



BUSCA DE ÓTIMOS LOCAIS PARA UM PROBLEMA NÃO CONVEXO DE ESTRATÉGIA DE PREÇOS EM MERCADOS DE ENERGIA

Priscilla Lusie Coelho Velozo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Helena Costa Fampa

Rio de Janeiro
Setembro de 2015

BUSCA DE ÓTIMOS LOCAIS PARA UM PROBLEMA NÃO CONVEXO DE
ESTRATÉGIA DE PREÇOS EM MERCADOS DE ENERGIA

Priscilla Lusie Coelho Velozo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Márcia Helena Costa Fampa, D.Sc.

Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr.Ing.

Prof. Sergio Barbosa Villas-Boas, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2015

Velozo, Priscilla Lusie Coelho

Busca de ótimos locais para um problema não convexo de estratégia de preços em mercados de energia/Priscilla Lusie Coelho Vellozo. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

XIV, 53 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Márcia Helena Costa Fampa

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 50 – 53.

1. Preço Spot. 2. Descentralizado. I. Fampa, Márcia Helena Costa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

A Deus e minha família.

Agradecimentos

Inicialmente gostaria de agradecer a Deus que me dá força e ilumina o meu caminho. Me ampara nos momentos difíceis e me acompanha nos momentos felizes. Minha família é a prova da importância do amor de Deus. Com Ele, nos modificamos e nos unimos ainda mais.

Agradeço também à minha família. Aos meus pais, por todo o esforço e dedicação para a minha criação e das minhas irmãs. As dificuldades foram muitas, mas com amor e paciência, sempre atravessaram-nas e nos ensinaram o caminho correto a ser seguido. Agradeço à Pâmela pela sua intensa alegria de viver e pelos desafios que só ela é capaz de trazer. Com ela, cresço e me reconstruo todos os dias. À minha outra irmã, Patricia, agradeço por ser minha companheira de todos os dias. Ela foi de fundamental importância para a conclusão deste trabalho. Ao meu marido e companheiro por todos os momentos que partilhamos e toda a força que sempre me dá. Aos meus filhos, Nicolas e Valentina, pela alegria imenarrável e imensurável que me trazem. A minha vida torna-se muito mais feliz com a presença deles e das minhas sobrinhas Emanuelle e Micaela. Aos meus sogros, pois são como pais para mim, sempre me orientando e ajudando. À Simone por me ouvir e ajudar a suprir a minha ausência com os meus filhos, os confortando como uma mãe.

Não poderia deixar de agradecer aos meus amigos também. Não irei citar nomes pois são muitos e correria o risco de esquecer de algum. Aos meus amigos obrigada pela paciência, por me suportar nos dias de mau humor, por entender minha ausência, e ainda assim, sempre me incentivarem a continuar a labuta. Agradeço também aos meus afilhados, Ryan, Maya, Felipe e Micaela, em especial ao Ryan, por entenderem a minha ausência neste período.

À minha orientadora, Márcia Fampa, por toda a orientação, paciência e estímulo. Uma profissional super competente que dedicou inúmeras horas para me ajudar neste trabalho, além de psicóloga ao meu ouvir falar das dificuldades pessoais que atravessei neste período. Um exemplo de mãe e profissional a ser seguido.

Aos excelentes professores do PESC que contribuíram para a minha formação profissional e acadêmica. À toda a dedicação em preparar ótimas aulas. À UFRJ, em especial à COPPE e ao PESC, por toda a boa infraestrutura e equipe para suportar aos alunos. Ao Jesus e à Daniela por cuidarem do Labotim e me ajudarem

com o uso do laboratório.

À Rede Globo, em particular ao DEPED, por flexibilizar o meu horário de trabalho e me conceder férias nos momentos que precisei me ausentar.

Agradeço aos professores Sérgio Villas-Boas e Paulo Roberto por aceitarem participar da minha banca e contribuírem com a minha formação acadêmica. Ao professor Sérgio que me apresentou o PESC e sempre esteve à disposição para me aconselhar, e ao professor Paulo pelo conhecimento a mim transmitido.

Finalmente agradeço ao povo brasileiro, pois graças aos impostos que pagamos é possível termos uma faculdade pública com nível de ensino tão elevado quanto temos na UFRJ.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

BUSCA DE ÓTIMOS LOCAIS PARA UM PROBLEMA NÃO CONVEXO DE ESTRATÉGIA DE PREÇOS EM MERCADOS DE ENERGIA

Priscilla Lusie Coelho Velozo

Setembro/2015

Orientador: Márcia Helena Costa Fampa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, apresentaremos uma busca de ótimos locais para um problema não convexo de estratégia de preços sob incerteza em mercados de energia (PEP). Três formulações matemáticas para o problema serão consideradas: modelo de programação em dois níveis (PPDN), modelo de programação não linear (NLP) e modelo de programação inteira linear mista (MILP). A formulação utilizada para obtenção dos resultados numéricos é o modelo NLP, mais especificamente um modelo de programação quadrática com restrições quadráticas (QCQP). O modelo MILP será utilizado para obtenção dos valores de referência numa metodologia destinada à obtenção do ótimo global do problema.

Dois algoritmos heurísticos serão apresentados para a geração de soluções para o PEP: heurística do preço nulo e heurística do preço concorrente. Estes algoritmos geram soluções viáveis. O objetivo deste trabalho é verificar o impacto das soluções iniciais obtidas por nossas heurísticas no comportamento dos ótimos locais obtidos por um solver de programação não linear convexa quando aplicado ao QCQP. E, se é possível obter valores ótimos globais.

Utilizaremos o solver Ipopt aplicado ao modelo QCQP para obter os resultados numéricos. Nos experimentos, serão utilizadas instâncias derivadas da configuração do sistema elétrico brasileiro, que é dividido em subsistemas: sul, norte, sudeste e nordeste. Utilizaremos dados derivados dos subsistemas sul e sudeste. O solver CPLEX será utilizado para resolver o MILP.

Compararemos os resultados obtidos pelo solver Ipopt sem fornecimento de solução inicial, pelo Ipopt com a solução inicial gerada pelas duas heurísticas e os resultados obtidos pelo solver CPLEX. Além da análise das soluções obtidas, será analisado o tempo gasto para a obtenção destes resultados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

LOCAL OPTIMAL SEARCH FOR A NON CONVEX PROBLEM OF
STRATEGIC PRICING IN ELECTRICITY MARKET

Priscilla Lusie Coelho Velozo

September/2015

Advisor: Márcia Helena Costa Fampa

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this thesis, we present different methods to obtain local optimals for a non-convex problem of pricing strategy under uncertainty in energy markets (PEP). Three mathematical formulations for the problem will be considered: a bilevel programming model (PPDN), a non-linear programming model (NLP) and a mixed-integer linear programming model (MILP). The formulation used to obtain the numerical results is the NLP model, specifically a quadratically constrained quadratic program (QCQP). The MILP model will be used to obtain the reference values in a methodology to obtain a global optimum of the problem.

Two heuristic algorithms will be presented for generating solutions for PEP: the heuristic of null price and the heuristic of competitor price. These algorithms generate feasible solutions. The objective of this study is to check the impact of initial solutions obtained by our heuristics in the behavior of local optimals obtained by a convex nonlinear programming solver when applied to QCQP. And if we can get global optimal values.

We will apply the solver Ipopt to the QCQP model to obtain the numerical results. In the experiments, the instances used will be derived from the Brazilian electrical system configuration, which is divided into subsystems: South, North, Southeast and Northeast. We will use data derived from the South and the Southeast subsystems. The CPLEX solver will be used to solve the MILP.

We will compare the results obtained by the solver Ipopt with no initial solution given, to the results obtained by Ipopt when the initial solution is generated by the two heuristics and to the results obtained by CPLEX. Besides the analysis of the solutions obtained, we will also analyze the running time needed to obtain these results.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Proposta do trabalho	2
2 Formulações matemáticas para o problema de estratégia de preços em mercados de energia	4
2.1 Revisão bibliográfica	10
2.2 Modelo de Programação Não Linear	11
2.3 Modelo Linear Inteiro Misto	12
2.4 Convexidade	14
3 Heurísticas	15
3.1 Definição de Heurísticas	16
3.2 Construção da Heurística	16
3.3 Heurística do preço nulo	18
3.4 Heurística do preço de alguma concorrente	19
4 Resultados Computacionais	21
4.1 Geração das Instâncias do Subsistema Sul	21
4.2 Geração das Instâncias do Subsistema Sudeste	23
4.3 Exemplo: Instância:10,04,02 do Subsistema Sul	26
4.4 O resolvedor Ipopt	26
4.5 Resultados numéricos	28
4.6 Resultados numéricos utilizando a solução inicial obtida com a Heurística do Preço Nulo	31
4.7 Resultados numéricos utilizando soluções iniciais obtidas com a heurística do preço igual ao preço da concorrente	35
4.8 Comparação entre a heurística do preço nulo e a heurística do preço concorrente	43

5 Conclusão	47
Referências Bibliográficas	50

Lista de Figuras

2.1	Lucro do Líder	9
2.2	Função convexa	14
3.1	Heurística do Preço nulo	18
3.2	Heurística do Preço igual ao preço da concorrente	20
4.1	Procedimento para geração das probabilidades dos cenários	23

Lista de Tabelas

2.1	Exemplo de um Problema de Estratégia de Preços (PEP): Ofertas das usinas participantes	7
2.2	Situação 1: Produção das usinas participantes	8
2.3	Situação 2: Produção das usinas participantes	8
2.4	Situação 3: Produção das usinas participantes	9
4.1	Usinas do subsistema sul utilizadas para implementação	22
4.2	Custo de Produção de Energia em 2008	23
4.3	Sistema Integrado Nacional em 2008 - Sudeste	25
4.4	Modelo NLP - solver ipopt	30
4.5	Resultado Heurística Preço Nulo	34
4.6	Análise do GAP para 100 soluções iniciais oriundas da <i>hc</i>	38
4.7	Análise de tempo para 100 soluções iniciais oriundas da <i>hc</i>	40
4.8	Análise do GAP para 5 soluções iniciais oriundas da <i>hc</i>	42
4.9	Análise de tempo para 5 soluções iniciais oriundas da <i>hc</i>	43
4.10	Heurística Preço Nulo X Heurística Preço Concorrente - 100 soluções	45
4.11	Comparação dos GAPs <i>Ihn</i> e <i>Ihc</i>	45
4.12	Comparação dos GAPs <i>Ihn</i> e <i>Ihc</i> para o subsistema sudeste	46

Lista de Abreviaturas

AMPL A Mathematical Programming Language	26
ANEEL Agência Nacional de Energia Elétrica	21
ASL AMPL Solver Library	27
BLAS Basic Linear Algebra Subroutines	27
BMO Boletim Mensal de Operação	21
CEEE Companhia Estadual de Energia do Rio Grande do Sul	22
CESP Companhia Energética de São Paulo	25
COIN-OR Computational Infrastructure for Operations Research	27
EPL Eclipse Public License	27
IPOPT Interior Point Optimizer	3
LAPACK Linear Algebra PACKage	27
MILP Modelo de Programação Inteira Linear Mista	2

MUMPS MULTifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver	27
NLP Modelo de Programação Não Linear	2
NP Tempo Polinomial Não-Determinístico	15
ONS Operador Nacional do Sistema Elétrico Brasileiro	21
PEP Problema de Estratégia de Preços	xii
PPL Problema de Programação Linear	6
PPDN Modelo de Programação em Dois Níveis	2
QCQP Problema Quadrático com Restrições Quadráticas	11

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação é estudado o PEP em um mercado de energia onde a remuneração de cada gerador depende da habilidade da própria companhia de submeter preços e ofertas. Como visto na tese de doutorado do aluno Wagner Pimentel [1], a indústria de fornecimento de eletricidade em muitos países tem enfrentado uma significativa reestruturação para aumentar a competitividade e a desregulamentação. Em geral, a geração de energia torna-se uma atividade desagregada (separada e desregulada) baseada no funcionamento do mercado.

Uma das formas de desregulamentar o processo é a criação de um mercado de energia por atacado, onde todos os geradores de energia livremente ofertam preços unitários em $R\$/MWh$ baseados na produção de hora em hora para o dia seguinte e sua capacidade máxima de produção em MWh . Baseados nas ofertas, o operador do sistema ordena as geradoras em ordem crescente de preço e as despacha até que sua demanda seja atingida. O preço final unitário pago às geradoras é o mesmo e igual ao maior preço despachado, ou seja, igual ao preço pago à última geradora despachada, que corresponde ao custo marginal e é conhecido como *preço spot*. O mercado de eletricidade geralmente adota este modelo similar ao leilão de preço uniforme.

No mercado de energia desregulado, a expedição do sistema e o preço spot dependem das ofertas preço-quantidade de cada agente gerador, portanto os agentes assumem muito mais riscos e tornam-se altamente responsáveis pelas suas próprias estratégias. A principal questão de uma companhia de geração é como desenvolver uma estratégia de oferta que maximize seu lucro, por sua vez, os operadores do sistema estarão interessados em analisar tais estratégias para evitar abusos de mercado.

Uma dificuldade do problema de determinar a melhor oferta para uma geradora é o fato do preço spot depender das ofertas de todos os agentes, porém esta informação não está disponível para as companhias no momento em que traçam suas estratégias. O agente ofertante, que objetiva maximizar seu lucro, precisa dimensionar suas ofer-

tas preço-quantidade sem conhecimento prévio das ofertas dos concorrentes nem da demanda do agente do sistema. Portanto, precisa analisar outros leilões ocorridos anteriormente, que nesta dissertação chamaremos de **cenários**. Estes cenários são utilizados para a análise dos valores ofertados pelas concorrentes e a demanda requisitada pelo operador do sistema. A cada cenário é atribuída uma probabilidade de ocorrência. O somatório das probabilidades dos cenários analisados é igual a um.

Este é um problema não convexo e, devido à sua dificuldade e importância, há uma intensa busca por um algoritmo eficiente que o solucione. Na literatura, há várias formulações para este problema [2–9]. Nesta dissertação, consideramos uma versão estática do PEP, sem variação temporal, sem restrições de transmissão, nem funções de custo não-linear, e onde as ofertas dos competidores são modeladas baseadas em cenários. Estamos desconsiderando o custo inicial para ligar o transformador, obtendo desta forma, funções de custo lineares.

1.1 Proposta do trabalho

A proposta deste trabalho é um estudo detalhado do problema de determinar preços e ofertas em um mercado de energia de forma a maximizar o lucro mesmo desconhecendo os dados ofertados pelos concorrentes e a necessidade do agente do sistema. Por ser um problema de difícil solução, propomos diferentes heurísticas para resolvê-lo. Analisamos ótimos locais obtidos pelo solver de programação não linear convexa Ipopt, quando aplicados ao modelo de programação quadrática com restrições quadráticas não-convexo. A aplicação de algoritmos de programação convexa para problemas não-convexos pode também ser vista como uma heurística para o mesmo. Analisamos por fim, como os ótimos locais obtidos pelo Ipopt são afetados pela qualidade de suas soluções iniciais, utilizando as soluções obtidas por nossas heurísticas como pontos de partida para o algoritmo no Ipopt. Por fim, comparamos as abordagens heurísticas propostas neste trabalho através de experimentos computacionais com instâncias teste baseadas no sistema elétrico brasileiro.

No próximo capítulo, iremos descrever com detalhes o problema de determinar a estratégia de oferta ótima de uma geradora em um mercado de energia. Faremos um revisão bibliográfica do problema e apresentaremos três modelagens matemáticas para o mesmo: um Modelo de Programação em Dois Níveis (PPDN), um Modelo de Programação Não Linear (NLP) e um Modelo de Programação Inteira Linear Mista (MILP). Em 2.4 iremos falar da importância da convexidade para a otimização e as dificuldades que ocorrem quando a função não é convexa. Caso o leitor queira se aprofundar no PEP e verificar outras abordagens para o problema, sugerimos a leitura de [10], [11], [12], [13] e [14].

Em seguida, no capítulo 3 serão apresentados dois algoritmos heurísticos utili-

zados para obter soluções iniciais para o modelo matemático NLP. Os resultados computacionais numéricos serão apresentados em 4. Para a obtenção dos resultados, utilizaremos instâncias testes com configuração derivada do Sistema Brasileiro de energia. Analisaremos o comportamento dos ótimos locais obtidos pelo solver Interior Point Optimizer (IPOPT) ao utilizar as soluções iniciais geradas pelos algoritmos heurísticos. Por fim, apresentaremos as conclusões finais em 5.

Capítulo 2

Formulações matemáticas para o problema de estratégia de preços em mercados de energia

Nesta capítulo iremos detalhar o problema. Como casos especiais dos modelos de oferta preço-quantidade temos os conhecidos modelos de preço puro e quantidade pura. O primeiro é um modelo de oferta quantidade pura conhecido como modelo de Cournot [15] que pré-define propostas de preços, geralmente como zero, e otimiza as ofertas de quantidade, portanto a empresa pode diminuir a quantidade ofertada a fim de aumentar o preço-spot. O último é um modelo de oferta de preço puro conhecido como modelo de Bertrand [16] que pré-define lances de quantidade, geralmente como a capacidade máxima de geração, e otimiza as ofertas de preços. Ambos os modelos são amplamente utilizados nos modelos de jogos teóricos. Utilizaremos a idéia do modelo de Bertrand para modelar o PEP.

