_1 \dots X_d} \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \left(\frac{q_i^{c,t}}{T} \right) \log_s \left(\frac{q_i^{c,t}}{T} \right), \quad (3.8)$$

que é a entropia de entradas centrada na célula da janela com $X_1 \times \dots \times X_d \times T$ estados que termina no tempo t .

Claramente, o ponto central de nossa discussão é saber se a entropia de entradas centrada na célula definida em (3.8) ainda possui capacidade discriminatória análoga àquela da entropia de entradas, dado que as duas se relacionam pela aproximação em (3.7). A resposta para esta questão é afirmativa e é explorada no Capítulo 4 através da média $\overline{C}_f(X_1, \dots, X_d, T)$ e da variância $\sigma^2(C_f(X_1, \dots, X_d, T))$, definidas analogamente a (3.3) e (3.4), respectivamente.

Considerando a entropia de entradas centrada na célula, analisamos o volume de comunicação direcionada ao processador especial P durante uma simulação paralela de um autômato celular. Claramente, um processador $Q \neq P$ alocando X_Q células pode calcular sua porção do somatório duplo em (3.8) para cada t (e.g., com c variando sobre X_Q células) sem nenhuma comunicação. Se N denota o número de processadores, então P tem que receber $(N-1) \times t_+$ números de ponto flutuante para a simulação completa, sendo que cada número é a entropia de entradas centrada na célula para cada tempo t . Sendo que esta entropia é a parcela pertencente à parte do autômato que está alojada naquele processador. Assim, se desconsiderarmos qualquer diferença entre o envio de números inteiros e números de ponto flutuante, o uso da aproximação centrada na célula para a entropia de entradas economiza uma quantidade considerável de comunicação, reduzindo os requisitos em (3.5) para $O(N \times t_+)$.

Na prática, esta redução por um fator de $O(s^{(1+\delta)})$ dos requisitos de comunicação trás grandes benefícios para a simulação paralela de autômatos celulares. Isto porque, a partir desta nova abordagem, cada processador é capaz de calcular sua parcela da entropia sem a necessidade de comunicação. Além disso, a árdua tarefa do processador mestre de colher as informações a cada passo de tempo e calcular a entropia globalmente é postergada para o final da simulação, o que é um ganho expressivo no tempo total de computação.

3.3 Limite superior

O limite superior da entropia de entradas centrada na célula de (3.8) pode ser estabelecido facilmente se recordarmos que entropias são maximizadas quando atribuímos a mesma probabilidade a todos os eventos mutuamente exclusivos em consideração [24]. No caso da probabilidade de acesso às entradas da tabela de regra pela célula c na janela que termina no tempo t , denotada por $Q_i^{c,t} = \frac{q_i^{c,t}}{T}$, temos que, para uma janela com T passos de tempo e uma tabela com $s^{(1+\delta)}$ entradas, se

$$Q_0^{c,t} = Q_1^{c,t} = \dots = Q_{2^{(1+\delta)}-1}^{c,t}, \quad (3.9)$$

então

$$\frac{q_0^{c,t}}{T} = \frac{q_1^{c,t}}{T} = \frac{q_{2^{(1+\delta)}-1}^{c,t}}{T} = \frac{T}{s^{1+\delta}}. \quad (3.10)$$

Como $Q_i^{c,t} = \frac{q_i^{c,t}}{T}$, logo $Q_i^{c,t} = \frac{T}{s^{1+\delta}}$. Isto é

$$Q_i^{c,t} = \frac{1}{s^{(1+\delta)}}. \quad (3.11)$$

Aplicando (3.11) em (3.8) temos

$$C_f^t(X_1, \dots, X_d, T) \leq -\frac{1}{X_1 \dots X_d} \sum_{c=1}^{X_1 \dots X_d} \sum_{i=1}^{s^{1+\delta}} \left(\frac{1}{s^{(1+\delta)}} \right) \log_s \left(\frac{1}{s^{(1+\delta)}} \right), \quad (3.12)$$

Finalmente, generalizando (3.12) para todos os valores apropriados de i e c , chegamos facilmente ao limite superior, que é dado por

$$C_f^t(X_1, \dots, X_d, T) \leq 1 + \delta. \quad (3.13)$$

Entretanto, alguns dos resultados descritos no Capítulo 4 são baseados nas regras de atualização totalísticas abordadas no Capítulo 2, isto é, regras de atualização

cujos resultados não dependem da análise do estado individual da célula e dos estados de seus vizinhos, mas sim da análise do estado da célula e da soma dos estados dos seus vizinhos. Para tais regras de atualização, o limite dado por (3.13) não faz mais sentido, considerando uma distribuição de probabilidades uniforme em todas as entradas para maximização da entropia. Nestes casos, o nível no qual uma distribuição uniforme para a entropia a ser maximizada está correto é o nível em que as entradas são agrupadas de acordo com a soma dos estados dos vizinhos compreendidos. Isto é, um grupo de vizinhanças cuja soma de seus estados seja 0, um grupo cuja soma seja 1 assim sucessivamente até o grupo de vizinhanças cuja soma dos seus estados seja $1 + \delta$.

A grosso modo, ao considerarmos o número de estados que uma célula pode assumir $s = 2$ e uma tabela de regra que reflita a aplicação da regra de atualização f , totalística, o número de entradas dessa tabela seria então $(1 + \delta) + 1 = (2 + \delta)$, cada uma correspondendo a um dos possíveis valores da soma, de 0 a δ . A probabilidade associada a cada grupo é então $(2 + \delta)^{-1}$. Entretanto, esta informação não é suficiente para que possamos aplicá-la em (3.8) afim de alcançar o limite superior da entropia para o tipo de regras de atualização em questão. Na verdade, ainda precisamos saber qual é a probabilidade associada a cada vizinhança dentro de cada grupo. Para tanto, precisamos antes de tudo descobrir quantas vizinhanças (e.g., cada vizinhança corresponde a uma entrada na tabela de regra não totalística) existem em cada um dos $2 + \delta$ grupos e então dividir a probabilidade de cada grupo pelo seu número de membros.

Sendo $n(\sigma)$ o número de entradas cujos estados somam até σ com $0 \leq \sigma \leq \delta$, ou seja, o número de membros em cada grupo, assume-se então que cada vizinhança ocorre com probabilidade $[(2 + \delta)n(\sigma)]^{-1}$, onde $n(\sigma) = \binom{\delta}{\sigma}$. Logo, para tais regras de atualização, obtemos, de (3.8),

$$C_f^t(X_1, \dots, X_d, T) \leq \log_2(2 + \delta) + \frac{1}{2 + \delta} \sum_{\sigma=0}^{\delta} \log_2 \binom{\delta}{\sigma}. \quad (3.14)$$

O cálculo do limite superior da entropia de entradas centrada na célula para regras totalísticas pode ser facilmente estendido para autômatos celulares com $s > 2$, pois o ponto central deste cálculo é atribuir probabilidades iguais de ocorrência de acessos a todas as vizinhanças. Ou seja, considerar a probabilidade de ocorrência de acessos a cada grupo e considerar o número de membros em cada um.

Neste capítulo, foi abordada a classificação das regras de atualização através da análise qualitativa dos padrões espaço-temporais gerados a partir da execução do autômato, utilizando para tanto o conceito de entropia de entradas introduzido por Wuensche. A partir deste conceito, introduzimos a nossa heurística de entropia de entradas centrada na célula, onde todos os esforços foram direcionados para a elaboração de uma técnica de classificação que mantivesse a capacidade discriminatória da entropia de entradas e que pudesse contornar a grande demanda de comunicação necessária para a classificação de regras de atualização de autômatos celulares simulados em paralelo. No capítulo seguinte, são mostrados e discutidos todos os experimentos que foram realizados com a finalidade de validar todo o potencial de nossa heurística centrada na célula.

Capítulo 4

Experimentos e análise de resultados

4.1 Autômatos celulares infinitos

Um autômato celular infinito não pode ser simulado em sua totalidade, nem pode uma porção dele ser simulada por um número indefinido de passos. Uma primeira decisão crucial ao se planejar tal simulação é determinar quais células contíguas devem ser observadas ao longo de cada dimensão d e também o número de passos t_+ em que vai se estender a simulação. A escolha de um número finito de células para observar estabelece a questão de como lidar com as fronteiras da região observada, já que estas fronteiras afetam a simulação mas não podem ser estendidas indefinidamente. Adotando fronteiras cilíndricas artificiais ou alimentando com valores aleatoriamente escolhidos as células fronteiriças a cada passo de tempo da simulação em princípio afetaria a simulação, já que isso teria impacto direto na natureza determinística e infinita de um autômato celular.

A solução para este impasse começa com escolha do valor t_+ do número de

passos durante o qual o autômato celular será observado na simulação, bem como o número ℓ_k de células contíguas que serão observadas ao longo da k -ésima dimensão, $1 \leq k \leq d$. A partir dessas escolhas, abordamos o problema. Inicialmente, vamos mostrar a solução para o caso de autômato celulares uni-dimensionais e então a generalizamos para os demais casos.

Seja ℓ_1 o número de células contíguas que desejamos observar ao longo dos t_+ passos da simulação de um autômato celular uni-dimensional infinito com vizinhança de raio r_1 . O nosso ponto de partida é a análise do último passo de tempo da simulação, ou seja, o tempo t_+ . Sendo c_1 a primeira célula ao longo de ℓ_1 , da esquerda para a direita, e c_{ℓ_1} a última célula, logo, para a obtenção dos estados de c_1 e c_{ℓ_1} no passo de tempo t_+ é preciso considerar os estados das suas células vizinhas no tempo $t_+ - 1$. No caso de c_1 , o que se faz necessário considerar são suas r_1 células vizinhas, à sua esquerda, enquanto a mesma consideração se faz a respeito das r_1 células vizinhas à direita de c_{ℓ_1} . Entretanto, c_1 e c_{ℓ_1} são células fronteiriças e portanto é necessário que no tempo $t_+ - 1$ sejam inseridas “artificialmente” r_1 células vizinhas à esquerda de c_1 e a mesma quantidade de células à direita de c_{ℓ_1} , pois somente desta forma é possível computar os estados de c_1 e c_{ℓ_1} no passo de tempo t_+ .

Contudo, estas células inseridas artificialmente no autômato no tempo $t_+ - 1$ também precisam que seus estados nesse passo de tempo sejam computados a partir de suas vizinhanças no tempo $t_+ - 2$. Assim, mais uma vez, r_1 células são inseridas à esquerda e à direitas dessas células “artificiais” que são fronteiriças no tempo $t_+ - 1$.

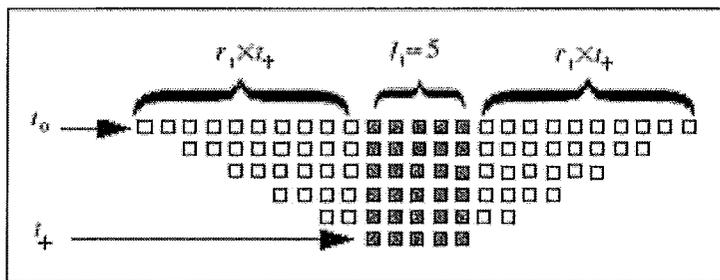


Figura 4.1: Simulação de um autômato celular uni-dimensional infinito com vizinhança de raio $r_1 = 2$ e com $\ell_1 = 5$ células contíguas sob observação ao longo de $t_+ = 6$ passos de tempo. Neste caso, o número total de células no tempo t_0 é de 25 células.

Claramente é possível observar que este processo se repetirá regressivamente até o passo de tempo inicial t_0 . Isto é, $2 \times r_1$ células são inseridas a cada passo de tempo desde $t_+ - 1$ até t_0 . Logo, para observar as ℓ_1 células contíguas de um autômato celular uni-dimensional infinito, com vizinhança de raio r_1 , ao longo de t_+ passos de tempo é preciso que o número de células no tempo t_0 seja

$$(2 \times r_1) \times (t_+ - 1) + \ell_1 \quad (4.1)$$

A Figura 4.1 mostra a simulação de um autômato celular uni-dimensional infinito com vizinhança de raio $r_1 = 2$ e com $\ell_1 = 5$ células contíguas sob observação ao longo de $t_+ = 6$ passos de tempo. Neste caso, o número total de células no tempo t_0 é de 25 células.

