

# SENSO DE DIREÇÃO CORDAL EM SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

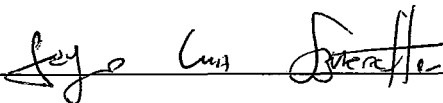
Rodrigo Simões Camara Leão

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

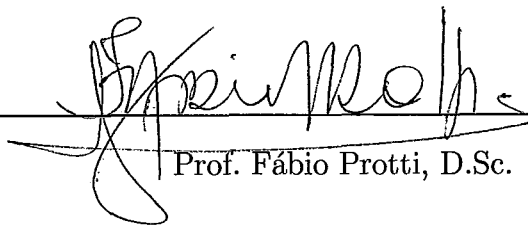
Aprovada por:



Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



Prof. Fábio Protti, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 2004

LEÃO, RODRIGO SIMÕES CAMARA

Senso de Direção Cordal em Sistemas Distribuídos [Rio de Janeiro] 2004

XIII, 146 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2004)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

- 1 - Senso de direção
- 2 - Cobertura dupla por ciclos
- 3 - Grafos circulantes

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*À esposa mais amada e especial do mundo, Jeane.*

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus, criador e dono de toda a ciência, onisciente, onipotente, onipresente, e ainda assim se preocupa conosco, meras criaturas, mas incondicionalmente amadas por Ele e chamadas de *filhos*. A Ele, toda honra e glória.

À minha querida esposa Jeane, por toda a compreensão e estímulo, por suportar papéis com “bolinhas” e “tracinhos” espalhados por toda a casa, por ter que dividir minha atenção com um editor de texto e não emitir nenhuma reclamação sequer, pelas madrugadas nada românticas “à luz de monitor” que enfrentou, pelas viagens não realizadas, por ter aberto mão de tanta coisa que não caberia aqui. Enfim, por ser a melhor esposa que algum homem poderia sequer imaginar em ter e me fazer o mais feliz dos maridos. Eu te amo demais!

Aos meus pais, pelo incentivo, apoio, exemplo, amor e carinho com que me educaram, nunca medindo esforços para me proporcionar o melhor que poderiam em todos os aspectos da vida. Serei sempre grato a vocês.

Ao Prof. Valmir Barbosa, muito mais que um orientador, um incentivador e amigo, por fornecer um *senso de direção* a este trabalho, pela paciência para ouvir minhas demonstrações nem sempre muito claras, por ser um facilitador do processo de aprendizagem, pelas dicas e conselhos sempre pertinentes, e por valorizar seus alunos como poucos professores o fazem.

Aos Profs. Jayme Szwarcfiter e Fábio Protti, por aceitarem fazer parte desta banca, agregando valor inestimável a este trabalho. Ao Prof. Jayme, em especial, por ter me iniciado na teoria dos grafos, lecionando de forma tão prazerosa.

Ao meu grande amigo e parceiro de pesquisa, David Sotelo, maior responsável pela minha decisão em fazer este mestrado e seguir carreira acadêmica, exemplo de dedicação no que faz e de amizade sincera.

Ao diretor de suporte da Coordenadoria de Informática da Secretaria Municipal de Fazenda do Rio de Janeiro, Alexandre Cardeman, pelo incentivo e liberação parcial do trabalho para me dedicar ao mestrado.

Por fim, gostaria de agradecer a alguns professores e pesquisadores estrangeiros que me ajudaram via correio eletrônico, mostrando a solidariedade e espírito de colaboração da comunidade científica. Ao Prof. Brendan McKay (Australian National University), por ter alterado seu software gerador de grafos randômicos (*genrang*), seguindo uma sugestão minha. Ao Prof. Gerard Tel (Universiteit Utrecht), por ter me enviado uma cópia do seu artigo [100]. Aos Profs. Larry Stockmeyer (University of California - Santa Cruz), André Raspaud (Université Bordeaux I) e Alan Frieze (Carnegie Mellon University), por me enviarem cópias de seus artigos, mesmo sem terem sido inclusos na bibliografia, e/ou indicarem outras bibliografias. Ao Prof. Larry Harper (University of California - Riverside), por me enviar a tese de doutorado de uma aluna sua (pelo correio convencional!). Ao Prof. Dan Archdeacon (University of Vermont), por ter indicado o livro [105]. Ao Prof. Cun-Quan “CQ” Zhang (West Virginia University), pelas sugestões e informações sobre CDC. Ao Prof. Carsten Thomassen (Danmarks Tekniske Universitet), pela indicação de bibliografia [102] e sugestões.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## SENSO DE DIREÇÃO CORDAL EM SISTEMAS DISTRIBUÍDOS

Rodrigo Simões Camara Leão

Setembro/2004

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Senso de direção é uma propriedade de grafos rotulados na qual a rotulação das arestas segue um esquema global consistente. Esta propriedade é conhecida por reduzir consideravelmente a complexidade de diversos problemas distribuídos. Neste trabalho, estudamos uma instância particular de senso de direção denominada senso de direção cordal (SDC). Em especial, caracterizamos a classe de grafos cúbicos que admitem SDC minimal (com o menor número possível de rótulos). Generalizamos vários resultados para a classe dos grafos regulares. Demonstramos que a classe dos grafos regulares que admitem SDC minimal é equivalente à classe dos grafos circulantes, apresentando uma forma eficiente (polinomial) de reconhecimento desta classe quando o grau do grafo é fixo. Analisamos outra propriedade, denominada cobertura dupla por ciclos (CDC), e descrevemos um método construtivo para geração de grafos cúbicos que admitem 6-CDC (CDC onde todos os ciclos possuem comprimento 6). Relacionamos o SDC minimal com a 6-CDC em grafos cúbicos, e mostramos que existe apenas um grafo cúbico ( $K_4$ ) que admite SDC minimal e não admite 6-CDC.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## CHORDAL SENSE OF DIRECTION IN DISTRIBUTED SYSTEMS

Rodrigo Simões Camara Leão

September/2004

Advisor: Valmir Carneiro Barbosa

Department: Systems Engineering and Computer Science

Sense of direction is a property of labeled graphs in which the edge labeling follows a consistent global scheme. This property is known to considerably reduce the complexity of several distributed problems. In this work, we study a particular instance of sense of direction called chordal sense of direction (CSD). In special, we characterize the class of cubic graphs that admit a minimal CSD (a CSD with the minimum possible number of labels). We generalize many results to the class of regular graphs. We prove that the class of regular graphs that admit a minimal CSD and the class of circulant graphs are equivalent, presenting an efficient (polynomial) way of recognizing this class when the graph's degree is fixed. We analyze another property, called the cycle double cover (CDC), and we describe a constructive method for generating cubic graphs that have a 6-CDC (a CDC in which every cycle has length 6). We relate minimal CSD with 6-CDC in cubic graphs, and show that there is only one cubic graph ( $K_4$ ) that has a minimal SDC but does not admit a 6-CDC.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Definições básicas e notação . . . . .	4
1.1.1	Sistemas distribuídos . . . . .	4
1.1.2	Teoria dos grafos . . . . .	5
1.1.3	Teoria dos números . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Senso de Direção Cordal</b>	<b>12</b>
2.1	Rotulação de arestas . . . . .	12
2.2	Senso de direção . . . . .	14
2.2.1	Instâncias de senso de direção . . . . .	18
2.2.2	Problemas abertos . . . . .	22
2.3	SDC minimal em grafos cúbicos . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Cobertura Dupla por Ciclos</b>	<b>34</b>
3.1	Definições básicas e notação . . . . .	34
3.2	6-CDC em grafos cúbicos . . . . .	36
3.2.1	Um método recursivo . . . . .	40
3.2.2	Grafos cúbicos de cintura 3 com 6-CDC . . . . .	45
3.2.3	Grafos cúbicos de cintura 4 com 6-CDC . . . . .	51
3.2.4	Grafos cúbicos de cintura 5 com 6-CDC . . . . .	62



3.2.5	Grafos cúbicos de cintura 6 com 6-CDC . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Relação entre o SD Cordal e a CDC</b>	<b>89</b>
4.1	Ciclo hamiltoniano e 3-coloração . . . . .	89
4.2	Grafos que admitem SDCM e 6-CDC . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Generalizações para Grafos Regulares</b>	<b>99</b>
5.1	SDCM em grafos $k$ -regulares . . . . .	100
5.2	Grafos circulantes . . . . .	115
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>122</b>
<b>A</b>	<b>Definição Formal de Senso de Direção</b>	<b>126</b>
A.1	Definições e notação . . . . .	126
A.2	Senso de direção . . . . .	128
A.3	Exemplo da presença de SD . . . . .	129
A.4	Exemplo da ausência de SD . . . . .	131
A.5	SD fraco . . . . .	131
A.6	Consistência do SD cordal . . . . .	132

# Lista de Figuras

1.1	Escada de Möbius $M_{10}$ . . . . .	9
1.2	Exemplo de toro $(T_{12,3})$ . . . . .	9
2.1	Exemplo de grafo rotulado. . . . .	13
2.2	Orientação de anel e toro. . . . .	15
2.3	SD Cordal e SD de Vizinhança. . . . .	20
2.4	SD Coordenado e SD Polar. . . . .	21
2.5	Hipercubo com SD Dimensional. . . . .	23
2.6	Exemplo de grafo que admite SDCM. . . . .	25
2.7	Os 2 ciclos gerados pelo 2-fator quando $\gamma \not\parallel n$ . . . . .	30
2.8	Grafo que admite SDCM onde $\gamma \not\parallel n$ . . . . .	31
2.9	Ciclo hamiltoniano em $G$ onde $\gamma \not\parallel n$ . . . . .	32
2.10	Grafo que possui ciclo hamiltoniano mas não admite SDCM. . . . .	32
3.1	Hexágono nos grafos cúbicos que admitem SDCM. . . . .	37
3.2	Únicos grafos onde existem $C_i$ e $C_j$ tais que $\mu(C_i, C_j) = 3$ . . . . .	38
3.3	Possibilidades para o ciclo $C_j$ , onde $\mu(C_i, C_j) = 3$ . . . . .	39
3.4	Configuração da 6-CDC de $G$ (a) aplicada a $H$ (b). . . . .	41
3.5	Grafo $H'$ (a) tal que $H' \cup [G - E(H)]$ (b) admite 6-CDC. . . . .	42
3.6	Um triângulo $(S_3)$ e os ciclos da 6-CDC que o atravessam. . . . .	45
3.7	Triângulos com aresta em comum deixam a 6-CDC inconsistente. . . . .	47

3.8	Menor grafo ( $B_3$ ) de cintura 3 que admite 6-CDC. . . . .	48
3.9	Menor grafo ( $I_3$ ) de cintura 3 equivalente a um triângulo. . . . .	50
3.10	Resultado da primeira iteração em $B_3$ . . . . .	51
3.11	Resultado da segunda iteração em $B_3$ . . . . .	52
3.12	Resultado da terceira iteração em $B_3$ . . . . .	52
3.13	Possíveis configurações da 6-CDC no quadrado. . . . .	53
3.14	$B_{4a}$ . . . . .	54
3.15	Menor grafo ( $I_{4a}$ ) de cintura 4 equivalente ao $S_{4a}$ . . . . .	55
3.16	As arestas $ef$ e $gh$ devem fechar $C_1$ e $C_3$ , respectivamente. . . . .	55
3.17	$B_{4b}$ e $B_{4b'}$ . . . . .	56
3.18	Menor grafo ( $I_{4b}$ ) de cintura 4 equivalente ao $S_{4b}$ . . . . .	57
3.19	Se $C_3$ utiliza o caminho $hef$ , $C_4$ fica inconsistente. . . . .	59
3.20	$B_{4c}$ . . . . .	59
3.21	Menor grafo ( $I_{4c}$ ) de cintura 4 equivalente ao $S_{4c}$ . . . . .	60
3.22	Outra representação para $I_{4c}$ . . . . .	61
3.23	Grafo ( $M_6$ ) gerado quando $e = g$ e $f = h$ em $S_4$ . . . . .	63
3.24	Possíveis configurações da 6-CDC no pentágono. . . . .	64
3.25	Candidato a $I_{5a}$ . . . . .	65
3.26	Menor grafo ( $I_{5a}$ ) de cintura 5 equivalente ao $S_{5a}$ . . . . .	66
3.27	Menor grafo ( $I_5$ ) de cintura 5 equivalente ao $S_{5c}$ . . . . .	69
3.28	Completando $C_6$ com $r$ forma um triângulo ( $qtrq$ ). . . . .	70
3.29	Menor grafo ( $B_5$ ) de cintura 5 que admite 6-CDC. . . . .	72
3.30	Possíveis configurações da 6-CDC no hexágono. . . . .	73
3.31	$B_{6a}$ e $I_{6a}$ . . . . .	74
3.32	$B_{6b}$ e $I_{6b}$ . . . . .	75
3.33	$B_{6c}$ e $I_{6c}$ . . . . .	76
3.34	$B_{6d}$ , $B_{6d'}$ e $I_{6d}$ . . . . .	77

3.35	Único caso onde $C_i$ e $C_j$ induzem um grafo de cintura 5. . . . .	78
3.36	Subgrafo de $D_{6e}$ . . . . .	80
3.37	Subgrafo de $B_{6e}$ . . . . .	81
3.38	Subgrafo de $B_{6e}$ a ser completado e seus vértices deficientes. . .	81
3.39	Vértices cheios à distância 6 conectados de forma cruzada. . . . .	82
3.40	Vértices cheios à distância 9 conectados de duas formas. . . . .	83
3.41	Todos os vértices cheios à distância 9 conectados de forma direta. . .	84
3.42	Combinando 2 vértices cheios à distância 6 de forma cruzada. . . . .	85
3.43	$B_{6e}$ e $B_{6e'}$ . . . . .	85
3.44	Configuração parcial do $I_{6e}$ . . . . .	86
3.45	Menor grafo ( $I_{6e}$ ) de cintura 6 equivalente ao $S_{6e}$ . . . . .	87
3.46	Primeira iteração sobre $B_{6e}$ . . . . .	87
3.47	Primeira iteração sobre $B_{6e'}$ . . . . .	88
4.1	Hamiltonicidade de $B_3$ e $I_3$ . . . . .	90
4.2	Hamiltonicidade de $B_4$ e $I_4$ . . . . .	91
4.3	Hamiltonicidade de $B_5$ e $I_5$ . . . . .	91
4.4	Hamiltonicidade de $B_{6a}$ e $I_{6a}$ . . . . .	92
4.5	Hamiltonicidade de $B_{6b}$ e $I_{6b}$ . . . . .	92
4.6	Hamiltonicidade de $B_{6c}$ e $I_{6c}$ . . . . .	93
4.7	Hamiltonicidade de $B_{6d}$ , $B_{6d'}$ e $I_{6d}$ . . . . .	94
4.8	Hamiltonicidade de $B_{6e}$ , $B_{6e'}$ e $I_{6e}$ . . . . .	95
4.9	Único grafo de cintura 3, $n > 4$ , que admite SDCM ( $T_{6,2}$ ). . . . .	96
4.10	Aresta $uv$ , rotulada com $n/2$ , pertencendo a um triângulo. . . . .	96
4.11	$n = 6$ , $\gamma = 2$ . . . . .	97
5.1	Menor $G$ onde $d_\gamma > 1$ e $d' = 1$ ( $n = 30$ , $\gamma_1 = 6$ , $\gamma_2 = 10$ ). . . . .	104
5.2	Caminho percorrido pelos rótulos $\{\gamma_j, \gamma_i, n - \gamma_j\}$ . . . . .	106

5.3	Ciclo hamiltoniano quando $\gamma_i \not\leq n$ , para todo $\gamma_i$ , e $d_\gamma = 1$ . . .	106
5.4	Ciclo hamiltoniano quando $\gamma_i \not\leq n$ , para todo $\gamma_i$ , e $d_\gamma > 1$ . . .	107
5.5	Outro ciclo hamiltoniano quando $\gamma_i \not\leq n$ , para todo $\gamma_i$ , e $d_\gamma > 1$ .	108
5.6	Grafos isomorfos que admitem SDCM. . . . .	110
5.7	Exemplo de equivalência onde $\gamma_1 = \gamma'_1 = 1$ . . . . .	113
5.8	Contra-exemplo da Conjectura de Ádam. . . . .	120
A.1	Comunicação entre $u$ e $v$ a respeito de $w$ . . . . .	129
A.2	Exemplo de rotulação que não é um SD. . . . .	131
A.3	Exemplo de rotulação que é um SDF mas não é um SD. . . .	132

# Capítulo 1

## Introdução

A pesquisa na área de sistemas distribuídos é uma necessidade crescente e patente nos modelos e sistemas computacionais atuais. O conceito de distribuição do processamento entre várias entidades se fortalece na medida em que as tecnologias de redes de computadores e processamento paralelo avançam a estágios anteriormente inimagináveis. Os progressos destas áreas de pesquisa têm impulsionado o desenvolvimento (ou, ao menos, a revisitação) de algoritmos, mecanismos, técnicas, dispositivos, etc., que tratem este novo paradigma de forma eficiente.

Por outro lado, a modelagem de um sistema distribuído através de um grafo permite a imediata obtenção de resultados de suma relevância. A interação entre as áreas de teoria dos grafos e sistemas distribuídos não é nova [7, 9, 66, 101], mas profundamente edificante para ambas as partes. Tanto o estudo de algoritmos distribuídos ganha novas e poderosas ferramentas, quanto a análise de problemas em grafos vê aplicações reais de seus resultados e conceitos.

Neste trabalho, analisaremos o conceito de senso de direção em sistemas distribuídos, o qual já foi demonstrado ser eficaz em reduzir a complexidade

da solução de diversos problemas distribuídos [92]. Em especial, caracterizaremos de forma completa a classe dos grafos cúbicos que admitem senso de direção cordal minimal (SDCM), generalizando posteriormente vários conceitos para grafos  $k$ -regulares. Com estas generalizações, explicitaremos a equivalência entre os grafos que admitem SDCM e a classe dos grafos circulares.

Mostraremos também a relação da classe dos grafos cúbicos que admitem SDCM com o conceito de cobertura dupla por ciclos [105], provando que, na verdade, tal classe é um subconjunto (com apenas 1 exceção) da classe dos grafos que admitem uma cobertura dupla por ciclos de comprimento 6. Apresentaremos um método recursivo para a geração de uma família infinita de grafos cúbicos que admitem 6-CDC. Provaremos, ainda, que os grafos de ambas as classes são hamiltonianos.

Descreveremos, a seguir, como o trabalho está organizado, destacando a contribuição de cada capítulo.

No Capítulo 1, é apresentada uma visão geral do que trataremos neste trabalho, além de fornecer as definições e notações utilizadas por todo o texto.

No Capítulo 2, introduziremos o conceito de senso de direção (SD). Para isso, começaremos descrevendo o conceito de rotulação local de arestas. Definiremos SD de maneira informal, demonstrando o seu impacto na complexidade de problemas distribuídos e o atual estado da pesquisa dos seus problemas ainda abertos. Descreveremos, neste capítulo, todas as instâncias de SD encontradas na literatura sobre o assunto. Analisaremos, especificamente, a instância do senso de direção cordal (SDC) no contexto dos grafos cúbicos, chegando à caracterização da classe dos grafos cúbicos que admitem SDCM.

No Capítulo 3, será apresentado o conceito de cobertura dupla por ciclos (CDC). Focalizaremos, então, o estudo da CDC cujos ciclos possuem comprimento 6 (6-CDC) no contexto dos grafos cúbicos. Apresentaremos uma forma construtiva de gerar grafos cúbicos que admitem 6-CDC, dividindo os casos conforme a cintura do grafo.

No Capítulo 4, relacionaremos os conceitos do SDCM com a 6-CDC, utilizando e consolidando os resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3. Explicitaremos a intercessão entre a classe dos grafos cúbicos que admitem SDCM e a classe dos grafos cúbicos que admitem 6-CDC, mostrando que a primeira é praticamente um subconjunto da segunda.

No Capítulo 5, expandiremos os resultados do Capítulo 2 para a classe dos grafos  $k$ -regulares. Apresentaremos a classe dos grafos circulantes e o problema do seu reconhecimento, o qual continua aberto. Demonstraremos que os circulantes são equivalentes aos grafos  $k$ -regulares que admitem SDCM, evidenciando a importância da caracterização desta classe de grafos.

No Capítulo 6, serão expostas as conclusões deste trabalho. Apresentaremos o impacto dos resultados obtidos e as direções futuras de pesquisa no tema que se abrem com estas contribuições.

No Apêndice A, definiremos formalmente o conceito do SD (conforme [41]), exemplificando o seu emprego e mostrando a consistência do SDC com esta definição. Esta formalização não foi inserida nos capítulos anteriores por não ser necessária para a compreensão dos resultados deste trabalho.



## 1.1 Definições básicas e notação

### 1.1.1 Sistemas distribuídos

Um *sistema distribuído* é um conjunto de processadores interligados de alguma forma por uma rede de canais de comunicação. Neste trabalho serão considerados sistemas distribuídos onde cada processador possui uma memória local não-compartilhada, e cada canal de comunicação conecta exclusivamente dois processadores distintos. Como os processadores não compartilham memória, a única forma de intercâmbio de informação entre eles é através da troca de mensagens pela rede de comunicação.

A *complexidade de mensagens* e a *complexidade de tempo* de um problema distribuído referem-se, respectivamente, à quantidade de mensagens e de tempo requerida na solução. As complexidades de tempo referenciadas neste trabalho são todas sobre sistemas *assíncronos*, ou seja, onde não há uma referência global de tempo e cada processador pode, sempre que necessário, enviar uma mensagem imediatamente. O tempo de processamento local (isto é, o tempo gasto em outras tarefas que não a comunicação) nestes sistemas, em geral, é desprezível e desconsiderado no cálculo da complexidade assintótica, assim como o tempo de transmissão (e propagação). Em geral, também é considerado que as mensagens têm comprimento  $O(1)$ . Assim, nestes sistemas, a complexidade de tempo é medida pelo número de mensagens na maior cadeia causal da forma “recebe uma mensagem e envia uma mensagem como consequência” [9].

Sistemas distribuídos são usualmente modelados utilizando-se grafos [7, 9, 66, 101]. O mesmo ocorre neste trabalho e, por isso, alguns conceitos de teoria dos grafos serão fundamentais para a compreensão dos resultados aqui expostos.

## 1.1.2 Teoria dos grafos

Um *grafo simples*  $G$  é um par ordenado  $(V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  consiste de um conjunto finito e não-vazio de *vértices*, e  $E(G)$  consiste de um conjunto de *arestas*. Uma aresta é um par não-ordenado de elementos distintos de  $V(G)$ , tais que arestas distintas nunca são formadas por um mesmo par de vértices. Todos os grafos tratados neste trabalho serão simples, assim serão chamados simplesmente de *grafos*. Por todo o texto, o literal  $G$  denotará um grafo qualquer sempre que omitida a sua especificação.

Dois vértices distintos  $u$  e  $v$ , pertencentes a  $V(G)$ , são ditos *adjacentes* (ou *vizinhos*) se a aresta  $e = uv$  pertence a  $E(G)$ . Neste caso, dizemos ainda que  $u$  e  $v$  são os *extremos* de  $e$ , e que a aresta  $e$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$ . Como uma aresta é um par não-ordenado, podemos representá-la como  $e = uv = vu$ . Duas arestas são ditas *adjacentes* se possuem um extremo em comum. Denotaremos por  $n$  o valor  $|V(G)|$  e por  $m$  o valor  $|E(G)|$ , e tais literais terão este significado sempre que omitida a sua especificação.

Seja  $G$  um grafo e  $S$  um subconjunto de  $V(G)$ . A *vizinhança* de  $S$  em  $G$ , denotada por  $N_G(S)$ , é o conjunto de todos os vértices adjacentes a algum vértice de  $S$  em  $G$ .

Um grafo  $G$  é dito *completo* quando quaisquer dois vértices distintos em  $G$  são adjacentes. O grafo completo com  $n$  vértices será representado por  $K_n$ .

Um grafo  $H$  é dito um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Nesse caso, dizemos ainda que  $G$  é um *supergrafo* de  $H$ . Suponhamos que  $V'$  seja um subconjunto não-vazio de  $V(G)$ . O subgrafo de  $G$  cujo conjunto de vértices é  $V'$  e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de  $G$  que possuem seus dois extremos em  $V'$  é chamado de *subgrafo induzido* de  $G$ , denotado por  $G[V']$ . Agora, suponhamos que  $E'$  seja um

subconjunto não-vazio de  $E(G)$ . O subgrafo de  $G$  cujo conjunto de vértices é o conjunto de extremos das arestas em  $E'$  e cujo conjunto de arestas é  $E'$  é chamado de subgrafo de  $G$  *induzido por arestas de  $E'$* .

Sejam  $G$  e  $H$  grafos com pelo menos 1 vértice em comum. O supergrafo  $S = G \cup H$  é tal que  $E(S) = E(G) \cup E(H)$  e  $V(S) = V(G) \cup V(H)$ . Denotaremos por  $G - E'$  o grafo obtido de  $G$  pela remoção das arestas em  $E'$  e dos vértices que, devido a esta operação, tiverem todas as arestas incidentes a eles removidas (para que o grafo resultante sempre seja conexo).

Seja  $H$  um subgrafo de  $G$ . Chamamos  $H$  de *subgrafo gerador* de  $G$  se  $V(H) = V(G)$ . Uma *clique* de  $G$  é um subconjunto  $V' \subseteq V(G)$ , tal que  $G[V']$  é completo. Um *conjunto independente* de  $G$  é um subconjunto  $V' \subseteq V(G)$ , tal que se  $u, v \in V'$ , então  $uv \notin E(G)$ .

Sejam  $G$  e  $H$  grafos quaisquer. Dizemos que  $S$  se *decompõe* em  $G$  e  $H$  quando  $G$  e  $H$  são subgrafos geradores de  $S$  e  $E(G) \cap E(H) = \emptyset$ .

Dois grafos  $G$  e  $H$  são ditos *isomorfos* entre si, denotado por  $G \cong H$ , caso exista uma função bijetora  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv \in E(G)$  se e somente se  $f(u)f(v) \in E(H)$ . Chamamos de *automorfismo* de  $G$  um isomorfismo de  $G$  consigo próprio, ou seja, uma permutação em  $V(G)$  que preserva as adjacências.

O *grau* de um vértice  $u \in V(G)$ , denotado por  $d_G(u)$  é a quantidade de arestas de  $G$  incidentes a  $u$ . O *grau máximo* de  $G$ , denotado por  $\Delta(G)$ , é o maior entre todos os graus dos vértices em  $V(G)$ . O *grau mínimo* de  $G$ , denotado por  $\delta(G)$ , é o menor entre todos os graus dos vértices em  $V(G)$ . Um grafo  $G$  é dito *regular* se existe um inteiro  $k$  tal que  $d_G(u) = k$ , para todo  $u \in V(G)$ . Neste caso, dizemos que  $G$  é *k-regular*, e  $\Delta(G) = \delta(G) = k$ . Grafos 3-regulares são chamados de *grafos cúbicos*. Por todo o texto, o literal  $k$  significará o grau de  $G$ , quando  $G$  for regular.

O fato de cada aresta  $uv$  contribuir para o grau de dois vértices distintos ( $u$  e  $v$ ), faz com que a soma dos graus de todos os vértices de  $G$  seja o dobro do número de arestas. Segue-se, então, o teorema [24] enunciado a seguir.

**Teorema 1.1.**

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$$

Pela definição de grafo regular, podemos facilmente inferir o corolário abaixo.

**Corolário 1.2.** *Todo grafo  $k$ -regular, onde  $k$  é ímpar, possui um número par de vértices.*

Um *emparelhamento* em  $G$  é um conjunto de arestas não-adjacentes duas a duas. Dizemos que um emparelhamento  $M$  em  $G$  *satura* um vértice  $u \in V(G)$  se existe uma aresta  $e \in M$  tal que  $e$  é incidente a  $u$ . Um emparelhamento  $M$  em  $G$  é dito *perfeito* se satura todos os vértices de  $G$ .

Um  $k$ -*fator* de  $G$  é um subgrafo  $k$ -regular gerador de  $G$ . Temos, então, que o subgrafo induzido pelas arestas de um emparelhamento perfeito de um grafo  $G$  é um 1-fator de  $G$ .

Um *passeio* em  $G$  é uma seqüência  $v_0v_1 \dots v_l$  de vértices de  $G$  onde cada qual é adjacente a seus vizinhos na seqüência. Um *caminho* é um passeio onde todos os vértices são distintos. Chamamos de *ciclo* um passeio  $v_0v_1 \dots v_l$  onde  $v_0 \dots v_{l-1}$  é um caminho,  $v_l = v_0$  e  $l \geq 3$ . O *comprimento de um caminho*, assim como o *comprimento de um ciclo*, é dado pelo número  $l$  de arestas que o formam. Dizemos que um ciclo  $C$  é *par* (*ímpar*) se o comprimento de  $C$  é par (*ímpar*). Um ciclo de comprimento 3 será chamado de *triângulo*, assim como um ciclo de comprimento 4 é um *quadrado*, e assim por diante.

Dizemos que um ciclo é *hamiltoniano* se ele possui comprimento  $n$ . E  $G$  é *hamiltoniano* se possui ciclo hamiltoniano. A *cintura* de  $G$ , denotada

por  $g(G)$ , é o comprimento do menor ciclo em  $G$ . Se  $G$  não possui ciclos, definimos a cintura de  $G$  como infinita.

Seja  $C$  um ciclo de comprimento maior que 3. Chamamos de *corda* uma aresta  $uv$  onde  $u$  e  $v$  são vértices não-consecutivos de  $C$ .

Sejam  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$  os vértices de  $G$ . A *matriz de adjacências* de  $G$  é uma matriz  $n \times n$  tal que  $A(G) = [a_{ij}]$ , onde  $a_{ij}$  é o número de arestas incidentes a  $v_i$  e  $v_j$ . Como estamos lidando apenas com grafos simples, a matriz de adjacências só pode conter 0 e 1 como elementos.

Um grafo  $G$  é dito *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices distintos pertencentes a  $V(G)$ , e *desconexo* caso contrário. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo conexo  $H \subseteq G$  tal que  $G$  não possui subgrafo  $H' \supset H$  conexo. Um *corte de vértices* de  $G$  é um subconjunto  $V' \subseteq V(G)$  tal que a remoção dos vértices pertencentes a  $V'$  aumenta o número de componentes conexas de  $G$ . Um *corte de arestas* de  $G$  é um subconjunto  $E' \subseteq E(G)$  tal que a remoção das arestas pertencentes a  $E'$  aumenta o número de componentes conexas de  $G$ .

A *conectividade de vértices* de  $G$ , denotada por  $\kappa(G)$ , é a cardinalidade de seu corte de vértices mínimo. Por definição, a conectividade de um grafo completo é igual a  $n$ . Seja um inteiro  $p \leq \kappa(G)$ . Dizemos que  $G$  é *p-conexo*. A *conectividade de arestas* de  $G$ , denotada por  $\kappa'(G)$ , é a cardinalidade de seu corte de arestas mínimo. Seja um inteiro  $p \leq \kappa'(G)$ . Dizemos que  $G$  é *p-conexo em arestas*.

Seja um ciclo de comprimento  $n$ , onde  $n$  é par. Uma *escada de Möbius*  $M_n$  é o grafo obtido pela adição de cordas entre os pares de vértices que distam  $n/2$  neste ciclo. Claramente,  $M_n$  é cúbico. Um exemplo pode ser observado na Figura 1.1(a). É fácil representar este grafo na forma de escada, conforme a Figura 1.1(b).

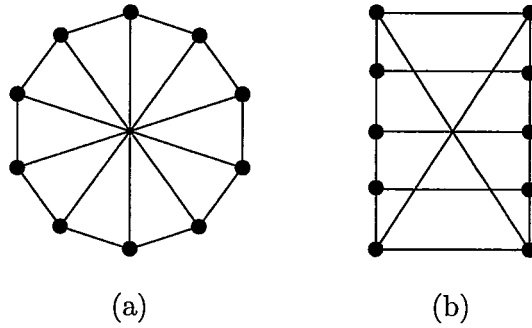


Figura 1.1: Escada de Möbius  $M_{10}$  (a) e sua representação em forma de escada (b).

Um *toro*  $T_{n,l}$  é uma malha retangular  $l \times n/l$ , onde vértices opostos na mesma linha ou coluna são conectados. Na Figura 1.2 é mostrado o  $T_{12,3}$ .

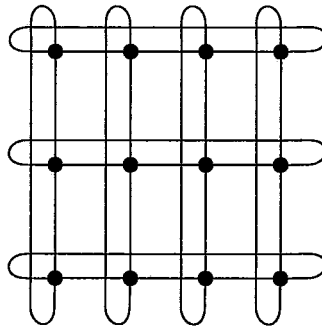


Figura 1.2: Exemplo de toro ( $T_{12,3}$ ).

Um sistema distribuído será representado por um grafo conexo  $G$ , no qual cada vértice representa um processador e cada aresta  $uv$  corresponde a um canal de comunicação que conecta os processadores representados pelos vértices  $u$  e  $v$  [7, 9, 66, 101].

### 1.1.3 Teoria dos números

Sejam  $a$  e  $b$  números inteiros. Dizemos que  $a$  *divide*  $b$  (ou que  $a$  é divisor de  $b$  ou, ainda, que  $b$  é *divisível* por  $a$ ), denotado por  $a \mid b$ , se  $a > 0$  e o quociente  $b/a$  é um número inteiro. Caso contrário, denotaremos por  $a \nmid b$ . Assim, escrevemos

$$a \mid b \iff a > 0 \text{ e } b = at$$

para algum inteiro  $t$ .

Outra relação semelhante é quando dizemos que  $b$  é *múltiplo* de  $a$ , que difere apenas pelo fato de que  $a$  não precisa ser positivo. Neste caso, queremos simplesmente dizer que  $b = at$  para algum inteiro  $t$ .

O *máximo divisor comum* de dois inteiros  $a$  e  $b$ , denotado por  $\text{mdc}(a, b)$ , é o maior inteiro que divide ambos. De forma análoga, o *mínimo múltiplo comum* de dois inteiros, denotado por  $\text{mmc}(a, b)$ , é o menor inteiro divisível por ambos.

Em várias partes deste trabalho, especialmente nos Capítulos 2 e 5, utilizaremos a noção de *primalidade relativa*. Dizemos que dois inteiros  $a$  e  $b$  são *primos entre si*, denotando por  $a \perp b$ , se  $\text{mdc}(a, b) = 1$ . É interessante ressaltar que apesar de o número 1 não ser considerado um número primo (absoluto), temos que  $1 \perp a$  para qualquer inteiro  $a > 0$ .

A operação binária  $a \bmod b$  é definida como o resto da divisão  $a/b$ . A operação  $\bmod$  ocorrerá com muita frequência neste trabalho. Portanto, visando a simplificação e leveza do texto, utilizaremos os operadores  $+_n$ ,  $-_n$  e  $\cdot_n$  para representar a soma, subtração e multiplicação *módulo*  $n$ , respectivamente. Podemos escrever, então,

$$(a + b) \bmod n = a +_n b,$$

$$(a - b) \bmod n = a -_n b,$$

$$(a \cdot b) \bmod n = a \cdot_n b.$$

Em diversas proposições deste trabalho, será utilizada uma relação entre primalidade relativa e multiplicação na aritmética modular. Visando evitar a duplicidade da demonstração desta relação durante as provas de vários lemas, a colocamos aqui em forma de lema, referenciando devidamente sempre que for utilizada.

**Lema 1.3.** *Sejam  $a$ ,  $b$  e  $n$  inteiros. Então  $a \perp n$  se e somente se o menor  $b$  que satisfaz a equação  $b \cdot_n a = 0$  é  $n$ .*

*Prova.* ( $\Rightarrow$ ) Suponhamos que  $a \perp n$ , logo  $a$  e  $n$  não possuem divisor em comum. Podemos afirmar, então, que  $\text{mmc}(a, n) = an$ . Como  $an \bmod n = 0$ ,  $n$  é o menor inteiro  $b$  que satisfaz  $b \cdot_n a = 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos que o menor  $b$  que satisfaz  $b \cdot_n a = 0$  seja  $n$ . Sabemos que  $cn \bmod n = 0$ , para qualquer inteiro  $c$ . Logo, para qualquer  $b$  tal que  $b \cdot_n a = 0$ , o produto  $ba$  deve ser múltiplo tanto de  $n$  quanto de  $a$ . O menor inteiro que é múltiplo de  $a$  e  $n$  é  $\text{mmc}(a, n)$ . Suponhamos (por absurdo) que  $\text{mdc}(a, n) = d > 1$ . Neste caso,  $\text{mmc}(a, n)/d$  é múltiplo de  $a$  e  $n$ , o que é uma contradição. Logo,  $\text{mdc}(a, n) = 1$  e, conseqüentemente,  $a \perp n$ .  $\square$

Um dos algoritmos mais antigos (mais de 2300 anos de idade), e ainda muito eficiente, é o *algoritmo de Euclides* para calcular  $\text{mdc}(a, b)$  [49]. Neste algoritmo, é utilizado implicitamente o teorema a seguir.

**Teorema 1.4 (Euclides).**

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, b \bmod a)$$

Esta igualdade será utilizada na prova do Lema 5.11. Para aprofundamento no assunto de teoria dos números sugerimos [49] e [104].



# Capítulo 2

## Senso de Direção Cordal

Neste capítulo serão introduzidos conceitos e apresentados resultados sobre senso de direção cordal e o problema do *senso de direção cordal minimal* será abordado. Analisaremos, em especial, o caso dos grafos cúbicos, caracterizando de forma completa os grafos desta classe que admitem senso de direção cordal minimal.

Pelo fato de o conceito de senso de direção se referir a uma propriedade em rotulações de arestas, inicialmente abordaremos algumas noções deste assunto. Em seguida, serão introduzidos conceitos gerais de senso de direção utilizados no desenvolvimento deste trabalho e importantes para a compreensão do mesmo. Uma definição mais formal do conceito de senso de direção pode ser encontrada no Apêndice A.

### 2.1 Rotulação de arestas

Seja um vértice  $u \in V(G)$ . Denotaremos por  $E[u]$  o conjunto de arestas de  $G$  incidentes a  $u$ . Dado um conjunto  $\Gamma$  denominado *conjunto de rótulos*, uma *função de rotulação de arestas* para  $u$  é uma função da forma  $\lambda_u : E[u] \rightarrow \Gamma$ .

Sejam  $\lambda_u, \lambda_v, \dots, \lambda_z$  funções de rotulação de arestas de todos os vértices pertencentes a  $V(G)$ . O conjunto  $\lambda = \{\lambda_u, \lambda_v, \dots, \lambda_z\}$  é dito uma *rotulação* de  $G$ . Note que em uma rotulação cada aresta de  $G$  possui dois rótulos associados, um para cada extremo.

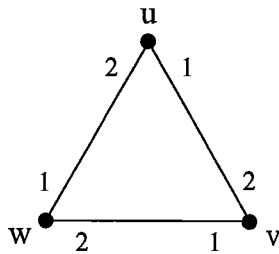


Figura 2.1: Exemplo de grafo rotulado.

Na Figura 2.1 é representado um grafo cuja rotulação é dada por:

$$\lambda_u(uv) = 1$$

$$\lambda_u(uw) = 2$$

$$\lambda_v(vu) = 2$$

$$\lambda_v(vw) = 1$$

$$\lambda_w(wu) = 1$$

$$\lambda_w(wv) = 2,$$

onde  $\Gamma = \{1, 2\}$ .

Dizemos que uma rotulação possui *orientação local* se seus elementos são funções injetoras, ou seja, se em cada vértice  $u \in V(G)$  os rótulos atribuídos às arestas incidentes são todos distintos. Uma rotulação  $\lambda$  possui *simetria de arestas* se existe uma bijeção  $\psi : \Gamma \rightarrow \Gamma$ , tal que para toda aresta  $uv \in E(G)$ ,  $\lambda_u(uv) = \psi(\lambda_v(vu))$ . Assim, dada uma aresta  $uv \in E(G)$  e uma rotulação  $\lambda$  com simetria de arestas, podemos inferir o rótulo que o vértice  $v$  associa a

$uv$ , a partir do rótulo que o vértice  $u$  associa a esta mesma aresta, aplicando a função de simetria  $\psi$ . Dizemos que uma rotulação  $\lambda$  é uma *orientação localmente simétrica* se ela possui tanto orientação local quanto simetria de arestas. É fácil verificar que a rotulação da Figura 2.1 é uma orientação localmente simétrica, cuja função de simetria é dada por

$$\psi(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{se } \gamma = 2 \\ 2 & \text{se } \gamma = 1, \end{cases}$$

onde  $\gamma \in \Gamma$ .

Seja  $\lambda$  uma rotulação para  $G$ . Um *grafo rotulado* é denotado pelo par ordenado  $(G, \lambda)$ .

## 2.2 Senso de direção

Em [92] foi verificada uma propriedade denominada *senso de direção* que, quando presente em sistemas distribuídos, reduz consideravelmente a complexidade da solução de diversos problemas. Esta propriedade refere-se à capacidade de os processadores distinguirem os canais de comunicação incidentes a eles segundo algum esquema global consistente. Dado um grafo rotulado  $(G, \lambda)$ , dizemos que o sistema possui *senso de direção* (SD) quando é possível inferir, através dos rótulos associados às arestas de  $G$ , se diferentes passeios iniciados em um vértice  $v$  terminam ou não em um mesmo vértice. Neste caso, dizemos ainda que  $\lambda$  é um SD para  $G$ . Uma condição claramente necessária para a existência de SD é que  $\lambda$  seja uma orientação local. E se  $\lambda$  é uma orientação localmente simétrica, temos uma forma mais forte de SD chamado de *SD simétrico*.

