



**COPPE/UFRJ**

**L(2,1)-COLORAÇÕES: ALGORITMOS E LIMITES SUPERIORES EM  
CLASSES DE GRAFOS**

Daniel Fabio Domingues Posner

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro  
Setembro de 2009

L(2,1)-COLORAÇÕES: ALGORITMOS E LIMITES SUPERIORES EM  
CLASSES DE GRAFOS

Daniel Fabio Domingues Posner

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE  
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



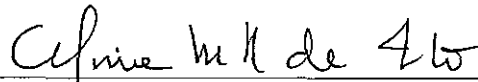
---

Profa. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.



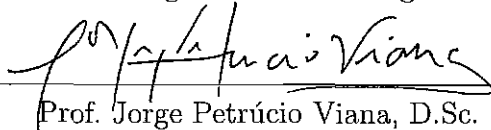
---

Profa. Célia Picinin de Mello, D.Sc.



---

Profa. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



---

Prof. Jorge Petrucio Viana, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 2009

Posner, Daniel Fabio Domingues

$L(2,1)$ -colorações: algoritmos e limites superiores em classes de grafos/Daniel Fabio Domingues Posner. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XVII, 174 p.: il.; 29,7cm.

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 165 – 170.

1.  $L(2,1)$ -coloração. 2. Coloração de grafos. 3. Problema de atribuição de frequências. I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*A Marlene e Alexy, meus pais e  
a Stephan, meu irmão.*

# Agradecimentos

A meus pais e meu irmão, por todo apoio durante todos os momentos da minha vida, os meus mais sinceros agradecimentos.

Ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC), por sua excelência acadêmica e por todos os benefícios que me foram concedidos tais como auxílio a viagens, curso de *scientific writing* e palestras.

Ao Grupo de Grafos e Algoritmos da UFRJ, pelos diversos seminários que foram feitos, e pela oportunidade de poder participar como expositor de dois deles.

Ao corpo docente pelas excelentes classes ministradas, das quais tentei aproveitar ao máximo na elaboração desta dissertação, principalmente aos professores Protti, Celina, Sulamita, Claudson, Esperança, Farias, Valmir e Luérbio (este último um agradecimento em especial por todas as piadas, que conseguiram manter o ânimo dos alunos mesmo nas horas mais tediosas).

A todos os colegas da linha de Algoritmos e Combinatória da COPPE-Sistemas, por todas as suas colaborações, um obrigado em especial para Fabiano, Danilo, Adriana, Maise, André, Thatiana, Letícia, Hausen, Rosiane e Vitor. E, também para os colegas Jesus (OT), Jurair (OT), Carlos Eduardo Barbosa/Melo (ambos de BD), Flávio (CG) e Máximo (CG).

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro por meio de uma bolsa de mestrado PG-GM, no período de novembro de 2007 até março de 2009. E a FAPERJ pelo suporte financeiro por meio de diárias em viagens.

Aos membros da banca desta dissertação: Célia, Celina e Petrucio. Por terem aceitado participar da defesa desta dissertação.

A minha orientadora, professora Márcia Cerioli, por toda a ajuda na elaboração e correção não só desta dissertação, mas como da minha vida acadêmica. Sem ela eu

não teria continuado na carreira acadêmica, já que ela foi um dos poucos professores que confiaram em mim durante a graduação e me incentivou a participar de três iniciações científicas, projetos em conjunto com Cristiane Cruz e Roberto Simão. Este último merece um papel de destaque nos agradecimentos, já que participou comigo de uma iniciação científica e um projeto final de curso de graduação no mesmo tema desta dissertação, que por sua vez foi apresentado a nós pela professora Márcia Cerioli; um outro agradecimento em especial pela apresentação deste tema tão interessante.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## L(2,1)-COLORAÇÕES: ALGORITMOS E LIMITES SUPERIORES EM CLASSES DE GRAFOS

Daniel Fabio Domingues Posner

Setembro/2009

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema da  $L(2,1)$ -coloração, ou da  $\lambda$ -coloração, é uma variação do problema da coloração de vértices de um grafo, onde vértices adjacentes recebem cores (representadas por números naturais) com diferença de pelo menos dois e vértices não adjacentes, mas que tenham um vizinho em comum, recebem cores diferentes. O objetivo é minimizar o *span*, ou seja, a maior cor utilizada.

Esta dissertação apresenta uma coletânea dos principais resultados sobre este problema contendo, uma prova de sua  $\mathcal{NP}$ -completude, algoritmos exponenciais para grafos em geral, algoritmos lineares para classes específicas de grafos e limites superiores para o *span*, tanto de grafos em geral, quanto de grafos pertencentes a classes específicas.

Além disso, são apresentados resultados novos que incluem um algoritmo linear para a classe dos grafos  $P_4$ -tidy, o estabelecimento de limites superiores para grafos fracamente cordais, grafos linha e grafos bipartido cordais e a melhoria dos limites superiores conhecidos para grafos *split*, permutação, cografos, entre outros.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## L(2,1)-COLORING: ALGORITHMS AND UPPER BOUNDS ON GRAPH CLASSES

Daniel Fabio Domingues Posner

September/2009

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

The  $L(2,1)$ -coloring problem, also known as the  $\lambda$ -coloring problem, is a variant of the vertex coloring problem where adjacent vertices get colors (represented by natural numbers) which differ by at least two and non-adjacent vertices having a common neighbor get different colors. The aim is to minimize the span, that is, the greatest assigned color.

This dissertation presents a survey on the main results on this problem, containing a proof of its  $\mathcal{NP}$ -completeness, exponential-time algorithms for general graphs, linear-time algorithms for specific classes of graphs, and upper bounds for the span for general graphs as well as for graphs belonging to specific classes.

Moreover, new results are presented including a linear-time algorithm for  $P_4$ -tidy graphs, upper bounds for weakly chordal graphs, line graphs and chordal bipartite graphs, and improvements of known upper bounds for, among others, split graphs, permutation graphs, and cographs.



# Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xvii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Pequeno histórico . . . . .	3
1.2 Escopo . . . . .	5
1.3 Descrição dos capítulos . . . . .	6
1.4 Conceitos da teoria dos grafos . . . . .	7
1.4.1 Grafos: definições e notações . . . . .	7
1.4.2 Algoritmos: definições e notações . . . . .	14
1.4.3 Problema da coloração . . . . .	16
<b>2 Problema da <math>\lambda</math>-coloração</b>	<b>18</b>
2.1 $L(2,1)$ -colorações . . . . .	18
2.2 $L(h, k)$ -colorações . . . . .	20
2.3 Exemplos de $\lambda$ -colorações ótimas . . . . .	21
2.3.1 Grafos completos . . . . .	21
2.3.2 Grafos ciclos . . . . .	21
2.3.3 Grafos caminhos . . . . .	23
2.3.4 Grafos estrelas . . . . .	23
2.3.5 Grafos rodas . . . . .	24
2.4 Resultados preliminares . . . . .	25
2.4.1 Subgrafos . . . . .	25
2.4.2 Coloração ótima . . . . .	26
2.4.3 Coloração gulosa . . . . .	26

2.4.4	$\lambda$ -coloração ótima . . . . .	27
2.5	$\mathcal{NP}$ -completude do problema da $\lambda$ -coloração . . . . .	29
2.6	$\mathcal{NP}$ -completude do problema da $k$ - $\lambda$ -coloração . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Limites para <math>\lambda(G)</math></b> . . . . .	<b>38</b>
3.1	Limites de Griggs e Yeh . . . . .	38
3.1.1	Conjectura . . . . .	38
3.1.2	Limites triviais . . . . .	39
3.1.3	Limites para classes de grafos . . . . .	39
3.1.4	Limite superior no número de vértices . . . . .	41
3.2	Limite superior de Chang e Kuo . . . . .	43
3.3	Limite superior de Král e Skrekovski . . . . .	44
3.4	Limite superior de Gonçalves . . . . .	51
3.5	Limite superior de Havet, Reed e Sereni . . . . .	55
3.6	Limites do tipo Nordhaus-Gaddum . . . . .	55
3.7	Classes de grafos . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Algoritmos lineares</b> . . . . .	<b>59</b>
4.1	Árvores . . . . .	59
4.1.1	Chang e Kuo . . . . .	59
4.1.2	Hasunuima <i>et al.</i> . . . . .	61
4.2	Grafos $p$ -quase árvores . . . . .	66
4.3	Grafos <i>Chain</i> . . . . .	68
4.4	Cografos . . . . .	69
4.5	Grafos grades regulares . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Algoritmos exponenciais</b> . . . . .	<b>79</b>
5.1	Algoritmo guloso para $\lambda$ -coloração ótima . . . . .	79
5.2	Algoritmo de Kratochvíl, Kratsch e Liedloff para $k$ - $\lambda$ -coloração . . . . .	81
5.3	Algoritmo para o número de $k$ - $\lambda$ -colorações . . . . .	86
5.4	Algoritmo de Král para $\lambda$ -coloração ótima e número de $k$ - $\lambda$ -colorações . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Resultados novos</b> . . . . .	<b>102</b>
6.1	Grafos bipartidos cordais . . . . .	103

6.1.1	$L(2, 1)$ -colorações de grafos bipartidos cordais . . . . .	107
6.1.2	$L(h, k)$ -colorações de grafos bipartidos cordais . . . . .	111
6.2	Grafos fracamente cordais . . . . .	112
6.3	Grafos linha . . . . .	119
6.3.1	Grafos quase linha . . . . .	122
6.4	Grafos <i>split</i> . . . . .	123
6.5	Grafos de permutação . . . . .	131
6.6	Cografos . . . . .	134
6.6.1	Componente p-cografos . . . . .	138
6.7	Grafos $P_4$ -tidy . . . . .	138
6.8	Resumo dos resultados nos limites superiores . . . . .	161
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>162</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Prova do lema estrutural de Gonçalves</b>	<b>171</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplos de redes . . . . .	2
1.2	Representação gráfica . . . . .	8
1.3	$G^2$ , potência 2 do grafo da figura 1.2 . . . . .	10
1.4	Complemento do grafo da figura 1.2 . . . . .	10
1.5	Um grafo e uma de suas árvores de largura . . . . .	15
1.6	Coloração ótima do grafo da figura 1.2 . . . . .	16
2.1	$\lambda$ -coloração ótima . . . . .	19
2.2	$L(3, 2)$ -coloração ótima . . . . .	20
2.3	Ciclos não têm 3- $\lambda$ -coloração . . . . .	22
2.4	Ciclos têm uma 4- $\lambda$ -coloração . . . . .	23
2.5	$\lambda$ -colorações ótimas de $P_1, P_2, P_3$ e $P_4$ . . . . .	23
2.6	$\lambda$ -colorações ótimas de $S_4, S_5, S_6$ e $S_7$ . . . . .	24
2.7	$\lambda$ -colorações ótimas de $W_4, W_5, W_6$ e $W_7$ . . . . .	25
2.8	O problema da $\lambda$ -coloração é $\mathcal{NP}$ -completo . . . . .	31
2.9	Equivalência entre $BW(3)$ -coloração e 4- $\lambda$ -coloração . . . . .	32
2.10	Equivalência entre $BW(4)$ -coloração e redução do problema da existência de $\lambda$ -coloração com $span$ 5 . . . . .	35
2.11	Construção do grafo $G'$ . . . . .	36
2.12	Problema de decidir se existe $\lambda$ -coloração de um grafo com $span$ $k$ par é $\mathcal{NP}$ -completo . . . . .	37
3.1	Construção do grafo de Hoffman-Singleton . . . . .	41
3.2	Aplicação do algoritmo de McDiarmid . . . . .	47
3.3	Par de vértices $\{x, y\}$ à distância 2 em $H$ . . . . .	48
3.4	Partições $G \setminus X$ e $X$ . . . . .	53

3.5	Casos do algoritmo de Gonçalves para $\Delta = 4$ . . . . .	54
3.6	Casos do algoritmo de Gonçalves para $\Delta = 3$ . . . . .	56
4.1	Algoritmo para encontrar o <i>span</i> de $\lambda$ -colorações em árvores . . . . .	62
4.2	Algoritmo de Chang e Kuo para $\lambda$ -coloração ótima em cografos . . . . .	73
4.3	$\lambda$ -coloração de células dos grafos grades com $\Delta = 3, 4$ e $6$ . . . . .	75
4.4	$\lambda$ -coloração de um bloco dos grafos grades de hexágonos . . . . .	76
4.5	$\lambda$ -coloração de um bloco dos grafos grades de quadrados . . . . .	77
4.6	$\lambda$ -coloração de um bloco dos grafos grades de triângulos . . . . .	78
5.1	Árvore representando as chamadas recursivas do algoritmo $\lambda PCCP$ . . . . .	92
5.2	Aplicação do algoritmo $\lambda PCCP(P_3, 3)$ . . . . .	93
5.3	Aplicação do algoritmo $\lambda PCCP(A, 3)$ . . . . .	94
5.4	Aplicação do algoritmo $\lambda PCCP(B, 3)$ . . . . .	94
5.5	Aplicação do algoritmo $\lambda PCCP(C, 3)$ . . . . .	94
5.6	Aplicação do algoritmo $\lambda PCCP(D, 3)$ . . . . .	94
5.7	Representação de uma $\lambda$ -coloração . . . . .	96
5.8	Número de caminhos de distância até 6 em um digrafo . . . . .	101
6.1	Adjacências de vértices à distância 2 em um grafo bipartido cordal . . . . .	104
6.2	Grafo simplificado $G'$ . . . . .	104
6.3	Construção de $H$ . . . . .	105
6.4	Ciclo no digrafo $H$ , formado apenas por arestas direcionadas . . . . .	106
6.5	Ciclo tamanho 3 no digrafo $H$ , forma $C_6$ no grafo bipartido cordal . . . . .	106
6.6	Ciclo maior que 3 no digrafo $H$ , forma $C_6$ no grafo bipartido cordal . . . . .	106
6.7	Método para atribuir cor a um vértice $v$ de um grafo bipartido cordal . . . . .	108
6.8	Subgrafos proibidos . . . . .	109
6.9	Grafo com ciclo induzido de tamanho maior que 4 . . . . .	109
6.10	Vértice adjacente a todos os vértices em $N_1^a(v)$ . . . . .	110
6.11	Caso da árvore de largura com folha com grau $\Delta$ . . . . .	111
6.12	Inversão da árvore de largura . . . . .	113
6.13	Vértices à distância 2 de $v$ adjacentes a $N^{ac}(v)$ . . . . .	113
6.14	Número máximo de vértices à distância 2 de $v$ adjacentes a vértices em $N^a(v)$ . . . . .	115

6.15	Adjacências entre $N^a(v)$ e $N^{ae}(v)$ . . . . .	115
6.16	Ordenação dos vértices para grafos fracamente cordais . . . . .	116
6.17	Vértice de grafo fracamente cordal que não faz parte de $C_3$ . . . . .	116
6.18	Vértice $v$ de um grafo linha com grau 5 . . . . .	120
6.19	Função do máximo de $ N_2(v) $ em um grafo linha . . . . .	121
6.20	Quando $\Delta = 3$ , $v$ têm no máximo 4 vértices à distância 2 . . . . .	121
6.21	Grafo <i>split</i> $G$ e grafo <i>split</i> condensado $G'$ . . . . .	124
6.22	Possíveis formatos dos gráficos da função $f$ . . . . .	127
6.23	Verificação que $0 \leq 0.115\Delta^{1.5} - \Delta^{0.5} + 2$ . . . . .	128
6.24	Verificação que $0 \leq \Delta^2 - 0.385\Delta^{1.5} - \Delta^{0.5} - 2\Delta + 2$ . . . . .	129
6.25	Modelo de interseção de um grafo de permutação . . . . .	132
6.26	Modelo de interseção de um grafo de permutação . . . . .	133
6.27	Contradição em grafo de permutação e diâmetro 2 . . . . .	133
6.28	Modelos de interseção de grafo de permutação e diâmetro 2 . . . . .	134
6.29	Obtenção do $\Delta$ de um cografo conexo . . . . .	135
6.30	Maior subgrafo completo de um cografo . . . . .	137
6.31	Exemplo de grafo componente $p$ -cografos . . . . .	139
6.32	Grafo <i>aranha magra</i> . . . . .	140
6.33	Complementos de grafos <i>aranha magra</i> e <i>aranha gorda</i> . . . . .	141
6.34	$\lambda$ -colorações ótimas para os grafos: $P_5$ , $\overline{P_5}$ , $C_5$ e $K_1$ . . . . .	142
6.35	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos aranha magra onde $2 \leq  K'  \leq 4$ e $R' = \emptyset$ . . . . .	145
6.36	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos aranha magra onde $ K'  = 2$ e $R' \neq \emptyset$ . . . . .	146
6.37	$\lambda$ -colorações ótimas com $span  R'  + 3$ para grafos aranha magra onde $ K'  = 2$ , $R' \neq \emptyset$ e $pv(\overline{G'[R']}) = 1$ . . . . .	147
6.38	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde $2 \leq  K''  \leq 4$ e $R'' = \emptyset$ . . . . .	147
6.39	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde $ K''  = 3$ e $R'' \neq \emptyset$ . . . . .	148
6.40	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde $ K''  = 2$ , $R'' \neq \emptyset$ e $pv(\overline{G''[R'']}) = 1$ . . . . .	148

6.41	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a)	
	onde $ K''  = 2$ , $R'' \neq \emptyset$ e $pv(\overline{G''[R'']}) = 2$ . . . . .	148
6.42	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b)	
	onde $5 \leq  K''  \leq 6$ e $R'' = \emptyset$ . . . . .	149
6.43	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b)	
	onde $3 \leq  K''  \leq 5$ e $R'' \neq \emptyset$ . . . . .	149
6.44	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b)	
	onde $ K''  = 2$ , $R'' \neq \emptyset$ e $1 \leq pv(G''[R'']) \leq 2$ . . . . .	150
6.45	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b)	
	onde $ K''  = 2$ , $R'' \neq \emptyset$ e $3 \leq pv(G''[R'']) \leq 4$ . . . . .	150
6.46	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.a)	
	onde $3 \leq  K''  \leq 6$ e $R'' = \emptyset$ . . . . .	151
6.47	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.a)	
	onde $4 \leq  K''  \leq 5$ e $R'' \neq \emptyset$ . . . . .	151
6.48	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.a)	
	onde $ K''  = 3$ e $R'' \neq \emptyset$ . . . . .	152
6.49	$\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.b)	
	onde $3 \leq  K''  \leq 6$ e $R'' = \emptyset$ . . . . .	152
6.50	Caminhos disjuntos em um <i>join</i> de dois grafos . . . . .	154
6.51	Caminhos disjuntos em um grafo aranha gorda . . . . .	155
6.52	Caminhos disjuntos em um grafo aranha magra . . . . .	156
6.53	Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça	
	onde $S_2 \in S$ . . . . .	157
6.54	Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça	
	onde $K_2 \in S$ . . . . .	157
6.55	Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça	
	com $ K  \geq 2pv(R)$ e $K_2$ ou $S_2$ substituindo um vértice de $K$ . . . . .	158
6.56	Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça	
	com $ K  < 2pv(R)$ . . . . .	159
6.57	Caminhos disjuntos em um grafo quase-estrela do mar com cabeça	
	com $S_2 \in S$ . . . . .	159

6.58	Caminhos disjuntos em um grafo quase-estrela do mar com cabeça com $K_2 \in S$ . . . . .	160
6.59	Caminhos disjuntos em um grafo quase-estrela do mar com cabeça com $K_2$ ou $S_2$ substituindo um vértice de $K$ . . . . .	160
7.1	Classes em que foram obtidos novos limites superiores . . . . .	163
A.1	Verificação que $ I(S_0) $ sempre aumenta a cada iteração . . . . .	173
A.2	Absurdo em subgrafo $S_1$ com $I(S_1) = 0$ . . . . .	173
A.3	Absurdo em subgrafo $S_1$ com $I(S_1) = 1$ e $\Delta \geq 4$ . . . . .	174
A.4	Absurdo em subgrafo $S_1$ com $I(S_1) = 1$ e $\Delta = 3$ . . . . .	174



# Lista de Tabelas

3.1	Limites superiores e complexidades para classes de grafos . . . . .	58
6.1	Valores da função $f(w)$ . . . . .	127
6.2	Limites superiores novos para classes de grafos . . . . .	161

# Capítulo 1

## Introdução

Esta dissertação trata do problema da  $L(2, 1)$ -coloração, também conhecido como o problema da  $\lambda$ -coloração, que se refere a um tipo especial de coloração dos vértices de um grafo. Sua parte inicial reúne informações básicas e algoritmos já conhecidos para classes simples de grafos. Mais adiante, o enfoque é direcionado para o problema de determinar limites superiores para classes específicas de grafos, fornecendo limites já conhecidos e outros novos, desenvolvidos durante nossos estudos.

O problema da  $\lambda$ -coloração em grafos, proposto por Griggs e Yeh [28] em 1992, consiste em atribuir cores (representadas por números naturais) aos vértices de um grafo de forma que vértices adjacentes tenham cores que diferem de pelo menos duas unidades e vértices não adjacentes, mas que têm um vértice adjacente em comum, tenham cores diferentes. O objetivo é encontrar uma função de atribuição de cores que utiliza o menor intervalo de cores possível.

A motivação para este problema veio da modelagem de problemas de atribuição de frequências de redes de transmissão de rádio. Buscava-se uma forma mais realista de tratar o problema do que a até então utilizada, que consistia na coloração usual de vértices, já que esta fornecia um modelo muito simplificado, onde transmissores muito próximos operam com frequências diferentes.

Esta rede é composta por estações transmissoras e receptoras, que se localizam em uma mesma região geográfica. As estações são equipadas com antenas de mesma potência, abrangendo uma área circular e de mesmo alcance. Cada estação transmite e recebe ondas de rádio em uma frequência específica, dentro de uma faixa, estipulada pelo tipo de aplicação. Exemplos de redes de transmissão de rádio são:

redes de telefonia celular, provedores de *internet* via rádio, redes de satélites, etc.

Neste problema, existem dois objetivos principais: as informações devem ser transmitidas sem interferência e a faixa de frequência deve ser utilizada de forma eficiente, onde as faixas de frequências são representadas por número naturais.

As interferências consideradas pelo problema da  $\lambda$ -coloração são as diretas e as ocultas. No tratamento da interferência direta, é requerido que estações muito próximas tenham frequências distantes uma das outras, enquanto no tratamento de interferências ocultas, procura-se atribuir frequências de transmissões diferentes para estações próximas.

Modelando o problema de atribuição de frequências em teoria dos grafos, cada estação, transmissora e receptora, é representada por um vértice, enquanto interferências diretas entre estações são representadas por arestas. As interferências ocultas não precisam de representação adicional, pois são consideradas como vértices à distância 2 no grafo.

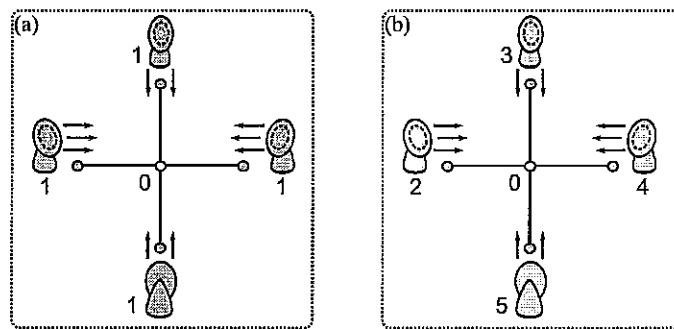


Figura 1.1: Exemplos de redes

Na figura 1.1 é apresentada uma rede hipotética de transmissão de rádio e sua modelagem em grafos. Observe em (a) que, se esta rede for modelada como um problema de coloração de grafos, o resultado não é satisfatório, já que a torre central pode receber dados de todas as outras torres com a mesma frequência, o que acarretaria em uma grande interferência na recepção desses dados. Em (b), ao modelar esta rede como um problema de  $\lambda$ -coloração, todas as torres estão à distância pelo menos 2 entre si, e pode-se supor que estão enviando dados com frequências diferentes para a torre central, o que nos permite dizer que interferências diretas e ocultas não seriam um problema para este caso.

Nossos estudos neste assunto tiveram início com o projeto final de curso de

graduação [57], feito em conjunto com o aluno Roberto Simão, sob a orientação da professora Márcia Cerioli. Naquele projeto foram abordadas as  $\lambda$ -colorações ótimas para classes simples de grafos como ciclos, completos e rodas (também presentes na parte inicial desta dissertação) e outros resultados dos artigos de Griggs e Yeh [28] e Chang e Kuo [15]. Além disso, foi feito um estudo de diversas heurísticas na escolha da ordenação dos vértices, estas sendo empregadas no método guloso e, foram fornecidas estatísticas comparando os valores encontrados por essas heurísticas em relação as ordenações que geram  $\lambda$ -colorações ótimas. Como consequência, foi fornecida uma  $\lambda$ -coloração ótima para todos os grafos com até 9 vértices.

O objetivo inicial desta dissertação foi disponibilizar os principais resultados do problema da  $\lambda$ -coloração. Mais adiante, são fornecidas provas da conjectura de Griggs e Yeh [28] para algumas classes específicas de grafos. Outros resultados estão disponíveis neste texto, como a prova de problema em aberto, deixado por Calamoneri [13], em relação ao limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos grafos *threshold* e da conjectura de Král [42] para grafos cordais (esta última só foi provada em relação aos grafos *split*). Ao fim, é descrito um método para resolver o problema da  $\lambda$ -coloração restrito a classe dos grafos  $P_4$ -tidy em tempo linear.

Estes limites são interessantes já que são amplamente estudados pela comunidade, que sempre tenta provar a conjectura de Griggs e Yeh para novas classes de grafos, como pode ser visto em: "*L(2,1)-labelling of 3-regular hamiltonian graphs*", tese de doutorado de Kang [36]; "*Labelling chordal graphs: distance two condition*", artigo de Sakai [59]; "*L(2,1)-labelling of strong products of cycles*", artigo de Korzea e Veselb [38]; e "*Approximations for  $\lambda$ -colorings*", artigo de Bodlaender *et al.* [7]. Com o nosso trabalho foi possível provar esta conjectura para algumas classes de grafos.

## 1.1 Pequeno histórico

Vários pesquisadores trabalharam nesta área tentando desenvolver novos métodos de modelagem que incluíam detalhes até então ignorados. Em 1980, Hale [29] apresentou o problema da  $T$ -coloração onde, dado um conjunto fixo  $T$  de restrições, transmissores próximos não podem transmitir com diferença de

frequências nesse conjunto. Alguns anos depois Roberts [58] iniciou um estudo de uma generalização do problema da  $T$ -coloração, onde transmissores muito próximos devem receber frequências que diferem ao menos de um intervalo fixo, de tamanho grande, e transmissores apenas próximos devem ter frequências com diferença ao menos de um intervalo fixo, de tamanho pequeno.

Já em 1992, Griggs e Yeh [28], que trabalharam com Roberts, publicaram o trabalho pioneiro sobre o problema tratado nesta dissertação. Neste artigo a modelagem de Roberts foi feita utilizando teoria dos grafos, com um estudo de classes específicas de grafos que geravam tipos de redes de transmissão com características especiais. Também foi provado que o problema para grafos em geral é  $\mathcal{NP}$ -completo e apresentado o primeiro limite superior para o menor intervalo contínuo de frequências em que existe função que respeita uma  $\lambda$ -coloração para todo grafo. Além disso, duas conjecturas foram enunciadas: uma no limite superior da maior frequência necessária em um intervalo contínuo de frequências e a outra na complexidade de decidir esta maior frequência no caso específico das árvores. A primeira, que ficou conhecida como conjectura de Griggs e Yeh, está em aberto até hoje e é o problema mais estudado relativo ao problema da  $\lambda$ -coloração.

Em 1994, Sakai [59], que pertencia ao mesmo grupo de Roberts, Griggs e Yeh, começou os estudos deste problema se concentrando em classes específicas de grafos, tratando o problema restrito as classe dos grafos cordais, provando a conjectura de Griggs e Yeh para os mesmos.

Em seguida, em 1996, Chang e Kuo [15], que também pertenciam ao mesmo grupo, mostraram uma solução eficiente para encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima para árvores e para cografos, além de desenvolver um novo limite superior para grafos em geral melhor do que o de Griggs e Yeh. Na prova deste limite, em vez de considerar o pior caso utilizando uma estratégia gulosa de atribuição de cores aos vértices, foi desenvolvido um método específico de escolha na ordenação dos vértices.

Outros pesquisadores que têm grande importância no estudo deste problema são Král e Skrekovski [44], que provaram, em 2003, um limite superior melhor do que o de Chang e Kuo, tendo depois Gonçalves [26], em 2006, feito uma nova análise desta prova fornecendo o melhor limite conhecido até hoje. E, Kratochvíl *et al.* [39], que em 2007, desenvolveram um algoritmo exponencial para verificar se um grafo tem

uma  $\lambda$ -coloração com um intervalo de frequências fixo. Em 2009 trabalhos como o de Araki [1] para  $\lambda$ -coloração de grafos bipartido permutação e *chain* e o de Hasunuma *et al.* [32] para as árvores só reforçam o interesse do estudo deste problema.

Em 2006, Calamoneri [10] fez um estudo extensivo do problema, desenvolvendo um *survey*, que tem sua versão atualizada em [9]. Além disso, ela também trabalhou no problema de encontrar limites superiores para diversas classes de grafos.

## 1.2 Escopo

Neste trabalho são abordados inicialmente todas as informações necessárias para o bom entendimento das provas desenvolvidas nesta dissertação.

A seguir são fornecidos algoritmos lineares para encontrar  $\lambda$ -colorações ótimas nas classes das árvores, cografos, *chain*, entre outros, e métodos para obtenção de  $\lambda$ -colorações para grafos em geral e seus limites superiores. Além disso, são apresentados algoritmos exponenciais para a solução exata do problema da  $\lambda$ -coloração.

Mais adiante, são fornecidas provas de limites superiores para as classes dos grafos bipartidos cordais, fracamente cordais, linha, quase-linha, *split*, permutação, cografos e componente  $p$ -cografos desenvolvidas neste trabalho. Em seguida, é apresentado algoritmo linear para encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para os grafos  $P_4$ -tidy e, método para encontrar uma  $\lambda$ -coloração para grafos nesta classe utilizando este *span*.

Vale ressaltar que foi feito um esforço para o texto ser sucinto, onde os teoremas fossem expostos de forma clara. Para tal, provas de terceiros sofreram alterações, adequando-as ao resto desta dissertação. Todas as provas que constam neste texto feitas por terceiros se encontram aqui por facilitarem o entendimento do problema ou serem necessárias para o desenvolvimento de novos resultados. E, no decorrer do texto, quando existir o símbolo (\*), este representa que a prova foi resultado obtido pelo autor durante seu mestrado.

Este texto é indicado para pessoas que queiram ter um primeiro contato com o problema da  $\lambda$ -coloração ou que busquem um estudo mais avançado sobre o assunto. Além disso, é interessante para pesquisadores que trabalhem com colorações de grafos ou suas variantes. E, como são abordados vários temas relacionados a classes

específicas de grafos, pode ser interessante para todos que utilizem teoria dos grafos em suas pesquisas.

Embora o trabalho contenha todas as informações necessárias para o seu entendimento, é recomendável que o leitor tenha algum conhecimento prévio de teoria dos grafos, principalmente sobre o problema da coloração de vértices em grafos.

### 1.3 Descrição dos capítulos

No decorrer deste capítulo são fornecidas definições básicas em teoria dos grafos. Outras definições, que só foram utilizadas durante algum ponto específico da dissertação, foram feitas apenas onde são necessárias.

No capítulo 2 estão disponíveis descrições formais do problema da  $\lambda$ -coloração e de algumas de suas variantes. Mais adiante, são apresentados alguns resultados para classes simples de grafos e é feita uma análise das  $\lambda$ -colorações, sendo fornecidos suas características básicas. Ao fim, são apresentadas provas de que o problema é  $\mathcal{NP}$ -completo.

O capítulo 3 é dedicado a detalhar resultados do problema já apresentados pela comunidade para tratar o limite superior da maior cor utilizada em qualquer  $\lambda$ -coloração de grafos, entre eles os resultados de Griggs e Yeh [28], Chang e Kuo [15], Král e Skrekovski [44], e Gonçalves [26]. Estes resultados são utilizados para elaboração de novas provas durante essa dissertação.

A seguir, no capítulo 4, são descritos os algoritmos lineares conhecidos que encontram o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas em classes de grafos. Estes algoritmos foram desenvolvidos para as classes das árvores (Hasunuma *et al.* [31]), cografos (Chang e Kuo [15]), *chain* (Araki [1]), grades regulares (Calamoneri e Petreschi [9]) e  $p$ -quase árvores (Fiala, Golavach e Kratochvíl [21]).

Já no capítulo 5, estão presentes algoritmos exponenciais que tratam o problema da  $\lambda$ -coloração. Inicialmente é descrita a abordagem gulosa de atribuição de cores deste problema. A seguir, são apresentados os algoritmos de Kratochvíl *et al.* [39]. para verificar se um grafo tem uma  $\lambda$ -coloração utilizando um intervalo de frequências com tamanho fixo, sendo feita uma melhor análise de sua complexidade. Mais adiante, é apresentada uma variação do algoritmo de Zykov [66], que encontra

o número de colorações de um grafo que utilizem  $k$  cores, para o problema da  $\lambda$ -coloração. Além disso, é apresentado o algoritmo de Král [43] para encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima e o número dessas  $\lambda$ -colorações.

Os resultados obtidos durante a elaboração desta dissertação se encontram no capítulo 6. São fornecidos limites superiores para diversas classes de grafos, entre elas os grafos bipartidos cordais, fracamente cordais, cografos, *split*, permutação e linha. Além disso, é apresentado um algoritmo linear para determinar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para os grafos  $P_4$ -tidy e um método para encontrar uma  $\lambda$ -coloração com este *span* para grafos desta classe.

Neste trabalho existem figuras coloridas. Estas só foram disponibilizadas desta maneira para facilitar a visualização do leitor. Em nenhum momento as cores das figuras são necessárias para o entendimento das provas e estas podem ser impressas em preto e branco sem alterar o seu conteúdo.

## 1.4 Conceitos da teoria dos grafos

Nesta seção são apresentadas definições básicas e notações necessárias para o bom entendimento deste texto. Um livro que contém os principais conteúdos aqui apresentados é [61].

### 1.4.1 Grafos: definições e notações

**Definição 1.1** Um *grafo* é um par ordenado de conjuntos em que o primeiro é um conjunto finito e não-vazio e o segundo é um conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos do primeiro.

**Notação 1.1** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. O conjunto  $V$  (do inglês, *vertex*) é chamado de *conjunto dos vértices* e o conjunto  $E$  (do inglês, *edge*) de *conjunto das arestas* de  $G$ . Utiliza-se  $V(G)$  e  $E(G)$  para denotar, respectivamente, o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de  $G$ .

Grafos são usualmente dados por representações gráficas. Na figura 1.2 é ilustrada uma representação gráfica de:



$$G = (\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{ab, bc, cd, be, ce, ag, dg, eg, fg\}).$$

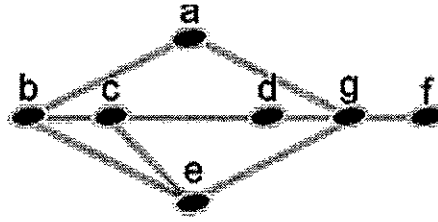


Figura 1.2: Representação gráfica

**Definição 1.2** Dois grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* se existe uma função  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  que preserva as adjacências, ou seja,  $uv \in E(G)$  se e somente se  $f(u)f(v) \in E(H)$ .

**Notação 1.2** Para as definições a seguir, e para o resto deste texto, considere um grafo como  $G = (V, E)$ , onde  $|V(G)| = n$  e  $|E(G)| = m$ .

**Definição 1.3** O *tamanho* de um grafo  $G$  é dado por  $n + m$ .

**Definição 1.4** Quando  $uv \in E(G)$ , diz-se que:  $u$  e  $v$  são *adjacentes* ou *vizinhos*; que a aresta  $uv$  é *incidente* a  $u$  e a  $v$ ; e que  $u$  e  $v$  são *extremos* de  $uv$ .

**Definição 1.5** O conjunto dos vértices que são adjacentes a um vértice  $v$  é chamado de *vizinhança* de  $v$ .

**Definição 1.6** O *grau* de um vértice  $v$  é o número de arestas incidentes a ele, e é denotado por  $g(v)$ . O grau de um vértice também é dado pela cardinalidade de sua vizinhança.

**Notação 1.3** Denota-se por  $\Delta(G)$ , ou  $\Delta$  quando  $G$  for subentendido, o maior grau de  $G$ , ou seja,  $\Delta(G) = \max\{g(v) \mid v \in V(G)\}$ .

**Definição 1.7** Um grafo  $G$  é *r-regular* se todos seus vértices têm grau igual a  $r$ .

**Definição 1.8** Um vértice de grau  $n - 1$  é chamado *universal*.

**Definição 1.9** Um *caminho* entre dois vértices  $u, v \in V(G)$  é uma sequência  $(u, \dots, v)$  de vértices distintos que começa em  $u$  e termina em  $v$ , tal que quando  $u'$  é um vértice sucessivo a  $v'$  na sequência,  $u'v' \in E(G)$ .

**Notação 1.4** Em um caminho  $(u, \dots, v)$ ,  $u$  e  $v$  são chamados de *extremos* do caminho.

**Definição 1.10** O *tamanho* de um caminho  $(v_1, \dots, v_q)$  é  $q - 1$ .

**Definição 1.11** Um *ciclo* é uma sequência de vértices  $(v_1, \dots, v_q)$ , onde  $q \geq 3$ ,  $(v_1, \dots, v_q)$  é um caminho e existe aresta  $v_1v_q$ .

**Definição 1.12** O *tamanho* de um ciclo  $(v_1, \dots, v_q)$  é  $q$ .

**Notação 1.5** Um ciclo é *ímpar* se seu tamanho é ímpar e é *par*, caso contrário.

**Definição 1.13** A *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  é o tamanho de um menor caminho entre  $u$  e  $v$ .

**Notação 1.6** A distância entre dois vértices  $u$  e  $v$  é denotada por  $d(u, v)$ .

No grafo da figura 1.2, tem-se que  $d(a, c) = 2$ .

**Notação 1.7** O conjunto dos vértices à distância exatamente  $i$  de um vértice  $v$  é denotado por  $N_i(v)$  (do inglês *neighborhood*).

Observe que  $N_1(v)$  é a vizinhança de  $v$ . Assim,  $g(v) = |N_1(v)|$ .

**Definição 1.14** O *diâmetro* de um grafo é a maior distância entre dois vértices quaisquer do grafo.

**Definição 1.15** Um subconjunto de vértices é *k-estável* se a distância entre cada par de vértices neste conjunto é maior do que  $k$ .

**Notação 1.8** Um subconjunto de vértices é *independente* quando é 1-estável.

**Definição 1.16** Um subconjunto de arestas é um *emparelhamento* quando as arestas deste subconjunto não têm, duas-a-duas, extremos em comum.

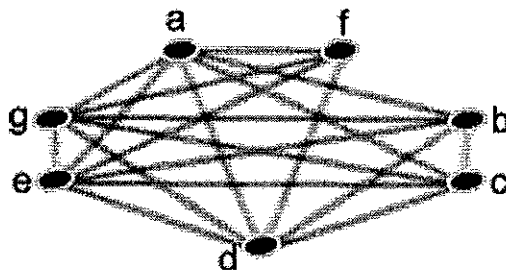


Figura 1.3:  $G^2$ , potência 2 do grafo da figura 1.2

**Definição 1.17** A *potência*  $k$  de um grafo  $G$ , com  $k$  natural, é o grafo  $G^k$  tal que  $V(G^k) = V$  e  $E(G^k) = \{uv \mid 1 \leq d(u, v) \leq k\}$ .

Desta forma,  $G^1 = G$ . O grafo potência 2  $G^2$ , do grafo  $G$  da figura 1.2, é apresentado na figura 1.3.

**Definição 1.18** O *complemento* de um grafo  $G = (V, E)$  é o grafo  $G' = (V, E')$ , onde  $E' = (V \times V) \setminus (E \cup \{vv \mid v \in V\})$ .

**Notação 1.9** Denota-se um grafo complemento de  $G$  por  $G^c$  ou  $\overline{G}$ .

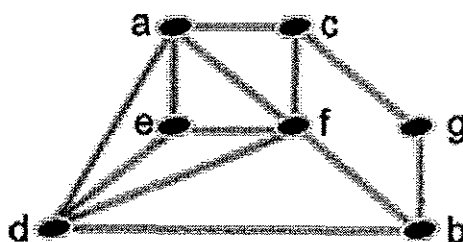


Figura 1.4: Complemento do grafo da figura 1.2

**Definição 1.19** Um grafo  $H$  é *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ .

**Notação 1.10** Denota-se por  $H \subseteq G$ , quando  $H$  é um subgrafo de  $G$ .

**Definição 1.20** Um grafo  $H$  é *subgrafo gerador* de um grafo  $G$ , se  $H \subseteq G$  e  $V(H) = V(G)$ .

**Definição 1.21** Um *subgrafo induzido* de um grafo  $G$ , por um conjunto de vértices  $S \subseteq V(G)$ , é o subgrafo de  $G$  que possui como vértices, o conjunto  $S$  e, como arestas, as arestas de  $G$  que tenham ambos os extremos em  $S$ .

**Notação 1.11** Denota-se o subgrafo induzido de  $G$  pelos vértices de  $S$  por  $G[S]$ .

**Definição 1.22** Um grafo  $H$  é *subgrafo induzido* de  $G$  se existe  $S$  tal que  $H = G[S]$ .

**Definição 1.23** A *união* de dois grafos  $H_1$  e  $H_2$ , com  $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ , é o grafo  $U$  tal que  $V(U) = V(H_1) \cup V(H_2)$  e  $E(U) = E(H_1) \cup E(H_2)$ .

**Notação 1.12** Denota-se a união de dois grafos  $H_1$  e  $H_2$  por  $H_1 \cup H_2$ .

**Definição 1.24** O *join* de dois grafos  $H_1$  e  $H_2$ , com  $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$ , é o grafo  $J$  tal que  $V(J) = V(H_1) \cup V(H_2)$  e  $E(J) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \{uv \mid u \in V(H_1) \text{ e } v \in V(H_2)\}$ .

**Notação 1.13** Denota-se o *join* de dois grafos  $H_1$  e  $H_2$  por  $H_1 \wedge H_2$ .

Observe que  $(H_1 \wedge H_2)^c = H_1^c \cup H_2^c$ .

**Definição 1.25** Um grafo é *conexo* se para cada par de vértices  $u, v$  existe ao menos um caminho entre  $u$  e  $v$ . É *desconexo* se não for conexo.

**Definição 1.26** Um grafo é *k-conexo* se não existe  $S \subseteq V(G)$  com  $|S| = k$  tal que  $G[V \setminus S]$  é desconexo.

**Definição 1.27** Uma *componente conexa* de um grafo é um subgrafo induzido conexo maximal em vértices.

**Definição 1.28** Um grafo é *completo* se possui aresta entre cada par de vértices.

**Notação 1.14** Um grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

**Definição 1.29** Um grafo  $G$  é *bipartido* se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos  $X$  e  $Y$  tais que, se  $uv \in E(G)$ , então  $u \in X$  e  $v \in Y$ , ou  $u \in Y$  e  $v \in X$ .

**Notação 1.15** Denota-se um grafo bipartido  $G$  por  $G = (X, Y, E)$ .

**Definição 1.30** Um grafo é *bipartido completo* se é bipartido e possui todas as arestas possíveis entre vértices de partes diferentes.

**Notação 1.16** Um grafo bipartido completo com  $|X| = p$  e  $|Y| = q$  é denotado por  $K_{p,q}$ .

**Definição 1.31** Um grafo  $G$  é *q-partido* se  $V(G)$  pode ser particionado em  $q$  conjuntos independentes.

**Definição 1.32** Os grafos *caminhos* são grafos com  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(G) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ .

**Notação 1.17** Um grafo caminho com  $n$  vértices é denotado por  $P_n$  (do inglês *paths*).

**Definição 1.33** Os grafos *ciclos* são grafos onde  $n \geq 3$ ,  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $E(G) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$ .

**Notação 1.18** Um grafo ciclo com  $n$  vértices é denotado por  $C_n$ .

**Definição 1.34** Um grafo é *hamiltoniano* se possui um ciclo que contém todos os seus vértices.

**Definição 1.35** Um *anti-ciclo* é uma sequência de vértices  $(v_1, \dots, v_q)$ , onde  $q \geq 3$  e os vértices  $(v_1, \dots, v_q)$  induzem um grafo  $H$  em  $G^c$  tal que  $C_q H$ .

**Definição 1.36** O *tamanho* de um anti-ciclo  $(v_1, \dots, v_q)$  é  $q$ .

**Definição 1.37** Uma estrela é um grafo com um vértice universal e os outros  $n-1$  vértices têm grau 1.

**Notação 1.19** Um grafo estrela com  $n$  vértices é denotado por  $S_n$  (do inglês *stars*).

**Definição 1.38** Os grafos *rodas* são os grafos onde  $n \geq 4$ , e da forma  $C_{n-1} \wedge K_1$ .

**Notação 1.20** Um grafo roda com  $n$  vértices é denotado por  $W_n$  (do inglês *wheels*).

**Definição 1.39** Em um grafo roda, o vértice universal é chamado de *central*.

**Definição 1.40** Um grafo  $G$  é *diâmetro 2* se distância entre cada par de vértices de  $G$  é menor ou igual a 2.

**Definição 1.41** Uma *floresta* é um grafo sem ciclos.

**Definição 1.42** Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos.

**Definição 1.43** Uma árvore é *enraizada* se, junto com a árvore, for dada uma ordenação dos seus vértices  $v_1, \dots, v_n$  tal que para cada vértice  $v_j$  ( $j \neq 1$ ) existe exatamente um vértice  $v_i \in N_1(v_j)$  com  $1 \leq i < j$ . Esta também pode ser dada por uma representação gráfica na qual para cada vértice  $v_j$ , o vértice  $v_i$  que o antecede na ordenação e que é adjacente a  $v_j$  é representado acima de  $v_j$ . O vértice  $v_1$  é a *raiz* da árvore.

**Definição 1.44** Em uma árvore enraizada, o *nível* de um vértice  $v$  é a distância entre ele e a raiz da árvore.

**Definição 1.45** Em uma árvore enraizada, se  $v_i$  é o vértice adjacente a  $v_j$  que o antecede na ordenação, este é chamado de *pai* de  $v_j$ , e  $v_j$  é *filho* de  $v_i$ . Se, além disso,  $v_l$  é pai de  $v_i$ , diz-se que  $v_l$  é *avô* de  $v_j$ .

**Definição 1.46** Em uma árvore enraizada, os *descendentes* de um vértice  $v$  são os vértices que pertencem a mesma componente conexa que  $v$ , no subgrafo induzido pelos vértices que estão abaixo de  $v$  na sua representação gráfica, os *ancestrais* de  $v$  são os vértices que pertencem ao caminho entre  $v$  e a raiz da árvore.

**Definição 1.47** Um grafo é *cordal* se todos os seus ciclos induzidos (subgrafos induzidos que sejam grafos ciclos) têm tamanho igual a 3.

**Definição 1.48** Um grafo  $G$  é *split* se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos  $I$  e  $K$ , tais que  $I$  é um conjunto independente e  $K$  induz um completo.

**Notação 1.21** Denota-se os grafos *split*  $S$  por  $S = (K, I, E)$ .

**Definição 1.49**

*se os números que os representam aparecem em ordem reversa na permutação.* Dada uma permutação  $\pi = p_1, p_2, \dots, p_n$  dos números  $1, 2, \dots, n$ , o grafo

de  $\pi$  tem um vértice para cada um dos números  $1, 2, \dots, n$  e os vértices  $i$  e  $j$  são adjacentes se  $p_j$  precede  $p_i$  na permutação  $\pi$ . Um grafo é *de permutação* se existe uma permutação  $\pi$  tal que  $G$  é o grafo de  $\pi$ .

se os números que os representam aparecem em ordem reversa na permutação.

**Definição 1.50** Um grafo é *cografo* se é obtido por aplicações recursivas das regras:

- (i) Um grafo com um único vértice é um cografo;
- (ii) Se  $G$  e  $H$  são cografos, então seu *join*  $G \wedge H$  também é;
- (iii) Se  $G$  e  $H$  são cografos, então sua união  $G \cup H$  também é.

Uma definição alternativa para cografos são a de grafos que não possuem  $P_4$  induzidos (subgrafos induzidos que sejam caminhos de tamanho 4).

**Definição 1.51** Uma *clique* é um subgrafo completo maximal em vértices de um grafo.

**Notação 1.22** Denota-se a cardinalidade da maior clique de um grafo por  $\omega(G)$ .

**Definição 1.52** Uma classe de grafos é *hereditária* se qualquer subgrafo induzido de um grafo nesta classe também pertence a esta classe.

**Definição 1.53** Um *digrafo* é um par ordenado de conjuntos em que o primeiro é um conjunto finito e não-vazio e o segundo é um conjunto de pares ordenados de elementos do primeiro.

**Definição 1.54** As arestas de um digrafo são chamadas de *arcos*. Um *loop* em um digrafo é um arco  $vv$ .

**Definição 1.55** Um *torneio* é um digrafo onde existe exatamente um arco entre cada par de vértices distintos.

## 1.4.2 Algoritmos: definições e notações

**Definição 1.56** Uma busca é dita em *largura* quando o critério de escolha de vértice for, dentre todos os já visitados e incidentes a uma aresta ainda não visitada, escolher aquele menos recentemente alcançado pela busca.

**Notação 1.23** Uma busca em largura gera um subgrafo gerador do grafo que é uma árvore, denota-se este subgrafo por *árvore de largura*.

**Notação 1.24** Em uma árvore de largura só podem existir arestas entre vértices do mesmo nível, chamados de *irmãos*, ou entre vértices de níveis consecutivos, chamados de *tios*.

O procedimento de uma busca em largura é ilustrado na figura 1.5. Neste caso, os vértices foram visitados na ordem alfabética.

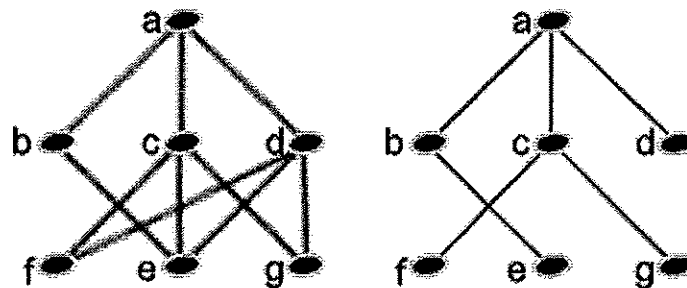


Figura 1.5: Um grafo e uma de suas árvores de largura

**Definição 1.57** Uma busca é dita em *profundidade* quando o critério de escolha de vértice for, dentre todos os já visitados e incidentes a uma aresta ainda não visitada, escolher aquele mais recentemente alcançado pela busca.

**Notação 1.25** Uma busca em profundidade gera um subgrafo gerador do grafo que é uma árvore, denota-se este subgrafo por *árvore de profundidade*.

**Definição 1.58** A *complexidade* de um algoritmo é o número de operações básicas necessárias para a sua execução.

**Definição 1.59** Um algoritmo é *linear* se este tem como complexidade o tamanho de sua entrada.

**Notação 1.26** A notação  $O$  é utilizada como um limite superior assintótico de uma função. Ou seja, se  $f(n) = O(g(n))$  então existem uma constante positiva  $c$  e um valor  $n_0$  tal que  $0 \leq f(n) \leq c g(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .

**Notação 1.27** A notação  $O^*$  é utilizada como um limite superior de uma função de forma que se  $f(n) = O^*(g(n))$  então existem um polinômio positivo  $p(n)$  e um valor  $n_0$  tal que  $0 \leq f(n) \leq p(n) g(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .



### 1.4.3 Problema da coloração

**Definição 1.60** Uma *coloração de vértices*, ou simplesmente *coloração*, de um grafo  $G = (V, E)$ , é uma função que associa a cada vértice  $v \in V$  uma *cor* em  $\{1, 2, \dots, k\}$ , de forma que se dois vértices são adjacentes no grafo, eles têm cores diferentes associadas.

**Definição 1.61** O *problema da coloração* consiste em, dado um grafo  $G$ , determinar uma coloração de  $G$  com o menor número possível de cores (pode existir mais de uma). Uma tal coloração é denominada *ótima*.

**Notação 1.28** O número de cores utilizadas numa coloração ótima é denominado *número cromático* de  $G$  e denotado por  $\chi(G)$ .

Um exemplo de coloração ótima do grafo da figura 1.2 é dado na figura 1.6.

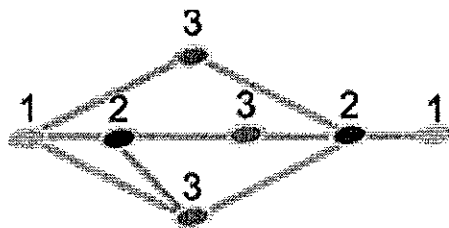


Figura 1.6: Coloração ótima do grafo da figura 1.2

**Definição 1.62** Um grafo  $G$  é *perfeito* se, para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$ ,  $\chi(H) = \omega(H)$ .

O problema da coloração de grafos já foi amplamente estudado, e sua versão decisão consta na lista clássica de problemas provados serem  $\mathcal{NP}$ -completos por Karp [37].

Para classes específicas de grafos, no entanto, o problema pode ter solução computacional eficiente. Por exemplo, para os grafos completos  $K_n$ , é trivial que  $\chi(K_n) = n$ , uma vez que cada vértice é adjacente a todos os outros, e precisa-se atribuir cores diferentes a todos. Para grafos  $H$  em que  $E(H) = \emptyset$ ,  $\chi(H) = 1$ , pois os vértices de  $H$  não são adjacentes dois a dois e podem receber a mesma cor.

O conhecido teorema de Brooks, que pode ser visto em [30], é utilizado em diversos momentos nas provas deste texto, e é enunciado a seguir.

**Teorema 1.1** cf. (Harary [30] - 1969) *Para um grafo  $G$  conexo que não é um completo e nem um ciclo ímpar,  $\chi(G) \leq \Delta$ .*

Existem outras variantes do problema da coloração, como o da coloração total e o da coloração de arestas, que também são amplamente estudados. Porém, ainda está em aberto a prova de um limite superior justo para a maior cor utilizada em uma coloração total de grafos, sendo este valor conjecturado por Behzad [4], enquanto para a coloração de arestas, este valor já foi encontrado, por Vizing [63].

**Definição 1.63** Uma *coloração total* de um grafo  $G = (V, E)$  é uma função que associa a cada vértice  $v \in V$  e a cada aresta  $e \in E$  uma cor em  $\{1, 2, \dots, k\}$ , sendo necessário haver cores diferentes quando: dois vértices são adjacentes; uma aresta for incidente a um vértice; e se arestas têm um extremo em comum.

**Conjectura 1.2** (Behzad [4] - 1965) *Todo grafo tem uma coloração total utilizando no máximo  $\Delta + 2$  cores.*

**Definição 1.64** Uma *coloração de arestas* de um grafo  $G = (V, E)$  é uma função que associa a cada aresta  $e \in E$  uma cor em  $\{1, 2, \dots, k\}$  tal que arestas do grafo recebem cores diferentes se tem um extremo em comum.

**Teorema 1.3** (Vizing [63] - 1964) *Todo grafo tem uma coloração de arestas utilizando no máximo  $\Delta + 1$  cores.*

# Capítulo 2

## Problema da $\lambda$ -coloração

Neste capítulo o problema da  $L(2, 1)$ -coloração é descrito formalmente e são fornecidos seus conceitos básicos e suas variantes. Mais adiante, contém resultados do problema restrito a classes simples de grafos, como para grafos completos, ciclos, estrelas e rodas. Além disso, é apresentada a prova da sua  $\mathcal{NP}$ -completude, tanto para grafos em geral, quanto para o caso em que o *span* é fixo. Vale ressaltar, como fonte de informação, o *survey* de  $L(h, k)$ -coloração escrito por Calamoneri [10], com versão atualizada em sua *homepage* [9].

### 2.1 $L(2, 1)$ -colorações

O problema da  $L(2, 1)$ -coloração foi proposto, em 1992, por Griggs e Yeh [28]. Desde então, surgiram diversas variantes do problema, e tanto as  $L(2, 1)$ -colorações, como suas variantes, passaram a ser objeto de estudo de diversos pesquisadores.

**Definição 2.1** Uma  $L(2, 1)$ -coloração, também chamada de  $\lambda$ -coloração, de um grafo  $G$  é uma função  $f$  que associa a cada vértice de  $G$  um inteiro não negativo de forma que se dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são adjacentes, então  $|f(u) - f(v)| \geq 2$  e se dois vértices estão à distância 2, então  $f(u) \neq f(v)$ .

**Definição 2.2** O *span* de uma  $\lambda$ -coloração é a maior cor utilizada.

**Definição 2.3** Uma  $\lambda$ -coloração é *ótima* quando possui o menor *span* possível.

**Notação 2.1** O *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo  $G$  é denotado por  $\lambda(G)$ , ou simplesmente por  $\lambda$  quando  $G$  for subentendido.

**Definição 2.4** O *problema da  $\lambda$ -coloração* consiste em, dado um grafo  $G$ , encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G$  e seu *span*.

Na figura 2.1 é ilustrado um exemplo de uma  $\lambda$ -coloração ótima. É interessante notar que, diferente do problema da coloração, no problema da  $\lambda$ -coloração a menor cor utilizada é sempre 0.

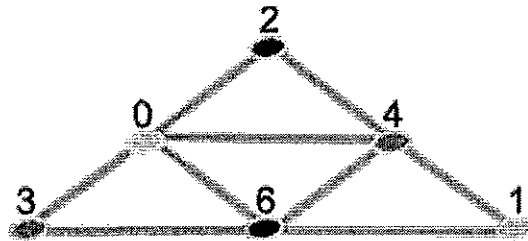


Figura 2.1:  $\lambda$ -coloração ótima

**Definição 2.5** Uma  *$k$ - $\lambda$ -coloração* é uma  $\lambda$ -coloração com *span*  $k$ .

Desta forma, a  $\lambda$ -coloração do grafo apresentada na figura 2.1 é uma 6- $\lambda$ -coloração, e é ótima com *span* 6.

Para este trabalho, a versão do problema abordada é a de minimização do *span*. Porém, outros critérios de otimalidade podem ser considerados. Por exemplo, pode-se decidir se existe ou não uma  $\lambda$ -coloração de *span*  $k$  que utiliza todas as cores, como tratado por Fishburn e Roberts [22]. Há também uma variação que estuda as  $\lambda$ -colorações balanceadas, ou seja, o objetivo é que as cores sejam utilizadas o mesmo número de vezes, problema estudado por Lih [46].

Além disso, um conceito relacionado e extremamente interessante é o da  $\lambda'$ -coloração, que foi definido por Chang e Kuo [15], e é utilizado em diversas provas nesta dissertação, como na prova de que o problema da  $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo.

**Definição 2.6** Uma  $\lambda'$ -coloração de um grafo é uma  $\lambda$ -coloração com a seguinte restrição adicional: a função  $f$  deve ser injetora, ou seja, cada cor só pode ser utilizada no máximo uma vez.

## 2.2 $L(h, k)$ -colorações

O conceito de  $L(h, k)$ -coloração, também definido por Griggs e Yeh [28], é apresentado nesta seção. Em diversos momentos, ao tratar-se da  $\lambda$ -coloração, os resultados obtidos são estendidos para essa versão mais geral.

**Definição 2.7** Uma  $L(h, k)$ -coloração de um grafo  $G$  é uma função  $f$  que associa a cada vértice de  $G$  um inteiro não negativo de forma que se dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são adjacentes, então  $|f(u) - f(v)| \geq h$  e se dois vértices estão à distância 2, então  $|f(u) - f(v)| \geq k$ .

Observe que o problema da  $\lambda$ -coloração é uma restrição do problema da  $L(h, k)$ -coloração, quando  $h = 2$  e  $k = 1$ .

**Definição 2.8** De maneira análoga ao caso da  $\lambda$ -coloração, no problema da  $L(h, k)$ -coloração procura-se uma  $L(h, k)$ -coloração de *span* mínimo, também chamada de  $L(h, k)$ -coloração ótima.

**Notação 2.2** Denota-se o *span* de uma  $L(h, k)$ -coloração ótima de  $G$  por  $\lambda_{h,k}(G)$ .

Na figura 2.2 é ilustrado um exemplo de uma  $L(3, 2)$ -coloração ótima.

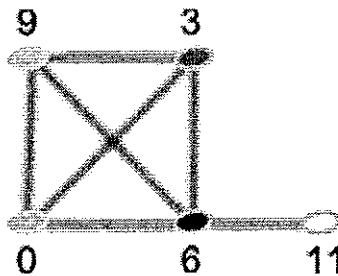


Figura 2.2:  $L(3, 2)$ -coloração ótima

Existem outros casos interessantes de  $L(h, k)$ -coloração. Por exemplo, se  $k = 0$ , o problema da  $L(h, 0)$ -coloração equivale ao problema da coloração ótima de  $G$  (basta o valor da cor de cada vértice ser multiplicado por  $h$ ).

Quando  $h = 0$ , o problema de encontrar uma  $L(0, k)$ -coloração ótima se reduz a encontrar uma coloração ótima do grafo  $G'$  criado a partir de  $G$  retirando-se todas as arestas que pertencem a  $G$  (neste caso, só existem arestas entre vértices à

distância 2, então basta multiplicar o valor das cores dos vértices obtido por uma coloração de  $G'$  por  $k$ ). Esta versão do problema foi estudada por Makansi [49], Bertossi and Bonuccelli [5] e Battiti, Bertossi e Bonuccelli [3].

Quando  $h = k$  o problema da  $L(h, h)$ -coloração se reduz ao problema da coloração de  $G^2$ , pois dada uma coloração ótima de  $G^2$ , basta multiplicar por  $h$  as cores usadas para obter uma  $L(h, h)$ -coloração ótima de  $G$ . Este problema foi estudado por McCormick [51], Lin e Skiena [47] e Heggernes e Telle [34].

O problema da  $L(2k, k)$ -coloração, estudado por Griggs e Yeh [28], é também chamado problema da  $L_k(2, 1)$ -colorações. Eles mostraram que basta considerar o caso em que  $k = 1$ , pois quando  $k > 1$ , pode-se reduzir o problema a encontrar uma  $L_1(2, 1)$ -coloração ótima, como enunciado no Teorema ???. Em particular, denotando por  $\lambda(G, k)$  o *span* de uma  $L_k(2, 1)$ -coloração de  $G$ , tem-se que  $\lambda(G, k) = k\lambda(G)$ .