Para generalizar a solução dada no caso uni-dimensional para autômatos com $d > 1$, vamos começar assumindo uma vizinhança de von Neumann e então dividimos a vizinhança δ da célula considerando cada dimensão; isto é, escrevemos $\delta = 2(r_1 + \dots + r_d)$, onde cada r_k é o raio da regra de atualização da k -ésima di-

mensão. Para obter o estado de uma célula fronteira ao longo da k -ésima dimensão no tempo t_+ , como se ela realmente estivesse embutida em um autômato celular infinito, precisamos dos estados das r_k células “artificiais”, além da fronteira daquela dimensão, no tempo $t_+ - 1$. Sendo o número de células fronteiras na k -ésima dimensão no tempo t_+ dado por

$$2 \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^d \ell_l, \quad (4.2)$$

logo, de forma análoga a (4.1), temos que o número total de células no tempo $t_+ - 1$ é

$$\ell_1 \dots \ell_d + 2 \sum_{k=1}^d r_k \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^d \ell_l \leq \prod_{k=1}^d (\ell_k + 2r_k). \quad (4.3)$$

Observamos que, para $d = 1$, a igualdade em (4.3) nos remete a (4.1). Contudo, é importante considerar o limite superior, pois ele generaliza o número de células necessárias até o tempo $t = 0$. Nesse caso, o número de células iniciais necessárias não passa de

$$\prod_{k=1}^d [\ell_k + 2r_k(t_+ - 1)] \quad (4.4)$$

O limite superior em (4.4) é claramente um exagero para $d > 1$ sob a vizinhança de von Neumann, uma vez que ele corresponde a um aglomerado de células de tamanho $(\ell_1 + 2r_1 t_+) \times \dots \times (\ell_d + 2r_d t_+)$. Contudo, nossa intenção é somente mostrar que é totalmente viável a determinação do número de estados iniciais que são necessários, independente de todas as implicações inerentes a uma simulação paralela envolvendo exatamente aquele número de células.

A partir desse ponto, podemos considerar que temos um conjunto de células que

pode ser simulado através do tempo t_+ com a certeza de que o comportamento observado no conjunto $\ell_1 \dots \ell_d$ de células é completamente compatível com a suposição de um autômato celular infinito e também do caráter determinístico de sua regra de atualização. As fronteiras ainda existem em relação ao prolongamento do conjunto de células sob observação, entretanto, agora, elas são tratadas de forma abstrata. Portanto, tanto fronteiras cilíndricas quanto estados escolhidos aleatoriamente podem ser usados para preencher as entradas necessárias para as células “artificiais” inseridas, pois o efeito de qualquer escolha pode afetar somente os estados das células sob observação após o tempo t_+ .

Ao assumirmos uma vizinhança de Moore, temos $\delta = (1 + 2r_1) \dots (1 + 2r_d) - 1$, assim o número de estados necessários no tempo $t_+ - 1$ é exatamente o limite superior que aparece em (4.3). Neste caso, o número de células dadas por (4.4) não é mais um exagero, mas espessa precisamente o que é necessário.

Na Figura 4.2, mostramos uma ilustração destas situações no caso bidimensional, quando $\ell_1 = 3$ e $\ell_2 = 4$ com $r_1 = 2$ e $r_2 = 1$. É mostrado o conjunto de células necessárias no caso dos estados das células sombreadas que estejam sob observação para os passos futuros no tempo $t_+ = 3$, como se as células fossem parte de um autômato celular determinístico e infinito. O conjunto de células em branco contém as células necessárias no caso de uma vizinhança de von Neumann. A soma das células em branco mais as células tracejadas compõe o conjunto de células necessárias no caso de uma vizinhança de Moore ser usada. De agora em diante, empregamos o último conjunto de células independente do tipo de vizinhança usada.

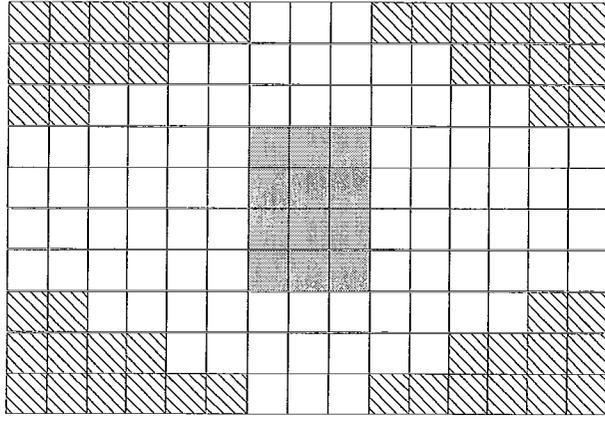


Figura 4.2: Aglomerado 15×10 de células para as quais os estados iniciais são necessários no caso bi-dimensional de $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = 4$, $r_1 = 2$, e $r_2 = 1$, de forma que as células sombreadas possam ser observadas corretamente para $t_+ = 3$. O conjunto de células em branco contém as células necessárias no caso de uma vizinhança de von Neumann. A soma das células em branco mais as células tracejadas compõe o conjunto de células necessárias no caso de uma vizinhança de Moore ser usada.

4.2 O valor de T

Quando o autômato celular é simulado com o objetivo de computar a entropia de entradas do Capítulo 3 ou a entropia de entradas centrada na célula da Seção 3.2 dentro de uma janela de tamanho $X_1 \times \dots \times X_d \times T$, o núcleo do conjunto de células observadas é tal que $\ell_1 = X_1, \dots, \ell_d = X_d$. Nesta seção, discutimos a escolha de T que maximiza a capacidade discriminatória de nossa heurística centrada na célula no contexto das classes de Wolfram. De agora em diante assumimos $S = \{0, 1\}$, i.e., $s = 2$.

Nossa abordagem consiste em executar um conjunto inicial de experimentos com $t_+ = 500$ em um único processador e analisar suas saídas com o objetivo de encontrar o valor de T para ser usado nos experimentos principais. São quatro os casos desses

experimentos iniciais: um para $d = 1$ e $r_1 = 2$, um para $d = 1$ e $r_1 = 3$, um para $d = 2$ sob a vizinhança de von Neumann com $r_1 = r_2 = 1$, e o último para $d = 2$ sob a vizinhança de Moore com $r_1 = r_2 = 1$. Para cada caso temos que a primeira rodada corresponde a uma regra de atualização classe (i), a segunda corresponde a uma regra classe (ii) e assim por diante. As regras usadas nesses testes já são conhecidas e estão detalhadas na Tabela 4.1.

Na Tabela 4.1, as regras de atualização são especificadas de acordo com as convenções abordadas no Capítulo 2: para os experimentos de uma dimensão, cada regra está na forma hexadecimal. O caso de duas dimensões sob von Neumann, cada regra está na forma hexadecimal abordada neste trabalho e sugerida em [27]. O caso de duas dimensões sob Moore compreende apenas regras totalísticas. Para estas regras, adotamos a notação do “Jogo da vida” de Conway.

Em cada rodada dos nossos experimentos preliminares, o autômato celular é simulado para $T = 5, 10, \dots, 250$ e para cada simulação a média e a variância da Seção 3.2 são calculadas. Simplificando a notação temos $\overline{C_f}$ e $\sigma^2(C_f)$, com f sendo a regra de atualização em questão. Todas as simulações compartilham o mesmo valor de d , X_1, \dots, X_d , r_1, \dots, r_d e mesma configuração inicial gerada para aquele grupo de simulações escolhendo aleatoriamente os estados das $(X_1 + 2r_1t_+) \dots (X_d + 2r_d t_+)$ células envolvidas.

Os resultados destes experimentos iniciais são mostrados nas Figuras 4.3 a 4.10. As figuras referem-se, respectivamente, ao comportamento da entropia de entradas centrada na célula para os casos uni e bi-dimensional conforme T varia.

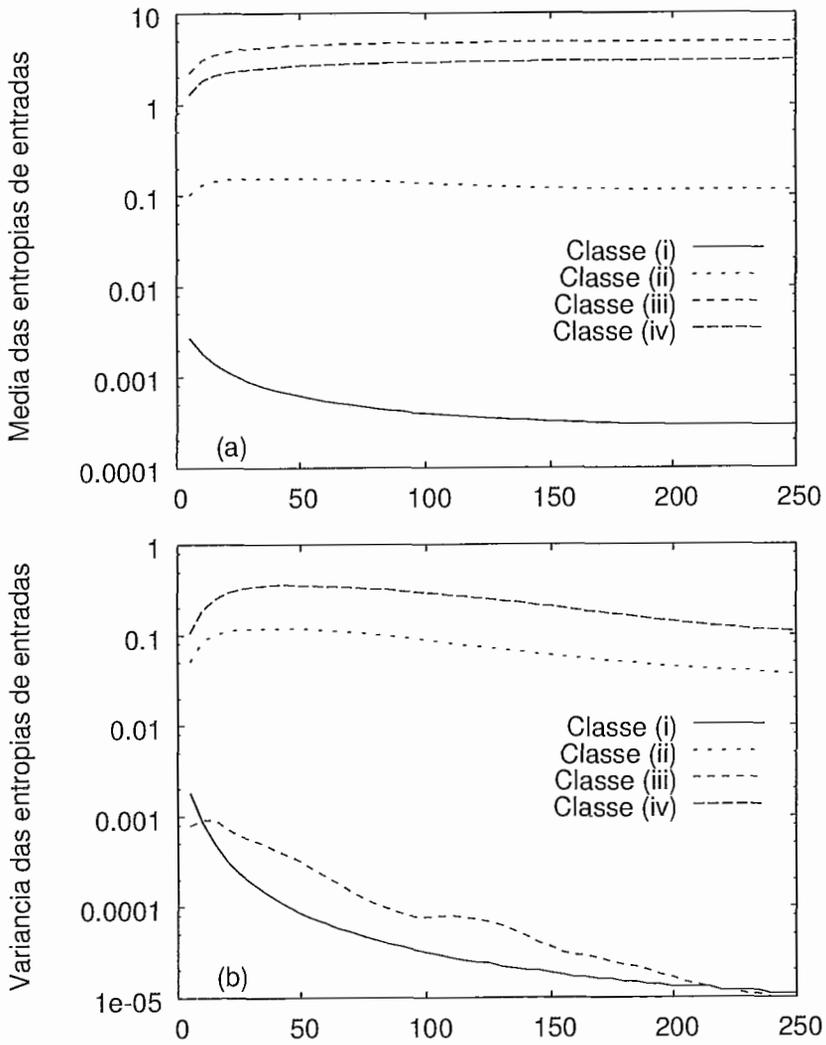


Figura 4.3: A média $(\overline{C_f})$ e a variância $(\sigma^2(C_f))$ da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 1$, 150 células e raio $r_1 = 2$ (a e b).

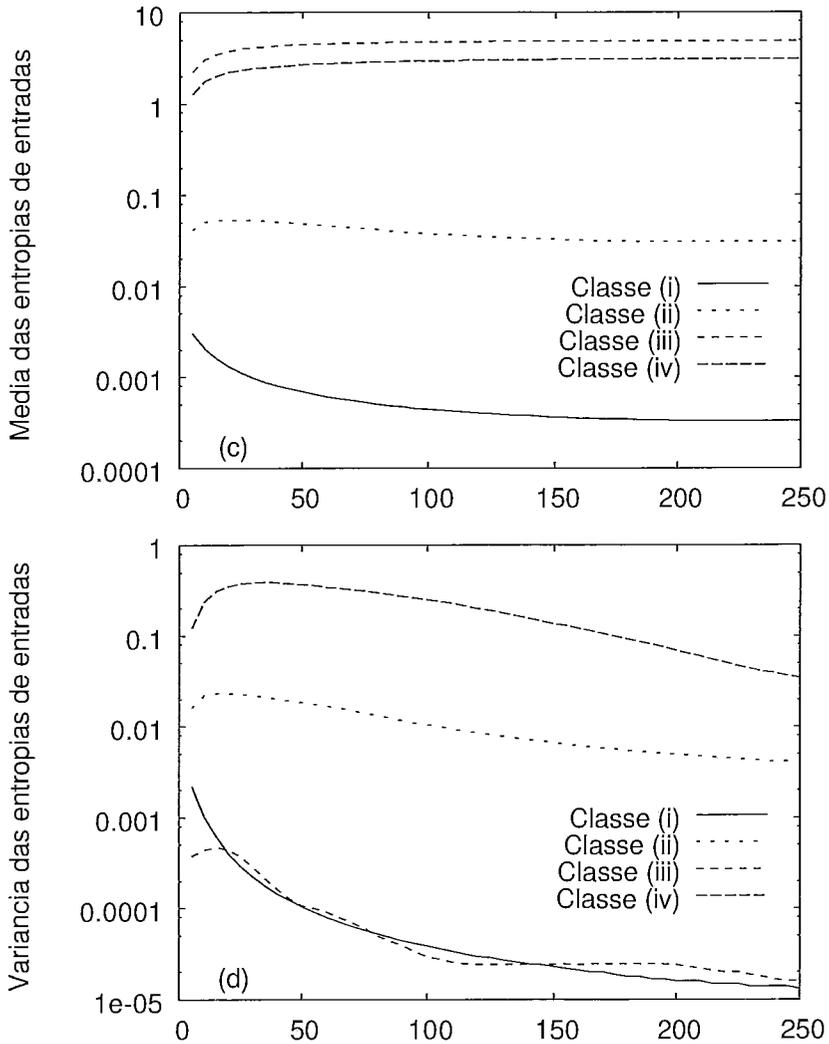


Figura 4.4: A média ($\overline{C_f}$) e a variância ($\sigma^2(C_f)$) da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 1$, 300 células e raio $r_1 = 2$ (c e d).

