Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

COPPE UFRJ

SOBRE L(2,1)-COLORAÇÕES DE GENERALIZAÇÕES DE ÁRVORES

Gabriel Ferreira Barros

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Dezembro de 2015

SOBRE L(2,1)-COLORAÇÕES DE GENERALIZAÇÕES DE ÁRVORES

Gabriel Ferreira Barros

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Profa. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Profa. Maria Aguieiras Alvarez de Freitas, D.Sc.

Prof. Fábio Protti, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2015

Barros, Gabriel Ferreira

Sobre L(2,1)-Colorações de Generalizações de Árvores/Gabriel Ferreira Barros. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2015.

IX, 80 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 80.

1. Coloração de Grafos. 2. L(2,1)-Coloração de Grafos. 3. Problema da Atribuição de Frequências. I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Aos meus pais, Paulo Roberto e
Conceição de Maria.

Agradecimentos

Aos meus pais, Paulo Roberto e Conceição de Maria, por tudo (aqui é impossível enumerar motivos para a gratidão).

A minha orientadora, Profa. Márcia Cerioli, pelo incentivo e orientação nos estudos e na pesquisa. Obrigado por, na graduação, orientar minha iniciação científica e, desde os tempos de graduação até o presente momento, pelos ensinamentos sobre como fazer pesquisa e divulgar seus resultados. Na parte menos acadêmica, obrigado pela preocupação e pela paciência.

A Daniel Posner, pela contribuição fundamental para a minha pesquisa, desde a iniciação científica, em que foi meu coorientador, até o presente. Sua maturidade no assunto foi muito importante para o meu progresso. Obrigado também por participar da revisão do texto desta dissertação.

À Profa. Maria Aguieiras de Freitas e ao Prof. Fábio Protti, por aceitarem o convite para participarem da banca examinadora e pelas sugestões de melhoria do texto.

Aos colegas do Laboratório de Algoritmos e Combinatória, por proporcionarem um ambiente amigável e "graficamente teórico" (uma tentativa de adjetivar "Teoria dos Grafos") de convívio.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa de mestrado concedida.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOBRE L(2,1)-COLORAÇÕES DE GENERALIZAÇÕES DE ÁRVORES

Gabriel Ferreira Barros

Dezembro/2015

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma $L(2,1)$-coloração de um grafo é uma atribuição de inteiros não negativos, também referidos como cores, a seus vértices tal que vértices adjacentes recebem cores cuja diferença é pelo menos dois e vértices com um vizinho em comum recebem cores diferentes. A diferença entre a maior e a menor cor atribuída é denominada o comprimento da $L(2,1)$-coloração. O problema da $L(2,1)$-coloração consiste em calcular o número $L(2,1)$-cromático de um dado grafo, que equivale ao menor dentre os comprimentos de todas as suas $L(2,1)$-colorações. Inspirada na prova do limite superior justo para o número $L(2,1)$-cromático de árvores, esta dissertação trata de limites superiores para o número $L(2,1)$-cromático em classes de grafos que são generalizações da classe das árvores: k-árvores, cactos e grafos de blocos. Para cada uma destas classes, apresentamos os limites superiores conhecidos na literatura e limites superiores menores (ou iguais nos casos em que o limite conhecido já é justo) obtidos neste trabalho.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ON L(2,1)-COLOURINGS OF GENERALIZATIONS OF TREES

Gabriel Ferreira Barros

December/2015

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

An $L(2,1)$-colouring of a graph is an assignment of nonnegative integers, also referred to as colours, to its vertices such that adjacent vertices receive colours at least two apart and vertices with a common neighbour receive different colours. The difference between the largest assigned colour and the smallest assigned colour is the span of the $L(2,1)$-colouring. The problem of the $L(2,1)$-colouring consists in computing the $L(2,1)$-chromatic number of a given graph, which is equivalent to the smallest among the spans of all the $L(2,1)$-colourings of the graph. Inspired by the proof of the tight upper bound for the $L(2,1)$-chromatic number of trees, this dissertation deals with upper bounds for the $L(2,1)$-chromatic number on graph classes which are generalizations of the class of the trees: k-trees, cacti and block graphs. For each of these classes, we present the upper bounds known from the literature and present smaller upper bounds (or equal ones in the cases in which the known bound is already tight) obtained in this work.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O *problema da atribuição de frequências* consiste em atribuir eficientemente frequências a transmissores localizados em diferentes pontos, evitando interferências. A eficiência é tida como a minimização do *comprimento da atribuição*, que equivale à diferença entre a maior e a menor frequência atribuída.

Uma $L(2,1)$-*coloração de um grafo* é uma atribuição de inteiros não negativos, também referidos como cores, a seus vértices tal que vértices adjacentes recebem cores com diferença pelo menos dois e vértices com um vizinho em comum recebem cores diferentes.

Este tipo de coloração foi definida formalmente por Griggs e Yeh [19], em 1992, e modela o problema da atribuição de frequências com as seguintes restrições: os transmissores "muito próximos" devem receber frequências com diferença pelo menos dois e transmissores "próximos" devem receber frequências diferentes (no caso, o conjunto de frequências é discreto).

Tal modelo consiste de um grafo cujos vértices representam os transmissores e cujas arestas representam os pares de transmissores "muito próximos". Um par de vértices com um vizinho em comum corresponde a um par de transmissores "próximos". Representando as frequências por inteiros não negativos, uma atribuição de frequências respeitando as restrições acima é uma $L(2,1)$-coloração deste grafo, e o que se quer é minimizar a diferença entre a maior cor usada e a menor cor usada. Se a cor 0 for atribuída, tal diferença equivale à maior cor atribuída, o *comprimento da* $L(2,1)$-*coloração.*

Dado um grafo G, o *problema da* $L(2,1)$-*coloração* consiste em encontrar o menor dentre os comprimentos de todas as $L(2,1)$-colorações de G. Tal parâmetro é denominado o *número* $L(2,1)$-*cromático de* G e denotado por $\lambda(G)$. Griggs e Yeh [19] provaram que o problema (na versão de decisão) é $\mathcal{NP}$-completo, e Fiala, Kloks e Kratochvíl [16] provaram que, para todo $k \geq 4$ fixo, decidir se $\lambda(G) \leq k$ é $\mathcal{NP}$-completo ($\lambda(G) \leq 3$ se, e somente se, G é a união disjunta de caminhos de tamanho no máximo três, o que é facilmente decidível em tempo polinomial).

Ainda sob o ponto de vista computacional, mas restringindo o grafo a determinadas classes, existem algoritmos polinomiais que determinam o número $L(2,1)$-cromático de caminhos, ciclos, rodas, grafos p-partidos completos [19], cografos, árvores [11], grades regulares [6], grafos P_4-*tidy* [24] e grafos split permutação [25], e algoritmos de parâmetro fixo que determinam o número $L(2,1)$-cromático de q-quase árvores [16] e de grafos $(q, q-4)$ [7], onde q é o parâmetro em ambas as classes. Até onde sabemos, para poucas classes além das mencionadas, sabe-se determinar o número $L(2,1)$-cromático em tempo polinomial. Decidir, para k fixo, se o número $L(2,1)$-cromático de um grafo é no máximo k é um problema que pode ser expressado em lógica de segunda ordem monádica e, portanto, é solucionável em tempo linear pelo algoritmo de Courcelle [12] para toda classe de grafos com largura arbórea (do inglês, *treewidth*) limitada. O problema da $L(2,1)$-coloração permanece $\mathcal{NP}$-completo nas classes: grafos com diâmetro dois [19], grafos split [3], grafos planares bipartidos [3] e grafos com largura arbórea no máximo dois [17]. Para todo $k \geq 4$ fixo, decidir se o número $L(2,1)$-cromático de um grafo planar é no máximo k é $\mathcal{NP}$-completo [15].

Quanto a limites superiores para o número $L(2,1)$-cromático de um grafo geral G cujo grau máximo é Δ, Griggs e Yeh [19] mostraram que $\lambda(G) \leq \Delta^2+2\Delta$. Este limite foi progressivamente melhorado por Chang e Kuo [11], por Král' e Škrekovski [21] e por Gonçalves [18], que obtiveram, respectivamente, $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta$, $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ e $\lambda(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$. Griggs e Yeh [19] mostraram que, se G tem diâmetro igual a dois, então $\lambda(G) \leq \Delta^2$ e que os grafos de Moore com diâmetro dois, que correspondem ao ciclo de cinco vértices, ao grafo de Petersen e ao grafo de Hoffman-Singleton, atingem tal limite. Os autores também conjecturaram que este limite seja verdadeiro para todos os grafos com grau máximo pelo menos dois, e esta conjectura permanece em aberto até hoje.

Conjectura de Griggs e Yeh ([19])**.** *Seja G um grafo com grau máximo $\Delta \geq 2$. Então, $\lambda(G) \leq \Delta^2$.*

A maior parte dos trabalhos sobre o problema da $L(2,1)$-coloração consiste da obtenção de limites superiores para o número $L(2,1)$-cromático de grafos de classes específicas, tais como árvores [19], grafos com largura arbórea limitada [3], grafos de intervalos unitários [26], grafos cordais [20, 26], grafos fracamente cordais [8, 10], grafos linha [9], grafos planares [14, 23, 28, 29], grafos periplanares [6, 22].

Para um estudo mais detalhado sobre $L(2,1)$-coloração de grafos, uma boa introdução é a dissertação de Mestrado de Posner [24], que contém vários resultados da literatura juntamente com as provas, além das contribuições do próprio autor. Outro recurso bastante útil é a extensa bibliografia sobre $L(2,1)$-coloração coletada por Calamoneri [5].

Esta dissertação trata de limites superiores para o número $L(2,1)$-cromático em classes de grafos que são generalizações da classe das árvores: k-árvores, cactos e grafos de blocos. Para cada uma destas, apresentamos os limites superiores conhecidos na literatura e, em seguida, os limites superiores obtidos neste trabalho. Os limites conhecidos já satisfazem a Conjectura de Griggs e Yeh e, portanto, o foco foi estabelecer limites justos ou o mais perto possível de justos.

Além do fato de existir um algoritmo polinomial de parâmetro fixo que determina o número $L(2,1)$-cromático de cactos, pois estes são q-quase-árvores (neste caso, q é o número de ciclos do cacto), não se têm resultados sobre a complexidade computacional do problema da $L(2,1)$-coloração nas classes consideradas neste trabalho. Deixamos, assim, este tema como uma sugestão de trabalho futuro.

1.1 Organização do trabalho

A próxima seção contém uma breve descrição das notações utilizadas ao longo do texto.

No Capítulo 2, a definição formal de $L(2,1)$-coloração é apresentada. Também apresentamos o limite superior para o número $L(2,1)$-cromático de árvores, de Griggs e Yeh [19], porque as provas dos limites para as classes que consideramos têm uma estrutura análoga à prova deste limite.

O Capítulo 3 trata da classe das k-árvores. Primeiramente, mostramos o limite de Bodlaender *et al.* [3]. Por uma modificação na prova de Bodlaender *et al.*, obtemos um limite menor, para $k \geq 2$ (para $k = 1$, o limite de Bodlaender *et al.* já é justo).