## 2.3 Exemplos de $\lambda$ -colorações ótimas

Esta seção contém resultados do problema da  $\lambda$ -colorações em classes importantes de grafos. Além de fornecerem exemplos de como  $\lambda$ -colorações ótimas podem ser obtidas estes resultados também serão utilizados posteriormente neste texto.

### 2.3.1 Grafos completos

**Teorema 2.1** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para  $n \geq 1$ ,  $\lambda(K_n) = 2n - 2$ .*

**Prova.** Como os vértices são adjacentes dois a dois, em uma  $\lambda$ -coloração, as cores entre vértices devem ter uma diferença de pelo menos dois. Atribuindo injetivamente aos vértices do completo a cor 0 e as cores pares até  $2n - 2$  consegue-se uma  $\lambda$ -coloração ótima deste grafo.  $\square$

Como grafos completos têm  $\Delta = n - 1$ , segue que  $\lambda(K_n) = 2\Delta$ .

### 2.3.2 Grafos ciclos

**Teorema 2.2** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para  $n \geq 3$ ,  $\lambda(C_n) = 4$ .*

**Prova.** Como  $C_3$  é um completo,  $\lambda(K_3) = 2(3) - 2 = 4$ . Para  $C_n$ , com  $n \geq 4$ , suponha, por absurdo, que existe uma  $\lambda$ -coloração com *span* 3. Seja  $v$  um vértice

deste ciclo. Ele é adjacente, neste ciclo, a outros dois vértices  $x$  e  $y$ . As únicas cores em  $\{0, 1, 2, 3\}$  para as quais existem outras duas cores com diferença dela de pelo menos dois são 0 e 3. Se  $v$  recebe a cor 0, um dos vértices  $x$  ou  $y$  recebe a cor 2. Seja o vértice  $z$  do ciclo adjacente ao vértice que recebeu a cor 2. O vértice  $z$  não pode receber a cor 0, pois está à distância 2 de  $v$ , e não pode receber as cores 1, 2 ou 3, pois é adjacente a um vértice que tem cor 2. Então é preciso uma outra cor para o vértice  $z$ , uma contradição (vide figura 2.3). Se  $v$  recebe a cor 3, um raciocínio análogo leva a uma contradição. Assim,  $\lambda(C_n) \geq 4$ .

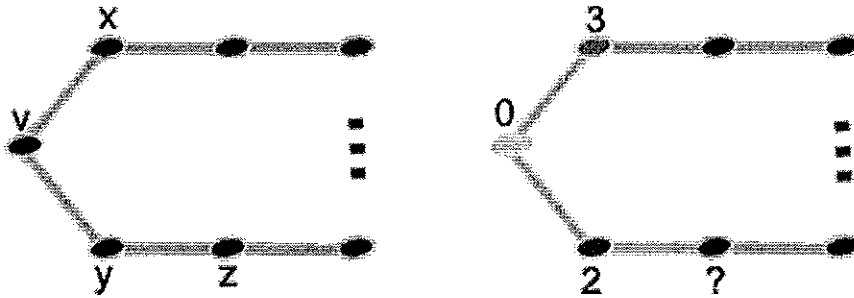


Figura 2.3: Ciclos não têm 3- $\lambda$ -coloração

Segue um método para obter uma 4- $\lambda$ -coloração de grafos  $C_n$ , com  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

**Caso (i):**  $n \equiv 0 \pmod{3}$ : Seja  $v_i$  um vértice do ciclo. Sua cor será: 0, se  $i - 1$  é congruente a 0 módulo 3; 2, se  $i - 1$  é congruente a 1 módulo 3; 4, se  $i - 1$  é congruente a 2 módulo 3.

**Caso (ii):**  $n \equiv 1 \pmod{3}$ : Colore-se os vértices do ciclo segundo o caso anterior, a menos dos vértices  $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}$  e  $v_{n-3}$ . Então  $v_{n-3}$  terá cor 0,  $v_{n-2}$  terá cor 3,  $v_{n-1}$  terá cor 1 e  $v_n$  terá cor 4.

**Caso (iii):**  $n \equiv 2 \pmod{3}$ : Colore-se os vértices do ciclo segundo o primeiro caso, a menos dos vértices  $v_n$  e  $v_{n-1}$ . Então  $v_{n-1}$  terá cor 1 e  $v_n$  terá cor 3.

Como ilustrado na figura 2.4 as atribuições de cores obtidas por este método não desrespeitam nenhuma característica para serem  $\lambda$ -colorações, já que vértices à distância 2 têm cores diferentes e vértices adjacentes sempre recebem cores com diferenças de pelo menos dois. Então,  $\lambda(C_n) \leq 4$ .  $\square$

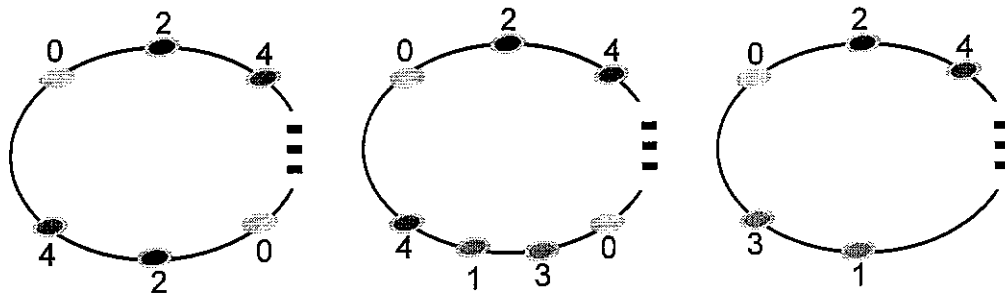


Figura 2.4: Ciclos têm uma  $4-\lambda$ -coloração

### 2.3.3 Grafos caminhos

Trivialmente,  $\lambda(P_1) = 0$ ;  $\lambda(P_2) = 2$ ;  $\lambda(P_3) = 3$ ; e  $\lambda(P_4) = 3$ . Estas  $\lambda$ -colorações ótimas são ilustradas na figura 2.5.

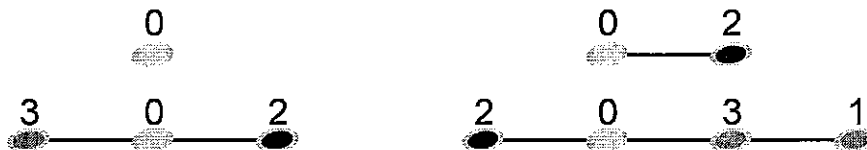


Figura 2.5:  $\lambda$ -colorações ótimas de  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$

**Teorema 2.3** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para  $n \geq 5$ ,  $\lambda(P_n) = 4$ .*

**Prova.** Pelo Teorema 2.2,  $\lambda(C_n) = 4$  e, pode-se manter a mesma atribuição de cores da  $\lambda$ -coloração do  $C_n$  no  $P_n$ . Então, para  $n \geq 3$ ,  $\lambda(P_n) \leq 4$ .

Suponha, por absurdo, que existe uma  $3-\lambda$ -coloração de um  $P_n$  com  $n \geq 5$ . Seja  $v$  um vértice do caminho que tem distância maior ou igual a 2 dos vértices de grau 1. Somente as cores 0 e 3 diferem de pelo menos dois de outras duas cores em  $\{0, 1, 2, 3\}$  e podem ser atribuídas a  $v$ . Como na prova do Teorema 2.2, em ambos os casos existirá um outro vértice no caminho que necessitará de uma cor não disponível. Ou seja,  $\lambda(P_n) \geq 4$ .  $\square$

### 2.3.4 Grafos estrelas

Trivialmente,  $\lambda(S_1) = 0$ .

**Teorema 2.4** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para  $n \geq 2$ ,  $\lambda(S_n) = n$ .*



**Prova.** Existe uma  $\lambda$ -coloração de  $S_n$  com *span*  $n$  segundo este método: vértice central recebe a cor 0; vértices de grau 1 recebem, injetivamente, as cores  $\{2, \dots, n\}$ . Ou seja,  $\lambda(S_n) \leq n$ .

Suponha, por absurdo, que  $\lambda(S_n) < n$ . Como todos os vértices de grau estão à distância no máximo 2, cada vértice recebe uma cor diferente em  $\{0, \dots, n-1\}$ . Entretanto, o vértice central recebe uma cor  $c$  e, um dos vértices de grau 1 na sua adjacência recebe cor  $c+1$  ou  $c-1$ , uma contradição com o fato de ser uma  $\lambda$ -coloração. Então  $\lambda(S_n) \geq n$ .  $\square$

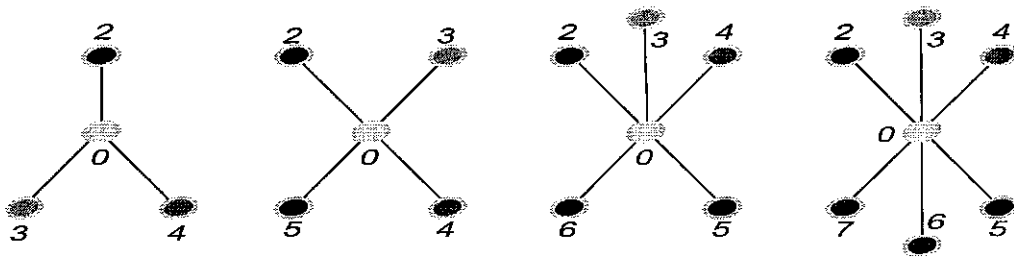


Figura 2.6:  $\lambda$ -colorações ótimas de  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$  e  $S_7$

### 2.3.5 Grafos rodas

Como  $W_4$  é grafo completo  $K_4$ , pelo Teorema 2.1, uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $W_4$  tem *span* 6.

Para  $W_5$ , pode-se evitar uma prova de verificação de casos utilizando-se um resultado mais avançado, já que este grafo é um cografo. E, sabendo que este é obtido pelo *join* do  $C_4$  e do  $K_1$ , pelo Lema 4.15,  $\lambda'(W_5) = \lambda(W_5) = \lambda'(C_4) + \lambda'(K_1) + 2 = 4 + 0 + 2 = 6$ .

**Teorema 2.5** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para  $n \geq 6$ ,  $\lambda(W_n) = n$ .*

**Prova.** Como as estrelas são subgrafos dos grafos rodas, pelo Lema 2.6,  $\lambda(W_n) \geq \lambda(S_n)$ . E, pelo Teorema 2.4,  $\lambda(S_n) = n$ . Então,  $\lambda(W_n) \geq n$ ,  $n \geq 4$ .

Segue um método para obter uma  $\lambda$ -coloração de grafos  $W_n$ ,  $n \geq 6$ . O vértice central recebe a cor 0; os vértices do ciclo externo recebem as cores atribuídas sequencialmente, a partir de um vértice qualquer, atribuindo-se primeiro as cores

pares de 2 até  $n$  (se  $n$  é par) ou até  $n - 1$  (se  $n$  é ímpar); depois as cores ímpares de 3 até  $n - 1$  (se  $n$  é par) ou até  $n$  (se  $n$  é ímpar).

Todos os vértices do ciclo externo têm cores que diferem de pelo menos dois da cor do vértice central. Os vértices do ciclo externo têm cores que diferem de pelo menos dois das cores dos vértices seguintes da mesma paridade, e os vértices adjacentes entre as paridades também têm cores com diferenças maiores que dois: o último vértice do ciclo externo que recebe cor par (como  $n \geq 6$ , esta cor é maior ou igual a 6) com o primeiro ímpar (cor 3); e o último ímpar (esta cor é maior ou igual a 5) com o primeiro par (cor 2). Além disso, todos os vértices têm cores diferentes e portanto, a restrição de distância 2 é respeitada. Ou seja, este método fornece uma  $\lambda$ -coloração com *span*  $n$  para as rodas. Logo,  $\lambda(W_n) \leq n$ .  $\square$

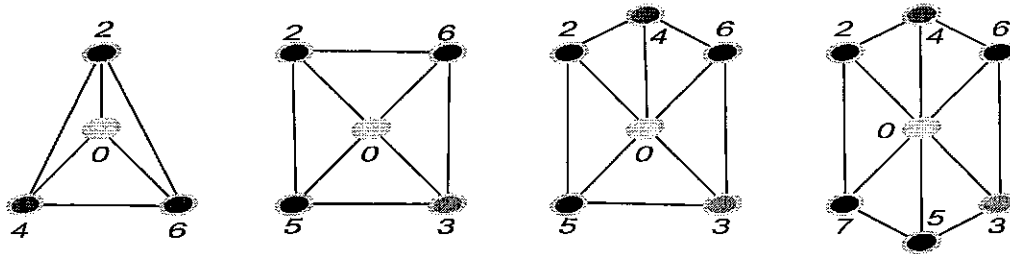


Figura 2.7:  $\lambda$ -colorações ótimas de  $W_4$ ,  $W_5$ ,  $W_6$  e  $W_7$

## 2.4 Resultados preliminares

Nesta seção são descritos, com um pouco mais de detalhes, alguns resultados que não são usualmente apresentados mas que simplificam e facilitam as provas de resultados no problema da  $\lambda$ -coloração.

### 2.4.1 Subgrafos

**Lema 2.6** *Se  $H$  é subgrafo de um grafo  $G$ , então  $\lambda(H) \leq \lambda(G)$ .*

**Prova.** Suponha, por absurdo, que  $\lambda(H) > \lambda(G)$ . Seja  $G'$  formado pelo grafo  $G$  retirando os vértices  $v$  quando  $v \in V(G)$  e  $v \notin V(H)$  e retirando as arestas  $e$  quando  $e \in E(G)$  e  $e \notin E(H)$ , obtendo  $G'$  isomorfo a  $H$ . Ao retirar vértices e arestas não é adicionada nenhuma restrição de adjacência ou de distância 2, então uma

$\lambda$ -coloração de  $G$  também será para  $G'$ . Se as cores forem atribuídas dos vértices  $G'$  para os vértices de  $H$ , respeitando o isomorfismo, esta atribuição de cores será uma  $\lambda$ -coloração para  $H$ , uma contradição, já que foi suposto que  $\lambda(H) > \lambda(G)$ .  $\square$

### 2.4.2 Coloração ótima

**Lema 2.7** *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \geq \chi(G^2) - 1$ .*

**Prova.** Em uma  $L(1,1)$ -coloração ótima de um grafo  $G$ , se  $uv \in E(G)$ , ou  $d(u, v) = 2$ , então  $u$  e  $v$  têm cores diferentes. Uma tal atribuição de cores será uma coloração de vértices do grafo  $G^2$ . Assim,  $\chi(G^2) \leq \lambda_{1,1}(G) + 1$ . Além disso, como toda  $L(2,1)$ -coloração é uma  $L(1,1)$ -coloração,  $\lambda(G) \geq \lambda_{1,1}(G)$ . Portanto,  $\lambda(G) \geq \chi(G^2) - 1$ .  $\square$

**Lema 2.8** *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq 2\chi(G^2) - 2$ .*

**Prova.** Seja  $f$  uma coloração ótima de  $G^2$ . Assim, quando  $f$  é vista como uma coloração de  $G$ , não existem vértices adjacentes ou à distância 2 com a mesma cor em  $G$ . Seja  $f'(v) = 2(f(v) - 1)$ ,  $\forall v \in V(G)$ . Em  $f'$ , como todo par de vértices adjacentes ou à distância 2 em  $G$  têm cores com diferença pelo menos dois e,  $f'$  é uma  $L(2,2)$ -coloração de  $G$  com  $span\ 2\chi(G^2) - 2$ . Como toda  $L(2,2)$ -coloração é uma  $L(2,1)$ -coloração,  $\lambda(G) \leq 2\chi(G^2) - 2$ .  $\square$

Como consequência, tem-se que:

**Teorema 2.9** *Para todo grafo  $G$ , se  $k = \chi(G^2)$ , então  $k - 1 \leq \lambda(G) \leq 2(k - 1)$ .*

### 2.4.3 Coloração gulosa

Nesta seção utiliza-se o conceito de abordagem gulosa de atribuição de cores em uma  $\lambda$ -coloração que, dada uma ordenação dos vértices do grafo, atribui-se a menor cor que não desrespeite uma  $\lambda$ -coloração aos vértices nesta ordenação. A qualquer momento desta atribuição, se for considerada a atribuição parcial de cores aos vértices anteriores na ordenação ao que está sendo atualmente tratado, para atribuir cores ao vértice atual, basta verificar a menor cor que não desrespeite uma  $\lambda$ -coloração por causa dos vértices que já tiveram suas cores previamente atribuídas.

**Definição 2.9** Seja  $G$  um grafo,  $X \subseteq V(G)$  e  $f$  uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de  $G[X]$ . O conjunto de cores proibidas para um vértice  $v$  ainda não colorido é o conjunto de todas as cores  $c - 1$ ,  $c$ ,  $c + 1$  e  $d$  em  $\{0, \dots, k\}$  tais que existe  $u \in N_1(v)$  para o qual  $f(u) = c$  e  $w \in N_2(v)$  para o qual  $f(w) = d$ .

**Notação 2.3** Denota-se o conjunto de cores proibidas para um vértice  $v$  por  $Pro(v)$ .

**Lema 2.10** Em uma  $\lambda$ -coloração de um grafo, obtida por uma abordagem gulosa, ao atribuir a cor  $c$  a um vértice  $v$ , tem-se  $c \leq |Pro(v)|$ .

**Prova.** Suponha, por absurdo, que  $v$  recebe uma cor  $c > |Pro(v)|$ . Então,  $v$  não recebe cor em  $\{0, \dots, |Pro(v)|\}$ . Porém, neste intervalo existem  $|Pro(v)| + 1$  cores, das quais apenas  $|Pro(v)|$  são proibidas. Ou seja, existe uma cor neste intervalo que  $v$  pode receber respeitando as restrições de uma  $\lambda$ -coloração, como uma abordagem gulosa foi utilizada, tem-se uma contradição.  $\square$

**Corolário 2.11** Em uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de um grafo  $G$ , obtida por uma abordagem gulosa, tem-se  $k \leq \max_{v \in V(G)} \{|Pro(v)|\}$ .

**Prova.** Pelo Lema 2.10,  $f(v) \leq |Pro(v)|$ , para  $v \in V(G)$ . Como  $k = \max_{v \in V(G)} \{f(v)\}$ , tem-se que a  $\lambda$ -coloração terá  $span$   $k \leq \max_{v \in V(G)} \{|Pro(v)|\}$ .  $\square$

#### 2.4.4 $\lambda$ -coloração ótima

**Lema 2.12** Para um grafo  $G$ , com  $\Delta \geq 1$ , existem ao menos duas  $\lambda$ -colorações ótimas.

**Prova.** Seja  $f$  uma  $\lambda$ -coloração ótima com  $span$   $k$  de  $G$ . Defina  $f'(v) = k - f(v)$ ,  $\forall v \in V(G)$ . Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices em  $G$ . A diferença  $f(u) - f(v)$  será sempre mantida em  $f'$  para  $u$  e  $v$ , pois  $f'(u) - f'(v) = (k - f(u)) - (k - f(v)) = f(v) - f(u)$ . Assim,  $f'$  é uma  $\lambda$ -coloração. Como  $k$  é a maior cor utilizada,  $k - c$ , para qualquer cor  $c$ , pertence a  $\{0, \dots, k\}$ . Portanto, se  $f$  é uma  $k$ - $\lambda$ -coloração,  $f'$  também será. Além disso,  $f'$  é ótima, pois seu  $span$  é no máximo  $k$ .  $\square$

**Lema 2.13** Em uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo  $G$  a cor 0 é sempre utilizada.

**Prova.** Suponha, por absurdo, que exista uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G$  com *span*  $k$ , onde a primeira cor utilizada  $c$  seja maior ou igual a 1. Defina  $f'(v) = f(v) - c$ ,  $\forall v \in V(G)$ . A função  $f'$  será uma  $\lambda$ -coloração de  $G$ , já que a diferença das cores entre os vértices será mantida, só que agora utilizando *span*  $k - c$ , uma contradição.  $\square$

**Lema 2.14** *Em uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo  $G$  não existem duas cores consecutivas não utilizadas.*

**Prova.** Seja  $f$  uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G$ . Suponha, por absurdo, que existam dois números consecutivos  $a$  e  $a + 1$  em  $\{0, \dots, \lambda(G)\}$  não utilizados na atribuição de cores a vértices de  $G$ . Pode-se definir uma  $\lambda$ -coloração  $f'$  de  $G$  com *span* menor do que o de  $f$ , segundo:

$$\forall v \in V(G), f'(v) = \begin{cases} f(v), & \text{se } f(v) \leq a - 1 \\ f(v) - 1, & \text{se } f(v) \geq a + 2, \end{cases}$$

uma contradição, por  $f$  ser considerada ótima.  $\square$

**Lema 2.15** *Em uma  $\lambda$ -coloração  $f$  de um grafo  $G$ , se um vértice  $v$  de grau  $\Delta$  tem cor diferente de 0 ou  $\lambda(G)$ , então  $\lambda(G) \geq \Delta + 2$ .*

**Prova.** São necessárias  $\Delta$  cores diferentes para os vértices em  $N_1(v)$  e não podem ser as cores  $f(v) - 1, f(v), f(v) + 1$ . Como a cor de  $v$  não é nem 0 nem  $\lambda(G)$ , são necessárias  $\Delta + 3$  cores diferentes só para  $v$  e seus vizinhos. Então,  $\lambda(G) \geq \Delta + 2$ .  $\square$

**Lema 2.16** *Para um grafo  $G$ , com  $\Delta = 2$ ,  $\lambda(G) \leq 4$ .*

**Prova.** Toda componente conexa de um grafo com  $\Delta = 2$  é um ciclo ou um caminho. Em ambos os casos, pelos Teoremas 2.2 e 2.3,  $\lambda(G) \leq 4$ .  $\square$

**Lema 2.17** *Os únicos grafos com *span* 3 são os grafos com componentes conexas que sejam caminhos com tamanhos menores ou iguais a 4.*

**Prova.** Pelo Teorema 2.4, se  $\lambda(G) \leq 3$ , então todo vértice tem no máximo grau 2. Como descrito no Teorema 2.2, todo ciclo tem *span* 4 então, neste grafo, as componentes conexas são caminhos que, pelo Teorema 2.3, têm tamanhos menores ou iguais a 4.  $\square$

## 2.5 $\mathcal{NP}$ -completude do problema da $\lambda$ -coloração

Esta seção contém a prova de que o problema da  $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo. Esta é feita exibindo uma transformação polinomial do conhecido problema do caminho hamiltoniano que foi provado ser  $\mathcal{NP}$ -completo por Karp [37], em 1972.

PROBLEMA  $\lambda$ -COLORAÇÃO

Instância: Grafo  $G = (V, E)$  e inteiro positivo  $k$ .

Pergunta:  $\lambda(G) \leq k$ ? (existe uma  $\lambda$ -coloração de  $G$  com  $span\ k$ ?)

**Lema 2.18 (Griggs e Yeh [28] - 1992)** *O problema da  $\lambda$ -coloração está em  $\mathcal{NP}$ .*

**Prova.** O problema da  $\lambda$ -coloração está em  $\mathcal{NP}$  já que, dada uma atribuição de cores aos vértices, é possível verificar se esta é de fato uma  $\lambda$ -coloração em  $O(n^2 + nm)$ . Basta verificar, para cada vértice  $v$ , se as cores dos vértices em  $N_1(v)$  têm diferença de pelo menos dois para a cor de  $v$ , se vértices em  $N_2(v)$  têm cores diferentes e se a maior cor utilizada foi a cor  $k$ . Isto pode ser feito utilizando-se de  $n$  buscas em largura, cada uma enraizada em um vértice de  $G$ .  $\square$

**Teorema 2.19 (Griggs e Yeh [28] - 1992)** *O grafo  $G'$  resultante do join de um grafo  $G$  com um grafo  $K_1$  tem uma  $(|V(G')|)$ - $\lambda$ -coloração se e somente se  $G$  tem um caminho hamiltoniano.*

**Prova.** Observe que, ao fazer o *join*  $G'$  do grafo  $G$  com o vértice  $v \in V(K_1)$ , todos os vértices em  $G'$  estão à distância 2 entre si e têm cores diferentes em qualquer  $\lambda$ -coloração.

( $\Rightarrow$ ) Se  $G'$  tem uma  $(|V(G')|)$ - $\lambda$ -coloração, como  $v$  é um vértice universal em  $G'$ , pelo Lema 2.15  $v$  recebe a cor 0 ou a cor  $|V(G')|$ . Sem perda de generalidade, seja  $|V(G')|$  a cor de  $v$  (senão pelo Lema 2.12 pode-se transformar esta  $(|V(G')|)$ - $\lambda$ -coloração em uma em que  $v$  receba a cor 0 em vez da cor  $|V(G')|$  mantendo o mesmo  $span$ ). A cor  $|V(G')| - 1$  não é utilizada por nenhum vértice em  $G'$  (já que um vértice com a cor  $|V(G')|$  é universal). Assim, tem-se que os vértices de  $G$  recebem injetivamente as cores em  $\{0, \dots, |V(G')| - 2 = |V(G)| - 1\}$  nesta atribuição de cores. Seja  $v_0, v_1, \dots, v_{|V(G)|-1}$  a sequência dos vértices de  $G$  em que o vértice  $v_i$

recebe a cor  $i$ . Como  $v_i v_{i+1} \notin E(G)$  (já que dois vértices com cores consecutivas não são adjacentes),  $v_i v_{i+1} \in E(G^c)$ . Ou seja, existe um caminho hamiltoniano em  $G^c$  dado pela sequência de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_{|V(G)|-1}$ .

( $\Leftarrow$ ) Se existe um caminho hamiltoniano  $v_1, v_2, \dots, v_n$  em  $G^c$ , em  $G = (G^c)^c$ , não existem arestas entre vértices consecutivos dessa sequência. Seja  $G'$  o grafo formado pelo *join* de  $G$  e um vértice  $v$ . Atribua as cores da seguinte forma:  $v$  recebe a cor 0 e; os vértices em  $v_1, v_2, \dots, v_n$  recebem as cores nesta ordem utilizando uma abordagem gulosa e respeitando as restrições de uma  $\lambda$ -coloração  $f$ . Como todo vértice está à distância 2 dos outros por causa do vértice universal  $v$ , todos recebem cores diferentes e, como não existe aresta entre vértices consecutivos, estes recebem cores consecutivas tais que  $f(v_i) = i + 1$ . Neste processo, a maior cor utilizada é a cor  $n + 1 = |V(G)| + 1 = |V(G')|$ .  $\square$

**Teorema 2.20 (Griggs e Yeh [28] - 1992)** *O problema da  $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** A prova que este problema é  $\mathcal{NP}$ -completo, como ilustrada na figura 2.8, é feita utilizando o Teorema 2.19, onde existe uma transformação polinomial (achar o complemento de um grafo pode ser obtido em  $O(n^2)$ ) do problema de encontrar um caminho hamiltoniano em um grafo  $G^c$  no problema de verificar se existe uma  $|V(G')|$ - $\lambda$ -coloração do grafo  $G'$ , obtido pelo *join* do grafo  $G$  com um vértice  $v$ .

Como o problema de encontrar um caminho hamiltoniano em um grafo é  $\mathcal{NP}$ -completo, prova feita em 1972 por Karp [37], e existe uma transformação polinomial do problema de encontrar um caminho hamiltoniano para uma redução do problema da  $\lambda$ -coloração, onde só são verificados grafos  $G$  que tenham vértices universais com  $\lambda$ -coloração de *span*  $|V(G)|$ , então esta redução do problema da  $\lambda$ -coloração já é  $\mathcal{NP}$ -difícil. Ou seja, se for feito um algoritmo para identificar se os grafos com vértices universais têm  $\lambda$ -coloração de *span*  $|V(G)|$ , existe transformação polinomial deste algoritmo que resolve o problema de saber se qualquer grafo tem um caminho hamiltoniano.

Esta redução do problema da  $\lambda$ -coloração está em  $\mathcal{NP}$ , como pode ser visto no Lema 2.18.

Então, esta redução do problema da  $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo e, portanto, o problema na sua forma mais geral também é.  $\square$

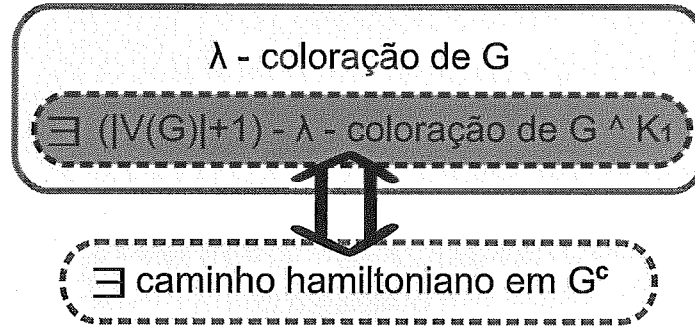


Figura 2.8: O problema da  $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo

## 2.6 $\mathcal{NP}$ -completude do problema da $k$ - $\lambda$ -coloração

Nesta seção é apresentada a prova da  $\mathcal{NP}$ -completude do problema da  $k$ - $\lambda$ -coloração, ou seja, uma  $\lambda$ -coloração com  $span$  fixo  $k \geq 4$ . Este resultado foi obtido em 2001 por Fiala, Kloks e Kratochvil [21] em 2001. A prova utiliza uma redução ao problema da  $BW(k-1)$ -coloração descrito a seguir.

PROBLEMA  $k$ - $\lambda$ -COLORAÇÃO

Instância: Grafo  $G = (V, E)$ .

Pergunta:  $\lambda(G) \leq k$ ? (existe uma  $\lambda$ -coloração de  $G$  com  $span$   $k$ ?)

Vale ressaltar que os únicos grafos com  $span$   $k \leq 3$  são os cujas componentes conexas são caminhos com até 4 vértices, e estes podem ser reconhecidos em tempo polinomial.

**Definição 2.10** Seja  $r \geq 3$ , o problema da  $BW(r)$ -coloração (do inglês, *black* e *white*) consiste em decidir a existência, em um grafo  $r$ -regular, de uma atribuição de duas cores aos vértices do grafo de modo que todo vértice tenha exatamente 2 vizinhos com a sua cor e, conseqüentemente,  $r-2$  vizinhos com a outra cor.

Um exemplo de uma  $BW(3)$ -coloração do grafo de Petersen é dada na parte esquerda da figura 2.9.



**Teorema 2.21** (Kratochvíl *et al.* [40] - 1997) *O problema da  $BW(r)$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo, para  $r \geq 3$ .*

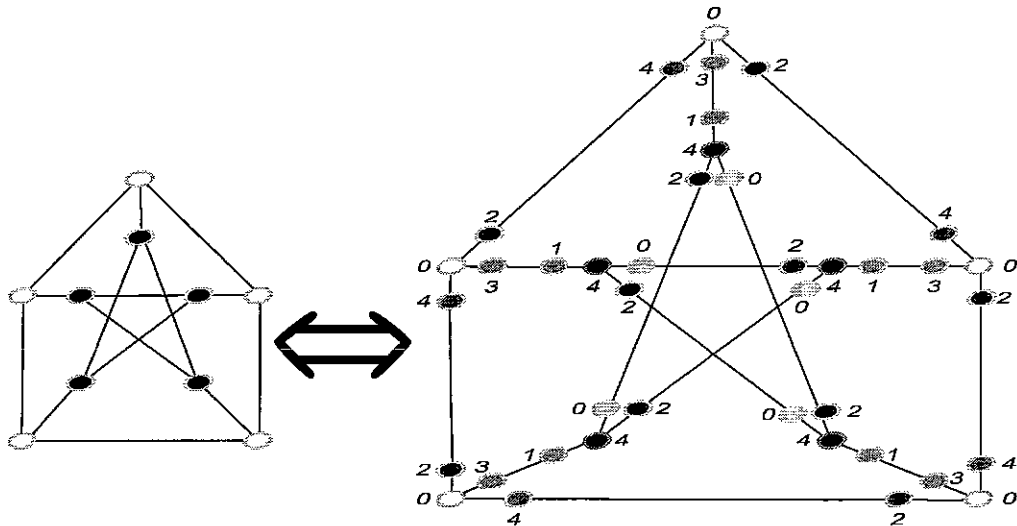


Figura 2.9: Equivalência entre  $BW(3)$ -coloração e  $4$ - $\lambda$ -coloração

**Lema 2.22** (Fiala *et al.* [21] - 2001) *O problema da  $4$ - $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** Esta prova é feita mostrando uma transformação polinomial a partir do problema da  $BW(3)$ -coloração. Além disso, o problema da  $\lambda$ -coloração está em  $\mathcal{NP}$ , como descrito no Lema 2.18.

Sejam  $G$  um grafo 3-regular e  $G''$  o grafo obtido a partir de  $G$  pela subdivisão de cada aresta de  $G$  por dois vértices. Portanto, cada aresta de  $G$  é substituída por um  $P_4$ , onde seus extremos são mantidos. Por exemplo, na figura 2.9 é ilustrado à direita o grafo  $G''$ , obtido a partir do grafo de Petersen. Claramente, a construção do grafo  $G''$  é polinomial.

Resta mostrar que existe uma  $\lambda$ -coloração do grafo  $G''$  com  $span$  4 se e somente se  $G$  tem uma  $BW(3)$ -coloração.

( $\Leftarrow$ ) Assuma que existe uma  $BW(3)$ -coloração de  $G$ . Particione as arestas de  $G$  em três conjuntos: (i) arestas com ambos os extremos com cor branca; (ii) ambos os extremos com cor negra; e (iii) extremos com cores diferentes.

Em  $G''$ , atribua cores aos vértices segundo a função  $f$  assim definida: se  $v \in V(G)$  recebeu a cor negra na  $BW(3)$ -coloração de  $G$ , então  $f(v) = 4$ , e se  $v$  recebeu a cor branca, então  $f(v) = 0$ .

Para atribuir cores aos vértices de  $G''$  das subdivisões das arestas de  $G$ , faça: cada  $P_4$  correspondente a uma aresta do tipo (iii) recebe as cores  $(0, 3, 1, 4)$ . Os  $P_4$  que correspondem a arestas do tipo (i) induzem uniões disjuntas de ciclos em  $G$  (já que todo vértice com cor branca é adjacente a outros dois vértices com cor branca). Para cada um desses ciclos atribua as cores  $(0, 2, 4, 0)$  sequencialmente (estes ciclos têm tamanhos múltiplos de 3, e pelo Teorema 2.2, esta atribuição de cores é uma  $\lambda$ -coloração destes ciclos). Desta forma, cada vértice com a cor 0 tem em sua vizinhança vértices com as cores 2, 3 e 4. O caso para as arestas do tipo (ii) é análogo ao do tipo (i), só que atribui-se as cores  $(4, 0, 2, 4)$  aos vértices dos ciclos induzidos. Desta forma, cada vértice com a cor 4 tem em sua vizinhança vértices com as cores 0, 1 e 2. Como dois vértices adjacentes recebem cores com diferença de pelo menos dois, e vértices a distância 2 recebem cores diferentes,  $f$  é uma  $\lambda$ -coloração de  $G''$  com  $span$  4.

( $\Rightarrow$ ) Assuma que  $G''$  tem uma  $\lambda$ -coloração com  $span$  4. Os vértices de  $G''$  que não fazem parte das subdivisões têm grau 3 e, portanto, pelo Lema 2.15, precisam receber as cores 0 ou 4. As possíveis 4- $\lambda$ -colorações de um  $P_4$  nas quais os extremos têm cores 0 ou 4 são:  $(0, 2, 4, 0)$ ;  $(0, 3, 1, 4)$ ;  $(0, 4, 2, 0)$ ;  $(4, 0, 2, 4)$ ;  $(4, 1, 3, 0)$ ; e  $(4, 2, 0, 4)$ .

Seja  $u \in V(G'')$  de grau 3 em  $G''$ , se  $u$  recebeu a cor 0, os vértices em  $N_1(u)$  em  $G''$  receberam cores em  $\{2, 3, 4\}$ , então os três caminhos que têm  $u$  como extremo têm as cores atribuídas segundo:  $(0, 2, 4, 0)$ ;  $(0, 3, 1, 4)$  e;  $(0, 4, 2, 0)$ . Isto é, dois destes caminhos têm em seus outros extremos as cores 0 e, o outro tem a cor 4. Analogamente, se  $u$  recebeu a cor 4, os três caminhos que têm este vértice como extremo receberam as cores de acordo com:  $(4, 0, 2, 4)$ ;  $(4, 1, 3, 0)$  e;  $(4, 2, 0, 4)$ . Isto é, dois dos caminhos têm em seus extremos a cor 4, enquanto que o terceiro tem a cor 0.

Portanto, se forem atribuídas a cor branca para os vértices de grau 3 de  $G$  correspondentes aos vértices de grau 3 de  $G''$  que receberam a cor 0 e a cor negra para os vértices de grau 3 que receberam a cor 4, então uma  $\lambda$ -coloração de  $G''$  com  $span$  4 nos fornece uma  $BW(3)$ -coloração para o grafo 3-regular  $G$ .  $\square$

**Lema 2.23 (Fiala et al. [21] - 2001)** *O problema da 5- $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** Sejam  $G$  um grafo 4-regular e  $G'''$  o grafo formado, a partir de  $G$ , substituindo-se todas as arestas  $e \in E(G)$  pelo subgrafo ilustrado na figura 2.10. Existem 6 possibilidades de 5- $\lambda$ -colorações destes subgrafos onde  $u$  e  $v$  recebam as cores 0 ou 5, como ilustrado na parte direita da figura 2.10. Esta construção é claramente polinomial.

Resta mostrar que  $G$  tem uma  $BW(4)$ -coloração se e somente se  $G'''$  tem uma  $\lambda$ -coloração com  $span$  5.

( $\Leftarrow$ ) Sejam  $f$  uma  $\lambda$ -coloração de  $G'''$  com  $span$  5 e,  $v \in V(G''')$  um vértice de  $G'''$  com grau 4 que recebeu a cor 0 (para o caso que  $v$  receba a cor 5 a prova é análoga). Os vértices em  $N_1(v)$  recebem as cores em  $\{2, 3, 4, 5\}$  e, conseqüentemente, os caminhos que tenham o vértice  $v$  como extremo têm as cores de acordo com:  $(0, 2, 5, 0)$ ;  $(0, 3, 1, 5)$ ;  $(0, 4, 1$  ou  $2, 5)$  e;  $(0, 5, 2, 0)$ . Isto é, dois destes caminhos têm a cor 0 como o outro extremo, e os outros dois têm a cor 5. Atribua aos vértices de  $G$  correspondentes aos vértices de  $G'''$  com grau 4 que receberam a cor 0 a cor branca, e a cor negra para os que receberam a cor 5, esta é uma  $BW(4)$ -coloração de  $G$ .

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $G$  tenha uma  $BW(4)$ -coloração. Particione as arestas de  $G$  em três conjuntos: (i) arestas com ambos os extremos com cor branca; (ii) ambos os extremos com cor negra; e (iii) extremos com cores diferentes.

Em  $G'''$ , atribua cores aos vértices segundo a função  $f$ , assim definida: se  $v \in V(G)$  recebeu a cor negra na  $BW(4)$ -coloração de  $G$ , então  $f(v) = 5$ , e se  $v$  recebeu a cor branca, então  $f(v) = 0$ .

Como no Lema 2.23, as arestas do tipo (i) induzem ciclos disjuntos e os seus vértices recebem as cores  $(0, 5, 2, 0)$ . As arestas do tipo (ii) também induzem ciclos disjuntos e os seus vértices recebem as cores  $(5, 0, 3, 5)$ . As arestas do tipo (iii) induzem um grafo bipartido 2-regular, em que as arestas podem ser particionadas em dois emparelhamentos perfeitos. Atribua aos caminhos referentes a aresta de um emparelhamento as cores  $(0, 3, 1, 5)$  e os caminhos referentes as arestas do outro emparelhamento as cores  $(0, 4, 2, 5)$ . Esta atribuição de cores é uma  $\lambda$ -coloração de  $G'''$  com  $span$  5. Isto porque não existem restrições sendo desrespeitadas pelos ciclos induzidos disjuntos e, para os emparelhamentos do grafo bipartido 2-regular, pode-se

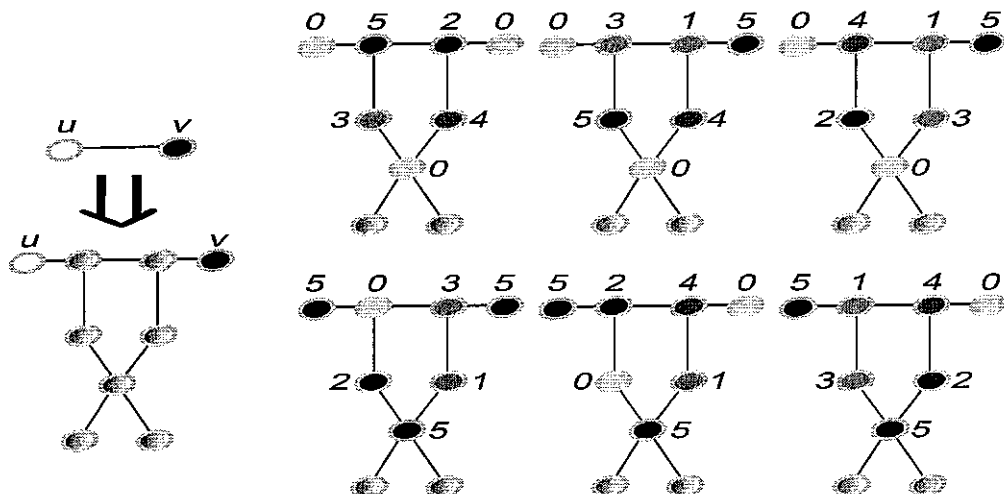


Figura 2.10: Equivalência entre  $BW(4)$ -coloração e redução do problema da existência de  $\lambda$ -coloração com  $span\ 5$

observar que as cores entre vértices com distância 2 formadas pelas "uniões" destes caminhos (que por sua vez são provenientes das arestas dos dois emparelhamentos perfeitos) têm diferença de pelo menos um, por exemplo  $(5, 2, 4, 0)$  e  $(0, 3, 1, 5)$  ou  $(0, 4, 2, 5)$  e  $(5, 1, 3, 0)$ .  $\square$

**Teorema 2.24 (Fiala *et al.* [21] - 2001)** *O problema da  $k$ - $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** A prova é feita por indução em  $k$ .

Os problemas de decidir se um grafo tem uma  $\lambda$ -coloração com  $span\ 4$ , ou  $span\ 5$ , são  $\mathcal{NP}$ -completos, pelos Lemas 2.22 e 2.23, respectivamente.

Sejam  $G$  um grafo e  $k \geq 6$ . Constrói-se um grafo  $G'$  tal que,  $G$  tem uma  $\lambda$ -coloração de  $span\ k$  se e somente se  $G'$  tem uma  $\lambda$ -coloração com  $span\ k + 2$ .

Para obter  $G'$  construa uma árvore binária completa com pelo menos  $|V(G)|$  folhas, que estão todas no mesmo nível (todo vértice nesta árvore tem 2 filhos, a menos das folhas). Crie a árvore  $T'$  duplicando todas as folhas e adicione arestas, formando um emparelhamento, entre as folhas antigas, que agora são vértices internos e os vértices duplicados. Subdivida todas as arestas da árvore  $T'$  por grafos  $P_3$ , mantendo os mesmos extremos, formando a árvore  $T''$ . Adicione arestas entre vértices folhas de  $T'$  e vértices de  $G$  injetivamente. E, adicione vértices folhas a

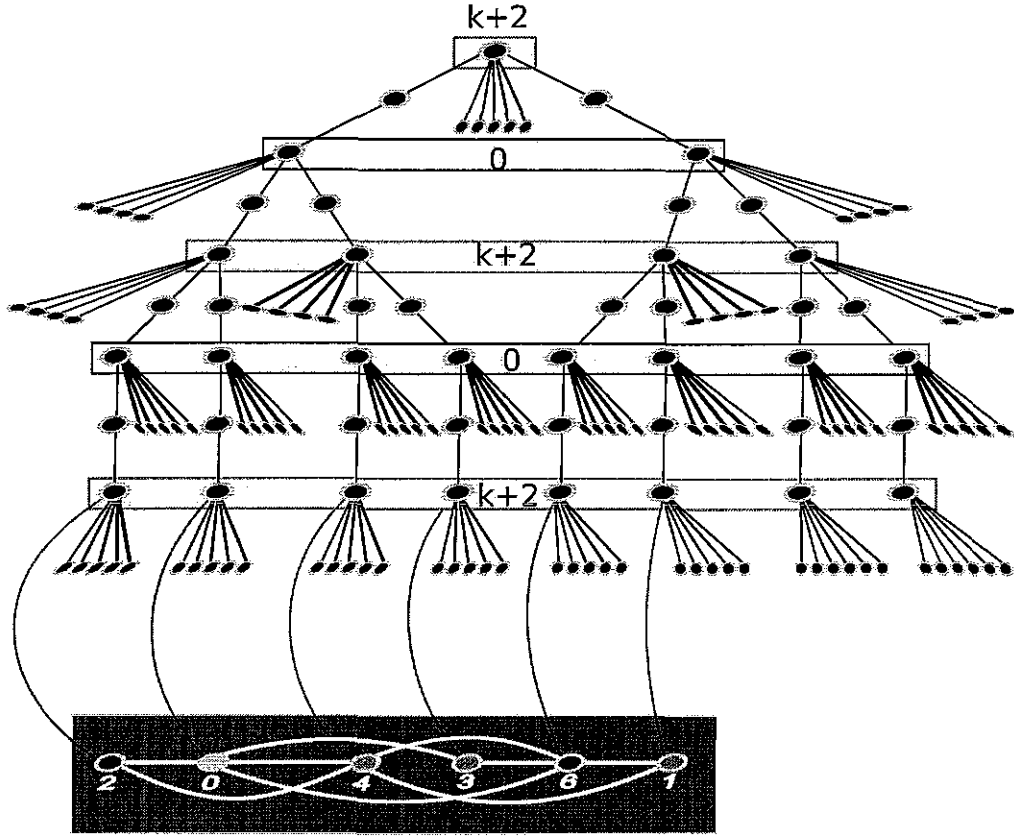


Figura 2.11: Construção do grafo  $G'$

todos os vértices de  $T'$  para que todos os vértices de  $T'$  fiquem com grau  $k+1$ , com isto a construção do grafo  $G'$  esta finalizada.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $f$  uma  $\lambda$ -coloração de  $G'$  com  $span$   $k+2$ . Como todos os vértices na árvore  $T'$  têm grau  $k+1$ , estes recebem as cores 0 ou  $k+2$  senão, pelo Lema 2.15, o  $span$  é pelo menos  $k+3$ . Além disso, todos os vértices em um mesmo nível recebem a mesma cor, senão como estes têm um ancestral em comum com grau  $\Delta$ , ao subir na árvore  $T'$  as cores dos vértices ancestrais vão se alternando e, em algum momento, existe um vértice com grau  $\Delta$  que ainda não recebeu cor à distância 2 de dois vértices com as cores 0 e  $k+2$ , o que não pode ocorrer. Sem perda de generalidade, se  $k+2$  for a cor do último nível da árvore  $T'$ , então todos os vértices de  $G$  recebem cores no intervalo  $\{0, \dots, k\}$  pela função  $f$ , que também é uma  $\lambda$ -coloração de  $G$ .

( $\Rightarrow$ ) Seja  $g$  uma  $\lambda$ -coloração de  $G$  com  $span$   $k$ . Atribua as cores aos vértices de níveis ímpares na árvore  $T'$  com as cores 0 e os níveis pares com as cores  $k+2$ . Atribua as cores dos vértices intermediários entre os níveis em  $T''$  com as cores  $\{2, 3, 4\}$ .

Os únicos vértices onde podem ocorrer algum problema são os que estejam entre o último e o penúltimo nível em  $T''$ , para estes vértices o número máximo de cores proibidas são 6, que são as cores: 0, 1,  $k + 1$ ,  $k + 2$  e mais duas cores de vértices a distância 2, uma de um vértice intermediário entre o penúltimo e o anti-penúltimo níveis e a outra cor vinda de um vértice de  $G$ . Porém, como  $k \geq 4$ , então existem pelo menos 7 cores no intervalo  $\{0, \dots, k + 2\}$  e pelo menos uma cor disponível para estes vértices. E, finalmente, são atribuída as cores das folhas, como cada vértice pai dessas folhas tem a cor 0 ou  $k + 2$ , então sempre sobra pelo menos uma cor para ser atribuída a cada folha. Portanto,  $g$  é uma  $\lambda$ -coloração de  $G'$  com  $span\ k + 2$ .

Com isto, a prova deste teorema procede. De fato, para cada  $k \geq 4$  par, como o problema é  $\mathcal{NP}$ -completo para  $k = 4$ , e existe uma classe de grafos em que determinar uma  $\lambda$ -coloração com  $span\ k \geq 6$  é equivalente a determinar se existe uma  $\lambda$ -coloração com  $span\ k - 2$  para todos os grafos, esta regra é aplicada recursivamente obtendo-se reduções sucessivas do problema tratado até chegar a  $k = 4$ , que foi provado ser  $\mathcal{NP}$ -completo. E, como foi provado que para  $k = 5$ , este problema também é  $\mathcal{NP}$ -completo para os casos em que  $k \geq 5$  é ímpar.  $\square$

A figura 2.12 ilustra estas reduções recursivas da prova do Teorema 2.21 para o caso onde  $k$  é par, onde o grafo  $G'$  é o obtido neste teorema e o grafo  $G''$  é o obtido no Lema 2.22, realizando a subdivisão das arestas do grafo 3-regular em caminhos de tamanho 3.

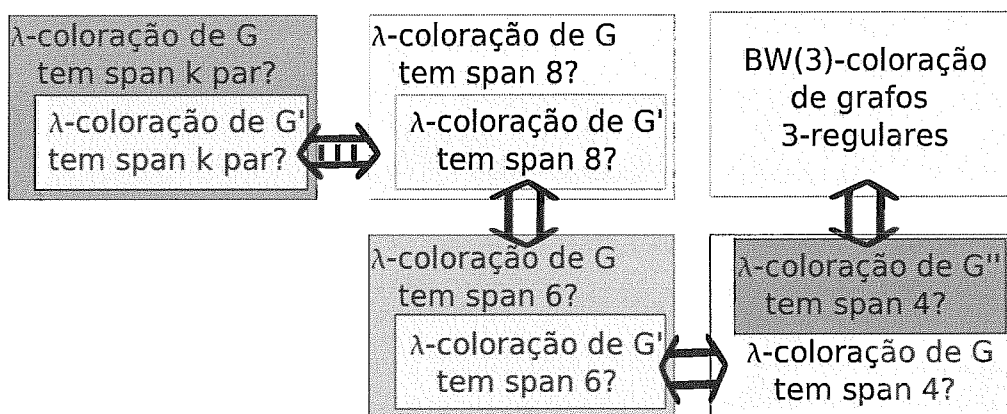


Figura 2.12: Problema de decidir se existe  $\lambda$ -coloração de um grafo com  $span\ k$  par é  $\mathcal{NP}$ -completo

# Capítulo 3

## Limites para $\lambda(G)$

Neste capítulo são apresentados limites inferiores e superiores já conhecidos para o *span* de  $\lambda$ -colorações. Na maioria dos casos, provas foram reescritas e simplificadas. Grande parte dos resultados aqui apresentados está relacionada ao principal problema em aberto no estudo das  $\lambda$ -colorações, que é a conjectura de Griggs e Yeh [28].

### 3.1 Limites de Griggs e Yeh

O trabalho pioneiro sobre  $\lambda$ -colorações é o de Griggs e Yeh[28], de 1992. Neste são apresentados vários limites superiores e inferiores para o *span* de  $\lambda$ -colorações, que são amplamente utilizados nos nossos resultados.

#### 3.1.1 Conjectura

A conjectura de Griggs e Yeh [28], de 1992 é o problema mais estudado na área. Diversos pesquisadores buscam apresentar provas de que esta conjectura é verdadeira. É importante e necessário estabelecer um limite superior justo, como já existe para o caso da coloração, dado por Brooks [8] e para o caso da coloração de arestas, dado por Vizing [63]. E, também conjecturado para o caso da coloração total, por Behzad [4]. A prova da conjectura de Griggs e Yeh será, com certeza, um marco importante nos trabalhos sobre  $\lambda$ -colorações de grafos.

**Conjectura 3.1 (Griggs e Yeh [28] - 1992)** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .*

### 3.1.2 Limites triviais

Limite inferior em função do tamanho do maior grau

**Corolário 3.2** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \geq \Delta(G) + 1$ .*

**Prova.** Pelo Lema 2.6, para um grafo  $G$  e um subgrafo  $H$  de  $G$ ,  $\lambda(G) \geq \lambda(H)$ . E, pelo Teorema 2.4,  $\lambda(S_n) = n$ .

Seja  $v \in V(G)$ , onde  $g(v) = \Delta$  e  $H$  o subgrafo de  $G$ , onde  $V(H) = \{v\} \cup N_1(v)$  e  $E(H) = \{uv \mid \forall u \in N_1(v)\}$ .  $H$  é um grafo estrela com  $\Delta + 1$  vértices. Assim,  $\lambda(G) \geq \lambda(S_{\Delta+1}) = \Delta + 1$ .  $\square$

Limite inferior em função do tamanho da maior clique

**Corolário 3.3** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \geq 2\omega(G) - 2$ .*

**Prova.** Pelo Lema 2.6, para um grafo  $G$  e um subgrafo  $H$  de  $G$ ,  $\lambda(G) \geq \lambda(H)$ . E, pelo Teorema 2.1,  $\lambda(K_n) = 2n - 2$ . Logo,  $\lambda(G) \geq \lambda(K_{\omega(G)}) = 2\omega(G) - 2$ .  $\square$

Limite superior dos em função do número de vértices

**Corolário 3.4** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq 2n - 2$ .*

**Prova.** Como  $G$  é subgrafo de  $K_n$ , pelo Lema 2.6,  $\lambda(K_n) \geq \lambda(G)$ . E, pelo Teorema 2.1,  $\lambda(K_n) = 2n - 2$ .  $\square$

### 3.1.3 Limites para classes de grafos

Limite superior para grafos  $q$ -partidos

**Teorema 3.5** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $q$ -partido  $G$ ,  $\lambda(G) \leq n + q - 2$ . Em particular, para os grafos  $q$ -partidos completos,  $\lambda(G) = n + q - 2$ .*

**Prova.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo  $q$ -partido com  $n$  vértices e  $V_1, V_2, \dots, V_q$  os seus  $q$  conjuntos independentes.



Sejam  $n_0 = 0$ ,  $n_i = |V_i|$ ,  $v_{i,j}$  o  $j$ -ésimo vértice do conjunto  $V_i$  e  $n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Uma  $\lambda$ -coloração  $f$  para o grafo  $G$  pode ser dada segundo:

$$f(v_{i,j}) = \left[ \sum_{z=0}^{i-1} n_z \right] + i + j - 2; \quad 1 \leq j \leq n_i \text{ e } 1 \leq i \leq q$$

Este método fornece uma  $\lambda$ -coloração, já que vértices do mesmo conjunto independente recebem cores diferentes e vértices de conjuntos independentes distintos recebem cores com diferença de pelo menos dois. A última cor utilizada terá  $i = q$  e  $\sum_{z=0}^{i-1} [n_z] + j = n$ . Ou seja,  $\lambda(G) \leq n + q - 2$ , para qualquer grafo  $q$ -partido  $G$ .

Este limite é utilizado pelos grafos  $q$ -partidos completos. Seja  $G$  um grafo  $q$ -bipartido completo (com todas as arestas possíveis entre os conjuntos independentes). Suponha, por absurdo, que  $\lambda(G) < n + q - 2$ . Todos os vértices do mesmo conjunto independente estão à distância 2 entre si e adjacentes aos outros vértices do grafo, então todos os vértices de  $G$  têm cores diferentes. No intervalo  $\{0, \dots, x \leq n + q - 3\}$  existem no máximo  $n + q - 2$  cores, e são necessárias:  $n$  cores, pois os vértices têm cores diferentes; e mais  $q - 1$  cores, pois não se pode utilizar cores consecutivas em vértices de conjuntos independentes diferentes. Então, existem  $n + q - 2$  cores, mas precisa-se de  $n + q - 1$ , uma contradição.  $\square$

### Limite superior para grafos com diâmetro 2

Para a prova do limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas desta classe utiliza-se o seguinte teorema de Dirac [18]:

**Teorema 3.6 (Dirac [18] - 1952)** *Se  $G$  é um grafo com  $n \geq 3$  e grau mínimo  $\delta \geq \frac{n}{2}$ , então  $G$  é hamiltoniano.*

**Teorema 3.7 (Griggs e Yeh [28] - 1992)** *Para um grafo  $G$  com diâmetro 2 e  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .*

**Prova.** Se  $\Delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , então  $n \leq 2\Delta$ . Pelo Teorema 3.5,  $\lambda(G) \leq n + q - 2$ . E, pelo teorema de Brooks (teorema 1.1), qualquer grafo diferente de ciclo ímpar ou completo tem  $q \leq \Delta$ . Então, para grafos distintos de ciclo ímpar ou completos e  $\Delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $\lambda(G) \leq 2\Delta + \Delta - 2 = 3\Delta - 2$ . Ou seja, para  $\Delta \geq 3$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ . Se  $G$  for ciclo ímpar ou completo, pelos Teoremas 2.2 e 2.1,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

Se  $\Delta(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ . No grafo  $G^c$ , complemento de  $G$ ,  $\delta(G^c) \geq \frac{n}{2}$ . E, pelo teorema de Dirac,  $G^c$  é hamiltoniano. Para cada aresta  $uv \in E(G^c)$  que faça parte do ciclo hamiltoniano,  $uv \notin E(G)$ . Se as cores no intervalo  $\{0, \dots, n-1\}$  são atribuídas aos vértices, na sequência do anti-ciclo hamiltoniano em  $G$ , este método nos fornece uma  $\lambda$ -coloração, já que não existem arestas entre vértices com cores com diferença igual a um, que são sequências no anti-ciclo hamiltoniano. Como todo vértice do grafo com diâmetro 2 está à distância 2 dos outros vértices, estes têm cores diferentes, e esta será uma  $\lambda$ -coloração ótima.  $\square$

Hoffman e Singleton [35] provaram que os únicos grafos com diâmetro 2 onde o número de vértices é igual a  $\Delta^2+1$  são o  $C_5$ , o grafo de Petersen, o grafo de Hoffman-Singleton e, possivelmente, outro grafo com  $\Delta = 57$ . Este fato é interessante porque, junto com os grafos caminhos e ciclos, esses são os únicos grafos encontrados até hoje que têm *span*  $\Delta^2$  em uma  $\lambda$ -coloração ótima. O grafo de Hoffman-Singleton é composto por 10 ciclos de tamanho 5, onde existe aresta entre vértice  $i$  do ciclo  $P_j$  com vértices  $i + jk(\text{mod } 5)$  do ciclo  $Q_k$ , um exemplo de um pedaço da construção deste grafo é dado na figura 3.1.

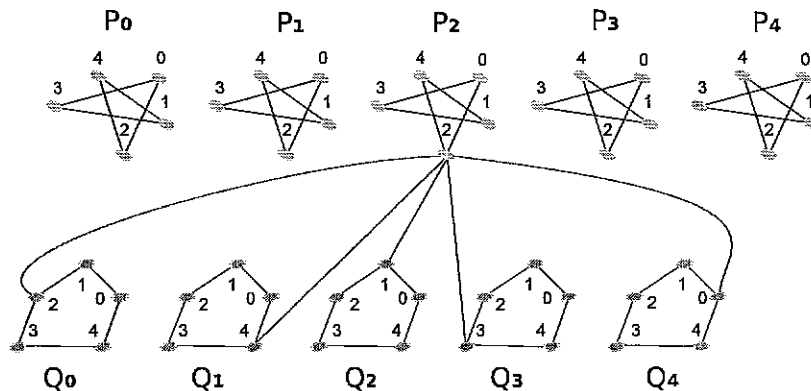


Figura 3.1: Construção do grafo de Hoffman-Singleton

### 3.1.4 Limite superior no número de vértices

Nesta seção é verificado que se um grafo tem uma quantidade de vértices  $n \leq \Delta^2$ , então a conjectura 3.1, de Griggs e Yeh [28], é verdadeira. A análise é feita em dois casos:  $\Delta \geq \frac{n}{2}$ ; ou  $2 \leq \Delta \leq \frac{n}{2}$ .

**Corolário 3.8** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq \frac{n}{2}$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .*

**Prova.** Segue do Teorema 3.7. □

**Corolário 3.9** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $G$ , com  $2 \leq \Delta \leq \frac{n}{2}$ ,  $\lambda(G) \leq n - 1$ .*

**Prova.** Se  $G$  tem  $\Delta \leq \frac{n}{2}$ , pelo Teorema 3.6, de Dirac [18],  $G^c$  é hamiltoniano e, portanto, contém um caminho hamiltoniano. Com prova análoga a do Teorema 3.7, é possível atribuir as cores do intervalo  $\{0, \dots, n - 1\}$  aos vértices em  $G$ , na ordem dos vértices no anti-ciclo hamiltoniano, mantendo uma  $\lambda$ -coloração. □

Com isso, para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$  ou  $\lambda(G) \leq n - 1$ . Este resultado limita possíveis contra-exemplos para a conjectura 3.1, de Griggs e Yeh [28], que possam ter  $\lambda(G) > \Delta^2$ , aos grafos com  $n \geq \Delta^2 + 1$ .

### Limite superior para árvores

**Teorema 3.10** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para uma árvore  $T$ ,  $\lambda(T) \leq \Delta + 2$ .*

**Prova.** Este limite superior é obtido utilizando uma estratégia gulosa na atribuição de cores aos vértices da árvore  $T$ , com  $n$  vértices. Primeiro enraíze a árvore no vértice  $v_1$  e obtenha uma ordenação  $v_1, \dots, v_{i-1}$  dos vértices de  $V(T)$ , onde para cada  $1 < i \leq n$ ,  $v_i$  é adjacente a apenas um vértice  $v_j$  em  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  com  $j < i$ .

Ao atribuir cor a um vértice  $v$  de  $T$ , utilizando esta ordenação,  $|Pro(v)| \leq \Delta + 2$ , já que  $Pro(v)$  tem, no máximo, três cores proibidas do vértice pai de  $v$  e  $\Delta - 1$  cores dos vértices irmãos, que pertencem a  $N_2(v)$ .