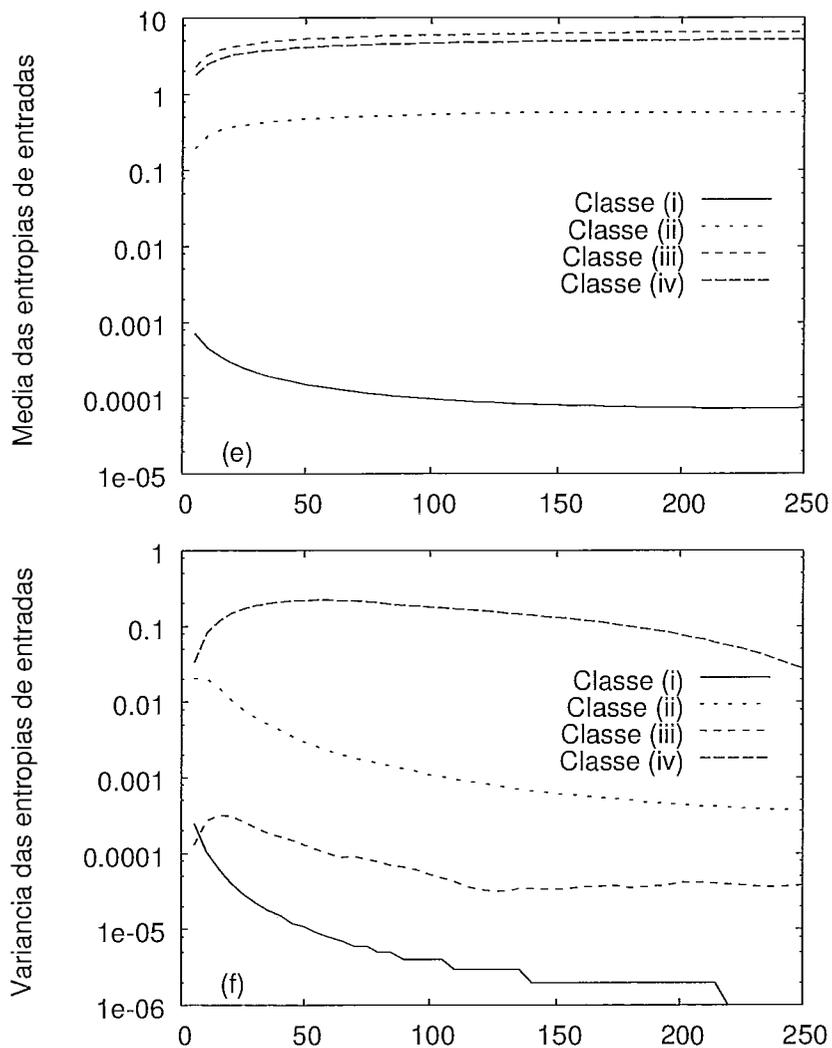


Figura 4.5: A média ($\overline{C_f}$) e a variância ($\sigma^2(C_f)$) da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 1$, 150 células e raio $r_1 = 3$ (e e f).

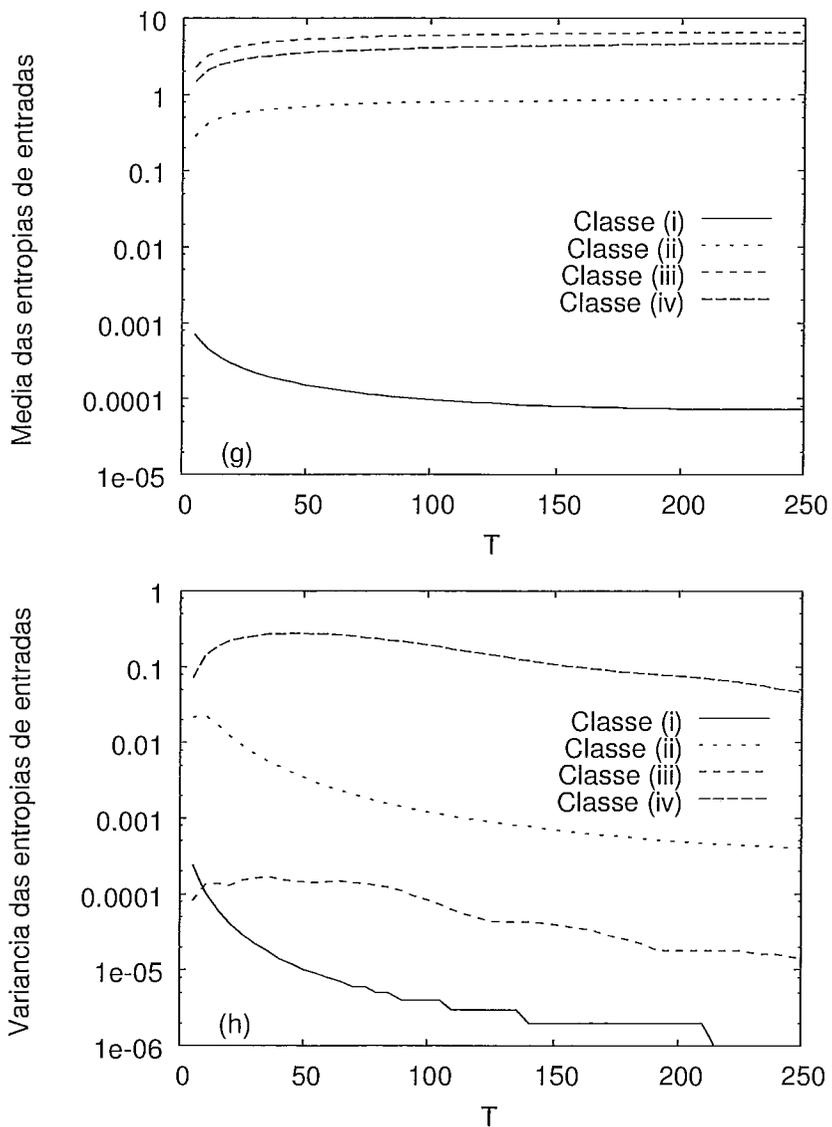


Figura 4.6: A média ($\overline{C_f}$) e a variância ($\sigma^2(C_f)$) da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 1$, 300 células e raio $r_1 = 3$ (g e h).

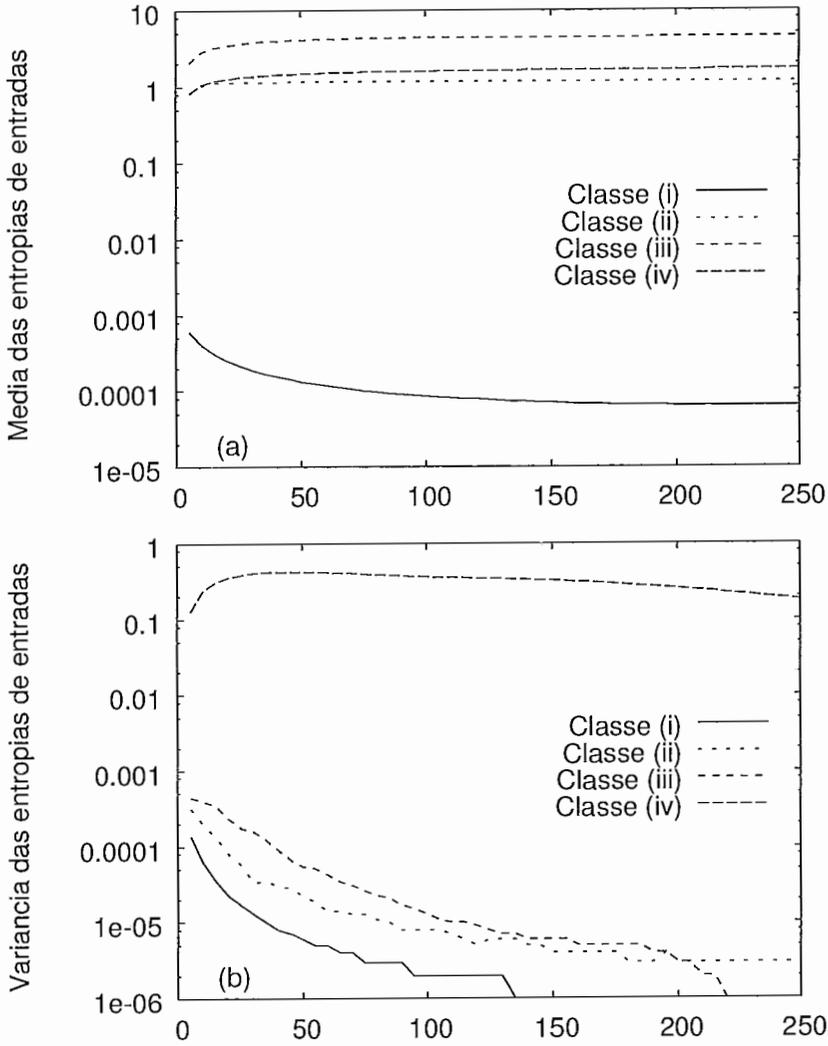


Figura 4.7: A média ($\overline{C_f}$) e a variância ($\sigma^2(C_f)$) da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 2$, (15×15) células usando vizinhança de von Neumann (a e b) e raios $r_1 = r_2 = 1$.

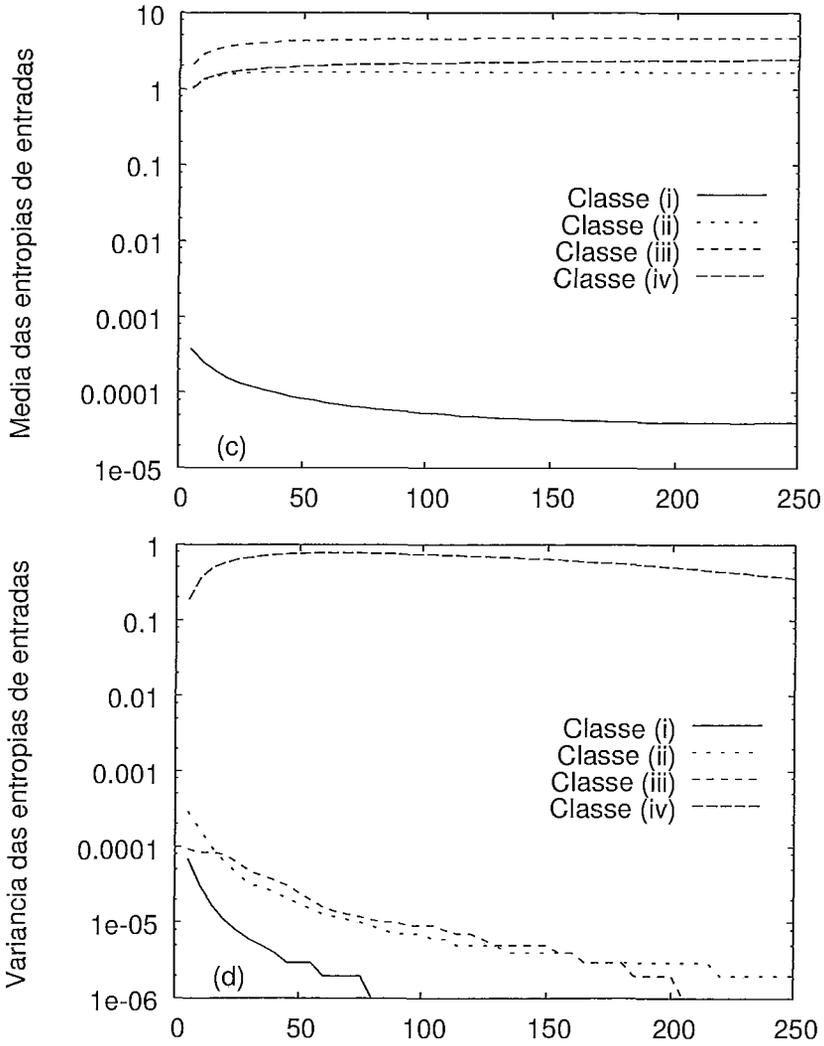


Figura 4.8: A média $\overline{(C_f)}$ e a variância $(\sigma^2(C_f))$ da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 2$, (30×30) células sob von Neumann (c e d) e raios $r_1 = r_2 = 1$.