O modelo matemático abaixo representa o problema a ser resolvido pelos operadores do sistema, cujo objetivo é minimizar o custo de geração de energia atendendo à sua demanda de energia.

$$\begin{array}{llll} & & \text{variável dual} & \\ \text{Minimizar}_{g_j} & \sum_{j \in J} \lambda_j g_j, & & \\ \text{sujeito a} & \sum_{j \in J} g_j = d, & \pi_d & (2.1) \\ & g_j \leq \bar{g}_j, & \pi_{g_j} & j \in J, \\ & g_j \geq 0, & & j \in J, \end{array}$$

onde J representa o conjunto de todas as unidades geradoras participantes do processo, d a demanda do consumidor, λ_j o preço ofertado da unidade geradora j , g_j sua geração e \bar{g}_j a sua capacidade máxima de geração. π_d e π_{g_j} representam as variáveis duais referentes à restrição de demanda e às restrições de capacidade

máxima respectivamente.

O custo marginal pago a todas as geradoras é chamado de 'preço spot' [17] e corresponde a π_d . Chamaremos o conjunto de geradores pertencentes à empresa para a qual estamos otimizando o lucro de 'E'. Portanto, o lucro líquido total desta empresa é representado por:

$$\sum_{j \in E} (\pi_d - c_j) g_j$$

onde c_j representa o custo da unidade geradora j , $E \subset J$.

Lembrando que uma companhia pode participar com vários geradores e ofertas custos-quantidades diferentes para cada um deles, podemos considerar duas situações extremas apenas para melhor entendimento do problema:

- valor ofertado nulo - para garantir que a geradora seja despachada, esta pode cobrar nulo pela sua energia, porém se todas as empresas cobrarem nulo ou quase nulo, pode ser que ela tenha prejuízo: custo maior que o valor pago pela sua geração. Ou então, mesmo que consiga lucro, não possuirá o controle dele, deixando que as concorrentes ditem-no.
- valor ofertado marginal - a companhia pode ofertar por um gerador um valor mais alto, visando ser o preço spot, desta forma pode ser que nem toda a sua capacidade de produção seja aproveitada, mas ela consegue elevar o valor pago pela sua energia, objetivando controlar seu lucro.

Como no momento em que a empresa E escolhe sua oferta preço-quantidade para cada um de seus geradores ela não conhece as ofertas dos concorrentes, nem a demanda necessária do operador do sistema, ela utiliza valores estimados para estas variáveis do problema. Estas estimativas são baseadas em cenários, que são retratos de outros processos de licitação para o mercado de energia. Faz-se um levantamento de dados do passado, onde seus concorrentes já tenham participado de algum outro processo de licitação para obter as ofertas dadas pelos concorrentes e a demanda requerida pelo operador do sistema. Todo leilão de energia é guardado e armazenado em séries temporais. Os dados dos cenários são obtidos destes leilões.

Para a resolução do PEP, vários cenários são analisados, e a probabilidade de ocorrência de cada um é levada em consideração. O somatório total das probabilidades de todos os cenários deve ser igual a 1. Portanto, o conjunto de geradores J é dividido em geradores da empresa E e geradores das concorrentes ($j \in J - E$). Para as variáveis referentes a este último conjunto e as variáveis referentes ao operador do sistema utiliza-se os valores analisados nos cenários. São analisados S cenários,

sendo atribuída uma probabilidade de ocorrência p a cada um destes valores esperados. Sendo assim, o modelo descrito em 2.1 é expandido em variáveis determinísticas e variáveis aleatórias.

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar}_{g_j^s} && \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^s g_j^s, \\
& \text{sujeito a} && \text{variável dual} \\
& && \sum_{j \in J} g_j^s = d^s, && \pi_d^s \\
& && 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j, && \pi_{g_j}^s && j \in E \\
& && 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j^s, && \pi_{g_j}^s && j \notin E
\end{aligned}$$

Lembrando que o governo quer minimizar seu custo enquanto o agente ofertante quer maximizar seu lucro. A melhor formulação para representar um problema que envolve o interesse de duas partes, onde a resolução de um dos problemas envolve um outro problema, é a programação em dois níveis. O primeiro nível é chamado de líder, enquanto o segundo nível é chamado de seguidor. Abaixo segue a formulação em dois níveis deste problema:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar}_{\lambda_E} && \sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s, \\
& \text{sujeito a} && \\
& \text{Minimizar}_{g_j^s} && \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^s g_j^s, \\
& \text{sujeito a} && \sum_{j \in J} g_j^s = d^s, && s \in S, \\
& && 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j, && j \in E, && s \in S, \\
& && 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j^s, && j \notin E, && s \in S.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

p_s - probabilidade exógena de cada cenário

π_d^s - preço spot no cenário s

c_j - custo da unidade geradora j

g_j^s - quantidade de energia produzida pela unidade geradora j no cenário s (MWh)

λ_j - preço ofertado pela unidade geradora j pertencente à empresa E ($R\$/MWh$)

λ_j^s - preço ofertado por unidade de geração pela geradora concorrente j no cenário s ($R\$/MWh$)

d_s - demanda requisitada pelo consumidor (MWh) no cenário s

\bar{g}_j - capacidade máxima de produção da unidade geradora $j \in E$ (MWh)

\bar{g}_j^s - capacidade máxima de produção da unidade geradora $j \in (J - E)$ no cenário s (MWh)

O primeiro nível do PPDN representa a maximização do lucro da empresa 'E' (líder), enquanto o segundo nível representa a minimização do custo para o consumidor ou distribuidoras (seguidor). Considerando as variáveis controladas pelo líder fixas, o segundo nível é um problema de Problema de Programação Linear (PPL). Este PPL pode ser resolvido separadamente para cada cenário.

A função objetivo do problema líder representa a maximização do lucro da empresa 'E', enquanto a função objetivo do problema seguidor retrata a minimização do custo para o operador final que está comprando a energia das geradoras. O modelo possui equações próprias para os geradores de E e outras para os geradores dos concorrentes pois como estes valores não são conhecidos por E no momento da resolução do problema, estes valores serão estimados.

No PEP, podemos observar que várias soluções ótimas são possíveis. Digamos que a empresa geradora soubesse o valor do preço spot, qualquer valor abaixo deste poderia ser cobrado por ela, sendo um valor viável e não interferindo na função objetivo. Como não são conhecidos a demanda, o valor ofertado e nem a capacidade de produção das concorrentes, trabalha-se com a análise estatística destes valores. São estimados a partir de um estudo do passado. A oferta estratégica leva em conta a incerteza sobre estes valores [18]: um conjunto de cenários indexados por s é utilizado, representando situações anteriores com valores de demanda, preços e quantidades ofertadas em outras situações. Estes valores são incertos e acontecem com probabilidade exógena p_s .

Segue o exemplo de um PEP onde há apenas um gerador para a empresa ofertante E e a demanda requisitada pelo agente é igual a 1000 MWh . Possui apenas um cenário e o conjunto de geradores concorrentes é igual a $\{A, B, C, D\}$, totalizando 4 geradores.

A tabela abaixo mostra as ofertas de preços dos concorrentes e suas capacidades máximas:

Geradores	Capac. Máx MWh	Ofertas de preço $R\$/MWh$
A	300	20
B	350	40
C	200	60
D	500	80
E	400	λ_1

Tabela 2.1: Exemplo de um PEP: Ofertas das usinas participantes

Analisando os dados ofertados no exemplo acima, e ordenando os geradores do menor para o maior valor ofertado, analisaremos o despacho da produção e os possíveis valores de oferta para a empresa E . Vale observar que o somatório da capacidade máxima de produção dos geradores concorrentes é maior que a demanda do agente ($1350 > 1000$), portanto o problema é limitado. Também é importante lembrar que o valor pago às empresas despachadas é igual ao maior valor que foi despachado. Portanto, observaremos 3 possíveis situações considerando a quantidade de produção utilizada da empresa E: totalmente despachada, parcialmente despachada

ou não despachada.

- Situação 1: Para que a empresa E consiga despachar **totalmente** a sua produção, o valor de oferta de preço λ_1 não pode ultrapassar $40 \text{ R\$/MWh}$. Este valor é igual à oferta de preço do gerador B, porém, em caso de empate, a empresa E tem a preferência.

Desta forma, a produção utilizada g_j segue a tabela abaixo:

Geradores $j \in J$	g_j <i>MWh</i>
A	300
B	300
C	0
D	0
E	400

Tabela 2.2: Situação 1: Produção das usinas participantes

Neste caso, a receita obtida pela empresa ofertante é constante e igual a $40 \cdot 400$

- Situação 2: Caso a empresa E oferte mais que a empresa B e menos ou igual ao gerador C, a produção despachada será **parcial**. Portanto, caso $40 < \lambda_1 \leq 60$, a produção utilizada é igual a:

Geradores $j \in J$	g_j <i>MWh</i>
A	300
B	350
C	0
D	0
E	350

Tabela 2.3: Situação 2: Produção das usinas participantes

Neste caso, a receita obtida pela empresa ofertante é uma função linear igual a $350\lambda_1$.

De forma análoga, para o caso onde a empresa E faça sua oferta maior que a empresa C e menor ou igual à empresa D ($60 < \lambda_1 \leq 80$), a demanda é parcialmente atendida pelos geradores concorrentes $\{A, B, C\}$, que fornecem 850 MWh . Resta ao gerador ofertante a produção de 150 MWh . Logo a receita continua sendo uma função linear com inclinação dada por λ_1 : $150\lambda_1$.

- Situação 3: Por fim, caso a empresa E oferte um valor maior que a empresa D ($\lambda_1 > 80$), a demanda é totalmente satisfeita pelas empresas concorrentes e a sua produção não é despachada. Logo, a receita da empresa ofertante é igual a zero.

Geradores $j \in J$	g_j <i>MWh</i>
A	300
B	350
C	200
D	150
E	0

Tabela 2.4: Situação 3: Produção das usinas participantes

Para ganharmos algum insight sobre o problema 2.2, vamos analisar o exemplo de duas-dimensões apresentado na figura abaixo, onde o número de geradores da empresa ofertante é um, $|E| = 1$. Para simplificarmos, consideramos apenas um cenário e o custo operacional c_1 igual a zero. Seja o conjunto de ofertas de preços dos geradores não-pertencentes à companhia E igual a $\{\lambda_2^* \leq \lambda_3^* \leq \dots \leq \lambda_{|J|}^*\}$.

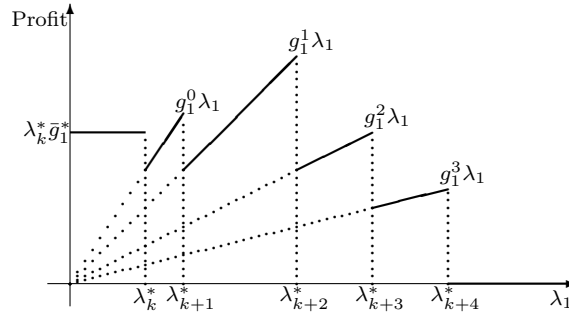


Figura 2.1: Lucro do Líder

Na solução ótima, para uma dada oferta de preço λ_1 , os geradores são despachados até que a demanda seja satisfeita, aumentando o preço spot. Seja k o menor índice tal que $\bar{g}_1^* + \sum_{j=2}^k \bar{g}_j^* > d$. Para $\lambda_1 \leq \lambda_k^*$, o gerador da companhia E produz sua capacidade máxima na solução ótima do problema seguidor e o lucro da companhia E é **constante** e igual a $\lambda_k^* \bar{g}_1^*$.

Para $\lambda_l^* < \lambda_1 \leq \lambda_{l+1}^*$, onde $l \in [k, |J| - 1]$, a produção da companhia E na solução ótima do problema seguidor é dada por $g_1^{k-l} \equiv \max\{0, d - \sum_{j=2}^l \bar{g}_j^*\}$ e a função objetivo do líder é uma função linear de λ_1 com inclinação g_1^{k-l} . Claramente $g_1^{k-l} \geq g_1^{k-l+1}$, para todo l .

Se λ_1 ultrapassa um valor suficientemente grande, o gerador não é despachado e $g_1 = 0$ na solução ótima do problema seguidor e o lucro do líder é nulo.

Portanto, notamos que a função objetivo do líder não é contínua nem côncava. É uma função linear por partes que apresenta máximos locais onde λ_1 assume o valor ofertado por alguma concorrente.

2.1 Revisão bibliográfica

O mercado de energia tem visto cada vez mais o modelo de competição substituir o modelo de regulamentação ou modelo de mercado centralizado. Uma significativa quantidade de energia é negociada através do mercado do dia seguinte: leilões onde as empresas concorrentes ofertam quantidade e preço para o dia seguinte. Segundo consta em [19], por exemplo, em 2007 na Escandinávia o volume negociado no mercado do dia seguinte foi maior que 290 *TWh*, representando mais que 65% de todo o consumo dos países nórdicos daquele ano. O mercado do dia-seguinte é benéfico pois traz vantagens para o consumidor e o produtor de energia: transparência de preços, facilitação da participação do consumidor e diminuição da incerteza do preço, uma vez que podem haver excessos sem competição.

Como o PEP é altamente não-convexo e por causa da dificuldade do problema em si, há uma intensa busca em algoritmos eficientes para sua resolução. Iremos apresentar uma rápida revisão bibliográfica para este problema. Alguns dos principais modelos para o PEP podem ser divididos em: problema de programação linear inteira mista, problema de programação em dois níveis e problema de programação linear com restrições de complementaridade.

Mais recentemente, o uso de modelos lineares de programação inteira mista tem crescido: TORRE [20] representa a função de demanda residual não-convexa com um modelo MILP. BAILLO [21] et al. também representam a função de demanda residual por um modelo MILP mas levam em consideração a incerteza, estabelecendo cenários das funções de demanda residual para o mercado do dia seguinte.

Nesta dissertação também consideramos o problema de estratégia de preços sem restrições de transmissão, nem funções de custo não-linear, e onde os concorrentes não conhecem as ofertas de preço-quantidade uns dos outros. Portanto utiliza-se de dados de outros leilões para analisar os prováveis valores que as empresas concorrentes irão ofertar para calcular a oferta da empresa E . Cada conjunto de possíveis valores das concorrentes e as variáveis de decisão da empresa ofertante é chamado de cenário. Os dados dos leilões são guardados em séries temporais e ficam disponíveis nos sites das agências reguladoras de energia.

A formulação utilizada é uma abordagem diferente, formulada como uma classe especial de problemas de dois níveis conhecida como problema de taxaço [22]. A

programação em dois níveis é bastante apropriada ao PEP como vimos anteriormente. Retrata bem o conflito de interesses do problema a partir do momento em que as geradoras visam maximizar seus lucros enquanto o agente objetiva minimizar seu custo.

A diferença do modelo PPDN apresentado neste estudo e dos representados em [23] e [24] são a representação do comportamento de oferta, no lugar do equilíbrio de Nash é usado uma abordagem baseada em cenários, o fato da rede de transmissão não estar representada e das abordagens de solução. No problema de taxaço, cada competidor recebe como pagamento unitário por seus serviços o próprio preço cobrado por ele, enquanto no PEP todos os competidores despachados recebem como pagamento unitário o mesmo valor, o preço spot.

A partir do modelo NLP e através da decomposição binária de algumas variáveis, obtemos o modelo MILP que utilizamos como referência para a geração do valor ótimo, ou da melhor solução conhecida para as instâncias utilizadas e posterior comparação dos valores obtidos com o modelo NLP.

2.2 Modelo de Programação Não Linear

Para obtermos a solução do PEP precisamos substituir o problema seguidor que é um PPL pelas suas condições de otimalidade, lembrando que na otimalidade, a função objetivo do problema de programação linear Primal é igual ao valor da função objetivo do respectivo problema Dual. Como a restrição ligada à demanda do problema Primal (P) é de igualdade, a variável dual π_d^s é livre. Abaixo podemos ver o problema Primal:

$$\begin{aligned}
\min_{g_j^s} \quad & \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^s g_j^s \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j \in J} g_j^s = d^s, \quad s \in S, \\
& 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j, \quad j \in E, s \in S, \\
& 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j^s, \quad j \notin E, s \in S.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

E o seu respectivo problema Dual:

$$\begin{aligned}
\max_{\pi_d^s, \pi_{g_j}^s} \quad & \sum_{s \in S} (d^s \pi_d^s - \sum_{j \in E} \bar{g}_j \pi_{g_j}^s - \sum_{j \notin E} \bar{g}_j^s \pi_{g_j}^s) \\
\text{s.a.} \quad & \pi_d^s - \pi_{g_j}^s \leq \lambda_j, \quad j \in E, s \in S, \\
& \pi_d^s - \pi_{g_j}^s \leq \lambda_j^s, \quad j \notin E, s \in S, \\
& \pi_{g_j}^s \geq 0, \quad j \in J, s \in S, \\
& \pi_d^s \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Portanto, podemos substituir o problema de programação em dois níveis 2.2 pelo seguinte Problema Quadrático com Restrições Quadráticas (QCQP) não convexo:

Maximizar $\lambda_j, g_j^s, \pi_d^s, \pi_{g_j}^s$ $\sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} [\pi_d^s - c_j] g_j^s$,
 sujeito a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \in J} g_j^s &= d^s, & s \in S, & (1), \\
 0 \leq g_j^s &\leq \bar{g}_j, & j \in E, \quad s \in S, & (2), \\
 0 \leq g_j^s &\leq \bar{g}_j^s, & j \notin E, \quad s \in S, & (3), \\
 \pi_d^s - \pi_{g_j}^s - \lambda_j &\leq 0, & j \in E, \quad s \in S, & (4), \\
 \pi_d^s - \pi_{g_j}^s &\leq \lambda_j^s, & j \notin E, \quad s \in S, & (5), \\
 \pi_{g_j}^s &\geq 0, & j \in J, \quad s \in S, & (6),
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\sum_{s \in S} (\sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^s g_j^s - d^s \pi_d^s + \sum_{j \in E} \bar{g}_j \pi_{g_j}^s + \sum_{j \notin E} \bar{g}_j^s \pi_{g_j}^s) = 0. \tag{7}$$

O problema acima é não-convexo e quadrático com restrições quadráticas. Repare que a função objetivo maximizada não é o valor determinístico do lucro, mas o valor esperado deste. A primeira restrição diz que o somatório da oferta deve atender à demanda do consumidor. As restrições (2) e (3) dizem que a oferta não pode exceder a capacidade total dos geradores da empresa 'E' e dos geradores das concorrentes respectivamente. As restrições (4), (5) e (6) são restrições ligadas à dualidade. A última restrição deve-se à igualdade da solução ótima nos modelos primal e dual.