Então, pelo Lema 2.10, ao atribuir cor a  $v$ , este sempre pode receber uma cor no intervalo  $\{0, \dots, \Delta + 2\}$ . □

### Limite superior $\Delta^2 + 2\Delta$

**Teorema 3.11** (Griggs e Yeh [28] - 1992) *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ .*

**Prova.** Atribua cores aos vértices do grafo utilizando uma abordagem gulosa em qualquer ordenação dos vértices. O número de cores proibidas para um vértice  $v$  do grafo é no máximo três para cada vértice em  $N_1(v)$  e mais uma cor para cada vértice em  $N_2(v)$ . No pior caso,  $|N_1(v)| = \Delta$  e  $|N_2(v)| = \Delta(\Delta - 1)$ . Segue que  $|Pro(v)| \leq 3\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 + 2\Delta$ . E, pelo Corolário 2.11,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$ .  $\square$

## 3.2 Limite superior de Chang e Kuo

Chang e Kuo [15] encontraram, em 1996, um limite superior para  $\lambda(G)$ , ou o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima, melhor do que o descrito por Griggs e Yeh [28] no Teorema 3.11. Para a prova deste novo limite também foi utilizada uma abordagem gulosa de atribuição de cores. Entretanto, é realizada uma ordenação especial dos vértices. Tal ordenação fornece propriedades que permitem a prova de redução do limite superior obtido previamente.

**Teorema 3.12 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ .*

**Prova.** Considere a seguinte estratégia para atribuir cores aos vértices de  $G$ :

$i \leftarrow -1$   
 $F_i \leftarrow \emptyset$   
 $S_i \leftarrow \emptyset$   
**Enquanto** existir  $v \in V(G)$  não-colorido **faça**  
      $i \leftarrow i + 1$   
      $F_i = \{u \in V(G) \mid u \text{ não está colorido e } d(u, v) \geq 2, \forall v \in S_{i-1}\}$   
      $S_i \leftarrow$  subconjunto de  $F_i$  2-estável maximal em  $G$ .  
     **para cada**  $w \in S_i$  **faça**  
         Atribua cor  $i$  a  $w$ .

Este processo atribui cores a todos os vértices, já que enquanto existir um vértice não colorido, no pior caso, existe iteração seguinte  $j$  em que  $F_{j-1} = \emptyset$  e  $S_{j-1} = \emptyset$ , e o vértice pertence a  $S_j$ .

Seja  $k$  a última cor utilizada e  $v$  um vértice que recebe esta cor. Define-se o conjunto de cores utilizadas em vértices de  $N_1(v)$  por  $I_1$ , o conjunto de cores

utilizadas em vértices de  $(N_1(v) \cup N_2(v))$  por  $I_2$  e o conjunto de cores utilizadas em vértices de  $(V(G) \setminus (N_1(v) \cup N_2(v)))$  por  $I_3$  (ou seja, cores dos vértices com distância maior ou igual a 3 para  $v$ ).

Para todo  $i \in I_3$ ,  $i - 1 \in I_1$ . Suponha, por absurdo, que  $i \in I_3$  e  $i - 1 \notin I_1$ . Ao atribuir a última cor  $k$  ao vértice  $v$ , em uma iteração anterior  $i$  do algoritmo, vértices em  $N_1(v)$  e  $N_2(v)$  não recebem a cor  $i$ , e vértices em  $N_1(v)$  não recebem a cor  $i - 1$ . Neste caso, não existe restrição que impeça o vértice  $v$  de receber a cor  $i$ . Como  $S_i$  é maximal,  $v \in S_i$  e recebe a cor  $i$ , uma contradição, pois supõe-se que  $v$  recebe a maior cor utilizada  $k$  e não uma cor  $i$  utilizada em uma iteração anterior. Logo  $|I_3| \leq |I_1|$ .

Se houver cor  $i$  não utilizada pelo algoritmo, pode-se atribuí-la ao conjunto  $I_3$ . Isto não influi na relação entre  $I_1$  e  $I_3$ , já que para cada cor  $c$  não utilizada e que é adicionada a  $I_3$  é necessário que a cor  $c - 1$  pertença ao conjunto  $I_1$  de todos os vértices que ainda não têm sua cor atribuída. Então, para cada cor não utilizada em  $I_3$  existe uma cor  $c - 1$  em  $I_1$ , mantendo  $|I_3| \leq |I_1|$ .

Quando este algoritmo atribuir a maior cor utilizada  $k$  ao vértice  $v$ , então  $|I_2| + |I_3| = k$ . Como  $|N_1(v)| + |N_2(v)| \leq \Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2$ ,  $|I_2| \leq \Delta^2$ . E, como existem apenas  $g(v) \leq \Delta$  vértices em  $N_1(v)$ ,  $|I_1| \leq \Delta$ . Com isso,  $\lambda(G) \leq k = |I_2| + |I_3| \leq |I_2| + |I_1| \leq \Delta^2 + \Delta$ .  $\square$

### 3.3 Limite superior de Král e Skrekovski

O limite apresentado nesta seção foi encontrado por Král e Skrekovski [44], em 2003, sendo obtido por uma análise melhorada do algoritmo desenvolvido por McDiarmid [52] e parecido com o dado por Brooks para o problema da coloração de grafos, relativa ao Teorema 1.1. Este limite é de nosso interesse, sendo utilizado para obtenção de novos resultados em limite superiores desenvolvidos nesta dissertação, tais como o para a classe dos grafos linha e o para a classe dos grafos bipartidos cordais.

Além disso, o melhor limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos em geral, encontrado por Gonçalves [26], tem sua prova baseada nesta, consistindo principalmente em um aprimoramento na ordenação dos vértices. Os teoremas

descritos nesta seção sofreram alterações e reduções em relação ao original e consistem apenas da informação necessária para a prova do limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações de Král e Skrekovski. A seguir são apresentados conceitos e resultados necessários para esta prova.

**Definição 3.1** Uma *lista-coloração de canais*  $(G, w, L)$  consiste de um grafo  $G$ , uma função  $w$  que atribui inteiros positivos, chamados de pesos, as arestas do grafo  $G$  e uma lista de cores  $L(v)$  para cada vértice  $v$  de  $G$  de possíveis cores que este vértice pode receber.

**Definição 3.2** Uma *lista-coloração de canais*  $(G, w, L)$  é *própria* se existe uma função  $f$  que atribui cores aos vértices de  $G$  tal que para cada vértice  $v \in V(G)$ ,  $f(v) \in L(v)$  e para cada aresta  $uv \in E(G)$ ,  $|f(u) - f(v)| \geq w(uv)$ .

**Notação 3.1** Denota-se por  $\chi_w(G)$  o menor valor da maior cor utilizada para o qual uma *lista-coloração de canais* é própria.

**Definição 3.3** Um *grau com peso* de um vértice  $v$ , denotado por  $d_w(v)$ , é a soma dos pesos de todas as arestas incidentes a  $v$ .

**Notação 3.2** O maior grau com peso de um grafo  $G$  é denotado por  $\Delta_w(G)$ .

**Definição 3.4** Uma *lista-coloração de canais* é dita *balanceada* se  $|L(v)| \geq d_w(v)$ , para cada  $v \in V(G)$ .

**Teorema 3.13 (Král e Skrekovski [44] - 2003)** *Uma lista-coloração de canais balanceada de um grafo  $H$  é própria ou existe atribuição de cores  $f$  a todos os vértices, menos um. Se  $v_n$  for este vértice, então  $L(v_n) = \bigcup_{v_i v_n \in E(H)} \{f(v_i), \dots, f(v_i) + w(v_i v_n) - 1\}$ , onde esses intervalos de cores são disjuntos.*

**Prova.** Seja  $v_1, \dots, v_n$  uma ordenação dos vértices de  $H$  tal que para cada  $v_i$  com  $i < n$  existe um vizinho  $v_j$  de  $v_i$ , com  $j > i$ . Esta ordenação pode ser obtida através de uma busca em profundidade no grafo  $H$  começando pelo vértice  $v_n$ . Faça uma atribuição de cores aos vértices de  $G$  da seguinte forma (algoritmo descrito por McDiarmid [52]):

LCDIARMID( $H, O$ )

**Entrada:** Grafo  $H$ , função  $w : E(H) \rightarrow \mathbb{N}$ , listas de cores  $L(v)$  para todo vértice  $v \in V(H)$ , ordenação  $O = (v_1, \dots, v_n)$  dos vértices de  $H$ .

**Saída:** Uma atribuição de cores a  $V(H)$ .

$cor \leftarrow 1$

**Enquanto** existir  $v \in V(G)$  não-colorido **faça**

**para**  $i = 1$  até  $n$  **faça**

**se**  $v_i$  não está colorido e  $cor \in L(v_i)$  **então**

**para** cada  $v_j \in N_1(v_i)$  já colorido **faça**

**se**  $|f[v_j] - cor| \geq w(v_i v_j)$  **então**

$f[v_i] \leftarrow cor$

$cor \leftarrow cor + 1$

**retornar**  $f$

Utilizando este método, um vértice  $v$  não recebe uma cor  $k$  se: (i)  $v$  recebeu uma cor  $k' < k$  ou; (ii) a cor  $k$  foi atribuída a um vizinho de  $v$  que o precede na ordenação ou; (iii) uma cor  $k' < k$  é atribuída a um vizinho  $u$  de  $v$  onde  $k - k' < w(uv)$ .

Seja  $v_i$  um vértice nesta ordenação. Cada vizinho  $u$  de  $v_i$  que o precede na ordenação proíbe  $v_i$  de receber no máximo  $w(uv_i)$  cores:  $[f(u), \dots, f(u) + w(uv_i) - 1]$ . Isto porque o vértice  $u$  não proíbe as cores menores que  $f(u)$  em  $v_i$ , já que antes de  $u$  receber a cor  $f(u)$ , as cores menores que  $f(u)$  foram recusadas por  $v_i$ . Cada vizinho  $u$  que sucede  $v_i$  na ordenação proíbe  $v_i$  de receber no máximo  $w(uv_i) - 1$  cores:  $[f(u) + 1, \dots, f(u) + w(uv_i) - 1]$ . Isto porque o vértice  $u$  não proíbe a cor  $f(u)$  em  $v_i$ , já que  $v_i$  precede  $u$  na ordenação e, antes de recebe-la, esta foi recusada por  $v_i$ , como também as cores menores que  $f(u)$ .

Então, todo vértice  $v_i$  com  $i < n$  tem no máximo  $d_w(v_i) - 1$  cores proibidas, já que sempre existe pelo menos um vértice que proíbe cores em  $v_i$  que é sucessor de  $v_i$  na ordenação. E, existe cor em  $\{1, \dots, d_w(v_i)\}$  que pode ser atribuída a  $v_i$ .

O vértice  $v_n$  tem no máximo  $d_w(v_n)$  cores proibidas. Se uma das cores proibidas for repetida, então  $v_n$  pode receber uma cor em  $\{1, \dots, d_w(v_n)\}$  e a coloração é própria. Senão, todas as cores proibidas de  $v_n$ , vindas de vértices adjacentes são

diferentes. E, a lista de cores de  $v_n$  é  $L(v_n) = \bigcup_{v_i v_n \in E(H)} \{f(v_i), \dots, f(v_i) + w(v_i v_n) - 1\}$ , onde todos os intervalos  $\{f(v_i), \dots, f(v_i) + w(v_i v_n) - 1\}$  para  $v_i v_n \in E(H)$  são disjuntos.  $\square$

Na figura 3.2 é ilustrada a aplicação do algoritmo em uma árvore de profundidade, fornecida na parte esquerda da figura, onde as arestas pontilhadas são arestas de retorno, e os vértices estão rotulados como marcados pela busca em profundidade. Esta rotulação é a ordenação da entrada do algoritmo. Na parte direita da figura, está o grafo  $G^2$ , onde as arestas finas são as arestas de  $G^2$  que não estão em  $G$  e têm peso 1; as outras arestas, que são de  $G$ , têm peso 2. Na primeira etapa, o algoritmo tenta atribuir a cor 0 aos vértices utilizando a ordenação  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , e nas outras iterações, continua tentando atribuir as cores de 1 até a maior cor disponível em todas as listas, seguindo esta ordenação.

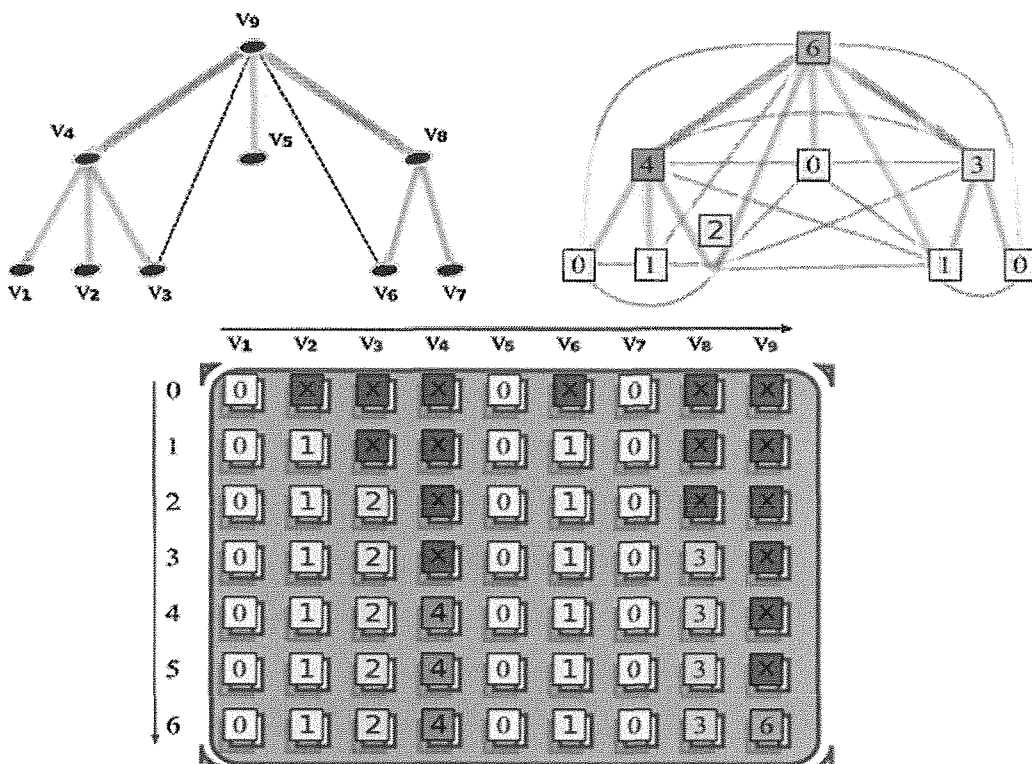


Figura 3.2: Aplicação do algoritmo de McDiarmid

**Lema 3.14 (Molloy e Reed [54] - 2002)** *Todo grafo 2-conexo  $H$  que não seja um grafo ciclo ou um grafo completo contém vértices  $x$ ,  $y$  e  $z$  tais que  $x$  e  $y$  são vizinhos de  $z$ ,  $xy \notin E(H)$  e  $H - \{x, y\}$  é conexo.*



**Prova.** Suponha, por absurdo, que não existe par de vértices  $\{x, y\}$  com distância 2 em  $H$ . Então todos os pares de vértices são adjacentes e  $H$  é um completo, uma contradição.

Se existe  $H - \{x, y\}$  conexo este é o par de vértices que queremos. Suponha, por absurdo, que  $H - \{w, z\}$  é desconexo para todo par de vértices  $\{w, z\}$  com distância 2 em  $H$ ,

Seja  $\{w, z\}$  um desses pares de vértices à distância 2 em  $H$ .  $H - \{w, z\}$  é desconexo, sejam  $H_1$  e  $H_2$  as componentes conexas formadas por  $H - \{w, z\}$ , como ilustrado na figura 3.3. Todo vértice em  $H_1$  ou em  $H_2$  tem pelo menos dois caminhos disjuntos, um até  $w$  e outro até  $z$ . Se só existe um caminho, a retirada de um vértice deste caminho torna o grafo desconexo, uma contradição com o fato do grafo ser 2-conexo, e se só existem caminhos para um dos vértices  $w$  ou  $z$ , ao eliminar este vértice o grafo se torna desconexo.

Logo, ao retirar um vértice de  $H_1$ , existe pelo menos um caminho entre os vértices de  $H_1$  e  $w$  ou  $z$ , o mesmo ocorrendo para  $H_2$ . Além disso,  $w$  e  $z$  têm adjacências tanto a vértices em  $H_1$  quanto em  $H_2$ , senão um deles só seria adjacente a uma das componentes, e ao retirar o outro, o grafo fica desconexo.

Sem perda de generalidade, sejam  $x$  o vértice adjacente a  $w$  em  $H_1$  e  $y$  o vértice adjacente a  $w$  em  $H_2$ , onde eles não sejam adjacentes a  $w$  e a  $z$ . Ao retirar  $x$  e  $y$ , continuam existindo caminhos entre todos os vértices de  $H_1$  e  $w$  ou  $z$ , e a todos os vértices de  $H_2$  e  $w$  ou  $z$ , e  $d(w, z)$  continua sendo 2, ou seja, o grafo continua conexo. Se todos os vértices  $x$  e  $y$  são adjacentes a  $w$  e a  $z$ : se  $\max\{|H_1|, |H_2|\} \geq 2$  então ao retirar  $x$  e  $y$  do grafo  $H$ ,  $d(z, w)$  continua sendo 2 e o grafo continua conexo; se ambos  $H_1$  e  $H_2$  só têm 1 vértice, então este grafo é um ciclo, uma contradição.  $\square$

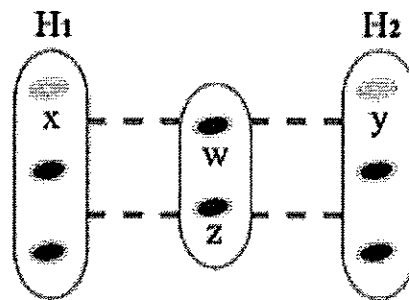


Figura 3.3: Par de vértices  $\{x, y\}$  à distância 2 em  $H$

**Lema 3.15 (Král e Skrekovski [44] - 2003)** *Em uma lista-coloração de canais balanceada, se  $G$  é 2-conexo e a menor cor  $c_1$  ou a maior cor  $c_2$ , de todas as listas de cores dos vértices, não estão contidas nas listas de todos os vértices, então a coloração é própria.*

**Prova.** Sem perda de generalidade, considere que a menor cor  $c_1$  não está presente em todas as listas (a prova para o caso em que a maior cor não está presente em todas as listas é análoga). Como  $G$  é conexo, existem vértices  $v_1$  e  $v_n$  tal que  $c_1 \in L(v_1)$  e  $c_1 \notin L(v_n)$ . Estes vértices podem ser encontrados da seguinte forma: escolha um vértice que tenha a cor  $c_1$  e faça uma busca em largura começando por este vértice, verificando a cada iteração se os vértices adjacentes têm a cor  $c_1$ , como  $c_1$  não está contida em todas as listas, em algum momento os vértices  $v_1$  e  $v_n$  serão encontrados.

Seja  $v_1, \dots, v_n$  uma ordenação dos vértices na qual  $v_i$  com  $i < n$  tem vizinho  $v_j$  com  $j > i$ . Esta ordem pode ser obtida utilizando uma busca em profundidade, aplicada no grafo  $G - \{v_1\}$ , com vértice  $v_n$  como raiz e adicionando o vértice  $v_1$  como primeiro vértice na ordenação. Se for utilizada a estratégia do Teorema 3.13, todo vértice a menos de  $v_n$  têm uma cor atribuída. Se  $v_n$  não tem uma cor atribuída, pelo Teorema 3.13, o fato da cor em  $v_1$  ser  $c_1$  e  $c_1 \notin L(v_n)$  é uma contradição.  $\square$

**Teorema 3.16 (Král e Skrekovski [44] - 2003)** *Em uma lista-coloração de canais balanceada de um grafo  $H$ , se  $H$  é 2-conexo, e não é um grafo ciclo nem um grafo completo, então esta coloração é própria.*

**Prova.**

Seja  $c_1$  a menor cor utilizada em todas as listas de cores dos vértices, e  $c_2$  a maior cor. Se  $c_1$  ou  $c_2$  não estão presentes em todas as listas de cores dos vértices então, pelo Lema 3.15, existe uma atribuição de cores própria. Sem perda de generalidade, seja  $c_1$  presente em todas as listas de cores.

Suponha, por absurdo, que  $H$  não é um grafo ciclo nem um grafo completo. Sejam  $x, y$  e  $z$  três vértices com as propriedades do Lema 3.14 e  $x, y, v_3, \dots, v_{n-1}, z$  uma ordenação dos vértices de  $H$  tal que para cada vértice  $v_i$  com  $3 \leq i < n$  existe um vizinho  $v_j$  com  $j > i$ . Uma ordenação pode ser obtida através de uma busca em profundidade aplicada ao grafo  $H - \{x, y\}$ , começando pelo vértice  $z$ . Se

for utilizada a estratégia do Teorema 3.13, todo vértice a menos de  $z$  recebe uma cor. Se  $z$  não recebe uma cor, então,  $L(z) = \bigcup_{v_i \in E(H)} \{f(v_i), \dots, f(v_i) + w(v_i, z) - 1\}$  e, pelo Teorema 3.13, os intervalos dessa união têm que ser disjuntos. Como  $f(x) = f(y) = c_1$ , os intervalos não são disjuntos, uma contradição.  $\square$

**Definição 3.5** Denota-se uma *lista- $\lambda$ -coloração de canais* de um grafo  $G$  uma *lista-coloração de canais* de  $G^2$ , onde os pesos das arestas  $e \in G$  são 2, os pesos das arestas de  $G^2$  que não estão em  $G$  são 1 e as listas de cores de cada vértice são todas as cores em um intervalo  $\{1, \dots, k + 1\}$ , onde  $k + 1$  é um número suficiente de cores.

**Teorema 3.17 (Král e Skrekovski [44] - 2003)** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ .*

**Prova.** Atribua pesos nas arestas  $uv$  em  $H = G^2$  da seguinte forma: se  $uv \in G$  então  $w(uv) = 2$ , senão  $w(uv) = 1$ . Ou seja, vértices que são adjacentes em  $G$  têm pesos nas arestas em  $H$  igual a 2, e vértices à distância 2 em  $G$  têm pesos nas arestas em  $H$  igual a 1. Ao considerar  $L(v) = \{1, \dots, k + 1\}$  ( $\forall v \in V(H)$ ), esta é uma *lista- $\lambda$ -coloração de canais* e, a única diferença entre uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de  $G$  e este tipo especial de *lista-coloração de canais* de  $H = G^2$  descrita acima é que pode-se utilizar a cor 0 na primeira. Ou seja, se todas as cores forem deslocadas em uma unidade, verifica-se que  $\lambda(G) = \chi_w(H) - 1$ .

Sabe-se que  $\Delta_w \leq 2\Delta + \Delta(\Delta - 1) = \Delta^2 + \Delta$ , já que para todo vértice  $v \in V(G)$ ,  $|N_1(v)| \leq \Delta$  e  $|N_2(v)| \leq \Delta(\Delta - 1)$ .

Se  $\chi_w(H) \leq \Delta^2 + \Delta$ , tem-se  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ . Se  $\chi_w(H) \geq \Delta^2 + \Delta + 1$ , então  $\Delta_w = \Delta^2 + \Delta$ . Como  $H$  é 2-conexo, pelo Teorema 3.16, considerando a lista de cores de todos os vértices como  $\{1, \dots, \Delta^2 + \Delta\}$ ,  $H$  é um ciclo ou um completo. Os únicos grafos em que  $H = G^2$  é um ciclo são o  $P_3$  e o  $K_3$ . Trivialmente, obtém-se  $\lambda(P_3) = 3$  e  $\lambda(K_3) = 4$  e, em ambos os casos,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ . O caso restante ocorre quando  $H$  é um completo, para isto  $G$  tem que ter diâmetro 2 e, como visto no Teorema 3.7,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ .  $\square$

### 3.4 Limite superior de Gonçalves

Nesta seção é apresentado o melhor limite superior para o *span* de uma  $\lambda$ -coloração conhecido até o momento. Ele foi obtido por Gonçalves [26], em 2005. A sua prova é feita utilizando a atribuição de cores dada por Král e Skrekovski [44], obtendo uma ordenação especial dos vértices na qual sempre existem dois vértices no subgrafo gerador que é uma árvore, de onde é obtida a ordenação dos vértices, com no máximo  $\Delta^2 + \Delta - 2$  cores proibidas e, conseqüentemente,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .

**Lema 3.18 (Gonçalves [26] - 2005)** *Todo grafo  $G$  com grau  $\Delta \geq 3$  tem:*

- (i) *um vértice com grau menor que  $\Delta$  ou;*
- (ii) *um ciclo de tamanho 3 ou;*
- (iii) *dois ciclos de tamanho 4 passando pelo mesmo vértice  $v$  ou;*
- (iv) *um vértice  $v$  adjacente a três vértices  $u$ ,  $x$  e  $y$  tal que existe ciclo de tamanho 4 passando pela aresta  $uv$  e com  $G \setminus \{x, y\}$  conexo ou;*
- (v) *um vértice  $u$  adjacente a dois vértices  $v$  e  $w$  tal que  $G \setminus X$  é conexo, onde  $X = (N_1(v) \cup N_1(u)) \setminus \{w\}$ .*

A prova deste lema encontra-se no apêndice A.

**Definição 3.6** Uma ordenação  $v_1, \dots, v_n$  dos vértices de uma árvore  $T$ , enraizada em um vértice  $r$ , é chamada de *folha-raiz* se  $v_n = r$  e para todo  $x \in \{1, \dots, n\}$ , o subgrafo de  $T$  induzido por  $\{v_x, \dots, v_1\}$  é conexo. Ou seja, se os valores dessa ordenação forem atribuídos aos vértices da  $T$ , este também pode ser visto como uma árvore de *heap*, onde o valor de um rótulo de um vértice é sempre menor do que o valor do seu pai.

**Teorema 3.19 (Gonçalves [26] - 2005)** *Para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq 3$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .*

**Prova.** Seja  $v_1, v_2, \dots, v_n$  uma ordenação dos vértices de  $G$  obtida por uma ordenação do tipo folha-raiz de uma árvore geradora  $T$  de  $G$ . Para cada vértice  $v_i$  que esteja dois ou mais níveis abaixo da raiz, tem-se  $|Pro(v_i)| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$  pois todo tal vértice  $v_i$  é adjacente em  $G^2$  com pelo menos 2 vértices que o sucedem na ordenação (o vértice pai e o vértice avô em  $T$ ), como visto na prova do Teorema 3.13,

o número máximo de cores proibidas para este vértice é reduzido em duas unidades, sendo  $\Delta^2 + \Delta - 2$ . Para os vértices vizinhos a raiz  $r$ , existem  $g(r) - 1$  vértices que na ordenação são sucedidos pela raiz  $r$  e um dos vértices vizinhos de  $r$ , sendo adjacentes a ambos em  $G^2$ . Neste momento apenas dois vértices ainda não têm possibilidade de receber cor no intervalo  $\{0, \dots, \Delta^2 + \Delta - 2\}$ , que são os vértices  $v_{n-1} \in N_1(r)$  e  $v_n = r$ . A seguir será utilizado o Lema 3.18 para provar que sempre é possível escolher uma raiz  $v_n = r$  e um vértice  $v_{n-1} \in N_1(r)$  de maneira que ambos recebem uma cor neste intervalo.

Pelo Lema 3.18,  $G$  sempre tem pelo menos uma de 5 configurações:

(i) um vértice com grau menor que  $\Delta$ .

Tome como raiz  $v_n = r$ , vértice com grau menor que  $\Delta$ , então,  $|Pro(v_n = r)| \leq 2(\Delta - 1) + (\Delta - 1)(\Delta - 1) = \Delta^2 - 1 \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ . Seja  $v_{n-1}$  um vértice adjacente a  $r$  em  $T$ . Sabe-se que  $v_n$  sucede  $v_{n-1}$  e  $|N_2(v_{n-1})| \leq \Delta^2 - \Delta - 1$ , isto é,  $|Pro(v_{n-1})| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .

(ii) um ciclo de tamanho 3.

Tome como raiz  $v_n = r$  e  $v_{n-1}$  vértices desse ciclo de tamanho 3. Como  $|N_2(v_n)|$  e  $|N_2(v_{n-1})|$  são menores ou iguais a  $\Delta(\Delta - 1) - 2$ , então ambos têm no máximo  $\Delta^2 + \Delta - 2$  cores proibidas.

(iii) dois ciclos de tamanho 4 passando pelo mesmo vértice  $v$ .

Tome como raiz  $v_n = r = v$  e sejam  $x$  e  $y$  os vértices dos dois ciclos que estão à distância 2 de  $v_n$ . Como  $x$  e  $y$  fazem parte de dois ciclos de tamanho 4, ambos estão à distância 2 de  $v$  por 2 caminhos de distância 2, e  $|N_2(v_n)| \leq \Delta^2 - \Delta - 2$ . Seja  $v_{n-1}$  um dos vértices dos ciclos, então este tem  $|N_2(v_{n-1})| \leq \Delta^2 - \Delta - 1$  e a prova do teorema procede.

(iv) um vértice  $v$  adjacente a três vértices  $u, x$  e  $y$  tal que existe ciclo de tamanho 4 passando pela aresta  $uv$  e com  $G \setminus \{x, y\}$  conexo.

Tome como raiz  $v_n = r$  o vértice  $v$ . Como existe ciclo de tamanho 4 passando por  $uv$ , existe vértice  $w$  neste ciclo à distância 2 de  $v$  por dois caminhos e,  $|N_2(u)|$  e  $|N_2(v)|$  são menores ou iguais a  $\Delta(\Delta - 1) - 1$ .

Seja  $T$  uma árvore geradora com ordenação do tipo folha-raiz obtida em  $G \setminus \{x, y\}$  adicionado as arestas  $v_n x$  e  $v_n y$ . Como  $G \setminus \{x, y\}$  é conexo, todos os vértices menos  $x$  e  $y$  são alcançados. Atribua as cores a  $x$ , a  $y$  e a ordenação do tipo

folha-raiz, como descrito no Teorema 3.13. Se  $x$  e  $y$  não são adjacentes (senão existe um ciclo de tamanho 3 e pode-se utilizar o caso (ii)),  $x$  recebe a cor 0. Se  $y$  receber a cor 1, então  $x$  e  $y$  proíbem três cores  $\{0, 1, 2\}$  em  $v_n = r$ . E,  $|Pro(v_n = r)| \leq \Delta(\Delta - 1) - 1 + 2(\Delta - 2) + 3 = \Delta^2 + \Delta - 2$ . Se  $y$  recebe cor maior do que 1, então existe vértice  $y' \in (N_1(y) \setminus v_n)$  adjacente a  $y$  e que recebeu a cor 0, já que  $y$  foi o primeiro vértice que a cor 1 foi oferecida. Os vértices  $x$  e  $y'$  proíbem as cores  $\{0, 1\}$ , então  $|Pro(v_n = r)| \leq \Delta(\Delta - 1) - 2 + 2(\Delta - 1) + 2 = \Delta^2 + \Delta - 2$ .

Seja  $v_{n-1}$  o vértice  $u$ . Como  $v_n$  sucede  $v_{n-1}$  na ordenação e  $|N_2(v_{n-1})| \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ , já que este faz parte de um ciclo de tamanho 4, então  $|Pro(v_{n-1})| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .

(v) um vértice  $u$  adjacente a dois vértices  $v$  e  $w$  tal que  $G \setminus X$  é conexo, onde  $X = (N_1(v) \cup N_1(u)) \setminus \{w\}$ , como ilustrado na figura 3.4.

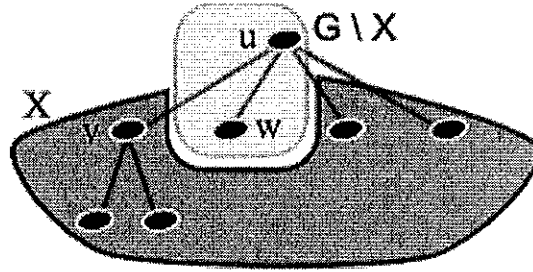


Figura 3.4: Partições  $G \setminus X$  e  $X$

Se  $\Delta \geq 4$ , como os vértices  $\{v_1, \dots, v_{a+b}\}$  são os primeiros na ordenação, eles são os primeiros a terem cores oferecidas. Como ilustrado na figura 3.5, se existe aresta entre vértices  $\{v_0, \dots, v_a\}$  e  $\{v_{a+1}, \dots, v_{a+b}\}$  existe um ciclo de tamanho 4 e um vértice desse ciclo adjacente a dois vértices que se retirados não desconectam o grafo, podendo ser tratado pelo caso (iv) e se existe aresta entre os vértices em  $\{v_{a+1}, \dots, v_{a+b}\}$ , existe ciclo de tamanho 3, podendo ser tratado pelo caso (ii). Se os casos anteriores não ocorrem então  $v_{a+1}$  e  $v_1$  recebem a cor 0. E, existe vértice  $v'$  com  $v' \in \{v_{a+2}, \dots, v_{a+b}\}$  que recebe cor 1, ou existe vértice de cor 0 em  $N_1(v')$ , para este não receber a cor 0, já que este é um dos primeiros a ter cor 1 oferecida, a única maneira dele não poder recebe-la é ter um vértice adjacente com a cor 0. Além disso, existem vértices  $v''$  e  $v'''$  em  $N_1(v_n) \setminus \{v_{n-1}\}$ . que recebem a cor 1 e 2, senão existem vértices adjacente a  $v''$  com a cor 0 e adjacente a  $v'''$  com a cor 0 ou 1. No primeiro caso,  $v_{n-1}$  tem um vértice da cor 0 adjacente e um à distância 2, além disso existe

um vértice  $v_n$ , sucessor a  $v_{n-1}$  na ordenação, ou seja,  $|Pro(v_{n-1})| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$  e,  $v_n$  tem vértices com as cores 0, 1 e 2 entre as suas adjacências, e vértices com as cores 0 e 1 à distância 2, então  $|Pro(v_n)| \leq \Delta^2 + \Delta - 4$ . No segundo caso,  $v_{n-1}$  continua tendo um vértice com a cor 0 adjacente e outro à distância 2 e, o vértice  $v_n$  tem 3 vértices com a cor 0 ou 1 à distância 2, ou seja,  $|Pro(v_n)| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .

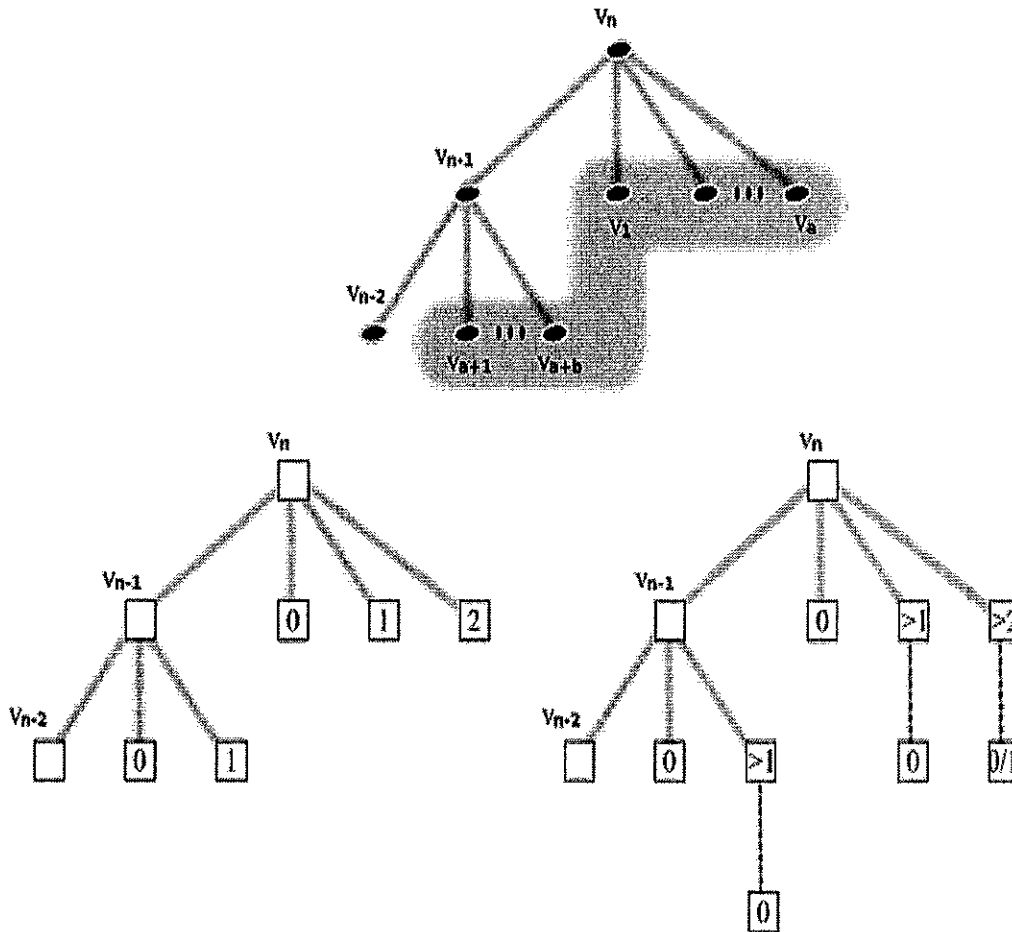


Figura 3.5: Casos do algoritmo de Gonçalves para  $\Delta = 4$

Se  $\Delta = 3$ , o problema será dividido em dois casos. No primeiro existe ciclo de tamanho 4 passando por  $v_n$  e  $v_{n-1}$ , então  $|N_2(v_{n-1})| \leq \Delta^2 - \Delta - 1$  e, como ele é sucedido por  $v_n$  na ordenação, tem-se  $|Pro(v_{n-1})| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ . O outro vértice adjacente a  $v_n$  pode receber a cor 1, neste caso dois vértices adjacentes a  $v_n$  proibem as cores  $\{0, 1, 2\}$  e  $|N_2(v_n)| \leq \Delta^2 - \Delta - 1$ , ou seja,  $|Pro(v_n)| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ . Se este outro vértice adjacente a  $v_n$  não recebe a cor 1, então existe vértice em sua adjacência que recebeu a cor 0, como  $v_n$  já tem um vértice adjacente com a cor 0, nenhuma cor proibida adicional é causada por este vértice e tem-se  $|Pro(v_n)| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .

No segundo caso, quando não existe ciclo de tamanho 4 passando por  $v_n$  e  $v_{n-1}$ . Como ilustrado na figura 3.6, existem vértices adjacente a  $v_n$  e a  $v_{n-1}$  que recebem cor 0, já que estes estão à distância 3 e ambos são os primeiros aonde a cor 0 é oferecida. E, o outro vértice adjacente a  $v_n$  pode receber a cor 1, neste caso  $v_n$  e  $v_{n-1}$  têm vértices com a cor 0 adjacentes e à distância 2, reduzindo o número máximo de cores proibidas a ambos em uma unidade, além disso  $v_n$  sucede  $v_{n-1}$  na ordenação e  $v_n$  tem um vértice com a cor 1 adjacente, ou seja, dois vértices adjacentes a  $v_n$  só proibem as cores  $\{0, 1, 2\}$ , reduzindo o número máximo de cores proibidas para  $v_n$ , ou seja, para ambos, o número de cores proibidas é no máximo  $\Delta^2 + \Delta - 2$ .

O caso restante é quando o outro vértice adjacente a  $v_n$  recebe cor maior que 0, para isto existe vértice em sua adjacência que recebe a cor 0, o número máximo de cores proibidas para  $v_{n-1}$  continua reduzido pelo mesmo motivo do caso anterior, e o número máximo de cores proibidas para  $v_n$  fica reduzido por este ter um vértice de cor 0 adjacente e dois vértices de cor 0 à distância 2, tendo  $|Pro(v_n)| \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ .  $\square$

### 3.5 Limite superior de Havet, Reed e Sereni

Havet, Reed e Sereni [33], em 2008, apresentaram uma prova da conjectura de Griggs e Yeh para grafos com  $\Delta$  suficientemente grande. Esta prova é baseada em métodos probabilísticos, tais como o lema local de Lovász e as inequações de Talagrand e McDiarmid que podem ser encontrados no livro [54]. Como o uso de tais métodos está fora do escopo desta dissertação, o resultado é apenas anunciado a seguir.

**Teorema 3.20 (Havet, Reed e Sereni [33] - 2008)** *Existe um  $\Delta_0$  tal que para um grafo  $G$  com  $\Delta \geq \Delta_0$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .*

### 3.6 Limites do tipo Nordhaus-Gaddum

Balakrishnan e Deo [2] encontraram limites superiores e inferiores para a soma e o produto de *spans* de  $\lambda$ -colorações ótimas de um grafo e seu complemento, utilizando



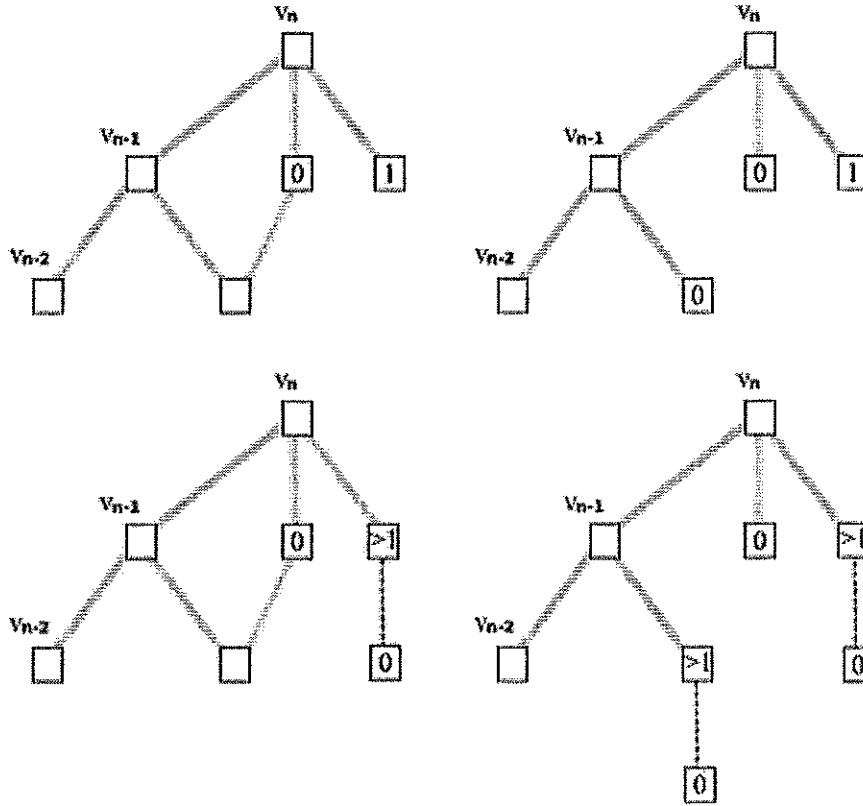


Figura 3.6: Casos do algoritmo de Gonçalves para  $\Delta = 3$

os limites análogos para o número cromático de um grafo e de seu complemento encontrados por Nordhaus e Gaddum [56], a saber:

**Teorema 3.21** (Nordhaus e Gaddum [56] - 1956) *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices, então:*

- (i)  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1.$
- (ii)  $n \leq \chi(G)\chi(G^c) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$

A seguir, os limites encontrados por Balakrishnan e Deo:

**Teorema 3.22** (Balakrishnan e Deo [2] - 2003) *Se  $G$  é um grafo com  $n$  vértices, então:*

- (i)  $2\sqrt{n} - 2 \leq \lambda(G) + \lambda(G^c) \leq 3n - 3.$
- (ii)  $0 \leq \lambda(G)\lambda(G^c) \leq \left(\frac{3n-3}{2}\right)^2.$

**Prova.** (i) Sabe-se, pelo Teorema 3.5, que para qualquer grafo  $q$ -partido  $G$  com  $n$  vértices,  $\lambda(G) \leq n + q - 2$ . Como uma coloração de vértices de  $G$  é uma partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes, tem-se que  $\lambda(G) \leq n + \chi(G) - 2$  e,  $\lambda(G^c) \leq n + \chi(G^c) - 2$ . Somando as duas inequações, obtém-se  $\lambda(G) + \lambda(G^c) \leq 2n + \chi(G) + \chi(G^c) - 4$ . Pelo Teorema 3.21,  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$ , então  $\lambda(G) + \lambda(G^c) \leq 3n - 3$ .

Para verificar o limite inferior, pelo Lema 2.7, sabe-se que  $\chi(G) - 1 \leq \lambda(G)$  e  $\chi(G^c) - 1 \leq \lambda(G^c)$ . Somando as duas inequações, tem-se  $\chi(G) + \chi(G^c) - 2 \leq \lambda(G) + \lambda(G^c)$ . Pelo Teorema 3.21,  $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(G^c)$ , então,  $2\sqrt{n} - 2 \leq \lambda(G) + \lambda(G^c)$ .

Combinando as duas inequações,  $2\sqrt{n} - 2 \leq \lambda(G) + \lambda(G^c) \leq 3n - 3$ .

(ii) Observe que  $0 \leq (\lambda(G) - \lambda(G^c))^2 = (\lambda(G) + \lambda(G^c))^2 - 4\lambda(G)\lambda(G^c)$ . Ou seja,  $4\lambda(G)\lambda(G^c) \leq (\lambda(G) + \lambda(G^c))^2$ .

Substituindo o limite encontrado para  $\lambda(G) + \lambda(G^c)$ , obtém-se que  $\lambda(G)\lambda(G^c) \leq (\frac{3n-3}{2})^2$ . Finalmente, como  $\lambda(G) \geq 0$  e  $\lambda(G^c) \geq 0$ , então  $0 \leq \lambda(G)\lambda(G^c) \leq (\frac{3n-3}{2})^2$ .  $\square$

### 3.7 Classes de grafos

Desde que a conjectura de Griggs e Yeh foi enunciada grande parte do estudo das  $\lambda$ -colorações tem se concentrado no estabelecimento da conjectura para classes particulares de grafos. Muitas vezes estabelecendo limites superiores lineares ou quadráticos para o *span*, e também obtendo algoritmos polinomiais para o problema da  $\lambda$ -coloração ou estabelecendo que o problema continua  $\mathcal{NP}$ -completo quando restrito a classe considerada.

Na tabela 3.1 são fornecidos alguns limites e complexidades já estabelecidos. Alguns desses resultados foram descritos em mais detalhes neste texto, por serem utilizados em nossos resultados ou para explicitar certos aspectos importantes do problema da  $\lambda$ -coloração.

Ao final do capítulo 6, a tabela 6.2 é apresentada contendo melhorias em alguns limites da tabela 3.1, bem como novos limites para classes de grafos que não haviam sido até então consideradas.

Classes	Limites	Complexidade
árvores	$\lambda \leq \Delta + 2$ Griggs e Yeh [28]	Linear Hasunuima <i>et al.</i> [31]
bipartidos	$\lambda \leq \Delta^2 + \Delta - 2$ Gonçalves [26]	$\mathcal{NP}$ -completo Bodlaender <i>et al.</i> [7]
bipartidos permutação	$\lambda \leq  b(G)  + 1$ Araki [1]	Em aberto
cordais	$\lambda \leq \frac{(\Delta+1)^{1.5}}{\sqrt{6}} + O(\Delta)$ Král [42]	$\mathcal{NP}$ -completo Bodlaender <i>et al.</i> [7]
diâmetro 2	$\lambda \leq \Delta^2$ Griggs e Yeh [28]	$\mathcal{NP}$ -completo Griggs e Yeh [28]
cografos	$\lambda \leq n + \chi(G) - 2$ Chang e Kuo [15]	Linear Chang e Kuo [15]
periplanares	$\lambda \leq \Delta + 8$ Bodlaender <i>et al.</i> [7]	Em aberto
permutação	$\lambda \leq 4\Delta + 1$ Calamoneri <i>et al.</i> [11]	Em aberto
planares	$\lambda \leq 2\Delta + 25$ van den Heuvel <i>et al.</i> [62]	$\mathcal{NP}$ -completo Bodlaender <i>et al.</i> [7]
split	$\lambda \leq \frac{(\Delta+1)^{1.5}}{\sqrt{6}} + O(\Delta)$ Král [42]	$\mathcal{NP}$ completo Bodlaender <i>et al.</i> [7]

Tabela 3.1: Limites superiores e complexidades para classes de grafos

# Capítulo 4

## Algoritmos lineares

Neste capítulo são apresentados algoritmos lineares que encontram o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas para classes específicas de grafos e algoritmos que encontram uma  $\lambda$ -coloração com este *span*. Até hoje, os algoritmos que encontram uma  $\lambda$ -coloração ótima para classes de grafos que não completamente triviais (tais como grafos ciclos, completos e rodas) são os que foram elaborados para árvores com  $\Delta = \Omega(n)$  (Hasunuima *et al.* [32]), grafos *chain* (Araki [1]), cografos (Chang e Kuo [15]) e grafos grades regulares (Calamoneri e Petreschi [9]), todos lineares. Algoritmos que só encontram o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima existem para árvores (Chang e Kuo [15] e melhorado por Hasunuima *et al.* [31]), cografos (Chang e Kuo [15]) e grafos  $p$ -quase árvores (Fiala *et al.* [21]). Não se conhece outros algoritmos, a não ser exponenciais, que determinam uma  $\lambda$ -coloração ótima ou que encontrem o seu *span*, para outras classes de grafos além dos citados acima (a não ser o algoritmo linear que encontra o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima, e uma  $\lambda$ -coloração com este *span*, para a classe dos grafos  $P_4$ -tidy, que é um dos resultado desta dissertação, sendo apresentado no capítulo 6).

### 4.1 Árvores

#### 4.1.1 Chang e Kuo

Chang e Kuo [15], em 1996, desenvolveram um algoritmo polinomial para a obtenção do *span* uma  $\lambda$ -coloração ótima para árvores. Este fato é muito importante, já que pelo Corolário 3.2 e pelo Teorema 3.10, o *span*  $k$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima

de uma árvore satisfaz  $\Delta + 1 \leq k \leq \Delta + 2$  e o problema de decidir se uma árvore tem  $span$   $\Delta + 1$  ou  $\Delta + 2$  havia sido conjecturado ser  $\mathcal{NP}$ -completo por Griggs e Yeh [28], ou seja, esta conjectura foi refutada.

A solução encontrada por Chang e Kuo [15] verifica se a árvore tem uma  $(\Delta + 1)$ - $\lambda$ -coloração, senão retorna que seu  $span$  é  $\Delta + 2$ . Neste algoritmo, a cada vértice  $v$  está associado um conjunto  $P$  dos possíveis pares de cores que ele e um pai fictício  $v'$  podem ter, mantendo uma  $(\Delta + 1)$ - $\lambda$ -coloração da subárvore enraizada em  $v'$ , formada por  $v'$  e seus descendentes.

Seja  $C$  o conjunto de pares ordenados de cores em  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$  que diferem de pelo menos dois. Para cada folha  $f$ ,  $P(f) \leftarrow C$ . A partir das folhas, é feita uma atribuição de cores as subárvores enraizadas nos vértices dos níveis superiores, verificando para cada vértice  $v$  não-folha nesta árvore, se para cada par de cores  $(c_1, c_2) \in C$ , existem pares de cores  $(c_2, c_i)$  com  $c_i \neq c_1$  em cada  $P(w_i)$ , onde  $w_1, \dots, w_s$  são os filhos de  $v$ , de forma que cada filho  $w_i$  de  $v$  receba uma cor  $c_i$  diferente (esta verificação pode ser feita em tempo polinomial, sendo reduzida a um problema de emparelhamento máximo em um grafo bipartido). Determinando assim  $P(v)$ , o conjunto de pares de cores que podem ser atribuídas ao vértice  $v$  e a um pai fictício de  $v$  denotado por  $v'$ , mantendo assim uma  $(\Delta + 1)$ -coloração da subárvore induzida por  $v$  e seus descendentes.

A execução do algoritmo continua até chegar a raiz  $r$  da árvore. Quando isto acontece, se  $P(r) \neq \emptyset$ , então esta árvore tem uma  $(\Delta + 1)$ - $\lambda$ -coloração, senão seu  $span$  é  $\Delta + 2$ .

**Teorema 4.1 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Existe um algoritmo polinomial  $O(n\Delta^{4.5})$  que determina o  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima para uma árvore  $T$ .*

**Prova.** A atribuição de cores dada por este algoritmo é uma  $\lambda$ -coloração de  $T$ , já que todos os vértices adjacentes têm cores com diferença de pelo menos dois e todos os vértices à distância 2 têm cores diferentes. Ou seja, não existe a possibilidade do algoritmo dar uma resposta errada ao responder que o  $span$  é  $\Delta + 1$ .

Como o algoritmo testa para cada vértice da árvore todas as possibilidades de cores que os filhos deste nó, o próprio nó e o seu pai podem receber no intervalo  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$  respeitando uma  $(\Delta + 1)$ - $\lambda$ -coloração para a subárvore formada por seus descendentes e, a cada passo, costura essas possibilidades de cores, verificando

quais são todas as possibilidades que podem ser repassados para os vértices ancestrais, até chegar ao vértice raiz, então se existe uma  $(\Delta + 1)$ - $\lambda$ -coloração, o algoritmo consegue determinar este fato.

Para cada vértice  $v$  da árvore  $T$ , testa-se os  $|C|$  pares de cores com diferença de pelo menos dois no intervalo  $\{0, \dots, k\}$ , sendo  $|C| = O(k^2)$ . E, para cada par  $(c_1, c_2) \in C$ , verifica-se a existência de cores diferentes nos  $s$  filhos  $w_i$  ( $1 \leq i \leq s$ ) de  $v$ . Isto pode ser feito verificando a existência de um emparelhamento máximo de tamanho  $s$  no grafo bipartido  $G = (X, Y, E)$ , onde os vértices do conjunto  $X$  são os filhos de  $v$ , os do conjunto  $Y$  são as cores em  $\{0, \dots, k\}$  e, existe aresta  $ic_3(w_i)$ , se existe par de cores  $(c_2, c_3(w_i)) \in P(w_i)$  ( $1 \leq i \leq s$ ). Este problema de emparelhamento pode ser resolvido em  $O(k^{2.5})$ , como descrito por Micali e Vazirani [53]. Então, a complexidade deste algoritmo é  $O(nk^{4.5})$ . E, como  $k = \Delta + 1$ , pode ser dada por  $(O(n\Delta^{4.5}))$ .  $\square$

Um exemplo da aplicação deste algoritmo com  $\Delta = 3$  é ilustrado na figura 4.1. Cada folha tem um conjunto  $C$  com todos os pares de cores em  $\{0, \dots, 4\}$  que diferem em pelo menos dois. Então, para encontrar o conjunto  $P(w)$  é verificado para cada par de cores em  $\{0, \dots, 4\}$  se existe um emparelhamento de tamanho 2 no grafo bipartido descrito no Teorema 4.1. Se existir, este par de cores é passado como possível cor do vértice  $w$  e de uma pai fictício  $w'$  de  $w$ . Com isso,  $P(w) = \{(0, 4), (1, 4), (2, 0), (2, 4), (3, 0), (4, 0)\}$ . Como  $r$  só tem um filho, então os valores de  $P(w)$  podem ser associados a cores para  $w$  e para  $r$  e, esta árvore tem uma  $\lambda$ -coloração com  $span \Delta + 1 = 4$ .

#### 4.1.2 Hasunuima *et al.*

Após mais de uma década, Hasunuima *et al.* [32] apresentaram em 2009 um algoritmo para decidir o  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima para árvores, em tempo  $O(n^{1.75})$ . Este algoritmo é basicamente o mesmo elaborado por Chang e Kuo [15] para árvores, com algumas estratégias que reduzem o número de chamadas da rotina de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos e realizando uma análise amortizada de sua complexidade. Além disso, apresentaram como encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima em tempo linear para árvores com  $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$ . Logo depois, os mesmos autores [31] conseguiram reduzir a complexidade do seu algoritmo, utili-

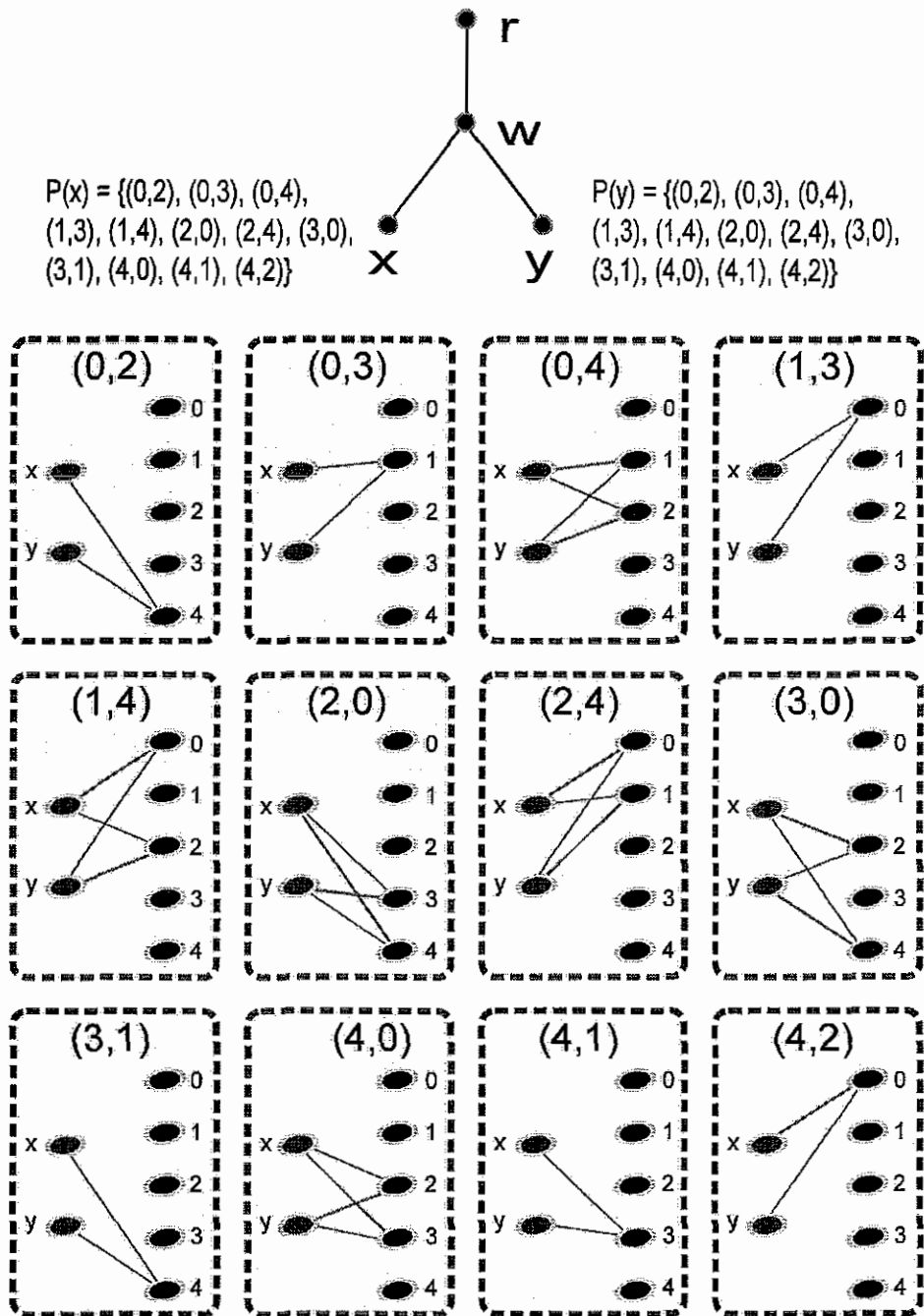


Figura 4.1: Algoritmo para encontrar o *span* de  $\lambda$ -colorações em árvores

zando algoritmos de fluxo em redes em vez de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos, e conseguindo alcançar complexidade linear para a determinação do *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas em árvores. Nesta seção só será apresentado o algoritmo linear para encontrar uma  $\lambda$ -coloração para as árvores com  $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$ .

### Algoritmo linear para árvores com $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$

Nesta seção será apresentado um algoritmo linear para encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima para árvores com  $\Delta > \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$ . Para tal é necessário constatar algumas propriedades específicas das árvores, que serão apresentadas a seguir.

**Notação 4.1** Seja  $N_i^*(v)$  o conjunto de vértices de um grafo com distância menor ou igual a  $i$  de  $v$ , incluindo o vértice  $v$ , que tenham grau  $\Delta$ .

**Notação 4.2** Em uma árvore enraizada, seja  $C^i(v)$  o conjunto de vértices descendentes de um vértice  $v$  com distância  $i$  para  $v$ .

**Teorema 4.2 (Hasunuma *et al.* [32] - 2009)** *Em uma árvore  $T$ , se para todo vértice  $v \in V(T)$   $|N_3^*(v)| \leq \Delta - 6$  e,  $|N_1^*(v)| \leq 2$ , então existe  $\lambda$ -coloração para  $T$  com  $\text{span } \Delta + 1$ .*

**Prova.** Seja  $T$  esta árvore, enraizada em uma de suas folhas. Atribua as cores 0 ou  $\Delta + 1$  para todo vértice com grau  $\Delta$ , como  $|N_1^*(v)| \leq 2$  para todos os vértices  $v$  desta árvore, então esta atribuição de cores pode ser feita sem desprezar as restrições de uma  $\lambda$ -coloração. As cores dos vértices com grau menor que  $\Delta$  serão dadas utilizando-se a ordenação obtida por uma busca em largura.

Para a raiz, se o seu vértice filho tiver grau  $\Delta$  e receber a cor 0, a raiz recebe a cor 2, se receber a cor  $\Delta + 1$ , a raiz recebe a cor  $\Delta - 1$ . Se o vértice filho não tiver grau  $\Delta$ , então atribui-se as cores 1 e  $\Delta - 1$  aos vértices raiz e filho da raiz, respectivamente.

Suponha que um vértice  $v$  tem cor  $b$  e o pai de  $v$  recebe a cor  $a$ , onde  $|a - b| \geq 2$ . Distribua o conjunto  $C^1(v)$  dos filhos de  $v$  nos conjuntos  $C''(v)$ ,  $C'''(v)$  e  $R(v)$  tais que:

$$C''(v) = \{w \in C^1(v) \mid g(w) \neq \Delta \text{ e } \exists \text{ vértice em } C^1(w) \cup C^2(w) \text{ com grau } \Delta \};$$

$$C'''(v) = \{w \in C^1(v) \mid g(w) = \Delta\};$$

$$R(v) = C^1(v) \setminus (C''(v) \cup C'''(v)).$$

É interessante verificar que:  $|C''(v)| \leq \Delta - 6$  (já que para cada vértice em  $C''(v)$  existe na árvore um vértice diferente em  $C^1(w) \cup C^2(w)$  com grau  $\Delta$ , onde o número



desses vértices em  $N_3^*(v)$  é limitado por  $\Delta - 6$  e;  $|C''(v)| \leq 2$  (já que  $|N_1^*(v)| \leq 2$ ). E, se  $g(v) = \Delta$ , então  $|C'(v)| \leq \Delta - 7$  e  $|C''(v)| \leq 1$ .

A prova então é dividida em dois casos: (a) quando  $g(v) = \Delta$  e (b) quando  $g(v) \neq \Delta$ .