A classe dos cactos é considerada no Capítulo 4. Mostramos limites superiores justos para o número $L(2,1)$-cromático de cactos que são funções do grau máximo e da cintura.

O assunto do Capítulo 5 é a classe dos grafos de blocos. Começamos apresentando o limite de Bonomo e Cerioli [4], o qual é uma função do tamanho do maior bloco e do grau máximo e é justo na classe de todos os grafos de blocos. Adaptamos a demonstração do limite de Bonomo e Cerioli para mostrar que grafos com conectividade igual a um e com uma determinada relação entre o grau máximo e o tamanho do maior bloco satisfazem a Conjectura de Griggs e Yeh. Analisamos então, para cada $p \geq 4$ fixo e para cada $q \geq p$ fixo, a justeza do limite de Bonomo e Cerioli na subclasse dos grafos de blocos com tamanho do maior bloco p e grau máximo q.

O Capítulo 6 é destinado às conclusões e a sugestões de trabalhos futuros.

1.2 Notações

Presumimos a familiaridade do leitor com as definições e resultados básicos da Teoria dos Grafos. A terminologia que seguimos é a de Diestel [13] (os termos usados são traduções imediatas do inglês). Na maior parte, a terminologia usada aqui está de acordo com a de Szwarcfiter [27], livro-texto em língua portuguesa.

Denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros não negativos, e, para $0 \leq a \leq b$ inteiros, denotamos por $[a, b]$ o conjunto $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Um conjunto finito com k elementos é um *k-conjunto*. Por $A \subseteq B$ denotamos que A é um subconjunto de B (possivelmente, $A = B$) e por $A \subset B$ denotamos que A é um subconjunto próprio de B ($A \subseteq B$ e $A \neq B$).

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$ tal que $V(G)$, o conjunto de *vértices*, é finito e não vazio, e $E(G)$, o conjunto de *arestas*, tem como elementos pares não ordenados de vértices distintos. Denotamos por uv o par não ordenado $\{u, v\}$. Dois vértices u e v são *adjacentes*, ou *vizinhos*, se $uv \in E(G)$. Denotamos o *conjunto de vizinhos* ou *vizinhança* de v por $N_G(v)$; o *grau* de v por $d_G(v)$; o *grau máximo* de G por $\Delta(G)$; e o *grau mínimo* de G por $\delta(G)$. Ao longo do texto, quando for claro o grafo em questão, usamos n para denotar seu número de vértices e m para denotar seu número de arestas, e o índice G é omitido.

Se H é *subgrafo* de G, dizemos que G *contém* H. Um *subgrafo gerador* de G é um subgrafo H de G com $V(H) = V(G)$. Dado $X \subseteq V(G)$ tal que $X \neq \emptyset$, denotamos o *subgrafo de G induzido por X* por $G[X]$.

Seja $X \subset V(G)$. Denotamos por $G - X$ o subgrafo induzido por $V(G) \setminus X$. Em particular, se $X = \{v\}$, escrevemos simplesmente $G - v$ em vez de $G - \{v\}$.

Um *caminho* $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $k \geq 1$, em G é uma sequência finita de vértices distintos de G tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. O *tamanho* de P é $k-1$. Dizemos que v_1 e v_k são as *extremidades* de P e que $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ são os *vértices internos* de P. Também usamos o termo *caminho* para o grafo cujo conjunto de vértices é da forma $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, onde os v_i são distintos, e cujo conjunto de arestas é $\{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\}$.

Um *ciclo* $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$, $k \geq 3$, em G é uma sequência finita de vértices tal que $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ é um caminho e $v_1 v_k \in E(G)$. O *tamanho* de C é k. Também usamos o termo *ciclo* para denotar o grafo cujo conjunto de vértices é da forma $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, onde os v_i são distintos, e cujo conjunto de arestas é $\{v_i v_{i+1} \mid i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}\} \cup \{v_1 v_k\}$. Uma *corda* de um ciclo C em G é uma aresta $uv \in E(G) \setminus E(C)$ tal que $u, v \in V(C)$.

Se, para todo $u, v \in V(G)$, existe um caminho de extremidades u e v, G é *conexo*; caso contrário, G é *desconexo*. Um *componente* de G é um subgrafo conexo maximal de G.

Dados $u, v \in V(G)$, o menor dentre os tamanhos dos caminhos de extremidades u e v é a *distância* entre u e v, denotada por $d_G(u, v)$; se não existir caminho de extremidades u e v, $d_G(u, v) := \infty$. Definimos $N_G^2(v) := \{u \in V(G) \mid d_G(u, v) = 2\}$.

O menor dentre os tamanhos dos ciclos em G é a *cintura* de G, denotada por $g(G)$. Se G não contém um ciclo, $g(G) := \infty$.

Um vértice u de G é uma *articulação* de G se existem dois outros vértices v e w de G tais que todo caminho de extremidades v e w contém u. Equivalentemente, u é uma articulação de G se o número de componentes de $G - u$ é estritamente maior do que o de G.

Um *bloco* de G é um subgrafo conexo sem articulação maximal de G.

Um grafo é *completo* se quaisquer dois vértices são adjacentes. Um grafo completo de n vértices é um K_n.

Dado $X \subseteq V(G)$ tal que $X \neq \emptyset$, dizemos que X é uma *clique* se $G[X]$ é um grafo completo. Se X é uma clique com $|X| = k$, dizemos que X é uma *k-clique*. O *número-clique* de G, $\omega(G)$, é o maior k para o qual G possui uma k-clique. Por outro lado, X é um *conjunto independente* se não existe aresta entre quaisquer dois vértices em X.

Um grafo é *k-partido*, $k \geq 1$, se seu conjunto de vértices pode ser particionado em k conjuntos independentes. Um grafo é *k-partido completo* se é k-partido e quaisquer dois vértices de partes diferentes são adjacentes.

Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos.

Capítulo 2

$L(2,1)$-coloração

Uma $L(2,1)$-*coloração* de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \to \mathbb{N}$ tal que $|f(u) - f(v)| \geq 2$ se $uv \in E$ e $|f(u) - f(v)| \geq 1$ se $d(u, v) = 2$. Chamamos $f(v)$ a *cor* de v. O *comprimento* (do inglês, *span*) de f é a maior cor atribuída. Uma k-$L(2,1)$-coloração é uma $L(2,1)$-coloração cujo comprimento é no máximo k, ou seja, cujas cores *usadas* estão restritas a $[0, k]$.

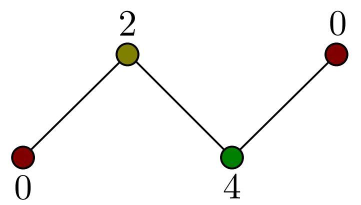

Figura 2.1: Uma $L(2,1)$-coloração f de G.

Para algum vértice v de G, se $f(v) = a$, então, para todo vizinho w de v, temos que $f(w) \notin \{a-1, a, a+1\}$. Ou seja, v *proíbe* as cores $a-1$, a e $a+1$ a seus vizinhos. Observemos que, se $a \in \{0, k\}$, então $a - 1$ ou $a + 1$ não pertence a $[0, k]$. Notemos também que, em $[0, k]$, há $k + 1$ cores *disponíveis* e que não necessariamente todas as $k + 1$ cores são usadas.

Dado $X \subseteq V$, denotamos $\bigcup_{v \in X} f(v)$ por $f(X)$.

Consideremos f uma k-$L(2,1)$-coloração de G. O *reverso de* f *em relação* $[0, k]$ f^R é a k-$L(2,1)$-coloração f^R definida como $f^R(v) := k - f(v)$ para cada $v \in V$. Listamos três propriedades interessantes a respeito da simetria do par $\{f, f^R\}$.

Fato 2.1. $(f^R)^R = f$.

Fato 2.2. *Para todo* $v \in V$, $f(v) \leq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1 \Leftrightarrow f^R(v) \geq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.

Fato 2.3. *Para todo* $v \in V$, *se* k *é par, então* $f(v)$ *e* $f^R(v)$ *têm a mesma paridade; caso contrário,* $f(v)$ *e* $f^R(v)$ *têm paridades diferentes.*

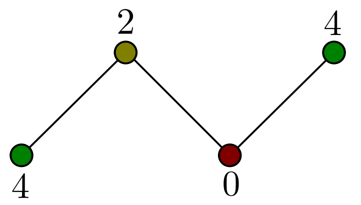

Figura 2.2: O reverso de f em relação $[0, 4]$ f^R.

O *problema da* $L(2,1)$*-coloração* consiste em encontrar o *número* $L(2,1)$*-cromático de* G $\lambda(G)$, que equivale ao menor comprimento dentre os de todas as $L(2,1)$-colorações de G. O problema de decisão correspondente

Problema: **L21-coloração**
Instância: grafo G e inteiro não negativo k
Pergunta: $\lambda(G) \leq k$?

foi provado ser $\mathcal{NP}$-completo por Griggs e Yeh [19].

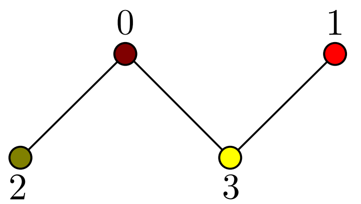

Figura 2.3: Uma $\lambda(G)$-$L(2,1)$-coloração.

Podemos restringir o problema da $L(2,1)$-coloração a grafos conexos observando o seguinte fato.

Fato 2.4. *Seja* G *um grafo desconexo, e* $G_1, G_2, \ldots, G_p$*, com* $p \geq 2$*, os componentes de* G*. Então,* $\lambda(G) = \max\{\lambda(G_1), \lambda(G_2), \ldots, \lambda(G_p)\}$.

O próximo teorema dá um limite inferior para o número $L(2,1)$-cromático de grafos gerais.

Teorema 2.1 ([11])**.** *Seja* G *um grafo com grau máximo* $\Delta \geq 1$*. Então,* $\lambda(G) \geq \Delta + 1$*. Se* $\lambda(G) = \Delta + 1$*, então* $f(v) \in \{0, \Delta + 1\}$ *para toda* $(\Delta + 1)$*-*$L(2,1)$*-coloração* f *de* G *e todo* v *de grau* Δ.

Prova. Seja f uma $L(2,1)$-coloração de G. Seja $v \in V(G)$ com $d(v) = \Delta$. Temos que $|f(\{v\} \cup N(v))| = \Delta + 1$, pois as cores dos vizinhos de v devem ser mutuamente distintas e a cor de v deve ser diferente das de todos seus vizinhos. Além disso, como $|f(v) - f(w)| \geq 2$ para todo vizinho w de v, temos que existe pelo menos 1 cor disponível que não pertence a $f(\{v\} \cup N(v))$. Logo, existem pelo menos $\Delta + 2$ cores disponíveis e o comprimento de f é pelo menos $\Delta + 1$.