2.3 Modelo Linear Inteiro Misto

Outro modelo apresentado em [18] foi o MILP que utiliza o NLP 2.5 como referência. Como veremos no Teorema 1, é possível demonstrar que existe sempre uma solução ótima para o problema de determinar a oferta ótima de um agente, na qual cada geradora pertencente a 'E' oferta o preço equivalente ao preço ofertado por alguma de suas concorrentes em algum cenário. Sendo assim, pode-se reescrever o valor ofertado pelas geradoras da empresa 'E' como o valor cobrado por algum dos seus concorrentes em algum dos cenários analisados: $\lambda_j = \lambda_i^t$, para algum $i \notin E$, $t \in S$ e $j \in E$. Logo, podemos reescrever λ_j da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \lambda_j &= \sum_{(i,t) \in C} \lambda_i^t x_{ij}^t, \\
 \sum_{(i,t) \in C} x_{ij}^t &= 1, \\
 x_{ij}^t &\in \{0, 1\}, \forall (i, t) \in C,
 \end{aligned}$$

onde C é o conjunto de pares de índices (i, t) que correspondem aos preços distintos cobrados pelos concorrentes de 'E' em todos os outros cenários. x é a variável binária que funciona como um seletor: 1 se o preço for ativo, caso contrário, 0.

Para linearizar o modelo NLP, ou seja retirar a multiplicação de duas variáveis, define-se $\forall j \in E, s \in S, (i, t) \in C$:

$$\gamma_{ij}^{ts} = x_{ij}^t g_j^s$$

Logo, as restrições devem ser acrescentadas ao modelo NLP para que a igualdade acima torne-se verdadeira com $M_j = \bar{g}_j$:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^{ts} &\leq M_j x_{ij}^t, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\leq g_j^s, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\geq 0, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\geq g_j^s - M_j(1 - x_{ij}^t), \end{aligned}$$

Ou seja, se $x_{ij}^t = 1$ $\gamma_{ij}^{ts} = g_j^s$, caso contrário $\gamma_{ij}^{ts} = 0$.

Pelas condições de complementaridade do problema de programação linear do seguidor em 2.2, temos que:

$$\pi_d^s g_j^s = \lambda_j g_j^s + \pi_{g_j}^s \bar{g}_j.$$

Portanto, o MILP pode ser escrito como abaixo:

Maximizar $x_{ij}^t, \gamma_{ij}^{ts}, g_j^s, \pi_d^s, \pi_{g_j}^s$ $\sum_{s \in S} p_s \sum_{j \in E} \sum_{(i,t) \in C} \lambda_i^t \gamma_{ij}^{ts} + \pi_{g_j}^s \bar{g}_j - c_j g_j^s$,
sujeito a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} g_j^s &= d^s, & s \in S, \\ 0 \leq g_j^s &\leq \bar{g}_j, & j \in E, \quad s \in S, \\ 0 \leq g_j^s &\leq \bar{g}_j^s, & j \notin E, \quad s \in S, \\ \pi_d^s - \pi_{g_j}^s - \sum_{(i,t) \in C} \lambda_i^t x_{ij}^t &\leq 0, & j \in E, \quad s \in S, \\ \pi_d^s - \pi_{g_j}^s &\leq \lambda_j^s, & j \notin E, \quad s \in S, \\ \pi_{g_j}^s &\geq 0, & j \in J, \quad s \in S, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\leq M_j x_{ij}^t, & j \in E, \quad s \in S, \quad (i, t) \in C, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\leq g_j^s, & j \in E, \quad s \in S, \quad (i, t) \in C, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\geq 0, & j \in E, \quad s \in S, \quad (i, t) \in C, \\ \gamma_{ij}^{ts} &\geq g_j^s - M_j(1 - x_{ij}^t), & j \in E, \quad s \in S, \quad (i, t) \in C, \\ \sum_{(i,t) \in C} x_{ij}^t &= 1, & j \in E, \\ x_{ij}^t &\in \{0, 1\}, & j \in E, \quad (i, t) \in C, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\sum_{s \in S} (\sum_{j \in E} \sum_{(i,t) \in C} \lambda_i^t \gamma_{ij}^{ts} + \sum_{j \notin E} \lambda_j^s g_j^s - d^s \pi_d^s + \sum_{j \in E} \bar{g}_j \pi_{g_j}^s + \sum_{j \notin E} \bar{g}_j^s \pi_{g_j}^s) = 0.$$

2.4 Convexidade

O conceito de convexidade é muito importante para a área de otimização. Se a função for convexa, o ponto de mínimo (ou de máximo) local é sempre global, ou seja, a solução é aquela que satisfaz todas as restrições do problema e o valor da função objetivo é mínimo (ou máximo) dentro do conjunto viável.

A solução x^* é dita ser um ótimo local se existe vizinhança U de x^* tal que $\forall x \in U, f(x) \geq f(x^*)$ se o problema for viável.

Uma forma de verificar a convexidade em \mathbb{R} é verificando se a função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \quad (2.7)$$

para todo $(x, y) \in I$ e α com $0 < \alpha < 1$.

Outra forma de verificar se uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I é verificar se o segmento de reta secante que une os pontos $(p, f(p))$ e $(q, f(q))$ sempre está acima ou coincide com o gráfico de f para todo $(p, q) \in I$.

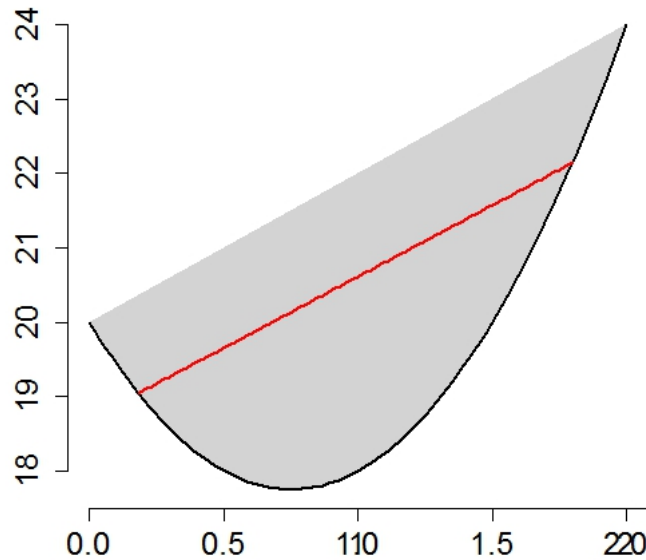


Figura 2.2: Função convexa

Fazendo uma análise gráfica do PEP a partir da figura 2.1, observamos que a função lucro da empresa ofertante do PEP é não-convexa. Isso quer dizer que há pontos de máximo locais que não são necessariamente globais.

Capítulo 3

Heurísticas

A motivação do estudo de heurísticas deve-se a alguns problemas de difícil resolução que apresentam grandes dificuldades na obtenção de sua solução ótima. Exemplos de dificuldades encontradas são modelagem matemática complexa, explosão combinatória do espaço de busca conforme o aumento no número de variáveis exigindo uma grande quantidade de memória e tempo computacional para cálculo da sua solução ótima, ou ainda falta de convergência numérica para a solução. Portanto, as heurísticas surgem como alternativa para a obtenção de uma solução para estes problemas extremamente difíceis de serem resolvidos.

Uma classe de problemas que apresenta um grande desafio para os pesquisadores são problemas não determinísticos em tempo polinomial, ou mais popularmente conhecidos como Tempo Polinomial Não-Determinístico (NP). Algoritmos exatos muitas vezes não são capazes de encontrar soluções ótimas para estes problemas por serem grandes e complexos de serem resolvidos, demandando muito tempo e memória computacional. O modelo NLP do problema de estratégia de preços utilizado para nosso estudo é baseado no PPDN 2.2. Foi provado em [25, 26] que o problema de programação linear em dois níveis é um problema NP-Hard, logo é no mínimo tão difícil de se resolver quanto os problemas NP mais difíceis de serem resolvidos.

Neste capítulo apresentaremos uma definição para heurísticas. Em seguida, iremos apresentar dois procedimentos heurísticos que serão utilizados no problema do PEP. Mostraremos como o problema foi subdividido para obtermos a solução quando as ofertas de preço são todas nulas para a empresa ofertante. Outra solução será obtida escolhendo-se o preço a ser ofertado por cada gerador da empresa ofertante de forma aleatória entre as ofertas das concorrentes nos cenários analisados.

3.1 Definição de Heurísticas

Heurística é uma palavra grega que significa descobrir, encontrar. Pode ser um conjunto de procedimentos bem estruturados ou simplesmente o bom senso e a experiência de um profissional utilizados para encontrar uma solução para um problema.

Elas vem desempenhando um papel fundamental na área de programação matemática pois costumam ser simples de entender e de implementar computacionalmente, e geralmente encontram soluções de boa qualidade bem rápido. Porém, é importante ressaltar que as heurísticas nem sempre visam encontrar o valor ótimo, muito menos o valor ótimo global. Algumas conseguem obter apenas uma solução viável.

Abaixo enumeramos algumas aplicações para o uso de heurísticas.

- No algoritmo de branch-and-bound [27] para problemas de programação inteira, temos uma enumeração implícita das possíveis soluções do problema organizadas em forma de árvore. Com o uso de heurísticas, obtemos limitantes para o problema (limitantes inferiores para problemas de maximização ou limitantes superiores para problemas de minimização) podendo fazer podas por limite em alguns sub-ramos, evitando a exploração dos mesmos e acelerando o algoritmo.
- Algumas heurísticas fornecem soluções viáveis (sem garantia de otimalidade) que podem ser utilizadas como ponto de partida para algoritmos que necessitem partir de uma solução para o problema. Ou ainda, caso o algoritmo não consiga obter uma solução viável em tempo hábil, garantimos ao menos a solução viável obtida pela heurística.
- Nos algoritmos de aproximação linear (outer approximation) [28] para programação não linear inteira, as heurísticas fortalecem a relaxação dada pelo problema mestre ao incluir a solução viável no conjunto de pontos de linearização.

Há vários tipos de heurísticas: melhoramento, viabilidade, etc. Neste estudo utilizaremos heurísticas de viabilidade que possuem o compromisso de buscar alguma solução viável para o problema.

3.2 Construção da Heurística

Como vimos no capítulo 2, o modelo utilizado para representar o PEP, objeto de nosso estudo, é um NLP não-convexo. Outra possível abordagem para resolução

do problema de estratégia e que utilizamos para comparação dos resultados obtidos é o modelo MILP visto neste mesmo capítulo. Porém, devido ao tamanho deste problema nas aplicações reais, especialmente quando um número razoável de cenários é considerado, estas abordagens podem não ser adequadas. Este fato motiva o desenvolvimento de procedimentos heurísticos.

Introduzimos alguns procedimentos heurísticos para resolver o PEP considerando o modelo de Bertrand, ou modelo de preço puro. Lembrando que este modelo consiste em valores fixos de oferta de quantidade, geralmente como a capacidade máxima de geração, e otimiza as ofertas de preços. Os procedimentos são extensões para o problema 2.2 das heurísticas propostas em [29, 30] para um problema de dois níveis definido como problema de taxaço. A diferença das heurísticas propostas e as dos artigos consiste no fato que no problema de estratégia de preço, em cada cenário, todos os competidores despachados recebem o mesmo valor por unidade de energia gerada, o preço spot.

Propomos duas formas de obter soluções para o PEP, diversificando as soluções obtidas. A performance das heurísticas foi sensivelmente melhorada pelo uso de um algoritmo muito rápido para resolver o problema 2.1, que é o problema seguidor (minimização do custo para o operador final) no modelo de programação em dois níveis 2.2, explorando sua estrutura simples. O algoritmo heurístico baseia-se na decomposição do problema de despacho econômico em pequenos subproblemas, um para cada cenário $s \in S$. Portanto, o problema é dividido em s subproblemas, que devem ser resolvidos independentemente.

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_{g_j^s} \quad \sum_{s \in S} \sum_{j \in E} \lambda_j g_j^s + \sum_{j \notin E} \lambda_j^s g_j^s, \\ & \text{sujeito a} \quad \quad \quad \text{variável dual} \\ & \quad \quad \quad \sum_{j \in J} g_j^s = d^s, \quad \quad \pi_d^s \\ & \quad \quad \quad 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j, \quad \quad \pi_{g_j}^s \quad j \in E \\ & \quad \quad \quad 0 \leq g_j^s \leq \bar{g}_j^s, \quad \quad \pi_{g_j}^s \quad j \notin E \end{aligned}$$

Ou seja, fixa-se o valor de preço ofertado $\lambda_j, j \in E$ e, resolve-se o problema acima para cada cenário. No final, o conjunto de soluções obtidas $g_j^s, j \in J, s \in S$ é uma solução viável para o problema.

Na função objetivo temos a multiplicação de variáveis $\lambda_j g_j^s$, portanto, uma vez fixado o valor da variável λ_j que representa o preço ofertado, obtemos um PPL a ser resolvido. Desta forma, o problema de otimização não-convexo é substituído por uma sequência de problemas lineares fáceis que produz uma sequência de soluções viáveis básicas convergindo para uma solução viável de 2.5. Todavia, a sequência pode não convergir para uma solução ótima do NLP. Como o problema é não-convexo, notamos que o problema do líder é uma função linear por partes de λ_E como visto na figura 2.1, logo os pontos estacionários da função são localmente

máximo.

Nas próximas seções dois procedimentos heurísticos são apresentados: um onde o valor ofertado por todos os geradores da companhia E é nulo e outro no qual são escolhidos aleatoriamente valores a serem ofertados por E iguais aos valores ofertados pelas plantas concorrentes em algum dos cenários analisados. Na primeira heurística, toda a capacidade de geração de energia de E é utilizada, enquanto na segunda ela pode ser responsável pelo preço marginal e pode ter apenas parte da sua capacidade utilizada. O objetivo é diversificar as soluções obtidas e analisar, desta forma, o trade-off entre aumentar o preço spot, diminuindo a produção de energia despachada.

3.3 Heurística do preço nulo

Nesta seção iremos mostrar um algoritmo heurístico utilizado para a resolução dos subproblemas do despacho econômico visto em 3.1. Vamos consideramos a solução correspondente à geração da capacidade máxima de energia dos geradores pertencentes à companhia ofertante E . Esta solução é obtida pela resolução dos subproblemas levando em consideração a fixação do valor ofertado pela companhia E , $\lambda_j = 0$ para cada $j \in E$, garantindo desta forma que toda a capacidade ofertada por E seja despachada.

```
procedure Preço_Nulo ( $\lambda_j^s$  para todo  $j \notin E$ ,  $s \in S$ )
1  Ler entrada de dados;
2  faça para cada  $s \in S$ 
3    Resolver o problema (2.1) fixando para todo  $j \in E$ ,  $\lambda_j = 0$ ,
    e obter uma solução  $\tilde{\pi}_d^s, \tilde{\pi}_{g_j}^s, \tilde{g}_j^s, j \in J$ ;
4  retornar  $\tilde{\pi}_d^s, \tilde{\pi}_{g_j}^s, \tilde{g}_j^s, j \in J, s \in S$ ;
end
```

Figura 3.1: Heurística do Preço nulo

Observe que desta forma garantimos que os geradores da companhia ofertante são todos despachados, mas a empresa não possui controle do preço spot, deixando a decisão deste para os concorrentes. O objetivo desta heurística é certificar que o gerador seja despachado, correndo o risco do preço spot não ser atraente, ou no pior caso, ser menor que o seu custo, gerando prejuízo. Na prática, o risco do preço spot ser menor que o seu custo parece pequeno, uma vez que as empresas concorrentes

também querem ser as marginais. Uma outra possibilidade seria ofertar o seu custo, mas desta forma garantiríamos que a empresa não teria prejuízo, aumentando o risco da empresa não ser despachada.

3.4 Heurística do preço de alguma concorrente

Não é difícil verificar que existe uma solução para o problema de Estratégia de Preços onde todos os geradores pertencentes a E ofertam um preço igual ao preço já ofertado por algum dos geradores das suas concorrentes $j \notin E$ em algum cenário s . No teorema abaixo demonstramos este resultado.

