

Duplas pares em grafos Berge touro-reduutíveis

Cláudia Regina Villela Maciel


5 de julho de 2005

DUPLAS PARES EM GRAFOS BERGE TOURO-REDUTÍVEIS

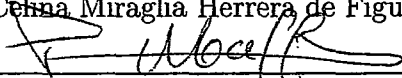
Cláudia Regina Villela Maciel

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

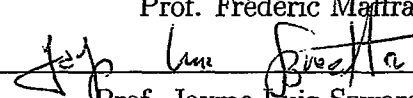
Aprovada por:



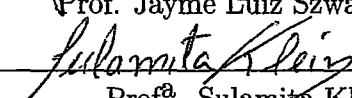
Prof^ª. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



Prof. Frédéric Maifray, Ph.D.



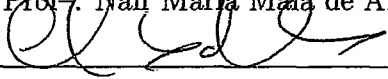
Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



Prof^ª. Sulamita Klein, D.Sc.



Prof^ª. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.



Prof^ª. Cláudia Linhares Sales, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2005

MACIEL, CLÁUDIA REGINA VILLELA

Duplas pares em grafos Berge touro-
reduzíveis [Rio de Janeiro] 2005

XIII, 99 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação,
2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Ja-
neiro, COPPE

1 - Grafos touro-reduzíveis

2 - Grafos quase-paridade

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

DUPLAS PARES EM GRAFOS BERGE TOURO-REDUTÍVEIS

Cláudia Regina Villela Maciel

Junho/2005

Orientadora: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo é Berge se não tem buracos ímpares e não tem anti-buracos ímpares. Um touro é um grafo com cinco vértices r, s, x, y, z e cinco arestas ry, yx, yz, xz, zs . Um grafo é touro-redutível se todo vértice pertence a, no máximo, um touro. Dois vértices não-adjacentes x, y de um grafo formam uma dupla par, se todo xy - caminho sem cordas tem um número par de arestas.

O objetivo desta tese é provar que se G é um grafo Berge touro-redutível, com pelo menos dois vértices, então G ou seu complementar \overline{G} tem uma dupla par.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

EVEN PAIRS IN BULL-REDUCIBLE BERGE GRAPHS

Cláudia Regina Villela Maciel

June/2005

Advisor: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Department : Computing and Systems Engineering

A graph is Berge if contains no odd hole and no odd antihole. A bull is a graph with five vertices r, s, x, y, z and five edges ry, yx, yz, xz, zs . A graph G is bull-reducible if no vertex of G lies in two bulls. An even pair is a pair of vertices such that every chordless path joining them has even length.

We prove that for every Berge bull-reducible graph G with at least two vertices, either G or its complementary graph \overline{G} has an even pair.

Índice

Índice	v
Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
1.1 Definições e Notações	10
2 Grafos Berge sem Touros e Berge Touro-redutíveis	17
2.1 Grafos Berge sem Touros	18
2.2 Grafos Berge Touro-redutíveis	28
3 Lema da Vassoura Dupla	31
4 Duplas Pares em Grafos Berge Touro-redutíveis	55
5 Conclusões	93
Referências Bibliográficas	97

Lista de Figuras

1.1	Árvore de Zykov gerada a partir de um grafo G , e coloração de G usando a menor clique da árvore.	3
1.2	Coloração não-ótima de um grafo, obtida a partir de contrações de vértices não-adjacentes.	4
1.3	Coloração ótima dos vértices de um grafo de Meyniel, usando a heurística de Hertz.	4
1.4	<i>Touro</i> $\mathcal{B}(r, yxz, s)$	7
2.1	Possibilidades de interseção de um vértice v com um buraco par em um grafo Berge sem touros.	19
2.2	Vassoura.	20
2.3	Diagrama da partição dos vértices de um grafo que contém uma vassoura.	22
2.4	Representação dos subconjuntos X, Y	22
2.5	Conjunto homogêneo H contendo W	23
2.6	Partição de um grafo Berge sem touros a partir do conjunto homogêneo H	23
2.7	Possibilidades de interseção de um vértice v com um buraco par em um grafo Berge touro-redutível.	30
3.1	Vassoura dupla e seu complemento.	32

3.2	Diagrama da partição dos vértices de um grafo que contém uma vassoura dupla.	33
3.3	Touros gerados na Proposição 3.1.1 supondo a existência da aresta uv	34
3.4	Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 1) supondo que p perde u e que p perde a'	35
3.5	Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 1) supondo que p perde u e que p vê a'	35
3.6	Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 2) supondo que p perde u ; e que p vê w_1 e perde w_2, w_4	36
3.7	Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 2) supondo que p perde u ; e que p vê w_2 e perde w_1, w_4	36
3.8	Touros gerados na Proposição 3.1.3 supondo que p vê a'	37
3.9	Touros gerados na Proposição 3.1.3 supondo que p perde c	37
3.10	Relação entre os conjuntos da partição a partir da Figura 3.2 e das Proposições 3.1.1 e 3.1.3.	38
3.11	Representação dos subconjuntos X, Y e Z	39
3.12	Adjacências entre os vértices de uma menor seqüência forçada.	41
3.13	Touro gerado na Proposição 3.1.5 supondo que $i \geq 3$	41
3.14	Possibilidades de uma menor seqüência forçada para $y = y_3$	41
3.15	Touros gerados na Proposição 3.1.6 supondo que existe uma menor seqüência forçada para z contendo um vértice de X	43
3.16	Touros gerados na Proposição 3.1.6 supondo que existe uma menor seqüência forçada para z contendo dois vértices de X	43
3.17	Touro gerado na Proposição 3.1.7 supondo que existe uma menor seqüência forçada para z contendo três vértices de Y	43
3.18	Possibilidades de uma menor seqüência forçada para $z = z_3$	44

3.19	Conjunto homogêneo H contendo W	45
3.20	Touros gerados na Proposição 3.1.9 supondo que $t \in T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$ perde algum $z \in Z$, e que a menor seqüência forçada para z tem um vértice de Y	46
3.21	Touros gerados na Proposição 3.1.9 supondo que $t \in T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$ perde algum $z \in Z$, e que a menor seqüência forçada para z tem dois vértices de Y	47
3.22	Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que x perde $u \in A \cup C$	47
3.23	Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que x vê a'	48
3.24	Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que $x = x_i$ perde $u \in A \cup C$	49
3.25	Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que $x = x_i$ vê a'	49
3.26	Touros gerados na Proposição 3.1.11 supondo que $y = y_1$ perde $u \in A \cup C$	50
3.27	Touros gerados na Proposição 3.1.11 supondo que $y = y_j$ perde $u \in A \cup C$	50
3.28	Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_1$ supondo que a menor seqüência forçada para z tem um vértice de Y	51
3.29	Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_1$ supondo que a menor seqüência forçada para z tem dois vértices de Y	52
3.30	Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_k$ supondo que z perde u , e que a menor seqüência forçada para z tem um vértice de Y	52
3.31	Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_k$ supondo que z perde u , e que a menor seqüência forçada para z tem dois vértices de Y	53

3.32	Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_k$ supondo que z vê a' , e que a menor seqüência forçada para z tem um ou dois vértices de Y	53
3.33	Partição de um grafo Berge touro-redutível a partir do conjunto homogêneo H	54
4.1	Possibilidades de interseção de um vértice v com um buraco par em um grafo Berge touro-redutível.	56
4.2	Possibilidades de interseção de um vértice c com um caminho longo ímpar em grafos Berge touro-redutíveis.	58
4.3	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $1 < i \leq r - 4$	58
4.4	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que c vê u_j , para $5 \leq j \leq r - 1$	59
4.5	Buraco ímpar gerado no Lema 4.3 supondo que c perde u_4	59
4.6	Buraco ímpar gerado no Lema 4.3 supondo que $r \geq 7$	59
4.7	Touros gerados no Lema 4.3 quando $r = 5$	59
4.8	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $i = 0$, e que c vê u_j	60
4.9	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que i é par e $2 \leq i < r - 3$	60
4.10	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $i = r - 3$, e que c perde u_{r-4}	60
4.11	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $r \geq 7$, e que c perde u_{r-5}	61
4.12	Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $r \geq 7$, e que c vê u_{r-5}	61
4.13	Hipótese do Lema 4.4 sobre as adjacências entre os vértices u_0, u_r, a, b, a', b'	61
4.14	Touros gerados no Lema 4.4 supondo que ab é aresta, e $a'b'$ é não-aresta.	62

4.15	C_5 gerado no Lema 4.4 supondo que $a'b'$ é aresta, e ab é não-aresta.	62
4.16	Touros gerados no Lema 4.4 supondo válida a saída (ii) do Lema 4.3 para o vértice a	63
4.17	Touros gerados no Lema 4.4 supondo válida a saída (iii) do Lema 4.3 para o vértice a	64
4.18	Touros gerados no Lema 4.4 supondo que a' vê u_i e perde u_{i-1}	64
4.19	Vassoura dupla em G e complementar de vassoura dupla em G gerados no Lema 4.4, sabendo que a' , b' perdem todos os vértices do caminho P	65
4.20	Partição de um grafo Berge touro-redutível, que tem C_6 como menor buraco.	67
4.21	Menor índice h , tal que $x \in X$ tem um vizinho y em V_h , na Proposição 4.1.1.	68
4.22	Vizinhança de $x \in X_3$ em um C_8 na Proposição 4.1.1.	69
4.23	Partição de um grafo Berge touro-redutível, que tem C_8 como menor buraco.	69
4.24	Vizinhança de $x \in X_1$ na Proposição 4.1.2.	70
4.25	Relação entre X_1 e os subconjuntos V_1 e V_4 : Se $x \in X_1$ vê todo V_4 então x tem um vizinho em V_1	70
4.26	Touros gerados na Proposição 4.1.3 supondo que d tem um vizinho em V_1	71
4.27	Touros gerados na Proposição 4.1.3 se d perde todo V_1	71
4.28	C_5 gerado na Proposição 4.1.4 supondo que x tem um não-vizinho $w_4 \in V_4$, e que y tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$	72
4.29	Touros gerados na Proposição 4.1.4 supondo que x tem um vizinho $w_1 \in V_1$, e y tem um vizinho $w_3 \in V_3$	72

4.30	Touros gerados na Proposição 4.1.4 supondo que x tem um vizinho $w_1 \in V_1$, e y tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$	73
4.31	Relação entre os subconjuntos A_1 e $V_i \cup X_i$ para i ímpar e, A_2 e $V_i \cup X_i$ para i par.	73
4.32	Vassoura dupla em G gerada na Proposição 4.1.5 supondo que existe um ab -caminho longo ímpar em G	74
4.33	Complementar da vassoura dupla em \overline{G} gerado na Proposição 4.1.6 supondo que existe um ab -caminho longo ímpar em \overline{G}	75
4.34	C_5 gerado na Proposição 4.1.7 supondo que x vê u_5 e perde algum vértice de V_4	76
4.35	Vizinhança do vértice x na Proposição 4.1.7 supondo que x vê u_5 , e sabendo que x vê todo V_4	76
4.36	Vizinhança do vértice x na Proposição 4.1.7: Se x vê a , perde b e vê u_2 , então x perde todo V_5	77
4.37	Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x vê v_4 , e que tem um não-vizinho $w_2 \in V_2$	78
4.38	Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x, y perdem v_2, v_4	78
4.39	Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x vê v_2 e perde v_4 , e que y perde v_4	79
4.40	Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x vê v_2 e perde v_4 , e que y vê v_4 e perde v_2	79
4.41	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u, v perdem $w_2 \in V_2$	80
4.42	Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde w_2 , e v perde v_1	80
4.43	Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde w_2 , e v perde u_4	81

4.44	Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde w_2 , e que v vê v_1, u_4	81
4.45	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u perde todo V_4 , e v perde algum $w_4 \in V_4$	82
4.46	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 sabendo que v perde todo V_2 , e supondo que u perde algum $w_2 \in V_2$	82
4.47	Relações de adjacências entre os vértices u, v e os conjuntos V_1, V_2, V_4 e V_5 na Proposição 4.1.9.	82
4.48	Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde $w_1 \in$ V_1	83
4.49	Relações de adjacências entre os vértices u, v e os conjuntos V_1, V_2, V_4 e V_5 na Proposição 4.1.9.	83
4.50	Buraco C_{l-1} gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u perde v_l , e v perde v_6	84
4.51	Buraco C_{l-3} gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u vê v_l , e v vê v_6	84
4.52	Buraco C_{l-2} gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u vê v_l , e v perde v_6	84
4.53	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que existe $v_6 \in V_6$ que perde u, v	85
4.54	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que v vê algum $v_3 \in V_3$	85
4.55	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que v tem um não- vizinho $w_6 \in V_6$, e que u perde w_6	86
4.56	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u vê $v_3 \in V_3$	86
4.57	C_5 gerado na Proposição 4.1.9 sabendo que u perde $v_3 \in V_3$	86
4.58	Caminho gerado na Proposição 4.1.10 entre os vértices a, b supondo que não formam dupla par de G	88

4.59	Vassoura dupla gerada na Proposição 4.1.10 supondo que u perde $d \in N_D(a, b)$	88
4.60	Vassoura dupla gerada na Proposição 4.1.10 supondo que x perde $d \in N_D(u, b) = N_D(a, b)$	89
4.61	Touro gerado na Proposição 4.1.13 supondo que existe um v_1v_3 -caminho ímpar sem cordas.	90
4.62	Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo que x_{r-1} vê v_2	91
4.63	Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo que $r = 3$, e que x_2 perde v_l	91
4.64	Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo a saída (ii) do Lema 4.3 para o vértice v_2	92
4.65	Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo a saída (iii) do Lema 4.3 para o vértice v_2	92
5.1	Contração de uma dupla par em um grafo Berge sem touros e sem anti-buracos gerando um grafo Berge com touros.	95

Capítulo 1

Introdução

Um dos problemas mais estudados da teoria dos grafos é o de *coloração*, que consiste em atribuir cores aos vértices, de modo que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. A questão é determinar uma *coloração ótima*, isto é, utilizar o menor número de cores possível. Este número mínimo é chamado de *número cromático* do grafo G e é representado por $\chi(G)$. A determinação do número cromático num grafo qualquer é um problema *NP*-difícil.

Um algoritmo natural, dado por Zykov [20] em 1949, para obter o número cromático e uma coloração ótima de um grafo G , é baseado no teorema que afirma que se G não é clique e x, y são vértices não-adjacentes então $\chi(G) = \min \{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$, onde G_1 é o grafo obtido de G acrescentando a aresta xy , e G_2 é o grafo obtido de G pela contração dos vértices x, y num único vértice z_{xy} . Uma *clique* em um grafo G é um subconjunto de vértices de G que tem todos os vértices adjacentes dois a dois. A operação de *contração* de dois vértices não-adjacentes x, y de um grafo G consiste em deletar x, y e acrescentar um novo vértice z_{xy} , adjacente aos vértices de $N(x) \cup N(y)$, substituindo eventuais arestas múltiplas por uma única aresta.

A idéia do algoritmo de Zykov é, partindo de G , gerar os dois grafos G_1 e G_2 , e aplicar o algoritmo recursivamente até que todos os grafos sejam

cliques. Constrói-se, assim, uma árvore binária onde cada vértice corresponde a um grafo, a raiz é o grafo G , e as folhas são cliques. O número cromático de G é então dado pelo número cromático da menor clique. Esta árvore é chamada de *árvore de Zykov* e gera um algoritmo exponencial em relação ao número de vértices do grafo G . Para se ter uma coloração ótima de G , colore-se então a menor clique H_r , e colore-se retroativamente todos os grafos $H_r, H_{r-1}, \dots, H_2, H_1, H_0 = G$ do ramo da árvore de Zykov que gerou a menor clique, da seguinte forma: se H_i foi obtido de H_{i-1} por contração damos aos vértices x, y de H_{i-1} a mesma cor do vértice contraído z_{xy} de H_i , os outros vértices de H_{i-1} recebem as mesmas cores atribuídas em H_i ; se H_i foi obtido de H_{i-1} por adição da aresta xy , os vértices x, y tem cores diferentes em H_i , que serão mantidas em H_{i-1} , os outros vértices de H_{i-1} recebem as mesmas cores atribuídas em H_i .

Na Figura 1.1 temos um exemplo de coloração de um grafo com três cores, a partir da coloração de uma menor folha na árvore de Zykov, e de colorações retroativas, todas com três cores, de grafos intermediários até obtermos uma coloração do grafo na raiz da árvore. Na Figura 1.1, os vértices do tipo z_{xy} estão representados simplesmente por xy .

Uma maneira de colorir um grafo, sem construir toda a árvore de Zykov, é fazendo sucessivas contrações de vértices não-adjacentes até chegar numa clique, mas não temos a garantia de uma coloração ótima (veja a Figura 1.2). Surge então uma questão: como escolher os vértices a serem contraídos, de modo a gerar uma coloração ótima? Existem heurísticas que resolvem esse problema, para determinadas classes de grafos.

Hertz [12] definiu, por exemplo, uma regra para a escolha dos vértices a serem contraídos. O algoritmo de Hertz escolhe um vértice qualquer x e, se existe, escolhe um y não-adjacente a x que maximize a interseção das respec-

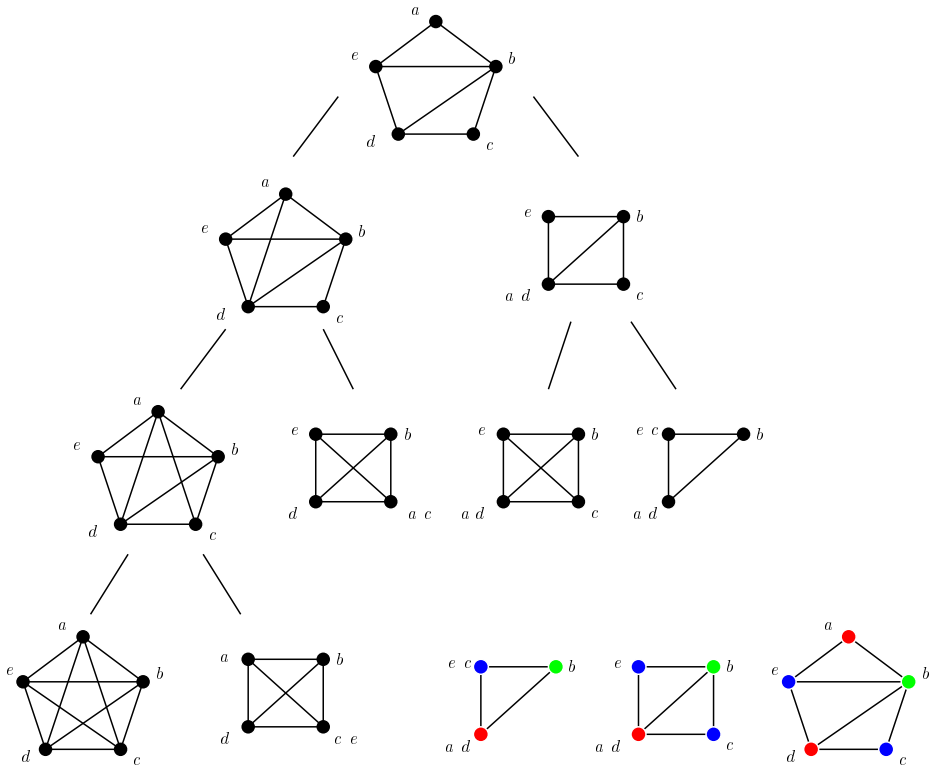


Figura 1.1: Árvore de Zykov gerada a partir de um grafo G , e coloração de G usando a menor clique da árvore.

tivas vizinhanças $N(x) \cap N(y)$. Constrói-se, então, um novo grafo contraindo os vértices x, y , e aplica-se o algoritmo para o novo grafo usando o vértice contraído z_{xy} no lugar de x . Se x é adjacente a todos os vértices, escolhe-se outro vértice x . O algoritmo pára quando o grafo obtido é uma clique. Hertz provou em [12] que esse método gera uma coloração ótima se aplicado aos *grafos de Meyniel*, ou seja, grafos em que todo ciclo induzido ímpar maior ou igual a 5 tem, pelo menos, duas cordas (veja a Figura 1.3). Além disso, os pares de vértices a serem escolhidos, por essa heurística, terão uma característica comum, serão sempre dupla par. Dois vértices não-adjacentes x, y de um grafo G formam uma *dupla par* [18], se todo xy - caminho sem cordas tem um número par de arestas.

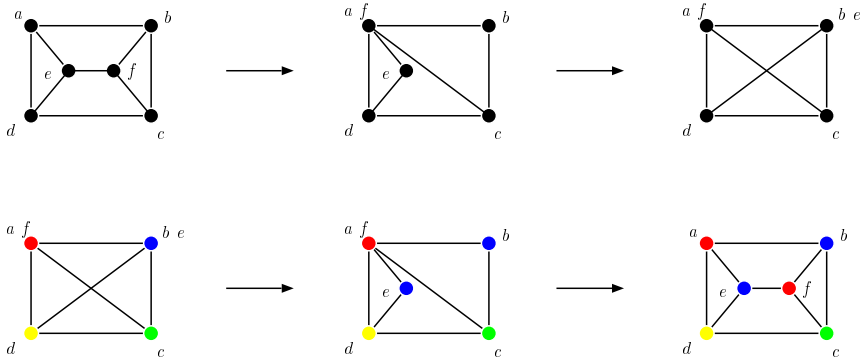


Figura 1.2: Coloração não-ótima de um grafo, obtida a partir de contrações de vértices não-adjacentes.

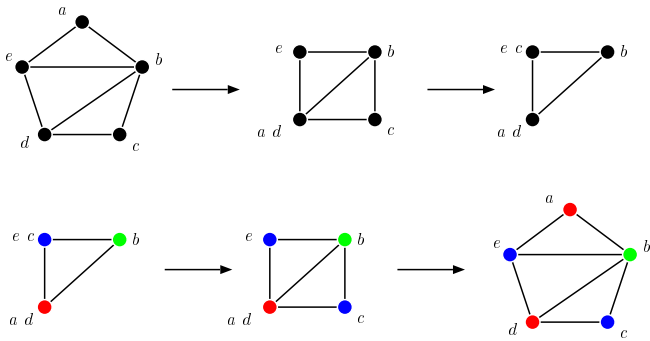


Figura 1.3: Coloração ótima dos vértices de um grafo de Meyniel, usando a heurística de Hertz.

Grafos perfeitos: Dado um grafo G , o *número clique* de G , representado por $\omega(G)$, é dado pelo tamanho da maior clique. Uma vez que os vértices de uma clique têm cores distintas então $\chi(G) \geq \omega(G)$. Um grafo G é *perfeito* se $\chi(H) = \omega(H)$, para todo subgrafo induzido H de G .

Grafos perfeitos foram definidos por Claude Berge [1] e seu estudo gerou problemas interessantes, alguns de difícil solução.

O primeiro deles é sua caracterização. Berge conjecturou, no início dos anos 60, que um grafo é perfeito se e somente se não tem buracos ímpares e

não tem anti-buracos ímpares. Um *buraco* é um ciclo sem cordas de comprimento maior ou igual a 5; e um *anti-buraco* é o complementar de um buraco. Um grafo que não tem buracos ímpares e não tem anti-buracos ímpares é chamado de *grafo Berge*, e a conjectura de "Conjetura Forte de Grafos Perfeitos". Esta conjectura foi provada por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [3] em 2002, e é hoje conhecida como o "Teorema Forte dos Grafos Perfeitos".

Um segundo problema é a existência de um algoritmo de tempo polinomial para colorir otimamente os vértices de um grafo perfeito. Este problema foi resolvido em 1984 por Grötschel, Lovász e Schrijver [10] com um algoritmo baseado no método do elipsóide de programação linear.

Um terceiro problema é a existência de um algoritmo de tempo polinomial para decidir se um grafo é Berge. Este problema foi resolvido por Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour e Vušković [2] em 2004.

A tentativa de provar, durante mais de 40 anos, que todo grafo Berge é perfeito, gerou estudos em muitas subclasses de grafos perfeitos. No entanto, a recente demonstração desta conjectura não resolve todos os problemas em aberto, como por exemplo, a caracterização de grafos perfeitamente contráteis, uma subclasse de grafos perfeitos. Um grafo é *perfeitamente contrátil* se todo subgrafo induzido admite uma seqüência de contrações de duplas pares, até chegar em uma clique. Jean Fonlupt e Jean Pierre Uhry [9] provaram em 1982 que a contração de uma dupla par em um grafo perfeito gera um grafo perfeito, isto quer dizer que os grafos perfeitamente contráteis podem ser coloridos otimamente por sucessivas contrações de dupla par.

Dupla par em grafos perfeitos: Um grafo G é *quase-paridade* [18] se para todo subgrafo induzido H de G , com pelo menos dois vértices, H ou \overline{H} tem dupla par. Um grafo G é *quase-paridade estrita* [18] se todo subgrafo

induzido de G é uma clique ou tem dupla par. Grafos quase-paridade estrita são quase-paridade.

Meyniel [18] provou que grafos quase-paridade são perfeitos. O conceito de dupla par tornou-se então muito útil para provar que uma determinada classe de grafos está contida na classe dos grafos perfeitos. Além disso, usando as duplas pares foram gerados algoritmos de coloração para algumas classes especiais de grafos perfeitos, como por exemplo, para a classe dos grafos Berge sem touros.