Suponhamos por contradição que exista uma $(\Delta+1)$-$L(2,1)$-coloração f de G tal que, para algum $v \in V(G)$ com $d(v) = \Delta$, $f(v) \notin \{0, \Delta+1\}$. Temos que v proíbe 3 cores a seus vizinhos. Mas, $|f(N(v))| \leq |[0, \Delta+1]| - 3 = \Delta - 1 < \Delta = |N(v)|$, uma contradição. □

O limite inferior do Teorema 2.1 é justo como evidenciado na Figura 2.4.

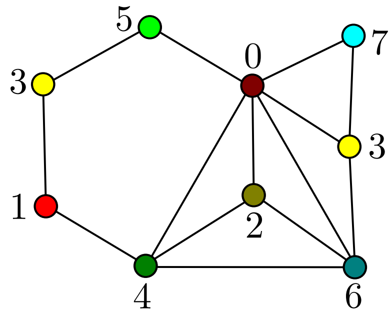

Figura 2.4: $\lambda(G) = \Delta + 1$.

O corolário subsequente mostra uma estrutura simples que força que o limite inferior seja uma unidade maior.

Corolário 2.1. *Seja G um grafo que contém um caminho (u_1, u_2, u_3) tal que $d(u_1) = d(u_2) = d(u_3) = \Delta(G)$. Então, $\lambda(G) \geq \Delta(G) + 2$.*

Prova. Toda $L(2,1)$-coloração de G atribui uma cor não pertencente a $\{0, \Delta(G)+1\}$ a algum vértice dentre u_1, u_2 e u_3. Logo, pelo Teorema 2.1, não existe $(\Delta(G)+1)$-$L(2,1)$-coloração de G. □

Adiante, exibimos a prova do limite superior de Griggs e Yeh [19] para o número $L(2,1)$-cromático de árvores. Veremos nos respectivos capítulos que as provas dos limites para k-árvores, cactos e grafos de blocos têm um formato semelhante.

Proposição 2.1 (cf. [13])**.** *Seja T uma árvore. Então, existe uma ordenação $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ de $V(T)$ tal que, para cada $2 \leq i \leq n$, v_i possui um único vizinho em $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$.*

Teorema 2.2 ([19])**.** *Para uma árvore T com grau máximo Δ, $\lambda(T) \leq \Delta + 2$.*

Prova. Seja $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ uma ordenação de $V(T)$ conforme a Proposição 2.1. Definamos a seguinte $L(2,1)$-coloração de T: no primeiro passo, v_1 recebe a cor 0 e, no j-ésimo passo, para cada $2 \leq j \leq n$, v_j recebe a menor cor disponível. Consideremos v_j, para algum $2 \leq j \leq n$. Seja v_i o único vértice pertencente a $N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$. Todos os vértices de $N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$ são vizinhos de v_i e, portanto, $|N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}| \leq \Delta - 1$. Logo, o número de cores proibidas a v_j é no máximo $3 + \Delta - 1 = \Delta + 2$. Assim, há uma cor disponível para v_j em $[0, \Delta+2]$. □

Listamos, a seguir, alguns resultados básicos sobre $L(2,1)$-colorações que serão usados ao longo dos capítulos.

Proposição 2.2 ([19]). *Seja G um grafo. Então, $\lambda(G) \leq |V(G)| + \chi(G) - 2$, onde $\chi(G)$ é o número cromático de G.*

Proposição 2.3 ([19]). *Seja G um caminho com n vértices. Se $n = 1$, $\lambda(G) = 0$; se $n = 2$, $\lambda(G) = 2$; se $n \in \{3, 4\}$, $\lambda(G) = 3$; se $n \geq 5$, $\lambda(G) = 4$.*

Proposição 2.4 ([19]). *Seja G um ciclo. Então, $\lambda(G) = \Delta(G) + 2 = 4$.*

Proposição 2.5 ([19]). *Seja G um grafo completo com n vértices. Então, $\lambda(G) = 2n - 2$.*

Capítulo 3

k-Árvores

Seja $k \geq 1$ um inteiro. Um grafo é uma *k-árvore* se é um grafo completo de k vértices ou se é obtido de uma k-árvore adicionando um vértice cuja vizinhança seja uma k-clique. A classe das 1-árvores é equivalente à classe das árvores. A Figura 3.1 mostra exemplos de 3-árvores tais que cada uma é obtida da anterior pela adição de um vértice cuja vizinhança é uma 3-clique.

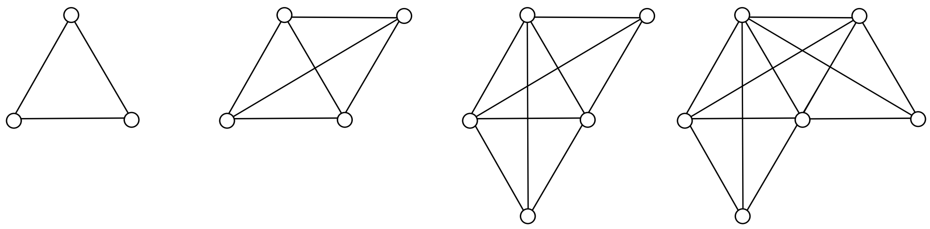

Figura 3.1: Exemplos de 3-árvores.

Assim, vemos que, para uma k-árvore G, existe uma ordenação $\sigma = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ de $V(G)$ tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma k-clique e, para cada $k+1 \leq i \leq n$, a vizinhança de v_i em $G[\{v_1, v_2, \ldots, v_i\}]$ é uma k-clique. Denominemos tal ordenação σ uma *ordenação de construção* da k-árvore G. Como fica evidente na Figura 3.1, uma ordenação de construção de uma k-árvore não é única.

Bodlaender *et al.* [3] provaram que, para uma k-árvore G com grau máximo Δ, $\lambda(G) \leq k(\Delta - k + 3)$. A prova deste limite é análoga à do Teorema 2.2, substituindo a ordenação da Proposição 2.1 pela ordenação de construção da k-árvore.

Mostramos um limite menor do que o de Bodlaender *et al.*: para uma k-árvore G com grau máximo Δ, $\lambda(G) \leq \max\{k(\Delta - k + 3) - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1\}$. A prova é baseada na do limite de Bodlaender *et al.*. A melhoria é conseguida considerando uma ordenação de construção com uma propriedade adicional e contando mais minuciosamente cores proibidas. Este resultado é parte do trabalho [1], apresentado no XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, em 2014.

3.1 Limite de Bodlaender *et al.*

Teorema 3.1 ([3]). *Seja G uma k-árvore com grau máximo Δ. Então, $\lambda(G) \leq k(3 + \Delta - k)$.*

Prova. Se G é um grafo completo de k vértices então, pela Proposição 2.5, $\lambda(G) = 2k - 2 < 2k = k(3 + (k-1) - k)$ e, portanto, o teorema é válido.

Suponhamos então que $n \geq k + 1$. Seja $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ uma ordenação de construção de G. Definamos a seguinte $L(2,1)$-coloração de G: para $1 \leq j \leq k$, no j-ésimo passo, v_j recebe a cor $2j - 2$; para $k + 1 \leq i \leq n$, no i-ésimo passo, v_i recebe a menor cor disponível em $[0, k(3 + \Delta - k)]$. Consideremos v_j, para algum $k + 1 \leq j \leq n$. Temos que $|N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}| = k$. Para todo $v_i \in N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$, todo $v_{i'}$ que é vizinho comum de v_i e v_j pertence a $N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$, pois $v_{i'} \in N(v_j) \cap \{v_{j+1}, v_{j+2}, \ldots, v_n\}$ implica que $v_i v_j \in E(G)$. Logo, $|N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}| \leq k(\Delta - k)$ e o número de cores proibidas a v_j é no máximo $3k + k(\Delta - k) = k(3 + \Delta - k)$. Portanto, existe uma cor disponível para v_j em $[0, k(3 + \Delta - k)]$. □

Se $k = 1$ e $\Delta \geq 3$, então $k(\Delta - k + 3) = \Delta + 2 \leq \Delta^2$, igual ao limite justo do Teorema 2.2. Se $k = 2$ e $\Delta \geq 3$, então $k(\Delta - k + 3) = 2\Delta + 2 \leq \Delta^2$. Se $k \geq 3$ e $\Delta \geq 3$, então $k(\Delta - k + 3) = 3\Delta \leq \Delta^2$. E, se $k \geq 4$, então $k(\Delta - k + 3) \leq k(\Delta - 1) \leq (\Delta + 1)(\Delta - 1) = \Delta^2 - 1 < \Delta^2$. Portanto, o limite de Bodlaender *et al.* implica que, para todo $k \geq 1$, as k-árvores satisfazem a Conjectura de Griggs e Yeh.

3.2 Nosso limite

Dada uma ordenação $\sigma = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ de $V(G)$, seja $K := \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, e seja H o subgrafo de G induzido por K e pelos vértices adjacentes a pelo menos dois vértices de K. A seguir, estabelecemos algumas propriedades úteis de H.

Lema 3.1. *Seja G uma k-árvore com grau máximo Δ, e σ uma ordenação de construção de G. Então, $|V(H)| \leq k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$.*

Prova. Cada $u \in V(H) \setminus K$ satisfaz $|N(u) \cap K| \geq 2$, e cada $v \in K$ satisfaz $|N(v) \setminus K| \leq \Delta - k + 1$. Logo, $|V(H) \setminus K| \leq \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$. □

Lema 3.2. *Seja G uma k-árvore com grau máximo Δ. Então, existe uma ordenação de construção de G tal que os vértices de $V(G) \setminus V(H)$ sucedem os vértices de $V(H)$.*

Prova. Seja $\sigma = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ uma ordenação de construção de G. Se σ satisfaz o lema, então este está provado. Suponhamos então que existam $v_i, v_j \in V(G)$ tais que $i < j$, $v_i \in V(G) \setminus V(H)$ e $v_j \in V(H) \setminus K$. Vamos construir uma ordenação

$\sigma' = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v'_{k+1}, v'_{k+2} \dots, v'_n \rangle$ de construção de G tal que $v_i = v'_q$, $v_j = v'_p$ e $p < q$. De início, definamos $v'_t = v_t$ para cada $k+1 \leq t \leq n$. Denominemos um caminho P um *caminho t-ascendente* se todos os vértices de P pertencem a $\{v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$. Seja G_i o subgrafo de G induzido por $\{w \in \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\} \mid$ existe um caminho i-ascendente de extremidades v_i e $w\}$. Notemos que $v_i \in V(G_i)$ e que, para $i+1 \leq k \leq n$, $v_k \in V(G_i)$ se, e somente se, $N(v_k) \cap V(G_i) \neq \emptyset$. Notemos também que, para todo $v_k \in V(G_i)$, $v_k \in V(G) \setminus V(H)$. Portanto, $v_j \notin V(G_i)$. Transponhamos os vértices de $V(G_i)$ para as últimas posições de σ' mantendo a ordem relativa entre eles; ou seja, $\{v'_{n-|V(G_i)|+1}, \dots, v'_n\} = V(G_i)$ e, para $v'_p, v'_q \in V(G_i)$ tais que $v'_p = v_r$ e $v'_q = v_s$, temos que $p < q \Leftrightarrow r < s$. Verificamos a seguir que v_i sucede v_j em σ' e que σ' é, de fato, uma ordenação de construção de G.