(a) Sejam  $U(a, b) = \{a, b-1, b, b+1\} \cup \{0, 1, \Delta, \Delta+1\}$  e  $\bar{U}(a, b) = \{0, 1, \dots, \Delta+1\} \setminus U(a, b)$ . Atribua injetivamente as cores em  $\bar{U}(a, b)$  a vértices em  $C'(v)$ . Como  $|C'(v)| \leq \Delta - 6$ , e  $|\bar{U}(a, b)| = \Delta + 2 - |U(a, b)| \geq \Delta - 6$  esta atribuição é possível. Seja  $L(v)$  o conjunto de cores em  $\bar{U}(a, b)$  não utilizadas por vértices de  $C'(v)$ , a prova será dividida em três subcasos: (a.1)  $|C''(v)| = 0$ ; (a.2)  $|C''(v)| = 1$  e; (a.3)  $|C''(v)| = 2$ .

(a.1) Atribua injetivamente as cores em  $L(v) \cup (\{0, 1, \Delta, \Delta+1\} \setminus \{a, b-1, b, b+1\})$  aos vértices em  $R(v)$

(a.2) Atribua injetivamente as cores em  $L(v) \cup (\{1, \Delta, \Delta+1\} \setminus \{a, b-1, b, b+1\})$  aos vértices de  $R(v)$  se o vértice  $C''(v)$  recebeu a cor 0 ou em  $L(v) \cup (\{0, 1, \Delta\}) \setminus \{a, b-1, b, b+1\}$  se o vértice  $C''(v)$  recebeu a cor  $\Delta+1$ .

(a.3) Atribua injetivamente as cores em  $L(v) \cup (\{1, \Delta\}) \setminus \{a, b-1, b, b+1\}$  aos vértices em  $R(v)$ . Os vértices de  $C''(v)$  recebem as cores 0 e  $\Delta+1$ .

Nestes subcasos, como o número máximo de cores proibidas para algum vértice de  $R(V)$  é dado por  $4 + |C'(v)| + |C''(v)| \leq 4 + \Delta - 3 \leq \Delta + 1$ , sempre existindo cor para ser atribuída aos vértices de  $R'(v)$  em um intervalo  $\{0, \dots, \Delta+1\}$ , então as atribuições dadas pelos subcasos (a.1), (a.2) e (a.3) são possíveis.

(b) Seja  $U(a) = \{a\} \cup \{0, 1, \Delta, \Delta+1\}$  e,  $\bar{U}(a) = \{0, 1, \dots, \Delta+1\} \setminus U(a)$ . Atribua as cores em  $\bar{U}(a)$  aos vértices em  $C'(v)$ . Como  $|C'(v)| \leq \Delta - 7$  e  $|\bar{U}(a)| = \Delta + 2 - |U(a)| \geq \Delta - 3$ , esta atribuição é possível. Seja  $L(v)$  o conjunto de cores em  $\bar{U}(a)$  não utilizadas por vértices de  $C'(v)$ , a prova será dividida em dois subcasos: (b.1)  $|C''(v)| = 0$  e; (b.2)  $|C''(v)| = 1$ .

(b.1) Atribua injetivamente as cores em  $L(v) \cup (\{\Delta, \Delta+1\} \setminus \{a\})$  aos vértices de  $R(v)$  se  $v$  recebeu a cor 0 ou  $L(v) \cup (\{0, 1\} \setminus \{a\})$  se o vértice  $v$  recebeu a cor  $\Delta+1$ .

(b.2) Atribua injetivamente as cores em  $L(v) \cup (\{\Delta\} \setminus \{a\})$  aos vértices de  $R(v)$  se  $v$  recebeu a cor 0 ou  $L(v) \cup (\{1\} \setminus \{a\})$  se o vértice  $v$  recebeu a cor  $\Delta+1$ .

Nestes subcasos, como o número máximo de cores proibidas para algum vértice de  $R(v)$  é dado por  $3 + |C'(v)| + |C''(v)| \leq 3 + \Delta - 2 \leq \Delta + 1$ , sempre existe cor para ser atribuída aos vértices de  $R'(v)$  em um intervalo  $\{0, \dots, \Delta + 1\}$ , então as atribuições dadas pelos subcasos (b.1) e (b.2) são possíveis.

Ou seja, com este método obtém-se uma  $\lambda$ -coloração para a árvore  $T$  utilizando no máximo a cor  $\Delta + 1$ .  $\square$

**Corolário 4.3 (Hasunuima *et al.* [32] - 2009)** *Se o número máximo de vértices com grau  $\Delta$  em uma árvore  $T$  é  $\Delta - 6$  então  $\lambda(T) \leq \Delta - 1$  se e somente se para todo vértice  $v \in V(T)$  existem no máximo dois vértices de grau  $\Delta$  em  $N_1^*(v)$ .*

**Prova.** A ida desta prova segue diretamente do Teorema 4.2, já que para este caso, sabe-se que  $N_3^*(v)$  é menor ou igual a  $\Delta - 6$  para todo vértice  $v \in V(T)$  e, se  $N_1^*(v)$  contém no máximo 2 vértices de grau  $\Delta$  para todo vértice  $v \in V(T)$ , então  $\lambda(T) = \Delta + 1$ . A volta desta prova é dada pelo Lema 2.15, já que se existem três vértices com grau  $\Delta$  em  $N_1^*(v)$  um deles não recebe nem a cor 0 nem a cor  $\Delta + 1$ , e  $\lambda(T) = \Delta + 2$ .  $\square$

**Corolário 4.4 (Hasunuima *et al.* [32] - 2009)** *Para uma árvore  $T$ , se  $\Delta > \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$ , então  $\lambda(T) = \Delta + 1$  se e somente se existem no máximo 2 vértices com grau  $\Delta$  em  $N_1^*(v)$  para todo  $v \in V(T)$ .*

**Prova.** Suponha que  $|N_1^*(v)| \leq 2$  para todo vértice  $v \in V(T)$  (para os casos em que  $|N_1^*(v)| \geq 2$  pode-se afirmar trivialmente que  $\lambda \geq \Delta + 2$ ). Assuma que existam  $\Delta - 5$  vértices com grau  $\Delta$  em  $T$ . Como trata-se de uma árvore, existem pelo menos  $\Delta(\Delta - 5) - \frac{\Delta-5}{2}$  arestas incidentes a esses vértices de grau  $\Delta$ . Como uma árvore tem número de arestas igual ao número de vértices menos um, então  $n - 1 \geq (\Delta - \frac{1}{2})(\Delta - 5)$ . Desta inequação obtém-se que  $\Delta \leq \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$  e, se o número de vértices com grau  $\Delta$  na árvore aumentar, o valor da parte direita desta inequação irá diminuir. Como  $\Delta > \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$  pode-se afirmar que existem no máximo  $\Delta - 6$  vértices com grau  $\Delta$  em  $T$ . E, portanto, pelo Corolário 4.3, existe uma  $\lambda$ -coloração com  $span \Delta + 1$  para  $T$  se e somente se todo para todo vértice  $v \in V(T)$  existem no máximo 2 vértices com grau  $\Delta$  em  $N_1^*(v)$ .  $\square$

**Teorema 4.5 (Hasunuma *et al.* [32] - 2009)** *Existe algoritmo linear que encontra uma  $\lambda$ -coloração ótima para uma árvore com  $\Delta = \Omega(\sqrt{n})$ .*

**Prova.** Para os casos em que  $\Delta > \sqrt{n + \frac{65}{16}} + \frac{11}{4}$ , segue do Corolário 4.4 que para verificar os casos em que o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima é  $\Delta + 1$  basta observar se para cada vértice  $v$  existem no máximo 2 vértices com grau  $\Delta$  em suas adjacências (que pode ser feito utilizando-se de uma busca em largura em  $O(n+m)$ ). Se este for o caso, basta utilizar o método de atribuição de cores apresentado no Teorema 4.2. Se o *span* for  $\Delta + 2$ , atribua as cores aos vértices da árvore utilizando a ordenação obtida por uma busca em largura, como o número máximo de cores proibidas para um vértice será  $3 + \Delta - 1$ , sempre existe cor para atribuir aos vértices em um intervalo  $\{0, \dots, \Delta + 2\}$ .  $\square$

## 4.2 Grafos $p$ -quase árvores

Fiala, Kloks e Kratochvíl [21], em 2001, adaptaram o algoritmo de Chang e Kuo [15] para grafos  $p$ -quase árvores, conseguindo obter algoritmos lineares e polinomiais para determinar os *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas para certos valores de  $p$ .

**Definição 4.1** Um grafo  $G$  é  $p$ -quase árvore se é conexo e  $|E(G)| = |V(G)| + p - 1$ .

**Teorema 4.6 (Fiala *et al.* [21] - 2001)** *Existe um algoritmo que verifica se existe uma  $\lambda$ -coloração com *span*  $k$  para  $p$ -quase árvores em  $O(nk^{2p})$ .*

**Prova.** Seja  $G$  um grafo  $p$ -quase árvore,  $T$  uma árvore geradora de  $G$  e  $E'$  o conjunto das arestas de  $G$  que não fazem parte de  $T$ .

Construa uma nova árvore  $T'$  a partir de  $T$ , onde para cada aresta  $u_i v_i \in E'$ , acrescente folhas  $x_i$  e  $y_i$  ligadas a  $u_i$  e a  $v_i$ , respectivamente, para  $1 \leq i \leq p$ .

Uma  $\lambda$ -coloração  $f$  de  $T'$  onde  $f(u_i) = f(y_i)$  e  $f(v_i) = f(x_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$  restrita aos vértices de  $G$  é uma  $\lambda$ -coloração de  $G$ . De fato, suponha, por absurdo, que não seja. Como um vértice  $u_i$  é adjacente ao vértice  $x_i$ , suas cores têm diferença de pelo menos dois, então é necessário que exista um vértice adjacente a  $u_i$  que proíba  $x_i$  de receber a cor de  $v_i$ , uma contradição com o fato de  $u_i$  ser adjacente a  $x_i$  e este já ter recebido a cor de  $v_i$ .

Fixe as cores de todos os vértices  $u_i, v_i, x_i$  e  $y_i$  de forma que  $f(u_i) = f(y_i)$  e  $f(v_i) = f(x_i)$ . Existem  $O(k^{2p})$  opções de como essas cores podem ser fixadas, já que existem  $p$  arestas em  $E'$ .

Para cada uma dessas opções de cores fixas, teste o algoritmo de Chang e Kuo [15] para a árvore  $T'$ , onde alguns vértices já estão pré-coloridos. O algoritmo de emparelhamento pode ser realizado em  $O(k^{2.5})$ , como descrito por Micali e Vazirani [53], portanto a complexidade total deste algoritmo é dada por  $O(nk^{2p+4.5})$ . Isto porque o algoritmo de Chang e Kuo é utilizado  $O(k^{2p})$  vezes (cada uma com uma pré-coloração diferente das folhas geradas por  $E'$ ), que por sua vez utiliza-se para cada um dos  $O(n)$  vértices da árvore  $T'$ ,  $O(k^2)$  verificações de emparelhamento que podem ser feitas em  $O(k^{2.5})$ .  $\square$

Se em vez do algoritmo de Chang e Kuo [15] de 1992, for utilizada a alteração do algoritmo feita por Hasunuma *et al.* [31] em 2009, a complexidade pode ser reduzida para  $O(nk^{2p})$ , já que aplica-se  $O(k^{2p})$  vezes o algoritmo linear para determinar o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas para árvores, que neste caso é  $O(n)$ .

**Corolário 4.7 (Fiala *et al.* [21] - 2001)** *Existe um algoritmo linear que decide um span constante  $k$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $p$ -quase árvores, com  $p$  constante.*

**Prova.** Pelo Teorema 4.6, sabe-se que a complexidade para verificar se uma  $p$ -quase árvore tem *span*  $k$  é dada por  $O(nk^{2p})$  e, pode-se obter o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima testando os casos de *spans*  $k'$  com  $0 \leq k' \leq k$ . Como  $k$  e  $p$  são constantes, a complexidade é dada por  $O(n)$ .  $\square$

**Corolário 4.8 (Fiala *et al.* [21] - 2001)** *Existe um algoritmo polinomial que decide o span de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $p$ -quase árvores, com  $p$  constante.*

**Prova.** Pelo Teorema 4.6, sabe-se que a complexidade para verificar se uma  $p$ -quase árvore tem *span*  $k$  é dada por  $O(nk^{2p})$  e, pelo Corolário 3.4,  $k \leq 2n - 2$ . Pode-se então obter o *span*  $k$  testando o *span*  $k'$  em  $0 \leq k' \leq 2n - 2$ . Ou seja, este método tem complexidade da ordem  $O(n^{4p})$ , onde  $p$  é uma constante.  $\square$

### 4.3 Grafos *Chain*

O algoritmo descrito nesta seção foi desenvolvido por Araki [1] em 2009, e encontra uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo *chain*. Além disso, Araki prova que o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos *chain* é igual a  $b(G)$ , o tamanho de uma de suas maiores bicliques.

No mesmo artigo Araki apresenta um algoritmo linear aproximativo para  $\lambda$ -colorações de grafos bipartidos permutação, que é uma super classe dos grafos *chain*, onde o *span* da  $\lambda$ -coloração encontrada pelo seu algoritmo está entre  $b(G)$  e  $b(G) + 1$ . E conjectura que é possível desenvolver um algoritmo eficiente para decidir qual desses valores é o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos bipartido permutação.

**Definição 4.2** Um grafo  $G = (X, Y, E)$  é *chain* se é bipartido e existe uma ordenação dos vértices  $x_1, \dots, x_p$  de  $X$  e  $y_1, \dots, y_q$  de  $Y$  tal que  $N_1(x_1) \subseteq N_1(x_2) \subseteq \dots \subseteq N_1(x_p)$  e  $N_1(y_q) \subseteq N_1(y_{q-1}) \subseteq \dots \subseteq N_1(y_1)$ .

**Teorema 4.9 (Araki [1] - 2009)** *Existe um algoritmo linear que encontra uma  $\lambda$ -coloração ótima de grafos chain.*

**Prova.** Seja  $G = (X, Y, E)$  um grafo *chain*. Defina uma atribuição de cores  $f$  da seguinte forma, onde  $b(G)$  é o tamanho de uma maior biclique de  $G$ :

$$\begin{aligned} f(x_i) &= b(G) - p + i, \quad 1 \leq i \leq p \text{ e;} \\ f(y_j) &= j - 1, \quad 1 \leq j \leq q. \end{aligned}$$

Como os vértices de  $X$  (e de  $Y$ ) recebem cores diferentes, todos os vértices à distância 2 recebem cores diferentes. Suponha, por absurdo, que exista aresta  $x_i y_j \in E(G)$  tal que  $f(x_i) - f(y_j) \leq 1$ . Então,  $|b(G)| - p + i - j + 1 \leq 1$  e,  $|b(G)| \leq p - i + j$ . Entretanto, o subgrafo induzido pelos vértices  $\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_p\} \cup \{y_1, \dots, y_j\}$  é um biclique com tamanho  $p - i + 1 + j$  (a aresta  $x_i y_j$  força a existência das arestas  $x_i y_l$  [ $1 \leq l \leq j$ ], devido as vizinhanças serem encaixadas, que por sua vez forçam as arestas  $x_s y_r$  [ $i \leq s \leq p$  e  $1 \leq r \leq j$ ]). Além disso, para todo  $G$ ,  $\lambda(G) \geq b(G)$ , já que são necessários pelo menos  $b(G) + 1$  cores em uma  $\lambda$ -coloração do maior subgrafo bipartido completo, ou seja, desta forma  $f$  é uma  $b(G)$ - $\lambda$ -coloração ótima de  $G$ .

Como o algoritmo para encontrar a maior biclique do grafo *chain* é trivialmente linear (este ocorre quando  $j + |N_1(y_j)|$  é máximo), a complexidade para se obter uma  $\lambda$ -coloração ótima para os grafos *chain* também é linear.  $\square$

## 4.4 Cografos

Nesta seção será apresentado um algoritmo linear para encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para cografos, desenvolvido por Chang e Kuo [15]. É possível alterar este algoritmo para fornecer uma  $\lambda$ -coloração com este *span* para grafos desta classe, bastando realizar o mesmo processo utilizado para os grafos *P<sub>4</sub>-tidy*, descrito na parte final da seção 6.7. Para o bom entendimento deste algoritmo são necessárias algumas definições e propriedades sobre grafos e suas  $\lambda'$ -colorações, estas sendo  $\lambda$ -colorações com a restrição adicional de que a atribuição de cores é feita injetivamente, ou seja, cada cor só é utilizada uma vez.

**Lema 4.10 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$  que é o join de dois grafos,  $\lambda(G) = \lambda'(G)$ .*

**Prova.** Ao aplicar uma operação de *join* entre dois grafos, obtém-se um grafo conexo, onde todos os vértices estão à distância 2 dos outros. Ou seja, todos os vértices têm cores diferentes em qualquer  $\lambda$ -coloração de  $G$ . Logo, uma  $\lambda$ -coloração ótima deste grafo também será uma  $\lambda'$ -coloração ótima, tendo  $\lambda(G) = \lambda'(G)$ .  $\square$

**Notação 4.3** Denota-se por  $pv(G)$  o número mínimo de caminhos disjuntos em que os vértices de um grafo  $G$  podem ser particionados.

**Lema 4.11 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$ ,  $pv(G) = \lambda'(G^c) - n + 2$ .*

**Prova.** Seja  $f$  uma  $k$ - $\lambda'$ -coloração ótima de  $G^c$ . Para cada par de vértices  $(v, w)$  de  $G$ , se  $f(v) = f(w) + 1$ , então  $vw \notin E(G^c)$  e, portanto,  $vw \in E(G)$ . Então, uma sequenciais de cores consecutivas atribuídas a vértices em  $G^c$  corresponde a um subgrafo caminho em  $G$  contendo esses vértices. E, o número máximo destes caminhos em  $G$  é  $\lambda'(G^c) + 1 - (n - 1)$ . Isto porque no intervalo  $\{0, \dots, \lambda'(G^c)\}$ , existem no máximo  $n - 1$  interrupções nas sequências de cores em uma  $\lambda'$ -coloração ótima de  $G^c$ . Então,  $pv(G) \leq \lambda'(G^c) - n + 2$ .

Seja  $pv(G^c)$  o número mínimo de caminhos que os vértices de  $G$  possam ser particionados. Particione os vértices de  $G^c$  em  $q$  conjuntos  $V_1, \dots, V_q$ , cada conjunto contendo vértices correspondentes a exatamente um dos caminhos em  $G$ . Seja  $n_i$  a quantidade de vértices no conjunto  $V_i$ , com  $1 \leq i \leq q$ , sendo  $n_1 + \dots + n_q = n$ . Em uma  $\lambda'$ -coloração do grafo  $G$ , pode-se atribuir cores sequências a vértices do mesmo conjunto seguindo a ordem dos vértices do caminho em  $G^c$ , já que em  $G$  não existe arestas entre esses vértices. Seguindo a mesma estratégia da  $\lambda$ -coloração dos grafos  $q$ -partidos, vista no Teorema 3.5,  $\lambda'(G) \leq n + pv(G^c) - 2$ . Então,  $pv(G) \geq \lambda'(G^c) - n + 2$ .  $\square$

**Lema 4.12 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $q$ -partido  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \lambda'(G) = n + pv(G^c) - 2 \leq n + q - 2$ .*

**Prova.** Por definição de  $\lambda'(G)$ ,  $\lambda(G) \leq \lambda'(G)$ . Particione  $G$  em  $q$  conjuntos independentes. No grafo  $G^c$ , cada tal conjunto independente é um subgrafo completo. Logo os vértices em  $G^c$  podem ser particionados em  $q$  caminhos disjuntos e,  $pv(G^c) \leq q$ .  $\square$

Este resultado nos dá um limite superior para o *span* de grafos  $q$ -partidos melhor que o do Teorema 3.5.

**Lema 4.13 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$ , que é a união de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , com  $|V(G_1)| = n_1$  e  $|V(G_2)| = n_2$ ,  $\lambda'(G) = \lambda'(G \cup H) = \max\{\lambda'(G), \lambda'(H), n_1 + n_2 - 1\}$ .*

**Prova.** Como no Lema 2.6,  $\lambda'(G) \geq \max\{\lambda'(G_1), \lambda'(G_2)\}$ , pois  $G_1$  e  $G_2$  são subgrafos de  $G$ . E,  $\lambda'(G) \geq n_1 + n_2 - 1$  segue da definição de  $\lambda'$ -coloração, já que as cores são atribuídas injetivamente aos vértices.

Quando  $\lambda'(G_1) \geq n_1 + n_2 - 1$ , existem pelo menos  $n_2$  cores não consecutivas e não utilizadas em  $\{0, \dots, \lambda'(G_1)\}$ . Pode-se atribuir as cores não consecutivas aos vértices de  $G_2$ , respeitando as restrições da  $\lambda'$ -coloração. Ou seja, esta  $\lambda'$ -coloração do grafo  $G$  tem *span*  $\lambda'(G_1)$ . O caso para  $\lambda'(G_2) \geq n_1 + n_2 - 1$  é análogo ao anterior. Quando  $\max\{\lambda'(G_1), \lambda'(G_2)\} \leq n_1 + n_2 - 1$ , pela definição de  $\lambda'$ -coloração,  $\lambda'(G) \geq n_1 + n_2 - 1$ . Sem perda de generalidade suponha  $n_1 \geq n_2$ . Sejam  $f$  uma

$\lambda'$ -coloração ótima de  $G_1$  com  $\text{span } \lambda'(G_1)$  e  $f'$  uma  $\lambda'$ -coloração com  $\text{span } q$ , definida segundo:

$f' \leftarrow f$

**enquanto**  $q \leq n_1 + n_2 - 1$  **faça**

    Sejam  $c_1$  e  $c_2$  duas cores consecutivas atribuídas aos vértices por  $f'$

**para** cada  $v \in V(G)$  **faça**

**se**  $f'(v) \geq c_2$  **então**

$f'(v) \leftarrow f'(v) + 1$

Ou seja,  $f'$  é a  $\lambda'$ -coloração de  $G_1$  deslocada até obter o  $\text{span } n_1 + n_2 - 1$ , onde existem  $n_2$  cores não consecutivas não utilizadas, que podem ser atribuídas aos vértices de  $G_2$ . Logo,  $\lambda'(G) \leq n_1 + n_2 - 1$ . □

**Lema 4.14 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$  que é a união de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ ,  $pv(G) = pv(G_1) + pv(G_2)$ .*

**Prova.** Como  $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$  e não existem arestas entre os subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  de  $G$ , nenhum caminho novo é criado em  $G$  e todos os caminhos de  $G_1$  e  $G_2$  se mantêm. □

**Lema 4.15 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$  que é o join de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , com  $|V(G_1)| = n_1$  e  $|V(G_2)| = n_2$ ,  $\lambda'(G) = \lambda'(G_1) + \lambda'(G_2) + 2$ .*

**Prova.** Pelo Lema 4.11,  $\lambda'(G) = pv((G_1 \wedge G_2)^c) + n_1 + n_2 - 2$ . Sabe-se que  $pv((G_1 \wedge G_2)^c) = pv(G_1^c \cup G_2^c)$ . Além disso, pelo Lema 4.14,  $pv(G_1^c \cup G_2^c) = pv(G_1^c) + pv(G_2^c)$ .

Então,  $\lambda'(G) = pv(G_1^c) + pv(G_2^c) + n_1 + n_2 - 2$ . E, pelo Lema 4.11,  $\lambda'(G) = \lambda'(G_1) + \lambda'(G_2) + 2$ . □

**Lema 4.16 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Para um grafo  $G$  que é o join de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , com  $|V(G_1)| = n_1$  e  $|V(G_2)| = n_2$ ,  $pv(G) = \max\{pv(G_1) - n_2, pv(G_2) - n_1, 1\}$ .*



**Prova.** Pelo Lema 4.11,  $pv(G_1 \wedge G_2) = \lambda'((G_1 \wedge G_2)^c) - n_1 - n_2 + 2$ . Além disso, sabe-se que  $\lambda'((G_1 \wedge G_2)^c) = \lambda'(G_1^c \cup G_2^c)$ .

Pelo Lema 4.13,  $\lambda'(G_1^c \cup G_2^c) - n_1 - n_2 + 2 = \max\{\lambda'(G_1^c), \lambda'(G_2^c), n_1 + n_2 - 1\} - n_1 - n_2 + 2$ .

E, finalmente, pelo Lema 4.11,  $pv(G) = \max\{pv(G_1) - n_2, pv(G_2) - n_1, 1\}$ .  $\square$

**Definição 4.3** Uma *co-árvore* é uma árvore enraizada cujos vértices internos são rotulados com valores 0 ou 1 e suas folhas são grafos  $K_1$ . A subárvore enraizada em um nó da co-árvore representa o subgrafo induzido cujos vértices são as folhas da subárvore e, recursivamente: se um nó interno tem valor 0, este corresponde a união dos subgrafos que são seus filhos, e se tem valor 1, corresponde ao *join*.

**Teorema 4.17 (Lerchs [45] - 1971)** *Todo cografo admite ser representado por uma única co-árvore.*

**Teorema 4.18 (Corneil, Perl e Stewart [17] - 1985)** *Cografos podem ser reconhecidos e ter sua co-árvore obtida em tempo linear.*

**Teorema 4.19 (Chang e Kuo [15] - 1996)** *Existe algoritmo linear que encontra o span de uma  $\lambda$ -coloração ótima de cografos.*

**Prova.** Pelos Teoremas 4.17 e 4.18 sabe-se que todo cografo é representado por uma única co-árvore, e esta pode ser obtida em tempo linear.

Chang e Kuo [15] determinaram o valor do *span* de uma  $\lambda'$ -coloração ótima de um grafo  $G$  obtido por operação de união ou de *join* de outros grafos. Estes valores estão descritos nos Lemas 4.13 e 4.15, respectivamente, e são obtidos com complexidade de tempo constante. Como cada nó interno de uma co-árvore representa uma dessas duas operações, estes lemas nos fornecem trivialmente um algoritmo para encontrar o *span* de uma  $\lambda'$ -coloração ótima em cografos.

O número de vértices internos em uma co-árvore é linear (se o cografo tem  $n$  vértices, a sua co-árvore tem  $n$  folhas e, no nível acima, existem no máximo  $\frac{n}{2}$  vértices, e assim por diante), onde esses vértices representam o número de operações de união e *join* necessárias para construir o cografo que a co-árvore representa. Então, é possível obter o valor do *span* de uma  $\lambda'$ -coloração em tempo linear, e pelo Lema 4.10, será o mesmo *span* da  $\lambda$ -coloração.  $\square$

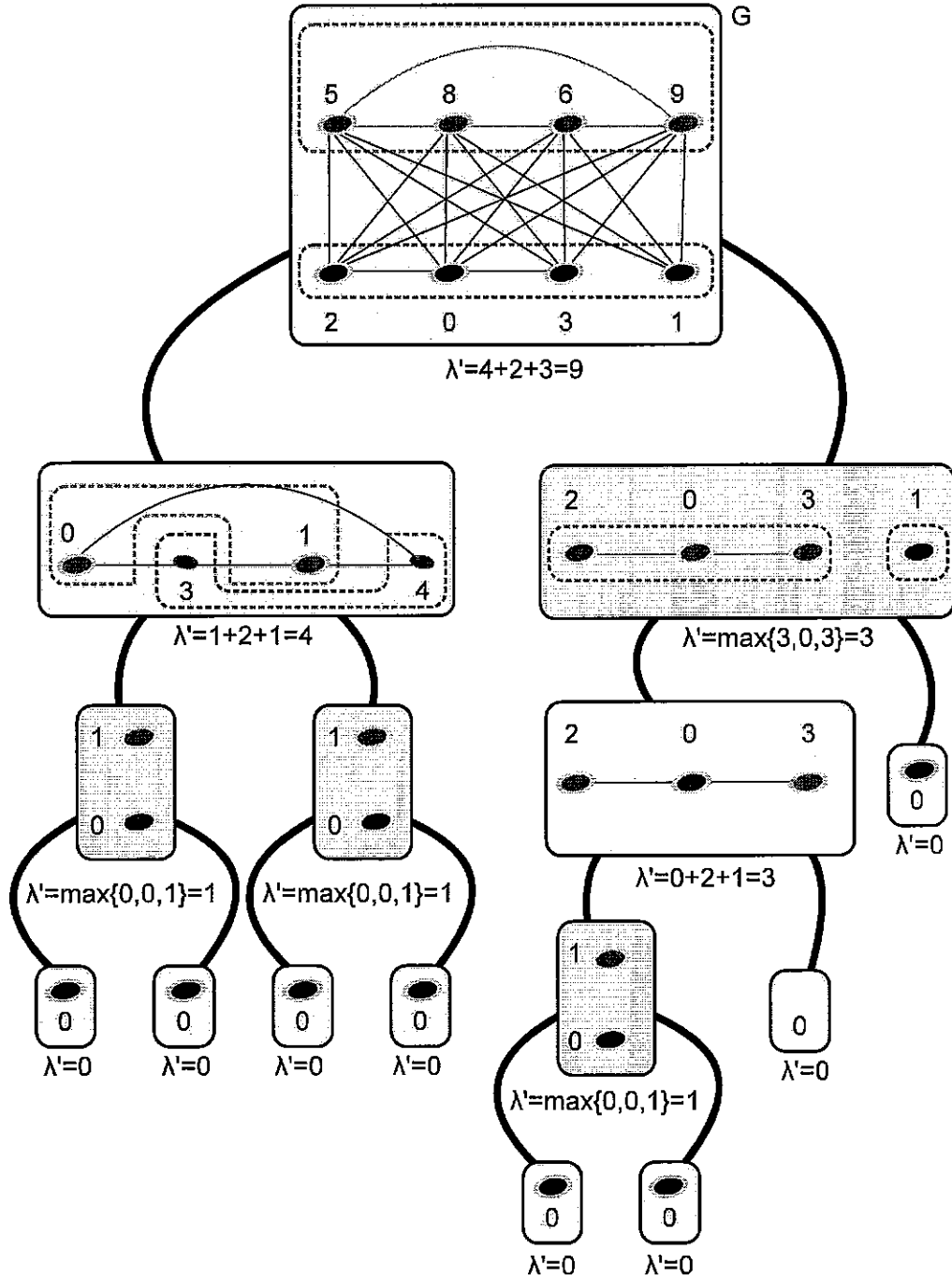


Figura 4.2: Algoritmo de Chang e Kuo para  $\lambda$ -coloração ótima em cografos

Na figura 4.2 é ilustrado um exemplo da aplicação do método descrito no Teorema 4.19 para encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima de um cografo. Além disso, é fornecida a atribuição de cores aos vértices em cada caso, como descrito nos Lemas 4.13 e 4.15.

## 4.5 Grafos grades regulares

Esta classe foi estudada por Calamoneri e Petreschi [12], em 2001. Como resultado, foi desenvolvido um algoritmo linear que fornece uma  $\lambda$ -coloração ótima para os grafos nesta classe, onde o *span* desta  $\lambda$ -coloração é  $\Delta + 2$ .

**Definição 4.4** O problema do ladrilhamento consiste em cobrir o plano com cópias de um mesmo polígono. Associa-se um grafo onde seus vértices vêm dos vértices dos polígonos da cobertura e suas arestas vêm exatamente das arestas dos polígonos. Os grafos obtidos desta maneira, com número finito de vértices, são chamados de grafos *grade*.

Os únicos polígonos regulares com os quais se consegue uma solução para o problema do ladrilhamento são o triângulo, o quadrado e o hexágono, estes são os únicos tipos de *grafos grades regulares*.

**Teorema 4.20** (Calamoneri e Petreschi [12] - 2001) *Existe  $\lambda$ -coloração com  $\text{span } \Delta + 2$  de grafos grades regulares.*

**Prova.** Esta prova é dada fornecendo uma  $\lambda$ -coloração de células desses grafos regulares, como ilustradas na figura 4.3. Em todos os casos, essas células mantêm a propriedade de utilizar no máximo a cor  $\Delta + 2$ . É aplicado um deslocamento das cores dessas células para as células vizinhas. As células vizinhas são distribuídas nas direções: cima (N), diagonal superior direita (NE), diagonal inferior direita (SE), baixo (S), diagonal inferior esquerda (SO), e diagonal superior esquerda (NO). A função  $g$  fornece  $\lambda$ -colorações de uma célula  $c_j$ , vizinha a  $c_i$  já colorida, da seguinte forma:

$$g(c_j) = \begin{cases} g(c_i) - 1 \text{ mod } (\Delta + 3), & \text{se } c_j \text{ for N} \\ g(c_i) - 2 \text{ mod } (\Delta + 3), & \text{se } c_j \text{ for NE} \\ g(c_i) - 1 \text{ mod } (\Delta + 3), & \text{se } c_j \text{ for SE} \\ g(c_i) + 1 \text{ mod } (\Delta + 3), & \text{se } c_j \text{ for S} \\ g(c_i) + 2 \text{ mod } (\Delta + 3), & \text{se } c_j \text{ for SO} \\ g(c_i) + 1 \text{ mod } (\Delta + 3), & \text{se } c_j \text{ for NO} \end{cases}$$

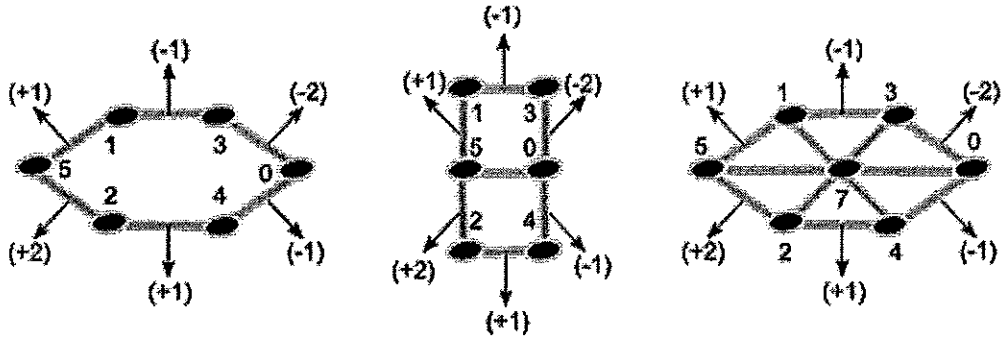


Figura 4.3:  $\lambda$ -coloração de células dos grafos grades com  $\Delta = 3, 4$  e  $6$ .

A prova da corretude deste método pode ser dada por construção, verificando que essa atribuição de cores aos vértices dos grafos grades regulares gera blocos de cores, como ilustrado nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6. A atribuição de cores desses blocos são  $\lambda$ -colorações e, como o deslocamento desses blocos nas 8 direções (cima, diagonal superior direita, direita, diagonal inferior direita, baixo, diagonal inferior esquerda, esquerda e diagonal superior esquerda) não desrespeita nenhuma restrição de  $\lambda$ -colorações entre os vértices desses blocos, então ao deslocar a atribuição de cores dos blocos aos blocos vizinhos, este método nos fornece uma  $\lambda$ -coloração para os grafos grades com  $span \Delta + 2$ .  $\square$

**Corolário 4.21** (Calamoneri e Petreschi [12] - 2001) *Grafos grades regulares têm  $span \Delta + 2$ .*

**Prova.** Ao cobrir o plano com um dos polígonos, cada célula definida na figura 4.3 terá células vizinhas e, portanto, existem pelo menos três vértices à distância 2 entre si com grau  $\Delta$  e, como um deles terá cor diferente de 0 e  $\Delta + 1$ , pelo Lema 2.15, estes grafos têm  $\lambda \geq \Delta + 2$ . A prova se completa com o resultado do Teorema 4.20.  $\square$

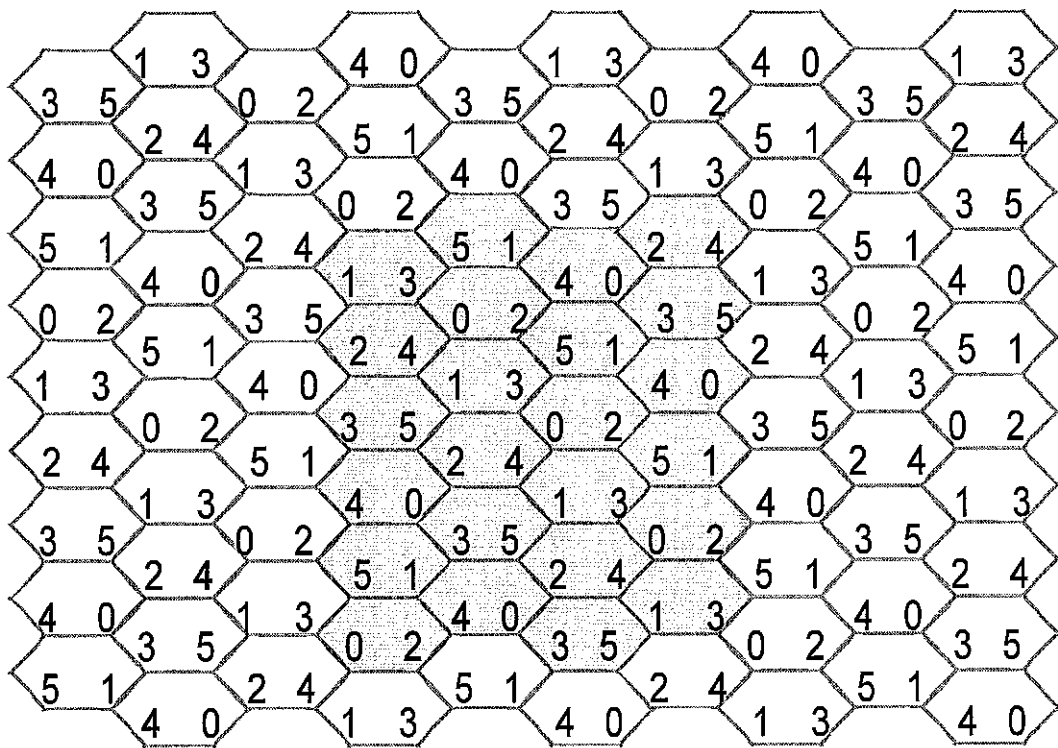


Figura 4.4:  $\lambda$ -coloração de um bloco dos grafos grades de hexágonos

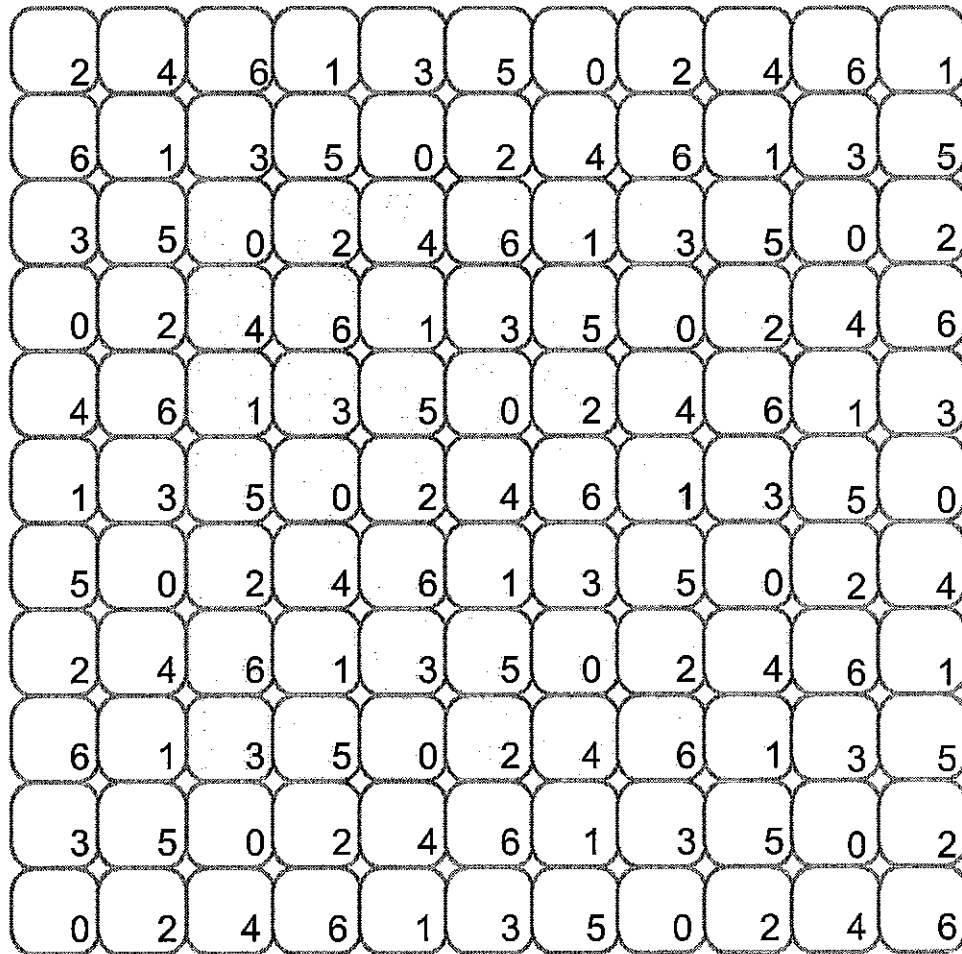


Figura 4.5:  $\lambda$ -coloração de um bloco dos grafos grades de quadrados

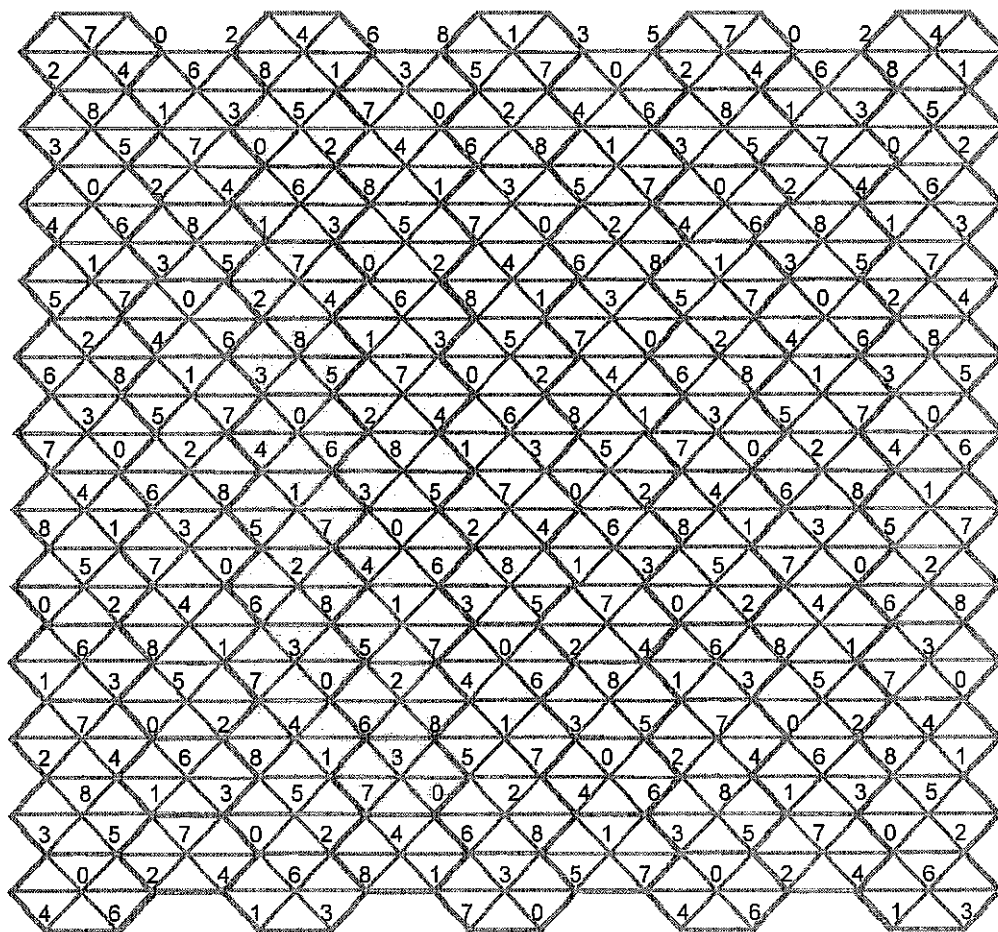


Figura 4.6:  $\lambda$ -coloração de um bloco dos grafos grades de triângulos

# Capítulo 5

## Algoritmos exponenciais

Neste capítulo são apresentados algoritmos exponenciais que encontram o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas de grafos, ou encontram o número de  $\lambda$ -colorações que existem com um determinado *span*. Inicialmente, é descrito o algoritmo guloso para este problema, e a prova de sua corretude é apresentada. Mais adiante, é apresentado o algoritmo de Kratochvil *et al.* [39] para verificar se um grafo tem uma  $\lambda$ -coloração com *span* fixo, sendo feita uma análise de complexidade mais refinada. A seguir, é fornecido uma variação do algoritmo de Zykov [66] para encontrar o número de  $\lambda$ -colorações de um grafo. Ao fim, é tratado o algoritmo de Král [43] para encontrar o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas e o número de  $\lambda$ -coloração com este *span*.

### 5.1 Algoritmo guloso para $\lambda$ -coloração ótima

A atribuição de cores em uma  $\lambda$ -coloração de um grafo utilizando uma abordagem gulosa é amplamente utilizada na literatura, sendo primeiramente descrita por Griggs e Yeh [28].

Como entrada deste algoritmo é fornecido um grafo  $G$  e uma ordenação  $O$  dos vértices de  $G$ . Cada vértice  $v$  mantém um conjunto de cores proibidas  $Pro(v)$ . E, como saída, é fornecido um inteiro  $k$  e uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de  $G$ . A abordagem gulosa consiste em processar os vértices, respeitando a ordenação  $O$ , de modo que cada vértice  $v$  receba a menor cor possível no intervalo  $\{0, \dots, k\}$ , ou seja, a menor cor não pertencente a  $Pro(v)$ . O algoritmo *LCG* ( $\lambda$ -coloração guloso) é apresentado a seguir:



LCG( $G, O$ )

**Entrada:** Grafo  $G = (V, E)$ , ordenação  $O = (v_1, \dots, v_n)$  dos vértices de  $G$ .

**Saída:** maior cor utilizada  $k$  e uma  $k$ - $\lambda$ -coloração  $f$  de  $G$ .

$k \leftarrow 0$

**para**  $v \leftarrow v_1, \dots, v_n$  **faça**

$f(v) \leftarrow -1$  /\* $v$  não está colorido/\*

**para**  $v \leftarrow v_1, \dots, v_n$  **faça**

$Pro(v) \leftarrow \emptyset$

**para cada**  $u \in N_1(v)$  **faça**

**se**  $f(u) \neq -1$  **então**

$Pro(v) \leftarrow Pro(v) \cup \{f(u), f(u) - 1, f(u) + 1\}$

**para cada**  $w \in N_1(u)$  **faça**

**se**  $f(w) \neq -1$  **então**

$Pro(v) \leftarrow Pro(v) \cup \{f(w)\}$

$f(v) \leftarrow \min\{0, \dots, 2n - 2\} \setminus Pro(v)$

$k \leftarrow \max\{f(v), k\}$

**retornar**  $k, f$

A corretude do algoritmo vem do fato que nenhum vértice  $v$  recebe cor com diferença de pelo menos dois de vértices em  $N_1(v)$ , nem cor igual de vértices em  $N_2(v)$ , já que essas cores pertencem ao conjunto de cores proibidas de  $v$ ,  $Pro(v)$ .

A complexidade deste algoritmo é  $O(n^2 + nm)$ . Esta é limitada pela necessidade de verificar, para cada vértice, as cores dos vértices em  $N_2(v)$ , o que pode ser feito em  $O(n + m)$ , utilizando uma busca em largura.

Em geral, dado um grafo  $G$ , existe pelo menos uma ordenação de  $V(G)$  na qual o algoritmo LCG encontra uma  $\lambda$ -coloração ótima. Porém, como o problema da  $\lambda$ -coloração é  $\mathcal{NP}$ -completo, não é esperado que obter esta ordem seja um problema fácil. A prova do Lema 5.1 especifica uma tal ordem.

**Lema 5.1** *Existe uma ordenação dos vértices de um grafo para a qual o algoritmo LCG obtém uma  $\lambda$ -coloração ótima.*

**Prova.** Seja  $(v_1, \dots, v_n)$  uma ordenação dos vértices de um grafo  $G$  obtida da

seguinte forma: em uma  $\lambda$ -coloração ótima do grafo, os vértices de mesma cor podem ser ordenados de qualquer maneira entre si, desde que os de cores menores apareçam antes na ordenação.

Ao aplicar o algoritmo LCG ao grafo com esta ordem, ele atribuirá cor 0 a todos os vértices que tinham cor 0 na  $\lambda$ -coloração ótima que gerou a ordem, pois estes vértices terão pelo menos distância 3 entre si (ou não teriam cor 0 na  $\lambda$ -coloração ótima). Quando LCG for atribuir cor aos vértices de cor 1, uma situação análoga ocorrerá: os vértices de cor 1 terão distância pelo menos 3 entre si e terão distância pelo menos 2 dos de cor 0. Assim, o algoritmo atribuirá sempre cores menores ou iguais às cores que os vértices de  $G$  têm na  $\lambda$ -coloração ótima que gerou a ordenação. Ao final da execução, o algoritmo LCG encontra uma  $\lambda$ -coloração com *span* menor ou igual ao da ótima e, portanto, também será ótima.  $\square$

Se o algoritmo LCG for aplicado a todas as ordenações possíveis dos vértices de  $G$ , pelo menos em uma delas é obtida uma  $\lambda$ -coloração ótima. O problema é a quantidade de ordenações possíveis dos vértices: este problema é equivalente à geração de todas as permutações de  $n$  elementos, que é  $O(n!)$ . Isto inviabiliza encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo com muitos vértices utilizando este método. Porém, muitas vezes uma ordenação com alguma propriedade específica pode garantir limites superiores.

## 5.2 Algoritmo de Kratochvíl, Kratsch e Liedloff para $k$ - $\lambda$ -coloração

Nesta seção o algoritmo exponencial de Kratochvíl *et al.* [39], de 2007, para encontrar uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de um grafo  $G$ , dado  $k \geq \lambda(G)$ , é apresentado. Até hoje, este algoritmo é o mais eficiente que se conhece em relação a complexidade de espaço. Já sua complexidade de tempo é um pouco menor que a obtida testando-se todas as atribuições possíveis de cores aos vértices.

Para facilitar o entendimento, o algoritmo, sua prova de corretude e sua análise de complexidade foram reescritos. Além disso, foi feita uma análise mais refinada do que a originalmente apresentada, para a sua complexidade.

```

LCKKL( $G, \kappa$ )

Entrada: Grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k \geq \lambda(G)$ .

Saída: uma  $k$ - $\lambda$ -coloração  $f$  de  $G$ .



---


    se existe vértice  $v \in V(G)$  não colorido adjacente a pelo menos um vértice
     $u$  já colorido então
        para cada  $c \in (\{0, \dots, k\} \setminus Pro(v))$  faça
             $f(v) \leftarrow c$ 
            LCKKL( $G, k$ )
        senão
            se existe vértice  $u \in V(G)$  não colorido então
                para cada  $c \in \{0, \dots, k\}$  faça
                     $f(u) \leftarrow c$ 
                    LCKKL( $G, k$ )
                senão
                    se  $f$  é uma  $\lambda$ -coloração então
                        retornar  $f$ 

```

**Teorema 5.2** (Kratochvíl *et al.* [39] - 2007) *O algoritmo LCKKL encontra uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de um grafo  $G$ , onde  $k \geq \lambda(G)$  é dado.*

**Prova.** Seja  $f$  uma  $k$ - $\lambda$ -coloração do algoritmo. Suponha, por absurdo, que o algoritmo não encontre nenhuma  $k$ - $\lambda$ -coloração de  $G$ . Particione os vértices em  $k+1$  conjuntos 2-estáveis, referentes as cores atribuídas por  $f$ . Como o algoritmo testa, para cada vértice  $v$ , todas as cores possíveis a menos das cores proibidas por vértices de  $N_1(v)$  e  $N_2(v)$ , existe chamada do algoritmo em que os vértices de  $G$  recebem as mesmas cores referentes aos conjuntos 2-estáveis. Ou seja, ou o algoritmo encontra, pelo menos, uma  $k$ - $\lambda$ -coloração, um absurdo.  $\square$

A seguir é fornecida a análise de complexidade de tempo do algoritmo *LCKKL*, feita por Kratochvíl *et al.* [39]. Mais adiante são dadas duas novas análises, mais apuradas.

**Teorema 5.3 (Kratochvíl *et al.* [39] - 2007)** *A complexidade de tempo do algoritmo LCKKL é  $O^*((k-1)^n)$  em um grafo  $G$ .*

**Prova.** No primeiro passo do algoritmo, quando nenhum vértice recebeu cor, são utilizadas  $k+1$  chamadas recursivas do algoritmo onde, em cada uma dessas chamadas, o primeiro vértice escolhido recebe injetivamente uma das  $k+1$  possíveis cores. A partir da segunda iteração, o algoritmo sempre escolhe vértices que são adjacentes a pelo menos um vértice que já tem cor atribuída. Como em uma  $\lambda$ -coloração vértices não podem receber cores com diferença menor que dois para as cores dos seus vértices adjacentes existem, no pior caso, 2 cores proibidas (se apenas um vértice adjacente tiver sido colorido com a cor 0 ou a cor  $k$ ) e, nas iterações seguintes do algoritmo, no máximo são feitas  $k-1$  chamadas recursivas, onde em cada uma delas o vértice atualmente tratado recebe injetivamente uma das  $k-1$  cores.

Na condição de retorno, no final das chamadas recursivas, é necessário fazer um teste se a atribuição de cores  $f$  é uma  $\lambda$ -coloração. Isto pode ser feito em  $p(n) = O(n^2 + nm)$  verificando em  $n$  buscas em largura, cada uma enraizada em um vértice distinto  $v$  de  $G$ , se os vértices em  $N_1(v)$  e  $N_2(v)$  recebem cores que respeitam as restrições de uma  $\lambda$ -coloração. Com isto, a complexidade deste algoritmo é dada por  $p(n)(k+1)(k-1)^{n-1} = p(n)[(k-1)^n + 2(k-1)^{n-1}] = O^*((k-1)^n)$ .  $\square$

**Corolário 5.4 (\*)** *A complexidade de tempo do algoritmo LCKKL é  $O^*((k-2)^n)$ .*

**Prova.** A análise da complexidade feita no Teorema 5.2 pode ser melhorada se for considerada a ordenação de uma árvore de largura  $T$  obtida por uma busca em largura em  $G$ . Utilizando esta ordenação, para cada vértice a partir da terceira iteração, o número máximo de cores possíveis atribuíveis ao vértice atual será  $k-2$ . Isto ocorre porque existe a mesma restrição de redução de 2 cores por causa do vértice pai na árvore de largura  $T$  obtida pela busca em largura e, além disso, existe pelo menos a redução de mais uma cor de: um vértice irmão em  $T$  ou de um vértice ancestral dois níveis acima em  $T$ . Com isto, a complexidade deste algoritmo pode ser dada por  $O^*((k+1)(k-1)(k-2)^{n-2}) = O^*((k-2)^n)$ .  $\square$

Na realidade, a complexidade de tempo deste algoritmo pode ser reduzida de forma considerável se for feita uma análise aprimorada do número de chamadas

recursivas que são realizadas ao não atribuir cores vindas de vértices adjacentes e de vértices à distância 2.

**Teorema 5.5 (\*)** *A complexidade de tempo do algoritmo LCKKL é  $O^*((k - \max\{2, \frac{n+1}{2\chi(G^2)} + \frac{1}{2}\})^n)$ .*

**Prova.** Seja  $G^2$  o grafo potência 2 obtido a partir de  $G$  e  $\overline{G^2}$  o seu complemento. Em uma coloração ótima  $c$  de  $\overline{G^2}$  vértices com cores iguais formam um conjunto independente que, em  $G^2$ , induz um subgrafo completo. Por sua vez, os vértices destes subgrafos induzidos completos em  $G^2$  induzem subgrafos diâmetro 2 em  $G$ . Seja  $I_j$  os conjuntos independentes formados por estes vértices de forma que  $1 \leq j \leq \chi(\overline{G^2})$  represente a cor que os vértices receberam na coloração  $c$  de  $\overline{G^2}$ .

Cada vez que um vértice pertencente a algum destes subgrafos diâmetro 2 em  $G$  é tratado pelo algoritmo, todos os outros vértices que pertencem ao subgrafo diâmetro 2 não podem receber a cor que este vértice recebeu e, como todo vértice estão à distância 2 entre si, estes sempre recebem cores diferentes. Ou seja, a cada vértice  $v$  tratado pelo algoritmo, o número de cores possíveis para vértices que pertencem a  $I_{f(v)}$  é reduzida em uma unidade.

Seja  $p(v)$  o número de chamadas recursivas do algoritmo por causa do vértice  $v$  utilizada pelo algoritmo LCKKL. Para o primeiro e segundo vértices, este número é dado por  $(k + 1)$  e  $(k - 1)$ , para todos os outros vértices do grafo, como estes são sempre adjacentes e à distância 2 a pelo menos dois vértices anteriores na ordenação, estes têm no máximo  $(k - 2)$  possibilidades de cores. E, seja  $P = \prod_{x \in V(G)} p(x)$  o número de chamadas recursivas realizadas pelo algoritmo.

Suponha, por absurdo, que  $P = \prod_{x \in V(G)} p(x)$  seja máximo entre grafos com  $n$  vértices e que os vértices não estejam distribuídos uniformemente entre os conjuntos independentes. Sejam dois destes conjuntos  $I_1$  e  $I_2$  tais que  $||I_1| - |I_2|| \geq 2$ . Se o último vértice  $z$  tratado pelo algoritmo, que esteja no conjunto com mais elementos, for deslocado para o conjunto com menos elementos, o valor de  $p(z)$  aumenta, não alterando os outros valores de  $p$ , ou seja,  $P$  não é máximo, uma contradição.

Com isso, pode-se afirmar que o valor máximo de  $P$  ocorre quando os vértices estão distribuídos uniformemente entre os conjuntos independentes. Neste caso, seja  $\frac{n-a}{\chi(\overline{G^2})}$  o valor inteiro com  $a$  mínimo, onde  $0 \leq a \leq \chi(\overline{G^2}) - 1$ . O valor máximo de  $P$

é dado por  $((k-1)(k-1)(k-2)\dots(k-\frac{n-a}{\chi(G^2)}))\chi(G^2)(k-b)^a$ , onde  $b \geq \frac{n-a}{\chi(G^2)}$ , pois os  $a$  elementos são os últimos a serem tratados pelo algoritmo em cada conjunto independente.

E, tem-se que  $P \leq O^*((k - \max\{2, \frac{n-a}{2\chi(G^2)}\})^{\frac{n-a}{\chi(G^2)}}\chi(G^2)(k - \max\{2, \frac{n-a}{2\chi(G^2)}\})^a) = O^*((k - \max\{2, \frac{n-a}{2\chi(G^2)}\})^{n-a}(k - \max\{2, \frac{n-a}{2\chi(G^2)}\})^a) = O^*((k - \max\{2, \frac{n+1}{2\chi(G^2)} + \frac{1}{2}\})^n)$ . Então, o algoritmo *LCKKL* tem complexidade  $O^*((k - \max\{2, \frac{n+1}{2\chi(G^2)} + \frac{1}{2}\})^n)$ .  $\square$

**Teorema 5.6 (\*)** *A complexidade de espaço do algoritmo LCKKL é  $O(n+m)$ .*

**Prova.** Neste algoritmo, a complexidade de espaço é dominada pela necessidade de guardar um grafo  $G$  (se o grafo for considerado uma variável global), onde cada vértice tem uma cor pré estabelecida (que é apagada na volta de cada chamada recursiva do algoritmo), esta complexidade é dada por  $O(n+m)$  se o grafo for armazenado utilizando listas de adjacências. Vale ressaltar que ao transformar o grafo em uma variável global você está inviabilizando qualquer tipo de programação em paralelo deste algoritmo, não interessando se a memória for compartilhada ou distribuída. Para implementar uma versão em paralelo desta algoritmo, mantenha a passagem do grafo como parâmetro da função recursiva, mas neste caso, a complexidade de espaço será dado por  $O(n^2 + nm)$ , já que na volta da recursão o grafo pode ser apagado, e no máximo teremos  $n$  grafos sendo armazenados referentes ao ramo atual das escolhas dos  $n$  vértices para atribuição de cores.  $\square$

O problema para encontrar a  $\lambda$ -coloração ótima para grafos com diâmetro 2 foi provador ser  $\mathcal{NP}$ -completo por Griggs e Yeh [28] e para a classe dos grafos *split*, esta prova foi feita por Bodlaender et al. [7]

**Corolário 5.7 (\*)** *Para grafos diâmetro 2, a complexidade de tempo do algoritmo LCKKL é  $O^*((k - \max\{2, \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\})^n)$*

**Prova.**

Para este caso, como  $\chi(G^2) = 1$ , a complexidade do algoritmo feita no Teorema 5.6 fica bem reduzida em relação a análise de complexidade dada por Kratochvíl et al. [39]. Neste caso, pode-se dizer que o algoritmo tem complexidade  $O^*((k - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2})^n)$ .  $\square$

**Corolário 5.8 (\*)** Para um grafo split  $G = (K, I)$ , a complexidade de tempo do algoritmo LCKKL é  $O^*((k - \max\{2, \frac{|I|+|K|+1}{2|K|+2} + \frac{1}{2}\})^n)$ .

**Prova.**

Para este caso, como  $\chi(\overline{G^2}) \leq |K|+1$  e  $n = |I|+|K|$ , a complexidade do algoritmo feita no Teorema 5.6 pode ser dada por  $O^*((k - \max\{2, \frac{|I|+|K|+1}{2|K|+1} + \frac{1}{2}\})^n)$ .  $\square$

### 5.3 Algoritmo para o número de $k$ - $\lambda$ -colorações

No estudo do problema da  $\lambda$ -coloração não foi encontrado nenhum algoritmo que fornecesse o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações de um grafo  $G$  utilizando complexidade de espaço polinomial. Este algoritmo, já estudado para o problema da coloração (vide  $PCZykou(G, k)$ ), teve sua versão para  $\lambda$ -coloração feita neste trabalho, se baseando no algoritmo de Zykov [66]. E, para o seu entendimento, são fornecidos alguns conceitos.

**Notação 5.1** Denota-se por  $PC(G, k)$  (*polinômio cromático*) o número de  $k$ -colorações de um grafo  $G$  e  $\lambda PC(G, k)$  (*polinômio  $\lambda$ -cromático*) o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações de  $G$ .