O *grafo de linha* $L(G)$ de um grafo G é tal que a cada aresta de G corresponde um vértice de $L(G)$ e, dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes são incidentes em G . Um grafo é *bipartido* se não contém ciclos ímpares. Um grafo é *planar* se pode ser representado no plano sem interseção de arestas. Uma *garra* é um grafo com quatro vértices a, b, c, d e três arestas ab, ac, ad .

Um problema em aberto é a caracterização de grafos quase-paridade e quase-paridade estrita, através de uma família de subgrafos proibidos. Hougardy [14] tem duas conjeturas, que continuam sem demonstração. A primeira conjetura afirma que existe uma família F de grafos de linha de grafos bipartidos tal que um grafo G é quase-paridade se e somente se G não contém buracos ímpares, anti-buracos ímpares, nem grafos de F . A segunda conjetura afirma que existe uma família F' de grafos de linha de grafos bipartidos tal que um grafo G é quase-paridade estrita se e somente se G não contém buracos ímpares, anti-buracos, nem grafos de F' . Linhares Sales, Maffray e Reed [16] estabeleceram as conjeturas de Hougardy para os grafos planares, e Linhares Sales e Maffray [15] para os grafos sem garras.

Grafos sem touros: Um *touro* é um grafo com cinco vértices r, s, x, y, z e cinco arestas ry, yx, yz, xz, zs e é representado usualmente por $\mathcal{B}(r, yxz, s)$,

(veja Figura 1.4). Chvátal e Sbihi [4] provaram em 1987 que todo grafo Berge sem touros é perfeito, e Reed e Sbihi [19] propuseram em 1995 um algoritmo de tempo polinomial para reconhecimento de grafos Berge sem touros. De Figueiredo, Maffray e Porto [5] provaram em 1997 que todo grafo Berge sem touros é quase-paridade, e que todo grafo Berge sem touros e sem anti-buracos é quase-paridade estrita. Provaram também que todo grafo Berge sem touros e sem anti-buracos é perfeitamente contrátil. Estes resultados estabeleceram as duas conjecturas de Hougardy para grafos sem touros.

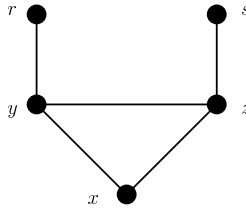


Figura 1.4: *Touro* $\mathcal{B}(r, yxz, s)$.

Grafos touro-redutíveis: Uma classe que contém os grafos sem touros e a dos grafos touro-redutíveis. Um grafo é *touro-redutível* [7] se todo vértice pertence a, no máximo, um touro.

De Figueiredo, Everett, Klein e Reed [7] provaram em 2005 que *todo grafo Berge touro-redutível é perfeito*. Apesar deste resultado ser consequência direta do Teorema Forte dos Grafos Perfeitos [3], a prova dada é mais simples e gera um algoritmo de tempo polinomial de reconhecimento de grafos Berge touro-redutíveis cuja complexidade é menor que a do algoritmo para grafos Berge em geral, apresentado em [2].

O nosso objetivo nesta tese é provar que *todo grafo Berge touro-redutível é quase-paridade*, ou seja *se G é um grafo Berge touro-*

reduzível com pelo menos dois vértices, então G ou \overline{G} tem uma dupla par.

Como todo grafo quase-paridade é Berge, a prova deste teorema estabelece que para grafos touro-reduzíveis, um grafo é quase-paridade se e somente se é Berge. Isto quer dizer que, a partir da prova deste teorema, temos a conjectura de Hougardy verdadeira para grafos touro-reduzíveis, sem necessidade da família F de grafos de linha de grafos bipartidos.

A seguir damos uma idéia do que foi feito em cada capítulo da tese.

No Capítulo 1 fazemos um histórico do estudo de duplas pares em grafos perfeitos, e damos as definições e notações que são usadas nesta tese.

O Capítulo 2 é dividido em duas seções. Na primeira seção estudamos alguns resultados de grafos Berge sem touros [5], relevantes para a tese. Enunciamos o Lema da Vizinhança, o Lema da Roda, o Lema da Vassoura, e o Lema do Caminho Longo Ímpar, todos eles importantes para a demonstração de que grafos Berge sem touros são quase-paridade [5]. As demonstrações são omitidas, mas damos as idéias das provas do Lema da Vassoura, do Lema do Caminho Longo Ímpar e do teorema de que grafos Berge sem touros são quase-paridade, uma vez que esses três resultados válidos para grafos Berge sem touros são generalizados e demonstrados para grafos Berge touro-reduzíveis nos Capítulos 3 e 4. Na segunda seção enunciamos o Lema da Vizinhança e o Lema da Roda, ambos para grafos Berge touro-reduzíveis [7]. Como esses resultados são apenas utilizados na tese, não damos as idéias de suas demonstrações.

No Capítulo 3, provamos o Lema da Vassoura Dupla, que garante a existência de um conjunto homogêneo que contém o P_4 central da vassoura dupla

em grafos Berge touro-redutíveis. Este lema é uma generalização do Lema da Vassoura para grafos Berge sem touros, usado na demonstração de que grafos Berge sem touros são quase-paridade.

No Capítulo 4, provamos que grafos Berge touro-redutíveis são quase-paridade. Para esta demonstração usamos o Lema da Vizinhança e o Lema da Roda, ambos para grafos Berge touro-redutíveis, citados no Capítulo 2. Usamos também o Lema da Vassoura Dupla para Grafos Berge Touro-redutíveis, provado no Capítulo 3. Além disso demonstramos, no Capítulo 4, o Lema do Caminho Longo Ímpar para Grafos Berge Touro-redutíveis e o Lema 4.4, que sob determinadas condições, garante a existência de vassoura dupla em um grafo Berge touro-redutível ou no seu complementar. Todos esses lemas analisam a estrutura de um grafo Berge touro-redutível. Finalmente, com o auxílio dos lemas, demonstramos que grafos Berge touro-redutíveis são quase-paridade, localizando as duplas pares.

No Capítulo 5, apresentamos alguns problemas em aberto a serem estudados a partir dos resultados desta tese.

A tese termina com a bibliografia dos artigos e livros consultados durante a execução deste trabalho.

O resultado obtido nesta tese foi apresentado no congresso *Graph Theory 2004* realizado em memória de Claude Berge. O artigo [6] foi submetido para publicação nos anais deste congresso.

1.1 Definições e Notações

Nesta seção estão as definições e notações de grafos utilizadas nesta tese. Algumas delas são repetidas ao longo do texto, mas a nossa idéia é ter as definições mais importantes para a tese agrupadas em uma seção, a fim de facilitar uma eventual consulta por parte do leitor.

Um *grafo simples*, ou simplesmente *grafo*, é um par $G(V, E)$ onde V é um conjunto finito não-vazio de *vértices*, e E é um conjunto de pares não-ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*. A aresta e formada pelos vértices u, v é representada por $e = uv$, ou simplesmente por uv . Quando conveniente escrevemos $V(G)$ e $E(G)$ representando os conjuntos de vértices e arestas, respectivamente, de um grafo G .

Dois vértices u, v de um grafo G são *adjacentes* se uv é uma aresta. Neste caso, u e v são chamados de *vértices extremos* da aresta uv . Diz-se também que o vértice u *vê* o vértice v , ou que u é *vizinho* de v . Se u e v são vértices não-adjacentes, diz-se que u *perde* v , ou que uv é uma *não-aresta*.

A *vizinhança de um vértice* v de $V(G)$, representada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices que vêem v .

O *grau de um vértice* v é dado pela cardinalidade de $N(v)$.

Dois vértices adjacentes x e y são *incomparáveis* se existem $u \in N(x) \setminus (N(y) \cup \{y\})$, e $v \in N(y) \setminus (N(x) \cup \{x\})$. Caso contrário, x e y são *comparáveis*.

O *complementar* \overline{G} de um grafo G é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e, dois vértices são adjacentes em \overline{G} se e somente se são

não-adjacentes em G .

Um *caminho de comprimento k* em um grafo é uma seqüência de $k + 1$ vértices distintos $v_0v_1 \cdots v_k$, tal que v_i é adjacente a v_{i+1} , para todo $i = 0, \dots, k-1$, e é chamado de v_0v_k -*caminho*. Os vértices v_0, v_k são chamados de *vértices extremos* ou *extremidades* do caminho e v_1, \dots, v_{k-1} de *vértices internos* do caminho. Observe que o comprimento de um caminho é dado pelo número de arestas.

Uma *corda de um caminho* em um grafo é uma aresta formada por vértices não-consecutivos do caminho. Um caminho de k vértices, sem cordas, é representado por P_k . Observe que P_k tem $k - 1$ arestas.

Um *caminho longo* em um grafo é um caminho sem cordas de comprimento maior ou igual a 5.

Um *ciclo de comprimento k* é uma seqüência de vértices distintos $v_1 \cdots v_{k-1}v_k$, tal que v_i é adjacente a v_{i+1} , para todo $i = 1, \dots, k-1$, e v_k é adjacente a v_1 .

Uma *corda do ciclo* é uma aresta formada por vértices não-consecutivos do ciclo.

Um *buraco* é um ciclo, sem cordas, de comprimento maior ou igual a 5. Um buraco de comprimento k é representado por C_k . Observe que C_k tem k vértices e k arestas.

Um *anti-buraco* é o complementar de um buraco. Um anti-buraco de comprimento k é representado por $\overline{C_k}$.

Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Dado um subconjunto H de $V(G)$ o **subgrafo de G induzido por H** , representado por $G[H]$, tem H como conjunto de vértices, e dois vértices são adjacentes em $G[H]$ se e somente se são adjacentes em G .

Um grafo é **grafo de Meyniel** se todo ciclo induzido ímpar maior ou igual a 5 tem, pelo menos, duas cordas.

Um grafo é **bipartido** se não contém ciclos ímpares.

Um grafo é **conexo** se existe um caminho entre qualquer par de vértices.

Uma **componente conexa** de um grafo não-conexo G é um subgrafo induzido, conexo e maximal de G .

Uma **árvore** é um grafo conexo e sem ciclos. Uma árvore é **binária** se tem exatamente um vértice de grau 2, e vértices de grau 1 e grau 3. O vértice de grau 2 é chamado de **raiz**, e os de grau 1 são chamados de **folhas**.

Um subconjunto próprio H de vértices de um grafo G é **homogêneo** se H tem pelo menos dois vértices, e todo vértice de $V(G) \setminus H$ ou vê todo vértice de H ou perde todo vértice de H .

Uma **clique** C de um grafo G é um subconjunto de vértices, tal que dois vértices quaisquer de $G[C]$ são adjacentes.

O **número clique** de um grafo G , representado por $\omega(G)$, é a cardinalidade da maior clique de G .

Um *conjunto estável* S de um grafo G é um subconjunto de vértices, tal que dois vértices quaisquer de $G[S]$ são não-adjacentes.

Uma *coloração* dos vértices de um grafo é a atribuição de uma cor a cada vértice, de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

Uma *coloração ótima* dos vértices de um grafo é uma coloração que utiliza o menor número de cores possível.

O *número cromático* de um grafo G , representado por $\chi(G)$, é dado pelo número de cores utilizado numa coloração ótima.

Um grafo G é *perfeito* se $\chi(H) = \omega(H)$, para todo subgrafo induzido H de G .

Um grafo é *Berge* se não tem buracos ímpares e não tem anti-buracos ímpares.

Dois vértices não-adjacentes x, y de um grafo formam uma *dupla par*, se todo xy - caminho sem cordas tem um número par de arestas.

Dois vértices não-adjacentes x, y de um grafo formam um *2-par*, se todo xy - caminho sem cordas tem comprimento 2.

Um grafo G é *quase-paridade* se para todo subgrafo induzido H de G , com pelo menos dois vértices, H ou \overline{H} tem dupla par.

Um grafo G é *quase-paridade estrita* se todo subgrafo induzido de G é uma clique ou tem dupla par.

A operação de *contração* de dois vértices não-adjacentes x, y de um

grafo G consiste em deletar x, y e acrescentar um novo vértice, adjacente aos vértices de $N(x) \cup N(y)$, substituindo eventuais arestas múltiplas por uma única aresta.

Um grafo é *perfeitamente contrátil* se todo subgrafo induzido admite uma seqüência de contrações de duplas pares, até chegar em uma clique.

Um *touro* é um grafo com cinco vértices r, s, x, y, z e cinco arestas ry, yx, yz, xz, zs e é representado usualmente por $\mathcal{B}(r, yxz, s)$.

Um grafo é *touro-redutível* se todo vértice pertence a, no máximo, um touro.

Uma *roda* é o grafo obtido de um buraco maior ou igual a 6, acrescido de um vértice adjacente a todos os vértices do buraco.

Uma *vassoura* é o grafo obtido de um P_4 , acrescido de um quinto vértice adjacente a todos os vértices do P_4 , e mais outro vértice adjacente apenas ao quinto vértice.

Uma *vassoura dupla* é um grafo composto de um P_4 , chamado de *P_4 central da vassoura dupla*, de dois vértices não-adjacentes a, b que vêm todo P_4 , de um vértice a' que vê somente a , e de um vértice b' que vê somente b .

Um *prisma* é um grafo composto de dois triângulos de vértices disjuntos, com três caminhos disjuntos entre eles.

Um grafo G é *fracamente triangulado* se G não tem buracos nem anti-buracos, o que é equivalente a dizer que G e \overline{G} não têm buracos.

Um grafo é *perfeitamente ordenável* se admite uma orientação em suas arestas que não gera circuito nem obstrução, sendo uma obstrução um $P_4 = abcd$ com orientação \vec{ab} e \vec{dc} .

A *diferença* entre dois conjuntos R e S , representada por $R \setminus S$, é o conjunto de elementos de R que não pertencem a S .

As figuras desta tese têm os subconjuntos de vértices de um grafo G representados por caixas retangulares ou círculos. Supondo que R e S são subconjuntos de $V(G)$, as adjacências entre R e S são indicadas do seguinte modo:

- Uma linha contínua entre R e S : todo vértice de R vê todo vértice de S ;
- Uma linha pontilhada entre R e S : todo vértice de R perde todo vértice de S ;
- Uma linha contínua e uma pontilhada entre R e S : os vértices de R vêem parcialmente os vértices de S , isto é, cada vértice de R vê algum vértice de S e perde algum vértice de S ;
- Não existe linha entre R e S : ou não temos informações sobre as adjacências entre R e S , ou a informação não é relevante.

Além disso, se x é um vértice de $V(G)$ e $x \notin R$, representamos a relação entre x e os vértices de R do seguinte modo:

- Uma linha contínua entre x e R : o vértice x vê todo vértice de R ;
- Uma linha pontilhada entre x e R : o vértice x perde todo vértice de R ;

- Uma linha contínua e uma pontilhada entre x e R : o vértice x vê parcialmente os vértices de R , isto é, x vê algum vértice de R e perde algum vértice de R ;
- Não existe linha entre x e R : ou não temos informações sobre as adjacências entre x e R , ou a informação não é relevante.

A mesma notação é usada para representar a relação de adjacência entre dois vértices x, y de $V(G)$:

- Uma linha contínua entre x e y : xy é uma aresta;
- Uma linha pontilhada entre x e y : xy é uma não-aresta;
- Não existe linha entre x e y : ou não temos informação sobre a adjacência entre x e y , ou a informação não é relevante.

Nos Capítulos 3 e 4 fazemos as figuras dos touros gerados nas demonstrações por absurdo. Para facilitar a leitura, temos touros de duas cores. As arestas do primeiro touro são verdes, as arestas do segundo touro são vermelhas, e as arestas comuns aos dois touros tem as duas cores sobrepostas, ficando com a cor marrom.

Capítulo 2

Grafos Berge sem Touros e Berge Touro-redutíveis

Este capítulo é dividido em duas seções. Na primeira seção enunciamos alguns teoremas já demonstrados sobre grafos Berge sem touros, que são utilizados nesta tese; e na segunda, fazemos o mesmo para grafos Berge touro-redutíveis.

Na Seção 2.1 é feito um histórico da demonstração de que grafos Berge sem touros são quase-paridade. Para provar tal afirmação, De Figueiredo, Maffray e Porto [5] usaram o Lema da Roda, provado por Reed e Sbihi [19] e provaram o Lema da Vassoura, e o Lema do Caminho Longo Ímpar. Nas demonstrações dos dois primeiros lemas foram usadas uma proposição, o Lema da Vizinhança, que analisa o comportamento dos vizinhos de um buraco maior ou igual a 6 em um grafo Berge sem touros. Aqui, as demonstrações são omitidas, mas damos as idéias das provas dos Lemas da Vassoura, do Caminho Longo Ímpar, e do teorema de que grafos Berge sem touros são quase-paridade, uma vez que esses três resultados válidos para grafos Berge sem touros são generalizados e demonstrados para grafos Berge touro-redutíveis nos Capítulos 3 e 4.

Na Seção 2.2 são enunciados os resultados de grafos Berge touro-

reduzíveis. Como esses resultados são apenas utilizados na tese, não existe necessidade de estudarmos neste texto as idéias de suas demonstrações.

2.1 Grafos Berge sem Touros

Grafos sem touros foram definidos por Chvátal e Sbihi [4] em 1987. No mesmo artigo foi provado que grafos Berge sem touros são perfeitos. Essa classe é auto-complementar e contém os grafos sem P_4 e os bipartidos. Posteriormente, em 1995, Reed e Sbihi [19] provaram o Lema da Vizinhança e o Lema da Roda para grafos Berge sem touros e deram um algoritmo polinomial de complexidade $O(n^5)$ para reconhecer grafos Berge sem touros.

Seguem as definições de *roda* e *conjunto homogêneo*, utilizadas nos próximos lemas. Uma *roda* é o grafo obtido de um buraco maior ou igual a 6, acrescido de um vértice adjacente a todos os vértices do buraco. Um subconjunto próprio H de vértices de um grafo G é *homogêneo* se H tem pelo menos dois vértices e todo vértice de $V(G) \setminus H$ ou vê todo vértice de H ou perde todo vértice de H .

Lema 2.1 (Lema da Vizinhança para Grafos Berge sem Touros [19])

Sejam G um grafo Berge sem touros e C um menor buraco par em G , com seus vértices coloridos alternadamente de vermelho e verde. Seja v um vértice qualquer de $V(G) \setminus V(C)$, tal que $N(v) \cap V(C) \neq \emptyset$. Então v satisfaz exatamente uma das seguintes afirmações: (ver Figura 2.1)

- (i) $N(v) \cap V(C) = V(C)$, isto é, C e v formam uma roda;*
- (ii) $N(v) \cap V(C)$ consiste de todos os vértices vermelhos e nenhum verde, ou todos os vértices verdes e nenhum vermelho;*

- (iii) $N(v) \cap V(C)$ consiste de um vértice, ou de três vértices consecutivos de C ;
- (iv) $N(v) \cap V(C)$ consiste de dois vértices a distância 2 em C ;
- (v) C tem comprimento 6 e $N(v) \cap V(C)$ consiste de quatro vértices tal que exatamente três deles são consecutivos.

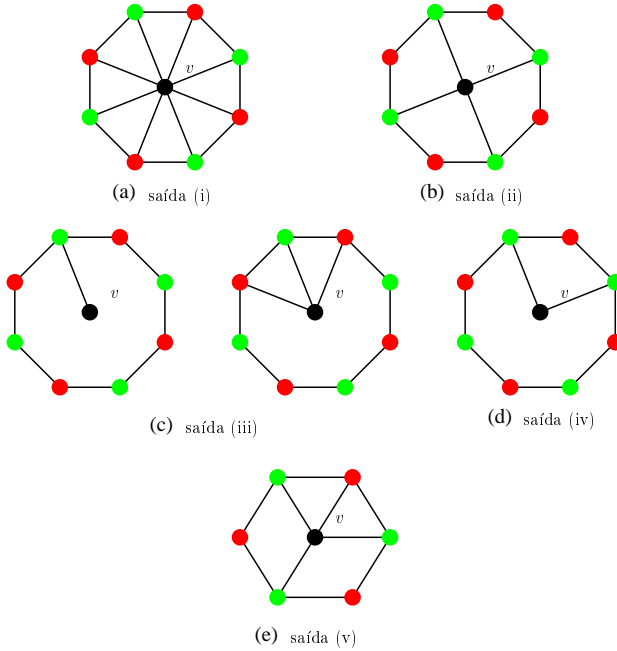


Figura 2.1: Possibilidades de interseção de um vértice v com um buraco par em um grafo Berge sem touros.

Lema 2.2 (Lema da Roda para Grafos Berge sem Touros [19])

Se um grafo Berge sem touros tem uma roda, então tem um conjunto homogêneo que contém o buraco da roda.

De Figueiredo, Maffray e Porto [5] provaram, em 1997, que todo grafo Berge sem touros é quase-paridade. Para essa demonstração usaram o Lema

da Vizinhança e o Lema da Roda enunciados acima, e provaram o Lema da Vassoura, e o Lema do Caminho Longo Ímpar que enunciamos a seguir. Incluímos as idéias das demonstrações para os dois últimos lemas, para que o leitor possa apreciar o grau de dificuldade das demonstrações correspondentes para uma classe mais geral apresentadas nos Capítulos 3 e 4.

Uma *vassoura* é um grafo composto de um P_4 , de um vértice a que vê todo P_4 , e de um vértice a' que vê somente a (ver Figura 2.2). Um caminho sem cordas de comprimento maior ou igual a 5 é chamado de *caminho longo*.

Lema 2.3 (Lema da Vassoura para Grafos Berge sem Touros [5])

Se um grafo Berge sem touros tem uma vassoura, então tem um conjunto homogêneo que contém o P_4 da vassoura.

Idéia da Prova: Seja uma vassoura qualquer de G , com vértices $w_1, w_2, w_3, w_4, a, a'$ e arestas $w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, aw_1, aw_2, aw_3, aw_4, aa'$. Seja $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ o conjunto formado pelo P_4 da vassoura. Os vértices de $V \setminus W$ podem ser classificados segundo suas adjacências em relação a W . Temos então a seguinte partição dos vértices de $V \setminus W$, (ver Figura 2.3):

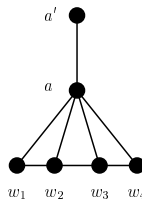


Figura 2.2: Vassoura.

- T conjunto de vértices de $V \setminus W$ que vêem todos os vértices de W ;

- P conjunto de vértices de $V \setminus W$ que vêem W parcialmente, isto é, vêem algum vértice de W , mas não vêem todo W ;
- F conjunto de vértices de $V \setminus W$ que perdem todos os vértices de W .

Podemos ver que W, T, P, F formam uma partição de V , que $a \in T$ e que $a' \in F$.

Define-se também o seguinte subconjunto de T :

- A conjunto de vértices de T que vêem a' .

Observe que $a \in A$, e que $T \setminus A$ pode ser vazio.

Prova-se que A vê todo P , caso contrário seriam formados touros. Por outro lado, se t é vértice de $T \setminus A$, t pode ver ou perder algum vértice de P .

O objetivo é provar a existência de um conjunto homogêneo H que contenha W . Então, inicia-se a construção desse conjunto colocando W em H . Como os vértices de P vêem W parcialmente, P também deve estar contido em H , uma vez que os vértices que não pertencem a um conjunto homogêneo devem ver todo H ou perder todo H . Logo $W \cup P \subset H$.

Como F perde todo W , define-se um conjunto X formado pelos vértices de F que vêem algum P , ou que vêem algum vértice já colocado em X . Os vértices de X são então forçados a estar em H e temos $W \cup P \cup X \subset H$.

A partir daí, como T vê todo W , define-se um conjunto Y formado pelos vértices de $T \setminus A$ que perdem algum vértice de P ou que perdem algum vértice já colocado em Y , (ver Figura 2.4). Lembre-se que já foi provado que os vértices de A vêem todo P . Os vértices de Y são então forçados a estar em H e tem-se $W \cup P \cup X \cup Y \subset H$.

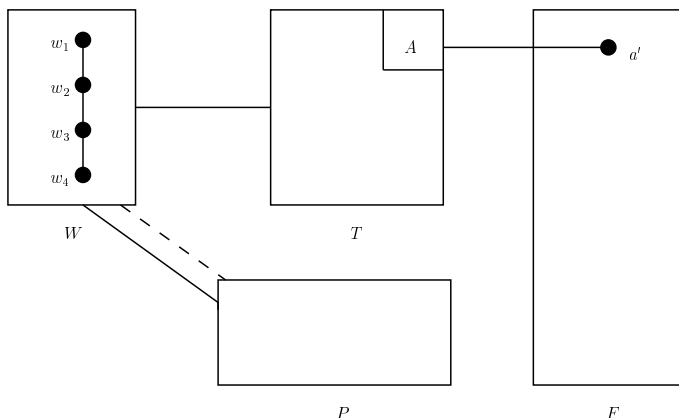


Figura 2.3: Diagrama da partição dos vértices de um grafo que contém uma vassoura.

