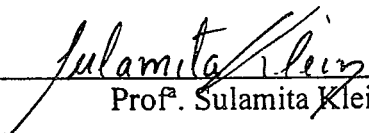


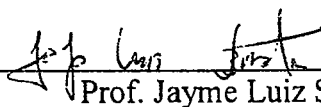
# REPRESENTAÇÕES PARA PARES MODULARES DE UM GRAFO

Noemi Costa dos Santos

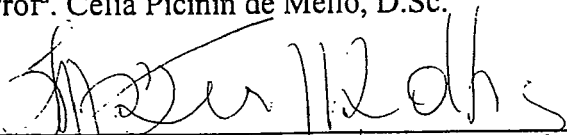
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

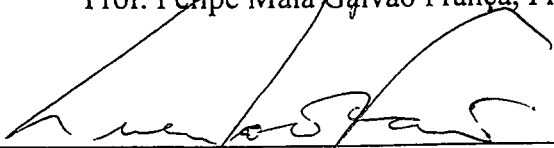
  
Prof.<sup>a</sup> Sulamita Klein, D.Sc.

  
Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

  
Prof.<sup>a</sup> Célia Picinin de Mello, D.Sc.

  
Prof. Fábio Protti, D.Sc.

  
Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.

  
Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2006

SANTOS, NOEMI COSTA DOS

Representações para Pares Modulares de  
um Grafo [Rio de Janeiro] 2006

XII, 159. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2006)

Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1 - Pares modulares

2 - Ideais e conjuntos parcialmente ordenados

3 - Pares modulares de cografos

4 - Pares modulares de grafos  $P_4$ -esparsos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*Ao meu marido,  
minha filhinha e meus pais:  
meus tesouros incalculáveis*

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus, o único que é digno de receber a honra e a glória, a força e o poder. Ao Deus eterno, imortal, invisível mas real, que me deu força e me sustentou a cada dia. Sem Ele, eu nada seria e nada faria.

Ao meu marido Cláudio, meu primeiro e único amor, por sua compreensão, paciência e apoio, por seu cuidado constante e por seu amor, que creio estar se renovando e fortalecendo com a vinda de nossa primeira filhinha Débora, o maior presente da minha vida.

Aos meus pais, pelo incentivo, apoio, exemplo, não pensando duas vezes em se sacrificar por mim. Mesmo quando pensava em retroceder, sempre encontrava um porto seguro no olhar de meus pais. Pai, obrigada por sempre me dizer que eu era "franco atiradora": eu acertei a todos os alvos porque o senhor estava do meu lado. Te amo!

À Prof<sup>a</sup>. Sulamita Klein, por toda a sua compreensão, por sua paciência constante comigo, sempre me auxiliando nas demonstrações (muitas vezes confusas) e me dando dicas inestimáveis. Sula, eu não tive apenas uma orientadora, tive uma amiga. Obrigada por tudo...

Ao Prof. Jayme Szwarcfiter, por sua generosidade, paciência e segurança, sempre me auxiliando com suas sugestões preciosíssimas.

Aos Profs. Luerbio Faria e Fábio Protti, por todo o apoio e auxílio constantes durante todo esse doutorado. Obrigada! À Prof<sup>a</sup>. Célia Picinin de Mello, por ter me dado uma direção no estudo dos grafos contendo  $P_4$  e toda a sua boa vontade e gentileza.

Ao Prof. Felipe França, além de Sulamita, Jayme, Luérbio, Fábio e Célia, por aceitarem fazer parte desta banca, reunindo valor inestimável a esse trabalho.

Aos meu amigos e parceiros de pesquisa, Priscila, Danilo, Raquel e Rafael, por todo o seu auxílio, parceria e companheirismo. Vocês são muito especiais...

Por fim, aos professores, funcionários e colegas da COPPE-Sistemas, obrigada por toda a sua boa vontade e coleguismo.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## REPRESENTAÇÕES PARA PARES MODULARES DE UM GRAFO

Noemi Costa dos Santos

Agosto/2006

Orientadores: Sulamita Klein

Jayme L. Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um par modular num grafo  $G$  é um par  $\{Q_1, Q_2\}$  de subconjuntos disjuntos de vértices de  $G$  tais que cada vértice em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_j$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices, para  $j = 1, 2$ ,  $|Q_1| \geq 1$  e  $|Q_2| \geq 1$ . Neste trabalho, consideramos o problema de representar e listar os pares modulares de um grafo.

Inicialmente, mostramos uma representação para os pares modulares de um grafo, em termos de ideais de certos conjuntos parcialmente ordenados. Em seguida, utilizamos a decomposição modular, que é um tipo de decomposição em grafos, para, primeiramente, representar os pares modulares de cografos e, em seguida, apresentar um algoritmo de tempo polinomial para listar todos os pares modulares não básicos de grafos  $P_4$ -esparsos (que são os grafos tais que todo conjunto de cinco vértices induz no máximo um  $P_4$ ) e, em particular, de grafos  $P_4$ -reduzíveis (que são os grafos tais que nenhum de seus vértices pertence a mais de um  $P_4$  induzido).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## REPRESENTATIONS FOR THE MODULAR PAIRS OF A GRAPH

Noemi Costa dos Santos

August/2006

Advisors: Sulamita Klein

Jayme L. Szwarcfiter

Department: Systems Engineering and Computer Science

A modular pair in a graph  $G$  is a pair  $\{Q_1, Q_2\}$  of disjoint sets of vertices in  $G$  such that each vertex of  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  is adjacent either to all vertices of  $Q_j$  or to none of them, for  $j = 1, 2$ ,  $|Q_1| \geq 1$  and  $|Q_2| \geq 1$ . In this work we consider the problem of representing and listing the modular pairs of a graph.

Initially, we give a representation for the modular pairs of a graph in terms of ideals of certain partially ordered sets. Next, we use modular decomposition, which is a kind of graph decomposition, to represent the modular pairs of cographs. After, we present a polynomial algorithm to list all the non trivial modular pairs of a  $P_4$ -sparse graph (which is a graph such that no set of five vertices induces more than one  $P_4$ ) and, in particular, of a  $P_4$ -reducible graph (which is a graph such that no vertex belongs to more than one  $P_4$ ).

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Definições Básicas . . . . .	5
1.1.1	Grafos . . . . .	5
1.1.2	Digrafos . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>12</b>
2.1	Módulos e Pares Modulares . . . . .	12
2.2	Representação de Módulos de um Grafo . . . . .	15
2.3	Decomposição Modular . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Pares Modulares e Ideais</b>	<b>23</b>
3.1	Construção . . . . .	23
3.2	Representação de Pares Modulares por Ideais . . . . .	33
3.3	Um exemplo da Representação para Pares Modulares . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Uma Representação para Pares Modulares de um Cografo</b>	<b>50</b>
4.1	Introdução . . . . .	50
4.2	Cografos . . . . .	52
4.3	Procedimento para Pares Modulares de um Cografo . . . . .	55
4.4	Uma Representação para Pares Modulares de um Cografo . . . . .	60
4.5	Complexidade . . . . .	72



4.6	Um Exemplo do Procedimento . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Pares Modulares de Grafos <math>P_4</math>-Esparsos</b>	<b>75</b>
5.1	Introdução . . . . .	75
5.2	Propriedades e Caracterizações . . . . .	77
5.3	Pares Modulares de Grafos $P_4$ -esparsos . . . . .	82
5.4	Uma Representação para Pares Modulares de Grafos $P_4$ -esparsos	92
5.5	Um Exemplo do Algoritmo . . . . .	140
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>144</b>
<b>A</b>	<b>Apêndice - Algoritmos em Grafos</b>	<b>147</b>
A.1	Algoritmo de Reconhecimento de Grafos $P_4$ -Esparsos e $P_4$ - Redutíveis . . . . .	147
A.2	Algoritmo Par Homogêneo . . . . .	151
	Bibliografia . . . . .	156

# Lista de Figuras

2.1	Alguns exemplos de módulos de um grafo $G$ : $\{1, 2\}$ , $\{1, 4\}$ , $\{1, 2, 4\}$ e $\{6, 7\}$ . . . . .	14
2.2	Grafo $G$ contendo um módulo $M$ . . . . .	16
2.3	Exemplo de uma ordem $P$ e seus ideais $I_1 = \{x_1\}$ , $I_2 = \{x_1, x_2\}$ , $I_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ , $I_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , $I_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ e $I_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ . . . . .	16
2.4	Exemplo para a construção do digrafo modular. . . . .	18
2.5	Digrafo e a ordem modular de $G$ relativos ao vértice $v_i = 2$ . . . . .	18
2.6	Um módulo vizinhança $M = V(G)$ e seus submódulos maximais. . . . .	21
2.7	Árvore de decomposição modular de um grafo $G$ . . . . .	21
3.1	Representação de um grafo $G$ contendo um par modular $\{Q_1, Q_2\}$ . . . . .	25
3.2	$\{Q_1, Q_2\}$ é par modular de $G$ se, e somente se, também é par modular de $\overline{G}$ . . . . .	26
3.3	Exemplo de grafo $G$ para a construção de um digrafo par modular. . . . .	29
3.4	Digrafo par modular $D_{i,j}$ . . . . .	30
3.5	Ordem par modular $P_{i,j}$ . . . . .	31
3.6	Existência de uma aresta que parte do componente $S(z)$ para o componente $S(y)$ em $D_{i,j}$ . . . . .	37
3.7	Exemplo de grafo $G$ para os resultados do Teorema 3.2. . . . .	45

3.8	Digrafo par modular $D_{i,j}$ . . . . .	46
3.9	Ordem par modular associada ao digrafo. . . . .	47
4.1	Exemplo de um cografo $G$ . . . . .	55
4.2	Co-árvore de um cografo $G$ . . . . .	55
4.3	Procedimento Par Modular para Cografos. . . . .	61
4.4	1ª possibilidade: Nem todos os filhos de $r_{l+k}$ são selecionados. . . . .	62
4.5	2ª possibilidade: No passo 1 do procedimento, nem todos os filhos de $r_l$ foram selecionados. . . . .	63
4.6	3ª possibilidade: O nó $r_l$ não é a raiz da co-árvore $T(G)$ . . . . .	64
4.7	1ª afirmação: Existe pelo menos um filho de $r_l$ que contém vértices tanto de $Q_1$ como de $Q_2$ . . . . .	65
4.8	4ª afirmação: Os irmãos $r_{l,i}$ de $r_{l+1}$ são todos maximais rela- tivos a $Q_1$ ou são todos maximais relativos a $Q_2$ . . . . .	67
4.9	Decomposição recursiva do nó $r_{l+1}$ . . . . .	68
4.10	1º caso: $r_{l+2}$ não contém vértices de $Q_2$ . . . . .	70
4.11	2º caso: $r_{l+2}$ contém vértices de $Q_1 \cup Q_2$ . . . . .	71
4.12	Execução do <b>Procedimento Par Modular para Cografos</b> . . . . .	74
5.1	Exemplo de um grafo $P_4$ -esparso que não é $P_4$ -reduzível. . . . .	76
5.2	Um caminho induzido por 4 vértices (um $P_4$ ). . . . .	78
5.3	Um touro. . . . .	79
5.4	Um exemplo de touro estendido. . . . .	79
5.5	O grafo complementar de uma aranha magra é uma aranha gorda. . . . .	81
5.6	$\{Q_1, Q_2\}$ é um par modular de uma aranha magra $G$ se, e somente se, $\{Q_1, Q_2\}$ também é um par modular de $\overline{G}$ , que é uma aranha gorda. . . . .	84

5.7	Exemplo para o procedimento $P(r_q)$ . . . . .	87
5.8	Árvore de decomposição modular associada ao grafo $G$ . . . . .	88
5.9	Se $r_{l,1}$ possuir algum irmão $r_{l,2}$ que contenha vértices de $Q_1$ , então todo vértice de $r_{l,1}$ pertence a $Q_1$ . . . . .	113
5.10	Afirmção 4: todo vértice de $r_{l,1}$ deve pertencer a $Q_1$ . . . . .	115
5.11	Afirmção 5. . . . .	122
5.12	Suponha que exista mais de um filho de $r_{l+1}$ contendo vértices de $Q_2$ . . . . .	122
5.13	Afirmção 7: Todo irmão de $r_{l+2}$ só pode conter vértices de $Q_1$ .123	
5.14	$r_{l+2}$ é um módulo paralelo, não contém vértices de $Q_1$ e to- dos os seus filhos contendo vértices de $Q_2$ estão inteiramente contidos em $Q_2$ . . . . .	125
5.15	Exemplo para o algoritmo Par Modular para Grafos $P_4$ -esparsos.141	
6.1	Subgrafos proibidos para a classe dos grafos $P_4$ -esparsos esten- didos. . . . .	146
A.1	Um grafo $G$ . . . . .	148
A.2	Árvore de decomposição modular do grafo $G$ . . . . .	149
A.3	Grafos representantes de um módulo vizinhança, paralelo e serial. . . . .	149

# Capítulo 1

## Introdução

Uma ferramenta poderosa para tentar solucionar problemas difíceis de diferentes áreas, tais como Engenharia e Ciência da Computação, é o Método de Divisão e Conquista. Como muitos desses problemas são modelados por grafos, são necessários métodos para decompor grafos, na esperança que os problemas originais possam ser resolvidos de forma mais eficiente estudando independentemente as partes de um grafo. Nesse contexto, uma propriedade muito útil de um grafo  $G$  é ter uma árvore de representação. Isto geralmente envolve associar a  $G$  uma árvore enraizada  $T(G)$  cujas folhas são subgrafos de  $G$ , tais como vértices, arestas, cortes, cliques maximais e conjuntos independentes maximais. Sob o aspecto algorítmico, é preferencial que a árvore de representação seja única e possa ser obtida em tempo polinomial. Árvores de representação únicas foram obtidas para várias classes de grafos, entre elas os cografos [3], grafos de intervalo, grafos  $P_4$ -reduzíveis [12] e grafos  $P_4$ -esparcos [13]. A decomposição modular é um tipo bastante conhecido de decomposição de grafos que tem aplicações em várias áreas da Matemática Discreta.

A decomposição modular é um tipo de decomposição de grafos que foi descoberta independentemente por pesquisadores em diferentes áreas, entre elas teoria dos jogos e teoria dos grafos. A decomposição modular tem uma variedade de nomes, tais como *decomposição por substituição* [27] e *X-join* [10]. Durante o processo de decomposição modular, um grafo é dividido em módulos. Em cada etapa do processo, o subgrafo a ser decomposto é um módulo do grafo original. Cada um destes subgrafos é decomposto recursivamente. E este processo continua até que todos os subgrafos a serem decompostos contenham apenas um único vértice.

O conceito de módulos foi introduzido inicialmente por GALLAI [8] e foi uma ferramenta chave na prova do Teorema do Grafo Perfeito [24]: "Um grafo  $G$  é perfeito se, e somente se, o seu complemento é perfeito". Vários problemas combinatórios podem ser resolvidos pela decomposição de um grafo em conjuntos homogêneos (que são módulos não triviais) tais como problema de emparelhamento máximo, determinação de uma orientação transitiva e determinação de conjunto independente maximal (veja [1, 25, 26]).

Um módulo  $M$  de um grafo  $G$  é um subconjunto de vértices de  $G$  tal que todo vértice em  $V(G) \setminus M$  é adjacente a todos os vértices em  $M$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices.

A decomposição modular pode representar implicitamente todos os módulos de um grafo e pode ser usada em algoritmos de tempo polinomial para problemas tais como reconhecimento de grafos de comparabilidade e grafos de permutação [25], determinação de conjunto independente máximo e número cromático [27]. Ainda, um grande número de problemas NP-difíceis, para

grafos em geral, podem ser resolvidos em tempo linear para certas classes de grafos, utilizando como base a decomposição modular, desde que os grafos em questão possuam decomposição não trivial. Mais especificamente, problemas tais como clique máxima, coloração mínima e cobertura mínima por cliques para grafos, podem ser resolvidos em tempo linear para classes de grafos tais como grafos  $P_4$ -redutíveis e  $P_4$ -esparsos (veja [9, 14]).

Outro problema conhecido é o de determinar a existência (ou não) de um par homogêneo de um grafo  $G$ . Os pares homogêneos são uma generalização natural de conjuntos homogêneos de um grafo.

Um par de subconjuntos de vértices  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par homogêneo de um grafo  $G$  se cada vértice em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_j$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices, para  $j = 1, 2$ , com  $|Q_1| \geq 2$  ou  $Q_2 \geq 2$  e  $|V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)| \geq 2$ .

O problema de reconhecimento de um grafo com par homogêneo foi resolvido por Everett, Klein e Reed em 1994 (veja [7, 17]). Eles apresentaram um algoritmo de tempo polinomial que determina se um grafo contém um par homogêneo e, em caso afirmativo, determina um par homogêneo. Esse algoritmo é apresentado no apêndice deste trabalho.

KLEIN e SZWARCFITER [21] mostraram que os módulos de um grafo  $G$  têm uma correspondência biunívoca com os ideais de certos conjuntos parcialmente ordenados. Baseados nesses dois resultados, definimos neste trabalho o conceito de par modular de um grafo como uma extensão do conceito de módulos, assim como par homogêneo é uma extensão de conjuntos homogêneos e apresentamos uma generalização do resultado em [21] para

pares modulares, mostrando que há uma correspondência biunívoca entre ideais de certos conjuntos parcialmente ordenados e os pares modulares de um grafo  $G$ .

Após esse resultado, procuramos determinar uma árvore de representação para pares modulares de um grafo. Esse problema havia sido proposto anteriormente por Reed e outros pesquisadores. Durante o processo de tentar determinar a árvore de representação para pares modulares, percebemos que a decomposição modular pode ser usada para representar e listar os pares modulares de grafos pertencentes a certas classes, a saber, os cografos (que foram os primeiros a serem analisados) e os grafos  $P_4$ -reduzíveis e  $P_4$ -esparcos.

A tese está organizada da seguinte forma:

No capítulo presente, além da introdução, damos as definições básicas que serão utilizadas ao longo deste texto.

No Capítulo 2, apresentamos uma introdução a módulos, pares modulares e decomposição modular. Enunciamos uma representação para módulos de um grafo  $G$  [21], em termos de ideais de certos conjuntos parcialmente ordenados. Ainda, apresentamos alguns teoremas que serão necessários no decorrer da tese.

No Capítulo 3, enunciamos a construção de um certo digrafo e de um conjunto parcialmente ordenado associados a uma tripla de vértices de um grafo  $G$  (veja [7]), e apresentamos uma representação de pares modulares de um grafo  $G$ , que é uma generalização do resultado do Capítulo 2.



No Capítulo 4, apresentamos uma representação implícita de todos os pares modulares de um cografo, usando a decomposição modular deste cografo.

No Capítulo 5, apresentamos uma generalização do resultado do Capítulo 4, fornecendo um algoritmo de tempo polinomial que lista todos os pares modulares de grafos  $P_4$ -esparsos, também utilizando como ferramenta a decomposição modular.

Finalmente, no Capítulo 6 fornecemos as conclusões deste trabalho, assim como direções para pesquisas futuras.

Alguns resultados desta tese foram publicados nos seguintes trabalhos: [18], [19] e [20].

## 1.1 Definições Básicas

Nesta seção, vamos estabelecer definições básicas e notações que serão usadas no decorrer dessa tese.

### 1.1.1 Grafos

Um *grafo* (simples) é um par ordenado  $G = (V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito, não-vazio, de elementos denominados *vértices* e  $E(G)$  é um conjunto de pares (não repetidos) não ordenados de vértices distintos, denominados *arestas*. Denotaremos o conjunto de vértices de um grafo  $G$  por  $V(G)$  e o conjunto de arestas por  $E(G)$ . Também denotaremos o número de vértices  $|V(G)|$  em  $G$  por  $n$  e o número de arestas  $|E(G)|$  por  $m$ .

Um grafo  $G$  é dito *trivial* se  $|V(G)| = 1$ .

Um vértice  $v$  é *adjacente* (ou vizinho) a um vértice  $w$  em  $G$  se existe aresta  $(v, w) \in E(G)$ . Neste caso,  $v$  e  $w$  são os *extremos* da aresta  $e = (v, w)$ . O conjunto de vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  é chamado de *vizinhança* de  $v$  e é denotado por  $N_G(v)$  ou simplesmente  $N(v)$ ; ainda, denotamos os conjuntos  $N_G(v) \cup \{v\}$  e  $V(G) \setminus N_G(v)$  por  $N_G[v]$  e  $\overline{N}_G(v)$ , respectivamente. Um vértice  $v$  de  $G$  é dito *isolado* quando  $N(v) = \emptyset$ .

O *complemento* de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de  $G$  e tal que dois vértices distintos são adjacentes em  $\overline{G}$  se, e somente se, não são adjacentes em  $G$ .

Um grafo  $H = (V(H), E(H))$  é um *subgrafo* de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Se  $V(H) \subset V(G)$  e  $V(H) \neq V(G)$ , então  $H$  é dito um *subgrafo próprio* de  $G$ . Dado  $H$  subgrafo de  $G$ , dizemos que  $H$  é um *subgrafo induzido* de  $G$  quando, para quaisquer dois vértices distintos  $v$  e  $w$  em  $H$ , se  $(v, w) \in E(G)$  então  $(v, w) \in E(H)$ . Nesse caso, dizemos que  $H$  é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices  $V(H)$  e é denotado por  $G[V(H)]$ .

O grafo  $G \setminus \{v\}$ , obtido do grafo  $G$  pela remoção de um vértice  $v$ , é o subgrafo induzido pelo conjunto  $V(G) \setminus \{v\}$ . Analogamente, o grafo  $G \setminus H$ , obtido do grafo  $G$  pela remoção de um subgrafo  $H$ , é o subgrafo induzido pelo conjunto  $V(G) \setminus V(H)$ .

Dois grafos são *isomorfos* caso exista uma bijeção entre os seus conjuntos de vértices que preserve adjacências.

Dados dois vértices  $v$  e  $w$  em um grafo  $G$ , um *caminho* entre eles é uma seqüência  $P : v = v_1v_2 \dots v_k = w$ , onde os  $v_j$ 's são vértices (dois a dois distintos) e  $(v_j, v_{j+1}) \in E(G)$ ,  $1 \leq j \leq k - 1$ .

Um *caminho induzido* é um caminho tal que não existem arestas entre dois vértices não consecutivos. E denotamos por  $P_k$  um caminho induzido por  $k$  vértices.

Um *ciclo* é uma seqüência  $C = v_1v_2 \dots v_kv_{k+1}$  tal que  $v_1v_2 \dots v_k$  é um caminho,  $v_1 = v_{k+1}$  e  $k \geq 3$ . Um *ciclo induzido* é um ciclo onde não existem arestas entre dois vértices não consecutivos. Denotamos por  $C_k$  um ciclo induzido com  $k$  vértices.

Um conjunto  $S$  é *maximal* (ou *minimal*) em relação a uma propriedade  $P$  quando  $S$  satisfaz  $P$  e não existe outro conjunto  $S_1$  que contenha propriamente (respectivamente que esteja contido propriamente em)  $S$  e tal que  $S_1$  satisfaça  $P$ .

Um grafo  $G$  é *conexo* se, para qualquer par de vértices de  $G$ , existe um caminho entre eles. Caso contrário,  $G$  é dito *desconexo*.

Um *componente conexo* de  $G$  é um subgrafo maximal conexo de  $G$ .

Uma *árvore*  $T$  de um grafo  $G$  é um subgrafo sem ciclos e conexo de  $G$ . Uma *folha*  $v$  de  $T$  é um vertice de  $T$  tal que  $|N(v)| = 1$ . Um *nó interno* da árvore  $T$  é um vértice de  $T$  tal que  $|N(v)| > 1$ . Uma *árvore geradora*  $T$  de

um grafo  $G$  é uma árvore de  $G$  tal que  $V(T) = V(G)$  e  $E(T) \subseteq E(G)$ .

Seja  $T = (V(T), E(T))$  uma árvore. Se escolhermos um vértice qualquer  $v$  de  $T$  e o chamarmos de raiz, obtemos uma *árvore enraizada*.

Seja  $T$  uma árvore enraizada com raiz  $r$ . Se  $v$  e  $w$  são dois vértices de  $T$ , com  $v, w \neq r$ , e  $v$  pertence ao caminho de  $r$  a  $w$ , então  $v$  é chamado um *ancestral* de  $w$  e  $w$  é um *descendente*. O *nível* de um vértice  $v$  é o comprimento do caminho de  $r$  a  $v$ . Dizemos que  $w$  é um *filho* de  $v$  se  $v$  é o ancestral de  $w$  situado exatamente um nível acima de  $w$  na árvore  $T$ .

Um grafo  $G$  é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de  $G$  são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com  $n$  vértices. Denotamos tal grafo por  $K_n$ .

Um conjunto de vértices  $K$  de um grafo é uma *clique* se  $G[K]$  é um grafo completo.

O *tamanho da clique máxima*  $\omega(G)$  de um grafo  $G$  é a cardinalidade de uma clique de tamanho máximo em  $G$ .

Um conjunto de vértices  $S$  de um grafo  $G$  é um *conjunto estável* ou *conjunto independente* se os seus vértices são dois a dois não adjacentes em  $G$ , ou, em outras palavras, se em  $\overline{G}$  o conjunto  $S$  é uma clique.

O *número de estabilidade*  $\alpha(G)$  de  $G$  é a cardinalidade de um conjunto independente de tamanho máximo em  $G$ .

Uma *coloração* de um grafo  $G$  é uma partição de  $V(G)$ , onde cada classe da partição é um conjunto independente.

Uma  $k$ -coloração de  $G$  é uma partição de  $V(G)$  em  $k$  classes.

O número cromático  $\chi(G)$  de  $G$  é o menor número natural  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração.

Um grafo  $G$  é *perfeito* se, para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$ , o número cromático de  $H$  é igual ao tamanho da maior clique de  $H$ . Grafos que não são perfeitos são ditos *imperfeitos*.

Um grafo  $G$  é *minimalmente imperfeito* se ele não é perfeito mas todos os seus subgrafos induzidos próprios são perfeitos.

Um *conjunto homogêneo* de um grafo  $G$  é um subconjunto não-vazio  $H \subset V(G)$  tal que todo vértice em  $V(G) \setminus H$  é adjacente a todos os vértices em  $H$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices,  $|H| \geq 2$  e  $|V(G) \setminus H| \geq 1$ .

Um *par homogêneo* num grafo  $G$  é um par  $\{Q_1, Q_2\}$  de subconjuntos disjuntos de vértices de  $G$  tais que:

- cada vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_1$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices;
- cada vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_2$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices;
- $|Q_1| \geq 2$  ou  $|Q_2| \geq 2$ ;
- $|V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)| \geq 2$ .

### 1.1.2 Digrafos

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* é um par ordenado  $D = (V(D), E(D))$ , onde  $V(D)$  é um conjunto finito, não-vazio, de vértices e  $E(D)$  é um conjunto

de pares ordenados de vértices distintos, denominados *arestas direcionadas* ou *arcos*.

Um arco  $a = (v, w)$  é *incidente* aos vértices  $v$  e  $w$ , que são os extremos de  $a$ . Além disso, dizemos que o arco  $a$  sai (ou parte) de  $v$  e entra em  $w$ . O *grau de entrada* de  $v$  é o número de arestas que entram em  $v$  e o *grau de saída* de  $v$  é o número de arestas que saem de  $v$ .

Para  $v \in V(D)$ , denotamos por  $N_D^+(v) = \{w \in V(D); (v, w) \in E(D)\}$ ,  $N_D^-(v) = \{w \in V(D); (w, v) \in E(D)\}$  e a vizinhança de  $v$  em  $D$  por  $N_D(v) = N_D^+(v) \cup N_D^-(v)$ .

Um digrafo  $D_1 = (V(D_1), E(D_1))$  é um *subdigrafo* de um digrafo  $D$  se  $V(D_1) \subseteq V(D)$  e  $E(D_1) \subseteq E(D)$ .

Dado um digrafo  $D = (V(D), E(D))$ , dizemos que  $D$  é *fortemente conexo* se contém, para todo par de vértices distintos  $v, w \in V(D)$ , caminhos de  $v$  para  $w$  e de  $w$  para  $v$ .

Os *componentes fortemente conexos* de  $D$  são os subdigrafos maximais fortemente conexos de  $D$ .

A *condensação*  $C$  de um digrafo  $D$  é o digrafo cujos vértices correspondem aos componentes fortemente conexos de  $D$  e, dados dois vértices distintos  $v, w \in V(C)$ , temos a aresta direcionada  $(v, w)$  em  $C$  se, e somente se, existe uma aresta em  $D$  partindo de um vértice pertencente ao componente fortemente conexo correspondente a  $v$ , para um vértice pertencente ao componente correspondente a  $w$ .

Um digrafo  $D$  é dito *transitivo* se, para todos vértices  $v, w, u \in V(D)$ , se  $(u, v), (v, w) \in E(D)$  então  $(u, w) \in E(D)$ . Dizemos que um vértice  $v$  *alcança*  $w$  (em  $D$ ) se existe um caminho de  $v$  para  $w$  em  $D$  (nesse caso, dizemos que  $w$  é alcançável por  $v$ ). O *fecho transitivo* de  $D$  é o superdigrafo gerador máximo de  $D$  que preserva sua alcançabilidade.

Uma *orientação* de um grafo não direcionado  $G$  é um digrafo obtido determinando uma direção para cada aresta não direcionada.

Um grafo  $G$  é um *grafo de comparabilidade* se existe uma orientação que seja transitiva.

Um *caminho direcionado* entre dois vértices  $v$  e  $w$  de um digrafo  $D$  é uma seqüência da forma  $P : v = v_1 v_2 \dots v_k = w$ , onde os  $v_j$ 's são vértices (dois a dois distintos) e  $(v_j, v_{j+1}) \in E(D)$ ,  $1 \leq j \leq k - 1$ .

Um *ciclo* num digrafo  $D$  é uma seqüência  $C = v_1 v_2 \dots v_k v_{k+1}$ , onde  $v_1 v_2 \dots v_k$  é um caminho direcionado,  $v_1 = v_{k+1}$  e  $k \geq 3$ . Um digrafo é dito acíclico se ele não possui ciclos.

Um *conjunto parcialmente ordenado* ou simplesmente *ordem* é um digrafo acíclico transitivo.

Um *ideal* de uma ordem  $P$  é um subconjunto  $I \subseteq V(P)$  tal que, para todo  $x \in V(P)$ , se  $x \in I$  e  $(y, x) \in E(P)$  então  $y \in I$ .

# Capítulo 2

## Preliminares

Este capítulo é dedicado à apresentação de definições e resultados que serão utilizados no decorrer desse trabalho. Na Seção 2.1, definimos módulos e pares modulares de um grafo e apresentamos alguns resultados básicos associados a módulos. Na Seção 2.2, enunciamos uma representação dos módulos de um grafo em relação a ideais de conjuntos parcialmente ordenados de um digrafo específico, que será generalizada no próximo capítulo. Na Seção 2.3, definimos decomposição modular e enunciamos alguns resultados associados à decomposição, que serão importantes para os Capítulos 4 e 5.

### 2.1 Módulos e Pares Modulares

Os módulos possuem vários nomes na literatura, tais como *conjuntos fechados* [8] e *conjuntos autônomos* [1]. Vários problemas combinatórios em grafos como, por exemplo, o problema de determinação de conjunto independente máximo e o de determinação de uma orientação transitiva, podem ser resolvidos eficientemente para certas classes de grafos, utilizando a decom-



posição de um grafo em módulos.

Dado um grafo  $G$ , definimos um *módulo* de  $G$  como um subconjunto não-vazio  $M \subseteq V(G)$  tal que todo vértice  $v \in V(G) \setminus M$  é adjacente a todos os vértices em  $M$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices. Consideramos *módulos triviais* o conjunto  $V(G)$  e todos os subconjuntos de  $V(G)$  contendo um único vértice.

Um módulo não trivial é também chamado *conjunto homogêneo*.

Um módulo  $M$  é *forte* se, para qualquer outro módulo  $M_1$ , tivermos  $M_1 \cap M = \emptyset$  ou um dos módulos está inteiramente contido no outro.

Observemos que se  $M$  é um módulo de  $G$  então  $M$  também é um módulo do grafo complemento  $\overline{G}$ .

O teorema a seguir será utilizado nos Capítulos 4 e 5 (veja [25]).

**Teorema 2.1.** *Se  $N$  e  $M$  são módulos disjuntos de um grafo então, ou todo elemento de  $M$  é adjacente a todo elemento de  $N$ , ou nenhum elemento de  $M$  é adjacente a qualquer elemento de  $N$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x \in M$  e  $y \in N$ . Temos duas possibilidades a considerar:  $x$  é adjacente a  $y$  ou não. Se  $x$  é adjacente a  $y$  então  $x$  deve ser adjacente a todos os vértices de  $N$ , pois  $N$  é um módulo de  $G$ . Mas, se os vértices de  $N$  são adjacentes a  $x \in M$  e  $M$  é um módulo de  $G$ , então os vértices de  $N$  devem ser adjacentes a todo vértice de  $M$ . Suponhamos agora que  $x$  não seja adjacente a  $y$ . Então  $x$  não é adjacente a nenhum vértice de  $N$  (pois  $N$  é um módulo de  $G$ ). Isso implica que os vértices de  $N$  não são adjacentes a nenhum vértice de  $M$  (pois  $M$  é um módulo de  $G$ ).  $\square$

Na Figura 2.1, apresentamos um exemplo de um grafo e alguns de seus módulos:

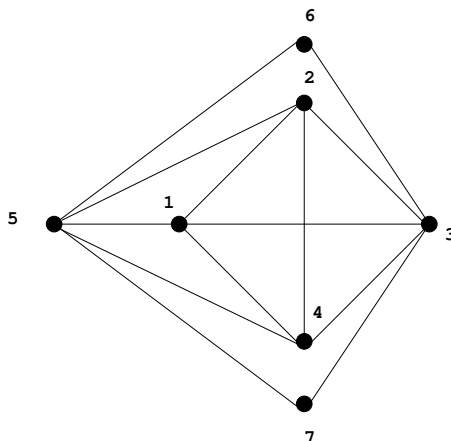


Figura 2.1: Alguns exemplos de módulos de um grafo  $G$ :  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$  e  $\{6, 7\}$ .

Um *par modular* num grafo  $G$  é um par  $\{Q_1, Q_2\}$  de subconjuntos disjuntos de vértices de  $G$  tais que  $|Q_1| \geq 1$ ,  $|Q_2| \geq 1$  e:

- cada vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_1$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices;
- cada vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_2$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices.

Na Figura 2.1, temos o par  $\{Q_1 = \{1, 3, 5\}, Q_2 = \{6, 7\}\}$  como um exemplo de par modular de um grafo.

Um *par homogêneo*  $\{Q_1, Q_2\}$  num grafo  $G$  é um par de subconjuntos disjuntos de vértices de  $G$  tais que cada vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_j$  ou não é adjacente a nenhum de seus

vértices, para  $j = 1, 2$ ,  $|Q_1| \geq 2$  ou  $|Q_2| \geq 2$  e  $|V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)| \geq 2$ .

O conceito de pares homogêneos foi introduzido por CHVÁTAL e SBIHI [2] em 1987 e eles mostraram que nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um par homogêneo. Eles usaram esse resultado para provar que grafos Berge sem touro são perfeitos (um grafo  $G$  é Berge se  $G$  e  $\overline{G}$  não contém  $C_{2n+1}$ ,  $n \geq 2$ ).

O conceito de pares modulares é uma extensão do conceito de módulos assim como o conceito de pares homogêneos é uma extensão do conceito de conjuntos homogêneos.

## 2.2 Representação de Módulos de um Grafo

Dados um grafo  $G$  e um módulo  $M \subseteq V(G)$  de  $G$ , podemos observar que a existência de  $M$  particiona o conjunto  $V(G) \setminus M$  em dois conjuntos:

- $A = \{v \in V(G); N(v) \cap M = M\}$ ;
- $N = \{v \in V(G); N(v) \cap M = \emptyset\}$ .

Podemos representar um grafo  $G$  contendo um módulo através da Figura 2.2. A linha contínua entre dois conjuntos representa adjacência completa entre os conjuntos e a linha pontilhada representa que não há adjacência entre os conjuntos.

Nesta seção, vamos enunciar uma representação para módulos de um grafo em termos de ideais de uma certa ordem. Lembremos que uma *ordem* é um

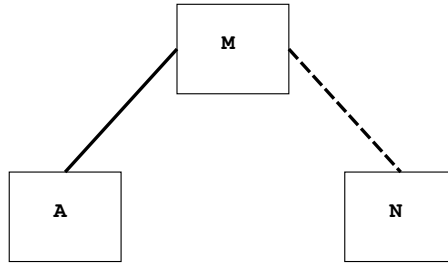


Figura 2.2: Grafo  $G$  contendo um módulo  $M$ .

digrafo acíclico transitivo e um *ideal* de uma ordem  $P$  é um subconjunto  $I \subseteq V(P)$  tal que, para todo  $x \in V(P)$ , se  $x \in I$  e  $(y, x) \in E(P)$  então  $y \in I$ .

Na Figura 2.3, apresentamos um exemplo de uma ordem  $P$  e seus ideais.

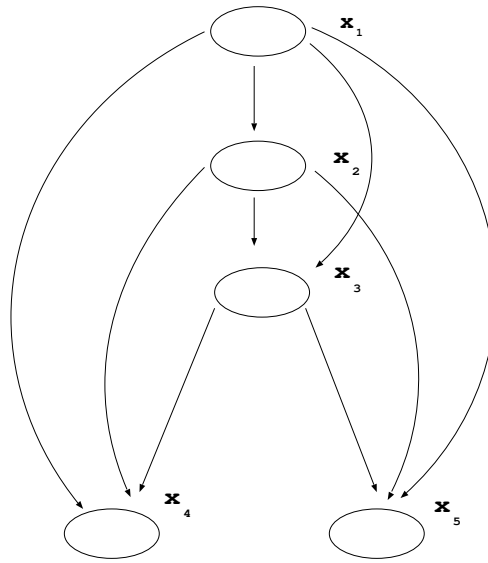


Figura 2.3: Exemplo de uma ordem  $P$  e seus ideais  $I_1 = \{x_1\}$ ,  $I_2 = \{x_1, x_2\}$ ,  $I_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $I_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $I_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}$  e  $I_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ .

KLEIN e SZWARCFITER [21] construíram, dados um grafo  $G$  e um vértice  $v_i$  em  $V(G)$ , um digrafo modular  $D_i$  relativo a  $v_i$ .

Tal digrafo foi definido com conjunto de vértices  $V(D_i)$  dado por  $V_i = V(G) \setminus \{v_i\}$ , e com conjunto de arestas  $E(D_i)$  dado pela construção a seguir: para cada par de vértices distintos  $x, y \in V(D_i)$ ,

- i. se  $(x, y) \notin E(G)$  e se  $(x, v_i) \in E(G)$  e  $(y, v_i) \in E(G)$ , temos as arestas  $(x, y), (y, x) \in E(D_i)$  ;
- ii. se  $(x, y) \notin E(G)$  e se  $(x, v_i) \notin E(G)$  e  $(y, v_i) \in E(G)$ , temos a aresta  $(y, x) \in E(D_i)$ ;
- iii. se  $(x, y) \in E(G)$  e se  $(x, v_i) \notin E(G)$  e  $(y, v_i) \notin E(G)$ , temos as arestas  $(x, y), (y, x) \in E(D_i)$  ;
- iv. se  $(x, y) \in E(G)$  e se  $(x, v_i) \notin E(G)$  e  $(y, v_i) \in E(G)$ , temos a aresta  $(x, y) \in E(D_i)$  ;

E definiram a ordem  $P_i$  de  $G$ , como o fecho transitivo da condensação de  $D_i$ .

A partir desta construção, apresentaram a seguinte representação para módulos de um grafo  $G$ :

**Teorema 2.2.** *Sejam  $G$  um grafo,  $v_i$  um vértice de  $G$  e  $P_i$  a ordem de  $G$ , relativa a  $v_i$ . Então existe uma correspondência biunívoca entre os ideais de  $P_i$  e os módulos de  $G$  contendo  $v_i$ .*

Vejamos um exemplo para a construção do digrafo modular e para o Teorema 2.2. Consideremos o grafo  $G$  dado pela Figura 2.4.

Tomemos  $v_i = 2$ . Pela construção do digrafo modular, temos  $V(D_i) = \{1, 3, 4, 5, 6\}$  e  $E(D_i) = \{(1, 3), (3, 1), (4, 5), (5, 4), (1, 6), (3, 6), (6, 4), (6, 5)\}$ .

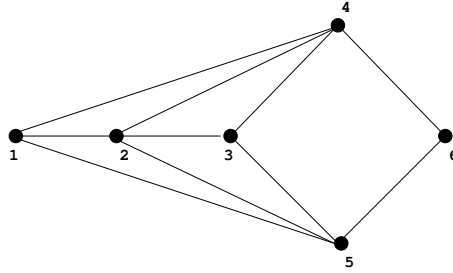


Figura 2.4: Exemplo para a construção do digrafo modular.

O digrafo e a ordem modular estão representados na Figura 2.5.

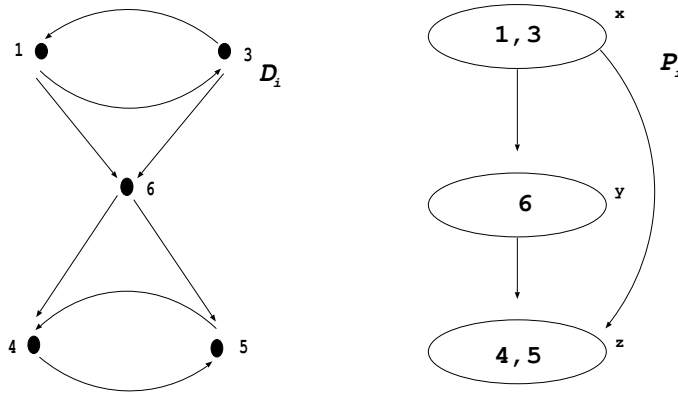


Figura 2.5: Digrafo e a ordem modular de  $G$  relativos ao vértice  $v_i = 2$ .