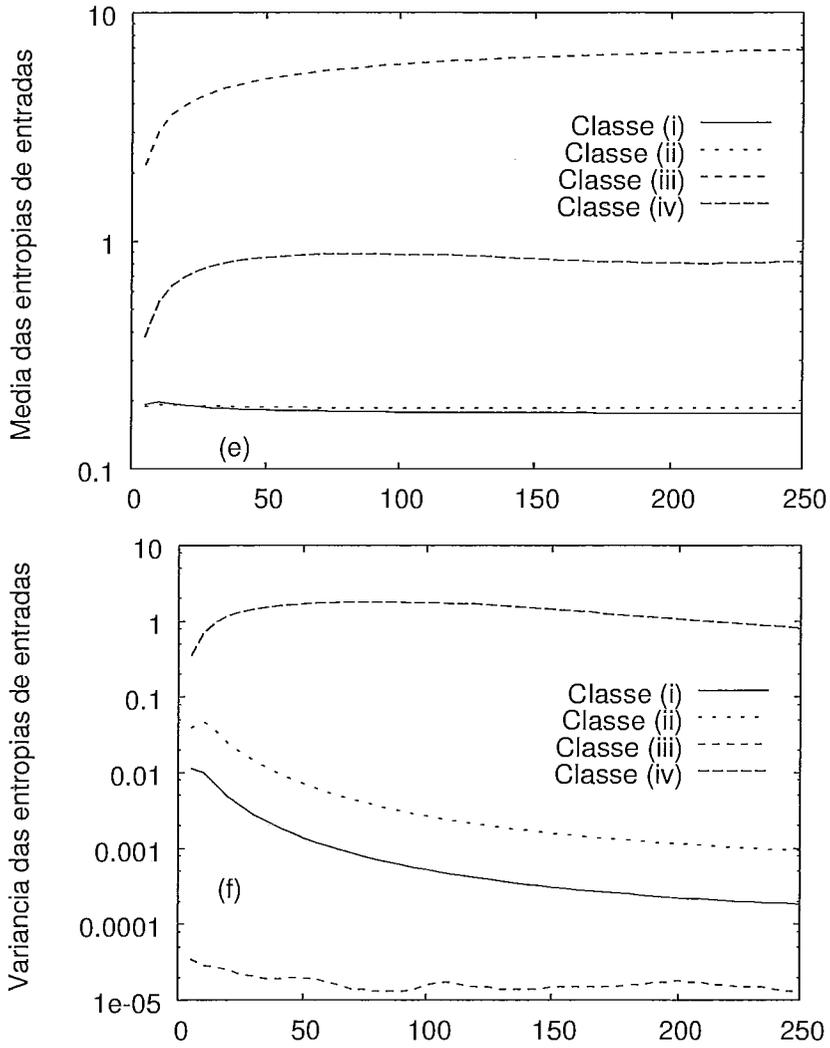


Figura 4.9: A média ($\overline{C_f}$) e a variância ($\sigma^2(C_f)$) da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 2$, (15×15) células sob Moore (e e f) e raios $r_1 = r_2 = 1$.

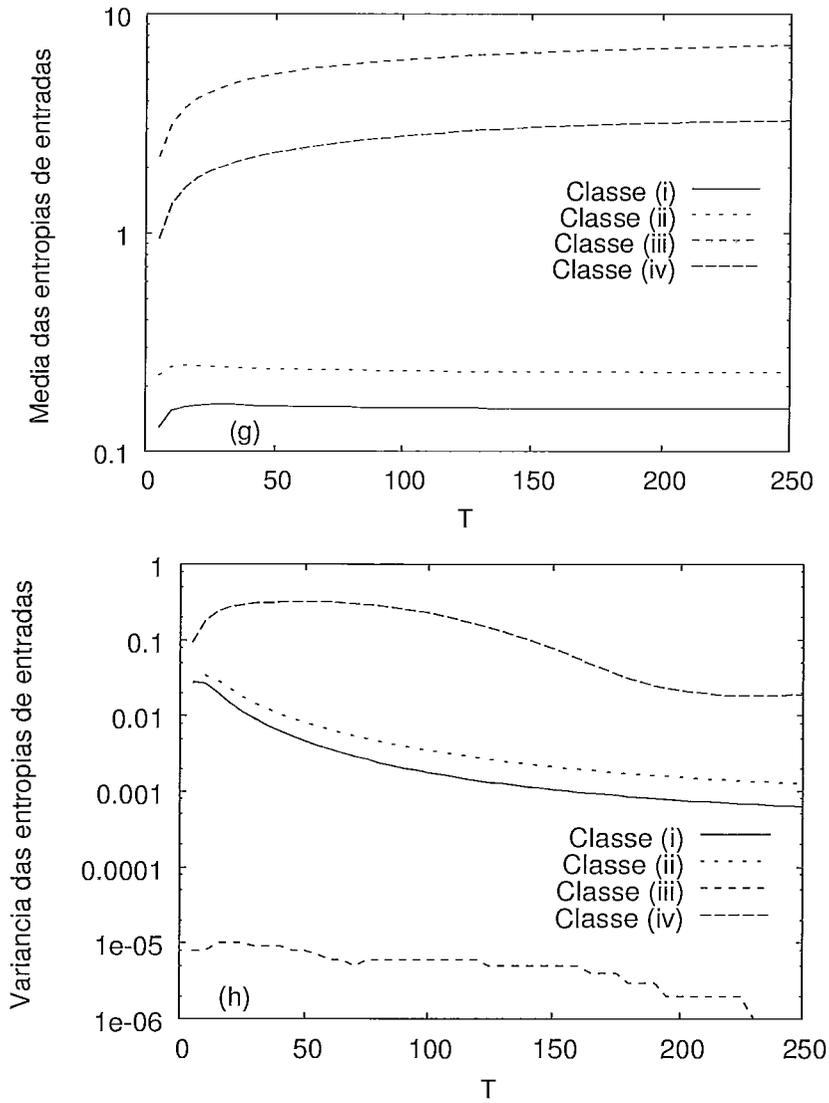


Figura 4.10: A média $\overline{C_f}$ e a variância $\sigma^2(C_f)$ da entropia de entradas centrada na célula como uma função de T sob quatro regras de atualização diferentes, uma para cada classe, de (i) até (iv), para $d = 2$, (30×30) células sob a vizinhança de Moore (g e h) e raios $r_1 = r_2 = 1$.

Tabela 4.1: Regras de atualização usadas para gerar as Figuras 4.3 a 4.10.

Experimento	Classe	Regra de atualização
$d = 1,$	(i)	1d000a20
$r_1 = 2,$	(ii)	01dc3610
Figuras 4.3 e 4.4	(iii)	994a6a65
	(iv)	6c1e53a8
$d = 1,$	(i)	1df00000000f00000000000000000020
$r_1 = 3,$	(ii)	7fdc3610fc48472c01dc361001dc3660
Figuras 4.5 e 4.6	(iii)	994f6a65994a6a65a94a6a65994a6a99
	(iv)	3b469c0ee4f7fa96f93b4d32b09ed0e0
$d = 2,$	(i)	00000601
$r_1 = r_2 = 1,$	(ii)	06900600
von Neumann,	(iii)	69969669, Fredkin2 [27]
Figuras 4.7 e 4.8	(iv)	6db6fac8, Crystal2 [27]
$d = 2,$	(i)	b3b6b7 s3s6s7s8
$r_1 = r_2 = 1,$	(ii)	b3 s2s5s6
Moore,	(iii)	b1b3b5 s1s3s5
Figuras 4.9 e 4.10	(iv)	b3 s2s3

Mesmo que estes primeiros experimentos sejam desprovidos de grande significado estatístico, considerando que estão baseados em execuções a partir de uma configuração inicial única, eles fornecem uma boa indicação da capacidade discriminatória da heurística centrada na célula. De fato, um exame de todos os gráficos de médias e variâncias nas Figuras 4.3 a 4.10 revela que, com poucas exceções, as classes (i) e (iv) podem, no pior caso, ser discriminadas dentro de uma ordem de grandeza através da média ou da variância da entropia de entradas centrada na célula para a maioria dos valores de T . Por exemplo, comparando as Figuras 4.3(a) e (b) temos a indicação de que a entropia média provê uma boa discriminação entre as quatro classes, exceto entre as classes (iii) e (iv), que entretanto podem ser facilmente separadas pela variância. As exceções são os casos bi-dimensionais com

vizinhança de Moore, na qual a heurística centrada na célula não parece ser capaz de capturar a distinção entre as classes (i) e (ii).

Retomamos esta discussão das capacidades discriminatórias mais adiante, após termos fornecido dados significativos. Retornando ao objetivo original destes experimentos iniciais, podemos observar pelas Figuras 4.3 a 4.10 que várias possibilidades existem para a escolha do valor de T . É importante ressaltar que escolhendo o menor valor possível tem a vantagem de aliviar as exigências de processamento para a computação da entropia. Considerando isso, optamos por usar $T = 25$.

Além dos resultados apresentados nas Figuras 4.3 a 4.10, mostramos nas Figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14, com a finalidade de complementar estes experimentos iniciais, alguns padrões espaço-temporais gerados a partir da evolução dos autômatos celulares baseados nas regras de atualização provenientes da Tabela 4.1. Em todos os casos, representamos o estado 0 pela cor branca e o estado um pela cor preta.

O primeiro conjunto de ilustrações corresponde a autômatos celulares infinitos, isto é, são mostrados os estados das células que contribuíram para o cálculo da entropia. Este conjunto é mostrado nas Figuras 4.11 e 4.12, respectivamente, para os casos uni e bi-dimensional.

Um segundo conjunto de padrões espaço-temporais é mostrado baseado na evolução das mesmas células, mas agora com fronteiras cilíndricas. Estes são mostrados nas Figuras 4.13 e 4.14, respectivamente para os casos uni e bi-dimensional. Estes padrões estão relacionados com os dados apresentados na Tabela 4.2. En-

tretanto, pudemos observar, através de comparação, que os mesmos valores foram obtidos para os padrões referentes aos casos infinitos.

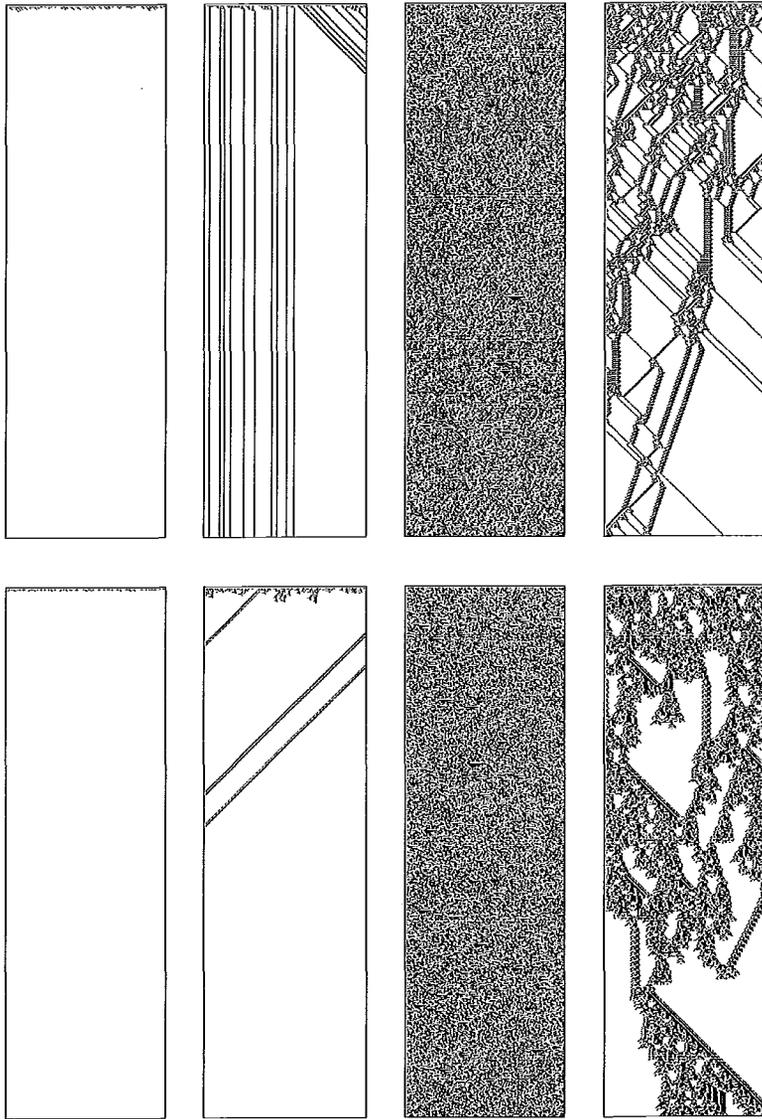


Figura 4.11: Padrões espaço-temporais para as regras de atualização apresentadas na Tabela 4.1, para $d = 1$ e infinito, com 150 células observadas ao longo de 500 passos de tempo. Cada caso mostra os estados das células horizontalmente para cada passo de tempo; sendo que o tempo aumenta do topo para baixo. O primeiro caso mostrado corresponde a $r_1 = 2$ e o segundo a $r_1 = 3$. Em cada linha, da esquerda para a direita, temos as regras de atualização pertencentes as classes (i)–(iv).