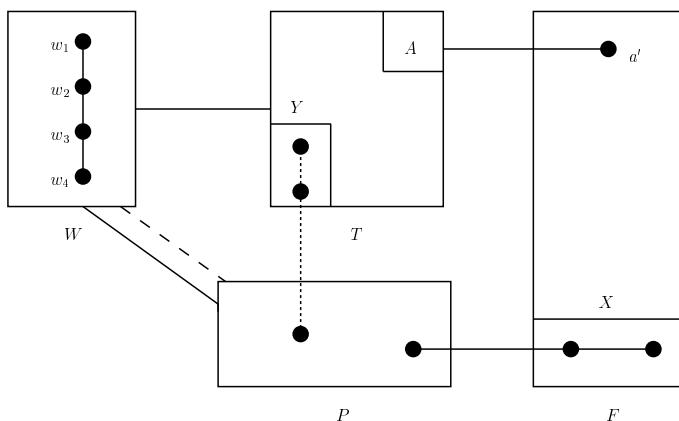


Figura 2.4: Representação dos subconjuntos X , Y .

Observe que Y não é definido a partir de X , porque seriam formados touros. As definições dos conjuntos X e Y são dadas a seguir:

- $x \in X$, se $x \in F$ e existe em G um caminho $px_1 \cdots x_i$, com $p \in P$, $i \geq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_i \in F$ e $x = x_i$.
- $y \in Y$, se $y \in T \setminus A$ e existe em \overline{G} um caminho sem cordas $py_1 \cdots y_j$, com $p \in P$, $j \geq 1$, $y_1, y_2, \dots, y_j \in T \setminus A$ e $y = y_j$.

Seja H o conjunto de vértices pertencentes a componente conexa de $G \setminus (T \setminus Y)$ que contém W (ver Figura 2.5). Prova-se que $H = W \cup P \cup X \cup Y$ e que todo vértice $T \setminus Y$ vê todo H , e conseqüentemente tem-se que H é um conjunto homogêneo (ver Figura 2.6). ■

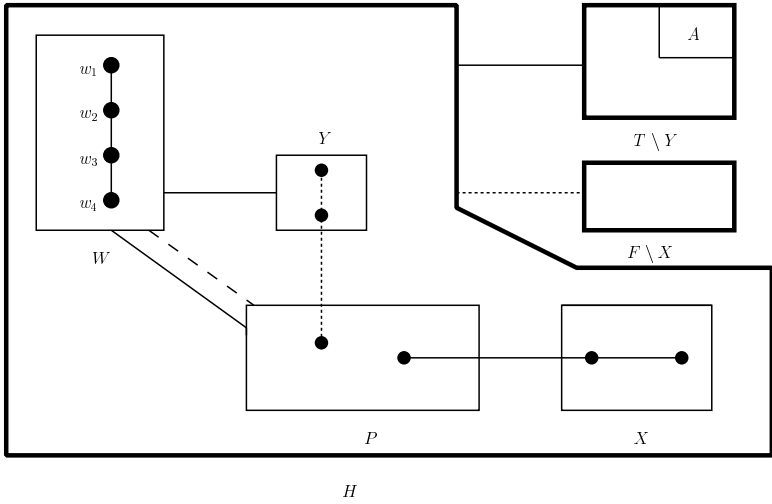


Figura 2.5: Conjunto homogêneo H contendo W .

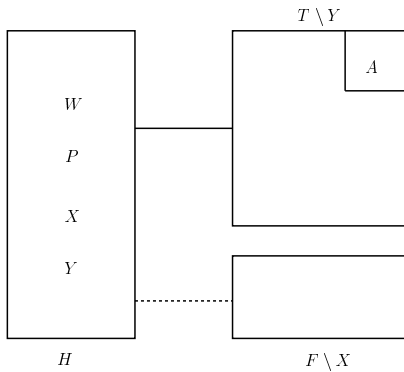


Figura 2.6: Partição de um grafo Berge sem touros a partir do conjunto homogêneo H .

Lema 2.4 (Lema do Caminho Longo Ímpar para Grafos Berge sem Touros [5]) *Sejam G um grafo Berge sem touros e $P = u_0u_1 \dots u_r$ um caminho longo ímpar de G . Se c é um vértice de $V(G) \setminus V(P)$ que vê u_0 e u_r , então c vê todos os vértices de P .*

Idéia da Prova: Supondo, por absurdo, que existe em P um não-vizinho de c , e como G não tem buracos ímpares, tem-se que c tem dois vizinhos consecutivos u_i, u_{i+1} de P . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que c perde u_{i+2} e então tem-se um touro. ■

Um grafo é *fracamente triangulado* se G não tem buracos nem anti-buracos, o que é equivalente a dizer que G e \overline{G} não tem buracos. Hayward, Hoàng e Maffray [11] provaram que se G é um grafo fracamente triangulado e não é clique, então G tem um 2-par. Dois vértices u, v formam um *2-par* se todo uv -caminho sem cordas tem comprimento 2.

Teorema 2.1 ([5]) *Seja G um grafo Berge sem touros com pelo menos dois vértices. Então G ou \overline{G} tem uma dupla par.*

Idéia da Prova: O teorema foi provado por indução no número de vértices.

Para grafos com, no máximo, quatro vértices, pode-se verificar o teorema facilmente.

Supõe-se, por indução, que o teorema é verdadeiro para grafos com menos de n vértices, e que G é um grafo de n vértices, Berge e sem touros.

Se G e \overline{G} não tem buracos então G é fracamente triangulado, e do resultado de Hayward, Hoàng e Maffray [11], G tem um 2-par. Logo G tem uma dupla par. Se G tem um conjunto homogêneo H , da hipótese de indução, o subgrafo induzido por H tem dois vértices a, b que formam uma dupla par de H ou de \overline{H} . Observe que H é subgrafo próprio de G . Como todo vértice

de $G \setminus H$ ou vê a, b ou perde a, b , tem-se que a, b formam uma dupla par de G ou de \overline{G} . Logo, se G é fracamente triangulado ou se G tem conjunto homogêneo, tem-se o teorema.

Supõe-se então que G não é fracamente triangulado e que não tem conjunto homogêneo. Do fato de G não ter conjunto homogêneo, que é uma propriedade auto-complementar, tem-se que \overline{G} também não tem conjunto homogêneo. Daí e dos lemas da roda e da vassoura, G e \overline{G} não tem roda e, G e \overline{G} não tem vassoura. Do fato de G não ser fracamente triangulado, tem-se que G ou \overline{G} tem buracos. Pode-se assumir que G contém um buraco. No caso de ser \overline{G} a demonstração é análoga, já que as hipóteses sobre G : Berge, fracamente triangulado, sem touros, não tem conjunto homogêneo, são todas auto-complementares.

Seja l o comprimento de um menor buraco. Como G é um grafo Berge, l é par e $l \geq 6$. Seja $C = v_1, v_2, \dots, v_l$ um buraco de comprimento l . Então $V(G)$ contém l subconjuntos não-vazios, dois a dois disjuntos V_1, \dots, V_l , tais que para cada $i = 1, \dots, l$ (com subscritos tomados módulo l), todo vértice de V_i vê todo vértice de $V_{i-1} \cup V_{i+1}$ e perde todo vértice de $V_{i+2} \cup V_{i+3} \cup \dots \cup V_{i-3} \cup V_{i-2}$. Escreve-se $V^* = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l$ e escolhe-se os subconjuntos V_i tal que V^* seja maximal. Uma vez definido $V^* = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l$, outros subconjuntos de vértices são definidos a partir de suas vizinhanças com os conjuntos V_i :

- A_1 conjunto de vértices de $V \setminus V^*$ que vêem todo $V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_l$ e perdem todo $V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{l-1}$;
- A_2 conjunto de vértices de $V \setminus V^*$ que vêem todo $V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{l-1}$ e perdem todo $V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_l$;
- Para cada $i = 1, \dots, l$, seja X_i o conjunto de vértices de $V \setminus (V^* \cup A_1 \cup A_2)$

que vêm todo $V_{i-1} \cup V_{i+1}$ e perdem todo $V_{i-2} \cup V_{i+2}$;

- $Z = V \setminus (V^* \cup A_1 \cup A_2 \cup X_1 \cup \dots \cup X_l)$.

Por definição os conjuntos $V_1, \dots, V_l, A_1, A_2, X_1, \dots, X_l, Z$ são dois a dois disjuntos, e a sua união é $V(G)$.

Foram demonstradas algumas propriedades dos conjuntos $V_i \cup X_i$, $i = 1, 2, \dots, l$:

- Se $X_i \neq \emptyset$, para algum i , então $l = 6$ e todo vértice de X_i tem um vizinho em V_{i+3} ;
- Se um vértice x de X_i vê todo V_{i+3} então x tem um vizinho em V_i ;
- Se i é ímpar, então não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e A_1 ; e se i é par, então não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e A_2 ;
- Não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e $V_{i+2} \cup X_{i+2}$;
- Cada vértice de $V_i \cup X_i$ ou vê todos ou perde todos os vértices de cada componente conexa de $V_{i+1} \cup X_{i+1}$;
- Cada vértice de $V_i \cup X_i$ ou vê todos ou perde todos os vértices de cada componente conexa de A_i , $i = 1, 2$.

A partir dessas propriedades, foi demonstrada a existência de duplas pares analisando as diferentes hipóteses para as componentes conexas dos conjuntos $V_i \cup X_i$:

- Se existe uma componente conexa D de $V_i \cup X_i$ que não é clique, então D tem uma dupla par de G ou de \overline{G} ;
- Se toda componente conexa de cada $V_i \cup X_i$ é uma clique, tem-se duas possibilidades:

- ou existe uma componente conexa que tem dois vértices x, y incomparáveis, e então x, y formam uma dupla par de \overline{G} ;
- ou quaisquer dois vértices de toda componente conexa são comparáveis, e tem-se duas possibilidades:
 - * ou todo $V_i \cup X_i$ é uma clique, e nesse caso a dupla par de G é formada por um vértice de $V_i \cup X_i$ e um vértice de $V_{i+2} \cup X_{i+2}$;
 - * ou existe $V_i \cup X_i$ que não é clique, e então $V_i \cup X_i$ tem pelo menos duas componentes conexas D_1, D_2 , e a dupla par de G é formada por um vértice de D_1 e um vértice de D_2 .

O teorema foi então provado com a localização das duplas pares em G ou em \overline{G} . ■

Essa partição do conjunto de vértices é usada no Capítulo 4 para demonstrar a generalização do Teorema 2.1 para grafos Berge touro-redutíveis. As propriedades dos conjuntos pertencentes à partição são também verificadas para os grafos Berge touro-redutíveis no Capítulo 4.

No Capítulo 3, apresentamos, para grafos Berge touro-redutíveis, o Lema da Vassoura Dupla, ferramenta correspondente ao Lema da Vassoura (Lema 2.3). No Capítulo 4, apresentamos, para grafos Berge touro-redutíveis, o Lema do Caminho Longo Ímpar, ferramenta correspondente ao Lema 2.4. Embora as demonstrações destes dois lemas apresentadas nos Capítulos 3 e 4 sejam mais complexas e técnicas, dada a maior generalidade da classe estudada, a demonstração proposta do teorema que generaliza o Teorema 2.1 é mais elegante e evidencia a característica auto-complementar dos grafos Berge touro-redutíveis.

2.2 Grafos Berge Touro-redutíveis

Um grafo é *touro-redutível* se todo vértice pertence a, no máximo, um touro. Essa classe contém os grafos sem touros e foi definida por De Figueiredo, Everett, Klein e Reed [7] em 2005. Nesse artigo foi provado que todo grafo Berge touro-redutível é perfeito. A prova dada, em 2002, por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [3], de que todo grafo Berge é perfeito, não descarta a importância do artigo [7], dada a simplicidade da demonstração da Conjetura Forte dos Grafos Perfeitos para a classe de grafos Berge touro-redutíveis. Além disso, a demonstração dada por De Figueiredo, Everett, Klein e Reed [7] gera um algoritmo de reconhecimento de grafos Berge touro-redutíveis de complexidade $O(n^6)$, enquanto que os algoritmos de reconhecimento de grafos perfeitos gerados por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [3] têm complexidade $O(n^9)$ e, o artigo com 149 páginas é de difícil leitura.

Apesar de existir um algoritmo polinomial para reconhecer grafos Berge touro-redutíveis, não temos um algoritmo mais simples do que o apresentado no artigo [10], para colorir esses grafos. Daí a importância de demonstrar que grafos Berge touro-redutíveis têm dupla par, uma vez que a demonstração localiza as duplas pares. Isso é um primeiro passo para generalizar o teorema que afirma que grafos Berge sem touros e sem anti-buracos são perfeitamente contráteis [5]. Se for possível demonstrar que grafos Berge touro-redutíveis e sem anti-buracos são perfeitamente contráteis, teremos a possibilidade de desenvolver um algoritmo eficiente para colorir esses grafos através de uma seqüência de contrações de duplas pares.

Para demonstrar que grafos Berge touro-redutíveis são perfeitos, De Figueiredo, Everett, Klein e Reed [7] generalizaram alguns resultados de grafos Berge sem touros, como o Lema da Vizinhança e o Lema da Roda. O Lema

da Vizinhança para grafos Berge touro-redutíveis assim como para grafos Berge sem touros analisa o comportamento de vértices vizinhos a um buraco maior ou igual a 6.

Lema 2.5 (Lema da Vizinhança para Grafos Berge Touro-redutíveis [7]) *Sejam G um grafo Berge touro-redutível e C um menor buraco par em G , com seus vértices coloridos alternadamente de vermelho e verde. Seja v um vértice qualquer de $V(G) \setminus V(C)$, tal que $N(v) \cap V(C) \neq \emptyset$. Então v satisfaz exatamente uma das seguintes afirmações: (ver Figura 2.7)*

- (i) $N(v) \cap V(C) = V(C)$, isto é, C e v formam uma roda;
- (ii) $N(v) \cap V(C)$ consiste de todos os vértices vermelhos e nenhum verde, ou todos os vértices verdes e nenhum vermelho;
- (iii) $N(v) \cap V(C)$ consiste de um, dois ou três vértices consecutivos de C ;
- (iv) $N(v) \cap V(C)$ consiste de dois vértices a distância 2 em C ;
- (v) C tem comprimento 6 e $N(v) \cap V(C)$ consiste de quatro vértices tal que exatamente três deles são consecutivos.

Lema 2.6 (Lema da Roda para Grafos Berge Touro-redutíveis [7]) *Se um grafo Berge touro-redutível tem uma roda, então tem um conjunto homogêneo que contém o buraco da roda.*

Os lemas enunciados nesta seção já foram demonstrados e são utilizados na tese, sem necessidade de estudarmos neste texto as idéias de suas provas.

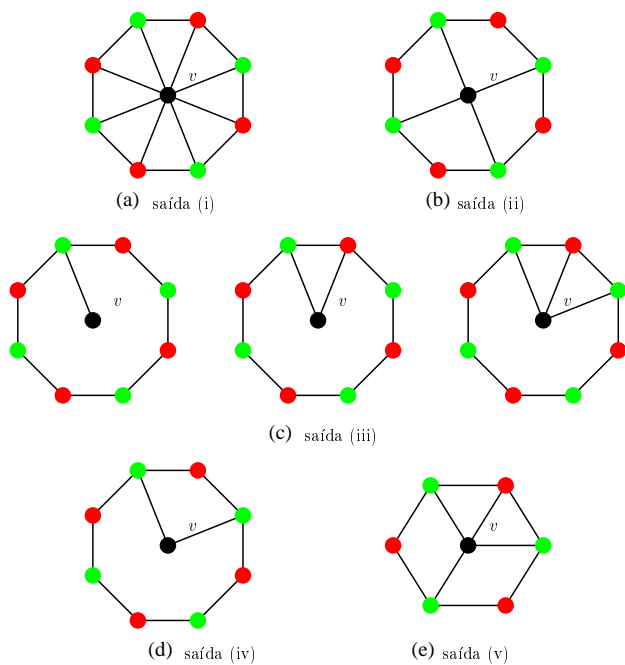


Figura 2.7: Possibilidades de interseção de um vértice v com um buraco par em um grafo Berge touro-redutível.

Capítulo 3

Lema da Vassoura Dupla

No Capítulo 2 vimos que o Lema da Vassoura garante a existência de um conjunto homogêneo que contém o P_4 da vassoura. Esse lema foi usado na demonstração de que grafos Berge sem touros são quase-paridade.

A nossa meta é demonstrar que grafos Berge touro-redutíveis são também grafos quase-paridade. Para isso, precisamos de um lema para essa classe de grafos correspondente ao Lema da Vassoura. Como os grafos touro-redutíveis podem ter touros que não se interceptem, a definição de vassoura não foi suficiente para a demonstração de tal lema. Generalizamos, então, a definição de vassoura criando a de vassoura dupla. A partir daí, pudemos fazer uma nova partição, como veremos ao longo deste capítulo. Após analisar as adjacências entre os conjuntos criados pela nova partição, demonstramos o Lema da Vassoura Dupla, explicitando o conjunto homogêneo.

Uma *vassoura dupla* é um grafo composto de um P_4 (chamado de P_4 central da vassoura dupla), de dois vértices não-adjacentes a, b que vêm todo P_4 , de um vértice a' que vê somente a , e de um vértice b' que vê somente b . A Figura 3.1 representa uma vassoura dupla e seu complemento.

Lema 3.1 (Lema da vassoura dupla) *Se um grafo Berge touro-redutível tem uma vassoura dupla, então tem um conjunto homo-*

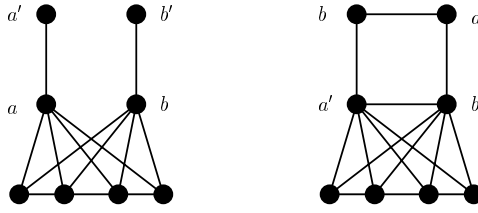


Figura 3.1: Vassoura dupla e seu complemento.

gêneo que contém o P_4 central da vassoura dupla.

Prova: Seja G um grafo Berge touro-redutível e seja uma vassoura dupla qualquer de G , com vértices $w_1, w_2, w_3, w_4, a, b, a', b'$, e arestas $w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, aw_1, aw_2, aw_3, aw_4, bw_1, bw_2, bw_3, bw_4, aa', bb'$. Seja $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ o conjunto formado pelo P_4 central da vassoura dupla. Os vértices de $V \setminus W$ podem ser classificados segundo suas adjacências em relação a W . Temos então a seguinte partição dos vértices de $V \setminus W$:

- T conjunto de vértices de $V \setminus W$ que vêem todos os vértices de W ;
- P conjunto de vértices de $V \setminus W$ que vêem W parcialmente, isto é, cada vértice de P vê algum vértice de W , e perde algum vértice de W ;
- F conjunto de vértices de $V \setminus W$ que perdem todos os vértices de W .

É fácil ver que W, T, P, F formam uma partição de V , que $a, b \in T$ e que $a', b' \in F$.

Sejam os seguintes subconjuntos de T :

- A conjunto de vértices de T que vêem a' e perdem b' ;
- B conjunto de vértices de T que perdem a' e vêem b' ;
- C conjunto de vértices de T que vêem a' e b' .

Observe que A, B, C são disjuntos dois a dois, e que $a \in A$ e $b \in B$.

Na Figura 3.2, temos um diagrama inicial representando a partição dos vértices de um grafo que contém uma vassoura dupla. A linha contínua entre os conjuntos W e T significa que todo vértice de W vê todo T . As linhas contínuas entre os conjuntos A, B, C e o vértices a' e b' representam as adjacências entre os vértices desses conjuntos e a', b' . E, finalmente, as duas linhas, uma pontilhada e outra contínua entre W e P , significam que os elementos de P vêem parcialmente W .

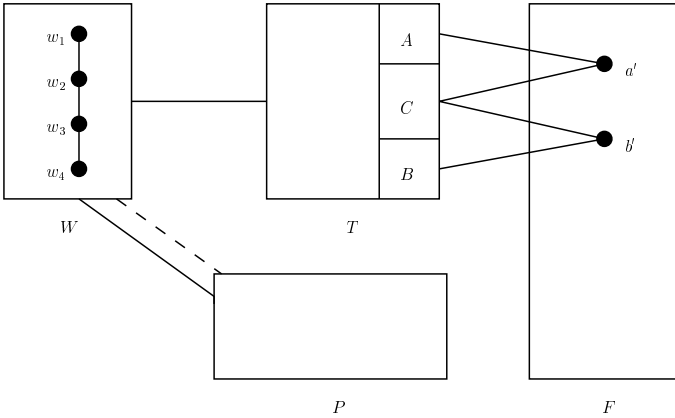


Figura 3.2: Diagrama da partição dos vértices de um grafo que contém uma vassoura dupla.

As proposições a seguir analisam as adjacências entre os conjuntos definidos anteriormente e as adjacências entre alguns de seus vértices.

Proposição 3.1.1 *Não existem arestas entre vértices de A e vértices de B .*

Prova: Suponhamos que exista uma aresta uv com $u \in A, v \in B$. Então $\mathcal{B}(a', uw_i v, b')$ é um touro para todo $i = 1, 2, 3, 4$, como podemos ver na

Figura 3.3. Logo temos quatro touros que se interceptam, uma contradição, uma vez que G é touro-redutível. ■

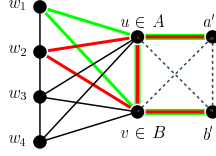


Figura 3.3: Touros gerados na Proposição 3.1.1 supondo a existência da aresta uv .

Proposição 3.1.2 *Se $p \in P$ então*

- (i) *Existem vértices adjacentes $w_g, w_h \in W$ tal que p vê w_g e perde w_h ;*
- (ii) *Existem vértices não-adjacentes $w_r, w_s \in W$ tal que p vê w_r e perde w_s .*

Prova: Segue diretamente da definição de P . ■

Proposição 3.1.3 *Todo vértice de P vê todo vértice de $A \cup B \cup C$ e perde a', b' .*

Prova: Sejam $p \in P$ e $u \in A$. Provamos inicialmente que p vê u . Suponhamos, por absurdo, que p perde u .

Caso 1: Existe um sub-caminho $ww'w''$ de W tal que p vê w, w' e perde w'' .

Se p perde a' , então $\mathcal{B}(p, w'w''u, a')$ é um touro, como representado na Figura 3.4(a), e se p vê a' então $\mathcal{B}(a', pww', w'')$ é um touro, como representado na Figura 3.5(a). Nos dois casos, p deve perder b' senão teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(b', pww', w'')$ contendo p , como nas Figuras 3.4(a) e 3.5(a), o que é uma contradição. Então p vê b senão teríamos um segundo touro

$\mathcal{B}(p, w'w''b, b')$ contendo p , como nas Figuras 3.4(b) e 3.5(b). Mas isto gera um segundo touro $\mathcal{B}(u, w'pb, b')$ contendo p , como representado nas Figuras 3.4(c) e 3.5(c). Então p vê u .

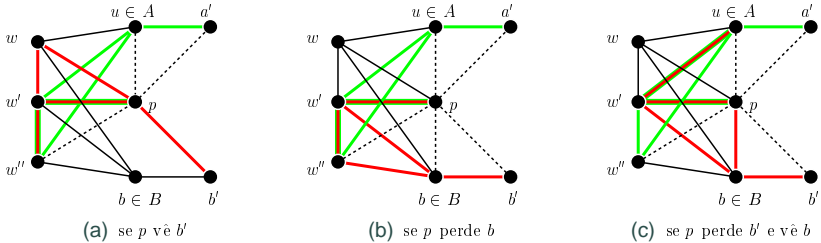


Figura 3.4: Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 1) supondo que p perde u e que p perde a' .

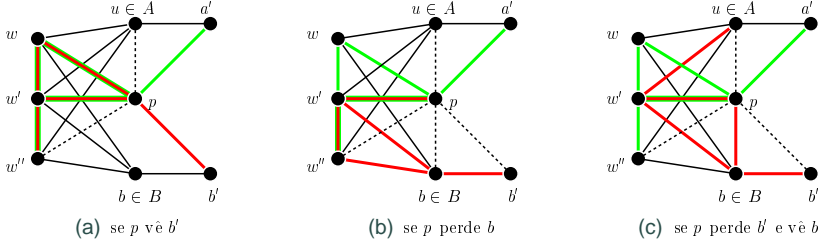


Figura 3.5: Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 1) supondo que p perde u e que p vê a' .

Caso 2: O vértice p vê exatamente um dos vértices w_1, w_2 e perde w_4 .

Então $\{p, w_1, w_2, u, w_4\}$ induz um touro, como nas Figuras 3.6(a) e 3.7(a). Então p vê b caso contrário $\{p, w_1, w_2, b, w_4\}$ induziria um segundo touro contendo p , como representados nas Figuras 3.6(a) e 3.7(a) o que é uma contradição. Então p vê a' , caso contrário $\{p, w_1, w_2, u, a'\}$ induziria um segundo touro contendo p , como nas Figuras 3.6(b) e 3.7(b). Mas então $\mathcal{B}(a', pw_gb, w_4)$, com $g \in \{1, 2\}$ tal que p vê w_g , é um segundo touro contendo p , como nas Figuras 3.6(c) e 3.7(c), uma contradição. Então p vê u . O caso em que p vê exatamente um dos w_3, w_4 e perde w_1 é simétrico.