Na Figura 2.5, podemos observar que os componentes fortemente conexos de  $D_i$  são  $S(x) = \{1, 3\}$ ,  $S(y) = \{6\}$  e  $S(z) = \{4, 5\}$ , que correspondem aos vértices  $x, y, z$  de  $P_i$ , respectivamente.

Pelo Teorema 2.2, sabemos que existe uma correspondência um-a-um entre cada ideal da ordem  $P_i$  e os módulos  $M$  que contenham o vértice  $v_i = 2$ :

- Para o ideal  $I$ , dado pelo vértice  $x$ , correspondente ao componente fortemente conexo associado a  $\{1, 3\}$ , temos o módulo correspondente  $M = \{1, 2, 3\}$ ;
- Para o ideal  $I$ , dado pelos vértices  $x$  e  $y$ , correspondentes aos componentes fortemente conexos associados a  $\{1, 3\}$  e  $\{6\}$ , temos o módulo correspondente  $M = \{1, 2, 3, 6\}$ ;
- Para o ideal  $I$ , dado pelos vértices  $x$ ,  $y$  e  $z$ , correspondentes aos componentes fortemente conexos associados a  $\{1, 3\}$ ,  $\{6\}$  e  $\{4, 5\}$ , temos o módulo correspondente  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

No Capítulo 3, apresentamos a generalização dessa representação para pares modulares de um grafo  $G$ .

## 2.3 Decomposição Modular

A *decomposição modular* pode representar compactamente todos os módulos de um grafo. Em cada etapa, o subgrafo que está sendo decomposto é um módulo do grafo original. Cada um destes subgrafos é decomposto recursivamente. O processo continua até que todos os subgrafos que estão sendo decompostos contenham somente um único vértice.

A decomposição modular é um tipo de decomposição de grafos que associa a um grafo  $G$  uma única árvore de decomposição modular  $T(G)$ . As folhas de  $T(G)$  são os vértices de  $G$  e os nós internos de  $T(G)$  são os módulos fortes de  $G$ . A árvore de decomposição modular de qualquer grafo pode ser computada em tempo linear (veja [6, 26]).

Um nó interno de  $T(G)$  é um módulo serial, paralelo ou vizinhança, rotulado, respectivamente, por  $S$ ,  $P$  ou  $N$ . Um módulo  $M$  é *paralelo* se o subgrafo induzido pelos vértices de  $M$  não é conexo em  $G$ . Um módulo  $M$  é *serial* se o subgrafo induzido pelos vértices de  $M$  não é conexo em  $\overline{G}$ . Num *módulo vizinhança*, o subgrafo induzido pelos seus vértices é conexo em  $G$  e em  $\overline{G}$ . O processo de construção de  $T(G)$  é definido a seguir:

Primeiramente, tome  $M = V(G)$ . Se  $M$  é um único vértice então ele é a própria árvore de decomposição modular. Caso contrário,  $M$  é um módulo paralelo, serial ou vizinhança. Se  $M$  é um módulo paralelo, seus filhos são os componentes conexos de  $M$ . Se  $M$  é um módulo serial, seus filhos são os componentes conexos de  $\overline{M}$ . Se  $M$  é um módulo vizinhança, seus filhos são os submódulos maximais de  $M$ .

Observemos que, dado um módulo  $M$ , tanto no caso paralelo como no caso serial, cada componente conexo é um submódulo maximal de  $M$ .

Para cada submódulo maximal de  $M$ , determinamos sua árvore de decomposição modular recursivamente.

Em [30], foi provado que cada vértice em um módulo vizinhança  $N$  está contido em um único submódulo maximal de  $N$ . E como há uma única decomposição possível em cada etapa, há uma única decomposição modular de um grafo.

Vejamos a seguir um exemplo de um grafo  $G$  e sua decomposição modular. Consideremos o grafo  $G$  dado pela Figura 2.6.



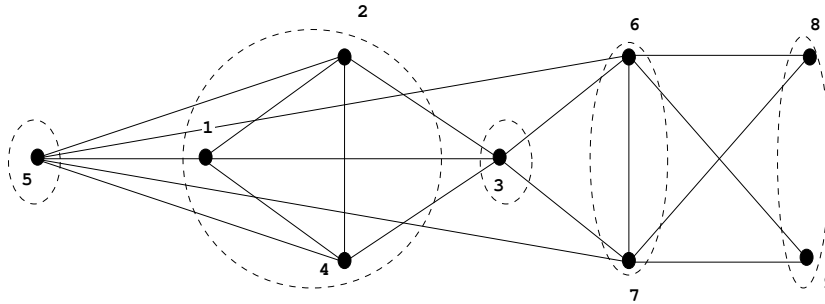


Figura 2.6: Um módulo vizinhança  $M = V(G)$  e seus submódulos maximais.

Considerando inicialmente  $M = V(G)$ , como os módulos  $V(G)$  e  $V(\overline{G})$  são conexos, temos que  $M$  é um módulo vizinhança e seus módulos maximais são  $M_1 = \{5\}$ ,  $M_2 = \{1, 2, 4\}$ ,  $M_3 = \{3\}$ ,  $M_4 = \{6, 7\}$  e  $M_5 = \{8, 9\}$ .

As folhas da árvore são os vértices do grafo e os nós internos são os módulos fortes do grafo  $G$ . Os módulos  $M_2$  e  $M_4$  são seriais (rotulados por  $S_1$  e  $S_2$ ) e o módulo  $M_5$  é paralelo (rotulado por  $P_1$ ) em  $G$ .

A árvore de decomposição modular do grafo  $G$  está representada na Figura 2.7.

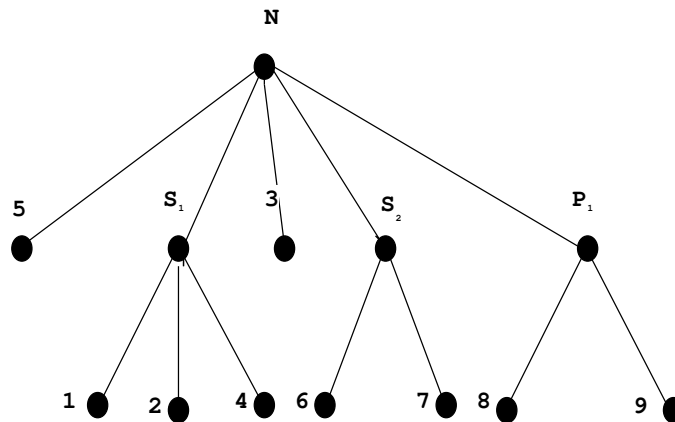


Figura 2.7: Árvore de decomposição modular de um grafo  $G$ .

Observemos que o número de módulos de um grafo pode ser exponencial, como no caso de um grafo completo. Mas, o teorema a seguir mostra que a decomposição modular pode representar implicitamente todos os módulos de um grafo (veja [25]).

**Teorema 2.3.** *Sejam  $G$  um grafo e  $T(G)$  sua árvore de decomposição modular. Então um conjunto de vértices  $M \subseteq V(G)$  é um módulo de  $G$  se, e somente se,  $M$  é um nó da árvore  $T(G)$  ou  $M$  é uma união de filhos de um nó paralelo ou serial.*

Consideremos o grafo  $G$  dado na Figura 2.6 e sua árvore de decomposição modular (dada na Figura 2.7). Pelo Teorema 2.3, sabemos que todos os nós da árvore  $T(G)$  são módulos do grafo  $G$ . Observemos que se considerarmos, por exemplo, o nó  $S_1 = \{1, 2, 4\}$ , qualquer união de filhos de  $S_1$  é um módulo de  $G$ .

No Capítulo 4, apresentamos um resultado correspondente ao do Teorema 2.3 para pares modulares de cografos.

# Capítulo 3

## Pares Modulares e Ideais

Neste capítulo, definimos o conceito de pares modulares como uma extensão do conceito de módulos de um grafo.

Neste capítulo, apresentamos uma representação de pares modulares de um grafo  $G$ , em termos de ideais de uma certa ordem. Na Seção 3.1, descrevemos uma decomposição de grafos através de pares modulares e fazemos a construção de uma ordem específica associada a uma tripla de vértices num grafo. Na Seção 3.2, apresentamos inicialmente uma representação dos pares modulares de um grafo sem conjuntos homogêneos e, logo após, a representação é feita para pares modulares tais que um dos conjuntos do par modular é um conjunto homogêneo.

Uma parte dos resultados apresentados neste capítulo foi publicada em [18].

### 3.1 Construção

Um *par modular* de um grafo  $G = (V(G), E(G))$  é um par de subconjuntos disjuntos  $Q_1, Q_2 \subseteq V(G)$ , com  $Q_1, Q_2 \neq \emptyset$  e:

- cada vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_1$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices;
- todo vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todos os vértices em  $Q_1$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices.

Consideraremos um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  como *trivial* se  $Q_1 \cup Q_2 = V(G)$  ou se  $|Q_1| = 1$  e  $|Q_2| = 1$ .

Os pares modulares são uma generalização de pares homogêneos de um grafo  $G$ , onde consideramos também os pares  $\{Q_1, Q_2\}$  triviais.

Observemos que a existência de um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$ , num grafo  $G$ , particiona seu conjunto de vértices  $V(G)$  em:

- $Q_1$ ;
- $Q_2$ ;
- $A = \{v \in V(G); N(v) \cap (Q_1 \cup Q_2) = Q_1 \cup Q_2\}$ ;
- $N = \{v \in V(G); N(v) \cap (Q_1 \cup Q_2) = \emptyset\}$ ;
- $S_1 = \{v \in V(G); N(v) \cap Q_1 = Q_1 \text{ e } N(v) \cap Q_2 = \emptyset\}$ ;
- $S_2 = \{v \in V(G); N(v) \cap Q_1 = \emptyset \text{ e } N(v) \cap Q_2 = Q_2\}$ .

Observemos também que pares modulares correspondem aos módulos quando um dos conjuntos do par é vazio.

Podemos representar um grafo  $G$  contendo um par modular através da Figura 3.1.

As linhas contínuas entre dois conjuntos representam adjacência completa entre os conjuntos e as linhas pontilhadas representam que não há adjacência entre os conjuntos.

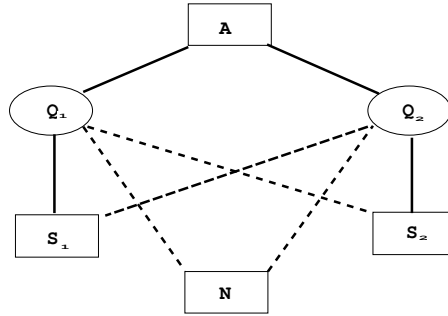


Figura 3.1: Representação de um grafo  $G$  contendo um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$ .

A seguinte afirmação será usada no Capítulo 5:

**Afirmação 1:** Um par  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de um grafo  $G$  se, e somente se,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular do grafo complementar  $\overline{G}$ .

*Demonstração.* Basta observarmos que um vértice  $v$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todo vértice em  $Q_j$ , em  $G$ , se, e só se,  $v$  não é adjacente a nenhum de seus vértices em  $\overline{G}$ , para  $j = 1, 2$ .  $\square$

A Figura 3.2 ilustra a afirmação.

Para apresentarmos uma representação de pares modulares de um grafo  $G$ , em termos de ideais de uma certa ordem, vamos usar a construção do digrafo par modular apresentada por EVERETT, KLEIN e REED [7]. Essa construção foi usada para apresentar um algoritmo de tempo polinomial que determina os pares modulares de um grafo. O algoritmo, citado no Apêndice

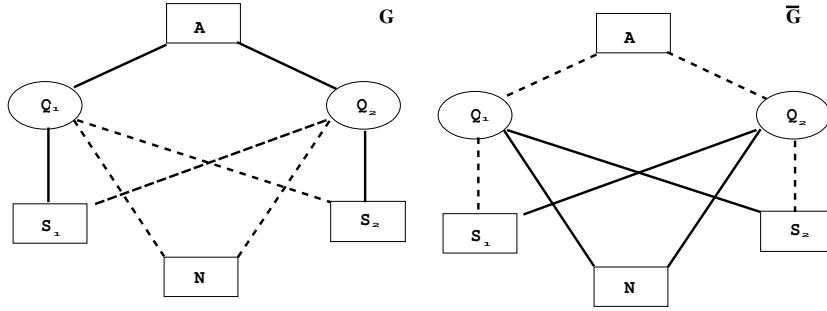


Figura 3.2:  $\{Q_1, Q_2\}$  é par modular de  $G$  se, e somente se, também é par modular de  $\overline{G}$ .

A, testa para uma tripla de vértices de  $G$ ,  $\{q_i, q_j, s_i\}$ , se  $G$  tem um par homogêneo  $\{Q_1, Q_2\}$  com  $q_i \in Q_1$ ,  $q_j \in Q_2$  e  $s_i \in S_1$ .

Sejam um grafo  $G = (V(G), E(G))$  e  $\{q_i, q_j, s_i\}$  uma tripla de vértices de  $G$  tais que  $(q_i, s_i) \in E(G)$  e  $(q_j, s_i) \notin E(G)$ .

Particionemos o conjunto de vértices  $V_{i,j} = V(G) \setminus \{q_i, q_j, s_i\}$  de  $G$  nos conjuntos a seguir:

$$\begin{aligned}
 AQ_1 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \in E(G), (v, q_j) \in E(G) \text{ e } (v, s_i) \in E(G)\} \\
 AQ_2 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \in E(G), (v, q_j) \in E(G) \text{ e } (v, s_i) \notin E(G)\} \\
 S_1Q_1 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \in E(G), (v, q_j) \notin E(G) \text{ e } (v, s_i) \in E(G)\} \\
 S_2Q_1 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \notin E(G), (v, q_j) \in E(G) \text{ e } (v, s_i) \in E(G)\} \\
 S_1Q_2 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \in E(G), (v, q_j) \notin E(G) \text{ e } (v, s_i) \notin E(G)\} \\
 S_2Q_2 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \notin E(G), (v, q_j) \in E(G) \text{ e } (v, s_i) \notin E(G)\} \\
 NQ_1 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \notin E(G), (v, q_j) \notin E(G) \text{ e } (v, s_i) \in E(G)\} \\
 NQ_2 &= \{v \in V_{i,j}; (v, q_i) \notin E(G), (v, q_j) \notin E(G) \text{ e } (v, s_i) \notin E(G)\}
 \end{aligned}$$

Observemos que se  $v \in AQ_1$ ,  $v$  não pode pertencer a  $N$  (pois é adjacente a  $q_i \in Q_1$  e a  $q_j \in Q_2$ ),  $v \notin S_1$  (pois é adjacente a  $q_j \in Q_2$ ),  $v \notin S_2$

(pois é adjacente a  $q_i \in Q_1$ ) e  $v \notin Q_2$  (pois é adjacente a  $s_i \in S_1$ ). Logo,  $v \in A$  ou  $v \in Q_1$ . De modo similar, podemos concluir que:

- se  $v \in AQ_2 \Rightarrow v \in A$  ou  $v \in Q_2$ ;
- se  $v \in S_1Q_1 \Rightarrow v \in S_1$  ou  $v \in Q_1$ ;
- se  $v \in S_2Q_1 \Rightarrow v \in S_2$  ou  $v \in Q_1$ ;
- se  $v \in S_1Q_2 \Rightarrow v \in S_1$  ou  $v \in Q_2$ ;
- se  $v \in S_2Q_2 \Rightarrow v \in S_2$  ou  $v \in Q_2$ ;
- se  $v \in NQ_1 \Rightarrow v \in N$  ou  $v \in Q_1$ ;
- se  $v \in NQ_2 \Rightarrow v \in N$  ou  $v \in Q_2$ ;

Utilizando a partição de  $V_{i,j}$ , definiram o digrafo par modular de  $G$  relativo à tripla  $\{q_i, q_j, s_i\}$  em  $G$ .

Sejam um grafo  $G$  e  $\{q_i, q_j, s_i\}$  uma tripla de vértices de  $G$  tais que  $(q_i, s_i) \in E(G)$  e  $(q_j, s_i) \notin E(G)$ .

O *digrafo par modular* de  $G$  relativo a  $\{q_i, q_j, s_i\}$ , denotado por  $D_{i,j}$ , foi definido como o digrafo com conjunto de vértices  $V(D_{i,j})$  dado por  $V_{i,j} = V(G) \setminus \{q_i, q_j, s_i\}$  e com conjunto de arestas  $E(D_{i,j})$  dado pela construção a seguir: para cada par de vértices distintos  $x, y \in V(D_{i,j})$ ,

(i) Se  $(x, y) \notin E(G)$ , temos as arestas  $(x, y), (y, x) \in E(D_{i,j})$ :

**1.1** se  $x \in AQ_1$  e  $y \in AQ_1$  ou  $y \in AQ_2$  ou  $y \in S_1Q_1$  ou  $y \in S_1Q_2$

**1.2** se  $x \in AQ_2$  e  $y \in AQ_2$  ou  $y \in S_2Q_1$  ou  $y \in S_2Q_2$

**1.3** se  $x, y \in S_1Q_1$  ou se  $x, y \in S_2Q_2$

**1.4** se  $x \in S_2Q_1$  e  $y \in S_1Q_2$

(ii) Se  $(x, y) \notin E(G)$ , temos a aresta  $(x, y) \in E(D_{i,j})$ :

**2.1** se  $x \in AQ_1$  e  $y \in S_2Q_1$  ou  $y \in S_2Q_2$  ou  $y \in NQ_1$  ou  $y \in NQ_2$

**2.2** se  $x \in AQ_2$  e  $y \in S_1Q_1$  ou  $y \in S_1Q_2$  ou  $y \in NQ_1$  ou  $y \in NQ_2$

**2.3** se  $x \in S_1Q_1$  e  $y \in S_2Q_1$  ou  $y \in NQ_1$

**2.4** se  $x \in S_2Q_1$  e  $y \in S_2Q_2$  ou  $y \in NQ_2$

**2.5** se  $x \in S_1Q_2$  e  $y \in NQ_1$

**2.6** se  $x \in S_2Q_2$  e  $y \in NQ_2$

(iii) Se  $(x, y) \notin E(G)$ , temos a aresta  $(y, x) \in E(D_{i,j})$ :

**3.1** se  $x \in S_1Q_1$  e  $y \in S_1Q_2$

**3.2** se  $x \in S_1Q_2$  e  $y \in S_2Q_2$

(iv) Se  $(x, y) \in E(G)$ , temos as arestas  $(x, y), (y, x) \in E(D_{i,j})$ :

**4.1** se  $x \in S_1Q_2$  e  $y \in S_1Q_2$  ou  $y \in NQ_2$

**4.2** se  $x \in S_2Q_1$  e  $y \in S_2Q_1$  ou  $y \in NQ_1$

**4.3** se  $x \in NQ_1$  e  $y \in NQ_1$  ou  $y \in NQ_2$

**4.4** se  $x \in S_1Q_1$  e  $y \in S_2Q_2$  ou  $y \in NQ_2$

**4.5** se  $x, y \in NQ_2$

**4.6** se  $x \in S_2Q_2$  e  $y \in NQ_1$

(v) Se  $(x, y) \in E(G)$ , temos a aresta  $(y, x) \in E(D_{i,j})$ :

**5.1** se  $x \in AQ_1$  e  $y \in S_2Q_1$  ou  $y \in S_2Q_2$  ou  $y \in NQ_1$  ou  $y \in NQ_2$

**5.2** se  $x \in AQ_2$  e  $y \in S_1Q_1$  ou  $y \in S_1Q_2$  ou  $y \in NQ_1$  ou  $y \in NQ_2$



**5.3** se  $x \in S_1Q_1$  e  $y \in S_2Q_1$  ou  $y \in NQ_1$

**5.4** se  $x \in S_1Q_2$  e  $y \in NQ_1$

**5.5** se  $x \in S_2Q_1$  e  $y \in S_2Q_2$  ou  $y \in NQ_2$

**5.6** se  $x \in S_2Q_2$  e  $y \in NQ_2$

(vi) Se  $(x, y) \in E(G)$ , temos a aresta  $(x, y) \in E(D_{i,j})$ :

**6.1** se  $x \in S_1Q_1$  e  $y \in S_1Q_2$

**6.2** se  $x \in S_1Q_2$  e  $y \in S_2Q_2$

Na Figura 3.3, vamos exibir um grafo e vamos construir um digrafo par modular associado a uma tripla de vértices de  $G$ .

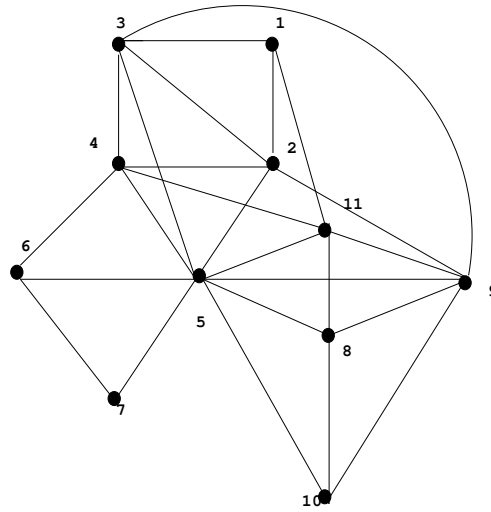


Figura 3.3: Exemplo de grafo  $G$  para a construção de um digrafo par modular.

Consideremos  $q_i = 3$ ,  $q_j = 8$  e  $s_i = 4$ . O conjunto  $V_{i,j} = V(G) \setminus \{3, 8, 4\}$  é particionado nos conjuntos:

$$AQ_1 = \{5\}$$

$$AQ_2 = \{9\}$$

$$\begin{aligned}
S_1Q_1 &= \{2\} \\
S_2Q_1 &= \{11\} \\
S_1Q_2 &= \{1\} \\
S_2Q_2 &= \{10\} \\
NQ_1 &= \{6\} \\
NQ_2 &= \{7\}
\end{aligned}$$

Pela construção do digrafo  $D_{i,j}$ , temos  $V(D_{i,j}) = \{1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$  e

$$\begin{aligned}
E(D_{i,j}) &= \{(10, 5), (6, 5), (7, 5), (2, 9), (2, 1), (6, 7), \\
&(7, 6), (5, 1), (1, 5), (9, 1), (9, 6), (9, 7), (2, 6), (10, 1), \\
&(10, 7), (1, 6), (11, 5), (2, 11), (11, 10), (11, 7)\}
\end{aligned}$$

E o digrafo  $D_{i,j}$  obtido é apresentado na Figura 3.4:

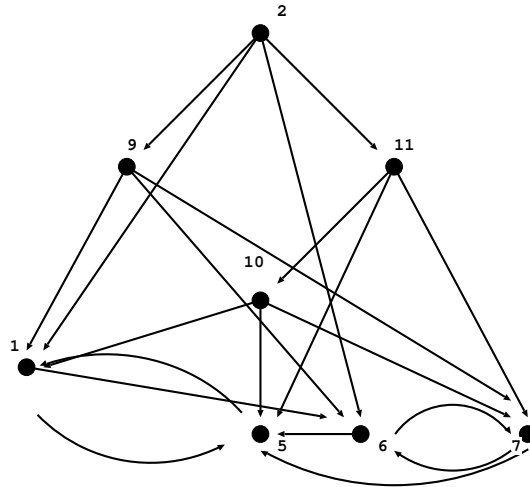


Figura 3.4: Digrafo par modular  $D_{i,j}$ .

A partir da definição do digrafo  $D_{i,j}$ , definimos a *ordem par modular*  $P_{i,j}$  de  $G$ , relativa à tripla  $\{q_i, q_j, s_i\}$  em  $V(G)$ , como o fecho transitivo da con-

densação de  $D_{i,j}$ .

Consideremos o grafo representado na Figura 3.3 e o digrafo par modular associado à tripla de vértices  $q_i = 3$ ,  $q_j = 8$  e  $s_i = 4$  de  $G$ . Pela Figura 3.4, podemos observar que os componentes fortemente conexos associados são  $\{2\}$ ,  $\{9\}$ ,  $\{11\}$ ,  $\{10\}$  e  $\{1, 5, 6, 7\}$ . A ordem associada está representada na Figura 3.5.

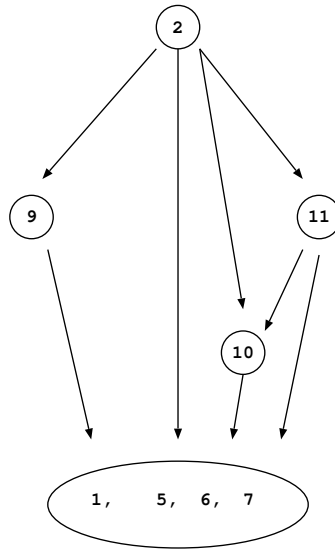


Figura 3.5: Ordem par modular  $P_{i,j}$ .

Seja  $v \in V(D_{i,j})$ . Definimos  $S(v)$  como o subconjunto dos vértices de  $V(D_{i,j})$  que estão no mesmo componente fortemente conexo de  $v$  em  $D_{i,j}$ . Similarmente, se  $x \in V(P_{i,j})$ ,  $S(x)$  denota o subconjunto dos vértices de  $V(D_{i,j})$  que compõem o componente fortemente conexo de  $D_{i,j}$ , correspondente a  $x$  na condensação.

Chamemos  $S(x)$  de *expansão de  $x$*  e  $x$  de *redução de  $S(x)$* .

Dados um grafo  $G$ ,  $\{q_i, q_j, s_i\}$  uma tripla de vértices de  $G$  tais que  $(q_i, s_i) \in E(G)$  e  $(q_j, s_i) \notin E(G)$ , e um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$  contendo  $q_i$  e  $q_j$ , respectivamente, sejam a ordem par modular  $P_{i,j}$  de  $G$  relativa a  $\{q_i, q_j, s_i\}$ ,  $x \in V(P_{i,j})$  e  $S(x)$  sua expansão. Vamos garantir, a seguir, que se um vértice  $v$  em  $S(x)$  pertence a  $Q_1$  ou a  $Q_2$  então  $S(x)$  está inteiramente contido em  $Q_1 \cup Q_2$ .

**Proposição 3.1.1.** *Todos os vértices de  $S(x)$  pertencem a  $Q_1 \cup Q_2$  ou nenhum deles pertence.*

*Demonstração.* Quando  $|S(x)| = 1$  então  $S(x) = \{x\}$  e nesse caso é trivial a verificação. Suponhamos  $|S(x)| > 1$  e que a proposição seja falsa. Neste caso, existe pelo menos um vértice em  $S(x)$  que pertença a  $Q_1 \cup Q_2$  e pelo menos um vértice que não pertença a  $Q_1 \cup Q_2$ . Como  $S(x)$  é um componente fortemente conexo de  $D_{i,j}$ , existem pelo menos dois vértices  $y, z \in S(x)$  tais que  $y \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $z \in Q_1 \cup Q_2$  e  $(y, z) \in E(D_{i,j})$ . Temos duas possibilidades:  $(y, z) \in E(G)$  ou não.

Suponha que  $(y, z) \in E(G)$ . Neste caso, como  $z \in Q_1 \cup Q_2$  então  $z \in Q_1$  ou  $z \in Q_2$ . Se  $z \in Q_1$ , pela definição de par modular, como  $y$  é adjacente a  $z$  em  $G$ , isto implica que  $y$  é adjacente a todos os vértices de  $Q_1$ . Logo,  $y$  pode pertencer a  $AQ_1$ , a  $AQ_2$ , a  $S_1Q_1$  ou a  $S_1Q_2$ . Também,  $z$  pode pertencer a  $AQ_1$ , a  $S_1Q_1$ , a  $S_2Q_1$  ou a  $NQ_1$ . E, por (iv), (v) e (vi) da construção do digrafo  $D_{i,j}$ , obtemos que não existe aresta  $(y, z)$  em  $D_{i,j}$ . Se  $z \in Q_2$ , temos, de modo análogo, que  $y$  pertence a  $AQ_1$ , a  $AQ_2$ , a  $S_2Q_1$  ou a  $S_2Q_2$  e  $z$  pertence a  $AQ_2$ , a  $S_1Q_2$ , a  $S_2Q_2$  ou a  $NQ_2$ . Novamente pela construção do digrafo  $D_{i,j}$ , concluimos que não existe aresta  $(y, z)$  em  $D_{i,j}$ .

Considere agora  $(y, z) \notin E(G)$ . Se  $z \in Q_1$ , temos, pela definição de par modular, que  $y$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1$ . Portanto,  $y$  pode pertence a  $S_2Q_1$ , a  $S_2Q_2$ , a  $NQ_1$  ou a  $NQ_2$ , e (i), (ii) e (iii) nos garantem

que  $(y, z) \notin E(D_{i,j})$ . Se  $z \in Q_2$ , então  $y$  pertence a  $S_1Q_1$ , a  $S_1Q_2$ , a  $NQ_1$  ou a  $NQ_2$  e a implicação é novamente que  $(y, z) \notin E(D_{i,j})$ .

Portanto, em todos os casos,  $(y, z) \notin E(D_{i,j})$ , o que é uma contradição.

Logo, a proposição é verdadeira.

□

## 3.2 Representação de Pares Modulares por Ideais

Vamos exibir uma representação dos pares modulares de um grafo  $G$ , em termos de certos ideais de ordens pares modulares. Mas, para tal, precisaremos da Proposição 3.1.1 e do lema a seguir, onde consideramos pares modulares em que pelo menos um dos conjuntos é um conjunto homogêneo.

**Lema 3.1.** *Sejam um grafo  $G$ , uma tripla de vértices  $\{q_i, q_j, s_i\}$  em  $V(G)$  tais que  $(q_i, s_i) \in E(G)$  e  $(q_j, s_i) \notin E(G)$ , a ordem par modular  $P_{i,j}$  de  $G$ , relativa à  $\{q_i, q_j, s_i\}$ , e  $\{Q_1, Q_2\}$  par modular de  $G$  contendo  $q_i$  e  $q_j$ , respectivamente. Então, se  $Q_1$  é um conjunto homogêneo de  $G$ , não existem vértices em  $Q_1$  e  $Q_2$  que pertençam a um mesmo componente fortemente conexo no digrafo  $D_{i,j}$ . Mais ainda, se  $Q_1$  e  $Q_2$  são conjuntos homogêneos, não há arestas entre os componentes fortemente conexos que contêm os vértices de  $Q_1$  e os que contêm os vértices de  $Q_2$  em  $D_{i,j}$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $Q_1$  seja um conjunto homogêneo de  $G$  e sejam  $x \in Q_1$  e  $y \in Q_2$ , com  $x \neq q_i$  e  $y \neq q_j$ .

Temos dois casos a considerar:  $Q_2$  também é um conjunto homogêneo ou não.

Se  $Q_2$  é um conjunto homogêneo, pela definição de par modular, há duas

possibilidades para os vértices de  $Q_2$ : os vértices de  $Q_2$  não são adjacentes a nenhum vértice de  $Q_1$  em  $G$  ou todos os vértices de  $Q_2$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$ . Na primeira possibilidade, como os vértices de  $Q_2$  não são adjacentes a nenhum vértice de  $Q_1$ , temos  $(q_i, y) \notin E(G)$ ,  $(x, q_j) \notin E(G)$  e  $(x, y) \notin E(G)$ .  $y \in Q_2$  e  $(q_i, y) \notin E(G)$  implicam que  $y$  pode pertencer a  $S_2Q_2$  ou a  $NQ_2$ . Também, de  $x \in Q_1$  e  $(x, q_j) \notin E(G)$ , temos que  $x$  pertence a  $S_1Q_1$  ou a  $NQ_1$ . De  $(x, y) \notin E(G)$ , aplicando (i), (ii) e (iii) da construção do digrafo, concluímos que não existe aresta entre  $x$  e  $y$  em  $D_{i,j}$ , com  $x \in Q_1 \setminus \{q_i\}$  e  $y \in Q_2 \setminus \{q_j\}$  quaisquer; conseqüentemente, os vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$  pertencem a componentes fortemente conexos distintos em  $D_{i,j}$  e não existem arestas entre seus componentes. A outra possibilidade implica que  $(q_i, y)$ ,  $(x, q_j)$  e  $(x, y)$  pertencem a  $E(G)$ . Como  $y \in Q_2$  e  $(q_i, y) \in E(G)$ , obtemos  $y \in AQ_2$  ou  $y \in S_1Q_2$ . Também, de  $x \in Q_1$  e  $(x, q_j) \in E(G)$ , temos  $x \in AQ_1$  ou  $x \in S_2Q_1$ . Aplicando agora (iv), (v) e (vi) da construção de  $D_{i,j}$ , concluímos novamente que não existem arestas entre  $x$  e  $y$ , para quaisquer  $x \in Q_1 \setminus \{q_i\}$  e  $y \in Q_2 \setminus \{q_j\}$ . Logo, os vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$  pertencem a componentes distintos em  $D_{i,j}$  e não existem arestas entre seus componentes.

Se  $Q_2$  não é conjunto homogêneo, e sendo  $\{Q_1, Q_2\}$  par modular de  $G$ , os vértices de  $Q_1$  são adjacentes a apenas uma parte dos vértices de  $Q_2$ . Há então duas possibilidades a examinar: os vértices de  $Q_1$  não são adjacentes a  $q_j$  ou são adjacentes. A primeira possibilidade implica que, para todo  $x \in Q_1 \setminus \{q_i\}$ ,  $(x, q_j) \notin E(G)$ . Então,  $x \in S_1Q_1$  ou  $x \in NQ_1$ . Ainda, para todo vértice  $w \in Q_2 \setminus \{q_j\}$  que não é adjacente aos vértices de  $Q_1$ ,  $w$  deve pertencer a  $S_2Q_2$  ou a  $NQ_2$  e, portanto não existem arestas entre os vértices de  $Q_1$  e os vértices  $w$  em  $D_{i,j}$ . E, para todo  $y \in Q_2 \setminus \{q_j\}$  que é adjacente a todos os vértices de  $Q_1$ , decorre que  $y \in AQ_2$  ou  $y \in S_1Q_2$ . Então, por (5.2),

(5.4) e (6.1) da construção de  $D_{i,j}$ , temos a aresta  $(x, y) \in E(D_{i,j})$ . Logo, para todo vértice  $y_1$  em  $Q_2$ , não existe  $(y_1, x_1)$  em  $D_{i,j}$ , para todo vértice  $x_1 \in Q_1$ . Agora, suponhamos, por contradição, que existam vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  num mesmo componente fortemente conexo  $S(x)$ . Pela proposição 3.1.1, temos a garantia que todos os vértices de  $S(x)$  pertencem a  $Q_1 \cup Q_2$  e, como os vértices de  $S(x)$  formam um mesmo componente fortemente conexo, deve existir uma aresta  $(y_1, x_1) \in E(D_{i,j})$  tal que  $y_1, x_1 \in S(x)$ ,  $y_1 \in Q_2$  e  $x_1 \in Q_1$ , o que é uma contradição. A outra possibilidade que os vértices de  $Q_1$  são adjacentes a  $q_j$  implica que  $(x, q_j) \in E(G)$ , para todo  $x \in Q_1 \setminus \{q_i\}$ , e portanto  $x \in AQ_1$  ou a  $S_2Q_1$ . Para todo  $y \in Q_2 \setminus \{q_j\}$  que é adjacente aos vértices de  $Q_1$ ,  $y \in AQ_2$  ou  $y \in S_1Q_2$  e, pela construção do digrafo  $D_{i,j}$ , não existem arestas entre os vértices de  $Q_1$  e  $y$  em  $D_{i,j}$ . Também, para todo  $w \in Q_2 \setminus \{q_j\}$  que não é adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $G$ ,  $w$  pertence a  $S_2Q_2$  ou a  $NQ_2$ . Aplicando (2.1) e (2.4), concluímos que  $(x, w) \in E(D_{i,j})$ . Por argumento análogo, concluímos que os vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$  pertencem a componentes fortemente conexos distintos.

□

Analisando a Figura 3.3, os conjuntos  $Q_1 = \{3, 2\}$  e  $Q_2 = \{8, 9\}$  formam um par modular de  $G$ . Com efeito, podemos particionar o conjunto de vértices de  $G$  em  $Q_1, Q_2, A = \{5\}, S_1 = \{1, 4\}, S_2 = \{10, 11\}$  e  $N = \{6, 7\}$ .

Observemos que  $Q_1$  é um conjunto homogêneo de  $G$ . Logo, pelo Lema 3.1, sabemos que não há vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  que pertençam a um mesmo componente fortemente conexo, como podemos ver na Figura 3.5.

Por outro lado, o par  $Q_1 = \{2, 3, 5, 6, 11\}$  e  $Q_2 = \{1, 8, 9, 10, 7\}$  é um par modular de  $G$ . Com efeito,  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2) = \{4\}$  e o vértice  $v = 4$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  e não adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Além disso, há vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  pertencentes a um mesmo componente fortemente conexo

em  $D_{i,j}$ , como podemos ver na Figura 3.5; portanto, temos pelo Lema 3.1 que ambos os conjuntos não são conjuntos homogêneos de  $G$ .

Estamos agora prontos para enunciar o principal teorema deste capítulo, que mostra uma correspondência biunívoca entre pares modulares  $\{Q_1, Q_2\}$ , tais que ambos os conjuntos não são conjuntos homogêneos de  $G$ , e ideais de conjuntos parcialmente ordenados. Esse resultado é uma generalização do resultado para módulos, apresentado por KLEIN e SZWARCFITER [21].

**Teorema 3.2.** *Sejam um grafo  $G$ , uma tripla de vértices  $\{q_i, q_j, s_i\}$  em  $V(G)$  tais que  $(q_i, s_i) \in E(G)$  e  $(q_j, s_i) \notin E(G)$ , e  $P_{i,j}$  a ordem par modular de  $G$ , relativa a  $\{q_i, q_j, s_i\}$ . Suponhamos que não existam conjuntos homogêneos em  $G$  contendo  $q_i$  ou  $q_j$ . Então existe uma correspondência biunívoca entre os ideais de  $P_{i,j}$  e os pares modulares  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$  contendo  $q_i$  e  $q_j$ , respectivamente.*

*Demonstração.* Seja  $\{Q_1, Q_2\}$  um par modular de  $G$  contendo  $\{q_i, q_j\}$ , com  $q_i \in Q_1$  e  $q_j \in Q_2$ , e sejam  $D_{i,j}$  e  $P_{i,j}$  o digrafo e a ordem par modular de  $G$  correspondentes a  $\{q_i, q_j, s_i\}$ . Vamos exibir um ideal  $I$  da ordem par modular  $P_{i,j}$  que corresponda a  $Q_1 \cup Q_2$ .

Por definição, os vértices de  $P_{i,j}$  estão em correspondência biunívoca com os componentes fortemente conexos de  $D_{i,j}$ . Tomemos então um vértice  $x \in V(P_{i,j})$  e  $S(x)$  sua expansão. Pela Proposição 3.1.1, ou todos os vértices de  $S(x)$  pertencem a  $Q_1 \cup Q_2$  ou nenhum deles pertence. Se  $S(x) \subset Q_1 \cup Q_2$  então  $S(x)$  está inteiramente contido em  $Q_1$  ou inteiramente contido em  $Q_2$  ou  $S(x)$  contém vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ .

Se  $S(x) \subseteq Q_1$ , colorimos o vértice  $x$  com a cor 1.

Se  $S(x) \subseteq Q_2$ , colorimos o vértice  $x$  com a cor 2.

Se  $S(x)$  contém vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ , colorimos o vértice  $x$  com a cor 3.



Caso contrário,  $x$  recebe a cor 4.

Sejam  $I_k = \{x \in V(P_{i,j}); x \text{ tem cor } k\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .

Então  $Q_1 \cup Q_2 = \{q_i, q_j\} \cup_{x \in I_1} S(x) \cup_{x \in I_2} S(x) \cup_{x \in I_3} S(x)$  e afirmamos que

$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$  é um ideal de  $P_{i,j}$ , correspondendo ao par modular  $\{Q_1, Q_2\}$ .

De fato, suponhamos que  $I$  não seja um ideal de  $P_{i,j}$ . Neste caso, devem existir vértices  $y_1, z_1$  em  $P_{i,j}$  tais que  $z_1 \notin I$ ,  $y_1 \in I$  e  $(z_1, y_1) \in E(P_{i,j})$ .

Observemos que cada vértice de  $P_{i,j}$  corresponde a um componente fortemente conexo de  $D_{i,j}$  e, portanto,  $z_1$  e  $y_1$  correspondem a componentes  $S(z_1)$

e  $S(y_1)$  em  $D_{i,j}$ , respectivamente. Como  $P_{i,j}$  é o fecho transitivo da condensação de  $D_{i,j}$ , não podemos afirmar que exista uma aresta partindo de

$S(z_1)$  para  $S(y_1)$  em  $D_{i,j}$ , mas temos a garantia de que existem vértices  $z, y$  em  $P_{i,j}$  tais que  $z \notin I$ ,  $y \in I$ ,  $(z, y) \in E(P_{i,j})$  e existe uma aresta partindo do

componente  $S(z)$  para  $S(y)$  em  $D_{i,j}$ . Logo, existem vértices  $u, v \in V(D_{i,j})$ , com  $u \in S(z)$ ,  $v \in S(y)$  e  $(u, v) \in E(D_{i,j})$ .

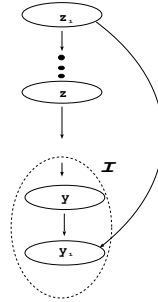


Figura 3.6: Existência de uma aresta que parte do componente  $S(z)$  para o componente  $S(y)$  em  $D_{i,j}$ .

Como  $z \notin I$  e  $u$  pertence ao componente fortemente conexo correspondente a  $z$ ,  $S(z)$ , segue que  $u \notin Q_1 \cup Q_2$ . Como  $y \in I$  e  $v$  pertence a  $S(y)$ , segue que  $v \in Q_1 \cup Q_2$  e, conseqüentemente,  $v$  deve pertencer a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ .

Suponhamos inicialmente que  $v$  pertença a  $Q_1$ . Temos duas possibilidades para  $u$  e  $v$  em  $G$ :  $(u, v) \in E(G)$  ou não. Se  $(u, v) \in E(G)$ , as hipóteses  $v \in Q_1$  e  $u \notin Q_1 \cup Q_2$  implicam, pela definição de par modular, que  $u$  é adjacente a todos os vértices de  $Q_1$  e, aplicando a partição dos vértices de  $G$ , concluímos que  $u$  deve pertencer a  $AQ_1$ , a  $AQ_2$ , a  $S_1Q_1$  ou a  $S_1Q_2$ . Ainda,  $v$  pertence a  $AQ_1$ , a  $S_1Q_1$ , a  $S_2Q_1$  ou a  $NQ_1$  e, por argumento análogo ao da Proposição 3.1.1, segue a contradição de que não existe aresta  $(u, v)$  em  $D_{i,j}$ . Se  $(u, v) \notin E(G)$ , pela definição de par modular,  $u$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1$  e portanto  $u$  pertence a  $S_2Q_1$ , a  $S_2Q_2$ , a  $NQ_1$  ou a  $NQ_2$ . A mesma contradição que  $(u, v) \notin E(D_{i,j})$  decorre por argumentos análogos aos da Proposição 3.1.1.

Consideremos agora  $v \in Q_2$ . Se  $(u, v) \in E(G)$ ,  $u$  deve ser adjacente a todos os vértices de  $Q_2$ . Então  $u$  pertence a  $AQ_1$ , a  $AQ_2$ , a  $S_2Q_1$  ou a  $S_2Q_2$ . Também,  $v$  pertence a  $AQ_2$ , a  $S_1Q_2$ , a  $S_2Q_2$  ou a  $NQ_2$ . Similarmente, obtemos  $(u, v) \notin E(D_{i,j})$ . Se  $(u, v) \notin E(G)$ ,  $u$  pode pertencer a  $S_1Q_1$ , a  $S_1Q_2$ , a  $NQ_1$  ou a  $NQ_2$ , e concluímos que  $(u, v) \notin E(D_{i,j})$ .

Portanto, em todas as possibilidades, verificamos que  $(u, v) \notin E(D_{i,j})$ , o que é uma contradição. Logo,  $I$  é um ideal de  $P_{i,j}$ .

Reciprocamente, seja  $I$  ideal de  $P_{i,j}$ . Vamos exibir um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$ , com  $q_i \in Q_1$ ,  $q_j \in Q_2$ , e que corresponda ao ideal  $I$ . Sejam  $x \in V(P_{i,j})$  e  $S(x)$  sua expansão, e seja  $Q_1 \cup Q_2 = \{q_i, q_j\} \cup_{x \in I} S(x)$ . Provaremos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ . Nos casos em que  $I = \emptyset$  ou  $I = V(P_{i,j})$ , temos  $Q_1 \cup Q_2 = \{q_i, q_j\}$  ou  $Q_1 \cup Q_2 = V(G) \setminus \{s_i\}$ , respectivamente, e é trivial verificarmos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ . Consideremos então que  $\{q_i, q_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $\{q_i, q_j\} \neq Q_1 \cup Q_2$  e

$V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_i\}) \neq \emptyset$ . Observemos que nos casos em que para todo vértice  $u$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ , ocorra:

- $u$  adjacente a todos os vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$  ou  $u$  não adjacente a nenhum vértice de  $Q_1$  e a nenhum vértice de  $Q_2$  ou
- $u$  adjacente a todos os vértices de  $Q_1$  e não adjacente a nenhum vértice de  $Q_2$  ou
- $u$  adjacente a todos os vértices de  $Q_2$  e não adjacente a nenhum vértice de  $Q_1$ ,

então, por definição,  $\{Q_1, Q_2\}$  é também par modular de  $G$ . Ainda, nos casos em que para todo vértice  $u \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ , tenhamos:

- $u$  adjacente a todos os vértices de  $Q_1$  ou a nenhum de seus vértices, e existir vértice  $w \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  tal que  $w$  seja adjacente a apenas uma parte dos vértices de  $Q_2$  ou
- $u$  adjacente a todos os vértices de  $Q_2$  ou a nenhum de seus vértices, e existir vértice  $w \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  tal que  $w$  seja adjacente a apenas uma parte dos vértices de  $Q_2$ ,

então  $\{Q_1, \{q_j\}\}$  é ainda um par modular, caso ocorra o primeiro caso, ou  $\{\{q_i\}, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ , no segundo caso, correspondendo ao ideal  $I$ .

Suponhamos portanto que existam vértices  $u$  e  $w$  em  $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  tais que  $u$  e  $w$  sejam adjacentes a apenas uma parte dos vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente. Provaremos que isto não pode ocorrer e que portanto existe um par modular em  $G$  correspondente a  $I$ . A suposição acima nos garante que existem vértices  $y_1, y_2 \in Q_1, z_1, z_2 \in Q_2$  tais que  $(y_1, u) \in E(G)$ ,

$(y_2, u) \notin E(G)$ , e  $(z_1, w) \in E(G)$  e  $(z_2, w) \notin E(G)$ .

Afirmamos inicialmente que  $y_1 \neq q_i$  e  $y_2 \neq q_i$ . Com efeito, suponhamos, por absurdo, que  $y_1 = q_i$ . Nesse caso,  $(u, q_i) \in E(G)$  e portanto  $u$  pode pertencer a  $AQ_1$ , a  $AQ_2$ , a  $S_1Q_1$  ou a  $S_1Q_2$ . Também  $y_2$  pode pertencer a  $AQ_1$ , a  $S_1Q_1$ , a  $S_2Q_1$  ou a  $NQ_1$ . Como  $(u, y_2) \notin E(G)$ , temos os seguintes casos a considerar:

**Caso 1:**

$u \in AQ_1$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  
 $u \in AQ_2$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_2Q_1$  ou  
 $u \in S_1Q_1$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  
 $u \in S_1Q_2$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_2Q_1$ .

Por (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) da construção do digrafo  $D_{i,j}$ , segue que  $(u, y_2)$ ,  $(y_2, u) \in E(D_{i,j})$  e portanto  $u$  e  $y_2$  pertencem a um mesmo componente fortemente conexo em  $D_{i,j}$ . Entretanto,  $y_2 \neq y_1$ , com  $y_1 = q_i$  e  $y_2 \neq q_j$  (pois  $y_2 \in Q_1$ ), com  $y_2 \in Q_1 \cup Q_2 = \{q_i, q_j\} \cup_{x \in I} S(x)$ ; Portanto  $y_2 \in S(x)$ , para algum  $x \in I$ . Por outro lado,  $u \notin Q_1 \cup Q_2$  e conseqüentemente  $u \notin S(x)$ , para todo  $x$  em  $I$ , o que contradiz o fato de  $u$  e  $y_2$  pertencerem a um mesmo componente fortemente conexo. Logo, o caso 1 não pode ocorrer.

**Caso 2:**

$u \in AQ_1$  e  $y_2 \in S_2Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$  ou  
 $u \in AQ_2$  e  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$  ou  
 $u \in S_1Q_1$  e  $y_2 \in S_2Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$  ou  
 $u \in S_1Q_2$  e  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$ .

Por (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) e (3.1) da construção do digrafo  $D_{i,j}$ , segue que  $(u, y_2) \in E(D_{i,j})$ . Do fato de  $y_2 \in S(x)$ , para algum  $x \in I$ , e  $u \notin S(x)$ , para todo  $x$  em  $I$ , decorre que  $u$  e  $y_2$  pertencem a componentes fortemente conexos distintos. Sejam então  $x_1, x_2 \in V(P_{i,j})$  reduções de  $S(u)$  e  $S(y_2)$  em  $P_{i,j}$ , respectivamente. Como  $u$  não pertence a  $Q_1 \cup Q_2 = \{q_i, q_j\} \bigcup_{x \in I} S(x)$ , temos  $x_1 \notin I$ . Como  $y_2$  pertence a  $Q_1 \cup Q_2$ , temos  $x_2 \in I$ . Mas,  $(u, y_2) \in E(D_{i,j})$  implica  $(x_1, x_2) \in E(P_{i,j})$ , o que contradiz o fato de  $I$  ser ideal de  $P_{i,j}$ .

Logo, em ambos os casos, obtemos uma contradição, e concluímos que  $y_1 \neq q_i$ .

Analogamente, suponhamos  $y_2 = q_i$ . Nesse caso,  $(u, q_i) \notin E(G)$  e  $u$  pode pertencer a  $S_2Q_1$ , a  $S_2Q_2$ , a  $NQ_1$  ou a  $NQ_2$ . Também,  $y_1$  pode pertencer a  $AQ_1$ , a  $S_1Q_1$ , a  $S_2Q_1$  ou a  $NQ_1$ . Como  $(u, y_1) \in E(G)$ , temos os seguintes casos a considerar:

**Caso 1:**

- $u \in S_2Q_1$  e  $y_1 \in S_2Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$  ou
- $u \in S_2Q_2$  e  $y_1 \in S_1Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$  ou
- $u \in NQ_1$  e  $y_1 \in S_2Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$  ou
- $u \in NQ_2$  e  $y_1 \in S_1Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$ .

Por (4.2), (4.3), (4.4) e (4.6) da construção de  $D_{i,j}$ , segue que  $(u, y_1), (y_1, u) \in E(D_{i,j})$  e a contradição decorre do fato de  $u$  e  $y_1$  pertencerem a componentes fortemente conexos distintos em  $D_{i,j}$ .

**Caso 2:**

- $u \in S_2Q_1$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_1Q_1$  ou
- $u \in S_2Q_2$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_2Q_1$  ou

$u \in NQ_1$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_1Q_1$  ou  
 $u \in NQ_2$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_2Q_1$ .

Por (5.1), (5.3) e (5.5) da construção de  $D_{i,j}$ , segue que  $(u, y_1) \in E(D_{i,j})$ . Do fato de  $y_1$  e  $u$  pertencerem a componentes fortemente conexos distintos, consideremos  $x_1, x_2 \in V(P_{i,j})$  as reduções de  $S(u)$  e  $S(y_1)$  em  $P_{i,j}$ , respectivamente. Como  $u \notin Q_1 \cup Q_2$  e  $y_1 \in Q_1 \cup Q_2$ , obtemos  $x_1 \notin I$  e  $x_2 \in I$ . Mas,  $(u, y_1) \in E(D_{i,j})$  implica  $(x_1, x_2) \in E(P_{i,j})$ , o que contradiz a hipótese de  $I$  ser ideal de  $P_{i,j}$ .

Portanto, concluímos que  $y_1 \neq q_i$  e  $y_2 \neq q_i$ . De forma análoga, verifica-se que  $z_1 \neq q_j$  e  $z_2 \neq q_j$ .

O restante da demonstração se resume em provar que não existem vértices  $u$  e  $w$  que sejam adjacentes a apenas uma parte dos vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente. Para tal, observemos primeiramente que  $y_1 \in Q_1 \setminus \{q_i\}$  implica em  $y_1 \in S(x)$ , para algum  $x \in I$ . Por outro lado,  $u \notin S(x)$ , para todo  $x \in I$ . Consequentemente,  $u$  e  $y_1$  pertencem a componentes fortemente conexos distintos. Por argumento similar, concluímos que  $u$  e  $y_2$  também pertencem a componentes conexos distintos. Utilizaremos estes resultados durante o restante da demonstração.

Verificaremos todas as possibilidades para  $u$  na partição dos vértices de  $V_{i,j}$  e provaremos que para todos os casos há uma contradição em relação a  $y_1$  ou em relação a  $y_2$ :

**Caso 1:**

Se  $u \in AQ_1$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  
Se  $u \in AQ_2$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_2Q_1$  ou

Se  $u \in S_1Q_1$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_1Q_1$  ou

Se  $u \in S_1Q_2$  e  $y_2 \in AQ_1$  ou  $y_2 \in S_2Q_1$ ,

por (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) da construção do digrafo  $D_{i,j}$ , obtemos as arestas  $(u, y_2)$  e  $(y_2, u)$  em  $D_{i,j}$ , o que implica em  $u$  e  $y_2$  pertencerem a um mesmo componente conexo em  $D_{i,j}$ . Contradição.

**Caso 2:**

Se  $u \in AQ_1$  e  $y_2 \in S_2Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$  ou

Se  $u \in AQ_2$  e  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$  ou

Se  $u \in S_1Q_1$  e  $y_2 \in S_2Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$  ou

Se  $u \in S_1Q_2$  e  $y_2 \in S_1Q_1$  ou  $y_2 \in NQ_1$ ,

por (2.1), (2.2), (2.3), (2.5) e (3.1), obtemos a aresta  $(u, y_2) \in E(D_{i,j})$ . Como  $u$  e  $y_2$  pertencem a componentes fortemente conexos distintos, sejam  $x_1$  e  $x_2$  as reduções de  $S(u)$  e  $S(y_2)$  em  $P_{i,j}$ , respectivamente. Então  $u \notin Q_1 \cup Q_2$  implica  $x_1 \notin I$  e  $y_2 \in Q_1$  implica  $x_2 \in I$ . Entretanto, se  $(u, y_2) \in E(D_{i,j})$  então  $(x_1, x_2) \in E(P_{i,j})$ , o que contradiz a hipótese de  $I$  ser ideal de  $P_{i,j}$ .

**Caso 3:**

Se  $u \in S_2Q_1$  e  $y_1 \in S_2Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$  ou

Se  $u \in S_2Q_2$  e  $y_1 \in S_1Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$  ou

Se  $u \in NQ_1$  e  $y_1 \in S_2Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$  ou

Se  $u \in NQ_2$  e  $y_1 \in S_1Q_1$  ou  $y_1 \in NQ_1$ ,

por (4.2), (4.3), (4.4) e (4.6), segue que  $(u, y_1), (y_1, u) \in E(D_{i,j})$ , o que contradiz o fato de  $u$  e  $y_1$  não pertencerem a um mesmo componente fortemente conexo.

**Caso 4:**

Se  $u \in S_2Q_1$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_1Q_1$  ou

Se  $u \in S_2Q_2$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_2Q_1$  ou

Se  $u \in NQ_1$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_1Q_1$  ou

Se  $u \in NQ_2$  e  $y_1 \in AQ_1$  ou  $y_1 \in S_2Q_1$ ,

por (5.1), (5.3) e (5.5), obtemos a aresta  $(u, y_1)$  em  $D_{i,j}$  e, por argumento análogo ao caso 2, chegamos a uma contradição.

Portanto, em todas as possibilidades para  $u$ , não existe vértice  $u \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_i\})$  que seja parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ .

De modo similar, verificamos que não existe vértice  $w \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2 \cup \{s_i\})$  que seja parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ .

Logo, concluímos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ .

□

### 3.3 Um exemplo da Representação para Pares Modulares

Consideremos o grafo  $G$  dado pela Figura 3.7. Vamos apresentar um exemplo que ilustra os resultados do Teorema 3.2:

Neste exemplo, consideremos  $q_i = 2$ ,  $q_j = 12$  e  $s_i = 5$ . Observemos que  $(2, 5) \in E(G)$  e  $(12, 5) \notin E(G)$  e portanto a tripla de vértices satisfaz a condição para a construção do digrafo par modular. O conjunto  $V_{i,j} = V(G) \setminus \{2, 12, 5\}$  é particionado nos conjuntos:

$$AQ_1 = \emptyset$$



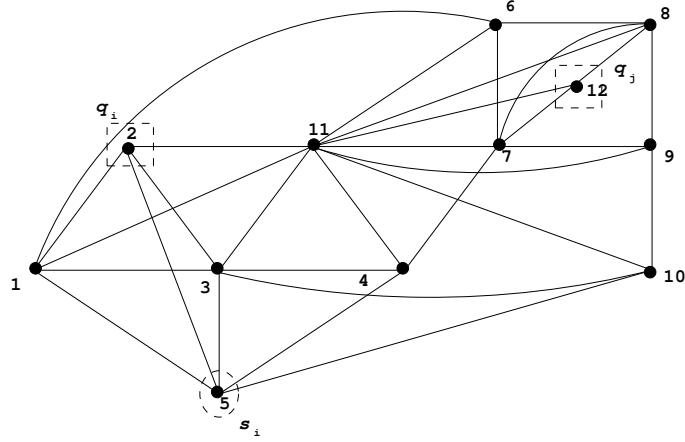


Figura 3.7: Exemplo de grafo  $G$  para os resultados do Teorema 3.2.

$$AQ_2 = \{11\}$$

$$S_1Q_1 = \{1, 3\}$$

$$S_2Q_1 = \emptyset$$

$$S_1Q_2 = \emptyset$$

$$S_2Q_2 = \{7, 8\}$$

$$NQ_1 = \{4, 10\}$$

$$NQ_2 = \{9, 6\}$$

Pela construção do digrafo  $D_{i,j}$ , temos  $V(D_{i,j}) = \{1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

e

$$E(D_{i,j}) = \{(1, 11), (3, 11), (4, 11), (10, 11), (9, 11), (6, 11),$$

$$(4, 3), (6, 1), (1, 6), (10, 3), (4, 7), (7, 4), (9, 8), (6, 8),$$

$$(9, 10), (10, 9), (9, 7), (6, 7), (1, 10), (1, 4)\}$$

O digrafo  $D_{i,j}$  obtido é apresentado na Figura 3.8. Podemos observar, pela figura, que os componentes fortemente conexos do digrafo são  $S(x_1) = \{1, 6\}$ ,

$S(x_2) = \{9, 10\}$ ,  $S(x_3) = \{4, 7\}$ ,  $S(x_4) = \{3\}$ ,  $S(x_5) = \{8\}$  e  $S(x_6) = \{11\}$ .

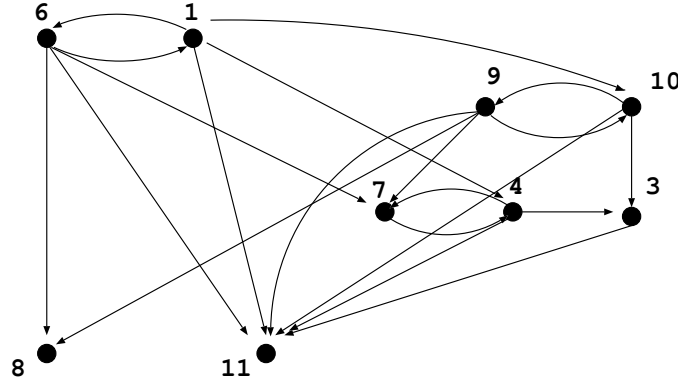


Figura 3.8: Digrafo par modular  $D_{i,j}$ .

Na Figura 3.9, representamos a ordem par modular associada ao digrafo da Figura 3.8. Os vértices  $x_1, x_2, \dots, x_6$  são as reduções dos componentes  $S(x_1), \dots, S(x_6)$ , respectivamente.

Os pares modulares do grafo  $G$  podem ser determinados pelo **Algoritmo Par Homogêneo**, citado no Apêndice A. Pelo Teorema 3.2, sabemos que há uma correspondência entre os pares modulares  $\{Q_1, Q_2\}$  contendo  $q_i = 2$  e  $q_j = 12$ , respectivamente, e os ideais de  $P_{i,j}$ :

- Para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2\}, Q_2 = \{6, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1\}$ ;
- Para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2, 10\}, Q_2 = \{6, 9, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1, x_2\}$ ;
- Para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2, 4, 10\}, Q_2 = \{6, 7, 9, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1, x_2, x_3\}$ ;

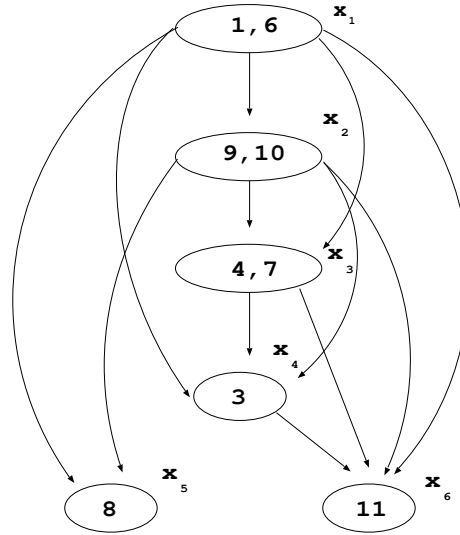


Figura 3.9: Ordem par modular associada ao digrafo.

- Para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2, 3, 4, 10\}, Q_2 = \{6, 7, 9, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ;
- Para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2, 3, 4, 10\}, Q_2 = \{6, 7, 8, 9, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ;
- Para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2, 3, 4, 10\}, Q_2 = \{6, 7, 9, 11, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$ ;
- E para o par modular  $\{Q_1 = \{1, 2, 3, 4, 10\}, Q_2 = \{6, 7, 8, 9, 11, 12\}\}$ , temos o ideal correspondente  $I = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ .

Observemos que, em todos os pares modulares acima citados,  $Q_1$  e  $Q_2$  não são conjuntos homogêneos de  $G$ .

**Observação 1:** Quando  $Q_1$  e  $Q_2$  são conjuntos homogêneos, recaímos no caso já estudado em [21] e existe uma correspondência biunívoca entre os

ideais de  $P_{i,j}$  e os conjuntos homogêneos em  $G$ .

**Observação 2:** No caso em que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ , com  $q_i \in Q_1$  e  $q_j \in Q_2$ , onde apenas um dos conjuntos é homogêneo, afirmamos que existem dois ideais distintos em  $P_{i,j}$ ,  $I$  e  $J$ , que correspondem, respectivamente, ao conjunto homogêneo e a  $Q_1 \cup Q_2$ . Com efeito, por [21], segue que existe um ideal  $I$  que corresponde ao conjunto homogêneo. Basta exibirmos um ideal  $J$  que corresponda a  $Q_1 \cup Q_2$ .

Sejam  $x \in V(P_{i,j})$  e  $S(x)$  sua expansão. Pela Proposição 3.1.1, todos os vértices de  $S(x)$  pertencem a  $Q_1 \cup Q_2$  ou nenhum deles pertence. E, pelo Lema 3.1, os vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  não pertencem a um mesmo componente fortemente conexo em  $D_{i,j}$ . Logo, dado um componente  $S(x)$ , se  $S(x) \subset Q_1 \cup Q_2$ , então  $S(x) \subseteq Q_1$  ou  $S(x) \subseteq Q_2$ .

Se  $S(x) \subseteq Q_1$ , colorimos o vértice  $x$  com a cor 1.

Se  $S(x) \subseteq Q_2$ , colorimos o vértice  $x$  com a cor 2.

Caso contrário,  $x$  recebe a cor 3.

Sejam  $J_k = \{x \in V(P_{i,j}); x \text{ tem cor } k\}$ ,  $k = 1, 2$ . Então  $Q_1 = \{q_i\} \cup_{x \in J_1} S(x)$  e  $Q_2 = \{q_j\} \cup_{x \in J_2} S(x)$ . Afirmamos que  $J = J_1 \cup J_2$  é um ideal de  $P_{i,j}$  correspondente a  $Q_1 \cup Q_2$ . De fato, suponhamos que  $J$  não seja um ideal de  $P_{i,j}$ . Nesse caso, existem vértices  $z, y$  em  $P_{i,j}$  tais que  $z \notin J$ ,  $y \in J$  e  $(z, y) \in E(P_{i,j})$ . Consequentemente, existem vértices  $u, v \in V(D_{i,j})$  tais que  $u \in S(z)$ ,  $v \in S(y)$  e  $(u, v) \in E(D_{i,j})$ .

Como  $z \notin J$ , temos  $u \notin Q_1 \cup Q_2$ . De  $y \in J$ , temos  $v \in Q_1 \cup Q_2$ . Logo,  $v$  pertence a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ , e utilizando argumentos análogos aos do Teorema 3.2, chegamos a uma contradição.

Portanto,  $J$  é um ideal de  $P_{i,j}$ .

Analisemos o grafo  $G$  representado na Figura 3.3. Afirmamos que os conjuntos  $Q_1 = \{3, 2, 11\}$  e  $Q_2 = \{8, 9\}$  formam um par modular do grafo  $G$ . Com efeito, podemos particionar o conjunto de vértices  $V(G)$  nos conjuntos  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $A = \{5\}$ ,  $S_1 = \{1, 4\}$ ,  $S_2 = \{10\}$  e  $N = \{6, 7\}$ . Logo,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ ; mas apenas  $Q_1$  é um conjunto homogêneo de  $G$  ( $Q_2$  não é um conjunto homogêneo porque o vértice 2 é adjacente ao vértice 9 e não é adjacente ao vértice 8). Se  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as reduções de  $S(x_1) = \{2\}$ ,  $S(x_2) = \{9\}$  e  $S(x_3) = \{11\}$ , respectivamente, os ideais  $I = \{x_1, x_3\}$  e  $J = \{x_1, x_2, x_3\}$  de  $P_{i,j}$  correspondem a  $Q_1$  e a  $Q_1 \cup Q_2$ , respectivamente.

# Capítulo 4

## Uma Representação para Pares Modulares de um Cografo

Assim como os módulos, o número de pares modulares de um grafo pode ser exponencial, como no caso de grafo completo, que é um cografo. No entanto, apresentamos neste capítulo uma forma de representar compactamente todos os pares modulares de um cografo  $G$ , usando a decomposição modular deste cografo.

### 4.1 Introdução

Aplicações em diferentes áreas da Ciência da Computação e Matemática Aplicada, tais como comunicações, transporte e programação, têm motivado o estudo de grafos que possuam certas propriedades de "densidade local". Um dos mais conhecidos exemplos deste tipo de grafos é a classe dos cografos.

Os *cografos* foram descobertos independentemente por vários pesquisadores. São também chamados grafos HD (*Hereditary Dacey graphs*) [32] e grafos completamente redutíveis [3].

No início dos anos 70, LERCHS [22, 23] estudou as propriedades estruturais dos cografos e provou que os cografos admitem uma única árvore de representação, chamada *co-árvore*. Este trabalho foi estendido por STEWART [31], que também desenvolveu um algoritmo de reconhecimento para os cografos de tempo  $O(n^2)$ . Mais tarde, CORNEIL, PERL e STEWART [5] apresentaram um algoritmo de reconhecimento de tempo linear para esta classe de grafos .

A co-árvore é a base de algoritmos de tempo polinomial para problemas tais como isomorfismo, número cromático, determinação de cliques máximas e Hamiltonicidade, que são problemas NP-difíceis para grafos em geral (veja [3, 4]).

CORNEIL, LERCHS e STEWART BURLINGHAM [3] caracterizaram os cografos como a classe de grafos que não contém caminhos induzidos de quatro vértices (ou  $P_4$ ). Nesse mesmo artigo, é apresentado um teorema que mostra a equivalência de diferentes caracterizações para esta classe de grafos, entre elas, a que mostra que os cografos são exatamente a classe dos grafos que não contém  $P_4$  como subgrafo induzido, que será enunciado na próxima seção.

Na Seção 4.3, mostramos como gerar os pares modulares  $\{Q_1, Q_2\}$  de um cografo  $G$  tais que ambos os conjuntos,  $Q_1$  e  $Q_2$ , são módulos de  $G$  ou sua união é um módulo, que é o caso básico do problema, e em seguida apresen-

tamos o procedimento para representar os pares modulares de um cografo, no caso não básico. Na Seção 4.4, enunciamos e provamos o teorema que generaliza o Teorema 2.3, do Capítulo 2, para o caso não básico de pares modulares de um cografo. Na Seção 4.5 mostramos que a complexidade do procedimento é  $O(n + m)$  e na Seção 4.6 damos um exemplo da execução do procedimento.

Uma parte dos resultados apresentados neste capítulo foi publicada em [19].

## 4.2 Cografos

Nesta seção, definimos os cografos e enunciaremos algumas propriedades para essa classe de grafos e um teorema que mostra a equivalência de diferentes caracterizações para os cografos. Primeiramente, vamos definir um cografo.

Um *cografo* é definido recursivamente como:

- (i) Um grafo de um único vértice é um cografo;
- (ii) Se  $G_1, G_2, \dots, G_k$  são cografos então sua união  $G_1 \cup \dots \cup G_k$  também um cografo;
- (iii) Se  $G$  é um cografo então  $\overline{G}$  também é um cografo.

Agora, vamos enunciar a propriedade de hereditariedade, provada em [3].

**Lema 4.1.** *Todo subgrafo de um cografo é também um cografo.*

Outra propriedade é que os cografos são perfeitos. Com efeito, JUNG [16] mostrou que  $G$  é um cografo se, e somente se,  $G$  é o grafo de comparabilidade



de uma multi-árvore. E como grafos de comparabilidade são perfeitos, segue que os cografos são perfeitos.

STEWART [31] mostrou a relação dos cografos com outras classes de grafos.

Para enunciar o teorema que mostra a equivalência de diferentes caracterizações para os cografos, precisaremos de algumas definições.

Dois vértices  $u$  e  $v$  são *gêmeos* se  $N(u) \setminus \{v\} = N(v) \setminus \{u\}$ .

Um *núcleo* (ou *kernel*) de um grafo é um conjunto independente maximal. Um grafo tem a *propriedade de interseção clique-kernel* (ou *propriedade CK*) se toda clique maximal de  $G$  tem um vértice em comum com todo kernel de  $G$ .

Um grafo  $G = (V(G), E(G))$  é um *grafo Dacey* se, para toda clique maximal  $K$  de  $G$  e todo par de vértices distintos  $u$  e  $v$ , temos que se  $K \subseteq N[u] \cup N[v]$  então  $(u, v) \in E(G)$ . Um grafo é um *grafo HD* ou *grafo Hereditary Dacey* se todo subgrafo induzido é um grafo Dacey.

Agora, enunciaremos o teorema que relaciona diferentes caracterizações para cografos, provado por CORNEIL, LERCHS e STEWART BURLINGHAM [3].

**Teorema 4.2.** *Dado um grafo  $G$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  *$G$  é um cografo.*
- (2) *Todo subgrafo não trivial de  $G$  tem ao menos um par de gêmeos.*
- (3) *Todo subgrafo de  $G$  tem a propriedade CK.*

- (4)  $G$  não contém  $P_4$  como subgrafo induzido.
- (5) O complemento de qualquer subgrafo conexo não trivial de  $G$  é desconexo.
- (6)  $G$  é um grafo HD.
- (7) Todo subgrafo conexo de  $G$  tem diâmetro menor ou igual a 2.

Decorre do Teorema 4.2 (equivalência (1)  $\Leftrightarrow$  (5)) que  $G$  é um cografo se, e somente se,  $G$  não contém módulos vizinhança. Logo, dado um cografo  $G$ , os nós internos da co-árvore (que é a árvore de decomposição modular de  $G$ ) são módulos seriais ou paralelos, de modo que os módulos seriais e paralelos alternam-se ao longo de todo caminho começando da raiz. As folhas da co-árvore são os vértices do grafo.

Os filhos de um módulo paralelo (serial) são completamente desconectados (respectivamente completamente conectados) entre si. Dois vértices  $v$  e  $w$  de um cografo  $G$  são adjacentes se, e somente se, o único caminho de  $v$  à raiz da árvore  $T(G)$  encontra o único caminho de  $w$  à raiz num nó serial. Em outras palavras,  $v$  e  $w$  são adjacentes em  $G$  se, e somente se, o mais próximo ancestral comum entre  $v$  e  $w$  é um nó serial em  $T(G)$ .

Na Figura 4.1, apresentamos um exemplo de cografo.

Como  $M = V(G)$  não é conexo em  $\overline{G}$ , a raiz da co-árvore é um módulo serial, que rotularemos por  $S_1$ , e seus filhos são os componentes fortemente conexos de  $\overline{G}$  (que são módulos paralelos). A co-árvore  $T(G)$  é dada pela Figura 4.2.

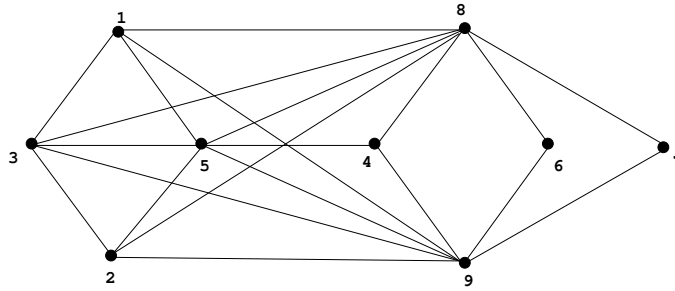


Figura 4.1: Exemplo de um cografo  $G$ .

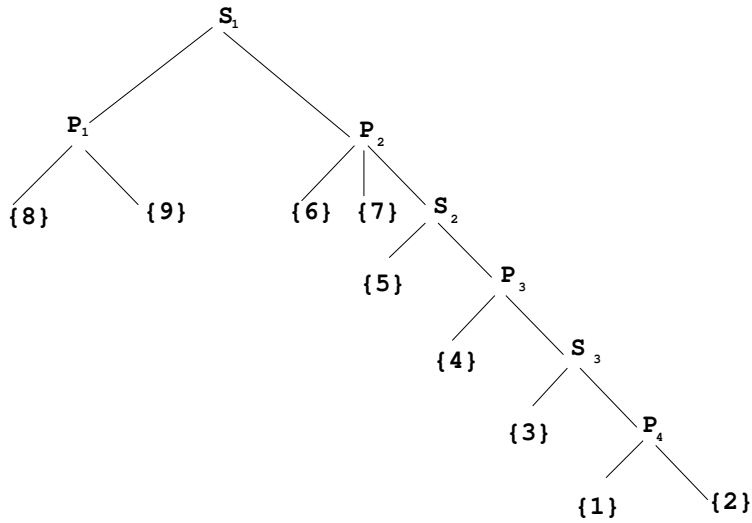


Figura 4.2: Co-árvore de um cografo  $G$ .

### 4.3 Procedimento para Pares Modulares de um Cografo

Primeiramente, daremos uma representação implícita dos pares modulares  $\{Q_1, Q_2\}$  tais que ambos  $Q_1$  e  $Q_2$  são módulos de  $G$  ou sua união,  $Q_1 \cup Q_2$ , é um módulo de  $G$ , que consideraremos o caso básico do problema.

O próximo corolário é um resultado direto do Teorema 2.3.

**Corolário 4.3.** *Sejam um grafo  $G$  e um par de módulos disjuntos  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$ . Então  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ .*

Usando o Corolário 4.3 e o Teorema 2.3, temos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de um cografo  $G$  tal que ambos  $Q_1$  e  $Q_2$  são módulos de  $G$  se, e somente se, cada um deles é um nó da árvore de decomposição  $T(G)$  ou uma união de filhos de um nó interno de  $T(G)$ .

Observemos que se  $Q_1 \cup Q_2$  é um módulo de  $G$  tal que  $|Q_1 \cup Q_2| \geq 3$ , qualquer partição em dois conjuntos de  $Q_1 \cup Q_2$  gera um par modular de  $G$ .

Com o objetivo de representar os pares modulares de um cografo  $G$  no caso não básico do problema, precisaremos de algumas definições e resultados, que serão utilizados na Seção 4.4.

Dados um cografo  $G$ , sua co-árvore  $T(G)$  e um subconjunto não-vazio  $Q$  de  $V(G)$ , dizemos que um nó  $M$  de  $T(G)$  é *maximal relativo a  $Q$*  se  $M$  é a raiz de uma subárvore maximal  $T_M(G)$  de  $T(G)$  tal que todas as folhas de  $T_M(G)$  pertencem a  $Q$ .

**Lema 4.4.** *Sejam um cografo  $G$ , sua co-árvore  $T(G)$  e um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$ . Suponha que um nó  $M$  de  $T(G)$  contenha vértices que pertençam a  $Q_1$  ( $Q_2$ ) mas não contenha vértices pertencentes a  $Q_2$  (respectivamente  $Q_1$ ). Se  $M$  possui algum irmão em  $T(G)$  que contenha vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ , então  $M$  é maximal relativo a  $Q_1$  (respectivamente  $Q_2$ ).*

*Demonstração.* Seja  $M$  um nó de  $T(G)$  que contém vértices de  $Q_1$  e não contém vértices de  $Q_2$  e que possui algum irmão  $N$ , em  $T(G)$ , contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

Primeiramente vamos mostrar que todos os vértices de  $M$  devem pertencer a  $Q_1$ . Para tal, suponhamos, por absurdo, que existam vértices  $v$  em  $M$  tais que  $v \notin Q_1$ . Como  $M$  não contém vértices de  $Q_2$ ,  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ .

Como  $G$  é um cografo, o nó  $M$  é serial ou paralelo. Se  $M$  é paralelo, todos os seus vértices são adjacentes aos vértices de  $N$ . Então os vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ , em  $M$ , são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $N$  e, conseqüentemente, também devem ser adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $M$  (pois  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ ). Então o nó  $M$  é formado por vértices pertencentes a  $Q_1$  e por vértices  $v \notin Q_1$ , que são adjacentes a todo vértice de  $Q_1$  em  $M$ . Portanto,  $M$  é conexo, o que contradiz a suposição de  $M$  ser um módulo paralelo (que é, por definição, desconexo). Se  $M$  é serial, os vértices de  $M$  não são adjacentes a nenhum vértice de  $N$ . Então, os vértices  $v$  não pertencentes a  $Q_1 \cup Q_2$ , em  $M$ , também não podem ser adjacentes a nenhum vértice de  $Q_1$  em  $M$ . Então  $M$  é desconexo, o que é uma contradição.

Das contradições, podemos concluir que todos os vértices de  $M$  pertencem a  $Q_1$ .

Consideremos a subárvore  $T_M(G)$  de  $T(G)$ , cuja raiz é o nó  $M$ . Como todos os vértices de  $M$  pertencem a  $Q_1$ , naturalmente todas as folhas de  $T_M(G)$  pertencem a  $Q_1$ . Para completarmos a prova do lema, basta provarmos a maximalidade de  $T_M(G)$ . Para isso, suponhamos que exista uma subárvore  $T_{M_1}$ , de  $T(G)$ , que contenha propriamente  $T_M(G)$ . Conseqüentemente, a raiz de  $T_{M_1}$  é um ancestral de  $M$  e, sendo  $M$  e  $N$  irmãos em  $T(G)$ , a raiz de  $T_{M_1}$  também é um ancestral de  $N$ , que contém vértices de  $Q_2$ . Então, a raiz de  $T_{M_1}$  contém vértices de  $Q_2$  e portanto nem todas as folhas de  $T_{M_1}$  pertencem a  $Q_1$ . Assim, concluímos que  $T_M(G)$  é subárvore maximal de  $T(G)$  tal que todas as suas folhas pertencem a  $Q_1$  e, portanto,  $M$  é maximal relativo a  $Q_1$ .

O argumento é análogo no caso em que  $M$  contém vértices de  $Q_2$  e não contém vértices de  $Q_1$ .  $\square$

Sejam um cografo  $G$ , sua co-árvore  $T(G)$  e  $k$  nós disjuntos  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $T(G)$ . Dizemos que um vértice  $v \in V(G)$ ,  $v \notin M_j$ , para todo  $j = 1, \dots, k$ , é *compatível* com  $M_1, \dots, M_k$  se o mais próximo ancestral comum entre  $v$  e cada  $M_j$  é um nó serial ou, para todo  $M_j$ , o mais próximo ancestral comum entre  $v$  e cada  $M_j$  é um nó paralelo.

Seja  $\{Q_1, Q_2\}$  um par de subconjuntos disjuntos não-vazios de  $V(G)$ . Suponha que  $Q_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} M_j$  e  $Q_2 = \bigcup_{i=1}^{k_2} N_i$ , onde os  $M_j$  e  $N_i$  são nós disjuntos de  $T(G)$ . Temos o seguinte resultado:

**Proposição 4.3.1.** *Sejam um cografo  $G$  e sua co-árvore  $T(G)$ .  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  se, e somente se, cada vértice  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é compatível com  $M_1, \dots, M_{k_1}$  e com  $N_1, \dots, N_{k_2}$ .*

*Demonstração.* Se  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ , cada vértice  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é adjacente a todo vértice de  $Q_1$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices. Se  $v$  é adjacente a todo vértice de  $Q_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} M_j$ , o mais próximo ancestral comum entre  $v$  e  $M_j$  é um nó serial, para todo  $j = 1, \dots, k_1$ . Se  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1$ , o mais próximo ancestral comum entre  $v$  e  $M_j$  é um nó paralelo, para todo  $j = 1, \dots, k_1$ . Logo, cada vértice  $v$  é compatível com  $M_1, \dots, M_{k_1}$ . O argumento é similar para  $N_1, \dots, N_{k_2}$ .

Reciprocamente, se cada vértice  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é compatível com  $M_1, \dots, M_{k_1}$  e com  $N_1, \dots, N_{k_2}$ , então  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $M_1, \dots, M_{k_1}$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices e é adjacente

a todos os vértices de  $N_1, \dots, N_{k_2}$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices. Consequentemente,  $v$  é adjacente a todo vértice de  $Q_i$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices,  $i = 1, 2$ . Como, por hipótese,  $Q_1$  e  $Q_2$  são subconjuntos não-vazios de  $V(G)$ , temos  $|Q_1| \geq 1$  e  $|Q_2| \geq 1$ . Logo,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ .  $\square$

Estamos prontos para descrever agora nosso procedimento. Dado um cografo  $G$ , sua co-árvore  $T(G)$  e um nó interno  $r_l$  de  $T(G)$ , vamos determinar um par de subconjuntos disjuntos de vértices de  $r_l$ , que provaremos, na próxima seção, ser um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$ , tal que ao menos um dos conjuntos,  $Q_1$  ou  $Q_2$ , não é um módulo de  $G$  e  $Q_1 \cup Q_2$  também não é um módulo de  $G$ . Mais ainda, provaremos que todo par modular, no caso não básico, pode ser obtido pelo procedimento.

Observemos que, se um nó interno  $r_l$  de  $T(G)$  contém apenas folhas como filhos (ou seja, não contém filhos não triviais em  $T(G)$ ), temos, pelo Teorema 2.3, que qualquer união não-vazia de filhos de  $r_l$  é um módulo de  $G$  e, portanto, todo par  $\{Q_1, Q_2\}$  de subconjuntos disjuntos de vértices de  $r_l$  é tal que ambos os conjuntos são módulos de  $G$ . Por essa razão, ao tomarmos como entrada um nó interno de  $T(G)$ , consideraremos que esse nó possua pelo menos um filho que não seja folha de  $T(G)$ .

## Procedimento Par Modular para Cografos

Entrada: Um cografo  $G$ , sua co-árvore  $T(G)$  e um nó interno  $r_l$  de  $T(G)$ , num nível  $l$ , e que contém pelo menos um filho que não é folha.