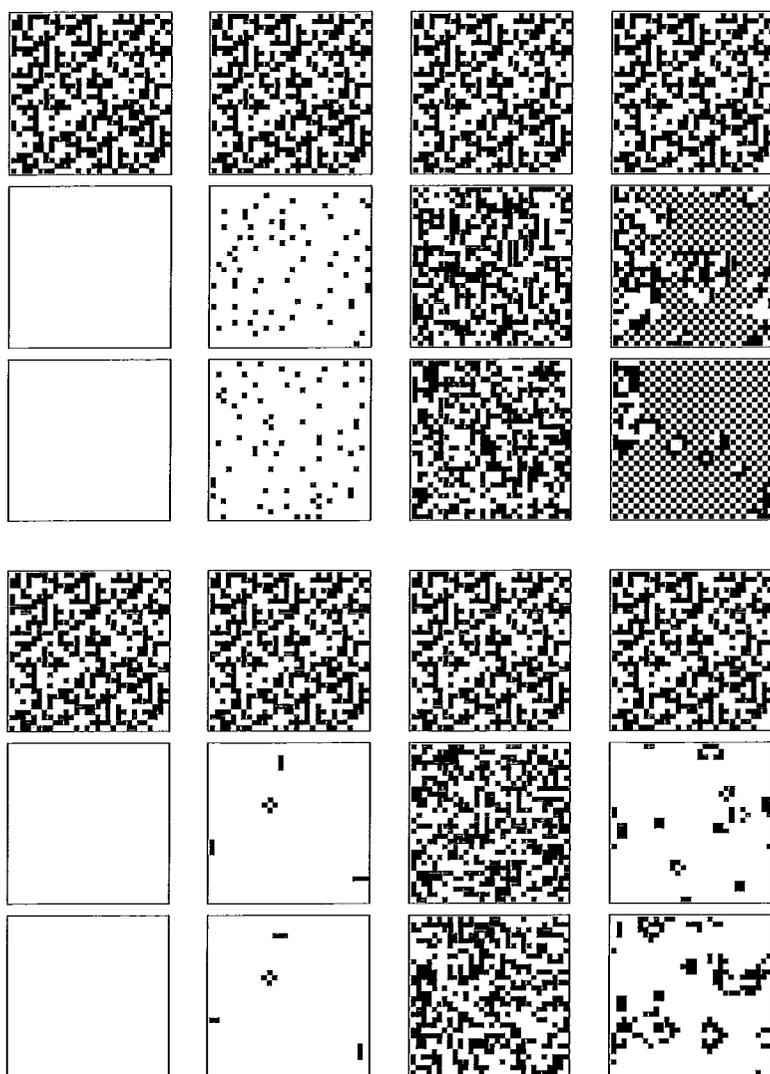


Figura 4.12: Padrões espaço-temporais para as regras de atualização apresentadas na Tabela 4.1, para $d = 2$ e infinito, com 30×30 células observadas. Cada quadro mostra uma configuração durante a evolução do autômato. Os quadros mais ao topo correspondem a regras de atualização de von Neumann e os quadros na parte inferior são relativos a regras de atualização de Moore. Em cada trio de linhas, a primeira linha corresponde a $t = 0$, a linha do meio a $t = 125$ e última corresponde a $t = 250$. Em cada coluna, da esquerda para a direita, está uma regra de atualização pertencente às classes (i)–(iv), respectivamente.

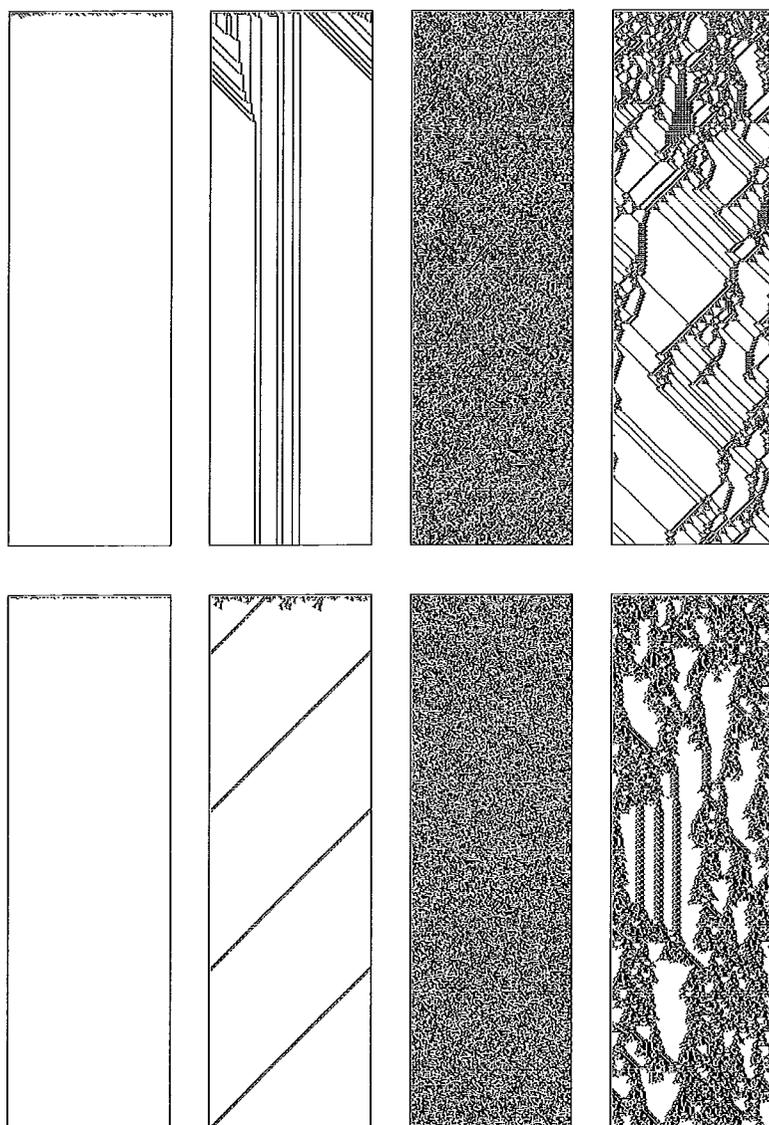


Figura 4.13: Padrões espaço-temporais para as regras de atualização apresentadas na Tabela 4.1, para $d = 1$ e cilíndrico, com 150 células observadas ao longo de 500 passos de tempo. Cada caso mostra os estados das células horizontalmente para cada passo de tempo; sendo que o tempo aumenta do topo para baixo. O primeiro caso mostrado corresponde a $r_1 = 2$ e o segundo a $r_1 = 3$. Em cada linha, da esquerda para a direita, temos as regras de atualização pertencentes as classes (i)–(iv).

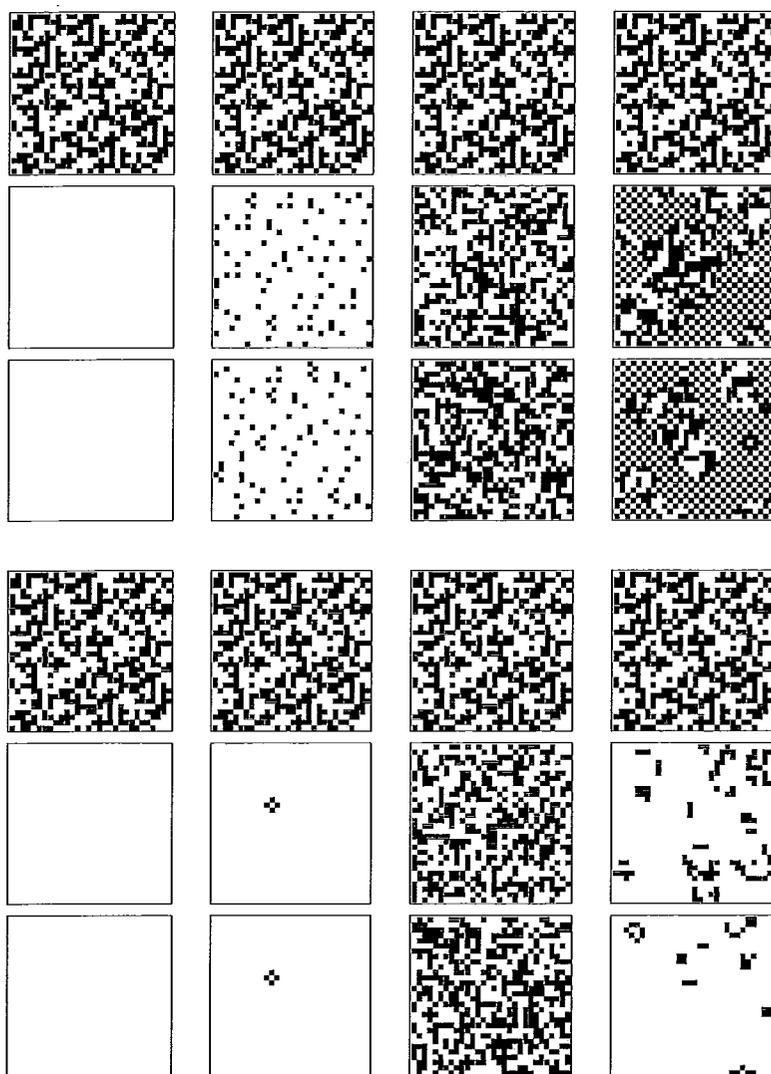


Figura 4.14: Padrões espaço-temporais para as regras de atualização apresentadas na Tabela 4.1, para $d = 2$ e cilíndrico, com 30×30 células observadas. Cada quadro mostra uma configuração durante a evolução do autômato. Os quadros mais ao topo correspondem a regras de atualização de von Neumann e os quadros na parte inferior são relativos a regras de atualização de Moore. Em cada trio de linhas, a primeira linha corresponde a $t = 0$, a linha do meio a $t = 125$ e última corresponde a $t = 250$. Em cada coluna, da esquerda para a direita, está uma regra de atualização pertencente às classes (i)–(iv), respectivamente.

Tabela 4.2: Médias e variâncias extraídas de uma média de 5 simulações com estados iniciais escolhidos aleatoriamente, com froteiras cilíndricas para $t_+ = 500$ e $T = 25$. Os experimentos foram organizados da seguinte forma: (I) $d = 1$, 150 células, $r_1 = 2$; (II) $d = 1$, 300 células, $r_1 = 2$; (III) $d = 1$, 150 células, $r_1 = 3$; (IV) $d = 1$, 300 células, $r_1 = 3$; (V) $d = 2$, vizinhança de von Neumann, 15×15 células, $r_1 = r_2 = 1$; (VI) $d = 2$, vizinhança de von Neumann, 30×30 células, $r_1 = r_2 = 1$; (VII) $d = 2$, vizinhança de Moore, 15×15 células, $r_1 = r_2 = 1$; (VIII) $d = 2$, vizinhança de Moore, 30×30 células, $r_1 = r_2 = 1$. As regras de atualização são aquelas dadas na Tabela 4.1, para as classes de (i) a (iv). Os números são truncados em cinco casas decimais.

Experimento	$\overline{C_f}$			
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
I	0,000419	0,004730	4,671842	2,726404
II	0,001030	0,023110	3,997883	2,396267
III	0,000170	0,685005	5,757584	3,195973
IV	0,000146	0,723408	5,755847	3,527819
V	0,000214	1,434876	3,692984	1,854994
VI	0,000245	1,543048	3,843658	1,506388
VII	0,066639	0,110987	4,268379	1,206355
VIII	0,134897	0,148938	4,431762	1,452313
	$\sigma^2(C_f)$			
	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
I	0,000039	0,000917	0,000102	0,442224
II	0,000251	0,009366	0,000273	0,250179
III	0,000010	0,003644	0,000166	0,749215
IV	0,000008	0,004534	0,000076	0,686746
V	0,000019	0,000068	0,000195	0,444950
VI	0,000023	0,000045	0,000058	0,721707
VII	0,010898	0,032257	0,000031	0,805210
VIII	0,009618	0,021399	0,000009	0,352702

4.3 Análise de resultados

A simulação em paralelo de um autômato celular é, em essência, o projeto de um algoritmo distribuído síncrono simples, da forma como está descrito em [4], empregando a técnica de α -sincronização [1]. Muitas referências sobre o assunto podem ser encontradas em [3, 7, 25]. Nosso simulador paralelo foi projetado e implementado dentro da mesma estrutura tanto para autômatos celulares uni-dimensionais quanto para os bi-dimensionais.