Existem algumas instâncias clássicas de SD em topologias específicas que já eram exploradas anteriormente à generalização do conceito. Por exemplo,

em uma topologia de *anel*, esta propriedade, usualmente chamada simplesmente de *orientação*, expressa a capacidade de os processadores distinguirem “esquerda” de “direita”, onde “esquerda” tem o mesmo significado para todos os processadores. Já na orientação de um *toro*, são acrescentados ainda os rótulos “cima” e “baixo”. Exemplos de orientação em anéis e toros são mostrados nas Figuras 2.2(a) e 2.2(b), respectivamente.

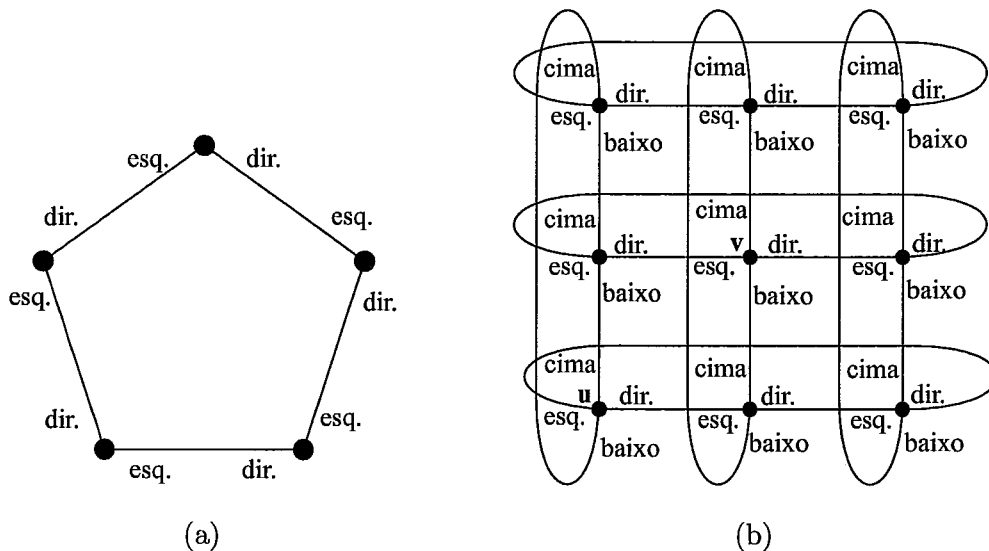


Figura 2.2: Orientação de anel (a) e toro (b).

Outro caso particular de SD de especial interesse é a *coloração de arestas* [35], onde a função de simetria de arestas é a identidade. Desta forma, os rótulos associados a cada aresta são idênticos nos seus dois extremos.

Neste trabalho, trataremos, em especial, da instância de SD Cordal, onde os rótulos são definidos pela distância entre os vértices em uma dada ordenação cíclica (a ser formalizado adiante).

Durante as últimas duas décadas, várias novas evidências da influência positiva do senso de direção na complexidade de problemas distribuídos se sucederam. No entanto, este conceito só foi completamente formalizado em

[41]. Uma das fortes evidências iniciais do impacto do senso de direção foi o problema da *eleição de líder* em grafos completos. Em [55] foi estabelecido que  $\Omega(n \log n)$  mensagens são necessárias para a solução deste problema quando nada é assumido sobre a rotulação das arestas. No entanto, em [64] foi demonstrado que, assumindo a existência de um SD<sup>1</sup>,  $O(n)$  mensagens são suficientes para o mesmo problema.

Muitos resultados na literatura sobre redução de complexidade de problemas distribuídos clássicos (como eleição, *broadcast*, busca em profundidade, árvore geradora mínima, etc.) atacaram topologias específicas como grafos completos [30, 40, 53, 64, 66, 73, 74, 95], anéis cordais [6, 54, 71, 83, 100], hipercubos [8, 30, 37, 89, 98], dentre outras. Entretanto, as propriedades e algoritmos que exploram o SD em topologias arbitrárias também possui vasta literatura [38, 39, 40, 45, 58, 91, 94, 100]. Diversas pesquisas têm se dedicado ainda ao estudo da computabilidade em sistemas anônimos, ou seja, o estudo de quais problemas podem ser resolvidos quando não há identificadores distintos associados aos vértices [5, 15, 17, 43, 56, 57, 103].

Em [22], foi exibido um algoritmo de complexidade de tempo  $O(n^{14,256})$  para o problema de, dado um grafo rotulado  $(G, \lambda)$ , decidir se  $\lambda$  é um SD para  $G$ . Apesar de polinomial, esta complexidade é relativamente alta. E esta foi a motivação para que em [47] fosse investigada a relação entre a topologia de  $G$  e as propriedades que uma rotulação deve satisfazer para ser um SD para  $G$ . Com isso, algoritmos de teste mais simples poderiam ser desenvolvidos para determinadas classes de grafos.

Pelo fato de a presença de SD reduzir a complexidade de diversos problemas distribuídos, o custo computacional da sua construção em grafos não rotulados é de óbvia relevância. Este problema foi estudado em [99, 100],

---

<sup>1</sup>Do tipo Cordal.

onde foi demonstrado que  $\Omega(m - n/2)$  mensagens são necessárias para construir um SD. O mesmo resultado se aplica ao SD Cordal (será definido na Seção 2.3). Em [96], foi apresentado um algoritmo polinomial para encontrar uma orientação localmente simétrica em um grafo com o menor número de rótulos possível. Este resultado complementa o estudo em [47], onde são caracterizadas grandes classes de grafos onde a orientação localmente simétrica é suficiente para a existência de SD.

Seria de especial interesse utilizar um SD que possuísse o menor número possível de rótulos. É fácil verificar que este número (cardinalidade de  $\Gamma$ ) possui limite inferior  $\Delta(G)$ , que é o mínimo para se garantir a orientação local, necessária para os vértices distinguirem os seus vizinhos e, conseqüentemente, necessária para o SD. O limite superior é dado por  $n$ , já que na pior hipótese podemos arbitrar identificadores únicos aos vértices e rotular a aresta  $uv$  em  $u$  com o identificador do vértice  $v$  ( $\lambda_u(uv) = v$ ). Assim,  $\Delta(G) \leq |\Gamma| \leq n$ . Um SD que utiliza  $\Delta(G)$  rótulos é denominado *SD minimal*<sup>2</sup> [18, 20, 21, 42]. Em [18] foi provado que a classe dos grafos regulares que admitem SD simétrico minimal coincide com a classe dos grafos de *Cayley* (será definido na Seção 5.2), e seus autores implementaram uma ferramenta aberta que encontra o SD minimal em grafos razoavelmente pequenos [23]. No entanto, ainda não foi descoberto um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos de Cayley. A relação entre propriedades topológicas do grafo e o SD minimal também foi estudada em [16, 19, 36, 44].

Contudo, o problema genérico de reconhecimento dos grafos que admitem SD minimal continua em aberto, já tendo sido conjecturado ser NP-completo

---

<sup>2</sup>Apesar do termo “minimal” não estar completamente condizente com o seu uso em otimização combinatória, seguiremos esta nomenclatura pela sua ampla utilização na literatura. Note que nem todo grafo possui SD minimal. Talvez um termo melhor seria “ótimo” ou “mínimo”.

[42] e pelo menos tão difícil quanto isomorfismo [18]. Em [20] e [21] foi derubada a conjectura de que  $\Delta(G) + 1$  rótulos seriam sempre suficientes para construir um SD, mostrando que para  $n$  suficientemente grande existem grafos que requerem  $\Omega(n \log \log n / \log n)$  rótulos a mais que  $\Delta(G)$ . Neste trabalho, será caracterizada a classe de grafos cúbicos que admitem SD Cordal minimal.

A aplicabilidade do senso de direção é bastante ampla. Podem ser encontrados na literatura desde resultados sobre sua utilização na construção de esquemas de nomeação eficientes em sistemas de objetos distribuídos [13], até o seu estudo na área de *auto-estabilização* [25, 29]. Como referência sobre o estado atual da pesquisa sobre senso de direção, sugerimos [42].

### 2.2.1 Instâncias de senso de direção

Introduziremos agora várias instâncias de SD. Estas instâncias incluem todas as rotulações usadas na literatura sobre senso de direção.

Uma instância de SD é dita *universal* se pode ser aplicada em qualquer topologia de rede. Dentre as instâncias que serão apresentadas, quatro delas são universais: *SD Cordal*, *SD de Vizinhaça*, *SD Coordenado* e *SD Polar*. Outras são específicas para determinadas topologias como anéis, hipercubos, toros e malhas.

O *SD Cordal* (SDC) é definido fixando-se uma ordenação cíclica arbitrária dos vértices e rotulando cada aresta com a distância (módulo  $n$ ) entre seus extremos na ordenação definida. Em outras palavras, para cada vértice  $u \in V(G)$  é associado um rótulo distinto  $r(u)$ , onde  $1 \leq r(u) \leq n$ , e a aresta  $uv$  será rotulada em  $u$  com  $\lambda_u(uv) = r(v) -_n r(u)$ . Na Figura 2.3(a) temos um exemplo de rotulação que é um SD Cordal (a ordenação cíclica é definida pelo caminho mais externo no sentido horário, fazendo, por exemplo,  $r(a) = 1$ ,

$r(b) = 2$ , e assim por diante). Seja  $\lambda_u(uv) = \gamma$  o rótulo que o vértice  $u$  atribui à aresta  $uv$ . Note que, por definição,  $\gamma \bmod n = \gamma - n \lfloor \gamma/n \rfloor$ . Sabemos que  $|\gamma| < n$ , pois  $r(u), r(v) \leq n$ . Logo, se  $\gamma < 0$ , então  $\lfloor \gamma/n \rfloor = -1$  e  $\gamma \bmod n = \gamma + n$ . Podemos observar que no SDC existe uma função de simetria  $\psi(\gamma) = n - \gamma$ . Assim, o SDC é um SD simétrico.

Esta instância de SD, algumas vezes chamada de *SD de Distância*, é a natural para os *grafos circulantes* [14] (serão definidos na Seção 5.2), também chamados de *anéis cordais* (de onde veio o termo *cordal*) e *loop networks* [11]. O SDC é a instância mais presente na literatura sobre SD, tendo sido estudado e explorado em grafos completos [39, 53, 64, 73, 74, 95], circulantes [6, 54, 83, 100], hipercubos [37] e topologias arbitrárias [70].

Nosso enfoque neste trabalho recairá sobre o SDC pela sua ampla utilização, fácil construção [100], relação intrínseca com a classe de grafos circulantes (demonstrada na Seção 2.3) e com o conceito de *cobertura dupla por ciclos* (assunto do Capítulo 4).

Outra instância universal é o *SD de Vizinhaça*, no qual todas as arestas que terminam em um mesmo vértice  $v$  são rotuladas com o mesmo rótulo  $r(v)$ . Mais formalmente, uma rotulação  $\lambda$  é um SD de Vizinhaça se e somente se, para toda aresta  $uv \in E[u]$  e  $wz \in E[w]$ ,

$$\lambda_u(uv) = \lambda_w(wz) \iff v = z.$$

Um exemplo de rotulação que é um SD de Vizinhaça pode ser observado na Figura 2.3(b). Este SD claramente não é simétrico. É interessante notar que a presença do SD de Vizinhaça em *sistemas anônimos* sempre destrói o anonimato. Um sistema anônimo é aquele onde os vértices são totalmente indistinguíveis. Em tais sistemas, o SD de Vizinhaça permite a construção de identificadores distintos para os vértices. Na literatura, o SD de Vizinhaça foi estudado apenas em sistemas de topologia arbitrária [58, 94].



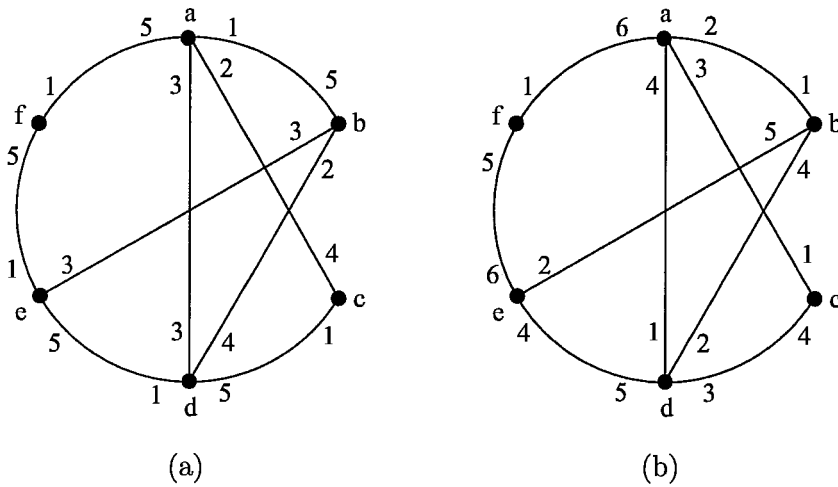


Figura 2.3: SD Cordal (a) e SD de Vizinhança (b).

Dada uma projeção do grafo  $G$  no plano cartesiano, uma rotulação é chamada de *SD Coordenado* se cada aresta  $uv$  é rotulada em  $u$  com as coordenadas relativas a  $v$ . Formalizando, temos que uma rotulação  $\lambda$  é um SD Coordenado se e somente se, para toda aresta  $uv \in E[u]$ ,

$$\lambda_u(uv) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0),$$

onde  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  são as coordenadas de  $u$  e  $v$ , respectivamente, na projeção. Na Figura 2.4(a) pode ser observado um exemplo de SD Coordenado. A simetria neste SD é dada por

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_u(uv)) &= \psi((x_1 - x_0, y_1 - y_0)) \\ &= (x_0 - x_1, y_0 - y_1) \\ &= \lambda_v(uv). \end{aligned}$$

Uma instância particular das projeções de  $G$  sobre um plano é obtida dispondo os vértices de  $G$  no círculo trigonométrico (círculo de raio 1 e centro na origem  $(0, 0)$ ) e conectando cada par de vértices adjacentes por uma reta

(Figura 2.4(b)). Qualquer projeção deste tipo é denominada *representação polar de G*. Dada uma representação polar de um grafo  $G$ , uma rotulação é chamada de *SD Polar* se e somente se, para toda aresta  $uv \in E(G)$ ,

$$\lambda_u(uv) = \alpha_{uv},$$

onde  $\alpha_{uv}$  é o ângulo do arco  $uv$  (Figura 2.4(b)). O SD Polar é claramente simétrico, e sua simetria é dada por

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_u(uv)) &= \psi(\alpha_{uv}) \\ &= 2\pi - \alpha_{uv} \\ &= \lambda_v(uv). \end{aligned}$$

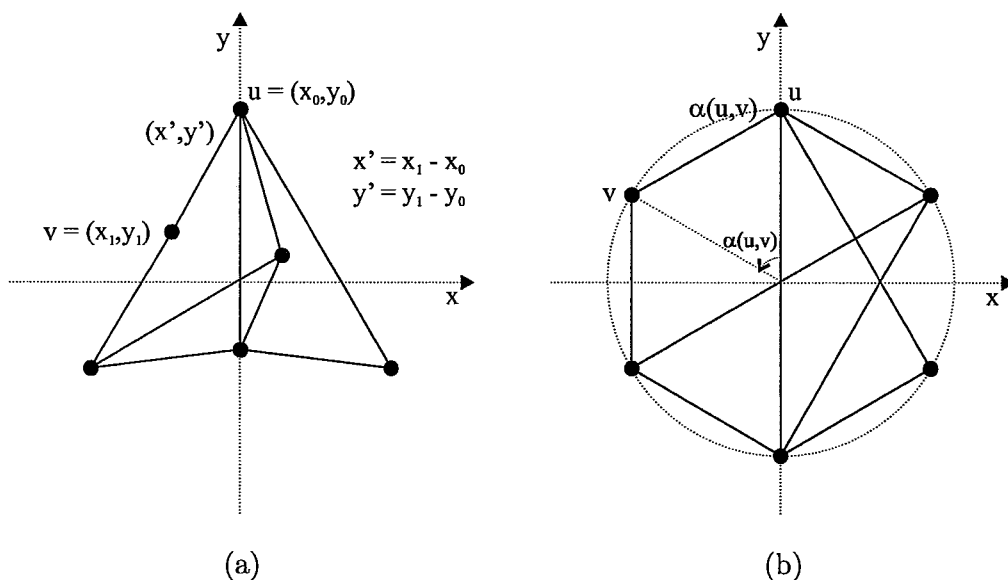


Figura 2.4: SD Coordenado (a) e SD Polar (b).

No início desta seção, foram comentados exemplos de SD em anéis e toros. Tais instâncias não são universais, pois se aplicam apenas a determinadas topologias. No caso dos anéis, a rotulação natural de cada aresta  $uv$  é dada

pelos rótulos “esquerda” ou “direita”, de acordo com o sentido (horário ou anti-horário) pré-estabelecido (Figura 2.2(a)). Assim,

$$\lambda_u(uv) = \begin{cases} \text{“esquerda”} & \text{se } v \text{ está à esquerda de } u \\ \text{“direita”} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A simetria desta rotulação é bastante simples, e é dada por  $\psi(\text{“esquerda”}) = \text{“direita”}$  e  $\psi(\text{“direita”}) = \text{“esquerda”}$ .

No caso de malhas e toros, são acrescentadas ainda as direções “cima” e “baixo”, onde  $\psi(\text{“cima”}) = \text{“baixo”}$  e  $\psi(\text{“baixo”}) = \text{“cima”}$ . Note que o rótulo em si tem pouca importância, mas a sua coerência com o esquema global deve ser preservada. Poderíamos utilizar, por exemplo, os rótulos “norte”, “sul”, “leste”, “oeste”. Este SD para toros e malhas também é chamado de *SD de Bússola* na literatura [41].

Outra topologia muito abordada na literatura pelas suas propriedades e simetria é o *hipercubo* [37, 89, 98]. A rotulação tradicional de um hipercubo *d-dimensional*, mostrado na Figura 2.5 para  $d = 3$ , é denominada de *SD Dimensional*. Os rótulos, neste caso, são associados às arestas baseados na dimensão à qual pertencem. Com isso, a função de simetria  $\psi$  é a função identidade.

## 2.2.2 Problemas abertos

O desenvolvimento de protocolos genéricos que explorem o SD é um amplo campo de pesquisa. Qualquer resultado neste sentido forneceria tanto uma solução eficiente e portátil quanto maiores informações sobre a essência do SD.

A influência do SD já foi investigada em diversos problemas distribuídos (por exemplo: eleição, árvore geradora mínima, *broadcast*, busca em profundidade, etc.). A aplicação do SD em outros problemas ou a generalização

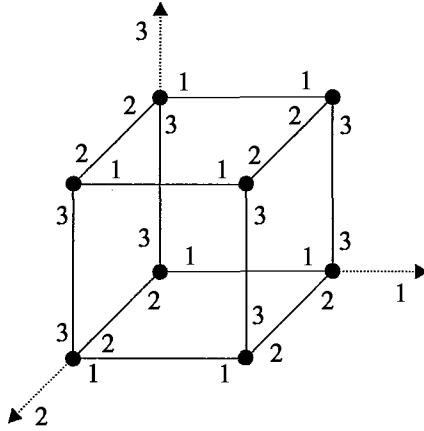


Figura 2.5: Hipercubo com SD Dimensional.

dos problemas já estudados para topologias arbitrárias seriam resultados interessantes.

Muitos resultados na literatura foram voltados para instâncias específicas de SD. Alcançar os mesmos resultados em outras instâncias, ou possivelmente em todas, é algo a ser estudado. Em alguns casos, como no caso dos grafos circulantes, os resultados são conhecidos apenas para determinadas estruturas de cordas particulares. Um grande problema específico ainda aberto é o estabelecimento de um algoritmo de eleição que explore o SDC em topologias mais genéricas.

Existem resultados sobre a insensibilidade de algumas topologias ou classes de grafos ao SD. Como exemplo, o problema da eleição em toros pode ser resolvido utilizando  $\Theta(n)$  mensagens [68], mesmo na ausência de SD. Assim, a definição de quais propriedades levam à insensibilidade ao SD é uma promissora direção de pesquisa. Uma questão intrigante é se existem grafos insensíveis ao SD em todo e qualquer problema, ou se existe uma outra

propriedade ou conhecimento topológico ou estrutural que substituiria o SD, mesmo em algumas instâncias particulares.

Para redes síncronas não existem maiores resultados estabelecidos, com exceção do estudo do problema de “*wake-up*” [52].

A relação em termos de computabilidade do SD com outras formas de consistência é um interessante problema aberto. Alguns resultados nesta direção foram obtidos em [46].

Existe uma clara necessidade por técnicas de teste mais eficientes para o SD do que aquela estabelecida em [22]. Determinar uma propriedade de fácil verificação e pela qual possa-se inferir que o grafo possui SD é um dos problemas abertos de maior vulto.

O custo da construção do SD é conhecido somente para determinadas topologias ou rotulações específicas. O desenvolvimento de métodos mais genéricos é uma direção de pesquisa ainda aberta.

Em [44] foi caracterizada a classe de grafos regulares com SD simétrico minimal em termos dos grafos de Cayley. No entanto, não existem algoritmos polinomiais conhecidos que decidam se um determinado grafo regular é um grafo de Cayley. Um problema ainda maior seria expandir esta caracterização para grafos não-regulares.

Um problema também aberto é se, dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ ,  $G$  admite SD utilizando até  $k$  rótulos. Suspeita-se que este problema seja NP-completo [42].

## 2.3 SDC minimal em grafos cúbicos

Na Seção 2.2.1 foi apresentada a definição de SDC, que é uma instância simétrica de SD largamente utilizada na literatura. Nesta seção apresen-

taremos alguns resultados obtidos sobre SDC minimal (SDCM) em grafos cúbicos. Quando restringimos nossa atenção aos grafos cúbicos que admitem SDCM, percebemos várias peculiaridades e propriedades interessantes. O principal objetivo desta seção é caracterizar de forma exata os grafos cúbicos que admitem SDCM.

Durante toda esta seção,  $G$  representará um grafo cúbico que admite SDCM e  $\lambda$  uma rotulação que fornece SDCM para  $G$ . Para simplificar a notação, diremos que a aresta  $uv \in E(G)$  é rotulada com  $\lambda(uv) = (\lambda_u(uv), \lambda_v(uv))$ . Por exemplo, na Figura 2.6 a aresta  $uv$  é rotulada com  $(1,9)$ , ou simplesmente  $\lambda(uv) = (1,9)$ .

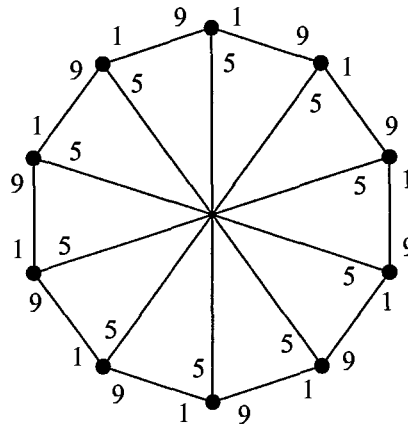


Figura 2.6: Exemplo de grafo que admite SDCM.

**Lema 2.1.** *Todas as arestas de  $G$  são rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$  ou  $(n/2, n/2)$ , onde  $\gamma \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \gamma < n/2$ .*

*Prova.* Seja  $\lambda$  uma rotulação que é um SDCM para  $G$ . Como  $\lambda$  é minimal e  $G$  é cúbico,  $\Gamma$  possui apenas 3 rótulos ( $|\Gamma| = \Delta(G) = 3$ ). Sabemos que a função de simetria para o caso do SDC é dada por  $\psi(\gamma) = n - \gamma$ . Se uma aresta utiliza um par de rótulos  $(\gamma, n - \gamma)$  distintos, então  $\gamma \neq n - \gamma$ . Para

conseguirmos um número ímpar de rótulos, devemos utilizar um rótulo cujo simétrico seja ele próprio, ou seja,  $(\gamma, n - \gamma) = (\gamma, \gamma)$ , o que possibilita que uma aresta seja rotulada utilizando apenas 1 rótulo. É fácil verificar pela função de simetria que a única possibilidade desta condição ocorrer é quando  $\gamma = n/2$ . Vale lembrar que, pelo Corolário 1.2,  $n$  é par. Assim, deve haver em  $\lambda$  um par de rótulos  $(\gamma, n - \gamma)$ , onde  $\gamma \neq n - \gamma$ , e outro par  $(n/2, n/2)$ .  $\square$

Na Figura 2.6 podemos confirmar este resultado, onde temos todas as arestas rotuladas com  $(1, 9)$  ou  $(5, 5)$ .

Agora que sabemos a configuração da rotulação  $\lambda$ , podemos descobrir mais a respeito da estrutura de  $G$ . É exatamente o que faremos a seguir, até que tenhamos caracterizado de forma exata todos os grafos cúbicos que admitem SDCM.

**Teorema 2.2.**  *$G$  se decompõe em um 2-fator e um emparelhamento perfeito.*

*Prova.* Como  $G$  é 3-regular e  $\lambda$  utiliza apenas 3 rótulos, podemos afirmar que para todo  $u \in V(G)$  existe um  $v \in V(G)$  tal que  $\lambda(uv) = (\gamma, n - \gamma)$ . Assim, podemos definir um passeio  $P$  que se inicia em  $v_0$ , e os vértices  $v_{i+1}$  são tais que  $\lambda_{v_i}(v_i v_{i+1}) = \gamma$ . Desta forma,  $P$  é um percurso de  $G$  através das arestas rotuladas (localmente em cada vértice) com  $\gamma$ . Podemos notar que em algum momento será alcançado o vértice inicial  $v_0$ , gerando um ciclo  $C$ .

Caso  $C$  contenha todos os vértices de  $G$ ,  $C$  é hamiltoniano e, conseqüentemente, um 2-fator de  $G$ . Caso contrário, após o percurso do ciclo  $C$ , podemos escolher um vértice não pertencente a  $C$  para iniciar um novo percurso utilizando novamente as arestas rotuladas com  $\gamma$  até que se forme um novo ciclo.

Este procedimento pode ser repetido até que todos os vértices tenham sido percorridos por algum ciclo. Tais ciclos constituirão um 2-fator para  $G$ ,

pois cobrirão todos os vértices. As arestas que não forem cobertas por este 2-fator serão exatamente as rotuladas com  $(n/2, n/2)$ . Como todo vértice possui uma aresta rotulada localmente com  $n/2$ , tais arestas formarão um emparelhamento perfeito.  $\square$

Na definição do SDC (Seção 2.2.1) dissemos que há uma ordenação cíclica dos vértices, onde cada um deles recebe um rótulo no intervalo  $\{1, \dots, n\}$ . Mostraremos agora a relação destes rótulos dos vértices com os ciclos do 2-fator.

**Lema 2.3.** *Seja  $r(u)$  o rótulo do vértice  $u \in V(G)$ , segundo a ordenação cíclica imposta pelo SD cordal, onde  $u$  pertence a um ciclo  $C$  de um 2-fator de  $G$  gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$ . Para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $v \in C$  se e somente se  $r(v) = r(u) +_n t\gamma$ , para algum  $t \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq t \leq n$ .*

*Prova.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $v$  pertence ao ciclo  $C$  então ele pode ser alcançado a partir de um percurso que se inicia em  $u$  e utiliza as arestas rotuladas com  $\gamma$  localmente nos vértices. Na primeira aresta percorrida, é alcançado o vértice rotulado com  $r(u) +_n \gamma$ . Após  $t$  iterações,  $1 \leq t \leq n$ , é alcançado o vértice  $v$  rotulado com  $r(u) +_n t\gamma$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $v$  um vértice de  $G$  rotulado com  $r(v) = r(u) +_n t\gamma$ , para algum  $t \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq t \leq n$ . Seja  $P$  um passeio, a partir de  $u$ , que utiliza apenas arestas rotuladas com  $\gamma$  localmente nos vértices. Então,  $P$  deverá alcançar o vértice cujo rótulo é  $r(v) = r(u) +_n t\gamma$  após  $t$  arestas percorridas, retornando ao vértice  $u$  quando  $t$  for o menor inteiro tal que  $t \cdot_n \gamma = 0$ , formando o ciclo  $C$  de um 2-fator de  $G$ .  $\square$



É interessante observar que se  $t = n$  então  $u = v$ , pois, neste caso,

$$\begin{aligned} r(v) &= r(u) +_n n\gamma \\ &= r(u) \bmod n \\ &= r(u). \end{aligned}$$

Podemos observar ainda que para  $t \geq n$  os vértices de  $C$  começam a ser repetidos, pois

$$\begin{aligned} r(v) &= r(u) +_n (n + i)\gamma \\ &= r(u) +_n i\gamma, \end{aligned}$$

onde  $i < n$ .

Analisaremos agora a relação da primalidade relativa entre  $n$  e  $\gamma$  com a estrutura do 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$ . Para demonstrar a existência de ciclo hamiltoniano em  $G$ , separaremos dois casos: quando  $\gamma \perp n$  (Teorema 2.4) e quando  $\gamma \not\perp n$  (Lema 2.5 e Teorema 2.6). Esta separação foi feita tão somente para não tornar a prova do Corolário 2.7 demasiadamente grande.

**Teorema 2.4.** *Se  $\gamma \perp n$ , então  $G$  possui um ciclo hamiltoniano gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$ .*

*Prova.* Pelo Lema 1.3, o menor inteiro  $t$  que satisfaz a equação  $t \cdot_n \gamma = 0$  é  $n$ . Assim, o menor  $t$  que satisfaz  $r(u) +_n t\gamma = r(u)$  também é  $n$ . Pelo Lema 2.3, existe um ciclo  $C$  do 2-fator que passa pelo vértice  $u$  e só retorna a ele após passar por  $n - 1$  vértices distintos. Portanto,  $C$  é hamiltoniano.  $\square$

Neste caso ( $\gamma \perp n$ ), é importante notar que, como  $n$  é par,  $\gamma$  é ímpar.

**Lema 2.5.** *Se  $\gamma \not\perp n$ , então o 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$  consiste de 2 ciclos de mesmo comprimento.*

*Prova.* Pelo Lema 1.3 existe um inteiro  $t < n$ , tal que  $t \cdot_n \gamma = 0$ . Assim, percebemos que um ciclo gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$  é “fechado” antes de percorrer todos os vértices. Com isso, podemos inferir que existe mais de um ciclo neste 2-fator.

Seja  $u$  um vértice pertencente ao ciclo  $C$  do 2-fator. Suponhamos (por absurdo) que a aresta rotulada com  $n/2$  em  $u$  ( $uv$  tal que  $\lambda_u(uv) = n/2$ ) o conecte ao vértice  $v$  pertencente a  $C$ . Neste caso,  $n/2$  é múltiplo de  $\gamma$  (basta, a partir de  $u$ , percorrer  $t/2$  arestas rotuladas com  $\gamma$  para alcançar  $v$ ) e, sendo assim, em todo vértice  $u \in C$  as arestas rotuladas com  $n/2$  ficarão restritas ao ciclo  $C$ . No entanto, como o 2-fator possui mais de um ciclo e  $G$  é cúbico,  $G$  não seria conexo (pela nossa definição inicial  $G$  deve ser sempre conexo). Portanto, as arestas rotuladas com  $n/2$  devem conectar vértices de ciclos distintos do 2-fator.

Precisamos mostrar ainda que existem exatamente 2 ciclos distintos no 2-fator. Seja  $u \in C$  e  $u', v' \in C'$ , onde  $C$  e  $C'$  são ciclos distintos do 2-fator. Seja  $P$  um caminho que se inicia em  $u$ , percorre a aresta rotulada com  $n/2$  em  $u$  alcançando  $u'$ , depois percorre a aresta rotulada com  $\gamma$  alcançando  $v'$ , e finalmente percorre a aresta rotulada com  $n/2$  em  $v'$  alcançando um vértice  $v$  (Figura 2.7). Se calcularmos a soma (módulo  $n$ ) de  $r(u)$  com os rótulos das arestas utilizadas, teremos:

$$\begin{aligned} r(u) +_n (n/2 + \gamma + n/2) &= r(u) +_n (n + \gamma) \\ &= r(u) +_n \gamma \\ &= r(v), \end{aligned}$$

onde podemos verificar (pelo Lema 2.3) que  $v \in C$ . Logo, para todo vértice  $v' \in C'$ , a aresta rotulada com  $n/2$  o conectará a um vértice  $v \in C$ .

Como  $G$  é conexo e cúbico,  $C$  e  $C'$  são os únicos ciclos do 2-fator. Claramente,  $C$  e  $C'$  são de mesmo comprimento ( $n/2$ ), o que pode ser verificado pelo emparelhamento perfeito gerado pelas arestas rotuladas com  $n/2$ .  $\square$

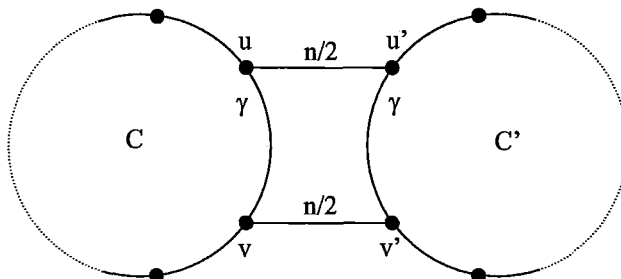


Figura 2.7: Os 2 ciclos gerados pelo 2-fator quando  $\gamma \nmid n$ .

O Lema 5.6 é uma generalização deste lema para grafos  $k$ -regulares, e a sua prova é feita de maneira mais formal.

É interessante observar que, como neste caso os ciclos do 2-fator têm comprimento  $n/2$ , se percorrermos  $n/2$  arestas rotuladas com  $\gamma$  retornaremos ao vértice de origem. Logo, o menor inteiro  $t$  que satisfaz a equação  $t \cdot n \cdot \gamma$  é  $n/2$ . Pelo Lema 1.3,  $\gamma \perp n/2$ . E como  $n$  é par (Corolário 1.2),  $\gamma \nmid n$  e  $\gamma \perp n/2$ , podemos concluir que  $\gamma$  é par (o divisor comum com  $n$  é 2) e  $n/2$  é ímpar.

Na Figura 2.8 podemos observar um exemplo de grafo onde  $\gamma \nmid n$  e que admite SDCM. É fácil identificar os dois ciclos do 2-fator pelos dois pentágonos intercalados.

**Teorema 2.6.** *Se  $\gamma \nmid n$ , então  $G$  possui ciclo hamiltoniano.*

*Prova.* Pelo Lema 2.5,  $G$  possui um 2-fator com 2 ciclos, os quais chamaremos de  $C$  e  $C'$ . Sejam  $u$  e  $v$  vértices pertencentes a  $C$ , e  $u'$  e  $v'$  vértices pertencentes a  $C'$ . Seja um passeio  $P$  que inicia em um vértice  $u$  e percorre

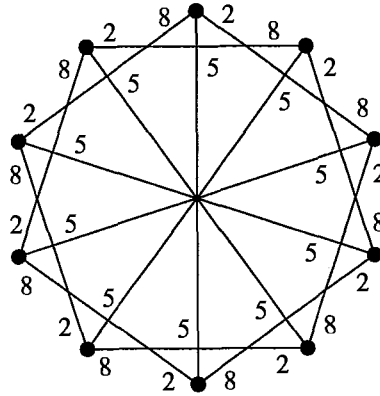


Figura 2.8: Grafo que admite SDCM onde  $\gamma \neq n$ .

a aresta rotulada localmente com  $n/2$  chegando ao vértice  $u'$ , depois percorre  $n - 1$  arestas rotuladas com  $\gamma$  chegando ao vértice  $v'$ , onde percorre novamente a aresta rotulada com  $n/2$  alcançando o vértice  $v$ , e finalmente percorre  $n - 1$  arestas rotuladas com  $n - \gamma$  voltando ao vértice inicial  $u$ .  $P$  é claramente um ciclo hamiltoniano (Figura 2.9). Algebricamente, temos:

$$\begin{aligned}
 r(u) +_n [n/2 + (n - 1)\gamma + n/2 + (n - 1)(n - \gamma)] \\
 &= r(u) +_n [n + \gamma n - \gamma + (n^2 - n) - (\gamma n - \gamma)] \\
 &= r(u) +_n n^2 \\
 &= r(u).
 \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.7.**  $G$  possui ciclo hamiltoniano.

*Prova.* Pelos Teoremas 2.4 e 2.6.

□

Observe que apesar de a existência do ciclo hamiltoniano ser necessária para o SDCM, ela não é suficiente. O grafo da Figura 2.10 é uma prova disto,

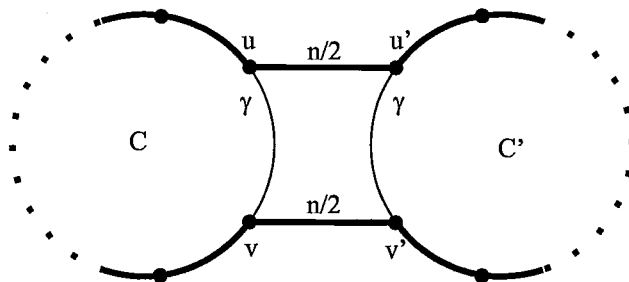


Figura 2.9: Ciclo hamiltoniano em  $G$  onde  $\gamma \nmid n$ .

pois possui ciclo hamiltoniano, mas não admite rotulação que seja um SDC com 3 rótulos.

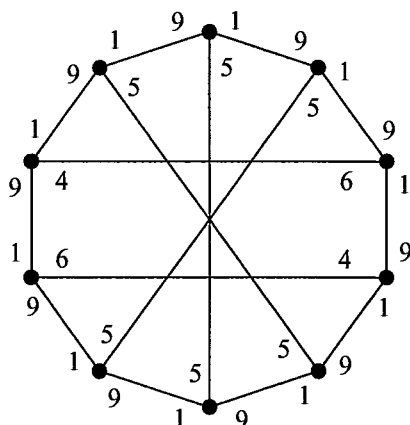


Figura 2.10: Exemplo de grafo que possui ciclo hamiltoniano mas não admite SDCM.

Agora, podemos caracterizar de forma exata os grafos cúbicos que admitem SDCM.

**Teorema 2.8.**  $G$  é isomorfo ao  $M_n$  (se  $\gamma \perp n$ ) ou  $T_{n,2}$  (se  $\gamma \nmid n$  e  $4 \nmid n$ ).

*Prova.* Para o caso onde  $\gamma \perp n$ , pelo Teorema 2.4 sabemos que o 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n - \gamma)$  é um ciclo hamiltoniano, e

as arestas rotuladas com  $(n/2, n/2)$  são um emparelhamento perfeito, cujos extremos estão à distância  $n/2$  no ciclo. Assim, neste caso,  $G$  será isomorfo ao  $M_n$  e terá a forma representada na Figura 2.6 para  $n = 10$  ( $M_{10}$ ). É fácil perceber que o  $M_n$  sempre admitirá um SDCM, para qualquer  $n$  par, bastando rotular as arestas do ciclo hamiltoniano com  $(\gamma, n-\gamma)$  e suas cordas com  $(n/2, n/2)$ .

No caso onde  $\gamma \nmid n$ , pelo Teorema 2.5 sabemos que o 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $(\gamma, n-\gamma)$  é constituído de 2 ciclos de comprimento  $n/2$ , onde cada vértice de um ciclo está conectado por uma aresta rotulada com  $(n/2, n/2)$  ao outro ciclo. Neste caso,  $G$  terá a forma representada na Figura 2.8 para  $n = 10$  e  $\gamma = 2$ , e é fácil perceber que  $G$  é isomorfo ao  $T_{n,2}$ . Conforme já comentamos, neste caso  $n/2$  é ímpar, logo  $4 \nmid n$ . □

# Capítulo 3

## Cobertura Dupla por Ciclos

Neste capítulo, introduziremos o conceito de *cobertura dupla por ciclos* e analisaremos o caso especial onde todos os ciclos da cobertura dupla possuem comprimento 6 (6-CDC) em grafos cúbicos. Apresentaremos um método para gerar uma família infinita de grafos cúbicos que admitem este tipo de cobertura. Esta geração mostrará uma relação intrínseca entre a 6-CDC e o SDCM em grafos cúbicos, a qual será discutida no Capítulo 4.

Inicialmente, apresentaremos algumas definições e notação, para depois introduzirmos resultados preliminares sobre adjacência de ciclos e, finalmente, descrevermos um método recursivo para gerar grafos cúbicos que admitem 6-CDC. A aplicação do método será dividida em casos baseados na cintura do grafo.

### 3.1 Definições básicas e notação

Uma *cobertura dupla por ciclos* (CDC) de um grafo  $G$  é uma coleção de ciclos  $C_1, C_2, \dots, C_t$  em  $G$  tal que toda aresta de  $G$  pertence a exatamente 2 ciclos da coleção. Note que pela definição os ciclos não são necessariamente

distintos. Assim, por exemplo, um anel admite uma *CDC* definida por 2 ciclos isomorfos ao próprio grafo. Mas como nosso trabalho abordará especificamente grafos cúbicos (onde não existe *CDC* com repetição de ciclos), e para não sobrecarregar ainda mais a notação, assumiremos que os ciclos da *CDC* são distintos.

Podemos verificar facilmente que uma condição necessária para que um grafo admita uma *CDC* é que ele seja 2-conexo. Szekeres [97] e Seymour [93] conjecturaram (de forma independente) que esta condição também é suficiente, ou seja, que todo grafo 2-conexo admite *CDC*.

Sobre esta conjectura foram construídas diversas outras, de tal modo que formou-se uma grande área de pesquisa no tema. Várias relações foram estabelecidas entre a *CDC* e outros problemas, como coloração de arestas [97], problemas de fluxo, planaridade [102], etc. Para um aprofundamento no assunto, sugerimos [105].

Em [97], a primeira abordagem do tema, foram tratados apenas os grafos cúbicos e denominada *decomposição poliédrica* uma *CDC* para um grafo cúbico. Esta denominação para a *CDC* é motivada pela relação dos seus ciclos com as faces do poliedro definido pelo grafo. No entanto, adotaremos a nomenclatura *CDC* pela sua ampla utilização na literatura.