Saída: Um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de subconjuntos disjuntos de vértices de  $r_l$  tal que pelo menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$  e sua união também não é um módulo de  $G$ .

**Passo 1:** Selecione uma união de filhos de  $r_l$  de modo que pelo menos um filho não folha não seja selecionado.

**Passo 2:** Considere  $r_{l+1}$  um filho não folha de  $r_l$  que não tenha sido selecionado no passo 1. Desça em profundidade a árvore, ao longo de uma subárvore de  $T(G)$ , que tenha  $r_{l+1}$  como raiz, até um nó  $r_{l+k}$ ,  $k \geq 2$ . Suponha que a sequência de visita tenha sido  $r_{l+1}, \dots, r_{l+k}$ .

**Passo 3:** Selecione todos os irmãos de  $r_{l+2}, \dots, r_{l+k}$ , e selecione uma união de filhos de  $r_{l+k}$  (mas não todos os filhos). Tome  $Q_1$  como a união de todos os nós selecionados nos níveis  $l + (2p - 1)$ ,  $p \geq 1$ , e  $Q_2$  como a união de todos os nós selecionados nos níveis  $l + 2p$ ,  $p \geq 1$ .

## 4.4 Uma Representação para Pares Modulares de um Cografo

Nesta seção, vamos provar que, usando o **Procedimento Par Modular para Cografos**, podemos representar todos os pares modulares de um cografo, no caso não básico.



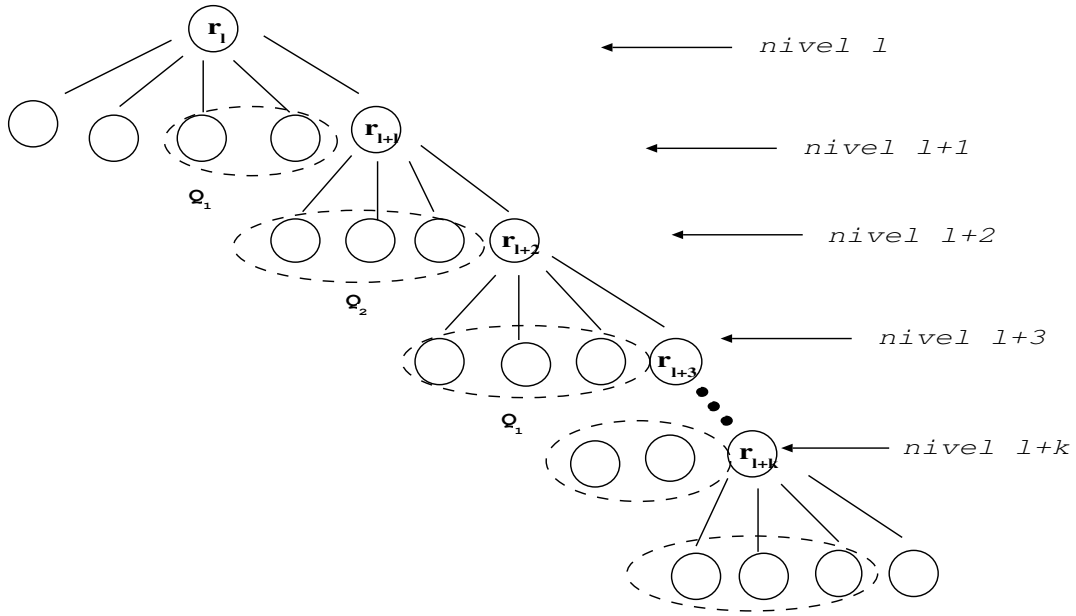


Figura 4.3: Procedimento Par Modular para Cografos.

**Teorema 4.5.** *Sejam um cografo  $G$ , sua co-árvore  $T(G)$  e um par de subconjuntos disjuntos não-vazios de vértices  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$  tal que pelo menos um dos conjuntos,  $Q_1$  ou  $Q_2$ , não seja um módulo de  $G$  e  $Q_1 \cup Q_2$  também não seja um módulo de  $G$ . Então  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  se, e somente se,  $\{Q_1, Q_2\}$  for obtido pelo **Procedimento Par Modular para Cografos**.*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Sejam  $G$  um cografo,  $T(G)$  sua co-árvore e  $\{Q_1, Q_2\}$  um par de subconjuntos disjuntos não vazios de vértices de  $G$ , obtidos a partir do procedimento. Observemos primeiramente que, como não tomamos todos os filhos de  $r_{l+k}$ , temos, pelo Teorema 2.3, que  $Q_1 \cup Q_2$  não é um módulo de  $G$ . Ainda, como  $k$  é maior ou igual a 2,  $Q_1$  não é uma união de filhos de um nó interno de  $T(G)$  (e não é um nó interno de  $T(G)$ ), e portanto, pelo menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$ .

Vamos agora provar que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  e, para isso, basta provarmos que, para todo vértice  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ ,  $v$  é compatível com todos os nós que formam  $Q_1$  e  $Q_2$ . Há três possibilidades para os vértices  $v$ .

**1ª possibilidade:** No passo 3 do procedimento, nem todos os filhos de  $r_{l+k}$  são selecionados.

Consideremos os vértices  $v$  pertencentes a esses nós não selecionados. Pelo procedimento, os mais próximos ancestrais comuns entre os nós que formam  $Q_1$  e os nós que contém os vértices  $v$  são da forma  $r_{l+2p}$ ,  $p \geq 0$ , que são todos seriais ou todos paralelos. Portanto, os vértices  $v$  são compatíveis com os nós que formam  $Q_1$ . Também, os mais próximos ancestrais comuns entre os nós que formam  $Q_2$  e os nós que contém os vértices  $v$  são da forma  $r_{l+2p-1}$ ,  $p \geq 1$ , e portanto os vértices  $v$  também são compatíveis com os nós que formam  $Q_2$ .

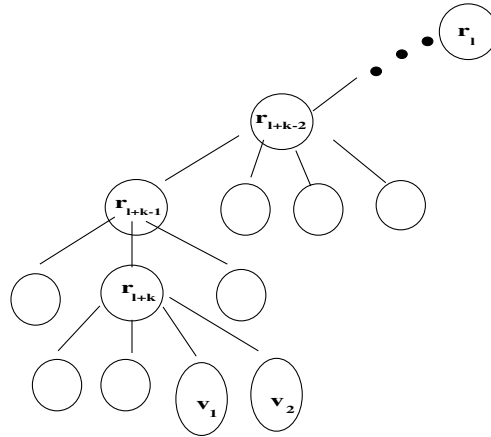


Figura 4.4: 1ª possibilidade: Nem todos os filhos de  $r_{l+k}$  são selecionados.

**2ª possibilidade:** Consideremos a possibilidade de, no passo 1, nem todos os filhos de  $r_l$  serem selecionados.

Nesse caso, a 2ª possibilidade equivale a considerar que algum irmão de  $r_{l+1}$  não tenha sido selecionado. Consideremos os vértices  $v$  pertencentes a esse nó. Então cada  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  e o mais próximo ancestral comum entre cada um dos vértices  $v$  e os nós que formam  $Q_1 \cup Q_2$  é exatamente o nó  $r_l$ . Logo, cada vértice  $v$  é compatível com  $Q_1 \cup Q_2$ .

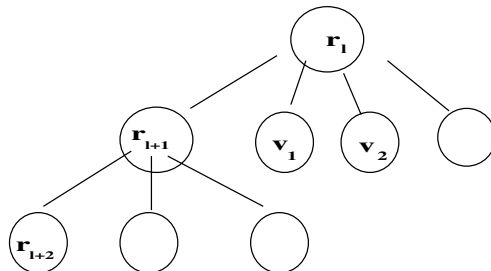


Figura 4.5: 2ª possibilidade: No passo 1 do procedimento, nem todos os filhos de  $r_l$  foram selecionados.

**3ª possibilidade:** Consideremos a possibilidade do nó  $r_l$  não ser a raiz da co-árvore  $T(G)$ .

Nesse caso, existem vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  que pertencem a nós não descendentes de  $r_l$ . Também, o mais próximo ancestral comum entre  $Q_1 \cup Q_2$  e cada um desses nós é um nó serial ou paralelo. Logo, os vértices  $v$  são compatíveis com  $Q_1 \cup Q_2$ .

Como todo vértice  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  é compatível com os nós que formam  $Q_1$  e  $Q_2$ , temos, pela Proposição 4.3.1, que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ .

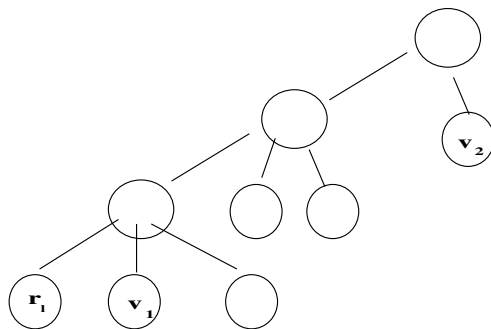


Figura 4.6: 3ª possibilidade: O nó  $r_l$  não é a raiz da co-árvore  $T(G)$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja agora  $\{Q_1, Q_2\}$  um par modular de  $G$  tal que pelo menos um dos conjuntos não seja um módulo de  $G$  e  $Q_1 \cup Q_2$  não seja um módulo de  $G$ . Da hipótese de pelo menos um dos conjuntos não ser um módulo de  $G$  (e  $\{Q_1, Q_2\}$  ser um par modular de  $G$ ), obtemos, pelo Teorema 2.1, que os vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  são parcialmente adjacentes entre si.

Vamos provar construtivamente que o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo procedimento.

Como todo vértice de  $G$  é uma folha de  $T(G)$ , seja  $T_l$  a subárvore minimal de  $T(G)$  tal que sua raiz  $r_l$  contenha todos os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Denotemos por  $r_{l,1}, \dots, r_{l,k}$  os filhos de  $r_l$ , em  $T(G)$ , que contêm vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ ,  $k \geq 2$ . Observe que a condição  $k \geq 2$  é necessária para garantir a minimalidade de  $T_l$  (com efeito, se  $k$  fosse igual a 1, então  $r_{l,1}$  conteria todos os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , contrariando a minimalidade de  $T_l$ ).

Observemos que, da hipótese de  $Q_1 \cup Q_2$  não ser um módulo de  $G$ , temos, pelo Teorema 2.3, que  $Q_1 \cup Q_2$  não pode ser igual à união dos  $r_{l,i}$ , com cada  $r_{l,i}$  contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Então, devem existir nós  $r_{l,j}$  contendo

vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ .

1ª **afirmação**: Existe pelo menos um filho de  $r_l$  que contém vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

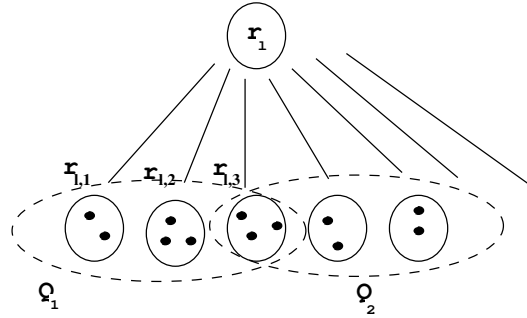


Figura 4.7: 1ª afirmação: Existe pelo menos um filho de  $r_l$  que contém vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

De fato, suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, suponha que cada  $r_{l,i}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , contenha vértices de  $Q_1$  e não de  $Q_2$  ou contenha vértices de  $Q_2$  e não de  $Q_1$ . Então os vértices de  $Q_1$  são adjacentes a todo vértice de  $Q_2$ , se  $r_l$  for serial, ou não são adjacentes a nenhum vértice de  $Q_2$ , se  $r_l$  for paralelo, o que contradiz a hipótese de os vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  serem parcialmente adjacentes entre si. Logo, a 1ª afirmação é verdadeira.

2ª **afirmação**: Os nós  $r_{l,j}$ , contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ , devem conter vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

Com efeito, pela 1ª afirmação, existe pelo menos um filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$  e, se algum outro filho  $r_{l,i}$ , de  $r_l$ , contiver vértices de  $Q_1$  e não contiver vértices de  $Q_2$  (ou contiver vértices de  $Q_2$  e não contiver vértices de  $Q_1$ ), teremos, pelo Lema 4.4, que  $r_{l,i}$  será maximal

relativo a  $Q_1$  (respectivamente maximal relativo a  $Q_2$ ). Logo, se  $r_{l,j}$  contém vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $r_{l,j}$  não pode conter vértices de  $Q_1$  e não de  $Q_2$  ou conter vértices de  $Q_2$  e não de  $Q_1$ , ou seja,  $r_{l,j}$  deve conter vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

**3ª afirmação:** Existe um único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

De fato, seja  $r_{l,j}$  filho de  $r_l$  contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Pela 2ª afirmação,  $r_{l,j}$  deve conter vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ . Suponha que a 3ª afirmação seja falsa. Então existe outro nó  $r_{l,q}$ , filho de  $r_l$ , que também contém vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ . Se  $r_l$  for serial, os vértices  $v$ , em  $r_{l,j}$ , são adjacentes aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l,q}$ . Consequentemente, os vértices  $v$  também são adjacentes aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l,j}$  (pois  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ ), o que conecta o nó. Mas isto é uma contradição com o fato de todo filho de  $r_l$  ser paralelo (e portanto desconexo). Se  $r_l$  for paralelo, os vértices  $v$ , em  $r_{l,j}$ , não são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  e nem aos de  $Q_2$  em  $r_{l,q}$ . Consequentemente, os vértices  $v$  também não são adjacentes a nenhum vértice de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l,j}$ , o que desconecta o nó. Contradição com o fato de todo filho de  $r_l$  ser serial (e portanto conexo). Das contradições, concluímos que existe um único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

Denotemos por  $r_{l+1}$  o único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$  e contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Então cada  $r_{l,i}$ , irmão de  $r_{l+1}$ , contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , contém vértices apenas de  $Q_1$  ou apenas de  $Q_2$

e, portanto é maximal relativo a  $Q_1$  ou maximal relativo a  $Q_2$ .

**4ª afirmação:** Os irmãos  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$  (contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ ) são todos maximais relativos a  $Q_1$  ou são todos maximais relativos a  $Q_2$ .

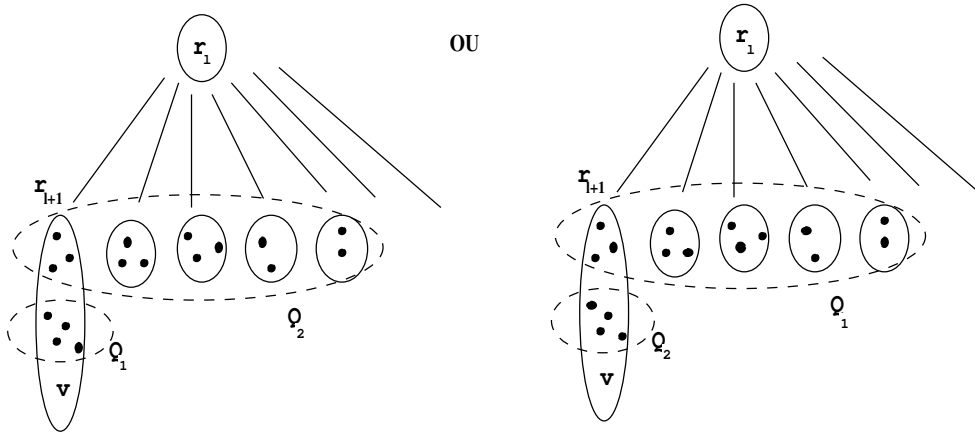


Figura 4.8: 4ª afirmação: Os irmãos  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$  são todos maximais relativos a  $Q_1$  ou são todos maximais relativos a  $Q_2$ .

Com efeito, suponha que a afirmação seja falsa. Então existem  $r_{l,q}$  e  $r_{l,p}$ , nós maximais relativos a  $Q_1$  e a  $Q_2$ , respectivamente, irmãos de  $r_{l+1}$ . Se  $r_l$  for serial, os vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+1}$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l,q}$  e aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l,p}$ . Consequentemente, os vértices  $v$  são também adjacentes aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+1}$ , o que conecta  $r_{l+1}$ . Contradição. Se  $r_l$  for paralelo, os vértices  $v$  em  $r_{l+1}$  não são adjacentes a nenhum vértice de  $Q_1$  em  $r_{l,q}$  e a nenhum vértice de  $Q_2$  em  $r_{l,p}$ . Então os vértices  $v$  não são adjacentes aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+1}$ , o que desconecta  $r_{l+1}$ . Contradição. Das contradições, concluímos que todo irmão  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$  é maximal relativo a  $Q_1$  ou todo irmão é maximal relativo a  $Q_2$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que todo irmão  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$  seja maximal relativo a  $Q_1$ .

As afirmações que se seguem serão relativas à decomposição recursiva do nó  $r_{l+1}$ .

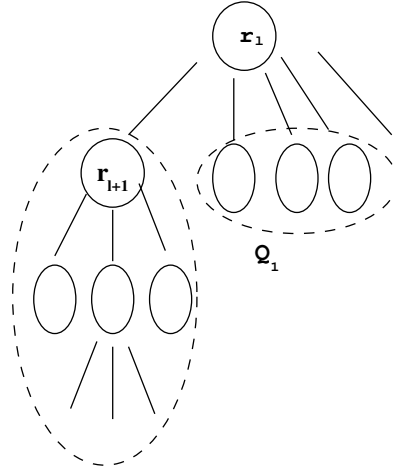


Figura 4.9: Decomposição recursiva do nó  $r_{l+1}$ .

5ª **afirmação:** Todos os filhos de  $r_{l+1}$  contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ .

Com efeito, suponha que exista um filho  $r_{l+1,q}$  que não contenha vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Como  $r_{l+1}$  contém vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ , existe algum filho  $r_{l+1,p}$  contendo vértices de  $Q_1$ . Se  $r_l$  for serial, os vértices de  $r_{l+1}$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  que pertencem a nós irmãos de  $r_{l+1}$ . Então os vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ , em  $r_{l+1,q}$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$ . Por outro lado,  $r_{l+1}$  é módulo paralelo e portanto os vértices  $v$  em  $r_{l+1,q}$  não são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l+1,p}$ . Contradição. O argumento é análogo



se  $r_l$  for paralelo. Logo, todo filho de  $r_{l+1}$  deve conter vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ .

**6ª afirmação:** Existe exatamente um filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_1$  e os demais filhos estão inteiramente contidos em  $Q_2$ .

Da 5ª afirmação, sabemos que todo filho de  $r_{l+1}$  contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Então, se um filho de  $r_{l+1}$  não contém vértices de  $Q_1$ , esse nó deve conter vértices de  $Q_2$ . Suponha então que exista um nó  $r_{l+1,j}$ , filho de  $r_{l+1}$ , que contenha vértices de  $Q_2$  e não contenha vértices de  $Q_1$ . Afirmamos que todo o nó  $r_{l+1,j}$  deve estar contido em  $Q_2$ . De fato, se existissem vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+1,j}$ , teríamos, usando o mesmo argumento utilizado para a 5ª afirmação, que os vértices de  $v$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ , o que seria uma contradição. Logo, o nó  $r_{l+1,j}$  não contém vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  (e nem vértices de  $Q_1$ ), ou seja, todo o nó  $r_{l+1,j}$  está contido em  $Q_2$ . Por outro lado, temos, por construção, que  $r_{l+1}$  contém vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Então os vértices  $v$  devem pertencer a filhos de  $r_{l+1}$  que contenham vértices de  $Q_1$ . Seja então  $r_{l+1,q}$  um filho de  $r_{l+1}$  que contenha vértices de  $Q_1$  e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Suponha, por contradição, que exista outro filho de  $r_{l+1}$ ,  $r_{l+1,p}$ , também contendo vértices de  $Q_1$ . Se  $r_l$  for serial, os vértices  $v$  em  $r_{l+1,q}$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  pertencentes aos nós  $r_{l,i}$ , irmãos de  $r_{l+1}$  (pois  $r_{l+1,q}$  está contido em  $r_{l+1}$ , que é completamente conectado aos nós  $r_{l,i}$ ), e os vértices  $v$  não são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l+1,p}$  (pois  $r_{l+1}$  é paralelo). Contradição. Se  $r_l$  for paralelo, os vértices  $v$  em  $r_{l+1,q}$  não são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  pertencentes aos nós  $r_{l,i}$ , mas são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l+1,p}$ . Contradição. Das contradições, concluímos que existe um único filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_1$  e, como todos os filhos de  $r_{l+1}$  devem conter vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , todos os demais filhos de  $r_{l+1}$  contém vértices de  $Q_2$  e não contém vértices de  $Q_1$  e, portanto,

estão inteiramente contidos em  $Q_2$ .

Denotemos por  $r_{l+2}$  o único filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_1$  e contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Como  $r_{l+2}$  contém vértices de  $Q_1$  e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $r_{l+2}$  é um nó não trivial e podemos analisar sua decomposição recursiva. Temos dois casos a considerar: o nó  $r_{l+2}$  pode conter vértices de  $Q_2$  ou não.

1º caso:  $r_{l+2}$  não contém vértices de  $Q_2$ .

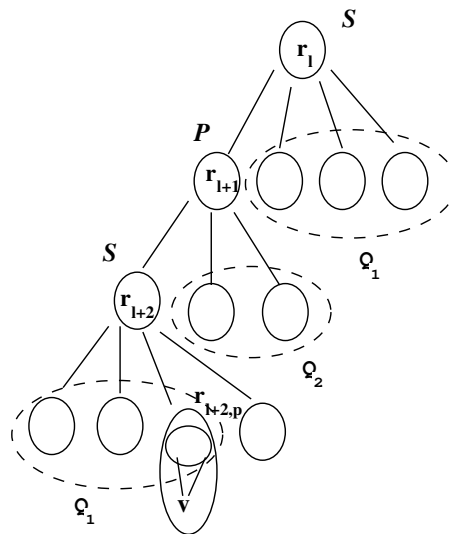


Figura 4.10: 1º caso:  $r_{l+2}$  não contém vértices de  $Q_2$ .

Nesse caso,  $r_{l+2}$  é composto por vértices de  $Q_1$  e por vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Afirmamos que cada filho de  $r_{l+2}$  está inteiramente contido em  $Q_1$  ou nenhum de seus vértices pertence a  $Q_1$ . De fato, suponha que exista um nó  $r_{l+2,p}$ , filho de  $r_{l+2}$ , contendo vértices de  $Q_1$  e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Se  $r_l$  for serial, os vértices  $v$  em  $r_{l+2,p}$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  pertencentes aos nós  $r_{l,i}$ , irmãos de  $r_{l+1}$  (pois  $r_{l+2,p}$  está contido em  $r_{l+1}$ , que é completamente

conectado aos nós  $r_{l,i}$ ), o que conecta o nó  $r_{l+2,p}$ . Contradição com a suposição de  $r_{l+2,p}$  ser um módulo paralelo. Se  $r_l$  for paralelo, o argumento é similar. Portanto, cada filho de  $r_{l+2}$  é um nó contendo apenas vértices de  $Q_1$  ou é um nó não contendo nenhum vértice de  $Q_1$ . Como  $r_{l+2}$  contém vértices  $v \notin Q_1$ , podemos observar que  $Q_1$  não contém todos os filhos de  $r_{l+2}$ .

Assim, o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  é formado por  $Q_1$  igual a uma união de nem todos os filhos de  $r_l$  e de  $r_{l+2}$ , nos níveis  $l+1$  e  $l+3$ , e  $Q_2$  igual à união de todos os irmãos de  $r_{l+2}$ , no nível  $l+2$ , e portanto o par  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo procedimento.

2º caso:  $r_{l+2}$  contém vértices de  $Q_2$  (e de  $Q_1$ ).

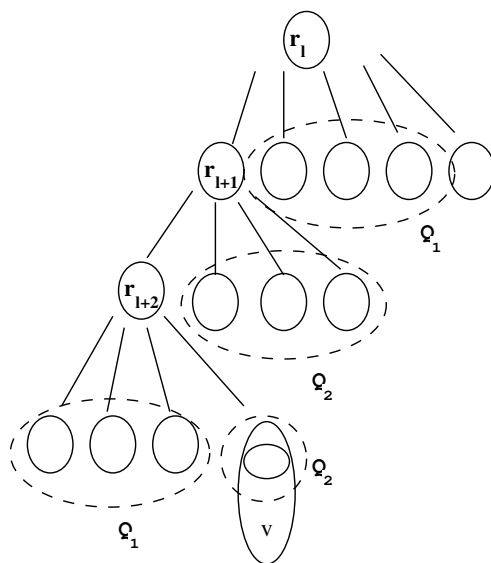


Figura 4.11: 2º caso:  $r_{l+2}$  contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ .

Usando argumentos análogos aos da 5ª afirmação, temos que todos os filhos de  $r_{l+2}$  devem conter vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  e, por argumentos análogos aos da 6ª afirmação, existe exatamente um filho de  $r_{l+2}$  contendo vértices de  $Q_2$  e os demais filhos estão inteiramente contidos em  $Q_1$ . Denotemos então por  $r_{l+3}$  o filho de  $r_{l+2}$  contendo vértices de  $Q_2$ . Como  $r_{l+3}$  contém vértices de  $Q_2$  e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $r_{l+3}$  é um nó não trivial e pode ser decomposto recursivamente. Se o nó  $r_{l+3}$  contiver vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ , utilizamos recursivamente argumentos análogos aos das 5ª e 6ª afirmações e aos dos 1º e 2º casos para os nós  $r_{l+j}$ ,  $j \geq 3$ , até que obtenhamos um nó  $r_{l+k}$ ,  $k \geq 3$ , que não contenha vértices de  $Q_1$  ou que não contenha vértices de  $Q_2$ , e recaímos num caso análogo ao do 1º caso e obtenhamos que o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  pode ser obtido pelo procedimento.  $\square$

## 4.5 Complexidade

Podemos estimar a complexidade computacional do **Procedimento Par Modular para Cografos**.

O Passo 1 pode ser implementado em tempo  $O(n)$ . No Passo 2, a descida em profundidade leva tempo  $O(n + m)$ . O Passo 3 pode ser feito em tempo  $O(n)$ . Portanto, a execução dos Passos 1 a 3 requer tempo  $O(n + m)$ . Temos então:

**Teorema 4.6.** *O Procedimento Par Modular para Cografos determina um par modular em tempo  $O(n + m)$ .*

## 4.6 Um Exemplo do Procedimento

Consideremos o cografo  $G$  dado pela Figura 4.1 e sua co-árvore  $T(G)$  dada pela Figura 4.2. Vamos apresentar um exemplo da execução do **Procedimento Par Modular para Cografos** aplicado a  $G$ .

Entrada: O cografo  $G$  dado pela Figura 4.1, sua co-árvore  $T(G)$ , dada pela Figura 4.2, e o nó interno  $r_2 = P_2$ , situado no nível  $l = 2$ .

**Passo 1:** Seleccionando uma união de filhos de  $r_2$ , de modo que pelo menos um filho não folha não seja seleccionado, selecione, por exemplo, a folha  $\{7\}$ .

**Passo 2:** Considere  $r_3 = S_2$ . Desça em profundidade a árvore  $T(G)$ , ao longo da subárvore de  $T(G)$  que tem  $r_3$  como raiz, até, por exemplo, o nó  $r_6 = P_4$ . Considere a sequência de visita  $r_3 = S_2, r_4 = P_3, r_5 = S_3, r_6 = P_4$ .

**Passo 3:** Selecione todos os irmãos de  $r_4, r_5, r_6$ , e selecione uma união de nem todos os filhos de  $r_6$ , por exemplo a folha  $\{1\}$ . Tome  $Q_1$  como a união de todos os nós seleccionados nos níveis 3, 5 e 7 e  $Q_2$  como a união de todos os nós seleccionados nos níveis 4 e 6.

Saída: O par  $\{Q_1 = \{1, 4, 7\}, Q_2 = \{3, 5\}\}$ .

A Figura 4.12 nos mostra a co-árvore  $T(G)$  e a seleção dos nós da árvore.

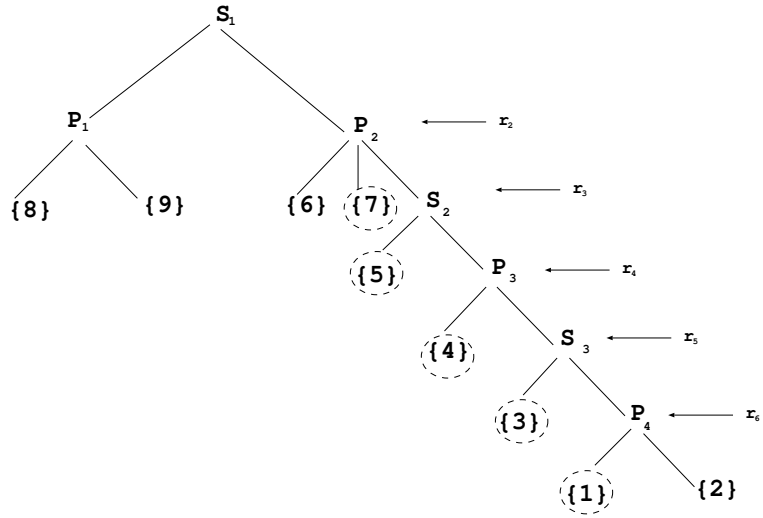


Figura 4.12: Execução do **Procedimento Par Modular para Cografos**.

Pelo Teorema 4.5, o par  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular do cografo  $G$ . Com efeito,  $V(G)$  pode ser particionado em  $Q_1, Q_2, A = \{8, 9\}, S_1 = \emptyset, S_2 = \{2\}$  e  $N = \{6\}$ , o que comprova que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ .

# Capítulo 5

## Pares Modulares de Grafos

### $P_4$ -Esparsos

Neste capítulo, apresentamos uma generalização do resultado do Capítulo 4, fornecendo um algoritmo de tempo polinomial que lista todos os pares modulares de grafos  $P_4$ -esparsos não básicos e, conseqüentemente, de grafos  $P_4$ -redutíveis e cografos.

#### 5.1 Introdução

A classe dos cografos foi descoberta independentemente em diferentes áreas da Ciência da Computação e Matemática. As várias propriedades estruturais dos cografos motivaram pesquisadores a definir classes de grafos obtidas como extensões dos cografos. Em sua tese de doutorado, HOÀNG [11] introduziu a classe dos *grafos  $P_4$ -esparsos* como os grafos para os quais todo conjunto de cinco vértices induz no máximo um  $P_4$ . Os grafos  $P_4$ -esparsos foram também estudados por Jamison e Olariu. Em [13], eles exibiram uma árvore de decomposição para os grafos  $P_4$ -esparsos que os conduziram em

[15] a propor um algoritmo linear de reconhecimento e algoritmos lineares de otimização para esta classe de grafos [14]. A classe dos grafos  $P_4$ -esparso contém propriamente a classe dos cografos.

A classe dos grafos  $P_4$ -reduzíveis foi introduzida por JAMISON e OLARIU [12] também como uma extensão dos cografos. Um grafo  $G$  é  $P_4$ -reduzível se nenhum de seus vértices pertence a mais de um  $P_4$  induzido. Nesse mesmo artigo, Jamison e Olariu exibiram uma árvore de decomposição para esta classe de grafos.

Todo grafo  $P_4$ -reduzível é também  $P_4$ -esparso mas não vale a recíproca. Com efeito, o grafo representado na Figura 5.1 é  $P_4$ -esparso mas não é  $P_4$ -reduzível.

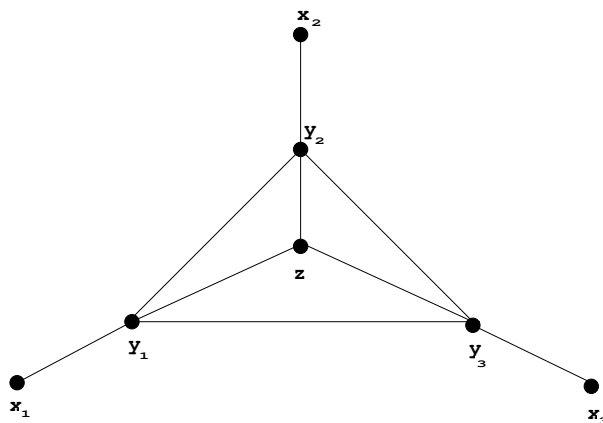


Figura 5.1: Exemplo de um grafo  $P_4$ -esparso que não é  $P_4$ -reduzível.

A classe dos grafos  $P_4$ -reduzíveis contém propriamente a classe dos cografos e está propriamente contida na classe dos grafos  $P_4$ -esparso, isto é:

$$\text{Cografos} \subset P_4\text{-reduzíveis} \subset P_4\text{-esparso}$$



GIAKOUMAKIS e VANHERPE [9] estudaram as classes de grafos  $P_4$ -reduzíveis e  $P_4$ -espaços e utilizaram a árvore de decomposição modular para apresentar algoritmos de tempo linear para reconhecimento de problemas clássicos de otimização, tais como determinação de clique máxima ponderada e conjunto independente ponderado, para grafos  $P_4$ -espaços, e coloração ótima ponderada e cobertura mínima por cliques ponderada para grafos  $P_4$ -reduzíveis, que são problemas NP-completos para grafos em geral. Esses resultados generalizaram os trabalhos de JAMISON e OLARIU [14].

Na próxima seção, enunciamos algumas propriedades e caracterizações para os grafos  $P_4$ -espaços e  $P_4$ -reduzíveis. Na Seção 5.3, apresentamos o nosso algoritmo para listar todos os pares modulares não básicos de grafos  $P_4$ -espaços, que generaliza o procedimento apresentado no capítulo anterior para cografos. Na Seção 5.4, enunciamos e provamos o teorema que generaliza o Teorema 2.3, do Capítulo 2, para o caso não básico de pares modulares de um grafo  $P_4$ -espaço. E, na Seção 5.5, damos um exemplo da execução do algoritmo.

Parte dos resultados apresentados neste capítulo foi publicada em [20], para a classe dos grafos  $P_4$ -reduzíveis.

## 5.2 Propriedades e Caracterizações

Nesta seção, enunciamos algumas propriedades para a classe dos grafos  $P_4$ -espaços e  $P_4$ -reduzíveis, e enunciamos teoremas de caracterização para essas classes de grafos.

Usando a mesma notação utilizada por JAMISON e OLARIU [13, 14], denotaremos um  $P_4$  com vértices  $x_1, y_1, y_2, x_2$  e arestas  $(x_1, y_1), (y_1, y_2), (y_2, x_2)$  por  $x_1y_1y_2x_2$ . Os vértices  $x_1$  e  $x_2$  são os *vértices externos* e  $y_1$  e  $y_2$  são os *vértices internos* do  $P_4$ .



Figura 5.2: Um caminho induzido por 4 vértices (um  $P_4$ ).

Primeiramente, vamos enunciar uma caracterização para grafos  $P_4$ -reduzíveis. No mesmo artigo em que definiram a classe dos grafos  $P_4$ -reduzíveis, JAMISON e OLARIU [12] apresentaram a seguinte caracterização para essa classe de grafos.

**Teorema 5.1.** *Um grafo  $G$  é  $P_4$ -reduzível se, e somente se, para todo subgrafo induzido  $H$  of  $G$ , exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i)  $H$  é desconexo;
- (ii)  $\overline{H}$  é desconexo;
- (iii) existe um único  $P_4$   $x_1y_1y_2x_2$  em  $H$  tal que todo vértice de  $H \setminus \{x_1, y_1, y_2, x_2\}$  é adjacente a ambos  $y_1$  e  $y_2$  e não é adjacente a ambos  $x_1$  e  $x_2$ .

Um grafo  $G$  é um *touro* se o seu conjunto de vértices admite uma partição num  $P_4$   $x_1y_1y_2x_2$  e num subconjunto de  $G$  contendo um único vértice  $\{z\}$  tal que  $z$  é adjacente a ambos  $y_1$  e  $y_2$  e não é adjacente a ambos  $x_1$  e  $x_2$ .

Na Figura 5.3, temos um grafo touro representado.

Um grafo  $G$  é um *touro estendido* se existe um único  $P_4$   $x_1y_1y_2x_2$  em  $G$  tal que todo vértice de  $R = V(G) \setminus \{x_1, y_1, y_2, x_2\}$  é adjacente a ambos  $y_1$  e

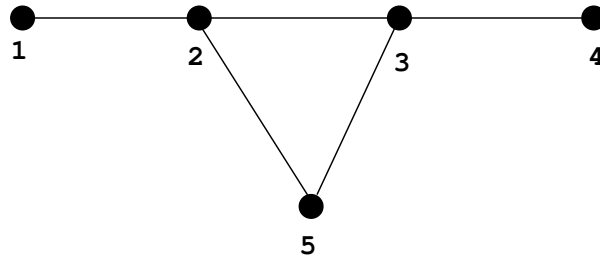


Figura 5.3: Um touro.

$y_2$  e não é adjacente a ambos  $x_1$  e  $x_2$ .

Na Figura 5.4, mostramos um grafo  $G$ , que é um exemplo de um touro estendido. Observe que  $G$  contém um único  $P_4$  1234 e todo vértice de  $R = \{5, 6, 7, 8, 9\}$  é adjacente a ambos vértices internos do  $P_4$ , 2 e 3, e não é adjacente a ambos vértices externos do  $P_4$ , 1 e 4.

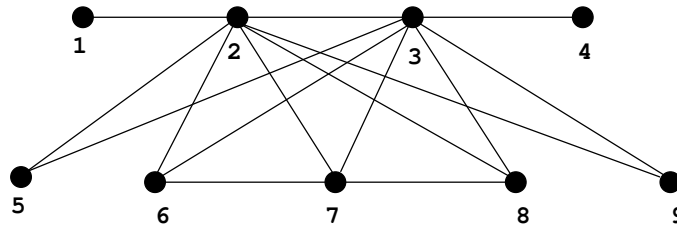


Figura 5.4: Um exemplo de touro estendido.

Utilizando a definição de touro estendido, a condição (iii) do Teorema 5.1 é equivalente à condição "H é isomorfo a um touro estendido".

Observe que, dado um grafo  $P_4$ -reduzível  $G$  e sua árvore de decomposição modular  $T(G)$ , pelo Teorema 4.2 (equivalência (4)  $\Leftrightarrow$  (5)),  $N$  é um módulo vizinhança em  $T(G)$  se, e somente se,  $N$  contém  $P_4$  como subgrafo induzido.

Segue-se do Teorema 5.1 e da definição de touro estendido que, num nó vizinhança  $N$ , o único filho não folha de  $N$  em  $T(G)$  é o nó  $R$ , quando  $|R| > 1$ .

Agora, vamos enunciar uma caracterização para grafos  $P_4$ -esparcos, provada por JAMISON e OLARIU [13]. Mas, para isso, vamos precisar da definição de *aranha*, também apresentada em [13].

Um grafo  $G$  é uma *aranha* se o conjunto de vértices de  $G$  admite uma partição em conjuntos  $K$ ,  $S$  e  $R$  tais que:

- (i)  $K$  é uma clique,  $S$  é um conjunto estável e  $|K| = |S| \geq 2$ .
- (ii) Todo vértice de  $R$  é adjacente a todos os vértices de  $K$  e não é adjacente a nenhum vértice de  $S$ .
- (iii) Existe uma bijeção  $f$  entre  $S$  e  $K$  tal que para todo  $x$  em  $S$ , ou  $N(x) = \{f(x)\}$  ou  $N(x) = K \setminus \{f(x)\}$ .

Seja  $G$  uma aranha com partição  $(K, S, R)$ . No caso em que  $N(x) = \{f(x)\}$ ,  $G$  é chamada *aranha magra*; caso contrário,  $G$  é chamada *aranha gorda*.

Na Figura 5.1, temos um exemplo de aranha magra com partição  $(K = \{y_1, y_2, y_3\}, S = \{x_1, x_2, x_3\}, R = \{z\})$ .

Observemos que o complemento de uma aranha magra é uma aranha gorda e vice-versa, isto é,  $G$  é uma aranha magra se, e somente se,  $\overline{G}$  é uma aranha gorda.

Na Figura 5.5, temos uma aranha magra  $G$  e o seu grafo complemento  $\overline{G}$ , que é uma aranha gorda.

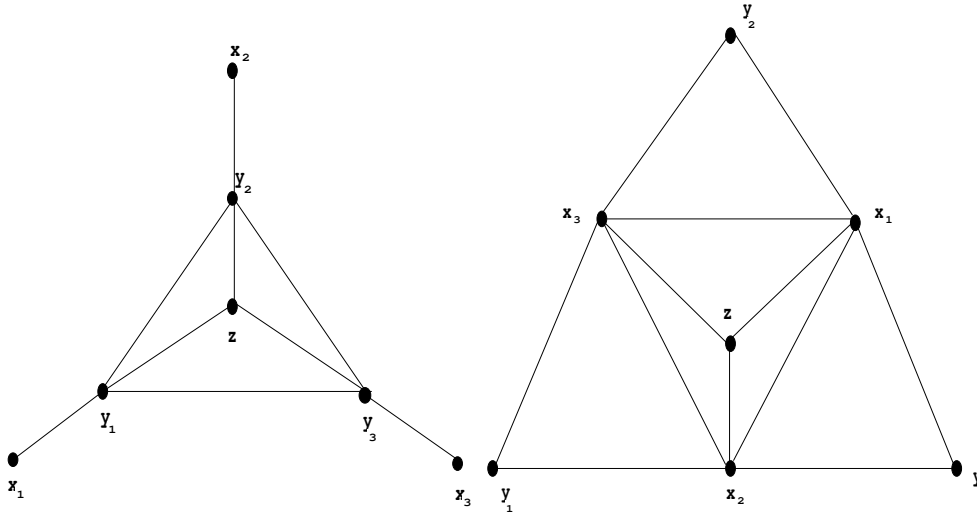


Figura 5.5: O grafo complementar de uma aranha magra é uma aranha gorda.

Dada uma aranha magra  $G$  com partição  $(K, S, R)$ , enfatizamos que cada vértice  $x_i$  de  $S$  é adjacente apenas ao vértice  $y_i = f(x_i)$  correspondente. E, no caso da aranha gorda, cada vértice  $x_i$  de  $S$  não é adjacente ao vértice  $y_i = f(x_i)$  correspondente e nem aos vértices de  $R$ .