**Definição 5.1** Em um grafo  $G = (V, E)$  e uma aresta  $uv \in E(G)$ , o grafo obtido pela operação  $E - \{uv\}$  é o grafo  $G$  sem a aresta  $uv$  e, o grafo obtido pela operação  $E/\{uv\}$  é o grafo  $G$ , retirando os vértices  $u$  e  $v$  e suas adjacências e adicionando um vértice  $uv$  com as mesmas adjacências de  $u$  e  $v$  a menos da aresta  $uv$ .

**Definição 5.2** A sequência  $F$  de *Fibonacci* é:  $F(0) = 0$ ;  $F(1) = 1$ ; e, para  $i \geq 2$ ,  $F(i) = F(i-1) + F(i-2)$ .

**Definição 5.3** A sequência  $F_k$  de  *$k$ -Fibonacci* é:  $F_k(0) = 0$ ;  $F_k(1) = 1$ ; e, para  $i \geq 2$ ,  $F_k(i) = kF_k(i-1) + F_k(i-2)$ .

**Teorema 5.9 (Graham et al. [27] - 1989)** O  $n$ -ésimo número da sequência de *Fibonacci* é  $F(n) = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5}2^n}$ .

**Teorema 5.10 (Falcon e Plaza [20] - 2007)** O  $n$ -ésimo número da sequência de  *$k$ -Fibonacci* é  $F_k(n) = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}((\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2})^n - (\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2})^n)$ .

$PCZykov(G = (V, E), k)$

**Entrada:** Grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k$ .

**Saída:**  $PC(G, k)$  (o número de  $k$ -colorações de  $G$ ).

---

se  $E(G) = \emptyset$  então

**retornar**  $k^n$

senão

    Seja  $e \in E(G)$

**retornar**  $PCZykov((V, E - \{e\}), k) - PCZykov((V', E/\{e\}), k)$

O algoritmo para encontrar  $\lambda PC(G, k)$  (baseados no algoritmo de Zykov [66]), a prova de sua corretude e a análise de sua complexidade são dados a seguir. Este algoritmo recebe como entrada um inteiro  $k$  e o grafo  $G^2 = (V, E_1, E_2, E_3)$ , onde as arestas  $E_1$  são de  $G$ ,  $E_2$  as de  $G^2$  que não estão em  $G$  e as arestas  $E_3$  são arestas auxiliares utilizadas nas chamadas recursivas do algoritmo.



$\lambda PCCP(G^2, k)$

**Entrada:** Grafo  $G^2 = (V, E_1, E_2, E_3)$  e um inteiro positivo  $k$ .

**Saída:**  $\lambda PC(G, k)$  (o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações de  $G$ ).

se  $E_1 \cup E_2 = \emptyset$  então %(Passo 1)

seja  $c : V(G^2) \rightarrow \mathbb{N}$

Seja  $G' = (V, E_3)$  ignorando as direções das arestas de  $E_3$ .

Separe  $G'$  em  $1 \leq j \leq n$  componentes conexas.

$I_j \leftarrow 0, 1 \leq j \leq n$ .

para  $i \in \{0, \dots, k\}$  faça

para cada  $j$  faça

escolha vértice  $x$  da componente conexa  $j$

$c(x) \leftarrow i$

para cada  $\vec{uv}$  ou  $\overleftarrow{uv} \in E_3$  visitada por uma busca em largura em uma componente conexa  $j$  de  $G'$  enraizada em  $x$  faça

se  $\vec{uv} \in E_3$  e: a)  $c(v) = \emptyset$  ou; b)  $c(u) = \emptyset$  então

a)  $c(v) \leftarrow c(u) + 1$ ; b)  $c(u) \leftarrow c(v) - 1$ ;

senão se  $\overleftarrow{uv} \in E_3$  e: a)  $c(v) = \emptyset$  ou; b)  $c(u) = \emptyset$  então

a)  $c(v) \leftarrow c(u) - 1$ ; b)  $c(u) \leftarrow c(v) + 1$ ;

para cada aresta  $e \in E_3$  faça

se existem dois vértices com cores inválidas então

parar pois não é uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de  $G'$ .

$I[j] \leftarrow I[j] + 1$

retornar  $\prod_{1 \leq j \leq n} I[j]$

senão seja  $uv \in E_1 \cup E_2$  %(Passo 2)

se  $uv \in E_2$  então

retornar  $\lambda PCCP((V, E_1, (E_2 - \{uv\}), E_3), k) -$

$\lambda PCCP((V, E_1, (E_2/\{uv\}), E_3), k)$

senão retornar  $\lambda PCCP((V, (E_1 - \{uv\}), E_2, E_3), k) -$

$\lambda PCCP((V, (E_1/\{uv\}), E_2, E_3), k) - \lambda PCCP((V, (E_1 - \{uv\}), E_2, E_3 \cup \{\vec{uv}\}), k) - \lambda PCCP((V, (E_1 - \{uv\}), E_2, E_3 \cup \{\overleftarrow{uv}\}), k)$

**Teorema 5.11 (\*)** *O algoritmo  $\lambda PCCP(G, k)$  encontra  $\lambda PC(G, k)$ , o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações de um grafo.*

**Prova.** Como visto por Král e Skrekovski [44] no Teorema 3.17, uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de um grafo  $G$  é equivalente a uma *lista*- $\lambda$ -coloração de canais própria com intervalo  $\{1, \dots, k + 1\}$  como a lista de cores dos vértice (que é aplicada em um grafo  $G^2 = (V, E_1, E_2)$ , onde  $E_1 = E(G)$  e  $E_2 = (E(G^2) \setminus E(G))$ ). Então, o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações de um grafo  $G$  é equivalente ao número de *lista*-colorações de canais acima descrita. Este número é dado por  $\lambda PC2(G^2, k)$ .

(i) Se  $uv \in (E_2 - E_1)$ ,  $\lambda PC2(G^2, k) = \lambda PC2(G^2 = (V, E_1, E_2 - \{uv\}, E_3), k) - \lambda PC(G = (V, E_1, E_2/\{uv\}, E_3), k)$ . Isto porque, ao retirar a aresta  $uv$  de  $(E(G^2) \setminus E(G))$ , gera-se todas as *lista*-colorações de canais onde  $u$  e  $v$  têm cores diferentes e também as que têm cores iguais. No entanto, quando os vértices  $u$  e  $v$  são condensados, estes mantêm a mesma cor, sendo geradas todas as *lista*-colorações de canais onde  $u$  e  $v$  têm a mesma cor. Se esses valores forem subtraídos, obtém-se  $\lambda PC2(G^2, k)$ .

(ii) Se  $uv \in (E_2 \cap E_1)$ ,  $\lambda PC2(G^2, k) = \lambda PC2(G^2 = (V, E_1 - \{uv\}, E_2, E_3), k) - \lambda PC2(G^2 = (V, E_1/\{uv\}, E_2, E_3), k) - \lambda PC2(G^2 = (V, (E_1/\{uv\}), E_2, E_3 \cup \{\overrightarrow{uv}\}), k) - \lambda PC2(G^2 = (V, (E_1/\{uv\}, E_2, E_3 \cup \{\overleftarrow{uv}\}), k)$ . Isto porque, ao retirar a aresta  $uv$  de  $G^2$ , gera-se todas as *lista*-colorações de canais onde  $u$  e  $v$  tem a mesma cor, cores com diferença de pelo menos um e cores com diferenças maiores. No entanto, quando os vértices  $u$  e  $v$  são condensados, estes mantêm a mesma cor, sendo gerados todas as *lista*-colorações de canais onde  $u$  e  $v$  tenham a mesma cor. A seguir, são introduzidas arestas direcionadas que forçam os vértices  $u$  e  $v$  a terem cores com diferença igual a um, sendo geradas todas as *lista*-colorações de canais para estes casos. Com isso, pode-se obter o valor de  $\lambda PC2(G^2, k)$  utilizando estes valores.

No (*Passo2*), o algoritmo aplica recursivamente as regras (i) e (ii), retirando a cada iteração uma aresta de  $G^2$ , condensando ou não vértices e adicionando ou não arestas direcionadas que só são consideradas na condição de retorno do algoritmo, que é chamada quando todas as arestas pertencentes a  $G^2$  forem tratadas.

O (*Passo1*) funciona como a condição de retorno da recursão, quando existem apenas arestas direcionadas. Neste caso, é necessário encontrar quantas *lista*-

colorações de canais existem para este grafo, onde se  $\vec{uv} \in (E(G^2) \setminus E(G))$ , só são consideradas as *lista*-colorações de canais  $f$  onde  $f(u) = f(v) + 1$ .

Para cada uma das  $j$  componentes conexas de  $G = (V, E_3)$  ignorando as direções das arestas, onde  $E_3$  é formado pelas arestas direcionadas adicionadas pelo algoritmo, é escolhido um vértice qualquer. E, para cada um desses vértices, todas as cores são testadas, atribuindo as cores aos vértices a partir de uma busca em largura e verificando posteriormente se os vértices da componente conexa não desrespeitam as diferenças de cores que essas arestas direcionadas correspondem. Por exemplo, não existem ciclos formados por essas arestas direcionadas, senão existe vértice que precisa ter duas cores diferentes. Além disso, como todos os vértices da componente conexa são alcançados por essas arestas direcionadas e, essas arestas determinam unicamente o valor da cor dos outros vértices dessa componente conexa, então ao fornecer uma cor a qualquer vértice dessa componente conexa, o resto das cores da *lista*-colorações de canais nesta componente conexa é determinado de forma única.

Como não existem arestas direcionadas entre as componentes conexas, então pode-se determinar o valor de  $\lambda PC2(G^2, k)$  como sendo o produtório entre o número de possibilidades de *lista*-colorações de canais para cada uma das componentes conexas de  $G^2$ .  $\square$

**Lema 5.12 (\*)** *Sejam  $G^2$  o grafo potência 2 de  $G = (V, E)$  e o conjunto  $E_2 = (E(G^2) \setminus E(G))$  as arestas em  $G^2$  que não estão em  $G$ . A complexidade do algoritmo  $\lambda PCCP(G, k)$  é  $O^*(2^{|E|} 4^{|E_2|})$ .*

**Prova.** A análise da complexidade deste algoritmo é baseada na feita por Wilf [65] para o algoritmo de Zykov [66].

Para a chamada do algoritmo, é necessário gerar o grafo potência 2  $G^2$  de  $G$  e particionar suas arestas em  $E_1 = E(G)$  e  $E_2 = (E(G^2) \setminus E(G))$ . Para ambos, a complexidade envolvida é da ordem de  $O(n^2)$ .

No segundo passo do algoritmo, uma relação de recorrência é feita dependendo do tipo da aresta de  $G^2$ . Como explicado no Teorema 5.11, na *lista*-coloração de canais de  $G^2$ , as arestas  $E_2$  recebem peso 1 e as arestas em  $E$  recebem peso 2.

Seja  $F(G^2 = (V, E \cup E_2), k)$  o custo das chamadas recursivas feitas pelo algoritmo até chegar a condição de retorno, utilizando *span*  $k$ . Se a aresta  $uv$  atualmente tra-

tada pertencer a  $E_2$ , a relação de recorrência é dada por  $F((|V|, |E \cup E_2|), k) = F((V, |E \cup E_2| - 1), k) + F((|V| - 2, |E \cup E_2| - 1), k) + O(|E \cup E_2|)$ . E, se a aresta pertencer a  $E$  o custo das chamadas recursivas será:  $F((|V|, |E \cup E_2|), k) = F((V, |E \cup E_2| - 1), k) + F((|V| - 2, |E \cup E_2| - 1), k) + F((V, |E \cup E_2| - 1), k) + F((V, |E \cup E_2| - 1), k) + O(|E \cup E_2|)$ .

No primeiro caso, como a cada iteração uma aresta está sendo retirada de  $E_2$ , pode-se limitar assintoticamente essa função por outra função  $F'(|E_2|) = 2F'(|E_2| - 1) + O(|E \cup E_2|)$ . Seja  $F'(n) = 2^n y_n$ , substituindo este valor, tem-se  $y_{n+1} = y_n + \frac{(n+|E|)}{2^{n+1}}$ . Além disso,  $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i + |E|}{2^{n+1}}$ . Sendo  $F'(n) = 2^n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i + |E|}{2^{n+1}} = O^*(2^n) = O^*(2^{|E_2|})$ .

No segundo caso, como a cada iteração uma aresta está sendo retirada de  $E$ , pode-se limitar assintoticamente esta função por outra função  $F''(|E|) = 4F''(|E| - 1) + O(|E \cup E_2|)$ . Seguindo o mesmo raciocínio anterior, obtém-se que esta função é  $O^*(4^{|E|})$ .

No primeiro passo, que corresponde a condição de retorno do algoritmo, quando não existem mais arestas em  $G^2$ , somente as arestas auxiliares que foram acrescentadas para fixar a cor de alguns vértices, a complexidade é polinomial  $O(p(n))$ . Isto porque as complexidades de encontrar as componentes conexas de um grafo e verificar se todas as  $k \leq 2n - 2$  cores respeitam as características necessárias para estas componentes conexas se a cor  $k$  for dada a algum vértice desta componente é igual a da utilização de  $O(kn)$  buscas em larguras, que por sua vez tem complexidade  $O(n + m)$ .

Como o algoritmo aplica a cada iteração uma das duas chamadas de recursão, dependendo do tipo da aresta e, a cada vez que a recursão é aplicada, trata-se menos uma aresta do grafo  $G^2$ , a complexidade do algoritmo pode ser dada por  $O^*((2^{|E_2|} 4^{|E|})p(n)) = O^*(2^{|E_2|} 4^{|E|})$ .  $\square$

A figura 5.1 ilustra o funcionamento das chamadas recursivas deste algoritmo onde, se a aresta escolhida (representada por seus extremos com cores escuras) pertencer a  $E$  (representada por linhas) então o algoritmo se ramifica em 4 chamadas recursivas (o que ocorre nos casos 1, 3, 4 e 6) e, se a aresta pertencer a  $E_2$  (representada por arestas pontilhadas), então se ramifica em 2 (o que ocorre nos casos 2

e 5). No final, o numero de folhas nessas ramificações será  $2^{|E_2|}4^{|E|}$  e, a cada uma delas, será aplicado a condição de retorno com complexidade polinomial.

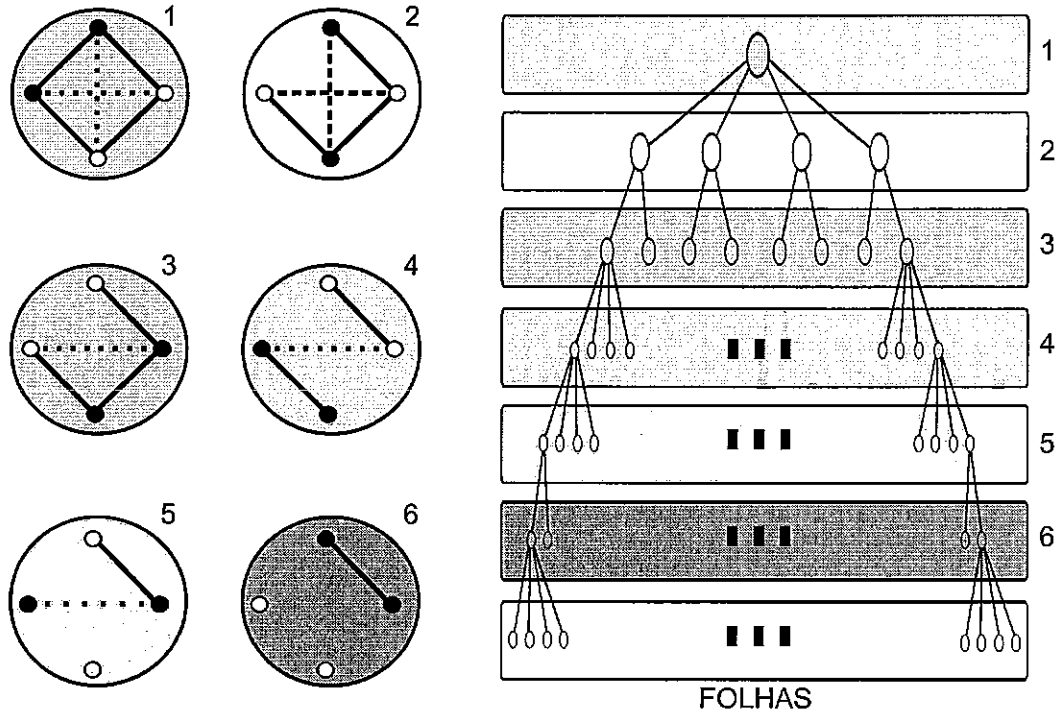


Figura 5.1: Árvore representando as chamadas recursivas do algoritmo  $\lambda PCCP$

**Teorema 5.13 (\*)** *Sejam  $G^2$  o grafo potência 2 de  $G = (V, E)$  e  $E_2 = E(G^2) - E(G)$  o conjunto de arestas em  $G^2$  que não estejam em  $G$ . A complexidade do algoritmo  $\lambda PCCP(G, k)$  é  $O^*(\min\{2^{|E_2|}, 1.6181^{|V|+|E_2|}\} \min\{4^{|E|}, 3.3028^{|V|+|E|}\})$ .*

**Prova.** Utilizando a mesma abordagem do Lema 5.12, pode-se obter uma análise de complexidade mais refinada (também baseado no melhoramento feito por Wilf [65] para o algoritmo de Zykov [66]), estabelecendo uma relação entre as chamadas recursivas do nosso problema e a relação de Fibonacci, do Teorema 5.9.

Seja  $h = |V| + |E_2|$ , a recursão das arestas que estejam em  $E_2$  é dada por  $\lambda PCCP(G = (V, E, (E_2 - \{e\}), E_3), k) - \lambda PCCP(G = (V, E, (E_2/\{e\}), E_3), k)$ .  $E$ , o número de vezes que essa recursão é chamada pode ser dado por  $F'(V, E) = F'(V, E_2 - 1) + F'(V - 1, E_2 - 1)$  e limitado superiormente por uma função  $P'(h) = P'(h - 1) + P'(h - 2)$ , já que em ambos os casos, quando o número de arestas ou o número de vértices chega a zero, não é feita mas nenhuma recursão deste tipo.  $E$ , pelo Teorema 5.9,  $P'(h) = O(1.6181^h) = O(1.6181^{|V|+|E_2|})$ .

A recursão das arestas que estejam em  $E$  é dada por  $\lambda PCCP(G = (V, (E_1 - \{uv\}), E_2, E_3), k) - \lambda PCCP(G = (V, (E_1/\{uv\}), E_2, E_3), k) - \lambda PCCP(G = (V, (E_1 - \{uv\}), E_2, E_3 \cup \{\overrightarrow{uv}\}), k) - \lambda PCCP(G = (V, (E_1 - \{uv\}), E_2, E_3 \cup \{\overleftarrow{uv}\}), k)$ .  $E$ , o número de vezes que essa recursão é chamada pode ser dado por  $F''(V, E) = 3F''(V, E-1) + F''(V-1, E-1)$ . Seja  $h = |V| + |E|$ , esta função pode ser limitada superiormente por uma função  $P''(h) = 3P''(h-1) + P''(h-2)$ . E, pelo Teorema 5.10, como esta sequência é 3-Fibonacci, então  $P''(h) = O(3.3028^h) = O(3.3028^{|V|+|E|})$ .

Como verificado no Lema 5.12, a complexidade do algoritmo  $\lambda PCCP$  será  $O^*(P'(h)P''(h))$ . Estes valores são dados como os mínimos obtidos entre os do Lema 5.12 e os descritos acima, sendo  $O^*(\min\{2^{|E_2|}, 1.6181^{|V|+|E_2|}\} \min\{4^{|E|}, 3.3028^{|V|+|E|}\})$ .  $\square$

As figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 e 5.6 ilustram a aplicação do algoritmo  $\lambda PCCP$  no grafo  $P_3$ , fixando o seu  $span$  em 3. Para este caso, sabe-se que  $\lambda PCCP(P_3, 3) = 4$ , já que só existem 4 atribuições das cores  $\{0, 1, 2, 3\}$  aos vértices  $(v_1, v_2, v_3)$  de  $P_3$  que são  $\lambda$ -colorações (as atribuições são:  $(0, 3, 1), (1, 3, 0), (2, 0, 3), (3, 0, 2)$ ).

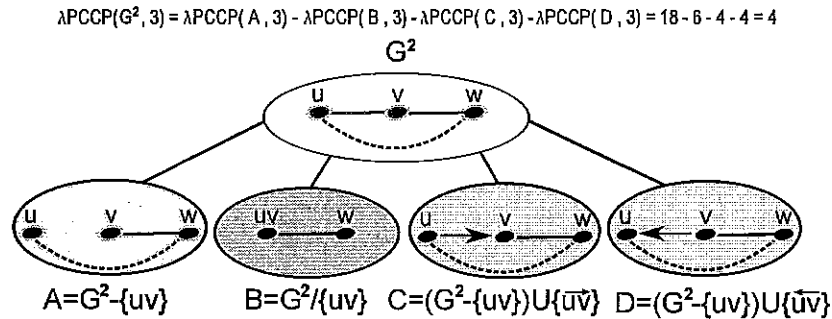


Figura 5.2: Aplicação do algoritmo  $\lambda PCCP(P_3, 3)$

**Teorema 5.14 (\*)** *A complexidade de espaço do algoritmo  $\lambda PCCP$  em um grafo  $G$  é  $O(|V(G^2)||E(G^2)| + |E(G^2)||E(G)|)$ .*

**Prova.** Neste algoritmo, a complexidade de espaço é dominada pela necessidade de guardar  $|E(G^2)|$  grafos  $G$ , esta complexidade é dada por  $O(|V(G^2)||E(G^2)| + |E(G^2)||E(G)|)$  se o grafo for armazenado utilizando listas de adjacência. Isto porque, se o algoritmo realizar as chamadas recursivas de adicionar ou retirar arestas

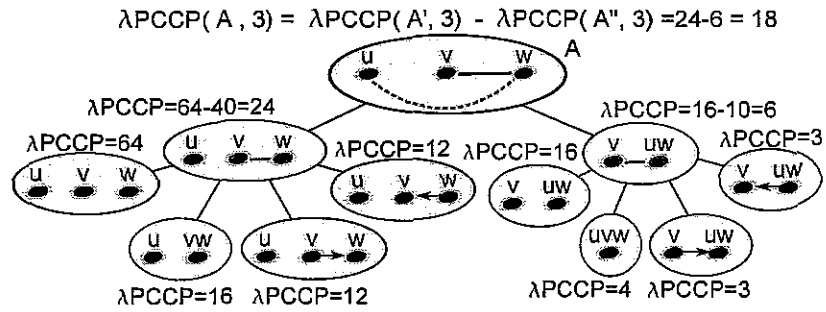


Figura 5.3: Aplicação do algoritmo  $\lambda PCCP(A, 3)$

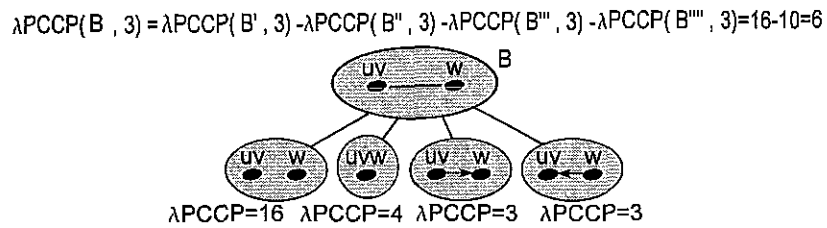


Figura 5.4: Aplicação do algoritmo  $\lambda PCCP(B, 3)$

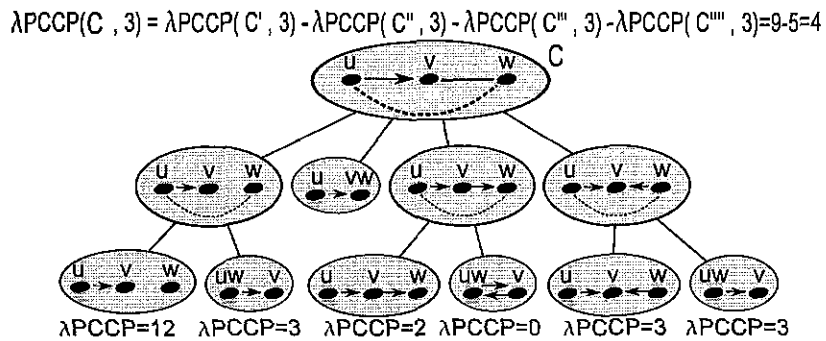


Figura 5.5: Aplicação do algoritmo  $\lambda PCCP(C, 3)$

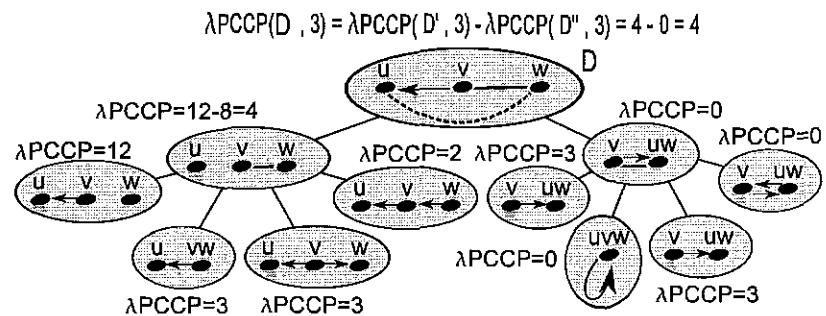


Figura 5.6: Aplicação do algoritmo  $\lambda PCCP(D, 3)$

seguinto a ordenação obtida por uma busca em profundidade, no pior caso, só são necessário manter  $|E(G^2)|$  grafos, limitado pelo tamanho do maior caminho entre

a raiz e a folha, que representa a condição de retorno do algoritmo (basta quando retornar da recursão, apagar o grafo utilizado).  $\square$

## 5.4 Algoritmo de Král para $\lambda$ -coloração ótima e número de $k$ - $\lambda$ -colorações

Král [43], em 2005, desenvolveu um algoritmo que encontra uma  $\lambda$ -coloração ótima para um grafo  $G$  e, além disso, o utilizou para calcular o número  $\lambda PC(G, k)$  de  $k$ - $\lambda$ -colorações de um grafo  $G$  com *span*  $k$ .

Este algoritmo tem complexidade de tempo  $O(n(4^n))$  e espaço  $O(4^n)$ . A maior desvantagem deste algoritmo em relação ao algoritmo de Kratochvíl *et al.* [39] e da alteração do algoritmo de Zykov [66] é a complexidade de espaço. O algoritmo de Král tendo complexidade de espaço exponencial, enquanto o de Kratochvíl *et al.* e a alteração do algoritmo de Zykov têm complexidade polinomial.

### Ideia do algoritmo

Seja  $f$  uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de  $G$ , como descrita pela figura 5.7, onde os vértices estão distribuídos por conjuntos  $I_i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) de acordo com a cor que recebem pela função  $f$ . Esta  $k$ - $\lambda$ -coloração pode ser definida, como ilustrado na figura 5.7, por uma sequência de duplas de conjuntos  $(I'_j, I'_{j+1})$ ,  $0 \leq j \leq k-1$  (onde  $I'_k = \emptyset$  para  $k < 0$ ). Como provado no Teorema 5.15, esses pares representam uma  $k$ - $\lambda$ -coloração se e somente se em uma *lista*- $\lambda$ -coloração de canais, os vértices em  $(I'_j \setminus I'_{j-1}) \cup (I'_{j+1} \setminus I'_j)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$ , induzem um subgrafo em  $G^2$  que só tenha arestas de peso 1 entre esses conjuntos de vértices e essa sequência de conjuntos contenha todos os vértices do grafo.

O algoritmo gera todas as no máximo  $3^n$  possibilidades dos  $n$  vértices de  $G$  estarem distribuídos entre pares de conjuntos consecutivos  $(I'_1, I'_2)$  (cada vértice pode estar no primeiro conjunto e no segundo conjunto, só no segundo conjunto, ou em nenhum deles) e, para cada uma dessas possibilidades que  $(I'_2 \setminus I'_1)$  é um conjunto independente em  $G^2$  e  $I'_1 \subseteq I'_2$  é relacionada injetivamente a um vértice de um grafo  $H$ .



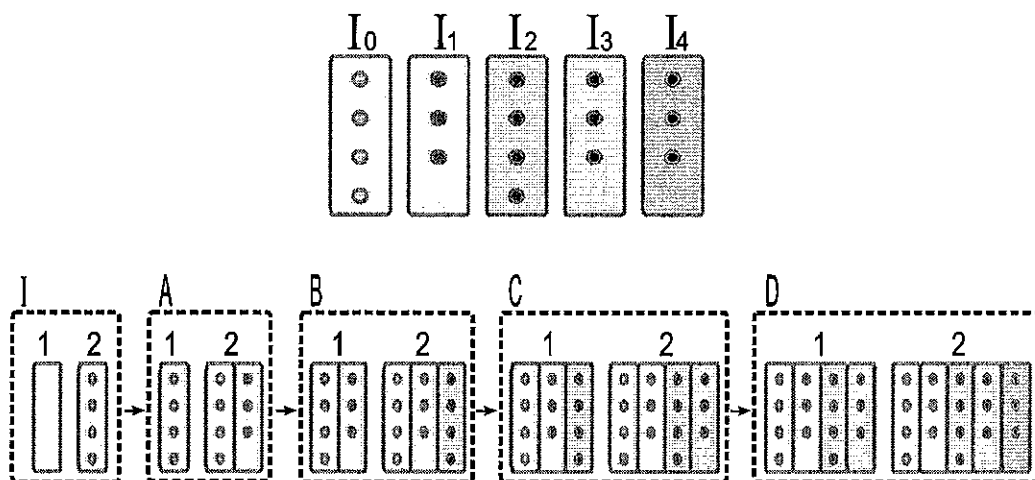


Figura 5.7: Representação de uma  $\lambda$ -coloração

A seguir, são geradas todas as no máximo  $4^n$  possibilidades dos  $n$  vértices de  $G$  estarem distribuídos entre três conjuntos consecutivos  $(I'_1, I'_2, I'_3)$ , onde esta é válida se: só existirem arestas de peso 1 entre elementos de  $(I'_3 \setminus I'_2)$  e  $(I'_2 \setminus I'_1)$ ;  $(I'_1, I'_2)$  e  $(I'_2, I'_3)$  são vértices de  $H$ ; e  $(I'_1 \subseteq I'_2 \subseteq I'_3)$ . Para cada uma dessas possibilidades válidas é adicionada um arco entre dois vértices  $h_1$  e  $h_2$  de  $H$ , onde o segundo conjunto de  $h_1$  é igual ao primeiro de  $h_2$  e  $(h_1 \setminus h_2) \cup h_2$  forma os três conjuntos consecutivos sendo tratados pelo algoritmo.

Por exemplo, na figura 5.7, quando for gerado os três conjuntos  $((I_0 \cup I_1), (I_0 \cup I_1 \cup I_2), (I_0 \cup I_1 \cup I_2 \cup I_3))$  como uma das no máximo  $4^n$  possibilidades válidas de três conjuntos consecutivos, o vértice  $h_b$  é representado pelo conjunto  $B$ , o vértice  $h_c$  é representado pelo conjunto  $C$  e existe arco de  $h_b$  para  $h_c$ .

O algoritmo encontra então o menor caminho em  $H$  entre um vértice  $h_{-1} \in V(H)$  (onde os pares de conjuntos estejam vazios) e um vértice  $h_k \in V(H)$  (onde todos os vértices dos grafos estejam em um dos conjuntos de  $h_k$ ), que representa uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G$  com *span*  $k$  se os conjuntos vazios  $(h_{-1})$  no início desse caminho de  $H$  forem desconsiderados e, se na procura deste caminho, for verificada a necessidade ou não de se entrar em um *loop* do digrafo  $H$ .

**Algoritmo, prova de corretude e análise de suas complexidades**

$LCKral(G^2, w)$

**Entrada:** Grafo  $G^2$  e uma função  $w$  ( $w(e) = 2$  se  $e \in E(G)$  e  $w(e) = 1$  se  $e \in (E(G^2) \setminus E(G))$ ).

**Saída:** uma função  $f$   $\lambda$ -coloração ótima de  $G$ .

Sejam  $T$  uma árvore ternária completa e enraizada com profundidade  $n$  (cada nível de 1 até  $n$  representa um vértice e a sua localização ou não em um dos 2 conjuntos) e  $H$  um digrafo com no máximo  $3^n$  vértices e no máximo  $4^n$  arcos.

Rotule as folhas de  $T$  com todas as  $3^n$  possibilidades de  $n$  números com valores 0 (não pertence a nenhum dos dois conjuntos), 1 e 2. Para cada folha, se o par de conjunto  $(I'_1, I'_2)$  que esta representa for tal que  $(I'_2 \setminus I'_1)$  é um conjunto independente em  $G^2$  e  $I'_1 \subseteq I'_2$ , esta folha é relacionada injetivamente a um vértice de  $H$

Gere todas as  $4^n$  possibilidades de  $n$  números com valores 0 (não pertence a nenhum dos três conjuntos), 1, 2 ou 3.

É adicionada um arco  $\overrightarrow{h_a h_b} \in E(H)$  para cada uma das no máximo  $4^n$  possibilidades válidas de conjuntos  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  onde: os vértices de  $[I''_3 = (I'_3 \setminus I'_2)] \cup [I''_2 = (I'_2 \setminus I'_1)]$  induzem um subgrafo em uma *lista*- $\lambda$ -coloração de canais de  $G^2$  que só existe arestas de peso 1 entre elementos de  $I''_3$  e  $I''_2$ ;  $(I'_1, I'_2)$  e  $(I'_2, I'_3)$  são vértices de  $H$ ; e  $I'_1 \subseteq I'_2 \subseteq I'_3$ .

Encontre o menor caminho em  $H$  que comece no vértice  $h_{-1} = (\emptyset, \emptyset)$  e termine no vértice  $h_p$ , onde todos os vértices do grafo estejam em um de seus conjuntos e, respeitando uma  $\lambda$ -coloração de  $G$ .

**Teorema 5.15 (Král [43] - 2005)** *Um grafo  $G$  tem uma  $\lambda$ -coloração  $f$  com span  $k$  se e somente se existe um caminho de vértices  $h_{-1} = (\emptyset, \emptyset), \dots, h_k$  em  $H$  onde: cada vértice  $a$  de  $H$  representa um par ordenado de conjuntos  $(I'_a, I'_{a+1})$  de vértices tais que  $(I'_{a+1} \setminus I'_a)$  induz um subgrafo conjunto independente em  $G^2$ ,  $I'_a \subseteq I'_{a+1}$  e;  $\overrightarrow{h_a h_b} \in E(H)$  se  $I_{a+1} = I_b$  e só existirem arestas de peso 1 em uma *lista*- $\lambda$ -coloração de canais de  $G^2$  entre vértices de  $(I_{b+1} \setminus I_b)$  e  $(I_{a+1} \setminus I_a)$ .*

**Prova.**

( $\Rightarrow$ ) Sejam  $f$  uma  $\lambda$ -coloração de  $G$  com  $\text{span } k$ ,  $I_i$  os conjuntos de vértices de  $G$  com a cor  $f(i)$ , e  $I'_i = I_i \cup I'_{i-1}$  (onde  $I'_{i < 0} = \emptyset$ ). Pelas restrições de uma  $\lambda$ -coloração pode-se afirmar que todo conjunto  $(I'_i \setminus I'_{i-1})$ ,  $0 \leq i \leq k$ , é independente em  $G^2$  (já que os vértices pertencentes a este estão à distância 3 em  $G$ ) e, que em uma *lista*- $\lambda$ -coloração de  $G^2$ , só existem arestas de peso 1 entre elementos de  $(I'_j \setminus I'_{j-1})$  e  $(I'_{j+1} \setminus I'_j)$ ,  $0 \leq j \leq k-1$  (ou existem dois vértices que recebem cores com diferença de apenas um com uma aresta de peso 2 entre eles). Seja  $h_{-1} = (\emptyset, \emptyset)$ ,  $h_0 = (\emptyset, I'_0)$ ,  $h_1 = (I'_0, I'_1 \cup I'_0)$ ,  $h_2 = (I'_1 \cup I'_0, I'_2 \cup I'_1 \cup I'_0)$ ,  $\dots$ ,  $h_k = (I'_{k-1} \cup \dots \cup I'_0, I'_k \cup \dots \cup I'_0)$  um caminho em  $H$  (como ilustrado na figura 5.7), este caminho respeita todas as características descritas no teorema.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $h_{-1}, h_0, \dots, h_k$  um caminho de  $H$  descrito como no teorema. Seja  $f$  a atribuição de cores de  $G$  por  $f(v) = \min_{0 \leq j \leq k} \{j \mid v \in h_j\}$ . Suponha, por absurdo, que  $f$  não seja uma  $\lambda$ -coloração de  $G$ , então: (i) existem dois vértices  $a$  e  $b$  tais que  $|f(a) - f(b)| = 1$  e existe aresta  $ab \in E(G)$  ou; (ii)  $|f(a) - f(b)| = 0$  e existe aresta  $ab \in E(G^2)$ .

(i) Neste caso,  $a \in (I'_a \setminus I'_{a-1})$  e  $b \in (I'_{a+1} \setminus I'_a)$  (o caso que  $b \in (I'_{a-1} \setminus I'_{a-2})$  é análogo) são dois vértices que estão em dois pares de conjuntos consecutivos  $(I'_1, I'_2)$  e  $(I'_2, I'_3)$  do caminho  $h_0, \dots, h_k$ , por definição só existe arco entre dois vértices  $(I'_1, I'_2)$  e  $(I'_2, I'_3)$  de  $H$  se só existir arestas de peso 1 entre elementos de  $(I'_2 \setminus I'_1)$  e  $(I'_3 \setminus I'_2)$  em  $G^2$  e, neste caso, existe uma aresta de peso 2, uma contradição.

(ii) Já neste,  $a$  e  $b$  estão em um mesmo conjunto  $(I'_a \setminus I'_{a-1})$  que deveria ser independente, já que está dentro de algum vértice  $h_a$ , mas que tem um arco entre seus elementos, uma contradição com o fato de  $h_a$  ser um vértice válido e  $(I'_a \setminus I'_{a-1})$  ser um conjunto independente.

Então, no final da atribuição,  $f$  será uma  $\lambda$ -coloração com  $\text{span } k$ . □

**Teorema 5.16 (Král [43] - 2005)** *O algoritmo LCKRAL encontra uma  $\lambda$ -coloração ótima  $f$  de  $G$*

**Prova.** Suponha, por absurdo, que o algoritmo não encontre uma função  $f$ . Pelo Teorema 5.15 sabe-se que se existe uma  $\lambda$ -coloração ótima  $f$  de  $G$ , então existe um caminho  $h_{-1}, h_0, \dots, h_k$  em  $H$ . Se o algoritmo para encontrar o caminho mínimo

em  $H$  encontra um caminho de tamanho menor que  $k + 1$  então, pelo Teorema 5.15, existe uma atribuição de cores que respeita uma  $\lambda$ -coloração com *span* menor que  $k$ , uma contradição com a hipótese de  $f$  ser ótima. Logo, o algoritmo de encontrar o menor caminho de  $H$  encontra pelo menos um caminho de tamanho  $k + 1$  e  $G$  tem pelo menos uma  $\lambda$ -coloração com *span*  $k$ .  $\square$

**Teorema 5.17 (Král [43] - 2005)** *O algoritmo LCKRAL tem complexidade de tempo  $O(n4^n)$  e complexidade de espaço  $O(4^n)$ .*

**Prova.** A complexidade de tempo do algoritmo é dominada por gerar todas as  $4^n$  possibilidades dos vértices serem distribuídos em três conjuntos consecutivos e a verificação se essa distribuição é válida, onde a complexidade é dada por  $O(n4^n)$ . Este processo pode ser feito se para cada uma das  $4^n$  possibilidades geradas de três conjuntos consecutivos  $(I'_1, I'_2, I'_3)$  for verificado na árvore construída pelo algoritmo se os vértices  $(I'_1, I'_2)$  e  $(I'_2, I'_3)$  são válidos e se não existe aresta no subgrafo de  $G$  induzido pelos vértices  $(I'_2 \setminus I'_1) \cup (I'_3 \setminus I'_2)$ . Além disso, gerar a construção da árvore tem complexidade  $O(3^n)$  e a verificação do caminho mais curto no grafo  $H$  pode ser feito em  $O(|E(H)| = 4^n)$ .

A complexidade de espaço é dominada pelo número de arcos do grafo  $H$ , sendo  $O(4^n)$ . Isto porque a construção da árvore tem complexidade de espaço  $O(3^{n+1})$ .  $\square$

### Variação do algoritmo para contar o número de $k$ - $\lambda$ -colorações

Král [43] verificou que o problema de encontrar  $\lambda PC(G, k)$ , o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações de um grafo  $G$ , pode ser reduzido ao problema de contar o número de caminhos com tamanho  $k + 1$  no grafo direcionado  $H$  (que não tem ciclos a não ser dos *loops*), como definido no Teorema 5.15, onde cada caminho começa por um vértice de  $H$  que tenha o conjunto vazio como seus pares e termina em um vértice de  $H$  que tenha  $V(G)$  como um de seus conjuntos.

Porém, é necessário considerar os *loops* no grafo  $H$ , que podem ser vistos como cores não utilizadas no intervalo de  $\{0, \dots, k\}$  de uma  $k$ - $\lambda$ -coloração de um grafo  $G$ . Estes ocorrem em vértices de  $H$  com pares de conjuntos iguais, tendo o seu número limitado pelo número de vértices de  $G$ .

Nesta variação, é necessário que cada vértice tenha uma lista  $A^{h_p}$  de valores que representam o número de caminhos com tamanho  $x \leq k + 1$  do vértice inicial  $h_{-1} = (\emptyset, \emptyset)$  até o vértice atual  $h_p$ .

**Definição 5.4** Uma ordenação  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dos vértices de um digrafo é dita topológica se para cada caminho  $v_x, \dots, v_y$  no digrafo,  $v_x$  apareça antes de  $v_y$  na ordenação.

O algoritmo realiza uma ordenação topológica dos vértices de  $H$ . Então, é calculado o número de caminhos de tamanho 0 até  $x \leq k + 1$  de  $h_{-1}$  até  $h_p$ , onde  $h_p$  é o vértice atualmente tratado pela ordenação topológica. Sejam  $I$  o conjunto de vértices  $h_i$  com  $\overrightarrow{h_i h_p} \in E(H)$  e  $A^{h_{-1}}[x] = 0$  ( $0 \leq x \leq k - 1$ ), então:

$$0 \leq x \leq k, A^{h_p}[x] = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \sum_{i \in I} A^{h_i}[x - 1], & \text{se } h_p \text{ não é loop} \\ \sum_{i \in I} (A^{h_i}[x - 1] + \sum_{0 \leq j \leq x-2} A^{h_i}[x - 2 - j]) & \text{se } h_p \text{ é loop} \end{cases}$$

Ou seja, se  $h_p$  não é *loop*, então o número de caminhos com tamanho  $k$  é igual ao número de caminhos com tamanho  $k - 1$  de todos os vértices que estejam antes dele na ordenação topológica e que tenham um arco para ele. E, se for *loop*, este número é igual ao número de caminhos com tamanho de 0 até  $k - 1$  que estejam na ordenação antes dele e que tenham um arco para ele (o resto do tamanho do caminho o próprio vértice pode completar utilizando o loop que faz parte).

A corretude deste algoritmo segue trivialmente do Teorema 5.15, sendo cada um desses caminhos começando a partir de  $h_{-1}$  até um vértice  $h_k$ , com todos os vértices do grafo  $G$  em algum dos seus conjuntos, equivalente a uma  $k$ - $\lambda$ -coloração  $c$ , como o algoritmo encontra de fato todos estes caminhos, este número será o número de  $k$ - $\lambda$ -colorações para o grafo  $G$ .

A complexidade de tempo deste algoritmo é dominada pela necessidade de realizar  $O(k)$  operações para cada arco do grafo  $H$ , dando um total de  $O(k 4^n)$ , isto porque a complexidade da ordenação topológica é  $O(|E(H)|)$ . A complexidade de espaço é dominada pelo número de arcos do grafo  $H$ , sendo  $O(4^n)$ , isto porque a complexidade das listas dos vértices é dada por  $O(k 3^n)$ .

Na figura 5.8 é apresentada a aplicação do algoritmo em um digrafo, sendo o valor das listas as quantidades de caminhos do vértice  $h_{-1}$  até o vértice atual com os tamanhos relacionados a posição na lista. Neste caso, cada vértice tem uma lista com o número de caminhos com tamanhos de 0 até  $k = 6$  originadas do vértice  $h_{-1}$ .

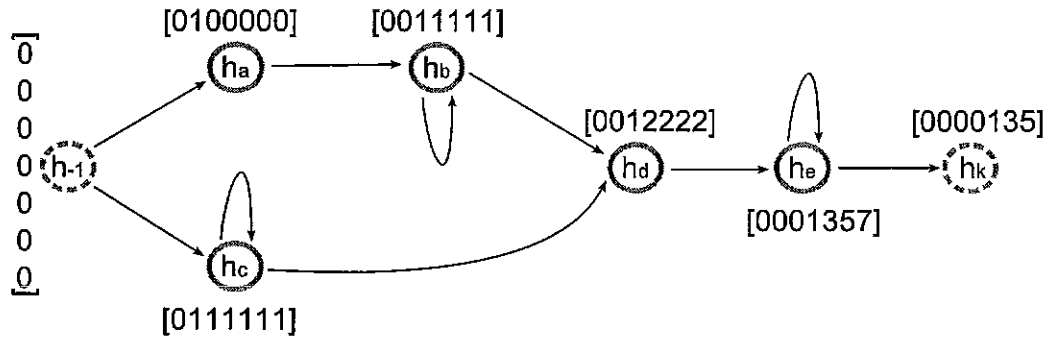


Figura 5.8: Número de caminhos de distância até 6 em um digrafo

# Capítulo 6

## Resultados novos

Neste capítulo são apresentados os resultados desenvolvidos durante a elaboração desta dissertação relacionados a limites superiores para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas em classes especiais de grafos. Entre estes estão: limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos bipartidos cordais, apresentado no XL-SBPO (Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional) [14]; limite superior justo para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classes dos cografos e definição da classe dos *componentes  $p$ -cografos*, limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos linha e definição da classe dos grafos *quase-linha* e limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos de permutação, resultados apresentados no CNMAC 2009 (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional); limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos fracamente cordais e na a classe dos grafos *split*, resultados apresentados no LAGOS 2009 (*Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*). Vale ressaltar que em todos os casos acima descritos são verificadas as provas da conjectura 3.1, de Griggs e Yeh [28]. Além disso, na última seção deste capítulo é apresentado um algoritmo linear para encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para a classe dos grafos  *$P_4$ -tidy*, e a descrição de como pode-se obter uma  $\lambda$ -coloração com este *span* para grafos nesta classe.

## 6.1 Grafos bipartidos cordais

Nesta seção é apresentado o resultado para a classe dos grafos bipartidos cordais onde, para um grafo  $G$ , bipartido cordal,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ . Isto prova a conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, para esta classe. A seguir, são apresentadas as definições e teoremas necessários para a prova.

**Definição 6.1 (Golumbic e Goss [25] - 1978)** Um grafo  $G$  é *bipartido cordal* se  $G$  é bipartido e todo ciclo de tamanho pelo menos 6 tem uma corda. Ou seja, todo ciclo induzido de  $G$  tem tamanho 4.

Os grafos bipartido cordais não são de forma alguma a interseção entre as classes dos grafos bipartidos e a classe dos grafos cordais (esta interseção fornece a classe dos grafos florestas). Por exemplo, o grafo  $C_4$  é um grafo bipartido cordal, e não está na interseção entre a classe dos grafos bipartidos e a classe dos grafos cordais.

**Definição 6.2** Em um grafo  $G$ , um vértice  $v$  é *centro de  $P_5$*  se existe um caminho  $(x, y, v, w, z)$  que é subgrafo induzido de  $G$ .

**Teorema 6.1 (Spinrad [60] - 2003)** *Todo grafo bipartido cordal tem pelo menos um vértice que não é centro de  $P_5$ .*

Como a classe dos grafos bipartidos cordais é hereditária, existe um esquema de eliminação dos vértices que não são centros de  $P_5$ . Isto é, existe  $v_1, v_2, \dots, v_n$  uma ordem dos vértices de  $G$  tal que  $v_i$  não é centro de  $P_5$  em  $G[\{v_i, \dots, v_n\}]$ .

**Lema 6.2 (\*)** *Em um grafo bipartido cordal, se  $v$  que não é centro de  $P_5$ , então  $|N_2(v)| \leq \Delta - 1$ .*

**Prova.** Sejam  $v$  um vértice que não é centro de um  $P_5$  em um grafo bipartido cordal  $G$  e  $N'_1(v)$  o conjunto dos vértices em  $N_1(v)$  que tenham grau maior que 1 (os vértices de grau 1 adjacentes a  $v$  não influenciam na cardinalidade de  $N_2(v)$ ). Como  $G$  é bipartido, no subgrafo induzido  $G[v \cup N_1(v) \cup N_2(v)]$  somente há arestas do tipo:  $vu$ , com  $u \in N'_1(v)$ ; e  $uw$ , com  $u \in N'_1(v)$  e  $w \in N_2(v)$ .

Como o vértice  $v$  não é centro de  $P_5$ , para cada par de vértices  $a \in N'_1(v)$  e  $b \in N_1(v)$ , **ou todos** os vértices de  $N_2(v)$  adjacentes a  $a$  são adjacentes a  $b$ , **ou**



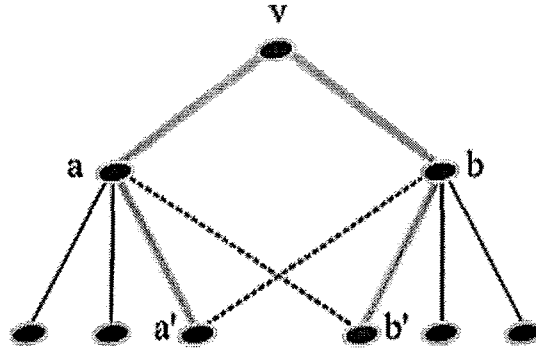


Figura 6.1: Adjacências de vértices à distância 2 em um grafo bipartido cordal

todos os vértices de  $N_2(v)$  adjacentes a  $b$  são adjacentes a  $a$ . Como ilustrado na figura 6.1, se esta condição não for satisfeita, existe pelo menos um vértice adjacente a  $a$  e outro adjacente a  $b$  que fazem  $v$  ser centro de  $P_5$ , uma contradição.

Seja  $G'$  um grafo formado pelos vértices  $v \cup N'_1(v) \cup D(u_i)$ , onde  $D(u_i)$  é formado por qualquer distribuição dos vértices de  $N_2(v)$  nos vértices  $u_i \in N'_1(v)$ , respeitando as adjacências dos vértices, ou seja, se um vértice de  $N_2(v)$  é adjacente a  $u_1$  e a  $u_2$ , este pode estar em  $D(u_1)$  ou  $D(u_2)$ , mas somente em um deles. E, arestas  $D(u_i)u_j$  se todos os vértices de  $D(u_i)$  são adjacentes a  $u_j \in N'_1(v)$ , além das arestas  $vw$ , para todo  $w \in N'_1(v)$ . Um exemplo da obtenção de  $G'$  é ilustrado na figura 6.2.

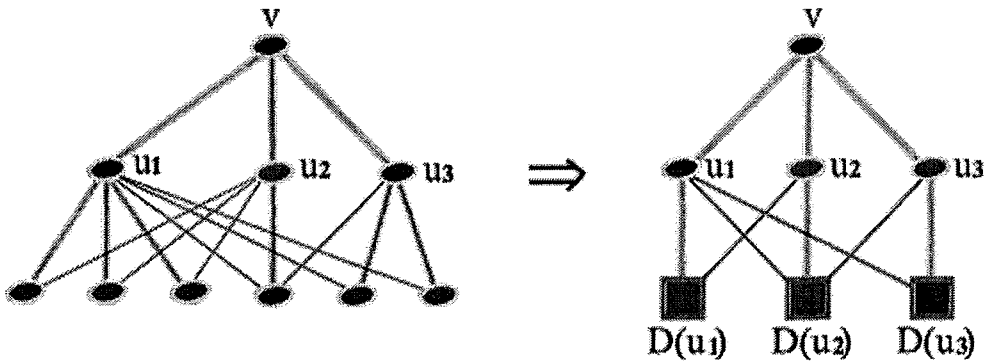


Figura 6.2: Grafo simplificado  $G'$

Seja  $H$  um digrafo construído da seguinte forma:  $V(H) = N'_1(v)$  e,  $\overrightarrow{v_1v_2} \in E(H)$  se  $D(v_1)v_2 \in E(G')$ , onde  $G'$  é obtido do grafo original como descrito anteriormente na figura 6.2.

São considerados todos os pares de vértices de  $N'_1(v)$ , ou seja,  $H$  será um torneio (podendo ser duplamente orientado). Para cada par de vértices  $(w_1, w_2)$  pertencente

a  $N'_1(v)$  ou  $D(w_1)$  é adjacente a  $w_2$  (orientação  $\overrightarrow{w_1w_2}$  no digrafo  $H$ ), ou  $D(w_2)$  é adjacente a  $w_1$  (orientação  $\overrightarrow{w_2w_1}$  no digrafo  $H$ ), ou ambos acontecem, neste caso, tem-se uma orientação dupla. A figura 6.3 é apresentada para facilitar o entendimento da construção de  $H$ .

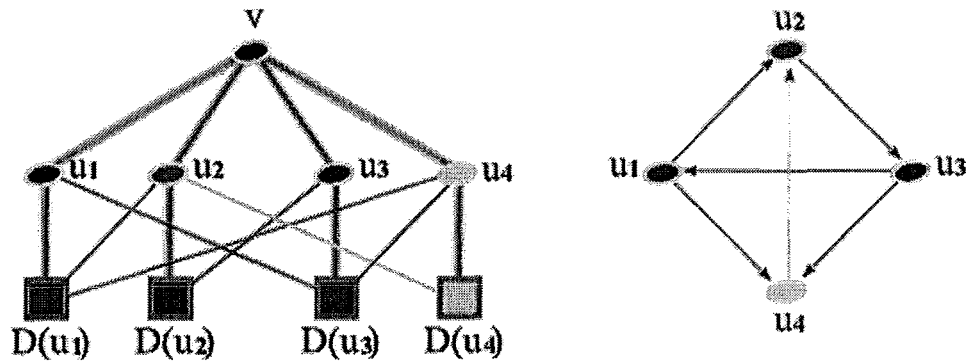


Figura 6.3: Construção de  $H$

Suponha, por absurdo, que não exista vértice que receba arestas de todos os outros vértices no digrafo  $H$ . Seja  $v$  um vértice de  $H$ , existe uma aresta direcionada  $\overrightarrow{vw}$  saindo de  $v$  para outro vértice  $w$  de  $H$ , que também tem uma aresta direcionada saindo para outro vértice, e assim por diante. Como trata-se de um digrafo finito, em algum momento esta sequência de vértices forma um ciclo de arestas direcionadas. Como ilustrado na figura 6.4, ou só existem arestas duplamente direcionadas entre vértices deste ciclo (no caso do ciclo de tamanho 3, não tem aresta interna, o que já é suficiente), ou existe um ciclo induzido de tamanho menor, só contendo arestas duplamente direcionadas, ou de tamanho 3. Na figura 6.4, a orientação da aresta direcionada interna ao ciclo forma um ciclo menor à direita, se a orientação fosse contrária, formaria um ciclo menor à esquerda.

Se existe um ciclo de arestas direcionadas de tamanho 3, seja  $a$ ,  $b$  e  $c$  os vértices do ciclo do digrafo  $H$ , e seja  $\overrightarrow{ab}$ ,  $\overrightarrow{bc}$  e  $\overrightarrow{ca}$  as arestas. Como ilustrado na figura 6.5, existem  $u_a \in D(a)$ ,  $u_b \in D(b)$  e  $u_c \in D(c)$  onde, no grafo original, não existem as arestas  $u_ba$ ,  $u_ac$  e  $u_cb$ , já que em  $G'$  não existem as arestas  $D(b)a$ ,  $D(a)c$  e  $D(c)b$ . Ou seja, existe pelo menos um  $C_6$  induzido, formado por  $(a, u_a, b, u_b, c, u_c)$ , uma contradição com o fato do grafo original ser bipartido cordal.

Se existe um ciclo de tamanho maior que 3 no digrafo  $H$ , mas que internamente só tenha arestas duplamente direcionadas, por exemplo, o grafo da figura 6.6. Seja

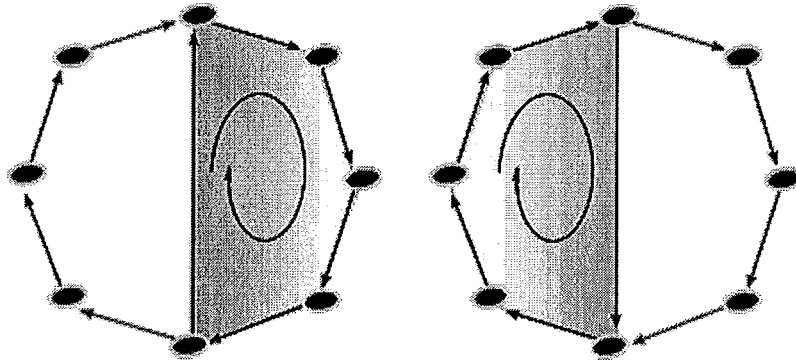


Figura 6.4: Ciclo no digrafo  $H$ , formado apenas por arestas direcionadas

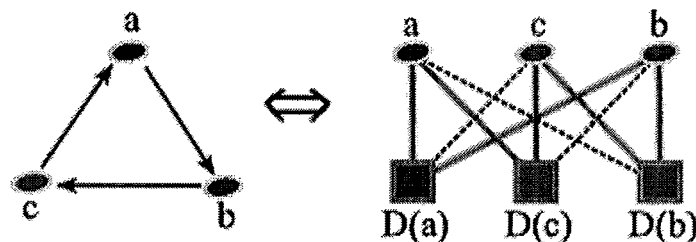


Figura 6.5: Ciclo tamanho 3 no digrafo  $H$ , forma  $C_6$  no grafo bipartido cordal

$(a, b, c, \dots, p)$  este ciclo. Existem  $u_a \in D(a), \dots$  e  $u_p \in D(p)$  onde, no grafo original não existem as arestas  $u_b a, u_a p$  e  $u_c b$ , já que em  $G'$  não existem as arestas  $D(b)a, D(a)p$  e  $D(c)b$ . Ou seja, o grafo original tem pelo menos um  $C_6$  induzido, formado por  $(a, u_a, b, u_b, p, u_c)$ , uma contradição com o fato do grafo original ser bipartido cordal.

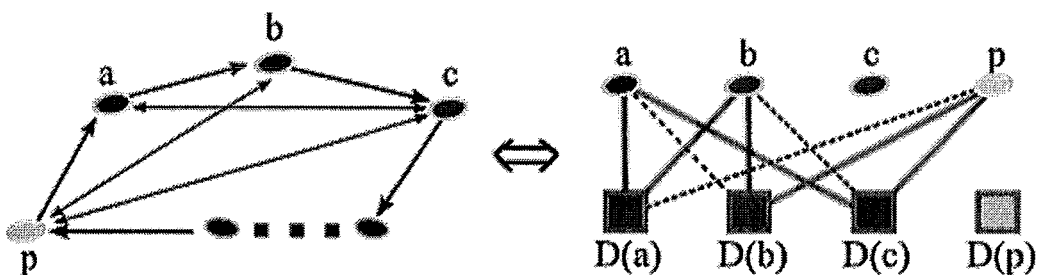


Figura 6.6: Ciclo maior que 3 no digrafo  $H$ , forma  $C_6$  no grafo bipartido cordal

O digrafo  $H$  é gerado a partir de um grafo bipartido cordal. Se  $H$  não tem nenhum vértice que receba arestas de todos os outros vértices do digrafo então, como visto, o grafo original tem um ciclo induzido de tamanho pelo menos 6, ou seja, não é bipartido cordal. Logo, o digrafo  $H$  tem pelo menos um vértice que

recebe arestas de todos os outros vértices do digrafo e, se existe um vértice em  $H$  com esta propriedade, este vértice recebe arestas de todos os vértices em  $N_2(v)$  no grafo original. Isto limita o tamanho de  $|N_2(v)|$  em  $\Delta - 1$ , já que se houvesse  $\Delta$  ou mais vértices em  $N_2(v)$ , um vértice adjacente a  $v$  seria adjacente a outros  $\Delta$  vértices, uma contradição.  $\square$

### 6.1.1 $L(2, 1)$ -colorações de grafos bipartidos cordais

A prova de que  $\lambda(G) \leq \Delta^2$  para grafos bipartidos cordais é dividida em duas partes. Na primeira trata-se grafos com  $\Delta \geq 4$  (utilizando o Lema 6.2). Na segunda, trata-se casos com  $\Delta = 3$ . Para  $\Delta = 2$ , pelo Lema 2.16,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

**Teorema 6.3 (\*)** *Para um grafo  $G$  bipartido cordal com  $\Delta \geq 4$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 - 1$ .*

**Prova.** Utilizando a ordem reversa do esquema de eliminação de vértices não centros de  $P_5$ , definida por Spinrad [60] no Teorema 6.1, atribuindo cores aos vértices em uma estratégia gulosa, a maior cor utilizada será no máximo  $\Delta^2 - 1$ .

É interessante verificar que os vértices do grafo não são eliminados, apenas considera-se que os vértices que deveriam ter sido eliminados naquele momento não têm sua cor atribuída. Ou seja, sempre se trabalha no grafo original.

Considere o pior caso, onde os vértices à distância 2 de  $v$  têm suas cores atribuídas, e os vértices adjacentes podem ou não ter suas cores atribuídas. Seja  $V_n$  o conjunto dos vértices adjacentes a  $v$  e sem cores atribuídas, e  $V_s$  o conjunto dos vértices adjacentes a  $v$  que têm suas cores atribuídas, onde  $v$  é um vértice que recebe a maior cor  $k$ , utilizando a abordagem da escolha dos vértices não centro de  $P_5$ .

Seja  $|V_n| = x$ , no pior caso,  $|V_s| = \Delta - x$ . Pelo Lema 6.2, o número máximo de vértices à distância 2 de  $v$  com cores atribuídas que são adjacentes a vértices em  $V_s$  é  $\Delta - 1$ . Isto ocorre porque ao atribuir cor ao vértice  $v$ , em relação aos vértices que já têm cores atribuídas,  $v$  não é centro de  $P_5$ . Então, utilizando estratégia gulosa dada por Griggs e Yeg [28] no Teorema 3.11, o número máximo de cores proibidas ao atribuir cor a  $v$  será:  $3(\Delta - x)$  cores pelos vértices adjacentes que têm cores;  $\Delta - 1$  cores pelos vértices à distância 2 que passam por  $V_s$ ; e  $x(\Delta - 1)$  cores dos

vértices à distância 2 que passam por  $V_n$ ; (não há cores proibidas pelos vértices de  $V_n$ , já que eles não têm suas cores atribuídas).