Dizemos que uma decomposição poliédrica é *par* se todos os seus ciclos possuírem comprimento par. E uma 3-coloração de arestas de um grafo é uma coloração de arestas [35] que utilize apenas 3 cores. Temos, então, o teorema a seguir.

**Teorema 3.1 (Szekeres).** *Um grafo cúbico  $G$  possui uma 3-coloração de arestas se e somente se  $G$  possui uma decomposição poliédrica par.*

Chamaremos de *l-CDC* uma *CDC* onde todos os seus ciclos possuem comprimento  $l$ .



Nas próximas seções utilizaremos conceitos de adjacência entre ciclos. Assim, cabem algumas definições e notações. Dois ciclos são ditos *adjacentes* quando possuem ao menos uma aresta em comum. Denotaremos por  $\mu(C_i, C_j)$  a quantidade de arestas em comum entre  $C_i$  e  $C_j$ , e por  $\sigma(C_i)$  o número de ciclos (da CDC) adjacentes a  $C_i$ .

## 3.2 6-CDC em grafos cúbicos

Estaremos restringindo nossa atenção agora aos grafos cúbicos que admitem uma 6-CDC, ou seja, possuem uma CDC onde todos os ciclos são de comprimento 6. Portanto, ao longo deste capítulo,  $G$  representa um grafo cúbico que admite uma 6-CDC, e  $C_i$  e  $C_j$  são ciclos de uma 6-CDC de  $G$ .

A motivação para o estudo da 6-CDC em grafos cúbicos surgiu da caracterização dos grafos cúbicos que admitem SDCM, abordada no Capítulo 2. Naqueles grafos, ciclos de comprimento 6 podem ser identificados percorrendo um caminho cujos rótulos nas arestas formem a seqüência  $\gamma, n/2, n - \gamma, n - \gamma, n/2, \gamma$ , conforme Figura 3.1. É fácil verificar que cada aresta do grafo será atravessada por 2 destes ciclos, formando uma 6-CDC. Este fato aponta para uma forte relação entre SDCM e 6-CDC em grafos cúbicos (analisada no Capítulo 4) e naturalmente surge a questão recíproca: todo grafo que admite 6-CDC possui SDCM? Em outras palavras, estas propriedades são equivalentes? No Capítulo 4 daremos uma resposta negativa a esta pergunta.

Como  $G$  é cúbico, pelo Teorema 1.1 temos que  $2m = 3n$ . Sabemos que os ciclos da 6-CDC possuem comprimento 6 e cada aresta aparece exatamente em 2 ciclos, portanto,  $2m = 6t$ , onde  $t$  é o número de ciclos da 6-CDC. Logo,  $t = m/3 = n/2$ .

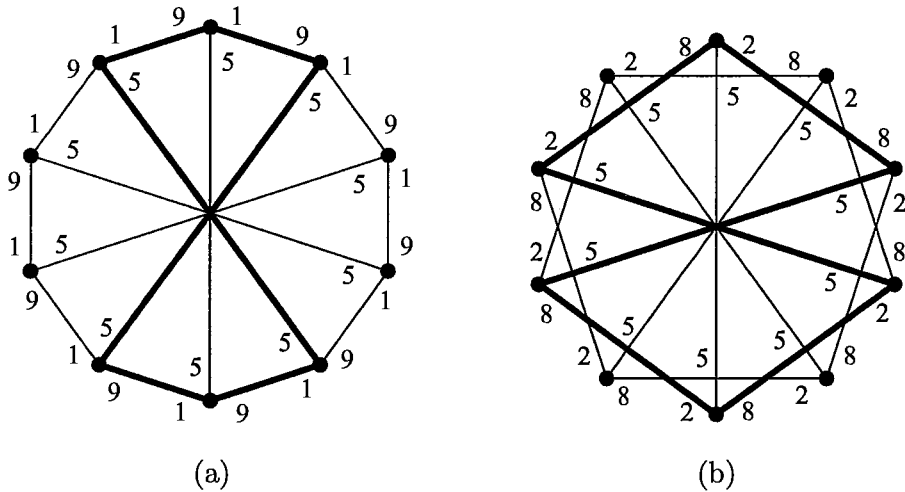


Figura 3.1: Hexágono presente nos grafos cúbicos que admitem SDCM nos casos onde  $\gamma \perp n$  (a) e  $\gamma \not\perp n$  (b).

Analisemos agora a adjacência entre os ciclos da 6-CDC.

**Lema 3.2.** *Nenhum par de ciclos  $C_i, C_j$  possui caminho de comprimento maior que 1 em comum.*

*Prova.* Suponhamos (por absurdo) que  $uvw$  seja um caminho de comprimento 2 em  $G$  tal que  $uvw$  esteja presente tanto em  $C_i$  quanto em  $C_j$ . Agora, seja  $z$  outro vértice adjacente a  $v$ . Como  $G$  é cúbico, os ciclos da 6-CDC que atravessam a aresta  $zv$  deverão conter a aresta  $uv$  ou  $vw$ . No entanto, tanto uma quanto a outra já foram cobertas por  $C_i$  e  $C_j$  (contradição). Logo, não pode haver caminho de comprimento 2 pertencente a dois ciclos distintos da 6-CDC. O mesmo, obviamente, vale para caminhos de comprimento maior que 2.  $\square$

Este lema nos revela um outro resultado, conforme o lema a seguir.

**Lema 3.3.** *Todo vértice  $v \in V(G)$  pertence a exatamente 3 ciclos da 6-CDC.*

*Prova.* Pelo Lema 3.2, cada ciclo que passa por  $v$  deve utilizar um par de arestas distinto. Como  $G$  é cúbico, cada vértice  $v$  possui 3 arestas incidentes. Assim, deve haver  $\binom{3}{2} = 3$  ciclos da 6-CDC passando por  $v$ .  $\square$

O valor de  $\mu(C_i, C_j)$  pode ser limitado conforme o lema a seguir.

**Lema 3.4.**

$$\mu(C_i, C_j) \leq 3$$

*Prova.* Pelo fato de todos ciclos da 6-CDC possuírem comprimento 6, se temos  $\mu(C_i, C_j) > 3$ , então  $C_i$  e  $C_j$  possuem necessariamente um caminho de comprimento 2 em comum (basta verificar que um emparelhamento perfeito de  $C_i$  já possui 3 arestas). Pelo Lema 3.2 isto não pode ocorrer. Assim,  $\mu(C_i, C_j) \leq 3$ .  $\square$

Caracterizaremos, no teorema a seguir, os grafos que efetivamente atingem este limite.

**Teorema 3.5.** *Se existem  $C_i$  e  $C_j$  tais que  $\mu(C_i, C_j) = 3$ , então  $G$  é isomorfo ao  $M_6$  ou  $T_{6,2}$ .*

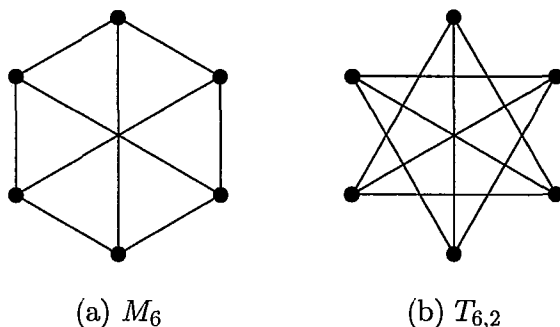


Figura 3.2: Únicos grafos onde existem  $C_i$  e  $C_j$  tais que  $\mu(C_i, C_j) = 3$ .

*Prova.* Seja  $\mu(C_i, C_j) = 3$ . Para identificarmos as 3 arestas de  $C_i$  que podem pertencer também a  $C_j$ , basta encontrarmos um emparelhamento (perfeito) em  $C_i$ , pois não pode haver arestas adjacentes em comum (Lema 3.2). Sabemos que qualquer ciclo par só possui 2 possíveis emparelhamentos perfeitos (disjuntos em arestas). Como os emparelhamentos identificarão 3 arestas de  $C_j$ , as demais arestas deste ciclo deverão interligar os vértices do emparelhamento. Assim, ambos os emparelhamentos possíveis de  $C_i$  forçarão a existência de cordas para formarem o ciclo  $C_j$ . Há 2 possibilidades para esta interligação entre os vértices de  $C_i$ , conforme a Figura 3.3 (as arestas grifadas pertencem a  $C_i$  e  $C_j$ ).

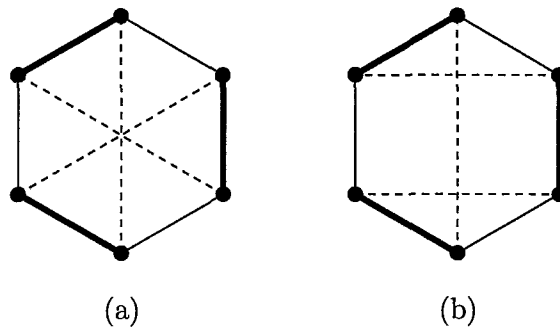


Figura 3.3: Possibilidades para a formação do ciclo  $C_j$ , onde  $\mu(C_i, C_j) = 3$ .

É fácil verificar que os grafos das Figuras 3.3(a) e 3.3(b) são isomorfos aos das Figuras 3.2(a) e 3.2(b), respectivamente.  $\square$

Quando maximizamos  $\mu(C_i, C_j)$ , conseqüentemente minimizamos  $\sigma(C_i)$  e  $\sigma(C_j)$ . O corolário a seguir nos dá o limite inferior para  $\sigma(C_i)$ .

**Corolário 3.6.** *Se  $\mu(C_i, C_j) = 3$ , então  $\sigma(C_i) = \sigma(C_j) = 2$ .*

*Prova.* Pela Figura 3.2 podemos perceber que, nos casos onde  $\mu(C_i, C_j) = 3$ , só existem 3 ciclos na 6-CDC e todos adjacentes entre si.  $\square$

Podemos, então, estabelecer os limites superiores e inferiores para  $\mu(C_i, C_j)$  e  $\sigma(C_i)$  na forma de teorema.

**Teorema 3.7.**  $0 \leq \mu(C_i, C_j) \leq 3$  e  $2 \leq \sigma(C_i) \leq 6$ .

*Prova.* O limite inferior de  $\mu(C_i, C_j)$  é trivialmente 0, e basta  $C_i$  e  $C_j$  não serem adjacentes para alcançar este mínimo. Pelo Lema 3.4, o limite superior é 3.

Pelo Corolário 3.6, o mínimo  $\sigma(C_i)$  é 2. E o seu limite superior é atingido quando cada aresta de  $C_i$  pertence a um outro ciclo distinto. Como o comprimento de  $C_i$  é 6, este também será o máximo  $\sigma(C_i)$ .  $\square$

### 3.2.1 Um método recursivo

Com os conceitos e limites de adjacência entre ciclos apresentados, podemos partir para a busca por grafos cúbicos que admitem 6-CDC. Antes de explicarmos o método empregado, explicitaremos alguns conceitos importantes sobre a configuração dos ciclos da 6-CDC.

Utilizaremos uma rotulação nas arestas para identificar a quais ciclos elas pertencem. Assim, as arestas rotuladas com  $\{i, j\}$  pertencem aos ciclos  $C_i$  e  $C_j$  da 6-CDC. Para não haver confusão desta rotulação com as utilizadas no SDCM, denotaremos por  $\lambda_{CDC}(uv) = \{i, j\}$  a rotulação da aresta  $uv$  com  $\{i, j\}$ .

Seja  $G$  um grafo cúbico genérico que admite uma 6-CDC e  $H$  um subgrafo de  $G$  tal que  $1 \leq |E(H)| < |E(G)|$ . Podemos perceber facilmente que se aplicarmos em  $H$  a mesma configuração de ciclos da 6-CDC de  $G$ , teremos uma configuração incompleta em  $H$  com fragmentos de ciclos da 6-CDC de  $G$ , conforme exemplo da Figura 3.4. O mesmo ocorre com o subgrafo  $G - E(H)$  (triângulo *defd* na Figura 3.4(a)).

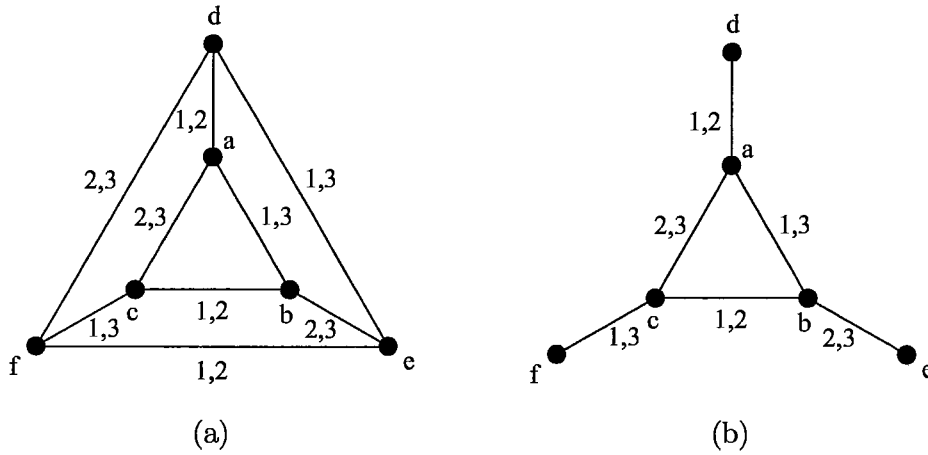


Figura 3.4: Configuração da 6-CDC de  $G$  (a) aplicada a  $H$  (b).

Observe que  $H$  (assim como  $G - E(H)$ ) não pode ser cúbico, caso contrário, ou  $H$  é isomorfo a  $G$  (contrariando nossa definição de  $H$ ) ou  $G$  é desconexo (contrariando nossa definição de  $G$ ). Chamaremos de vértice *deficiente* aquele que possui grau menor que 3 em  $H$ , ou seja,  $v \in V(H)$  tal que  $d_H(v) < 3$ . E diremos que a *deficiência* de  $H$  é igual a

$$\sum_v 3 - d_H(v),$$

onde  $v \in V(H)$ . Assim, a deficiência significa o quão distante o subgrafo está de ser cúbico.

Note que os vértices deficientes do subgrafo  $G - E(H)$  são exatamente os mesmos de  $H$ . E, ao fazermos  $H \cup [G - E(H)]$  (obtendo  $G$ ), os fragmentos de ciclos em  $H$  são adequadamente completados com a configuração de ciclos em  $G - E(H)$ , formando uma 6-CDC.

Podemos, agora, vislumbrar a possibilidade de existir um novo grafo  $H'$  tal que  $H' \cup [G - E(H)]$  possua uma 6-CDC. Basta, para isso, que  $H$  e  $H'$  possuam a mesma deficiência (para que o grafo resultante da união seja cúbico) e que haja uma configuração de ciclos da 6-CDC incompletos para

$H'$  que seja devidamente completada pela configuração, também incompleta, definida em  $G - E(H)$ , conforme exemplo na figura 3.5.

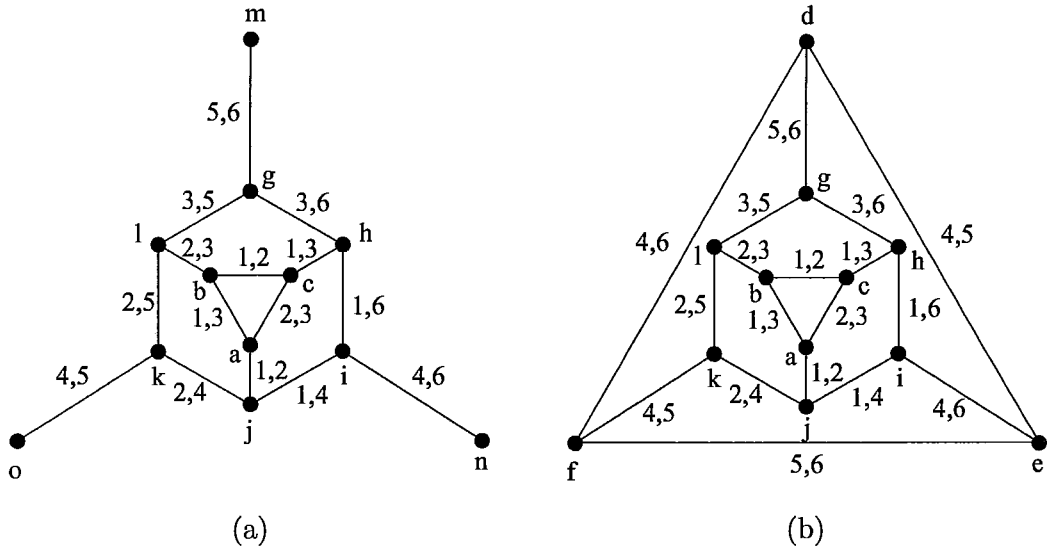


Figura 3.5: Grafo  $H'$  (a) tal que  $H' \cup [G - E(H)]$  (b) admite 6-CDC.

Esta equivalência entre as configurações de ciclos de  $H$  e  $H'$  pode ser avaliada pelo comprimento dos fragmentos de seus ciclos. É trivial verificarmos que todo ciclo incompleto nestas configurações deve terminar em um vértice deficiente (do contrário, este ciclo não se fecharia). Assim, basta atentarmos para o comprimento dos ciclos incompletos nos vértices deficientes.

No entanto, devemos lembrar que, pela definição de 6-CDC, cada aresta é atravessada por 2 ciclos. E sabemos, pelo Lema 3.3, que cada vértice pertence a 3 ciclos da 6-CDC. Portanto, no caso de um vértice deficiente  $v$  possuir uma única aresta incidente em  $H$ , os 2 ciclos que atravessam esta aresta devem atravessar também as arestas incidentes a  $v$  no grafo  $G - E(H)$ . No caso de  $v$  possuir duas arestas incidentes em  $H$ , ele possuirá uma única aresta incidente em  $G - E(H)$ , a qual será atravessada por 2 ciclos. Assim,

em ambos os casos, 2 ciclos incompletos  $C_i$  e  $C_j$  em  $H$  que passam por  $v$  deverão atravessar as arestas incidentes a  $v$  em  $G - E(H)$ .

Logo, para que haja equivalência entre as configurações de  $H$  e  $H'$ , para todo vértice deficiente  $v \in V(H)$ , por onde passam 2 ciclos incompletos da 6-CDC  $C_i$  e  $C_j$ , deve haver um vértice deficiente  $v' \in V(H')$ , por onde passam os ciclos incompletos  $C'_i$  e  $C'_j$ , tal que os fragmentos de  $C_i$  e  $C'_i$  possuem o mesmo comprimento, assim como os fragmentos de  $C_j$  e  $C'_j$ . Fica claro que, ao unirmos os grafos, devemos fazer  $v' = v$ .

Por exemplo, na Figura 3.4, temos um grafo  $G$  com sua configuração de 6-CDC e seu subgrafo  $H$ . Os vértices deficientes em  $H$  são  $d$ ,  $e$ , e  $f$ . Por  $d$ , passam  $C_1$  e  $C_2$ . Por  $e$ , passam  $C_2$  e  $C_3$ . E por  $f$ , passam  $C_1$  e  $C_3$ . Repare que  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  possuem, cada um, 4 arestas definidas. Observe agora o grafo  $H'$  na Figura 3.5(a), onde há os vértices deficientes  $m$ ,  $n$  e  $o$ . Por  $m$ , passam  $C_5$  e  $C_6$ . Por  $n$ , passam  $C_4$  e  $C_6$ . Por  $o$ , passam  $C_4$  e  $C_5$ . Tanto  $C_4$  quanto  $C_5$  e  $C_6$  possuem 4 arestas definidas. Assim, podemos fazer  $m = d$ ,  $n = e$  e  $o = f$ , e completar  $H'$  com  $G - E(H)$  (triângulo  $defd$ ). Note que os ciclos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  em  $G - E(H)$  puderam ser devidamente substituídos por  $C_5$ ,  $C_6$  e  $C_4$ , respectivamente. Repare, ainda, que  $H$  e  $H'$  possuem deficiência igual a 6.

Para a geração de grafos que admitem 6-CDC, dividiremos os casos conforme a cintura do grafo ( $g(G)$ ). Sabemos que o limite inferior para  $g(G)$  em grafos simples é 3, dado que não podemos ter ciclos em  $G$  de comprimento menor que isso. O limite superior de  $g(G)$  para que  $G$  admita uma 6-CDC é 6, já que a 6-CDC é formada por ciclos deste comprimento. Assim, analisaremos os casos onde  $3 \leq g(G) \leq 6$ .

Em cada caso, utilizaremos um método recursivo para a geração de uma família de grafos que admitem 6-CDC com a cintura  $g(G)$ . O método con-



siste, simplesmente, em identificar um subgrafo  $S$  de  $G$ , com seus fragmentos de ciclos da 6-CDC de  $G$ , e procurar outro grafo  $I$  que possa completar o subgrafo  $G - E(S)$  de tal forma que  $I \cup [G - E(S)]$

- (i) seja cúbico,
- (ii) possua cintura  $g(G)$ ,
- (iii) admita 6-CDC.

Dado  $g(G)$ , seja  $B$  o menor grafo que satisfaz a estas 3 condições e  $C$  um ciclo de comprimento  $g(G)$  sem cordas em  $B$ . Definimos  $S$  como o subgrafo que tem  $V(S) = V(C) \cup N_B(C)$ , onde  $N_B(C)$  é a vizinhança de  $C$  em  $B$ , e  $E(S)$  formado pelas arestas do ciclo  $C$  e pelas arestas que “saem” dele. Note que  $B$  necessariamente possui um subgrafo  $S$ , pois  $g(B) = g(G)$ . Definimos, então,  $I$  como o menor supergrafo de  $S$ , tal que  $I \cup [B - E(S)]$  satisfaz às condições enumeradas.

Observe que esta escolha de  $I$  garante a infinidade da família gerada, pois  $I$  possuirá  $S$  como subgrafo. Assim, podemos fazer  $G = I \cup [B - E(S)]$  e repetir o processo de substituição de  $S$  por  $I$  em  $G$ . Note, ainda, pela condição (iii), que  $S$  e  $I$  devem possuir a mesma deficiência e configurações de ciclos da 6-CDC equivalentes.

Como, inicialmente, não conhecemos  $B$  nem  $I$ , partiremos do subgrafo  $S$ , analisando todas as suas possíveis configurações de ciclos da 6-CDC, e procuraremos expandir  $S$  até que seja gerado o menor supergrafo  $B$  de  $S$  que satisfaça às 3 condições enumeradas, ou o menor supergrafo  $I$  de  $S$  tal que  $I \cup [B - E(S)]$  satisfaça às mesmas 3 condições. Denotaremos por  $B_{g(G)}$ ,  $I_{g(G)}$  e  $S_{g(G)}$  os grafos  $B$ ,  $I$  e  $S$  de cintura  $g(G)$ .

### 3.2.2 Grafos cúbicos de cintura 3 com 6-CDC

Começaremos analisando a configuração dos ciclos em  $S_3$ , um triângulo  $abca$  e sua vizinhança, conforme indicado na Figura 3.6. Mais adiante mostraremos que os vértices  $d$ ,  $e$  e  $f$  são necessariamente distintos.

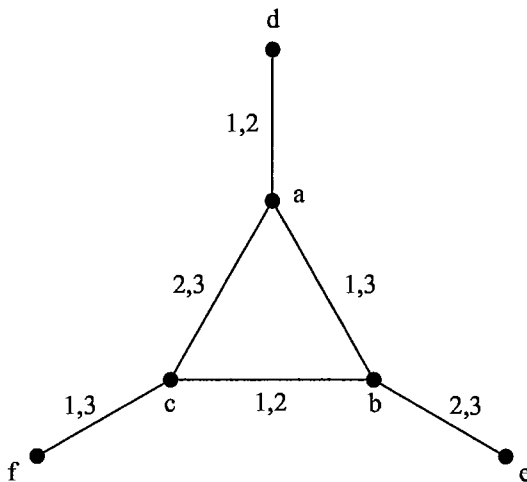


Figura 3.6: Um triângulo ( $S_3$ ) e os ciclos da 6-CDC que o atravessam.

Como este é o primeiro caso, mostraremos passo a passo a unicidade da configuração dos ciclos da 6-CDC que atravessam o triângulo. A intuição obtida no caso do triângulo poderá ser utilizada para o caso do quadrado, do pentágono e do hexágono.

Iniciemos nossa análise pela aresta  $ad$ . Sabemos que toda aresta será atravessada por 2 ciclos da 6-CDC. Façamos, então,  $\lambda_{CDC}(ad) = \{1, 2\}$ , por exemplo. Assim, sabemos que  $C_1$  e  $C_2$  atravessam  $ad$ . No entanto, no vértice  $a$  estes ciclos devem se separar, escolhendo arestas distintas para atravessarem, caso contrário,  $C_1$  e  $C_2$  possuiriam um caminho de comprimento 2 em comum, contrariando o Lema 3.2. Portanto, podemos arbitrariamente fa-

zer  $\lambda_{CDC}(ab) = \{1, x\}$  e  $\lambda_{CDC}(ac) = \{2, y\}$ , onde  $x$  e  $y$  são rótulos ainda desconhecidos.

Analisemos a possibilidade onde  $x \neq y$ . Neste caso, tanto o ciclo  $C_x$  quanto  $C_y$  utilizariam o vértice  $a$ , além de  $C_1$  e  $C_2$ . Ou seja, o vértice  $a$  pertenceria a 4 ciclos distintos, contrariando o Lema 3.3. Logo,  $x = y$ . Façamos  $x = 3$ . Então podemos completar as rotulações  $\lambda_{CDC}(ab) = \{1, 3\}$  e  $\lambda_{CDC}(ac) = \{2, 3\}$ .

Observe agora que os ciclos  $C_1$  e  $C_3$  não podem atravessar juntos a aresta  $be$ , pois isto infringiria o Lema 3.2. Assim,  $C_1$  ou  $C_3$  deve utilizar a aresta  $bc$ . Caso  $C_3$  utilize esta aresta, ele fecharia um ciclo  $(abca)$  de comprimento 3, impedindo-o de formar um ciclo simples de comprimento 6. Logo,  $C_1$  deve utilizar a aresta  $bc$  e  $C_3$  deve utilizar  $be$ . De forma simétrica,  $C_2$  e  $C_3$ , que atravessam juntos a aresta  $ac$ , devem tomar arestas distintas ao chegarem em  $c$ . E, caso  $C_3$  utilize  $bc$ , ele fecharia um ciclo  $(abca)$  de comprimento 3. Logo,  $C_3$  deve utilizar a aresta  $cf$ .

Para não contrariar o Lema 3.2,  $C_2$  é forçado a utilizar as arestas  $bc$  e  $be$ , e  $C_1$  deverá utilizar, como única opção, a aresta  $cf$ .

Assim, chegamos à única configuração possível para os ciclos da 6-CDC atravessarem o triângulo (Figura 3.6), que é:

$$\lambda_{CDC}(ad) = \{1, 2\}$$

$$\lambda_{CDC}(ab) = \{1, 3\}$$

$$\lambda_{CDC}(bc) = \{1, 2\}$$

$$\lambda_{CDC}(be) = \{2, 3\}$$

$$\lambda_{CDC}(ac) = \{2, 3\}$$

$$\lambda_{CDC}(cf) = \{1, 3\}.$$

Precisamos ainda provar que  $d$ ,  $e$  e  $f$  são distintos. Trivialmente, estes vértices não podem ser todos iguais, pois o grafo formado (uma pirâmide de base triangular) possuiria apenas 4 vértices e os graus de todos os seus vértices estariam completos. Assim, seria impossível termos ciclos de comprimento 6 para a 6-CDC. Suponhamos que apenas  $e$  e  $f$  sejam um mesmo vértice (vamos referenciá-lo apenas como  $e$ ) e  $d$  seja um vértice distinto de  $e$ . Claramente, teríamos dois triângulos compartilhando uma aresta ( $bc$ ), conforme a Figura 3.7.

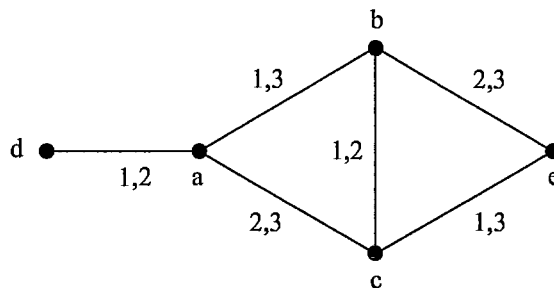


Figura 3.7: Triângulos com aresta em comum deixam a 6-CDC inconsistente.

Podemos verificar que o triângulo  $abca$  deve manter as rotulações de suas arestas, pois ela é única para qualquer triângulo em  $G$ . No entanto, as arestas  $be$  e  $ce$ , que agora convergem para o mesmo vértice, pertenciam necessariamente a  $C_3$ . Com isso,  $C_3$  forma um quadrado ( $abeca$ ), o que não poderia ocorrer ( $C_3$  deve ser um hexágono). Logo, os vértices  $d$ ,  $e$  e  $f$  são necessariamente distintos e a Figura 3.6 representa a única configuração de ciclos possível que atravessa um triângulo. Note que a deficiência daquele grafo é 6.

Uma vez identificada a única forma de rotular  $S_3$ , devemos tentar expandir o grafo, ou seja, determinarmos as formas de completar os ciclos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . Analisemos, inicialmente, as possibilidades de completar  $C_1$ . Sabemos

que este ciclo já possui 4 arestas definidas  $(da, ab, bc, cf)$ , restando apenas 2 para completá-lo. As 2 arestas restantes devem, necessariamente, ser adjacentes para que  $C_1$  seja um ciclo de comprimento 6. Assim, devemos ter um caminho de comprimento 2 entre  $d$  e  $f$ . Como este caminho envolve mais um vértice, temos 2 possibilidades: escolher um vértice já existente (neste caso,  $e$  seria a única opção), ou incluir um novo vértice. Como  $B_3$  e  $I_3$  devem ser escolhidos de forma a minimizar o número de vértices, escolheremos utilizar o vértice  $e$  já existente.

Se analisarmos agora  $C_2$ , verificaremos que ele deve seguir o mesmo procedimento adotado por  $C_1$ , mas neste caso ele precisa de um caminho de comprimento 2 entre  $d$  e  $e$ . Mais uma vez, para preservar a minimalidade, devemos escolher o vértice  $f$  já existente. Note que a aresta  $ef$  já havia sido acrescentada para  $C_1$  e deverá ser atravessada por  $C_2$  também. Assim, basta acrescentarmos a aresta  $df$  para completarmos  $C_2$ . Com isso, o grafo se completou, ou seja, os graus de todos os vértices já é 3, conforme pode ser observado na Figura 3.8.

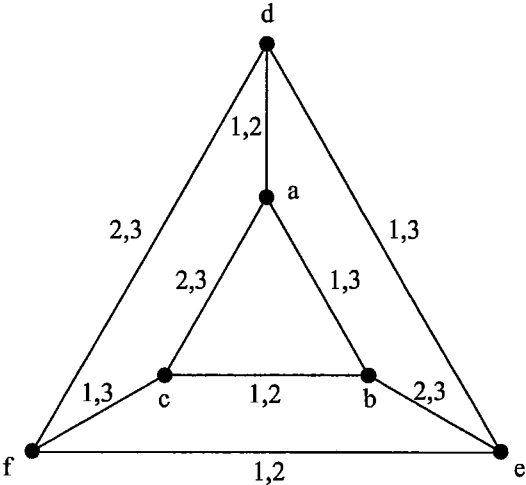


Figura 3.8: Menor grafo ( $B_3$ ) de cintura 3 que admite 6-CDC.

Basta, então, verificarmos se  $C_3$  consegue se completar com as arestas inseridas. Isto é efetivamente obtido pelas arestas  $df$  e  $de$ . Logo, todos os ciclos estão completos. Portanto, temos uma 6-CDC e o grafo da Figura 3.8 é o grafo  $B_3$ . É interessante notar que este é um menor<sup>1</sup> grafo cúbico que admite 6-CDC e é isomorfo ao  $T_{6,2}$ .

Agora, devemos identificar  $I_3$ , ou seja, o menor grafo tal que  $I_3 \cup [B_3 - E(S_3)]$  é cúbico, possui cintura 3 e admite 6-CDC. Para isso, devemos retornar ao estágio da Figura 3.6, onde fizemos a escolha de utilizar um vértice existente. Sabemos que, neste estágio, a escolha de um vértice existente sempre conduzirá a  $B_3$  (única possibilidade de continuação dos ciclos). Por isso, para descobrirmos um grafo que substitua um triângulo de  $B_3$  e mantenha a configuração de ciclos (rotulação) nas demais arestas, devemos incluir um novo vértice  $g$  no grafo. Assim, para completarmos  $C_1$  utilizaremos as arestas  $dg$  e  $gf$ .

O ciclo  $C_2$  precisa de um caminho de comprimento 2 entre  $d$  e  $e$ . As possibilidades do vértice central deste caminho são:  $f$ ,  $g$  ou um novo vértice  $h$ . O vértice  $f$  claramente não pode ser utilizado, pois já possui grau 2. Se utilizarmos o vértice  $g$ , podemos observar que  $C_1$  e  $C_2$  compartilhariam as arestas adjacentes  $ad$  e  $dg$ , o que contraria o Lema 3.2. Logo, a única possibilidade para  $C_2$  é incluir um novo vértice  $h$  e utilizar as arestas  $dh$  e  $he$ .

Finalmente, o ciclo  $C_3$  precisa de um caminho de comprimento 2 entre  $e$  e  $f$ . Nenhum dos vértices existentes podem ser utilizados, pois já possuem grau maior que 1. Então,  $C_3$  deve, necessariamente, utilizar um novo vértice  $i$  e acrescentar as arestas  $fi$  e  $ie$ .

---

<sup>1</sup>Mostraremos adiante que o  $M_6$ , que possui o mesmo tamanho deste grafo, também admite 6-CDC.

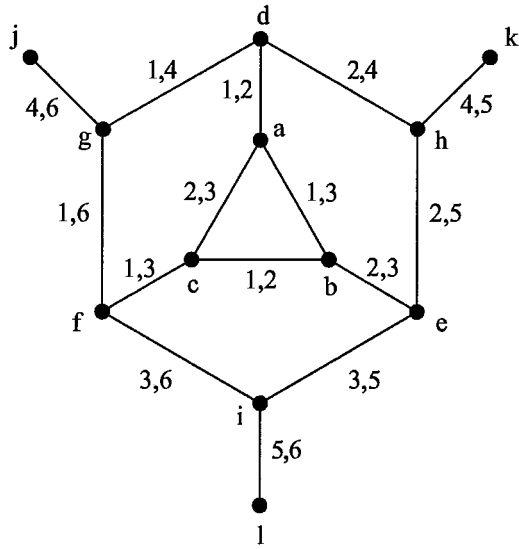


Figura 3.9: Menor grafo ( $I_3$ ) de cintura 3 equivalente a um triângulo.

Note que as novas arestas inseridas são atravessadas ainda por apenas 1 ciclo da 6-CDC e os vértices  $g$ ,  $h$  e  $i$  ainda são deficientes. Como  $d$  já completou seu grau, um novo ciclo que atravesse  $dg$  deverá também atravessar  $dh$ . Repare que isto não fere o Lema 3.2, pois o ciclo que já passa por  $dg$  ( $C_1$ ) é diferente do que passa por  $dh$  ( $C_2$ ). Seja  $C_4$  o ciclo que passa por  $dg$  e  $dh$ . Pelo Lema 3.2,  $C_4$  não pode continuar por  $gf$  nem por  $he$ , devendo tomar as arestas que faltam em  $g$  e  $h$  (identificadas na Figura 3.9 por  $gj$  e  $hk$ ). De forma análoga, teremos  $C_5$  passando por  $he$  e  $ei$  e tomando as arestas que faltam em  $h$  e  $i$  (atravessando  $hk$  e  $il$ ), e  $C_6$  passando por  $gf$  e  $fi$  e saindo em  $g$  e  $i$  (atravessando  $gj$  e  $il$ ), gerando o grafo rotulado da Figura 3.9.

Observe que tanto o triângulo da Figura 3.6 quanto o grafo da Figura 3.9 possuem 3 vértices deficientes de grau 1, possuindo ambos deficiência 6. E se analisarmos, na Figura 3.9, os ciclos incompletos  $C_4$ ,  $C_5$  e  $C_6$ , veremos que eles têm a mesma estrutura dos ciclos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  quando ainda estavam

incompletos na Figura 3.6, ou seja, eles possuem 4 arestas definidas, sendo 2 na estrutura interna e 2 a serem conectadas externamente. Assim, os vértices deficientes  $j, k$  e  $l$ , do grafo da Figura 3.9, correspondem aos vértices  $d$ ,  $e$  e  $f$  do grafo da Figura 3.6. Por esta razão, podemos substituir  $S_3$  em  $B_3$  pelo grafo da Figura 3.9, gerando um grafo cúbico, com cintura 3 e que admite 6-CDC. Portanto, o grafo da Figura 3.9 é  $I_3$ . Note que  $I_3$  também possui um triângulo, garantindo a possibilidade de futuras iterações e mantendo a cintura do grafo, além de preservar um número constante (igual a 2) de triângulos em toda a família gerada.

Na Figura 3.10 temos o resultado da primeira iteração (substituição de  $S_3$  por  $I_3$  em  $B_3$ ) e nas Figuras 3.11 e 3.12 temos os resultados da segunda e terceira iterações (substituição de  $S_3$  por  $I_3$  no resultado da iteração anterior), respectivamente.

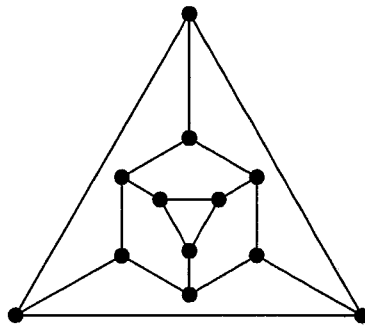


Figura 3.10: Resultado da primeira iteração em  $B_3$ .

### 3.2.3 Grafos cúbicos de cintura 4 com 6-CDC

De forma análoga ao que foi feito no caso de cintura 3, devemos identificar  $B_4$  e  $I_4$ . Para isso, iniciamos analisando as configurações possíveis (excluídas as permutações de rótulos) para os ciclos da 6-CDC atravessarem  $S_4$  (um



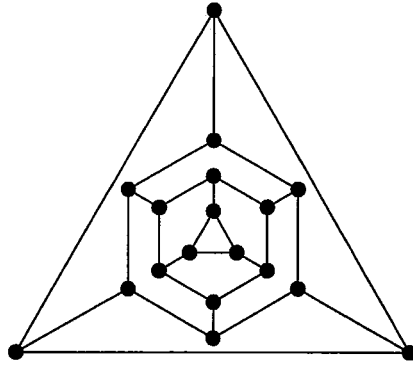


Figura 3.11: Resultado da segunda iteração em  $B_3$ .

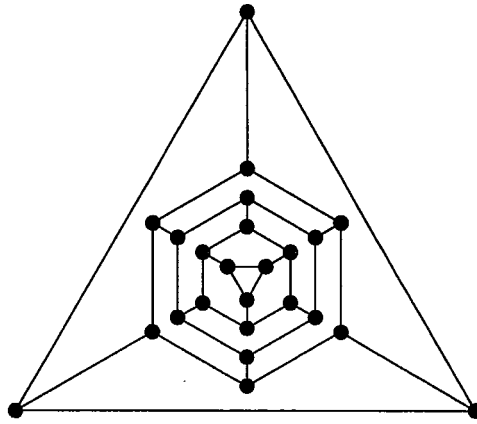


Figura 3.12: Resultado da terceira iteração em  $B_3$ .

quadrado com as arestas externas). Nas Figuras 3.13(a), 3.13(b) e 3.13(c) estão representadas as rotulações de  $S_4$  que não infringem os Lemas 3.3 e 3.2 nem obrigam um ciclo da 6-CDC a ser fechado com comprimento menor que 6. Com isto, temos 4 ciclos ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ) representados em cada configuração.

Note que, nos grafos da Figura 3.13, os vértices  $e, f, g$  e  $h$  são distintos. Mais adiante, trataremos os casos onde eles podem coincidir. Observe, ainda, que todos os casos da Figura 3.13 possuem deficiência 8.

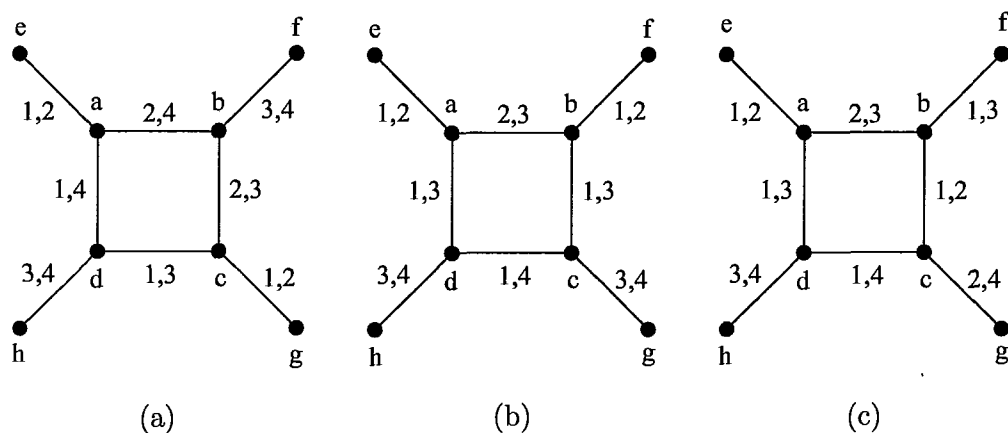


Figura 3.13: Um quadrado ( $S_4$ ) e as possíveis configurações de ciclos da 6-CDC que o atravessam.

Para cada caso mostrado na Figura 3.13, estaremos identificando  $B_4$  e  $I_4$ . Chamaremos de  $S_{4a}$  o grafo rotulado da Figura 3.13(a), e de  $B_{4a}$  e  $I_{4a}$  suas respectivas expansões, fazendo o mesmo para os casos da figura 3.13(b) e 3.13(c).