Digamos que $v_i = v'_q$ e que $v_j = v'_p$. Claramente, $p < q$. Suponhamos por contradição que σ' não seja uma ordenação de construção de G. Logo, para algum r e algum s tais que $r < s$, $v_r \in V(G_i)$, $v_s \in V(G) \setminus V(G_i)$ tais que $v_r v_s \in E(G)$. Mas, v_s ser adjacente a um vértice em $V(G_i)$ implica que $v_s \in V(G_i)$, uma contradição. Logo, σ' é uma ordenação de construção de G.

Repetindo o raciocínio por um número finito de vezes, concluímos que ao final temos uma ordenação de construção de G na qual os vértices de $V(G) \setminus V(H)$ sucedem os vértices de $V(H)$. $\square$

Lema 3.3. *Seja G uma k-árvore com grau máximo Δ, e $\sigma = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ uma ordenação de construção de G. Então, para todo $v_j \in V(G) \setminus V(H)$, $|N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}| \leq k(\Delta - k) - \frac{k(k-1)}{2}$.*

Prova. Para todo $v_i \in N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}$, temos que todo v_k que é vizinho comum de v_i e v_j pertence a $N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}$. Temos que $|N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}| = k$, pois $v_j \notin K$. Sejam $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ os vértices de $N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}$ tais que $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Como $v_j \in V(G) \setminus V(H)$, temos que $\{v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_k}\} \cap K = \emptyset$. Logo, existe $w_k \in N(v_{i_k}) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{i_k - 1}\}$ tal que w_k é adjacente a todos os vértices de $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$; existe $w_{k-1} \in N(v_{i_{k-1}}) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{i_{k-1}-1}\}$ tal que $w_{k-1} \neq w_k$ e w_{k-1} é adjacente a todos os vértices de $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-1}}\}$; existe $w_{k-2} \in N(v_{i_{k-2}}) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{i_{k-2}-1}\}$ tal que $w_{k-2} \notin \{w_{k-1}, w_k\}$ e w_{k-2} é adjacente a todos os vértices de $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k-2}}\}$; $\dots$; e existe $w_2 \in N(v_{i_2}) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{i_2 - 1}\}$ tal que $w_2 \notin \{w_3, w_4, \dots, w_k\}$ e w_2 é adjacente a v_{i_1} e a v_{i_2}. Portanto, $|N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}\}| \leq k(\Delta - k) - \sum_{t=1}^{k-1} t = k(\Delta - k) - \frac{k(k-1)}{2}$. $\square$

Teorema 3.2. *Seja G uma k-árvore com grau máximo Δ. Então, $\lambda(G) \leq \max\{k(\Delta - k + 3) - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1\}$.*

Prova. Seja $\sigma = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ uma ordenação de construção de G. Definimos a seguir uma $L(2,1)$-coloração de G em duas partes: primeiro atribuímos cores aos vértices de $V(H)$ e depois aos vértices de $V(G) \setminus V(H)$. O comprimento da $L(2,1)$-coloração de G é o máximo dentre os comprimentos das $L(2,1)$-colorações de H e de $G - H$.

Pelo Lema 3.2, podemos supor, sem perda de generalidade, que os vértices de $V(G) \setminus V(H)$ sucedem os vértices de H. Portanto, $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|V(H)|}\}$. Como H é uma k-árvore, temos que $\chi(H) \leq k+1$. Pelo Lema 3.1, $|V(H)| \leq k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)$. Então, pela Proposição 2.2, $\lambda(H) \leq |V(H)| + \chi(H) - 2 \leq (k + \frac{k}{2}(\Delta - k + 1)) + (k+1) - 2 = \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1$ e existe uma $L(2,1)$-coloração f de H cujo comprimento é no máximo este valor. Para cada $1 \leq j \leq |V(H)|$, no j-ésimo passo, atribuímos a cor $f(v_j)$ a v_j e, para cada $|V(H)| + 1 \leq j \leq n$, no j-ésimo passo, atribuímos a v_j a menor cor possível, respeitando as restrições de uma $L(2,1)$-coloração.

Consideremos v_j, para algum $|V(H)| + 1 \leq j \leq n$. Cada $v_i \in N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$ proíbe no máximo 3 cores a v_j e cada $v_i \in N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}$ proíbe sua cor a v_j. Temos que $|N(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}| = k$ e, pelo Lema 3.3, $|N^2(v_j) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}\}| \leq k(\Delta - k) - \frac{k(k-1)}{2}$. Portanto, no i-ésimo passo, o número máximo de cores proibidas a v_j é $3k + k(\Delta - k) - \frac{k(k-1)}{2} = k(3 + \Delta - k) - \frac{k(k-1)}{2}$. Assim, existe pelo menos uma cor disponível para v_i em $\{0, 1, \ldots, k(\Delta - k + 3) - \frac{k}{2}(k-1)\}$. $\square$

A seguir, analisemos o valor de $\phi := \max\{k(\Delta - k + 3) - \frac{k(k-1)}{2}, \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1\}$ e comparemo-lo com o limite de Bodlaender *et al.* $k(\Delta - k + 3)$. Primeiramente, notemos que, se $k = 1$, então $\phi = \max\{\Delta + 2, \frac{\Delta+2}{2}\} = \Delta + 2$, igual ao limite justo do Teorema 2.2. Assim, no que resta, consideremos $k \geq 2$. Obviamente, se $\phi = k(\Delta - k + 3) - \frac{k(k-1)}{2}$, então $\phi < k(\Delta - k + 3)$. Suponhamos então que $\phi = \frac{k(\Delta-k+3)}{2} + k - 1$. Neste caso, $\phi < k(\Delta - k + 3)$ se, e somente se, $k - 1 - \frac{2}{k} < \Delta$. Como, para toda k-árvore, $k - 1 \leq \Delta$, concluímos que também neste caso $\phi < k(\Delta - k + 3)$.

Capítulo 4

Cactos

Um grafo é um *cacto* se toda aresta está em no máximo um ciclo. Vemos que um grafo é um cacto se, e somente se, seus blocos são K_2 ou ciclos sem cordas. Claramente, toda árvore é um cacto.

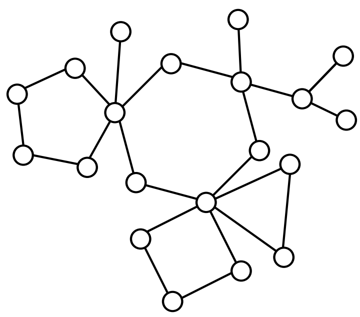

Figura 4.1: Um cacto.

A classe dos cactos pertence à hierarquia $\textsc{Cacto} \subset \textsc{Periplanar} \subset \textsc{Planar}$. Para um grafo planar G com grau máximo Δ, van den Heuvel e McGuinness [28] obtiveram $\lambda(G) \leq 2\Delta + 34$, e o melhor limite para valores suficientemente grandes de Δ é $\lambda(G) \leq \lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 95$, de Molloy e Salavatipour [23]. Existem limites melhores para o caso em que a cintura de G é pelo menos sete: Wang e Lih [29] provaram $\lambda(G) \leq \Delta + 8$, e Dvořák *et al.* [14] mostraram que, se $\Delta \geq 194$, então $\lambda(G) \leq \Delta + 2$. O limite de van den Heuvel e McGuinness implica que G satisfaz a Conjectura de Griggs e Yeh se $\Delta \geq 7$. Bella *et al.* [2] trataram dos casos em que $\Delta \in \{4, 5, 6\}$, provando a validade da conjectura. A satisfação da conjectura para $\Delta = 3$ é uma questão em aberto.

Para um grafo periplanar G com grau máximo Δ, Wang e Luo [30] mostraram que $\lambda(G) \leq \Delta + 5$, e Calamoneri e Petreschi [6] mostraram que, se $\Delta \geq 8$, então $\lambda(G) \leq \Delta + 2$. Li e Zhou [22] melhoraram o limite de Wang e Luo no caso em que $\Delta = 3$, obtendo $\lambda(G) \leq \Delta + 3 = 6$. O limite de Wang e Luo implica que a Conjectura de Griggs e Yeh é satisfeita para $\Delta \geq 3$.

Mostramos limites superiores justos para o número $L(2,1)$-cromático de um cacto. No restante do capítulo, G denota um cacto conexo com grau máximo Δ e cintura g. Pelo Teorema 2.2 e pela Proposição 2.4, se G é uma árvore ou um ciclo, então tem-se o limite justo $\lambda(G) \leq \Delta + 2$. Portanto, consideramos que G contém pelo menos um ciclo e $\Delta \geq 3$.

Assim como a demonstração do Teorema 2.2, as demonstrações dos limites deste capítulo têm o formato: [ordenação π dos vértices do grafo] $\rightarrow$ [algoritmo de $L(2,1)$-coloração cujas entradas são o grafo e π] $\rightarrow$ [análise do maior comprimento possível de uma $L(2,1)$-coloração realizada pelo algoritmo]. No caso das árvores, a ordenação π é tal que cada **vértice** possui no máximo um **vértice vizinho** que o antecede, e, a cada iteração, o algoritmo atribui cor a um **vértice**. Neste capítulo, a ordenação π é tal que cada **bloco** possui no máximo um "**bloco pai**" que o antecede, e, a cada iteração, o algoritmo atribui cor a **todos os vértices dos blocos** não coloridos que compartilham uma articulação com um bloco já colorido. Tal ordenação existe devido à estrutura composta pelos blocos de um grafo conexo ser uma árvore, no sentido dado pela proposição que segue.

Proposição 4.1 (cf. [13]). *Seja H um grafo conexo, A o conjunto das articulações de H, e $\mathcal{B}$ o conjunto dos blocos de H. Seja T o grafo tal que $V(T) := A \cup \mathcal{B}$ e $E(T) := \{aB \mid a \in A,\ B \in \mathcal{B},\ a \in V(B)\}$. Então, T é uma árvore.*

Se $\Delta \geq 5$ ou $g \geq 4$, então seja $\sigma := \Delta + 2$; caso contrário ($\Delta \in \{3,4\}$ e $g = 3$), seja $\sigma := \Delta + 3$. O teorema subsequente é o modelo seguido pelos teoremas deste capítulo.

Teorema 4.1. *$\lambda(G) \leq \sigma$.*

Modelo da prova. Vamos definir recursivamente uma σ-$L(2,1)$-coloração f de G. Seja $C_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_{\ell_1}, u_1)$ um ciclo em G. Para cada $1 \leq i \leq \ell_1$,

$$f(u_i) := \begin{cases} 0 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 4 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell_1 \equiv 1 \pmod 3$, então redefinamos $f(u_{\ell_1-3}) := 0$, $f(u_{\ell_1-2}) := 3$, $f(u_{\ell_1-1}) := 1$ e $f(u_{\ell_1}) := 4$. Se $\ell_1 \equiv 2 \pmod 3$, então redefinamos $f(u_{\ell_1-1}) := 1$ e $f(u_{\ell_1}) := 3$.