Enunciemos o teorema de caracterização dos grafos  $P_4$ -esparsos apresentado em [13]:

**Teorema 5.2.** *Um grafo  $G$  é  $P_4$ -esparso se, e somente se, para todo subgrafo induzido  $H$  of  $G$ , exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:*

- (i)  $H$  é desconexo;
- (ii)  $\overline{H}$  é desconexo;

(iii)  $H$  é isomorfo a uma aranha.

Pelo Teorema 5.2 e a definição de aranha, obtemos que cada nó vizinhança  $N$  em  $T(G)$  é uma aranha  $(K, S, R)$  e o único filho não folha de  $N$  em  $T(G)$  (e que portanto tem uma decomposição recursiva em  $T(G)$ ) é o nó  $R$ , no caso em que  $|R| > 1$ .

Observe que, no caso particular em que  $|K| = |S| = 2$ , a aranha  $G$  se resume a:

**Possibilidade 1:** Um  $P_4$ , se  $R = \emptyset$ .

**Possibilidade 2:** Um touro, se  $|R| = 1$ .

**Possibilidade 3:** Um touro estendido, se  $|R| > 1$ ; e nesse caso,  $R$  é um submódulo maximal de  $N$ .

### 5.3 Pares Modulares de Grafos $P_4$ -esparsos

Nesta seção, apresentamos um algoritmo para listar todos os pares modulares de grafos  $P_4$ -esparsos, que generaliza o procedimento apresentado no capítulo anterior para cografos, no caso não básico.

Assim como no caso dos cografos, decorre do Teorema 2.3 que um par de subconjuntos disjuntos não-vazios de vértices  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de um grafo  $P_4$ -esparso  $G$  tal que ambos  $Q_1$  e  $Q_2$  são módulos de  $G$  se, e somente se, cada um deles é um nó da árvore de decomposição modular  $T(G)$  ou uma união de filhos de um nó serial ou paralelo de  $T(G)$ . Ainda, no caso em que  $Q_1 \cup Q_2$  é um módulo não trivial de  $G$ , qualquer partição em dois

conjuntos de  $Q_1 \cup Q_2$  gera um par modular de  $G$ .

Nosso objetivo é apresentar um algoritmo que liste todos os pares modulares  $\{Q_1, Q_2\}$  de um grafo  $P_4$ -esparso  $G$  no caso não básico do problema, ou seja, no caso em que  $Q_1 \cup Q_2$  não é um módulo de  $G$  e pelo menos um dos conjuntos,  $Q_1$  ou  $Q_2$ , também não é um módulo de  $G$ . Para isso, enunciaremos uma observação e alguns procedimentos, que serão utilizados em nosso algoritmo.

**Observação:**  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de uma aranha magra  $G$  se, e somente se,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de seu grafo complemento  $\overline{G}$ , que é uma aranha gorda.

*Demonstração.* A observação decorre da Afirmação 1 da Seção 3.1, que garante que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  se, e somente se,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $\overline{G}$ , e do fato do grafo complemento de uma aranha magra ser uma aranha gorda.  $\square$

Na Figura 5.6, temos uma aranha magra  $G$  e o seu grafo complemento,  $\overline{G}$ , que é uma aranha gorda.

Podemos observar que os pares  $\{Q_1 = \{y_1, y_3, x_2\}, Q_2 = \{x_1, x_3\}\}$  e  $\{Q_1 = \{y_1\}, Q_2 = \{x_2, x_3, y_2, y_3\}\}$  são pares modulares tanto de  $G$  como de  $\overline{G}$ .

Utilizando a observação anterior, consideraremos apenas aranhas magras nos procedimentos e no algoritmo, visto que, para determinar os pares modulares de uma aranha gorda, basta tomarmos os pares modulares de seu grafo complemento, que é uma aranha magra.

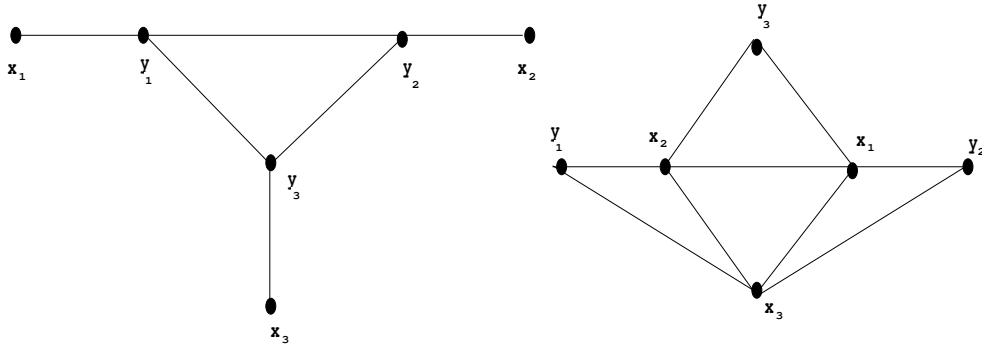


Figura 5.6:  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de uma aranha magra  $G$  se, e somente se,  $\{Q_1, Q_2\}$  também é um par modular de  $\overline{G}$ , que é uma aranha gorda.

Enunciemos agora alguns procedimentos que serão utilizados em nosso algoritmo.

Sejam  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso e  $r_q$  uma aranha magra com partição  $(K_q = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_q = \{x_1, \dots, x_k\}, R_q)$ :

**Procedimento  $N_1(r_q)$ ;**

1. para todo  $i$  faça
2. retorne( $Q_1 \cup \{y_i\}, Q_2 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup (S_q \setminus \{x_i\}) \cup R_q$ );
3. retorne( $Q_1 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup \{x_i\} \cup R_q, Q_2 \cup (S_q \setminus \{x_i\})$ )

**Procedimento  $N_2(r_q)$ ;**

1. para todo  $i$  faça
2. retorne( $Q_1 \cup \{y_i\}, Q_2 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup (S_q \setminus \{x_i\}) \cup R_q$ );
3. retorne( $Q_1 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup \{x_i\} \cup R_q, Q_2 \cup (S_q \setminus \{x_i\})$ )
4. retorne( $Q_1 \cup K_q, Q_2 \cup S_q$ )



**Procedimento**  $N_3(r_q)$ ;

1. **para** todo  $i$  **faça**
2.   retorne( $Q_1 \cup \{y_i\}, Q_2 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup (S_q \setminus \{x_i\}) \cup R_q$ );
3.   retorne( $Q_1 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup \{x_i\} \cup R_q, Q_2 \cup (S_q \setminus \{x_i\})$ )
4. **se**  $|K_q| > 2$  **então**
5.    $Q_{1,1} \leftarrow$  uma união de pelo menos dois  $y_i$  (mas não todos);
6.    $Q_{2,1} \leftarrow$  a união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_{1,1}$ ;
7.   retorne( $Q_1 \cup Q_{1,1}, Q_2 \cup Q_{2,1}$ )

**Procedimento**  $N_4(r_q)$ ;

1. **para** todo  $i$  **faça**
2.   retorne( $Q_1 \cup \{y_i\}, Q_2 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup (S_q \setminus \{x_i\}) \cup R_q$ );
3.   retorne( $Q_1 \cup (K_q \setminus \{y_i\}) \cup \{x_i\} \cup R_q, Q_2 \cup (S_q \setminus \{x_i\})$ )
4.  $Q_{1,1} \leftarrow$  uma união não-vazia de  $y_i$  (mas não todos);
5.  $Q_{2,1} \leftarrow$  a união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_{1,1}$ ;
6. retorne( $Q_1 \cup R_q \cup Q_{1,1}, Q_2 \cup Q_{2,1}$ )
7. **se**  $R_q \neq \emptyset$  **então**
8.    $Q_{1,2} \leftarrow$  uma união de pelo menos dois  $y_i$ ;
9.    $Q_{2,2} \leftarrow$  a união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_{1,2}$ ;
10.   retorne( $Q_1 \cup Q_{1,2}, Q_2 \cup Q_{2,2}$ )
11. **se**  $|K_q| = 2$  **então para** todos  $i, j$  distintos **faça**
12.   retorne( $Q_1 \cup \{y_i\}, Q_2 \cup \{x_j\} \cup R_q$ )

**Procedimento**  $N_5(r_q)$ ;

1. considere  $r_{q+1} = R_q$ ;
2. **se**  $r_{q+1} \neq \emptyset$  **então**

$$3. \quad Q_1 \leftarrow Q_1 \cup K_q; Q_2 \leftarrow Q_2 \cup S_q; P(r_{q+1})$$

Sejam agora  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso,  $T(G)$  sua árvore de decomposição modular e  $r_q$  um nó interno de  $T(G)$ .

**Procedimento**  $P(r_q)$ ;

1. se  $r_q$  é um módulo serial ou paralelo, **então** selecione uma união não-vazia de filhos de  $r_q$  de modo que ao menos um deles não seja selecionado. Escolha um dos nós que não tenha sido selecionado e denote-o por  $r_{q+1}$ . Desça em profundidade ao longo de uma subárvore de  $T(G)$ , que tenha  $r_q$  como raiz, até um nó interno  $r_{q+k}$ ,  $k \geq 0$ . Considere a sequência de visita como  $r_q, \dots, r_{q+k}$ .
2. se todos os nós  $r_q, \dots, r_{q+k}$  forem seriais ou paralelos **então**
3. selecione uma união de filhos de  $r_{q+k}$  (mas não todos) e, se  $k \geq 1$ , selecione todos os irmãos de  $r_{q+1}, \dots, r_{q+k}$ ;
4.  $Q_1 \leftarrow Q_1$  união com todos os filhos de nós seriais anteriormente selecionados;
5.  $Q_2 \leftarrow Q_2$  união com todos os filhos de nós paralelos anteriormente selecionados; retorne( $Q_1, Q_2$ )
6. **senão**
7. seja  $r_{q+p}$  o primeiro nó vizinhança ( $K_{q+p}, S_{q+p}, R_{q+p}$ ) visitado ao longo do caminho  $r_q, \dots, r_{q+k}$ ,  $k \geq 1$ . Selecione todos os irmãos de  $r_{q+1}, \dots, r_{q+p}$ ;
8.  $Q_1 \leftarrow Q_1$  união com todos os filhos de nós seriais, ancestrais de  $r_{q+p}$ , anteriormente selecionados;
9.  $Q_2 \leftarrow Q_2$  união com todos os filhos de nós paralelos, ancestrais de  $r_{q+p}$ , anteriormente selecionados;

10. se  $r_{q+p} = r_{q+k}$  e é uma aranha magra  $(K_{q+p}, S_{q+p}, R_{q+p})$  com  $R_{q+p} = \emptyset$  então  $N_1(r_{q+p})$ ;
11. se  $r_{q+p} = r_{q+k}$  e é uma aranha magra  $(K_{q+p}, S_{q+p}, R_{q+p})$  com  $R_{q+p} \neq \emptyset$  então  $N_2(r_{q+p})$ ;
12. se  $r_{q+p} \neq r_{q+k}, p \in \{1, \dots, k-1\}$ , então  $N_5(r_{q+p})$
13. senão  $\{r_q$  é um módulo vizinhança}
14. se  $r_q$  é uma aranha magra  $(K_q, S_q, R_q)$  com  $R_q = \emptyset$  então  $N_1(r_q)$ ;
15. se  $r_q$  é uma aranha magra  $(K_q, S_q, R_q)$  com  $R_q \neq \emptyset$  então
16.  $N_2(r_q)$ ;
17.  $N_5(r_q)$

Vejam os um exemplo para o procedimento  $P(r_q)$ . Consideremos o grafo  $G$  dado pela Figura 5.7:

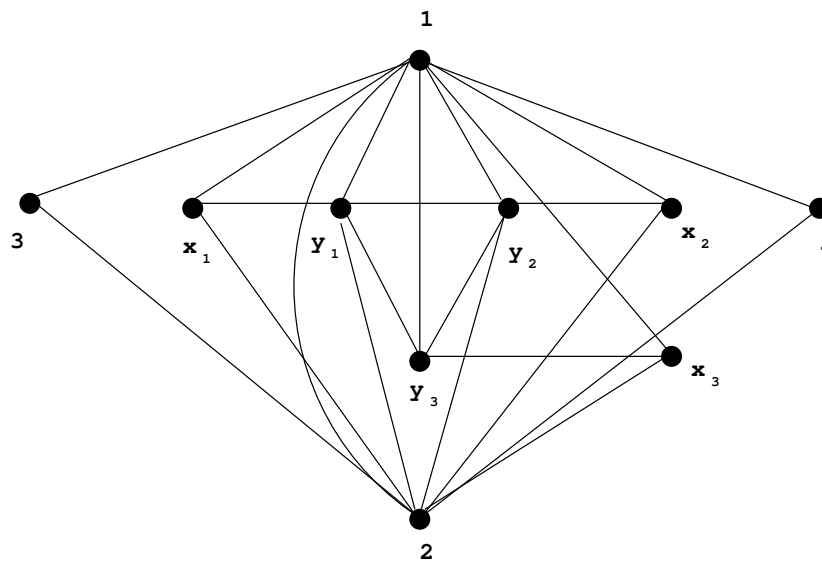


Figura 5.7: Exemplo para o procedimento  $P(r_q)$ .

O grafo  $G$  é um grafo  $P_4$ -esparso com árvore de decomposição modular  $T(G)$  dada pela Figura 5.8.

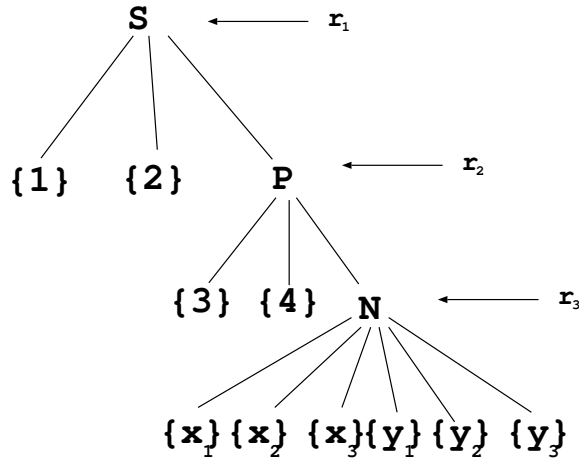


Figura 5.8: Árvore de decomposição modular associada ao grafo  $G$ .

Os passos para a execução do procedimento são dados a seguir:

**Passo 1.** Tomemos como entrada do procedimento o nó  $r_2 = P$ . Como  $r_2$  é um módulo paralelo, selecionemos, por exemplo, o vértice 3 e tomemos  $r_3 = N$ .

**Passo 2.**  $r_3$  é um módulo vizinhança com partição  $(K_2 = \{y_1, y_2, y_3\}, S_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, R_2)$ , com  $R_2 = \emptyset$ . Selecionamos os irmãos de  $r_3$ , ou seja, selecionamos os vértices 3 e 4.

**Passo 3.**  $Q_1$  não recebe, inicialmente, vértices de  $r_2$  e  $Q_2$  recebe os vértices 3 e 4.

**Passo 4.** Como, nesse exemplo,  $r_3$  é o último nó a ser visitado e  $R_2 = \emptyset$ , aplicamos a recorrência  $N_1(r_3)$ . Aplicando a recorrência, o procedimento

retorna os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  obtidos pela aplicação do procedimento para o vértice  $r_2$  juntamente com os vértices do par já dados pelo algoritmo. Portanto, o algoritmo retorna:

- $\{Q_1 \cup \{y_1\}, Q_2 \cup \{y_2, y_3\} \cup \{x_2, x_3\}\};$
- $\{Q_1 \cup \{y_2, y_3\} \cup \{x_1\}, Q_2 \cup \{x_2, x_3\}\};$
- $\{Q_1 \cup \{y_2\}, Q_2 \cup \{y_1, y_3\} \cup \{x_1, x_3\}\};$
- $\{Q_1 \cup \{y_1, y_3\} \cup \{x_2\}, Q_2 \cup \{x_1, x_3\}\};$
- $\{Q_1 \cup \{y_3\}, Q_2 \cup \{y_1, y_2\} \cup \{x_1, x_2\}\};$
- $\{Q_1 \cup \{y_1, y_2\} \cup \{x_3\}, Q_2 \cup \{x_1, x_2\}\};$

Estamos prontos para descrever agora nosso algoritmo. Dados um grafo  $P_4$ -esparso  $G$ , sua árvore de decomposição modular  $T(G)$  e um nó interno  $r_l$  de  $T(G)$ , vamos determinar um par de subconjuntos disjuntos de vértices de  $r_l$ , que provaremos, na próxima seção, ser um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$  tal que pelo menos um dos conjuntos,  $Q_1$  ou  $Q_2$ , não é um módulo de  $G$  e  $Q_1 \cup Q_2$  também não é um módulo de  $G$ . Mais ainda, provaremos que todo par modular satisfazendo as condições acima pode ser obtido pelo algoritmo.

Observemos que, se um nó serial ou paralelo  $r_l$  de  $T(G)$  contém apenas folhas como filhos (ou seja, não contém filhos não triviais em  $T(G)$ ), temos, pelo Teorema 2.3, que qualquer união não-vazia de filhos de  $r_l$  é um módulo de  $G$  e, portanto, todo par  $\{Q_1, Q_2\}$  de subconjuntos disjuntos de vértices de  $r_l$  é tal que ambos os conjuntos são módulos de  $G$ . Por essa razão, ao tomarmos como entrada um nó serial ou paralelo na segunda possibilidade do algoritmo, consideraremos que esse nó possua ao menos um filho que não seja folha de  $T(G)$ .

## Algoritmo Par Modular para Grafos $P_4$ -esparsos

Algoritmo Par Modular( $G$ )

1. **para** cada nó interno  $r_l$  de  $T(G)$  **faça**
2. **se**  $r_l$  é uma aranha magra ( $K_l = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_l = \{x_1, \dots, x_k\}, R_l$ )  
**então**
3.  $Q_1 \leftarrow \emptyset; Q_2 \leftarrow \emptyset;$
4. **se**  $R_l = \emptyset$  **então**  $N_3(r_l);$
5. **senão**  $\{R_l \neq \emptyset\}$  denote  $R_l$  por  $r_{l+1}$ . Desça em profundidade ao longo de uma subárvore de  $T(G)$ , que tenha  $r_l$  como raiz, até um nó interno  $r_{l+k}$ ,  $k \geq 0$ . Considere a sequência de visita como  $r_l, \dots, r_{l+k}$ .
6. **se**  $k = 0$  ou  $|R_l| = 1$  **então**  $N_4(r_l)$
7. **senão**  $\{k \neq 0 \text{ e } |R_l| \geq 2\}$
8. **se**  $r_{l+1}$  é um módulo serial **então**
9.  $Q_{1,1} \leftarrow$  uma união não-vazia de  $y_i$  (mas não todos) com uma união não-vazia de filhos de  $r_{l+1};$
10.  $Q_{2,1} \leftarrow$  a união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_{1,1};$
11. **retorne**( $Q_{1,1}, Q_{2,1}$ );
12. **se**  $r_{l+1}$  é um módulo paralelo e  $|K_l| = 2$  **então**
13. **para** todos  $i, j$  distintos **faça**
14.  $Q_{2,1} \leftarrow$  uma união não-vazia de filhos de  $r_{l+1}$  (mas não todos);
15. **retorne**( $\{y_i\}, \{x_j\} \cup Q_{2,1}$ );
16.  $Q_1 \leftarrow K_l, Q_2 \leftarrow S_l; P(r_{l+1});$

17. **senão**  $\{r_l$  é um módulo serial ou paralelo $\}$  selecione uma união não-vazia de filhos de  $r_l$  de modo que ao menos um nó interno, filho de  $r_l$ , não seja selecionado. Escolha um dos nós internos que não tenha sido selecionado e denote-o por  $r_{l+1}$ .
18. **se**  $r_{l+1}$  é uma aranha magra ( $K_{l+1} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_{l+1} = \{x_1, \dots, x_k\}, R_{l+1}$ ) **então**
19.     denote  $R_{l+1}$  por  $r_{l+2}$ ;
20.     **se**  $r_l$  é um módulo paralelo **então**
21.          $Q_2 \leftarrow$  a união dos filhos selecionados de  $r_l$ ;
22.          $N_4(r_{l+1})$  {neste caso, não aplique as linhas 11 e 12 do procedimento};
23.         **para** todo  $i$  **faça** retorne( $\{y_i\}, Q_2 \cup \{x_i\}$ );
24.         **se**  $r_{l+2} \neq \emptyset$  **então**
25.             **se**  $r_{l+2}$  é um módulo serial **então**
26.                  $Q_{1,1} \leftarrow$  uma união não-vazia de  $y_i$  (mas não todos) com uma união não-vazia de filhos de  $r_{l+2}$ ;
27.                  $Q_{2,1} \leftarrow$  a união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_{1,1}$ ;
28.                 retorne( $Q_{1,1}, Q_2 \cup Q_{2,1}$ );
29.             retorne( $K_{l+1}, Q_2 \cup S_{l+1}$ );
30.              $Q_1 \leftarrow K_{l+1}, Q_2 \leftarrow Q_2 \cup S_{l+1}; P(r_{l+2})$ ;
31.     **senão**  $\{r_l$  é um módulo serial $\}$
32.          $Q_1 \leftarrow$  a união dos filhos selecionados de  $r_l$ ;
33.          $N_1(r_{l+1})$ ;
34.         **se**  $|K_{l+1}| = 2$  **então**
35.             **para** todos  $i, j$  distintos **faça**
36.                 retorne( $Q_1 \cup \{y_i\}, \{x_j\}$ );

37.  $\text{retorne}(Q_1 \cup \{y_i\}, \{x_j\} \cup r_{l+2});$
38. **se**  $r_{l+2}$  **é um módulo serial** **então**
39.  $Q_{2,1} \leftarrow$  uma união não-vazia de filhos de  $r_{l+2}$  (mas não todos);
40.  $\text{retorne}(Q_1 \cup \{y_i\}, \{x_j\} \cup Q_{2,1});$
41. **se**  $r_{l+2} \neq \emptyset$  **então**
42.  $\text{retorne}(Q_1 \cup K_{l+1}, S_{l+1});$
43.  $Q_1 \leftarrow Q_1 \cup K_{l+1}; Q_2 \leftarrow S_{l+1}; P(r_{l+2});$
44. **senão**  $\{r_{l+1}$  **é um módulo serial ou paralelo**  $\}$   $P(r_l)$  {neste caso, considere a condição  $k \geq 2$  na linha 3 do procedimento}

## 5.4 Uma Representação para Pares Modulares de Grafos $P_4$ -esparsos

Nesta seção, vamos provar que o **Algoritmo Par Modular para Grafos  $P_4$ -esparsos** lista todos os pares modulares de um grafo  $P_4$ -esparso, no caso não básico.

**Teorema 5.3.** *Sejam  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso,  $T(G)$  sua árvore de decomposição modular e  $\{Q_1, Q_2\}$  um par de subconjuntos disjuntos não-vazios de vértices de  $G$  tal que ao menos um dos conjuntos,  $Q_1$  ou  $Q_2$ , não seja um módulo de  $G$  e  $Q_1 \cup Q_2$  também não seja um módulo de  $G$ . Então  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  se, e somente se,  $\{Q_1, Q_2\}$  for obtido pelo **Algoritmo Par Modular para Grafos  $P_4$ -esparsos**.*

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Sejam  $G$  um grafo  $P_4$ -esparso,  $T(G)$  sua árvore de decomposição modular e  $\{Q_1, Q_2\}$  um par de subconjuntos disjuntos não-vazios



de vértices de  $G$ , obtido a partir do algoritmo. Observemos primeiramente que, como não tomamos ambos os conjuntos,  $Q_1$  e  $Q_2$ , como uma união de filhos de um nó serial ou paralelo de  $T(G)$  e nem como um nó de  $T(G)$ , e o mesmo ocorrendo com  $Q_1 \cup Q_2$ , segue do Teorema 2.3, que pelo menos um dos conjuntos e  $Q_1 \cup Q_2$  não são módulos de  $G$ .

Vamos agora provar que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  e, para isso, basta verificarmos a definição de pares modulares: que, para todo vértice  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ ,  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $Q_j$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices, para  $j = 1, 2$ . Começaremos verificando a definição de pares modulares para os procedimentos, que são usados no decorrer do algoritmo, e, em seguida, verificaremos para o algoritmo em si.

Dado o par  $\{Q_1, Q_2\}$ , suponhamos que contenham vértices obtidos a partir de algum dos procedimentos. Seja então  $r_q$  nó interno de  $T(G)$  contendo vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$ , obtidos aplicando algum dos procedimentos.

Analisaremos todas as possibilidades para os vértices  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  em relação a cada um dos procedimentos. Usaremos o seguinte fato ao longo da prova.

**Fato 1:** Se existirem vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  em  $r_q$ , então todo vértice  $v \notin r_q$  deve ser adjacente a todo vértice de  $Q_j$  em  $r_q$  ou não ser adjacente a nenhum de seus vértices, para  $j = 1, 2$  (pois  $r_q$  é um módulo de  $G$ ).

**Possibilidade 1:** Existem vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  obtidos a partir do procedimento  $N_1(r_q)$ , onde  $r_q$  é uma aranha magra com partição  $(K_q = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_q = \{x_1, \dots, x_k\}, R_q)$ .

Fixemos  $i$ . Se todos os vértices foram obtidos a partir da linha 2 do procedimento, há duas possibilidades para  $v$ :  $v \notin r_q$  ou  $v = x_i$ . Se  $v = x_i$ ,

então  $v$  é adjacente a  $y_i$  e não é adjacente aos vértices de  $(K_q \setminus \{y_i\}) \cup (S_q \setminus \{x_i\}) \cup R_q$ . Se  $v \notin r_q$ , usamos o fato 1.

Se os vértices foram obtidos a partir da linha 3, há também duas possibilidades para  $v$ :  $v \notin r_q$  ou  $v = y_i$ . Se  $v = y_i$ , então  $v$  é adjacente aos vértices de  $(K_q \setminus \{y_i\}) \cup \{x_i\} \cup R_q$  e não é adjacente aos vértices de  $S_q \setminus \{x_i\}$ . Se  $v \notin r_q$ , usamos o fato 1.

Logo, em ambas as possibilidades, se  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ , então  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $Q_j$  obtidos a partir do procedimento  $N_1(r_q)$  ou não é adjacente a nenhum desses vértices.

**Possibilidade 2:** Existem vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  obtidos a partir do procedimento  $N_2(r_q)$ , onde  $r_q$  é uma aranha magra com partição  $(K_q = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_q = \{x_1, \dots, x_k\}, R_q)$ .

Se os vértices foram obtidos a partir das linhas 1-3 do procedimento, basta usarmos o mesmo argumento utilizado na possibilidade 1.

Se os os vértices foram obtidos a partir da linha 4, podemos ter  $v \notin r_q$  ou  $v \in R_q$ . Se  $v \in R_q$ ,  $v$  é adjacente aos vértices de  $K_q$  e não é adjacente aos vértices de  $S_q$ . Se  $v \notin r_q$ , usamos o fato 1.

Logo, a definição de pares modulares é verificada para todo  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ .

Observemos que, nas possibilidades 1 e 2, os vértices  $v \in r_q$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  e não são adjacentes aos vértices de  $Q_2$ , obtidos a partir dos procedimentos  $N_1(r_q)$  e  $N_2(r_q)$ .

**Possibilidade 3:** Existem vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  obtidos a partir do procedimento  $N_3(r_q)$ , onde  $r_q$  é uma aranha magra com partição  $(K_q = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_q = \{x_1, \dots, x_k\}, R_q)$ .

Para os vértices obtidos a partir das linhas 1-3, basta usarmos o mesmo argumento utilizado na possibilidade 1.

Se os vértices foram obtidos a partir das linhas 4-7, podemos ter  $v \notin r_q$  ou  $v \in R_q$  ou  $v$  igual a algum dos  $y_k$  ou algum dos  $x_k$  não selecionados para  $Q_{1,1}$  e  $Q_{2,1}$ , respectivamente. Se  $v \in R_q$  ou  $v$  é igual a algum  $y_k$ , então  $v$  é adjacente aos  $y_i$  selecionados para  $Q_{1,1}$  e não é adjacente aos  $x_i$  selecionados para  $Q_{2,1}$ . Se  $v$  é igual a algum  $x_k$ , então  $v$  não é adjacente a nenhum dos vértices selecionados para  $Q_{1,1}$  e  $Q_{2,1}$ . Se  $v \notin r_q$ , usamos o fato 1.

Logo, a definição de pares modulares é verificada para todo  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ .

**Possibilidade 4:** Existem vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  obtidos a partir do procedimento  $N_4(r_q)$ , onde  $r_q$  é uma aranha magra com partição  $(K_q = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_q = \{x_1, \dots, x_k\}, R_q)$ .

Para os vértices obtidos a partir das linhas 1-3, basta usarmos o mesmo argumento utilizado na possibilidade 1.

Para os vértices que foram obtidos a partir das linhas 4-6, podemos ter  $v \notin r_q$  ou  $v$  igual a algum dos  $y_k$  ou algum dos  $x_k$  não selecionados para  $Q_{1,1}$  e  $Q_{2,1}$ , respectivamente, e utilizamos argumento análogo ao utilizado na possibilidade 3.

Para as linhas 7-10, podemos ter  $v \notin r_q$  ou  $v \in R_q$  ou  $v$  pode ser igual a algum  $y_k$  ou algum  $x_k$ , caso nem todos tenham sido selecionados para  $Q_{1,2}$  e  $Q_{2,2}$ , respectivamente, e o argumento é análogo ao utilizado na possibilidade 3.

Para as linhas 11-12,  $r_q$  é um touro estendido com partição  $(K_q = \{y_1, y_2\}, S_q = \{x_1, x_2\}, R_q)$ . Logo, fixados  $i$  e  $j$ , podemos ter  $v \notin r_q$  ou  $v = y_j$  ou  $v = x_i$ . Se  $v = y_j$ ,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_q$ . Se  $v = x_i$ ,  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_q$ . Se  $v \notin r_q$ , usamos o fato 1.

**Possibilidade 5:** Existem vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  obtidos a partir do procedimento  $P(r_q)$ , onde  $r_q$  é um nó interno de  $T(G)$ .

Se os vértices foram obtidos a partir das linhas 1-5, podemos ter  $k = 0$  ou  $k \geq 1$  no procedimento. Se  $k = 0$ , foi selecionada apenas uma união não-vazia de filhos de  $r_q$ , que é um módulo serial ou paralelo. Logo, pelo Teorema 2.3, essa união de filhos é um módulo de  $G$  e, se  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ ,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$ , no caso em que  $r_q$  é serial, ou  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_2$ , no caso em que  $r_q$  é paralelo, e a definição de pares modulares é verificada. Se  $k \geq 1$ , podemos ter  $v \notin r_q$  ou  $v$  pertencente a algum filho não selecionado de  $r_{q+k}$ . Se  $v$  pertence a algum filho  $r_{q+k,1}$  não selecionado de  $r_{q+k}$  temos, pelo procedimento, que todos os nós da sequência de visita  $r_q, \dots, r_{q+k}$  são seriais ou paralelos, alternando entre si e, os ancestrais comuns entre  $r_{q+k,1}$  e os nós que estão em  $Q_j$  são todos seriais (no caso de  $Q_1$ ) ou são todos paralelos (no caso de  $Q_2$ ). Portanto,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  obtidos pelo procedimento e não adjacente aos vértices de  $Q_2$  obtidos pelo procedimento. Se  $v \notin r_q$ , usamos o fato 1.

Se os vértices foram obtidos a partir das linhas 6-11, temos  $r_{q+p} = r_{q+k}$  é uma aranha magra com partição  $(K_{q+p}, S_{q+p}, R_{q+p})$ . Nesse caso, podemos ter  $v \notin r_{q+p}$  ou  $v \in r_{q+p}$ . Se  $v \notin r_{q+p}$ , usamos o fato 1. Se  $v \in r_{q+p}$ , pelas possibilidades 1 e 2, obtemos que  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{q+p}$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{q+p}$ . Como os ancestrais comuns entre  $r_{q+p}$  e os filhos de nós ancestrais selecionados para  $Q_1$  ( $Q_2$ ) são todos módulos

seriais (paralelos), podemos concluir que  $v$  é adjacente (não é adjacente) a todo (nenhum) vértice de  $Q_1$  ( $Q_2$ ) obtido pelo procedimento, verificando a definição de pares modulares.

Para as linhas 13-16, usamos argumentos análogos aos das possibilidades 1 e 2.

Para as linhas 12 e 17, temos recorrências do próprio procedimento e usamos argumentos análogos aos das possibilidades 1 e 2 e da própria possibilidade 5.

Logo, em todo o procedimento, os vértices  $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$  são adjacentes aos vértices de  $Q_j$  obtidos a partir do procedimento ou não são adjacentes a nenhum desses vértices, para  $j = 1, 2$ . Assim, a definição de pares modulares é verificada.

Observemos que, em todo o procedimento, os vértices  $v$  em  $r_q$  são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  e não adjacentes aos vértices de  $Q_2$ , obtidos a partir do procedimento.

Agora, dado o par  $\{Q_1, Q_2\}$ , seja  $r_l$  o nó interno de  $T(G)$  que contém os vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$ , obtidos a partir do algoritmo. Verificaremos a definição de pares modulares analisando as possibilidades para os vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$  em relação ao algoritmo. Temos dois casos a considerar:  $r_l$  é um módulo vizinhança ou não.

**Caso 1:**  $r_l$  é um módulo vizinhança. Nesse caso, o par  $\{Q_1, Q_2\}$  foi obtido a partir das linhas 2 a 16 do algoritmo. Analisemos todos os subcasos possíveis.

**Caso 1.1:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir da linha 4 do algoritmo.

Neste caso, basta usarmos argumento análogo ao usado na possibilidade 3.

**Caso 1.2:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 5 e 6 do algoritmo.

Neste caso, basta usarmos argumento análogo ao usado na possibilidade 4.

**Caso 1.3:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 5 e 7-11 do algoritmo.

Neste caso, temos as seguintes possibilidades para os vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ :  $v \notin r_l$  ou  $v$  é igual a algum  $y_j$  ou algum  $x_j$  não selecionado para  $Q_{1,1}$  ou  $Q_{2,1}$ , respectivamente, ou ainda  $v$  pode pertencer a algum filho de  $r_{l+1}$  (caso  $Q_{1,1}$  não contenha todos os filhos de  $r_{l+1}$ ). Na primeira possibilidade, usamos o fato 1. Se  $v$  é igual a algum  $y_j$ , então  $v$  é adjacente aos vértices de  $K_l$  e aos vértices pertencentes a  $r_{l+1}$ , e é, portanto, adjacente aos vértices de  $Q_1$ ; ainda,  $v$  não é adjacente aos vértices de  $S_l$  e portanto não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Se  $v$  é igual a algum  $x_j$ , então  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1 \cup Q_2$ . Na última possibilidade, como  $r_{l+1}$  é um módulo serial, seus filhos em  $T(G)$  são completamente conectados entre si, e portanto  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  pertencentes a filhos de  $r_{l+1}$ . Como todo vértice de  $r_{l+1}$  é adjacente aos vértices de  $K_l$  e não adjacente aos vértices de  $S_l$ , temos por consequência, que cada vértice  $v$  pertencente a  $r_{l+1}$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Logo, a definição de pares modulares é verificada.

**Caso 1.4:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 5 e 12-15 do algoritmo.

Nesse caso,  $r_l$  é um touro estendido com partição  $(K_q = \{y_1, y_2\}, S_q = \{x_1, x_2\}, R_q)$ . Fixados  $i \neq j$ , podemos ter  $v \notin r_l$  ou  $v = y_j$  ou  $v = x_i$  ou ainda  $v$  pertencente a algum filho não selecionado de  $r_{l+1}$ . Se  $v = y_j$  então  $v$  é adjacente ao vértice  $y_i \in K_l$ , aos vértices em  $r_{l+1}$  e a  $x_j \in S_l$ , ou seja,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Se  $v = x_i$ , então  $v$  é adjacente ao vértice de  $Q_1$  e não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_2$ . Se  $v$  pertence a algum filho não selecionado de  $r_{l+1}$ ,  $v$  é adjacente ao vértice de  $Q_1$ ; por outro lado, como  $r_{l+1}$  é paralelo, seus filhos são completamente desconectados entre si; portanto  $v$  não é adjacente aos vértices de  $Q_2$  pertencentes a filhos de  $r_{l+1}$  e, como todo vértice de  $r_{l+1}$  não é adjacente aos vértices de  $S_l$ , concluímos que  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_2$ . Se  $v \notin r_l$ , usamos o fato 1. Logo, cada vértice  $v$  pertencente a  $r_{l+1}$  é adjacente ao vértice de  $Q_1$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$  e portanto a definição de pares modulares é verificada.

**Caso 1.5:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 5 e 16 do algoritmo.

Nesse caso, podemos ter  $v \notin r_l$  ou  $v$  pertencente a  $r_{l+1}$ . Se  $v \notin r_l$ , usamos o fato 1. Se  $v$  pertence a  $r_{l+1}$ , decorre da possibilidade 5 que  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l+1}$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+1}$ . Como todo vértice de  $r_{l+1}$  é adjacente aos vértices de  $K_l$  e não é adjacente aos vértices de  $S_l$ , concluímos que  $v$  é adjacente a todos os vértices de  $Q_1$  e não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_2$ .

Logo, em todos os subcasos onde  $r_l$  é um módulo vizinhança, concluímos que a definição de pares modulares é verificada.

**Caso 2:**  $r_l$  é um módulo serial ou paralelo. Nesse caso, o par  $\{Q_1, Q_2\}$  foi obtido a partir das linhas 17 a 44 do algoritmo.

Observemos que se  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ , podemos ter  $v \notin r_l$  ou  $v$  pertencente a algum irmão de  $r_{l+1}$ , que não tenha sido selecionado para  $Q_2$ , ou  $v$  pode pertencer a  $r_{l+1}$ . Se  $v \notin r_l$ , usamos o fato 1. Se  $v$  pertence a algum irmão de  $r_{l+1}$  que não tenha sido selecionado para  $Q_2$ , como todo  $Q_1 \cup Q_2$  está inteiramente contido numa união de filhos de  $r_l$ , ou seja, contido num módulo de  $G$  (pelo Teorema 2.3), o vértice  $v$  é adjacente a todo vértice de  $Q_1 \cup Q_2$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices. Logo, nas duas primeiras possibilidades, a definição de pares modulares é verificada.

Assim, consideraremos nos subcasos a seguir apenas a possibilidade de  $v$  pertencer a  $r_{l+1}$ . Analisemos todos os subcasos possíveis.

**Caso 2.1:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 17-22 do algoritmo.

Se  $v \in r_{l+1}$ , temos, pela possibilidade 4, que ou o vértice  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l+1}$  e não é adjacentes aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+1}$ , ou  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1 \cup Q_2$ . Como  $r_l$  é um módulo paralelo, os seus filhos são completamente desconectados entre si,  $v$  também não é adjacente aos vértices de  $Q_2$  pertencentes aos filhos selecionados de  $r_l$ . Logo,  $v$  não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Por outro lado, como os vértices de  $Q_1$  foram obtidos apenas pelo procedimento,  $v$  é adjacente aos vértices de



$Q_1$  ou não é adjacente a nenhum de seus vértices.

**Caso 2.2:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 17-21 e 23 do algoritmo.

Fixado  $i$ , se  $v \in r_{l+1}$ , podemos ter  $v = x_j$  ou  $v = y_j$ ,  $j \neq i$ , ou ainda  $v \in r_{l+2}$ . Se  $v = x_j$ ,  $j \neq i$ ,  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1 \cup Q_2$ . Se  $v = y_j$  ou  $v \in r_{l+2}$ ,  $j \neq i$ ,  $v$  é adjacente ao vértice de  $Q_1$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Logo, a definição de pares modulares é verificada.

**Caso 2.3:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 17-21 e 24-28 do algoritmo.

Nesse caso, se  $v \in r_{l+1}$ , podemos ter  $v$  igual a algum  $y_j$  ou algum  $x_j$  não selecionado para  $Q_{1,1}$  ou  $Q_{2,1}$ , respectivamente, ou ainda  $v$  pode pertencer a algum filho de  $r_{l+2}$  não selecionado para  $Q_{1,1}$ . Se  $v$  é igual a algum  $y_j$ , então  $v$  é adjacente aos vértices de  $K_l$  e aos vértices de  $r_{l+2}$  e portanto  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$ ; ainda,  $y_j$  não é adjacente aos vértices de  $S_l \setminus \{x_j\}$  e nem aos vértices pertencentes aos irmãos de  $r_{l+1}$  (pois  $r_l$  é um módulo paralelo); logo,  $v$  não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Se  $v$  é igual a algum  $x_j$ ,  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $Q_1 \cup Q_2$ . Na última possibilidade, como todo vértice de  $r_{l+2}$  é adjacente aos vértices de  $K_{l+1}$  e  $r_{l+2}$  é um módulo serial (e portanto seus filhos são completamente conectados entre si),  $v$  é adjacente a todo vértice de  $Q_1$ ; ainda, como os vértices de  $r_{l+2}$  não são adjacentes aos vértices de  $S_{l+1}$ , temos por consequência, que  $v \in r_{l+2}$  não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ .

**Caso 2.4:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 17-21 e 29-30 do algoritmo.

Se  $v \in r_{l+1}$ , a única possibilidade é termos  $v$  pertencente a  $r_{l+2}$ . Nesse caso, usamos que todo vértice de  $r_{l+2}$  é adjacente a todo vértice de  $K_{l+1}$  (e portanto é adjacente a todo vértice de  $Q_1$ ) e não é adjacente aos vértices de  $S_{l+1}$  e nem aos vértices pertencentes aos irmãos de  $r_{l+1}$  (pois  $r_l$  é paralelo), e usamos a possibilidade 5 para afirmar que todo vértice  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  pertencente a  $r_{l+2}$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  pertencentes a  $r_{l+2}$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+2}$ . Portanto, se  $v \in r_{l+2}$ , então  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  e não é adjacente aos vértices de  $Q_2$ .

**Caso 2.5:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir das linhas 17-21 e 31-43 do algoritmo.

Basta usarmos argumentos similares aos utilizados nos casos anteriores.