Em  $S_{4a}$ , podemos verificar facilmente (e de forma semelhante ao caso do triângulo) que se escolhermos utilizar um vértice já existente para completar  $C_1$  (podem ser escolhidos tanto  $f$  quanto  $h$ , devido à simetria do quadrado), seremos forçados a utilizar novamente vértices existentes para completar  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ . Temos, assim, o grafo  $B_{4a}$ , conforme a Figura 3.14 (isomorfo ao  $T_{8,2}$ ).

Devemos agora encontrar  $I_{4a}$ . Para isso, voltamos ao estágio da Figura 3.13(a) e, em vez de escolhermos um vértice existente para completar  $C_1$ , incluímos um novo vértice  $i$  e as arestas  $ei$  e  $ig$ . Com esta nova escolha, somos obrigados a utilizar um novo vértice  $j$  e as arestas  $ej$  e  $jk$  para completarmos  $C_2$ . Neste ponto, já podemos analisar a deficiência e os ciclos incompletos, percebendo que são equivalentes à configuração inicial de  $S_{4a}$ . Os 4 vértices

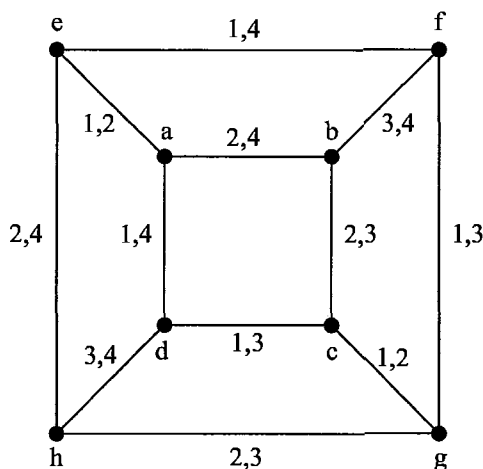


Figura 3.14: Menor grafo ( $B_{4a}$ ) de cintura 4 que admite 6-CDC e possui  $S_{4a}$  (com suas rotulações) como subgrafo.

deficientes com grau 1 ( $f, h, k$  e  $l$ ) deixam a deficiência igual a 8 e todos os ciclos incompletos possuem 4 arestas definidas, conforme a Figura 3.15. Assim, podemos substituir  $S_{4a}$  em  $B_{4a}$  pelo grafo da Figura 3.15, gerando um grafo cúbico, com cintura 4 e que admite 6-CDC. Portanto, o grafo da Figura 3.15 é  $I_{4a}$ .

Repare que, tanto os 2 quadrados presentes em  $I_{4a}$  quanto o quadrado em  $B_{4a} - E(S_{4a})$ , possuem a mesma configuração de  $S_{4a}$ . Assim, todos os grafos gerados pelas sucessivas substituições de  $S_{4a}$  por  $I_{4a}$  possuirão todos os seus quadrados com a mesma configuração de ciclos de  $S_{4a}$  ( $B_{4a}$  é o único membro desta família onde isto não ocorre).

Verificaremos agora o caso de  $S_{4b}$ . Neste caso, podemos observar que os ciclos  $C_1$  e  $C_3$  já possuem 5 arestas definidas, faltando-lhes apenas uma aresta para completar o ciclo. Desta forma, não nos resta outra alternativa, a não ser conectar o vértice  $e$  ao  $f$  e o vértice  $g$  ao  $h$ , conforme a Figura 3.16.

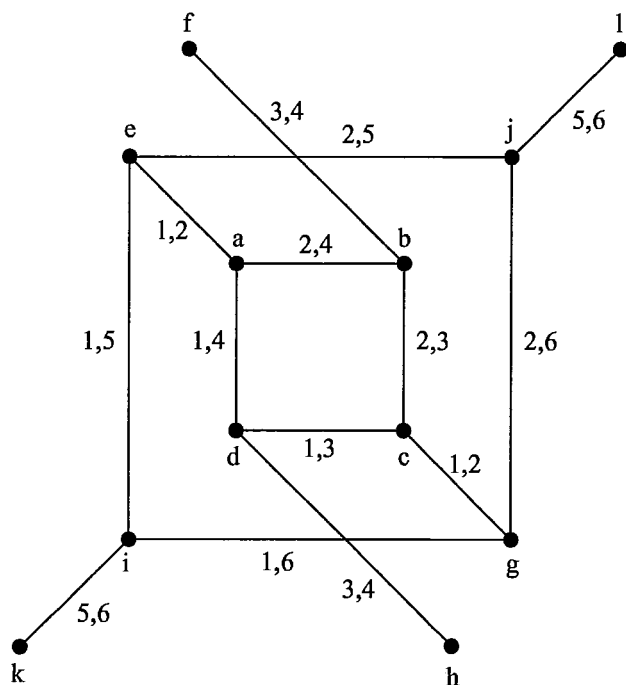


Figura 3.15: Menor grafo  $(I_{4a})$  de cintura 4 equivalente ao  $S_{4a}$ .

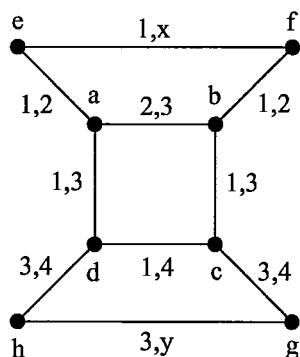


Figura 3.16: As arestas  $ef$  e  $gh$  devem fechar  $C_1$  e  $C_3$ , respectivamente.

Analisando  $C_2$ , verificamos que ele já possui 3 arestas definidas, mas não pode utilizar a aresta recém-adicionada  $ef$  (na Figura 3.16,  $x \neq 2$ ), pois além de se fechar com comprimento 4, infringiria o Lema 3.2 com o ciclo  $C_1$ .

Portanto,  $C_2$  deve utilizar uma nova aresta, tanto em  $e$  quanto em  $f$  criando um novo caminho de comprimento 3 entre estes vértices. E para fazê-lo de forma a minimizar o número de vértices, este caminho deve passar por  $g$  e  $h$  já existentes. Existem 2 formas de estabelecer este caminho, conforme as Figuras 3.17(a) e 3.17(b).

No caso da Figura 3.17(a), o caminho que completa  $C_2$  é dado por  $ehgf$ . Resta, então, apenas completarmos  $C_4$ , o que pode ser feito facilmente pelo caminho  $gfeh$ . Assim, a Figura 3.17(a) é o grafo  $B_{4b}$ . Note que  $B_{4b}$  é isomorfo a  $B_{4a}$  (e ao  $T_{8,2}$ ), apenas as rotulações diferem.

No caso da Figura 3.17(b), o caminho que completa  $C_2$  é dado por  $eghf$ . Neste caso,  $C_4$  pode ser completado de forma simétrica pelo caminho  $gfeh$ . Com isto, o grafo da Figura 3.17(b) (isomorfo ao  $M_8$ ) será chamado de  $B_{4b'}$ , pois também é um menor grafo que admite 6-CDC e completa  $S_{4b}$  mantendo a cintura 4.

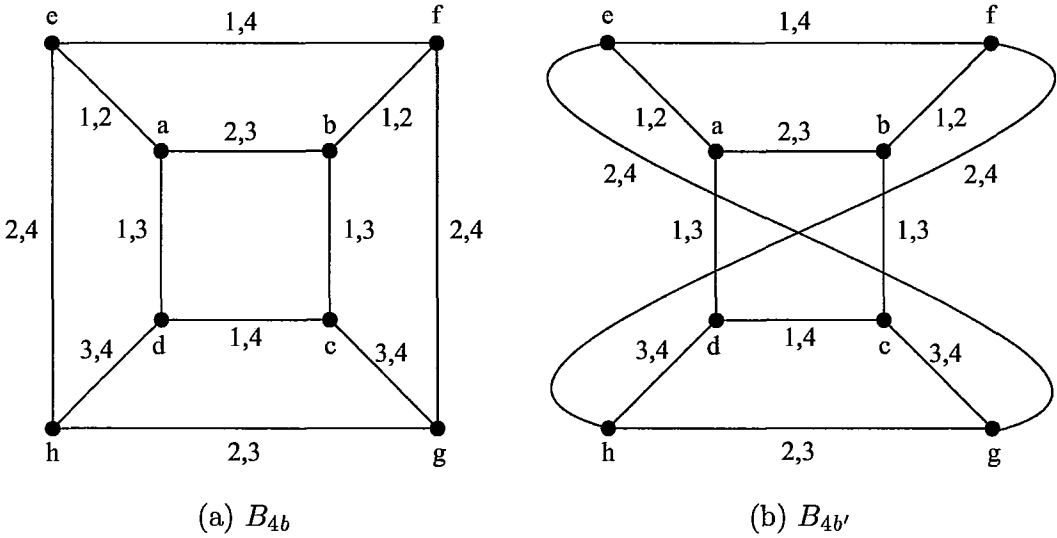


Figura 3.17: Menores grafos ( $B_{4b}$  e  $B_{4b'}$ ) de cintura 4 que admitem 6-CDC e possuem  $S_{4b}$  (com suas rotulações) como subgrafo.

Devemos agora descobrir  $I_{4b}$ . Para isso, voltamos ao estágio da Figura 3.13(b). Sabemos que as arestas  $ef$  e  $gh$  são obrigatórias para completar os ciclos  $C_1$  e  $C_3$  (conforme Figura 3.16). No entanto, acrescentemos apenas a aresta  $ef$ , completando  $C_1$ , e analisemos a deficiência e configuração dos ciclos (Figura 3.18). Temos agora 4 vértices deficientes com grau 1 ( $g$ ,  $h$ ,  $i$  e  $j$ ), ou seja, a deficiência é 8. Além disso, todos os vértices deficientes pertencem a algum ciclo incompleto com 5 arestas definidas ( $C_2$  ou  $C_3$ ) e a outro com 3 arestas definidas ( $C_4$  ou  $C_5$ ), de forma similar ao  $S_{4b}$ . Assim, podemos substituir  $S_{4b}$ , tanto em  $B_{4b}$  quanto em  $B_{4b'}$ , pelo grafo da Figura 3.18, gerando um grafo cúbico, com cintura 4 e que admite 6-CDC. Portanto, o grafo da Figura 3.18 é  $I_{4b}$ .

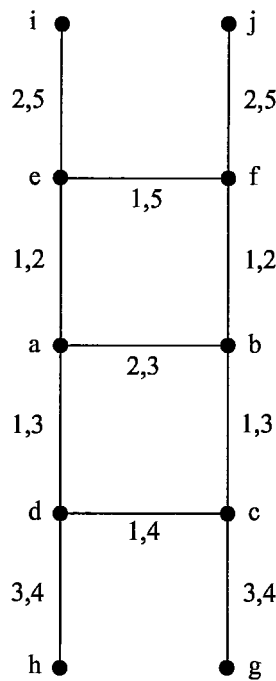


Figura 3.18: Menor grafo ( $I_{4b}$ ) de cintura 4 equivalente ao  $S_{4b}$ .

Repare que, tanto os 2 quadrados presentes em  $I_{4b}$  quanto os quadrados em  $B_{4a} - E(S_{4a})$  e em  $B_{4b'}$ , possuem a mesma configuração de  $S_{4b}$ . Assim, todos os grafos gerados pelas sucessivas substituições de  $S_{4b}$  por  $I_{4b}$  possuirão todos os seus quadrados com a mesma configuração de ciclos de  $S_{4b}$  ( $B_{4b}$  é o único membro desta família onde isto não ocorre).

Verificaremos agora o caso de  $S_{4c}$ . Neste caso, podemos observar que o ciclo  $C_1$  já possui 5 arestas definidas, restando-lhe apenas uma aresta para completar o ciclo. Desta forma, não nos resta outra alternativa, a não ser conectar o vértice  $e$  ao  $f$ .

Neste momento,  $C_2$ , que já possui 4 arestas definidas, pode ser completado tanto pelo caminho  $efg$  quanto por  $ehg$ . É fácil verificar que estas escolhas são simétricas, logo, podemos arbitrar a utilização do caminho  $ehg$ .

O ciclo  $C_3$  também possui 4 arestas definidas e pode ser completado pelo caminho  $hef$  ou  $hgf$ . Repare que a escolha de  $hef$  utiliza as arestas  $he$  e  $ef$  já existentes, já a escolha de  $hgf$  implica na criação da aresta  $gf$ .

Para garantir a minimalidade, tentaremos primeiro o caminho  $hef$ . Com esta escolha (Figura 3.19), percebemos que  $C_4$  deve, a partir do vértice  $h$ , utilizar a aresta  $hg$ . Mas isto faz com que ele feche um ciclo de comprimento 4, além de infringir o Lema 3.2 no caminho  $hgc$  com  $C_2$ .

Portanto,  $C_3$  deve utilizar o caminho  $hgf$ . Com isto,  $C_4$  pode ser completado com o caminho  $hef$ , gerando  $B_{4c}$  (Figura 3.20).

Devemos agora descobrir  $I_{4c}$ . Para isso, voltamos ao estágio da Figura 3.13(c). Sabemos que a aresta  $ef$  é obrigatória para completar o ciclo  $C_1$ . No entanto, para completar  $C_2$  podemos escolher utilizar um vértices novo  $i$  e tomando o caminho  $eig$ . Com isto,  $C_3$  não pode utilizar os vértices existentes para se completar, pois os vértices deficientes ( $g$  e  $i$ ) já possuem

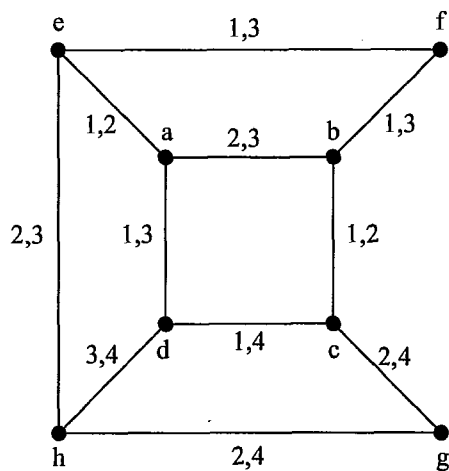


Figura 3.19: Se  $C_3$  utiliza o caminho  $hef$ ,  $C_4$  fica inconsistente.

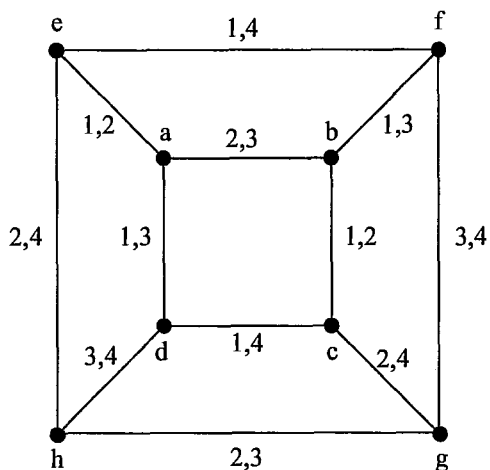


Figura 3.20: Menor grafo ( $B_{4c}$ ) de cintura 4 que admite 6-CDC e possui  $S_{4c}$  (com suas rotulações) como subgrafo.

grau 2. Assim,  $C_3$  deverá acrescentar o vértice  $j$  e utilizar o caminho  $hjf$  para se completar.

O ciclo  $C_4$  não conseguirá se completar com os vértices existentes, pois já têm grau maior que 1. Por isso, deverão ser acrescentados os vértices  $k$  e



$l$  e  $C_4$  se completará com o caminho  $hklg$ , gerando o grafo da Figura 3.21. Neste grafo, existem 4 vértices deficientes com grau 1 (a deficiência é 8). Os vértices  $m$  e  $p$  pertencem a um ciclo com 5 arestas definidas ( $C_5$ ) e a outro com 4 arestas definidas ( $C_6$  ou  $C_7$ ), da mesma forma que os vértices  $e$  e  $f$  de  $S_{4c}$ . E os vértices deficientes  $n$  e  $o$  pertencem a um ciclo com 4 arestas definidas ( $C_6$  ou  $C_7$ ) e a outro com 3 arestas definidas ( $C_8$ ), da mesma forma que os vértices  $g$  e  $h$  de  $S_{4c}$ . Assim, podemos substituir  $S_{4c}$  em  $B_{4c}$  pelo grafo da Figura 3.21, gerando um grafo cúbico, com cintura 4 e que admite 6-CDC. Portanto, o grafo da Figura 3.21 é  $I_{4c}$ .

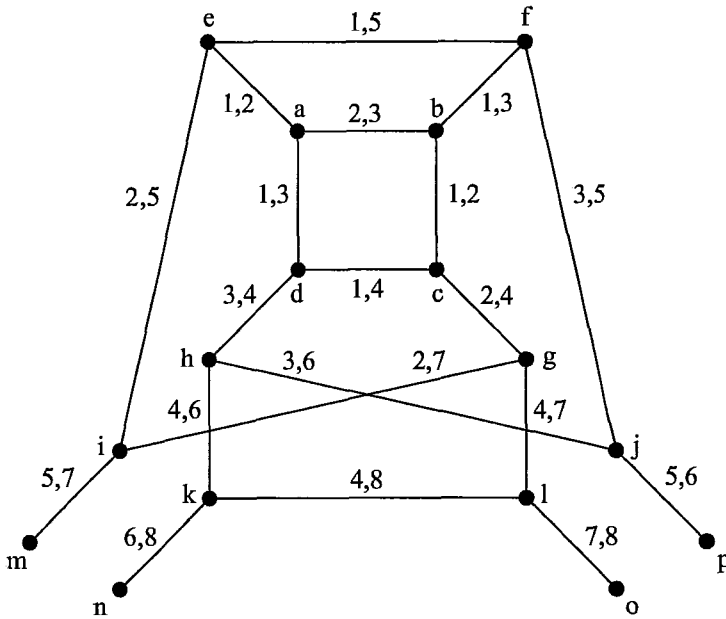


Figura 3.21: Menor grafo ( $I_{4c}$ ) de cintura 4 equivalente ao  $S_{4c}$ .

Uma forma mais simples de representarmos  $I_{4c}$  pode ser observada na Figura 3.22.

Note que, tanto os 2 quadrados presentes em  $I_{4c}$  quanto o quadrado em  $B_{4c} - E(S_{4c})$ , possuem a mesma configuração de  $S_{4c}$ . Assim, todos os grafos

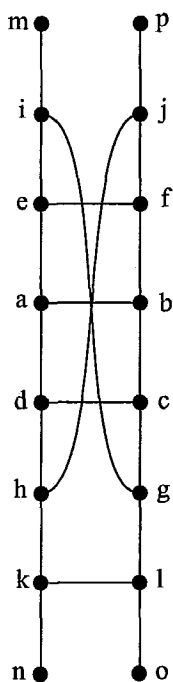


Figura 3.22: Outra representação para  $I_{4c}$ .

gerados pelas sucessivas substituições de  $S_{4c}$  por  $I_{4c}$  possuirão todos os seus quadrados com a mesma configuração de ciclos de  $S_{4c}$  ( $B_{4c}$  é o único membro desta família onde isto não ocorre).

Observe que  $B_{4c} \cong B_{4b} \cong B_{4a} \cong T_{8,2}$ , apenas as rotulações diferem. Assim, tanto  $I_{4a}$  quanto  $I_{4b}$  ou  $I_{4c}$ , podem substituir um quadrado no  $T_{8,2}$ . No entanto, uma vez substituído um quadrado do  $T_{8,2}$  por algum destes grafos, nas próximas iterações deverá ser utilizado sempre o mesmo grafo, não havendo casos híbridos com a utilização de combinações dos casos. Vale ressaltar que apenas  $I_{4b}$  pode substituir um quadrado no  $M_8$  ( $\cong B_{4b'}$ ).

Conforme comentamos no início do estudo do caso de cintura 4, nos grafos da Figura 3.13 os vértices  $e$ ,  $f$ ,  $g$  e  $h$  são distintos, e precisamos tratar os casos onde isso não ocorre. Suponhamos que dois destes vértices, sejam idênticos,

por exemplo  $e = f$ . Claramente, formaríamos um triângulo  $abea$  e, com isso, o grafo deixaria de ter cintura 4, recaindo em um dos grafos da família gerada por  $B_3$  e  $I_3$  (neste caso, em especial, recairia justamente em  $B_3$ ). É fácil verificar que a única possibilidade de não formar triângulos é fazer  $e = g$  ou  $f = h$  (ou ambos).

Suponhamos  $e = g$  e  $f \neq h$ . Sabemos que as únicas configurações possíveis para os ciclos da 6-CDC atravessarem um quadrado são as exibidas na Figura 3.13 (independentemente dos vértices externos serem distintos ou não). Se tentarmos aplicar as configurações das Figuras 3.13(a) ou 3.13(c), veremos que ciclos da 6-CDC serão fechados com comprimento 4, invalidando estas possibilidades. Se aplicarmos a configuração da Figura 3.13(b), perceberemos que os dois ciclos de comprimento 5 exigirão que sejam acrescentadas as arestas  $ef$  e  $fh$ , o que deixaria  $d_G(e) = 4$ , o que invalida esta possibilidade, pois  $G$  é cúbico.

Suponhamos, agora,  $e = g$  e  $f = h$ . Da mesma forma, as configurações das Figuras 3.13(a) e 3.13(c) fechariam um ciclo da 6-CDC com comprimento 4. No entanto, a configuração da Figura 3.13(b) seria válida, apenas forçando a existência da aresta  $ef$  (e fazendo  $C_4 = C_2$ ), o que completaria o grau de todos os vértices, gerando o  $M_6$ , conforme a Figura 3.23.

Note que a primeira iteração de  $I_{4b}$  sobre o  $M_6$  já gera o  $M_8$ , o qual é isomorfo a  $B_{4b'}$ . Assim, o único grafo de cintura 4 desta família que não possui  $S_{4a}$ ,  $S_{4b}$  ou  $S_{4c}$  como subgrafo é o  $M_6$ .

### 3.2.4 Grafos cúbicos de cintura 5 com 6-CDC

Trataremos agora os grafos cúbicos com cintura 5. Partimos, então, de  $S_5$ , que é um pentágono, representado na Figura 3.24 já com os vértices externos  $f, g, h, i$  e  $j$ . Note que estes vértices são necessariamente distintos para que

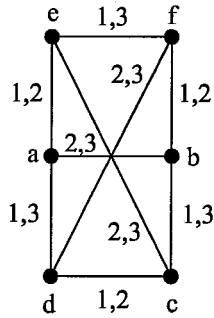


Figura 3.23: Grafo ( $M_6$ ) gerado quando  $e = g$  e  $f = h$  em  $S_4$ .

o grafo mantenha a cintura 5 (caso contrário, seriam formados triângulos ou quadrados).

Nas Figuras 3.24(a), 3.24(b) e 3.24(c) estão representadas as rotulações de  $S_5$  que não infringem os Lemas 3.3 e 3.2 nem obrigam um ciclo da 6-CDC a ser fechado com comprimento menor que 6. Assim, temos 5 ciclos ( $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ ) representados em cada configuração. Note que todos os grafos da Figura 3.24 possuem deficiência 10.

Para cada caso exibido na Figura 3.24, estaremos analisando  $B_5$  e  $I_5$ . Da mesma forma que no caso de cintura 4, chamaremos de  $S_{5a}$  o grafo rotulado da Figura 3.24(a), e de  $B_{5a}$  e  $I_{5a}$  suas respectivas expansões, fazendo o mesmo para os casos das figuras 3.24(b) e 3.24(c).

Em  $S_{5a}$ , podemos verificar que os ciclos  $C_1$  e  $C_2$  possuem 5 arestas definidas, tornando obrigatória a criação das arestas  $fi$  e  $fh$ , para que  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, sejam completos. Analisando o ciclo  $C_3$ , o qual possui 4 arestas definidas, percebemos que ele não pode ser conectado a nenhum vértice existente, visto que todos os vértices deficientes já possuem grau 2. Logo, será necessário inserir um novo vértice  $k$  para que  $C_3$  utilize o caminho  $jk g$  para completar seu comprimento. Com isto, obtemos o grafo da Figura

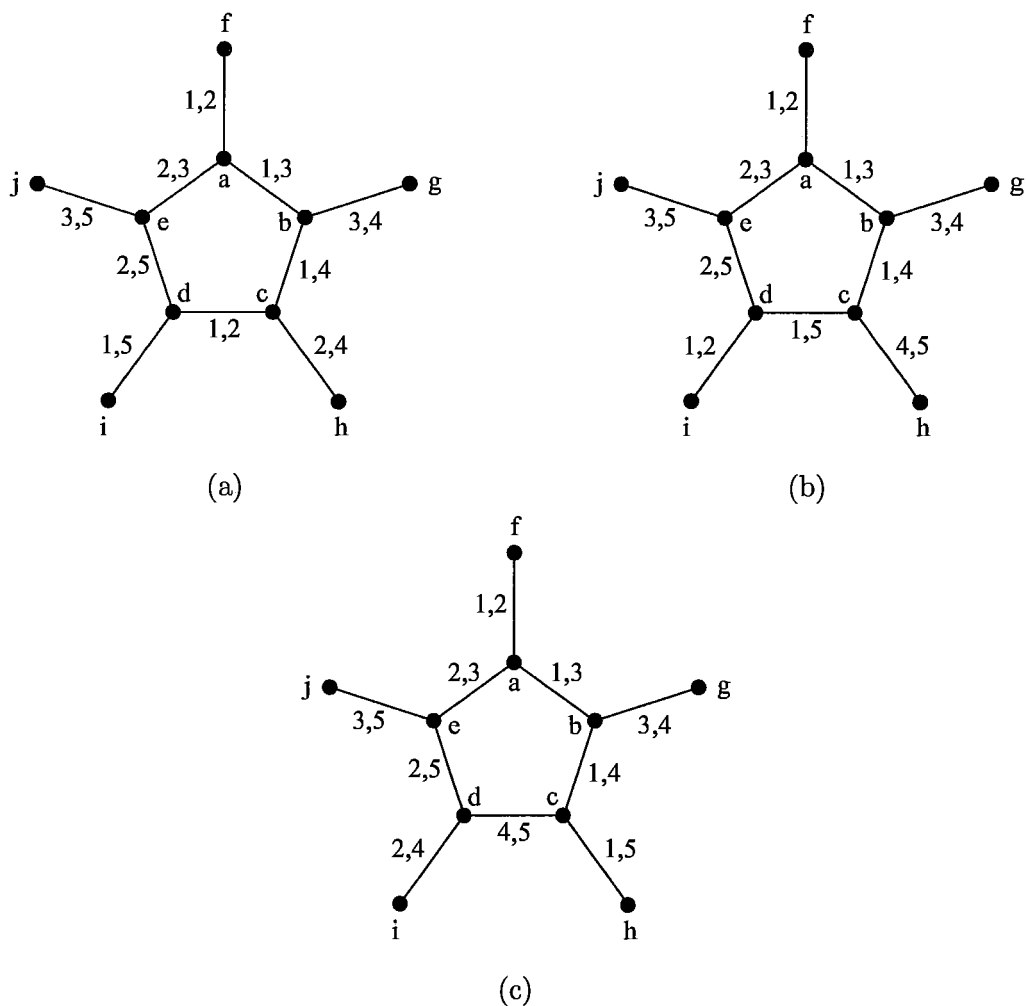


Figura 3.24: Pentágono ( $S_5$ ) com as possíveis configurações de ciclos da 6-CDC que o atravessam.

3.25 (já incluídos os vértices  $l, m, n, o$  e  $p$ , externos ao pentágono, para melhor visualização).

Note que, ao analisarmos os ciclos que atravessam este grafo, percebemos que a configuração parece equivalente à do pentágono inicial ( $S_{5a}$ ), pois temos 2 ciclos com 5 arestas definidas ( $C_4$  e  $C_5$ ), 1 ciclo com 4 arestas definidas ( $C_6$ ) e 2 ciclos com 3 arestas definidas ( $C_7$  e  $C_8$ ). Além disso, temos 5 vértices

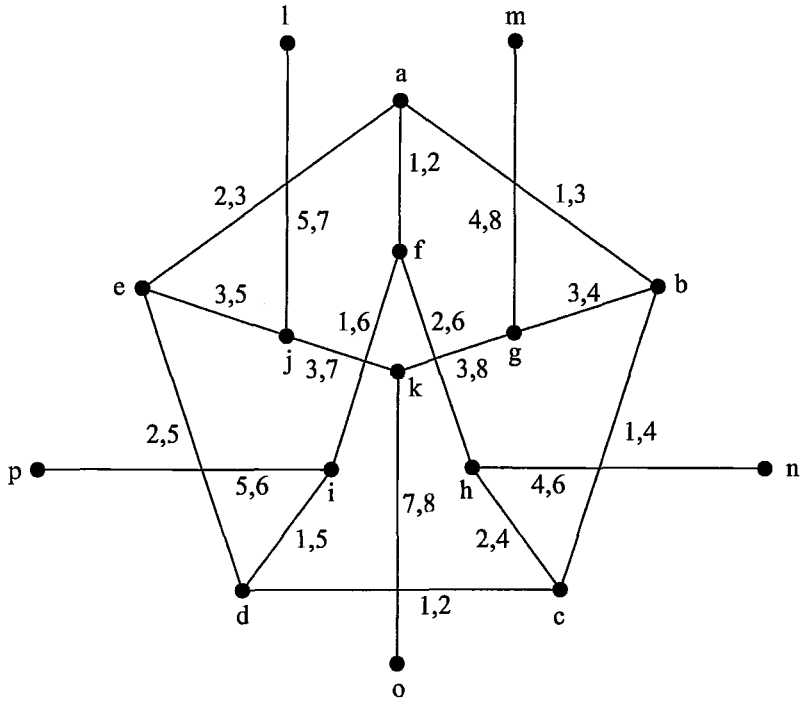


Figura 3.25: Candidato a  $I_{5a}$ .

deficientes com grau 1, logo, a deficiência é 10. No entanto, se tentarmos fazer a correspondência dos vértices deficientes de  $S_{5a}$  com os vértices deficientes da Figura 3.25 verificaremos que não é possível. Em  $S_{5a}$ , temos o vértice  $f$  pertencente a 2 ciclos com 5 arestas definidas ( $C_1$  e  $C_2$ ), os vértices  $g$  e  $j$  pertencentes a um ciclo com 4 arestas definidas ( $C_3$ ) e a outro ciclo com 3 arestas definidas ( $C_4$  ou  $C_5$ ), os vértices  $h$  e  $i$  pertencentes a um ciclo com 5 arestas definidas ( $C_1$  ou  $C_2$ ) e a outro ciclo com 3 arestas definidas ( $C_4$  ou  $C_5$ ). Contudo, o grafo da Figura 3.25 possui os vértices  $l$  e  $m$  pertencentes a um ciclo com 5 arestas definidas ( $C_4$  ou  $C_5$ ) e a outro ciclo com 3 arestas definidas ( $C_7$  ou  $C_8$ ), os vértices  $n$  e  $p$  pertencentes a um ciclo com 5 arestas definidas ( $C_4$  ou  $C_5$ ) e a outro ciclo com 4 arestas definidas ( $C_6$ ), o vértice  $o$

pertencente a 2 ciclos com 3 arestas definidas ( $C_7$  e  $C_8$ ). Portanto, o grafo da Figura 3.25 não é  $I_{5a}$ .

Continuemos nossa análise de crescimento deste grafo, completando o ciclo  $C_4$  com a aresta  $mn$ . Note que ao acrescentarmos as outras arestas incidentes a  $m$  e  $n$ , chegando ao grafo da Figura 3.26, podemos reavaliar a configuração do ciclo e verificarmos que ela é equivalente à do  $S_{5a}$ . Logo, este grafo é  $I_{5a}$ .

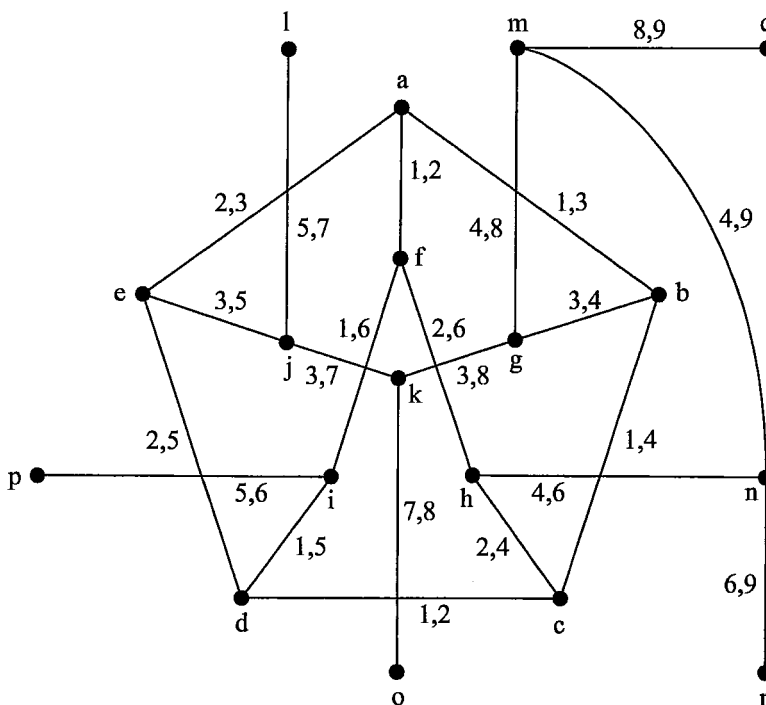


Figura 3.26: Menor grafo ( $I_{5a}$ ) de cintura 5 equivalente ao  $S_{5a}$ .

Observe que chegamos a  $I_{5a}$  antes de  $B_{5a}$ . E todas as arestas e vértices inseridos são inevitáveis, ou seja, não há outra forma de  $S_{5a}$  se expandir. Como  $I_{5a}$  é equivalente a  $S_{5a}$ , podemos expandi-lo repetindo o mesmo procedimento (fechando os ciclos análogos) que levou a  $I_{5a}$ . No entanto, fazendo isto, o grafo nunca se completará.

Repare que a única possibilidade de haver uma outra forma (diferente da que fizemos para  $S_{5a}$ ) de conectarmos os vértices deficientes em  $I_{5a}$  seria se tivéssemos deixado de criar alguma aresta na expansão de  $S_{5a}$  por conta da restrição de cintura. Note que a formação de um ciclo de comprimento menor que 5 ao conectar vértices deficientes  $u$  e  $v$  de  $S_{5a}$  não leva, necessariamente, à formação de um ciclo de mesmo comprimento ao conectar os vértices  $u'$  e  $v'$  correspondentes a  $u$  e  $v$  em  $I_{5a}$ .

Podemos exemplificar com os vértices  $h$  e  $i$  em  $S_{5a}$  e  $l$  e  $r$  em  $I_{5a}$ . Observe, em  $S_{5a}$ , que  $h$  e  $i$  pertencem, cada um, a um ciclo com 5 arestas definidas e a outro com 3 arestas definidas. O mesmo ocorre com os vértices  $l$  e  $r$  em  $I_{5a}$ . Se conectarmos  $h$  e  $i$  em  $S_{5a}$ , claramente teríamos um quadrado  $hidci$ , diminuindo a cintura do grafo. No entanto, se conectarmos os vértices  $l$  e  $r$  em  $I_{5a}$ , não alteraríamos a sua cintura.

Porém, quando expandimos  $S_{5a}$ , a restrição de manter a cintura não foi utilizada, apenas a própria consistência dos ciclos da 6-CDC. Portanto, não haverá outra forma de expansão para  $I_{5a}$  diferente da que foi feita em  $S_{5a}$ . Logo, este grafo nunca se completará. Isto mostra que a configuração de  $S_{5a}$  não é válida para um pentágono.

Prossigamos, então, com a análise de  $S_{5b}$ . O ciclo  $C_1$  possui 5 arestas definidas e deve acrescentar a aresta  $fi$  para se completar. Já o ciclo  $C_2$  possui 4 arestas definidas e deve escolher um caminho de comprimento 2 para se completar. Tentando garantir a minimalidade de arestas, utilizaremos inicialmente um vértice existente para compor este caminho. Temos 3 alternativas para completar  $C_2$  com vértices existentes:  $fgi$ ,  $fhi$  e  $fji$ . Vamos generalizar estes três casos, para verificar que todos eles implicarão em inconsistência da 6-CDC. Os vértices  $g$ ,  $h$  e  $j$  serão genericamente chamados de  $z$ .



Utilizemos o vértice existente  $z$  para completar  $C_2$ , atravessando o caminho  $fzi$ . Como a aresta  $fi$  já havia sido adicionada, teremos um triângulo  $fzif$ . Sabemos que a aresta  $fi$  já é atravessada por  $C_1$ , seja  $C_i$  o outro ciclo que a atravessa. Obviamente,  $C_i \neq C_2$ , caso contrário,  $C_2$  seria fechado com comprimento 5. Como as arestas  $fa$  e  $id$  já estão sendo atravessadas por  $C_1$  e  $C_2$ ,  $C_i$  necessariamente utilizará as arestas  $fz$  e  $iz$ . Com isto,  $C_i$  se fecharia no triângulo  $fzif$ , além de infringir o Lema 3.2 nas arestas  $fz$  e  $iz$  com o ciclo  $C_2$ .

A inclusão de um novo vértice para completar  $C_2$  recairia no mesmo problema. Para verificar este fato, basta substituir o vértice novo por  $z$  na análise anterior. Assim, a configuração inicial de  $S_{5b}$  também não é válida.

Considere, agora,  $S_{5c}$ . Nele, todos os ciclos da 6-CDC representados possuem 4 arestas definidas. Para expandir este grafo, podemos escolher arbitrariamente  $C_1$  para iniciar nossa análise. Se tentarmos fechar  $C_1$  com vértices existentes, criaremos triângulos ou quadrados. Considere agora o caso de completarmos  $C_1$  com um novo vértice  $k$ . Assim,  $C_1$  é completado pelo caminho  $fk$ .

Pelo mesmo motivo,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  e  $C_5$  também deverão utilizar novos vértices  $l$ ,  $m$ ,  $n$  e  $o$  (respectivamente) para se completarem. Desta forma, obtemos o grafo da Figura 3.27. Podemos verificar facilmente que os novos ciclos incompletos que surgem são equivalentes aos de  $S_{5c}$ , possuindo 5 ciclos, cada um com 4 arestas definidas, e 5 vértices deficientes de grau 1, fazendo a deficiência ser 10. Assim, podemos substituir  $S_5$  em  $B_5$  pelo grafo da Figura 3.27, gerando um grafo cúbico, com cintura 5 e que admite 6-CDC. Portanto, o grafo da Figura 3.27 é  $I_5$  (o subscrito  $c$  foi omitido devido à invalidez dos demais casos).

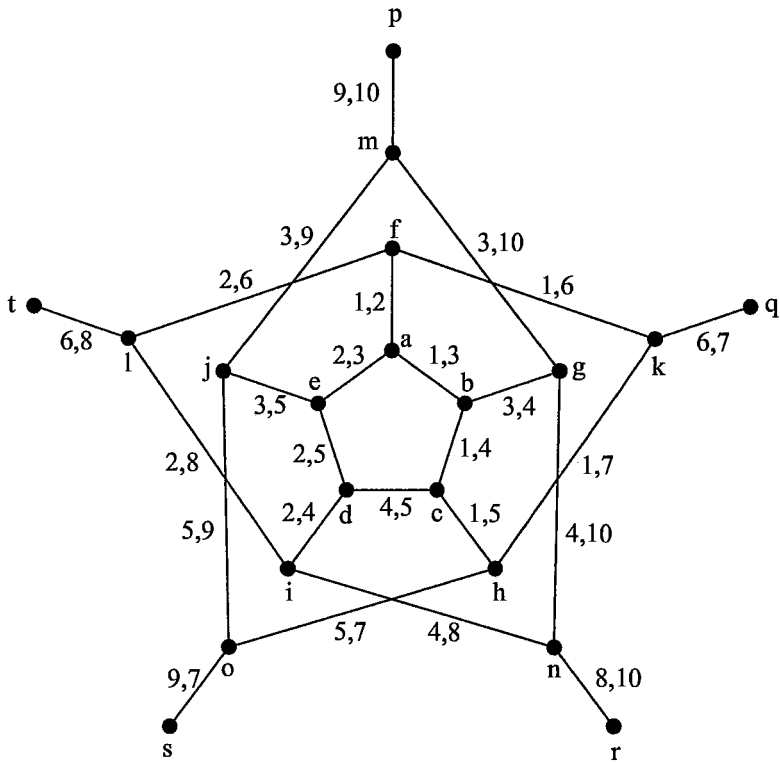


Figura 3.27: Menor grafo ( $I_5$ ) de cintura 5 equivalente ao  $S_{5c}$ .

Devemos, ainda, descobrir  $B_5$ . Para isso, não necessitamos retornar à configuração inicial de  $S_{5c}$ , pois já sabemos que  $I_5$  é a única forma de expandi-lo. Portanto, o que devemos fazer é continuar a expansão até que o grafo se complete.

Observe que, de forma semelhante a  $S_{5a}$ , a expansão de  $S_{5c}$  nos conduziu a  $I_{5c}$  antes de  $B_{5c}$ . No entanto, diferentemente do que ocorreu com  $S_{5a}$ , na expansão de  $S_{5c}$  fomos proibidos de completar os ciclos com vértices existentes devido à diminuição da cintura. Conforme já comentamos no caso de  $S_{5a}$ , esta restrição não ocorrerá necessariamente em  $I_{5c}$ . Portanto, neste caso, devemos continuar a expansão até que o grafo se complete.

Partindo, então, de  $I_5$ , procuremos completar  $C_6$ . Para garantir a minimalidade de  $B_5$ , tentaremos, inicialmente, utilizar vértices existentes. Como  $C_6$  possui 4 arestas definidas, temos 3 vértices candidatos a completá-lo:  $r$ ,  $s$  e  $p$ .