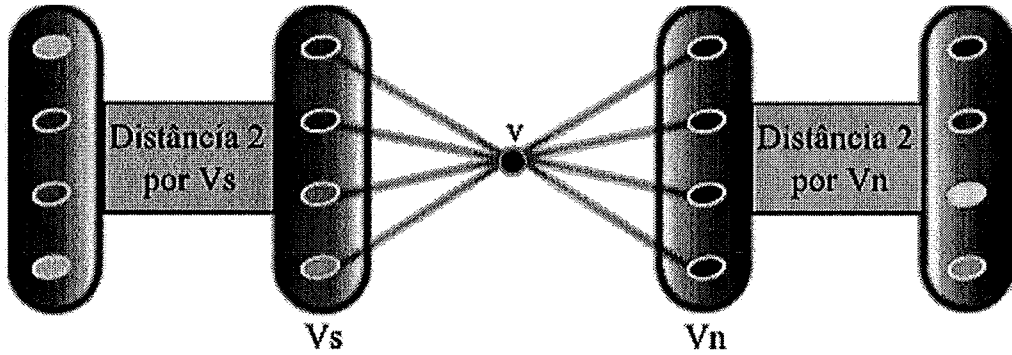


Figura 6.7: Método para atribuir cor a um vértice  $v$  de um grafo bipartido cordal

Logo,  $k \leq 3(\Delta - x) + (\Delta - 1) + 0(x) + x(\Delta - 1) \leq x\Delta + 4\Delta - 4x - 1 = 4\Delta + x(\Delta - 4) - 1$ , onde  $0 \leq x \leq \Delta$ . Sabe-se que  $4\Delta + \Delta(\Delta - 4) - 1 \leq \Delta^2 - 1$ . Como  $x \leq \Delta$  e  $\Delta \geq 4$ , substitua  $x$  por  $\Delta$ , obtendo  $4\Delta + x(\Delta - 4) - 1 \leq \Delta^2 - 1$ , ou seja,  $k \leq \Delta^2 - 1$ .  $\square$

Nota-se que para o caso de grafos bipartidos cordais com  $\Delta = 3$ , o limite acima estabelecido não fornece uma prova de  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ . É necessário realizar outra prova para este caso, que é feita no Teorema 6.4.

**Teorema 6.4 (\*)** Para um grafo  $G$  bipartido cordal com  $\Delta \geq 3$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

**Prova.** Esta prova trata apenas grafos conexos. Para grafos desconexos, o *span* da  $\lambda$ -coloração ótima pode ser obtido como o máximo dos *spans* das  $\lambda$ -colorações ótimas das componentes conexas do grafo.

A partir de uma busca em largura, utilizando vértice raiz com grau  $\Delta(G)$ , obtenha uma árvore de largura  $T$  do grafo  $G$ . Como  $G$  é bipartido, em  $G$  só há arestas entre vértices de níveis consecutivos em  $T$ .

Seja  $v$  um vértice em  $T$  e  $N_j^a(v)$  vértices em  $N_j(v)$  que tenham nível menor que  $v$  (estejam mais próximos da raiz) na árvore enraizada  $T$  e  $N_j^b(v)$  vértices em  $N_j(v)$  que tenham nível maior que  $v$ .

Se um dos casos ilustrados na figura 6.8 ocorrer em  $T$ , existe ciclo induzido com tamanho maior que 4 em  $G$ , subgrafo proibido para grafos bipartidos cordais.

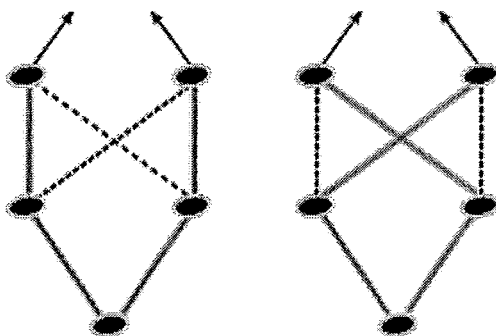


Figura 6.8: Subgrafos proibidos

Suponha, por absurdo, que exista vértice  $u \in N_1^b(v)$ , onde  $u$  é adjacente a um vértice  $w$  com um nível menor (mesmo nível de  $v$ ) e  $w$  não seja adjacente a um vértice  $x \in N_1^a(v)$ . Como ilustrado na figura 6.9, não existem arestas do tipo  $wx$  e  $vw'$  ( $w' \in N_1^a(w)$ ), ou seja, estes vértices formam, com vértices de nível superiores em  $T$ , um subgrafo proibido, uma contradição. Com isso, nenhum vértice de nível maior que  $v$  influencia no número de vértices já coloridos à distância 2 de  $v$ , já que se um vértice  $v'$  estiver à distância 2 de  $v$  por um vértice em  $N_1^b(v)$ , ele também está por um vértice em  $N_1^a(v)$ .

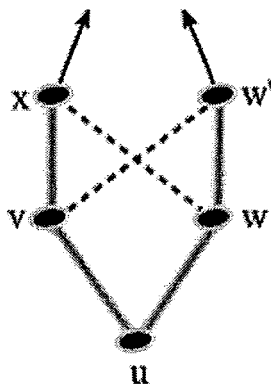


Figura 6.9: Grafo com ciclo induzido de tamanho maior que 4

Suponha, por absurdo, que não exista vértice  $w$ , dois níveis acima de  $v$ , adjacente a todos os vértices em  $N_1^a(v)$ . Então, para cada  $u_i \in N_1^a(v)$ , existe pelo menos um vértice  $u'_i \in N_2^a(v)$  (vértice que está à distância 2 de  $v$ , dois níveis acima de  $v$ , na árvore  $T$ ) não adjacente a  $u_i$ , como ilustrado na figura 6.10. Seja  $u_1 \in N_1^a(v)$ , e  $u'_1 \in N_2^a(v)$ , não adjacente a  $u_1$ . Como  $u'_1$  está à distância 2 de  $v$ , existe vértice  $u_2 \in N_1^a(v)$  em sua adjacência. E, existe vértice  $u'_2 \in N_2^a(v)$  não adjacente a  $u_2$  e

não adjacente a  $u_1$ , senão formaria um subgrafo proibido. Este processo se repete para cada par de vértices  $u_i$  e  $u'_i$  que é adicionado, o vértice  $u_i$  precisa ser adjacente a todos os  $u'_j$  ( $1 \leq j < i$ ) para não formar um subgrafo proibido, e o vértice  $u'_i$  precisa não ser adjacente a todos os  $u_j$  ( $1 \leq j \leq i$ ). Só que, para o último vértice  $u'_k$ , este não é adjacente a nenhum vértice em  $N_1^a(v)$ , uma contradição com o fato de  $u'_k$  estar à distância 2 de  $v$ .

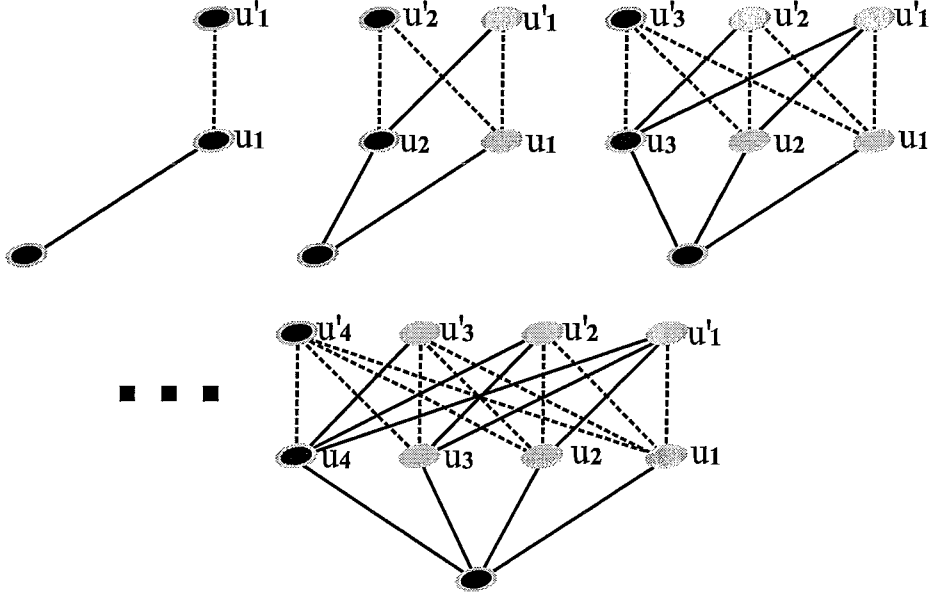


Figura 6.10: Vértice adjacente a todos os vértices em  $N_1^a(v)$

Seja  $T$  uma árvore de largura de um grafo bipartido cordal  $G$ , enraizada em um vértice com grau  $\Delta$ . Se em uma  $\lambda$ -coloração de  $G$  é utilizada uma abordagem gulosa, com ordenação dos vértices respeitando a prioridade dos níveis em  $T$ , com uma pequena restrição, obtém-se  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

Seja  $v \in T$  não folha, ou folha com  $g(v) \leq \Delta - 1$ . Se  $v$  não é folha, então ele tem pelo menos um filho em  $T$ . Seja  $Pro(v)$  o conjunto de cores proibidas do vértice  $v$ . Como ordena-se os vértices respeitando os níveis da árvore  $T$ ,  $Pro(v)$  só recebe cores de vértices de mesmo nível ou de nível menores a  $v$ . Considerando o número máximo de cores proibidas para  $v$ , existem três cores proibidas para cada vértice pertencente a  $N_1^a(v)$  mais uma cor proibida para cada vértice à distância 2 de  $v$ , também adjacentes a  $N_1^a(v)$ . Sabe-se que  $|N_1^a(v)| \leq \Delta - 1$  e existe vértice  $w \in N_2^a(v)$  adjacente a todos os vértices em  $N_1^a(v)$ . O número máximo de vértices à distância 2 de  $v$  que passam por  $N_1^a(v)$  será:  $1 + (\Delta - 2)|N_1^a(v)| \leq 1 + (\Delta - 2)(\Delta - 1) = \Delta^2 - 3\Delta + 3$ .

Então,  $|Pro(v)| \leq 3(\Delta - 1) + \Delta^2 - 3\Delta + 3 = \Delta^2$ . Ou seja, em um intervalo de  $\{0, \dots, \Delta^2\}$  sempre existe cor para atribuir ao vértice  $v$ .

Seja  $v \in T$  folha com  $g(v) = \Delta$  em  $G$ , existe vértice  $w$  dois níveis acima de  $v$  adjacente a todos os vértices em  $N_1^a(v)$ . Ou seja,  $w$  tem  $\Delta$  filhos em  $T$  e, o único vértice que tem  $\Delta$  filhos em uma árvore é a raiz. Neste caso, realiza-se o seguinte método para atribuir cores ao grafo. Sejam  $V_f$  o conjunto de vértices folhas em  $T$  com grau  $\Delta$  e  $r$  a raiz da árvore de largura  $T$ . Atribua cores aos vértices na seguinte ordem: primeiro à raiz  $r$ , depois aos vértices em  $V_f$ ; em seguida aos vértices em  $N_1^b(r)$ ; e, atribuir cores aos outros vértices respeitando a prioridade por nível na árvore de largura  $T$ . Nos três primeiros passos desse método, o subgrafo formado por  $r \cup V_f \cup N_1^b(r)$  é um grafo bipartido completo, utilizando, no pior caso, a cor  $2\Delta$ . Isto porque, como visto no Teorema 3.5, para grafos bipartido completos  $K_{p,q}$ ,  $\lambda(K_{p,q}) = |V(K_{p,q})| \leq 2\Delta \leq \Delta^2$ , para  $\Delta \geq 2$ . Ao atribuir cores aos vértices  $V(G) \setminus \{r \cup V_f \cup N_1^b(r)\}$ , estes não são folhas com grau  $\Delta$  e podem receber uma cor no intervalo  $\{0, \dots, \Delta^2\}$ , como provado anteriormente.

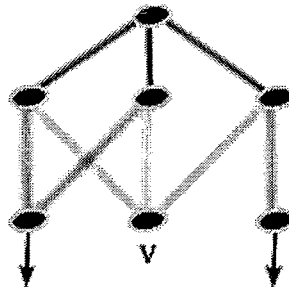


Figura 6.11: Caso da árvore de largura com folha com grau  $\Delta$

### 6.1.2 $L(h, k)$ -colorações de grafos bipartidos cordais

Utilizando o Lema 6.2 e o Teorema 6.3, estende-se o limite encontrado das  $L(2, 1)$ -colorações dos grafos bipartidos cordais, para as suas  $L(h, k)$ -colorações.

**Teorema 6.5 (\*)** *Se um grafo  $G$  é bipartido cordal, então existe uma  $L(h, k)$ -coloração ótima com  $\lambda_{h,k} \leq 2h\Delta + 2k\Delta - 2\Delta - 2k + 1$ , se  $(2k\Delta + 2 - \Delta - 2k - 2h) \leq 0$  ou  $\lambda_{h,k} \leq \Delta^2(2k - 1) - 2k + 1$ , caso contrário.*

**Prova.**



Ao atribuir uma cor a um vértice  $v$ , o número máximo de cores proibidas para ele será  $2h - 1$  cores para cada vértice em  $N_1(v)$  e  $2k - 1$  para cada vértice em  $N_2(v)$ . Utilizando a mesma abordagem vista no Teorema 6.3, onde os vértices são processados na ordem reversa do esquema de eliminação de vértices não centro de  $P_5$ , conclui-se que, sendo  $x$  o número de vértices ainda não coloridos, adjacentes a um vértice  $v$  com a maior cor atribuída  $\lambda_{h,k}$ , então:

$$\begin{aligned}\lambda_{h,k} &\leq (2h - 1)(\Delta - x) + (2k - 1)(\Delta - 1) + (2k - 1)(x)(\Delta - 1) \\ \lambda_{h,k} &\leq x(2k\Delta + 2 - \Delta - 2k - 2h) + 2h\Delta + 2k\Delta + 1 - 2\Delta - 2k, \text{ onde } 0 \leq x \leq \Delta \\ \lambda_{h,k} &\leq \max_{0 \leq x \leq \Delta} \{x(2k\Delta + 2 - \Delta - 2k - 2h)\} + 2h\Delta + 2k\Delta + 1 - 2\Delta - 2k \\ \lambda_{h,k} &\leq \begin{cases} 2h\Delta + 2k\Delta + 1 - 2\Delta - 2k & \text{se } (2k\Delta + 2 - \Delta - 2k - 2h) \leq 0; \\ \Delta^2(2k - 1) - 2k + 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

□

## 6.2 Grafos fracamente cordais

Nesta seção é realizada a prova da conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, para a classe dos grafos fracamente cordais. Esta é feita com o aperfeiçoamento do método desenvolvido para a sua subclasse, os grafos bipartidos cordais. Como Corolário deste novo método é obtido um limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas melhor do que foi apresentado na seção anterior para os grafos bipartidos cordais. Ao fim, é feita uma conjectura de que este novo limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos bipartidos cordais pode ser estendido para a classe dos grafos fracamente cordais.

**Definição 6.3** Um grafo  $G$  é *fracamente cordal* se para cada ciclo induzido de tamanho maior que 4 existe uma corda.

**Teorema 6.6 (\*)** Para um grafo  $G$  fracamente cordal com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

**Prova.** Será utilizado um método similar ao feito no Teorema 6.4. Realize uma busca em largura em  $G$  obtendo uma árvore de largura  $T$ . Vire a árvore de "cabeça para baixo", como visto na figura 6.12. Seja  $O$  uma ordenação quaisquer dos vértices

respeitando a prioridade por níveis em  $T$ . Ao utilizar o algoritmo do Teorema 3.13 com esta ordenação  $O$  na árvore  $T'$ , obtida pela rotação de  $T$ , com uma pequena alteração na ordenação, pode-se afirmar que a maior cor utilizada será  $\Delta^2$ .

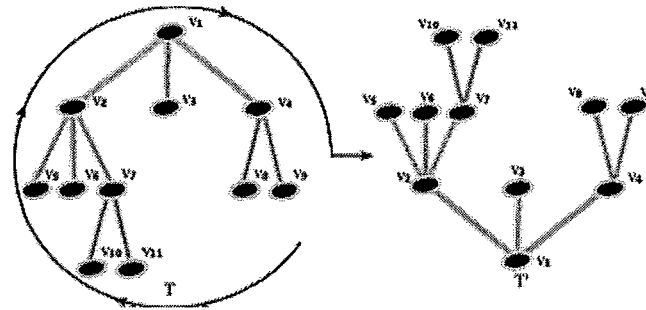


Figura 6.12: Inversão da árvore de largura

Primeiro é necessário provar algumas características especiais dessa árvore de largura  $T$ , obtida de um grafo fracamente cordal  $G$ . Sejam  $v$  um nó qualquer da árvore enraizada  $T$ ,  $N^{ae}(v)$  o conjunto de vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  que estejam em um níveis menores ou iguais ao de  $v$  em  $T$  (mais próximo da raiz, antes de virar a árvore de "cabeça para baixo") e  $N_2^{ae}(v)$  os vértices à distância 2 que estejam em níveis menores ou iguais ao de  $v$  em  $T$ . Todo vértice  $w \in N_2^{ae}(v)$  é adjacente a algum vértice em  $N^{ae}(v)$ . Suponha, por absurdo, que existe  $w$  não adjacente a algum vértice em  $N^{ae}(v)$ , então, como visto na figura 6.13, as arestas pontilhadas não existem, formando um ciclo induzido de tamanho maior que 4 em  $G$ , uma contradição.

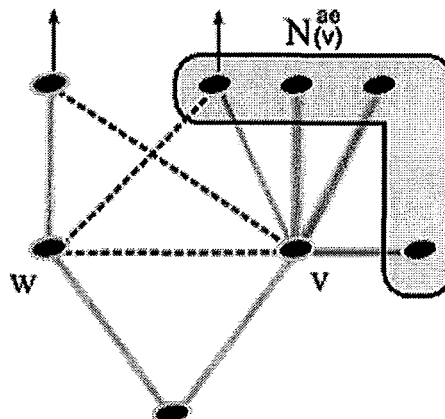


Figura 6.13: Vértices à distância 2 de  $v$  adjacentes a  $N^{ae}(v)$

Seja  $q_v = |N^{ae}(v)|$ . Então,  $|N_2^{ae}(v)| \leq (q_v)(\Delta - 1)$ . Como visto anteriormente, todo vértice  $w$  à distância 2 de  $v$  no mesmo nível de  $v$  em  $T$  é adjacente a algum vértice de  $N^{ae}(v)$ . Além disso, todo vértice à distância 2 de  $v$  que esteja em níveis menores que  $v$  em  $T$  também são adjacentes a algum vértice em  $N^{ae}(v)$ .

Sejam  $N^a(v)$  os vértices adjacentes a  $v$  com nível menor que  $v$  em  $T$  e  $z \in N^a(v)$ . Para todo par de vértices  $(z, x)$  com  $x \in (N^a(v) \setminus \{z\})$ , ou existe aresta  $zx \in E(G)$  ou existe vértice  $y$  com nível menor na árvore  $T$  que é adjacente a  $z$  e a  $x$ , senão existe ciclo induzido de tamanho maior que 4 em  $G$  (recai no mesmo caso da figura 6.13 considerando  $z = v$  e  $x = w$ ). Se existe aresta  $zx \in E(G)$ , então o número máximo de vértices à distância 2 de  $v$  que passam por  $N^a(v)$  é reduzido em duas unidades, já que existe caminho de tamanho 2 e de tamanho 1 entre  $v$  e  $z$ ,  $v$  e  $x$ . Se existe um vértice  $y$  adjacente a  $z$  e  $x$ , o número máximo de vértices à distância 2 de  $v$  que passam por  $N^a(v)$  é reduzido em uma unidade, já que existem dois caminhos de tamanho 2 entre  $v$  e  $y$ , como ilustrado na figura 6.14. Então, para cada um dos vértices em  $N^a(v) \setminus \{z\}$  o número de vértices à distância 2 de  $v$  que passam por  $N^a(v)$  é reduzido em pelo menos uma unidade.

Considera-se agora os vértices em  $w \in (N^{ae}(v) \setminus N^a(v))$ , sempre existe pelo menos um vértice em  $N^a(v)$ , já que se existe  $w$ , então  $v$  não é raiz em  $T$  e sempre existe um vértice pai na árvore de largura. Neste caso, cada vértice  $w$  tem, em relação a algum vértice em  $N^a(v)$ , uma aresta ou um vértice em comum, como ilustrado na figura 6.15. Se isto não ocorrer, como as arestas pontilhadas na figura não existem, é necessário que o vértice  $y$  faça parte de  $N^a(v)$  para não formar um ciclo induzido com tamanho maior que 4, uma contradição com o fato de  $w$  não ser adjacente ou não ter um vértice em comum com algum vértice de  $N^a(v)$ .

Então, para cada vértice  $w \in (N^{ae}(v) \setminus N^a(v))$ , o número máximo de vértices à distância 2 de  $v$  é reduzido em pelo menos uma unidade. E, para cada vértice  $z \in N^a(v)$  a menos de um, este valor também é reduzido em uma unidade. Como  $q_v = |N^{ae}(v)|$ , pode-se afirmar que  $|N_2^{ae}(v)| \leq q_v(\Delta - 1) - (q_v - 1) = (q_v)(\Delta - 2) + 1$ .

Aplicando o algoritmo de McDiarmid [52] do Teorema 3.13, em uma ordenação  $O$  respeitando a prioridade por nível na árvore de largura invertida  $T'$ , tem-se que para qualquer vértice  $v$ ,  $|Pro(v)| \leq (q_v)(\Delta - 2) + 1 + 2q_v + (\Delta - q_v)$ . Isto porque existem no máximo  $(q_v)(\Delta - 2) + 1$  vértices à distância 2 de  $v$  que antecedem  $v$  na ordenação



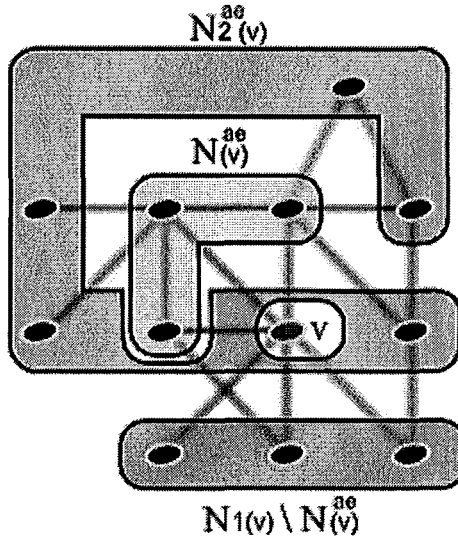


Figura 6.16: Ordenação dos vértices para grafos fracamente cordais

Falta o caso em que  $q_v = \Delta$  e não existem dois vértices adjacentes em  $N^{ae}(v)$  representado pela figura 6.17. Este caso pode ser visto como o observado pelo Teorema 6.4, como não existem arestas entre vértices de  $N^{ae}(v)$ , os subgrafos proibidos apresentados na figura 6.8 continuam valendo para  $v$ , e existe uma contradição se supormos que não existe um vértice em  $N_2^{ae}(v)$  adjacente a todos os vértices de  $N^{ae}(v)$  utilizando a mesma prova do Teorema 6.4. Logo, existe vértice em  $N_2^{ae}(v)$  adjacente a todos os  $\Delta$  vértices em  $N^{ae}(v)$ , e como trata-se de uma árvore de largura, este vértice obrigatoriamente é o nó raiz de  $T$  e os vértices de  $N^{ae}(v)$  obrigatoriamente estão todos no mesmo nível.

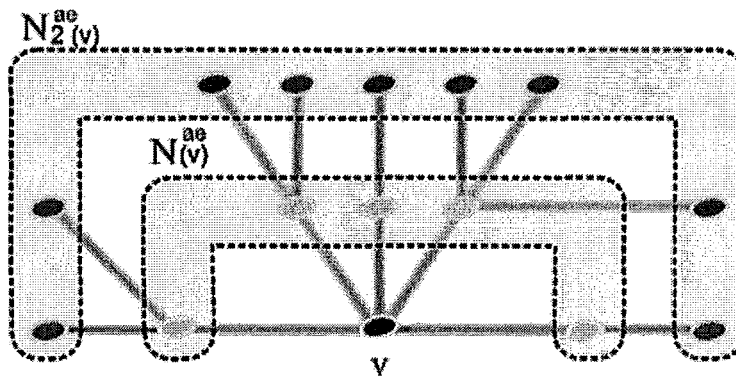


Figura 6.17: Vértice de grafo fracamente cordal que não faz parte de  $C_3$

Se existem dois ou mais vértices com  $q_v = \Delta$  e sem vértices adjacentes em  $N^{ae}(v)$ , todos têm no máximo  $q_v(\Delta - 3) + 2$  vértices à distância 2 em níveis menores ou iguais

aos deles, sendo  $|Pro(v)| \leq \Delta^2 - 3\Delta + 2 + 2\Delta \leq \Delta^2$  e todos os vértices recebem cor menor ou igual a  $\Delta^2$ .

Se existe apenas um vértice  $v$  com  $q_v = \Delta$  sem vértices adjacentes em  $N^{ae}(v)$ , se na ordenação respeitando os níveis de  $T$  o vértice  $v$  for o primeiro do nível a ter cor oferecida, todos os vértices à distância 2 de  $v$  no mesmo nível não contam no número máximo de cores proibidas de  $v$ , e este pode receber cor menor ou igual a  $\Delta^2$ .  $\square$

**Corolário 6.7 (\*)** *Para um grafo  $G$  bipartido cordal com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 2$ .*

**Prova.** Utilizando o mesmo método do Teorema 6.6, agora para grafos bipartidos cordais, pode-se verificar a redução dos limites apresentados na seção 6.1.

Seja  $v$  um vértice de  $G$ . Como visto no Teorema 6.3, ou  $v$  tem  $q_v \leq \Delta - 1$  vértices adjacentes com nível menor na árvore de largura  $T$ , ou  $v$  é uma folha dois níveis abaixo da raiz.

Para os casos em que  $q_v \leq \Delta - 1$ , o número máximo de cores proibidas para  $v$  é  $|Pro(v)| \leq 2q_v + q_v(\Delta - 2) + 1 + (\Delta - q_v) = q_v(\Delta - 1) + \Delta + 1 \leq (\Delta - 1)(\Delta - 1) + \Delta + 1 = \Delta^2 - \Delta + 2$ . Isto porque existem  $q_v$  vértices adjacentes a  $v$  que o antecedem na ordenação,  $q_v(\Delta - 2) + 1$  vértices à distância 2 adjacentes aos vértices que antecedem  $v$  na ordenação e  $\Delta - q_v$  vértices adjacentes a  $v$  que o sucedem na ordenação. Os vértices à distância 2 de  $v$  que o antecedem a ordenação mas são adjacentes a vértices que o sucedem também estão adjacentes a vértices que o antecedem, como visto no Teorema 6.3.

Para os casos em que  $q_v = \Delta$ , sabe-se, pelo Teorema 6.3, que  $v$  é uma folha dois níveis abaixo da raiz. Se na ordenação dos vértices, respeitando os níveis na árvore  $T'$ , inversa da árvore de largura  $T$ , onde os vértices  $v$  com essa características são os primeiros a serem selecionados neste nível, o maior número de cores proibidas para um vértice  $v$  deste tipo será  $|Pro(v)| \leq 2\Delta + (\Delta - 1) = 3\Delta - 1$ . Isto porque existem  $\Delta$  vértices adjacentes a ele em um nível menor na árvore de largura  $T$  e no máximo  $\Delta - 1$  vértices à distância 2 que o antecedem na ordenação, já que ele é um dos  $\Delta$  primeiros a serem selecionados no nível. Como  $3\Delta - 1 \leq \Delta^2 - \Delta + 2$  para  $\Delta \geq 3$  e, como pelo Lema 2.16,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$  para  $\Delta = 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 2$ .  $\square$

**Conjectura 6.8 (\*)** *Para um grafo  $G$  fracamente cordal com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 - \Delta + 2$ .*

**Evidência.** Como visto no Teorema 6.6, para qualquer vértice  $v$ : todo vértice à distância 2 de  $v$  adjacente a vértices em  $N_1(v) \setminus N^{ae}(v)$  também são adjacentes a algum vértice em  $N^{ae}(v)$ ; e que  $|N_2^{ae}(v)| \leq q_v(\Delta - 2) + 1$ , onde  $q_v = |N^{ae}(v)|$ .

Se  $q_v < \Delta$ , tem-se que  $|Pro(v)| \leq \Delta^2 - \Delta + 2$  e  $v$  pode receber cor no intervalo  $\{0, \dots, \Delta^2 - \Delta + 2\}$ . Falta verificar os casos em que  $q_v = \Delta$ . Como visto no Teorema 6.6 e no Corolário 6.7, se não existe arestas entre vértices de  $N^{ae}(v)$ , o ancestral dois níveis acima na árvore de largura  $T$  é o vértice raiz  $e$ , com isso, pode-se estabelecer um método para atribuir cores no intervalo  $\{0, \dots, \Delta^2 - \Delta + 2\}$ .

O que falta ser feito para a prova desta conjectura é: (i) estabelecer que vértices com  $q_v = \Delta$  com arestas entre elementos de  $N^{ae}(v)$  também estão a dois níveis abaixo do vértice raiz; (ii) estabelecer um método para atribuir cores a este grafo (provavelmente atribuindo cores no nível priorizando estes vértices com  $q_v = \Delta$ , que devem ser limitados de forma que sempre recebam cor no intervalo  $\{0, \dots, \Delta^2\}$ ).

Infelizmente a prova de (i) não pode ser feita utilizando a mesma prova dos grafos bipartidos cordais, já que os subgrafos proibidos são diferentes. A partir da prova de (i), provavelmente (ii) sairá como resultado imediato, já que se (i) for verdadeira, esta prova deve de alguma forma limitar os vértices que fazem parte de (i) o que fornecerá um resultado para (ii).

**Teorema 6.9 (Spinrad [60] - 2003)** *Todo grafo de co-comparabilidade tem ciclos induzidos de tamanho no máximo 4.*

**Corolário 6.10 (\*)** *A conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, é verdadeira para a classe dos grafos de co-comparabilidade.*

**Prova.** O melhor limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas estabelecido para a classe dos grafos de co-comparabilidade é de  $4\Delta + 1$ , dado por Calamoneri [11]. Este limite ainda não estabelece que a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira para esta classe nos casos em que  $\Delta = 3$  ou  $\Delta = 4$ .

Pelo Teorema 6.9, todo grafo de co-comparabilidade é fracamente cordal. Ou seja, a prova da conjectura para os grafos fracamente cordais dada pelo Teorema 6.8 também é verdadeira para a classe dos grafos de co-comparabilidade.  $\square$

**Corolário 6.11** (Bodlaender *et al.* [7] - 2004) *O problema da  $\lambda$ -coloração para grafos fracamente cordais é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** A classe dos grafo *split* é subclasse dos grafos fracamente cordais, ou seja, todo grafo *split* também é fracamente cordal. Como visto no Teorema 6.28, o problema da  $\lambda$ -coloração para a classe dos grafos *split* é  $\mathcal{NP}$ -completo. Logo, uma restrição do problema da  $\lambda$ -coloração para grafos *fracamente cordais*, considerando apenas os grafos *split*, já é  $\mathcal{NP}$ -completo e, portanto, a forma mais geral do problema também é.  $\square$

**Corolário 6.12** (Bodlaender *et al.* [7] - 2004) *Existe grafo  $G$  fracamente cordal com  $\lambda(G) \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta^{1.5} + \frac{\Delta}{3}$*

**Prova.** Como todo grafo *split* também é fracamente cordal, o exemplo do Teorema 6.27 vale para esta classe.  $\square$

## 6.3 Grafos linha

Nesta seção é apresentado um limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos linha. Também é definida a classe dos grafos *quase linha*, sendo provada a conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, em ambas. Mais informações sobre a classe de grafos linha podem ser obtidas no livro [30], de Harary.

**Definição 6.4** Definidos por Whitney [64], um grafo linha  $G = L(H) = (V_L, E_L)$  de um grafo  $H = (V, E)$  é tal que: toda aresta  $e \in E$  corresponde a um vértice  $v_L \in V_L$  e dois vértices são adjacentes em  $G$  se e somente se as arestas correspondentes aos vértices em  $H$  são incidentes a um mesmo vértice.

**Teorema 6.13** (Krausz [41] - 1943) *Um grafo  $G$  é grafo linha se e somente se existe uma partição das arestas de  $G$  em subgrafos completos de tal modo que cada vértice apareça em no máximo dois subgrafos completos.*

**Teorema 6.14** (\*) *Para qualquer vértice  $v$  de um grafo linha  $G$ ,  $|N_2(v)| \leq \frac{\Delta^2}{2}$ .*



**Prova.** Considere a partição das arestas de  $G$  em subgrafos completos, definida por Krausz [41] no Teorema 6.13. Cada vértice de  $G$  tem seu grau formado pelos, no máximo, dois subgrafos completos adjacentes. Com isso,  $\Delta(G) \leq 2(\omega(G) - 1)$ , onde  $\omega(G)$  é o tamanho do maior subgrafo completo de  $G$ .

Seja  $v$  um vértice com grau  $\Delta$  coberto pelos subgrafos completos  $A$  e  $B$  com  $|A| = a + 1$  e  $|B| = b + 1$ , então  $a + b = \Delta$ , como ilustrado na figura 6.18. Existem  $a$  vértices adjacentes a  $v$  pelo subgrafo completo  $A$  e  $b$  vértices adjacentes a  $v$  pelo subgrafo completo  $B$ . Cada vértice do subgrafo completo  $A$  diferente de  $v$  é adjacente a no máximo  $b$  vértices com distância 2 de  $v$ , isto porque cada um desses vértices já faz parte de um subgrafo completo com  $A$  vértices. Se fossem adjacentes a mais de  $b$  vértices, há uma contradição com o fato de que  $a + b = \Delta$ .

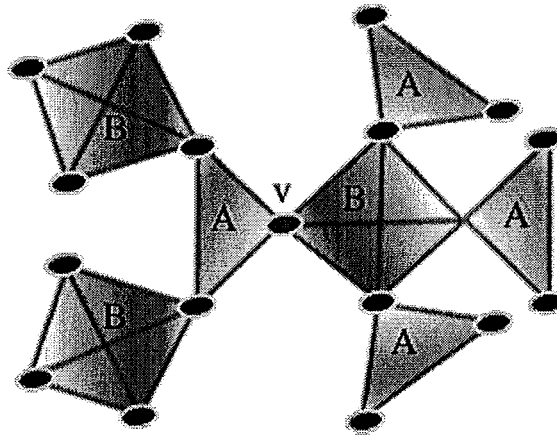


Figura 6.18: Vértice  $v$  de um grafo linha com grau 5

Com isto, existem  $ab$  vértices à distância 2 de  $v$  vindos do subgrafo completo  $A$ . Seguindo o mesmo raciocínio verifica-se que existem o mesmo número de vértices à distância 2 de  $v$  vindos do subgrafo completo  $B$ .

Logo, existem no máximo  $2ab$  vértices à distância 2 de  $v$ . Como  $a = \Delta - b$ , este número é dado por  $2(\Delta - b)(b) = 2\Delta b - 2b^2$ .

Considere  $\Delta$  fixo. O ponto  $y'_m$  máximo desta função é encontrado derivando  $y = 2\Delta b - 2b^2$  em relação a  $b$  e igualando a zero, como visto na figura 6.19. Com isto, este valor é dado por:

$$-4b + 2\Delta = 0$$

$$b = \frac{\Delta}{2}$$

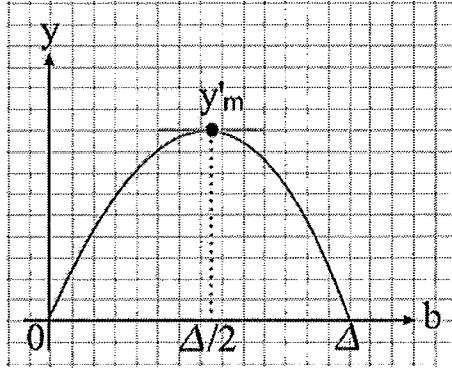


Figura 6.19: Função do máximo de  $|N_2(v)|$  em um grafo linha

E, como  $a + b = \Delta$

$$a = \frac{\Delta}{2}$$

Então,  $|N_2(v)| \leq 2ab \leq \frac{\Delta^2}{2}$ . □

**Teorema 6.15 (\*)** Para  $G$  um grafo linha,  $\lambda(G) \leq \frac{\Delta^2 + 4\Delta - 2}{2}$ .

**Prova.** Considere a abordagem utilizada por Král e Skrekovski [44] no Teorema 3.17. Como para todo vértice  $v$  de  $G$ ,  $|N_1(v)| \leq \Delta$  e  $|N_2(v)| \leq \frac{\Delta^2}{2}$ , então  $\Delta_w(G^2) \leq 2\Delta + \frac{\Delta^2}{2}$ . E, como descrito no Teorema 3.17,  $\lambda(G) \leq \chi_w(G^2) - 1 = \Delta_w - 1 \leq \frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta - 1$ . □

**Corolário 6.16 (\*)** Para um grafo linha  $G$  com  $\Delta \geq 2$ ,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

**Prova.** Se  $\Delta \geq 4$ , tem-se  $\lambda(G) \leq \frac{\Delta^2}{2} + 2\Delta - 1 \leq \Delta^2$ . Já que  $\Delta^2 - 4\Delta + 2 \geq 0$  para todo  $\Delta \geq 4$ . E, para  $\Delta = 2$ , pelo Lema 2.16, tem-se  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ .

Se  $\Delta = 3$ , para cada vértice  $v$  de  $G$ ,  $|N_2(v)| \leq 4$ , como ilustrado na figura 6.20. Pelo Teorema 3.17, como  $\Delta_w(G^2) \leq 2\Delta + 4 = 6 + 4 = 10$ , então  $\lambda(G) \leq \chi_w(G^2) - 1 \leq \Delta_w(G^2) - 1 = 9$ . □

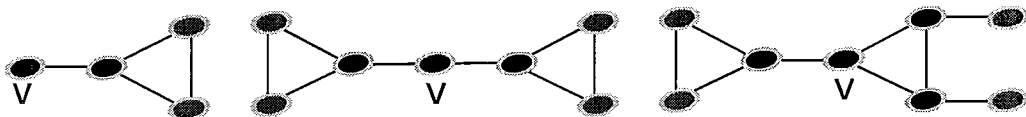


Figura 6.20: Quando  $\Delta = 3$ ,  $v$  têm no máximo 4 vértices à distância 2

**Teorema 6.17 (\*)** *O limite superior para o span de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos linha é  $\Theta(\Delta^2)$ .*

**Prova.** Seja  $G = L(K_n)$  o grafo linha de um grafo completo  $K_n$ . Então  $|V(G)| = |E(K_n)| = \frac{n^2-n}{2}$ ,  $\Delta(G) = 2n - 4$  (cada aresta em  $K_n$  é adjacente a outras  $2n - 4$  arestas) e  $G$  é diâmetro 2, isto porque o grafo é completo, sendo toda aresta  $e$  de  $K_n$  adjacente ou à distância 2 de outra aresta em  $K_n$ . Com isso,  $\lambda(G) \geq \frac{n^2-n}{2} - 1 = \frac{(\frac{\Delta+4}{2})^2 - (\frac{\Delta+4}{2})}{2} - 1 = \frac{\Delta^2+6\Delta}{8}$ . Ou seja, o limite superior para o *span*  $k$  de  $\lambda$ -colorações ótimas para a classe dos grafos linha é  $\frac{\Delta^2+6\Delta}{8} \leq k \leq \frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}$ .  $\square$

### 6.3.1 Grafos quase linha

**Definição 6.5 (\*)** Um grafo  $Q$  é *quase linha* se for possível adicionar arestas em  $Q$  de forma que o grafo resultante  $H$  seja grafo linha com  $\Delta(H) = \Delta(Q) + p$ , onde  $\frac{\Delta(H)^2+4\Delta(H)-2}{2} \leq \Delta(Q)^2$ .

**Teorema 6.18 (\*)** *Para um grafo quase linha  $Q$ ,  $0 \leq p \leq \frac{\Delta(Q)-2-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ .*

**Prova.** Seja  $H$  o grafo linha obtido a partir de  $Q$  adicionando arestas de forma que  $\Delta(H) = \Delta(Q) + p$  seja mínimo.

Sabe-se que  $\frac{\Delta(H)^2+4\Delta(H)-2}{2} \leq \Delta(Q)^2$  e  $\Delta(H) = \Delta(Q) + p$ , então  $\frac{(\Delta(Q)+p)^2+4(\Delta(Q)+p)-2}{2} \leq \Delta(Q)^2$ . Para encontrar o intervalo de possíveis valores de  $p$  é necessário obter as soluções da equação  $0 \leq \Delta(Q)^2 + (-2p-4)\Delta(Q) + (-p^2-4p+2)$ .

$$\Delta(Q) = \frac{(2p+4) \pm \sqrt{(-2p-4)^2 - 4(-p^2-4p+2)}}{2}$$

$$\Delta(Q) = (p+2) \pm \sqrt{2(p^2+4p+1)} \text{ (sendo } p^2+4p+1 \leq (p+2)^2)$$

$$\text{Então, } \Delta(Q) \leq (p+2) - \sqrt{2(p+2)^2} = 0 \text{ e } \Delta(Q) \geq (p+2) + \sqrt{2(p+2)^2}$$

$$\Delta(Q) \geq p(1+\sqrt{2}) + 2 + 2\sqrt{2}$$

$$p \leq \frac{\Delta(Q)-2-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \quad \square$$

Por exemplo, valores de  $p$  para grafos quase linha  $Q$  com  $\Delta(Q) = 100$ :

$$0 \leq p \leq \frac{100-2-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 39.42$$

Ou seja, se for possível transformar um grafo quase linha  $Q$  com  $\Delta(Q) = 100$  em um grafo linha  $H$  adicionando arestas de forma que  $\Delta(H) \leq 139$ , então  $\lambda(Q) \leq \Delta(Q)^2$ .

## 6.4 Grafos *split*

Nesta seção é apresentado um limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos *split*. O primeiro limite para esta classe foi obtido indiretamente por Sakai [59], quando esta forneceu a prova do limite de  $\frac{1}{4}(\Delta + 3)^2$  para grafos cordais. Posteriormente, outro limite foi proposto por Bodlaender *et al.* [6] e depois melhorado em Bodlaender *et al.* [7] passando de  $\Delta^{1.5} + 2\Delta + 2$  para  $\frac{1}{2}\Delta^{1.5} + 2\Delta$ , isto especificamente para a classe dos grafos *split*. E, mais recentemente, este limite foi reduzido para  $\frac{(\Delta+1)^{1.5}}{\sqrt{6}}$  (na a casa dos  $0.41\Delta^{1.5} + O(\Delta)$ ), resultado obtido por Král [42] para os grafos cordais. O nosso resultado reduz o limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos grafos *split* e comprova a conjectura de Griggs e Yeh 3.1 e a conjectura de Král [42] (para a classe dos grafos cordais) para a classe dos grafos *split*.

**Conjectura 6.19 (Král [42] - 2005)** *Existe  $k$ - $\lambda$ -coloração para grafos cordais com  $k \leq \frac{2\Delta^{1.5}}{3\sqrt{3}} + O(\Delta)$ .*

**Definição 6.6 (\*)** Seja  $G = (V, E)$  um grafo *split* e  $V = (K, I)$  uma partição dos vértices de  $G$  tal que os vértices de  $K$  são formados pelo maior subgrafo completo de  $G$  e os vértices de  $I$  são um conjunto independente. Um grafo  $G_c$  é *split condensado* se este é obtido a partir de  $G$  condensando vértices à distância 3 recursivamente, até o grafo ter diâmetro 2. Ou seja, se  $G$  tem dois vértices  $u$  e  $v$  à distância 3, retire os dois vértices, adicione um vértice  $uv$  com todas as adjacências de  $u$  e  $v$ , obtendo um novo grafo  $G'$ , e continue este processo até o grafo se tornar diâmetro 2, neste caso,  $G'$  é um *split condensado* de  $G$ .

**Teorema 6.20 (\*)** *Seja  $G = (K, I, E)$  um grafo *split* e  $G_c = (K_c, I_c, E_c)$  um grafo *split condensado* obtido a partir de  $G$ ,  $G_c$  continua sendo *split* e  $\Delta(G) = \Delta(G_c)$ .*

**Prova.** Em um grafo *split*  $G$ , todo vértice  $v$  com  $g(v) = \Delta$  pertence a um maior subgrafo completo. Suponha, por absurdo, que  $v$  pertença a um vértice do conjunto independente que não faça parte de um maior subgrafo completo. Então  $v$  é adjacente a  $\Delta$  vértices em  $K$ , e todos os  $\Delta$  vértices em  $K$  são adjacentes entre si. Ou seja, os vértices  $y \in K$  têm grau  $\Delta$ , formando com  $v$  um maior subgrafo completo em  $G$ , uma contradição.

Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices em  $I$  com distância 3. Então  $u$  e  $v$  não são adjacentes a um mesmo vértice (senão distância de  $u$  e  $v$  seria 2). O vértice  $uv$  é adjacente aos mesmos vértices de  $K$  que  $u$  e  $v$  eram e continua não sendo adjacente a todos os outros vértices em  $I$ , ou seja, o grafo  $G'$ , obtido por esta condensação, continua sendo *split* e, conseqüentemente,  $G_c$  também.

Ao condensar os vértices  $u$  e  $v$  pertencentes a  $I$ ,  $K_c = K$  (já que ambos não fazem parte de  $K$ ). Como os vértices  $u$  e  $v$  estão à distância 3 em  $I$ , estes não são adjacentes a um mesmo vértice em  $K$ . Ou seja, os graus dos vértices em  $K_c$  continuam os mesmos graus que em  $K$ , pois toda aresta incidente a um vértice em  $K$  continua incidente ao mesmo vértice em  $K_c$  (o que muda são as incidências das arestas em  $I_c$ , onde agora as arestas incidentes a  $u$  ou a  $v$  são incidentes a  $uv$  como ilustrado na figura 6.21).

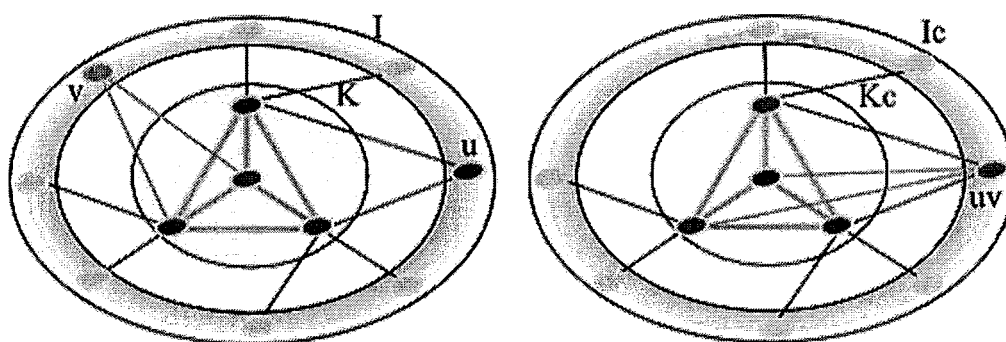


Figura 6.21: Grafo *split*  $G$  e grafo *split* condensado  $G'$

Após condensar os vértices  $u$  e  $v$ , todo vértice  $x \in V(G')$  com  $x \neq \{u, v\}$  continua com o mesmo grau que tinham em  $G$ , sendo  $g(x) \leq \Delta(G)$ , onde algum vértice  $y \in K_c$  tem grau  $g(y) = \Delta(G)$ , já que em um grafo *split*, todo vértice com grau  $\Delta$  pertence ao maior subgrafo completo. O vértice  $uv$  é adjacente a no máximo todos os vértices de  $K_c$  e, como  $|K_c| = |K| \leq \Delta(G)$ , então  $g(uv) \leq \Delta(G)$ . Logo,  $\Delta(G') = \Delta(G)$  e, conseqüentemente,  $\Delta(G_c) = \Delta(G)$ .  $\square$

É interessante verificar que existem diversas formas dos vértices de  $I$  serem condensados e, cada uma delas pode fornecer uma atribuição de cores diferente e que respeita uma  $\lambda$ -coloração. Entretanto, como será verificado a seguir, em todas estas existe um limitante em  $|I_c|$ , o que nos fornece um limite superior para o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para grafos nesta classe.

**Teorema 6.21 (\*)** Se  $G = (K, I, E)$  é um grafo *split* e  $G_c = (K_c, I_c, E_c)$  é um grafo *split* condensado obtido a partir de  $G$  com  $|I_c| = p$  e  $|K_c| = w$ , então  $w \binom{\Delta - w + 1}{2} \geq \binom{p}{2}$

**Prova.** Como  $G_c$  é diâmetro 2, então todo par de vértices em  $G_c$  tem distância menor ou igual a 2. Como  $I_c$  é um conjunto independente, então todo par de vértices em  $I_c$  tem distância igual a 2.

Seja  $x$  e  $y$  dois vértices em  $I_c$ , se estão à distância 2 então são adjacentes a um mesmo vértice em  $K_c$ . Suponha, por absurdo, que não. Então  $x$  e  $y$  são adjacentes apenas a vértices  $x' \in K_c$  e  $y' \in K_c$  onde  $x' \neq y'$ , então o menor caminho entre  $x$  e  $y$  é do tipo  $(x, x', y', y)$ , onde  $x$  e  $y$  têm distância 3, uma contradição.

Se  $|I_c| = p$ , existem  $\binom{p}{2}$  pares de vértices em  $I_c$  que estão à distância 2 entre si, onde estes pares têm que ser cobertos por vértices em  $K_c$ . Ou seja, para cada par de vértices  $x$  e  $y$  de  $I_c$ , existe vértice  $z$  em  $K_c$  onde  $xz \in E_c$  e  $yz \in E_c$ .

Para encontrar o número máximo de vértices de  $I_c$ , basta verificar o número máximo de vértices que podem ser cobertos pelos vértices de  $K_c$ , onde  $|K_c| = w$ .

Cada vértice  $y \in K_c$  tem no máximo  $\Delta - w + 1$  arestas adjacentes a vértices em  $I_c$  e  $w - 1$  arestas incidentes a vértices em  $K_c$ . As arestas incidentes a  $K_c$  não influenciam na cobertura de vértices à distância 2 em  $I_c$  (um par de vértices em  $I_c$ , para ser coberto, precisa ser adjacente a um mesmo vértice em  $K_c$ , as arestas entre vértices de  $K_c$  não cobrem nenhum desses pares).

Então, para cada vértice  $y \in K_c$ , existem no máximo  $\Delta - w + 1$  arestas que cobrem vértices em  $I_c$ , e o número máximo de vértices de  $I_c$  cobertos por estas  $\Delta - w + 1$  arestas é  $\binom{\Delta - w + 1}{2}$ . É necessário que o número de vértices em  $I_c$  não seja maior do que o número de vértices em  $I_c$  que podem ser cobertos pelos vértices de  $K_c$ , ou seja,  $w \binom{\Delta - w + 1}{2} \geq \binom{p}{2}$ .  $\square$

**Teorema 6.22 (\*)** Para um grafo *split*  $G$ ,  $\lambda(G) \leq \frac{1 + \sqrt{\frac{16\Delta^3 + 24\Delta^2 + 27}{27}}}{2} + 2\Delta - 2$ .

**Prova.** Seja  $G = (K, I, E)$  um grafo *split* e  $G_c = (K_c, I_c, E_c)$  um grafo *split* condensado de  $G$ . Uma  $\lambda$ -coloração de  $G_c$  pode ser estendida a uma  $\lambda$ -coloração de  $G$ , onde os vértices condensados em  $G$  recebem a mesma cor, o que pode ocorrer, já que estão à distância 3 entre si, então  $\lambda(G) \leq \lambda(G_c)$ .

Pelo Teorema 6.21, se  $|I_c| = p$  e  $K_c = w$  (onde  $0 \leq w \leq \Delta$ , já que os vértices de  $K_c$  formam uma clique), então  $w \binom{\Delta-w+1}{2} \geq \binom{p}{2}$ .

Pelo Lema 4.11, para qualquer grafo diâmetro 2  $G_c$ ,  $\lambda'(G) = \lambda(G) \leq n + pv(G_c^c) - 2$ . Se o grafo  $G_c$  for  $q$ -partido, então  $pv(G_c^c) \leq q$  (já que os próprios vértices de cada parte formam uma partição de caminhos disjuntos no grafo complemento) e, pelo Teorema 1.1, de Brooks, todo grafo a menos de ciclo ímpar e completo tem  $q \leq \Delta$ . O único grafo ciclo ímpar que é *split* é o  $C_3$ , que é isomorfo ao  $K_3$ . E, pelo Teorema 2.1, tem-se  $\lambda(G) \leq 2\Delta$  para grafos completos.

Para os casos restantes,  $\lambda = n + pv(G_c^c) - 2$ , onde  $n = p + w$ .

$$\text{Como } w \binom{\Delta-w+1}{2} \geq \binom{p}{2}$$

$$(w\Delta - w^2 + w)(\Delta - w) \geq p^2 - p$$

$$w\Delta^2 - w^2\Delta - w^2\Delta + w^3 + w\Delta - w^2 \geq p^2 - p$$

Seja  $f(w) = w^3 + w^2(-2\Delta - 1) + w(\Delta^2 + \Delta)$ , para encontrar o valor máximo de  $f$  pode-se fazer uma análise dessa função. Quando  $w = 0$ , então  $f(w) = 0$  e esta é uma das raízes dessa função, o mesmo ocorre quando  $w = \Delta$ . Sejam  $f'(w) = 3w^2 + w(-4\Delta - 2) + (\Delta^2 + \Delta)$  e  $f''(w) = 6w - 4\Delta - 2$  a primeira e a segunda derivada da função  $f(w)$ . Quando o valor de  $f''(w)$  é zero, encontra-se o ponto de inflexão dessa função, ou seja, onde a concavidade muda. Este ponto se situa em  $6w - 4\Delta - 2 = 0$ , ou seja,  $w = \frac{2\Delta+1}{3}$ . Ao igualar o valor da primeira derivada a zero, encontra-se valores máximos e mínimos locais de  $f(w)$ . Como ilustrado na figura 6.22, o maior valor de  $f(w)$  ocorre quando  $0 \leq w \leq \frac{2\Delta+1}{3}$ , já que o ponto  $\frac{2\Delta+1}{3}$  é de inflexão, e o valor da função  $f(w)$  quando  $w = \Delta$  é zero e, por causa disto, a função tem um dos dois formatos apresentados na figura 6.22. E, em ambos, o ponto  $f'_m(w)$ , máximo da função  $f(w)$ , esta situado antes do ponto de inflexão.

Para  $f'(w) = 0$ ,  $3w^2 + w(-4\Delta - 2) + (\Delta^2 + \Delta) = 0$ .

$$w = \frac{(4\Delta+2) \pm \sqrt{(-4\Delta-2)^2 - 12(\Delta^2+\Delta)}}{6}$$

$$w = \frac{(2\Delta+1)}{3} \pm \frac{\sqrt{16\Delta^2+16\Delta+4-12\Delta^2-12\Delta}}{6}$$

$$w = \frac{(2\Delta+1)}{3} \pm \frac{\sqrt{4\Delta^2+4\Delta+4}}{6}$$

$$w = \frac{(2\Delta+1) \pm \sqrt{\Delta^2+\Delta+1}}{3}$$

Já foi visto que o valor de  $w$  para  $f'_m(w)$  é menor que  $\frac{(2\Delta+1)}{3}$ , como ilustrado na figura 6.22.

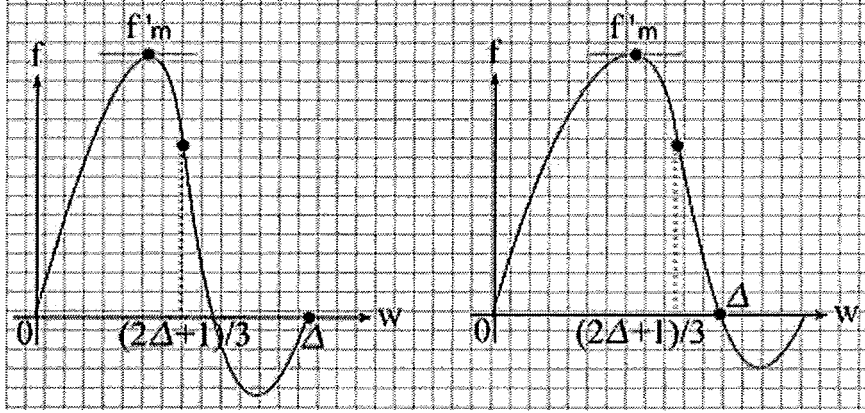


Figura 6.22: Possíveis formatos dos gráficos da função  $f$

Verifica-se a função  $f(w) = w(\Delta - w + 1)(\Delta - w)$  para os valores de  $w$  iguais a  $\frac{\Delta-2}{3}$ ,  $\frac{\Delta-1}{3}$ ,  $\frac{\Delta}{3}$ ,  $\frac{\Delta+1}{3}$  e  $\frac{\Delta+2}{3}$ , apresentados na tabela 5.1.

$w$	$f(w)$
$\frac{\Delta-2}{3}$	$\frac{4\Delta^3+6\Delta^2-18\Delta-20}{27}$
$\frac{\Delta-1}{3}$	$\frac{4\Delta^3+6\Delta^2-6\Delta-4}{27}$
$\frac{\Delta}{3}$	$\frac{4\Delta^3+6\Delta^2}{27}$
$\frac{\Delta+1}{3}$	$\frac{4\Delta^3+6\Delta^2-2}{27}$
$\frac{\Delta+2}{3}$	$\frac{4\Delta^3+6\Delta^2-6\Delta-4}{27}$

Tabela 6.1: Valores da função  $f(w)$

Estes pontos caracterizam uma mudança na função  $f$ , sendo o valor máximo desta função localizado entre os valores  $\frac{\Delta-2}{3}$  e  $\frac{\Delta+2}{3}$  de  $w$ . Como  $w$ , que representa o tamanho de  $K_c$ , este tem que ser um número inteiro. Com isso, um dos valores localizados na tabela 5.1 representa o máximo da função para valores de  $w$  inteiros, já que o máximo dessa função se encontra entre esses valores e  $w$  tem obrigatoriamente um valor inteiro entre esses valores.

Então, no pior caso, o valor máximo da função  $f(w)$  é obtido quando  $w = \frac{\Delta}{3}$ , sendo  $f(w) = \frac{4\Delta^3+6\Delta^2}{27}$ . E, este valor limita o tamanho máximo de  $p$ .

$$\frac{4\Delta^3+6\Delta^2}{27} \geq p^2 - p$$

$$0 \geq p^2 - p - \frac{4\Delta^3+6\Delta^2}{27}$$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{16\Delta^3+24\Delta^2+27}}{2}$$

$$\text{Ou seja, } 0 \leq p \leq \frac{1 + \sqrt{16\Delta^3+24\Delta^2+27}}{2}$$



$$E, \lambda = n + pv(G_c^e) - 2 \leq p + w + q - 2 \leq \frac{1 + \sqrt{\frac{16\Delta^3 + 24\Delta^2 + 27}{27}}}{2} + 2\Delta - 2. \quad \square$$

**Corolário 6.23 (\*)** O resultado do Teorema 6.22 fornece um limite superior para o span de  $\lambda$ -colorações ótimas nos grafos *split* melhor do que  $\frac{\Delta^{1.5}}{2} + 2\Delta$ , previamente desenvolvido por Bodlaender et al. [7].

**Prova.** Suponha, por absurdo, que  $p = \frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} + \Delta^{0.5} + 1$ . Então  $p(p-1) = (\frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} + \Delta^{0.5} + 1)(\frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} + \Delta^{0.5}) = \frac{4\Delta^3 + 4\sqrt{27}\Delta^2 + 2\sqrt{27}\Delta^{1.5} + \Delta^{0.6}}{27} > \frac{4\Delta^3 + 6\Delta^2}{27}$ , uma contradição pelo Teorema 6.22.

Logo  $p \leq \frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} + \Delta^{0.5}$ , e  $\lambda(G) \leq n + q - 2 \leq \frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} + \Delta^{0.5} + 2\Delta - 2 \leq \frac{\Delta^{1.5}}{2} + 2\Delta$ , para qualquer  $\Delta$  (vide figura 6.23 para o gráfico da função).

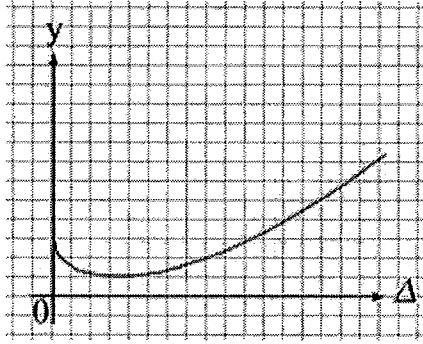


Figura 6.23: Verificação que  $0 \leq 0.115\Delta^{1.5} - \Delta^{0.5} + 2$

Um valor aproximado para este limite pode ser dado por  $0.385\Delta^{1.5} + \Delta^{0.5} + 2\Delta - 2$ .

□

**Corolário 6.24 (\*)** A conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, é verdadeira para a classe dos grafos *split*.

**Prova.** Pelo Corolário 6.23, para grafos *split*,  $\lambda(G) \leq 0.385\Delta^{1.5} + \Delta^{0.5} + 2\Delta - 2$ . E,  $0.385\Delta^{1.5} + \Delta^{0.5} + 2\Delta - 2 \leq \Delta^2$ , para  $\Delta \geq 3$  (vide figura 6.24 para o gráfico da função). Para  $\Delta = 2$ , pelo Lema 2.16,  $\lambda(G) \leq \Delta^2$ . □

**Corolário 6.25 (\*)** A conjectura 6.19, de Král, é verdadeira para a classe dos grafos *split*.

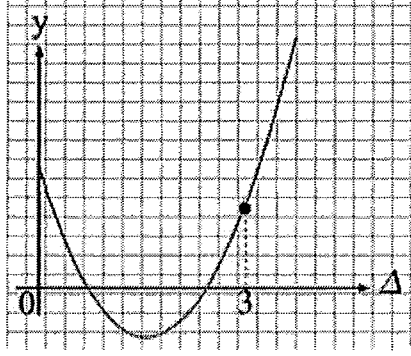


Figura 6.24: Verificação que  $0 \leq \Delta^2 - 0.385\Delta^{1.5} - \Delta^{0.5} - 2\Delta + 2$

**Prova.** Pelo Corolário 6.23,  $\lambda(G) \leq \frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} + \Delta^{0.5} + 2\Delta - 2$ . Como  $\frac{2\sqrt{27}\Delta^{1.5}}{27} = \frac{2\Delta^{1.5}}{3\sqrt{3}}$ , a nossa  $\lambda$ -coloração dos grafos *split* comprova a conjectura de Král para a classe dos grafos *split*, subclasse dos grafos cordais.  $\square$

**Conjectura 6.26 (\*)** *A conjectura 6.19, de Král, pode ser provada para a classe dos grafos cordais utilizando o resultado do Corolário 6.25.*

**Evidência.** Na verdade, como a classe dos grafos cordais tem um esquema de eliminação perfeita, onde todos os vértices que sucedem outros na ordenação deste esquema de eliminação perfeita formam um subgrafo completo, pode-se tentar tratar grafos cordais como vários tipos especiais de subgrafos *split* com algumas modificações, que continuam respeitando a conjectura de Král [42] se as cores forem atribuídas em uma certa ordenação. O problema é que existem vértices fora do subgrafo que influem nos vértices que fazem parte do subgrafo. Para alguns casos, fazendo alterações nas ordenações do esquema de eliminação perfeita, é possível verificar que a conjectura é verdadeira utilizando o resultado do teorema 6.22, mas como ainda existem casos não resolvidos, esta parte do trabalho não fará parte deste texto.