Teorema 1 *Existe uma solução ótima para o problema de determinar a estratégia de oferta em mercados de energia formulado como 2.5, na qual para todo $j \in E$, temos $\lambda_j = \lambda_i^s$, para algum $i \in J - E$ e $s \in S$.*

Prova: Suponha que na solução ótima de 2.5, para $\bar{j} \in E$, temos $\lambda_{\bar{j}} \neq \lambda_i^s$, para todo $i \in J - E$ e $s \in S$. Note que o preço spot π_d é igual a oferta do gerador mais caro despachado. Consequentemente analisamos duas situações separadamente:

- $\pi_d > \lambda_{\bar{j}}$, ou seja, a empresa \bar{j} não é a empresa marginal, e portanto não define o preço spot. Neste caso, se substituirmos na solução do problema, o valor de $\lambda_{\bar{j}}$ pelo valor do primeiro preço mais caro ofertado por alguma empresa em $J - E$ em algum cenário, o preço spot não sofrerá alteração, e nem a quantidade gerada pelas empresas. Desta forma, o valor da função objetivo se mantém constante, mostrando que a solução obtida também é uma solução ótima para o problema.
- $\pi_d = \lambda_{\bar{j}}$. Neste caso, a empresa \bar{j} é a empresa marginal e define o preço spot. Caso aumentemos o valor de $\lambda_{\bar{j}}$ até o valor do primeiro preço mais caro ofertado por alguma empresa em $J - E$ em algum cenário, o preço spot aumentará, no entanto a quantidade gerada pelas empresas se manterá constante, pois a empresa \bar{j} não deixa de ser a marginal. Desta forma, o valor da função objetivo aumenta, contrariando o fato da solução original ser ótima.

Em ambas as situações mostramos que sempre haverá uma solução ótima para o problema, na qual para todo $j \in E$, temos $\lambda_j = \lambda_i^s$, para algum $i \in J - E$ e $s \in S$.

□

O procedimento heurístico apresentado a seguir baseia-se no resultado do Teorema 1 e consiste em atribuir para cada gerador da companhia ofertante um preço escolhido de forma aleatória entre os preços ofertados pelos geradores concorrentes

em qualquer um dos cenários analisados. Após a atribuição dos preços, o problema do despacho econômico 3.1 é resolvido para cada cenário. Este procedimento é repetido inúmeras vezes para diversificarmos as soluções obtidas.

```

procedure Preço_Igual_Preço_da_Concorrente ( $\lambda_j^s$  para todo  $j \notin E, s \in S$ )
1  Ler entrada de dados;
2  faça para cada  $s \in S$ 
3    Resolver o problema (2.1) fixando para todo  $j \in E, \lambda_j = \lambda_j^{\bar{s}}$ ,
      para algum  $\bar{j} \notin E$ , e algum  $\bar{s} \subset S$ , e obter uma solução  $\tilde{\pi}_d^s, \tilde{\pi}_{g_j}^s, \tilde{g}_j^s, j \in J$ ;
4  retornar  $\tilde{\pi}_d^s, \tilde{\pi}_{g_j}^s, \tilde{g}_j^s, j \in J$ ;
end

```

Figura 3.2: Heurística do Preço igual ao preço da concorrente

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Neste capítulo apresentaremos os nossos resultados computacionais. Explicaremos inicialmente como foram gerados os dados das instâncias utilizadas em nossos experimentos, as quais são derivadas da configuração do sistema elétrico brasileiro. Este é dividido em subsistemas: sul, norte, sudeste e nordeste. Inicialmente, abordaremos instâncias menores, com menos geradores participantes, e portanto, menos variáveis, para maior entendimento do problema. Depois, utilizaremos instâncias maiores, oriundas do subsistema sudeste para validação da metodologia proposta.

Serão mostrados os resultados obtidos pelo solver de programação não linear convexa IPOPT [31] aplicado ao modelo de programação quadrática com restrições quadráticas não convexo definido em 2.5. Verifica-se o impacto das soluções iniciais obtidas por nossas heurísticas no comportamento dos ótimos locais obtidos pelo Ipopt.

4.1 Geração das Instâncias do Subsistema Sul

Os dados foram obtidos pelo Doutorando Wagner Pimentel em [1] e resultaram de uma intensa pesquisa no site do Operador Nacional do Sistema Elétrico Brasileiro (ONS), <http://www.ons.org.br>, e no site da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), <http://www.aneel.gov.br>. Todo leilão do sistema elétrico Brasileiro é guardado em séries temporais e disponibilizado no site em forma de Boletim Mensal de Operação (BMO). Estes dados retratam possíveis leilões de energia onde o Problema de Estratégia de Preços ocorra. Cada um destes retratos é chamado de instância.

Intencionalmente se alterou o problema por se incluir variáveis aleatórias nos dados, geradas numericamente. Apesar de na teoria ser possível coletar esses dados, na prática é muito difícil obtê-los seja por restrições legais, ou por desorganização dos dados públicos. Nesse caso, optou-se por fazer uma estimativa de dados que completasse o set necessário para se testar o método sob análise.

O Sistema Brasileiro é composto pelos subsistemas sul, norte, sudeste e nordeste. Possui 178 geradores sendo 28 geradores pertencentes ao subsistema sul. Estas usinas possuem capacidade total de 11 GW, correspondendo a 16% da capacidade nacional. Apenas os dados das últimas semanas de cada mês de 2008 dos geradores despachados neste mesmo ano foram considerados. A capacidade máxima de geração \bar{g}_j de cada gerador $j \in J$ foi fixada no maior valor ofertado por este gerador no período considerado.

No BMO há dois tipos de geração de energia: hidrelétrica e termelétrica. A geração hidrelétrica é constituída de 19 usinas que contribui com 68% da capacidade do subsistema e a geração termelétrica possui 9 usinas, colaborando com 32% da capacidade do subsistema.

Foram selecionadas 10 usinas (tabela 4.1) totalizando 26% da capacidade instalada do subsistema sul com 2940 MW. A geração hidrelétrica possui 8 usinas, correspondendo a 92% da capacidade instalada desta seleção, e a geração termelétrica possui 2 usinas ou 8% da capacidade instalada da seleção.

Usinas $j \in J$	Capac. Máx \bar{g}_j	Tipo
ITAÚBA**	344	H
DONA FRANCISCA**	124	H
PASSO REAL**	99	H
CANASTRA**	29	H
P.MEDICI	216	T
SAO JERONIMO	8	T
U.MONTE CLARO	124	H
U.MACHADINHO	1156	H
JACUI	177	H
U.BARRAGRANDE	663	H

Tabela 4.1: Usinas do subsistema sul utilizadas para implementação

Em todas as instâncias foi considerada como empresa ofertante, a Companhia Estadual de Energia do Rio Grande do Sul (CEEE), representada com ** na tabela 4.1. Ela controla 4 usinas hidrelétricas totalizando 596 MW da capacidade instalada ou 20 % da capacidade dos 10 agentes selecionados do subsistema sul.

Para a geração de todos os valores das instâncias, utilizou-se sorteios com distribuição uniforme. Para a geração dos cenários, as capacidades máximas de geração de energia dos concorrentes \bar{g}_j^s , $j \notin E$, $s \in S$, foram escolhidas randomicamente no intervalo $[0.9\bar{g}_j, \bar{g}_j]$;

Portanto, as instâncias utilizadas possuem $|E| = [2, 4]$, $|J| = [8, 10]$ e $|S| = [2, 4]$. No site da ANEEL verifica-se que cada tipo de geração de energia possui um custo de produção C_t , $t \in (\text{biomassa, hidrelétrica, nuclear e termelétrica})$. Os custos operacionais c_t foram obtidos de forma randômica no intervalo $[0.9C_t, 1.1C_t]$.

Tipo de Geração de energia	Custo de Produção C_t
Hidrelétrica	118.40
Termoelétrica	330.11
Nuclear	138.75
Biomassa	101.75

Tabela 4.2: Custo de Produção de Energia em 2008

As ofertas de preços feitas pelas concorrentes $\lambda_j, j \notin E, s \in S$ foram geradas de forma aleatória no intervalo $[1.1C_t, 1.5C_t]$, garantindo que a oferta de uma unidade de geração fosse sempre maior que o seu custo.

Seja \bar{G}^s a soma de todas as capacidades de geração dos concorrentes em cada cenário $s \in S$. As demandas $d_s, s \in S$ foram obtidas randomicamente no intervalo $[0.8\bar{G}^s, \bar{G}^s]$. Escolhendo a demanda desta forma, torna-se o problema limitado uma vez que as concorrentes podem suprir a demanda independente da capacidade de produção da empresa ofertante.

A probabilidade de ocorrência do cenário $p_s, s \in S$ foi gerada da seguinte forma:

```

Entrada: O número de cenários,  $|S|$ .
1 Defina as variáveis: fator, probRel, somaProb e  $\alpha \in [0, 1)$ 
2 somaProb:=0
3 fator:=1
4 probRel:=1.0/ $|S|$ 
5 para ( $s = 1, \dots, |S| - 1$ ) faça
6    $p_s := \text{probRel} + \alpha(\text{fator}/(5|S|))$ 
7   somaProb:=somaProb +  $p_s$ 
8   fator:=(-1)fator
9  $p_{|S|} := 1.0 - \text{somaProb}$ 
Saída  $p_s; \forall s \in S$ 

```

Figura 4.1: Procedimento para geração das probabilidades dos cenários

4.2 Geração das Instâncias do Subsistema Sudeste

Para a obtenção de instâncias maiores, utilizou-se dados do subsistema sudeste que possui um número de geradores bem mais elevado para validar a metodologia proposta.

Foram considerados apenas os dados das últimas semanas do mês de 2008 dos geradores despachados neste mesmo ano pelo subsistema sudeste. O Sistema Brasi-

leiro Nacional possui 178 geradores sendo 114 geradores pertencentes ao subsistema sudeste, tabela 4.3. Estas usinas do subsistema sudeste são responsáveis pelo abastecimento de 60% da capacidade do sistema nacional de 73 GW, totalizando 44 GW.

Usinas $j \in J$	Capac. Máx \bar{g}_j	Tipo	Usinas $j \in J$	Capac. Máx \bar{g}_j	Tipo
RJUSAN01	520	N	JAURU	77	H
RJUSAN02	1352	N	MANSO	169	H
CAMARGOS	37	H	MASCARENHAS	154	H
EMBORCACAO	561	H	NO.FLUMINENSE	804	T
IGARAPE	121	T	OURINHOS	39	H
IRAPE-US	194	H	PHCEB	22	H
ITUTINGA-US	49	H	PHCEE	27	H
JAGUARA-US	352	H	PHCHF	33	H
MIRANDA	271	H	PHCLG	9	H
NOVA PONTE	402	H	PHCMG	77	H
SALTO GRANDE CS	62	H	PHCMT	278	H
TRES MARIAS	321	H	PHCOP	114	H
ILHA SOLTEIRA **	2557	H	PHCPL	75	H
JAGUARI **	22	H	PHCRJ	92	H
JUPIA **	1261	H	PHCSC	60	H
P. PRIMAVERA **	1300	H	PHEME	42	H
PARAIBUNA **	67	H	PHERS	90	H
TRES IRMAOS **	529	H	PHESC	155	H
CAPIVARA	561	H	PICADA	50	H
CHAVANTES	296	H	PIE-RP	28	B
JURUMIRIM	77	H	PIRAJU	59	H
ROSANA	255	H	PIRATININGA	165	T
SALTO GRANDE	83	H	PORTO ESTRELA	112	H
TAQUARUCU	303	H	QUEIMADO	88	H
CAMPOS	30	T	RISOLETANEVES	140	H
CORUMBA	376	H	ROSAL	49	H
FUNIL	174	H	SA CARVALHO	68	H
FURNAS	846	H	SÃO SIMAO-US	1668	H
ITUMBIARA	1394	H	SOBRAGI	60	H
L.C.BARRETO	602	H	STA.CLARA-MG	60	H
M. MORAES	364	H	U.MIMOSO	27	H
MARIMBONDO	1199	H	UTE SOL	168	T
P. COLOMBIA	302	H	VOLTA GRANDE	300	H
SANTA CRUZ	160	T	XAVANTES	34	T
UHE S. DA MESA	877	H	B.L.SOBRINHO	289	T
ITAIPU 50 HZ	5522	H	CELSO FURTADO	131	T
ITAIPU 60 HZ	6039	H	FER.GASPARIAN	261	T
FONTES NOVA	132	H	JUIZ DE FORA	84	T
ILHA POMBOS	174	H	L.C.PRESTES	142	T
NILO PECANHA	337	H	MACAE MERCHAN	834	T

Usinas $j \in J$	Capac. Máx \bar{g}_j	Tipo	Usinas $j \in J$	Capac. Máx \bar{g}_j	Tipo
PEREIRA PASSO	52	H	UT.AUR.CHAVES	226	T
SANTA BRANCA	30	H	UTE CUIABA	72	T
AIMORES	195	H	AGUA VERMELHA	1289	H
AMADORAGUIAR1	227	H	BARIRI	135	H
AMADORAGUIAR2	197	H	BARRA BONITA	128	H
C. DOURADA	535	H	CACONDE	74	H
CANOAS II	80	H	E.CUNHA	95	H
CANOAS II	68	H	IBITINGA	123	H
COCAL	28	B	LIMOEIRO	21	H
CORUMBA IV	129	H	N.AVANHANDAVA	273	H
DAIA	34	T	PROMISSAO	208	H
ESFORA	21	H	CANA BRAVA	376	H
FUNIL GRANDE	180	H	PONTE PEDRA	176	H
GOV.L.BRIZOLA	905	T	U. W.ARJONA	72	T
GUAPORE	54	H	H.BORDEN SUB	47	H
GUILMA AMORIM	132	H	IGARAPAVA	168	H
H.BORDEN EXT	68	H	ITIQUEIRA I	156	H

Tabela 4.3: Sistema Integrado Nacional em 2008 - Sudeste

A capacidade máxima de geração \bar{g}_j de cada gerador $j \in J$ foi fixada no maior valor ofertado por este gerador no período considerado.

Como pode ser visto na tabela 4.3, constam no BMO quatro tipos de geração de energia: biomassa, hidrelétrica, nuclear e termelétrica. São 2 usinas de geração de biomassa e 2 usinas nucleares representando 3% da capacidade do subsistema. A geração hidrelétrica é constituída de 92 usinas que contribui com 85% da capacidade do subsistema e a geração termelétrica possui 18 usinas, colaborando com 12% da capacidade do subsistema.

Considera-se como empresa ofertante a Companhia Energética de São Paulo (CESP). Esta empresa controla 6 usinas hidrelétricas representando 5736 MW de capacidade máxima de geração de energia, totalizando 7,8% da capacidade do sistema nacional e 13% da capacidade do subsistema do sudeste. Na tabela 4.3, os geradores da CESP estão marcados com **.

Portanto, as instâncias utilizadas possuem $|E| = 6$, $|J| = 114$ e $|S| = [10, 25]$. No site da ANEEL verificou-se que cada tipo de geração de energia possui um custo de produção C_t , $t \in (\text{biomassa, hidrelétrica, nuclear e termelétrica})$. Os custos operacionais c_t foram obtidos de forma randômica no intervalo $[0.9C_t, 1.1C_t]$.

4.3 Exemplo: Instância:10,04,02 do Subsistema Sul

Nesta sessão será mostrado um exemplo de instância gerada. Ela está no formato .dat, formato de dados na linguagem de programação matemática A Mathematical Programming Language (AMPL). Para maiores detalhes sobre a linguagem, consultar a documentação no site <http://www.ampl.com/REFS/amplmod.pdf>. O nome da instância representa o número de usinas, seguido do número de geradores da empresa ofertante e do número de cenários respectivamente. Logo, a instância 10,04,02 do subsistema sul possui 10 usinas, 4 pertencentes à empresa ofertante, logo 6 pertencentes às concorrentes e 2 cenários.

```
set Cen := S1 S2;
```

```
set E := E1 E2 E3 E4;
```

```
set NE := C1 C2 C3 C4 C5 C6;
```

```
param:          prob          dem :=
  S1    0.5302640243376435  2214.5
  S2    0.4697359756623565  2050.5;
```

```
param:  maxProdE  cost :=
  E1     29.0     127.0
  E2    344.0     123.0
  E3     99.0     106.0
  E4    124.0    111.0;
```

```
param maxProdC:  C1  C2  C3  C4  C5  C6 :=
  S1          211.0  7.0 111.0 1075.0 169.0 643.0
  S2          194.0  7.0 117.0 1106.0 169.0 624.0;
```

```
param priceC:  C1  C2  C3  C4  C5  C6 :=
  S1          396.0 439.0 144.0 150.0 175.0 146.0
  S2          370.0 465.0 134.0 144.0 130.0 169.0;
```

4.4 O resolvidor Ipopt

IPOPT ou Otimizador de Ponto Interior é um software de código aberto para otimização não-linear em larga escala. Começou como tese de doutorado de Andreas Wächter [32] sendo escrito por Wächter e Carl Laird. Está disponível sob licença

Eclipse Public License (EPL) e requer alguns pacotes de terceiros. É utilizado para problemas NLP da forma geral:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar}_{x \in \mathbb{R}^n} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g_L \leq g(x) \leq g_U, \\ & && x_L \leq x \leq x_U, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Função objetivo $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Restrições $g(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Limite inferior das restrições: $g_L \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^m$.

Limite superior das restrições: $g_U \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^m$.

Limite inferior das variáveis: $x_L \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$.

Limite superior das variáveis: $x_U \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^n$.

As funções $f(x)$ e $g(x)$ podem ser lineares ou não-lineares e convexas ou não-convexas mas precisam ser duplamente continuamente diferenciáveis. O objetivo do software é buscar uma solução local x^* para problemas NLP.

Uma solução x^* é dita ser um ótimo local se existe vizinhança U de x^* tal que $\forall x \in U, f(x) \geq f(x^*)$ se o problema for viável. Caso o problema seja convexo, as soluções locais também são soluções globais.