Se tentarmos completar  $C_6$  com o vértice  $r$ , criando as arestas  $qr$  e  $rt$ ,  $C_8$  deverá utilizar  $qr$  para continuar seu caminho (caso contrário, seria fechado com comprimento 5). Assim,  $C_8$  posuiria 5 arestas definidas, devendo, necessariamente, se fechar com a inclusão da aresta  $qt$ , conforme a Figura 3.28. Esta nova aresta, claramente, formaria um triângulo ( $qtrq$ ), diminuindo sua cintura e tornando esta configuração inválida.

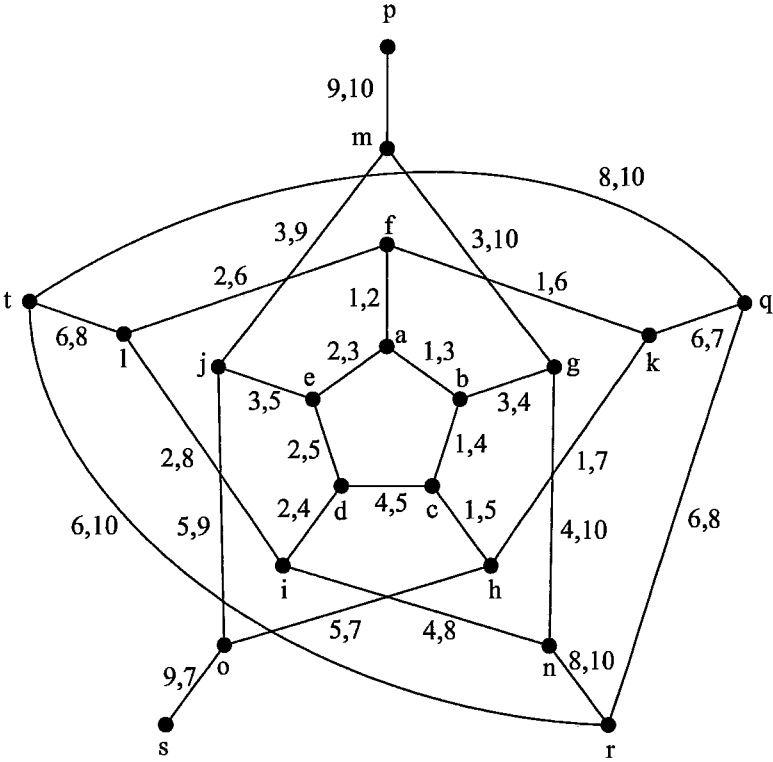


Figura 3.28: Completando  $C_6$  com  $r$  forma um triângulo ( $qtrq$ ).

Por simetria, podemos perceber que a opção de utilizar o vértice  $s$  para completar  $C_6$  resultaria em configuração inválida ( $C_7$  forçaria a existência de um triângulo  $qtsq$ ).

Considere, agora, a utilização do vértice  $p$  para completar  $C_6$ , criando as arestas  $pq$  e  $pt$ . Desta forma,  $C_7$ , para garantir a minimalidade de  $B_5$ , deverá utilizar  $r$ , criando  $qr$  e  $rs$ . Então,  $C_8$  deverá utilizar  $s$ , criando a aresta  $st$  ( $rs$  já havia sido incluída). Isto completa o grau do grafo. Devemos apenas avaliar se  $C_9$  e  $C_{10}$  são devidamente completados, o que é efetivamente obtido pelos caminhos  $pts$  e  $pqr$ , respectivamente, conforme a Figura 3.29. Assim, finalizamos a construção da 6-CDC, sendo este o grafo  $B_5$  (eliminamos o  $c$  subscrito devido à invalidez dos demais casos).

Note que  $B_5$  possui apenas 2 pentágonos, ambos com a mesma configuração de ciclos (iguais ao  $S_{5c}$ ). E como  $I_5$  possui 1 pentágono ( $S_{5c}$ ), está garantida a infinidade de membros da família gerada, além de deixar constante (igual a 2) o número de pentágonos em todos estes grafos.

### 3.2.5 Grafos cúbicos de cintura 6 com 6-CDC

Os casos de cintura 3, 4 e 5 foram examinados de forma exaustiva, abordando todos os casos e configurações possíveis de ciclos da 6-CDC de forma didática. A mesma intuição adquirida naqueles casos pode ser aplicada no caso de cintura 6. No entanto, para não sobrecarregar o texto desnecessariamente, apresentaremos apenas as configurações possíveis para o hexágono e as configurações finais de  $B_6$  e  $I_6$  para cada caso desta cintura.

As 5 configurações possíveis para o hexágono estão representadas na Figura 3.30. Nas Figuras 3.31, 3.32, 3.33 e 3.34 são exibidos  $B_{6a}$  e  $I_{6a}$ ,  $B_{6b}$  e  $I_{6b}$ ,  $B_{6c}$  e  $I_{6c}$ ,  $B_{6d}$  e  $I_{6d}$ , respectivamente. Os grafos  $B_{6e}$  e  $I_{6e}$  serão trata-

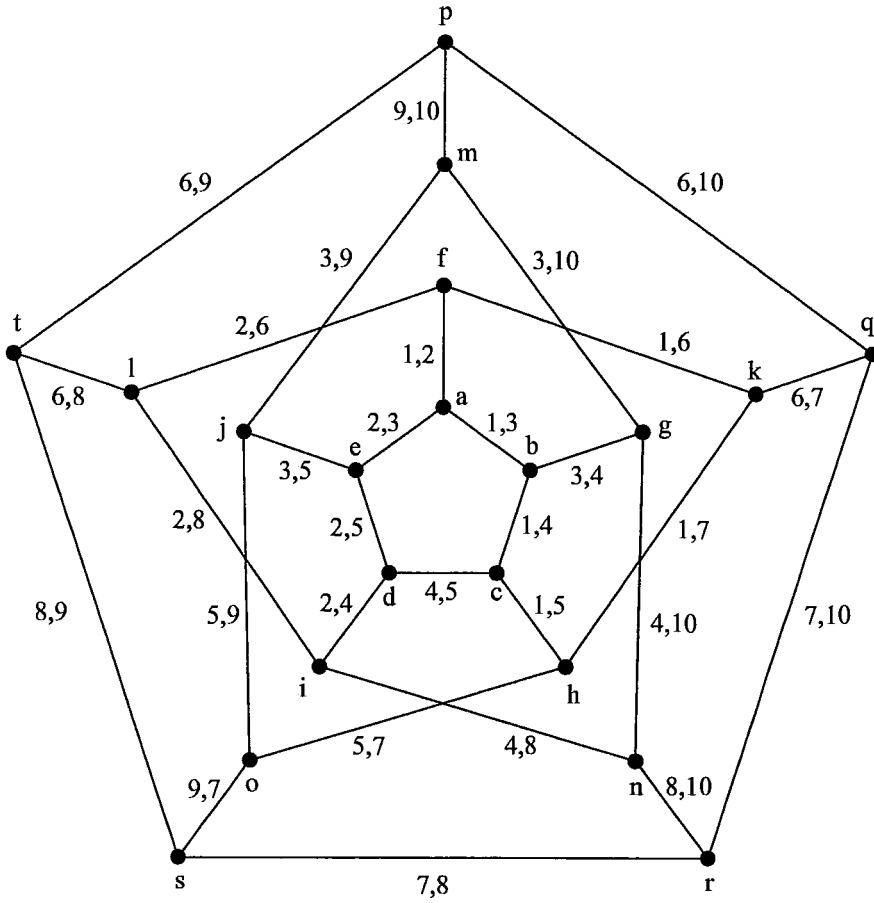


Figura 3.29: Menor grafo ( $B_5$ ) de cintura 5 que admite 6-CDC.

dos de forma especial devido às restrições impostas por  $S_{6e}$ , as quais serão explicitadas a seguir.

Observe que a configuração de  $S_{6e}$  representa um ciclo da 6-CDC completo ( $C_1$ ). Sabemos que qualquer ciclo da 6-CDC de um grafo de cintura 6 deverá possuir a configuração de  $S_{6e}$ . Note que este fato faz com que  $B_{6e}$ , por definição, seja isomorfo ao menor grafo dentre  $B_{6a}$ ,  $B_{6b}$ ,  $B_{6c}$  e  $B_{6d}$ , no caso, o menor é  $B_{6b}$  (16 vértices). No entanto, existem grafos que possuem  $S_{6e}$  como subgrafo (e suas rotulações) mas não podem ser gerados pelos casos anterio-

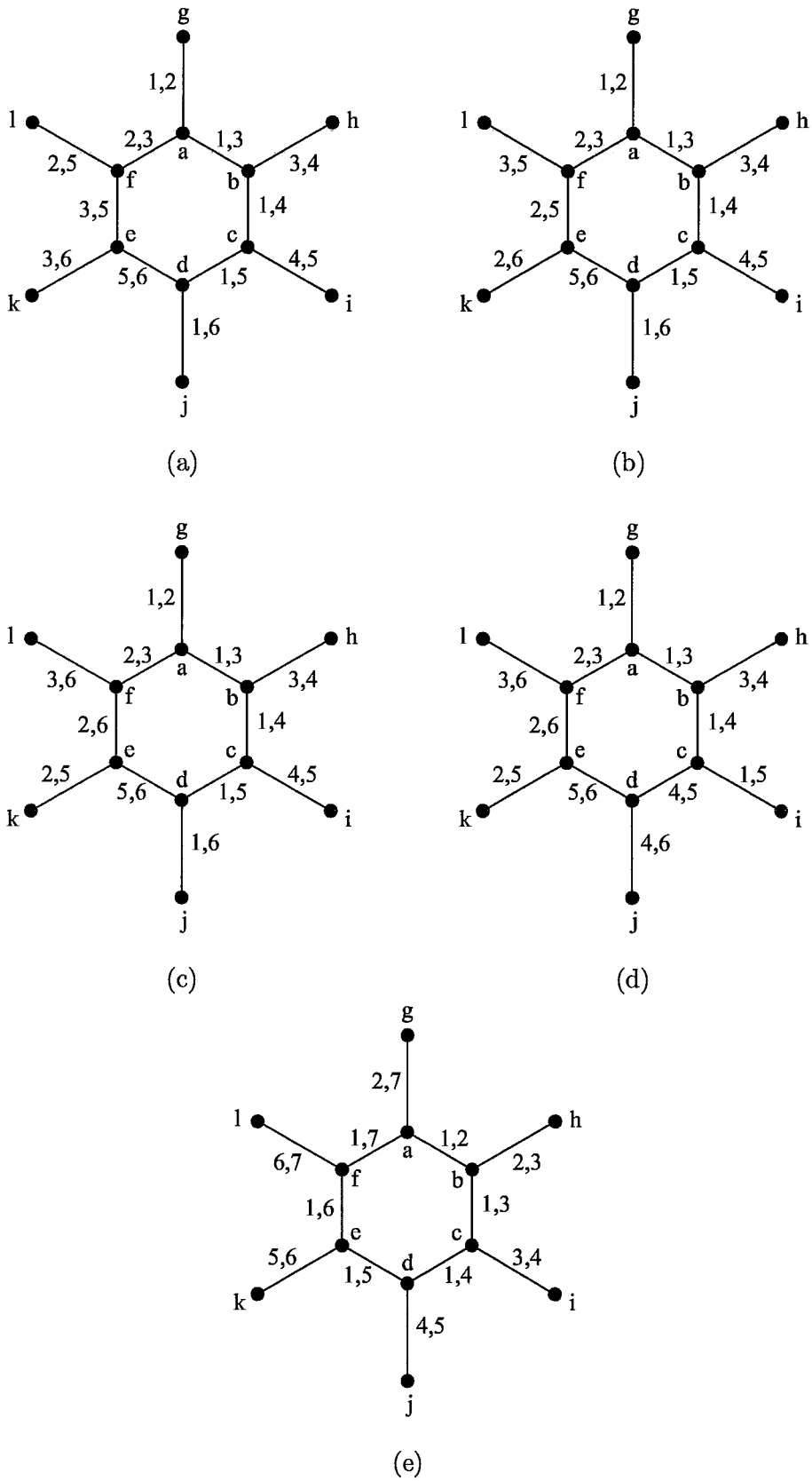


Figura 3.30: Hexágono com as possíveis configurações de ciclos da 6-CDC que o atravessam.

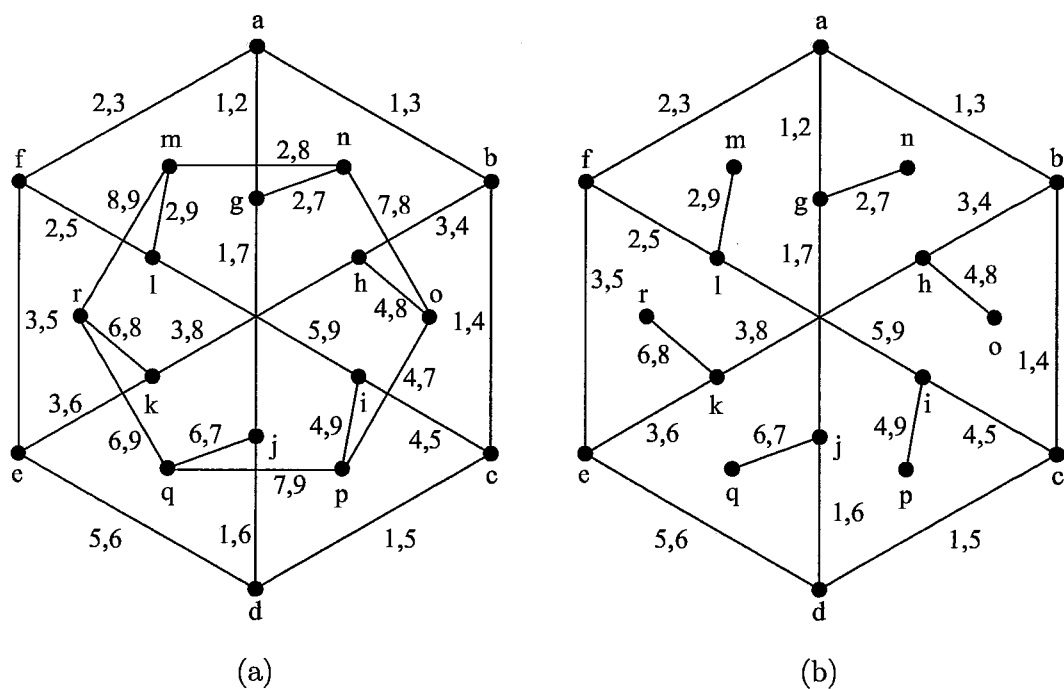


Figura 3.31:  $B_{6a}$  (a) e  $I_{6a}$  (b).

res. Trata-se da possibilidade de todos os hexágonos do grafo apresentarem a configuração de  $S_{6e}$ . Neste caso, todos os ciclos de comprimento 6 pertencem à 6-CDC e são adjacentes a 6 outros ciclos. Repare que se existir algum ciclo de comprimento 6 que não pertença à 6-CDC, ele possuirá, inevitavelmente, uma das outras configurações mostradas na Figura 3.30.

Por isso, redefiniremos  $B_{6e}$  como o menor grafo  $G$  que atenda às seguintes restrições:

- (i)  $G$  é cúbico;
- (ii) possui cintura 6;
- (iii) admite 6-CDC;
- (iv) todos os ciclos de comprimento 6 pertencem à 6-CDC;

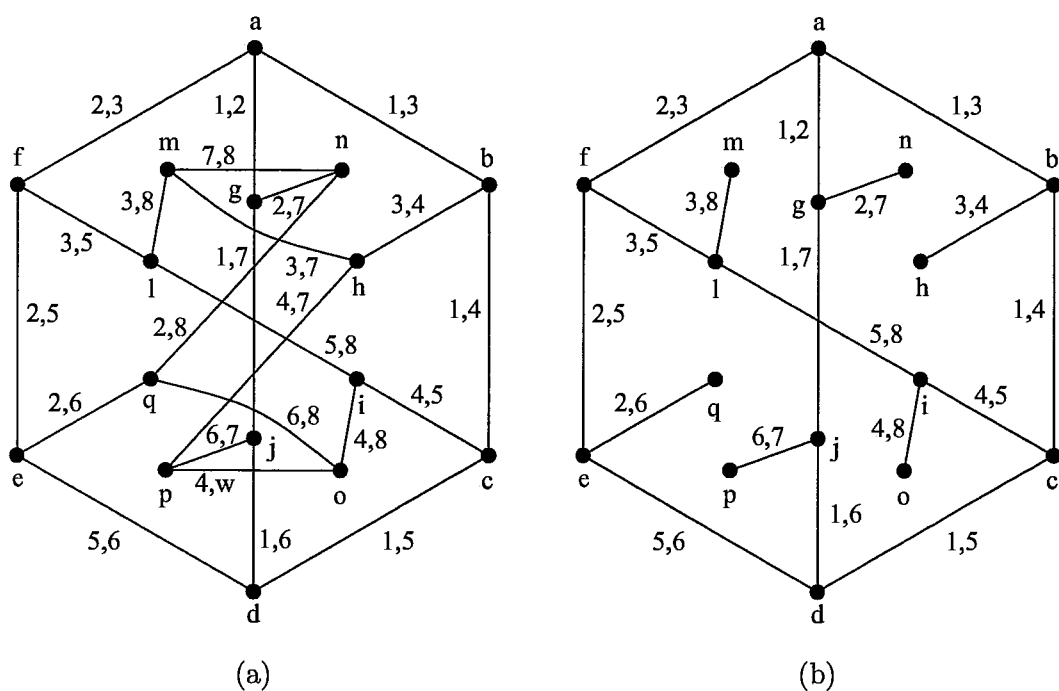


Figura 3.32:  $B_{6b}$  (a) e  $I_{6b}$  (b).

(v) todo ciclo da 6-CDC é adjacente a 6 outros.

A busca por  $B_{6e}$  terá uma abordagem diferente das anteriores, pois as restrições impostas por este caso são mais rígidas.

Podemos provar que qualquer 6-CDC em grafos de cintura maior que 4 possui todos os seus ciclos adjacentes a outros 6, ou seja,  $\sigma(C_i) = 6$ , para todo ciclo  $C_i$  da 6-CDC. Com isto, a condição (v) seria uma consequência natural das condições (i), (ii) e (iii). Faremos esta demonstração na forma de um lema (3.8) e um teorema (3.9).

**Lema 3.8.** *Se existe  $C_i$  tal que  $\sigma(C_i) < 6$ , então  $g(G) < 5$ .*

*Prova.* Para o caso onde  $C_i$  possui corda, a proposição vale trivialmente (qualquer corda num ciclo de comprimento 6 gera outro ciclo de comprimento menor que 5). Suponhamos  $C_i$  sem cordas e tal que  $\sigma(C_i) < 6$ . Então



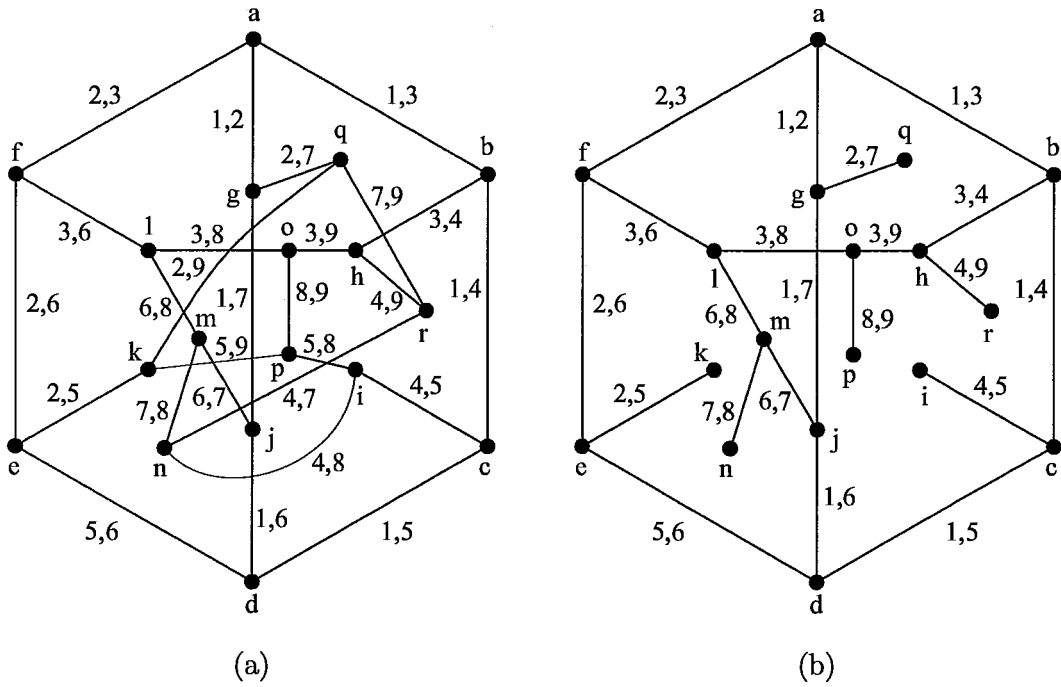


Figura 3.33:  $B_{6c}$  (a) e  $I_{6c}$  (b).

existe um outro ciclo  $C_j$  da 6-CDC tal que  $\mu(C_i, C_j) > 1$ . Pelo Lema 3.4,  $\mu(C_i, C_j) \leq 3$ , e pelo Lema 3.5, se  $\mu(C_i, C_j) = 3$ ,  $G$  é isomorfo ao  $M_6$  ou  $T_{6,2}$ , e ambos possuem corda, contradizendo nossa hipótese. Assim,  $\mu(C_i, C_j) = 2$ .

Sabemos, pelo Lema 3.2, que dois ciclos de uma mesma 6-CDC não podem possuir arestas adjacentes em comum. Sejam  $e$  e  $f$  arestas de  $G$  tais que ambas pertencem a  $C_i$  e  $C_j$ . Como todos os extremos de  $e$  e  $f$  são vértices de  $C_j$  e como  $C_i$  não possui cordas, para completar  $C_j$  devem ser inseridos dois caminhos distintos não pertencentes a  $C_i$ , de comprimento 2, que iniciam em um extremo de  $e$  e terminam em um extremo de  $f$ . Seja  $u$  um extremo de  $e$  e  $v$  um extremo de  $f$  tais que existe um caminho  $P_1$ , não pertencente a  $C_i$ , de comprimento 2, entre  $u$  e  $v$ .

É fácil verificar que em qualquer ciclo de comprimento 6 existe um caminho de comprimento menor ou igual a 3 entre qualquer par de vértices

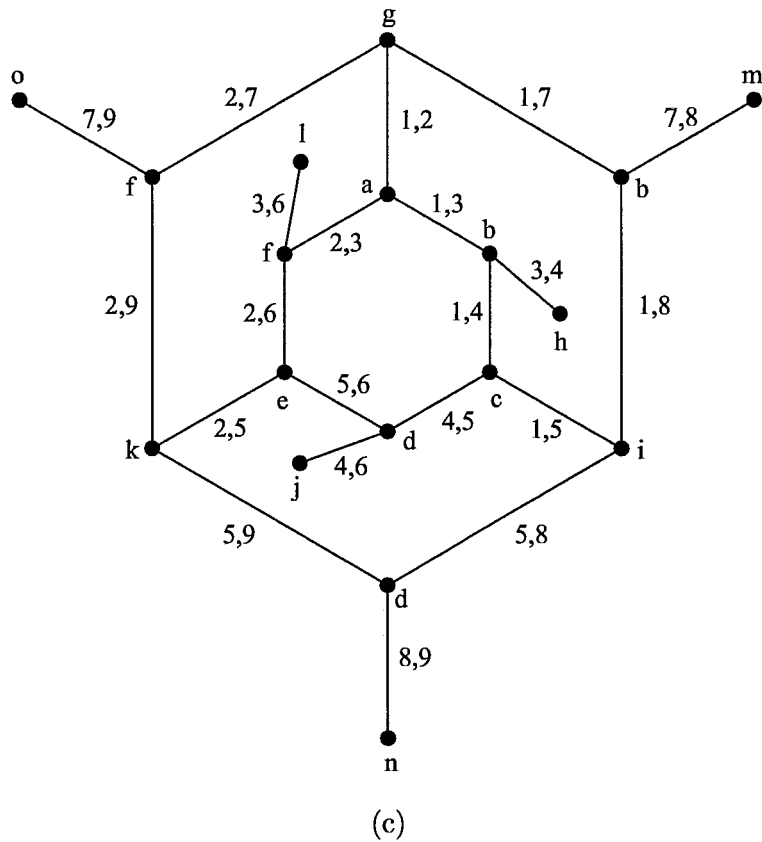
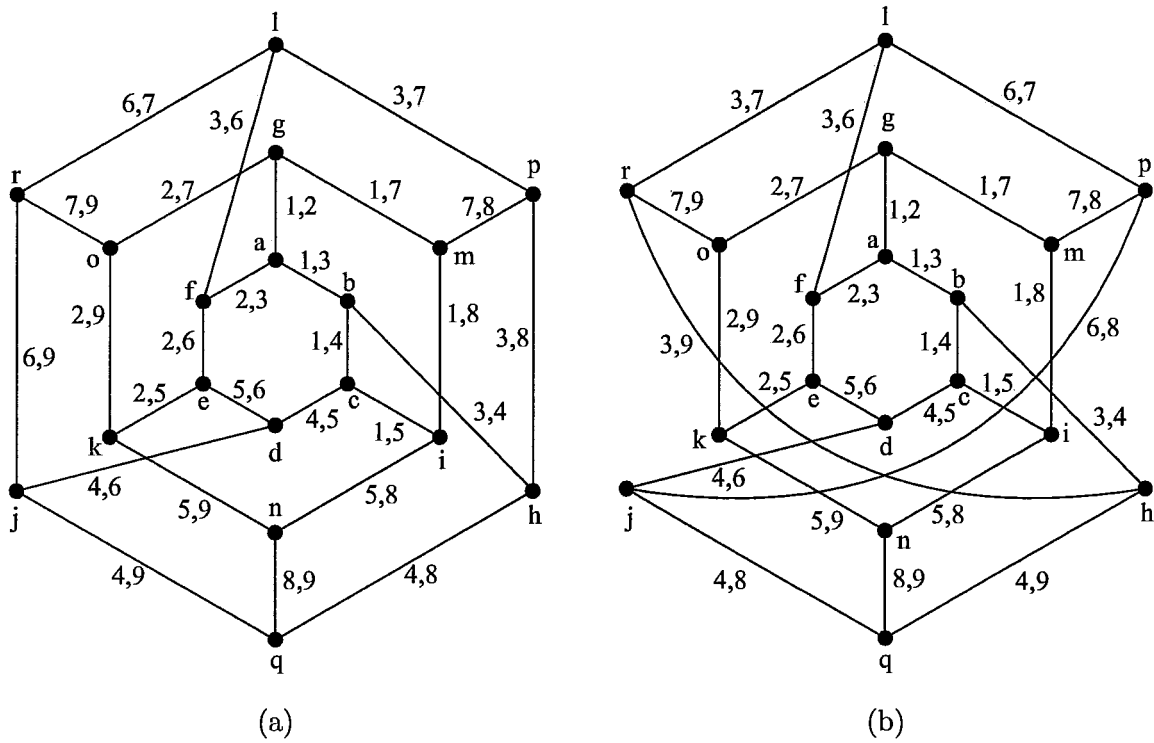


Figura 3.34:  $B_{6d}$  (a),  $B_{6d'}$  (b) e  $I_{6d}$  (c).

pertencentes ao ciclo. Logo, existe um caminho  $P_2$  pertencente a  $C_i$  entre  $u$  e  $v$ . Portanto, existe um ciclo  $C_x$  em  $G$  que passa por  $u$  e  $v$  com comprimento menor ou igual a 5 (basta tomar  $P_1$  e  $P_2$ ).

No entanto, só existe um caso em que o subgrafo induzido pelas arestas de  $C_i$  e  $C_j$  possuirá cintura 5, o qual é mostrado na Figura 3.35.

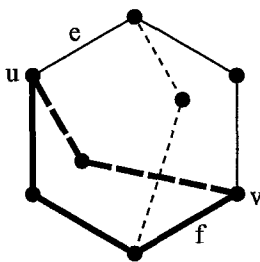


Figura 3.35: Único caso onde  $C_i$  e  $C_j$  induzem um grafo de cintura 5.

E existe apenas uma configuração possível para que os demais ciclos da 6-CDC atravessem este subgrafo, a qual é idêntica ao  $S_{5a}$  (Figura 3.24(a)). Esta configuração já foi demonstrada ser inválida. Assim, a configuração da Figura 3.35 também é inválida, e existe um ciclo de comprimento menor que 5 em  $G$ , ou seja, a cintura de  $G$  é menor que 5.  $\square$

**Teorema 3.9.**  $g(G) \geq 5$  se somente se  $\sigma(C_i) = 6$ , para todo  $C_i$  pertencente à 6-CDC.

*Prova.* ( $\Rightarrow$ ) Forma contra-positiva do Lema 3.8, pois, pelo Teorema 3.7,  $\sigma(C_i) \leq 6$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos (por contra-posição), que  $g(G) < 5$ . Podemos verificar facilmente, tanto para o caso onde  $g(G) = 3$  (Figura 3.6), quanto para os casos onde  $g(G) = 4$  (Figuras 3.13(a), 3.13(b) e 3.13(c)), que existem ciclos da 6-CDC que possuem mais de uma aresta em comum. Logo, existe um ciclo  $C_i$  pertencente à 6-CDC tal que  $\sigma(C_i) < 6$ .  $\square$

Este teorema nos poupa muito trabalho, pois só precisamos verificar a configuração onde todos os ciclos da 6-CDC são adjacentes a outros 6. Vale ressaltar que o teorema se aplica ao caso de cintura 5, e podemos verificar, agora de forma mais simples, que  $S_{5a}$  e  $S_{5b}$  (Figuras 3.24(a) e 3.24(b)) não são configurações válidas, pois existem ciclos adjacentes a menos de 6 outros ciclos. Isto pode ser percebido pela existência de ciclos  $C_i$  e  $C_j$  que compartilham mais de uma aresta. E se  $\mu(C_i, C_j) \geq 2$ , então  $\sigma(C_i) < 6$ , ferindo o Teorema 3.9. No entanto, observe que não poderíamos apresentar este teorema antes da análise da cintura 5, pois a prova do Lema 3.8 utiliza aquela análise.

Com este resultado, simplificamos a busca pelo menor grafo ( $B_{6e}$ ) que atende às condições do caso (e). Podemos simplificar ainda mais, definindo um grafo  $D_{6e}$  de forma similar ao conceito de grafo *dual* [24]. Façamos  $V(D_{6e}) = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ , onde  $C_i$  é um ciclo da 6-CDC de  $B_{6e}$ , ou seja, os vértices de  $D_{6e}$  representam os ciclos da 6-CDC de  $B_{6e}$  (que são todos os seus ciclos de comprimento 6). Façamos, ainda,  $e = C_i C_j \in E(D_{6e}) \iff \mu(C_i, C_j) = 1$ , isto é, as arestas de  $D_{6e}$  representam a adjacência entre os ciclos de  $B_{6e}$ . Temos, então, a partir da configuração de  $S_{6e}$ , um subgrafo de  $D_{6e}$ , representado na Figura 3.36 ( $S_{6e}$  está representado com arestas tracejadas).

Como todos os ciclos da 6-CDC de  $B_{6e}$  são adjacentes a outros 6,  $D_{6e}$  é 6-regular. Conforme já comentamos anteriormente, em qualquer 6-CDC cada vértice  $v$  pertencerá a 3 ciclos distintos. É fácil ver que estes 3 ciclos serão adjacentes entre si (pois compartilham uma das arestas incidentes a  $v$ ). Assim, todo vértice de  $B_{6e}$  corresponderá a um triângulo em  $D_{6e}$  (e vice-versa).

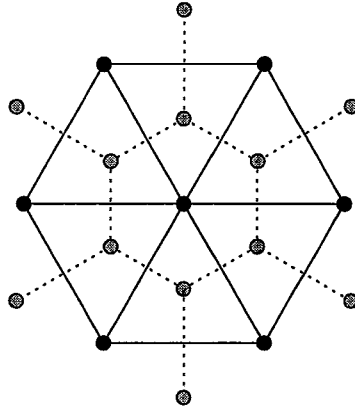


Figura 3.36: Subgrafo de  $D_{6e}$ .

Como  $B_{6e}$  é cúbico, cada triângulo em  $D_{6e}$  só pode ser adjacente (em arestas) a 3 outros. Note que, da mesma forma que ocorre nos grafos duais, cada aresta de  $D_{6e}$  corresponde a uma aresta de  $B_{6e}$ . Portanto, cada aresta de  $D_{6e}$  só pode ser compartilhada por 2 triângulos (pois  $B_{6e}$  não possui arestas paralelas). Devido a esta restrição, não podemos conectar os vértices com grau 3 do subgrafo de  $D_{6e}$  na Figura 3.36. E, conseqüentemente, os ciclos  $C_2, \dots, C_7$  deverão se completar independentemente, isto é, sem criar novas adjacências, gerando o subgrafo de  $B_{6e}$  indicado na Figura 3.37 (as arestas de  $D_{6e}$  estão tracejadas).

Agora devemos estudar como este subgrafo pode crescer mantendo a cintura 6, a consistência da 6-CDC e a restrição imposta pelo Teorema 3.9. Sabemos que  $B_{6e}$  deve ser o menor grafo que satisfaz estas condições. Assim, devemos tentar, inicialmente, completar este subgrafo sem adicionar novos vértices.

Para facilitar a visualização das possibilidades, tomemos o subgrafo induzido pelas arestas que ainda não pertencem a 2 ciclos, que é o ciclo de 18 vértices que contorna o grafo da Figura 3.37. Para destacar os vértices que

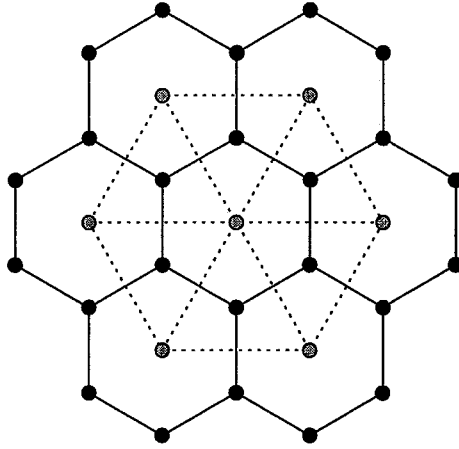


Figura 3.37: Subgrafo de  $B_{6e}$ .

podemos utilizar nas novas conexões, representaremos os vértices deficientes como círculos sem preenchimento, conforme a Figura 3.38.

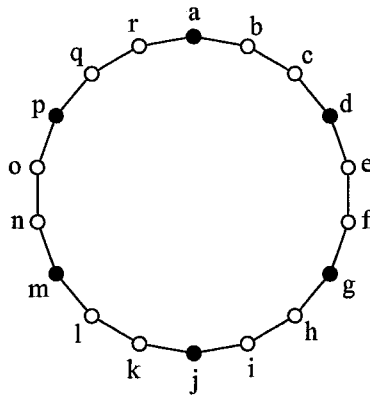


Figura 3.38: Subgrafo de  $B_{6e}$  a ser completado e seus vértices deficientes.

Observe que nosso objetivo agora é conectar vértices sem preenchimento de forma que seja mantida a consistência da 6-CDC e a cintura 6. Podemos perceber, facilmente, que as arestas  $uv$  e  $vz$ , incidentes a um vértice cheio (não deficiente)  $v$ , devem, necessariamente, pertencer a um mesmo ciclo novo

$C_i$ , já que no grafo da Figura 3.37 nenhum ciclo utiliza este mesmo par de arestas. No entanto,  $C_i$  não poderá utilizar as outras arestas incidentes a  $u$  e  $z$  que pertencem ao ciclo original de 18 vértices, pois fariam  $C_i$  infringir o Lema 3.2 com ciclos definidos na Figura 3.37. Desta forma, as novas arestas que incidirão sobre  $u$  e  $z$  pertencerão a  $C_i$ , o qual se completará com um outro caminho  $u'v'z'$  pertencente ao ciclo de 18 vértices, onde  $v'$  é um vértice cheio.

Assim, precisamos apenas testar os pares de vértices cheios que podem ter seus vizinhos conectados. Repare que vértices cheios que estão a uma distância menor que 6 no ciclo de 18 vértices não podem ter seus vizinhos conectados sem formar um ciclo menor que 6. Note, ainda, que os vértices cheios que estão à distância 6 só podem conectar seus vizinhos de forma cruzada, conforme a Figura 3.39. No entanto, vértices que estão à distância 9 podem se conectar diretamente (Figura 3.40(a)) ou de forma cruzada (Figura 3.40(b)).

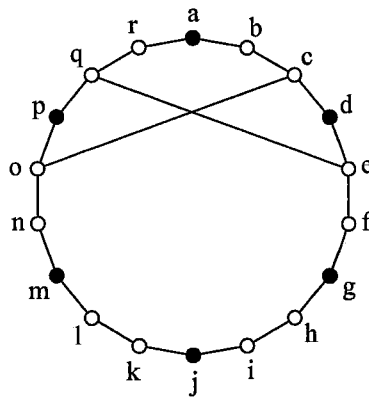


Figura 3.39: Vértices cheios à distância 6 com seus vizinhos conectados de forma cruzada.

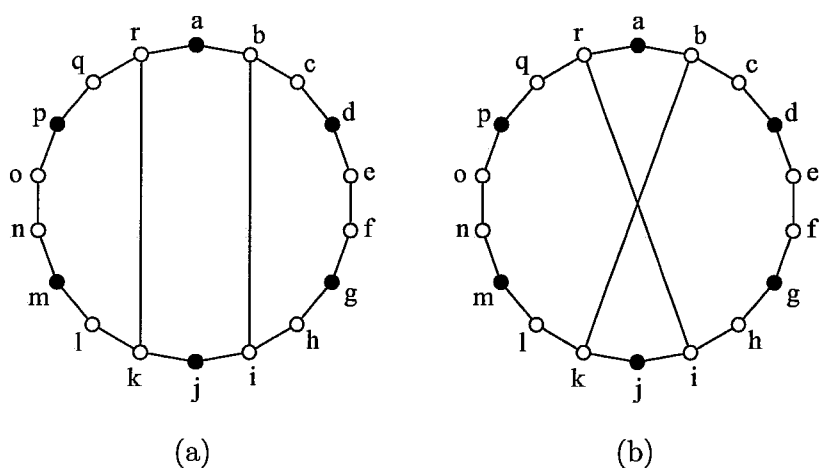


Figura 3.40: Vértices à distância 9 com seus vizinhos conectados de forma direta (a) e cruzada (b).

Se conectarmos diretamente os vizinhos de todos os vértices cheios à distância 9, obtemos o grafo da Figura 3.41. Observe que as arestas que conectam vértices sem preenchimento também devem formar ciclos da 6-CDC. Por exemplo, temos o ciclo  $bcnohib$ . Note que as arestas inseridas devem ser atravessadas por 2 novos ciclos, enquanto as arestas do ciclo original (de 18 vértices) só devem ser atravessadas por 1 novo ciclo, já que elas pertencem a algum outro ciclo do grafo original da Figura 3.37.

É fácil verificar que se conectarmos qualquer destes ciclos de forma cruzada (por exemplo, fazendo  $rabkjr$ ), a configuração dos ciclos que utilizam as arestas entre vértices sem preenchimento fica inconsistente. E se conectarmos mais de um destes ciclos de forma cruzada, fecharemos um ciclo menor que 6. Assim, a única forma de combinarmos todos os vértices cheios à distância 9 é a apresentada na Figura 3.41.

No caso de combinarmos vértices cheios  $u$  e  $v$ , à distância 6, de forma cruzada (conforme os vértices  $p$  e  $d$  da Figura 3.39), devemos, necessariamente,



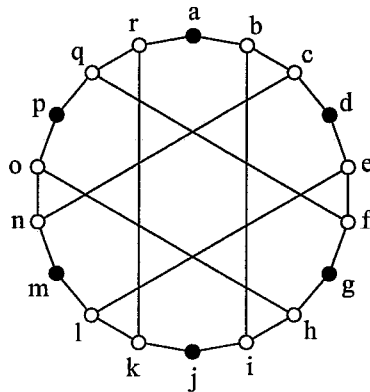


Figura 3.41: Todos os vértices cheios à distância 9 com seus vizinhos conectados de forma direta.

combinar o vértice cheio  $z$  ( $a$  na Figura 3.39), que se encontra à distância 4 de  $u$  e  $v$ , com o vértice cheio que está à distância 9 de  $z$  ( $j$  na Figura 3.39). Caso contrário, formaremos um ciclo menor que 6. Com esta ligação, só nos resta conectar os vértices cheios restantes ( $m$  e  $g$  na Figura 3.39) de forma cruzada (pois estão à distância 6 um do outro), chegando ao grafo da Figura 3.42 que possui uma 6-CDC consistente.

Note que se combinarmos de forma cruzada os vértices cheios à distância 9 que estão conectados de forma direta, deixamos a 6-CDC inconsistente. Portanto, como já analisamos todas as possibilidades dos vértices cheios se combinarem, as únicas formas de completarmos o grafo da Figura 3.37, mantendo a consistência da 6-CDC e a cintura, são as indicadas nas Figuras 3.41 e 3.42. Assim, temos os grafos das Figuras 3.43(a) e 3.43(b) como  $B_{6e}$  e  $B_{6e'}$ .

Precisamos ainda descobrir  $I_{6e}$  para definir como  $B_{6e}$  pode crescer mantendo as restrições deste caso (cintura 6, todos os ciclos de comprimento 6 pertencem à 6-CDC e são adjacentes a outros 6). Para isso, voltemos ao  $S_{6e}$ . É fácil verificar que entre qualquer par de vértices daquele grafo existe um

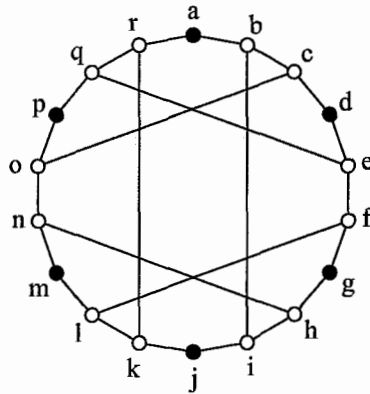


Figura 3.42: Única possibilidade de combinar 2 vértices cheios à distância 6 de forma cruzada.