Suponhamos que f esteja definida em exatamente b blocos de G, com $b \geq 1$, e

1. tais blocos induzam um subgrafo conexo G' de G (G' é um cacto tal que os blocos de G' são blocos de G);

2. para cada bloco B de G', se, para algum $u \in V(B)$, $N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então B seja o único bloco de G' que contenha o vértice u;

3. f seja uma σ-$L(2,1)$-coloração de G';

4. $f \in \mathcal{F}_{\Delta,g}$, onde $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ é o conjunto de todas as σ-$L(2,1)$-colorações de G' possivelmente com algumas restrições, explicitadas em cada caso específico.

Se não existe um bloco B de G' tal que existe $u_1 \in V(B)$ com $N(u_1) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então $G' = G$, e, pela Propriedade 3, f é uma σ-$L(2,1)$-coloração de G, conforme queremos. Então, suponhamos que exista tal bloco B. Definimos f em todos os blocos de $G - V(G')$ que possuem o vértice u_1, de modo que as Propriedades 1 – 4 se mantenham no novo subgrafo colorido $G'' := G[V(G') \cup N(u_1)]$.

Sejam B_1, B_2, $\ldots$, B_r os blocos de $G - V(G')$ que são ciclos e contêm u_1 (se não há tais blocos, $r = 0$), e B_{r+1}, B_{r+2}, $\ldots B_s$ os blocos de $G - V(G')$ que são K_2 e contêm u_1. Seja $\langle v_1, v_2, \ldots, v_t \rangle$ uma ordenação de $N(u_1) \cap \bigcup_{1 \leq i \leq s} V(B_i)$ tal que $v_1, v_2 \in N(u_1) \cap V(B_1)$, $\ldots$, $v_{2r-1}, v_{2r} \in N(u_1) \cap V(B_r)$, $v_{2r+1} \in N(u_1) \cap V(B_{r+1})$, $\ldots$, e $v_t \in N(u_1) \cap V(B_s)$.

Como atribuímos cores a todos os blocos que contêm u_1 e somente a estes blocos, vemos que as Propriedades 1 e 2 valem em G''. Assim, basta nos concentrarmos na validade em G'' das Propriedades 3 e 4. Pela Propriedade 2, os vértices de B são os únicos que impõem restrições de cores em $N(u_1) \cap \bigcup_{1 \leq i \leq s} V(B_i)$. Com o fim de simplificação, consideremos apenas $d_G(u_1) = \Delta$ ao longo da prova, o que não é restritivo. Portanto, $t = \Delta - |N(u_1) \cap V(B)|$ ($t = \Delta - 1$ se B é um K_2; e $t = \Delta - 2$ se B é um ciclo).

Nas seções subsequentes, conforme os casos para Δ e g, explicitamos $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ e mostramos a definição concreta de f. □

4.1 Grau máximo grande ou cintura grande

Nesta seção, mostramos que $\lambda(G) \leq \Delta + 2$, se $\Delta \geq 5$ ou $g \geq 4$. Pelo Corolário 2.1, vemos que tal limite é justo e é fácil obter cactos que o atingem. Provamos separadamente os três casos: $\Delta \geq 5$; $\Delta = 4$ e $g \geq 4$; e $\Delta = 3$ e $g \geq 4$.

Lema 4.1. *Seja $r \geq 1$ um inteiro, e $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ um conjunto de inteiros tal que $c_1 < c_2 < \cdots < c_t$. Se $t \geq \max\{3, 2r\}$, então existe uma família $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}\}$ de r 2-subconjuntos de $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ dois a dois disjuntos tal que, para cada $1 \leq i \leq r$, $|a_{2i-1} - a_{2i}| \geq 2$.*

Prova. Se $r = 1$, então $t \geq 3$, e definamos $a_1 := c_1$ e $a_2 := c_3$. Consideremos então $r \geq 2$. Logo, $t \geq 2r$. Definamos $a_1 := c_1$, $a_2 := c_3$, $a_3 := c_5$, $a_4 := c_7$, $\ldots$, $a_r := c_{2r-1}$, $a_{r+1} := c_2$, $a_{r+2} := c_4$, $\ldots$, $a_{2r-1} := c_{2r-2}$, $a_{2r} := c_{2r}$. Facilmente, vemos que para cada $1 \leq i \leq p$, $|a_{2i-1} - a_{2i}| \geq 2$. □

Teorema 4.2. *Se $\Delta \geq 5$, então $\lambda(G) \leq \Delta + 2$.*

Prova. Neste caso, $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ é o conjunto de todas as $(\Delta+2)$-$L(2,1)$-colorações de G', ou seja, f não tem uma Propriedade 4 adicional.

Em $[0, \Delta+2] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(N(u_1) \cap V(B)))$, existem pelo menos $\Delta - |N(u_1) \cap V(B)| = t$ cores disponíveis. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_t$ t destas. Se $r = 0$, então atribuamos injetivamente $c_1, c_2, \ldots, c_t$ aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$. Consideremos então $r \geq 1$. Como $t \geq \Delta - 2 \geq 3$ e $t \geq 2r$, pelo Lema 4.1, existe uma família $\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots, \{a_{2r-1}, a_{2r}\}\}$ de r 2-subconjuntos de $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ dois a dois disjuntos tal que, para cada $1 \leq i \leq r$, $|a_{2i-1} - a_{2i}| \geq 2$. Para cada $1 \leq i \leq 2r$, $f(v_i) := a_i$, e atribuamos injetivamente $c_{2r+1}, c_{2r+2}, \ldots, c_t$ aos vértices em $\{v_{2r+1}, v_{2r+2}, \ldots, v_t\}$.

Falta atribuir cores aos vértices em $\bigcup_{1 \leq k \leq r} V(B_k) \setminus \{u_1, v_{2k-1}, v_{2k}\}$. Consideremos B_k, para algum $1 \leq k \leq r$. Sejam $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\ell$ os vértices de B_k tais que $E(B_k) = \{w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{\ell-1}w_\ell, w_\ell w_1\}$, $w_1 = v_{2k-1}$, $w_2 = u_1$ e $w_3 = v_{2k}$. Para $4 \leq i \leq \ell$, definamos

$$f(w_i) := \begin{cases} f(v_{2k-1}) & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ f(u_1) & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ f(v_{2k}) & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, redefinimos f em w_ℓ. Como $|[0, \Delta+2] \setminus \{f(u_1), f(v_{2k-1}) - 1, f(v_{2k-1}), f(v_{2k-1}) + 1, f(v_{2k}) - 1, f(v_{2k}), f(v_{2k}) + 1\}| \geq \Delta - 4 \geq 1$, há uma cor a para w_ℓ, e $f(w_\ell) := a$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinimos f em $w_{\ell-1}$ e w_ℓ. Há $|[0, \Delta+2] \setminus \{f(u_1), f(v_{2k-1}), f(v_{2k}) - 1, f(v_{2k}), f(v_{2k}) + 1\}| \geq \Delta - 2 \geq 3$ cores para $w_{\ell-1}$ e $|[0, \Delta+2] \setminus \{f(u_1), f(v_{2k}), f(v_{2k-1}) - 1, f(v_{2k-1}), f(v_{2k-1}) + 1\}| \geq \Delta - 2 \geq 3$ cores para w_ℓ. É fácil verificar que existem duas cores a e b disponíveis para $w_{\ell-1}$ e w_ℓ, respectivamente, tais que $|a - b| \geq 2$. Definamos $f(w_{\ell-1}) := a$ e $f(w_\ell) := b$. $\square$

Teorema 4.3. *Se $\Delta = 4$ e $g \geq 4$, então $\lambda(G) \leq 6$.*

Prova. Aqui, $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ é o conjunto de todas as 6-$L(2,1)$-colorações de G' com a seguinte restrição: para cada ciclo $C = (u_0, u_1, \ldots, u_{\ell-1}, u_0)$ de G', se, para algum $0 \leq i \leq \ell - 1$, $N(u_i) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$ e $f(u_i) = 3$, então $\{f(u_{i-1}), f(u_{i+1})\} \neq \{0, 6\}$ (as somas dos índices são tomadas mod ℓ). Notemos que tal propriedade é satisfeita pelo ciclo C_1.

Em $[0, 6] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1\} \cup f(N(u_1) \cap V(B)))$, existem pelo menos $4 - |N(u_1) \cap V(B)| = t$ cores disponíveis. Notemos que $r \leq 1$, pois $2r \leq t \leq 3$. Se $r = 0$, então atribuamos injetivamente t cores aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$. Consideremos então $r = 1$. Sejam $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\ell$ os vértices de B_1 tais que $E(B_1) = \{w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{\ell-1}w_\ell, w_\ell w_1\}$, $w_1 = v_1$, $w_2 = u_1$ e $w_3 = v_2$.

Suponhamos que $f(u_1) \geq 3$. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0,6]$ f^R, temos que $f^R(u_1) \leq 3$. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) \leq 3$.

Seja $a := f(u_1)$. Escolhemos, a seguir, duas cores b e c, $b < c$, dentre as disponíveis para $N(u_1) \setminus V(B)$ de acordo com o valor de a. Se $a = 0$, então, em $\{2,3,4,5,6\} \setminus f(V(B))$, há pelo menos 3 cores disponíveis, e escolhemos b e c de modo que $(b,c) \notin \{(2,5),(3,4),(3,5),(5,6)\}$. Se $a = 3$, então escolhemos b e c de modo que $(b,c) \neq (1,5)$. Notemos que, se $a = 3$ e há exatamente 2 cores disponíveis, então B é um ciclo e existem dois vértices u_0 e u_2 em $N(u_1) \cap V(B)$. Pela Propriedade 4, temos que $\{f(u_0), f(u_2)\} \neq \{0,6\}$ e, portanto, $(b,c) \neq (1,5)$. Se $a \in \{1,2\}$, então escolhemos 2 cores quaisquer b e c. Definamos $f(v_1) := b$ e $f(v_2) := c$. Se $t = 3$, então há pelo menos uma cor d disponível para v_3, e definamos $f(v_3) := d$.

Agora, definamos f em $\{w_4, w_5, \ldots, w_\ell\}$ de acordo com as possíveis configurações de $\{a,b,c\}$. Se $a = 0$, então as possibilidades para (b,c) são

$$(2,3),(2,4),(2,6),(3,6),(4,5),(4,6);$$

se $a = 1$, então as possibilidades para (b,c) são

$$(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6);$$

se $a = 2$, então as possibilidades para (b,c) são

$$(0,4),(0,5),(0,6),(4,5),(4,6),(5,6);$$

se $a = 3$, então as possibilidades para (b,c) são

$$(0,1),(0,5),(0,6),(1,6),(5,6).$$

1. $\underline{(a,b,c) = (0,3,6):}$

   Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 1$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 2$ e $f(w_5) := 5$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

   $$f(w_i) := \begin{cases} 2 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 5 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 1$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_{\ell-2}) := 3$, $f(w_{\ell-1}) := 5$ e $f(w_\ell) := 1$.

2. $\underline{(a,b,c) = (3,0,6)}$:

   Se $\ell = 4$, definamos $f(w_4) := 4$. Então, consideremos $\ell \geq 5$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 0 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 4 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 6$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 1$ e $f(w_\ell) := 5$.