**Caso 2.6:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  foram obtidos a partir da linha 44 do algoritmo.

Basta usarmos argumento análogo ao usado na possibilidade 5.

Logo, em todos os subcasos, onde  $r_l$  não é um módulo vizinhança, concluimos que a definição de pares modulares é verificada.

Portanto, se  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par de subconjuntos disjuntos não-vazios de vértices de  $G$ , obtido a partir do algoritmo, então  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  tal que ao menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$  e  $Q_1 \cup Q_2$

também não é um módulo de  $G$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja agora  $\{Q_1, Q_2\}$  um par modular de  $G$  tal que pelo menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$  e sua união também não é um módulo de  $G$ . Queremos mostrar que  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo.

Como todo vértice de  $G$  pertence a alguma folha de  $T(G)$ , seja  $T_l$  a subárvore minimal de  $T(G)$  tal que sua raiz  $r_l$  contenha todos os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ . Denotemos por  $r_{l,1}, \dots, r_{l,k}$  os filhos de  $r_l$ , em  $T(G)$ , que contêm vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ ,  $k \geq 2$ . Observe que a condição  $k \geq 2$  é necessária para garantir a minimalidade de  $T_l$  (com efeito, se  $k$  fosse igual a 1, o nó  $r_{l,1}$  conteria todos os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , o que contradiria a minimalidade de  $T_l$ ).

Temos dois casos a considerar:  $r_l$  é um módulo vizinhança ou não. As observações a seguir serão utilizadas nestes dois casos.

**Observação 1:**  $r_l$  é um nó interno de  $T(G)$  e portanto é um módulo do grafo  $G$ . Como supomos que  $Q_1 \cup Q_2$  não é um módulo de  $G$ ,  $r_l$  não pode ser igual a  $Q_1 \cup Q_2$ .

**Observação 2:** Como  $Q_1$  e  $Q_2$  são subconjuntos de vértices não-vazios e pelo menos um deles não é um módulo de  $G$ ,  $Q_1 \cup Q_2$  deve conter pelo menos 3 vértices.

Analisemos agora os casos citados acima.

**Caso 1:** Suponha que  $r_l$  seja um módulo vizinhança.

Nesse caso, como  $G$  é um grafo  $P_4$ -esparso,  $r_l$  é uma aranha.

Vamos supor que  $r_l$  seja uma aranha magra com partição  $(K_l = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_l = \{x_1, \dots, x_k\}, R_l)$ . Então o único submódulo não trivial de  $r_l$  é  $R_l$ , caso  $|R_l| \geq 2$ , ou seja, existe no máximo um filho de  $r_l$ , em  $T(G)$ , que não é folha. Ainda, temos a seguinte afirmação:

**Afirmção 1:** O par  $\{Q_1, Q_2\}$  não está inteiramente contido em apenas um dos conjuntos da partição  $(K_l, S_l, R_l)$  de  $r_l$ .

*Demonstração.* Com efeito, se  $Q_1 \cup Q_2$  estivesse inteiramente contido em  $S_l$ , como  $|Q_1| \geq 2$  ou  $|Q_2| \geq 2$ , suponha, sem perda de generalidade, que  $x_i, x_j \in Q_1, i \neq j$ . Mas  $y_j \in K_l$  (não pertencente a  $Q_1 \cup Q_2$ ) seria adjacente a  $x_j$  e não seria adjacente a  $x_i$  e portanto  $\{Q_1, Q_2\}$  não seria um par modular de  $G$ . Contradição.

Se  $Q_1 \cup Q_2$  estivesse inteiramente contido em  $K_l$ , suponha, sem perda de generalidade, que  $y_i, y_j \in Q_1, i \neq j$ . Então  $x_i \in S_l$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ . Contradição.

Se  $Q_1 \cup Q_2$  estivesse contido em  $R_l$ , então  $R_l$  seria um filho de  $r_l$  que contém todos os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , contradizendo a minimalidade de  $T_l$ .

A partir das contradições, concluímos que a afirmação é verdadeira.  $\square$

Pela afirmação 1,  $Q_1 \cup Q_2$  está contido em mais de um conjunto da partição  $(K_l, S_l, R_l)$  de  $r_l$ . Em particular,  $Q_1 \cup Q_2$  não está inteiramente contido em  $S_l$ , o que implica que  $Q_1 \cup Q_2$  deve conter vértices de  $K_l \cup R_l$ . Temos dois casos a considerar para os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ :  $Q_1 \cup Q_2$  contém vértices de  $R_l$  ou não.

**Caso 1.1:**  $Q_1 \cup Q_2$  não contém vértices de  $R_l$ .

Então os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  devem pertencer a  $K_l \cup S_l$ . Como  $Q_1 \cup Q_2$  não está inteiramente contido em  $S_l$ , suponha, sem perda de generalidade,

que  $Q_1$  contenha vértices de  $K_l$ . Seja então  $y_i \in K_l$  tal que  $y_i \in Q_1$ . O vértice correspondente  $x_i \in S_l$  pode também pertencer a  $Q_1$  ou pode pertencer a  $Q_2$  ou ainda pode não pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Vamos analisar cada caso separadamente.

**Caso 1.1.1:** Suponha que  $x_i$  também pertença a  $Q_1$ .

Se  $R_l = \emptyset$ ,  $y_i, x_i \in Q_1$  implica  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ .

Afirmamos que exatamente um vértice  $y_j$  de  $K_l \setminus \{y_i\}$  deve pertencer a  $Q_2$ . De fato, se nenhum vértice de  $K_l \setminus \{y_i\}$  pertencesse a  $Q_2$ , ou seja,  $K_l \setminus \{y_i\}$  estivesse contido em  $Q_1$ , então cada vértice  $x_j$  de  $S_l \setminus \{x_i\}$  seria adjacente ao seu vértice correspondente  $y_j$ , em  $Q_1$ , e não seria adjacente a  $x_i$ ; então todo vértice  $x_j$  deveria pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (pois, se algum  $x_j$  não pertencesse a  $Q_1 \cup Q_2$ , seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$  e isto contradiria o fato de  $\{Q_1, Q_2\}$  ser um par modular de  $G$ ); logo,  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1$ ,  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_i, x_i \in Q_1$ , com  $R_l = \emptyset$ , ou seja,  $Q_1 \cup Q_2$  conteria todos os vértices de  $r_l$ , o que seria uma contradição com a observação 1. Por outro lado, se mais de um vértice de  $K_l \setminus \{y_i\}$ ,  $y_j, y_k$ , pertencessem a  $Q_2$  então seus correspondentes  $x_j, x_k$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$  e, para não termos a contradição com o fato de  $\{Q_1, Q_2\}$  ser um par modular de  $G$ ,  $x_j, x_k$  deveriam pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  e se algum outro vértice de  $K_l \setminus \{y_i\}$  pertencesse a  $Q_1$ , então o vértice correspondente em  $S_l \setminus \{x_i\}$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ , o que implicaria que este vértice deveria pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ ; logo, teríamos  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ . Contradição com a observação 1. Então deve existir exatamente um vértice  $y_j$ , de  $K_l \setminus \{y_i\}$ , em  $Q_2$ .

Como  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1$ ,  $S_l \setminus \{x_j\}$  deve estar contido em  $Q_1 \cup Q_2$  (para não termos adjacência parcial aos vértices de  $Q_1$ ) e  $x_j$  não pode pertencer a

$Q_1 \cup Q_2$  (senão  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ ). Como  $x_j \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_2$  pode conter apenas  $y_j$  (pois  $x_j$  é adjacente apenas a  $y_j$ ) e  $S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_1$ .

Portanto,  $Q_1 = (K_l \setminus \{y_j\}) \cup (S_l \setminus \{x_j\})$  e  $Q_2 = \{y_j\}$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

Se  $R_l \neq \emptyset$  e  $y_i, x_i \in Q_1$ , os vértices de  $R_l$  (que supomos não pertencerem a  $Q_1 \cup Q_2$ ) são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ , o que contradiria o fato de  $\{Q_1, Q_2\}$  ser um par modular de  $G$ . Assim,  $R_l \neq \emptyset$  não é possível nesse caso.

**Caso 1.1.2:** Suponha que  $x_i$  pertença a  $Q_2$ .

Pela observação 2,  $|Q_1 \cup Q_2| \geq 3$ ; então  $Q_1$  ou  $Q_2$  deve conter pelo menos dois vértices. Vejamos as possibilidades para os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ .

**Possibilidade A:**  $x_i, y_j \in Q_2$ .

Se  $R_l = \emptyset$ , temos dois casos a considerar:  $|K_l| = 2$  ou  $|K_l| > 2$ . Se  $K_l \setminus \{y_i\} = \{y_j\}$ , temos  $y_i \in Q_1$ ,  $x_i, y_j \in Q_2$  e  $x_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (se  $x_j$  pertencesse a  $Q_1 \cup Q_2$ , teríamos  $Q_1 \cup Q_2$  igual ao módulo  $r_l$ ); mas  $x_j$  é parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Contradição. Se  $|K_l| > 2$ ,  $x_i, y_j \in Q_2$  implica  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_j \in Q_1 \cup Q_2$  (pois  $x_j$  e cada vértice de  $K_l \setminus \{y_i\}$  são adjacentes a  $y_j$  e não adjacentes a  $x_i$ , o que seria uma contradição, caso não pertencessem a  $Q_1 \cup Q_2$ ); mas todo  $y_k \in K_l \setminus \{y_i\}$  pertencendo a  $Q_1$  ( $y_i, y_k \in Q_1$ ) ou a  $Q_2$  ( $x_i, y_k \in Q_2$ ) implica  $x_k \in Q_1 \cup Q_2$  (para não termos uma contradição); logo, se  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ , com  $x_i \in Q_2$  e  $y_i \in Q_1$ . Portanto  $Q_1 \cup Q_2$  contém todos os vértices de  $r_l$ . Contradição com a observação 1.

Se  $R_l \neq \emptyset$  e  $y_j, x_i \in Q_2$ , os vértices de  $R_l$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$  e  $\{Q_1, Q_2\}$  não é par modular de  $G$ . Contradição. Logo,

$R_l \neq \emptyset$  não é possível nessa possibilidade.

**Possibilidade B:**  $x_i, x_j \in Q_2$ .

Se  $R_l = \emptyset$ , temos dois casos a considerar:  $|K_l| = 2$  ou  $|K_l| > 2$ . Se  $K_l \setminus \{y_i\} = \{y_j\}$ , temos  $y_i \in Q_1$ ,  $x_i, x_j \in Q_2$  e  $y_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ , com  $y_j$  parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Contradição. Se  $|K_l| > 2$ ,  $x_i, x_j \in Q_2$  implica  $y_j \in Q_1 \cup Q_2$  (para não ser parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ). Se  $y_j$  pertencesse a  $Q_2$ , teríamos  $x_i, y_j \in Q_2$ , recairíamos na possibilidade anterior, e chegaríamos numa contradição; logo,  $y_j$  deve pertencer a  $Q_1$ . Então,  $x_i, x_j \in Q_2$  implica  $y_i, y_j \in Q_1$ ; e  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_l$  (se algum  $y_k$  pertencesse a  $Q_2$ , recairíamos na possibilidade anterior e numa contradição). Assim, temos o par modular  $Q_1$  igual a uma união de pelo menos dois  $y_i \in K_l$  e  $Q_2$  igual à união dos  $x_i \in S_l$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_1$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo. Ainda, se algum  $x_k$  pertencer a  $Q_1$  ( $y_i, x_k \in Q_1$ ), isto implica  $K_l \setminus \{y_k\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, como  $Q_2$  não contém vértices de  $K_l$ ,  $K_l \setminus \{y_k\}$  deve estar contido em  $Q_1 \Rightarrow S_l \setminus \{x_k\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_k$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (para não termos contradição com a observação 1); então  $S_l \setminus \{x_k\} \subset Q_2$  (senão  $y_k$  seria adjacente a  $y_i$  e não adjacente a vértices de  $S_l \setminus \{x_k\}$ ). Logo, obtemos  $Q_1 = \{x_k\} \cup (K_l \setminus \{y_k\})$  e  $Q_2 = S_l \setminus \{x_k\}$ , que também é um par modular obtido pelo algoritmo.

Se  $R_l \neq \emptyset$ ,  $x_i, x_j \in Q_2$  implica  $y_j \in Q_1 \cup Q_2$  e portanto  $y_j \in Q_1$ . Se algum  $y_k \in K_l$  pertencesse a  $Q_2$  ou se algum  $x_k$  pertencesse a  $Q_1$ , os vértices de  $R_l$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$  ou de  $Q_1$ , respectivamente, o que seria uma contradição. Logo,  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_l$  e  $Q_1$  não pode conter vértices de  $S_l$ . Ainda, a única possibilidade para os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  é  $Q_1$  igual a uma união de pelo menos dois  $y_i \in K_l$  e  $Q_2$  igual

à união dos vértices de  $S_l$  correspondentes aos de  $K_l$  selecionados para  $Q_1$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade C:**  $y_i, y_j \in Q_1$ .

Se  $R_l = \emptyset$ , temos novamente dois casos a considerar:  $|K_l| = 2$  ou  $|K_l| > 2$ . Se  $K_l \setminus \{y_i\} = \{y_j\}$ ,  $x_j \notin Q_1 \cup Q_2$  e é parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ . Contradição. Se  $|K_l| > 2$ ,  $y_i, y_j \in Q_1$  implica  $x_j \in Q_1 \cup Q_2$ . Se  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ , com  $y_j \in Q_1$ , ou seja,  $K_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e todo  $y_k \in K_l \setminus \{y_i, y_j\}$  que pertencesse a  $Q_1$  ou a  $Q_2$  implicaria  $x_k \in Q_1 \cup Q_2$ ; logo,  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  implicaria  $S_l \setminus \{x_i, x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ , com  $x_i \in Q_2$ ,  $x_j \in Q_1$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  conteria todos os vértices de  $r_l$ . Contradição. Logo,  $x_i \in Q_2$ . Então,  $x_i, x_j \in Q_2$ ,  $y_i, y_j \in Q_1$  e recaímos na possibilidade anterior.

Se  $R_l \neq \emptyset$ ,  $y_i, y_j \in Q_1$  implica  $x_j \in Q_1 \cup Q_2$ . Se  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$  ( $y_i, x_j \in Q_1$ ), os vértices de  $R_l$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ , o que seria uma contradição. Logo,  $x_j \in Q_2$ . Se algum  $y_k$  pertencesse a  $Q_2$  ou se algum  $x_k$  pertencesse a  $Q_1$ , teríamos uma contradição; logo,  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_l$  e  $Q_1$  não pode conter vértices de  $S_l$ . Ainda, a única possibilidade para os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  é  $Q_1$  igual a uma união de pelo menos dois  $y_i \in K_l$  e  $Q_2$  igual à união dos vértices de  $S_l$  correspondentes aos de  $K_l$  selecionados para  $Q_1$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade D:**  $y_i, x_j \in Q_1$ .

Se  $R_l = \emptyset$ , temos novamente dois casos a considerar:  $|K_l| = 2$  ou  $|K_l| > 2$ . Se  $K_l \setminus \{y_i\} = \{y_j\}$ ,  $y_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  e temos o par modular  $\{Q_1 = \{y_i, x_j\}, Q_2 = \{x_i\}\}$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo (da forma  $Q_1 = \{x_j\} \cup (K_l \setminus \{y_j\})$  e  $Q_2 = S_l \setminus \{x_j\}$ ). Se  $|K_l| > 2$ ,  $y_i, x_j \in Q_1$



implica  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ , com  $x_j \in Q_1$  e portanto  $y_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $y_k$  pertencesse a  $Q_2$  ou se algum  $x_k$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$  ou de  $Q_1$ , respectivamente, o que seria uma contradição. Logo,  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1$ ,  $S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_2$  e temos o par modular  $Q_1 = \{x_j\} \cup (K_l \setminus \{y_j\})$  e  $Q_2 = S_l \setminus \{x_j\}$ , que também é um par modular obtido pelo algoritmo.

Se  $R_l \neq \emptyset$ ,  $y_i, x_j \in Q_1$  implica que  $\{Q_1, Q_2\}$  não é um par modular de  $G$ , que é uma contradição. Portanto  $R_l \neq \emptyset$  não é possível.

**Caso 1.1.3:** Suponha que  $x_i$  não pertença a  $Q_1 \cup Q_2$ .

Nesse caso,  $Q_1$  deve conter apenas  $y_i$ , isto é,  $Q_1 = \{y_i\}$  (pois  $x_i$  é adjacente apenas a  $y_i$ ) e  $Q_2$  deve conter pelo menos dois vértices de  $K_l \cup S_l$ . Vejamos as possibilidades para os vértices de  $Q_2$ :

**Possibilidade A:**  $y_j, y_k \in Q_2$  (nessa possibilidade,  $|K_l| > 2$ ).

Se  $R_l = \emptyset$ ,  $y_j, y_k \in Q_2$  implica  $x_j, x_k \in Q_2 \Rightarrow K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$ , com  $x_i \notin Q_1 \cup Q_2$ . Se  $R_l \neq \emptyset$ ,  $y_j, y_k \in Q_2$  implica  $x_j, x_k \in Q_2$  e os vértices de  $R_l$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$ , o que é uma contradição.

**Possibilidade B:**  $y_j, x_j \in Q_2$ .

Se  $R_l = \emptyset$ ,  $y_j, x_j \in Q_2$  implica  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$ . Se  $R_l \neq \emptyset$ ,  $y_j, x_j \in Q_2$  implica que os vértices de  $R_l$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$ , o que é uma contradição.

**Possibilidade C:**  $y_j, x_k \in Q_2$ .

Se  $R_l = \emptyset$ ,  $y_j, x_k \in Q_2$  implica  $x_j \in Q_2$  e  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$ .  
 Se  $R_l \neq \emptyset$ ,  $y_j, x_k \in Q_2$  implica numa contradição.

**Possibilidade D:**  $x_j, x_k \in Q_2$  (nessa possibilidade,  $|K_l| > 2$ ).

Se  $x_j, x_k \in Q_2$  então  $y_j, y_k \in Q_2$  e recaímos na possibilidade 2 ( $y_j, x_j \in Q_2$ ).

Logo, de todas as possibilidades, podemos concluir que a única possibilidade para o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  é  $R_l = \emptyset$  e  $\{Q_1 = \{y_i\}, Q_2 = (K_l \setminus \{y_i\}) \cup (S_l \setminus \{x_i\})\}$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

Assim, ao analisarmos todos os subcasos possíveis, concluímos que o par  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo (caso contrário, chegamos a uma contradição).

**Caso 1.2:**  $Q_1 \cup Q_2$  contém vértices de  $R_l$  (se  $R_l \neq \emptyset$ ).

Como  $Q_1$  ou  $Q_2$  contém vértices de  $R_l$ , suponhamos, sem perda de generalidade, que  $Q_1$  contenha vértices de  $R_l$ . Temos dois casos a considerar:  $Q_1$  contém todos os vértices de  $R_l$  ou não.

**Caso 1.2.1:** Suponha que  $Q_1$  contenha todos os vértices de  $R_l$ .

**Afirmção 2:**  $Q_1$  não pode ser igual a  $R_l$ .

*Demonstração.* Com efeito, se  $Q_1$  fosse igual a  $R_l$ , que é um módulo de  $G$ ,  $Q_2$  não poderia ser também um módulo de  $G$  (pois, por hipótese, pelo menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$ ); então  $Q_2$  deveria conter pelo menos dois vértices de  $K_l \cup S_l$ : se  $y_i, x_i \in Q_2$ , então  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_i\}$

também deveria estar contido em  $Q_2$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ . Contradição. Se  $y_i, x_j \in Q_2$ , então  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_j\}$  também deveria estar contido em  $Q_2$  e portanto  $y_j$  pertenceria a  $Q_2$ . Contradição. Se  $x_i, x_j \in Q_2$ , então  $y_i, y_j \in Q_2 \Rightarrow K_l \subset Q_2$  e  $S_l \subset Q_2$ . Contradição. Logo, a afirmação é verdadeira.  $\square$

Como todos os casos não podem ocorrer, concluímos que, se  $Q_1$  contém  $R_l$  então  $Q_1$  deve conter também vértices de  $K_l \cup S_l$ . Vamos considerar os subcasos para  $Q_1$ .

**Caso 1.2.1.1:**  $Q_1$  contém vértices de  $K_l$ .

Suponha que  $y_i \in K_l$  seja tal que  $\{y_i\} \cup R_l \subset Q_1$ . Então  $x_i$  pertence a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ .

Se  $x_i$  pertence a  $Q_1$ , então  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, por argumento similar ao do caso 1.1.1, existe exatamente um vértice  $y_j \in K_l \setminus \{y_i\}$  em  $Q_2$ ,  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1$ ,  $S_l \setminus \{x_j\} \in Q_1 \cup Q_2$  e  $x_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ ; portanto  $Q_2 = \{y_j\}$  e  $S_l \setminus \{x_j\} \in Q_1$ . Logo,  $Q_1 = (K_l \setminus \{y_j\}) \cup (S_l \setminus \{x_j\}) \cup R_l$  e  $Q_2 = \{y_j\}$ .

Suponha agora  $x_i$  pertencente a  $Q_2$ . Observemos que  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_l$ . Com efeito, se algum  $y_j$  pertencesse a  $Q_2$ , então  $x_i, y_j \in Q_2$  implicaria  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, como  $y_j$  pertencendo a  $Q_1$  ou a  $Q_2$  implicaria  $x_j \in Q_1 \cup Q_2$ , teríamos  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  implicando  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ , com  $x_i, y_i \in Q_1 \cup Q_2$ , e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ , o que seria uma contradição. Logo,  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_l$ . Ainda, observemos que, se algum  $y_j$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $\{y_j\} \cup R_l \subset Q_1$  implicaria  $x_j$  pertencente a  $Q_1 \cup Q_2$ . Logo, podemos ter o par modular  $Q_1$  igual a  $R_l$  união com uma união não-vazia de vértices de  $K_l$  e  $Q_2$  igual a união correspondente de vértices de  $S_l$  não pode conter vértices de  $S_l$ . Agora, se algum  $x_j$  pertencer a  $Q_1$ , então  $y_i, x_j \in Q_1$  implica  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e conseqüentemente

$S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_j$  não deve pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (para não termos a contradição de  $Q_1 \cup Q_2$  ser igual ao módulo  $r_l$ ). Então  $S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_2$  (senão,  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ) e  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1$  (para não termos  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ). Logo, se algum  $x_j$  pertencer a  $Q_1$ , obtemos  $Q_1 = \{x_j\} \cup (K_l \setminus \{y_j\}) \cup R_l$  e  $Q_2 = S_l \setminus \{x_j\}$ .

Logo, em todas as possibilidades, temos que o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  pode ser obtido pelo algoritmo.

**Caso 1.2.1.2:**  $Q_1$  contém vértices de  $S_l$ .

Suponha que  $x_i \in S_l$  seja tal que  $\{x_i\} \cup R_l \subset Q_1$ . Então  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ .

Se tivéssemos  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2$  então  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_i$  não poderia pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Mas se algum  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$  ( $x_i, x_j \in Q_1$ ) ou a  $Q_2$  ( $K_l \setminus \{y_i\} \cup \{x_j\} \in Q_2$ ,  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$  ou de  $Q_2$ , respectivamente, o que seria uma contradição. Logo,  $Q_2$  não pode conter todos os vértices de  $K_l \setminus \{y_i\}$ .

Se  $K_l \setminus \{y_i\}$  estivesse contido em  $Q_1$ ,  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_i$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ , o que seria uma contradição; logo,  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$  e obtemos  $Q_1 = \{x_i\} \cup (K_l \setminus \{y_i\}) \cup R_l$  e  $Q_2 = S_l \setminus \{x_i\}$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

Se algum  $y_j \in Q_1$  e algum  $y_k \in Q_2$ , afirmamos que  $Q_2 = \{y_k\}$ . Com efeito, se mais de um vértice de  $K_l \setminus \{y_i\}$ , pertencessem a  $Q_2$  então os respectivos vértices  $S_l$  pertenceriam a  $Q_1 \cup Q_2$  (senão, seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$ ) e se algum vértice restante pertencesse a  $Q_1$ , então o respectivo vértice em  $S_l$  deveria pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (senão, esse vértice seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ); e teríamos  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e portanto

$Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ . Contradição. Logo, deve existir exatamente um vértice  $y_k$  em  $Q_2$ . Como  $K_l \setminus \{y_k\} \subset Q_1$ , temos  $S_l \setminus \{x_k\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_k$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (senão  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ ). Como  $x_k \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_2$  pode conter apenas  $y_k$  (pois  $x_k$  é adjacente apenas a  $y_k$ ) e  $S_l \setminus \{x_k\} \subset Q_1$ . Portanto,  $Q_1 = (K_l \setminus \{y_k\}) \cup (S_l \setminus \{x_k\}) \cup R_l$  e  $Q_2 = \{y_k\}$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Caso 1.2.2:** Suponha que  $Q_1$  contenha vértices de  $R_l$  mas não todos.

Nesse caso,  $R_l$  é um módulo não trivial de  $G$  e possui uma decomposição modular. Vamos usar as seguintes afirmações:

**Afirmção 3:** Sejam um grafo  $P_4$ -esparso  $G$ , sua árvore de decomposição modular  $T(G)$ , um nó serial ou paralelo  $r_l$ , em  $T(G)$ , e um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$ . Suponha que um filho não trivial de  $r_l$ ,  $r_{l,1}$ , contenha vértices de  $Q_1$  (ou de  $Q_2$ ) mas não contenha vértices de  $Q_2$  (respectivamente  $Q_1$ ). Se  $r_{l,1}$  possuir algum irmão  $r_{l,2}$  que contenha vértices de  $Q_1$  (resp.  $Q_2$ ), então todo vértice de  $r_{l,1}$  pertence a  $Q_1$  (resp.  $Q_2$ ).

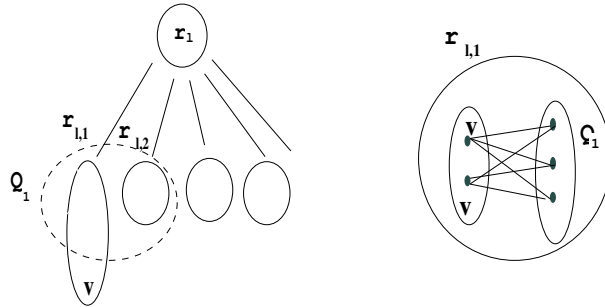


Figura 5.9: Se  $r_{l,1}$  possuir algum irmão  $r_{l,2}$  que contenha vértices de  $Q_1$ , então todo vértice de  $r_{l,1}$  pertence a  $Q_1$ .

*Demonstração.* Suponhamos que a afirmação seja falsa. Nesse caso,  $r_{l,1}$  contém algum vértice  $v$  tal que  $v \notin Q_1$ ; então  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  (pois  $r_{l,1}$  não contém vértices de  $Q_2$ ). Se  $r_l$  é serial, o vértice  $v$  é adjacente a todo vértice de  $Q_1$  pertencente a  $r_{l,2}$  e, como  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ ,  $v$  também deve ser adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l,1}$ ; então  $r_{l,1}$  é formado por vértices de  $Q_1$  e por vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  que são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l,1}$ . Por outro lado, como  $r_l$  é serial,  $r_{l,1}$  deve ser um módulo paralelo ou vizinhança, o que não ocorre pois  $r_{l,1}$  é conexo (e portanto não é módulo paralelo) e seus vértices não podem ser particionados da forma  $(K, S, R)$  de uma aranha. Contradição.

No caso em  $r_l$  é paralelo, o raciocínio é similar. Logo, a afirmação é verdadeira.  $\square$

**Afirmção 4:** Sejam um grafo  $P_4$ -esparso  $G$ , sua árvore de decomposição modular  $T(G)$ , um nó vizinhança  $r_l$ , em  $T(G)$ , com partição  $(K, S, R)$ , e um par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  de  $G$ . Suponha que  $Q_1$  (ou  $Q_2$ ) contenha algum vértice de  $K_l$  (respectivamente  $S_l$ ) e  $R_l$  seja serial (resp. paralelo). Se algum filho não trivial de  $R_l$ ,  $r_{l,1}$ , contiver vértices de  $Q_1$  (resp. de  $Q_2$ ) mas não contiver vértices de  $Q_2$  (respectivamente  $Q_1$ ), então todo vértice de  $r_{l,1}$  deve pertencer a  $Q_1$  (resp.  $Q_2$ ).

*Demonstração.* Suponhamos que a afirmação seja falsa. Nesse caso,  $r_{l,1}$  contém algum vértice  $v$  tal que  $v \notin Q_1$ ; então  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Como  $Q_1$  contém vértices de  $K_l$  e todo vértice de  $R_l$  é adjacente aos vértices de  $K_l$ ,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $r_l$  e conseqüentemente  $v$  deve ser adjacente aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l,1}$ . Então  $r_{l,1}$  é formado por vértices de  $Q_1$  e por vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  que são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $r_{l,1}$ , o que contradiz o fato de  $r_{l,1}$  ser um módulo paralelo ou vizinhança.

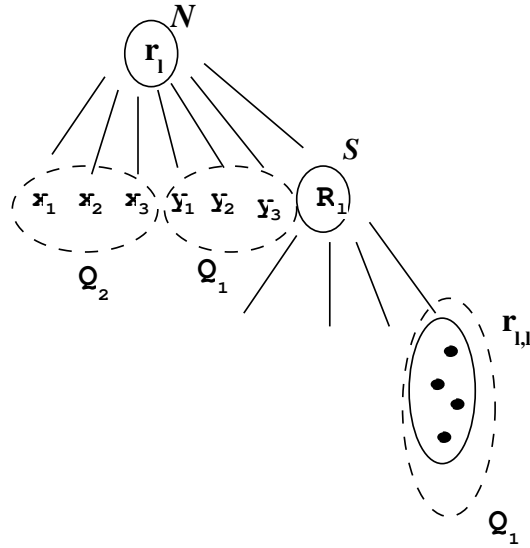


Figura 5.10: Afirmação 4: todo vértice de  $r_{l,1}$  deve pertencer a  $Q_1$ .

O caso em que  $Q_2$  contém vértices de  $S_l$  e  $R_l$  é paralelo é provado de modo similar. Logo, a afirmação é verdadeira.  $\square$

Como  $Q_1 \cup Q_2$  não está inteiramente contido em  $R_l$  (pela afirmação 1),  $Q_1$  ou  $Q_2$  deve conter vértices de  $K_l \cup S_l$ . Temos então as seguintes possibilidades para os vértices de  $Q_1$ :

**Possibilidade 1:**  $Q_1$  contém vértices de  $K_l$  (mas não todos);

**Possibilidade 2:**  $Q_1$  contém vértices de  $S_l$  (mas não todos);

**Possibilidade 3:**  $Q_1$  não contém vértices de  $K_l \cup S_l$ ;

**Possibilidade 4:**  $Q_1$  contém todos os vértices de  $K_l$ ;

**Possibilidade 5:**  $Q_1$  contém todos os vértices de  $S_l$ ;

Analisaremos cada uma das possibilidades.

**Possibilidade 1:**  $Q_1$  contém vértices de  $K_l$  mas não todos.

Sejam  $y_i \in K_l$  e  $z \in R_l$  tais que  $y_i, z \in Q_l$ ; então  $x_i$  deve pertencer a  $Q_1$  ou a  $Q_2$  (pois  $x_i$  é parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ). Suponha que  $x_i$  pertença a  $Q_1$ .  $y_i, x_i \in Q_1$  implica  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$ . Por argumento similar ao caso 1.1.1, exatamente um vértice  $y_j \in K_l \setminus \{y_i\}$  deve pertencer a  $Q_2$ ,  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1$ ,  $S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Então, como  $x_j$  é adjacente apenas a  $y_j$ ,  $R_l$  deve estar inteiramente contido em  $Q_1$ , o que é uma contradição. Logo,  $x_i$  deve pertencer a  $Q_2$ . Portanto, se  $y_i \in K_l$  pertence a  $Q_1$  então  $x_i \in Q_2$ .

Observemos que  $Q_2$  não contém vértices de  $K_l$ . Com efeito, se algum  $y_j$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $x_i, y_j \in Q_2$  implicaria  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e por argumento análogo ao do caso 1.1.2, possibilidade A, teríamos uma contradição. Observemos também que  $Q_2$  não contém vértices de  $R_l$ . De fato, se  $Q_2$  contivesse algum vértice de  $R_l$ , então todo vértice de  $K_l$  não pertencente a  $Q_1$  (e como vimos acima, não pertencente a  $Q_2$ ) seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ , o que seria uma contradição. Observemos ainda que  $Q_1$  não contém vértices de  $S_l$ . De fato, se algum  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $y_i, x_j \in Q_1$  implicaria  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$ ; mas todo  $y_k \in K_l \setminus \{y_j\}$  pertencendo a  $Q_1$  ( $y_i, x_j, y_k \in Q_1$ ) ou a  $Q_2$  ( $x_i, y_k \in Q_2$ ) implicaria  $x_k \in Q_1 \cup Q_2$ ; logo, se  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  então  $S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Assim, teríamos  $S_l \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $x_j \in Q_1$ ,  $K_l \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e portanto  $y_j$  não poderia pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Então  $R_l$  estaria inteiramente contido em  $Q_1$  (senão  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ), o que é uma contradição. Assim, concluímos que  $Q_1$  não pode conter vértices de  $S_l$  e  $Q_2$  não pode conter vértices de  $R_l$  nem de  $K_l$ .

Como  $|R_l| \geq 2$ ,  $R_l$  admite uma decomposição modular. Se  $R_l$  fosse um módulo paralelo ou vizinhança, de  $y_i, z \in Q_1$ ,  $z \in R_l$ , segue que  $R_l$  deve estar



contido em  $Q_1 \cup Q_2$  (pois há algum vértice  $v \in R_l$  que é adjacente a  $y_i$  mas não é adjacente a  $z$ ). Mas  $Q_2$  não contém vértices de  $R_l$ ; então  $R_l \subset Q_1$ . Contradição. Então  $R_l$  deve ser serial. Como  $y_i \in Q_1$ ,  $R_l$  é serial e os nós  $r_{l,i}$  que contém vértices de  $Q_1$  não contém vértices de  $Q_2$ , temos pela afirmação 4, que os nós  $r_{l,i}$  estão inteiramente contidos em  $Q_1$ . Logo, se  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$ , a única possibilidade para o par é  $Q_1$  igual a uma união não-vazia de filhos de  $K_l$  (não todos) união com uma união de filhos de  $R_l$  (não todos) e  $Q_2$  igual à união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  selecionados para  $Q_1$  (que é um par modular dado pelo algoritmo).

**Possibilidade 2:**  $Q_1$  contém vértices de  $S_l$  mas não todos.

Sejam  $x_i \in S_l$  e  $z \in R_l$  tais que  $x_i, z \in Q_1$ . Então  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Temos duas possibilidades a considerar:  $|K_l| = 2$  ou  $|K_l| > 2$ . Se  $K_l \setminus \{y_i\} = \{y_j\}$ , temos  $y_j \in Q_1 \cup Q_2$ . Se  $y_j$  pertencesse a  $Q_1$ , então  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_j \in Q_1 \cup Q_2$  e, para  $Q_1 \cup Q_2$  não ser igual ao módulo  $r_l$ ,  $y_i$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Então  $x_j$  deve pertencer a  $Q_2$  (senão,  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ) e, conseqüentemente,  $R_l \subset Q_1$  (senão,  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ), o que é uma contradição. Logo,  $y_j \in Q_2$ . Como  $|R_l| \geq 2$ ,  $R_l$  admite uma decomposição modular. Se  $R_l$  é serial ou vizinhança, de  $x_i, z \in Q_1$ , segue que  $R_l$  deve estar inteiramente contido em  $Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $z_1 \in R_l \setminus \{z\}$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $x_j$  pertenceria a  $Q_1 \cup Q_2$  e  $y_i$  não poderia pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Mas se  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$  ( $x_j, x_i \in Q_1$ ) ou a  $Q_2$  ( $y_j, x_j \in Q_2$ ),  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$  ou de  $Q_2$ , respectivamente, o que seria uma contradição. Então  $R_l \setminus \{z\} \subset Q_1$  e  $z \in Q_1$ . Contradição. Logo,  $R_l$  é paralelo. Afirmamos que  $x_j \notin Q_1 \cup Q_2$ . Com efeito, se  $x_j$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $y_j, x_j \in Q_2$  implicaria  $y_i \in Q_1 \cup Q_2$ ,  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual a  $r_l$ . Contradição.

Se  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$ , então  $Q_1$  conteria  $S_l$ , o que contradiria a hipótese. Logo,  $x_j \notin Q_1 \cup Q_2$ . Então  $Q_2 = \{y_j\}$  (pois  $x_j$  é adjacente apenas a  $y_j$ ). Ainda, afirmamos que  $y_i \notin Q_1$ . Com efeito, se  $y_i$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $x_i, y_i \in Q_1$  implicaria  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$ , e como  $Q_2 = \{y_j\}$ ,  $R_l \subset Q_1$ , o que é uma contradição. Logo,  $|K_l| = 2$ ,  $y_j \in Q_2$ ,  $x_j \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $y_i \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $Q_2 = \{y_j\}$  e de  $x_i \in Q_1$ ,  $R_l$  deve ser paralelo e  $Q_2$  não conter vértices de  $R_l$ , temos, pela afirmação 4, que os nós contendo os vértices  $z \in Q_1$  estão inteiramente contidos em  $Q_1$ . Logo, a única possibilidade para o par  $\{Q_1, Q_2\}$  quando  $|K_l| = 2$  é  $Q_1 = \{x_i\}$  união com uma união não-vazia de filhos de  $R_l$  (mas não todos) e  $Q_2 = \{y_j\}$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

Suponha agora  $|K_l| > 2$ . Afirmamos que  $Q_1$  contém vértices de  $K_l \setminus \{y_i\}$ . Com efeito, se tivéssemos  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2$  então  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $x_j \in S_l \setminus \{x_i\}$  pertencesse a  $Q_2$ , teríamos  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_i \in Q_1 \cup Q_2$ , o que seria uma contradição. Então  $S_l \setminus \{x_i\}$  estaria contido em  $Q_1$ , com  $x_i \in Q_1$ , ou seja,  $S_l \subset Q_1$ , o que seria uma contradição. Logo,  $K_l \setminus \{y_i\}$  não está contido inteiramente em  $Q_2$  e portanto existem vértices  $y_j \in K_l \setminus \{y_i\}$  tais que  $y_j \in Q_1$ . De  $y_j, x_i \in Q_1$ , temos  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_j \in Q_1 \cup Q_2$ . Então, se mais de um vértice de  $K_l \setminus \{y_i\}$  pertencesse a  $Q_2$ , os vértices de  $S_l \setminus \{x_i\}$  correspondentes deveriam pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (e o restante dos vértices pertencesse a  $Q_1$ ), teríamos  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Então  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $x_i \in Q_1$ ,  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ , e portanto  $y_i$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Portanto,  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$  (senão  $y_i$  seria adjacente a  $y_j \in Q_1$  e não adjacente aos vértices de  $S_l \setminus \{x_i\}$  em  $Q_1$ )  $\Rightarrow R_l \subset Q_1$  (senão  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ), o que é uma contradição. Logo, temos no máximo um vértice  $y_k \in K_l \setminus \{y_i\}$  tal que  $y_k \in Q_2$  e temos duas possibilidades:  $y_k \in Q_2$  e  $K_l \setminus \{y_i, y_k\} \subset Q_1$  ou  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1$ . Na primeira possibilidade,  $K_l \setminus \{y_i, y_k\} \subset Q_1$  e  $x_i \in Q_1$  implicam  $S_l \setminus \{y_i, y_k\} \subset Q_1 \cup Q_2$

e  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e, como  $R_l$  não está contido em  $Q_1$ , deve existir algum  $z_1 \in R_l \setminus \{z\}$  tal que  $z_1 \in Q_2$ . Como  $y_k, z_1 \in Q_2$ , temos  $x_k \in Q_1 \cup Q_2$  mas  $x_k$  pertencendo a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ ,  $y_i$  é parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$  ou  $Q_2$ , respectivamente. Contradição. Na segunda possibilidade,  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1$  e  $x_i \in Q_1$  implicam  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$  (com  $x_i \in Q_1$ ) e portanto  $y_i$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Mas, se algum  $x_j \in S_l \setminus \{x_i\}$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $y_i$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ; logo,  $S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$  e, por consequência,  $R_l \subset Q_1$ . Contradição. Das contradições, concluímos que não há pares modulares possíveis no caso em que  $|K_l| > 2$ .

**Possibilidade 3:**  $Q_1$  não contém vértices de  $K_l \cup S_l$ .

Como  $Q_1$  não contém vértices de  $K_l \cup S_l$ ,  $Q_1$  contém apenas vértices de  $R_l$ . Seja então  $z \in R_l$  tal que  $z \in Q_1$ . Pela afirmação 1,  $Q_1 \cup Q_2$  não está inteiramente contido em  $R_l$  e portanto  $Q_2$  deve conter vértices de  $K_l$  ou de  $S_l$ . Vamos considerar essas duas possibilidades. Suponha inicialmente que  $Q_2$  contenha vértices de  $K_l$ : seja  $y_i \in Q_2$ . Podemos ter  $x_i \in Q_2$  ou  $x_i \notin Q_1 \cup Q_2$  (pois  $Q_1$  não contém vértices de  $S_l$ ). Se  $x_i \in Q_2$ ,  $x_i, y_i \in Q_2$  implica  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_l \subset Q_1 \cup Q_2$ , com  $y_i \in Q_2$  e, como  $Q_1$  não contém vértices de  $K_l$ ,  $K_l \subset Q_2$  e conseqüentemente  $S_l \subset Q_2$  e temos  $Q_1 \cup Q_2$  igual ao módulo  $r_l$ , o que é uma contradição. Logo,  $x_i \notin Q_1 \cup Q_2$  e como  $x_i$  é adjacente apenas a  $y_i$ ,  $Q_2$  pode conter apenas  $y_i$ , ou seja,  $Q_2 = \{y_i\}$ , e  $Q_1$  está contido em  $R_l$ . Por outro lado,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular tal que ao menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$  e, segue do Teorema 2.1 e da definição de pares modulares que os vértices de  $Q_1$  devem ser parcialmente adjacentes ao vértice de  $Q_2$ ; mas isto contradiz o fato de  $Q_2 = \{y_i\}$  ser adjacente a todo vértice de  $R_l$  e portanto de  $Q_1$ .