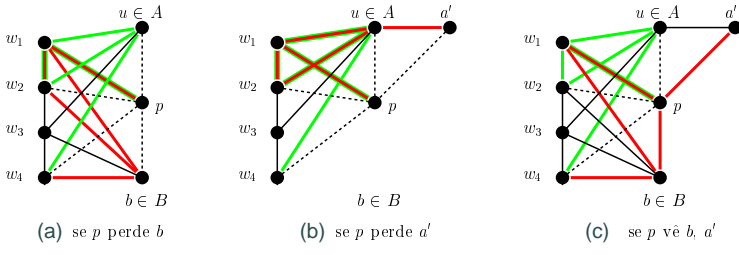


Figura 3.6: Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 2) supondo que p perde u ; e que p vê w_1 e perde w_2, w_4 .

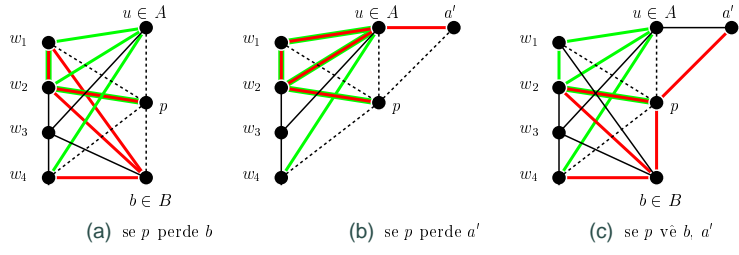


Figura 3.7: Touros gerados na Proposição 3.1.3 (caso 2) supondo que p perde u ; e que p vê w_2 e perde w_1, w_4 .

É fácil ver que se não temos nenhum dos casos acima então p vê w_1, w_4 e perde w_2, w_3 ; mas então $\{p, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ induz um C_5 , uma contradição. Então p vê u e conseqüentemente p vê todo vértice de $A \cup B$.

Agora provamos que p perde a', b' . Da proposição 3.1.2 existem dois vértices não- adjacentes $w_r, w_s \in W$ tal que p vê w_r e perde w_s . Suponhamos que p vê a' . Então $\mathcal{B}(a', pw_r, b, w_s)$ é um touro, como na Figura 3.8(a). Se p vê b' então $\mathcal{B}(b', pw_r, a, w_s)$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.8(a), enquanto que se p perde b' , então $\mathcal{B}(a', pw_r, b, b')$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.8(b), uma contradição em ambos os casos. Então p perde a' . De maneira análoga prova-se que p perde b' .

Falta provar que p vê todo vértice c de C . Temos que c vê a', b' .

Da proposição 3.1.2, existem vértices adjacentes $w_g, w_h \in W$ tal que

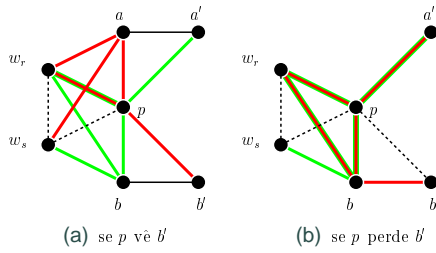


Figura 3.8: Touros gerados na Proposição 3.1.3 supondo que p vê a' .

p vê w_g e perde w_h . Então p vê c , caso contrário teríamos dois touros $\mathcal{B}(p, w_g w_h c, a')$ e $\mathcal{B}(p, w_g w_h c, b')$ contendo p , como na Figura 3.9, uma contradição. Logo p vê todo C . ■

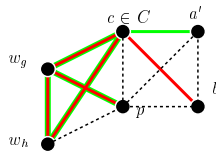


Figura 3.9: Touros gerados na Proposição 3.1.3 supondo que p perde c .

A partir da Figura 3.2 e das Proposições 3.1.1 e 3.1.3 temos a Figura 3.10.

O nosso objetivo é provar a existência de um conjunto homogêneo H que contenha W . Então, iniciamos a construção desse conjunto colocando W em H . Como os vértices de P vêem W parcialmente, P também deve estar contido em H , uma vez que os vértices que não pertencem a um conjunto homogêneo H devem ver todo H ou perder todo H . Logo $W \cup P \subset H$.

Como F perde todo W , definimos um conjunto X formado pelos vértices de F que vêem algum P , ou que vêem algum vértice já colocado em X . Os vértices de X são então forçados a estar em H e temos $W \cup P \cup X \subset H$.

A partir daí, como T vê todo W , definimos um conjunto Y formado pelos vértices de T que perdem algum vértice de $P \cup X$ ou que perdem algum

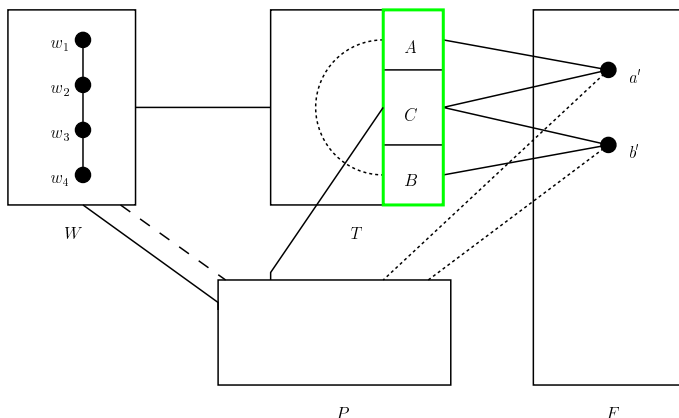


Figura 3.10: Relação entre os conjuntos da partição a partir da Figura 3.2 e das Proposições 3.1.1 e 3.1.3.

vértice já colocado em Y . Os vértices de Y são então forçados a estar em H e temos $W \cup P \cup X \cup Y \subset H$.

E, finalmente, como $F \setminus X$ perde todo $W \cup P \cup X$, definimos um conjunto Z formado pelos vértices de $F \setminus X$ que vêm algum Y , ou que vêm algum vértice já colocado em Z . Os vértices de Z são então forçados a estar em H e temos $W \cup P \cup X \cup Y \cup Z \subset H$.

A seguir definimos mais precisamente os conjuntos X , Y e Z , onde X e Z são subconjuntos de F , e Y é subconjunto de $T \setminus (A \cup B \cup C)$ como representado na Figura 3.11. Provamos mais tarde que $A \cup B \cup C$ vê todo $W \cup P \cup X \cup Y \cup Z$ e por essa razão, Y é definido como subconjunto de $T \setminus (A \cup B \cup C)$.

- $x \in X$, se $x \in F$ e existe em G um caminho $px_1 \cdots x_i$, com $p \in P$, $i \geq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_i \in F$ e $x = x_i$. Esse caminho é chamado de seqüência forçada para x .
- $y \in Y$, se $y \in T \setminus (A \cup B \cup C)$ e existe em \overline{G} um caminho $xy_1 \cdots y_j$, com $x \in P \cup X$, $j \geq 1$, $y_1, y_2, \dots, y_j \in T \setminus (A \cup B \cup C)$ e $y = y_j$. Observe que

se $x \in X$ então existe uma seqüência forçada $px_1 \cdots x_i$ para $x = x_i$. Neste caso a seqüência correspondente $px_1 \cdots x_i y_1 y_2 \cdots y_j$ é chamada de seqüência forçada para y . No caso de $x \in P$ a seqüência forçada para y será $xy_1 \cdots y_j$. Nos dois casos a seqüência forçada para y pode ser representada por $x_0 \cdots x_i y_1 \cdots y_j$ com $i \geq 0$ e $j \geq 1$.

- $z \in Z$, se $z \in F \setminus X$ e existe em G um caminho $yz_1 \cdots z_k$, com $y \in Y$, $k \geq 1$, $z_1, z_2, \dots, z_k \in F \setminus X$ e $z = z_k$. Observe que existe uma seqüência forçada $x_0 x_1 \cdots x_i y_1 y_2 \cdots y_j$ para $y = y_j$ com $i \geq 0$ e $j \geq 1$. A seqüência correspondente $x_0 x_1 \cdots x_i y_1 y_2 \cdots y_j z_1 \cdots z_k$ é chamada de seqüência forçada para z .

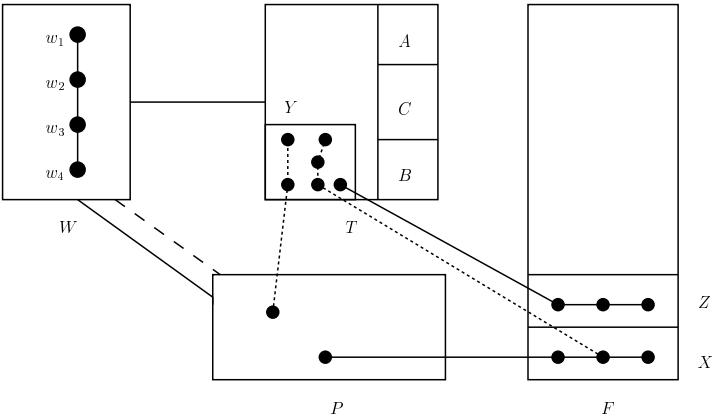


Figura 3.11: Representação dos subconjuntos X , Y e Z .

Observe que na Seção 2.1, para grafos Berge sem touros, o conjunto Y é definido somente a partir do conjunto P , e não existe o conjunto Z , caso contrário seriam formados touros.

Provamos mais tarde que $H = W \cup P \cup X \cup Y \cup Z$ é um conjunto homogêneo. Podemos observar que todos os vértices de $P \cup X \cup Y \cup Z$ estão conectados a W por um caminho em G .

Consideramos para cada $v \in X \cup Y \cup Z$ uma menor seqüência forçada, ou seja uma seqüência forçada para v com menor número de vértices. Tais seqüências têm propriedades interessantes.

Proposição 3.1.4 (1) *Se $x \in X$ e $px_1 \cdots x_i$ é uma menor seqüência forçada para $x = x_i$, conforme a definição acima, então essa seqüência é um caminho sem cordas de G .*

(2) *Se $y \in Y$ e $x_0x_1 \cdots x_iy_1y_2 \cdots y_j$ é uma menor seqüência forçada para $y = y_j$, conforme a definição acima, então $x_0x_1 \cdots x_i$ é um caminho sem cordas de G , $x_iy_1y_2 \cdots y_j$ é um caminho sem cordas de \overline{G} , e se $i \geq 1$, cada um dos vértices x_0, x_1, \dots, x_{i-1} vê cada um dos vértices y_1, \dots, y_j em G .*

(3) *Se $z \in Z$ e $px_1 \cdots x_iy_1 \cdots y_jz_1 \cdots z_k$ é uma menor seqüência forçada para $z = z_k$, conforme a definição acima, então $px_1 \cdots x_i$ é um caminho sem cordas de G , $x_iy_1 \cdots y_j$ é um caminho sem cordas de \overline{G} , $y_jz_1 \cdots z_k$ é um caminho sem cordas de G , cada um dos vértices p, x_1, \dots, x_{i-1} vê cada um dos vértices y_1, \dots, y_j em G , e cada um dos vértices $p, x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_{j-1}$ perde cada um dos vértices z_1, \dots, z_k em G .*

Prova: Segue das definições de X, Y, Z e de menor seqüência forçada. ■

Na Figura 3.12(a) temos uma menor seqüência forçada $x_0x_1 \cdots x_iy_1y_2 \cdots y_j$ fazendo $i = 1$ e $j = 3$. E na Figura 3.12(b) temos uma menor seqüência forçada $px_1 \cdots x_iy_1 \cdots y_jz_1 \cdots z_k$ fazendo $i = 2$, $j = 2$ e $k = 2$.

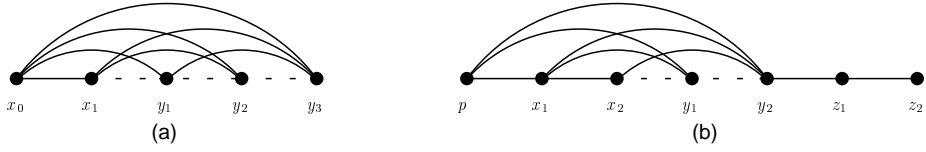


Figura 3.12: Adjacências entre os vértices de uma menor seqüência forçada.

Proposição 3.1.5 *Toda menor seqüência forçada para $y \in Y$ contém, no máximo, dois vértices de X .*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que existe uma menor seqüência forçada para $y = y_j$ dada por $S = px_1 \cdots x_i y_1 \cdots y_j$ com $j \geq 1$ e $i \geq 3$. Então S satisfaz as propriedades enunciadas na proposição 3.1.4 parte (2). Então para cada $i = 1, 2, 3, 4$ temos o touro $\mathcal{B}(w_i, y_1 x_{i-2} x_{i-1}, x_i)$ que contém y_1 , como na Figura 3.13, logo y_1 pertence a 4 touros, o que é absurdo. ■

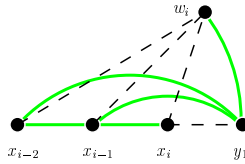


Figura 3.13: Touro gerado na Proposição 3.1.5 supondo que $i \geq 3$.

A Figura 3.14 ilustra as possibilidades de uma menor seqüência forçada para $y = y_3$.

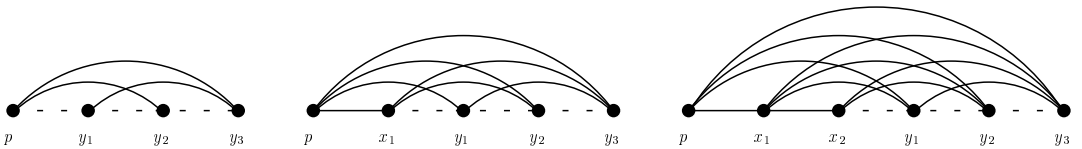


Figura 3.14: Possibilidades de uma menor seqüência forçada para $y = y_3$.

Proposição 3.1.6 *Toda menor seqüência forçada para $z \in Z$ não contém vértices de X .*

Prova: Suponhamos, por absurdo, que existe uma menor seqüência forçada para $z = z_k$ dada por $S = px_1 \cdots x_i y_1 \cdots y_j z_1 \cdots z_k$ com $i \geq 1$. Então S satisfaz as propriedades enunciadas na proposição 3.1.4 parte (3). Da proposição 3.1.2, existem vértices não-adjacentes $w_r, w_s \in W$ tal que p vê w_r e perde w_s . Além disso, temos que $i \leq 2$, da proposição precedente.

Suponhamos que $i = 1$. Então $\mathcal{B}(w_s, y_1 w_r p, x_1)$ é um touro, como na Figura 3.15(a). Se $j = 1$, então $\mathcal{B}(z_1, y_1 w_r p, x_1)$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.15(a); se $j = 2$ então $\mathcal{B}(z_1, y_2 x_1 p, y_1)$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.15(b); se $j \geq 3$, então $\mathcal{B}(z_1, y_j y_{j-2} p, y_{j-1})$ é um segundo touro contendo p , como no exemplo da Figura 3.15(c); o que é uma contradição em qualquer dos casos.

Logo $i = 2$ e $\mathcal{B}(w_s, y_1 p x_1, x_2)$ é um touro, como na Figura 3.16(a). Se $j = 1$, então $\mathcal{B}(z_1, y_1 p x_1, x_2)$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.16(a); se $j = 2$ então $\mathcal{B}(z_1, y_2 x_2 x_1, y_1)$ é um segundo touro contendo x_1 , como na Figura 3.16(b); se $j \geq 3$, então $\mathcal{B}(z_1, y_j y_{j-2} p, y_{j-1})$ é um segundo touro contendo p , como no exemplo da Figura 3.16(c); o que é uma contradição em qualquer dos casos. ■

Proposição 3.1.7 *Toda menor seqüência forçada para $z \in Z$ contém, no máximo, dois vértices de Y .*

Prova: Seja S uma menor seqüência forçada para $z = z_k$. Da proposição 3.1.6, S não contém vértices de X e então é dada por $S = py_1 \cdots y_j z_1 \cdots z_k$. Então S satisfaz as propriedades enunciadas na proposição 3.1.4 parte (3). Se $j \geq 3$ temos o touro $\mathcal{B}(z_1, y_j y_{j-2} w_i, y_{j-1})$ contendo z_1 , para cada $i = 1, 2, 3, 4$,

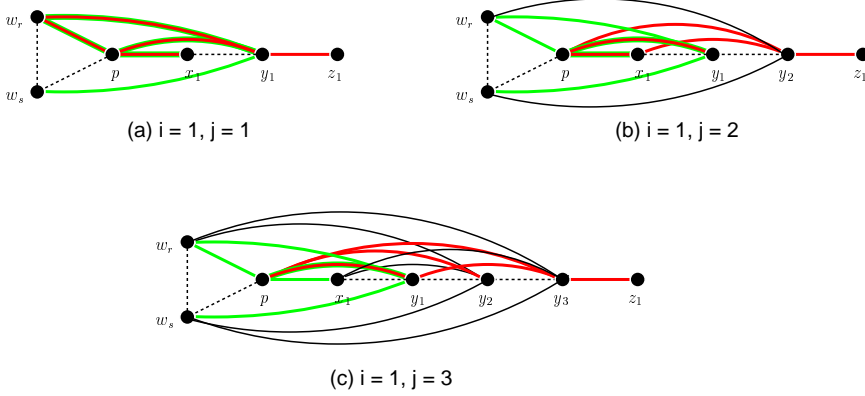


Figura 3.15: Touros gerados na Proposição 3.1.6 supondo que existe uma menor seqüência forçada para z contendo um vértice de X .

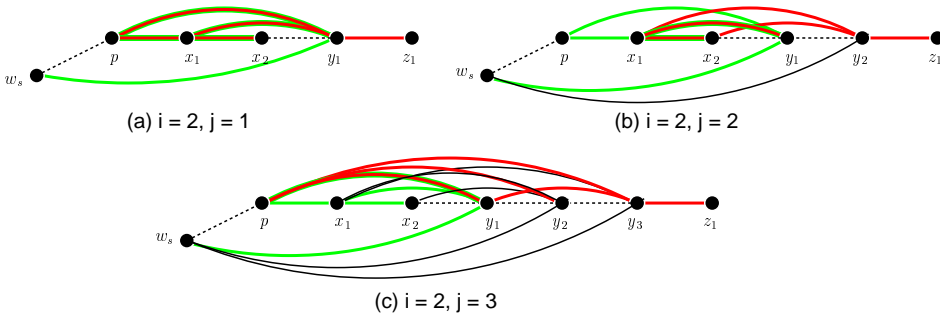


Figura 3.16: Touros gerados na Proposição 3.1.6 supondo que existe uma menor seqüência forçada para z contendo dois vértices de X .

como na Figura 3.17. Logo z_1 pertence a quatro touros, o que é absurdo, e então $j \leq 2$. ■

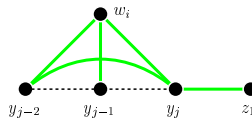


Figura 3.17: Touro gerado na Proposição 3.1.7 supondo que existe uma menor seqüência forçada para z contendo três vértices de Y .

A Figura 3.18 ilustra as possibilidades de uma menor seqüência forçada para $z = z_3$.



Figura 3.18: Possibilidades de uma menor seqüência forçada para $z = z_3$.

Seja H o conjunto de vértices pertencentes a componente conexa de $G \setminus (T \setminus Y)$ que contém W . Provamos a seguir que $H = W \cup P \cup X \cup Y \cup Z$ e que H é um conjunto homogêneo.

Proposição 3.1.8 $H = W \cup P \cup X \cup Y \cup Z$.

Prova: Seja $H' = W \cup P \cup X \cup Y \cup Z$. Inicialmente, provamos que $H' \subseteq H$. É claro que $W \subseteq H$, da definição de H . Por outro lado, como todo vértice de $P \cup X \cup Y$ está conectado a W , por um caminho em $G \setminus (T \setminus Y)$, então $P \cup X \cup Y \subseteq H$. Daí e como todo vértice de Z está conectado a Y por um caminho em $G \setminus (T \setminus Y)$, então $Z \subseteq H$. Logo $H' \subseteq H$.

Inversamente, seja $h \in H$. Temos que V é particionado em quatro conjuntos W, P, T, F . Se $h \in W \cup P$ então $h \in H'$. Se $h \in T$, então da definição de H , temos $h \in Y$. Se $h \in F$, então da definição de H , existe um caminho em $G \setminus (T \setminus Y)$ de h para W . Neste caminho, seja v o primeiro vértice, começando de h , que não pertence a F . Então v deve estar em $P \cup Y$. Se $v \in P$ então $h \in X$. Se $v \in Y$ então $h \in Z$. Logo $H \subseteq H'$. ■

Falta demonstrar que H é um conjunto homogêneo, ou seja, que cada vértice de $V \setminus H$ vê todo H ou perde todo H , (veja a Figura 3.19). Os vértices de $F \setminus (X \cup Z)$ perdem todo H , pela definição destes conjuntos. Os vértices de $A \cup B \cup C$ vêem todo W , pela definição desses conjuntos, e vêem todo P , da Proposição 3.1.3. As Proposições 3.1.9, 3.1.10, 3.1.11 e 3.1.12

abaixo provam separadamente que $T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$ vê todo H ; $A \cup B \cup C$ vê todo X ; $A \cup B \cup C$ vê todo Y e que $A \cup B \cup C$ vê todo Z , respectivamente. Logo os vértices de $T \setminus Y$ vêem todo H .

As demonstrações, nas citadas proposições, de que os conjuntos X , Y , Z perdem a' , b' não são importantes apenas para a análise das adjacências entre os vértices, mas também para a indução usada nas provas.

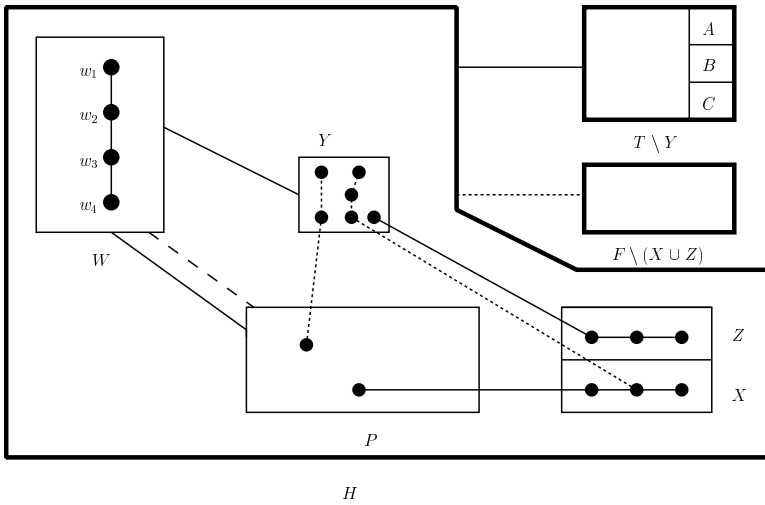


Figura 3.19: Conjunto homogêneo H contendo W .

Proposição 3.1.9 *Todo vértice de H vê todo vértice de $T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$.*

Prova: Seja $t \in T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$. Então, da definição de T , t vê todo W . Além disso, t vê todo $P \cup X \cup Y$, caso contrário, t estaria em Y .

Suponhamos, por absurdo, que t perde um vértice $z \in Z$. Existe uma menor seqüência forçada S para z , e das proposições 3.1.6 e 3.1.7 temos que $S = py_1 \cdots y_j z_1 \cdots z_k$ com $z = z_k$ e $j \in \{1, 2\}$. Sejam w_g, w_h dois vértices adjacentes de W tal que p vê w_g e perde w_h .

Suponhamos que $j = 1$. Então temos um primeiro touro $\mathcal{B}(p, w_g w_h y_1, z_1)$, como na Figura 3.20(a). Se $k = 1$, então $\mathcal{B}(p, t w_h y_1, z_1)$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.20(a); se $k = 2$, então $\mathcal{B}(p, t y_1 z_1, z_2)$ é um segundo touro contendo p , como na Figura 3.20(b); se $k \geq 3$, então $\mathcal{B}(p, t z_{k-2} z_{k-1}, z_k)$ é um segundo touro contendo p , como no exemplo da Figura 3.20(c); uma contradição em qualquer dos casos.

Então $j = 2$ e temos um primeiro touro $\mathcal{B}(y_1, w_g p y_2, z_1)$, como na Figura 3.21(a). Se $k = 1$, então $\mathcal{B}(y_1, t p y_2, z_1)$ é um segundo touro contendo y_1 , como na Figura 3.21(a); se $k = 2$, então $\mathcal{B}(y_1, t y_2 z_1, z_2)$ é um segundo touro contendo y_1 , como na Figura 3.21(b); se $k \geq 3$, então $\mathcal{B}(y_1, t z_{k-2} z_{k-1}, z_k)$ é um segundo touro contendo y_1 , como no exemplo da Figura 3.21(c); uma contradição em qualquer dos casos, o que prova a proposição. ■

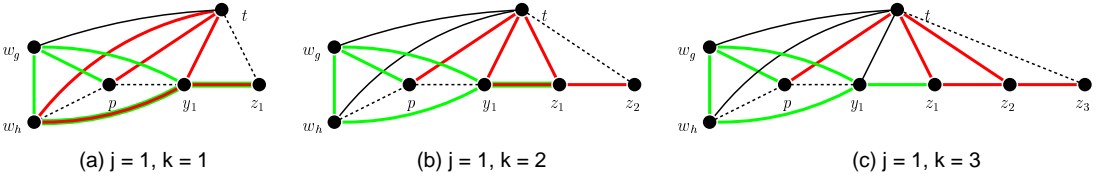


Figura 3.20: Touros gerados na Proposição 3.1.9 supondo que $t \in T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$ perde algum $z \in Z$, e que a menor seqüência forçada para z tem um vértice de Y .