Inicialmente, o software foi escrito em fortran, mas desde 2005 está disponível em C++. É utilizado em aplicações acadêmicas e industriais e encontra-se hospedado pela fundação Computational Infrastructure for Operations Research (COIN-OR), <https://projects.coin-or.org/Ipopt>, que provê um repositório de software livre para softwares de pesquisa operacional. Pode ser utilizado em qualquer sistema operacional (windows, Linux/Unix, Mac OS X) via:

- Linguagens de modelagem matemática AMPL, GAMS: O Ipopt está disponível como um solucionador (solver) executável. A versão free de estudante do AMPL requer que o problema possua no máximo 300 variáveis e restrições.
- Ambientes de programação (C++, C, Fortran, Matlab, R)

Como software livre, o IPOPT está disponível para uso sem custo mesmo com objetivos comerciais. O código também pode ser modificado, mas para ser redistribuído precisa que as modificações sejam tornadas públicas. Para compilar o IPOPT é necessário código de terceiros como algumas rotinas de álgebra linear: Basic Linear Algebra Subroutines (BLAS), Linear Algebra PACKage (LAPACK), AMPL Solver Library (ASL), MULTifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver (MUMPS), etc.

Neste capítulo iremos apresentar uma visão geral sobre o algoritmo utilizado pelo software. Depois iremos apresentar detalhes do nosso problema ao utilizar o solver Ipopt para solucioná-lo.

O IPOPT utiliza um algoritmo primal-dual de pontos interiores com um método de filtro de busca linear. Precisa que as funções objetivo e as funções que definem as restrições do problema possuam primeira e segunda derivadas. As segundas derivadas podem ser aproximadas pelo método quase-newton, que é menos robusto e frequentemente mais lento.

O problema resolvido pelo solver tem a forma descrita em 4.1 e seu objetivo é encontrar uma solução local para o problema. Maiores detalhes do algoritmo podem ser encontrados em [33]. O solver utiliza também métodos heurísticos para acelerar a execução do algoritmo.

4.5 Resultados numéricos

Para solucionarmos o problema NLP visto em 2.5, foi utilizada a linguagem AMPL e o resolvidor IPOPT versão 3.10.2. A configuração da máquina onde as instâncias foram executadas é: Linux Ubuntu 12.04.5 LTS, processador Intel(R) Xeon(R) CPU X5675 @ 3.07GHz, 48 GB RAM. O tempo de execução foi limitado em 6 horas ou 21600 segundos. Como o IPOPT não garante ótimos globais, resolvemos também o problema MILP (equação 2.6) utilizando o resolvidor CPLEX versão 12.6.0.0 para usarmos quando possível, as soluções ótimas como valores de referência. Maiores detalhes sobre o resolvidor podem ser obtidos em <http://ampl.com/products/solvers/solvers-we-sell/cplex/>.

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos computacionais obtidos utilizando as instâncias do PEP com configuração derivada dos subsistemas sul 4.1 e sudeste 4.2 do Sistema Brasileiro aplicando o modelo NLP visto em 2.5. Foram geradas 62 instâncias para a região sul, sendo 26 instâncias com 8 geradores, 18 instâncias com 9 geradores e 18 instâncias com 10 geradores, e 23 instâncias para a região sudeste, todas com 114 geradores.

Seguem abaixo os resultados encontrados com a solução do problema NLP pelo resolvidor IPOPT sem os procedimentos heurísticos detalhados no capítulo 3. Sejam definidos os valores Z_{MILP} e Z_I representando a melhor saída no tempo limite encontrada pelo CPLEX aplicado ao MILP com ou sem garantia de ser a solução ótima, e a saída do Ipopt aplicado ao NLP respectivamente. Na tabela abaixo listamos as instâncias utilizadas, o número de restrições, o número de variáveis, o tempo de execução, o GAP e o Z_{MILP} . GAP representa a diferença percentual entre o valor Z_I e o valor Z_{MILP} , ou seja, $(Z_{MILP} - Z_I)/Z_{MILP} \times 100\%$ igual a 0% caso o valor encontrado pelo CPLEX e pelo Ipopt sejam iguais. Caso o CPLEX tenha obtido o valor ótimo global, representaremos o valor acrescido de '*', e o GAP nulo representa que o Ipopt conseguiu encontrar um valor ótimo global. O nome da instância está no formato $|J|_|E|_|S|_|index|$ representando o número de empresas J participantes

do PEP, o número de geradores E da empresa ofertante, o número de cenários S . *index* representa cada uma das instâncias geradas com valores aleatórios conforme explicado em 4.1 para cada uma das configurações de $|J|$ - $|E|$ - $|S|$.

Instância	# restrições	# variáveis	tempo (s)	GAP	Z _{MILP}
8.2.2.15	51	36	0,1	30,99	30655,9*
8.2.2.16	51	36	0,1	21,56	27659,2*
8.2.2.17	51	36	0,13	11,53	27814,8*
8.2.2.18	51	36	0,15	0,0	27633,6*
8.2.2.19	51	36	0,1	49,32	33567,9*
8.2.2.20	51	36	0,1	0,0	20634,1*
8.2.3.1	76	53	0,14	0,0	21272,4*
8.2.3.2	76	53	0,15	0,0	24036,8*
8.2.3.3	76	53	0,11	0,0	24060,2*
8.2.3.4	76	53	0,2	31,69	27922,3*
8.2.3.5	76	53	0,15	15,94	23172,7*
8.2.3.7	76	53	0,14	56,26	38291,7*
8.2.3.8	76	53	0,12	15,27	28063*
8.2.3.11	76	53	0,15	19,19	19638,2*
8.2.3.15	76	53	0,13	0,0	23383,8*
8.2.3.16	76	53	0,14	1,82	28572,3*
8.2.3.17	76	53	0,12	0,0	32177,8*
8.2.3.18	76	53	0,15	0,0	24486,3*
8.2.3.19	76	53	0,12	0,0	19954,6*
8.2.3.20	76	53	0,13	0,0	22615,3*
8.2.4.15	101	70	0,17	0,0	21512,9*
8.2.4.16	101	70	0,2	0,0	15081,4*
8.2.4.17	101	70	0,18	0,0	16802,9*
8.2.4.18	101	70	0,19	0,0	23075*
8.2.4.19	101	70	0,18	22,13	28332,3*
8.2.4.20	101	70	0,18	0,0	23993,1*
9.3.2.15	57	41	0,11	37,66	37656,3*
9.3.2.16	57	41	0,12	0,0	21578,7*
9.3.2.17	57	41	0,12	0,0	18908,2*
9.3.2.18	57	41	0,1	24,3	24640,8*
9.3.2.19	57	41	0,1	43,26	43004,8*
9.3.2.20	57	41	0,11	0,0	25649,7*
9.3.3.15	85	60	0,15	2,73	23045,5*
9.3.3.16	85	60	0,18	0,0	17406,5*
9.3.3.17	85	60	0,16	0,0	23646,3*
9.3.3.18	85	60	0,2	0,0	22038,6*
9.3.3.19	85	60	0,22	55,85	51371,8*
9.3.3.20	85	60	0,19	11,39	21574,3*
9.3.4.15	113	79	0,24	0,0	16885*
9.3.4.16	113	79	0,21	0,0	19866,2*
9.3.4.17	113	79	0,19	0,0	33842,5*
9.3.4.18	113	79	0,23	0,0	21555,6*

Instância	# restrições	# variáveis	tempo (s)	GAP	Z _{MILP}
9_3_4_19	113	79	0,2	0,0	21581,8*
9_3_4_20	113	79	0,2	0,0	27912,7*
10_4_2_15	63	46	0,15	58,54	37259,5*
10_4_2_16	63	46	0,13	0,0	23915,5*
10_4_2_17	63	46	0,12	63,66	58938,8*
10_4_2_18	63	46	0,13	0,0	18242,7*
10_4_2_19	63	46	0,1	28,63	25762,6*
10_4_2_20	63	46	0,12	20,46	24139,9*
10_4_3_15	94	67	0,17	0,0	25926,5*
10_4_3_16	94	67	0,23	3,08	23498,4*
10_4_3_17	94	67	0,2	0,0	23931,5*
10_4_3_18	94	67	0,15	0,0	27621,9*
10_4_3_19	94	67	0,2	10,61	25440,6*
10_4_3_20	94	67	0,15	0,0	23214,2*
10_4_4_15	125	88	0,21	0,0	28912,1*
10_4_4_16	125	88	0,25	0,0	23979,4*
10_4_4_17	125	88	0,23	0,0	22286,2*
10_4_4_18	125	88	0,23	0,0	24825,3*
10_4_4_19	125	88	0,21	0,0	28722,6*
10_4_4_20	125	88	0,25	0,69	24402,2*
114_6_10_1	3431	2296	11,14	3,56	369416
114_6_10_2	3431	2296	12,52	26,08	408893
114_6_10_3	3431	2296	12,97	17,64	317285
114_6_10_4	3431	2296	11,72	0,0	297647
114_6_10_5	3431	2296	13,6	15,06	307861
114_6_15_1	5146	3441	19,35	8,72	326827
114_6_15_2	5146	3441	19,82	8,87	337551
114_6_15_3	5146	3441	19,61	-0,01	313287
114_6_15_4	5146	3441	19,38	13,74	372488
114_6_15_5	5146	3441	25,37	26,17	376617
114_6_20_1	6861	4586	47,23	-0,05	299727
114_6_20_2	6861	4586	25,3	24,78	403494
114_6_20_3	6861	4586	24,0	9,31	360925
114_6_20_4	6861	4586	31,57	22,81	320594
114_6_20_5	6861	4586	40,31	31,22	368854
114_6_25_1	8576	5731	46,16	-1,33	307060
114_6_25_2	8576	5731	34,08	12,36	394266
114_6_25_3	8576	5731	41,42	-100,0	0
114_6_25_4	8576	5731	36,32	-0,13	344188
114_6_25_5	8576	5731	30,48	-9,75	280749
114_6_25_6	8576	5731	39,28	-0,02	320767
114_6_25_7	8576	5731	44,87	-1,08	302271
114_6_25_8	8576	5731	38,24	-0,34	272729

Tabela 4.4: Modelo NLP - solver ipopt

Quando aplicado às instâncias menores, o CPLEX conseguiu encontrar os valores

ótimos globais e o Ipopt conseguiu encontrar os valores ótimos locais. Todavia, o Ipopt não encontrou este valor ótimo global para 24 instâncias totalizando 38,71% dos casos analisados para esta região. Ainda para estes dados, o tempo para a execução do otimizador Ipopt não ultrapassou 1 minuto, demonstrando que a dificuldade na obtenção destes resultados é de fato encontrar valores ótimos globais.

O CPLEX não conseguiu calcular o valor ótimo global para nenhuma das instâncias derivadas do subsistema sudeste, as que possuem 114 geradores. Portanto, o GAP foi calculado com o valor encontrado pelo CPLEX limitado a seis horas de execução. Em 39,13% dos casos analisados nesta região, o Ipopt encontrou uma solução melhor que o CPLEX. Repare que a instância 114.6_25_3 possui solução nula encontrada pelo CPLEX, porém o Ipopt encontrou uma solução ótima local igual a 306109. Houve apenas 1 GAP nulo para os resultados do subsistema sudeste. Observe que em alguns casos, o GAP foi negativo, indicando que o MILP não achou a solução ótima no tempo limite, apenas uma solução viável, dada pelo lower bound fornecido pelo CPLEX ao final da execução.

Os resultados acima demonstram a importância de diferentes modelagens matemáticas para o problema do PEP. Enquanto o problema MILP obteve melhores soluções para pequenas instâncias, o modelo NLP mostrou-se eficiente para instâncias bem maiores. Apesar de a melhoria no resultado da função objetivo não ter sido muito expressiva, o tempo gasto pelo Ipopt foi bem inferior ao gasto pelo CPLEX.

4.6 Resultados numéricos utilizando a solução inicial obtida com a Heurística do Preço Nulo

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos computacionais obtidos com o modelo NLP visto em 2.5 quando é utilizada a heurística do preço nulo, cujo algoritmo está descrito em 3.1, para gerar uma solução inicial para o modelo NLP aplicado à cada uma das instâncias analisadas na seção anterior, instâncias do PEP com configuração derivada dos subsistemas sul 4.1 e sudeste 4.2 do Sistema Brasileiro.

Lembrando que o preço final pago às geradoras pelo operador do sistema é o preço ofertado mais alto que foi despachado, o valor marginal. Portanto, várias soluções ótimas são possíveis. Por exemplo, para um dos geradores despachados que não for o valor marginal, sua oferta de preço pode ser alterada para qualquer valor menor que o marginal, o que não altera a função objetivo. Logo, entende-se como melhoria na solução, a obtenção de valores maiores para a função objetivo, ou seja, melhores ótimos locais, ou até a obtenção de ótimos globais, maximizando o lucro

da empresa ofertante.

A heurística do preço nulo consiste em fixar as ofertas de preços iguais a zero, $\lambda_j = 0, j \in E$, para os geradores da empresa ofertante E e resolver o problema seguidor 2.1 para obter os valores das demais variáveis a serem utilizadas na solução inicial, na resolução do modelo NLP do PEP. O algoritmo da heurística foi implementado na linguagem de programação Python para a geração das soluções iniciais e scripts de integração com a linguagem AMPL.

É gerada uma solução inicial para cada instância a fim de analisar se desta forma, o Ipopt obteve melhores resultados e se conseguiu convergir para valores ótimos globais. Lembrando que esta heurística parte de uma solução inicial viável, mas não necessariamente ótima.

Para facilitar a análise dos resultados, eles serão divididos em 4 categorias:

- Z_{MILP} - Melhor solução encontrada pelo CPLEX aplicado ao MILP no tempo limite, com ou sem garantia de ser a solução ótima. Usaremos esta solução como referência. O tempo gasto pelo solver CPLEX é t_{MILP} .
- Z_I - solução encontrada pelo Ipopt, sem fornecimento de solução inicial.
- Z_{hn} - solução encontrada pela heurística do preço nulo. O tempo gasto para resolver o problema seguidor e calcular esta solução é t_{hn} .
- Z_{Ihn} - solução encontrada pelo Ipopt, com solução inicial dada pela heurística do preço nulo. t_{Ihn} mede o tempo utilizado para resolver o problema seguidor somado ao tempo gasto pelo Ipopt.

Para comparar os resultados, sejam definidas as diferenças:

$$GAP_{hn} = (Z_{MILP} - Z_{hn})/Z_{MILP} \times 100\%;$$

$$GAP_{Ihn} = (Z_{MILP} - Z_{Ihn})/Z_{MILP} \times 100\%.$$

Portanto GAP_{hn} avalia a distância entre o valor encontrado pela heurística e o valor encontrado quando aplicado o CPLEX ao MILP. Por sua vez, GAP_{Ihn} analisa o valor encontrado pelo Ipopt ao utilizar a solução inicial dada pela heurística e o valor encontrado pelo CPLEX. Abaixo segue a tabela com estes GAPs.

Instância	GAP_{hn} (%)	GAP_{Ihn} (%)	t_{hn} (s)	t_{Ihn} (s)	t_{MILP} (s)
8.2.2.15	30,99	30,99	0,02	0,14	4,65
8.2.2.16	21,56	21,56	0,02	0,11	2,34
8.2.2.17	11,53	11,53	0,02	0,1	2,1
8.2.2.18	0	0	0,02	0,11	1,89
8.2.2.19	49,32	49,32	0,02	0,13	7,15

Instância	GAP _{hn} (%)	GAP _{Ihn} (%)	t _{hn} (s)	t _{Ihn} (s)	t _{MILP} (s)
8.2.2.20	0	0	0,02	0,1	2,07
8.2.3.1	0	0	0,03	0,14	4,01
8.2.3.2	0	0	0,03	0,16	2,23
8.2.3.3	0	0	0,03	0,13	2,83
8.2.3.4	31,69	31,69	0,03	0,11	6,26
8.2.3.5	16,52	16,52	0,03	0,16	3,4
8.2.3.7	56,26	56,26	0,03	0,18	6,95
8.2.3.8	15,27	15,27	0,03	0,13	8,48
8.2.3.11	19,19	19,19	0,03	0,13	7,05
8.2.3.15	0	0	0,03	0,14	3,59
8.2.3.16	1,82	1,82	0,03	0,13	3,59
8.2.3.17	0	0	0,03	0,12	7,22
8.2.3.18	0	0	0,03	0,15	3,11
8.2.3.19	0	0	0,03	0,13	3,51
8.2.3.20	0	0	0,03	0,15	3,31
8.2.4.15	0	0	0,05	0,15	4,81
8.2.4.16	13,83	13,83	0,04	0,21	5,93
8.2.4.17	0	0	0,04	0,2	10,16
8.2.4.18	0	0	0,04	0,22	7,09
8.2.4.19	22,13	22,13	0,04	0,25	4,98
8.2.4.20	0	0	0,04	0,14	4,51
9.3.2.15	37,66	37,66	0,02	0,12	4,18
9.3.2.16	10,63	0	0,02	0,12	2,23
9.3.2.17	0	0	0,02	0,1	3,49
9.3.2.18	24,3	24,3	0,02	0,14	3,44
9.3.2.19	43,26	43,26	0,02	0,14	5,96
9.3.2.20	0	0	0,02	0,1	4,7
9.3.3.15	2,74	2,74	0,03	0,17	23,92
9.3.3.16	0	0	0,03	0,14	9,42
9.3.3.17	0	0	0,03	0,14	11,2
9.3.3.18	0	0	0,03	0,12	8,27
9.3.3.19	58,68	58,68	0,03	0,18	5,82
9.3.3.20	11,39	11,39	0,03	0,17	17,69
9.3.4.15	0	0	0,04	0,19	39,52
9.3.4.16	0	0	0,04	0,24	20,31
9.3.4.17	0	0	0,05	0,14	25,86
9.3.4.18	12,73	12,73	0,04	0,17	27
9.3.4.19	0	0	0,04	0,2	28,88
9.3.4.20	0	0	0,05	0,2	31,92
10.4.2.15	34,34	34,34	0,02	0,1	8,24
10.4.2.16	0	0	0,02	0,15	18,77
10.4.2.17	63,66	63,66	0,02	0,11	6,15
10.4.2.18	0	0	0,02	0,13	22,8
10.4.2.19	28,63	28,63	0,02	0,13	4,82
10.4.2.20	20,46	20,46	0,02	0,12	5,38
10.4.3.15	0	0	0,03	0,17	46,19