A infra-estrutura utilizada nos experimentos é composta de um *cluster* com oito computadores pessoais (PC's), tendo todos eles um processador Intel Pentium 4 de 1.8 GHz com 1 *gigabyte* de memória principal. Os oito computadores são interconectados por um *switch* gigabit-ethernet. O simulador foi desenvolvido completamente na linguagem C, utilizando a biblioteca de passagem de mensagens MPI (*Message Passing Interface*). Cada simulação é iniciada pelo particionamento do autômato nos $N = 8$ processadores disponíveis. Todos os processadores têm a capacidade de comunicação direta com todos os outros. Para $d = 1$, as células são particionadas entre os processadores de forma que cada processador receba um conjunto contíguo de células para simular; para $d = 2$, o autômato é subdividido em retângulos de células contíguas cortando-os ao longo das dimensões que têm o menor número de células.

A Figura 4.15 ilustra como a distribuição das células é feita para o caso bi-dimensional. Para cada processador, temos um conjunto de células contíguas

ao longo das duas dimensões. Além das células pertencentes àquele processador, também é necessário armazenar cópias das células vizinhas necessárias para o cômputo dos estados das células que residem na fronteira entre um processador e outro, em todas as dimensões, da forma como está representada pela linha pontilhada. Assim, antes da aplicação da regra de atualização, é necessário obter os estados das células vizinhas demarcadas. É importante ressaltar que o mesmo processo deve ocorrer para todos os processadores e nas duas dimensões. Outra observação importante diz respeito à maneira como as células fronteiriças do autômato são atualizadas. Temos, então, dois casos possíveis: no primeiro caso, escolhemos estados aleatórios para células complementares; no segundo caso, associamos os estados das células da base do autômato com as células do topo e as células mais à esquerda do processador P_1 com as células mais à direita do processador P_N , formando um torus.

É importante observar que a mesma relação de vizinhança entre as células estabelecida pelo reticulado que define o autômato celular é sustentada na vizinhança entre processadores. Isto é, dois processadores são vizinhos sempre que pelo menos uma célula que um deles abriga seja uma vizinha de uma célula alojada pelo outro.

A simulação propriamente começa em cada processador com a escolha aleatória do estado inicial para cada uma das células que este processador aloja e a troca de cópias dos estados iniciais das células que estão na fronteira entre um processador e outro conforme seja necessário. O processador então inicia as iterações à medida em que t é incrementado a partir de 0 até t_+ . Em cada iteração novos estados são

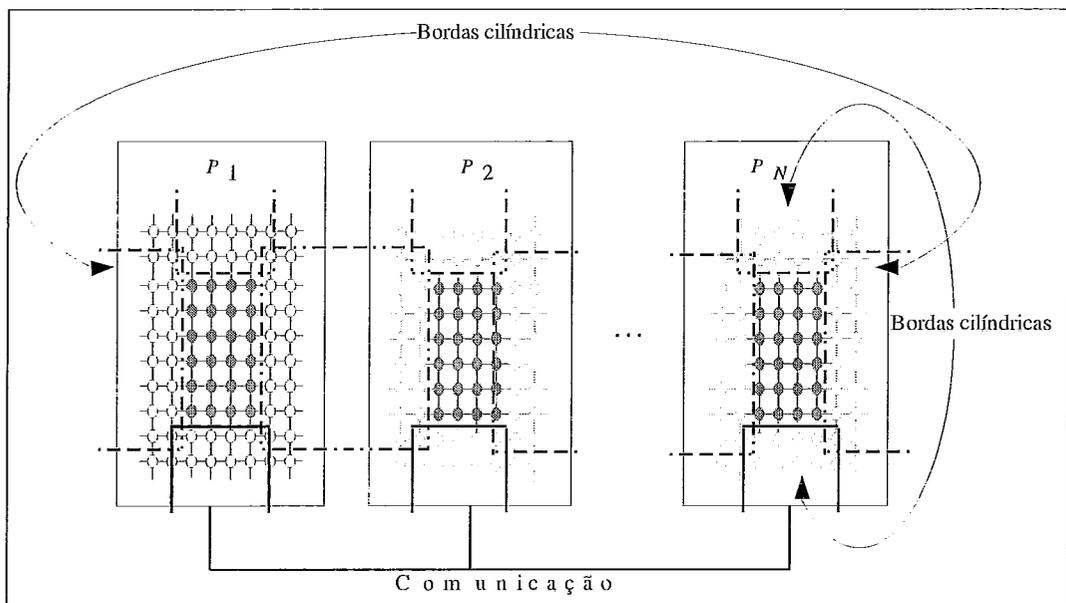


Figura 4.15: Distribuição de células de um autômato celular bi-dimensional ao longo de N processadores. Todos os processadores têm a capacidade de comunicação direta com todos os outros. Para $d = 2$, o autômato é subdividido em retângulos de células contíguas cortando-os ao longo das dimensões que têm o menor número de células. As células cujos estados são necessários para o cômputo dos estados das células que residem na fronteira entre um processador e outro são copiadas.

computados e cópias das células em fronteira são trocadas entre os processadores. Também são computadas as porções da entropia definida em (3.8) correspondente às células que estão sendo observadas. Ao final, cada processador que aloja pelo menos uma célula observada envia os seus $2(t_+ - T + 2)$ resultados de entropia para um processador mestre, previamente escolhido, para a computação da média e variância ($\overline{C_f}$ e $\sigma^2(C_f)$) globalmente.

Autômatos celulares uni-dimensionais

Nossa configuração para experimentos uni-dimensionais está baseada em $r_1 = 2$ ou $r_1 = 3$. Para $r_1 = 2$, temos $X_1 = 2000$, $t_+ = 500$, e $T = 25$. O número total de células para simular é então $X_1 + 2r_1t_+ = 4000$, assim o número de células observadas constitui metade do total. Para $r_1 = 3$, temos $X_1 = 2400$, $t_+ = 400$, e $T = 25$. Nesse caso, o número total de células na simulação é 4800, e mais uma vez as células observadas constituem metade do número total de células.

Nestes experimentos principais, o número de células a serem observadas foi escolhido baseado na capacidade de computação de nosso simulador, de forma que pudéssemos realizar todos os experimentos em um espaço de tempo razoável. Entretanto, é perfeitamente possível observar quantidades maiores ou menores de células, tanto em simulações de uma dimensão quanto de duas dimensões.

Considerando espaço de regras de atualização abordado no Capítulo 2 temos que, no caso uni-dimensional, o número de regras de atualização distintas é dado por $2^{2^{1+2r_1}}$, ou seja, 2^{32} para $r_1 = 2$ e 2^{128} para $r_1 = 3$. Nossos resultados estão

baseados em 50000 regras de atualização escolhidas aleatoriamente entre todas as possibilidades e são mostradas nas Figuras 4.16 e 4.17 como gráficos de variância $\sigma^2(C_f)$ contra a média $\overline{C_f}$. O ponto correspondente à regra de atualização unidimensional da Tabela 4.1 não é mostrado explicitamente, mas é destacado por indicação nas coordenadas da classe à qual a regra de atualização pertence.

Uma informação muito importante e que não foi mencionada nos gráficos das Figuras 4.16 e 4.17 diz respeito à densidade dos pontos em alguma região particular de média e variância. Discutimos sobre este assunto a seguir. Inicialmente, escolhemos para cada um dos gráficos um valor para a entropia média que separa as regras de atualização rotuladas (i) e (ii) daquelas rotuladas como (iii) e (iv). Nas Figuras 4.16 e 4.17, esta entropia média pode ser considerada como sendo 1. Selecionando esta partição de valores do gráfico em duas regiões e para cada uma agora selecionamos uma variância que pode ser usada para separar as regras de atualização rotuladas (i) e (ii) à esquerda, e outra que pode da mesma forma ser usada para regras rotuladas (iii) e (iv) à direita. Nossas escolhas são 0.001 e 0.1, respectivamente para os gráficos em 4.16 e 4.17. Ao final, em cada gráfico, temos uma partição em quatro regiões, cada uma contendo exatamente uma das regras de atualização definidas (i)–(iv).

Agora, podemos então fornecer as informações que faltavam. No gráfico em 4.16, 2.30% das regras de atualização estão dentro da região (i), 8.10% na região (ii), 86,96% na região (iii) e 2.64% na região (iv) e o gráfico em 4.17 não contém qualquer regra de atualização dentro da região (i), 0.80% das regras de atualização estão dentro da região (ii), 97.85% na região (iii), e 1.35% na (iv). Como pudemos

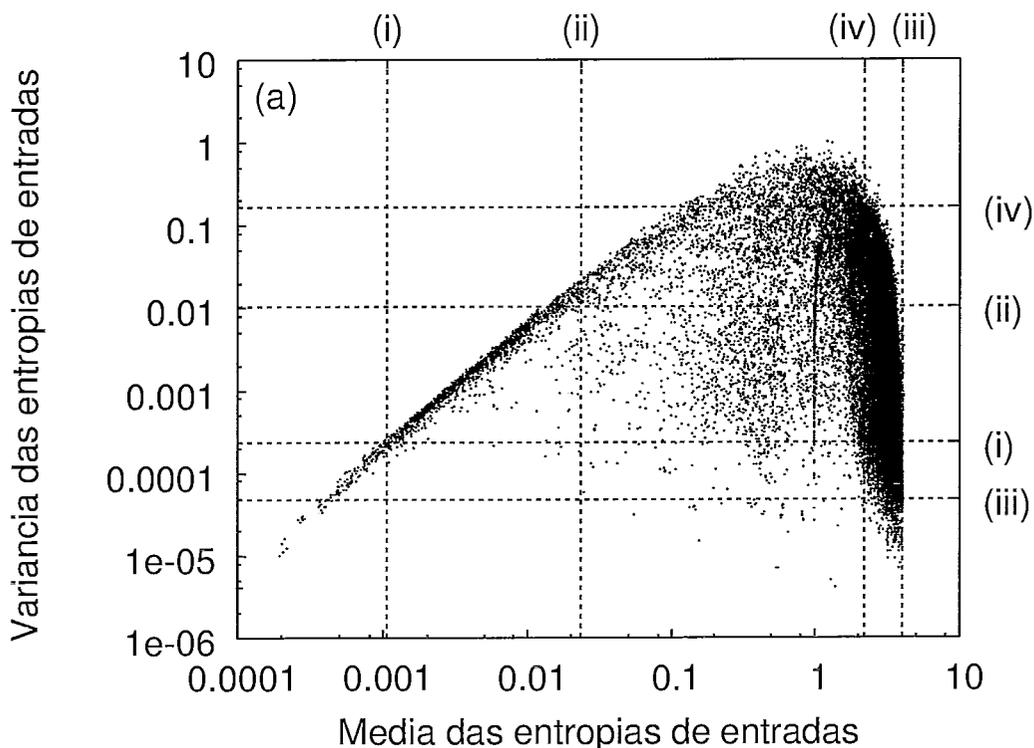


Figura 4.16: Ocorrência de pares de média-variância para autômatos celulares uni-dimensionais. Os dados são mostrados para a entropia de entradas centrada na célula com $r_1 = 2$ como gráfico de $\sigma^2(C_f)$ contra $\overline{C_f}$. O gráfico contém 50000 pontos, cada ponto corresponde a uma regra de atualização escolhida aleatoriamente e a uma média sobre 5 configurações iniciais escolhidas aleatoriamente. As regras de atualização uni-dimensionais da Tabela 4.1 também são mostradas no mesmo experimento, mas não como pontos e sim apontadas com uma indicação nas coordenadas das classes (i)–(iv) à qual elas pertencem.