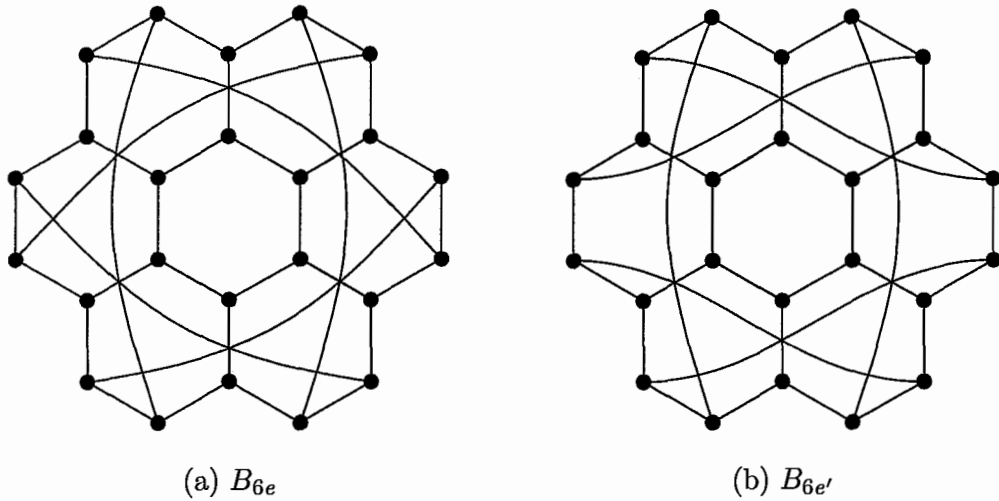


Figura 3.43: Menores grafos ( $B_{6e}$  e  $B_{6e'}$ ) de cintura 6 que admitem 6-CDC e onde todos os hexágonos pertencem à 6-CDC.

caminho menor que 6 (o *diâmetro* do grafo é 5). Isto impede a adição de arestas entre os vértices existentes. Podemos, arbitrariamente, determinar que o vértice  $h$  será conectado a novos vértices  $m$  e  $n$ . Com isto,  $C_3$  fica com 4 arestas definidas e deve ser fechado (pois a configuração que procuramos

só possui ciclos com 3 arestas definidas). Não podemos fechar  $C_3$  com os vértices existentes sem formar um ciclo de comprimento menor que 6 ou ferir o Lema 3.2. Assim, devemos acrescentar o vértice  $o$  e as arestas  $no$  e  $io$ , fechando o ciclo  $C_3$ , e chegando à configuração da Figura 3.44. Repare que os vértices  $p, q$  e  $r$  são necessariamente adicionados.

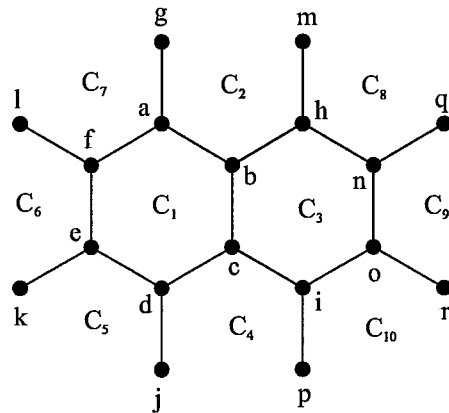


Figura 3.44: Configuração parcial do  $I_{6e}$ .

Observe que o grafo da Figura 3.44 já possui 6 ciclos incompletos com 3 arestas definidas, similarmente ao  $S_{6e}$ . No entanto, ainda há 2 ciclos ( $C_2$  e  $C_4$ ) com 4 arestas definidas que devem ser fechados acrescentando os vértices  $s$  e  $t$ . Isto deixa o grafo com deficiência 14, contudo, o hexágono original possui deficiência 12. Podemos alcançar esta deficiência conectando os vértices  $s$  e  $t$ , conforme a Figura 3.45. Repare que esta é a única conexão que mantém a cintura e a consistência da 6-CDC.

O grafo da Figura 3.45 possui deficiência 12 e todos os ciclos da 6-CDC incompletos possuem 3 arestas definidas, da mesma forma que no grafo da Figura 3.30(e). Assim, este é o  $I_{6e}$ . Note que, apesar de este grafo possuir 2 ciclos da 6-CDC incompletos a mais do que o hexágono original, estes ciclos são fechados de forma consistente nas iterações sobre  $B_{6e}$  e  $B_{6e'}$ . Nas Figuras

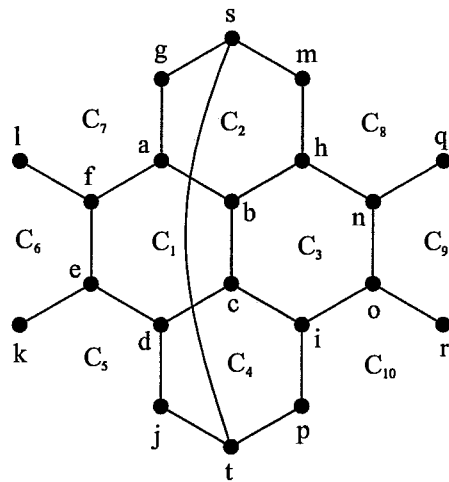


Figura 3.45: Menor grafo ( $I_{6e}$ ) de cintura 6 equivalente ao  $S_{6e}$ .

3.46 e 3.47 podemos observar o resultado da iteração de  $I_{6e}$  sobre  $B_{6e}$  e  $B_{6e'}$ , respectivamente.

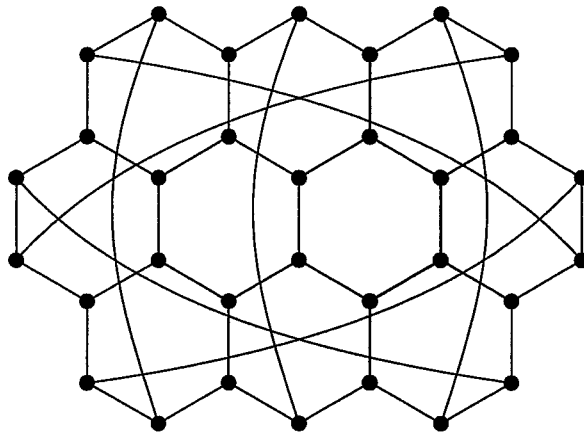


Figura 3.46: Primeira iteração sobre  $B_{6e}$ .

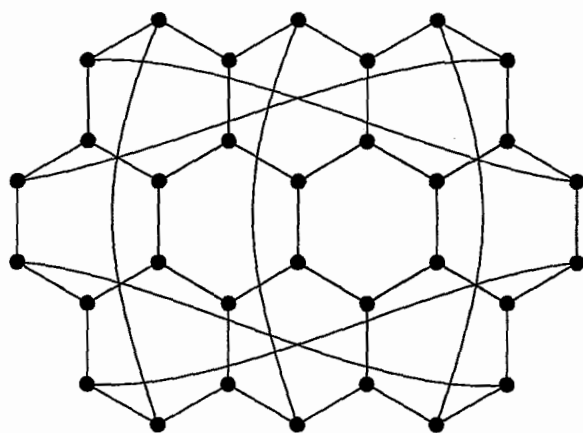


Figura 3.47: Primeira iteração sobre  $B_{6e'}$ .

# Capítulo 4

## Relação entre o SD Cordal e a CDC

Até agora, tratamos isoladamente os conceitos de SDC e CDC. Neste capítulo, abordaremos algumas relações entre estes conceitos e mostraremos que, na verdade, o conjunto de grafos cúbicos ( $n > 4$ ) que admitem SDCM é um subconjunto bem definido dos grafos cúbicos que admitem 6-CDC.

A correlação entre SDCM e 6-CDC em grafos cúbicos pode ser vislumbrada em vários resultados deste trabalho. Algumas relações são secundárias, como a existência de ciclo hamiltoniano, outras mais fortes, como a caracterização de classes de grafos que satisfazem às definições.

Neste capítulo, chamaremos a *3-coloração de arestas* simplesmente de *3-coloração*. Um grafo é dito *3-colorível* se admite uma 3-coloração.

### 4.1 Ciclo hamiltoniano e 3-coloração

O conceito de *decomposição poliédrica par*, definida por Szekeres em [97], já nos proporciona um resultado imediato. No Teorema 3.1 está estabelecido

que a existência de decomposição poliédrica par é equivalente à 3-coloração em grafos cúbicos. Assim, todos os grafos cúbicos que admitem 6-CDC possuem uma 3-coloração de arestas.

Para verificarmos que todo grafo cúbico que admite 6-CDC e pertence à família gerada no pelo método descrito no Capítulo 3 é hamiltoniano, podemos utilizar o próprio método construtivo apresentado. Basta, para isso, exibirmos um ciclo hamiltoniano em  $B_{g(G)}$  e identificarmos, em  $I_{g(G)}$ , caminhos equivalentes aos percorridos pelo ciclo hamiltoniano no subgrafo  $S_{g(G)}$  de  $B_{g(G)}$ , para toda cintura  $3 \leq g(G) \leq 6$ . Como nas iterações definidas  $S_{g(G)}$  é substituído por  $I_{g(G)}$ , isto garante que em todas as iterações o ciclo hamiltoniano poderá ser construído. Nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 e 4.8 exibimos os ciclos hamiltonianos em  $B_{g(G)}$  e caminhos equivalentes em  $I_{g(G)}$ , para cada cintura considerada.

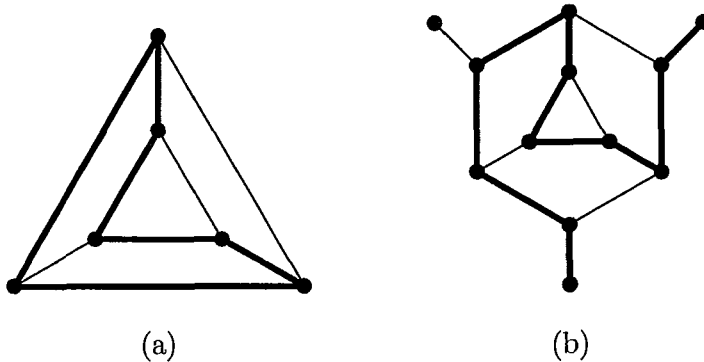


Figura 4.1: Ciclo hamiltoniano em  $B_3$  (a) e caminho equivalente em  $I_3$  (b).

Note que, em todas as cinturas, o caminho indicado em  $I_g(G)$  atravessa o seu subgrafo isomorfo a  $S_{g(G)}$  de forma idêntica ao mesmo subgrafo em  $B_{g(G)}$ . Isto garante a existência de ciclos hamiltonianos em todas as iterações.

No caso dos grafos cúbicos que admitem SDCM, já demonstramos (Corolário 2.7) que possuem ciclo hamiltoniano. É fácil verificar que todo grafo

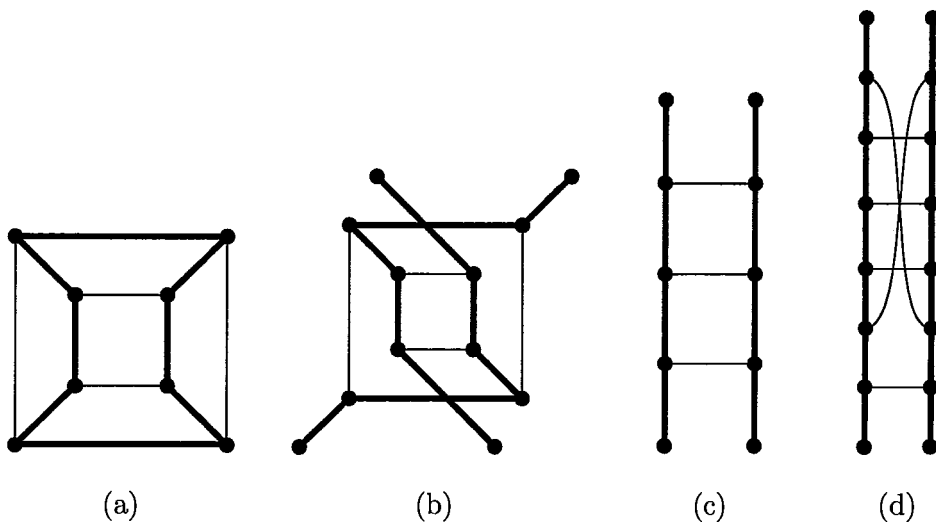


Figura 4.2: Ciclo hamiltoniano em  $B_4$  (a) e caminhos equivalentes em  $I_{4a}$  (b),  $I_{4b}$  (c) e  $I_{4c}$  (d).

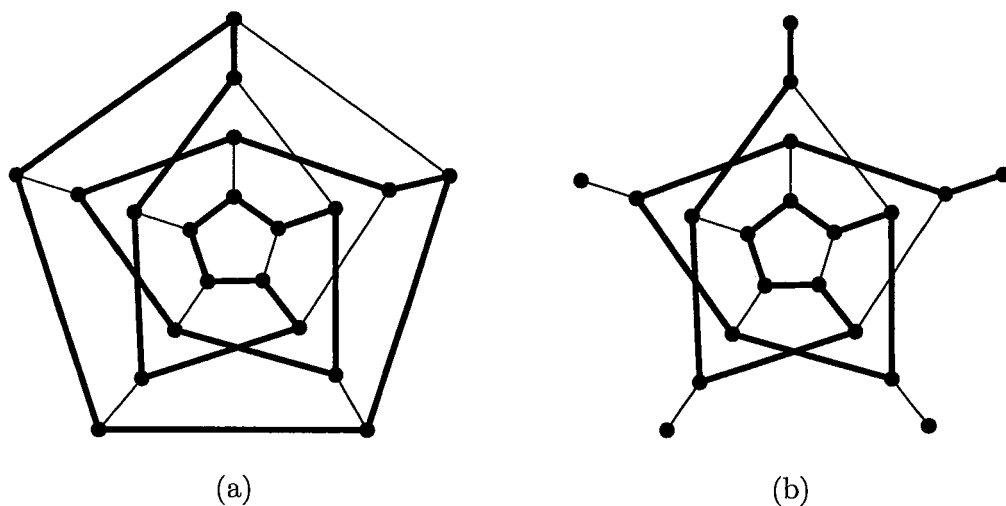


Figura 4.3: Ciclo hamiltoniano em  $B_5$  (a) e caminho equivalente em  $I_5$  (b).

cúbico hamiltoniano é 3-colorível. Basta, para isso, colorir as arestas do ciclo hamiltoniano com 2 cores (como  $n$  é par, sempre conseguimos) e as arestas restantes (um emparelhamento perfeito) com uma terceira cor. Logo, todo grafo cúbico que admite SDCM também possui 3-coloração.



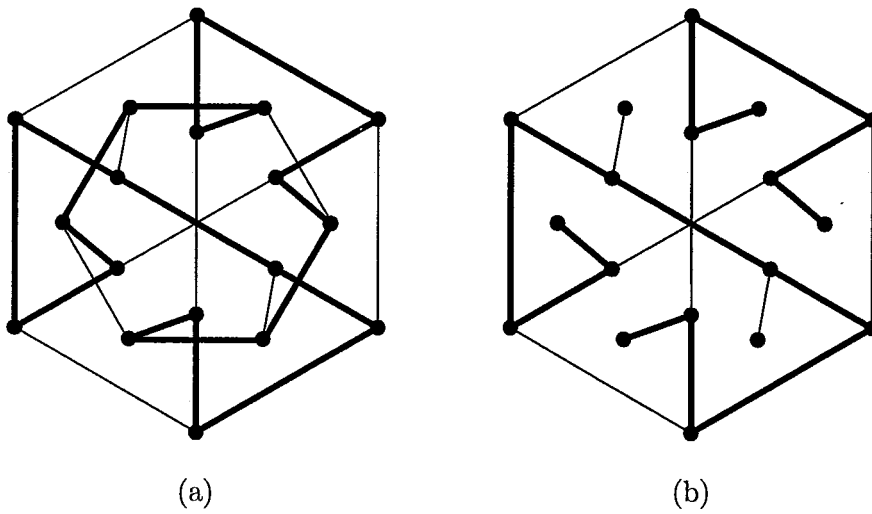


Figura 4.4: Ciclo hamiltoniano em  $B_{6a}$  (a) e caminho equivalente em  $I_{6a}$  (b).

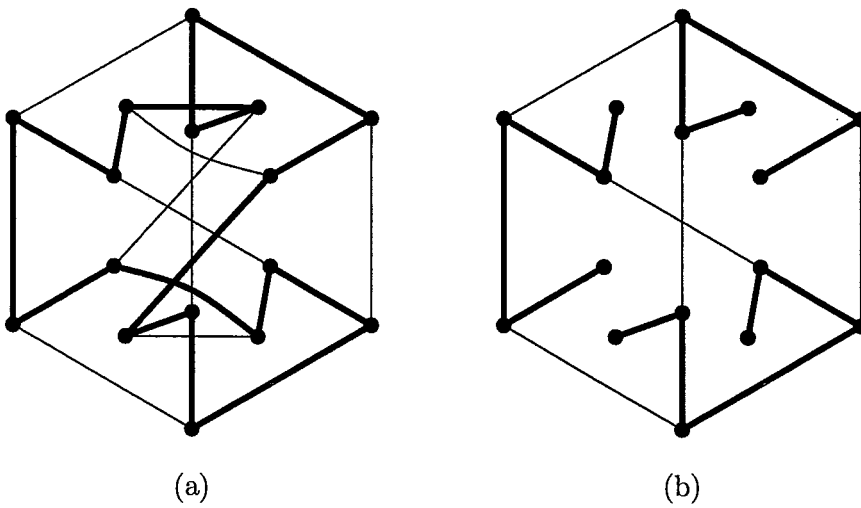


Figura 4.5: Ciclo hamiltoniano em  $B_{6b}$  (a) e caminho equivalente em  $I_{6b}$  (b).

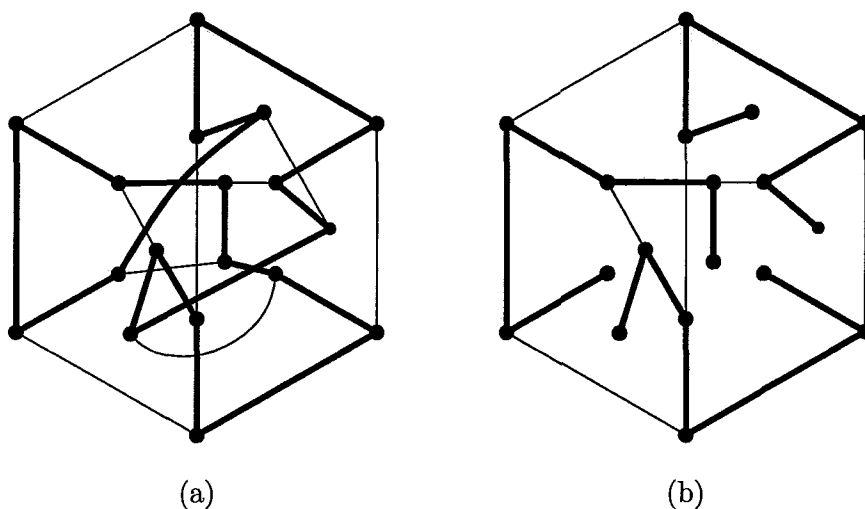


Figura 4.6: Ciclo hamiltoniano em  $B_{6c}$  (a) e caminho equivalente em  $I_{6c}$  (b).

É interessante observar que no caso onde  $\gamma \perp n$  podemos obter naturalmente uma 3-coloração: basta colorirmos o ciclo hamiltoniano formado pelas arestas rotuladas com  $\gamma$  com 2 cores. No entanto, no caso onde  $\gamma \not\perp n$  não podemos proceder da mesma forma. Neste caso, temos um 2-fator (com 2 ciclos) e um emparelhamento perfeito explicitados pelo SDC (conforme Teorema 2.2 e Lema 2.5). Contudo, os dois ciclos do 2-fator são ímpares (vide comentário do Lema 2.5), impossibilitando suas arestas de serem coloridas com 2 cores. Entretanto, a existência de ciclo hamiltoniano neste caso (Lema 2.6) garante a existência de 3-coloração. E com o ciclo identificado na Figura 2.9 podemos construir facilmente uma 3-coloração.

Assim, tanto os grafos cúbicos que admitem SDC quanto os que admitem 6-CDC gerados pelo método descrito, são 3-coloríveis e hamiltonianos.

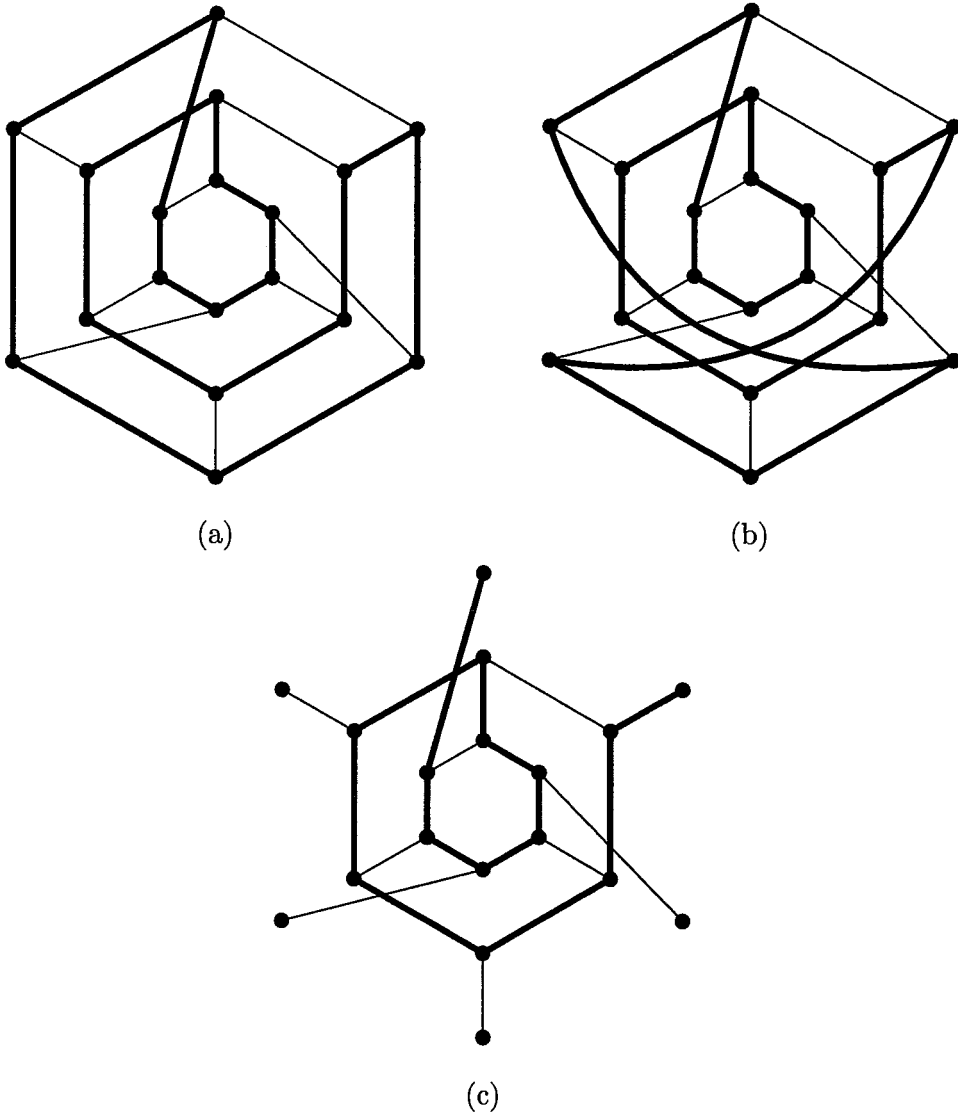


Figura 4.7: Ciclo hamiltoniano em  $B_{6d}$  (a) e  $B_{6d'}$  (b), e caminho equivalente em  $I_{6d}$  (c).

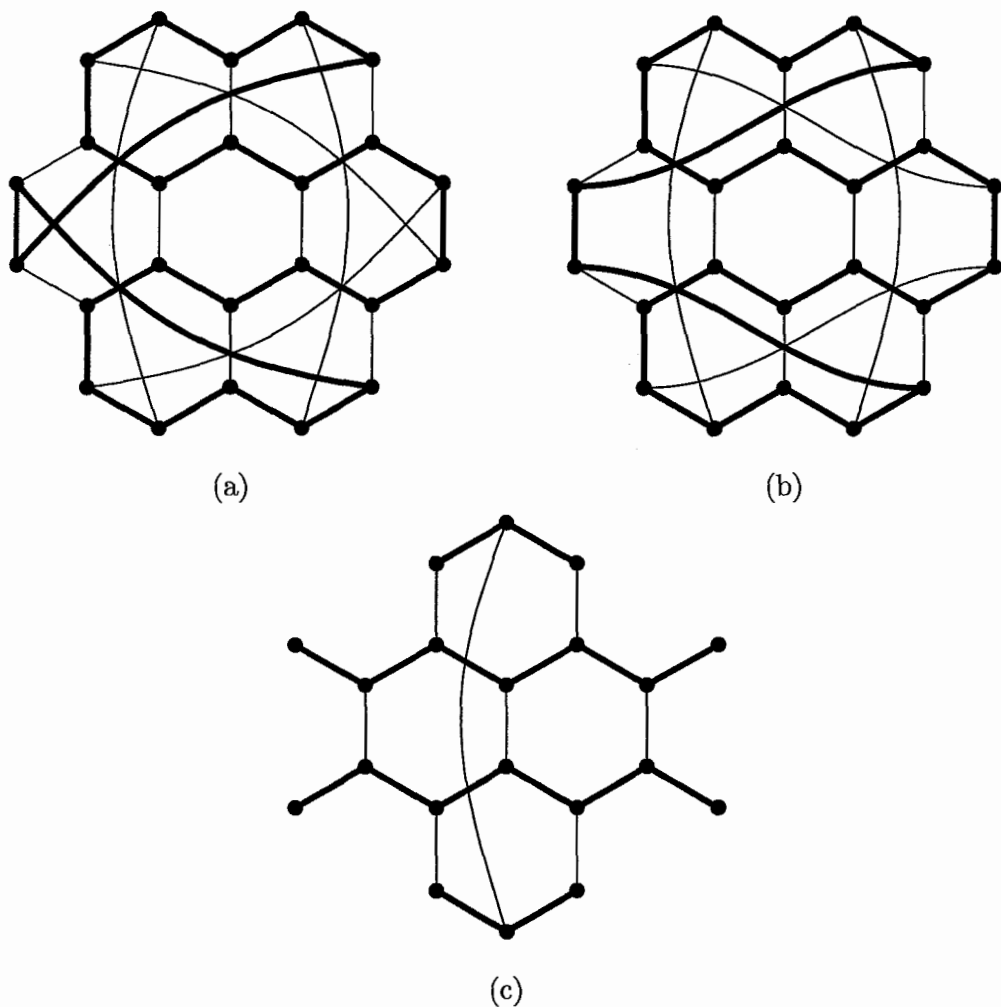


Figura 4.8: Ciclos hamiltonianos em  $B_{6e}$  (a) e  $B_{6e'}$  (b), e caminhos equivalentes em  $I_{6e}$ .

## 4.2 Grafos que admitem SDCM e 6-CDC

Na Seção 3.2.2, destacamos que o  $T_{6,2}$  é um menor grafo cúbico que admite 6-CDC (juntamente com o  $M_6$ ). Curiosamente, só existem 2 grafos de cintura 3 que possuem SDCM, e o  $T_{6,2}$  é um deles. Demonstraremos esta afirmação a seguir.

**Teorema 4.1.** *Os únicos grafos cúbicos de cintura 3 que admitem SDCM, são o  $K_4$  e o  $T_{6,2}$ .*

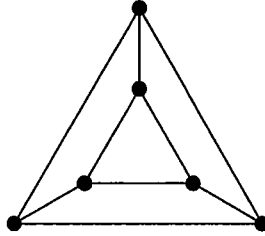


Figura 4.9: Único grafo de cintura 3,  $n > 4$ , que admite SDCM ( $T_{6,2}$ ).

*Prova.* Inicialmente, analisaremos o caso onde algum triângulo possui aresta pertencente ao emparelhamento perfeito gerado pelas arestas rotuladas com  $n/2$ . Seja a aresta  $uv$ , representada na Figura 4.10, rotulada com  $n/2$  e pertencente a um triângulo  $uvwu$  em  $G$ .

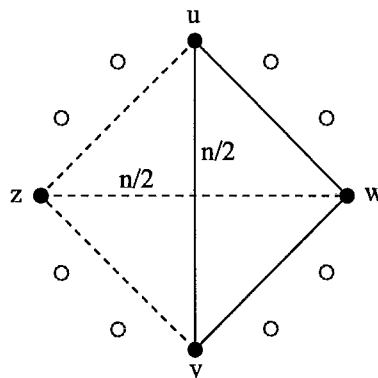


Figura 4.10: Aresta  $uv$ , rotulada com  $n/2$ , pertencendo a um triângulo.

As arestas  $uw$  e  $wv$ , como não pertencem ao emparelhamento, devem ser rotuladas com o mesmo rótulo ( $n/4$ ), assim como  $uz$  e  $zv$ . Isto faz com que os vértices  $u$ ,  $w$ ,  $v$  e  $z$  completem os seus graus, gerando o  $K_4$  (ou tornando  $G$

desconexo). Suponhamos, então, que os triângulos sejam formados somente pelas arestas do 2-fator, ou seja, rotuladas com  $\gamma$ . Como já provamos no Lema 2.5, quando o 2-fator não é hamiltoniano, ele só pode conter 2 ciclos de igual comprimento (triângulos, neste caso). Logo, a única possibilidade de geração dos triângulos é construindo o grafo da Figura 4.11, o qual é facilmente identificado como isomorfo ao grafo da Figura 4.10.

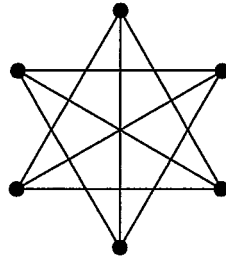


Figura 4.11:  $n = 6$ ,  $\gamma = 2$ .

□

Assim, o  $T_{6,2}$  é o único grafo de cintura 3 que admite tanto SDCM quanto 6-CDC. Pelo Teorema 2.8 sabemos que se  $G$  é cúbico e admite SDCM, então  $G$  é isomorfo ao  $M_n$  ou  $T_{n,2}$ . Podemos verificar facilmente que ambos estes grafos possuem quadrados, para qualquer  $n$  considerado. Assim, se  $G$  (cúbico) admite SDCM, então  $g(G) \leq 4$ . Como já identificamos os únicos casos de cintura 3, resta relacionarmos os casos de cintura 4.

É fácil verificar, na Seção 3.2.3, que  $B_{4b}$  (Figura 3.17(a)) é um toro  $T_{8,2}$  e as iterações de  $I_{4b}$  (Figura 3.18) gerarão todos os toros  $T_{n,2}$ , onde  $n > 8$ . Da mesma forma, podemos observar que  $B_{4b'}$  (Figura 3.17(b)) é uma escada de Möbius ( $M_8$ ) e  $I_{4b}$  gerará todas as escadas de Möbius  $M_n$ , onde  $n > 8$ . Note que o  $K_4$ , apesar de ser uma escada de Möbius ( $M_4$ ), possui apenas 4 vértices, impossibilitando a formação de uma 6-CDC. Observe ainda que,

conforme discutido na Seção 3.2.3, o  $M_6$  admite 6-CDC. Assim, o  $M_6$  e o  $T_{6,2}$  são os únicos grafos de 6 vértices que admitem 6-CDC.

Por outro lado, sabemos pelo Teorema 2.8 que toda escada de Möbius  $M_n$  admite SDCM. No entanto, o toro  $T_{n,2}$  só admite SDCM se  $n$  não é múltiplo de 4. Portanto, o único grafo cúbico que admite SDCM e não admite 6-CDC é o  $M_4$  ( $\cong K_4$ ). E todos os demais grafos cúbicos que admitem SDCM podem ser gerados por um número qualquer de iterações de  $I_{4b}$  sobre  $B_{4b}$  ou por um número par de iterações de  $I_{4b}$  sobre  $B_{4b'}$ , excetuando-se apenas o  $M_6$ .

Esta relação intrínseca entre o SDCM e 6-CDC nos permite transportar resultados de um conceito para outro, ou utilizar provas mais simples para resultados estabelecidos sobre um contexto isolado.

# Capítulo 5

## Generalizações para Grafos Regulares

Neste capítulo, estaremos ampliando os resultados do Capítulo 2, que eram restritos aos grafos cúbicos, para a classe dos grafos  $k$ -regulares. Para evitar redundância de demonstrações, várias provas deste capítulo farão referência direta a provas de lemas ou teoremas do Capítulo 2, indicando, quando necessário, as modificações adequadas. Apontaremos também a estreita relação entre o SDCM e a classe dos grafos circulantes.

Já mostramos que todos os grafos cúbicos que admitem SDCM possuem ciclo hamiltoniano. Mostraremos, neste capítulo, que o mesmo resultado se mantém para grafos  $k$ -regulares. Além disso, será introduzido o conceito de equivalência entre rotulações, o qual foi estudado na literatura apenas no contexto da classe de grafos circulantes [77, 78, 79].

Este capítulo também pode servir como ponto de partida para avanços na determinação da complexidade do reconhecimento dos grafos que admitem SDCM, problema que é equivalente a reconhecer circulantes, conforme Teorema 5.14. Este é um problema que vem sendo estudado independentemente



do SDCM, há pelo menos duas décadas, com poucos avanços, e resultados apenas para classes muito específicas de grafos [10, 34, 80, 81].

## 5.1 SDCM em grafos $k$ -regulares

Durante toda esta seção,  $G$  representará um grafo  $k$ -regular que admite SDCM e  $\lambda$  uma rotulação que fornece SDCM a  $G$ . Assim como no Capítulo 2, começaremos estudando a estrutura de  $G$  e sua rotulação.

**Lema 5.1.** *Se  $k$  é ímpar, então  $G$  possui suas arestas rotuladas da forma  $(\gamma_1, n - \gamma_1), \dots, (\gamma_{\lfloor k/2 \rfloor}, n - \gamma_{\lfloor k/2 \rfloor})$  ou  $(n/2, n/2)$ , onde  $\gamma_i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \gamma_i < n/2$ .*

*Prova.* Análoga à prova do Lema 2.1, considerando que  $\lambda$ , neste caso, utiliza  $k$  rótulos.  $\square$

**Lema 5.2.** *Se  $k$  é par, então  $G$  possui suas arestas rotuladas da forma  $(\gamma_1, n - \gamma_1), \dots$ , ou  $(\gamma_{k/2}, n - \gamma_{k/2})$ , onde  $\gamma_i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq \gamma_i < n/2$ .*

*Prova.* Análoga à prova do Lema 2.1, considerando que  $\lambda$ , neste caso, utiliza  $k$  rótulos e, como  $k$  é par, não pode conter aresta rotulada com  $(n/2, n/2)$ , pois cada vértice só pode possuir 1 aresta incidente com este rótulo, enquanto existem 2 arestas incidentes com os demais rótulos  $(\gamma_i, n - \gamma_i)$ . Assim, a existência de aresta rotulada com  $(n/2, n/2)$  deixaria  $k$  ímpar.  $\square$

Com isso, o conjunto de rótulos  $\Gamma$ , que antes era formado por  $\{\gamma, n - \gamma, n/2\}$ , agora consistirá de  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor k/2 \rfloor}, n - \gamma_1, \dots, n - \gamma_{\lfloor k/2 \rfloor}\}$  e, caso  $k$  seja ímpar,  $\{n/2\}$ . Para simplificar a notação, o literal  $\gamma_i$  sempre representará qualquer rótulo pertencente a  $\Gamma$  (gerado por  $\lambda$ ) menor que  $n/2$  e freqüentemente será omitida a notação  $(\gamma_i, n - \gamma_i)$  quando não houver ambigüidade, já que a função de simetria sempre se mantém.

Vejamos agora como fica a decomposição de  $G$  em 2-fatores.

**Teorema 5.3.**  *$G$  se decompõe em  $\lfloor k/2 \rfloor$  2-fatores e, caso  $k$  seja ímpar, um emparelhamento perfeito.*

*Prova.* Análoga à prova do Lema 2.2, considerando que o procedimento efetuado para o rótulo  $\gamma$  deverá, neste caso, ser repetido para todo  $\gamma_i \in \Gamma, \gamma_i < n/2$ . Deve ser desconsiderado o emparelhamento perfeito (arestas rotuladas com  $n/2$ ) no caso onde  $k$  é par.  $\square$

**Lema 5.4.** *Seja  $r(u)$  o rótulo do vértice  $u \in V(G)$ , segundo a ordenação cíclica imposta pelo SD cordal, onde  $u$  pertence a um ciclo  $C$  de um 2-fator gerado pelas arestas de determinado  $\gamma_i$ . Para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $v$  pertence ao ciclo  $C$  se e somente se existe um inteiro  $t \geq 0$ , tal que  $r(v) = r(u) +_n t\gamma_i$ .*

*Prova.* Análoga à prova do Lema 2.3, considerando que o procedimento efetuado para o rótulo  $\gamma$  deverá, neste caso, ser repetido para todo  $\gamma_i \in \Gamma, \gamma_i < n/2$ .  $\square$

Da mesma forma que no caso cúbico, podemos separar a demonstração da existência de ciclo hamiltoniano em dois casos: quando existe um rótulo  $\gamma_i \perp n$  (Teorema 5.5) e quando, para todo rótulo  $\gamma_i, \gamma_i \not\perp n$  (Teorema 5.9). Começaremos pelo caso onde  $\gamma_i \perp n$ .

**Teorema 5.5.** *Se existe um  $\gamma_i$ , tal que  $\gamma_i \perp n$ , então  $G$  possui um ciclo hamiltoniano gerado pelas arestas rotuladas com  $\gamma_i$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 1.3, o menor inteiro  $t$  que satisfaz a equação  $t \cdot_n \gamma_i = 0$  é  $n$ . Assim, o menor  $t$  que satisfaz  $r(u) +_n t\gamma_i = r(u)$  também é  $n$ . Pelo Lema 5.4, existe um ciclo  $C$  de um 2-fator que passa pelo vértice  $u$  e só retorna a ele após passar por  $n - 1$  vértices distintos. Portanto,  $C$  é hamiltoniano.  $\square$

Vejamos agora o que ocorre na estrutura de  $G$  quando existe pelo menos um  $\gamma_i$  tal que  $\gamma_i \nmid n$ . Esta é uma generalização do Lema 2.5.

**Lema 5.6.** *Se existe um  $\gamma_i$ , tal que  $\gamma_i \nmid n$ , então existe um 2-fator em  $G$  (formado pelas arestas rotuladas com  $\gamma_i$ ) que possui  $d$  ciclos de mesmo comprimento, onde  $d = \text{mdc}(\gamma_i, n)$ .*

*Prova.* Sabemos, pela definição de primalidade relativa, que  $d > 1$ . Podemos reescrever a equação  $t \cdot_n \gamma_i = 0$  por  $t \cdot_{n/d} \gamma_i/d = 0$ . Como  $\gamma_i/d \perp n/d$  (o divisor comum foi retirado), então, pelo Teorema 1.3,  $t = n/d$  é o menor inteiro que satisfaz a equação inicial. Logo, os ciclos do 2-fator formado pelas arestas rotuladas com  $\gamma_i$  são de comprimento  $n/d$ , havendo, portanto,  $d$  ciclos.  $\square$

É interessante observar que, nos casos onde  $n$  é múltiplo de  $\gamma_i$ , o tamanho dos ciclos será  $n/\gamma_i$  e o número de ciclos deste 2-fator será  $\gamma_i$ , pois se  $n$  é múltiplo de  $\gamma_i$ , então  $\text{mdc}(\gamma_i, n) = \gamma_i$ . Note, ainda, que o Lema 2.5 é um caso específico onde  $\text{mdc}(\gamma, n) = 2$ , logo o 2-fator terá dois ciclos de tamanho  $n/2$ , o que é coerente com o enunciado daquele lema.

Façamos  $\gamma_i \nmid n$ , para todo  $\gamma_i$ , para verificarmos a restrição que esta condição impõe sobre  $G$ . Dividiremos esta análise em dois casos, dependendo da paridade de  $k$ .

**Lema 5.7.** *Se  $k$  é ímpar e  $\gamma_i \nmid n$ , para todo  $\gamma_i$ , então  $d_\gamma \perp n/2$ , onde  $d_\gamma = \text{mdc}(\gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor k/2 \rfloor})$ .*

*Prova.* Seja  $d' = \text{mdc}(d_\gamma, n/2)$  e um inteiro  $t_i \geq 0$ , onde  $1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ . Logo,

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} t_i \gamma_i + t_{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{n}{2}$$

é múltiplo de  $d'$ . Note que, sendo  $\gamma_i$  múltiplo de  $d'$ , então  $n - \gamma_i$  também o é, já que  $n$  é múltiplo de  $d'$ . Assim, se existe um caminho em  $G$  que inicia em  $u$  e termina em  $v$ , então a distância entre estes vértices na ordenação cíclica, denotada por  $dist(u, v) = r(v) -_n r(u)$ , é múltipla (mod  $n$ ) de  $d'$ .