Proposição 3.1.10 *Todo vértice de X vê todo vértice de $A \cup B \cup C$ e perde a', b' .*

Prova: Seja $x \in X$. Pela definição de X , existe uma menor seqüência forçada $S = p x_1 \cdots x_i$ para $x = x_i$, com $i \geq 1$, $p \in P$, e $x_1, \dots, x_{i-1} \in X$. Então S satisfaz as propriedades enunciadas na proposição 3.1.4 parte (1), isto é, S é um caminho sem cordas. Sejam w_r, w_s vértices não-adjacentes de W tal que p vê w_r e perde w_s .

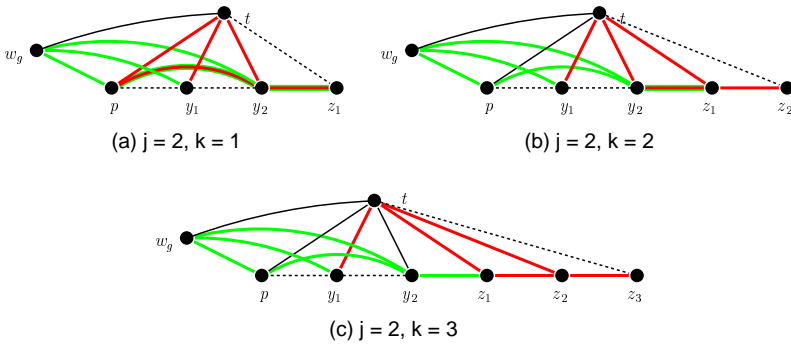


Figura 3.21: Touros gerados na Proposição 3.1.9 supondo que $t \in T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$ perde algum $z \in Z$, e que a menor seqüência forçada para z tem dois vértices de Y .

A prova é por indução em i .

Seja $i = 1$. Seja $u \in A \cup C$, e suponhamos, por absurdo, que $x = x_1$ perde u . Temos, então, um primeiro touro $\mathcal{B}(w_s, uw_r p, x)$, como na Figura 3.22(a). Então x vê b , caso contrário $\mathcal{B}(w_s, bw_r p, x)$ seria um segundo touro contendo x , como na Figura 3.22(a). Então x perde a' , caso contrário $\mathcal{B}(a', xpb, w_s)$ seria um segundo touro contendo x , como na Figura 3.22(b). Mas, então $\mathcal{B}(a', ww_r p, x)$ é um segundo touro contendo x , como na Figura 3.22(c). Logo x vê todo vértice de $A \cup C$. Analogamente, x vê todo vértice de B .

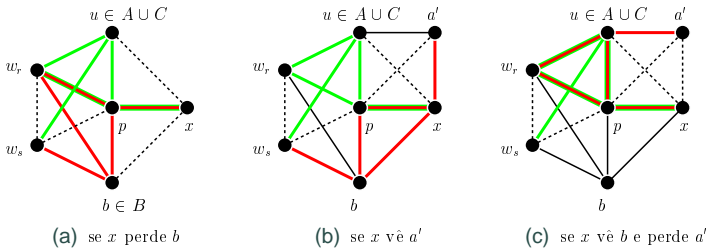


Figura 3.22: Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que x perde $u \in A \cup C$.

Suponhamos, por absurdo, que $x = x_1$ vê a' . Então temos um primeiro touro $\mathcal{B}(a', xpb, w_s)$, como na Figura 3.23(a). Então x perde b' , caso con-

trário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(b', xpa, w_s)$ contendo x , como na Figura 3.23(a). Mas, então $\mathcal{B}(b', bpx, a')$ é um segundo touro contendo x , como na Figura 3.23(b). Então x perde a' . De maneira análoga prova-se que x perde b' .

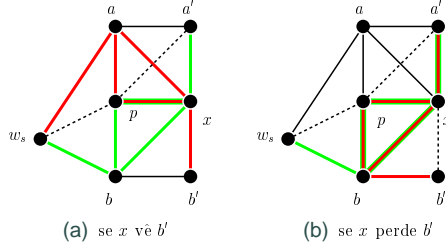


Figura 3.23: Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que x vê a' .

Seja $i \geq 2$. Então os vértices x_{i-1} e x_{i-2} estão definidos, com $x_{i-1} \in X$ e $x_{i-2} \in P \cup X$. Seja $u \in A \cup C$, e suponhamos, por absurdo, que $x = x_i$ perde u .

Da hipótese de indução u vê x_{i-1} e x_{i-2} e temos um primeiro touro $\mathcal{B}(x, x_{i-1}x_{i-2}u, w_s)$, como na Figura 3.24(a). Então x vê b , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(x, x_{i-1}x_{i-2}b, w_s)$ contendo x , como na Figura 3.24(a). Então x perde a' , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', xx_{i-1}b, w_s)$ contendo x , como na Figura 3.24(b). Mas então $\mathcal{B}(x, x_{i-1}x_{i-2}u, a')$ é um segundo touro contendo x , como na Figura 3.24(c). Então x vê todo $u \in A \cup C$. Analogamente, x vê todo vértice de B .

Suponhamos, por absurdo, que $x = x_i$ vê a' . Da hipótese de indução x_{i-1} vê b e perde a' . Então $\mathcal{B}(a', xx_{i-1}b, w_r)$ e $\mathcal{B}(a', xx_{i-1}b, w_s)$ são dois touros com vértices comuns, como na Figura 3.25, uma contradição. Logo, x perde a' . De maneira análoga prova-se que x perde b' . ■

Proposição 3.1.11 *Todo vértice de Y vê todo vértice de $A \cup B \cup C$ e perde a', b' .*

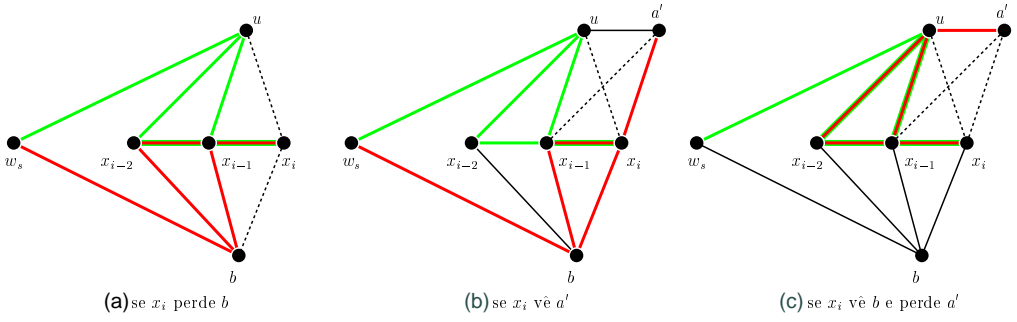


Figura 3.24: Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que $x = x_i$ perde $u \in A \cup C$.

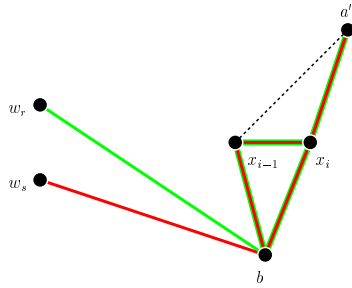


Figura 3.25: Touros gerados na Proposição 3.1.10 supondo que $x = x_i$ vê a' .

Prova: Seja $y \in Y$. Da definição de Y , existe uma menor seqüência forçada $S = x_0x_1 \cdots x_iy_1y_2 \cdots y_j$ para $y = y_j$, com $j \geq 1$, e da proposição 3.1.5 temos que $i \leq 2$. Como $Y \subseteq T \setminus (A \cup B \cup C)$, y perde a' e b' .

Seja $u \in A \cup C$. Se $i = 0$ então $x_i \in P$ e x_i vê um vértice $w \in W$. Se $i > 0$, seja $w = x_{i-1}$. Das proposições 3.1.3 e 3.1.10, x_i e w vêem os vértices u , b e perdem a' , b' .

Provamos por indução em j que $y = y_j$ vê u .

Seja $j = 1$. Suponhamos, por absurdo, que $y = y_1$ perde u . Temos um primeiro touro $\mathcal{B}(a', ux_iw, y)$, como na Figura 3.26(a). Então y vê b , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(b', bx_iw, y)$ contendo y , como na Figura 3.26(a). Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(b', byw, u)$ contendo

y , como na Figura 3.26(b). Então $y = y_1$ vê todo $u \in A \cup C$. De maneira análoga prova-se que $y = y_1$ vê todo vértice de B .

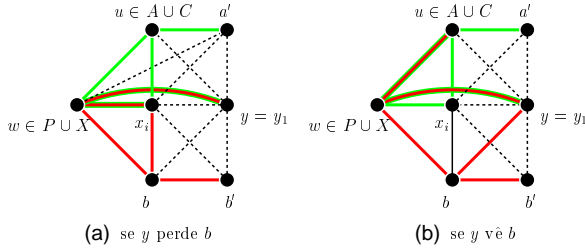


Figura 3.26: Touros gerados na Proposição 3.1.11 supondo que $y = y_1$ perde $u \in A \cup C$.

Seja $j \geq 2$. Da hipótese de indução, y_{j-1} vê u e b . Suponhamos, por absurdo, que $y = y_j$ perde u . Então, temos um primeiro touro $\mathcal{B}(a', wy_{j-1}w, y)$, como na Figura 3.27(a). Então y vê b , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(b', by_{j-1}w, y)$ contendo y , como na Figura 3.27(a). Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(b', byw, u)$ contendo y , como na Figura 3.27(b). Então y vê todo $u \in A \cup C$. De maneira análoga prova-se que y vê todo vértice de B . ■

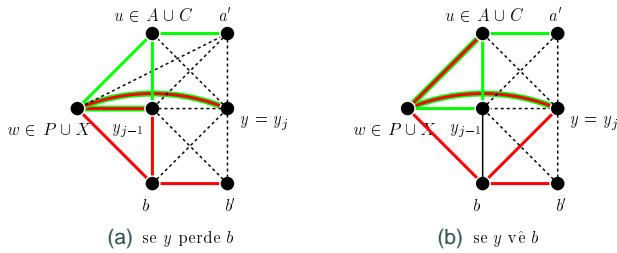


Figura 3.27: Touros gerados na Proposição 3.1.11 supondo que $y = y_j$ perde $u \in A \cup C$.

Proposição 3.1.12 *Todo vértice de Z vê todo vértice de $A \cup B \cup C$ e perde a', b' .*

Prova: Seja $z \in Z$. Das proposições 3.1.6 e 3.1.7, existe uma menor seqüência forçada $S = py_1 \cdots y_j z_1 \cdots z_k$ para $z = z_k$, com $j \in \{1, 2\}$, tal que S satisfaz as propriedades da proposição 3.1.4 parte (3).

Seja $u \in A \cup B \cup C$. Então u vê todo W e, de proposições anteriores, u vê todo p, y_1, \dots, y_j . Da proposição 3.1.2, existem vértices adjacentes $w_g, w_h \in W$ tal que p vê w_g e perde w_h .

Provamos, por indução em k , que z vê u e perde a', b' .

Seja $k = 1$.

Se $j = 1$, temos um primeiro touro $\mathcal{B}(z, y_1 w_h w_g, p)$, como na Figura 3.28(a). Então z vê u , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(z, y_1 w_h u, p)$ contendo z , como na Figura 3.28(a). Então z vê todo $u \in A \cup B \cup C$. Por outro lado, z perde a' , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', z y_1 b, p)$ contendo z , como na Figura 3.28(b). Analogamente, z perde b' .

Se $j = 2$, temos um primeiro touro $\mathcal{B}(z, y_2 p w_g, y_1)$, como na Figura 3.29(a). Então z vê u , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(z, y_2 p u, y_1)$ contendo z , como na Figura 3.29(a). Então z vê todo $u \in A \cup B \cup C$. Por outro lado, z perde a' , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', z y_2 b, y_1)$ contendo z , como na Figura 3.29(b). Analogamente, z perde b' . Então a proposição está provada para $k = 1$.

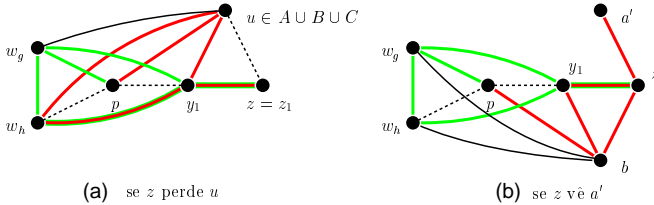


Figura 3.28: Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_1$ supondo que a menor seqüência forçada para z tem um vértice de Y .

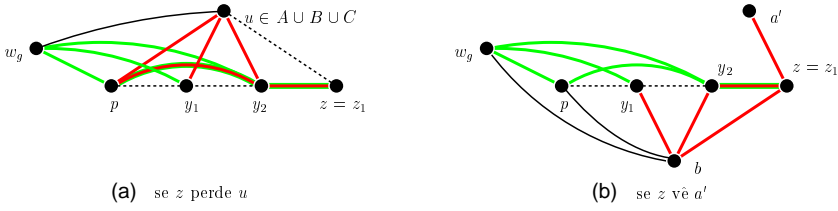


Figura 3.29: Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_1$ supondo que a menor seqüência forçada para z tem dois vértices de Y .

Seja $k \geq 2$. Da hipótese de indução, u vê z_1, \dots, z_{k-1} .

Se $j = 1$, temos um primeiro touro $\mathcal{B}(p, w_g w_h y_1, z_1)$, como na Figura 3.30. Então z vê u , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(p, u z' z_{k-1}, z)$ contendo z , com $z' = y_1$ se $k = 2$, ou $z' = z_{k-2}$ se $k \geq 3$, como na Figura 3.30.

Se $j = 2$ temos um primeiro touro $\mathcal{B}(z_1, y_2 p w_g, y_1)$, como na Figura 3.31. Então z vê u , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(z, z_{k-1} z' u, y_1)$ contendo y_1 , com $z' = y_2$ se $k = 2$, ou $z' = z_{k-2}$ se $k \geq 3$, como na Figura 3.31. Então z vê todo $u \in A \cup B \cup C$.

Nos dois casos ($j = 1$ ou 2) z perde a' , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', z z_{k-1} b, p)$ contendo p , como nas Figuras 3.32(a), para $j = 1$, e 3.32(b), para $j = 2$. Analogamente, z perde b' . ■

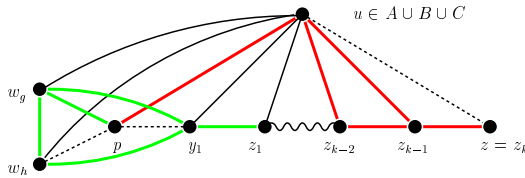


Figura 3.30: Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_k$ supondo que z perde u , e que a menor seqüência forçada para z tem um vértice de Y .

Proposição 3.1.13 H é um conjunto homogêneo.

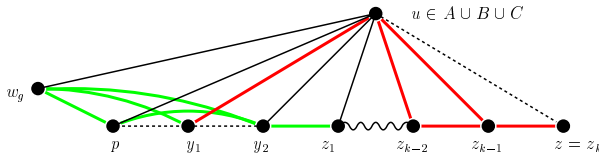


Figura 3.31: Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_k$ supondo que z perde u , e que a menor seqüência forçada para z tem dois vértices de Y .

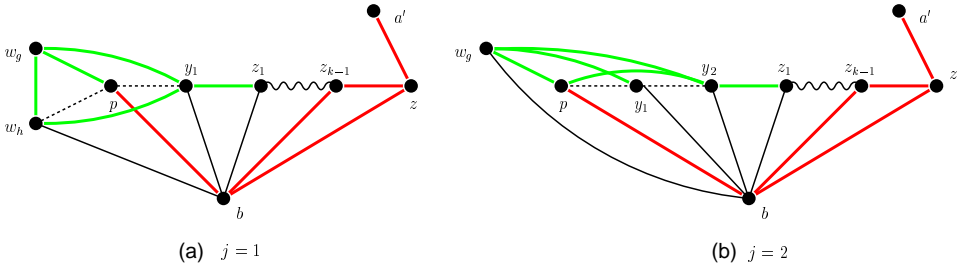


Figura 3.32: Touros gerados na Proposição 3.1.12 para $z = z_k$ supondo que z vê a' , e que a menor seqüência forçada para z tem um ou dois vértices de Y .

Prova: Como H é uma componente de $G \setminus (T \setminus Y)$ basta provar que todo vértice $v \in H$ vê todo vértice $t \in T \setminus Y$. A proposição 3.1.9 estabelece esta propriedade para $t \in T \setminus (A \cup B \cup C \cup Y)$. Suponhamos $t \in A \cup B \cup C$. Então se $v \in W$ a propriedade segue da definição de A, B, C ; e se $v \in P, X, Y, Z$ a propriedade segue respectivamente das proposições 3.1.3, 3.1.10, 3.1.11 e 3.1.12. ■

Com isso temos a prova do lema 3.1 e o diagrama da Figura 3.33. ■

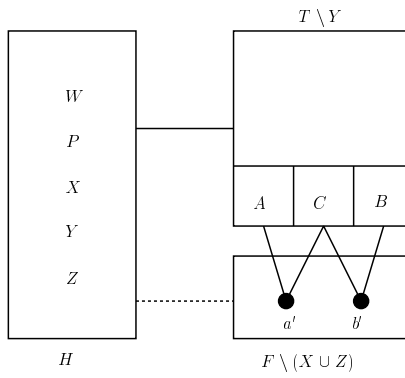


Figura 3.33: Partição de um grafo Berge touro-redutível a partir do conjunto homogêneo H .

Capítulo 4

Duplas Pares em Grafos Berge Touro-redutíveis

Este capítulo tem por objetivo provar que todo grafo Berge touro-redutível é quase-paridade. Para isso usamos o Lema da Vizinhança, que analisa o comportamento de vértices vizinhos a um buraco par de tamanho maior ou igual a 6, e o Lema da Roda, que garante a existência de um conjunto homogêneo que contém o buraco da roda, demonstrados em [7] para grafos Berge touro-redutíveis e citados no Capítulo 2, Seção 2.2. Usamos também alguns lemas demonstrados nesta tese, como o Lema da Vassoura Dupla provado no Capítulo 3; o Lema 4.3 que analisa a vizinhança de caminhos longos ímpares, em grafos Berge touro-redutíveis; e o Lema 4.4, que sob determinadas condições, garante a existência de vassoura dupla em um grafo Berge touro-redutível ou em seu complementar.

A seguir damos o enunciado do Lema da Vizinhança e do Lema da Roda para grafos Berge touro-redutíveis, que estão no Capítulo 2.

Lema 4.1 (Lema da Vizinhança para Grafos Berge Touro-redutíveis [7]) *Sejam G um grafo Berge touro-redutível e C um menor buraco par em G , com seus vértices coloridos alternadamente de vermelho e*

verde. Seja v um vértice qualquer de $V(G) \setminus V(C)$, tal que $N(v) \cap V(C) \neq \emptyset$. Então v satisfaz exatamente uma das seguintes afirmações: (ver Figura 4.1)

- (i) $N(v) \cap V(C) = V(C)$, isto é, C e v formam uma roda;
- (ii) $N(v) \cap V(C)$ consiste de todos os vértices vermelhos e nenhum vértice verde, ou todos os vértices verdes e nenhum vermelho;
- (iii) $N(v) \cap V(C)$ consiste de um, dois ou três vértices consecutivos de C ;
- (iv) $N(v) \cap V(C)$ consiste de dois vértices a distância 2 em C ;
- (v) C tem comprimento 6 e $N(v) \cap V(C)$ consiste de quatro vértices tal que exatamente três deles são consecutivos.

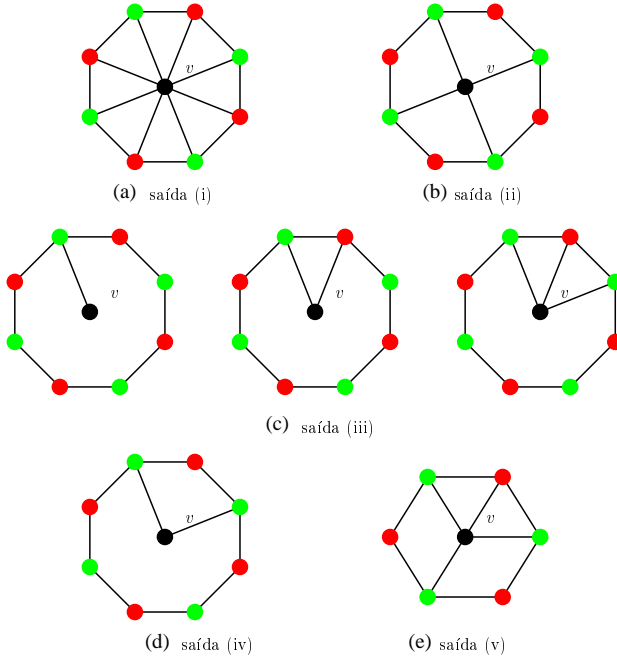


Figura 4.1: Possibilidades de interseção de um vértice v com um buraco par em um grafo Berge touro-reduzível.

Lema 4.2 (Lema da Roda para Grafos Berge Touro-redutíveis [7])

Se um grafo Berge touro-redutível tem uma roda, então tem um conjunto homogêneo que contém o buraco da roda.

No Lema 2.4 para grafos Berge sem touros, temos que se um vértice vê os dois extremos de um caminho longo ímpar, então vê todos os vértices do caminho. O lema a seguir é uma generalização para grafos Berge touro-redutíveis. Observe que as saídas (ii) e (iii) não são possíveis para grafos Berge sem touros.

Lema 4.3 (Lema do Caminho Longo Ímpar para Grafos Berge Touro-redutíveis) *Sejam G um grafo Berge touro-redutível e $P = u_0u_1 \dots u_r$ um caminho longo ímpar de G . Se c é um vértice de $V(G) \setminus V(P)$ que vê u_0 e u_r , então temos uma das seguintes afirmações: (ver Figura 4.2)*

- (i) $N(c) \cap V(P) = V(P)$;
- (ii) $N(c) \cap V(P) = \{u_0, u_1, u_r\}$ ou $\{u_0, u_1, u_3, u_r\}$, e neste caso existe um touro $\mathcal{B}(u_r, cu_0u_1, u_2)$;
- (iii) $r = 5$ e $N(c) \cap V(P) = \{u_0, u_1, u_2, u_3, u_5\}$, e neste caso existe um touro $\mathcal{B}(u_0, cu_2u_3, u_4)$.

Prova: Como G não tem buracos ímpares, c tem dois vizinhos consecutivos em P . Suponhamos que a afirmação (i) não é verdadeira. Então por simetria, existe um índice $i \in \{0, 1, \dots, r\}$ tal que c vê u_i, u_{i+1} e perde u_{i+2} , donde se conclui que $i \leq r - 3$.

Suponhamos que i é ímpar. Então $i \leq r - 4$ e temos um primeiro touro $\mathcal{B}(u_r, cu_iu_{i+1}, u_{i+2})$, como na Figura 4.3. Então $i = 1$, caso contrário teríamos

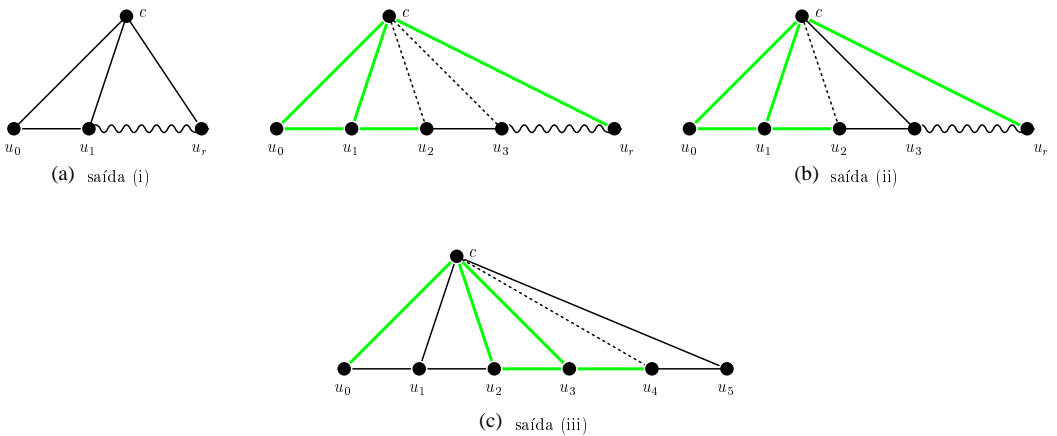


Figura 4.2: Possibilidades de interseção de um vértice c com um caminho longo ímpar em grafos Berge touro-redutíveis.

um segundo touro $\mathcal{B}(u_0, cu_i u_{i+1}, u_{i+2})$ contendo o vértice c , como na Figura 4.3. Então c perde todo u_j com $5 \leq j \leq r - 1$, caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(u_j, cu_1 u_2, u_3)$ contendo c , como na Figura 4.4. Então c vê u_4 , caso contrário $\{c, u_2, u_3, u_4, \dots, u_r\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.5. Então $r < 7$, caso contrário $\{c, u_4, u_5, \dots, u_r\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.6. Então $r = 5$, e temos um segundo touro $\mathcal{B}(u_0, cu_5 u_4, u_3)$ contendo c , como na Figura 4.7. Concluimos então que i é par.