**Teorema 6.27 (Bodlaender *et al.* [7] - 2004)** *Existe grafo  $G = (K, I)$  na classe dos *split* onde  $\lambda(G) \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta^{1.5} + \frac{\Delta}{3}$ .*

**Prova.** Constrói-se um grafo *split*  $G$  com diâmetro 2 onde  $|I| = \frac{1}{3}\Delta^{1.5}$  e  $|K| = \frac{\Delta}{3} + 1$ . Com isso,  $\lambda(G) \geq \lambda'(G) \geq n - 1 \geq \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta^{1.5} + \frac{\Delta}{3}$ .

Seja  $G$  com  $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta^{1.5}$  vértices no conjunto independente  $I$ . Separe-os em  $\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta$  grupos, cada um com no máximo  $\frac{\Delta}{3}$  vértices. Seja  $K = \frac{\Delta}{3} + 1$ . Existem no máximo  $\frac{(\sqrt{\frac{2}{3}}\Delta)^2}{2}$  pares distintos desses grupos. Para cada um dos pares desses grupos, um vértice da clique é adjacente a todos os vértices desses dois grupos. Com isso, o grau máximo desse grafo é  $\Delta$  (cada vértice é adjacente a  $\frac{\Delta}{3}$  vértices em  $K$  e adjacente a no máximo  $\frac{2\Delta}{3}$  vértices no conjunto independente  $I$ ).  $\square$

**Teorema 6.28 (Bodlaender *et al.* [7] - 2004)** *O problema da  $\lambda$ -coloração para grafos split é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** É feita uma generalização da prova de  $\mathcal{NP}$ -completude do problema da  $\lambda$ -coloração, feita por Griggs e Yeh [28] e descrita na seção 2.5.

Seja  $\mathcal{F}$  uma classe de grafos. Se para todo  $G \in \mathcal{F}$  a operação de *join* de  $G$  com um vértice  $v$  resultar em um grafo  $G' \in \mathcal{F}$  e, se o problema de encontrar um caminho hamiltoniano na classe dos grafos complemento de  $\mathcal{F}$  for  $\mathcal{NP}$ -completo, então o problema da  $\lambda$ -coloração para a classe dos grafos  $\mathcal{F}$  é  $\mathcal{NP}$ -completo. Isto porque existe transformação polinomial do problema de encontrar um caminho hamiltoniano na classe de grafos  $G^c$  complementos de  $\mathcal{F}$  para o problema de encontrar uma  $(|V(G')|)$ - $\lambda$ -coloração do grafo  $G'$  obtido pelo *join* dos grafos  $G \in \mathcal{F}$  com um vértice  $v$ , como descrito no Teorema 2.19, e este problema estar claramente em  $\mathcal{NP}$ .

Se for considerada a classe dos grafos *split*, adicionar um vértice universal a um grafo *split* continua mantendo o grafo resultante na classe dos *split* e, encontrar um caminho hamiltoniano na classe dos grafos formada pelos complementos dos grafos da classe *split* é  $\mathcal{NP}$ -completo. Isto porque o complemento de um grafo *split* é um grafo *split* (o conjunto de vértices que era independente em  $G$  vira completo em  $G^c$  e o conjunto de vértices que era um completo em  $G$  vira um conjunto independente em  $G^c$ ), ou seja, a classe dos grafos complementos dos *split* são os próprios *split* e, o problema de encontrar um caminho hamiltoniano em um grafo *split* é  $\mathcal{NP}$ -completo, prova feita por Golubic [24]. Então, o problema da  $\lambda$ -coloração para grafos *split* é  $\mathcal{NP}$ -completo.  $\square$

**Definição 6.7** Um grafo  $G$  é *fortemente cordal* se é cordal e para cada ciclo de tamanho par com tamanho maior ou igual a 6 existe uma corda onde a distância no ciclo entre os vértices extremos desta corda é par.

**Teorema 6.29 (Dahlhaus [60] - 1991)** *Um grafo  $G$  é bipartido cordal se e somente se o grafo obtido por transformar uma das partes de  $G$  em um completo é fortemente cordal. Além disso, neste caso,  $G$  também será um split.*

**Corolário 6.30 (\*)** *O problema da  $\lambda$ -coloração para a classe dos grafos  $\mathcal{F}$ , formada pelos complementos dos grafos fortemente cordais, é  $\mathcal{NP}$ -completo.*

**Prova.** O problema de encontrar caminhos hamiltonianos em grafos fortemente cordais foi provado ser  $\mathcal{NP}$ -completo por Muller [55]. Usando os mesmos argumentos do Teorema 6.28, como adicionar um vértice universal em um grafo  $G$  na classe  $\mathcal{F}$  mantém  $G$  nesta classe e, como o problema de encontrar o caminho hamiltoniano para a classe dos grafos complemento de  $\mathcal{F}$ , que são os grafos fortemente cordais, é um problema  $\mathcal{NP}$ -completo, então o problema da  $\lambda$ -coloração para a classe dos grafos que estão em  $\mathcal{F}$  e tenham um vértice universal também é  $\mathcal{NP}$ -completo.  $\square$

## 6.5 Grafos de permutação

Nesta seção é apresentado um limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos de permutação. Este resultado é melhor do que os previamente obtidos por Bodlaender *et al.* [7] para grafos de permutação ( $\lambda \leq 5\Delta - 2$ ) e Calamoneri [11] para grafos de co-comparabilidade ( $\lambda \leq 4\Delta + 1$ ).

A seguir são apresentadas algumas propriedades dos grafos de permutação.

**Definição 6.8** Um grafo  $G$  é de *comparabilidade* se existe uma ordenação de seus vértices  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ , tal que para cada  $i < j < l$ , se  $v_i v_j \in E(G)$  e  $v_j v_l \in E(G)$ , então  $v_i v_l \in E(G)$ .

**Definição 6.9** Um grafo  $G$  é de *co-comparabilidade* se o seu complemento  $G^c$  é de comparabilidade.

**Teorema 6.31 (Dushnik e Miller [19] - 1941)** *Um grafo  $G$  é de permutação se e somente se  $G$  é de comparabilidade e de co-comparabilidade.*

**Teorema 6.32 (Golumbic [24] - 1980)** *Um grafo  $G$  é de permutação se e somente se é um grafo de interseção de segmentos de retas que conectam duas retas paralelas no plano.*

Para o resto desta seção, baseado no Teorema de Golumbic [24], usamos  $v$  tanto para denotar um vértice quanto o seu segmento correspondente.

**Teorema 6.33 (\*)** *Para um grafo de permutação  $G$ ,  $\lambda(G) \leq 4\Delta - 3$ .*

**Prova.** Se  $G$  não for diâmetro 2, atribua cores aos vértices do grafo utilizando o método de Král e Skrekovski, apresentado no Teorema 3.17. Seja  $v$  um vértice de  $G$ , os vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  cruzam o segmento de reta  $v$  no modelo de permutação. Seja  $X$  e  $Y$  a partição do conjunto de vértices adjacentes a  $v$  em  $G$  definida como ilustrado na figura 6.25. Sejam  $eX$  e  $eY$  os conjuntos de vértices à distância 2 de  $v$  que se situam a esquerda no modelo de permutação e que são adjacentes a vértices de  $X$  e  $Y$ , os conjuntos  $dX$  e  $dY$  são definidos de maneira analoga, como ilustrado na figura 6.25. Para este caso,  $N_1(v) = |X| + |Y|$  e  $N_2(v) \leq |dX| + |dY| + |eX| + |eY|$ .

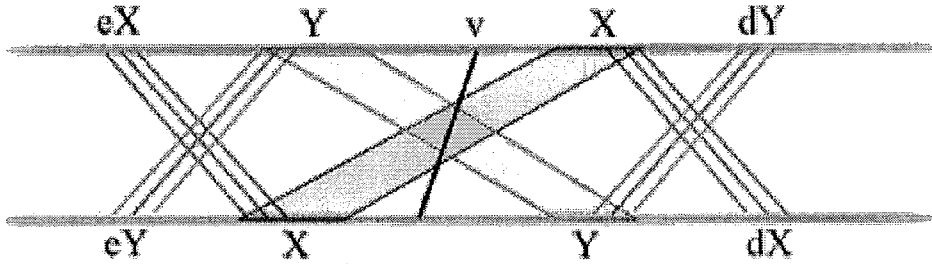


Figura 6.25: Modelo de interseção de um grafo de permutação

Se  $X \neq \emptyset$  e  $Y \neq \emptyset$ , existe um vértice adjacente a todos os vértices em  $Y$ , a todos em  $eX$  e a  $v$  (o segmento mais a esquerda em  $X$  tem essa propriedade). Como este segmento é cruzado por no máximo  $\Delta$  segmentos, tem-se  $|eX| + |Y| + 1 \leq \Delta$ . Analogamente  $|dX| + |Y| + 1 \leq \Delta$ ,  $|eY| + |X| + 1 \leq \Delta$  e  $|dY| + |X| + 1 \leq \Delta$ . Somando-se as quatro inequações, obtém-se o número de vértices que estão à distância 2 de  $v$  mais duas vezes o número de vértices que são adjacentes a  $v$ ,  $|eX| + |dX| + |eY| + |dY| + 2|X| + 2|Y| \leq 4\Delta - 4$ . Ou seja,  $d_w(v) \leq 4\Delta - 4$ .

Se  $Y = \emptyset$  (o caso de  $X = \emptyset$  é análogo),  $|eX| + 1 \leq \Delta$  e  $|dX| + 1 \leq \Delta$ , como ilustrado na figura 6.26. Ou seja,  $|eX| + |dX| \leq 2\Delta - 2$  e,  $d_w(v) \leq 2X + |eX| + |dX| \leq 4\Delta - 2$ . Então, pelo Teorema 3.17,  $\lambda(G) \leq \chi_w(G^2) - 1 \leq \Delta_w - 1 \leq 4\Delta - 3$ .

Se  $G$  for diâmetro 2, suponha, por absurdo, que exista segmento  $j$  à distância 2 de  $v$  à esquerda no modelo de permutação, que não seja adjacente a algum segmento

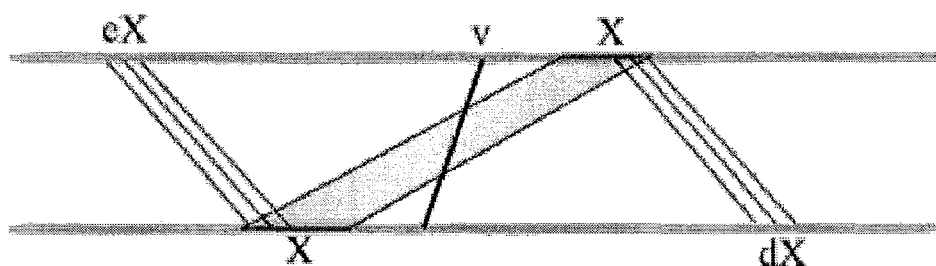


Figura 6.26: Modelo de interseção de um grafo de permutação

$l$  de  $X$  (os segmentos que cruzam  $v$ ), como ilustrado na figura 6.27. Como o grafo é diâmetro 2, é necessário que  $j$  e  $l$  estejam à distância 2, ou seja, existe segmento  $p$  que cruza ambos. Só que para isto,  $p$  também cruza o segmento  $v$  e faz parte de  $X$ , ou seja, existe segmento em  $X$  que cruza todos os segmentos à distância 2 de  $v$  à esquerda no modelo, uma contradição com a suposição. Para os vértices à distância 2 à direita no modelo, a prova é análoga. E, o mesmo vale para vértices à distância 2 por segmentos que passem por  $Y$ . Então, existe segmento em  $X$  que é cruzado por todos os vértices à distância 2 de  $v$  por  $X$  e existe segmento em  $Y$  com a mesma propriedade.

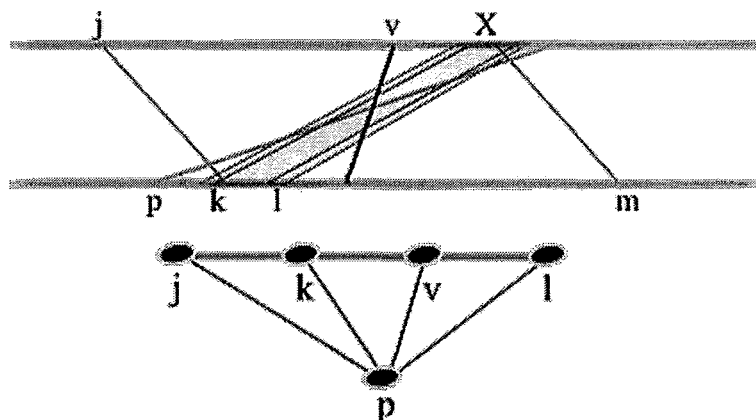


Figura 6.27: Contradição em grafo de permutação e diâmetro 2

As possíveis representações de um vértice  $v$  em um modelo de permutação de  $G$  são dadas na figura 6.28. No primeiro caso,  $dY$  e  $dX$  são vazios, senão existiriam vértices  $j$  e  $m$  à distância 3, com  $j \in eX$ ,  $k \in X$ ,  $l \in Y$  e  $m \in dY$ , o caso em que  $eY$  e  $eX$  são vazios é análogo. Sendo  $|eX| + |Y| + 1 \leq \Delta$  (já que todos os segmentos de  $eX$  e de  $Y$  cruzam algum segmento em  $X$ ),  $|eY| + |X| + 1 \leq \Delta$  (já que todos os segmentos de  $eY$  e de  $X$  cruzam algum segmento de  $Y$ ) e  $|eX| + |eY| + 2|X| + 2|Y| =$

$2|N_1(v)| + |N_2(v)| \leq 3\Delta - 2$ . No segundo caso,  $|eX| + |dX| + 1 \leq \Delta$  (já que existe segmento de reta em  $X$  adjacente a todos os segmentos em  $eX$  e em  $dX$ ). Com isso,  $|eX| + |dY| + 2|X| = 2|N_1(v)| + |N_2(v)| \leq 3\Delta - 1$ . Em ambos os casos, se for utilizada a atribuição de cores do Teorema 3.12, de Chang e Kuo,  $\lambda(G) \leq \max_{v(G)}\{2|N_1(v)| + |N_2(v)|\} \leq 3\Delta - 1$ .  $\square$

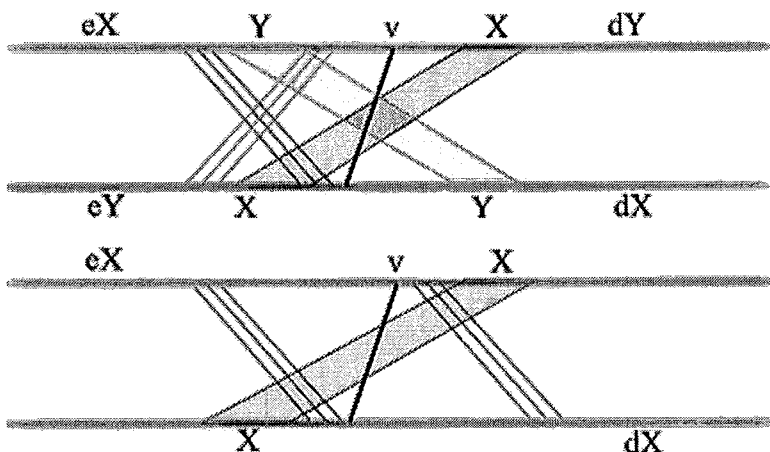


Figura 6.28: Modelos de interseção de grafo de permutação e diâmetro 2

**Corolário 6.34 (\*)** *A conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, é verdadeira para a classe dos grafos de permutação.*

**Prova.** No Teorema 6.33 foi estabelecido o limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos grafos de permutação de  $\lambda \leq 4\Delta - 3$ . Ou seja, para  $\Delta \geq 3$ , sempre existe cor para  $v$  no intervalo  $\{0, \dots, \Delta^2\}$  se for utilizado o método de atribuição de cores descrita. Para  $\Delta = 2$ , pelo Lema 2.16,  $\lambda \leq \Delta^2$ .  $\square$

## 6.6 Cografos

Nesta seção é apresentado resultado para o limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos cografos. Esta classe já foi estudada por Chang e Kuo [15], que estabeleceram algoritmo linear para encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima. Porém, não foi feito um estudo no limite superior justo para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nesta classe em relação ao valor de  $\Delta$ , o que é feito a seguir. Além disso, é

apresentada a classe dos  $p$ -cografos conexos, onde a conjectura 3.1, de Griggs e Yeh, é verdadeira para certos valores de  $p$ .

**Teorema 6.35 (\*)** Para um cografo  $G$ , formado pelo *join* dos cografos  $G_1$  e  $G_2$ ,  $n = |V(G)| \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2)$ .

**Prova.** A operação de *join* entre os grafos  $G_1$  e  $G_2$  torna todos os vértices de  $G_1$  adjacentes aos vértices de  $G_2$  e vice-versa. Então,  $\Delta(G) = \max\{\Delta(G_1) + |V(G_2)|, \Delta(G_2) + |V(G_1)|\}$ , como ilustrado na figura 6.29.

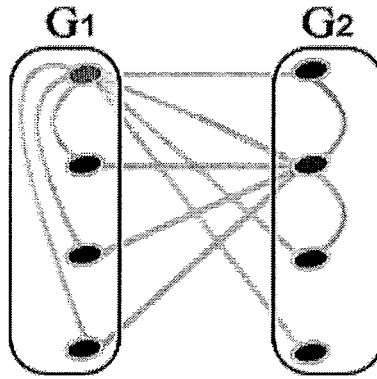


Figura 6.29: Obtenção do  $\Delta$  de um cografo conexo

Como  $\Delta(G)$  é o máximo entre  $\Delta(G_1) + |V(G_2)|$  e  $\Delta(G_2) + |V(G_1)|$ , então  $2\Delta(G) \geq \Delta(G_1) + \Delta(G_2) + |V(G_1)| + |V(G_2)|$ . E, como  $|V(G_1)| + |V(G_2)| = n$ , então  $n \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2)$ .  $\square$

**Corolário 6.36 (\*)** Para um cografo  $G = G_1 \wedge G_2$ ,  $\lambda(G) \leq 2\Delta - \Delta(G_1) - \Delta(G_2) + pv(G^c) - 2$ .

**Prova.** Vale ressaltar que, para um cografo desconexo, esta prova pode ser aplicada a cada componente conexa, obtendo o mesmo resultado para a componente conexa com maior *span*.

O grafo  $G$  é diâmetro 2, já que é obtido por uma operação de *join*. Então, todo vértice está à distância no máximo 2 dos outros e  $\lambda'(G) = \lambda(G)$ . Pelo Lema 4.11,  $\lambda(G) = \lambda'(G) = n + pv(G^c) - 2$ . E, pelo Teorema 6.35,  $n \leq 2\Delta(G) - \Delta(G_1) - \Delta(G_2)$ .

$\square$



**Teorema 6.37 (Chudnovsky *et al.* [16] - 2006)** *Um grafo  $G$  é perfeito se e somente se  $G$  e  $G^c$  não contém ciclos ímpares induzidos de tamanho maior ou igual a 5.*

**Teorema 6.38 (Lovász [48] - 1972)** *Todo cografo é perfeito.*

**Prova.** Na verdade todo cografo é de permutação. Pode-se a partir da co-árvore do cografo obter um modelo de permutação, onde as folhas da co-árvore são segmentos de retas e, se o nó interno da co-árvore for uma operação de união, os segmentos representados por seus filhos são colocados um do lado do outro, senão o nó interno é uma operação de *join* e os segmentos dos filhos se cruzam totalmente no modelo.

Como todo grafo de permutação é de comparabilidade e de co-comparabilidade e, como grafos de comparabilidade não têm ciclo ímpar induzido com tamanho maior ou igual a 5, senão neste ciclo existem arestas  $\overrightarrow{uv}$  e  $\overrightarrow{vy}$  e não existe aresta  $\overrightarrow{uy}$ , uma contradição com o fato dos grafos de comparabilidade terem uma *orientação transitiva* (existe ordenação onde se existem arestas  $\overrightarrow{uv}$  e  $\overrightarrow{vy}$ , existe aresta  $\overrightarrow{uy}$ ). Com isso, grafos de comparabilidade não têm ciclo ímpar induzido maior ou igual a 5. Como grafos de permutação são de comparabilidade e co-comparabilidade, não existe ciclo ímpar de tamanho maior do que 5 e não existe anti-ciclo ímpar maior do que 5 e, pelo Teorema 6.37, todo grafo de permutação é perfeito.  $\square$

**Teorema 6.39 (\*)** *Para um cografo  $G = G_1 \wedge G_2$ ,  $\lambda(G) \leq 2\Delta$ .*

**Prova.** Esta prova pode ser aplicada a cada componente conexa de um cografo, sendo  $\lambda$  o máximo *span* obtido entre elas.

Em  $G$ , o maior subgrafo completo com tamanho  $\omega(G)$  foi obtido a partir da operação de *join* dos grafos  $G_1$  e  $G_2$ . Além disso,  $\omega(G) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2) + 2$ , já que todo par de vértices é adjacente em um subgrafo completo, e a operação de *join* de  $G_1$  e  $G_2$  não alterou as adjacências entre vértices de  $G_1$  e nem entre vértices de  $G_2$ . Como todo vértice em  $G_1$  tem no máximo adjacência a  $\Delta(G_1)$  vértices e os de  $G_2$  a  $\Delta(G_2)$  vértices, então  $\omega(G) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2) + 2$ , como ilustrado na figura 6.30.

Pelo Lema 4.12, para um grafo  $q$ -partido,  $pv(G^c) \leq q$ . Pelo Teorema 6.38, todo cografo é perfeito. Como  $G$  é perfeito, pelo Teorema 1.1, se  $G$  não é completo

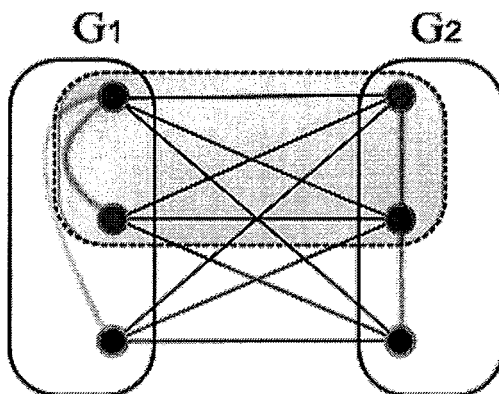


Figura 6.30: Maior subgrafo completo de um cografo

nem ciclo ímpar, então  $q = \chi(G) = \omega(G)$ . Quando  $G$  é completo ou ciclo ímpar, pelos Teoremas 2.1 e 2.2,  $\lambda(G) \leq 2\Delta$ . Para os outros casos, pelo Corolário 6.36,  $\lambda(G) \leq 2\Delta - \Delta(G_1) - \Delta(G_2) + pv(G^c) - 2 \leq 2\Delta - \Delta(G_1) - \Delta(G_2) + \omega(G) - 2$ . E, como  $\omega(G) \leq \Delta(G_1) + \Delta(G_2) + 2$ , tem-se  $\lambda(G) \leq 2\Delta$ .

É interessante verificar que este limite é justo para esta classe de grafos, já que todo grafo completo  $K_n$  é cografo e, pelo Teorema 2.1,  $\lambda(K_n) = 2\Delta$ .  $\square$

**Definição 6.10** Um grafo  $G$  é *threshold* se este pode ser obtido a partir de operações de *join* e união de um grafo *threshold* com um vértice isolado ou se este é um vértice isolado.

Um problema em aberto, proposto por Calamoneri [9], era encontrar o limite superior justo para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas na classe dos grafos *threshold*, uma prova para esta conjectura segue no Corolário 6.40.

**Corolário 6.40** (\*) Para um grafo *threshold*  $G$ ,  $\lambda(G) \leq 2\Delta$ .

**Prova.** Sabe-se que os grafos *threshold* são uma subclasse dos cografos. Com isso, pode-se afirmar que o limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos cografos também ocorre para os grafos *threshold*, sendo este limite dado pelo Teorema 6.39. E, como todo grafo completo tem  $\lambda = 2\Delta$  e são *threshold*, fica verificado que este limite é justo para esta classe.  $\square$

### 6.6.1 Componente $p$ -cografos

**Definição 6.11** (\*) Um grafo  $G$  é *componente  $p$ -cografos* se os vértices de  $G$  podem ser particionados em  $p$  cografos conexos.

**Corolário 6.41** (\*) Para um grafo  $G$  componente  $p$ -cografos,  $\lambda(G) \leq p(2\Delta + 2) - 2$

**Prova.** Este Corolário segue do Teorema 6.39. Particione o grafo  $G$  em  $p$  cografos conexos:  $G_1, G_2, \dots, G_p$ . Pelo Teorema 6.39,  $\lambda(G_i) \leq 2\Delta(G_i)$ ,  $1 \leq i \leq p$ . Como toda componente conexa de um cografo tem diâmetro 2, então todos os vértices destas componentes precisam de cores diferentes.

No pior caso, os  $p$  cografos têm todas as arestas possíveis entre seus vértices. Como em cada componente os vértices já têm cores diferentes, estas arestas não adicionam nenhuma restrição entre vértices da mesma componente.

Atribua as cores aos vértices de cada cografo  $G_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) em sequência, onde cada componente começa utilizando a última cor da anterior mais dois. Isto nos fornece uma  $\lambda$ -coloração para o grafo  $G$ , onde:

$$\lambda(G) \leq \left[ \sum_{i=1}^p (2\Delta) + 2 \right] - 2 = p(2\Delta + 2) - 2$$

□

**Corolário 6.42** (\*)

**Prova.** Do Teorema 6.41,  $\lambda(G) \leq p(2\Delta + 2) - 2$ . E, como  $p \leq \frac{\Delta-1}{2}$ ,  $\lambda(G) \leq \frac{\Delta-1}{2}(2\Delta + 2) - 2 \leq \Delta^2 - 3$  □

Na figura 6.31 é ilustrado um exemplo de um componente  $p$ -cografos  $G$  com  $p = 3$  e  $\Delta = 7$  onde, pelo Corolário 6.42,  $\lambda(G) \leq \Delta^2 - 3$ .

## 6.7 Grafos $P_4$ -tidy

Nesta seção será indicado como é possível encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para grafos  $P_4$ -tidy em tempo linear.

Os únicos métodos conhecidos para encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima em tempo linear, além das classes mais simples como ciclos, rodas e completos, são

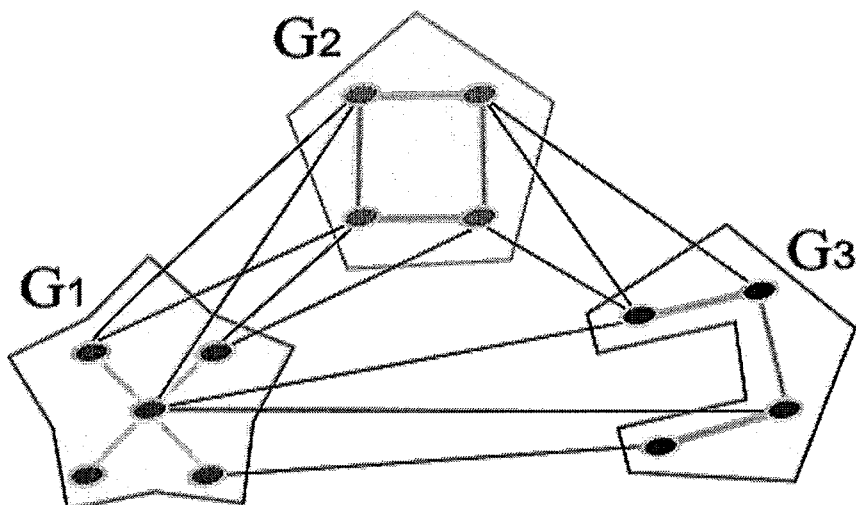


Figura 6.31: Exemplo de grafo componente  $p$ -cografos

para cografos (Chang e Kuo [15]), grafos grade (Calamoneri e Petreschi [9]) e grafos *chain* (Araki [1]). Além desses, só foram desenvolvidos um algoritmo polinomial para calcular o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para árvores (Chang e Kuo [15]), que depois foi aprimorado por Hasunuma *et al.* [31], baixando sua complexidade para linear e um algoritmo linear para os grafos  $p$ -quase árvores para alguns valores de  $p$  (Fiala *et al.* [21]).

Desta forma, é interessante apresentar um método para encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima na classe dos grafos  $P_4$ -tidy, super classe dos cografos, em tempo linear. Além disso, o algoritmo apresentado nesta seção obsoleta o algoritmo linear aproximativo para grafos matrogênicos (Calamoneri e Petreschi [13]), já que esta classe tem como super classe os grafos  $P_4$ -estendidos, que por sua vez tem como super classe os grafos  $P_4$ -tidy.

No final da seção são apresentadas as modificações necessárias para, além de encontrar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para os grafos  $P_4$ -tidy, também encontrar uma  $\lambda$ -coloração com este *span*, tendo complexidades de tempo e espaço lineares.

O algoritmo apresentado nesta seção é uma adaptação do algoritmo linear para encontrar o número de caminhos disjuntos em grafos  $P_4$ -tidy, feito por Giakoumakis, Roussel e Thuillier [23], incluindo a verificação dos casos em que este algoritmo não fornece diretamente uma  $\lambda$ -coloração ótima para os grafos  $P_4$ -tidy. Alguns conceitos são necessários e são definidos a seguir.

**Definição 6.12** Um grafo  $G$  é *aranha* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em 3 conjuntos  $(K, S, R)$ , com  $|K| = |S| \geq 2$  onde: os vértices de  $K$  induzem um subgrafo completo em  $G$ , os vértices de  $S$  induzem um subgrafo independente em  $G$ , os vértices de  $R$  (também chamado de *cabeça*) induzem um subgrafo qualquer em  $G$ , existem todas as arestas entre vértices de  $K$  e  $R$  e; (i) existem  $|S|$  arestas entre vértices de  $S$  e  $K$  referentes a uma correspondência entre os vértices de  $S$  e os vértices de  $K$  (neste caso o grafo é chamado de *aranha magra*) ou (ii) existem  $|S|(|S| - 1)$  arestas entre vértices de  $S$  e  $K$  só faltando as arestas referentes a uma correspondência entre os vértices de  $S$  e de  $K$  (neste caso o grafo é chamado de *aranha gorda*).

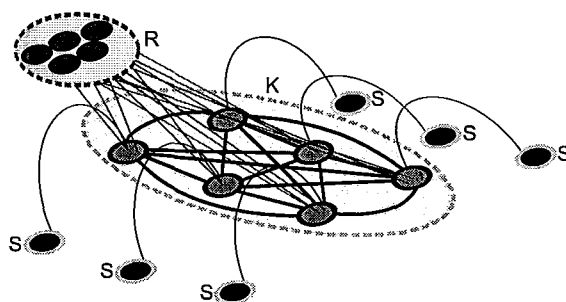


Figura 6.32: Grafo *aranha magra*

Na figura 6.32 é apresentado um exemplo de um grafo aranha magra, onde existem arestas entre todos os vértices em  $K$  e existem arestas entre todos os vértices de  $K$  e  $R$  (existe alguma liberdade poética para a elaboração dessa figura, portanto algumas arestas ocasionalmente podem ter sido omitidas, e o conjunto  $S$  está dividido em vários vértices isolados). Para uma ilustração mais formal dos grafos aranha, e para verificação que o complemento de um grafo  $G$  aranha magra é um grafo  $G^c$  aranha gorda, e vice-versa, é dada a figura 6.33.

**Definição 6.13** Um grafo  $G$  é *quase-ouriço do mar com cabeça* ou *quase-estrela do mar com cabeça* se este for obtido de um grafo  $H$  (aranha magra ou aranha gorda, respectivamente) com  $V(H) = (K, S, R)$ , trocando-se um vértice  $v \in K \cup S$  por um  $K_2$  ou por um  $S_2$  (mantendo as mesmas adjacências de  $v$  para ambos os vértices novos). Os vértices novos do  $K_2$  ou do  $S_2$  pertencem ao conjunto do vértice que foi trocado.

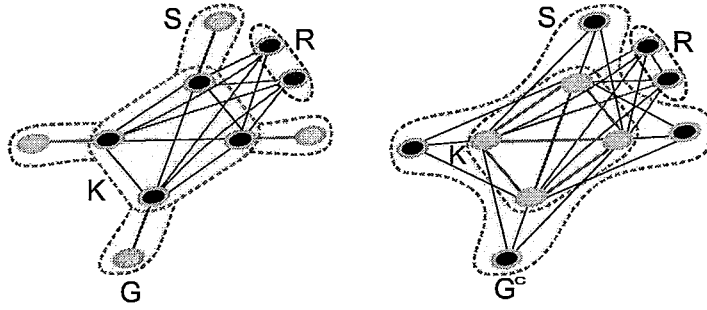


Figura 6.33: Complementos de grafos *aranha magra* e *aranha gorda*

**Definição 6.14** Uma *decomposição modular* é uma partição recursiva dos vértices de um grafo em subconjuntos de vértices chamados de *módulos* tal que para cada módulo, todo vértice que não pertença ao módulo tem a mesma vizinhança a todos os vértices dentro do módulo. Um módulo  $M$  é chamado de *forte* se não existe interseção com outros módulos (só podendo conter ou ser contido por outros módulos).

**Definição 6.15** Os módulos fortes de um grafo  $G$  podem ser organizados em uma *árvore de decomposição modular*, onde um módulo  $M'$  é pai de um módulo  $M$  se  $M \subseteq M'$ . Ou seja, as folhas dessas árvores representam subgrafos  $K_1$  em  $G$  e a raiz representa o próprio grafo.

**Teorema 6.43** (McConnel e Spinrad [50] - 1993) *Uma árvore de decomposição modular de um grafo  $G = (V, E)$  pode ser obtida em tempo  $O(|V| + |E|)$ .*

**Teorema 6.44** (Giakoumakis, Roussel e Thuillier [23] - 1997) *Um grafo é  $P_4$ -tidy se, em sua árvore de decomposição modular, os vértices de um módulo forte induzem um subgrafo: desconexo, complemento desconexo, aranha magra, aranha gorda, quase-ouriço do mar com cabeça, quase-estrela do mar com cabeça,  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$ ,  $C_5$  ou  $K_1$ .*

**Teorema 6.45** (Giakoumakis, Roussel e Thuillier [23] - 1997) *A classe dos grafos  $P_4$ -tidy é hereditária.*

**Teorema 6.46** (Giakoumakis, Roussel e Thuillier [23] - 1997) *O número mínimo de caminhos disjuntos  $pv(G)$  em que se pode particionar um grafo  $P_4$ -tidy  $G$  pode ser obtido em tempo linear.*

Como consequência do resultado do Teorema 6.46 pode-se construir um algoritmo para encontrar uma  $\lambda$ -coloração ótima para grafos  $P_4$ -tidy se forem tratados alguns casos em especial.

**Lema 6.47 (\*)** *Os grafos  $P_4$ -tidy são auto-complementares.*

Se a mesma árvore de decomposição modular for considerada, no grafo complemento, cada módulo forte desconexo vira complemento desconexo, cada aranha magra vira aranha gorda, cada quase-ouriço do mar com cabeça vira quase-estrela do mar com cabeça, cada  $P_5$  vira  $\overline{P_5}$ , cada  $C_5$  vira  $C_5$  e cada  $K_1$  continua sendo o mesmo  $K_1$  e vice-versa. Além disso, a relação de cada vértice fora do módulo ter a mesma adjacência a todos os vértices dentro de um módulo permanece. E, pelo Teorema 6.44, o grafo  $G^c$  é  $P_4$ -tidy.  $\square$

**Corolário 6.48 (\*)** *O span de uma  $\lambda$ -coloração ótima de grafos  $P_4$ -tidy  $G$ , a menos de grafos com componentes conexas que sejam grafos aranha magra ou quase-ouriço do mar com cabeça, pode ser obtido em tempo linear.*

**Prova.** Pelo Teorema 6.44, sabe-se que a raiz da árvore de decomposição modular será um grafo: (i) desconexo; (ii) complemento desconexo; (iii) aranha magra; (iv) aranha gorda; (v) quase-ouriço do mar com cabeça; (vi) quase-estrela do mar com cabeça; (vii)  $P_5$ ; (viii)  $\overline{P_5}$ ; (ix)  $C_5$ ; (x)  $K_1$ .

Na figura 6.34 são apresentadas  $\lambda$ -colorações ótimas para os grafos  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$ ,  $C_5$  e  $K_1$ , resolvendo os casos (vii), (viii), (ix) e (x).

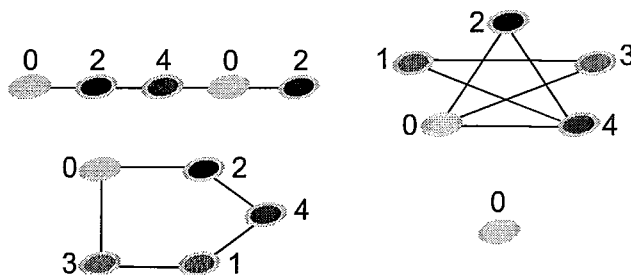


Figura 6.34:  $\lambda$ -colorações ótimas para os grafos:  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$ ,  $C_5$  e  $K_1$

Se o grafo  $G$  for desconexo, uma  $\lambda$ -coloração ótima é obtida como a união das  $\lambda$ -colorações ótimas de cada componente conexa e, como cada componente conexa de  $G$

é um grafo  $P_4$ -tidy (a classe dos grafos  $P_4$ -tidy é hereditária segundo o Teorema 6.45), ao obter o  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima para cada componente conexa  $P_4$ -tidy, o máximo desses  $spans$  fornece o  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima para o grafo  $G$ .

Pelo lema 6.47, o complemento de um grafo  $P_4$ -tidy é um grafo  $P_4$ -tidy.

Se o grafo for complemento desconexo, este foi obtido por meio de uma operação de *join* entre as componentes conexas de seu grafo complemento. Com isto, sabe-se que este grafo é diâmetro 2, sendo uma  $\lambda$ -coloração de  $G$  equivalente a uma  $\lambda'$ -coloração de  $G$ . Sabe-se, pelo Lema 4.11, feito por Chang e Kuo [15], que o  $span$  de uma  $\lambda'$ -coloração de um grafo  $G$  é dado por  $\lambda'(G) = n + pv(G^c) - 2$ . Como  $G^c$  é um grafo  $P_4$ -tidy, pelo Teorema 6.46, este é obtido em tempo linear. Logo,  $\lambda(G) = \lambda'(G)$  também é obtido em tempo linear.

Como os grafos aranha gorda e quase-estrela do mar com cabeça são todos diâmetro 2 para  $K \geq 3$  (segue trivialmente de que todo par de vértices em  $S$  têm pelo menos um vértice em  $K$  em comum, todos os vértices em  $K$  são adjacentes entre si, e todo vértice em  $R$  é adjacente a todo vértice em  $K$ ), a obtenção do  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima desses grafos pode ser feita da mesma forma que para grafos complemento desconexo. Para  $K = 2$  os grafos aranha gorda e quase-estrela do mar com cabeça podem ser vistos como grafos aranha magra e quase-ouriço do mar com cabeça, respectivamente.

Faltam os casos em que a raiz da árvore de decomposição modular é um grafo aranha magra ou quase-ouriço do mar com cabeça. Para esses casos é necessária uma análise mais elaborada, que é feita nos Teoremas 6.50 e 6.51, utilizando-se o Lema 6.49.  $\square$

**Lema 6.49 (\*)** *Seja  $G$  um grafo obtido por uma operação de *join* entre os vértices de  $G_2$  e os vértices de  $H_1$ , subgrafo induzido diâmetro 2 de um grafo  $G_1$ . Se existe  $\lambda$ -coloração para  $G_1$  onde os vértices de  $H_1$  recebem as mesmas cores que as de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $H_1$  e os vértices  $V(G_1) \setminus V(H_1)$  não recebem nenhuma cor maior que o  $span$  de  $H_1$  mais um, então essa  $\lambda$ -coloração de  $G_1$  se estende a uma das  $\lambda$ -colorações ótimas de  $G$ .*

**Prova.** No Lema 4.15, Chang e Kuo [15] provaram que para o *join* de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ ,  $\lambda'(G_1 \wedge G_2) = \lambda'(G_1) + \lambda'(G_2) + 2$ . Ou seja, é feita uma atribuição de cores de



uma  $\lambda'$ -coloração ótima de  $G_1$ , uma cor não é utilizada, e é feita uma atribuição de cores de uma  $\lambda'$ -coloração ótima de  $G_2$ , desconsiderando as cores  $\{0, \dots, \lambda'(G_1) + 1\}$  (para isto basta somar o valor  $\lambda'(G_1) + 2$  as cores da  $\lambda'(G_2)$ -coloração de  $G_2$ ).

O subgrafo induzido formado pelos vértices de  $H_1 \cup G_2$  é o *join* destes dois subgrafos, onde todos os seus vértices têm distância 2 entre si. Neste caso, tem-se  $\lambda(G[H_1 \cup G_2]) = \lambda'(G[H_1 \cup G_2]) = \lambda'(H_1) + \lambda'(G_2) + 2$ .

Com isso, pelo Lema 2.6, sabe-se que  $\lambda(G) \geq \lambda'(H_1) + \lambda'(G_2) + 2$ , já que  $G$  tem um subgrafo que utiliza pelo menos este *span*.

Se existe uma  $\lambda$ -coloração de  $G_1$ , onde os vértices de  $H_1$  recebem a mesma cor que em uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $H_1$ , e os vértices de  $V(G_1) \setminus V(H_1)$  recebem cores com valores até  $\lambda'(H_1) + 1$ , esta atribuição de cores fará parte de alguma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G$ .

Como  $H_1$  é um subgrafo diâmetro 2,  $\lambda(H_1)$  é igual a  $\lambda'(H_1)$ , e esta atribuição de cores dos vértices de  $G_1$  pode ser estendida para uma  $\lambda$ -coloração do grafo  $G$  com  $\lambda(G) = \lambda'(H_1) + \lambda'(G_2) + 2$  se os vértices de  $G_2$  receberem as cores de uma  $\lambda'$ -coloração de  $G_2$  somada da cor  $\lambda'(H_1) + 2$ . Isto porque o subgrafo induzido  $G[H_1 \cup G_2]$  se comporta como um *join* entre dois grafos e os vértices de  $V(G_1) \setminus V(H_1)$  não adicionam nenhuma restrição aos vértices de  $G_2$ , já que estes só recebem cores em  $\{0, \dots, \lambda'(H_1) + 1\}$ . E, esta  $\lambda$ -coloração de  $G$  será ótima, já que existe um subgrafo de  $G$  que precisa, no mínimo, deste *span*  $\square$

**Teorema 6.50 (\*)** *O span de uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo aranha magra pode ser obtido em tempo linear.*

**Prova.**

Seja  $G'$  um grafo aranha magra tal que  $V(G') = (S', K', R')$ . Para qualquer vértice  $v' \in S'$ ,  $|Pro(v')| \leq 3 + (|K'| - 1) + |R'|$  (três cores do vértice em  $K'$  em sua adjacência,  $|K'| - 1$  dos vértices à distância 2 em  $K'$  e  $|R'|$  dos vértices em  $R'$  que estão à distância 2) e, em um intervalo de  $\{0, \dots, |K'| + |R'| + 2\}$ , sempre existe cor que pode ser atribuída a  $v$  respeitando uma  $\lambda$ -coloração.

O *span* necessário para atribuir cores aos vértices do subgrafo induzido  $G'[K' \cup R']$  é, pelo Lema 4.11,  $\lambda(G'[K' \cup R']) = \lambda'(G'[K' \cup R']) = |K'| + |R'| + pv(\overline{G'[K' \cup R']}) - 2$ , já que este é formado por um *join* entre os subgrafos induzidos  $G'[K']$  e  $G'[R']$ .

Se  $|K'| + |R'| + pv(\overline{G'[K' \cup R']}) - 1 \geq |K'| + |R'| + 3$ , então sempre existem cores em  $\{0, \dots, \lambda'(G'[K' \cup R'])\}$  que podem ser atribuídas aos vértices de  $S'$ . Este caso ocorre quando  $pv(\overline{G'[K' \cup R']}) \geq 4$ .

Se  $pv(\overline{G'[K' \cup R']}) \leq 4$  (considerou-se interessante fazer a prova a partir de  $pv(\overline{G'[K' \cup R']}) \leq 4$  para facilitar o entendimento do Teorema 6.51, mesmo esta prova podendo ser feita apenas para  $pv(\overline{G'[K' \cup R']}) \leq 3$ ), então  $|K'| \leq 4$ , já que  $K'$  é um subgrafo completo e existe um *join* entre elementos de  $K'$  e  $R'$  em  $G'$ . No complemento do subgrafo  $G'[K' \cup R']$  cada vértice em  $K'$  corresponde a um caminho disjunto, este sendo limitado por 4.

Se  $|K'| = 4$  e  $pv(\overline{G'[K' \cup R']}) \leq 4$ , esse grafo aranha magra tem  $R' = \emptyset$ , senão existe um completo de tamanho 5 em  $G'[K' \cup R']$  que faz  $pv(\overline{G'[K' \cup R']}) \geq 5$ . Uma  $\lambda$ -coloração ótima para o grafo aranha magra com  $|K'| = 4$  é dada na figura 6.35.

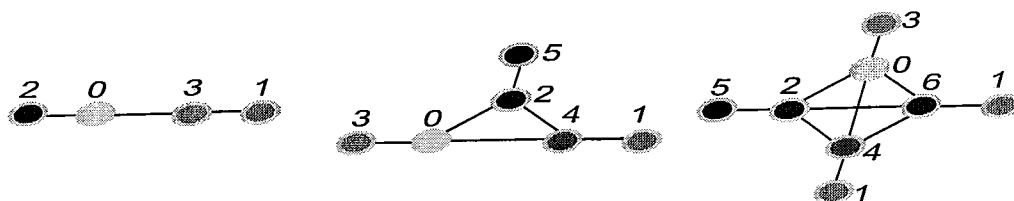


Figura 6.35:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos aranha magra onde  $2 \leq |K'| \leq 4$  e  $R' = \emptyset$

Se  $|K'| = 3$  e  $R' = \emptyset$ , uma  $\lambda$ -coloração ótima é dada na figura 6.35. Para  $R' \neq \emptyset$ , pelo Lema 6.49, se  $K'$  for considerado como  $H_1$  e  $R'$  como  $G_2$ , como os vértices de  $S$  utilizam no máximo a cor  $\lambda'(H_1) + 1$  e os vértices de  $H_1$  recebem cores equivalentes a de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $H_1$ , uma  $\lambda$ -coloração de  $G'[H_1 \cup G_2]$  pode ser obtida como para um grafo complemento desconexo, utilizando o procedimento descrito no Corolário 6.48, aonde os vértices de  $H_1$  vão receber as cores  $\{0, 2, 4\}$  ou  $\{\lambda(G'[H_1 \cup G_2]) - 4, \lambda(G'[H_1 \cup G_2]) - 2, \lambda(G'[H_1 \cup G_2])\}$  (no segundo caso, basta aplicar o Lema 2.12 e inverter a  $\lambda$ -coloração), mantendo as cores dos vértices de  $S'$  como descritas na figura 6.35.

Se  $|K'| = 2$  e  $R' = \emptyset$ , uma  $\lambda$ -coloração ótima é dada na figura 6.35. Para  $R' \neq \emptyset$ , se  $pv(G'[\overline{R'}]) \geq 2$  existe uma cor  $c$  não utilizada em uma  $\lambda'$ -coloração ótima de  $R'$ , e uma  $\lambda$ -coloração ótima para o grafo  $G'$  é dada na figura 6.36, mantendo o mesmo *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G'[K' \cup R']$ , que pode ser calculado como o de

um grafo complemento desconexo, como descrito no Corolário 6.48.

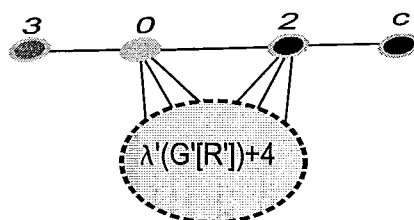


Figura 6.36:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos aranha magra onde  $|K'| = 2$  e  $R' \neq \emptyset$

O que falta ser analisado para os grafos aranha magra é quando  $|K'| = 2$  e  $pv(\overline{G'[R']}) = 1$ . Neste caso, em uma  $\lambda'$ -coloração ótima para  $R'$  todas as cores em  $\{0, \dots, |R'| - 1\}$  são utilizadas injetivamente por vértices de  $R'$ .

Suponha que exista  $\lambda$ -coloração ótima para  $G'$  onde dois vértices de  $G'$  recebem a mesma cor. Os únicos dois vértices à distância 3 em  $G'$  são os dois vértices de  $S'$ . No melhor caso, os vértices de  $K'$  proíbem 4 cores aos vértices de  $R'$ , e a cor dos vértices  $S'$  é diferente dessas 4 cores (já que os dois vértices têm a mesma cor e são adjacentes a vértices de  $K'$ ), ou seja, existem 5 cores proibidas para  $R'$  e, como são utilizadas no mínimo  $|R'|$  cores em uma  $\lambda'$ -coloração de  $R'$ , no total são utilizadas  $|R'| + 5$  cores em uma  $\lambda$ -coloração do grafo  $G'$  onde vértices de  $S'$  têm a mesma cor. Se os vértices de  $S'$  recebem cores diferentes, então são necessários pelo menos  $|R'| + 4$  cores, já que são necessárias  $|R'|$  cores para os vértices de  $R'$  e todas elas têm que ser diferentes das 4 cores dos vértices de  $K'$  e  $S'$ . Uma  $\lambda$ -coloração de  $G'$  com este número de cores (no intervalo  $\{0, \dots, |R'| + 3\}$ ) pode ser gerado da seguinte maneira: (i) encontre uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $K_1 \wedge R'$  como descrito no Corolário 6.48 para grafos complemento desconexo; (ii) complete as cores dos vértices de  $K'$  e  $S'$  segundo a  $\lambda$ -coloração da figura 6.37.  $\square$

**Teorema 6.51 (\*)** *O span de uma  $\lambda$ -coloração ótima de um grafo quase-ouriço do mar com cabeça pode ser obtido em tempo linear.*

**Prova.** Seja  $G''$  um grafo quase-ouriço do mar com cabeça com  $V(G'') = (S'', K'', R'')$ . Seja  $v \in S''$  o vértice que foi substituído por: (i.a) um  $S_2$  ou; por (i.b) um  $K_2$ . Ou, seja  $w \in K''$  o vértice que foi substituído por: (ii.a) um  $S_2$  ou; por (ii.b) um  $K_2$ .

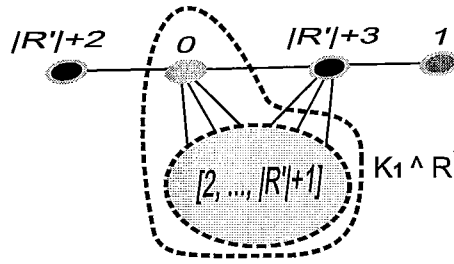


Figura 6.37:  $\lambda$ -colorações ótimas com  $span |R'| + 3$  para grafos aranha magra onde  $|K'| = 2$ ,  $R' \neq \emptyset$  e  $pv(\overline{G'[R']}) = 1$

(i.a) No pior caso, se  $v \in S''$ , então  $|Pro(v)| \leq |R''| + |K''| + 3$ . E, quando  $\lambda'[K'' \cup R''] + 1 = |K''| + |R''| + pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) - 1 \geq |R''| + |K''| + 4$ , sempre existe cor para ser atribuída aos vértices de  $S''$ . Ou seja, quando  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \geq 5$  o  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G''$  é dado por  $\lambda'(G''[K'' \cup R''])$ .

Quando  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \leq 4$ , sabe-se que  $|K''| \leq 4$ . Para  $|K''| = 4$ ,  $R'' = \emptyset$  ou  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \geq 5$  e, uma  $\lambda$ -coloração ótima deste grafo é dada na figura 6.38

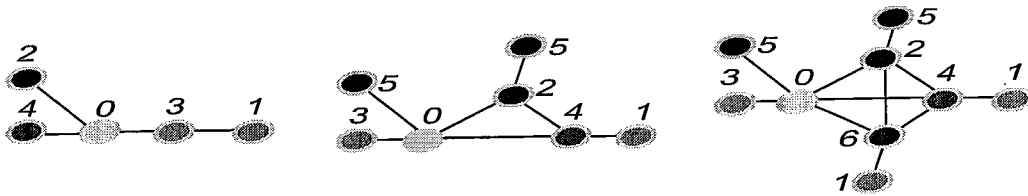


Figura 6.38:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde  $2 \leq |K''| \leq 4$  e  $R'' = \emptyset$

Para  $|K''| = 3$  e  $R'' = \emptyset$  uma  $\lambda$ -coloração ótima é dada na figura 6.38. Para  $R'' \neq \emptyset$  uma  $\lambda$ -coloração de  $K'' \cup S''$  é dada na figura 6.39, onde os vértices de  $K''$  recebem a mesma cor que em uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $K''$  e os vértices de  $S''$  só recebem cores no intervalo  $\{0, \dots, \lambda'(G''[K'']) + 1\}$ . Com isto, pelo Lema 6.49, o  $span$  de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G''$  será o mesmo que para o subgrafo  $G''[K'' \cup R'']$ , que pode ser obtido como descrito no Corolário 6.48, já que este é um grafo complemento desconexo.

Para  $|K''| = 2$  e  $R'' = \emptyset$  uma  $\lambda$ -coloração ótima é dada na figura 6.38. Para  $R'' \neq \emptyset$ , como  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \leq 4$ , então  $1 \leq pv(\overline{G''[R'']}) \leq 2$ .

Se  $pv(\overline{G''[R'']}) = 1$ , suponha que dois vértices de  $S''$  recebam a mesma cor, então esta cor é diferente das 4 cores proibidas por vértices de  $K''$ , já que ambos

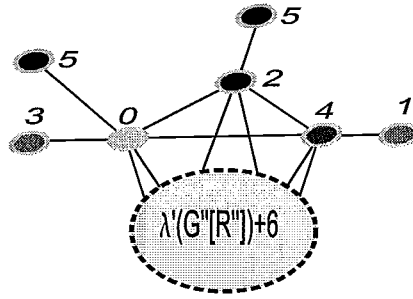


Figura 6.39:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde  $|K''| = 3$  e  $R'' \neq \emptyset$

os vértices de  $S''$  são adjacentes aos vértices de  $K''$ . Com isso, existem pelo menos 5 cores proibidas para os vértices de  $R''$ . Se todas as cores de  $S''$  são diferentes, existem também pelo menos 5 cores proibidas para  $R''$ . Ou seja,  $\lambda(G'') \geq |R''| + 4$ . Na figura 6.40 é apresentada uma  $\lambda$ -coloração ótima para este caso, onde o *span* é  $|R''| + 4$ .

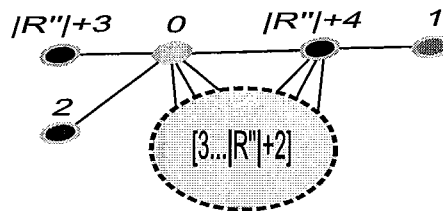


Figura 6.40:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde  $|K''| = 2$ ,  $R'' \neq \emptyset$  e  $pv(\overline{G''[R'']}) = 1$

Se  $pv(\overline{G''[R'']}) = 2$ , da mesma forma que para  $pv(\overline{G''[R'']}) = 1$ , se existem dois vértices em  $S''$  com a mesma cor ou se todos têm cores diferentes implica que  $\lambda(G'') \geq |R''| + 4$ . Na figura 6.41 são apresentadas  $\lambda$ -colorações ótimas para este caso, onde o *span* é  $|R''| + 4$ .

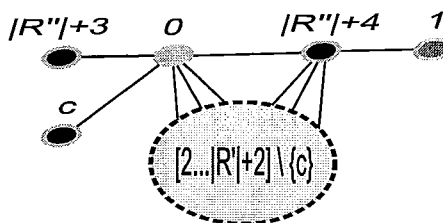


Figura 6.41:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.a) onde  $|K''| = 2$ ,  $R'' \neq \emptyset$  e  $pv(\overline{G''[R'']}) = 2$

(i.b) No pior caso, se  $v \in S''$ , então  $|Pro(v)| \leq 6 + (|K''| - 1) + |R''|$ . Para os casos em que  $\lambda'(K'' \cup R'') + 1 = |K''| + |R''| + pv(\overline{K'' \cup R''}) - 1 \geq |K''| + |R''| + 6$  sempre existem cores para os vértices de  $S''$  utilizando-se o *span* de  $\lambda(G''[K'' \cup R''])$ , subgrafo de  $G''$ . Isto ocorre quando  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \geq 7$ . Portanto, só é preciso verificar os casos em que  $|K''| \leq 6$ .

Para  $|K''| = 6$  e  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \leq 6$ ,  $R'' = \emptyset$  e  $\lambda$ -colorações ótimas para  $5 \leq |K''| \leq 6$  e  $R'' = \emptyset$  são dadas na figura 6.42.

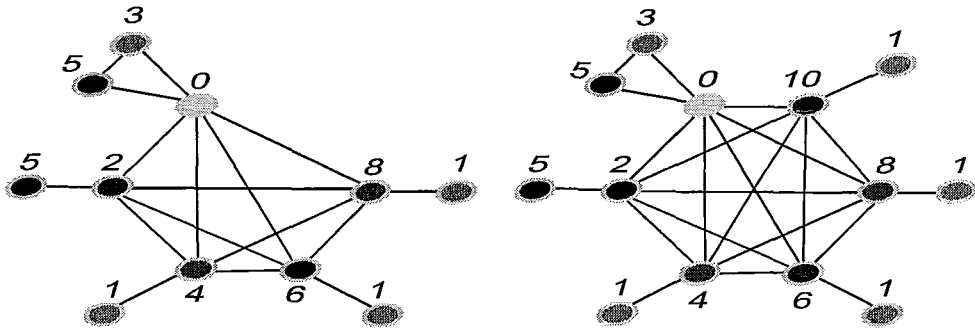


Figura 6.42:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b) onde  $5 \leq |K''| \leq 6$  e  $R'' = \emptyset$

Nos casos em que  $2 \leq |K''| \leq 4$  e  $R'' = \emptyset$  pode-se obter  $\lambda$ -colorações ótimas para estes grafos utilizando as mesmas colorações dadas na figura 6.38 sem desrespeitar nenhuma restrição.

E, quando  $3 \leq |K''| \leq 5$  e  $R'' \neq \emptyset$ , o Lema 6.49 nos diz que  $\lambda(G'') = \lambda(G''[K'' \cup R''])$  segundo as  $\lambda$ -colorações da figura 6.43 e, a  $\lambda(G''[K'' \cup R''])$  pode ser obtida como descrito descrito no Corolário 6.48 para o caso dos grafos complemento desconexo.

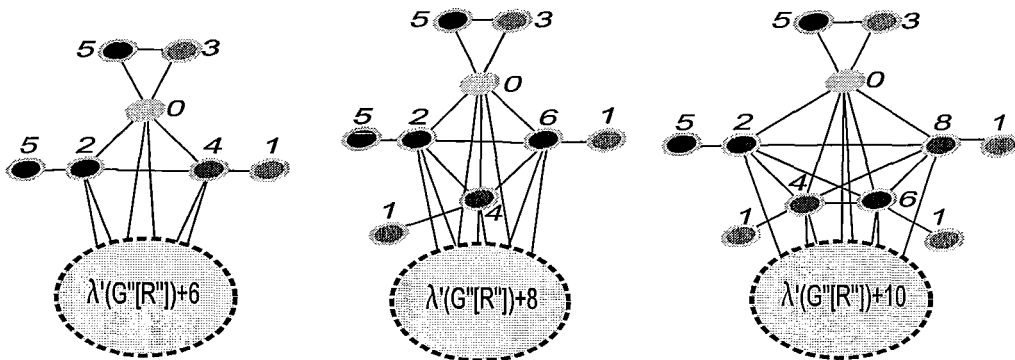


Figura 6.43:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b) onde  $3 \leq |K''| \leq 5$  e  $R'' \neq \emptyset$

Quando  $|K''| = 2$  e  $R'' \neq \emptyset$ , como o caso (i.a) é subgrafo do caso (i.b), pelo Lema 2.6, o *span* para este caso será maior ou igual ao do caso (i.a), onde  $|K''| = 2$  e  $R'' \neq \emptyset$ . Com esta informação, pode-se obter  $\lambda$ -colorações ótimas para os casos em que  $1 \leq pv(G''[R'']) \leq 2$  como dadas na figura 6.44. Para os casos em que  $3 \leq pv(G''[R'']) \leq 4$ , existem pelo menos duas cores  $c_1$  e  $c_2$  com diferença pelo menos dois que não são utilizadas por vértices de  $G''[R'']$  em uma  $\lambda'$ -coloração de  $G''[R'']$  e, uma  $\lambda$ -coloração ótima para o grafo  $G''$  é dada na figura 6.45. Neste caso, *span* de  $G''$  é igual ao do subgrafo  $G''[K'' \cup R'']$ , que pode ser obtido como descrito no Corolário 6.48 para o caso dos grafos complemento conexo.