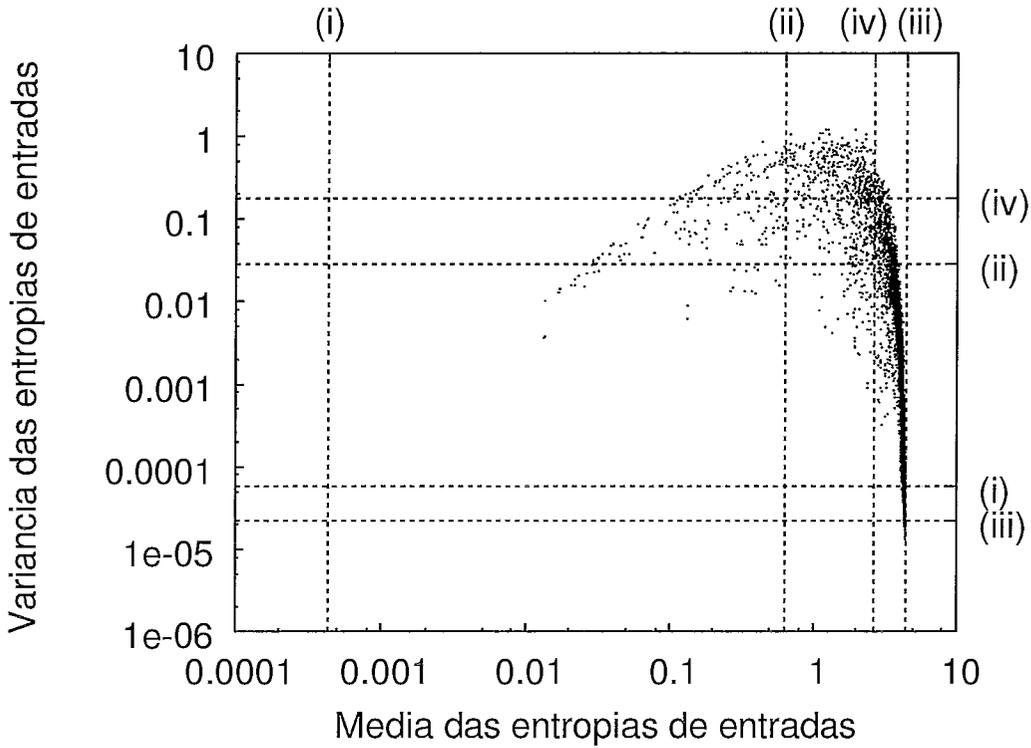


Figura 4.17: Ocorrência de pares de média-variância para autômatos celulares uni-dimensionais. Os dados são mostrados para a entropia de entradas centrada na célula com $r_1 = 3$ como gráfico de $\sigma^2(C_f)$ contra $\overline{C_f}$. O gráfico contém 50000 pontos, cada ponto corresponde a uma regra de atualização escolhida aleatoriamente e a uma média sobre 5 configurações iniciais escolhidas aleatoriamente. As regras de atualização uni-dimensionais da Tabela 4.1 também são mostradas no mesmo experimento, mas não como pontos e sim apontadas com uma indicação nas coordenadas das classes (i)–(iv) à qual elas pertencem.

observar, a já conhecida predominância das regras de atualização classe (iii), bem como a raridade das regras de atualização da classe (iv) são então confirmadas.

Autômatos celulares bi-dimensionais

Para os experimentos bi-dimensionais usamos $r_1 = r_2 = 1$ em todos os casos. Também, independente do tipo de vizinhança (von Neumann ou Moore), nossos experimentos têm $X_1 = X_2 = 100$, $t_+ = 50$, e $T = 25$. O número total de células a ser simulado é portanto $(X_1 + 2r_1t_+)(X_2 + 2r_2t_+) = 40000$, assim o número de células observadas é um quarto do número total de células.

Mais uma vez aludindo ao espaço de regras abordado no Capítulo 2, temos que no caso bi-dimensional com vizinhança de von Neumann existem $2^{2^{1+2(r_1+r_2)}} = 2^{32}$ regras de atualização distintas. Ao considerarmos a vizinhança de Moore e também somente regras de atualização totalísticas, o número de regras de atualização distintas é $2^{2^{(1+2r_1)(1+2r_2)}} = 2^{18}$. Outra vez, nos dois casos, nossos resultados são baseados em 50000 regras de atualização escolhidas aleatoriamente nos conjuntos correspondentes. É importante observar que restringir as regras de atualização da vizinhança de Moore dentro do conjunto de regras de atualização totalísticas é um meio de assegurar que estas 50000 amostras tenham alguma representatividade estatística. Na ausência desta restrição, o número de possíveis regras de atualização torna-se $2^{2^{(1+2r_1)(1+2r_2)}}$. Este número, com valores para r_1 e r_2 como havíamos adotado, é 2^{512} , que é maior por cem ordens de magnitude que o número de regras de atualização distintas em qualquer dos outros experimentos.

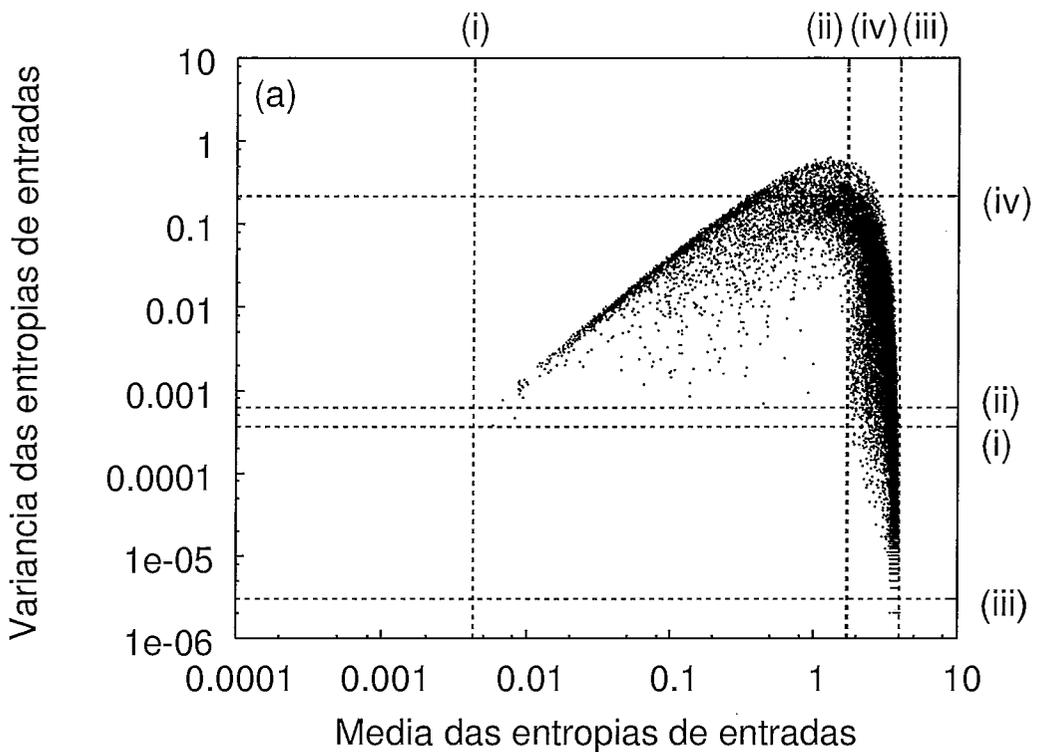


Figura 4.18: Ocorrência de pares média-variância dentro de um conjunto de experimentos para autômatos celulares bi-dimensionais. Os dados são mostrados para a entropia de entradas centrada na célula sob a vizinhança de von Neumann como gráfico de $\sigma^2(C_f)$ contra $\overline{C_f}$. O gráfico contém 50000 pontos, cada ponto corresponde a uma regra de atualização escolhida aleatoriamente. As regras de atualização bi-dimensionais da Tabela 4.1 também são apresentadas como uma indicação nas coordenadas da classe (i)–(iv) a qual elas pertencem.

Os dois casos são mostrados nas Figuras 4.18 e 4.19 no mesmo estilo que as Figuras 4.16 e 4.17, ou seja, as indicações marginais (i)–(iv) fornecem as coordenadas cujos pontos correspondem às regras de atualização para autômatos celulares bi-dimensionais da Tabela 4.1. A Figura 4.18 refere-se a vizinhança de von Neumann e a Figura 4.19 refere-se a vizinhança de Moore.

Uma vez mais, as informações adicionais referentes à densidade de pontos nos

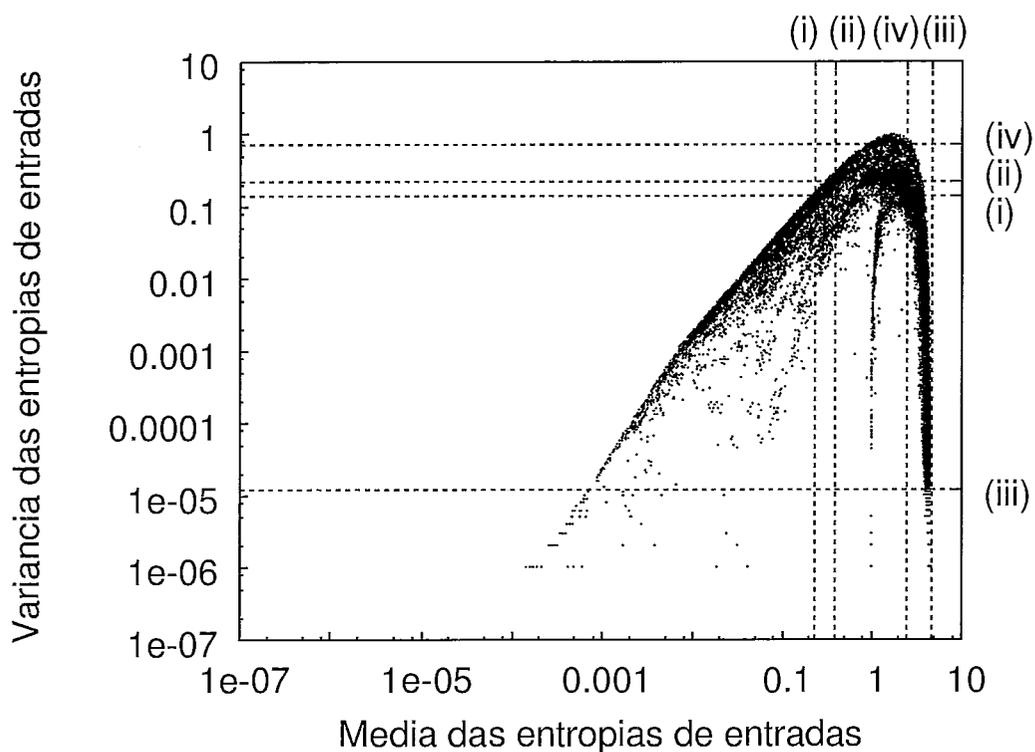


Figura 4.19: Ocorrência de pares média-variância dentro de um conjunto de experimentos para autômatos celulares bi-dimensionais. Os dados são mostrados para a entropia de entradas centrada na célula sob a vizinhança de Moore como gráfico de $\sigma^2(C_f)$ contra $\overline{C_f}$. O gráfico contém 50000 pontos, cada ponto corresponde a uma regra de atualização escolhida aleatoriamente. As regras de atualização bi-dimensionais da Tabela 4.1 também são apresentadas como uma indicação nas coordenadas da classe (i)–(iv) a qual elas pertecem.

gráficos são postergadas de forma a seguirmos a mesma metodologia que empregamos nos experimentos uni-dimensionais. Seguindo os mesmos passos, primeiro selecionamos um valor de entropia média para cada gráfico afim de separar as regras de atualização rotuladas como (i) ou como (ii) daquelas rotuladas como (iii) ou (iv), e em seguida selecionamos um valor de variância para separar cada par de regras de atualização rotuladas. Como os gráficos nas Figuras 4.18 e 4.19 indicam, pode ser uma tarefa mais difícil que nos casos uni-dimensionais, uma vez que agora é mais comum encontrar dois ou mais rótulos juntos ao longo de um eixo. Começamos com a Figura 4.18, que se refere a entropia de entradas centrada na célula sob a vizinhança de von Neumann. Se selecionarmos 1.73 como o primeiro separador, e então selecionarmos 0.0005 a esquerda e 0.1 a direita, então não teremos nenhuma regra de atualização dentro da região da classe (i), enquanto 7.92% das regras de atualização estão na região de classe (ii), 90.47% na região de classe (iii), e 1.61% na região classe (iv). Considerando a Figura 4.19, selecionamos os separadores 1, 0.007, e 0.1, que revelam as porcentagens 4.42%, 12.08%, 77.19%, e 6.31%, respectivamente para as regiões (i)–(iv), em relação a entropia de entradas centrada na célula sob a vizinhança de Moore. Como no caso uni-dimensional, as indicações são de que, mais uma vez, temos a referência clara da predominância relativa de regras de classe (iii) e raridade das regras de classe (iv).

4.4 Discussão

Os dados mostrados nas Figuras 4.16 a 4.19, respectivamente para autômatos celulares uni e bi-dimensionais, tendem a exibir o seguinte comportamento em relação às classes (i)–(iv). Quando demonstrados em escala logarítmica dupla, eles aparecem, a grosso modo, agrupados como um bumerangue cuja transversal, onde estão localizados os menores valores das médias e variâncias, nos leva às regras de atualização de classe (i), depois as de classe (ii), as de classe (iv), próxima ao arqueamento médio, e finalmente as de classe (iii) depois do arqueamento. As médias de entropias crescem com taxas variadas ao longo da transversal, enquanto as variâncias crescem inicialmente, mas caem novamente depois do arqueamento médio.