Para que  $G$  seja conexo, deve haver um caminho entre qualquer par de vértices. Portanto, deve existir um inteiro  $t$ , tal que  $dist(u, v) = t \cdot_n d'$ , para todo  $u, v \in V(G)$  (ou seja, para toda  $dist(u, v)$ ,  $0 \leq dist(u, v) \leq n - 1$ ). Como  $dist(u, v)$  também é múltiplo (mod  $n$ ) de  $\text{mdc}(d', n)$ , para que todo inteiro  $dist(u, v)$ ,  $0 \leq dist(u, v) \leq n - 1$  seja gerado pelo produto  $t \cdot_n d'$ , devemos ter<sup>1</sup>  $\text{mdc}(d', n) = 1$ , ou seja,  $d' \perp n$ .

Suponhamos (por absurdo) que  $d' > 1$ , logo  $d'$  é um divisor de  $n/2$ , assim como de  $n$ , contradizendo nossa afirmação anterior de que  $d' \perp n$ . Assim,  $d' = 1$ , ou seja,  $n/2$  e  $d_\gamma$  são primos entre si.  $\square$

Note, na prova do Lema 5.7, que a condição  $d_\gamma = 1$ , em geral, não é equivalente a  $d' = 1$ . É certo que se  $d = 1$ , ou seja, se existem  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ , tais que  $\gamma_i \perp \gamma_j$ , então  $d' = 1$ , pois  $\text{mdc}(n/2, \gamma_i, \gamma_j) = 1$ . No entanto, a recíproca não é verdadeira. Há a possibilidade de  $\gamma_i \not\perp \gamma_j$ , para todo  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ , e, ainda assim,  $d_\gamma \perp n/2$ . O grafo com 30 vértices da Figura 5.1 é o menor grafo onde isso ocorre.

Porém, para o caso cúbico, estas condições são equivalentes, já que  $d_\gamma = \gamma$  (maior divisor de  $\gamma$  é ele próprio), então  $d' = \text{mdc}(\gamma, n/2) = 1$ , logo  $\gamma \perp n/2$  (veja Lema 2.5).

**Lema 5.8.** *Se  $k$  é par e  $\gamma_i \not\perp n$ , para todo  $\gamma_i$ , então  $d_\gamma \perp n$ , onde  $d_\gamma = \text{mdc}(\gamma_1, \dots, \gamma_{k/2})$ .*

---

<sup>1</sup>Uma prova mais formal desta implicação pode ser encontrada na Seção 4.8 de [49].

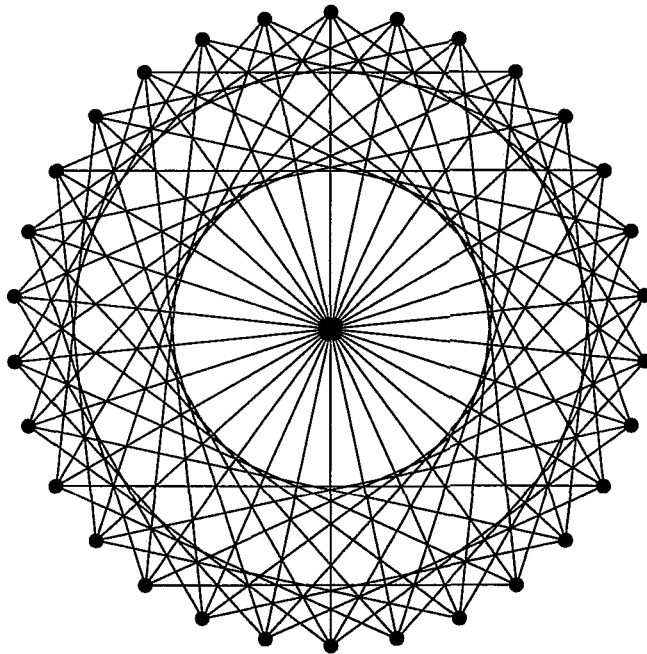


Figura 5.1: Menor  $G$  onde  $d_\gamma > 1$  e  $d' = 1$  ( $n = 30, \gamma_1 = 6, \gamma_2 = 10$ ).

*Prova.* Pelo Lema 5.6, as arestas rotuladas com  $\gamma_i$  formam um 2-fator com mais de um ciclo (não formam ciclo hamiltoniano). Seja um inteiro  $t_i \geq 0$ , onde  $1 \leq i \leq k/2$ . Logo,

$$\sum_{i=1}^{k/2} t_i \gamma_i$$

é múltiplo de  $d_\gamma$ . Assim, se existe um caminho em  $G$  que inicia em  $u$  e termina em  $v$ , então a distância entre estes vértices na ordenação cíclica, definida por  $dist(u, v) = r(v) -_n r(u)$ , é múltipla (mod  $n$ ) de  $d_\gamma$ .

Para que  $G$  seja conexo, deve haver um caminho entre qualquer par de vértices. Portanto, deve existir um inteiro  $t$ , tal que  $dist(u, v) = t \cdot_n d_\gamma$ , para todo  $u, v \in V(G)$  (ou seja, para toda  $dist(u, v)$ ,  $0 \leq dist(u, v) \leq n - 1$ ). Como  $dist(u, v)$  também é múltiplo (mod  $n$ ) de  $\text{mdc}(d_\gamma, n)$ , para que todo

inteiro  $\text{dist}(u, v)$ ,  $0 \leq \text{dist}(u, v) \leq n - 1$  seja gerado pelo produto  $t \cdot_n d_\gamma$ , devemos ter<sup>2</sup>  $\text{mdc}(d_\gamma, n) = 1$ , ou seja,  $d_\gamma \perp n$ .  $\square$

Podemos agora provar a existência de ciclo hamiltoniano quando  $\gamma_i \not\perp n$ , para todo  $\gamma_i$  em  $\Gamma$ , conforme o teorema a seguir.

**Teorema 5.9.** *Se  $\gamma_i \not\perp n$ , para todo  $\gamma_i \in \Gamma$ , então  $G$  possui ciclo hamiltoniano.*

*Prova.* Seja  $d_\gamma = \text{mdc}(\gamma_1, \dots, \gamma_{\lfloor k/2 \rfloor})$ . Dividiremos a prova em dois casos:  $d_\gamma = 1$  e  $d_\gamma > 1$ .

Seja  $d_\gamma = 1$ . Então existem  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  em  $\Gamma$ , tais que  $\gamma_i \perp \gamma_j$ . Suponha (por absurdo) que os vértices  $u$  e  $v$  são conectados por uma aresta rotulada com  $\gamma_i$  e pertençam a um mesmo ciclo  $C_j$  do 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $\gamma_j$ . Temos  $\gamma_i = t \cdot_n \gamma_j$ , para algum inteiro  $t$ . Mas  $\gamma_i$  não pode ser múltiplo (módulo  $n$ ) de  $\gamma_j$  se  $\gamma_i \perp \gamma_j$  (contradição). Isto nos leva a concluir que os extremos de uma aresta rotulada com  $\gamma_i$  pertencem a diferentes ciclos do 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $\gamma_j$  (e vice-versa). Podemos afirmar também que se os vértices  $u$  e  $v$  são adjacentes em um ciclo  $C_1$  do 2-fator gerado por  $\gamma_i$ , então haverá arestas rotuladas com  $\gamma_j$  que os conectam aos vértices  $u'$  e  $v'$ , respectivamente, onde  $u'$  e  $v'$  são adjacentes em um ciclo  $C_2$  do mesmo 2-fator. Isto pode ser verificado pela igualdade:

$$\gamma_j +_n \gamma_i +_n (n - \gamma_j) = \gamma_i.$$

A Figura 5.2 ilustra um caminho percorrido através da seqüência de rótulos  $\{\gamma_j, \gamma_i, n - \gamma_j\}$ , onde podemos verificar que tanto este caminho quanto a aresta  $uv$ , cujo rótulo é  $\gamma_i$ , conduzirão a um mesmo vértice  $v$ .

---

<sup>2</sup>Uma prova mais formal desta implicação pode ser encontrada na Seção 4.8 de [49].

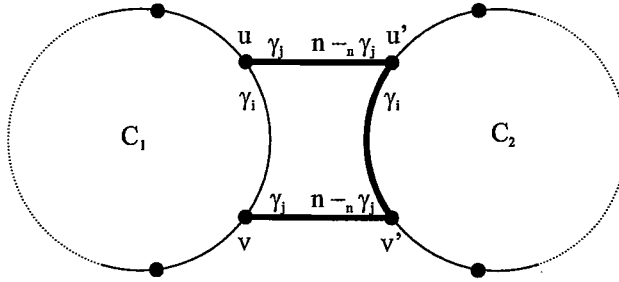


Figura 5.2: Caminho percorrido pelos rótulos  $\{\gamma_j, \gamma_i, n - \gamma_j\}$ .

Desta forma, sejam  $C_1, \dots, C_d$  os ciclos do 2-fator gerado por  $\gamma_i$  (pelo Lema 5.6,  $d = \text{mdc}(\gamma_i, n)$ ). Podemos facilmente identificar um ciclo hamiltoniano utilizando o 2-fator gerado por  $\gamma_i$  e conectando seus ciclos através de arestas rotuladas com  $\gamma_j$ , conforme a Figura 5.3.

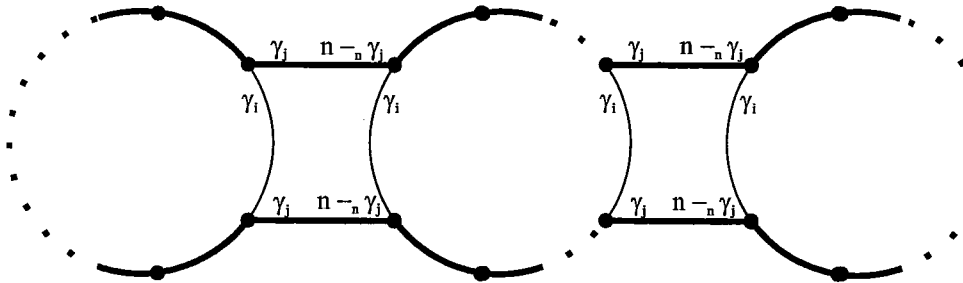


Figura 5.3: Ciclo hamiltoniano utilizando os ciclos gerados por  $\gamma_i$  e as arestas rotuladas com  $\gamma_j$ .

Seja  $d_\gamma > 1$ . Então  $\gamma_i \not\sim \gamma_j$ , para todo  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  em  $\Gamma$ . Seja  $t_i \geq 0$  inteiro, onde  $1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ . Logo,

$$\sum_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} t_i \gamma_i$$

é múltiplo (módulo  $n$ ) de  $d_\gamma$ . Assim, se existe um caminho de  $u$  para  $v$  que não utilize arestas rotuladas com  $n/2$  em  $G$ , então a distância entre  $u$

e  $v$  na ordenação cíclica, definida por  $dist(u, v) = r(v) -_n r(u)$ , é múltipla (mod  $n$ ) de  $d_\gamma$ . Portanto, somente haverá um caminho entre  $u$  e  $v$  se estes estiverem a uma distância múltipla de  $d_\gamma$  entre si. Com isto, teremos  $d_\gamma$  componentes conexas, e como  $d_\gamma > 1$ , para que  $G$  seja conexo, deve haver arestas com rótulo  $n/2$  interconectando as componentes conexas. Neste caso,  $k$  deve ser ímpar (Lema 5.1),  $d_\gamma \perp n/2$  (Lema 5.7) e as arestas  $n/2$  conectarão componentes conexas distintas.

Suponha, inicialmente, que  $\gamma_i = t_i \gamma_1$ , para todo  $1 < i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ . Ou seja, todos os rótulos são múltiplos de um único rótulo ( $\gamma_1$ ). Então,  $d_\gamma = \gamma_1$ . Pela nossa hipótese inicial,  $\gamma_i \not\perp n$ , para todo  $\gamma_i \in \Gamma$ , logo  $\gamma_1 \not\perp n$  e  $\text{mdc}(\gamma_1, n) > 1$ . Pelo Lema 5.7,  $\gamma_1 \perp n/2$ , portanto  $\text{mdc}(\gamma_1, n) = 2$ . Pelo Lema 5.6, o 2-fator gerado pelas arestas rotuladas com  $\gamma_1$  é formado por 2 ciclos distintos. Ainda devido ao fato de que  $\gamma_1 \perp n/2$ , as arestas rotuladas com  $n/2$  conectam vértices de ciclos distintos deste 2-fator. Pela igualdade

$$n/2 +_n \gamma_1 +_n n/2 = \gamma_1,$$

percebemos que é fácil construir um ciclo hamiltoniano, conforme a Figura 5.4.

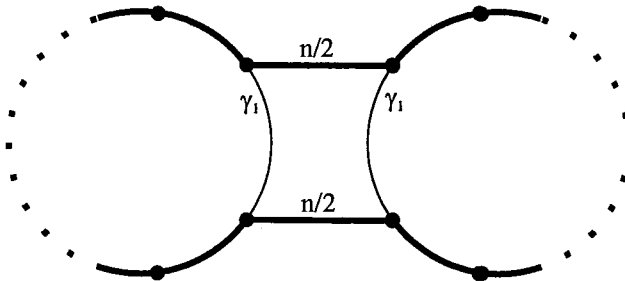


Figura 5.4: Ciclo hamiltoniano utilizando os ciclos gerados por  $\gamma_1$  e as arestas rotuladas com  $n/2$ .



Suponhamos, agora, que existem  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  tais que um não é múltiplo (módulo  $n$ ) do outro. Assim, arestas rotuladas com  $\gamma_j$  conectam vértices de ciclos distintos do 2-fator gerado por  $\gamma_i$ . No entanto, o subgrafo induzido pelas arestas dos 2-fatores gerados por  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$  possui, neste caso,  $d_\gamma$  componentes conexas. Como supomos que  $d_\gamma > 1$ , as arestas rotuladas com  $n/2$  são necessárias para conectar os 2-fatores (portanto,  $k$  é ímpar). Observe que, apesar de as arestas  $n/2$  conectarem diferentes componentes conexas do subgrafo induzido pelas arestas rotuladas com  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ , elas só as conectam duas a duas, pois cada vértice só possui uma única aresta incidente rotulada com  $n/2$ . Isto inviabiliza a existência de um ciclo hamiltoniano utilizando apenas os ciclos gerados por  $\gamma_i$  e as arestas  $n/2$ , sendo necessária a utilização de arestas com outro rótulo ( $\gamma_j$ , por exemplo). Uma solução possível é tomar o 2-fator gerado por  $\gamma_i$  e conectar seus ciclos, alternadamente, com arestas rotuladas com  $n/2$  e  $\gamma_j$ , conforme a Figura 5.5.

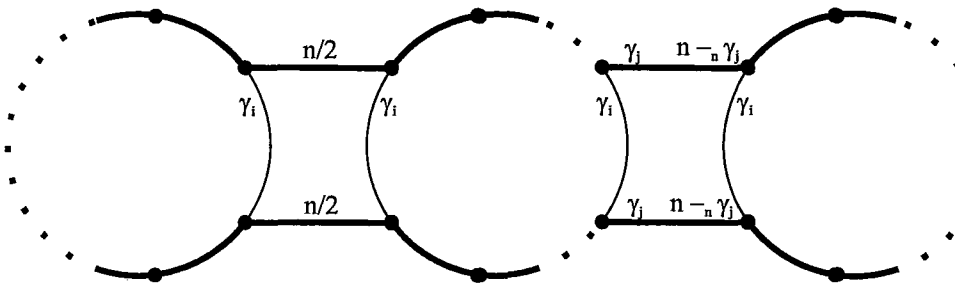


Figura 5.5: Ciclo hamiltoniano utilizando os ciclos gerados por  $\gamma_i$  e as arestas rotuladas com  $n/2$  e  $\gamma_j$ , alternadamente.

□

Assim, podemos generalizar, no corolário a seguir, os resultados para os casos estudados isoladamente (apenas para não tornar demasiadamente grande a demonstração deste resultado genérico).

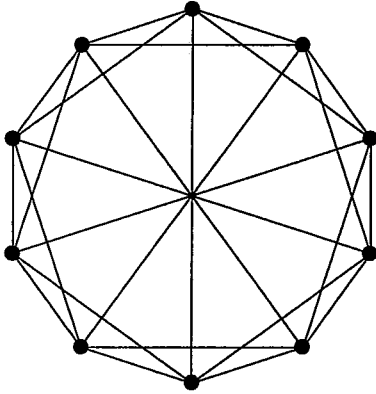
**Corolário 5.10.**  *$G$  possui ciclo hamiltoniano.*

*Prova.* Pelos Teoremas 5.5 e 5.9. □

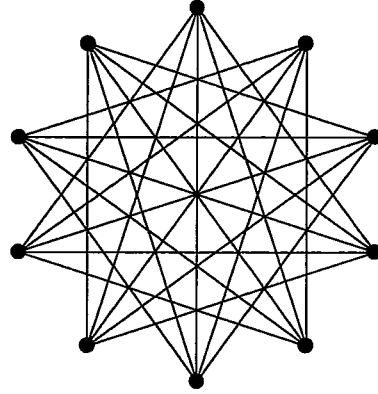
Conforme demonstrado no Capítulo 2, a existência do ciclo hamiltoniano, apesar de necessária, não é suficiente para o SDCM. Uma possível direção para o desenvolvimento de um algoritmo que verifique a existência do SDCM em grafos  $k$ -regulares seria utilizar a mesma idéia empregada no caso cúbico. Naquele caso, o teste de SDCM poderia ser abordado como um teste de isomorfismo do grafo de entrada com dois outros grafos bem definidos ( $M_n$  e  $T_{n,2}$ ). Entretanto, para o caso  $k$ -regular, ainda é necessário estabelecer quais serão estes grafos básicos. Isto requer que antes sejam identificadas as combinações de valores de  $\gamma_i$  que são equivalentes, ou seja, que irão gerar grafos isomorfos, para que sejam evitados testes redundantes.

Por exemplo, é fácil verificar que um grafo 5-regular com 10 vértices, que admite SDCM, e onde  $\gamma_1 = 1$  e  $\gamma_2 = 2$ , também pode ser rotulado com  $\gamma'_1 = 3$  e  $\gamma'_2 = 4$ , mantendo o SDCM, conforme indicado na Figura 5.6. Isto se deve ao fato de que  $\gamma'_1 = 3 \cdot_n \gamma_1$  (note que  $3 \perp n$ ) e, se multiplicarmos  $\gamma_2$  da mesma forma, teremos  $3 \cdot_n \gamma_2 = 6$ , porém o simétrico (mod  $n$ ) de 6, menor que  $n/2$ , neste caso, é 4. Por isso,  $\gamma'_2 = 4$ .

Assim, podemos definir uma transformação sobre determinada rotulação  $\lambda$ , gerando  $\lambda'$ , que mantenha a propriedade do SDCM. Diremos que  $\lambda'$  é *equivalente* a  $\lambda$ , denotando por  $\lambda \equiv \lambda'$ . Inicialmente, mostraremos que existe uma transformação que mantém a primalidade relativa de cada rótulo  $\gamma_i$  com  $n$ .



(a)  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$



(b)  $\gamma'_1 = 3, \gamma'_2 = 4$

Figura 5.6: Grafos isomorfos que admitem SDCM.

**Lema 5.11.** *Seja um inteiro  $\alpha < n/2$ ,  $\alpha \perp n$ , e  $\lambda'$  uma nova rotulação de  $G$  tal que, para todo  $\gamma'_i$  em  $\Gamma'$ ,*

$$\gamma'_i = \begin{cases} \alpha \cdot_n \gamma_i & \text{se } \alpha \cdot_n \gamma_i < n/2 \\ n - \alpha \cdot_n \gamma_i & \text{se } \alpha \cdot_n \gamma_i > n/2. \end{cases}$$

*Então,  $\gamma_i \perp n$  se e somente se  $\gamma'_i \perp n$ .*

*Prova.* Pelo Teorema 1.4 (Euclides), temos que  $\text{mdc}(n, \alpha \cdot_n \gamma_i) = \text{mdc}(n, \alpha \gamma_i)$ . Mas como  $\alpha \perp n$  (por hipótese),  $\text{mdc}(n, \alpha \gamma_i) = \text{mdc}(n, \gamma_i)$ . Dado que  $\gamma'_i = \alpha \cdot_n \gamma_i$ , então  $\text{mdc}(n, \gamma'_i) = \text{mdc}(n, \gamma_i)$ . Assim,  $\gamma_i \perp n$  se e somente se  $\gamma'_i \perp n$ .

É importante observar que se  $\gamma_i$  é primo de  $n$ , então  $n - \gamma_i$  também o é. Podemos demonstrar esta afirmação por contra-posição. Suponhamos  $n - \gamma_i \not\perp n$ , ou seja,  $d = \text{mdc}(n - \gamma_i, n) > 1$ . Então,  $(n - \gamma_i)/d$  e  $n/d$  são inteiros. Isto implica que  $\gamma_i/d$  é inteiro. Como  $\gamma_i$  e  $n$  são divisíveis por  $d > 1$ ,  $\text{mdc}(\gamma_i, n) > 1$ .

Note que a transformação definida não especifica o caso onde  $\gamma'_i = n/2$ . Por isso, provaremos ainda que  $\gamma'_i \neq n/2$ , para quaisquer  $\gamma_i$  e  $n$ . No caso onde

$n$  é ímpar, isto é trivialmente verdade, pois o operador mod sempre resulta em um inteiro. Suponhamos, então,  $n$  par. Suponhamos ainda (por absurdo) que  $\gamma'_i = n/2$ . Logo, temos  $\alpha \cdot_n \gamma_i = n/2$ . Pela definição do operador mod, existe um inteiro  $t$ , tal que

$$\begin{aligned} \alpha \gamma_i &= tn + n/2 \\ &= 2t(n/2) + n/2 \\ &= (2t + 1)n/2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Assim,  $\alpha \gamma_i$  é múltiplo de  $n/2$ . Podemos, então, afirmar que  $\text{mdc}(\alpha \gamma_i, n/2) \neq 1$ , ou seja,  $\alpha$  e/ou  $\gamma_i$  possuem um divisor em comum com  $n/2$ . Como  $\alpha \perp n$  (por definição), então  $\alpha \perp n/2$ . Logo,  $\gamma_i \not\perp n/2$ . Da Equação 5.1,  $\alpha$  divide  $(2t + 1)$ . Portanto,  $\gamma_i$  é múltiplo de  $n/2$ . Mas isto é uma contradição, pois  $\gamma_i < n/2$  por definição. Logo,  $\gamma'_i \neq n/2$ .  $\square$

Agora podemos demonstrar que  $\lambda' \equiv \lambda$ , através do teorema a seguir.

**Teorema 5.12.** *Seja um inteiro  $\alpha < n/2$ ,  $\alpha \perp n$ , e  $\lambda'$  uma nova rotulação de  $G$  tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ ,*

$$\gamma'_i = \begin{cases} \alpha \cdot_n \gamma_i & \text{se } \alpha \cdot_n \gamma_i < n/2 \\ n -_n \alpha \cdot_n \gamma_i & \text{se } \alpha \cdot_n \gamma_i > n/2. \end{cases}$$

*Então,  $\lambda'$  é um SDCM para  $G$ .*

*Prova.* Pelo Lema 5.11, os ciclos hamiltonianos de  $G$  serão cobertos adequadamente pelos novos rótulos, já que  $\lambda$  é um SDCM para  $G$  e se  $\gamma_i \perp n$ , então  $\gamma'_i \perp n$ . De igual forma, os 2-fatores com  $d$  ciclos serão devidamente cobertos pelos rótulos de  $\lambda'$ , pois se  $\alpha \perp \gamma_i$  então  $\text{mdc}(\gamma_i, n) = \text{mdc}(\alpha \cdot_n \gamma_i, n) = d$ .

Assim, a transformação apresentada é uma função bijetora que mapeia os rótulos de  $\lambda$  para  $\lambda'$  e o número de rótulos utilizados por  $\lambda'$  também será  $k$ .  $\square$

Na prova do Lema 5.11, pudemos verificar que se  $\gamma_i \perp n$ , então  $(n - \gamma_i) \perp n$ . O mesmo vale para  $\alpha$ . Logo, como  $\alpha \perp n$ , então  $(n - \alpha) \perp n$ . Também é fácil verificar que o simétrico (módulo  $n$ ) de qualquer inteiro  $a < n/2$  será maior que  $n/2$ , pois  $a +_n (n - a) = n \bmod n = 0$ . Assim, todo  $\alpha < n/2$  possui um simétrico  $n - \alpha$ , onde  $(n - \alpha) \perp n$  e  $(n - \alpha) > n/2$ . Substituindo  $\alpha$  pelo seu simétrico nas equações que determinam  $\gamma'_i$ , temos

$$\begin{aligned} (n - \alpha) \cdot_n \gamma_i &= (n\gamma_i) -_n (\alpha\gamma_i) \\ &= -\alpha \cdot_n \gamma_i, \end{aligned}$$

e, no segundo caso,

$$\begin{aligned} n -_n (n - \alpha) \cdot_n \gamma_i &= n -_n (-\alpha \cdot_n \gamma_i) \\ &= \alpha \cdot_n \gamma_i. \end{aligned}$$

Assim, podemos notar que se  $\alpha$  for substituído pelo seu simétrico (módulo  $n$ ), a rotulação  $\lambda'$  gerada se manterá inalterada. E os inteiros  $\alpha > n/2$ , tais que  $\alpha \perp n$ , repetirão os rótulos gerados pelos inteiros  $\alpha < n/2$ , tais que  $\alpha \perp n$ .

De forma análoga à função que define os rótulos  $(\gamma_i)$  das arestas, podemos perceber que existe uma função bijetora que mapeia os rótulos  $(r(v))$  dos vértices de  $G$  em  $\lambda$  e  $\lambda'$ . Esta função é definida da seguinte forma:

$$r'(v) = r(v) +_n (\alpha - 1)(r(v) - 1).$$

Ou ainda, de forma simétrica:

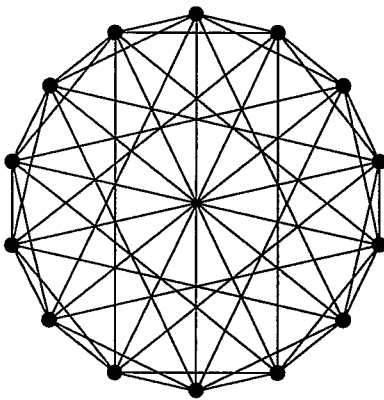
$$r'(v) = 2 -_n [r(v) + (\alpha - 1)(r(v) - 1)].$$

A fim de ressaltar o impacto desta equivalência de rotulações, colocamos o corolário a seguir.

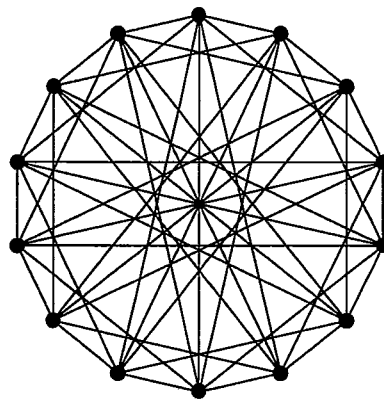
**Corolário 5.13.** *Se  $\lambda$  utiliza um rótulo  $\gamma_i$  tal que  $\gamma_i \perp n$ , então existe uma rotulação  $\lambda'$  que é um SD cordal para  $G$  e onde  $\gamma'_1 = 1$ .*

*Prova.* No caso trivial, onde  $\lambda$  já utiliza um  $\gamma_i = 1$ , a proposição é verdadeira, bastando permutar os rótulos de forma que  $i = 1$ . Nos demais casos,  $\lambda$  utiliza um  $\gamma_i > 1$ , tal que  $\gamma_i \perp n$ . Seja  $\alpha$  o inverso multiplicativo (mod  $n$ ) de  $\gamma_i$ , caso este inverso seja menor que  $n/2$ , ou o seu simétrico, caso contrário. Segue que  $\alpha \perp n$ , pois  $\alpha \cdot_n \gamma_i = 1$ , e  $(n - 1) \perp n$ . Logo, existe um  $\alpha < n/2$ , tal que  $\alpha \cdot_n \gamma_i = 1$  ou  $\alpha \cdot_n \gamma_i = n - 1$ . Assim, a transformação do Teorema 5.12 aplicada a  $\lambda$  gerará uma rotulação  $\lambda'$ , tal que  $\lambda' \equiv \lambda$ , e onde  $\gamma'_i = 1$ . Basta, então, permutar os rótulos de forma que  $i = 1$ .  $\square$

É importante observar que mesmo duas rotulações  $\lambda$  e  $\lambda'$ , onde  $\gamma_1 = 1$  e  $\gamma'_1 = 1$ , podem ser tais que  $\lambda \equiv \lambda'$ . Um exemplo pode ser obtido com um grafo  $G$  onde  $n = 14, k = 7$ . Seja  $\lambda$  tal que  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 5$ , e  $\lambda'$  tal que  $\gamma'_1 = 1, \gamma'_2 = 3, \gamma'_3 = 6$  (Figura 5.7). É fácil verificar, pelo isomorfismo dos grafos da Figura 5.7, que  $\lambda \equiv \lambda'$ .



(a)  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 5$



(b)  $\gamma'_1 = 1, \gamma'_2 = 3, \gamma'_3 = 6$

Figura 5.7: Exemplo de equivalência onde  $\gamma_1 = \gamma'_1 = 1$ .

Este resultado torna evidente a necessidade de uma melhor caracterização do real conjunto de rotulações que geram SDCM para  $G$ , isto é, quando forem eliminadas todas as equivalências. Tal caracterização poderia indicar o caminho na busca de um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos que admitem SDCM, caso o número de rotulações não-equivalentes seja polinomial. Esta é uma área promissora de pesquisa devido à sua relação com o reconhecimento de grafos circulantes (Seção 5.2), sendo indicada como trabalho futuro.

Quando fixamos o grau de  $G$ , ou seja, quando  $k$  é uma constante, o número máximo de rotulações candidatas a serem um SDCM (sem desconsiderar as equivalências) é dado por

$$\binom{\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

Deste modo, teremos  $O(n^k)$  rotulações a serem testadas num algoritmo de verificação de SDCM em  $G$ , para um dado grau  $k$ .

Dado um conjunto  $\Gamma$  de rótulos e  $n$ , podemos facilmente (em tempo polinomial) construir um grafo  $H$  com  $n$  vértices que admita um SDCM utilizando os rótulos em  $\Gamma$ . Para isso, basta dispormos os vértices em uma ordenação cíclica arbitrária e, para cada  $\gamma_i$  em  $\Gamma$ , conectarmos os vértices à distância  $\gamma_i$  entre si. Na Seção 5.2 será mostrada uma forma ainda mais simples de construirmos  $H$  pela sua matriz de adjacências.

Em [65] foi provado que o teste de isomorfismo para grafos com grau limitado pode ser feito em tempo polinomial. Assim, podemos decidir polinomialmente se  $G$  e  $H$  são isomorfos entre si. Isto nos dá um algoritmo polinomial para verificar se  $G$  admite SDCM, quando o grau de  $G$  é fixo. Será demonstrada, na seção a seguir, que este resultado se estende para a classe dos grafos circulantes.

## 5.2 Grafos circulantes

Antes de definirmos a classe dos grafos *circulantes*, algumas definições se tornam necessárias. Alguns conceitos se utilizarão da teoria dos grupos. Para um maior aprofundamento nestes conceitos, sugerimos [67].

Dizemos que um grafo  $G$  é um *grafo de Cayley* se os vértices de  $G$  correspondem aos elementos de um *grupo* e as arestas correspondem à ação dos *geradores* deste grupo. Mais formalmente, seja  $A$  um grupo finito e  $S$  um *conjunto gerador* de  $A$ , onde  $S \subseteq A$ , tal que se  $s \in S$ , então  $s^{-1} \in S$  ( $S$  é fechado sob inversos).  $G$  é um grafo de Cayley se  $V(G) = A$  e  $E(G) = \{uv \mid \exists s \in S, v = s * u\}$ , onde  $*$  é a operação definida para  $A$ .

A classe dos grafos de Cayley é bastante extensa e engloba os ciclos ( $C_n$ ), toros, hipercubos, grafos estrela, grafos *bubble sort*, ciclos cubo-conexos (*cube-connected cycles*), grafos panqueca (*pancake*), circulantes, dentre outros [10].

Uma rotulação  $\lambda$  é dita uma *rotulação de Cayley* quando os rótulos das arestas correspondem aos geradores do grupo, ou seja, se  $v = s * u$  então  $\lambda_u(uv) = s$ . Como  $S$  é fechado sob inversos, logo  $\psi(s) = s^{-1}$ .

Em [36] foi demonstrado que um grafo rotulado  $(G, \lambda)$ , onde  $G$  é  $k$ -regular e  $\lambda$  é uma orientação localmente simétrica, é um SD minimal se e somente se  $G$  é um grafo de Cayley e  $\lambda$  uma rotulação de Cayley. Em [18] este resultado foi estendido para grafos direcionados.

Seja  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  o grupo cíclico de ordem  $n$  sob a operação da adição. Um *grafo circulante* é um grafo de Cayley sobre  $\mathbb{Z}_n$ . Neste caso particular,  $E(G) = \{uv \mid v = u +_n s\}$ , onde  $s \in S \subseteq \mathbb{Z}_n$ .

Existem diversas definições equivalentes de grafos circulantes na literatura. Uma delas é que um grafo  $G$  é circulante se e somente se existe uma permutação cíclica dos vértices que é um automorfismo de  $G$ . Outra caracterização utiliza o conceito de *matriz circulante*. Uma matriz  $n \times n$  é dita



circulante se a  $i$ -ésima linha é o deslocamento cíclico da primeira linha de  $i$  posições, ou seja,  $a_{ij} = a_{0,j-ni}$ , onde  $i, j = 0, \dots, n - 1$ . Um exemplo de matriz circulante (correspondente ao grafo da Figura 5.7(a)) é dado a seguir.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Um grafo  $G$  é dito circulante se a sua matriz de adjacências é circulante. Assim, o conjunto gerador  $S$  de um grafo circulante  $G$  pode ser associado às colunas com o valor 1 na primeira linha da matriz de adjacências de  $G$ . Esta caracterização também nos indica que um grafo circulante pode ser completamente caracterizado pela primeira linha da sua matriz de adjacências.

A relevância dos grafos circulantes torna-se evidente pelas suas propriedades de conectividade e forte simetria, sendo considerados como uma excelente topologia para interconexão de rede, VLSI, e sistemas distribuídos [11, 59, 61, 62, 68]. Características como pequeno diâmetro, alta conectividade, esquemas de roteamento implícito, dentre outras, podem ser obtidas pela escolha adequada do conjunto gerador e são algumas das motivações para o seu uso.

Como exemplos do seu emprego na teoria dos grafos, temos os grafos de Harary e de Ramsey [24]. Em [50] foi demonstrado que todo grafo de Harary  $H_{k,n}$  é um grafo  $k$ -conexo (em vértices e arestas) com  $n$  vértices e com o menor número de arestas possível. Todos os grafos  $H_{k,n}$   $k$ -regulares são circulantes ( $H_{k,n}$  só não é regular se  $k$  e  $n$  forem ímpares e, mesmo neste caso, ele possui

um subgrafo circulante). Em [88], Ramsey mostrou que, dados os inteiros  $c$  e  $i$ , existe um menor inteiro  $r(c, i)$  tal que todo grafo com  $r(c, i)$  vértices contém uma clique com  $c$  vértices ou um conjunto independente com  $i$  vértices. O número  $r(c, i)$  ficou conhecido como *número de Ramsey*. Os grafos utilizados para provar que  $r(3, 3) = 6$ ,  $r(3, 4) = 9$ ,  $r(3, 5) = 14$ ,  $r(4, 4) = 18$  são todos circulares [24].

Grafos circulares têm sido estudados amplamente e de várias formas na literatura. Muitos resultados analisam os circulares sob a ótica da álgebra linear, estudando as propriedades da sua matriz de adjacências e, muitas vezes, utilizando a teoria espectral de grafos (análise dos *autovalores* e *autovetores* da matriz) [27, 32, 33, 62, 69]. Diversos outros avanços foram obtidos pela teoria dos grupos [2, 31, 48, 60, 63, 72, 77, 78, 79, 80, 81, 90]. Alguns outros analisaram propriedades específicas, como planaridade, coloração, hamiltonicidade, etc. [3, 4, 12, 51, 86]. Nossa abordagem neste trabalho se diferencia pela utilização de conceitos de teoria dos grafos e teoria dos números para apresentar novos resultados e correlações com o SDC.

Apesar da clara equivalência entre os circulares e os grafos regulares que admitem SDCM, formalizaremos esta relação no teorema a seguir.

**Teorema 5.14.**  *$G$  é circular se e somente se  $G$  é  $k$ -regular e admite SDCM.*

*Prova.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $G$  circular. Então  $E(G) = \{uv \mid v = u +_n s\}$ , onde  $s \in S \subseteq \mathbb{Z}_n$ . Seja  $\lambda$  uma rotulação para  $G$  tal que  $\lambda_u(uv) = s$ . Como os vértices de  $G$  são elementos de  $\mathbb{Z}_n$ , eles já possuem uma ordenação cíclica natural, onde  $r(u) = u$  para todo  $u \in V(G)$ . Desta forma, a aresta  $uv$  será rotulada com  $\lambda_u(uv) = r(v) -_n r(u)$ . Logo,  $\lambda$  é um SDC para  $G$ . Como todo vértice está conectado ao vértice à distância  $s \pmod n$ ,  $G$  é  $k$ -regular e  $\lambda$  utiliza  $k$  rótulos. Logo,  $\lambda$  é um SDCM.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular que admite SDCM. Então existe uma ordenação cíclica dos vértices e cada aresta  $uv \in E(G)$  é rotulada com  $\lambda_u(uv) = r(v) -_n r(u)$ , onde  $0 \leq r(u) \leq n - 1$ . Fazemos os vértices de  $G$  elementos de  $\mathbb{Z}_n$ , de forma que  $u = r(u)$ . Com isto,  $\lambda_u(uv) = s = v -_n u$ . Logo,  $v = u +_n s$  para toda aresta  $uv \in E(G)$ . Assim, podemos dizer que  $S = \Gamma$  é um subconjunto gerador de  $\mathbb{Z}_n$ . Portanto,  $G$  é circulante.  $\square$

A constatação desta equivalência faz convergir os resultados anteriormente aplicados isoladamente aos circulantes para os grafos regulares com SDCM (e vice-versa). Como exemplo, podemos redefinir o problema de reconhecimento de grafos regulares que admitem SDCM. O isomorfismo entre dois grafos  $G$  e  $H$  pode ser visto como uma permutação de linhas e colunas da matriz de adjacências de  $G$  ( $A(G)$ ) que gere  $A(H)$ . Assim, dado um grafo regular  $G$ , testar se  $G$  admite SDCM é equivalente a encontrar uma permutação das linhas e colunas de  $A(G)$  tal que a matriz resultante seja circulante.

Outro exemplo da consistência entre os dois conceitos é o resultado em [14], onde é estabelecido que  $\text{mdc}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_t, n) = 1$ . Mais precisamente, existem  $\text{mdc}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_t)$  componentes conexas isomorfas. Estes resultados são coerentes com os Lemas 5.7 e 5.8. A implicação direta destes resultados é que um grafo circulante é hamiltoniano se e somente se ele é conexo [26].

A demonstração de que todo grafo que admite SDCM é hamiltoniano (Corolário 5.10), se aplica diretamente aos circulantes, não só confirmando um resultado já estabelecido (de fato, todo grafo de Cayley é hamiltoniano [28]), como fornecendo novas formas de construir ciclos hamiltonianos nesta classe.

A transformação definida no Lema 5.11 também possui sua analogia no contexto dos circulantes. Sejam  $G$  e  $H$  circulantes cujos conjuntos geradores

são  $R$  e  $S$ , respectivamente, onde  $R, S \subseteq \mathbb{Z}_n$ . Dizemos que  $R$  e  $S$  são *proporcionais*, denotando por  $R \sim S$ , se para algum inteiro  $a \perp n$ ,  $R = a \cdot_n S$ . Claramente, se  $R$  e  $S$  são proporcionais, então  $G(R)$  e  $G(S)$  são isomorfos ( $R \sim S \Rightarrow G(R) \cong G(S)$ ), onde  $G(X)$  é o grafo circulante cujo conjunto gerador é  $X$ . Uma prova mais direta desta propriedade, utilizando conceitos de teoria dos grupos, pode ser encontrada em [60].

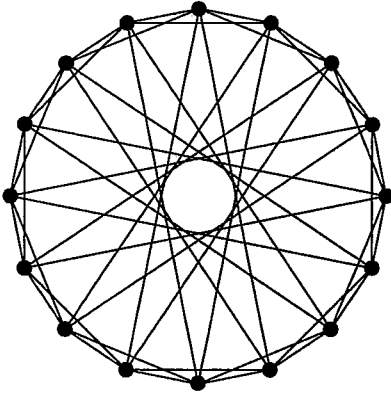
A recíproca desta proposição ( $G(R) \cong G(S) \Rightarrow R \sim S$ ) foi conjecturada em [1] e ficou conhecida como a *Conjectura de Ádám*. Contudo, em [33] foi mostrado um contra-exemplo com os geradores  $R = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7\}$  e  $S = \{\pm 1, \pm 6, \pm 7\}$ ,  $R, S \subseteq Z_{16}$ , que demonstra que a conjectura é falsa. Os grafos  $G(R)$  e  $G(S)$  deste contra-exemplo estão representados nas Figuras 5.8(a) e 5.8(b), respectivamente. É fácil verificar neste exemplo que o isomorfismo  $G(R) \cong G(S)$  é obtido pela permutação em  $Z_{16}$  dada por

$$i = \begin{cases} -5i & \text{se } i \text{ é par} \\ -5i - 4 & \text{se } i \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

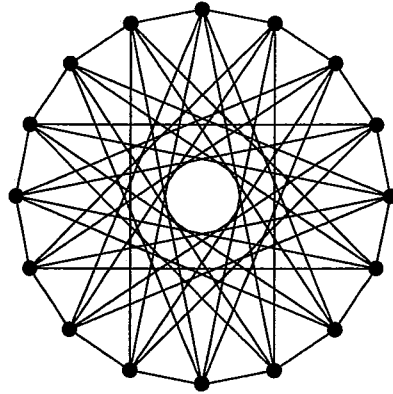
onde  $i \in Z_{16}$ , mas  $R \not\sim S$ . Ou seja, não existe inteiro  $a \perp n$ , tal que  $R = a \cdot_n S$ , apesar de estes conjuntos gerarem grafos isomorfos entre si.