Suponha agora que  $Q_2$  contenha vértices de  $S_l$ : seja  $x_i \in Q_2$ . Podemos ter  $y_i \in Q_2$  ou  $y_i \notin Q_1 \cup Q_2$ . Se  $y_i \in Q_2$ , de  $x_i, y_i \in Q_2$  recaímos numa contradição. Então  $y_i \notin Q_1 \cup Q_2$ . Afirmamos que  $Q_2$  não contém vértices de  $K_l$ . Com efeito, se algum  $y_j$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $x_i, y_j \in Q_2$  implicaria  $K_l \setminus \{y_i\} \subset Q_2$  e  $R_l \subset Q_2 \Rightarrow S_l \setminus \{x_i\} \subset Q_2$ , com  $x_i \in Q_2$  e então  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual ao módulo  $r_l$ . Contradição. Então  $Q_2$  não contém vértices de  $K_l$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  não contém vértices de  $K_l$ . Afirmamos também que  $Q_2$  não contém vértices de  $R_l$ . Com efeito, se algum  $z_1 \in R_l$  pertencesse a  $Q_2$ , teríamos  $x_i, z_1 \in Q_2$  e os vértices de  $K_l$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$ , o que seria uma contradição. Ainda, se algum  $x_j$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $y_i \notin Q_1 \cup Q_2$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ . Logo,  $Q_2 = \{x_i\}$  e os vértices de  $Q_1$  não são parcialmente adjacentes ao vértice de  $Q_2$ . Contradição.

Das contradições, concluímos que a possibilidade 3 não pode ocorrer.

**Possibilidade 4:**  $Q_1$  contém todos os vértices de  $K_l$ .

Como  $Q_1$  contém vértices de  $R_l$  (mas não todos), existem vértices  $z \in R_l$  tais que  $z \in Q_1$ .  $\{z\} \cup K_l \subset Q_1$  implica  $S_l \subset Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $x_i$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $R_l$  deveria estar contido em  $Q_1 \cup Q_2$  e teríamos  $Q_1 \cup Q_2$  igual ao módulo  $r_l$ ; contradição. Logo,  $S_l \subset Q_2$ . Então,  $K_l \subset Q_1$ ,  $S_l \subset Q_2$  e  $Q_1$  contém vértices de  $R_l$  e, para não termos a contradição de  $Q_1 \cup Q_2$  ser igual a  $r_l$ , devem existir vértices  $v$  de  $R_l$  tais que  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Sendo  $R_l$  não trivial,  $R_l$  pode ser um módulo serial, paralelo ou vizinhança. Consideraremos cada uma dessas possibilidades.

Denotemos  $R_l$  por  $r_{l+1}$ .

**Possibilidade 4.1:**  $R_l$  é um módulo paralelo.

Se  $R_l$  é paralelo, seus vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  são adjacentes aos vértices de  $K_l$  e não são adjacentes aos vértices  $z \in Q_1$  e portanto são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ . Contradição. Logo, essa possibilidade não pode ocorrer.

**Possibilidade 4.2:**  $R_l$  é um módulo serial.

Se  $R_l$  é serial, temos duas possibilidades a considerar:  $Q_2$  contém vértices de  $R_l$  ou não. Consideremos a segunda possibilidade. Pela afirmação 4,  $Q_1$  contém todos os nós  $r_{l,i}$ , filhos de  $R_l$  em  $T(G)$  que contém vértices de  $Q_1$ . Logo, obtivemos que  $Q_1$  é igual a  $K_l$  união com uma união de filhos de  $R_l$  e  $Q_2 = S_l$ , que é um par modular dado pelo algoritmo.

Consideremos agora a primeira possibilidade:  $Q_2$  contém vértices de  $R_l$ . Então devem existir nós  $r_{l+1,i}$ , filhos de  $r_{l+1} = R_l$ , contendo vértices de  $Q_2$ . A seguir, faremos e provaremos certas afirmações que serão utilizadas para provar que o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo.

**Afirmação 5:** Os vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  devem pertencer aos nós  $r_{l+1,i}$ .

*Demonstração.* De fato, suponha que exista vértice  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  que pertença a algum filho de  $r_{l+1}$  que não contenha vértices de  $Q_2$ . Então,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+1,i}$  (pois  $r_{l+1}$  é serial) e não é adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ . Contradição.  $\square$

**Afirmação 6:** Existe um único filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_2$ .

*Demonstração.* Pela afirmação 5, os vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  devem pertencer a nós  $r_{l+1,i}$ , filhos de  $r_{l+1}$ , que contêm vértices de  $Q_2$ . Consideremos então  $r_{l+1,j}$  nó contendo vértices de  $Q_2$  e contendo algum vértice  $v$ . Suponha que a

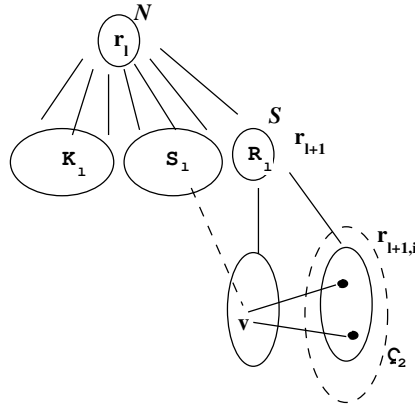


Figura 5.11: Afirmação 5.

afirmação seja falsa. Então existe outro nó  $r_{l+1,k}$  também contendo vértices de  $Q_2$ . Então,  $v$  é adjacente aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+1,k}$  (pois  $r_{l+1}$  é serial) e não é adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ . Contradição.  $\square$

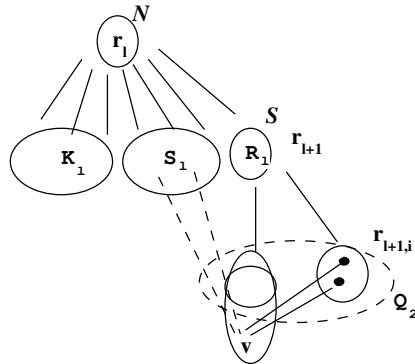


Figura 5.12: Suponha que exista mais de um filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_2$ .

Denotemos por  $r_{l+2}$  o único filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_2$  (e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ).

**Afirmação 7:** Todos os irmãos de  $r_{l+2}$  estão inteiramente contidos em  $Q_1$ .

*Demonstração.* Pela afirmação 6,  $r_{l+2}$  é o único filho de  $r_{l+1}$  contendo vértices de  $Q_2$  e, pela afirmação 5, apenas  $r_{l+2}$  contém vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Então todo irmão de  $r_{l+2}$  só pode conter vértices de  $Q_1$  (pois todo irmão de  $r_{l+2}$  não contém vértices de  $Q_2$  e nem vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ).  $\square$

Temos agora duas possibilidades a considerar:  $r_{l+2}$  contém vértices de  $Q_1$  ou não.

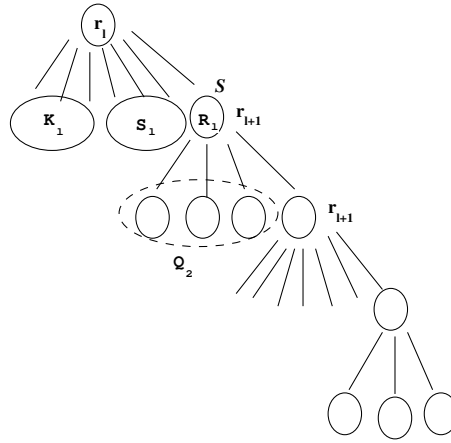


Figura 5.13: Afirmação 7: Todo irmão de  $r_{l+2}$  só pode conter vértices de  $Q_1$ .

**Possibilidade 4.2.1:**  $r_{l+2}$  não contém vértices de  $Q_1$ .

Como  $r_{l+1}$  é serial,  $r_{l+2}$  é um módulo paralelo ou vizinhança. Suponha  $r_{l+2}$  aranha magra com partição  $(K_{l+2} = \{y_{l+2,1}, \dots, y_{l+1,k}\}, S_{l+2} = \{x_{l+2,1}, \dots, x_{l+1,k}\}, R_{l+2})$ . Observemos que se algum  $y_{l+2,i} \in K_{l+2}$  pertencesse a  $Q_2$ , como  $S_l \subset Q_2$ , teríamos os vértices de  $K_{l+2}$  parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$  e portanto  $K_{l+2} \subset Q_2 \Rightarrow S_{l+2} \subset Q_2$  e  $R_{l+2} \subset Q_2$ , o que implica  $r_{l+2}$  contido em  $Q_2$ , que contradiz o fato de  $r_{l+2}$  conter vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Observemos também que se algum  $x_{l+2,i} \in S_{l+2}$  ou algum  $z \in R_{l+2}$  pertencesse

a  $Q_2$ , isto implicaria em  $Q_2$  contendo  $y_{l+2,i}$  e recairíamos numa contradição.

Das contradições, concluímos que  $r_{l+2}$  não contém vértices de  $Q_2$ , o que é novamente uma contradição. Logo,  $r_{l+2}$  não pode ser vizinhança.

Suponha então  $r_{l+2}$  paralelo. Por construção,  $r_{l+2}$  contém vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Afirmamos que os filhos de  $r_{l+2}$  que contêm vértices  $v$  não podem conter vértices de  $Q_2$ . De fato, suponha que algum filho  $r_{l+2,j}$  de  $r_{l+2}$  contenha vértices de  $Q_2$  e vértices  $v$ . Como  $r_{l+2}$  está contido em  $r_{l+1}$ , os vértices  $v$  não são adjacentes aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ ; então os vértices  $v$  também não podem ser adjacentes aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+2,j}$ , e portanto o nó é desconexo, o que contradiz o fato de os filhos do nó paralelo  $r_{l+2}$  serem seriais ou vizinhança e portanto conexos. Então os filhos de  $r_{l+2}$  que contêm vértices  $v$  não podem conter vértices de  $Q_2$ ; em outras palavras, todo filho de  $r_{l+2}$  contendo vértices de  $Q_2$  está inteiramente contido em  $Q_2$ . Logo,  $Q_2$  contém uma união não-vazia de filhos de  $r_{l+2}$  e o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade 4.2.2:**  $r_{l+2}$  contém vértices de  $Q_1$  (e de  $Q_2$ ).

Como  $r_{l+1}$  é serial,  $r_{l+2}$  é paralelo ou vizinhança. Vamos analisar essas duas possibilidades. A afirmação a seguir será usada em ambas as possibilidades:

**Afirmção 8:** Os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+2}$  não podem estar inteiramente contidos em apenas um dos conjuntos da partição  $(K_{l+2}, S_{l+2}, R_{l+2})$ .

*Demonstração.* Com efeito, suponha que os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+2}$  estivessem inteiramente em  $K_{l+2}$ ; se  $y_{l+2,i} \in K_{l+2}$  pertencesse a  $Q_2$ , o vértice  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ , seria adjacente a  $y_{l+2,i}$  e não seria adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ ; contradição. Suponha que os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+2}$



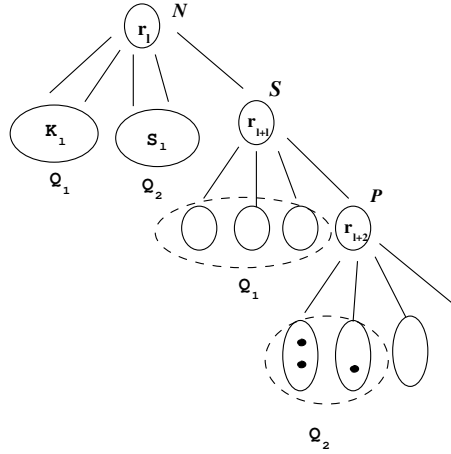


Figura 5.14:  $r_{l+2}$  é um módulo paralelo, não contém vértices de  $Q_1$  e todos os seus filhos contendo vértices de  $Q_2$  estão inteiramente contidos em  $Q_2$ .

estivessem inteiramente contidos em  $S_{l+2}$ ; se  $x_{l+2,i} \in S_{l+2}$  pertencesse a  $Q_1$ , o vértice  $y_{l+2,j} \notin Q_1 \cup Q_2$  seria adjacente aos vértices de  $K_l \subset Q_1$  e não adjacente a  $x_{l+2,i}$ ; contradição. Suponha, por fim, que os vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l+2}$  estivessem inteiramente contidos em  $R_{l+2}$ ; então os vértices de  $S_{l+2}$  não seriam adjacentes aos vértices de  $Q_1$  em  $R_{l+2}$  mas seriam adjacentes aos vértices de  $K_l \subset Q_1$ ; contradição. Logo, a afirmação é verdadeira.

□

**Possibilidade 4.2.2.1:** Consideremos a possibilidade de  $r_{l+2}$  ser módulo vizinhança. Suponha  $r_{l+2}$  aranha magra com partição  $(K_{l+2}, S_{l+2}, R_{l+2})$ .

Temos dois casos a considerar:  $R_{l+2} \neq \emptyset$  e não contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  e o caso contrário ( $R_{l+2} = \emptyset$  ou contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ ).

**Caso A:**  $R_{l+2} \neq \emptyset$  e não contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ .

Como  $Q_1 \cup Q_2$  não está inteiramente contido em  $S_{l+2}$  e  $R_{l+2}$  não contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , devem existir vértices de  $K_{l+2}$  pertencentes a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ .

Suponha  $y_{l+2,i} \in Q_1$ . Podemos ter  $x_{l+2,i} \in Q_1$  ou  $x_{l+2,i} \in Q_2$  ou  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ . Se  $x_{l+2,i} \in Q_1$ , os vértices de  $R_{l+2}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ ; contradição. Se  $x_{l+2,i} \in Q_2$ , os vértices de  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}$  são adjacentes aos vértices de  $K_l \subset Q_1$  e não são adjacentes ao vértice  $y_{l+2,i} \in Q_1$ , ou seja, os vértices de  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$  e, para não termos uma contradição,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}$  deve estar contido em  $Q_2$ , com  $x_{l+2,i} \in Q_2 \Rightarrow K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  (pois  $x_{l+2,i}$  é adjacente apenas a  $y_{l+2,i}$ ); mas, se algum  $y_{l+2,j}$  pertencesse a  $Q_2$ , teríamos uma contradição e portanto  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1$ , com  $y_{l+2,i} \in Q_1$ ; logo,  $K_{l+2} \subset Q_1$ ,  $S_{l+2} \subset Q_2$  e  $Q_1 \cup Q_2$  não contém vértices de  $R_{l+2}$ ; assim obtivemos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular obtido pelo algoritmo. Se  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ , como  $K_l \subset Q_1$ ,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, sendo  $x_{l+2,i}$  adjacente apenas a  $y_{l+2,i} \in Q_1$ , devemos ter  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_2 \Rightarrow K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  (pois cada  $y_{l+2,j}$  é adjacente a  $x_{l+2,j}$  mas não é adjacente a  $S_l \subset Q_2$ )  $\Rightarrow K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_2$ . Então  $(K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\}) \cup (S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\})$  está contido em  $Q_2$  e portanto os vértices de  $R_{l+2}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$ ; contradição.

Suponha agora  $y_{l+2,i} \in Q_2$ . Se  $x_{l+2,i} \in Q_1$ , os vértices de  $R_{l+2}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ ; contradição. Se  $x_{l+2,i} \in Q_2$ , com  $y_{l+2,i} \in Q_2$ , os vértices de  $R_{l+2}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_2$ ; contradição. Se  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $x_{l+2,i}$  é adjacente a  $y_{l+2,i}$  mas não é adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ ; contradição.

Assim, se  $R_{l+2} \neq \emptyset$  e não contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo (caso contrário, temos contradições).

**Caso B:**  $R_{l+2} = \emptyset$  ou contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ .

Se  $R_{l+2} = \emptyset$ , devem existir vértices de  $K_{l+2}$  ou de  $S_{l+2}$  pertencentes a  $Q_1$  ou a  $Q_2$  ou, se  $R_{l+2} \neq \emptyset$ , pela afirmação 8,  $Q_1 \cup Q_2$  não está inteiramente contido em  $R_{l+2}$  e devem existir vértices de  $K_{l+2}$  ou de  $S_{l+2}$  pertencentes a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ .

Suponha inicialmente que existam vértices de  $K_{l+2}$  pertencentes a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ . Suponha  $y_{l+2,i} \in Q_1$ . Podemos ter  $x_{l+2,i} \in Q_1$  ou  $x_{l+2,i} \in Q_2$  ou  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ . Suponha  $x_{l+2,i} \in Q_1$ : usando argumentos análogos aos do caso 1.1.1,  $y_{l+2,i}, x_{l+2,i} \in Q_1$  implica  $R_{l+2} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e exatamente um único vértice  $y_{l+2,j}$  de  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\}$  pertence a  $Q_2 \Rightarrow K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,j}\}$ ; então  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_{l+2,j}$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2 \Rightarrow Q_2$  contém apenas  $y_{l+2,j}$  e não é adjacente aos vértices de  $S_{l+2}$ ; contradição. Suponha agora  $x_{l+2,i} \in Q_2$ : como  $K_l \subset Q_1$ , os vértices de  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}$  são adjacentes aos vértices de  $K_l$  e não adjacentes a  $y_{l+2,i}$  e para não termos uma contradição,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}$  deve estar contido em  $Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $x_{l+2,j}$  pertencer a  $Q_1$ ,  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,j}\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $R_{l+2} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_{l+2,j}$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ ; então, para  $y_{l+2,j}$  não ser parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ,  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,j}\}$  e  $R_{l+2}$  devem estar contidos em  $Q_1$  (pois  $x_{l+2,i} \in Q_2$ )  $\Rightarrow S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,j}\}$  deve estar contido em  $Q_2$  (senão,  $y_{l+2,j}$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ). E portanto temos  $\{x_{l+2,j}\} \cup (K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,j}\}) \cup R_{l+2} \subset Q_1$  e  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,j}\} \subset Q_2$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo. Se nenhum  $x_{l+2,j}$  pertencer a  $Q_1$ , ou seja, todo  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}$  estiver contido em  $Q_2$  (com  $x_{l+2,i} \in Q_2$ ), temos  $S_{l+2}$  contido em  $Q_2 \Rightarrow K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ; se  $R_{l+2} = \emptyset$ , isto é uma contradição (pois

$Q_1 \cup Q_2$  é igual a  $r_l$ ); se  $R_{l+2} \neq \emptyset$ , para não termos  $Q_1 \cup Q_2$  igual a  $r_l$ , devem existir vértices  $v \in R_{l+2}$  tais que  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ; então  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1$  (para não termos os vértices  $v$  parcialmente adjacentes a  $Q_2$ ). Como supomos  $R_{l+2}$  contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  e vértices  $v$ ,  $R_{l+2}$  é um módulo não trivial e pode ser serial, paralelo ou vizinhança e, por recorrência dos casos já estudados, temos um par modular obtido pelo algoritmo. Suponha, por fim,  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ : como  $K_l \subset Q_1$ ,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $x_{l+2,j}$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $x_{l+2,i}$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ; logo,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_2$ ; mas,  $x_{l+2,j} \in Q_2$  implica  $y_{l+2,j}$  ser adjacente a  $x_{l+2,j}$  e não ser adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ ; portanto,  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, como  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$  é adjacente somente a  $y_{l+2,i} \in Q_1$ , devemos ter  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_2 \Rightarrow R_{l+2} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, por  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $R_{l+2} \subset Q_2$ . Então  $\{y_{l+2,i}\} \subset Q_1$  e  $(K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\}) \cup (S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\}) \cup R_{l+2} \subset Q_2$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

Suponha agora  $y_{l+2,i} \in Q_2$ . Se  $x_{l+2,i} \in Q_1$ , como  $K_l \subset Q_1$ , os vértices de  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ ; logo  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ; mas  $y_{l+2,j}$  pertencendo a  $Q_1$  ou a  $Q_2$  implica  $x_{l+2,j} \in Q_1 \cup Q_2 \Rightarrow K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  implica  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Mas se algum  $x_{l+2,j}$  pertencer a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ , os vértices de  $R_{l+2}$  são parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$  ou de  $Q_2$ , respectivamente; então  $R_{l+2} \subset Q_1 \cup Q_2$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  é igual ao módulo  $r_l$ ; contradição. Se  $x_{l+2,i} \in Q_2$ , como  $y_{l+2,i} \in Q_2$ , temos, por argumento análogo ao do caso 1.1.1, que  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e exatamente um vértice  $y_{l+2,j}$  deve pertencer a  $Q_1$  e  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,j}\} \subset Q_2 \Rightarrow R_{l+2} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,j}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_{l+2,j} \notin Q_1 \cup Q_2$ . Como  $x_{l+2,j}$  é adjacente apenas a  $y_{l+2,j}$ , devemos ter  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,j}\} \subset Q_2$  e  $R_{l+2} \subset Q_2$ . E obtemos  $\{y_{l+2,i}\} \subset Q_1$  e  $(K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,j}\}) \cup (S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,j}\}) \cup R_{l+2} \subset Q_2$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo. Se  $x_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ , o vértice

$x_{l+2,i}$  é adjacente a  $y_{l+2,i} \in Q_2$  mas não é adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ ; contradição.

Suponha agora que existam vértices de  $S_{l+2}$  pertencentes a  $Q_1$  ou a  $Q_2$ . Suponha  $x_{l+2,i} \in Q_1$ . Podemos ter  $y_{l+2,i} \in Q_1$  ou  $y_{l+2,i} \in Q_2$  ou  $y_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ . Nas duas primeiras possibilidades, recaímos nas subpossibilidades acima analisadas. Suponha  $y_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ :  $\{x_{l+2,i}\} \cup K_l \subset Q_1$  implica  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_{l+2} \subset Q_1 \cup Q_2$  (pois cada vértice é adjacente aos vértices de  $K_l$  mas não são adjacentes a  $x_{l+2,i}$ ). Como  $y_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ ,  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_2$  (pois se algum  $x_{l+2,j}$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $y_{l+2,i}$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ),  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\} \subset Q_1$  e  $R_{l+2} \subset Q_1$  (pois se algum vértice de  $K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\}$  ou de  $R_{l+2}$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $y_{l+2,i}$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ); e obtemos  $\{x_{l+2,i}\} \cup (K_{l+2} \setminus \{y_{l+2,i}\}) \cup R_{l+2} \subset Q_1$  e  $S_{l+2} \setminus \{x_{l+2,i}\} \subset Q_2$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

Suponha agora  $x_{l+2,i} \in Q_2$ . Se  $y_{l+2,i} \in Q_1$  ou  $y_{l+2,i} \in Q_2$ , recaímos nas subpossibilidades acima analisadas. Suponha  $y_{l+2,i} \notin Q_1 \cup Q_2$ : nesse caso,  $y_{l+2,i}$  é adjacente a  $x_{l+2,i} \in Q_2$  e não é adjacente aos vértices de  $S_l \subset Q_2$ ; contradição.

Assim, o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo (caso contrário, temos contradições).

**Possibilidade 4.2.2.2:** Consideremos a possibilidade de  $r_{l+2}$  ser módulo paralelo.

Por argumentos similares aos das afirmações 5, 6 e 7,  $r_{l+2}$  contém vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ , existe um único filho  $r_{l+3}$ , de  $r_{l+2}$ , contendo vértices de  $Q_1$

e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  e todos os irmãos de  $r_{l+3}$  estão inteiramente contidos em  $Q_2$  e, por recorrência das possibilidades acima vistas, concluímos que o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade 4.3:**  $R_l$  é um módulo vizinhança.

Se  $R_l$  é vizinhança, usamos argumentos análogos aos utilizados na possibilidade 4.2 para concluirmos que o par modular  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade 5:**  $Q_1$  contém todos os vértices de  $S_l$ .

$S_l \subset Q_1$  implica  $K_l \subset Q_1 \cup Q_2$  e, para  $Q_1 \cup Q_2$  não ser igual ao módulo  $r_l$ , devem existir vértices  $v \in R_l$  tais que  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Se algum  $y_j \in K_l$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $R_l$  deveria estaria estar contido em  $Q_1 \cup Q_2$ , o que é uma contradição. Da contradição, obtemos que  $K_l \subset Q_2$ . Temos então  $K_l \subset Q_2$  e  $Q_1$  contendo  $S_l$  e vértices de  $R_l$  (mas não todos).

Se  $R_l$  fosse serial, teríamos a contradição de os vértices  $v$  serem parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ . Portanto,  $R_l$  deve ser paralelo ou vizinhança e usamos argumentos similares aos das possibilidades 4.2 e 4.3 para concluirmos que  $\{Q_1, Q_2\}$  deve ser obtido pelo algoritmo.

**Caso 2:** Suponha que  $r_l$  seja um módulo paralelo ou serial.

Consideremos  $r_{l,1}, \dots, r_{l,k}$  os filhos de  $r_l$  contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ ,  $k \geq 2$ . Podemos observar, usando argumento análogo ao da recíproca do Teorema 4.5, que os vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  são parcialmente adjacentes entre si e devem existir nós  $r_{l,j}$  contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ .

Temos as seguintes afirmações em relação ao par modular  $\{Q_1, Q_2\}$ :

**1ª afirmação:** Existe pelo menos um filho de  $r_l$  que contém vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

**2ª afirmação:** Os nós  $r_{l,j}$ , contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ , devem conter vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

As provas das 1ª e 2ª afirmações utilizam argumentos análogos aos das 1ª e 2ª afirmações da recíproca do Teorema 4.5, apenas usando a afirmação 3 desta seção (na recíproca deste Teorema) em vez de usar o Lema 4.4.

**3ª afirmação:** Existe um único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ .

*Demonstração.* De fato, seja  $r_{l,j}$  filho de  $r_l$  contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Pela 2ª afirmação,  $r_{l,j}$  deve conter vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$ . Suponha que a 3ª afirmação seja falsa. Então existe outro nó  $r_{l,q}$ , filho de  $r_l$ , que também contém vértices de  $Q_1$  e de  $Q_2$ . Se  $r_l$  for serial, os vértices  $v$ , em  $r_{l,j}$ , são adjacentes aos vértices de  $Q_1$  e  $Q_2$  em  $r_{l,q}$ . Consequentemente, os vértices  $v$  também são adjacentes aos vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  em  $r_{l,j}$ . Logo, o nó  $r_{l,j}$  é formado por vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  e por vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ , que são adjacentes a todo vértice de  $Q_1 \cup Q_2$ . Por outro lado, como  $r_l$  é serial,  $r_{l,j}$  deve ser paralelo ou vizinhança, o que não ocorre pois  $r_{l,j}$  é conexo (e portanto não é módulo paralelo) e seus vértices não podem ser particionados da forma  $(K, S, R)$  de uma aranha. Contradição. Se  $r_l$  for paralelo, usamos argumento similar. Das contradições, concluímos que a afirmação é verdadeira.  $\square$

Denotemos por  $r_{l+1}$  o único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$  e contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ . Então cada  $r_{l,i}$ , irmão de  $r_{l+1}$  e contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , contém vértices apenas de  $Q_1$  ou apenas de  $Q_2$ .

**4ª afirmação:** Todos os irmãos  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$  contém vértices apenas de  $Q_1$  ou todos contém vértices apenas de  $Q_2$ .

A prova da afirmação usa argumento análogo ao da 4ª afirmação da recíproca do Teorema 4.5, apenas usando que os nós estão inteiramente contidos em  $Q_j$  em vez de serem maximais relativos a  $Q_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Como  $r_{l+1}$  é um módulo não trivial de  $G$  (pois contém vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  e vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$ ),  $r_{l+1}$  pode ser módulo serial, paralelo ou vizinhança. Vamos analisar separadamente dois casos:

**Caso 2.1:**  $r_{l+1}$  é um módulo serial ou paralelo.

Nesse caso, usamos argumentos análogos aos das 5ª e 6ª afirmações da recíproca do Teorema 4.5 para garantir que todos os filhos de  $r_{l+1}$  devem conter vértices de  $Q_1 \cup Q_2$  e, se todo irmão de  $r_{l+1}$  contém vértices apenas de  $Q_i$ , existe exatamente um filho de  $r_{l+1}$ , que denotaremos por  $r_{l+2}$ , contendo vértices de  $Q_i$  e os demais filhos estão inteiramente contidos em  $Q_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ . Sendo  $r_{l+2}$  módulo não trivial,  $r_{l+2}$  pode ser módulo paralelo, serial ou vizinhança. Se  $r_{l+2}$  for paralelo ou serial, usamos recursivamente o mesmo argumento utilizado na recíproca do Teorema 4.5. Se até o final da recorrência todos os nós forem seriais ou paralelos, temos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular obtido pelo algoritmo. Se, ao longo da recorrência, encontrarmos  $r_{l+p}$ ,  $p \geq 2$ , módulo vizinhança, usamos argumentos similares aos do caso 1 da recíproca deste Teorema para concluirmos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Caso 2.2:**  $r_{l+1}$  é um módulo vizinhança.



Suponhamos então  $r_{l+1}$  aranha magra com partição  $(K_{l+1} = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}, S_{l+1} = \{x_1, \dots, x_k\}, R_{l+1})$ . Temos dois subcasos a considerar:  $r_l$  é um módulo paralelo ou é um módulo serial.

**Caso 2.2.1:**  $r_l$  é um módulo paralelo.

Pelas 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> afirmações, sabemos que  $r_{l+1}$  é o único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$  e contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  e todos os irmãos  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$ , contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , contém vértices apenas de  $Q_1$  ou todos contém vértices apenas de  $Q_2$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que todos os nós  $r_{l,i}$  estejam contidos em  $Q_2$ .

**5<sup>a</sup> afirmação:** Os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  em  $r_{l+1}$  não podem estar inteiramente contidos em apenas um dos conjuntos da partição  $(K_{l+1}, S_{l+1}, R_{l+1})$  de  $r_{l+1}$ .

*Demonstração.* Com efeito, suponha que os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  em  $r_{l+1}$  estivessem inteiramente contidos em  $K_{l+1}$  ( $S_{l+1}$ ); então, se  $y_i \in K_{l+1}$  (respectivamente  $x_i \in S_{l+1}$ ) pertencesse a  $Q_2$ , o vértice  $x_i \in S_{l+1}$  (respectivamente  $y_i \in K_{l+1}$ ), não pertencente a  $Q_1 \cup Q_2$ , seria adjacente a  $y_i$  (respectivamente  $x_i$ ) e não seria adjacente aos vértices de  $Q_2$  pertencentes aos nós  $r_{l,i}$ . Contradição. Suponhamos agora que os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  em  $r_{l+1}$  estivessem inteiramente contidos em  $R_{l+1}$ ; então, se  $z \in R_{l+1}$  pertencesse a  $Q_2$ , o vértice  $y_i$ , não pertencente a  $Q_1 \cup Q_2$ , seria adjacente a  $z$  e não seria adjacente aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l,i}$ . Contradição.

Das contradições, concluímos que a afirmação é verdadeira.  $\square$

Como os vértices de  $\{Q_1, Q_2\}$  em  $r_{l+1}$  não podem estar inteiramente contidos em apenas um conjunto da partição  $(K_{l+1}, S_{l+1}, R_{l+1})$  de  $r_{l+1}$ ,  $Q_1 \cup Q_2$  não pode estar inteiramente contido em  $S_{l+1}$  e portanto deve conter vértices

de  $K_{l+1} \cup R_{l+1}$ .

**6ª afirmação:**  $Q_1$  deve conter vértices de  $K_{l+1}$ .

*Demonstração.* De fato, suponha que  $Q_1$  não contenha vértices de  $K_{l+1}$ . Se  $Q_2$  contivesse algum vértice  $y_i$  de  $K_{l+1}$ ,  $x_i$  e os vértices de  $K_{l+1}$  não seriam adjacentes aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l,i}$  e seriam adjacentes a  $y_i$  (e teríamos adjacência parcial aos vértices de  $Q_2$ ) e portanto  $x_i$  e  $K_{l+1}$  deveriam estar contidos em  $Q_1 \cup Q_2$ ; mas, como supomos que  $Q_1$  não contém vértices de  $K_{l+1}$ ,  $K_{l+1} \setminus \{y_i\}$  estaria contido em  $Q_2$ , com  $y_i \in Q_2 \Rightarrow R_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $S_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  (caso contrário, teríamos adjacência parcial aos vértices de  $Q_2$ ); logo,  $Q_1 \cup Q_2$  conteria todos os vértices de  $r_{l+1}$  e, conseqüentemente,  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual a uma união de filhos do nó paralelo  $r_l$ , ou seja,  $Q_1 \cup Q_2$  seria um módulo de  $G$ . Contradição. Então  $Q_2$  não contém vértices de  $K_{l+1} \Rightarrow Q_1 \cup Q_2$  não contém vértices de  $K_{l+1}$ ; isso implica que  $Q_1 \cup Q_2$  deve conter vértices de  $R_{l+1}$ . Mas, se  $Q_2$  contivesse algum vértice  $z$  de  $R_{l+1}$ , os vértices de  $K_{l+1}$  (não pertencentes a  $Q_1 \cup Q_2$ ) seriam adjacentes a  $z$  e não adjacentes aos vértices de  $Q_2$  em  $r_{l,i}$ , o que seria uma contradição. Logo, os vértices de  $Q_2$  em  $r_{l+1}$  só poderiam pertencer a  $S_{l+1}$ . Mas, se algum  $x_j \in S_{l+1}$  pertencesse a  $Q_2$ , o respectivo vértice  $y_j \in K_{l+1}$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ , o que seria uma contradição.

Das contradições, concluímos que  $Q_1$  deve conter vértices de  $K_{l+1}$ .  $\square$

Seja então  $y_i \in K_{l+1}$  tal que  $y_i \in Q_1$ . Temos três possibilidades:  $x_i \in Q_1$ ,  $x_i \in Q_2$  ou  $x_i \notin Q_1 \cup Q_2$ . Analisemos cada uma das possibilidades:

**Possibilidade 1:**  $x_i \in Q_1$ .

Se  $x_i, y_i \in Q_1$  então  $K_{l+1} \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $R_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  (para não termos adjacência parcial aos vértices de  $Q_1$ ). Por argumento similar

ao utilizado no caso 1.1.1 (na demonstração deste Teorema), exatamente um vértice  $y_j$  de  $K_{l+1} \setminus \{y_i\}$  deve pertencer a  $Q_2$ ,  $S_{l+1} \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (senão  $Q_1 \cup Q_2$  seria igual a uma união de filhos do módulo paralelo  $r_l$  e seria um módulo de  $G$ , o que seria uma contradição). Mas  $x_j \notin Q_1 \cup Q_2$  é adjacente a  $y_j \in Q_1 \cup Q_2$  e não adjacente aos vértices de  $r_{l,i}$  (que pertencem a  $Q_2$ ). Contradição. Da contradição, concluímos que essa possibilidade não pode ocorrer.

**Possibilidade 2:**  $x_i \in Q_2$ . Nesse caso, temos a seguinte afirmação:

**Afirmação:**  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_{l+1}$ .

*Demonstração.* Com efeito, se algum  $y_j \in K_{l+1}$  pertencesse a  $Q_2$ , isto implicaria  $K_{l+1} \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $R_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $x_i \in Q_1 \cup Q_2$  (para não termos adjacência parcial aos vértices de  $Q_2$ ); e por argumento similar ao utilizado no caso 1.1.1, exatamente  $y_j$  deve pertencer a  $Q_2$ ,  $S_{l+1} \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, conseqüentemente,  $Q_1 \cup Q_2$  seria um módulo de  $G$ . Contradição. Logo, a afirmação é verdadeira.  $\square$

Consideremos então  $y_i \in Q_1$ ,  $x_i \in Q_2$ . Temos as seguintes possibilidades a considerar:

**Possibilidade 2.1:**  $y_i, x_j \in Q_1$ , para algum  $x_j \in S_{l+1} \setminus \{x_i\}$ ;

**Possibilidade 2.2:**  $x_i, x_j \in Q_2$ , para algum  $x_j \in S_{l+1} \setminus \{x_i\}$ ;

**Possibilidade 2.3:**  $y_i, y_j \in Q_1$ , para algum  $y_j \in K_{l+1} \setminus \{y_i\}$ ;

**Possibilidade 2.4:**  $x_i, y_j \in Q_2$ , para algum  $y_j \in K_{l+1} \setminus \{y_i\}$ ;

**Possibilidade 2.5:**  $y_i, z \in Q_1$ , para algum  $z \in R_{l+1}$ ;

**Possibilidade 2.6:**  $x_i, z \in Q_1$ , para algum  $z \in R_{l+1}$ ;

Analisaremos cada uma das possibilidades acima.

**Possibilidade 2.1:**  $y_i, x_j \in Q_1$ , para algum  $x_j \in S_{l+1} \setminus \{x_i\}$ .

Se  $y_i, x_j \in Q_1$ , então  $R_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $K_{l+1} \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  (para não termos adjacência parcial aos vértices de  $Q_1$ ) e, como  $Q_2$  não contém vértices de  $K_{l+1}$ ,  $K_{l+1} \setminus \{y_j\}$  deve estar contido em  $Q_1 \Rightarrow S_{l+1} \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (para não termos a contradição de  $Q_1 \cup Q_2$  ser um módulo de  $G$ ); então  $S_{l+1} \setminus \{x_j\} \subset Q_2$  (pois, se algum  $x_k \in S_{l+1} \setminus \{x_j\}$  pertencesse a  $Q_1$ ,  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ , o que seria uma contradição), o que implica  $R_{l+1} \subset Q_1$  (pois, se algum  $z$  em  $R_{l+1}$  pertencesse a  $Q_2$ ,  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_2$ ). Logo, obtivemos  $Q_1 = (K_{l+1} \setminus \{y_j\}) \cup \{x_j\} \cup R_{l+1}$  e  $Q_2$  igual a  $S_{l+1} \setminus \{x_j\}$  união com a união dos nós  $r_{l,i}$ , filhos de  $r_l$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade 2.2:**  $x_i, x_j \in Q_2$ , para algum  $x_j \in S_{l+1} \setminus \{x_i\}$ .

Se  $x_i, x_j \in Q_2$ , então  $y_j$  deve pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$  (e como  $Q_2$  não contém vértices de  $K_{l+1}$ )  $\Rightarrow y_j \in Q_1$ . Logo,  $x_j \in Q_2$  implica  $y_j \in Q_1$ . Temos duas subpossibilidades:  $Q_1$  contém algum vértice de  $S_{l+1}$  ou não. Se  $Q_1$  contém algum vértice de  $S_{l+1}$ , recaímos na possibilidade 2.1 acima. Se  $Q_1$  não contém vértices de  $S_{l+1}$ , obtemos  $Q_1$  igual a uma união não-vazia de  $y_i$  (podendo ser todos os  $y_i$ , se  $R_{l+1}$  for não-vazio) e  $Q_2$  igual à união dos  $x_i$  correspondentes com a união dos nós  $r_{l,i}$ , filhos de  $r_l$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade 2.3:**  $y_i, y_j \in Q_1$ , para algum  $y_j \in K_{l+1} \setminus \{y_i\}$ .

Se  $y_i, y_j \in Q_1$ , então  $x_j$  deve pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ . Mas, se  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$ , isto implicaria  $R_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$ ,  $K_{l+1} \subset Q_1$  e conseqüentemente  $S_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  e teríamos uma contradição. Logo,  $x_j \in Q_2$  e recaímos na possibilidade 2.2.

**Possibilidade 2.4:**  $x_i, y_j \in Q_2$ , para algum  $y_j \in K_{l+1} \setminus \{y_i\}$ .

Se algum  $y_j$  pertencesse a  $Q_2$ , teríamos uma contradição com a afirmação dada acima, que garante-nos que  $Q_2$  não pode conter vértices de  $K_{l+1}$ . Logo, essa possibilidade não pode ocorrer.

**Possibilidade 2.5:**  $y_i, z \in Q_1$ , para algum  $z \in R_{l+1}$ .

Se algum  $z$  pertence a  $Q_2$ , isto implica  $K_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  (para não termos adjacência parcial aos vértices de  $Q_2$ )  $\Rightarrow K_{l+1} \subset Q_1$  (pois  $Q_2$  não contém vértices de  $K_{l+1}$ )  $\Rightarrow S_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$ . Mas, se algum  $x_j$  pertencesse a  $Q_1$ , isto implicaria  $R_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  e teríamos a contradição de  $Q_1 \cup Q_2$  ser um módulo de  $G$ ; logo,  $S_{l+1} \subset Q_2$  e  $Q_1 \cup Q_2$  não pode conter todos os vértices de  $R_{l+1}$  (caso contrário,  $Q_1 \cup Q_2$  seria um módulo de  $G$ ). Assim,  $K_{l+1} \subset Q_1$ ,  $S_{l+1} \subset Q_2$  e  $Q_2$  contém vértices de  $R_{l+1}$  (mas não todos) e, usando argumentos similares aos das possibilidades 4.1, 4.2 e 4.3 do caso 1.2.2 (na demonstração deste Teorema), obtemos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular obtido pelo algoritmo (pela recorrência do procedimento  $P(r_{l+2})$ ).

**Possibilidade 2.6:**  $x_i, z \in Q_1$ , para algum  $z \in R_{l+1}$ .

Se algum  $z$  pertence a  $Q_1$ , temos duas subpossibilidades a considerar:  $R_{l+1}$  está inteiramente contido em  $Q_1$  ou não.