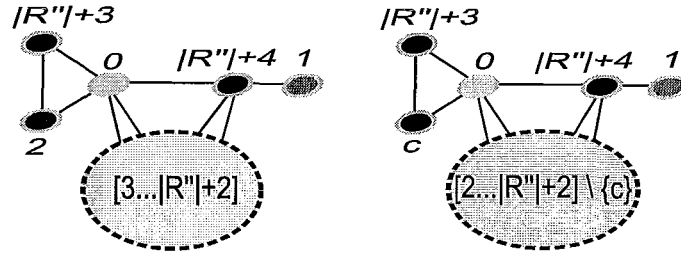


Figura 6.44:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b) onde  $|K''| = 2$ ,  $R'' \neq \emptyset$  e  $1 \leq pv(G''[R'']) \leq 2$

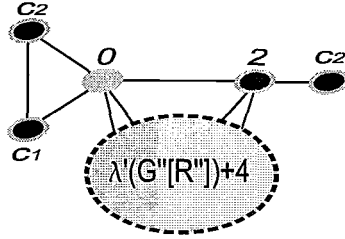


Figura 6.45:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (i.b) onde  $|K''| = 2$ ,  $R'' \neq \emptyset$  e  $3 \leq pv(G''[R'']) \leq 4$

(ii.a) No pior caso, se  $v \in S''$ , então  $|Pro(v)| \leq 6 + (|K''| - 2) + |R''|$ . E, quando  $\lambda'(G''[K'' \cup R'']) + 1 = |K''| + |R''| + pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) - 1 \geq |R''| + |K''| + 5$ , sempre existem cores para os vértices de  $S''$  utilizando-se *span*  $\lambda'(G''[K'' \cup R''])$ . Ou seja, quando  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \geq 6$  o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G''$  é dado por  $\lambda'(G''[K'' \cup R''])$ , que pode ser calculado utilizando-se o método para grafos complemento desconexos, descrito no Corolário 6.48.

Nos casos em que  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \leq 5$ ,  $3 \leq |K''| \leq 6$ . Isto porque  $|K''| \geq 7$  obriga  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \geq 6$ , e este grafo foi obtido de um grafo aranha magra  $H$

com partição de vértices  $(K, R, S)$ , onde o vértice trocado por um  $S_2$  foi algum de  $K$ , sendo ambos os novos vértices pertencentes ao conjunto  $K''$  e, como  $|K| \geq 2$  por definição, então  $|K''| \geq 3$ .

Para  $|K''| = 6$ , como  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \leq 5$ ,  $R'' = \emptyset$ . E,  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça onde  $3 \leq |K''| \leq 6$  são dadas na figura 6.46.

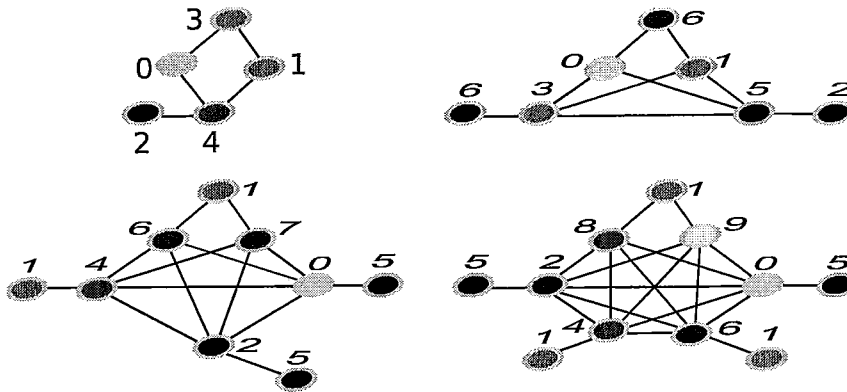


Figura 6.46:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.a) onde  $3 \leq |K''| \leq 6$  e  $R'' = \emptyset$

Nos casos em que  $4 \leq |K''| \leq 5$  o Lema 6.49 nos diz que  $\lambda(G'') = \lambda(G''[K'' \cup R''])$  segundo a coloração da figura 6.47 e, a  $\lambda(G''[K'' \cup R''])$  pode ser obtida como descrito descrito no Corolário 6.48 para o caso dos grafos complemento desconexos.

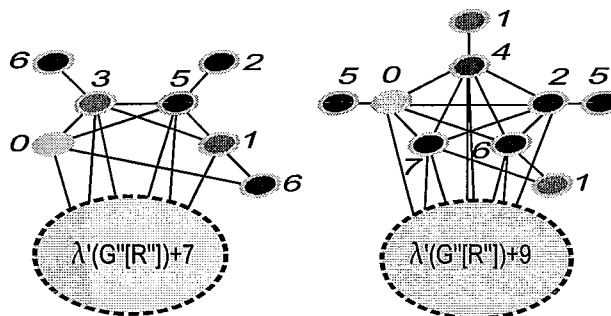


Figura 6.47:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.a) onde  $4 \leq |K''| \leq 5$  e  $R'' \neq \emptyset$

E, quando  $|K''| = 3$ , os 3 vértices de  $K''$  proibem pelo menos 5 cores em vértices de  $R''$  e, conseqüentemente,  $\lambda(G'') \geq \lambda'(R'') + 5$ . Uma  $\lambda$ -coloração ótima de  $G''$  com este *span* é dada na figura 6.48.



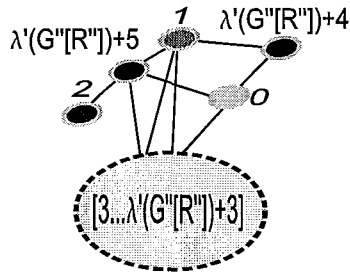


Figura 6.48:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.a) onde  $|K''| = 3$  e  $R'' \neq \emptyset$

(ii.b) No pior caso, o número máximo de cores proibidas para este caso é igual ao do caso (ii.a). E, pelo mesmo motivo de (ii.a), pode-se calcular em o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima para esse caso quando  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \geq 6$ .

Só faltam ser verificados os casos em que  $pv(\overline{G''[K'' \cup R'']}) \leq 5$ ,  $3 \leq |K''| \leq 6$ . Na figura 6.49 são apresentadas  $\lambda$ -colorações ótimas para os casos em que  $3 \leq |K''| \leq 6$  e  $R'' = \emptyset$ .

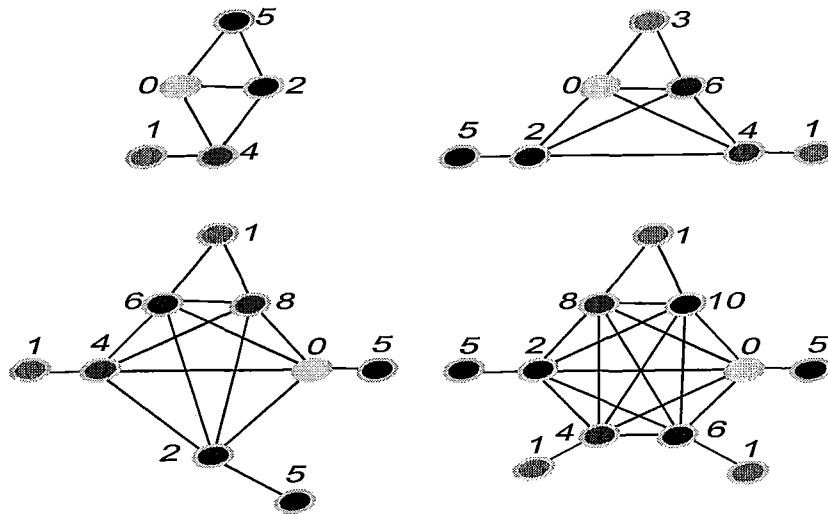


Figura 6.49:  $\lambda$ -colorações ótimas para grafos quase-ouriço do mar com cabeça (ii.b) onde  $3 \leq |K''| \leq 6$  e  $R'' = \emptyset$

Quando  $R'' \neq \emptyset$ , pelo Lema 6.49, baseando-se na  $\lambda$ -coloração dada na figura 6.49, onde os vértices de  $K''$  recebem as mesmas cores de uma  $\lambda'$ -coloração de  $G''[K'']$  e os vértices de  $S''$  recebem cores no intervalo  $\{0, \dots, \lambda'(G''[K'']) + 1\}$ , pode-se obter o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima em tempo linear. Para isto, basta calcular o *span* do subgrafo  $G''[K'' \cup R'']$  como descrito no Corolário 6.48 para grafos complemento

desconexos. □

Giakoumakis, Roussel e Thuillier não deram o Corolário 6.52, mas como em seu algoritmo para encontrar o número de caminhos disjuntos foi deixado explicitamente especificado quais são estes caminhos disjuntos em cada um dos possíveis módulos fortes da árvore de decomposição modular, este resultado pode ser obtido trivialmente armazenando esses caminhos disjuntos em um grafo auxiliar (utilizando listas de adjacência), contendo  $n$  vértices e, no máximo  $n - 1$  arestas, correspondente aos caminhos disjuntos do grafo  $P_4$ -tidy que são tratados. Neste corolário só é explicado como encontrar e armazenar esses conjuntos de caminhos disjuntos, para uma prova mais detalhada da corretude da escolha desses caminhos, se necessária, esta pode ser vista no artigo de Giakoumakis, Roussel e Thuillier [23].

**Corolário 6.52 (Giakoumakis, Roussel e Thuillier [23] - 1997)** *Pode-se obter o conjunto dos caminhos disjuntos (que correspondem ao número mínimo dos caminhos disjuntos) de um grafo  $P_4$ -tidy com complexidade de tempo e espaço lineares.*

**Prova.** Primeiro o algoritmo para determinar o valor do número mínimo de caminhos disjuntos  $pv$  é utilizado, obtendo esses números para cada um dos módulos fortes na árvore de decomposição modular.

A análise para os casos de *join* ou união de módulos fortes são tratados como operações binárias (se existirem mais de um módulo sendo unido ou sendo obtido por uma operação de *join* basta trata-los, recursivamente, em várias operações binárias).

Se o módulo forte na árvore de decomposição modular é obtido a partir de uma operação de união de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , então o conjunto dos caminhos disjuntos será a união desses caminhos disjuntos de ambos os grafos, já que nenhuma aresta foi adicionada entre os grafos, estes se mantêm.

Se o módulo forte na árvore de decomposição modular é obtido a partir de uma operação de *join* de dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , então o número mínimo de caminhos disjuntos é  $pv(G_1 \wedge G_2) = \max\{pv(G_2) - |V(G_1)|, pv(G_1) - |V(G_2)|, 1\}$  (esta prova já foi feita no Lema 4.16) e, o conjunto dos caminhos disjuntos é obtido dependendo deste máximo. Se for o primeiro caso, escolhe-se  $2|V(G_1)|$  caminhos disjuntos em  $pv(G_2)$  e una-os, dois-a-dois, por algum de seus extremos com um vértice de  $G_1$ . O segundo caso é análogo. Para o terceiro caso, todos os vértices de  $G_1 \cup G_2$  fazem

parte de um caminho no conjunto dos caminhos disjuntos (onde os extremos são dados por dois vértices extremos de caminhos do grafo que tenha maior número de vértices, se os grafos têm o mesmo número de vértice, os extremos deste caminho são dois vértices quaisquer desde que um de cada grafo). Os três casos podem ser observados na figura 6.50 (a), (b) e (c), respectivamente, onde as arestas em negrito são atribuídas ao grafo auxiliar. A complexidade de tempo será dominada em: (a) (respectivamente (b)) pela necessidade de escolher  $2|V(G_1)|$  ( $2|V(G_2)|$ ) extremos de caminhos de  $G_2$  ( $G_1$ ) quaisquer e uni-los dois-a-dois utilizando vértices de  $G_1$  ( $G_2$ ), removendo as arestas de  $G_1$  ( $G_2$ ), este passo tem complexidade  $O(|V(G_1)| + |V(G_2)|)$ ; (c) é necessário verificar a retirada de  $O(|V(G_1)| + |V(G_2)|)$  arestas de  $G_1$  e  $G_2$  e a adição das arestas alternando entre os vértices desses dois grafos ao grafo auxiliar, o que pode ser feito com complexidade  $O(|V(G_1)| + |V(G_2)|)$ . Como ao tratar este módulo forte estão sendo consideradas  $O(|V(G_1)||V(G_2)|)$  arestas proveniente do *join* entre esses dois grafos que ainda não foram consideradas na complexidade do algoritmo, este permanece linear.

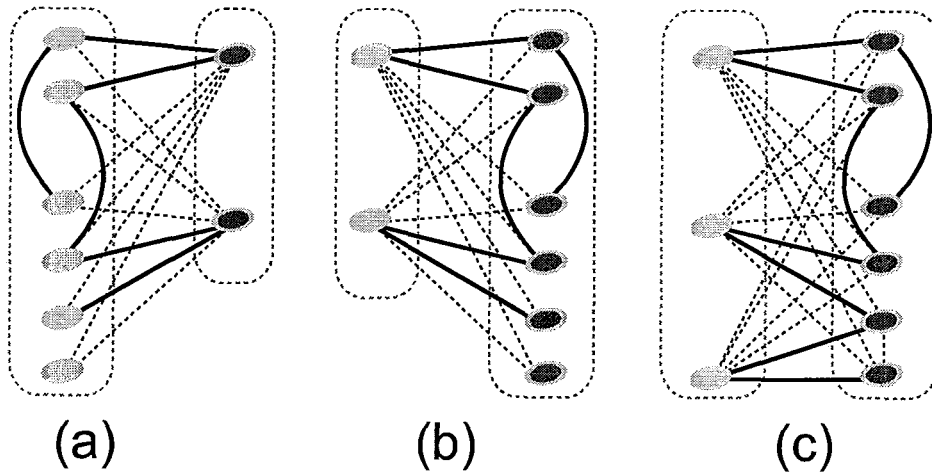


Figura 6.50: Caminhos disjuntos em um *join* de dois grafos

Para os casos em que o módulo forte vizinhança  $M'$  for uma aranha magra, aranha gorda, um quase-ouriço do mar com cabeça ou uma quase-estrela do mar com cabeça, os caminhos são dados de forma que nenhum deles altera caminhos já descritos no grafo auxiliar. Os caminhos são fornecidos explicitamente em cada caso, onde a complexidade para adicionar estes caminhos é da ordem  $O(|K| + |S| + |R|)$ , entretanto é necessário distribuir os vértices de  $K$  e  $S$  de forma a caracterizar

estes tipos de grafos, isto pode ser feito se para cada vértice de  $K$  e  $S$ , as suas adjacências forem observadas, este passo de caracterização destes tipos de grafos terá complexidade  $O(|K|^2 + |K||R|)$ . Como ao tratar o módulo forte  $M'$  são acrescentadas  $O(|K|^2 + |K||R|)$  arestas ainda não consideradas na complexidade deste algoritmo, este permanece linear.

Se o módulo vizinhança for um grafo aranha gorda  $G = (K, S, R)$ , se  $R$  é vazio, então todos os vértices fazem parte de um caminho. Se  $R$  não é vazio, então escolha um caminho disjunto de  $R$  e acrescente todos os vértices de  $K$  e  $S$ , formando o caminho da figura 6.51, onde as arestas em negrito são acrescentadas ao grafo auxiliar.

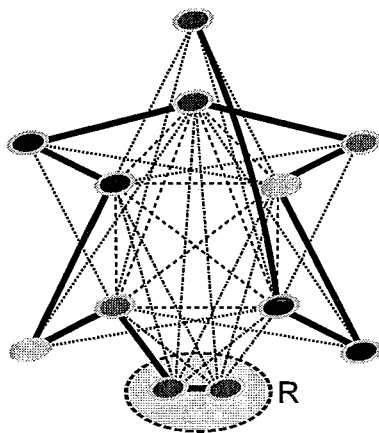


Figura 6.51: Caminhos disjuntos em um grafo aranha gorda

Se o módulo vizinhança for um grafo aranha magra  $G = (K, S, R)$ , então  $pv(G) = pv(R) + \max\{0, \lceil \frac{|K| - 2pv(R)}{2} \rceil\}$ . E, como pode ser visto na figura 6.52, cada caminho disjunto em  $R$  cobre dois vértices em  $K$  e dois vértices em  $S$ . Para cada caminho disjunto em  $R$ , escolha quatro vértices (dois de  $K$  e os dois de  $S$ , que tenham a correspondência a esses vértices de  $K$ ) e acrescente-os ao conjunto de vértices dos caminhos disjuntos de  $R$ . Quando  $2|K|$  é maior que  $pv(R)$ , os caminhos disjuntos de  $R$  não cobrem todos os vértices dos grafos aranhas, e é necessário acrescentar caminhos disjuntos de tamanho 4 (dois vértices de  $S$  e os dois vértices de  $K$  e, se  $|K|$  for um número ímpar, é adicionado um caminho disjunto com um vértice de  $K$  e outro de  $S$ , respeitando a correspondência), como descrito na figura 6.52, onde as arestas em negrito são atribuídas ao grafo auxiliar.

Se o módulo vizinhança for um:  $P_5$ ;  $\overline{P_5}$ ;  $C_5$ ; ou um  $K_1$ , esses grafos tem um

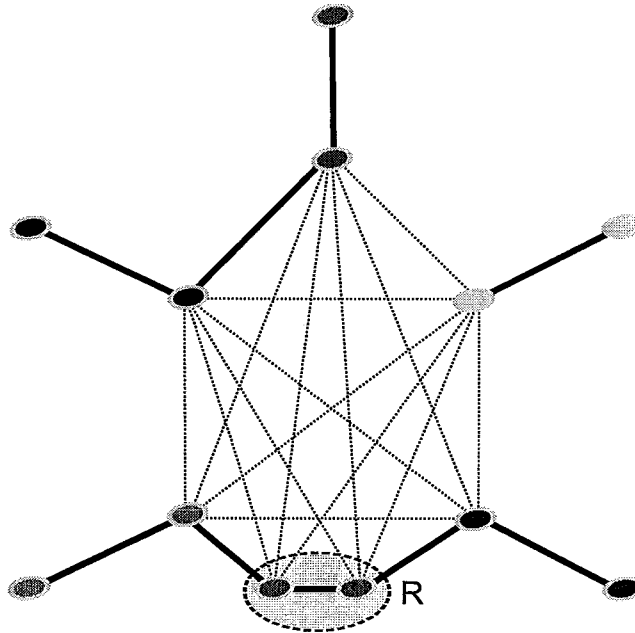


Figura 6.52: Caminhos disjuntos em um grafo aranha magra

caminho hamiltoniano e, trivialmente, existe um caminho disjunto que passa por todos os seus vértices.

Se o módulo vizinhança for um grafo quase-ouriço do mar com cabeça  $G = (K, S, R)$ , então a obtenção do conjunto de caminhos disjuntos é dividido em 4 subcasos:

(a.1)  $S_2$  substitui um vértice de  $S$ . Se  $|K| = 2$ , os caminhos disjuntos são dados como ilustrado na figura 6.53(a). Se  $|K| > 2$ , calcula-se o conjunto de caminhos disjuntos como se fosse uma aranha magra (não considerando os vértices de  $S_2$  nem o vértice de  $K$  que seja correspondente), e depois o caminho formado por  $S_2$  e o vértice em  $K$ , que seja correspondente, é incluído. Como ilustrado na figura 6.53(b), onde as arestas em destaque são atribuídas ao grafo auxiliar.

(a.2)  $K_2$  substitui um vértice de  $S$ . Obtém-se o conjunto de caminhos disjuntos como se fosse uma aranha magra (não considerando um dos vértices de  $K_2$ ), e depois o vértice não considerado é acrescentado como extremo do caminho que termina no vértice de  $K_2$  considerado, como ilustrado na figura 6.54, onde as arestas em negrito são atribuídas ao grafo auxiliar.

(a.3)  $|K| \geq 2pv(R)$  e um  $K_2$  ou um  $S_2$  substituiu um vértice de  $K$ . O primeiro caminho disjunto vai cobrir os vértices do  $K_2$  ou  $S_2$ , o vértice de  $K$  correspondente

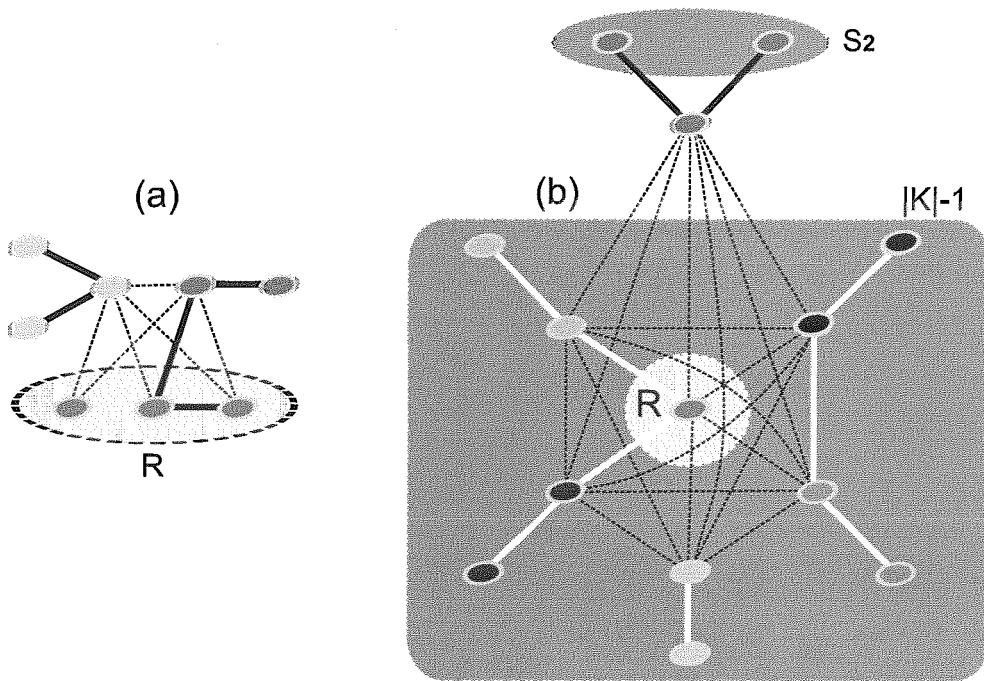


Figura 6.53: Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça onde  $S_2 \in S$

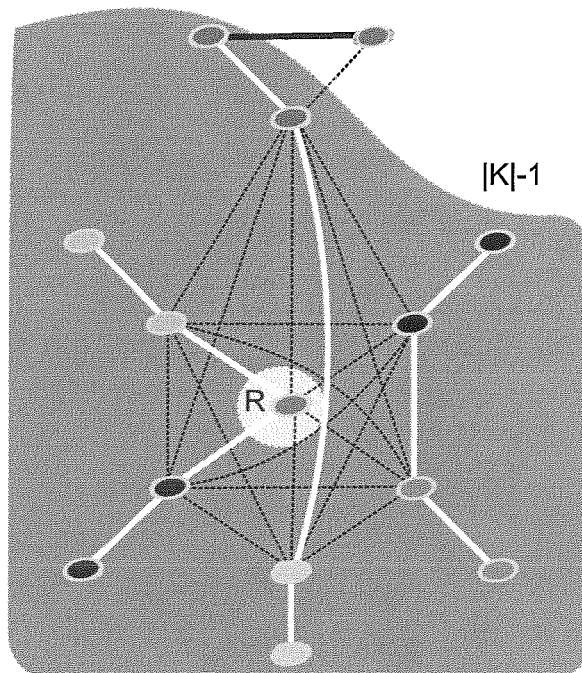


Figura 6.54: Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça onde  $K_2 \in S$

a ambos, e mais 4 vértices, dois de  $K$  e dois de  $S$ , como ilustrado na figura 6.55, os outros conjuntos de caminhos disjuntos vão se comportar como se tivesse sendo tratado um grafo aranha magra (estes caminhos podem ser especificados escolhendo dois vértices em  $S$  que não sejam correspondêntes a  $K_2$  ou  $S_2$ , estes formam o caminho disjunto em que  $K_2$  ou  $S_2$  fazem parte e, seleccione outros pares de  $S$  como sendo caminhos disjuntos contendo os vértices correspondêntes em  $K$  como vértices internos).

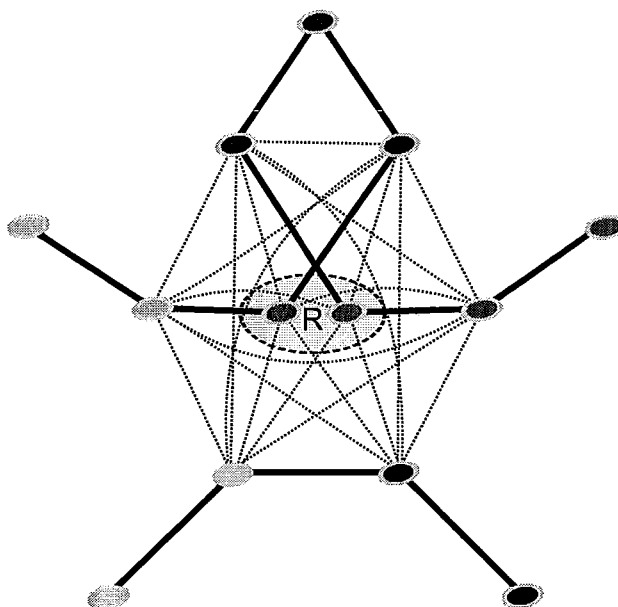


Figura 6.55: Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça com  $|K| \geq 2pv(R)$  e  $K_2$  ou  $S_2$  substituindo um vértice de  $K$

(a.4)  $|K| < 2pv(R)$  e um  $K_2$  ou um  $S_2$  substituiu um vértice de  $K$ . Se  $|K| = 3$  os caminhos disjuntos podem ser distribuídos como ilustrado na figura 6.56(a), se  $|K| \geq 4$  estes podem ser distribuídos como ilustrado na figura 6.56(b), onde o primeiro caminho cobre os vértices de  $K_2$  ou de  $S_2$ .

Se o módulo vizinhança for um grafo quase-estrela do mar com cabeça  $G = (K, S, R)$  com  $|K| \geq 3$ , então a obtenção do conjunto de caminhos disjuntos é dividido em 3 subcasos (para os casos em que  $|K| = 2$  estes podem ser tratados como quase-ouriço do mar com cabeça):

(b.1)  $S_2$  substitui um vértice de  $S$ . Obtém-se um caminho disjunto  $c$  como descrito na figura 6.57, os outros caminhos disjuntos são dados como todos os provenientes de  $R$ .

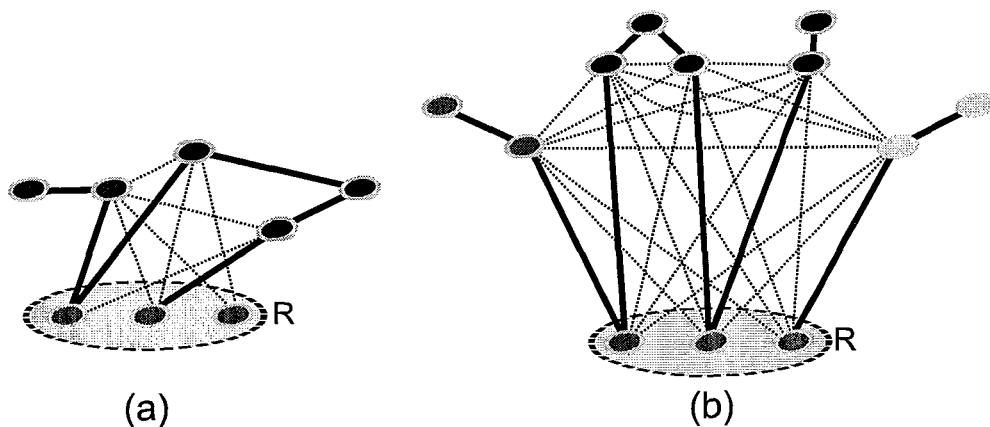


Figura 6.56: Caminhos disjuntos em um grafo quase-ouriço do mar com cabeça com  $|K| < 2pv(R)$

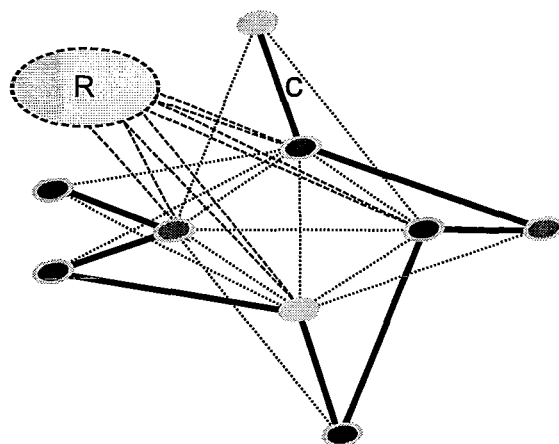


Figura 6.57: Caminhos disjuntos em um grafo quase-estrela do mar com cabeça com  $S_2 \in S$

(b.2)  $K_2$  substitui um vértice de  $S$ . Obtém-se um caminho disjunto  $c'$  como descrito na figura 6.58, os outros caminhos disjuntos são dados como os outros caminhos disjuntos provenientes de  $R$  que não pertencem a  $c'$ .

(b.3)  $K_2$  ou  $S_2$  substitui um vértice de  $K$ . Obtém-se um caminho disjunto  $c''$  como descrito na figura 6.59 (as arestas entre os vértices de  $R$  e  $K$  que não fazem parte de  $c''$  estão sendo omitidas, mas continuam existindo todas as arestas entre esses vértices), os outros caminhos disjuntos são dados como os outros caminhos disjuntos provenientes de  $R$  que não são pertencem a  $c''$ .  $\square$

**Corolário 6.53** (\*) *Existe algoritmo linear, em tempo e espaço, para atribuir cores aos vértices de um grafo  $P_4$ -tidy respeitando uma  $\lambda$ -coloração ótima se é possível*



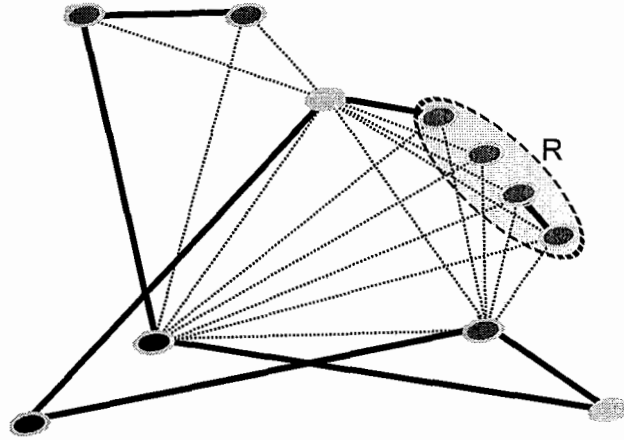


Figura 6.58: Caminhos disjuntos em um grafo quase-estrela do mar com cabeça com  $K_2 \in S$

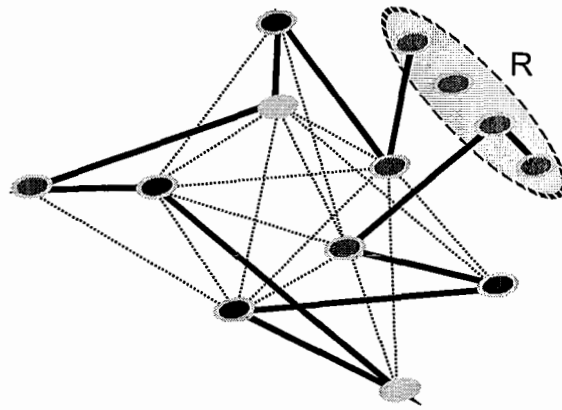


Figura 6.59: Caminhos disjuntos em um grafo quase-estrela do mar com cabeça com  $K_2$  ou  $S_2$  substituindo um vértice de  $K$

*obter o conjunto dos caminhos disjuntos do grafo com complexidade de tempo e espaço lineares.*

**Prova.** Pelo Corolário 6.52, é possível obter o conjunto dos caminhos disjuntos do grafo com complexidade de tempo e espaço lineares. Então, basta aplicar o método descrito na volta da prova do Lema 4.11 para os casos em que o módulo raiz na árvore de decomposição modular não contém componentes conexas que sejam um grafo quase-ouriço do mar, nem um grafo aranha magra. Para esses casos, pode-se obter uma  $\lambda$ -coloração ótima para estas componentes conexas, basta utilizar o método descrito na volta da prova do Lema 4.11 para a atribuição de cores dos vértices do subgrafo completo e da cabeça dos grafos quase-ouriço do mar com cabeça ou

aranha magra, e utilizar a atribuição de cores descrita nos Teoremas 6.50 e 6.51 para os vértices restantes.  $\square$

## 6.8 Resumo dos resultados nos limites superiores

Nesta seção é fornecida uma tabela comparando os resultados novos com os antigos, quando estes existem.

Classes	Limite antigo	Limite novo
bipartidos cordais		$\lambda \leq \Delta^2 - \Delta + 2$ (*)
fracamente cordais		$\lambda \leq \Delta^2$ (*)
grafos linha		$\lambda \leq \min\{\frac{\Delta^2+4\Delta-2}{2}, \Delta^2\}$ (*)
grafos quase linha		$\lambda \leq \Delta^2$ (*)
split	$\lambda \leq 0.409\Delta^{1.5} + O(\Delta)$ Král [42]	$\lambda \leq 0.385\Delta^{1.5} + 2\Delta + \Delta^{0.5} - 2$ (*)
permutação	$\lambda \leq 4\Delta + 1$ Calamoneri [9]	$\lambda \leq 4\Delta - 3$ (*)
cografos	$\lambda = n + pv(G^c) - 2$ Chang e Kuo [15]	$\lambda \leq 2\Delta$ (*)
componentes $p$ -cografos		$\lambda \leq p(2\Delta + 2) - 2$ (*)

Tabela 6.2: Limites superiores novos para classes de grafos

# Capítulo 7

## Conclusões

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar de maneira sistemática os resultados relacionados ao problema da  $\lambda$ -coloração. Em especial, os relacionados ao estabelecimento de limites superiores para o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima, tanto os já conhecidos como novos. Desde os limites para classes mais simples até limites mais complexos, incluindo os limites superiores de: Griggs e Yeh; Chang e Kuo; Král e Skrekovski; e Gonçalves. E, foi feito um vasto estudo em classes específicas de grafos, para viabilizar o desenvolvimento de novos limites superiores para algumas delas. Além das provas por nós desenvolvidas o texto inclui provas feitas por terceiros que estão diretamente relacionadas as provas de nossos resultados, onde estas foram reescritas, simplificadas e comentadas.

Como consequência, limites superiores foram desenvolvidos para algumas classes específicas de grafos, conseguindo provar, para estas classes, a conjectura de Griggs e Yeh, de que em uma  $\lambda$ -coloração é possível atribuir cores aos vértices do grafo utilizando no máximo a cor  $\Delta^2$ .

Nesta dissertação foram encontrados limites superiores para as seguintes classes: grafos bipartidos cordais, grafos fracamente cordais, grafos linha, grafos quase-linha, grafos componentes  $p$ -cografos. E, foram melhorados os limites superiores para as seguintes classes: grafos *split*, grafos de permutação e cografos (neste caso foi fornecido um limite superior alternativo). Em todas estas sendo verificado a veracidade da conjectura de Griggs e Yeh [28]. Em resumo, apresentamos provas de que a conjectura de Griggs e Yeh [28] é verdadeira para as classes de grafos da figura 7.1, determinando limites superiores para classes ainda não estudadas ou melhorando re-

sultados já estabelecidos por outros pesquisadores. Além disso, também foi provada a conjectura de Král [42] para grafos cordais, restrita a classe dos grafos *split*.

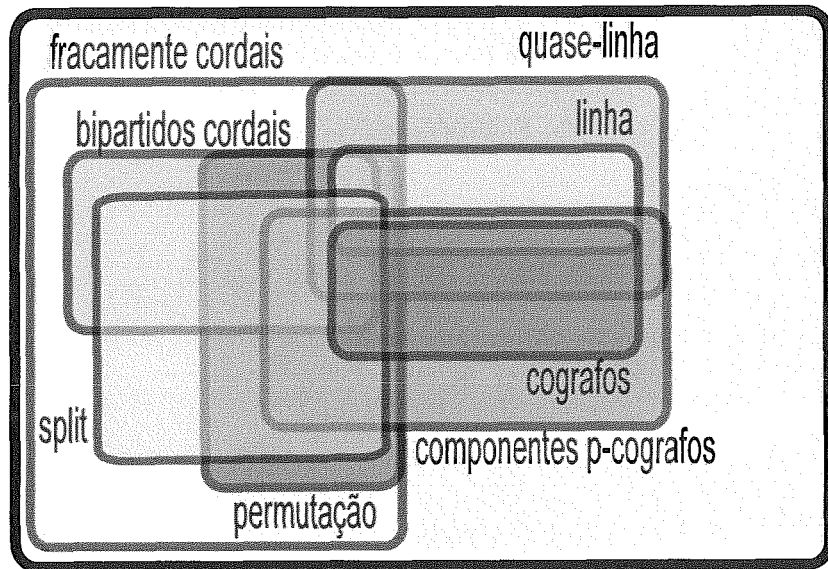


Figura 7.1: Classes em que foram obtidos novos limites superiores

Estes resultados foram apresentados como trabalhos completos em três conferências, como descrito a seguir:

(i) Limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos grafos bipartidos cordais, XL SBPO (Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional), João Pessoa - PB, 2008.

(ii) Limites superiores para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nos cografos, grafos de permutação e grafos linha, XXXII CNMAC (Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional), Cuiabá - MT, 2009.

(iii) *On  $L(2,1)$ -coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graph*, V LAGOS (*Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium*), Gramado - RS, 2009.

Outro resultado deste trabalho foi a elaboração de um algoritmo linear para determinar o *span* de uma  $\lambda$ -coloração ótima na classe dos grafos  $P_4$ -tidy, e a alteração deste algoritmo para encontrar uma  $\lambda$ -coloração com este *span*. Este resultado é particularmente interessante porque existem poucos algoritmos, lineares ou polinomiais, para determinar o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas, e encontrar essas  $\lambda$ -colorações com este *span* para classes de grafos.

Ao final deste trabalho algumas questões ficam em aberto. A prova da conjectura de Griggs e Yeh, de 1992, é a principal delas, apesar de alguns avanços terem sido feitos em relação a classes específicas de grafos. Além disso, ficaram faltando nesta dissertação exemplos de grafos que atingem a quota do limite superior para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas nas classes dos grafos bipartidos cordais, grafos fracamente cordais e dos grafos de permutação. E também fica em aberto o estabelecimento da complexidade do problema da  $\lambda$ -coloração para as classes dos grafos bipartidos cordais, grafos de permutação e grafos linha. Para grafos bipartidos, existe grafo para qualquer  $\Delta$  em que  $\lambda \geq \Delta^2 - \Delta + 1$ , exemplo desenvolvido por Calamoneri [9] e existe prova da  $\mathcal{NP}$ -completude para o problema da  $\lambda$ -coloração para a classe dos grafos bipartidos planares, desenvolvida por Bodlaender *et al.* [7]. Infelizmente estas abordagens não se adaptam diretamente para a classe dos grafos bipartido cordais.

---

*"Mestre não é quem ensina, mas quem de repente aprende. (Guimarães Rosa) "*

---

# Referências Bibliográficas

- [1] ARAKI, T. Labeling bipartite permutation graphs with a condition at distance two, *Discrete Applied Mathematics* v. 157, n. 8, pp. 1677–1686, 2009.
- [2] BALAKRISHNAN, H., DEO, N. Parallel algorithm for radiocoloring a graph, *Congressus Numerantium* v. 160, n. 1, pp. 192–205, 2003.
- [3] BATTITI, R., BERTOSSI, A., M.BONUCCELLI. Assigning codes in wireless networks: bounds and scaling properties, *Wireless Networks* v. 5, n. 1, pp. 195–209, 1999.
- [4] BEHZAD, M. *Graphs and their chromatic numbers*. Ph.D. thesis, Michigan State University, 1965.
- [5] BERTOSSI, A., BONUCCELLI, M. Code assignment for hidden terminal interference avoidance in multihop packet radio networks, *IEEE/ACM Transactions on Networking* v. 3, n. 1, pp. 441–449, 1995.
- [6] BODLAENDER, H. L., KLOKS, T., TAN, R. B., VAN LEEUWEN, J. Approximations for  $\lambda$ -coloring of graphs. Relatório Técnico UU-CS-2000-25, Department of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 2000.
- [7] BODLAENDER, H. L., KLOKS, T., TAN, R. B., VAN LEEUWEN, J. Approximations for  $\lambda$ -coloring of graphs, *The Computer Journal* v. 47, n. 1, pp. 193–204, 2004.
- [8] BROOKS, R. L. On coloring the nodes of a network, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society* v. 37, n. 1, pp. 194–197, 1941.

- [9] CALAMONERI, T. The  $L(h, k)$ -labelling problem: A survey and annotated bibliography. <http://www.dsi.uniroma1.it/~calamo/survey.html>.
- [10] CALAMONERI, T. The  $L(h, k)$ -labelling problem: A survey and annotated bibliography, *The Computer Journal* v. 49, n. 5, pp. 585–608, 2006.
- [11] CALAMONERI, T., CAMINITI, S., OLARIU, S., PETRESCHI, R. On the  $L(h, k)$ -labeling of co-comparability graphs, *ESCAPE*, pp. 116–127, 2007.
- [12] CALAMONERI, T., PETRESCHI, R.  $\lambda$ -coloring of regular tiling, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* v. 8, n. 1, pp. 18–21, 2001.
- [13] CALAMONERI, T., PETRESCHI, R.  $\lambda$ -coloring matrogenic graphs, *Discrete Applied Mathematics* v. 154, n. 17, pp. 2445 – 2457, 2006.
- [14] CERIOLO, M. R., POSNER, D. Limite superior para  $L(2, 1)$ -coloração de grafos bipartidos cordais. In: *XL Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 2571–2580, João Pessoa - PB, 2008.
- [15] CHANG, G. J., KUO, D. The  $L(2, 1)$ -labeling problem on graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 9, n. 2, pp. 309–316, 1996.
- [16] CHUDNOVSKY, M., ROBERTSON, N., SEYMOUR, P., THOMAS, R. The strong perfect graph theorem, *Annals of Mathematics* v. 164, n. 1, pp. 51–229, 2006.
- [17] CORNEIL, D. G., PERL, Y., L. STEWART. A linear recognition algorithm for cographs, *SIAM Journal on Computing* v. 14, n. 1, pp. 926–934, 1985.
- [18] DIRAC, G. A. Some theorems on abstract graphs, *Proceedings of London Mathematical Society* v. 2, n. 1, pp. 68–81, 1952.
- [19] DUSHNIK, B., MILLER, E. W. Partially ordered sets, *American Journal of Mathematics* v. 63, n. 3, pp. 600–610, 1941.
- [20] FALCON, S., PLAZA, A. On the {Fibonacci  $k$ -numbers, *Chaos, Solitons Fractals* v. 32, n. 5, pp. 1615–1624, 2007.

- [21] FIALA, J., KLOKS, T., KRATOCHVÍL, J. Fixed-parameter complexity of  $\lambda$ -labelings, *Discrete Applied Mathematics* v. 113, n. 1, pp. 59–72, 2001.
- [22] FISHBURN, P. C., ROBERTS, F. S. Full color theorems for  $L(2, 1)$ -colorings, *DIMACS Technical Report* v. 8, n. 1, 2000.
- [23] GIAKOUMAKIS, V., ROUSSEL, F., THUILLIER, H. On  $P_4$ -tidy graphs, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science* v. 1, n. 1, pp. 17–41, 1997.
- [24] GOLUMBIC, M. C. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. New York, Academic Press, 1980.
- [25] GOLUMBIC, M. C., GOSS, C. F. Perfect elimination and chordal bipartite graphs, *Journal of Graph Theory* v. 2, n. 1, pp. 155–163, 1978.
- [26] GONÇALVES, D. On the  $L(p, 1)$ -labeling of graphs, *Proceedings of European conference on Combinatorics Graph Theory and Applications (EuroComb 05)* v. 5, n. 9, pp. 81–86, 2006.
- [27] GRAHAM, R., KNUTH, D., PATASHNIK, O. *Concrete Mathematics*. Addison Wesley, 1989.
- [28] GRIGGS, J. R., YEH, R. K. Labelling graphs with a condition at distance 2, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 5, n. 4, pp. 586–595, 1992.
- [29] HALE, W. K. Frequency assignment: theory and applications, *Proceedings of IEEE* v. 68, n. 12, pp. 1497–1514, 1980.
- [30] HARARY, F. *Graph Theory*. Addison Wesley, 1969.
- [31] HASUNUMA, T., ISHII, T., ONO, H., UNO, Y. A linear algorithm for  $L(2, 1)$ -labeling of trees, *pre-print*, 2009.
- [32] HASUNUMA, T., ISHII, T., ONO, H., UNO, Y. An  $O(n^{1.75})$  algorithm for  $L(2, 1)$ -labeling of trees, *Theoretical Computer Science* v. 38, n. 1, pp. 3702–3710, 2009.



- [33] HAVET, F., REED, B., SERENI, J.  $L(2,1)$ -labelling of graphs. In: *SODA 2008: Proceedings of annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 621–630, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [34] HEGGERNES, P., TELLE, J. Partitioning graphs into generalized dominating sets, *Nordic Journal of Computing* v. 5, n. 2, pp. 128–143, 1998.
- [35] HOFFMAN, A., SINGLETON, R. On {Moore graphs of diameter two and three, *IBM Journal of Research and Development* v. 4, n. 1, pp. 497–504, 1960.
- [36] KANG, J.  $L(2,1)$ -labelling of 3-regular hamiltonian graphs. Ph.D. thesis, University of Illinois, 2004.
- [37] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller e J. W. Thatcher, Eds. Plenum Press, 1972, pp. 85–103.
- [38] KORZE, D., VESEL, A.  $L(2,1)$ -labeling of strong products of cycles, *Information Processing Letters* v. 94, n. 4, pp. 183–190, 2005.
- [39] KRATOCHVÍL, J., KRATSCH, D., LIEDLOFF, M. Exact algorithms for  $L(2,1)$ -labelings of graphs, *Proceedings of 32nd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 07)* v. 4, n. 1, pp. 513–524, 2007.
- [40] KRATOCHVÍL, J., PROSKUROWSKI, A., TELLE, J. Covering directed multi-graphs. In: *Graph-Theoretical Concepts in Computer Science, Proceedings of WG'97*, pp. 242–257, Berlin, Springer, 1997.
- [41] KRAUSZ, J. Démonstration nouvelle d'un théorème de whitney sur les réseaux, *Mat. Fiz. Lapok* v. 50, n. 1, pp. 75–85, 1943.
- [42] KRÁL, D. Coloring powers of chordal graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 18, n. 3, pp. 451–461, 2005.
- [43] KRÁL, D. An exact algorithm for the channel assignment problem, *Discrete Applied Mathematics* v. 145, n. 1, pp. 326–331, 2005.

- [44] KRÁL, D., SKREKOVSKI, R. A theorem about the channel assignment problem, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 16, n. 1, pp. 426–437, 2003.
- [45] LERCHS, H. On cliques and kernels. Relatório técnico, Department of Computer Science - University of Toronto, 1971.
- [46] LIH, K. W. The equitable coloring of graphs. In *Handbook of Combinatorial Optimization*, vol. 3. Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 543–566.
- [47] LIN, Y., SKIENA, S. Algorithms for square roots of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 8, n. 1, pp. 99–118, 1995.
- [48] LOVÁSZ, L. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Mathematics* v. 2, n. 1, pp. 253–267, 1972.
- [49] MAKANSI, T. Transmitter-oriented code assignment for multihop packet radio, *IEEE Transactions on Communications* v. 12, n. 35, pp. 1379–1382, 1987.
- [50] MCCONNELL, M., SPINRAD, J. Linear-time modular decomposition and efficient transitive orientation of comparability graphs. In: *SODA '94: Proceedings of fifth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 536–545, Philadelphia, PA, USA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [51] MCCORMICK, S. T. Optimal approximation of sparse Hessians and its equivalence to a graph coloring problem, *Mathematical Programming* v. 26, n. 1, pp. 153–171, 1983.
- [52] MCDIARMID, C. On the span in channel assignment problems: Bounds, computing and counting, *Discrete Mathematics* v. 266, n. 1, pp. 387–397, 2003.
- [53] MICALI, S., VAZIRANI, V. An algorithm for finding maximum matching in general graphs. In: *Proceedings of 21st IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 17–27, 1980.

- [54] MOLLOY, M., REED, B. *Graph Colouring and the Probabilistic Method*. Springer, 2001.
- [55] MULLER, H. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs, *Discrete Mathematics* v. 156, n. 1, pp. 291–298, 1996.
- [56] NORDHAUS, E. A., GADDUM, J. W. On complementary graphs, *American Mathematical Monthly* v. 63, n. 1, pp. 175–177, 1956.
- [57] POSNER, D., SIMÃO, R. *L(2,1)-colorações*. Projeto Final para obtenção do título de Bacharelado em Ciência da Computação, Departamento de Ciência e Computação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [58] ROBERTS, F. S. *T*-colorings of graphs: recent results and open problems, *Discrete Mathematics* v. 93, n. 1, pp. 229–245, 1991.
- [59] SAKAI, D. Labeling chordal graphs: distance two condition, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* v. 7, n. 1, pp. 133–140, 1994.
- [60] SPINRAD, J. P. *Efficient Graph Representation*. Providence, American Mathematical Society, 2003.
- [61] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. 2 ed. Rio de Janeiro, Campus, 1984.
- [62] VAN DEN HEUVEL, J., MCGUINNESS, S. Colouring the square of a planar graph, *Journal of Graph Theory* v. 42, n. 1, pp. 110–124, 2003.
- [63] VIZING, V. G. On an estimate of the chromatic classes of a *p*-graph, *Discrete Analysis* v. 3, n. 1, pp. 25–30, 1964.
- [64] WHITNEY, H. Congruent graphs and the connectivity of graphs, *American Journal of Mathematics* v. 54, n. 1, pp. 150–168, 1932.
- [65] WILF, H. *Algorithms and Complexity*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1986.
- [66] ZYKOV, A. On some properties of linear complexes (em russo), *Matematicheskii Sbornik* v. 24, n. 66, pp. 163–188, 1949.

# Apêndice A

## Prova do lema estrutural de Gonçalves

Aqui é apresentada a prova do lema feito por Gonçalves, suficiente para encontrar o melhor limite superior conhecido para o *span* de  $\lambda$ -colorações ótimas de grafos.

**Lema A.1 (Gonçalves [26] - 2005)** *Todo grafo  $G$  com grau  $\Delta \geq 3$  tem:*

- (i) *um vértice com grau menor que  $\Delta$  ou;*
- (ii) *um ciclo de tamanho 3 ou;*
- (iii) *dois ciclos de tamanho 4 passando pelo mesmo vértice  $v$  ou;*
- (iv) *um vértice  $v$  adjacente a três vértices  $u, x$  e  $y$  tal que existe ciclo de tamanho 4 passando pela aresta  $uv$  e com  $G \setminus \{x, y\}$  conexo ou;*
- (v) *um vértice  $u$  adjacente a dois vértices  $v$  e  $w$  tal que  $G \setminus X$  é conexo, onde  $X = (N_1(v) \cup N_1(u)) \setminus \{w\}$ .*

**Prova.** A prova é feita verificando que, se um grafo não tem nenhuma das configurações (i), (ii), (iii) e (iv), então tem a configuração (v).

Dada uma aresta  $e = uv \in E(G)$ , seja  $N(e) = (N_1(u) \cup N_1(v)) \setminus \{u, v\}$  (os vértices adjacentes a  $u$  e  $v$  que não são  $u$  e  $v$ ) e  $\mathbb{S}$  o conjunto de todos os subgrafos maximais  $S$  de  $G \setminus \{u, v\}$ , tal que para cada par de vértices  $(x, y) \in V(S)$ , existe um caminho entre  $x$  e  $y$  internamente disjunto de  $N(e)$ .

Dois subgrafos  $S_1$  e  $S_2$  que pertençam a  $\mathbb{S}$  só podem ter vértices em comum em  $N(e)$ , pois caso contrário,  $G[S_1 \cup S_2]$  é um subgrafo maior também com caminhos internamente disjuntos de  $N(e)$  entre quaisquer pares de vértices, uma contradição com o fato deles serem maximais.

Para um subgrafo  $S \in \mathbb{S}$ , denota-se  $L(S) = V(S) \cap N(e)$  por vértices de ligação e  $I(S) = V(S) \setminus L(S)$  por vértices internos de  $S$ . Seja  $Y \subseteq N(uv) \cup \{u, v\}$ , logo o grafo  $G \setminus Y$  é desconexo se existe um subgrafo  $S' \in \mathbb{S}$  com  $L(S') \subseteq Y$  e  $|I(S')| > 0$ .

Uma aresta  $e \in E(G)$  corresponde a uma aresta  $uv$  da configuração (v) se e somente se existe vértice  $w \in N(e)$  contido em todos os subgrafos de  $\mathbb{S}$ . Isto porque  $G \setminus (Y \setminus \{w\})$  é conexo e, todo par de vértice tem um caminho até  $w$ , sendo  $w$  contido em todos os subgrafos de  $\mathbb{S}$ .

Para encontrar a aresta do tipo  $uv$  da configuração (v), pode-se utilizar o seguinte método:

(1) Escolha duas arestas não adjacentes  $e$  e  $f$  em  $E(G)$ .

(2) Verifique se  $e$  corresponde a uma aresta  $uv$  do caso (v).

(3) Senão, seja um subgrafo  $S_0 \in \mathbb{S}$  que contenha  $f$ . Como  $e$  não corresponde a uma aresta  $uv$  do caso (v), existem subgrafos  $S_i$ , com  $i > 0$ , tais que  $L(S_0) \setminus L(S_i) \neq \emptyset$  (ou a aresta  $e = uv$  e qualquer  $w \in L(S_0)$  caem no caso (v)). Sejam  $\mathbb{F}$  o conjunto destes subgrafos e  $S_1 \in \mathbb{F}$  o subgrafo que minimiza  $|L(S_i \in \mathbb{F})|$  e, em caso de empate, que maximize  $|I(S_i \in \mathbb{F})|$ . Se  $|I(S_1)| \geq 2$ , seja  $e$  uma aresta de  $S_1$  com seus dois extremos em  $I(S_1)$ , vá para o passo (2) com esta aresta.

Como o  $|I(S_0)|$  sempre aumenta a cada iteração, este processo termina em algum momento. A figura A.1 ilustra porque isto ocorre. Nenhum vértice em  $L(S_0) \setminus L(S_1)$  é adjacente a vértice em  $S_1$  (senão seria  $L(S_0) \cap L(S_1)$ ) e, com isto, todo vértice de  $S_0 \setminus L(S_1)$  (equivalente a  $I(S_0) \cup (L(S_0) \setminus L(S_1))$ ) está em  $I(S_0)$  na próxima iteração.

Falta verificar que, para uma aresta  $e = ab$ ,  $I(S_1) \geq 2$  ou uma das configurações (i), (ii), (iii), (iv) ou (v) ocorre. Suponha, por absurdo, que  $|I(S_1)| = 0$ , seja  $e' = a'b'$  a sua única aresta, sendo  $\{a', b'\} \in N(e)$ . Então  $|L(S_1)| = 2$  e todo subgrafo  $S_i \in \mathbb{F}$  tem  $|L(S_i)| \geq 3$  ou  $|L(S_i)| = 2$  e  $|I(S_i)| = 0$ . Se  $a'$  e  $b'$  forem ambos adjacentes a  $a$  ou a  $b$  existe ciclo de tamanho 3, recaindo no caso (ii). Seja  $a' \in N_1(a)$  e  $b' \in N_1(b)$  e seja  $c$  um vértice de  $L(S_0) \setminus L(S_1)$ , sendo  $c \notin \{a', b'\}$ , como ilustrado na figura A.2. Sem perda de generalidade, seja  $c \in N_1(a)$ . Como  $\{a', b, c\} \in N_1(a)$  e  $(a, b, b', a')$  é um ciclo, se  $G \setminus \{c, a'\}$  for conexo, então trata-se do caso (iv). Seja  $G \setminus \{c, a'\}$  desconexo, isso significa que existe um vértice  $d \in V(G) \setminus \{c, a'\}$  tal que todos os caminhos de  $d$  até  $a$  passam por  $c$  ou por  $a'$ . O subgrafo  $S_i$  que contém  $d$  é tal que  $L(S_i) \subseteq \{c, a'\}$  e  $d \in I(S_i)$  e, como  $b' \in L(S_0) \setminus L(S_i)$ , então  $S_i \in \mathbb{F}$ . Isto é

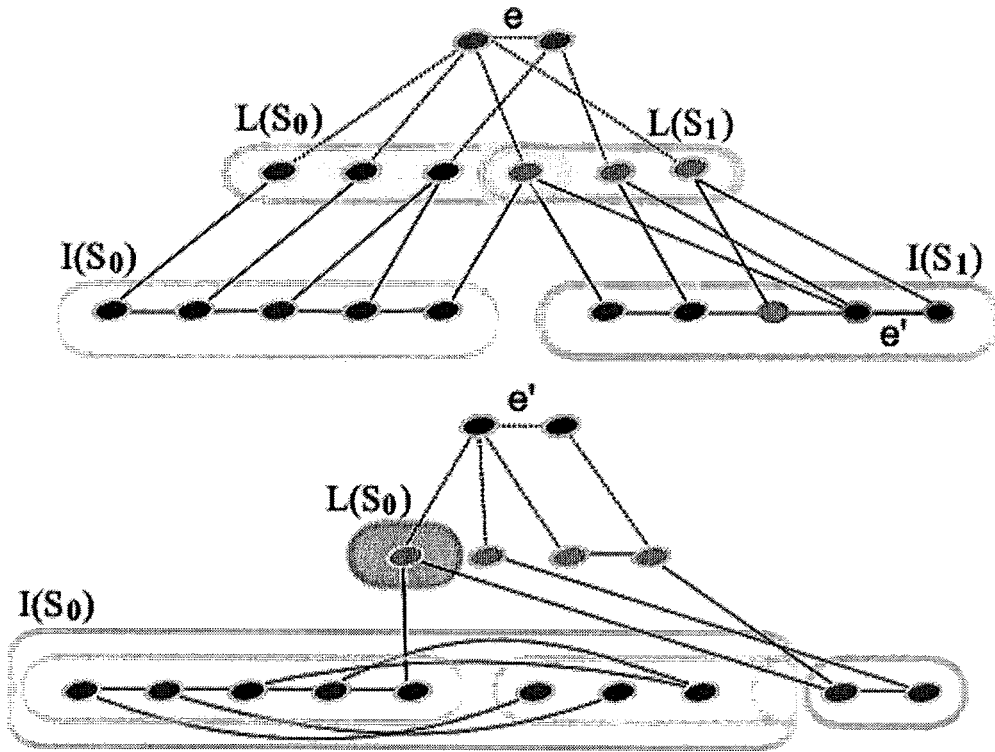


Figura A.1: Verificação que  $|I(S_0)|$  sempre aumenta a cada iteração

uma contradição com o fato de  $|L(S_i)| \leq 2$  e  $|I(S_i)| \geq 1$ , e ter-se escolhido um dos subgrafos  $S_i \in \mathbb{F}$  com  $|L(S_0)| = 2$  e com  $|I(S_0)| = 0$ .

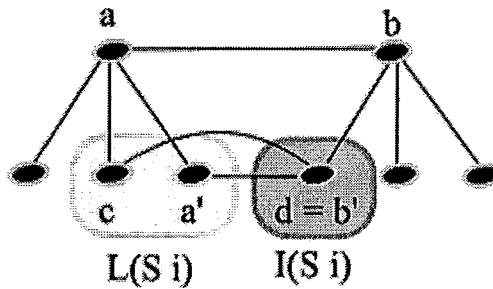


Figura A.2: Absurdo em subgrafo  $S_1$  com  $I(S_1) = 0$

Suponha, por absurdo, que  $|I(S_1)| = 1$ . Seja  $c$  o único vértice em  $I(S_1)$ . Como  $g(c) = |L(S_i)| = \Delta \geq 3$ , qualquer  $S_i \in \mathbb{F}$  tem ou  $|L(S_i)| > \Delta$ , ou  $|L(S_i)| = \Delta$  e  $|I(S_i)| = 1$  (quando  $|I(S_i)| = 0$ ,  $|L(S_i)| = 2 < \Delta$ ). Se  $\Delta \geq 4$ , existe pelo menos dois ciclos de tamanho 4 passando por  $c$ , como pode ser visto na figura A.3, e pode ser tratado como o caso (iii). Se  $\Delta = 3$ , sejam  $N_1(a) = \{b, a', a''\}$  e  $N_1(b) = \{a, b', b''\}$ . Sem perda de generalidade, seja  $N_1(c) = L(S_1) = \{a', a'', b'\}$ . Como

$S_1 \in \mathbb{F}$ ,  $L(S_0) \setminus L(S_1) \neq \emptyset$ , sendo  $b'' \in L(S_0)$ . Como  $(a, a', c, a'')$  formam um ciclo, se  $G \setminus \{a'', b'\}$  for conexo, este grafo pode ser tratado pelo caso (iv), então considere-o desconexo. Isso significa que existe vértice  $z$  tal que todos os caminhos de  $z$  até  $a$  passam por  $a''$  ou  $b'$ . O subgrafo  $S_i$  que contém  $z$  é tal que  $L(S_i) \subseteq \{a'', b'\}$ . Como  $b'' \in L(S_0) \setminus L(S_i)$ , então  $S_i \in \mathbb{F}$ . Só que com isso  $|L(S_i)| \leq 2$ , o que contradiz a minimalidade de  $|L(S_1)| = \Delta$  (já que  $\Delta = 3$ ), uma contradição.

Como  $|I(S_1)| \neq 0$  e  $|I(S_1)| \neq 1$ , então  $|I(S_1)| \geq 2$ . □

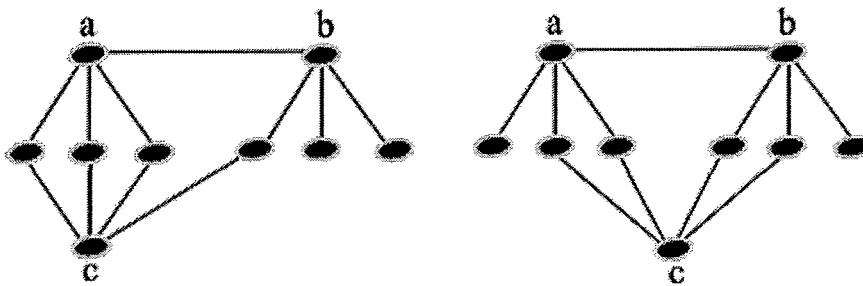


Figura A.3: Absurdo em subgrafo  $S_1$  com  $I(S_1) = 1$  e  $\Delta \geq 4$

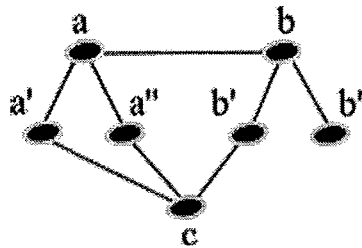


Figura A.4: Absurdo em subgrafo  $S_1$  com  $I(S_1) = 1$  e  $\Delta = 3$