Após a constatação de que a conjectura de Ádám é falsa, vários resultados se sucederam na caracterização de diversas classes de circulantes onde a conjectura é verdadeira [14, 62, 76, 77, 78, 82]. Em alguns destes resultados, a análise é baseada no espectro do grafo (por exemplo, [32, 33, 62, 69]). Sabe-se que todo grafo isomorfo possui o mesmo espectro; no entanto, a recíproca é falsa.

Um problema de grande interesse é o reconhecimento de grafos circulantes, isto é, dado um grafo  $G$  decidir se  $G$  é ou não circulante. O caso geral continua sem solução polinomial. Por outro lado, também não foi estabele-



(a)  $R = \{\pm 1, \pm 2, \pm 7\}$



(b)  $S = \{\pm 1, \pm 6, \pm 7\}$

Figura 5.8: Contra-exemplo da Conjectura de Ádam.

cido que este problema é NP-completo. No entanto, alguns resultados para classes específicas de circulantes foram solucionados polinomialmente.

O primeiro resultado na direção do reconhecimento de circulantes pode ser encontrado em [87], onde *torneios circulantes* foram tratados (*torneios* são orientações de um grafo completo [24]). O caso onde  $G$  possui um número primo de vértices foi resolvido em [80] e [27]. O algoritmo de [80] possui complexidade de tempo  $O(n^5 \ln^2 n)$ . Outros resultados sobre circulantes com  $n$  primo podem ser encontrados em [63, 72, 79].

Dizemos que  $G(S)$  é um *circulante geométrico* se  $S = \{\pm 1, \pm r, \pm r^2, \dots, \pm r^t\} \subseteq \mathbb{Z}_n$  é o seu conjunto gerador, onde  $1 \leq r \leq n/2$  e  $t$  é tal que  $r^t + 1 < n \leq r^{t+1} + 1$ . O reconhecimento de circulantes geométricos foi abordado em [81], onde foi apresentado um algoritmo para o problema com complexidade de tempo  $O(n^3 \ln n)$ .

Uma classe especial de circulantes geométricos é gerada se colocamos a restrição  $n = cr^t$  para algum inteiro  $c$ ,  $1 < c \leq t$ . Os grafos que satisfazem esta condição são chamados de *circulantes recursivos*, e o seu emprego em

redes de interconexão é fortemente recomendado na literatura, tendo sido proposto em [84] e suas propriedades estudadas em [3, 4, 75, 85]. O reconhecimento de circulantes recursivos é tratado em [34].

No caso onde  $G$  é regular de grau fixo  $k$ , podemos aproveitar o algoritmo citado anteriormente, que verifica se  $G$  admite SDCM, para utilizá-lo no reconhecimento de circulantes arbitrários, devido à equivalência demonstrada no Teorema 5.14. Este resultado, além de ser válido por si só, proporciona uma nova direção na busca de algoritmo polinomial para o caso genérico (onde  $k$  é variável).

Um problema mais abrangente do que o reconhecimento de circulantes é o reconhecimento de grafos de Cayley arbitrários. Muito pouco se sabe sobre a complexidade deste problema e suspeita-se que seja NP-completo [18]. O problema de verificar se uma dada rotulação é uma rotulação de Cayley (e, conseqüentemente, um SDCM), foi primeiramente solucionado em [18] com um algoritmo de complexidade de tempo  $O(n^{4,752})$ . Em [10] este resultado foi aprimorado para  $O(m \log n)$ .

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste capítulo, explicitaremos os resultados obtidos neste trabalho e as novas direções de pesquisa que se abrem com os mesmos.

O primeiro resultado deste trabalho é a completa caracterização da classe de grafos cúbicos que admitem SDCM. Com este resultado, podemos facilmente testar se um dado grafo cúbico admite SDCM. De modo análogo, dado um número par de vértices, podemos identificar de forma imediata os grafos cúbicos (no mínimo 1 e no máximo 2) daquele tamanho que admitem SDCM.

Identificamos, de modo independente do resultado anterior, uma classe infinita de grafos cúbicos que admitem uma 6-CDC. Este resultado foi obtido de forma construtiva, fornecendo um modo simples de gerar uma família de grafos cúbicos com esta propriedade.

Baseados nestes dois resultados, analisamos as relações intrínsecas entre o SDCM e a 6-CDC, mostrando que a classe dos grafos cúbicos que admitem SDCM é praticamente um subconjunto da classe dos cúbicos que admitem 6-CDC, havendo apenas uma exceção bem definida ( $K_4$ ).

De forma independente desta relação, estabelecemos que os grafos cúbicos que admitem SDCM são hamiltonianos e, conseqüentemente, 3-coloríveis em

arestas. Mostramos o mesmo resultado para a família definida de grafos cúbicos que admitem 6-CDC.

Através da generalização dos resultados sobre SDCM do caso cúbico para o caso  $k$ -regular, pudemos observar outra relação, desta vez entre a classe de grafos  $k$ -regulares que admitem SDCM e a classe dos grafos circulantes. Demonstramos que tais classes são equivalentes. Através desta equivalência, estabelecemos um método de reconhecimento de circulantes (e grafos  $k$ -regulares que admitem SDCM) com complexidade de tempo  $O(n^k)$ , quando o grau  $k$  do grafo é fixo. Este resultado, além de ser o único método eficiente conhecido para o reconhecimento de circulantes arbitrários, indica um novo caminho na busca de um algoritmo polinomial para o caso onde  $k$  é variável. Acreditamos que uma análise mais profunda das rotulações equivalentes seria uma direção promissora.

Além do problema do reconhecimento, com os resultados obtidos adquirimos uma melhor visão da estrutura e propriedades dos grafos circulantes e dos  $k$ -regulares que admitem SDCM. As decomposições (em 2-fatores e emparelhamento perfeito) relacionadas com a primalidade relativa entre  $n$  e os rótulos (ou geradores, no caso dos circulantes) nos fornecem uma nova perspectiva da topologia destes grafos.

O estudo sobre circulantes possui vasta literatura, a maior parte constituída por abordagens sobre a matriz de adjacências (álgebra linear e teoria espectral de grafos) ou sobre teoria dos grupos (grafos de Cayley, grupos cíclicos, etc.). Nossa abordagem utilizou apenas conceitos de teoria de grafos e teoria dos números para obter novos resultados, abrindo uma nova frente de pesquisa no tema.

As pontes criadas entre conceitos tão distintos (SDC, CDC e circulantes) nos permitem aproveitar resultados sobre um assunto e aplicá-los em outro,



ou ainda, utilizar provas mais simples do que aquelas estabelecidas sobre um contexto isolado. Note que pelas relações aqui estabelecidas, podemos afirmar que todo grafo circulante,  $n > 6$ , possui 6-CDC. Portanto, o impacto deste trabalho é percebido tanto na área de sistemas distribuídos (SDC), quanto em teoria dos grafos (CDC e circulantes).

Várias direções de trabalhos futuros podem ser exploradas. Dentre elas, temos a definição exata das classes de equivalência das rotulações de um grafo  $k$ -regular que admite SDCM. Conforme já mencionamos, este resultado poderia fornecer um algoritmo eficiente tanto para o reconhecimento de circulantes arbitrários, quanto para o teste de SDCM em grafos regulares.

Outro caminho interessante seria a análise da relação entre o SDCM em grafos regulares arbitrários e a CDC. Neste trabalho, abrangemos apenas os grafos cúbicos, onde relacionamos o SDCM com a 6-CDC. No entanto, a mesma análise poderia ser feita sobre grafos  $k$ -regulares e uma CDC com ciclos de outro comprimento ( $2k$ -CDC, por exemplo). Podemos estender ainda mais a abrangência e caracterizar os grafos arbitrários que admitem SDCM.

Como a geração da classe de grafos que admitem 6-CDC foi feita de forma construtiva, considerando todas as possibilidades sobre as restrições definidas, poderiam ainda ser exploradas formas algébricas de estabelecer as mesmas restrições e definir esta classe. Tal definição, provavelmente, seria de mais fácil assimilação e mais genérica do que a construção exaustiva.

A prova (ou exibição de contra-exemplo) de que o método recursivo empregado neste trabalho é capaz de gerar *todos* os grafos cúbicos que admitem 6-CDC é um problema ainda aberto. No caso de uma resposta negativa, a busca por um outro método, ou uma modificação deste, que efetivamente alcançasse este objetivo seria de especial interesse.

Os resultados sobre SDC aqui apresentados poderiam também ser estendidos para cobrir um SD genérico (qualquer instância de SD). A caracterização do SD minimal teria impacto ainda maior. E um problema ainda mais complexo (e interessante) seria o de testar se um grafo qualquer possui SD minimal. Este último problema já foi conjecturado ser NP-completo [42] e tão difícil quanto isomorfismo de grafos [18].

# Apêndice A

## Definição Formal de Senso de Direção

Quando definimos, no Capítulo 2, o conceito de senso de direção, o fizemos de maneira informal para evitar que fossem inseridos conceitos desnecessários para o entendimento do presente trabalho. De fato, em [41] o SD foi formalmente descrito e suas propriedades fundamentais foram explicitadas. Neste apêndice, procuramos incluir a caracterização formal do SD para que o conceito possa ser mais bem compreendido. Seguiremos, em sua maioria, a notação utilizada em [41].

### A.1 Definições e notação

Seja  $P[u]$  o conjunto de todos os passeios que se originam no vértice  $u$ , e  $P[u, v]$  o conjunto de todos os passeios que se originam em  $u$  e terminam em  $v$ . Da mesma forma que definimos a função de rotulação de arestas  $\lambda$ , podemos estender esta definição para passeios. Dada uma rotulação  $\lambda$  para  $G$ , e um vértice  $u \in V(G)$ , uma *função de rotulação de passeios* para  $u$  é

uma função  $\Lambda_u : P[u] \rightarrow \Gamma^+$  tal que, para todo passeio  $p \in P[u]$ ,

$$\Lambda_u(p) = (\lambda_u(uv_1), \lambda_{v_1}(v_1v_2), \dots, \lambda_{v_{t-1}}(v_{t-1}v_t)),$$

onde  $p = uv_1v_2 \dots v_t$  e  $\Gamma^+$  é o conjunto de todas as seqüências não vazias (ou *cadeias*) de rótulos de  $\Gamma$ .

Considere o grafo rotulado da Figura 2.1, e um passeio  $p = uvwv$  naquele grafo. Pela definição da função de rotulação de passeios, temos

$$\begin{aligned} \Lambda_u(p) &= (\lambda_u(uv), \lambda_v(vw), \lambda_w(wv)) \\ &= (1, 1, 2). \end{aligned}$$

De forma análoga à rotulação de arestas, consideremos que todo vértice associa (localmente) um *nome* a cada um dos vértices do grafo. Uma *função de nomeação local de vértices* para  $u \in V(G)$  é uma função injetora  $\beta_u : V(G) \rightarrow N$ , onde  $N$  é o conjunto de nomes. Assim,  $\beta_u(v) = \beta_u(w)$  se e somente se  $v = w$ . Note que os nomes locais não são necessariamente identificadores únicos no grafo (apenas localmente distintos) e, portanto, o sistema poderia ser anônimo.

Uma *nomeação*  $\beta$  para  $(G, \lambda)$  é o conjunto de funções de nomeação locais de todos os vértices de  $G$ , ou seja,  $\beta = \{\beta_u, \beta_v, \dots, \beta_z\}$ . Denotaremos por  $(G, \lambda, \beta)$  um grafo com rotulação  $\lambda$  e nomeação  $\beta$ .

Uma *função de codificação*  $f$  para  $(G, \lambda, \beta)$  é uma função que associa nomes a seqüências de rótulos de passeios em  $G$ . Mais formalmente, é uma função  $f : \Gamma^+ \rightarrow N \cup \{\epsilon\}$ , tal que

$$f(\sigma) \in N \iff \exists u \in V(G), p \in P[u] : \sigma = \Lambda_u(p),$$

onde  $\epsilon \notin N$  é um elemento distinto denominado *nome nulo*.

Dizemos que uma função de codificação é *consistente* em  $(G, \lambda, \beta)$  se e somente se, para todo par de vértices  $u, v \in V(G)$ , e passeio  $p \in P[u, v]$ ,

$$f(\Lambda_u(p)) = \beta_u(v).$$

De forma mais intuitiva, uma função de codificação é dita consistente se possibilita a um vértice  $u$  (origem do passeio  $p$ ) inferir, baseado nos rótulos associados às arestas, se diferentes passeios  $p$  terminam ou não em um mesmo vértice  $v$ .

Como consequência direta desta definição, temos a proposição que se segue.

**Lema A.1.** *Se  $f$  é consistente então, para todo  $u, v, w \in V(G)$ ,  $p_1 \in P[uv]$  e  $p_2 \in P[vw]$ ,*

$$f(\Lambda_u(p_1)) = f(\Lambda_u(p_2)) \iff v = w.$$

Uma *função de decodificação*  $h$  para  $f$  em  $(G, \lambda, \beta)$  é uma função que associa um nome a um dado par de nome e rótulo. Mais formalmente, é uma função  $h : \Gamma \times N \rightarrow N \cup \{\epsilon\}$ , tal que

$$h(l, q) \in N \iff \exists uv \in E[u], p \in P[v] : l = \lambda_u(uv) \text{ e } q = f(\Lambda_v(p)).$$

Dada uma função de codificação  $f$ , dizemos que uma função de decodificação  $h$  para  $f$  é *consistente* se e somente se, para todo par de vértices  $u, v \in V(G)$ , e passeio  $p \in P[vw]$ ,

$$h\left(\lambda_u(uv), f(\Lambda_v(p))\right) = \beta_u(w).$$

## A.2 Senso de direção

Dado  $(G, \lambda, \beta)$ ,  $\lambda$  é um *senso de direção* para  $G$  se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) existe uma função de codificação consistente  $f$  para  $\lambda$ ,
- (ii) existe uma função de decodificação consistente  $h$  para  $f$ .

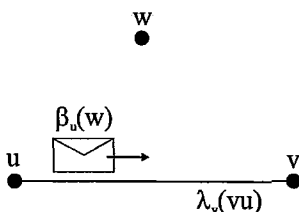


Figura A.1: Comunicação entre  $u$  e  $v$  a respeito de  $w$ .

A influência do SD, assim como o objetivo da função de decodificação (inclusive a sua nomenclatura), podem ser mais facilmente entendidos através do exemplo da Figura A.1. Considere, nesta figura, a situação do vértice  $u$  enviando uma informação ao vértice  $v$  a respeito do vértice  $w$ . O vértice  $w$  é conhecido em  $u$  por  $\beta_u(w)$  (resultado da função de codificação sobre a seqüência de rótulos do caminho que o conecta a  $w$ ). Assim, a mensagem enviada por  $u$  conterá informação sobre um vértice chamado “ $\beta_u(w)$ ”. Suponha que esta informação seja recebida por  $v$  pela aresta rotulada localmente com  $\lambda_v(vu)$ . Se existe SD, então o vértice  $v$  pode, baseado no rótulo  $\lambda_v(vu)$  e no nome  $\beta_u(w)$ , deduzir (utilizando a função de decodificação) que a informação recebida diz respeito ao vértice conhecido localmente como  $\beta_v(w)$ . Esta propriedade do SD é também chamada de *tradução da visão local*, porque cada vértice pode traduzir a percepção local de seus vizinhos.

### A.3 Exemplo da presença de SD

Para exemplificar o conceito de funções de codificação e decodificação consistentes, considere o toro rotulado da Figura 2.2(b). Vamos mostrar,

pela definição formal de SD, que a rotulação natural do toro (indicada na figura) é um SD.

Seja  $\lambda$  a associação natural de rótulos  $\Gamma = \{cima, baixo, direita, esquerda\}$ . Esta rotulação possui claramente simetria de arestas  $\psi : cima = \psi(baixo), direita = \psi(esquerda)$ .

Seja  $\beta$  a seguinte função: para todo par de vértices  $u, v \in V(G)$ , se  $u \neq v$ , então  $\beta_u(v)$  é a seqüência (ordenada lexicograficamente) de rótulos correspondentes ao menor caminho entre  $u$  e  $v$ ; se  $u = v$ , então  $\beta_u(v)$  é a seqüência vazia. Por exemplo, na Figura 2.2(b),  $\beta_u(v) = [direita, cima]$ . Note que, neste sistema,  $N \subset \Gamma^+$ .

Agora mostraremos que esta rotulação  $\lambda$  é um SD. Dada uma seqüência  $\sigma$  de rótulos, seja  $\bar{\sigma}$  a seqüência obtida de  $\sigma$  removendo todo par de rótulos  $\gamma, \gamma'$  tal que  $\gamma = \psi(\gamma')$  e ordenando lexicograficamente a seqüência resultante. Para mostrar que  $\lambda$  é um SD, mostraremos que existe uma função de codificação consistente  $f$  em  $(G, \lambda, \beta)$ . Considere, por exemplo, a função  $f : \Gamma^+ \rightarrow N \cup \{\epsilon\}$  tal que

$$f(\sigma) = \begin{cases} \bar{\sigma} & \text{se } \exists u \in V(G), p \in P[u] : \sigma = \Lambda_u(p) \\ \epsilon & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pode ser verificado facilmente que esta função  $f$ , aplicada a qualquer passeio entre  $u$  e  $v$ , coincide com  $\beta_u(v)$ . No exemplo da Figura 2.2(b), temos  $f([cima, direita, cima, baixo]) = [direita, cima] = \beta_u(v)$  e  $f([direita, esquerda, cima, direita]) = [direita, cima] = \beta_u(v)$ .

Podemos perceber, claramente, que a função  $h(l, q) = f(l \circ q)$ , onde  $\circ$  é o operador de concatenação, é uma função de decodificação consistente para  $f$ . Portanto,  $\lambda$  é um SD.

## A.4 Exemplo da ausência de SD

Considere agora o sistema  $(G, \lambda)$  da Figura A.2. Para verificar que  $\lambda$  não pode ser um SD para qualquer escolha de  $\beta$ , sejam os quatro caminhos  $p_1 = abc$ ,  $p_2 = ac$ ,  $p_3 = def$  e  $p_4 = dg$ . Para estes caminhos devemos ter  $f(\Lambda_a(p_1)) = f(\Lambda_a(p_2)) = \beta_a(c)$  e  $f(\Lambda_d(p_3)) \neq f(\Lambda_d(p_4))$ .

Por outro lado, temos  $\Lambda_a(p_1) = [1, 2] = \Lambda_d(p_3)$ , e  $\Lambda_a(p_2) = [3] = \Lambda_d(p_4)$ , provando que a função de codificação não é consistente, independentemente de  $\beta$ .

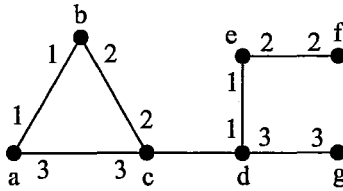


Figura A.2: Exemplo de rotulação que não é um SD.

## A.5 SD fraco

Uma forma mais fraca de SD em um sistema  $(G, \lambda, \beta)$  é representada por uma rotulação tal que exista um função de codificação consistente  $f$ , mas não necessariamente uma função de decodificação consistente. Assim, dado  $(G, \lambda, \beta)$ , dizemos que  $\lambda$  é um SD *fraco* (SDF) se e somente se existe uma função de codificação consistente para  $(G, \lambda, \beta)$ .

É importante notar que todo SD é um SD fraco, mas a recíproca não é verdadeira, ou seja, existem sistemas onde nenhuma função de codificação consistente pode ser consistentemente decodificada. Considere o exemplo da Figura A.3. Podemos facilmente encontrar uma função de nomeação  $\beta$  e



uma função de codificação tal que  $\lambda$  é um SDF em  $(G, \lambda, \beta)$ , utilizando, por exemplo, o algoritmo de reconhecimento descrito em [22]. Seja  $f$  uma função de codificação consistente para  $\lambda$ . Pelo vértice  $a$ , devemos ter  $f([1, 2]) = f([3, 4])$ , e pelo vértice  $b$ ,  $f([5, 6]) = f([3, 4])$ . Segue que  $f([1, 2]) = f([5, 6])$ . Seja  $h$  uma função de decodificação consistente. Pelo vértice  $c$ , devemos ter  $h(7, f([1, 2])) = f(8)$ , assim,

$$h(7, f([5, 6])) = f(8) \tag{A.1}$$

Considerando agora o vértice  $d$ , temos  $h(7, f([5, 6])) = f(10)$ . Da Equação A.1, temos que  $f(8) = f(10)$ , mas isto contradiz o fato de que, pelo vértice  $e$ ,  $f(8) \neq f(10)$ . Isto prova que  $\lambda$  é um SDF mas não um SD.

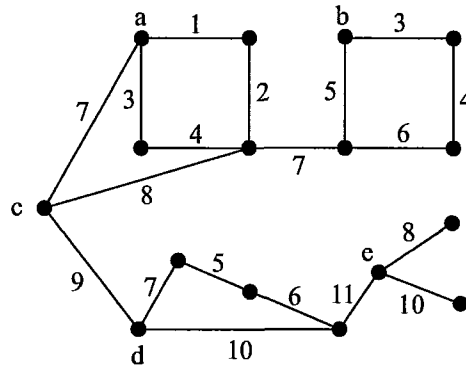


Figura A.3: Exemplo de rotulação que é um SDF mas não é um SD.

## A.6 Consistência do SD cordal

Podemos, então, utilizar as definições introduzidas neste apêndice para demonstrar formalmente a consistência do SD cordal, ou seja, provar que ele realmente é um SD.

Seja  $\lambda$  a rotulação cordal (descrita no Capítulo 2) e  $dist(u, v)$  a distância a qual o vértice  $v$  está do vértice  $u$  na ordenação cíclica. Façamos  $\beta_u(v) = dist(u, v)$ . Considere a função de codificação  $f$  definida da seguinte forma:  
 $\forall p \in P[v_0], p = v_0v_1 \dots v_{t-1}v_t,$

$$\begin{aligned} f(\Lambda_{v_0}(p)) &= f(\lambda_{v_0}(v_0v_1), \lambda_{v_1}(v_1v_2), \dots, \lambda_{v_{t-1}}(v_{t-1}v_t)) \\ &= \left[ \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_{v_i}(v_iv_{i+1}) \right] \bmod n \\ &= dist(v_0, v_t) \\ &= \beta_{v_0}(v_t). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é consistente.

Considere agora a seguinte função de decodificação  $h$ :  $\forall uv \in E[u], \forall p \in P[v],$

$$\begin{aligned} h(\lambda_u(uv), f(\Lambda_v(p))) &= \lambda_u(uv) +_n f(\Lambda_v(p)) \\ &= dist(u, v) \\ &= \beta_u(v). \end{aligned}$$

Logo,  $h$  é consistente. Portanto,  $\lambda$  é um SD.

# Bibliografia

- [1] ÁDÁM, A., “Research Problem 2–10”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. 2, p. 393, 1967.
- [2] ALSPACH, B., PARSONS, T. D., “Isomorphism of Circulant Graphs and Digraphs”, *Discrete Mathematics*, v. 25, pp. 97–108, 1979.
- [3] ARAKI, T., SHIBATA, Y., “Pancyclicity of Recursive Circulant Graphs”, *Information Processing Letters*, v. 81, pp. 187–190, 2002.
- [4] ARAKI, T., SHIBATA, Y., “Pancyclicity of Recursive Circulant Graphs (Erratum)”, *Information Processing Letters*, v. 84, p. 173, 2002.
- [5] ATTIYA, H., SNIR, M., WARMUTH, M. K., “Computing on an Anonymous Ring”, *Journal of the ACM*, v. 35, n. 4, pp. 845–875, 1988.
- [6] ATTIYA, H., VAN LEEUWEN, J., SANTORO, N., *et al.*, “Efficient Elections in Chordal Ring Networks”, *Algorithmica*, v. 4, pp. 437–446, 1989.
- [7] ATTIYA, H., WELCH, J., *Distributed Computing: Fundamentals, Simulations and Advanced Topics*. 2 ed. London, Wiley-Interscience, 2004.

- [8] AWERBRUCH, B., GOLDREICH, O., PELEG, D., *et al.*, “A Trade-off Between Information and Communication in Broadcast Protocols”, *Journal of the ACM*, v. 37, n. 2, pp. 238–256, 1990.
- [9] BARBOSA, V. C., *An Introduction to Distributed Algorithms*. 1 ed. Cambridge, The MIT Press, 1996.
- [10] BARRIÈRE, L., FRAIGNIAUD, P., GAVOILLE, C., *et al.*, “On recognizing Cayley graphs”, In: *Proc. 8th Annual European Symposium on Algorithms*, v. LNCS 1879, pp. 76–87, 2000.
- [11] BERMOND, J. C., CORNELLAS, F., HSU, D. F., “Distributed Loop Computer Networks: a Survey”, *Journal of Parallel Distributed Computing*, v. 24, pp. 2–10, 1995.
- [12] BISS, D., “Hamiltonian Decomposition of Recursive Circulant Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 214, pp. 89–99, 2000.
- [13] BOCHMANN, G. V., FLOCCHINI, P., RAMAZANI, D., “Distributed objects with sense of direction”, In: *Proc. 1st Workshop on Distributed Data and Structures*, pp. 1–15, 1998.
- [14] BOECH, F., TINDELL, R., “Circulants and their Connectivities”, *Journal of Graph Theory*, v. 8, pp. 487–499, 1984.
- [15] BOLDI, P., CODENOTTI, B., GEMMEL, P., *et al.*, “Symmetry breaking in anonymous networks: characterizations”, In: *Proc. 4th Israeli Symposium on Theory of Computing and Systems*, pp. 16–26, 1996.
- [16] BOLDI, P., VIGNA, S., “On some constructions wich preserve sense of direction”, In: *Proc. 3rd International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pp. 47–58, 1996.

- [17] BOLDI, P., VIGNA, S., “Computing vector functions on anonymous networks”, In: *Proc. 4th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pp. 201–214, 1997.
- [18] BOLDI, P., VIGNA, S., “Minimal Sense of Direction and Decision Problems for Cayley Graphs”, *Information Processing Letters*, v. 64, pp. 299–303, 1997.
- [19] BOLDI, P., VIGNA, S., “Coverings that Preserve Sense of Direction”, *Information Processing Letters*, v. 75, pp. 175–180, 2000.
- [20] BOLDI, P., VIGNA, S., “Lower bounds for (weak) sense of direction”, In: *Proc. 7th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pp. 37–46, 2000.
- [21] BOLDI, P., VIGNA, S., “More lower bounds for weak sense of direction”, In: *Proc. 14th International Conference on Distributed Computing*, pp. 238–252, 2000.
- [22] BOLDI, P., VIGNA, S., “On the Complexity of Deciding Sense of Direction”, *SIAM Journal on Computing*, v. 29, n. 3, pp. 779–789, 2000.
- [23] BOLDI, P., VIGNA, S., “A Tool for Optimal Weak Sense of Direction”, Note del Polo 27, Università di Milano, 2000.
- [24] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph Theory with Applications*. 1 ed. New York, North Holland, 1976.
- [25] BUI, A., DATTA, A. K., PETTIT, F., *et al.*, “Snap-stabilizing pif algorithm in tree networks without sense of direction”, In: *Proc. 6th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pp. 32–46, 1999.

- [26] BURKARD, R. E., SANDHOLZER, W., “Efficiently Solvable Special Cases of Bottleneck Travelling Salesman Problems”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 32, pp. 61–76, 1991.
- [27] CODENOTTI, B., GERACE, I., VIGNA, S., “Hardness Results and Spectral Techniques for Combinatorial Problems on Circulant Graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 285, pp. 123–142, 1998.
- [28] CURRAN, S. J., GALLIAN, J. A., “Hamiltonian Cycles and Paths in Cayley Graphs and Digraphs: a Survey”, *Discrete Mathematics*, v. 156, pp. 1–18, 1996.
- [29] DATTA, A. K., GURUMURTHY, S., PETIT, F., *et al.*, “Self-stabilizing network orientation algorithms in arbitrary networks”, In: *Proc. 20th International Conference on Distributed Computing Systems*, pp. 576–583, 2000.
- [30] DOBREV, S., “Leader election using any sense of direction”, In: *Proc. 6th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pp. 93–104, 1999.
- [31] DOBSON, E., “On Solvable Groups and Circulant Graphs”, *European Journal of Combinatorics*, v. 21, pp. 881–885, 2000.
- [32] DOOB, M., “Circulant Graphs with  $\det(-A(G)) = -\deg(G)$ : Codeterminants with  $K_n$ ”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 340, pp. 87–96, 2002.
- [33] ELSPAS, B., TURNER, J., “Graphs with Circulant Adjacency Matrices”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. 9, pp. 297–307, 1970.

- [34] FERTIN, G., RASPAUD, A., “Recognizing Recursive Circulant Graphs”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 5, 2000.
- [35] FIORINI, S., WILSON, R. J., *Edge-Colourings of Graphs*. 1 ed. London, Pitman, 1977.
- [36] FLOCCHINI, P., “Minimal Sense of Direction in Regular Networks”, *Information Processing Letters*, v. 61, pp. 331–398, 1997.
- [37] FLOCCHINI, P., MANS, B., “Optimal Election in Labeled Hypercubes”, *Journal of Parallel and Distributed Computing*, v. 33, n. 1, pp. 76–83, 1996.
- [38] FLOCCHINI, P., MANS, B., RONCATO, A., *et al.*, “Levels of sense of direction in distributed systems”, In: *Proc. 1st International Conference on Principles of Distributed Systems*, pp. 319–331, 1997.
- [39] FLOCCHINI, P., MANS, B., SANTORO, N., “Distributed traversal and broadcasting in arbitrary network with distance sense of direction”, In: *Proc. 9th International Symposium on Computer and Information Sciences*, pp. 196–203, 1994.
- [40] FLOCCHINI, P., MANS, B., SANTORO, N., “On the Impact of Sense of Direction on Message Complexity”, *Information Processing Letters*, v. 63, n. 1, pp. 23–31, 1997.
- [41] FLOCCHINI, P., MANS, B., SANTORO, N., “Sense of Direction : Definitions, Properties and Classes”, *Networks*, v. 32, n. 3, pp. 165–180, 1998.

- [42] FLOCCHINI, P., MANS, B., SANTORO, N., “Sense of Direction in Distributed Computing”, *Theoretical Computer Science*, v. 291, pp. 29–53, 2003.
- [43] FLOCCHINI, P., RONCATO, A., SANTORO, N., “Computing on anonymous networks with sense of direction”, In: *Proc. 3rd International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, 1996.
- [44] FLOCCHINI, P., RONCATO, A., SANTORO, N., “Symmetries and Sense of Direction in Labeled Graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 87, pp. 99–115, 1998.
- [45] FLOCCHINI, P., RONCATO, A., SANTORO, N., “Biconsistency and homonymy in distributed systems with edge symmetry”, In: *Proc. 3rd International Conference on Principles of Distributed Systems*, pp. 29–48, 1999.
- [46] FLOCCHINI, P., RONCATO, A., SANTORO, N., “Backward Consistency and Sense of Direction in Advanced Distributed Systems”, *SIAM Journal on Computing.*, v. 32, n. 2, pp. 281–206, 2003.
- [47] FLOCCHINI, P., SANTORO, N., “Topological Constraints for Sense of Direction”, *International Journal of Foundations of Computer Science*, v. 9, n. 2, pp. 179–198, 1998.
- [48] FRONČEK, D., ROSA, A., ŠIRÁŇ, J., “The Existence of Selfcomplementary Circulant Graphs”, *European Journal of Combinatorics*, v. 108, pp. 625–628, 1996.



- [49] GRAHAM, R. L., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O., *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. 2 ed. New York, Addison-Wesley, 1994.
- [50] HARARY, F., “The maximum connectivity of a graph”, In: *Proc. National Academy of Sciences (USA)*, v. 48, pp. 1142–1146, 1962.
- [51] HEUBERGER, C., “On Planarity and Colorability of Circulant Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 268, pp. 153–169, 2002.
- [52] ISRAELI, A., KRANAKIS, E., KRIZANC, D., *et al.*, “Time-Message Trade-Offs for the Weak Unison Problem”, *Nordic Journal of Computing*, v. 4, pp. 317–329, 1997.
- [53] ITAI, A., KUTTEN, S., WOLFSTAHL, Y., *et al.*, “Optimal Distributed  $t$ -Resilient Election in Complete Networks”, *IEEE Transactions on Software Engineering*, v. 16, n. 1, pp. 415–420, 1990.
- [54] KALAMBOUKIS, T. Z., MANTZARIS, S. L., “Towards Optimal Distributed Election on Chordal Rings”, *Information Processing Letters*, v. 38, pp. 265–270, 1991.
- [55] KORACH, E., MORAN, S., ZACKS, S., “Optimality of Distributed Constructions of Minimum Weight and Degree Restricted Spanning Trees in a Complete Network of Processors”, *SIAM Journal on Computing*, v. 16, n. 2, pp. 231–236, 1987.
- [56] KRANAKIS, E., KRIZANC, D., “Distributed Computing on Anonymous Hypercubes”, *Journal of Algorithms*, v. 23, pp. 32–50, 1997.

- [57] KRANAKIS, E., SANTORO, N., “Distributed computing on anonymous hypercubes with faulty components”, In: *Proc. 6th International Workshop on Distributed Algorithms*, v. 23, pp. 253–263, 1992.
- [58] LAVALLÉE, I., ROUCAIROL, G., “A Fully Distributed (Minimal) Spanning Tree Algorithm”, *Information Processing Letters*, v. 23, pp. 55–62, 1986.
- [59] LEIGHTON, F. T., *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*. 1 ed. Los Altos, Morgan Kaufmann, 1991.
- [60] LISKOVETS, V., PÖSCHEL, R., “Counting Circulant Graphs of Prime-Power order by Decomposing into Orbit Enumeration Problems”, *Discrete Mathematics*, v. 214, pp. 173–191, 2000.
- [61] LITOW, B., MANS, B., “On isomorphic chordal rings”, In: *Proc. 7th Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms*, pp. 108–111, 1996.
- [62] LITOW, B., MANS, B., “A Note on the Ádám Conjecture for Double Loops”, *Information Processing Letters*, v. 66, n. 3, pp. 149–153, 1998.
- [63] LOCKE, S. C., WITTE, D., “Flows in Circulant Graphs of Odd Order are Sums of Hamiltonian Cycles”, *Discrete Mathematics*, v. 78, pp. 105–114, 1989.
- [64] LOUI, M. C., MATSUSHITA, T. A., “Election in Complete Networks with a Sense of Direction”, *Information Processing Letters*, v. 22, pp. 185–187, 1986.

- [65] LUKS, E. M., “Isomorphism of Graphs of Bounded Valence Can Be Tested in Polynomial Time”, *Journal of Computer and System Sciences*, v. 25, n. 1, pp. 42–65, 1982.
- [66] LYNCH, N. A., *Distributed Algorithms*. 1 ed. San Francisco, Morgan Kaufmann, 1996.
- [67] MAGNUS, W., KARASS, A., SOLITAR, D., *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations*. 2 ed. New York, Interscience Publishers, 1976.
- [68] MANS, B., “Optimal Distributed Algorithms in Unlabeled Tori and Chordal Rings”, *Journal of Parallel Distributed Computing*, v. 46, n. 1, pp. 80–90, 1997.
- [69] MANS, B., PAPPALARDI, F., SHPARLINSKY, I., “On the Spectral Ádám Property for Circulant Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 254, pp. 309–329, 2002.
- [70] MANS, B., SANTORO, N., “On the impact of sense of direction in arbitrary networks”, In: *Proc. 14th IEEE International Conference on Distributed Computing Systems*, pp. 258–265, 1994.
- [71] MANS, B., SANTORO, N., “Optimal Elections in Faulty Loop Networks and Applications”, *IEEE Transactions on Computers*, v. 4, n. 3, pp. 286–297, 1998.
- [72] MARUŠIČ, D., “Strong Regularity and Circulant Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 78, pp. 119–125, 1989.
- [73] MASAPATI, G. H., URAL, H., “Effect of preprocessing on election in a complete network with a sense of direction”, In: *Proc. IEEE Inter-*

- national Conference on Systems, Man and Cybernetics*, v. 3, pp. 1627–1632, 1991.
- [74] MASUZAWA, T., NISHIKAWA, N., HAGIHARA, K., *et al.*, “A Fault-Tolerant Algorithm for Election in Complete Networks with a Sense of Direction”, *Distributed Computing*, v. 10, pp. 159–165, 1997.
- [75] MICHENEAU, C., “Disjoint Hamiltonian Cycles in Recursive Circulant Graphs”, *Information Processing Letters*, v. 61, pp. 259–264, 1997.
- [76] MUZYCHUK, M., “Ádám Conjecture is True for in the Square Free Case”, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 72, pp. 118–134, 1995.
- [77] MUZYCHUK, M., “On Ádám’s Conjecture for Circulant Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 167/168, pp. 497–510, 1997.
- [78] MUZYCHUK, M., “On Ádám’s Conjecture for Circulant Graphs (Corrigendum)”, *Discrete Mathematics*, v. 176, pp. 285–298, 1997.
- [79] MUZYCHUK, M., PÖSCHEL, R., “Isomorphism Criteria for Circulant Graphs”, Tech. Rep. MATH-AL-9, Technische Universität Dresden, 1999.
- [80] MUZYCHUK, M., TINHOFER, G., “Recognizing Circulant Graphs of Prime Order in Polynomial Time”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 3, pp. 108–111, 1996.
- [81] MUZYCHUK, M., TINHOFER, G., “Recognizing Circulant Graphs in Polynomial Time: An Application of Association Schemes”, *The Electronic Journal of Combinatorics*, v. 8, 2001.

- [82] PÁLFY, P. P., “Isomorphism Problem for Relational Structures with a Cyclic Automorphism”, *European Journal of Combinatorics*, v. 8, pp. 35–43, 1987.
- [83] PAN, Y., “A Near-Optimal Multi-Stage Distributed Algorithm for Finding Leaders in Clustered Chordal Rings”, *Information Sciences*, v. 76, pp. 131–140, 1994.
- [84] PARK, J.-H., CHWA, K.-Y., “Recursive circulant: a new topology for multicomputer networks”, In: *Proc. International Symposium Parallel Architectures, Algorithms and Networks*, pp. 73–80, 1994.
- [85] PARK, J.-H., CHWA, K.-Y., “Recursive Circulants and their Embeddings among Hypercubes”, *Theoretical Computer Science*, v. 244, pp. 35–62, 2000.
- [86] POLJAK, S., TURZIK, D., “Max-Cut in Circulant Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 108, pp. 379–392, 1992.
- [87] PONOMARENKO, I., “Polynomial-Time Algorithms for Recognizing and Isomorphism Testing of Cyclic Tournaments”, *Acta Applicandae Mathematicae*, v. 29, pp. 139–160, 1992.
- [88] RAMSEY, F. P., “On a problem of formal logic”, In: *Proc. London Mathematical Society*, v. 30, pp. 264–286, 1930.
- [89] ROBBINS, S., ROBINS, K. A., “Choosing a leader on a hypercube”, In: *Proc. International Conference on Databases, Parallel Architectures and Their Applications*, v. 1, pp. 469–471, 1990.
- [90] SANDERS, R., “Products of Circulant Graphs Are Metacirculant”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 85, pp. 197–206, 2002.

- [91] SANTORO, N., “On the Message Complexity of Distributed Problems”, *Journal of Computer and Information Sciences*, v. 13, pp. 131–147, 1984.
- [92] SANTORO, N., “Sense of Direction, Topological Awareness and Communication Complexity”, *SIGACT News*, v. 2, n. 16, pp. 50–56, 1984.
- [93] SEYMOUR, P. D., “Sums of Circuits”, In: *Graph Theory and Related Topics* (BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., eds.), pp. 341–355, New York, USA, Academic Press, 1979.
- [94] SHARMA, M. B., IYENGAR, S. S., MANDYAM, N. K., “An Efficient Distributed Depth-First-Search Algorithm”, *Information Processing Letters*, v. 32, pp. 183–186, 1989.
- [95] SINGH, G., “Efficient Leader Election using Sense of Direction”, *Distributed Computing*, v. 10, pp. 159–165, 1997.
- [96] SOTELO, D. P., *A Complexidade de uma Orientação Localmente Simétrica*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.
- [97] SZEKERES, G., “Polyhedral Decompositions of Cubic Graphs”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, v. 8, pp. 367–387, 1973.
- [98] TEL, G., “Linear Election in Hypercubes”, *Parallel Processing Letters*, v. 5, n. 1, pp. 357–366, 1995.
- [99] TEL, G., “Network Orientation”, *International Journal of Foundations of Computer Science*, v. 5, pp. 1–41, 1995.

- [100] TEL, G., “Sense of direction in processor networks”, In: *Proc. Conference on Theory and Practice of Informatics, Lecture Notes in Computer Science, 1012*, pp. 50–82, 1995.
- [101] TEL, G., *Introduction to Distributed Algorithms*. 2 ed. Cambridge, Cambridge University Press, 2001.
- [102] THOMASSEN, C., “Triangulating a Surface with a Prescribed Graph”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 57, pp. 196–206, 1993.
- [103] YAMASHITA, M., KAMEDA, T., “Computing on Anonymous Networks, Part I: Characterizing the Solvable Cases”, *IEEE Transactions on Parallel Distributed Computing*, v. 7, n. 1, pp. 69–89, 1996.
- [104] YAN, S. Y., *Number Theory for Computing*. 2 ed. Berlin, Springer-Verlag, 2002.
- [105] ZHANG, C. Q., *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*. 1 ed. New York, Marcel Dekker, 1996.