**Possibilidade 2.6.1:**  $R_{l+1}$  está inteiramente contido em  $Q_1$ .

Nesse caso, temos duas possibilidades a considerar:  $Q_1$  contendo vértices de  $S_{l+1}$  ou não. Na primeira possibilidade, se algum  $x_j \in S_{l+1}$  pertencer a  $Q_1$ ,  $x_j$  e  $z$  em  $Q_1$  implicam  $K_{l+1} \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e, conseqüentemente,  $K_{l+1} \setminus \{y_j\} \subset Q_1 \Rightarrow S_{l+1} \setminus \{x_j\} \subset Q_1 \cup Q_2$  e  $y_j$  não pode pertencer a  $Q_1 \cup Q_2$ ; então  $S_{l+1} \setminus \{x_j\} \subset Q_2$  (caso contrário,  $y_j$  seria parcialmente adjacente aos vértices de  $Q_1$ ) e obtemos  $Q_1 = (K_{l+1} \setminus \{y_j\}) \cup \{x_j\} \cup R_{l+1}$  e  $Q_2$  igual a  $S_{l+1} \setminus \{x_j\}$  união com a união dos nós  $r_{l,i}$ , filhos de  $r_l$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo. Suponha agora que  $Q_1$  não contenha vértices de  $S_{l+1}$ ; temos então  $R_{l+1} \subset Q_1$ ,  $Q_1$  não contendo vértices de  $R_{l+1}$ ,  $Q_2$  não contendo vértices de  $K_{l+1}$  e a condição que se  $x_j \in Q_2$  então  $y_j \in Q_1$  (pois, se  $x_j \in Q_2$ , então  $y_j$  deve pertencer a  $Q_1 \cup Q_2 \Rightarrow y_j \in Q_1$ ). Obtivemos então  $Q_1$  igual a  $R_{l+1}$  união com uma união não-vazia de nem todos os os  $y_i$  (nem todos os  $y_i$  para  $Q_1 \cup Q_2$  não ser igual a um módulo de  $G$ ) e  $Q_2$  igual à união dos nós  $r_{l,i}$  com a união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  em  $Q_1$ .

**Possibilidade 2.6.2:**  $R_{l+1}$  não está inteiramente contido em  $Q_1$ .

Nesse caso, temos duas possibilidades a considerar:  $Q_1$  contendo inteiramente  $K_{l+1}$  ou não. Na primeira possibilidade,  $K_{l+1} \subset Q_1$  implica  $S_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2 \Rightarrow S_{l+1} \subset Q_2$  (pois, se algum vértice de  $S_{l+1}$  pertencesse a  $Q_1$  os vértices de  $R_{l+1}$  não pertencentes a  $Q_1$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ , o que implicaria que estes vértices deveriam pertencer a  $Q_2$ , mas isto geraria a contradição de  $Q_1 \cup Q_2$  ser um módulo de  $G$ ); usando então argumentos similares aos utilizados nas possibilidades 4.1, 4.2 e 4.3 do caso 1.2.2, obtemos que  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular de  $G$  obtido pelo algoritmo. Consideremos agora que  $Q_1$  não contém inteiramente  $K_{l+1}$ . Como  $R_{l+1}$  não é um módulo trivial,  $R_{l+1}$  é serial, paralelo ou vizinhança. Se  $R_{l+1}$  fosse paralelo ou vizinhança,  $y_i, z \in Q_1$  implicaria que os vértices de  $R_{l+1}$

não pertencentes a  $Q_1$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ , o que implicaria que estes vértices deveriam pertencer a  $Q_2$ , com  $x_i \in Q_2 \Rightarrow K_{l+1} \setminus \{y_i\} \subset Q_1 \Rightarrow S_{l+1} \subset Q_1 \cup Q_2$  e portanto  $Q_1 \cup Q_2$  seria um módulo de  $G$ ; contradição. Logo,  $R_{l+1}$  é um módulo serial. Observemos que  $Q_1$  não contém vértices de  $S_{l+1}$  (senão, os vértices de  $R_{l+1}$  não pertencentes a  $Q_1$  seriam parcialmente adjacentes aos vértices de  $Q_1$ ). Logo, pela afirmação 4 do caso 1.2.2,  $Q_1$  contém inteiramente os filhos de  $R_{l+1}$  que possuem vértices de  $Q_1$ ; e obtivemos  $Q_1$  igual à união de nem todos os  $y_i$  com uma união não-vazia de nem todos os filhos de  $R_{l+1}$  (nem todos os  $y_i$  porque  $Q_1$  não contém inteiramente  $K_{l+1}$  e nem todos os filhos de  $R_{l+1}$  porque supomos  $Q_1$  não contendo inteiramente  $K_{l+1}$ ) e  $Q_2$  igual à união dos  $x_i$  correspondentes aos  $y_i$  em  $Q_1$  com a união dos nós  $r_{l,i}$ , filhos de  $r_l$ , que é um par modular obtido pelo algoritmo.

**Possibilidade 3:**  $x_i \notin Q_1 \cup Q_2$ .

Nesse caso,  $Q_1$  deve conter apenas  $y_i$  (pois  $x_i \notin Q_1 \cup Q_2$  é adjacente apenas a  $y_i$ ). Como, por hipótese,  $\{Q_1, Q_2\}$  é um par modular tal que ao menos um dos conjuntos não é um módulo de  $G$  e  $Q_1 = \{y_i\}$  é um módulo,  $Q_2$  não pode conter apenas uma união de filhos de  $r_l$ , ou seja,  $Q_2$  deve conter também vértices de  $r_{l+1}$ . Então  $Q_2$  deve conter também vértices de  $K_{l+1}$  ou de  $R_{l+1}$  ou de  $S_{l+1}$ . Se  $Q_2$  contiver algum vértice  $y_j$  de  $K_{l+1}$  ( $y_j \neq y_i$ ), o vértice  $x_j$  respectivo e os vértices de  $R_{l+1}$  serão adjacentes a  $y_j$  mas não serão adjacentes aos vértices de  $Q_2$  pertencentes aos nós  $r_{l,i}$ ; então  $x_j$  e  $R_{l+1}$  devem estar contidos em  $Q_2$ ; mas  $x_j, y_i \in Q_2$  implica  $K_{l+1} \setminus \{y_i\} \subset Q_2$  e, conseqüentemente,  $S_{l+1} \setminus \{x_i\} \subset Q_2$ . Analogamente, se  $Q_2$  contiver algum vértice  $z$  de  $R_{l+1}$ ,  $K_{l+1} \setminus \{y_i\}$  deve estar contido em  $Q_2$ , o que implica  $S_{l+1} \setminus \{x_i\} \subset Q_2$  e, conseqüentemente,  $R_{l+1} \subset Q_2$ . Ainda, se  $Q_2$  contiver

algum vértice  $x_j$  de  $S_{l+1}$ , o vértice  $y_j$  respectivo deve pertencer a  $Q_2$ ; mas  $x_j, y_j \in Q_2$  implica  $K_{l+1} \setminus \{y_i\} \subset Q_2$  e, conseqüentemente,  $S_{l+1} \setminus \{x_i\} \subset Q_2$  e portanto  $R_{l+1} \subset Q_2$ .

Logo, em todas as possibilidades, obtemos  $Q_1 = \{y_i\}$  e  $Q_2$  igual à união dos nós  $r_{l,i}$  com  $(K_{l+1} \setminus \{y_i\} \cup S_{l+1} \setminus \{x_i\} \cup R_{l+1})$ .

**Caso 2.2.2:**  $r_l$  é um módulo serial.

Pelas 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> afirmações, sabemos que  $r_{l+1}$  é o único filho de  $r_l$  contendo vértices tanto de  $Q_1$  como de  $Q_2$  e contendo vértices  $v \notin Q_1 \cup Q_2$  e todos os irmãos  $r_{l,i}$  de  $r_{l+1}$ , contendo vértices de  $Q_1 \cup Q_2$ , contém vértices apenas de  $Q_1$  ou todos contém vértices apenas de  $Q_2$ . Supomos então que todos os nós  $r_{l,i}$  estejam contidos em  $Q_1$ ; e o restante da demonstração desse caso é feita de modo similar ao caso 2.2.1.

□

## 5.5 Um Exemplo do Algoritmo

Para facilitar o entendimento da execução do **Algoritmo Par Modular para Grafos  $P_4$ -esparso**, daremos um exemplo de um grafo  $P_4$ -esparso  $G$ , representado por sua árvore de decomposição modular  $T(G)$ , dada pela Figura 5.15, e da execução do algoritmo aplicado a  $G$ .

Entrada: grafo  $G$ , cuja árvore de decomposição  $T(G)$  é dada pela Figura 5.15.



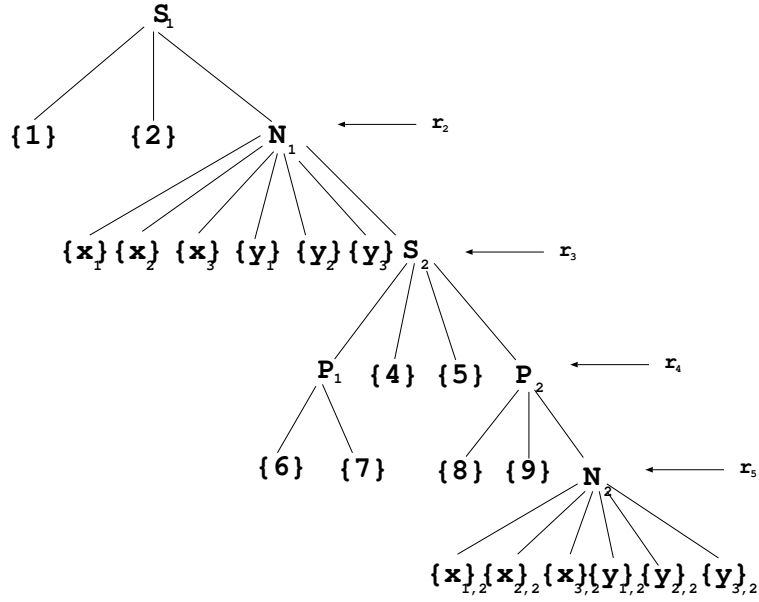


Figura 5.15: Exemplo para o algoritmo Par Modular para Grafos  $P_4$ -esparsos.

**Passo 1.** Tomemos, por exemplo, o nó  $r_2 = N_1$ .  $r_2$  é uma aranha magra com partição  $(K_2 = \{y_1, y_2, y_3\}, S_2 = \{x_1, x_2, x_3\}, R_2 = S_2)$ .

**Passo 2.**  $Q_1 \leftarrow \emptyset$ ;  $Q_2 \leftarrow \emptyset$ ;

**Passo 3.** Sendo  $R_2 \neq \emptyset$ , denotemos  $R_2$  por  $r_3$ ,  $|R_2| \geq 2$ . Como  $r_3$  é um módulo serial, temos:

**Passo 4.**  $Q_{1,1}$  recebe uma união não-vazia de nem todos os vértices de  $K_2$  com uma união não-vazia de filhos de  $r_3$ , por exemplo,  $Q_{1,1} \leftarrow \{y_1, y_2\} \cup \{6, 7, 5\}$ ;

**Passo 5.**  $Q_{2,1}$  recebe a união não-vazia dos vértices correspondentes de  $S_2$ , ou seja,  $Q_{2,1} \leftarrow \{x_1, x_2\}$ ;

**Passo 6.** O algoritmo retorna o par  $(\{y_1, y_2, 6, 7, 5\}, \{x_1, x_2\})$ ;

**Passo 7.**  $Q_1 \leftarrow K_2$ ,  $Q_2 \leftarrow S_2$  e temos a recorrência  $P(r_3)$ : sendo  $r_3$  módulo serial, selecionamos uma união não-vazia de filhos de  $r_3$  e escolhemos um nó que não tenha sido selecionado, por exemplo  $P_2$ , e o denotamos por  $r_4$ . Descemos em profundidade até por exemplo o nó  $r_5 = N_2$ . Consideremos a sequência de visita  $r_3 = S_2$ ,  $r_4 = P_2$ ,  $r_5 = N_2$ ;

**Passo 8.** Selecionamos todos os irmãos de  $r_4$  e  $r_5$ , ou seja, selecionamos os nós  $\{4\}$ ,  $\{5\}$ ,  $P_1 = \{6, 7\}$ ,  $\{8\}$  e  $\{9\}$ . Nesse exemplo,  $r_5$  é o primeiro nó vizinhança visitado ao longo do caminho;

**Passo 9.**  $Q_1 \leftarrow K_2 \cup \{4, 5, 6, 7\}$ ;  $Q_2 \leftarrow S_2 \cup \{8, 9\}$ ;

**Passo 10.** Sendo  $r_5$  o último nó visitado ao longo do caminho e uma aranha magra ( $K_5 = \{y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2}\}$ ,  $S_5 = \{x_{1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}\}$ ,  $R_5$ ) com  $R_5 = \emptyset$ , aplicamos a recorrência  $N_1(r_5)$  e o algoritmo retorna os seguintes pares:

- $\{\{y_1, y_2, y_3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{y_{1,2}\}, \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{8, 9\} \cup \{y_{2,2}, y_{3,2}\} \cup \{x_{2,2}, x_{3,2}\}\}$ ;
- $\{\{y_1, y_2, y_3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{y_{2,2}, y_{3,2}\} \cup \{x_{1,2}\}, \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{8, 9\} \cup \{x_{2,2}, x_{3,2}\}\}$ ;
- $\{\{y_1, y_2, y_3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{y_{2,2}\}, \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{8, 9\} \cup \{y_{1,2}, y_{3,2}\} \cup \{x_{1,2}, x_{3,2}\}\}$ ;
- $\{\{y_1, y_2, y_3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{y_{1,2}, y_{3,2}\} \cup \{x_{2,2}\}, \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{8, 9\} \cup \{x_{1,2}, x_{3,2}\}\}$ ;
- $\{\{y_1, y_2, y_3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{y_{3,2}\}, \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{8, 9\} \cup \{y_{1,2}, y_{2,2}\} \cup \{x_{1,2}, x_{2,2}\}\}$ ;
- $\{\{y_1, y_2, y_3\} \cup \{4, 5, 6, 7\} \cup \{y_{1,2}, y_{2,2}\} \cup \{x_{3,2}\}, \{x_1, x_2, x_3\} \cup \{8, 9\} \cup \{x_{1,2}, x_{2,2}\}\}$ ;

Pelo Teorema 5.3, os pares  $\{Q_1, Q_2\}$  acima obtidos são pares modulares do grafo  $G$ .

Observemos que para cada escolha feita, obtemos diferentes pares modulares, de modo que é possível gerarmos todos os pares modulares de  $G$ .

# Capítulo 6

## Conclusões

Neste capítulo, fornecemos os resultados obtidos nesta tese e as propostas para trabalhos futuros.

Nesta tese, apresentamos o conceito de par modular de um grafo como uma extensão do conceito de módulos. A partir disto, procuramos representar e listar os pares modulares de um grafo utilizando diferentes ferramentas.

Inicialmente, apresentamos uma representação para pares modulares de um grafo  $G$ , demonstrando que os mesmos possuem uma correspondência um-a-um com ideais de certos conjuntos parcialmente ordenados. Essa representação generaliza o resultado em [21] para módulos de um grafo.

Posteriormente, apresentamos um procedimento para representação dos pares modulares de um cografo e um algoritmo para listar os pares modulares não básicos de grafos  $P_4$ -esparsos, ambos utilizando como ferramenta a decomposição modular. A decomposição modular tem sido a chave de algoritmos eficientes para problemas clássicos de otimização, tais como de-

terminação de conjunto independente máximo e coloração ótima, para certas classes de grafos, entre elas as classes dos grafos  $P_4$ -reduzíveis e  $P_4$ -esparsos, que foram estudadas nesta tese.

Como propostas para trabalhos futuros, propomos os seguintes problemas:

1. Determinar a contagem dos pares modulares de um grafo utilizando a correspondência um-a-um com ideias de certos conjuntos parcialmente ordenados, apresentada no Capítulo 3.
2. Resolver o problema de determinação de uma árvore de representação para pares modulares de um grafo, que havia sido proposto anteriormente por Bruce Reed e outros pesquisadores.
3. Determinar a contagem dos pares modulares de um grafo  $P_4$ -esparso, em relação ao número de vértices do grafo, utilizando o algoritmo apresentado no Capítulo 5.
4. Resolver novos problemas relacionados às classes dos cografos e dos grafos  $P_4$ -esparsos.
5. Resolver o problema de representar e listar os pares modulares de grafos pertencentes a classes que contêm os grafos  $P_4$ -esparsos, tais como a classe dos grafos  $P_4$ -esparsos estendidos e dos grafos  $P_4$ -tidy, utilizando a decomposição modular e estendendo os resultados dos Capítulos 4 e 5. A definição das classes de grafos  $P_4$ -esparsos estendidos e  $P_4$ -tidy é dada a seguir. Seja  $G$  um grafo e seja um  $P_4$   $x_1y_1y_2x_2$  em  $G$ . Um vértice  $v \in V(G)$  é um *parceiro* de  $P_4$  se  $N_{P_4}$  é um subconjunto não-vazio de  $V(P_4)$  distinto dos conjuntos  $\{y_1, y_2\}$  e  $\{x_1, y_1, y_2, x_2\}$ . Um grafo  $G$  é

$P_4$ -tidy se todo  $P_4$  induzido de  $G$  tem no máximo um parceiro.

Um grafo  $G$  é  $P_4$ -esparso estendido se  $G$  não contém  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$ ,  $Z_1$ ,  $\overline{Z_1}$ ,  $Z_2$  e  $\overline{Z_2}$  como subgrafos induzidos. Os subgrafos proibidos para essa classe estão representados na Figura

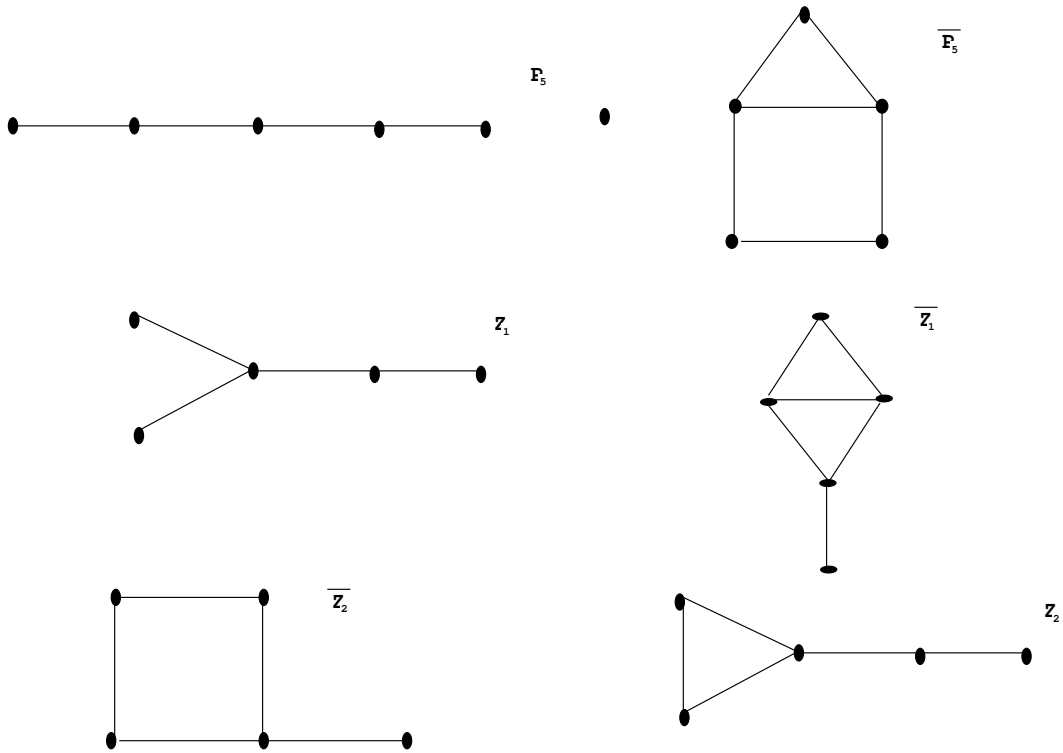


Figura 6.1: Subgrafos proibidos para a classe dos grafos  $P_4$ -esparso estendidos.

# Apêndice A

## Apêndice - Algoritmos em Grafos

### A.1 Algoritmo de Reconhecimento de Grafos $P_4$ -Esparsos e $P_4$ -Redutíveis

O algoritmo que enunciaremos reconhece se um grafo é um cografo,  $P_4$ -redutível ou  $P_4$ -esparso em tempo linear. Esse algoritmo de reconhecimento foi apresentado por Giakoumakis e Vanherpe em 1997. Para maiores detalhes sobre o algoritmo assim como a demonstração de sua complexidade, veja [9].

Antes de enunciarmos o algoritmo, precisaremos de algumas definições e notações que serão utilizados no algoritmo.

Sejam  $G$  um grafo,  $T(G)$  sua árvore de decomposição modular e  $M$  um nó interno de  $T(G)$ . O *grafo representante*  $R(M)$  do módulo  $M$  é o grafo induzido por um subconjunto de  $M$  consistindo de um único vértice de cada

submódulo maximal de  $M$  na árvore  $T(G)$ .

Observe que o grafo representante de um módulo serial é uma clique, o de um módulo paralelo é um conjunto independente e o de um módulo vizinhança é um grafo primo.

Um grafo  $G$  é *primo* se  $G$  contém somente módulos triviais.

Consideremos o grafo  $G$  dado pela Figura A.1. Vamos determinar o grafo representante do módulo  $M = V(G)$ .

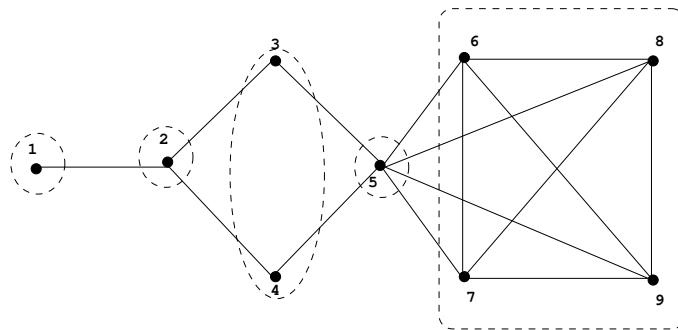


Figura A.1: Um grafo  $G$ .

Como ambos  $G$  e  $\overline{G}$  são conexos,  $M = V(G)$  é um módulo vizinhança e a árvore de decomposição de  $G$  é dada pela Figura A.2.

Os grafos representantes para os módulos  $N$ ,  $P$  e  $S$  são dados pela Figura A.3:

Dada a árvore de decomposição modular  $T(G)$ , denotemos por  $\pi(G)$  o conjunto de grafos primos  $\{R(N_1), \dots, R(N_k)\}$ , onde  $\{N_1, \dots, N_k\}$  é o conjunto dos nós vizinhança de  $T(G)$ .



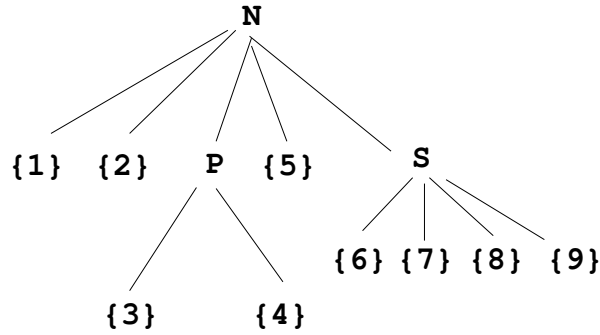


Figura A.2: Árvore de decomposição modular do grafo  $G$ .

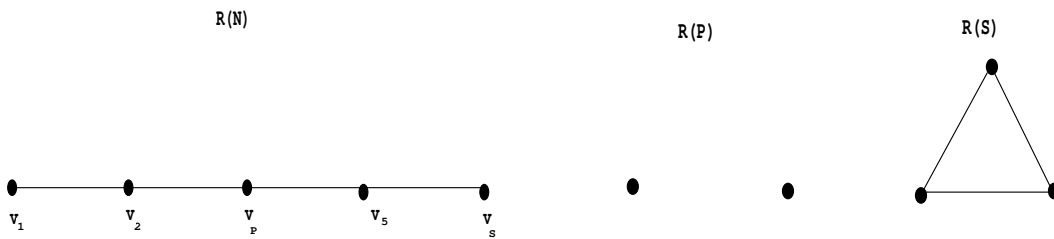


Figura A.3: Grafos representantes de um módulo vizinhança, paralelo e serial.

No algoritmo, marcaremos cada vértice de todo grafo de  $\pi(G)$  sempre que o vértice não for uma folha, isto é, sempre que o vértice corresponda a um módulo não trivial na árvore  $T(G)$ .

Chamaremos um  $P_4$ , em  $\pi(G)$ , com ao menos um vértice marcado de  $P_4$  *marcado*.

Um touro, em  $\pi(G)$ , é dito *fracamente marcado* se ele possuir no máximo um vértice marcado, a saber, o vértice de grau 2.

Dada uma aranha  $H$ , em  $\pi(G)$ , com partição  $(K(H), S(H), R(H))$ , diremos que  $H$  é uma *aranha fracamente marcada* se nenhum vértice de  $K(H) \cup S(H)$  é marcado.

Se considerarmos o subgrafo  $H$  do grafo  $G$  da Figura A.1, cujo conjunto de vértices é  $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , seu grafo representante é um  $P_4$  marcado pois contém o vértice  $v_P$ , que corresponde ao módulo  $P$ .

Enunciemos agora o algoritmo de reconhecimento de grafos  $P_4$ -esparso e  $P_4$ -reduzíveis.

### **Algoritmo de Reconhecimento de Grafos $P_4$ -Esparsos e $P_4$ -Reduzíveis**

Entrada: Um grafo conexo  $G$ .

Saída: A mensagem " $G$  é um cografo" ou " $G$  é  $P_4$ -reduzível" ou " $G$  é  $P_4$ -esparso" ou " $G$  não é  $P_4$ -reduzível nem  $P_4$ -esparso".

**Passo 1:** Construa a árvore de decomposição modular  $T(G)$  de  $G$ . Se  $T(G)$  não tem nós vizinhança, então retorne " $G$  é um cografo".

**Passo 2:** Construa de  $T(G)$  o conjunto dos grafos primos  $\pi(G)$  e marque todo vértice que não é uma folha.

**Passo 3:** Teste se cada grafo de  $\pi(G)$  é uma aranha fracamente marcada; se não, então retorne " $G$  não é  $P_4$ -reduzível nem  $P_4$ -esparso"; caso contrário, teste se cada grafo de  $\pi(G)$  é um  $P_4$  não marcado ou um touro fracamente marcado; se sim, retorne " $G$  é um grafo  $P_4$ -reduzível" e, se não, retorne " $G$  é um grafo  $P_4$ -esparso".

Usando o conteúdo dos Capítulos 4 e 5, podemos reencunciar o algoritmo da seguinte forma:

**Passo 1:** Construa a árvore de decomposição modular  $T(G)$  de  $G$ . Se  $T(G)$  não tem nós vizinhança, então retorne "G é um cografo".

**Passo 2:** Se  $T(G)$  tem nós vizinhança, então teste se cada um deles é uma aranha.

**Passo 3:** Se algum nó vizinhança não for uma aranha, então retorne "G não é  $P_4$ -reduzível nem  $P_4$ -esparso"; caso contrário (se todos os nós forem vizinhança), teste se cada nó vizinhança é um  $P_4$  ou um touro ou um touro estendido; se sim, retorne "G é um grafo  $P_4$ -reduzível" e, se não, retorne "G é um grafo  $P_4$ -esparso".

Como é provado em [9], a complexidade do algoritmo é  $O(n+m)$  e o algoritmo foi elaborado baseado nos resultados de OLARIU e JAMISON [12, 13].

## A.2 Algoritmo Par Homogêneo

O algoritmo que enunciaremos determina se um grafo contém um par homogêneo e, em caso afirmativo, determina um par homogêneo. Esse algoritmo de reconhecimento de um grafo com par homogêneo foi apresentado por Everett, Klein e Reed em 1994. Para maiores detalhes sobre o algoritmo assim como a demonstração de sua complexidade, veja [7, 17].

O algoritmo procura por um par homogêneo em dois estágios. Primeiro ele verifica se  $G$  tem um par homogêneo que é em particular um conjunto homogêneo; isto é, se  $G$  tem um conjunto homogêneo  $H$  com  $|V(G) \setminus H| \geq 2$ . Um lema enunciado em [7] garante que pode-se testar a existência de um tal  $H$  em tempo  $O(m)$  usando o algoritmo de SPINRAD [26]. No segundo estágio procura-se um par homogêneo com ambos  $Q_1$  e  $Q_2$  não vazios e ou  $S_1$

ou  $S_2$  não vazios. Sem perda de generalidade, assume-se que  $S_1$  é não vazio. Começa-se fazendo uma lista  $\mathcal{L}$  de todas as possíveis triplas ordenadas de vértices  $\{q_1, q_2, s_1\}$  tais que  $(q_1, s_1) \in E(G)$  e  $(q_2, s_1) \notin E(G)$ . Então  $G$  tem um par homogêneo se e somente se ele tem um par homogêneo com  $q_1$  em  $Q_1$ ,  $q_2$  em  $Q_2$  e  $s_1$  em  $S_1$  para alguma tripla de  $\mathcal{L}$ .

É descrito um algoritmo de tempo  $O(n^2)$  que testa para uma tripla ordenada particular  $\{q_1, q_2, s_1\}$  se  $G$  tem um par homogêneo com  $q_1$  em  $Q_1$ ,  $q_2$  em  $Q_2$  e  $s_1$  em  $S_1$ . Aplica-se esse algoritmo a todas as possibilidades, uma de cada vez. Se alguma vez é achado um par homogêneo, ele é retornado. Caso contrário, é retornado *NÃO-G não tem par homogêneo*. O tempo total de execução do algoritmo é de  $O(n^5)$ .

### Algoritmo Par Homogêneo

Entrada: um grafo  $G = (V(G), E(G))$  com  $|V(G)| \geq 4$ .

Saída: *SIM-G tem um par homogêneo* ou *NÃO-G não tem um par homogêneo*. Se a resposta for *SIM*, o algoritmo também retorna um par homogêneo  $\{Q_1, Q_2\}$ .

**Passo 0:** Use o algoritmo de Spinrad de tempo  $O(m)$  para testar se  $G$  tem um conjunto homogêneo. Se ele retornar um conjunto homogêneo  $H$  com  $|H| \leq |V(G) - 2|$ , então retorne *SIM-G tem um par homogêneo*,  $Q_1 = H$  e  $Q_2 = \emptyset$  e pare. Se ele retornar um conjunto homogêneo  $H$  tal que  $V(G) \setminus H$  consiste de um único vértice  $x$  então aplique esse algoritmo de novo em  $G[H]$ . Se  $G[H]$  tiver um conjunto homogêneo  $H'$  então retorne *SIM-G tem um par homogêneo*,  $Q_1 = H'$  e  $Q_2 = \emptyset$  e pare.

**Passo 1:** Faça uma lista  $\mathcal{L}$  de todas as triplas ordenadas  $\{a, b, c\}$  de vértices de  $G$  de maneira que  $(a, c) \in E(G)$  e  $(b, c) \notin E(G)$ .

**Passo 2:** Se  $\mathcal{L}$  for vazia retorne *NÃO-G não tem um par homogêneo* e pare. Caso contrário, seja  $T$  a primeira tripla de  $\mathcal{L}$ . Seja  $q_1$  o primeiro vértice de  $T$ ,  $q_2$  o segundo e  $s_1$  o terceiro. Remova  $T$  de  $\mathcal{L}$ .

**Passo 3:** Particione o conjunto  $V^* = V(G) \setminus \{q_1, q_2, s_1\}$  nos oito conjuntos:

$$AQ_1 = \{x \in V^* \mid (x, q_1) \in E(G), (x, q_2) \in E(G) \text{ e } (x, s_1) \in E(G)\};$$

$$AQ_2 = \{x \in V^* \mid (x, q_1) \in E(G), (x, q_2) \in E(G) \text{ e } (x, s_1) \notin E(G)\};$$

$$S_1Q_1 = \{x \in V^* \mid (x, q_1) \in E(G), (x, s_1) \in E(G) \text{ e } (x, q_2) \notin E(G)\};$$

$$S_2Q_1 = \{x \in V^* \mid (x, q_2) \in E(G), (x, s_1) \in E(G) \text{ e } (x, q_1) \notin E(G)\};$$

$$S_1Q_2 = \{x \in V^* \mid (x, q_1) \in E(G), (x, q_2) \notin E(G) \text{ e } (x, s_1) \notin E(G)\};$$

$$S_2Q_2 = \{x \in V^* \mid (x, q_2) \in E(G), (x, q_1) \notin E(G) \text{ e } (x, s_1) \notin E(G)\};$$

$$NQ_1 = \{x \in V^* \mid (x, s_1) \in E(G), (x, q_1) \notin E(G) \text{ e } (x, q_2) \notin E(G)\};$$

$$NQ_2 = \{x \in V^* \mid (x, q_1) \notin E(G), (x, q_2) \notin E(G) \text{ e } (x, s_1) \notin E(G)\}.$$

**Passo 4:** Construa um grafo direcionado  $\vec{G}_{q_1, q_2, s_1} = (V(\vec{G}_{q_1, q_2, s_1}), E(\vec{G}_{q_1, q_2, s_1}))$  como se segue. O conjunto  $V(\vec{G}_{q_1, q_2, s_1}) = AQ_1 \cup AQ_2 \cup S_1Q_1 \cup S_2Q_1 \cup S_1Q_2 \cup S_2Q_2 \cup NQ_1 \cup NQ_2$ . O conjunto  $E(\vec{G}_{q_1, q_2, s_1})$  é dado pelas duas tabelas abaixo. Representamos a existência de duas arestas direcionadas  $(x, y)$  e  $(y, x)$  entre vértices  $x$  e  $y$  por  $\langle x, y \rangle$ . A primeira tabela mostra as arestas direcionadas dadas pela aresta  $(x, y)$  de  $G$ , onde  $x$  pertence a um conjunto da primeira coluna e  $y$  pertence a um conjunto da primeira linha. A segunda tabela representa as arestas direcionadas dadas pela não existência de arestas  $(x, y)$ .

(arestas)	$AQ_1$	$AQ_2$	$S_1Q_1$	$S_2Q_2$	$S_1Q_2$	$S_2Q_1$	$NQ_1$	$NQ_2$
$AQ_1$				$(y, x)$		$(y, x)$	$(y, x)$	$(y, x)$
$AQ_2$			$(y, x)$		$(y, x)$		$(y, x)$	$(y, x)$
$S_1Q_1$		$(x, y)$		$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$(y, x)$	$(y, x)$	$\langle x, y \rangle$
$S_2Q_2$	$(x, y)$		$\langle x, y \rangle$		$(y, x)$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(y, x)$
$S_1Q_2$		$(x, y)$	$(y, x)$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$		$(y, x)$	$\langle x, y \rangle$
$S_2Q_1$	$(x, y)$		$(x, y)$	$(y, x)$		$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$	$(y, x)$
$NQ_1$	$(x, y)$	$(x, y)$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$
$NQ_2$	$(x, y)$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$

(não arestas)	$AQ_1$	$AQ_2$	$S_1Q_1$	$S_2Q_2$	$S_1Q_2$	$S_2Q_1$	$NQ_1$	$NQ_2$
$AQ_1$	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$(x, y)$	$(x, y)$
$AQ_2$	$\langle x, y \rangle$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$(x, y)$
$S_1Q_1$	$\langle x, y \rangle$	$(y, x)$	$\langle x, y \rangle$		$(y, x)$	$(x, y)$	$(x, y)$	
$S_2Q_2$	$(y, x)$	$\langle x, y \rangle$		$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	$(y, x)$		$(x, y)$
$S_1Q_2$	$\langle x, y \rangle$	$(y, x)$	$(x, y)$	$(y, x)$		$\langle x, y \rangle$	$(x, y)$	
$S_2Q_1$	$(y, x)$	$\langle x, y \rangle$	$(y, x)$	$(x, y)$	$\langle x, y \rangle$			$(x, y)$
$NQ_1$	$(y, x)$	$(y, x)$	$(y, x)$		$(y, x)$			
$NQ_2$	$(y, x)$	$(y, x)$		$(y, x)$		$(y, x)$		

**Passo 5** Ache as componentes fortemente conexas de  $\vec{G}_{q_1, q_2, s_1}$  e retorne-as em ordem topológica reversa.

**Passo 6** Processe as componentes fortemente conexas de  $\vec{G}_{q_1, q_2, s_1}$  (em ordem topológica reversa) como segue. Se  $\vec{G}_{q_1, q_2, s_1}$  tiver apenas uma componente fortemente conexa, então  $G$  não tem um par homogêneo para essa tripla de vértices escolhida, logo retorne para o Passo 2. Caso contrário marque todos os vértices das componentes fortemente conexas que pos-

seus predecessores com **E** e os vértices das outras componentes (que não possuem predecessores) com **I**. Se existem apenas componentes isoladas (i.e. componentes que não tem predecessores e nem sucessores), escolha uma delas e marque seus vértices com **I** e marque todos os vértices das outras componentes com **E**.

**Passo 7** Faça:

$$Q_1 = \{\text{vértices de } AQ_1 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{\text{vértices de } S_1Q_1 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{\text{vértices de } S_2Q_1 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{\text{vértices de } NQ_1 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{q_1\}.$$

$$Q_2 = \{\text{vértices de } AQ_2 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{\text{vértices de } S_1Q_2 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{\text{vértices de } S_2Q_2 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{\text{vértices de } NQ_2 \text{ marcados com } \mathbf{I}\} \cup \{q_2\}.$$

Retorne *SIM-G* tem um par homogêneo e os conjuntos  $Q_1$ ,  $Q_2$  e pare.

# Bibliografia

- [1] BUER, H., MÖHRING, R. H. , "A fast algorithm for the decomposition of graphs and posets", *Math. Oper. Res.*, v. 8, pp. 170-184, 1983.
- [2] CHVÁTAL, V., SBIHI, N., "Bull-free Berge graphs are perfect", *Graphs and Combinatorics*, v. 3, pp. 127-139, 1987.
- [3] CORNEIL, D. G., LERCHS, H., STEWART BURLINGHAM, L., "Complement reducible graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 3, pp. 163-174, 1981.
- [4] CORNEIL, D. G., PERL, Y., "Clustering and domination in perfect graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 9, pp. 27-39, 1984.
- [5] CORNEIL, D. G., PERL, Y., STEWART, L. K., "A linear recognition algorithm for cographs", *SIAM J. Comput.*, v. 14, pp. 926-934, 1985.
- [6] COURNIER, A., HABIB, M., "A new linear algorithm for modular decomposition", *Lecture Notes Computer Science*, v. 787, pp. 68-84, 1994.
- [7] EVERETT, H., KLEIN, S., REED, B., "An algorithm for finding homogeneous pairs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 72, pp. 209-218, 1997.
- [8] GALLAI, T., "Transitiv orientierbale graphen", *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, v. 18, pp. 25-66, 1967.



- [9] GIAKOUMAKIS, V., VANHERPE, J.-M., "On extended  $P_4$ -reducible and extended  $P_4$ -sparse graphs", *Theoretical Computer Science*, v. 180, pp. 269-286, 1997.
- [10] HIRAGUSHI, T., "On the dimension of partially ordered sets", *Sci. Rep. Kanazawa Univ.*, v. 1, pp. 77-94, 1951.
- [11] HOÀNG, C., Ph. D. dissertation, McHill University, Montreal, Canada, 1985.
- [12] JAMISON, B., OLARIU, S., " $P_4$ -reducible graphs - a class of uniquely tree representable graphs", *Studies in Applied Mathematics*, v. 81, pp. 79-87, 1989.
- [13] JAMISON, B., OLARIU, S., "A tree representation for  $P_4$ -sparse graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 35, pp. 115-129, 1992.
- [14] JAMISON, B., OLARIU, S., "Linear time optimization algorithms for  $P_4$ -sparse graphs", *Discrete Applied Mathematics*, v. 61, pp. 155-175, 1995.
- [15] JAMISON, B., OLARIU, S., "A linear time recognition algorithm for  $P_4$ -sparse graphs", *SIAM J. Comput.*, v. 21, pp. 381-407, 1992.
- [16] JUNG, H. A., "On a class of posets and the corresponding comparability graphs", *J. Combinatorial Theory*, v. (B) 24, pp. 125-133, 1978.
- [17] KLEIN, S., *Algoritmos e complexidade de decomposição em grafos*, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, R.J., Brasil, 1994.
- [18] KLEIN, S., SANTOS, N. C. DOS, SZWARCFITER, J. L., "Uma representação para pares modulares de um grafo", In: *Anais do XXXV SBPO*, v. 1, pp. 2473-2783, 2003.

- [19] KLEIN, S., SANTOS, N. C. DOS, SZWARCFITER, J. L., "A representation for the modular pairs of a cograph by modular decomposition", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 18, pp. 165-169, 2004.
- [20] KLEIN, S., SANTOS, N. C. DOS, SZWARCFITER, J. L., "A representation for the modular pairs of a  $P_4$ -reducible graph by modular decomposition", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 22, pp. 267-270, 2005.
- [21] KLEIN, S., SZWARCFITER, J. L., "A representation for the modules of a graph and applications", *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 9, pp. 9-16, 2003.
- [22] LERCHS, H., "On cliques and kernels", Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, March 1971.
- [23] LERCHS, H., "On the clique-kernel structure of graphs", Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, October 1972.
- [24] LOVÁSZ, L., "Normal hipergraphs and the perfect graph conjecture", *Discrete Mathematics*, v. 2, pp. 253-267, 1972.
- [25] MC CONNELL, R. M., SPINRAD, J., "Ordered vertex partitioning", *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, v. 4, pp. 045-060, 2000.
- [26] MC CONNELL, R. M., SPINRAD, J., "Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs", In: *Proceedings of the Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, v. 5, pp. 536-545, 1994.

- [27] MÖHRING, R. H., RADERMACHER, F. J., "Substitution decomposition and connections with combinatorial optimization", *Ann. Discrete Math.*, v. 19, pp. 257-356, 1984.
- [28] MULLER, J. H., SPINRAD, J., "Incremental modular decomposition", *Journal of the Association for Computing. Machinery*, v. 36, pp. 1-19, 1989.
- [29] SPINRAD, J., " $P_4$ -trees and substitution decomposition", *Discrete Applied Mathematics*, v. 39, pp. 263-291, 1992.
- [30] SPINRAD, J., *Two dimensional partial orders*, Ph. D. dissertation, Princeton University, Princeton, N.J., 1982.
- [31] STEWART, L., *Cographs, a class of tree representable graphs*, M. Sc. Thesis, Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, TR 126/78, 1978.
- [32] SUMNER, D. P., "Dacey graphs", *J. Australian Math. Soc.*, v. 18, n.4, pp. 492-502, 1974.