Instância	GAP_{hn} (%)	GAP_{Ihn} (%)	t_{hn} (s)	t_{Ihn} (s)	t_{MILP} (s)
10_4_3_16	0	0	0,03	0,16	43,55
10_4_3_17	0	0	0,03	0,16	46,39
10_4_3_18	0	0	0,04	0,17	26,22
10_4_3_19	10,61	10,61	0,03	0,31	44,69
10_4_3_20	0	0	0,03	0,14	52,42
10_4_4_15	0	0	0,04	0,22	75,41
10_4_4_16	0	0	0,04	0,23	208,99
10_4_4_17	0	0	0,05	0,17	93,62
10_4_4_18	0	0	0,05	0,17	66,69
10_4_4_19	0	0	0,04	1,03	91,31
10_4_4_20	0,69	0,69	0,05	0,15	218,84
114_6_10_1	3,56	3,56	0,36	4,26	21606.7
114_6_10_2	26,09	26,09	0,37	3,84	3616.2
114_6_10_3	17,53	17,53	0,35	4,43	21605.0
114_6_10_4	0	0	0,37	5,1	600.74
114_6_10_5	15,06	15,06	0,36	3,95	21606.9
114_6_15_1	8,85	8,85	0,56	8,4	21617.5
114_6_15_2	8,85	8,85	0,56	9,11	21613.4
114_6_15_3	0	0	0,57	7,99	601.85
114_6_15_4	13,75	13,75	0,53	7,76	21611.5
114_6_15_5	26,17	26,17	0,55	7,47	21609.6
114_6_20_1	0	0	0,73	14,03	21603.1
114_6_20_2	24,79	24,79	0,74	11,46	21632.4
114_6_20_3	9,31	9,31	0,71	15,19	21607.9
114_6_20_4	22,82	22,74	0,71	17,63	21608.4
114_6_20_5	30,99	30,99	0,74	13,4	21605.1
114_6_25_1	-1,33	-1,36	0,94	19,26	621.6
114_6_25_2	12,13	12,13	0,93	19,64	21614.7
114_6_25_3	-100	-100	0,9	47,4	19458.0
114_6_25_4	0	0	0,89	17,95	21605.0
114_6_25_5	-9,64	-9,64	0,94	14,58	21616.7
114_6_25_6	0	0	0,93	22,02	21605.8
114_6_25_7	-0,99	-0,99	0,9	17,08	609.79
114_6_25_8	0	0	0,88	21,07	606.85

Tabela 4.5: Resultado Heurística Preço Nulo

Em 96,47% dos resultados, a solução encontrada pela heurística é igual a encontrada pelo Ipopt quando aplicamos a solução inicial dada pela heurística, mostrando que a solução inicial, na maioria das vezes, é um ponto de ótimo local.

Para a configuração derivada do subsistema sul, o Ipopt convergiu para algum ótimo local para todas as instâncias. Todavia, em um total de 62 instâncias, 25 não encontraram o valor ótimo global, representado 40,32% dos resultados. Este percentual demonstra uma pequena piora em relação à implementação do modelo NLP

sem o uso da heurística, na qual tivemos apenas 38,71% das instâncias encontrando valores ótimos locais, mas não globais.

Este resultado é interessante e comprova o que foi dito no capítulo 2 sobre o valor ofertado nulo. Esta solução representa uma solução viável porém retira da empresa ofertante o poder de controlar o seu lucro.

Para a região sudeste, 26,09% dos casos analisados conseguiram encontrar os GAPS nulos, portanto, o valor encontrado pela heurística foi igual ao encontrado pelo CPLEX em um tempo bem menor.

4.7 Resultados numéricos utilizando soluções iniciais obtidas com a heurística do preço igual ao preço da concorrente

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos computacionais obtidos com o modelo NLP visto em 2.5 quando utilizamos a heurística do preço igual ao preço da concorrente, cujo algoritmo está descrito em 3.2, para gerar diversas soluções iniciais para o modelo NLP aplicado à cada uma das instâncias do PEP com configuração derivada dos subsistemas sul 4.1 e sudeste 4.2 do Sistema Brasileiro.

Iremos diversificar as soluções iniciais a fim de analisar se o resolvedor obtém melhores resultados e se consegue convergir para valores ótimos globais. Também iremos observar o tempo computacional gasto.

A heurística do preço igual ao preço da concorrente consiste em fixar cada oferta de preço igual ao preço ofertado por algum concorrente em algum dos cenários analisados $\lambda_j = \lambda_i^s, j \in E, i \in J - E, s \in S$ para os geradores da empresa ofertante E e resolver o problema seguidor 2.1 para obter os valores das demais variáveis a serem utilizadas na solução inicial. Novamente, o algoritmo da heurística foi implementado na linguagem de programação Python para a geração das soluções iniciais e scripts de integração com a linguagem AMPL.

A heurística consiste em gerar diversas soluções iniciais, sendo que para o cálculo de cada uma destas soluções é necessário resolver $|S|$ problemas seguidores. Portanto, para as 62 instâncias derivadas do subsistema sul, 186 problemas seguidores são resolvidos para a geração de 1 solução inicial para cada instância, enquanto para as 23 instâncias do subsistema sudeste, 425 problemas seguidores são resolvidos.

Como há a geração de n soluções iniciais, serão exibidos o valor médio dos GAPS calculados para cada uma das soluções iniciais e o desvio padrão σ destes valores.

$$GAP_{hc} = (Z_{MILP} - Z_{hc})/Z_{MILP} \times 100\%;$$

$$\overline{GAP}_{hc} = (\sum_{i=1}^n GAP_{hc}^i)/n;$$

$$GAP_{Ihc} = (Z_{MILP} - Z_{Ihc})/Z_{MILP} \times 100\%;$$

$$\overline{GAP}_{Ihc} = (\sum_{i=1}^n GAP_{Ihc}^i)/n;$$

E incluiremos aos resultados duas categorias:

- Z_{hc} - solução encontrada pela heurística do preco concorrente. Como nesta heurística repetimos o processo de geração de soluções iniciais n vezes e cada uma destas gerações considera o tempo gasto para resolver o problema seguidor e calcular a solução da heurística, o tempo gasto total t_{hc} é o somatório de todos estes tempos considerados em cada uma das gerações.
- Z_{Ihc} - solução encontrada pelo Ipopt, com solução inicial dada pela heurística do preco concorrente. t_{Ihc} mede o tempo total que representa o somatório dos tempos utilizado para resolver o problema seguidor somado ao tempo gasto pelo Ipopt para todas as n gerações de soluções iniciais.

Segue abaixo uma comparação das diferenças percentuais encontradas entre os valores descritos acima e o valor de referência obtido pelo CPLEX. Foram geradas 100 soluções iniciais pela heurística, e depois o solver utilizou as mesmas como soluções iniciais para o problema QCQP.

Instância	\overline{GAP}_{hc} (%)	σ_{hc} (%)	GAP_{hc}^{\min} (%)	\overline{GAP}_{Ihc} (%)	σ_{Ihc} (%)	GAP_{Ihc}^{\min} (%)
8_2_2_15	43,65	17,3	11,31	25,12	18,84	0
8_2_2_16	34,11	15,76	5,35	23,67	14,09	0
8_2_2_17	27,5	14,65	9,64	12,35	9,6	0
8_2_2_18	48,35	31,04	0	33,95	32,79	0
8_2_2_19	52,43	17,59	12,31	41,22	22,84	0
8_2_2_20	41,87	32,95	0	31,03	33,54	0
8_2_3_1	41,3	25,66	0	31,01	27,56	0
8_2_3_2	43,33	30,75	0	23,74	29,82	0
8_2_3_3	53,92	32,26	0	35,8	33,27	0
8_2_3_4	37,03	19,98	4,58	25,32	18,57	0
8_2_3_5	37,56	16,02	16,52	23,11	14,13	0
8_2_3_7	52,51	18,67	15	38,77	28,59	0
8_2_3_8	27,79	15,93	4,59	17,64	13,89	0
8_2_3_11	37,94	12,12	19,19	23,96	8,48	0
8_2_3_15	52,68	30,44	0,89	35,25	35,35	0
8_2_3_16	28,71	26,78	0,55	16,33	17,26	0
8_2_3_17	40,04	30,87	0	29,29	29,29	0
8_2_3_18	46,45	27,2	0	32,79	31,22	0
8_2_3_19	30,94	18,01	0	18,29	12,11	0

Instância	$\overline{\text{GAP}}_{\text{hc}}$ (%)	σ_{hc} (%)	$\overline{\text{GAP}}_{\text{hc}}^{\text{min}}$ (%)	$\overline{\text{GAP}}_{\text{Ihc}}$ (%)	σ_{Ihc} (%)	$\overline{\text{GAP}}_{\text{Ihc}}^{\text{min}}$ (%)
8_2.3.20	42,64	34,07	0	36,43	34,25	0
8_2.4.15	39,5	32,55	0	27,79	31,94	0
8_2.4.16	24,13	16,05	0,69	11,43	9,51	0
8_2.4.17	30,86	21,35	0	15,43	12,83	0
8_2.4.18	30,93	17,46	0	13,52	10,28	0
8_2.4.19	30,58	17,59	1,53	19,93	14,09	0
8_2.4.20	26,81	19,94	0	12,24	13,87	0
9_3.2.15	58,92	15,09	20,46	46,36	22,69	0
9_3.2.16	51,35	22,09	3,12	36,64	23,08	0
9_3.2.17	41,42	21,48	7,92	27,04	20,24	0
9_3.2.18	58,62	15,2	16,43	45,48	17,12	0
9_3.2.19	54,82	15,32	7,59	48,01	20,78	0
9_3.2.20	45,69	27,45	0	31,94	26,26	0
9_3.3.15	40,86	18,94	4,32	23,26	16,22	0
9_3.3.16	53,72	22,85	6,21	37,23	25,83	0
9_3.3.17	51,71	24,68	0	34,25	28,41	0
9_3.3.18	53,72	23,17	0	32,48	28,39	0
9_3.3.19	59,09	19,87	5,69	48,32	25,11	0
9_3.3.20	36,63	24,45	4,93	22,19	23,03	0
9_3.4.15	35,07	23,34	5,98	26	20,22	1,16
9_3.4.16	50,92	25,51	0	34,58	28,92	0
9_3.4.17	37,23	23,91	0,85	21,86	22,92	0
9_3.4.18	44,93	22,08	4,58	26,92	22,18	0
9_3.4.19	47,69	18,13	2,71	24,78	20,14	1,3
9_3.4.20	32,47	19,18	4,19	22,92	17,72	3,26
10_4.2.15	49,04	14,07	11,34	39,92	17,06	1,79
10_4.2.16	62,11	24,64	9,88	32,72	30,32	0
10_4.2.17	68,1	19,04	8,75	58,72	28,76	0
10_4.2.18	32,13	26,01	2,71	21,52	23,22	0
10_4.2.19	58,92	19,38	10,22	49,87	22,61	0
10_4.2.20	49,63	15,58	4,01	40,36	15,46	0
10_4.3.15	50,68	20,77	9,54	38,19	20,8	0
10_4.3.16	35,43	13,15	7,52	24,81	13,09	3,08
10_4.3.17	49,73	25,39	3,86	30,67	24,58	0
10_4.3.18	43,97	24,11	5,93	33,24	26,45	0
10_4.3.19	43,75	18,04	3,34	27,32	16,62	0
10_4.3.20	44,3	24,91	4,16	31,43	24,4	0
10_4.4.15	44,65	23,56	1,05	29,24	20,1	0
10_4.4.16	36,1	17,94	0	24,57	18,97	0
10_4.4.17	44,83	23,82	0	32,57	23,67	0
10_4.4.18	51,06	26,22	5,84	34,95	27,8	0
10_4.4.19	42,59	20,75	0,29	29,97	21,8	0
10_4.4.20	36,96	23,04	2,54	25,18	21,8	0
114_6.10.1	13,2	9,38	-1,34	6,67	6,85	-3,29
114_6.10.2	30,82	10,42	-8,1	26	10,52	-12,94
114_6.10.3	32,31	9,98	3,63	27,8	9,73	0,03

Instância	\overline{GAP}_{hc} (%)	σ_{hc} (%)	GAP_{hc}^{min} (%)	\overline{GAP}_{Ihc} (%)	σ_{Ihc} (%)	GAP_{Ihc}^{min} (%)
114.6.10.4	16,3	12,57	0	10,62	10,36	0
114.6.10.5	29,45	11,33	13,31	21,08	8,71	5,21
114.6.15.1	19,42	9,26	4,41	14,21	8,98	-0,47
114.6.15.2	20,39	9,47	8,85	13,93	5,78	4,38
114.6.15.3	15,23	10,9	-0,31	6,36	8,49	-6,85
114.6.15.4	21,37	8,26	-0,7	14,56	8,14	-7,85
114.6.15.5	34,08	8	13,16	28,67	9,3	-0,84
114.6.20.1	16,64	13,34	0	8,09	8,35	-0,05
114.6.20.2	30,94	7,14	9,09	26,15	7,86	-0,38
114.6.20.3	22,69	8,55	9,31	16,66	7,87	-7,09
114.6.20.4	27,51	10,1	-4,72	23	10,96	-12,21
114.6.20.5	33,64	13,25	-6,45	28,56	15,71	-8,45
114.6.25.1	11,97	10,28	-9,31	5,22	8,59	-11,88
114.6.25.2	16,92	11,2	-12,82	10,53	12,18	-19,85
114.6.25.3	-100	0	-100	-100	0	-100
114.6.25.4	16,25	10,75	0,05	8,45	9,45	-8,61
114.6.25.5	10,62	13,51	-9,64	0,19	10,51	-12,27
114.6.25.6	16,14	11,94	0	7,36	7,13	0
114.6.25.7	11,94	10,98	-4,05	3,26	6,52	-6,39
114.6.25.8	17,91	13,92	-0,17	10,18	12,39	-0,42

Tabela 4.6: Análise do GAP para 100 soluções iniciais oriundas da hc

Para todas as instâncias, o Ipopt conseguiu melhorar a solução inicial obtida com a heurística como podemos observar com a diminuição do GAP_{Ihc} em relação ao GAP_{hc} . Lembrando que a heurística analisada anteriormente na Seção 4.6, comportou-se de maneira oposta.

O desvio padrão destes GAPs foi significativo evidenciando a grande variação dos resultados para as diversas soluções iniciais geradas.

Analisando o GAP mínimo encontrado, percebemos uma melhoria nos resultados. Mesmo para os casos em que o CPLEX encontrou solução melhor que o Ipopt, a diferença entre estes valores (GAP_{Ihc}) não ultrapassou 3%. Enquanto a heurística encontrou ótimos globais em 32,26% dos casos, o Ipopt com solução inicial conseguiu encontrá-los para 91,94% dos resultados.

Observando os dados divididos por região, vemos que a região sul conseguiu obter ótimos globais em 91,94% dos resultados utilizando o Ipopt com solução inicial. O Ipopt sem solução inicial só havia conseguido obter ótimos globais para 61,29% dos casos. Se analisarmos apenas a região sudeste, 86,96% dos $GAPs_{Ihc}^{min}$ foram negativos ou nulos, indicando uma solução melhor ou igual aos valores de referência obtidos. Portanto, verifica-se como a geração de uma boa solução inicial pode contribuir para o encontro de ótimos globais, ou melhores ótimos locais quando não se conhece os valores ótimos globais, mesmo utilizando um solver para programação convexa.

Adiante temos uma tabela com a análise de tempo de execução do solver para cálculo das soluções.

Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)	Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)
8_2_2_15	3,57	15,99	4,65	9_3_2_20	3,95	18,78	4,7
8_2_2_16	3,78	14,79	2,34	9_3_3_15	5,6	22,01	23,92
8_2_2_17	3,92	16,27	2,1	9_3_3_16	5,03	23,27	9,42
8_2_2_18	3,61	18,3	1,89	9_3_3_17	5,51	20,26	11,2
8_2_2_19	3,62	15,85	7,15	9_3_3_18	5,24	24,36	8,27
8_2_2_20	3,67	16,03	2,07	9_3_3_19	5,68	23,04	5,82
8_2_3_1	5,37	18,22	4,01	9_3_3_20	5,67	23,56	17,69
8_2_3_2	5,51	20,73	2,23	9_3_4_15	7,73	27,28	39,52
8_2_3_3	5,24	20,76	2,83	9_3_4_16	7,35	26,79	20,31
8_2_3_4	5,68	19,31	6,26	9_3_4_17	7,9	23,9	25,86
8_2_3_5	5,01	19,78	3,4	9_3_4_18	7,41	27,15	27
8_2_3_7	5,52	19,69	6,95	9_3_4_19	7,13	30,71	28,88
8_2_3_8	5,37	17,32	8,48	9_3_4_20	7,52	26,79	31,92
8_2_3_11	5,6	19,76	7,05	10_4_2_15	3,73	19,01	8,24
8_2_3_15	5,39	21,2	3,59	10_4_2_16	3,64	24,02	18,77
8_2_3_16	5,42	17,79	3,59	10_4_2_17	3,84	21,42	6,15
8_2_3_17	5,55	17,14	7,22	10_4_2_18	3,6	19,33	22,8
8_2_3_18	5,26	19,49	3,11	10_4_2_19	3,51	19,04	4,82
8_2_3_19	5,33	17,81	3,51	10_4_2_20	3,76	21,31	5,38
8_2_3_20	5,6	18,45	3,31	10_4_3_15	5,51	24,17	46,19
8_2_4_15	7,2	20,97	4,81	10_4_3_16	6,09	26,53	43,55
8_2_4_16	7,39	25,91	5,93	10_4_3_17	5,66	23,69	46,39
8_2_4_17	7,25	24,18	10,16	10_4_3_18	5,87	23,85	26,22
8_2_4_18	7,23	23,38	7,09	10_4_3_19	5,66	24,1	44,69
8_2_4_19	7,38	24,08	4,98	10_4_3_20	5,43	22,67	52,42
8_2_4_20	7,63	23,98	4,51	10_4_4_15	7,7	28,74	75,41
9_3_2_15	3,54	16,84	4,18	10_4_4_16	8,25	31,07	208,99
9_3_2_16	3,76	20,21	2,23	10_4_4_17	7,04	29,91	93,62
9_3_2_17	3,57	18,37	3,49	10_4_4_18	7,62	28,37	66,69
9_3_2_18	3,59	17,65	3,44	10_4_4_19	7,91	26,37	91,31
9_3_2_19	3,83	16,27	5,96	10_4_4_20	7,65	26,46	218,84
114_6_10_1	421,72	1193,06	21606,7	114_6_20_3	808,08	2867,59	21607,9
114_6_10_2	427,91	1212,27	3616,2	114_6_20_4	796,27	2891,74	21608,4
114_6_10_3	413,39	1242,08	21605	114_6_20_5	839,02	3120,56	21605,1
114_6_10_4	394,56	1083,84	600,74	114_6_25_1	1094,65	4018,88	621,6
114_6_10_5	401,99	1168,87	21606,9	114_6_25_2	1033,02	4319,91	21614,7
114_6_15_1	614,68	1956,48	21617,5	114_6_25_3	983,11	3877,96	19458
114_6_15_2	632,03	2012,41	21613,4	114_6_25_4	1031,54	5616,56	21605
114_6_15_3	624,24	1908,32	601,85	114_6_25_5	1101,96	4004,46	21616,7
114_6_15_4	632,46	2046,06	21611,5	114_6_25_6	1037,29	4177,87	21605,8
114_6_15_5	650,37	2116,78	21609,6	114_6_25_7	1037,4	4096,63	609,79
114_6_20_1	840,44	2820,55	21603,1	114_6_25_8	1000,88	4372,93	606,85

Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)	Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)
114_6_20_2	853,97	2970,8	21632,4				

Tabela 4.7: Análise de tempo para 100 soluções iniciais oriundas da *hc*

O tempo gasto pela heurística foi inferior ao tempo gasto pelo CPLEX em 70,59% dos resultados. E o tempo gasto pelo Ipopt com solução inicial foi menor que o CPLEX em 41,18% dos casos. Se formos considerar apenas as instâncias do sudeste, a frequência em que o solver conseguiu resultados em tempos menores aumenta para 65,22%.

Para verificarmos se também seriam obtidos bons resultados caso o número de soluções iniciais diminuísse, reduzindo o tempo de execução e o esforço computacional, repetimos o processo para um número menor de soluções iniciais. Diminuímos de 100 para 5 soluções iniciais. Ao utilizar um número bem menor de soluções iniciais, há menor esforço computacional para o Ipopt quanto ao número de vezes em que o mesmo é executado.

Instância	\overline{GAP}_{hc} (%)	σ_{hc} (%)	GAP_{hc}^{min} (%)	\overline{GAP}_{Ihc} (%)	σ_{Ihc} (%)	GAP_{Ihc}^{min} (%)
8_2_2_15	26,56	9,61	13,83	13,74	14,3	0
8_2_2_16	45,44	2,43	41,49	26,62	16,94	0
8_2_2_17	25,91	12,42	12,95	12,89	6,86	4,42
8_2_2_18	68,04	21,47	25,84	49,66	31,09	0
8_2_2_19	38,28	19,96	14,13	35,59	19,96	11,74
8_2_2_20	24,89	28,36	0	24,34	28,38	0
8_2_3_1	43,26	25,34	16,23	32,85	29,76	5,08
8_2_3_2	49,23	27,79	21,92	30,36	37,18	0
8_2_3_3	67,37	30,17	25,2	35,66	34,16	0
8_2_3_4	38,67	9,94	21,52	32,54	14,71	6,28
8_2_3_5	32,79	16,12	16,52	12,67	6,34	0
8_2_3_7	55,43	16,93	30,37	38,31	30,86	0
8_2_3_8	23,88	15,45	4,59	17,96	12,05	3,67
8_2_3_11	37,95	6,21	31,68	26,11	5,74	20,87
8_2_3_15	48,76	24,19	16,2	20,79	26,02	3,4
8_2_3_16	23,72	16,27	1,82	16,53	15,02	0
8_2_3_17	36,7	33,83	0	35,27	33,8	0
8_2_3_18	51,03	34,41	9,69	29,19	28,83	0
8_2_3_19	32,78	34,75	2,18	11,93	9,94	0
8_2_3_20	31,61	28,21	0	26,02	25,73	0
8_2_4_15	32,51	23,14	6,07	18,79	29,29	0
8_2_4_16	24,98	10,19	13,04	12,45	7,53	3,69
8_2_4_17	26,18	10,82	8,48	11,24	9,53	4,13
8_2_4_18	32,85	18,47	17,03	9,02	11,05	0
8_2_4_19	30,39	25,44	5,7	17,22	15,49	0

Instância	$\overline{\text{GAP}}_{\text{hc}}$ (%)	σ_{hc} (%)	$\overline{\text{GAP}}_{\text{hc}}^{\text{min}}$ (%)	$\overline{\text{GAP}}_{\text{Ihc}}$ (%)	σ_{Ihc} (%)	$\overline{\text{GAP}}_{\text{Ihc}}^{\text{min}}$ (%)
8_2_4_20	16,53	11,29	4,76	11,45	11,47	0
9_3_2_15	44,72	14,1	20,47	38,65	17,94	4,22
9_3_2_16	56,53	22,23	20,54	39,59	15,83	17,87
9_3_2_17	48,65	14,2	27,14	38,11	22,14	7,67
9_3_2_18	59,37	7,04	49,63	54,18	8,43	43,5
9_3_2_19	53,87	1,09	52,96	51,93	4,45	43,26
9_3_2_20	45,44	14,14	19,76	27,9	20,07	0
9_3_3_15	25,13	23,87	5,86	14,14	22,8	2,74
9_3_3_16	50,24	26,68	22,65	43,08	32,68	0
9_3_3_17	38,83	25,85	7,88	23,37	28,68	0
9_3_3_18	37,64	22,98	18,57	29,44	26,72	0
9_3_3_19	64,08	3,57	59,62	61,03	3	55,96
9_3_3_20	41,05	22,81	14,88	28,54	28,18	4,61
9_3_4_15	28,31	9,19	16,01	21,59	13,66	1,32
9_3_4_16	52,07	19,8	25,23	35,05	28,74	0
9_3_4_17	42,02	25,93	0	34,18	21,95	0
9_3_4_18	47,33	19,67	23,85	16,89	9,2	0
9_3_4_19	41,57	10,32	34,28	32,32	15,01	17,37
9_3_4_20	28,23	17,42	13,39	20,92	20,25	3,65
10_4_2_15	40,71	15,85	11,63	35,42	16,44	3,62
10_4_2_16	65,89	21,32	23,63	49,94	28,98	14,61
10_4_2_17	67,44	19,5	29,02	56,22	28,3	0
10_4_2_18	62,55	9,51	53,99	46,05	26,6	14,74
10_4_2_19	48,15	14,05	22,41	40,76	18,51	4,83
10_4_2_20	56,42	4,14	51,24	51,69	8,31	36,13
10_4_3_15	49,77	11,77	37,5	25,8	3,58	20,21
10_4_3_16	33,73	9,19	24,31	26,71	8,12	18,65
10_4_3_17	58,07	17,61	44,75	34,84	20,83	0
10_4_3_18	42,6	30,56	5,9	34,82	35,73	0
10_4_3_19	33,56	12,87	12,79	22,31	16,5	0
10_4_3_20	46,97	19	23,99	32,32	28,76	0
10_4_4_15	49,19	17,75	15,72	35,25	17,88	12,95
10_4_4_16	27,16	11,87	13,09	19,19	9,84	6,92
10_4_4_17	31,9	4,24	25,52	21,85	10,89	1,82
10_4_4_18	26,46	13,99	10,75	10,68	12,79	0
10_4_4_19	23,38	21,45	4,27	15,53	18,37	0
10_4_4_20	33	26,36	9,47	26,46	25,98	0,69
114_6_10_1	21,34	6,21	13,19	13,31	8,56	3,56
114_6_10_2	31,03	14,54	3,73	23,18	15,95	-6,65
114_6_10_3	28,8	5,75	17,54	24,46	6,6	11,26
114_6_10_4	25,57	13	14,96	16,49	8,63	5,48
114_6_10_5	23,45	10,5	14,29	12,72	7,25	0,85
114_6_15_1	13,4	6,04	9,2	10,12	4,46	7,09
114_6_15_2	16,76	6,21	9,57	10,96	1,67	8,87
114_6_15_3	17,14	8,88	5,17	9,76	7,92	0,54
114_6_15_4	23,29	6,37	14,88	18,74	6,43	13,75

Instância	$\overline{\text{GAP}}_{hc}$ (%)	σ_{hc} (%)	GAP_{hc}^{\min} (%)	$\overline{\text{GAP}}_{Ihc}$ (%)	σ_{Ihc} (%)	GAP_{Ihc}^{\min} (%)
114.6.15.5	37,91	2,27	34,75	33,41	5,25	26,99
114.6.20.1	29,32	8,6	18,07	13,92	8,3	1,42
114.6.20.2	30,58	3,39	24,94	28,97	3,45	24,79
114.6.20.3	18,65	9,59	9,31	17,01	8,37	9,31
114.6.20.4	31,31	10,67	22,82	26,25	5,09	22,65
114.6.20.5	29,5	16,31	6	20,78	22,82	-10,89
114.6.25.1	15,63	7,51	4,66	4,6	5,58	0,26
114.6.25.2	14,46	6,2	7,14	13,2	6,83	6,44
114.6.25.3	-100	0	-100	-100	0	-100
114.6.25.4	28,16	6,27	20,76	18,18	8,23	1,94
114.6.25.5	4,56	8,84	-5,87	-3,2	8,04	-9,73
114.6.25.6	18,15	5,43	12,96	8,42	5,66	1,68
114.6.25.7	10,62	11,14	-0,65	5,41	9,41	-6,07
114.6.25.8	10,4	8,72	0,6	3,44	6,67	-0,33

Tabela 4.8: Análise do GAP para 5 soluções iniciais oriundas da hc

Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)	Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)
8_2.2.15	0,87	1,88	4,65	9_3.2.20	0,94	2,05	4,7
8_2.2.16	0,96	2,29	2,34	9_3.3.15	1,43	3,9	23,92
8_2.2.17	1,1	2,18	2,1	9_3.3.16	1,37	3,55	9,42
8_2.2.18	0,95	2,16	1,89	9_3.3.17	1,22	2,79	11,2
8_2.2.19	0,95	2,18	7,15	9_3.3.18	1,19	2,82	8,27
8_2.2.20	0,8	2,3	2,07	9_3.3.19	1,35	3,18	5,82
8_2.3.1	1,53	2,92	4,01	9_3.3.20	1,43	3,06	17,69
8_2.3.2	1,19	2,73	2,23	9_3.4.15	1,81	3,77	39,52
8_2.3.3	1,28	3,25	2,83	9_3.4.16	1,86	3,9	20,31
8_2.3.4	1,55	3,21	6,26	9_3.4.17	2,03	4,18	25,86
8_2.3.5	1,5	3,14	3,4	9_3.4.18	1,79	4,25	27
8_2.3.7	1,28	2,9	6,95	9_3.4.19	1,82	3,83	28,88
8_2.3.8	1,42	2,52	8,48	9_3.4.20	1,85	3,94	31,92
8_2.3.11	1,42	3,35	7,05	10_4.2.15	0,9	2,34	8,24
8_2.3.15	1,26	2,96	3,59	10_4.2.16	0,96	3,36	18,77
8_2.3.16	1,46	3,33	3,59	10_4.2.17	0,98	2,67	6,15
8_2.3.17	1,54	2,82	7,22	10_4.2.18	0,9	2,63	22,8
8_2.3.18	1,4	3,06	3,11	10_4.2.19	0,89	2,39	4,82
8_2.3.19	1,46	2,93	3,51	10_4.2.20	0,94	2,65	5,38
8_2.3.20	1,31	2,48	3,31	10_4.3.15	1,43	3,27	46,19
8_2.4.15	1,83	3,61	4,81	10_4.3.16	1,3	3,28	43,55
8_2.4.16	1,77	3,6	5,93	10_4.3.17	1,38	3,19	46,39
8_2.4.17	1,77	3,69	10,16	10_4.3.18	1,28	3,14	26,22
8_2.4.18	1,73	3,69	7,09	10_4.3.19	1,54	3,63	44,69
8_2.4.19	1,91	3,67	4,98	10_4.3.20	1,37	3,03	52,42
8_2.4.20	1,6	2,9	4,51	10_4.4.15	2,14	4,95	75,41

Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)	Instância	t_{hc} (s)	t_{Ihc} (s)	t_{MILP} (s)
9_3_2_15	0,87	2,17	4,18	10_4_4_16	2,07	4,3	208,99
9_3_2_16	1,2	2,62	2,23	10_4_4_17	1,77	3,9	93,62
9_3_2_17	0,85	2,81	3,49	10_4_4_18	1,91	4,14	66,69
9_3_2_18	0,81	2,62	3,44	10_4_4_19	2,01	4,17	91,31
9_3_2_19	0,86	1,96	5,96	10_4_4_20	1,99	3,89	218,84
114_6_10_1	6,94	60,59	21606,7	114_6_20_3	14,16	308,21	21607,9
114_6_10_2	7,44	85,58	3616,2	114_6_20_4	15,51	208,38	21608,4
114_6_10_3	7,14	83,87	21605	114_6_20_5	14,76	321,48	21605,1
114_6_10_4	7,52	85,07	600,74	114_6_25_1	20,53	376,11	621,6
114_6_10_5	8,19	112,1	21606,9	114_6_25_2	19,15	565,85	21614,7
114_6_15_1	11,17	181,12	21617,5	114_6_25_3	18,76	337,92	19458
114_6_15_2	12,24	187,2	21613,4	114_6_25_4	19,4	413,67	21605
114_6_15_3	12,25	158,67	601,85	114_6_25_5	18,28	403,42	21616,7
114_6_15_4	11,09	169,2	21611,5	114_6_25_6	18,27	331,94	21605,8
114_6_15_5	11,33	160,77	21609,6	114_6_25_7	18,03	232,03	609,79
114_6_20_1	15,53	271,93	21603,1	114_6_25_8	17,66	472,2	606,85
114_6_20_2	15,64	209,24	21632,4				

Tabela 4.9: Análise de tempo para 5 soluções iniciais oriundas da *hc*

A solução inicial contribuiu para o solver Ipopt encontrar melhores soluções ótimas, aproximando-se aos valores encontrados pelo CPLEX, porém os resultados não foram tão impressionantes quanto os resultados anteriores. Enquanto a heurística encontrou ótimos globais em 4,71% dos casos, o Ipopt com solução inicial conseguiu encontrá-los para 36,47% dos resultados. Desconsiderando os casos em que a própria heurística já gerava uma solução ótima global, em 98,75% dos casos o Ipopt conseguiu melhorar a solução inicial encontrando uma solução ótima e melhor.

O tempo da heurística foi menor que o do CPLEX em todos os casos analisados. O tempo do Ipopt com solução inicial também foi inferior ao tempo do CPLEX em 92,94% dos resultados.

4.8 Comparação entre a heurística do preço nulo e a heurística do preço concorrente

Neste capítulo iremos comparar os resultados obtidos com o Ipopt usando as soluções iniciais geradas pelos procedimentos heurísticos descritos no capítulo 3, heurística do preço nulo *hn* e heurística do preço concorrente *hc*, em relação aos resultados obtidos pelo Ipopt sem o uso de solução inicial para o seu algoritmo. as diferenças entre as soluções serão definidas da seguinte forma:

$$GAP_{Ihn} = (Z_{Ihn} - Z_I) / Z_{Ihn} \times 100\%;$$

$$GAP_{Ihc} = (Z_{Ihc} - Z_I) / Z_{Ihc} \times 100\%.$$

A tabela abaixo exibe os resultados, constando o menor GAP_{Ihc} encontrado para as diversas soluções iniciais geradas. Foram geradas 100 soluções iniciais geradas pela hc .