Os casos uni-dimensionais, descritos nas Figuras 4.16 e 4.17, indicam inequivocamente que as oito regras de atualização uni-dimensionais da Tabela 4.1 podem ser separadas por pelo menos uma ordem de magnitude da entropia média ou da variância, na maioria dos casos podem ser separadas por ambos. Enquanto o mesmo acontece com o caso mostrado na Figura 4.18, que se refere à entropia de entradas centrada na célula sob a vizinhança de von Neumann, o caso remanescente, Figura 4.19, precisa ser examinado mais detalhadamente. Este caso, no qual a entropia de entradas ainda é utilizada mas agora sob a vizinhança de Moore, pode ser confundido, desta vez entre as classes (ii) e (iv).

Esta tendência referente ao caso na Figura 4.19, diz respeito às misturas entre as classes (i) e (ii) quando uma vizinhança de Moore é usada. Nossa expectativa

de que a classificação de Wolfram continue valendo para os casos bi-dimensionais estão embasadas nas próprias investigações de Wolfram sobre autômatos celulares bi-dimensionais [22], mas isto tem sido contestado pela hipótese de que o esquema de classificação é falho no reconhecimento do comportamento complexo em regras de atualização totalísticas bi-dimensionais, onde são encontradas as estruturas denominadas *gliders*, isto é, as estruturas que são vistas “deslizando” através do reticulado bi-dimensional à medida em que o tempo passa [9, 10]. Se este é o caso, então o problema em questão não é a mistura das classes (i) e (ii), mas a separação entre elas, pois como nenhuma das duas exibe *gliders*, elas deveriam portanto ser classificadas da mesma maneira, isto é, em uma única classe.

Entretanto, além desses pequenos conflitos e independente de qual tendência prevaleça, compreendemos os resultados dos nossos experimentos, como mostrado nas Figuras 4.16 a 4.19, como o desenvolvimento de uma metodologia ampla para a classificação das regras de atualização dos autômatos celulares, que em muitos sentidos confirma as conclusões iniciais de [32].

Antes de mais nada, temos um exame das entropias médias diante dos limites fornecidos em (3.13) através de (3.14). Para os casos uni-dimensionais, (3.13) diz que nenhuma média de entropia de entradas centrada na célula vai além de $1 + 2r_1$, enquanto estipula $1 + 2(r_1 + r_2)$ como sendo o valor máximo para o caso bi-dimensional sob a vizinhança de von Neumann. Assim, o limite superior é 5 no caso na Figura 4.16, 7 para o caso na Figura 4.19, e 5 para Figura 4.18. O valor mais próximo dado por (3.14) para as regras de atualização totalísticas sob a vizinhança

de Moore produzem aproximadamente 6.87 para a Figura 4.19¹. É importante apontar que nenhuma das 50000 regras de atualização escolhidas aleatoriamente chegou próxima do seu limite. Talvez isto seja devido à dificuldade de amostragem de uma regra de atualização cuja entropia média vem suficientemente próxima ao limite, mas o fato que permanece é que comparando a entropia média de uma regra de atualização ao seu conhecido limite superior pode ser uma pequena ajuda no que tange a classificação da regra de atualização.

Além deste teste inicial com enfoque nos limites superiores conhecidos, o que permanece da metodologia mencionada anteriormente é, essencialmente, a construção de relacionamentos entre regras de atualização dadas as suas entropias médias e variâncias, utilizando a abordagem relativizada. O ponto essencial aqui é que a classificação é um produto da comparação, daí a importância fundamental das regras de atualização como as apresentadas na Tabela 4.1, para as quais somos capazes de fornecer um classificação desejada a priori, desta forma, elas têm o potencial de ser utilizadas como sementes nos processos de classificação mais amplos.

¹Pode não ser imediata a visualização dos valores nas figuras, devido à escala logarítmica, mas nós os conhecemos de nossos arquivos.

Capítulo 5

Considerações finais

Nesse trabalho, nós abordamos a classificação automática de autômatos celulares. Nosso ponto de partida foi o conceito de entropia de entradas sobre o qual desenvolvemos nossa heurística de entropia de entradas centrada na célula, com o objetivo de classificar as regras de atualização de autômatos celulares simulados em paralelo, utilizando para tal simulação o modelo de troca de mensagens. Para nossa nova medida de entropia centrada na célula, vários experimentos foram realizados para autômatos uni e bi-dimensionais dentro do nosso contexto de classificação: as quatro classes de Wolfram. Os resultados destes experimentos provaram que essa nova heurística para a classificação das regras de atualização nas quais os autômatos celulares se baseiam possui capacidade discriminatória satisfatória no caso uni-dimensional, enquanto no caso bi-dimensional, ela também pode ser considerada um bom discriminador, mas além disso, pode colaborar com as sugestões de outros autores de que um esquema de classificação melhor é necessário.

Os resultados dos nossos experimentos foram produzidos a partir de uma im-

plementação em paralelo em *cluster* de um simulador com um módulo embutido, utilizado para computar a entropia de entradas centrada na célula.

No *cluster*, cada um dos oito experimentos principais do Capítulo 4 compreendia 5 execuções independentes, com estados iniciais aleatórios, para cada uma das 50000 regras de atualização, também escolhidas aleatoriamente. Estes experimentos levaram entre quatro a seis dias, aproximadamente, para ser concluídos, dependendo da categoria das regras de atualização em questão. Isto é, uni-dimensional com dois raios possíveis, bi-dimensional sob a vizinhança de von Neumann e bi-dimensional sob a vizinhança de Moore.

Considerando o fato de que estamos simulando autômatos celulares infinitos, como foi explicado no início do Capítulo 4, temos então uma fonte de desequilíbrio de carga considerável entre os processadores. Como nosso objetivo era testar a capacidade discriminatória de nossa heurística, nós não demos a atenção necessária para esta questão. Entretanto, reconhecemos a necessidade de uma maior atenção a esta questão ao simular autômatos celulares em larga escala se o impacto de limites infinitos forem considerados.

Existem dois tipos de desequilíbrio de carga a serem considerados. O primeiro está no fato de que somente aqueles processadores que alojam células observadas fazem computação relacionada ao cálculo de entropia, isto é, quanto mais células observadas tiver um processador, maior o volume de computação ele deve ter. O segundo tipo de desequilíbrio é consequência das células que não são observadas, mas que são necessárias para prover a ilusão de um autômato celular infinito. Na

verdade, estas células não precisam ser simuladas mais que T_+ passos de tempo; e à medida que o tempo passa, menos células que não são observadas precisam ser simuladas, como explicamos na Seção 4.1. Uma vez que estes desequilíbrios de carga são considerados, é possível utilizar uma vasta gama de políticas para promover um balanceamento de carga mais satisfatório.

Um outro aspecto importante a respeito do desempenho da simulação e que merece consideração é a real necessidade de ter todo o processamento extra, necessário para prover a abstração de um autômato celular infinito. Certamente, esta abordagem parece ser a mais indicada quando um novo esquema de classificação está sendo colocado à prova. Entretanto, uma vez que tal novo esquema seja estabelecido, talvez o uso da abstração de autômato infinito possa ser descartado e bordas cilíndricas possam ser utilizadas. Nós fizemos alguns experimentos com essa proposta em mente e os resultados obtidos, mostrados na Tabela 4.2, revelaram que nossa heurística centrada na célula manteve a mesma capacidade discriminatória encontrada nos resultados dos experimentos do Capítulo 4, mesmo que, ocasionalmente, os valores das médias e variâncias encontrados não fossem exatamente os mesmos, por consequência das diferentes quantidades de células das duas abordagens. De fato, se observarmos as Figuras 4.13 e 4.14, que mostram os modelos espaço-temporais de alguns autômatos celulares com bordas cilíndricas, vemos que as mesmas características que associamos às classes (i) a (iv) são encontradas, independente da periodicidade artificial que aparece em alguns casos em consequência do uso de bordas finitas. Entretanto, esta periodicidade não parece ter qualquer efeito na entropia

de entradas centrada na célula, como pode ser mostrado na Tabela 4.2. Uma consequência imediata deste fato é que autômatos celulares consideravelmente grandes podem ser simulados com o mesmo esforço global de processamento, otimizando assim o balanço de carga discutido anteriormente. Da mesma forma, a simulação de autômatos celulares bi-dimensionais com valores maiores para t_+ torna-se mais viável, o que pode nos levar a um maior esclarecimento a respeito da mistura entre as classes (ii) e (iv), aludida na Seção 4.4, na classificação de autômatos celulares bi-dimensionais sob a vizinhança de von Neumann.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Awerbuch. Complexity of network synchronization. *Journal of the ACM*, 32:804–823, 1985.
- [2] S. Bandini, G. Mauri, and R. Serra. Cellular automata: from a theoretical parallel computational model to its application to complex systems. *Parallel Computing*, 27:539–553, 2001.
- [3] V. C. Barbosa. *Massively Parallel Models of Computation*. Ellis Horwood, Chichester, UK, 1993.
- [4] V. C. Barbosa. *An Introduction to Distributed Algorithms*. The MIT Press, Cambridge, MA, 1996.
- [5] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, volume 2. Academic Press, London, UK, 1982.
- [6] G. Braga, G. Cattaneo, P. Flocchini, and C. Quaranta Vogliotti. Pattern growth in elementary cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 145:1–26, 1995.
- [7] P. Brinch Hansen. Parallel cellular automata: a model program for computational science. *Concurrency: Practice and Experience*, 5:425–448, 1993.

- [8] J.-C. Dubacq, B. Durand, and E. Formenti. Kolmogorov complexity and cellular automata classification. *Theoretical Computer Science*, 259:271–285, 2001.
- [9] D. Eppstein. Searching for spaceships. In R. J. Nowakowski, editor, *More Games of No Chance*, pages 433–453. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [10] D. Eppstein. Which “Life”-like systems have gliders? <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/ca>, weblink.
- [11] M. Gardner. Mathematical games: the fantastic combinations of John Conway’s new solitaire game ‘Life’. *Scientific American*, 223:120–123, 1970.
- [12] J. E. Hanson and J. P. Crutchfield. Computational mechanics of cellular automata: an example. *Physica D*, 103:169–189, 1997.
- [13] A. Ilachinski. *Cellular Automata*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [14] J. Kari. The nilpotency problem of one-dimensional cellular automata. *SIAM Journal on Computing*, 21:571–586, 1992.
- [15] J. Kari. Rice’s theorem for the limit sets of cellular automata. *Theoretical Computer Science*, 127:229–254, 1994.
- [16] M. Kutrib, R. Vollmar, and Th. Worsch. Introduction to the special issue on cellular automata. *Parallel Computing*, 23:1567–1576, 1997.
- [17] C. G. Langton. Computation at the edge of chaos: phase transitions and emergent computation. *Physica D*, 42:12–37, 1990.

- [18] M. Li and P. Vitányi. *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*. Springer-Verlag, New York, NY, second edition, 1997.
- [19] M. Markus, T. Hahn, and I. Kusch. A novel quantification of cellular automata. *Parallel Computing*, 23:1635–1642, 1997.
- [20] M. Mitchell, J. P. Crutchfield, and P. T. Hraber. Dynamics, computation, and the “edge of chaos”: a re-examination. In G. Cowan, D. Pines, and D. Meltzer, editors, *Complexity: Metaphors, Models, and Reality*, pages 497–513. Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [21] M. Mitchell, P. T. Hraber, and J. P. Crutchfield. Revisiting the edge of chaos: evolving cellular automata to perform computations. *Complex Systems*, 7:89–130, 1993.
- [22] N. H. Packard and S. Wolfram. Two-dimensional cellular automata. *Journal of Statistical Physics*, 38:901–946, 1985.
- [23] J. E. Savage. *Models of Computation*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.
- [24] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.*, 27:379–423, 1948.
- [25] D. Talia. Cellular processing tools for high-performance simulation. *Computer*, 33:44–52, 2000.
- [26] J. von Neumann. *Theory of Self-Reproducing Automata*. University of Illinois Press, Urbana, IL, 1966.

- [27] M. Wójtowicz. Cellular automata rules lexicon. http://psoup.math.wisc.edu/mcell/ca_rules.html, weblink.
- [28] S. Wolfram. Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55:601–644, 1983.
- [29] S. Wolfram. Universality and complexity in cellular automata. *Physica D*, 10:1–35, 1984.
- [30] S. Wolfram. *Cellular Automata and Complexity*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.
- [31] S. Wolfram. *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Champaign, IL, 2002.
- [32] A. Wuensche. Classifying cellular automata automatically: finding gliders, filtering, and relating space-time patterns, attractor basins, and the Z parameter. *Complexity*, 4:47–66, 1999.
- [33] A. Wuensche and M. Lesser. *The Global Dynamics of Cellular Automata*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.