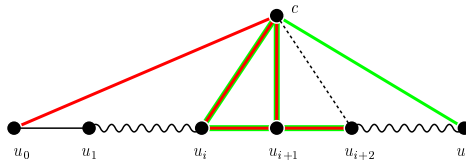


Figura 4.3: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $1 < i \leq r - 4$.

Suponhamos $i = 0$. Então temos um primeiro touro $\mathcal{B}(u_r, cu_0 u_1, u_2)$, como na Figura 4.8; e então c perde todo u_j para $4 \leq j \leq r - 1$, caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(u_j, cu_0 u_1, u_2)$ contendo c , como na

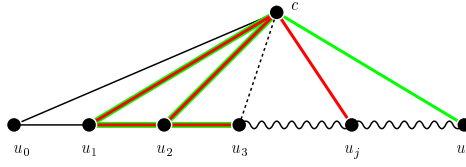


Figura 4.4: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que c vê u_j , para $5 \leq j \leq r - 1$.

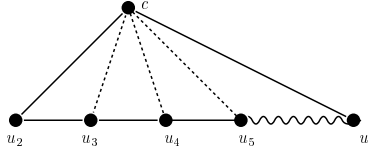


Figura 4.5: Buraco ímpar gerado no Lema 4.3 supondo que c perde u_4 .

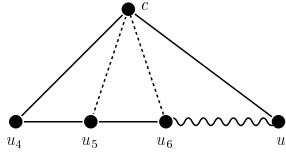


Figura 4.6: Buraco ímpar gerado no Lema 4.3 supondo que $r \geq 7$.

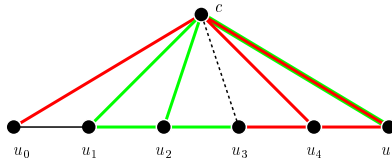


Figura 4.7: Touros gerados no Lema 4.3 quando $r = 5$.

Figura 4.8. Neste caso a afirmação (ii) é verdadeira.

Suponhamos que i é par e $i \geq 2$. Então temos um primeiro touro $\mathcal{B}(u_0, cu_i u_{i+1}, u_{i+2})$, como na Figura 4.9. Então $i = r - 3$, caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(u_r, cu_i u_{i+1}, u_{i+2})$ contendo c , como na Figura 4.9. Então c vê u_{r-4} , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(u_{r-4}, u_{r-3} c u_{r-2}, u_{r-1})$ contendo c , como na Figura 4.10. Se $r = 5$, a afir-

mação (iii) é verdadeira. Se $r \geq 7$, então c vê u_{r-5} , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(u_{r-5}, u_{r-4}u_{r-3}c, u_r)$ contendo c , como na Figura 4.11. Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(u_{r-5}, cu_{r-3}u_{r-2}, u_{r-1})$ contendo c , como na Figura 4.12, o que é uma contradição. Logo, a afirmação (i) é verdadeira e temos o lema. ■

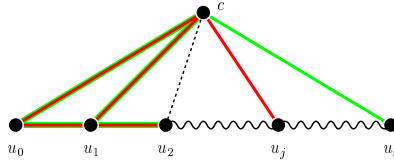


Figura 4.8: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $i = 0$, e que c vê u_j .

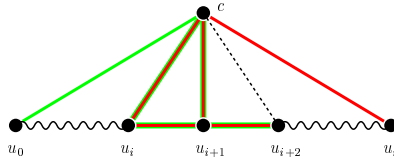


Figura 4.9: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que i é par e $2 \leq i < r - 3$.

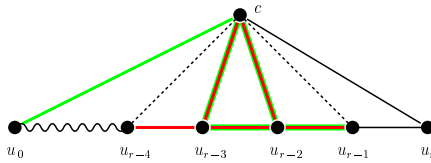


Figura 4.10: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $i = r - 3$, e que c perde u_{r-4} .

Lema 4.4 *Sejam G um grafo Berge touro-reduzível e $P = u_0u_1 \dots u_r$ um caminho longo ímpar de G . Sejam a, b, a', b' vértices de $V(G) \setminus$*

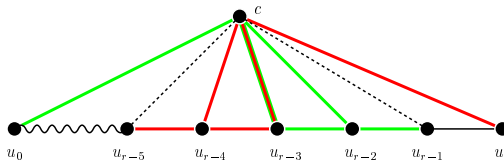


Figura 4.11: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $r \geq 7$, e que c perde u_{r-5} .

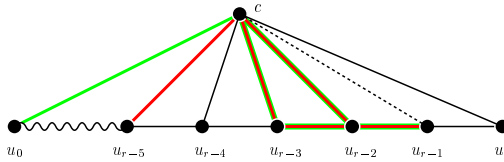


Figura 4.12: Touros gerados no Lema 4.3 supondo que $r \geq 7$, e que c vê u_{r-5} .

$V(P)$ tal que aa' e bb' são arestas, ab' e $a'b$ são não-arestas, a, b vêm u_0, u_r , e a', b' perdem u_0, u_r . Então G ou \bar{G} contém uma vassoura dupla. (ver Figura 4.13)

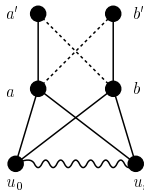


Figura 4.13: Hipótese do Lema 4.4 sobre as adjacências entre os vértices u_0, u_r, a, b, a', b' .

Prova: Seja $P = u_0, u_1, \dots, u_r$, com $r \geq 5$ ímpar. Temos que se ab é uma aresta então $a'b'$ é uma aresta, caso contrário teríamos dois touros com vértices comuns $\mathcal{B}(a', au_0b, b')$ e $\mathcal{B}(a', au_r, b, b')$, como na Figura 4.14. Inversamente, se $a'b'$ é uma aresta então ab é uma aresta, caso contrário $\{a', a, u_0, b, b'\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.15.

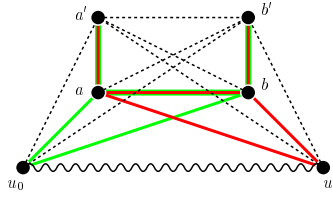


Figura 4.14: Touros gerados no Lema 4.4 supondo que ab é aresta, e $a'b'$ é não-aresta.

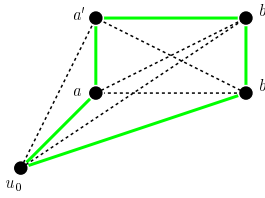


Figura 4.15: C_5 gerado no Lema 4.4 supondo que $a'b'$ é aresta, e ab é não-aresta.

Podemos aplicar o lema 4.3 ao caminho P e a cada um dos vértices a, b . Suponhamos que temos a saída (ii) para um dos vértices a, b , digamos para a (sem perda de generalidade). Então existe um touro contendo u_0 . Logo não temos as saídas (ii) ou (iii) para b , caso contrário, teríamos um segundo touro contendo u_0 . Logo temos a saída (i) para o vértice b . De maneira análoga, prova-se que se temos a saída (iii) para a , então teremos a saída (i) para b . Logo devemos ter a saída (i) para pelo menos um dos vértices a, b , digamos para b , e neste caso b vê todos os vértices de P .

Suponhamos que temos a saída (ii) para a . Então temos um primeiro touro $\mathcal{B}(u_r, au_0u_1, u_2)$, como na Figura 4.16(a). Então a' perde u_1 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_1u_0b, u_r)$ contendo u_1 , como na Figura 4.16(a). Então a' perde u_2 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_2u_1b, u_r)$ contendo u_1 , como na Figura 4.16(b). Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(a', au_0u_1, u_2)$ contendo u_1 , como na Figura 4.16(c). Logo

não é possível ter a saída (ii) para a .

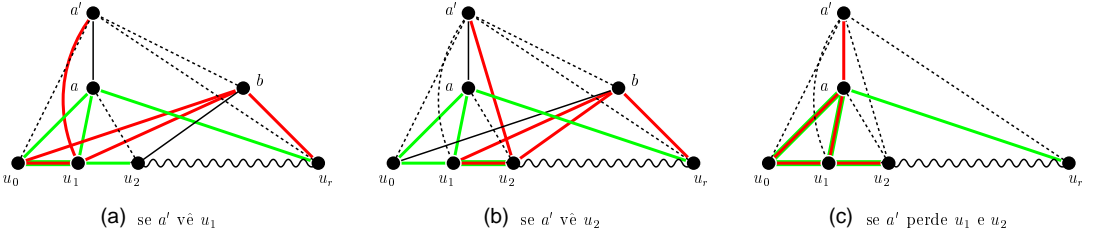


Figura 4.16: Touros gerados no Lema 4.4 supondo válida a saída (ii) do Lema 4.3 para o vértice a .

Suponhamos que temos a saída (iii) para a . Então temos um primeiro touro $\mathcal{B}(u_0, au_2u_3, u_4)$, como na Figura 4.17(a). Então a' perde u_4 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_4u_5b, u_0)$ contendo u_0 , como na Figura 4.17(a). Então a' perde u_3 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_3u_4b, u_0)$ contendo u_0 , como na Figura 4.17(b). Então a' perde u_2 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_2u_3b, u_0)$ contendo u_0 , como na Figura 4.17(c). Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(a', au_2u_3, u_4)$ contendo a' , como na Figura 4.17(d). Logo não é possível ter a saída (iii) para a . Então temos a saída (i) para o vértice a e, neste caso, a vê todos os vértices de P , o que estabelece a simetria de a e b .

Suponhamos que algum u_i vê a' ou b' ; por simetria, e como u_0, u_r perdem a', b' podemos assumir que $1 \leq i \leq \frac{(r-1)}{2}$, que u_i vê a' e que u_{i-1} perde a' . Então temos um touro $\mathcal{B}(a', u_iu_{i-1}b, u_r)$, como na Figura 4.18(a). Então a' vê u_{r-1} , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_iu_{i-1}b, u_{r-1})$ contendo b , como na Figura 4.18(a). Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(a', u_{r-1}u_rb, u_{i-1})$ contendo b , como na Figura 4.18(b), o que é uma contradição. Logo a', b' perdem todos os vértices u_1, u_2, \dots, u_{r-1} . Se ab e $a'b'$ são não-arestas então $\{u_0, u_1, u_2, u_3, a, b, a', b'\}$ induz uma vassoura dupla em G , como na Figura 4.19(a). Por outro lado, se ab e $a'b'$ são arestas o mesmo

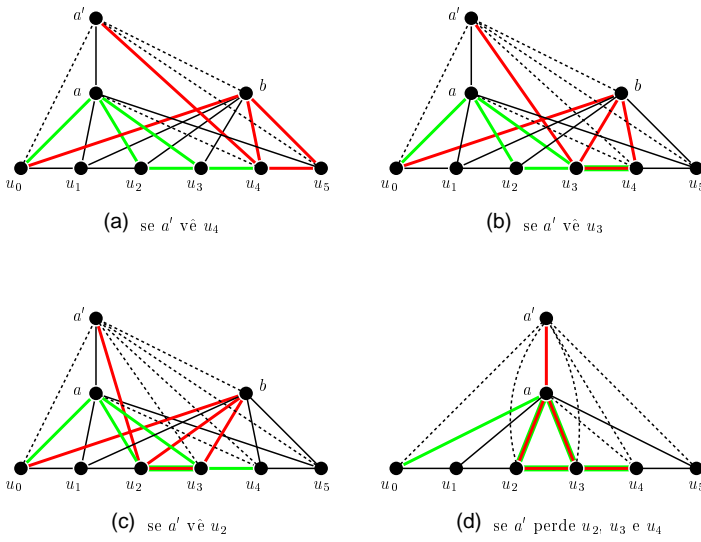


Figura 4.17: Touros gerados no Lema 4.4 supondo válida a saída (iii) do Lema 4.3 para o vértice a .

subconjunto induz o complementar de uma vassoura dupla em G , como na Figura 4.19(b), e neste caso, temos uma vassoura dupla em \overline{G} , provando o lema. ■

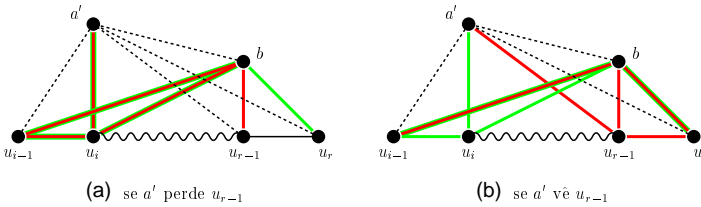


Figura 4.18: Touros gerados no Lema 4.4 supondo que a' vê u_i e perde u_{i-1} .

Um grafo é *fracamente triangulado* se G não tem buracos nem anti-buracos, o que é equivalente a dizer que G e \overline{G} não tem buracos. Hayward, Hoàng e Maffray [11] provaram que se G é um grafo fracamente triangulado e não é clique, então G tem um 2-par. Dois vértices u, v formam um *2-par*

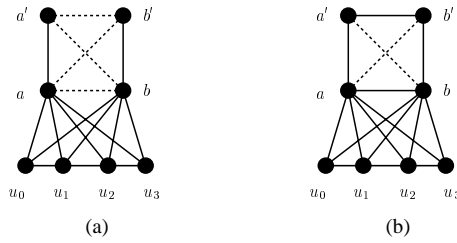


Figura 4.19: Vassoura dupla em G e complementar de vassoura dupla em G gerados no Lema 4.4, sabendo que a', b' perdem todos os vértices do caminho P .

se todo uv -caminho sem cordas tem comprimento 2.

Com o auxílio das proposições demonstradas anteriormente, podemos provar o resultado principal deste capítulo e desta tese.

Teorema 4.1 *Seja G um grafo Berge touro-reduzível com pelo menos dois vértices. Então G ou \overline{G} tem uma dupla par.*

Prova: Provamos o teorema por indução no número de vértices de G .

Para grafos com, no máximo, quatro vértices, podemos verificar o teorema facilmente.

Suponhamos, por indução, que o teorema é verdadeiro para grafos com menos de n vértices.

Seja G um grafo de n vértices, Berge e touro-reduzível. Se G e \overline{G} não tem buracos então G é fracamente triangulado, e do resultado de Hayward, Hoàng e Maffray [11], G tem um 2-par. Logo G tem uma dupla par. Se G tem um conjunto homogêneo H , da hipótese de indução, o subgrafo induzido por H tem dois vértices a, b que formam uma dupla par de H ou de \overline{H} . Observe que H é subgrafo próprio de G . Como todo vértice de $G \setminus H$ ou vê a, b ou perde a, b , temos que a, b formam uma dupla par de G ou de

\overline{G} . Logo, se G é fracamente triangulado ou se G tem conjunto homogêneo, temos o teorema.

Suponhamos então que G não é fracamente triangulado e que G não tem conjunto homogêneo. Do fato de G não ter conjunto homogêneo, que é uma propriedade auto-complementar, temos que \overline{G} também não tem conjunto homogêneo. Daí e do Lema 4.2, G e \overline{G} não tem roda; e do Lema 3.1, G e \overline{G} não tem vassoura dupla. Do fato de G não ser fracamente triangulado, temos que G ou \overline{G} tem buracos. Por simetria, podemos assumir que G contém um buraco, já que as hipóteses sobre G : Berge, não ser fracamente triangulado, touro-redutível, não ter conjunto homogêneo, são todas auto-complementares.

Seja l o comprimento de um menor buraco. Como G é um grafo Berge, então l é par e $l \geq 6$. Seja $C = v_1, v_2, \dots, v_l$ um buraco de comprimento l . Então $V(G)$ contém l subconjuntos não-vazios, dois a dois disjuntos V_1, \dots, V_l , tais que para cada $i = 1, \dots, l$ (com subscritos tomados módulo l), todo vértice de V_i vê todo vértice de $V_{i-1} \cup V_{i+1}$ e perde todo vértice de $V_{i+2} \cup V_{i+3} \cup \dots \cup V_{i-3} \cup V_{i-2}$. Escrevemos $V^* = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l$ e escolhemos os subconjuntos V_i tal que V^* seja maximal. Uma vez definido $V^* = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l$ definimos outros subconjuntos de vértices a partir de suas vizinhanças com os conjuntos V_i :

- A_1 conjunto de vértices de $V \setminus V^*$ que vêem todo $V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_l$ e perdem todo $V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{l-1}$;
- A_2 conjunto de vértices de $V \setminus V^*$ que vêem todo $V_1 \cup V_3 \cup \dots \cup V_{l-1}$ e perdem todo $V_2 \cup V_4 \cup \dots \cup V_l$;
- Para cada $i = 1, \dots, l$, seja X_i o conjunto de vértices de $V \setminus (V^* \cup A_1 \cup A_2)$ que vêem todo $V_{i-1} \cup V_{i+1}$ e perdem todo $V_{i-2} \cup V_{i+2}$;

- $Z = V \setminus (V^* \cup A_1 \cup A_2 \cup X_1 \cup \dots \cup X_l)$.

Por definição os conjuntos $V_1, \dots, V_l, A_1, A_2, X_1, \dots, X_l, Z$ são dois a dois disjuntos, e a sua união é $V(G)$.

Por exemplo, no caso de $l = 6$ temos a configuração de acordo com a Figura 4.20.

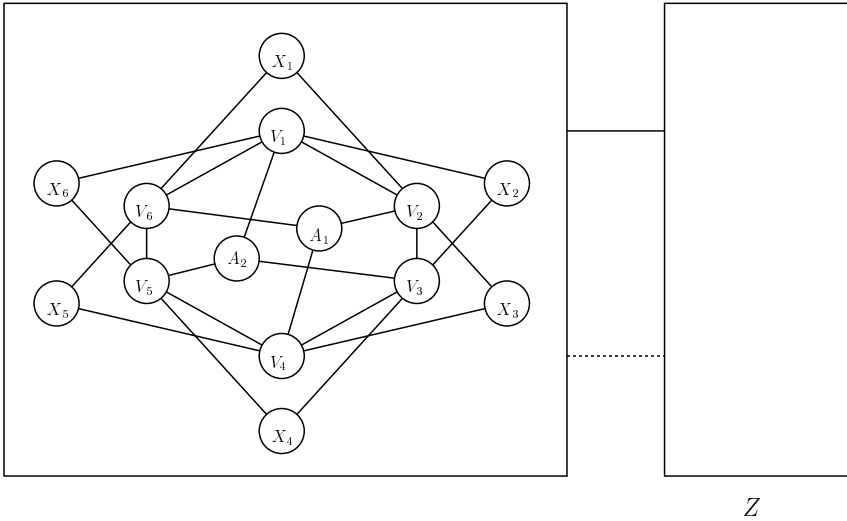


Figura 4.20: Partição de um grafo Berge touro-redutível, que tem C_6 como menor buraco.

Nas proposições seguintes estudamos algumas propriedades desses conjuntos V_i , onde i é um índice qualquer, $1 \leq i \leq l$. Para cada $i = 1, \dots, l$, seja v_i um vértice arbitrário de V_i .

Proposição 4.1.1 *Se $X_i \neq \emptyset$, para algum i , então $l = 6$ e todo vértice de X_i tem um vizinho em V_{i+3} .*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que $i = 3$.

Seja x um vértice qualquer de X_3 . Então x vê todo $V_2 \cup V_4$ e perde todo $V_1 \cup V_5$ e conseqüentemente, x tem um vizinho em $V_6 \cup \dots \cup V_l$, caso contrário x seria colocado em V_3 , contrariando a maximalidade de V^* .

Seja h o menor índice tal que x tem um vizinho y em V_h , com $6 \leq h \leq l$, (veja a Figura 4.21).

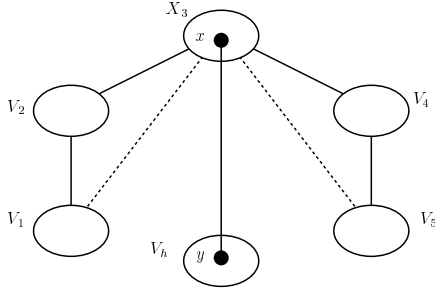


Figura 4.21: Menor índice h , tal que $x \in X$ tem um vizinho y em V_h , na Proposição 4.1.1.

Se $h \geq 7$, o conjunto $\{x, v_4, \dots, v_{h-1}, y\}$ induz um buraco de comprimento $h - 2$, com $5 \leq h - 2 \leq l - 2$, contrariando o fato do grafo ser Berge (se h é ímpar) ou contrariando a definição de l (se h é par). Então $h = 6$ e x tem um vizinho em V_6 .

Suponhamos, por absurdo, que $l \geq 8$, como no exemplo da Figura 4.22. Podemos aplicar o Lema 4.1 para o buraco induzido por $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, y, \dots, v_l\}$ e o vértice x , o que implica que x vê todo v_j para j par e $j \neq 6$, e x perde todo v_j para j ímpar. Então aplicando o Lema 4.1 ao buraco induzido por $\{v_1, \dots, v_l\}$ concluímos que x vê todo $v_6 \in V_6$. Mas então temos que $x \in A_1$, o que contraria a definição de X_3 . Logo $l = 6$. ■

A partir dessa proposição, a configuração dos grafos que não têm C_6 é mais simples, uma vez que cada $X_i = \emptyset$. Veja a Figura 4.23, quando $l = 8$.

Proposição 4.1.2 *Se um vértice x de X_i vê todo V_{i+3} então x tem um vizinho em V_i .*

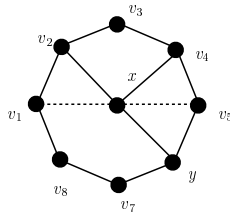


Figura 4.22: Vizinhança de $x \in X_3$ em um C_8 na Proposição 4.1.1.

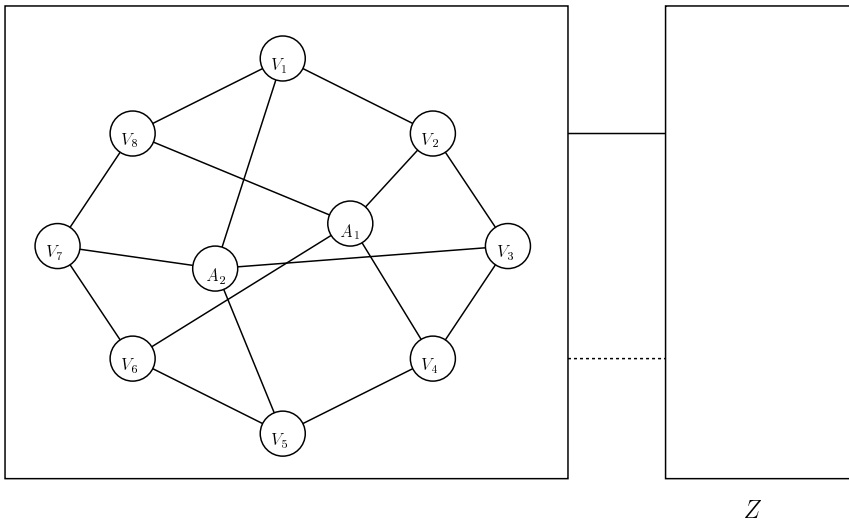


Figura 4.23: Partição de um grafo Berge touro-redutível, que tem C_8 como menor buraco.

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que $i = 1$. Seja x um vértice qualquer de X_1 que vê todo V_4 . Do lema precedente, temos que $l = 6$. Então x vê todo $V_2 \cup V_4 \cup V_6$ e perde todo $V_3 \cup V_5$, como na Figura 4.24. Da definição de A_1 , se x perde todo V_1 então x deve estar em A_1 , o que contraria a definição de X_1 . Logo x tem um vizinho em V_1 . ■

A partir dessa proposição temos a informação da vizinhança dos vértices de X_i representada na Figura 4.25, fazendo $i = 1$.

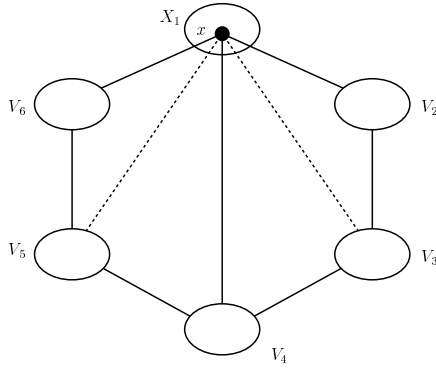


Figura 4.24: Vizinhança de $x \in X_1$ na Proposição 4.1.2.

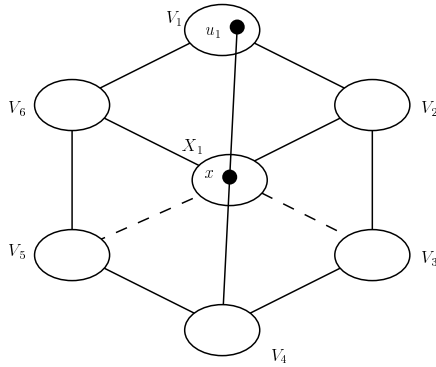


Figura 4.25: Relação entre X_1 e os subconjuntos V_1 e V_4 : Se $x \in X_1$ vê todo V_4 então x tem um vizinho em V_1 .

Proposição 4.1.3 *Se i é ímpar, então não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e A_1 ; e se i é par, então não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e A_2 .*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que $i = 1$. E, suponhamos, por absurdo, que existe uma aresta da , com $d \in V_1 \cup X_1$ e $a \in A_1$.