Instância	GAP_{Ihn} (%)	GAP_{Ihc}^{\min} (%)	Instância	GAP_{Ihn} (%)	GAP_{Ihc}^{\min} (%)
8_2_2.15	0	-44,9	9_3_2.20	0	0
8_2_2.16	0	-27,49	9_3_3.15	0,02	-2,8
8_2_2.17	0	-13,03	9_3_3.16	0	0
8_2_2.18	0	0	9_3_3.17	0	0
8_2_2.19	0	-97,31	9_3_3.18	0	0
8_2_2.20	0	0	9_3_3.19	6,4	-126,5
8_2_3.1	0	0	9_3_3.20	0	-12,86
8_2_3.2	0	0	9_3_4.15	0	1,16
8_2_3.3	0	0	9_3_4.16	0	0
8_2_3.4	0	-46,38	9_3_4.17	0	0
8_2_3.5	0,69	-18,96	9_3_4.18	12,73	0
8_2_3.7	0	-128,6	9_3_4.19	0	1,3
8_2_3.8	0	-18,02	9_3_4.20	0	3,26
8_2_3.11	0	-23,75	10_4_2.15	-58,36	-136,85
8_2_3.15	0	0	10_4_2.16	0	0
8_2_3.16	0	-1,85	10_4_2.17	0	-175,17
8_2_3.17	0	0	10_4_2.18	0	0
8_2_3.18	0	0	10_4_2.19	0	-40,11
8_2_3.19	0	0	10_4_2.20	0	-25,73
8_2_3.20	0	0	10_4_3.15	0	0
8_2_4.15	0	0	10_4_3.16	-3,18	0
8_2_4.16	13,83	0	10_4_3.17	0	0
8_2_4.17	0	0	10_4_3.18	0	0
8_2_4.18	0	0	10_4_3.19	0	-11,86
8_2_4.19	0	-28,42	10_4_3.20	0	0
8_2_4.20	0	0	10_4_4.15	0	0
9_3_2.15	0	-60,4	10_4_4.16	0	0
9_3_2.16	0	0	10_4_4.17	0	0
9_3_2.17	0	0	10_4_4.18	0	0
9_3_2.18	0	-32,09	10_4_4.19	0	0
9_3_2.19	0	-76,24	10_4_4.20	0	-0,7
114_6.10.1	0	-7,11	114_6.20.3	0	-18,08
114_6.10.2	0,01	-52,79	114_6.20.4	-0,08	-45,36
114_6.10.3	-0,14	-38,13	114_6.20.5	-0,34	-57,68
114_6.10.4	0	0	114_6.25.1	-0,03	-10,4
114_6.10.5	0	-11,6	114_6.25.2	-0,26	-36,76
114_6.15.1	0,13	-10,07	114_6.25.3	-0,06	-29,08
114_6.15.2	-0,03	-4,92	114_6.25.4	0,13	-8,47
114_6.15.3	0,01	-6,84	114_6.25.5	0,1	-2,3

Instância	GAP_{Ihn} (%)	GAP_{Ihc}^{\min} (%)	Instância	GAP_{Ihn} (%)	GAP_{Ihc}^{\min} (%)
114_6_15_4	0,01	-25,03	114_6_25_6	0,02	0,02
114_6_15_5	0	-36,59	114_6_25_7	0,09	-5,26
114_6_20_1	0,05	0,01	114_6_25_8	0,33	-0,09
114_6_20_2	0,01	-33,46			

Tabela 4.10: Heurística Preço Nulo X Heurística Preço Concorrente - 100 soluções

O maior GAP encontrado para hn foi de 13,83%, enquanto para hc foi de 3,26%. Este resultado apesar de discreto mostra que mesmo quando o Ipopt sem solução inicial encontra ótimos locais melhores que Z_{Ihc} , esta diferença é muito pequena. O menor GAP encontrado para hn foi de -58,36%, enquanto para hc foi de -175,17%. Isto demonstra que ambas as heurísticas conseguiram ganhos consideráveis para alguns resultados.

Agora vamos analisar a frequência de GAPs nulos, GAPs melhores e GAPs piores das duas heurísticas. Os GAPs nulos representam a manutenção dos resultados obtidos pelo Ipopt com e sem solução inicial. Os GAPs melhores demonstram em que parcela dos resultados obtivemos maior aproximação dos valores ótimos aos valores de referência. Os GAPs piores por sua vez demonstram a parcela dos resultados onde os valores ótimos obtidos pelo Ipopt sem o uso de soluções iniciais foi melhor do que quando utilizamos as soluções iniciais aplicadas ao solver.

	Ihn (%)	Ihc (%)
GAPs Nulos	70,59	43,53
GAPs Melhores	10,59	50,59
GAPs Piores	18,82	5,88

Tabela 4.11: Comparação dos GAPs Ihn e Ihc

A heurística do preço nulo hn representou uma discreta melhoria ao Ipopt, 10,59% dos resultados melhoraram ao iniciar da sua solução enquanto 70,59%, se mantiveram. Já para a heurística do preço concorrente hc , a maior parte dos resultados, 50,59%, melhorou com o uso da mesma, enquanto uma parcela muito pequena não obteve ganho com o seu uso, apenas 5,88% dos resultados.

Se fizermos esta mesma comparação por região, observamos uma grande melhoria para a região sudeste, onde a quantidade de geradores é bem maior e, consequentemente, o tamanho do problema também.

	Ihn (%)	Ihc (%)
GAPs Nulos	21,74	4,35
GAPs Melhores	30,43	86,96
GAPs Piores	47,83	8,70

Tabela 4.12: Comparação dos GAPs *Ihn* e *Ihc* para o subsistema sudeste

A quantidade de vezes que as duas heurísticas contribuíram para que o Ipopot encontrasse melhores ótimos locais foi ainda maior para as duas heurísticas. Porém, a heurística *hc* melhorou o resultado obtido pelo Ipopot na maioria dos dados analisados, 86,96%.

Comparando o Ipopot ao utilizar as soluções geradas pelas heurísticas *hn* e *hc*, o GAP diminuiu ou se manteve em 95,29% dos resultados do *Ihc* em relação ao *Ihn*.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, apresentamos uma busca de ótimos locais para um problema não convexo de estratégia de preços em mercados de energia. No capítulo 2, o PEP foi descrito e foi introduzida a sua formulação sob incerteza. Apresentamos uma revisão bibliográfica do PEP e três modelagens matemáticas para o mesmo. A primeira modelagem foi um PPDN, onde o problema líder representa o interesse da empresa ofertante que quer maximizar seu lucro, enquanto o problema seguidor caracteriza o interesse do agente do sistema que quer minimizar o seu custo. A segunda modelagem foi um NLP, não-convexo e quadrático com restrições quadráticas. A terceira e última modelagem foi um MILP e foi obtido através da substituição de algumas variáveis do modelo anterior por variáveis inteiras. Este modelo foi utilizado para obter valores de referência para a função objetivo e melhor observação dos resultados.

Como o problema é de difícil resolução, foram propostas duas heurísticas para resolvê-lo no Capítulo 3. Ambas as heurísticas, geraram soluções viáveis para o problema. A primeira heurística apresentada, Preço Nulo, hn , foi a mais intuitiva. Na prática, a empresa que quer garantir sua participação no mercado de energia, poderia fazer todas as suas ofertas de preço iguais a zero. A segunda, foi a heurística do preço de alguma concorrente, hc , prevalecendo-se do teorema 1 demonstrado na Seção 3.4.

O estudo consistiu na análise de ótimos locais obtidos pelo solver de programação não linear convexa Ipopt, quando aplicados ao modelo de programação quadrática com restrições quadráticas não-convexo. Para obter os valores de referência utilizamos o solver CPLEX aplicado ao modelo de programação inteira linear mista. Os resultados foram apresentados no Capítulo 4. Para a obtenção dos resultados numéricos foram utilizadas instâncias teste baseadas no sistema elétrico brasileiro. Neste capítulo, descrevemos a forma como estas instâncias foram geradas. Foi observado como os ótimos locais obtidos pelo Ipopt são afetados pela qualidade de suas soluções iniciais, utilizando as soluções obtidas por nossas heurísticas como

pontos de partida para o algoritmo no Ipopt. Finalmente, as abordagens heurísticas propostas neste trabalho foram comparadas.

Utilizou-se dois conjuntos de dados. O primeiro derivou-se do subsistema sul do sistema brasileiro e possuía uma quantidade bem menor de geradores participantes e cenários analisados, enquanto o segundo foi derivado do subsistema sudeste e possuía complexidade computacional bem maior devido à grande quantidade de restrições e variáveis. O CPLEX conseguiu encontrar valores ótimos globais quando aplicadas as instâncias da região sul, porém para a região sudeste, foram utilizadas as melhores soluções dadas pelo lower bound fornecido pelo CPLEX ao final da execução no tempo limite de 6 horas.

O modelo NLP comportou-se de maneira mais satisfatória que o modelo MILP quando o tamanho do problema cresceu. Os ótimos locais obtidos com a configuração sudeste foram melhores que as soluções obtidas com o CPLEX em tempo bem menor.

Foi possível observar que os ótimos locais são diretamente afetados pela qualidade de sua solução inicial. A heurística *hn* não mostrou-se eficiente para melhorar os ótimos locais obtidos, diminuindo sua diferença em relação aos ótimos globais. Contudo, esta heurística mostrou-se fundamental para a obtenção de alguma solução quando a quantidade de variáveis e restrições aumentou muito. Os ótimos locais obtidos pela própria heurística para as instâncias maiores foram próximos aos obtidos pelo MILP, em alguns casos, foram até melhores, e o tempo de execução do Ipopt foi muito inferior ao tempo do CPLEX.

A segunda heurística confirmou a importância da qualidade das soluções iniciais. Foram geradas diversas soluções para serem utilizadas como soluções iniciais para o Ipopt. Ao utilizar estas soluções, para todas as instâncias analisadas foram obtidos ótimos locais próximos aos valores de referência. A diferença entre o ótimo local e o ótimo de referência não ultrapassou 3%. Para as instâncias maiores, houve melhoria no tempo de execução do solver também. O Ipopt com solução inicial encontrou resultados iguais aos obtidos pelo CPLEX em tempo muito menor.

A heurística do preço de alguma concorrente mostrou-se bem mais eficiente que a heurística do preço nulo quando observamos o comportamento dos ótimos locais e para uma quantidade suficiente de geração de soluções iniciais. Quando diminuimos esta quantidade, foi possível observar que para a maior parte das instâncias analisadas, o Ipopt obteve melhores resultados sem o uso da heurística. Ainda assim, tivemos melhores ótimos locais em 29,42% dos casos. Portanto, dependendo do tempo e dos recursos computacionais disponíveis, uma boa abordagem seria a comparação dos valores obtidos pelas heurísticas e do Ipopt com e sem o uso das soluções iniciais, obtendo o melhor valor encontrado pelos três procedimentos.

As dificuldades para a obtenção dos resultados numéricos foram de ordem computacional. Quando a complexidade computacional do problema era muito grande,

para alguns problemas tivemos estouro de memória. Para outros, o tempo de execução era o problema. Portanto, tivemos que diminuir o tempo limite para o CPLEX a fim de obter alguma solução. Em alguns casos, precisamos alterar também a quantidade de iterações máximas do algoritmo para o Ipopt, que mesmo em tempo baixo, era interrompido pelo limite de iterações. A forma como os resultados foram exibidos pelo solver também dependeu do tamanho do problema, dificultando a obtenção destes valores pelo script em python. Em alguns casos o Ipopt encontrava soluções erradas por causa de erros de arredondamento, logo as restrições eram violadas e o solver não identificava esta violação. Para solucionarmos este problema, foi desabilitado o fator para relaxação inicial dos limites.

Referências Bibliográficas

- [1] W. Pimentel, “Um estudo de um problema de programação em dois níveis: o problema de estratégia de preço sob incerteza em mercado de energia,” Tese de D.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2014.
- [2] A. Ramos, M. Ventosa, and M. Rivier, “Modeling competition in electric energy markets by equilibrium constraints,” *Utilities Policy*, vol. 7, no. 4, pp. 233 – 242, 1999.
- [3] A. J. Conejo and F. J. Prieto, “Mathematical programming and electricity markets,” *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa TOP*, vol. 9, no. 1, pp. 1 – 53, 2001.
- [4] A. J. Conejo, J. Contreras, J. M. Arroyo, and S. De la Torre, “Optimal response of an oligopolistic generating company to a competitive pool-based electric power market,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 17, no. 2, pp. 424–430, 2002.
- [5] B. F. Hobbs, “Linear complementarity models of nash-cournot competition in bilateral and poolco power markets,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 2, pp. 194–202, 2001.
- [6] B. F. Hobbs and U. Helman, “Complementarity-based equilibrium modeling for electric power markets,” 2003.
- [7] J. Bushnell, “A mixed complementarity model of hydrothermal electricity competition in the western united states,” *Operations research*, vol. 51, no. 1, pp. 80–93, 2003.
- [8] A. Baillo, M. Ventosa, M. Rivier, and A. Ramos, “Optimal offering strategies for generation companies operating in electricity spot markets,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 2, pp. 745–753, 2004.
- [9] S. de la Torre, J. M. Arroyo, A. J. Conejo, and J. Contreras, “Price maker self-scheduling in a pool-based electricity market: a mixed-integer lp ap-

- proach,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 17, no. 4, pp. 1037–1042, 2002.
- [10] W. Pimentel, E. de Adrianpolis, S. Rita, and M. Fampa, “A genetic algorithm to the strategic pricing problem in competitive electricity markets,” *Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SBPO, Rio de Janeiro, Brazil*, pp. 3684–3692, 2012.
- [11] M. Fampa and W. Pimentel, “An application of genetic algorithm to a bidding problem in electricity markets,” *International Transactions in Operational Research*, vol. 22, no. 1, pp. 97–111, 2015.
- [12] M. H. Fampa, W. A. Melo, and N. Maculan, “Semidefinite relaxation for linear programs with equilibrium constraints,” *International Transactions in Operational Research*, vol. 20, no. 2, pp. 201–212, 2013.
- [13] M. H. Fampa and W. Pimentel, *Semidefinite relaxation for a strategic pricing bilevel problem in electricity markets*. Proceedings of SBPO/CLAIO, 2013.
- [14] ———, *A cutting plane algorithm for bounding a strategic pricing problem in electricity markets*. Proceedings of SBPO/CLAIO, 2014.
- [15] D. Fudenberg and J. Tirole, “Game theory,” 1996.
- [16] K. G. Dastidar, “On the existence of pure strategy bertrand equilibrium,” *Economic Theory*, vol. 5, no. 1, pp. pp. 19–32, 1995.
- [17] S. Hunt, *Making competition work in electricity*. John Wiley & Sons, 2002, vol. 146.
- [18] M. Fampa, L. A. Barroso, D. Candal, and L. Simonetti, “Bilevel optimization applied to strategic pricing in competitive electricity markets,” *Computational Optimization and Applications*, vol. 39, no. 2, pp. 121–142, 2008.
- [19] R. H. Kwon and D. Frances, “Optimization-based bidding in day-ahead electricity auction markets: A review of models for power producers,” in *Handbook of networks in power systems i*, A. sorokin et al, Ed. Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 41–59.
- [20] S. de la Torre, J. Arroyo, A. Conejo, and J. Contreras, “Price maker self-scheduling in a pool-based electricity market: a mixed-integer lp approach,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 17, no. 4, pp. 1037–1042, Nov 2002.

- [21] A. Baillo, M. Ventosa, M. Rivier, and A. Ramos, “Optimal offering strategies for generation companies operating in electricity spot markets,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 2, pp. 745–753, May 2004.
- [22] M. Labbé, P. Marcotte, and G. Savard, “On a class of bilevel problems,” in *Nonlinear Optimization and Related Topics*, G. Di Pillo, Ed. Kluwer Academic, 2000, pp. 183–206.
- [23] J. Weber and T. Overbye, “An individual welfare maximization algorithm for electricity markets,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 17, no. 3, pp. 590–596, Aug 2002.
- [24] B. Hobbs, C. Metzler, and J.-S. Pang, “Strategic gaming analysis for electric power systems: an mpec approach,” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 15, no. 2, pp. 638–645, May 2000.
- [25] J. Bard, “Some properties of the bilevel programming problem,” *Journal of optimization theory and applications*, vol. 68, no. 2, pp. 371–378, 1991.
- [26] O. Ben-Ayed and C. E. Blair, “Computational difficulties of bilevel linear programming,” *Operations Research*, vol. 38, no. 3, pp. pp. 556–560, 1990.
- [27] E. Balas and P. Toth, “Branch and bound methods for the traveling salesman problem,” DTIC Document, Tech. Rep., 1983.
- [28] R. Fletcher and S. Leyffer, “Solving mixed integer nonlinear programs by outer approximation,” *Mathematical programming*, vol. 66, no. 1-3, pp. 327–349, 1994.
- [29] L. Brotcorne, M. Labbé, P. Marcotte, and G. Savard, “A bilevel model and solution algorithm for a freight tariff-setting problem,” *Transportation Science*, vol. 34, no. 3, pp. 289–302, 2000.
- [30] M. Labbé, P. Marcotte, and G. Savard, “A bilevel model of taxation and its application to optimal highway pricing,” *Management science*, vol. 44, no. 12-part-1, pp. 1608–1622, 1998.
- [31] S. Vigerske and A. Wächter, “Introduction to ipopt: A tutorial for downloading, installing, and using ipopt,” dec 2013. [Online]. Available: <https://projects.coin-or.org/Ipopt/browser/stable/3.11/Ipopt/doc/documentation.pdf?format=raw>
- [32] A. Wächter, “An interior point algorithm for large-scale nonlinear optimization with applications in process engineering,” Tese de D.Sc., Carnegie Mellon University, USA, 2002.

- [33] A. Wächter and L. T. Biegler, “On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming,” *Mathematical programming*, vol. 106, no. 1, pp. 25–57, 2006.