A definição de A_1 implica que $d \in X_1$ e então, da Proposição 4.1.1, temos que $l = 6$ e d tem um vizinho $u_4 \in V_4$. Se d tem um vizinho $u_1 \in V_1$, então temos dois touros $\mathcal{B}(u_1, dau_4, v_3)$ e $\mathcal{B}(u_1, dau_4, v_5)$ contendo d , como na Figura 4.26, o que é absurdo. Logo d perde todo V_1 e da Proposição 4.1.2, d tem um não-vizinho $w_4 \in V_4$. Então temos dois touros $\mathcal{B}(v_1, v_2da, w_4)$ e

$\mathcal{B}(v_1, v_6 da, w_4)$ contendo d , como na Figura 4.27, o que é absurdo. Logo, se i é ímpar, não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e A_1 . Analogamente prova-se que se i é par, não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e A_2 . ■

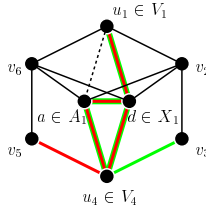


Figura 4.26: Touros gerados na Proposição 4.1.3 supondo que d tem um vizinho em V_1 .

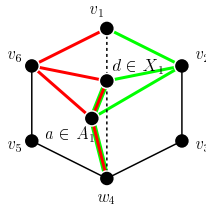


Figura 4.27: Touros gerados na Proposição 4.1.3 se d perde todo V_1 .

Proposição 4.1.4 *Não existe aresta entre $V_i \cup X_i$ e $V_{i+2} \cup X_{i+2}$.*

Prova: Sem perda de generalidade, podemos supor que $i = 1$. Da definição de X_i , precisamos apenas provar que não existe aresta entre X_1 e X_3 .

Suponhamos, por absurdo, que exista uma aresta xy , com $x \in X_1$ e $y \in X_3$. Da Proposição 4.1.1, temos que $l = 6$ e x tem um vizinho $u_4 \in V_4$. Analogamente, $y \in X_3$ tem um vizinho $u_6 \in V_6$. Se x tem um não-vizinho $w_4 \in V_4$ e y tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$ então $\{x, y, w_4, v_5, w_6\}$ induz um C_5 , como na Figura 4.28, uma contradição. Então, podemos assumir, por

simetria, que x vê todo V_4 . E, da Proposição 4.1.2, x tem um vizinho $w_1 \in V_1$, e encontramos um primeiro touro $\mathcal{B}(w_1, xyu_4, v_5)$, como na Figura 4.29. Se y tem um vizinho $w_3 \in V_3$, temos um segundo touro $\mathcal{B}(w_3, yxu_6, v_5)$ contendo x , como na Figura 4.29, uma contradição. Então y perde todo V_3 e, da Proposição 4.1.2, y tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$. Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(v_5, w_6w_1x, y)$, como na Figura 4.30, uma contradição. Logo, não existe aresta entre X_i e X_{i+2} e temos a proposição. ■

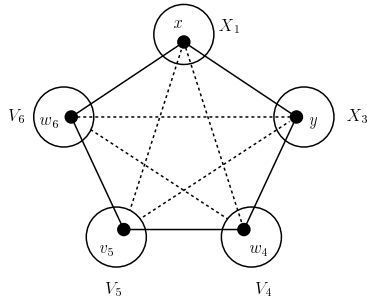


Figura 4.28: C_5 gerado na Proposição 4.1.4 supondo que x tem um não-vizinho $w_4 \in V_4$, e que y tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$.

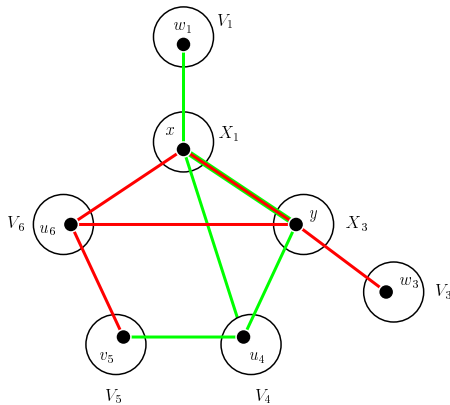


Figura 4.29: Touros gerados na Proposição 4.1.4 supondo que x tem um vizinho $w_1 \in V_1$, e y tem um vizinho $w_3 \in V_3$.

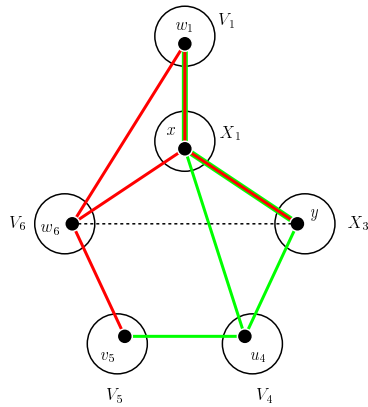


Figura 4.30: Touros gerados na Proposição 4.1.4 supondo que x tem um vizinho $w_1 \in V_1$, e y tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$.

As Proposições 4.1.3 e 4.1.4 estão representadas nas Figuras 4.31(a) e 4.31(b) com $l = 6$. Os casos em que $l \geq 8$ seguem diretamente da definição, uma vez que $X_i = \emptyset$.

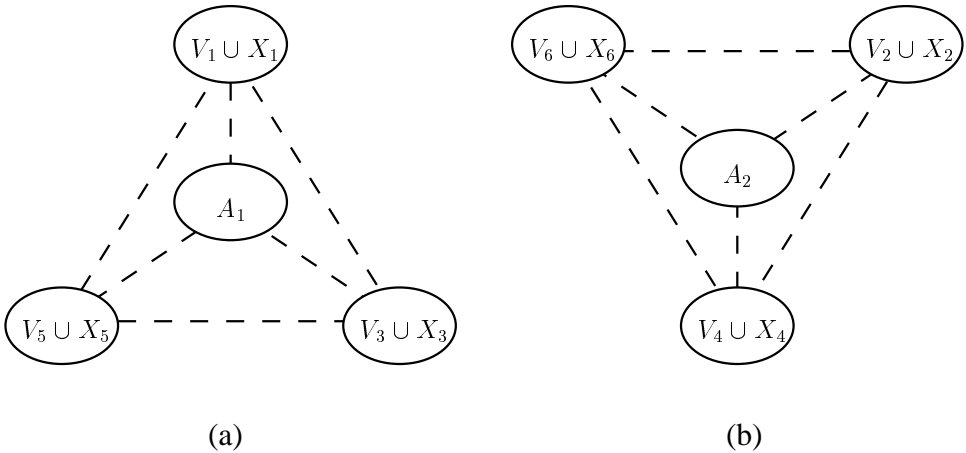


Figura 4.31: Relação entre os subconjuntos A_1 e $V_i \cup X_i$ para i ímpar e, A_2 e $V_i \cup X_i$ para i par.

As duas proposições a seguir garantem a não-existência em G ou \overline{G} de caminhos longos ímpares entre dois vértices quaisquer de $V_i \cup X_i$. Essa caracte-

terística facilita a localização das duplas pares porque restringe os possíveis caminhos sem cordas, ímpares entre dois vértices de $V_i \cup X_i$, a caminhos de comprimento 3, que são analisados nas Proposições 4.1.8 e 4.1.9.

Proposição 4.1.5 *Considere dois vértices não-adjacentes $a, b \in V_i \cup X_i$. Então não existe em G um ab -caminho longo ímpar.*

Prova: Sejam a, b vértices não-adjacentes de $V_i \cup X_i$. Temos que os vértices a, b vêem v_{i-1}, v_{i+1} e perdem v_{i-2}, v_{i+2} .

Suponhamos, por absurdo, a existência de um ab -caminho longo ímpar. Então, do Lema 4.4, tendo $v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i-2}, v_{i+2}$ como os quatro vértices adicionais, concluímos que G ou \overline{G} tem vassoura dupla, como na Figura 4.32, o que é absurdo. ■

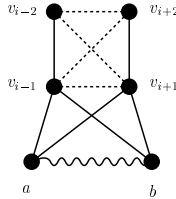


Figura 4.32: Vassoura dupla em G gerada na Proposição 4.1.5 supondo que existe um ab -caminho longo ímpar em G .

Proposição 4.1.6 *Considere dois vértices adjacentes $a, b \in V_i \cup X_i$. Então não existe em \overline{G} um ab -caminho longo ímpar.*

Prova: Sejam a, b vértices adjacentes de $V_i \cup X_i$ em G . Temos que os vértices a, b vêem v_{i-1}, v_{i+1} e perdem v_{i-2}, v_{i+2} no grafo G .

Suponhamos, por absurdo, a existência em \overline{G} de um ab -caminho longo ímpar. Então aplicando o Lema 4.4 a \overline{G} , tendo $v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i-2}, v_{i+2}$ como os

quatro vértices adicionais, concluímos que G ou \overline{G} tem vassoura dupla, como na Figura 4.33, o que é absurdo. ■

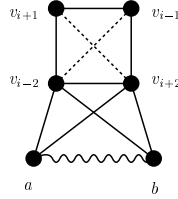


Figura 4.33: Complementar da vassoura dupla em \overline{G} gerado na Proposição 4.1.6 supondo que existe um ab -caminho longo ímpar em \overline{G} .

A proposição a seguir é uma ferramenta usada nas Proposições 4.1.8 e 4.1.9.

Proposição 4.1.7 *Considere dois vértices $a, b \in V_i \cup X_i$. Se existe um vértice x que vê a , perde b e tem um vizinho em V_{i-1} então x perde todo V_{i+2} .*

Prova: Para simplificar a notação seja $i = 3$. Então os vértices a, b vêm todo $V_2 \cup V_4$ e perdem todo $V_1 \cup V_5$. Seja $u_2 \in V_2$ um vizinho de x .

Suponhamos, por absurdo, que x tem um vizinho $u_5 \in V_5$. Então x vê todo $v_4 \in V_4$, caso contrário $\{x, u_2, b, v_4, u_5\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.34. Aplicando o Lema 4.1 a x e ao buraco induzido por $\{v_1, u_2, v_3, v_4, u_5, v_6, \dots, v_l\}$, e do fato de G não ter roda temos que $l = 6$ e que x vê todo vértice de $V_4 \cup V_6$ e perde todo $V_1 \cup V_3$, como na Figura 4.35. Então $x \in X_5$, e a aresta xa contraria a Proposição 4.1.4. ■

A Proposição 4.1.7 está representada na Figura 4.36 para $l = 6$. O comportamento de x é análogo para $l \geq 8$ par.

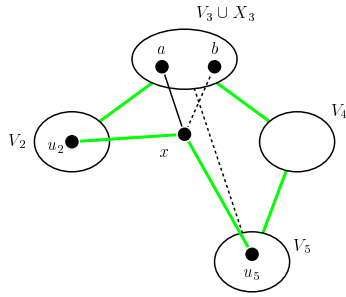


Figura 4.34: C_5 gerado na Proposição 4.1.7 supondo que x vê u_5 e perde algum vértice de V_4 .

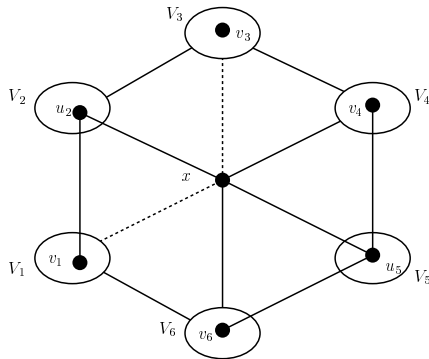


Figura 4.35: Vizinhança do vértice x na Proposição 4.1.7 supondo que x vê u_5 , e sabendo que x vê todo V_4 .

As duas proposições a seguir analisam o comportamento dos vértices de um caminho sem cordas de comprimento 3. Na primeira, os vértices internos do caminho, são de uma componente conexa de $V_i \cup X_i$. Já na segunda, os vértices extremos do caminho são de $V_i \cup X_i$.

Proposição 4.1.8 *Considere uma componente conexa qualquer D de $V_i \cup X_i$, e dois vértices adjacentes $a, b \in D$. Se existe um caminho sem cordas $xaby$ em G , então um dos vértices x, y está em D .*

Prova: Para simplificar a notação, seja $i = 3$. Como a, b pertencem a

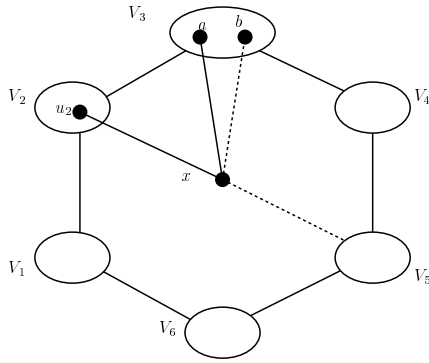


Figura 4.36: Vizinhança do vértice x na Proposição 4.1.7: Se x vê a , perde b e vê u_2 , então x perde todo V_5 .

$V_3 \cup X_3$, então a, b vêem todo $V_2 \cup V_4$ e perdem todo $V_1 \cup V_5$. Sejam $v_2 \in V_2$ e $v_4 \in V_4$.

Suponhamos que x vê v_2, v_4 . Da Proposição 4.1.7, x perde todo $V_1 \cup V_5$. Se x tem um não-vizinho $w_2 \in V_2$, temos dois touros com vértices comuns $\mathcal{B}(v_1, w_2ba, x)$ e $\mathcal{B}(w_2, axv_4, v_5)$, como na Figura 4.37. Então x vê todo V_2 . Analogamente x vê todo V_4 . Então x vê todo $V_2 \cup V_4$ e perde todo $V_1 \cup V_5$, e portanto $x \in V_3 \cup X_3 \cup A_1$. Daí e como x vê $a \in V_3 \cup X_3$, usando a Proposição 4.1.3 concluimos que $x \in V_3 \cup X_3$. Então $x \in D$, uma vez que x vê a . Logo a proposição é verdadeira neste caso. Similarmente a proposição é verdadeira se y vê v_2, v_4 . Ou seja, se x vê v_2, v_4 ou se y vê v_2, v_4 , temos a proposição.

Suponhamos agora que x perde um dos vértices v_2, v_4 , e que y perde um dos vértices v_2, v_4 . Se x, y perdem v_2, v_4 , temos dois touros com vértices comuns $\mathcal{B}(x, av_2b, y)$ e $\mathcal{B}(x, av_4b, y)$, como na Figura 4.38, uma contradição. Então podemos assumir, sem perda de generalidade, que x vê v_2 e perde v_4 . Da Proposição 4.1.7, x perde v_5 , e temos um primeiro touro $\mathcal{B}(x, av_4b, v_5)$, como na Figura 4.39. Então y vê v_4 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(x, av_4b, y)$ contendo a , como na Figura 4.39. Então, da Proposição

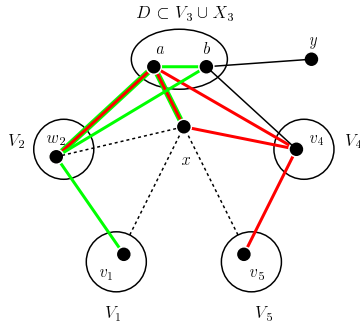


Figura 4.37: Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x vê v_4 , e que tem um não-vizinho $w_2 \in V_2$.

4.1.7, y perde v_1 . Além disso, como y vê v_4 , da suposição de que y perde um dos vértices, concluímos que y perde v_2 . Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(y, bav_2, v_1)$ contendo a , como na Figura 4.40, uma contradição. Isto completa a prova. ■

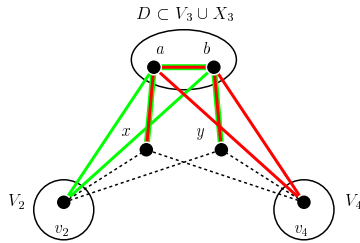


Figura 4.38: Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x, y perdem v_2, v_4 .

Proposição 4.1.9 *Considere dois vértices não-adjacentes $a, b \in V_i \cup X_i$. Se existe um caminho sem cordas aub em G então um dos vértices u, v está em $V_i \cup X_i$.*

Prova: Para simplificar a notação, seja $i = 3$. Como a, b pertencem a $V_3 \cup X_3$, então a, b vêem todo $V_2 \cup V_4$ e perdem todo $V_1 \cup V_5$.

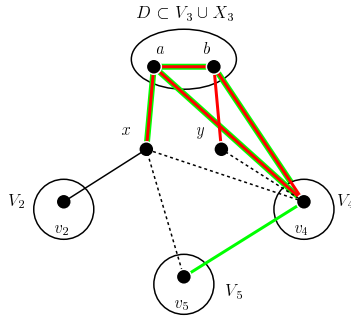


Figura 4.39: Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x vê v_2 e perde v_4 , e que y perde v_4 .

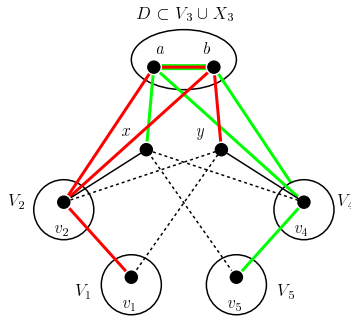


Figura 4.40: Touros gerados na Proposição 4.1.8 supondo que x vê v_2 e perde v_4 , e que y vê v_4 e perde v_2 .

Primeiramente supomos que u tem um vizinho em cada um dos conjuntos V_2, V_4 . Sejam $u_2 \in V_2$ e $u_4 \in V_4$ vizinhos de u . Da Proposição 4.1.7, u perde todo $V_1 \cup V_5$. Supomos que u tem um não-vizinho $w_2 \in V_2$. Então v vê w_2 , caso contrário $\{w_2, a, u, v, b\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.41, e da Proposição 4.1.7, v perde todo V_5 . Além disso, temos um primeiro touro $\mathcal{B}(w_2, auu_4, v_5)$, como na Figura 4.42. Então v vê v_1 , caso contrário, teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(v_1, w_2bv, u)$ contendo w_2 , como na Figura 4.42. Então v vê u_4 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(v_5, u_4au, v)$ contendo a , como na Figura 4.43. Mas então temos um segundo touro $\mathcal{B}(v_5, u_4bv, v_1)$ contendo v_5 , como na Figura 4.44. Então u vê

todo V_2 . Analogamente, u vê todo V_4 . Então u vê todo $V_2 \cup V_4$ e perde todo $V_1 \cup V_5$, logo $u \in V_3 \cup X_3 \cup A_1$. Como u vê $a \in V_3 \cup X_3$, da Proposição 4.1.3 concluímos que $u \in V_3 \cup X_3$. Logo, a proposição é verdadeira neste caso.

Analogamente, se v tem um vizinho em cada um dos conjuntos V_2, V_4 , temos a proposição.

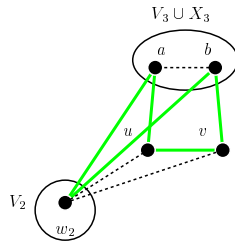


Figura 4.41: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u, v perdem $w_2 \in V_2$.

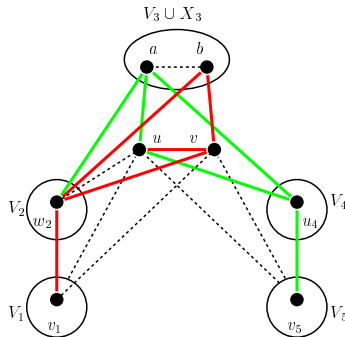


Figura 4.42: Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde w_2 , e v perde v_1 .

Suponhamos agora que u perde todo V_2 ou todo V_4 e que v perde todo V_2 ou todo V_4 . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que u perde todo V_4 , e conseqüentemente v vê todo V_4 , caso contrário $\{w_4, a, u, v, b\}$ induziria um buraco ímpar, para algum $w_4 \in V_4 \setminus N(v)$, como na Figura 4.45. Então, da suposição acima, v perde todo V_2 . Logo u vê todo V_2 , caso contrário $\{w_2, a, u, v, b\}$ induziria um buraco ímpar, para algum $w_2 \in V_2 \setminus N(v)$, como

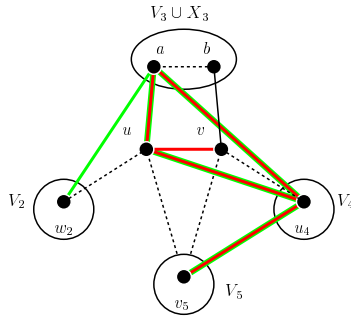


Figura 4.43: Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde w_2 , e v perde u_4 .

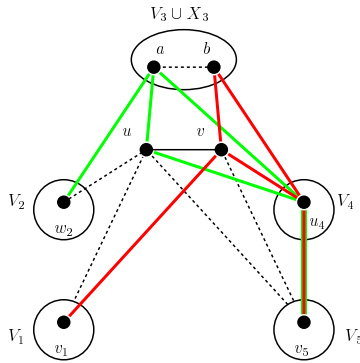


Figura 4.44: Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde w_2 , e que v vê v_1, u_4 .

na Figura 4.46. Então temos que u vê todo V_2 e perde todo V_4 , e que v perde todo V_2 e vê todo V_4 .

Da Proposição 4.1.7, u perde todo V_5 , e v perde todo V_1 . Veja na Figura 4.47 as relações entre os vértices u e v , e os conjuntos V_1, V_2, V_4, V_5 . Se u perde algum $w_1 \in V_1$, temos dois touros que se interceptam $\mathcal{B}(w_1, v_2ua, v_4)$ e $\mathcal{B}(w_1, v_2au, v)$, como na Figura 4.48, uma contradição. Então u vê todo V_1 . Analogamente, v vê todo V_5 , como na Figura 4.49.

Do Lema 4.1 aplicado a u e ao buraco v_1, \dots, v_l , e como u vê v_1, v_2 , e perde v_4, v_5 , então $N(u) \cap \{v_6, \dots, v_l\} \subseteq \{v_l\}$. Analogamente, como v vê v_4 ,

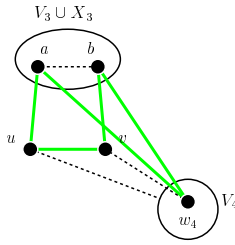


Figura 4.45: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u perde todo V_4 , e v perde algum $w_4 \in V_4$.

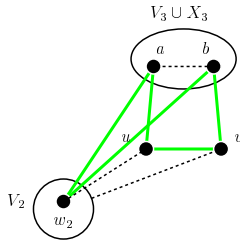


Figura 4.46: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 sabendo que v perde todo V_2 , e supondo que u perde algum $w_2 \in V_2$.

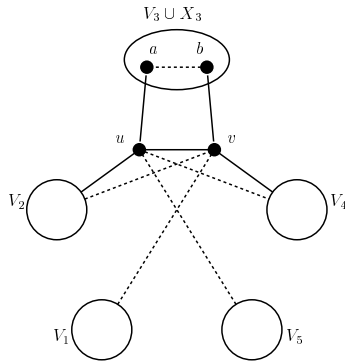


Figura 4.47: Relações de adjacências entre os vértices u, v e os conjuntos V_1, V_2, V_4 e V_5 na Proposição 4.1.9.

v_5 , e perde v_1, v_2 , então $N(v) \cap \{v_6, \dots, v_l\} \subseteq \{v_6\}$.

Suponhamos que $l \geq 8$. Se u perde v_l e v perde v_6 então $\{v_1, u, v, v_5, v_6, \dots, v_l\}$ induz um buraco ímpar de comprimento $l - 1$, como

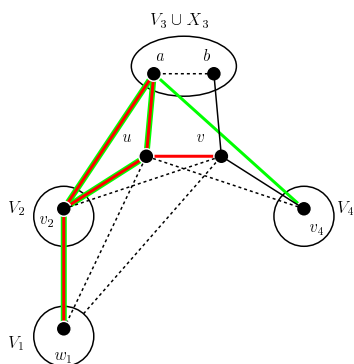


Figura 4.48: Touros gerados na Proposição 4.1.9 supondo que u perde $w_1 \in V_1$.

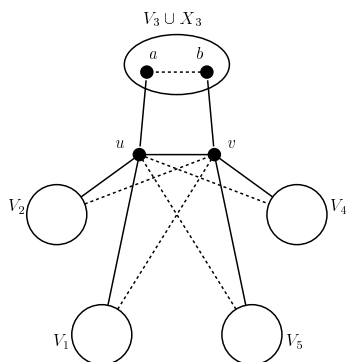


Figura 4.49: Relações de adjacências entre os vértices u, v e os conjuntos V_1, V_2, V_4 e V_5 na Proposição 4.1.9.

na Figura 4.50. Se u vê v_l e v vê v_6 então $\{u, v, v_6, \dots, v_l\}$ induz um buraco ímpar de comprimento $l - 3$, como na Figura 4.51. Se u vê v_l e v perde v_6 então $\{u, v, v_5, v_6, \dots, v_l\}$ induz um buraco par de comprimento $l - 2$, como na Figura 4.52. Em todas as possibilidades temos um contradição da definição de l . Uma contradição similar ocorre se u perde v_l e v vê v_6 .

Então $l = 6$; e todo v_6 vê um dos vértices u, v , caso contrário $\{v_1, u, v, v_5, v_6\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.53. Por simetria, podemos assumir que v tem um vizinho $u_6 \in V_6$. Então v perde todo

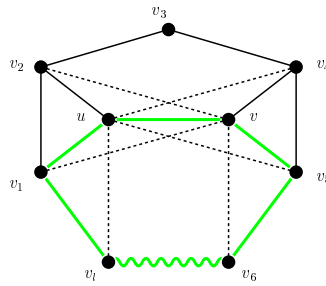


Figura 4.50: Buraco C_{l-1} gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u perde v_l , e v perde v_6 .

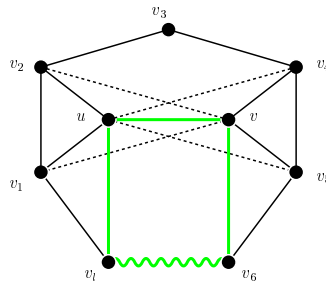


Figura 4.51: Buraco C_{l-3} gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u vê v_l , e v vê v_6 .

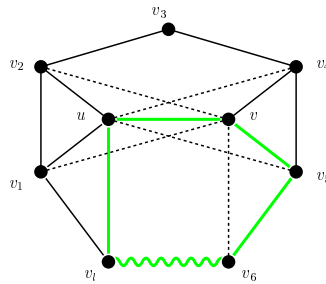


Figura 4.52: Buraco C_{l-2} gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u vê v_l , e v perde v_6 .

$v_3 \in V_3$, caso contrário $\{v, v_3, v_2, v_1, v_6\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.54. Suponhamos que v tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$. Então u vê w_6 , caso contrário $\{w_6, v_1, u, v, v_5\}$ induziria um buraco ímpar, como na

Figura 4.55; e u perde todo $v_3 \in V_3$, caso contrário $\{u, v_3, v_4, v_5, w_6\}$ induziria um buraco ímpar, como na Figura 4.56; mas então $\{v_2, u, v, v_4, v_3\}$ induz um buraco ímpar, como na Figura 4.57, uma contradição. Então v vê todo V_6 . O fato de que v vê todo $V_4 \cup V_5 \cup V_6$ e perde todo $V_1 \cup V_3$ implica que v está em $V_5 \cup X_5$; mas então a aresta vb contradiz a Proposição 4.1.4, já que $b \in V_3 \cup X_3$. Isto completa a prova. ■

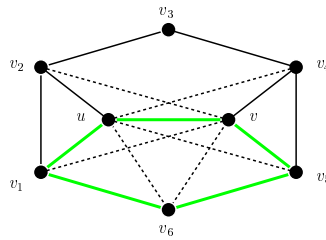


Figura 4.53: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que existe $v_6 \in V_6$ que perde u, v .

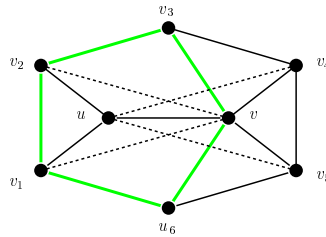


Figura 4.54: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que v vê algum $v_3 \in V_3$.

As Proposições 4.1.10 a 4.1.13 localizam as duplas pares de G ou de \overline{G} que, ou são formados por vértices de V_i e V_{i+2} em G , ou estão em $V_i \cup X_i$.

Podemos considerar as seguintes possibilidades para $V_i \cup X_i$, $i = 1, \dots, l$: ou existe i tal que $V_i \cup X_i$ tem uma componente conexa D que não é clique; ou existe i tal que $V_i \cup X_i$ tem uma componente conexa D que é clique

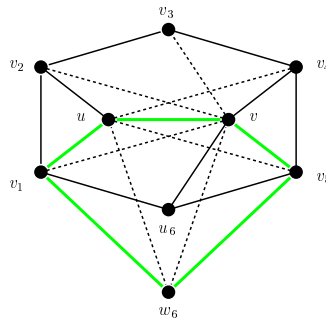


Figura 4.55: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que v tem um não-vizinho $w_6 \in V_6$, e que u perde w_6 .

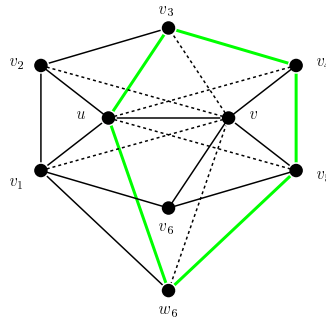


Figura 4.56: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 supondo que u vê $v_3 \in V_3$.

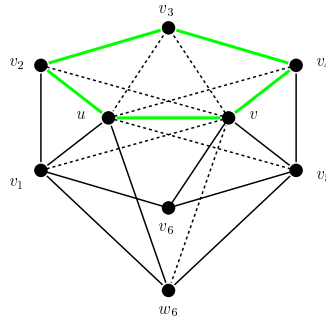


Figura 4.57: C_5 gerado na Proposição 4.1.9 sabendo que u perde $v_3 \in V_3$.

com pelo menos dois vértices; ou existe i tal que $V_i \cup X_i$ é um conjunto estável de cardinalidade maior ou igual a 2; ou para todo i , $V_i \cup X_i$ tem

cardinalidade 1. Essas possibilidades são analisadas separadamente em cada uma das proposições a seguir.

Proposição 4.1.10 *Se existe uma componente conexa D de $V_i \cup X_i$ que não é clique, para algum i , então D contém uma dupla par de G ou uma dupla par de \overline{G} .*

Prova: Para simplificar a notação seja $i = 3$. Para dois vértices $a, b \in D$, seja $N_D(a, b) = N(a) \cap N(b) \cap D$. Dizemos que um par de vértices de D não-adjacentes $\{a, b\}$ é *ótimo* se maximiza a cardinalidade de $N_D(a, b)$. Considere algum par ótimo $\{a, b\}$; tal par existe uma vez que D não é clique.

Suponhamos que $\{a, b\}$ não é dupla par de G . Então existe um ab -caminho ímpar, sem cordas em G . Da Proposição 4.1.5, este caminho tem comprimento 3, digamos $auvb$. Da Proposição 4.1.9, podemos assumir, por simetria, que $u \in V_3 \cup X_3$; e como u vê a , temos que $u \in D$, (veja Figura 4.58). Seja $d \in N_D(a, b)$. Observe que como D é conexo e $\{a, b\}$ é ótimo, então $N_D(a, b) \neq \emptyset$. Então d vê u , caso contrário $\{u, a, d, b\}$ induziria um P_4 e $\{u, a, d, b, v_1, v_2, v_4, v_5\}$ induziria uma vassoura dupla, como na Figura 4.59. Então temos $N_D(a, b) \subseteq N_D(u, b)$, e como $\{a, b\}$ é ótimo temos que $N_D(a, b) = N_D(u, b)$, o que significa que o par $\{u, b\}$ é ótimo.

Provaremos que o par $\{a, u\}$ é uma dupla par de \overline{G} . Suponhamos que essa afirmação é falsa; então existe um au -caminho ímpar Q , sem cordas, em \overline{G} . Da Proposição 4.1.6, Q tem comprimento 3, e podemos escrever $Q = axyu$ em \overline{G} , o que significa que em G temos o caminho sem cordas $yaux$. Da Proposição 4.1.8, e por simetria, podemos assumir que $x \in V_3 \cup X_3$. Como x vê u , temos que $x \in D$. Como $N_D(a, b) = N_D(u, b)$ e x perde a , então x perde b . Logo x vê todo $d \in N_D(a, b)$, caso contrário $\{x, u, d, b\}$ induziria um P_4 e $\{x, u, d, b, v_1, v_2, v_4, v_5\}$ induziria uma vassoura dupla, como na Figura

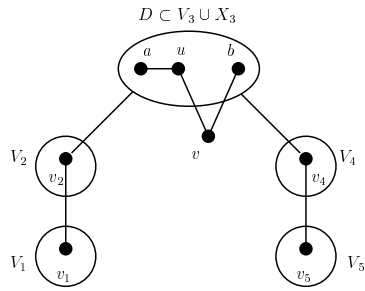


Figura 4.58: Caminho gerado na Proposição 4.1.10 entre os vértices a, b supondo que não formam dupla par de G .

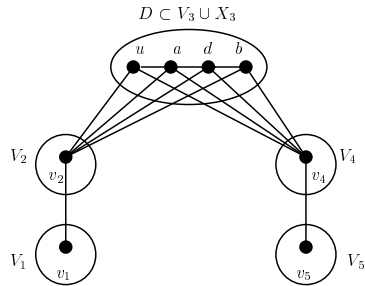


Figura 4.59: Vassoura dupla gerada na Proposição 4.1.10 supondo que u perde $d \in N_D(a, b)$.

4.60. Logo, $N_D(a, b) \subseteq N_D(a, x)$. Como $u \notin N(b)$ e $u \in N_D(a, x)$, temos que $N_D(a, b) \subset N_D(a, x)$, o que contradiz a otimalidade de a, b . Logo $\{a, u\}$ é dupla par de \overline{G} e temos a proposição. ■

Proposição 4.1.11 *Se existe uma componente conexa D de $V_i \cup X_i$ que é clique de cardinalidade pelo menos 2, para algum i , então quaisquer dois vértices de D formam uma dupla par de \overline{G} .*

Prova: Sejam dois vértices quaisquer $a, b \in D$ e suponhamos, por absurdo, que $\{a, b\}$ não é uma dupla par de \overline{G} ; então existe Q , um ab -caminho ímpar, sem cordas em \overline{G} . Da Proposição 4.1.6, Q tem comprimento 3, e podemos

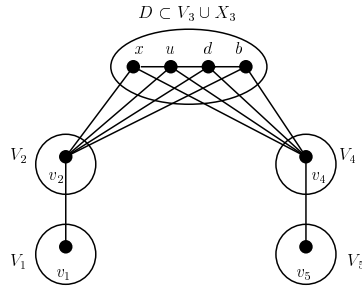


Figura 4.60: Vassoura dupla gerada na Proposição 4.1.10 supondo que x perde $d \in N_D(u, b) = N_D(a, b)$.

escrever $Q = axyb$ em \overline{G} . Logo temos o caminho sem cordas $yabx$ em G . Da Proposição 4.1.8 concluímos que um dos x, y está em D , o que é absurdo, uma vez que D é clique, e temos a proposição. ■

Proposição 4.1.12 *Se $V_i \cup X_i$ é um conjunto estável de cardinalidade pelo menos 2, para algum i , então quaisquer dois vértices de $V_i \cup X_i$ formam uma dupla par de G .*

Prova: Sejam dois vértices quaisquer $a, b \in V_i \cup X_i$ e suponhamos, por absurdo, que $\{a, b\}$ não é uma dupla par de G ; então existe P , um ab -caminho ímpar, sem cordas em G . Da Proposição 4.1.5, P tem comprimento 3, e podemos escrever $P = auvb$. Da Proposição 4.1.9 concluímos que um dos u, v está em $V_i \cup X_i$, o que é absurdo, uma vez que $V_i \cup X_i$ é um conjunto estável, e temos a proposição. ■

Proposição 4.1.13 *Se $V_i \cup X_i$ tem cardinalidade 1, para todo i , então $\{v_1, v_3\}$ é uma dupla par de G .*

Prova: Suponhamos que, $V_i \cup X_i$ tem cardinalidade 1, para todo $i = 1 \dots l$. Então temos $X_i = \emptyset$, para todo i . Suponhamos, por absurdo, que existe

um caminho ímpar sem cordas $P = x_0x_1 \cdots x_r$ com $r \geq 3$ ímpar, $v_1 = x_0$ e $v_3 = x_r$.

Se $r = 3$ podemos assumir, por simetria, que v_2 vê x_1 , caso contrário $V(P) \cup \{v_2\}$ induziria um C_5 . Se $r \geq 5$ podemos aplicar o Lema 4.3 a P e ao vértice v_2 , e em qualquer das saídas temos que v_2 vê x_1 . Logo, para todo r ímpar, x_1 vê v_1, v_2 e perde v_3 .

Aplicando o Lema 4.1 ao vértice x_1 , temos que $N(x_1) \cap V(C)$ consiste de dois ou três vértices consecutivos de C . Se são três vértices consecutivos temos que x_1 vê v_l e perde v_3, v_4, \dots, v_{l-1} e então $x_1 \in V_1$, o que é absurdo uma vez que V_1 tem apenas um vértice. Então x_1 perde v_l e temos um primeiro touro $\mathcal{B}(v_l, v_1x_1v_2, v_3)$, como na Figura 4.61.

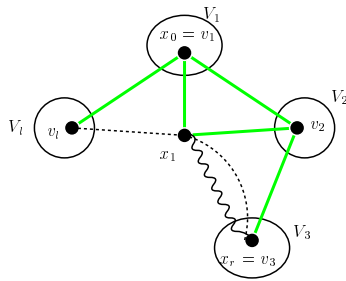


Figura 4.61: Touro gerado na Proposição 4.1.13 supondo que existe um v_1v_3 -caminho ímpar sem cordas.

Então x_{r-1} perde v_2 , caso contrário, se x_{r-1} vê v_2 , como x_{r-1} não pode ver três vértices consecutivos, teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(v_4, v_3x_{r-1}v_2, v_1)$, como na Figura 4.62.

Suponhamos que $r = 3$. Então v_l vê x_2 , caso contrário teríamos um segundo touro $\mathcal{B}(v_l, v_1v_2x_1, x_2)$ contendo v_2 , como na Figura 4.63; mas então $\{v_l, v_1, v_2, v_3, x_2\}$ induz um buraco ímpar. Logo $r \geq 5$. Aplicando o Lema 4.3 a P e ao vértice v_2 , como x_{r-1} perde v_2 , não temos a saída (i) do Lema 4.3, e então temos a saída (ii) ou (iii). Na saída (ii) temos um segundo touro

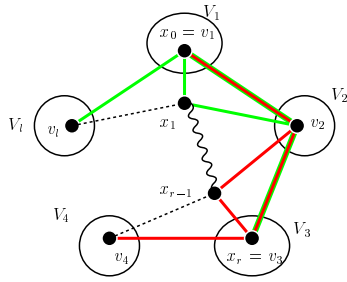


Figura 4.62: Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo que x_{r-1} vê v_2 .

$\mathcal{B}(x_r, v_2 v_1 x_1, x_2)$, como na Figura 4.64; e na saída (iii) temos um segundo touro $\mathcal{B}(x_0, v_2 x_2 x_3, x_4)$, como na Figura 4.65, o que é uma contradição nos dois casos. Logo $\{v_1, v_3\}$ é dupla par de G . ■

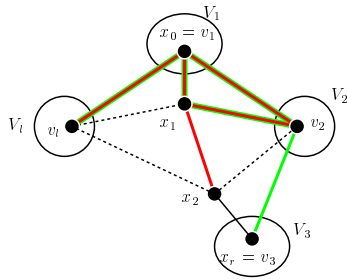


Figura 4.63: Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo que $r = 3$, e que x_2 perde v_l .

Das Proposições 4.1.10 a 4.1.13 temos que as duplas pares ou são formadas com um vértice de V_i e outro de V_{i+2} , ou estão em $V_i \cup X_i$ e temos então o Teorema 4.1. ■

Observamos que ao estabelecer no Teorema 4.1 que todo grafo Berge touro-redutível é quase-paridade, obtemos também uma nova prova de que grafos Berge touro-redutíveis são perfeitos, diferente da obtida por Everett, de Figueiredo, Klein e Reed em [7].

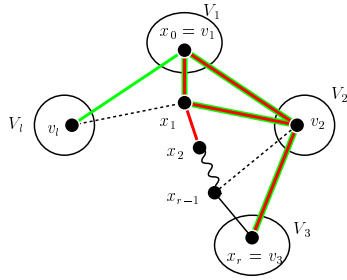


Figura 4.64: Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo a saída (ii) do Lema 4.3 para o vértice v_2 .

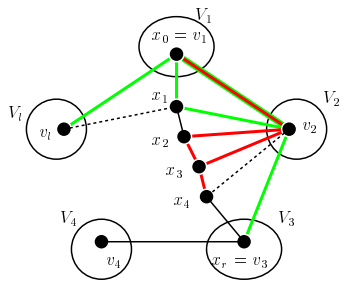


Figura 4.65: Touros gerados na Proposição 4.1.13 supondo a saída (iii) do Lema 4.3 para o vértice v_2 .

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese demonstramos no Teorema 4.1 que todo grafo Berge touro-reduzível é quase-paridade. Como citado no Capítulo 1, um problema em aberto é a caracterização de grafos quase-paridade e quase-paridade estrita, através de uma família de subgrafos proibidos. Hougardy [14] tem duas conjeturas, que continuam sem demonstração. A primeira conjetura afirma que existe uma família F de grafos de linha de grafos bipartidos tal que um grafo G é quase-paridade se e somente se G não contém buracos ímpares, anti-buracos ímpares, nem grafos de F . Como todo grafo quase-paridade é Berge, o Teorema 4.1 estabelece que para grafos touro-reduzíveis, um grafo é quase-paridade se e somente se é Berge, ou seja temos a conjetura de Hougardy verdadeira para grafos touro-reduzíveis, sem necessidade da família F de grafos de linha de grafos bipartidos.

A segunda conjetura afirma que existe uma família F' de grafos de linha de grafos bipartidos tal que um grafo G é quase-paridade estrita se e somente se G não contém buracos ímpares, anti-buracos, nem grafos de F' . Esta segunda conjetura está provada para grafos touro-reduzíveis. Maffray e Trotignon [17] provaram que um grafo sem buracos ímpares, sem anti-buracos e sem prismas é uma clique ou tem uma dupla par. Além disso, provaram que esses grafos

são perfeitamente contráteis. A prova é um algoritmo de tempo polinomial que produz uma dupla par com a propriedade adicional de que a contração desta dupla par gera um grafo da mesma classe. Como um prisma diferente de $\overline{C_6}$ não é touro-redutível, uma consequência do resultado de Maffray e Trotignon é que todo grafo Berge touro-redutível sem antiburacos é uma clique ou tem uma dupla par.

Para a demonstração do Teorema 4.1 generalizamos definições e lemas usados no artigo [5], que demonstra que grafos Berge sem touros são quase-paridade. No mesmo artigo é provado que todo grafo Berge sem touros e sem anti-buracos é fracamente triangulado, ou é perfeitamente ordenável, ou tem um conjunto homogêneo que não é clique. E, como consequência deste resultado é estabelecido em [5] que:

- Todo grafo Berge sem touros e sem anti-buracos é perfeitamente contrátil.

Hayward, Hoàng e Maffray [11] provaram que todo grafo fracamente triangulado, que não é uma clique, tem um 2-par cuja contração gera um grafo fracamente triangulado, e portanto todo grafo fracamente triangulado é perfeitamente contrátil. Além disso, Hertz e de Werra [13] provaram que todo grafo perfeitamente ordenável, que não é uma clique, tem uma dupla par cuja contração gera um grafo perfeitamente ordenável, e portanto todo grafo perfeitamente ordenável é perfeitamente contrátil.

Usando estes resultados, a demonstração em [5] de que um grafo G Berge sem touros e sem anti-buracos é perfeitamente contrátil, sugere um método para a contração dos vértices. Inicialmente são contraídas as duplas pares dos conjuntos homogêneos de G que não são cliques, até obter um grafo G' onde todos os conjuntos homogêneos são cliques. Essas duplas pares têm

a existência garantida por indução, e de [8], todos os grafos intermediários, obtidos das contrações, são Berge sem touros e sem anti-buracos. O grafo G' é então fracamente triangulado ou perfeitamente ordenável. Se G' é fracamente triangulado, de [11], podemos fazer contrações de duplas pares, até ter uma clique, gerando grafos intermediários fracamente triangulados. Caso contrário, G' é perfeitamente ordenável, e então de [13], podemos fazer contrações de duplas pares, até ter uma clique, gerando grafos intermediários perfeitamente ordenáveis. Os grafos intermediários não são necessariamente sem touros. Considere por exemplo na Figura 5.1, o grafo obtido de um C_6 , através da substituição de cada um dos seus vértices por uma aresta. Sabemos que este grafo G admite uma seqüência de contrações pares até uma clique, mas nem todo grafo intermediário desta seqüência será sem touros.

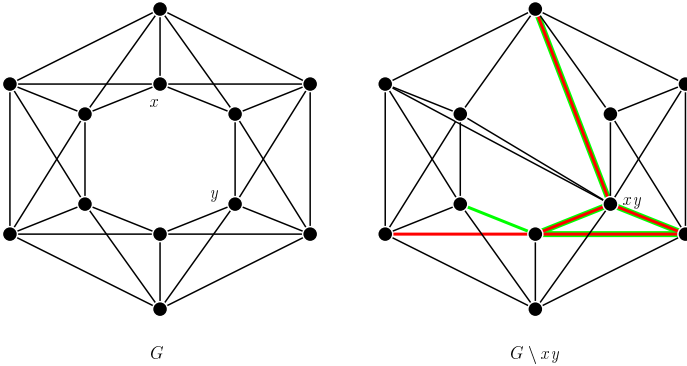


Figura 5.1: Contração de uma dupla par em um grafo Berge sem touros e sem anti-buracos gerando um grafo Berge com touros.

Resta a seguinte questão para ser generalizada sobre duplas pares em grafos Berge touro-redutíveis:

- provar que todo grafo Berge touro-redutível e sem anti-buracos é perfeitamente contrátil.

Observe que o grafo G , da Figura 5.1, é touro-redutível, e que o grafo obtido da contração da dupla par tem dois touros que se interceptam.

A resposta para esta questão permitirá o possível desenvolvimento de um algoritmo eficiente para colorir os vértices de um grafo Berge touro-redutível e sem anti-buracos otimamente, através de sucessivas contrações de duplas pares.

Embora a prova do Teorema 4.1 seja uma demonstração alternativa de que grafos Berge touro-redutíveis são perfeitos, esta prova não fornece um algoritmo para o reconhecimento desses grafos.

Finalmente, a prova do Teorema 4.1 fornece um algoritmo de tempo polinomial para localizar uma dupla par em um grafo G Berge touro-redutível, com pelo menos dois vértices, ou no seu complemento \overline{G} .

Referências Bibliográficas

- [1] BERGE, C. Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 9* (1960), 123–160.
- [2] CHUDNOVSKY, M., CORNUÉJOLS, G., LIU, X., SEYMOUR, P., AND VUŠKOVIĆ, K. Recognizing Berge graphs. Manuscript, (2004). To appear in *Combinatorica*.
- [3] CHUDNOVSKY, M., ROBERTSON, N., SEYMOUR, P., AND THOMAS, R. The strong perfect graph theorem. Manuscript, (2002). To appear in *Annals of Mathematics*.
- [4] CHVÁTAL, V., AND SBIHI, N. Bull-free Berge graphs are perfect. *Graphs and Combinatorics 3* (1987), 127–139.
- [5] DE FIGUEIREDO, C., MAFFRAY, F., AND PORTO, O. On the structure of bull-free perfect graphs. *Graphs and Combinatorics 13* (1997), 31–55.
- [6] DE FIGUEIREDO, C., MAFFRAY, F., AND VILLELA-MACIEL, C. Even pairs in bull-reducible graphs. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz 117*, (2004).
- [7] EVERETT, H., DE FIGUEIREDO, C., KLEIN, S., AND REED, B. The perfection and recognition of bull-reducible Berge graphs. *Rairo-Theoretical Informatics and Applications 39* (2005), 145–160.

- [8] EVERETT, H., DE FIGUEIREDO, C., LINHARES-SALES, C., MAFFRAY, F., PORTO, O., AND REED, B. Even pairs. In *Perfect Graphs*, J. Ramírez-Alfonsín and B. Reed, Eds. Wiley Interscience, (2001), pp. 67–92.
- [9] FONLUPT, J., AND UHRY, J. P. Transformations which preserve perfectness and h -perfectness of graphs. *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization* (1982), 83–95.
- [10] GRÖTSCHEL, M., LOVÁSZ, L., AND SCHRIJVER, A. Polynomial algorithms for perfect graphs. In *Topics on perfect graphs*, C. Berge and V. Chvátal, Eds., vol. 21 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, (1984), pp. 325–356.
- [11] HAYWARD, R., HOÀNG, C., AND MAFFRAY, F. Optimizing weakly triangulated graphs. *Graphs and Combinatorics* 5 (1989), 339–349. See erratum in vol. 6 (1990) 33–35.
- [12] HERTZ, A. A fast algorithm for coloring Meyniel graphs. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* 50 (1990), 231–240.
- [13] HERTZ, A., AND DE WERRA, D. Perfectly orderable graphs are quasi-parity graphs: a short proof. *Discrete Mathematics* 68 (1988), 111–113.
- [14] HOUGARDY, S. Even and odd pairs in line-graphs of bipartite graphs. *European Journal of Combinatorics* 16 (1995), 17–21.
- [15] LINHARES-SALES, C., AND MAFFRAY, F. Even pairs in claw-free perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* 74 (1998), 169–191.

- [16] LINHARES-SALES, C., MAFFRAY, F., AND REED, B. A. On planar perfectly contractile graphs. *Graphs and Combinatorics* 13 (1997), 167–187.
- [17] MAFFRAY, F., AND TROTIGNON, N. A class of perfectly contractile graphs. Manuscript, (2002). To appear in *Journal of Combinatorial Theory*, (Series B).
- [18] MEYNIEL, H. A new property of critical imperfect graphs and some consequences. *European Journal of Combinatorics* 8 (1987), 313–316.
- [19] REED, B., AND SBIHI, N. Recognizing bull-free perfect graphs. *Graphs and Combinatorics* 11 (1995), 171–178.
- [20] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Editora Campus Ltda, (1983).