3. $\underline{c \geq b+3}$:

   Temos que $(a,b,c) \in \{(0,2,6),(1,3,6),(2,0,4),(2,0,5),(2,0,6),(3,0,5),(3,1,6)\}$ ($(0,3,6)$ foi tratado no Caso 1, e $(3,0,6)$, no Caso 2). Definamos

$$f(w_i) := \begin{cases} b & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ a & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ c & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, redefinimos f em w_ℓ. As cores proibidas para $f(w_\ell)$ pertencem a $\{0,1,c-1,c,c+1,a\}$ ou a $\{b-1,b,b+1,5,6,a\}$ e, portanto, existe pelo menos uma cor c' disponível. Se $(a,b,c) = (2,0,6)$, então $f(w_\ell) := 4$. Caso contrário, $f(w_\ell) := c'$.

   Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinimos f em $w_{\ell-1}$ e w_ℓ. Se $b = 0$, então $f(w_{\ell-1}) := 1$ e $f(w_\ell) := c'$, para alguma cor $c' \in \{3,4,5,6\} \setminus \{a,c\}$. Caso contrário, $c = 6$, e definamos $f(w_\ell) := 5$ e $f(w_{\ell-1}) := c'$, para alguma cor $c' \in \{0,1,2,3\} \setminus \{a,b\}$.

4. $c = b+2$.

   Temos que $(a,b,c) \in \{(0,2,4),(0,4,6),(1,3,5),(1,4,6),(2,4,6)\}$. Definamos

$$f(w_i) := \begin{cases} b & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ a & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ b+2 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := c'$, para alguma cor $c' \in [0,6] \setminus \{a, b-1, b, b+1, b+2, b+3\}$.

   Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos f em $w_{\ell-1}$ e w_ℓ. Se $b \in \{2,3\}$, então $f(w_{\ell-1}) := b-1$ e $f(w_\ell) := b+3$. Se $(a,b,c) \in \{(0,4,6),(2,4,6)\}$, então $f(w_{\ell-1}) := 3$ e $f(w_\ell) := 1$. Se $(a,b,c) = (1,4,6)$, então $f(w_{\ell-1}) := 0$ e $f(w_\ell) := 2$.

5. $c = b + 1$.

   Temos que $(a, b, c) \in \{(0, 2, 3),\ (0, 4, 5),\ (1, 3, 4),\ (1, 4, 5),\ (1, 5, 6),\ (2, 4, 5),\ (2, 5, 6),\ (3, 0, 1),\ (3, 5, 6)\}$.

   Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := c'$, para alguma cor $c' \in [0, 5] \setminus \{a, b-1, b, b+1, b+2\}$. Se $\ell = 5$ e $b \in \{2, 3, 4\}$, então $f(w_4) := b - 1$ e $f(w_5) := b + 1$. Se $\ell = 5$ e $b = 0$, então $f(w_4) := 4$ e $f(w_5) := 6$. Se $\ell = 5$ e $b = 5$, então $f(w_4) := 4$ e $f(w_5) := 0$. Assim, no restante da prova, consideremos $\ell \geq 6$.

   5.1. $\underline{(a, b, c) = (3, 0, 1):}$

$$f(w_i) := \begin{cases} 5 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 3 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 1 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 6$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 2$.

   5.2. $\underline{(a, b, c) = (0, 2, 3):}$

$$f(w_i) := \begin{cases} 5 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 3 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 4$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 1$ e $f(w_\ell) := 4$.

   5.3. $\underline{(a, b, c) = (1, 3, 4):}$

$$f(w_i) := \begin{cases} 6 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 4 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 5$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 0$.

   5.4. $\underline{(b, c) = (4, 5):}$

   Notemos que $a \in \{0, 1, 2\}$. Seja $c' := 3$, se $a \in \{0, 1\}$; senão, $c' := 0$.

$$f(w_i) := \begin{cases} c' & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ a & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 5 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 6$. Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := c''$, para alguma cor $c'' \in \{0,1\} \setminus \{a\}$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 3$ e $f(w_\ell) := 6$.

5.5. $\underline{(b,c) = (5,6)}$:
Notemos que $a \in \{1,2,3\}$. Seja $c' := 4$, se $a \in \{1,2\}$; senão, $c' := 1$.

$$f(w_i) := \begin{cases} c' & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ a & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 6 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Seja $c'' := 0$, se $a \in \{2,3\}$; senão, $c'' := 3$. Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := c''$. Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_\ell) := 0$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, então redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 4$ e $f(w_\ell) := 0$. □

Teorema 4.4. *Se $\Delta = 3$ e $g \geq 4$, então $\lambda(G) \leq 5$.*

Prova. Aqui, $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ é o conjunto de todas as 5-$L(2,1)$-colorações de G' com a seguinte restrição: para cada bloco B de G' tal que $V(B) = \{u_1, u_2\}$, se $N(u_1) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então $(f(u_1), f(u_2)) \notin \{(2,5),(3,0)\}$.

Suponhamos que $f(u_1) \geq 3$. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0,5]$ f^R, temos que $f^R(u_1) \leq 2$. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) \leq 2$.

Em $[0,5] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(N(u_1) \cap V(B)))$, existem pelo menos $3 - |N(u_1) \cap V(B)| = t$ cores disponíveis. Notemos que $r \leq 1$, pois $2r \leq t \leq 2$. Suponhamos que $r = 0$. Se $f(u_1) \in \{1,2\}$, então atribuamos injetivamente t cores aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$; caso contrário, $f(u_1) = 0$, e atribuamos injetivamente as cores em $\{2,4,5\} \setminus f(N(u_1) \cap V(B))$ aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$. Consideremos então $r = 1$. Temos que B é um K_2. Seja u_2 o único vizinho de u_1 em $N(u_1) \cap V(B)$. Pela Propriedade 4, se $f(u_1) = 2$, então $f(u_2) \neq 5$. Sejam $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\ell$ os vértices de B_1 tais que $E(B_1) = \{w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{\ell-1}w_\ell, w_\ell w_1\}$, $w_1 = v_1$, $w_2 = u_1$ e $w_3 = v_2$. A seguir, definimos f em $V(B_1) \setminus \{u_1\}$ conforme as possibilidades para $\{f(u_1), f(u_2)\}$.

1. $\underline{(f(u_1), f(u_2)) \in \{(0,2),(0,3)\}}$:
   Definamos $f(w_1) := 4$ e $f(w_3) := 5$. Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 1$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 3$ e $f(w_5) := 1$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 3 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 5 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 2$. Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$ ou $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 1$.

2. $\underline{(f(u_1), f(u_2)) \in \{(0,4), (0,5)\}}$:

   Definamos $f(w_1) := 2$ e $f(w_3) := 3$. Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 5$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 1$ e $f(w_5) := 4$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 5 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 0 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 3 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 4$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 1$ e $f(w_\ell) := 4$.

3. $\underline{(f(u_1), f(u_2)) \in \{(1,3), (2,0)\}}$:

   Definamos $f(w_1) := 4$ e $f(w_3) := 5$. Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 0$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 3$ e $f(w_5) := 0$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 0 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 3 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 5 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 1$. Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 2$ e $f(w_\ell) := 0$.

4. $\underline{(f(u_1), f(u_2)) = (1,4)}$:

   Definamos $f(w_1) := 3$ e $f(w_3) := 5$. Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 0$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 2$ e $f(w_5) := 0$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 0 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 4 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 0 \pmod 3$ ou $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_\ell) := 5$.

5. $\underline{(f(u_1), f(u_2)) = (1,5)}$:

   Definamos $f(w_1) := 3$ e $f(w_3) := 4$. Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 0$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 2$ e $f(w_5) := 0$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 0 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 2 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 5 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_{\ell-2}) := 4$, $f(w_{\ell-1}) := 0$ e $f(w_\ell) := 5$.

6. $\underline{(f(u_1), f(u_2)) = (2, 4)}$:

   Definamos $f(w_1) := 0$ e $f(w_3) := 5$. Se $\ell = 4$, então $f(w_4) := 3$. Se $\ell = 5$, então $f(w_4) := 1$ e $f(w_5) := 4$. Então, consideremos $\ell \geq 6$.

$$f(w_i) := \begin{cases} 3 & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ 1 & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ 5 & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

   Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinamos $f(w_{\ell-1}) := 2$ e $f(w_\ell) := 4$. □

4.2 Grau máximo pequeno e cintura pequena

Nesta seção, cobrimos os casos que restam: $\Delta = 4$ e $g = 3$; e $\Delta = 3$ e $g = 3$.

Teorema 4.5. *Se $\Delta = 4$ e $g = 3$, então $\lambda(G) \leq 7$.*

Prova. Neste caso, $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ é o conjunto de todas as 6-$L(2,1)$-colorações de G', ou seja, f não tem uma Propriedade 4 adicional.

Suponhamos que $f(u_1) \geq 3$. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 6]$ f^R, temos que $f^R(u_1) \leq 3$. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) \leq 3$.

Em $[0, 7] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(N(u_1) \cap V(B)))$, existem pelo menos $5 - |N(u_1) \cap V(B)| = t + 1$ cores disponíveis. Notemos que $r \leq 1$. Se $r = 0$, então atribuamos injetivamente t cores aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$. Consideremos então $r = 1$. Como $g = 3$, temos que possivelmente B_1 é um ciclo de três vértices e, portanto, v_1 e v_2 são adjacentes. Logo, caso B_1 possua três vértices, devemos definir f em v_1 e v_2 de modo que $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 2$. Escolhamos duas cores b e c, $b < c$, dentre as disponíveis para $N(u_1) \setminus V(B)$ de forma que $c \geq b + 2$. Tais escolhas são possíveis porque há pelo menos $t + 1 \geq 3$ cores disponíveis. Definamos $f(v_1) := b$ e $f(v_2) := c$. Se $t = 3$, então há pelo menos uma cor d disponível para v_3, e definamos $f(v_3) := d$. Sejam $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\ell$ os vértices de B_1 tais que

$E(B_1) = \{w_1w_2,\ w_2w_3,\ \ldots,\ w_{\ell-1}w_\ell,\ w_\ell w_1\}$, $w_1 = v_1$, $w_2 = u_1$ e $w_3 = v_2$. Definamos f em $\{w_4, w_5, \ldots, w_\ell\}$.

$$f(w_i) := \begin{cases} b & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ f(u_1) & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ c & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, redefinimos f em w_ℓ. Como $|[0,7] \setminus \{f(u_1), b-1, b, b+1, c-1, c, c+1\}| \geq 1$, há uma cor c' disponível para w_ℓ. Definamos $f(w_\ell) := c'$.

Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinimos f em $w_{\ell-1}$ e w_ℓ. Seja $A_\ell = [0,7] \setminus \{f(u_1), b-1, b, b+1, c\}$, e $A_{\ell-1} = [0,7] \setminus \{f(u_1), b, c-1, c, c+1\}$. Temos que $|A_{\ell-1}| \geq 3$ e $|A_\ell| \geq 3$. É fácil verificar que existem $c' \in A_{\ell-1}$ e $c'' \in A_\ell$ tais que $|c' - c''| \geq 2$. Definamos $f(w_{\ell-1}) = c'$ e $f(w_\ell) = c''$. □

Teorema 4.6. *Se $\Delta = 3$ e $g = 3$, então $\lambda(G) \leq 6$.*

Prova. Neste caso, $\mathcal{F}_{\Delta,g}$ é o conjunto de todas as 6-$L(2,1)$-colorações de G' com a seguinte restrição: para cada bloco B de G' tal que $V(B) = \{u_1, u_2\}$, se $N(u_1) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então $(f(u_1), f(u_2)) \notin \{(0,6), (1,6), (5,0), (6,0)\}$.

Suponhamos que $f(u_1) \geq 3$. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0,6]$ f^R, temos que $f^R(u_1) \leq 3$. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) \leq 3$.

Em $[0,6] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(N(u_1) \cap V(B)))$, existem pelo menos $4 - |N(u_1) \cap V(B)| = t+1$ cores disponíveis. Notemos que $r \leq 1$. Suponhamos que $r = 0$. Se $f(u_1) \in \{1,2,3\}$, então atribuamos injetivamente t cores aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$; caso contrário, $f(u_1) = 0$, e atribuamos injetivamente as cores em $\{2,3,4\} \setminus f(N(u_1) \cap V(B))$ aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$.

Consideremos então $r = 1$. Temos que B é um K_2. Seja u_2 o único vizinho de u_1 em $V(B)$. Se $f(u_1) \in \{0,1\}$, então, pela Propriedade 4, $f(u_2) \neq 6$, e definamos $f(v_1) := c'$ e $f(v_2) := 6$, onde c' é alguma cor em $\{3,4\} \setminus \{f(u_2)\}$. Se $f(u_1) = 2$ e $f(u_2) = 0$, então $f(v_1) := 4$ e $f(v_2) := 6$; se $f(u_1) = 2$ e $f(u_2) \in \{4,5,6\}$, então $f(v_1) := 0$ e $f(v_2) := c'$, onde c' é alguma cor em $\{4,5\} \setminus \{f(u_2)\}$. Se $f(u_1) = 3$ e $f(u_2) \in \{0,1\}$, então $f(v_1) := c'$ e $f(v_2) := 6$, onde c' é alguma cor em $\{0,1\} \setminus \{f(u_2)\}$; se $f(u_1) = 3$ e $f(u_2) \in \{5,6\}$, então $f(v_1) := 0$ e $f(v_2) := c'$, onde c' é alguma cor em $\{5,6\} \setminus \{f(u_2)\}$. Notemos que, em todos os casos, $|f(v_1) - f(v_2)| \geq 2$ e $\{f(v_1), f(v_2)\} \cap \{0,6\} \neq \emptyset$.

Sejam $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_\ell$ os vértices de B_1 tais que $E(B_1) = \{w_1w_2,\ w_2w_3,\ \ldots,$

$w_{\ell-1}w_\ell$, $w_\ell w_1\}$, $w_1 = v_1$, $w_2 = u_1$ e $w_3 = v_2$. Definamos f em $\{w_4, w_5, \ldots, w_\ell\}$.

$$f(w_i) := \begin{cases} f(v_1) & \text{se } i \equiv 1 \pmod 3, \\ f(u_1) & \text{se } i \equiv 2 \pmod 3, \\ f(v_2) & \text{se } i \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Se $\ell \equiv 1 \pmod 3$, redefinimos f em w_ℓ. Porque $f(v_1) = 0$ ou $f(v_2) = 6$, $|[0, 6] \setminus \{f(u_1), f(v_1) - 1, f(v_1), f(v_1) + 1, f(v_2) - 1, f(v_2), f(v_2) + 1\}| \geq 1$ e há uma cor c' disponível para w_ℓ. Definamos $f(w_\ell) := c'$.

Se $\ell \equiv 2 \pmod 3$, redefinimos f em $w_{\ell-1}$ e w_ℓ. Se $f(u_1) \in \{0, 1\}$ e $f(v_1) = 3$, então $f(w_{\ell-1}) := 2$ e $f(w_\ell) := 5$; se $f(u_1) \in \{0, 1\}$ e $f(v_1) = 4$, então $f(w_{\ell-1}) := 3$ e $f(w_\ell) := c'$, onde c' é alguma cor em $\{0, 1\} \setminus \{f(u_1)\}$. Se $f(u_1) = 2$ e $f(v_1) = 0$, então $f(w_{\ell-1}) := 1$ e $f(w_\ell) := 3$; se $f(u_1) = 2$ e $f(v_2) = 6$, então $f(w_{\ell-1}) := 3$ e $f(w_\ell) := 1$. Se $f(u_1) = 3$, então $f(w_{\ell-1}) := 2$ e $f(w_\ell) := 4$. $\square$

Os limites dos teoremas 4.5 e 4.6 são justos e são atingidos pelos grafos na Figura 4.2. A demonstração de que estes grafos atingem o limite é feita no Capítulo 5.

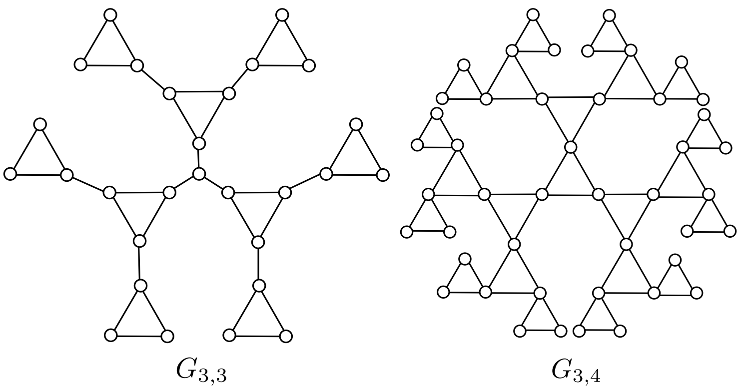

Figura 4.2: $\lambda(G_{3,3}) = \Delta(G_{3,3}) + 3$ e $\lambda(G_{3,4}) = \Delta(G_{3,4}) + 3$.

Capítulo 5

Grafos de blocos

Um grafo é um *grafo de blocos* se é conexo e todo bloco é um grafo completo. Vemos que a classe dos grafos de blocos cujos números-clique são no máximo dois equivale à classe das árvores. Assim, neste capítulo, restringimo-nos aos grafos de blocos cujos números-clique são pelo menos três.

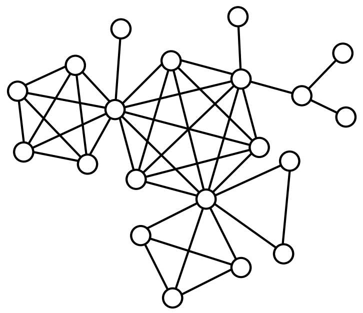

Figura 5.1: Um grafo de blocos.

Bonomo e Cerioli [4] provaram um limite superior justo para o número $L(2,1)$-cromático de grafos de blocos. As autoras também mostraram que, para cada $q \geq 3$, existe um grafo de blocos cujo número-clique é igual a 3 e cujo grau máximo é igual a q tal que seu número $L(2,1)$-cromático é igual ao limite obtido. Começamos apresentando estes resultados. Adaptamos a demonstração do limite de Bonomo e Cerioli para mostrar que grafos com conectividade igual a um e com uma determinada relação entre o grau máximo e o tamanho do maior bloco satisfazem a Conjectura de Griggs e Yeh.

No restante do capítulo, apresentamos nossos resultados: para cada $p \geq 4$, para cada $q \geq p$, mostramos um limite superior para o número $L(2,1)$-cromático dos grafos de blocos tais que o número-clique é igual a p e o grau máximo é igual a q. Em vários casos, os limites obtidos são justos.

A demonstração do limite de Bonomo e Cerioli e também as demonstrações dos nossos limites têm o formato: [ordenação π dos vértices do grafo] $\rightarrow$ [algoritmo de $L(2,1)$-coloração cujas entradas são o grafo e π] $\rightarrow$ [análise do maior comprimento possível de uma $L(2,1)$-coloração realizada pelo algoritmo], e a ordenação π é tal que cada bloco possui no máximo um "bloco pai" que o antecede, e, a cada iteração, o algoritmo atribui cor a todos os vértices dos blocos não coloridos que compartilham uma articulação com um bloco já colorido.

5.1 Limite de Bonomo e Cerioli

Dado um grafo conexo G, denominemos um bloco de G *um bloco terminal* se este corresponde a uma folha na árvore de articulações e blocos de G (a árvore de articulações e blocos de um grafo é a árvore T definida na Proposição 4.1). Um bloco terminal de G contém no máximo uma articulação de G.

A seguir, o limite superior para o número $L(2,1)$-cromático de grafo de blocos provado por Bonomo e Cerioli [4].

Teorema 5.1 ([4]). *Seja G um grafo de blocos com $\omega(G) = \omega$ e $\Delta(G) = \Delta$. Então, $\lambda(G) \leq \max\{\Delta + 2, \min\{3\omega - 2, \Delta + \omega\}\}$.*

Prova. Por indução no número de blocos b. Para um grafo H qualquer, seja $\sigma(H) := \max\{\Delta(H) + 2, \min\{3\omega(H) - 2, \Delta(H) + \omega(H)\}\}$. Se $b = 1$, então G é um grafo completo, $\omega = |V(G)|$ e $\Delta = |V(G)| - 1$. Assim, $\sigma(G) = \max\{|V(G)|+1, \min\{3|V(G)|-2, 2|V(G)|-1\}\} = 2|V(G)|-1 > 2|V(G)|-2 = \lambda(G)$, onde a última igualdade segue da Proposição 2.5. Suponhamos então que $b > 1$ e que todo grafo de blocos G' com menos do que b blocos tenha uma $\sigma(G')$-$L(2,1)$-coloração.

Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_p$, com $p \geq 2$, blocos de G tais que existe uma articulação v de G comum a todos $B_1, B_2, \ldots, B_p$; para cada $2 \leq i \leq p$, B_i é um bloco terminal; e $|V(B_2)| \geq |V(B_3)| \geq \ldots \geq |V(B_p)|$. Para cada $1 \leq i \leq p$, seja $V_i := V(B_i)$. Seja $G' := G - \left(\bigcup_{2\leq i\leq p} V_i \setminus \{v\}\right)$. Pela hipótese de indução e porque $\Delta(G') \leq \Delta$ e $\omega(G') \leq \omega$, existe uma $\sigma(G)$-$L(2,1)$-coloração f de G'. Vamos estender f a uma $\sigma(G)$-$L(2,1)$-coloração de G.

Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_t$ as cores disponíveis para $\bigcup_{2\leq i\leq p} V_i \setminus \{v\}$ tais que $c_1 < c_2 < \cdots < c_t$. É possível estender f se $t \geq \left|\bigcup_{2\leq i\leq p} V_i \setminus \{v\}\right| = \sum_{2\leq i\leq p} |V_i| - p + 1$ e $t \geq 2|V_2 \setminus \{v\}| - 1 = 2|V_2| - 3$; ou seja, se $t \geq \max\left\{\sum_{2\leq i\leq p} |V_i| - p + 1,\ 2|V_2| - 3\right\}$. Tomando os vértices em $V_2 \setminus \{v\}$, seguidos dos vértices em $V_3 \setminus \{v\}$, ..., e, por fim, os vértices em $V_p \setminus \{v\}$, atribuem-se as cores c_1, c_3, ..., $c_{2\lceil \frac{t}{2}\rceil-1}$, c_2, c_4, ..., $c_{2\lfloor \frac{t}{2}\rfloor}$.

Temos que $t = |[0, \sigma(G)] \setminus (\{f(v) - 1, f(v) + 1\} \cup f(V_1))| \geq \sigma(G) - 1 - |V_1|$. Claramente, $\sigma(G) - 1 - |V_1| \geq \max\left\{\sum_{2\leq i\leq p} |V_i| - p + 1,\ 2|V_2| - 3\right\}$ se, e somente se, $\sigma(G) \geq \max\left\{\sum_{1\leq i\leq p} |V_i| - p + 2, 2|V_2| + |V_1| - 2\right\}$. Notemos que $\sum_{1\leq i\leq p} |V_i| - p + 2$ $= d_G(v) + 2 \leq \Delta + 2 \leq \sigma(G)$. Ainda, $2|V_2| + |V_1| - 2 \leq 3\omega - 2$ e $2|V_2| + |V_1| - 2 =$

$(|V_1| + |V_2| - 2) + |V_2| \leq d_G(v) + \omega \leq \Delta + \omega$. Logo, $2|V_2| + |V_1| - 2 \leq \min\{3\omega - 2, \Delta + \omega\} \leq \sigma(G)$. Portanto, $\sigma(G) \geq \max\left\{\sum_{1\leq i\leq p} |V_i| - p + 2,\ 2|V_2| + |V_1| - 2\right\}$ e f pode ser estendida a uma $\sigma(G)$-$L(2,1)$-coloração de G. □

Seja G um grafo de blocos com $\Delta(G) = \Delta \geq 3$ e $\omega(G) = \omega \geq 2$. O Teorema 5.1 implica que G satisfaz a Conjectura de Griggs e Yeh: $\lambda(G) \leq \Delta + \omega \leq 2\Delta + 1 < \Delta^2$. Na Seção 5.3, analisamos a justeza do limite de Bonomo e Cerioli.

O seguinte corolário do Teorema 5.1 será bastante usado ao longo deste capítulo.

Corolário 5.1. *Sejam $p, q, t \geq 1$ inteiros, e seja $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ um conjunto de t inteiros distintos. Se $t \geq \max\{q, 2p - 1\}$, então, para todo $1 \leq s \leq q$, existe uma família $\mathcal{A}_s$ de s subconjuntos dois a dois disjuntos de $\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ tal que o maior subconjunto de $\mathcal{A}_s$ tem p elementos e cada subconjunto de $\mathcal{A}_s$ consiste de inteiros não consecutivos.*

5.2 Um limite para grafos gerais

Seja G um grafo conexo, e $p(G) := \max\{|V(B)| : B \text{ é um bloco de } G\}$. Em particular, se G é um grafo de blocos, temos que $p(G) = \omega(G)$. Mostramos, a seguir, que pode-se adaptar a prova do Teorema 5.1 de modo a obter um limite superior para $\lambda(G)$ que é uma função de $\Delta(G)$ e de $p(G)$.

Teorema 5.2. *Seja G um grafo conexo com $\Delta(G) = \Delta$ e $p(G) = p$. Então, $\lambda(G) \leq \max\{\Delta + 2, 3p\}$.*

Prova. Por indução no número de blocos b. Para um grafo conexo H qualquer, seja $\sigma(H) := \max\{\Delta(H) + 2, 3p(H)\}$. Se $b = 1$, então $p = |V(G)|$. Assim, $\sigma(G) = \max\{\Delta + 2, 3|V(G)|\} = 3|V(G)| > 2|V(G)| - 2 \geq \lambda(G)$. Suponhamos então que $b > 1$ e que todo grafo de blocos G' com menos do que b blocos tenha uma $\sigma(G')$-$L(2,1)$-coloração.

Sejam $B_1, B_2, \ldots, B_p$, com $p \geq 2$, blocos de G tais que existe uma articulação v de G comum a todos $B_1, B_2, \ldots, B_p$; para cada $2 \leq i \leq p$, B_i é um bloco terminal; e $|V(B_2)| \geq |V(B_3)| \geq \ldots \geq |V(B_p)|$. Para cada $1 \leq i \leq p$, seja $V_i := V(B_i)$. Seja $\langle v_1, v_2, \ldots, v_s\rangle$ uma ordenação de $N(v) \cap (V_2 \cup \cdots \cup V_p)$ tal que nas primeiras $|N(v) \cap V_2|$ posições estão os vértices de $N(v) \cap V_2$, nas $|N(v) \cap V_3|$ posições seguintes estão os vértices de $N(v) \cap V_3$, …, e nas últimas $|N(v) \cap V_p|$ posições estão os vértices de $N(v) \cap V_p$. Seja $G' := G - \left(\bigcup_{2\leq i\leq p} V_i \setminus \{v\}\right)$. Pela hipótese de indução e porque $\Delta(G') \leq \Delta$ e $p(G') \leq p$, existe uma $\sigma(G)$-$L(2,1)$-coloração f de G'. Vamos estender f a uma $\sigma(G)$-$L(2,1)$-coloração de G.

Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_t$ as cores disponíveis para $N(v) \cap (V_2 \cup \cdots \cup V_p)$ tais que $c_1 < c_2 < \cdots < c_t$. Temos que $t = |[0, \sigma(G)] \setminus (\{f(v) - 1, f(v), f(v) + 1\} \cup f(N(v) \cap V_1))| \geq$

$\sigma(G)-1-|V_1|$. Claramente, $\sigma(G)-1-|V_1| \geq \Delta+1-|V_1| \geq |N(v)\cap(V_2\cup\cdots\cup V_p)|$. E $\sigma(G)-1-|V_1| \geq 3p-1-|V_1| \geq 2p-1 > 2p-3 \geq 2|V_2 \setminus \{v\}|-1$. Definamos $f(v_1) := c_1, \ldots, f(v_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}) := c_{2\lceil \frac{t}{2} \rceil - 1}$, $f(v_{\lceil \frac{t}{2} \rceil + 1}) := c_2, \ldots, f(v_t) := c_{2\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}$ (ignoram-se os v_j tais que $j > s$).

Consideremos B_i, para algum $2 \leq i \leq p$. Falta atribuir cores a $V_i \setminus (v \cup N(v))$. Como $t \geq 2p-1$, dentre $c_1, \ldots, c_t$, há pelo p cores c_j tais que j é ímpar e pelo menos $p-1$ cores c_j tais que j é par. Observemos que $|\{c_5, \ldots, c_{2p-1}, c_2\}| = |\{c_7, \ldots, c_{2p-1}, c_2, c_4\}| = \cdots = \{c_{2p-1}, c_2, c_4, \ldots, c_{2p-4}\}| = p-1$. Seja $\ell := |N(v)\cap V_i|$, e sejam $c_{j_1}, \ldots, c_{j_\ell}$ as cores dentre $c_1, \ldots, c_t$ que pertencem a $N(v)\cap V_i$ tais que $c_{j_1} < \cdots < c_{j_\ell}$. Notemos que, pela forma como foram atribuídas as cores $c_1, \ldots, c_t$, as possibilidades de paridades de j_1 e j_ℓ são: j_1 e j_ℓ ímpares; j_1 e j_ℓ pares; e j_1 ímpar e j_ℓ par (j_1 par e j_ℓ ímpar é impossível). Seja $A := \{c_1, c_3, \ldots, c_{2p-3}\}$, se j_1 e j_ℓ são ímpares; $A := \{c_2, c_4, \ldots, c_{2p-2}\}$, se j_1 e j_ℓ são pares; $A := \{c_{j_\ell+3}, \ldots, c_{2p-1}, c_2, \ldots, c_{j_\ell}\}$, se j_1 é ímpar e j_ℓ é par. Atribuamos injetivamente as cores em $A \setminus f(N(v) \cap V_i)$ aos vértices de $V_i \setminus (v \cup N(v))$. Assim, estendemos f a uma $\sigma(G)$-$L(2,1)$-coloração de G, como queremos. □

Pelo Teorema 5.2, se $\Delta \geq 3$ e $\Delta \geq p$, então $\lambda(G) \leq \Delta + 2 < \Delta^2$ ou $\lambda(G) \leq 3p \leq \Delta^2$ e, portanto, G satisfaz a Conjectura de Griggs e Yeh. Observemos que, se $\Delta \geq p$, então G possui pelo menos dois blocos, ou seja, não é 2-conexo.

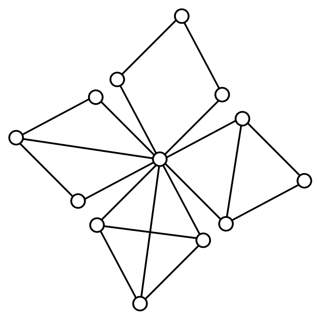

Figura 5.2: Um grafo com $\Delta \geq p$.

5.3 Subclasses $\mathcal{B}_{p,q}$

Seja G um grafo de blocos com grau máximo Δ e número-clique ω. Do Teorema 5.1,

- $\omega \leq \Delta \leq 2\omega - 2 \Rightarrow \lambda(G) \leq \Delta + \omega$;
- $2\omega - 2 \leq \Delta \leq 3\omega - 4 \Rightarrow \lambda(G) \leq 3\omega - 2$; e
- $3\omega - 4 \leq \Delta \Rightarrow \lambda(G) \leq \Delta + 2$.

Para cada $p \geq 3$, para cada $q \geq 3p-4$, seja $G_{p,q}$ o grafo de blocos tal que $V(G_{p,q}) := \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_{q-p+1}\} \cup \{y_1, y_2, \ldots, y_{q-p+1}\} \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_{q-p+1}\}$ e $E(G_{p,q}) := \{u_i u_j : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{u_1 x_i : 1 \leq i \leq q-p+1\} \cup \{u_2 y_i : 1 \leq i \leq q-p+1\} \cup \{u_3 z_i : 1 \leq i \leq q-p+1\}$. Claramente, $\omega(G_{p,q}) = p$ e $\Delta(G_{p,q}) = q$. Pelo Corolário 2.1, $\lambda(G_{p,q}) \geq \Delta(G_{p,q}) + 2$. Vemos então que a cota superior do Teorema 5.1 é justa na classe de todos os grafos de blocos e que, mais especificamente, ela é a melhor possível em cada uma das subclasses $\mathcal{B}_{p,q} := \{G$ é um grafo de blocos : $\omega(G) = p$ e $\Delta(G) = q\}$ com $p \geq 3$ e $q \geq 3p-4$.

Nas seções subsequentes, analisamos a justeza do limite do Teorema 5.1 nas subclasses $\mathcal{B}_{p,q}$ tais que $p \geq 3$ e $p \leq q \leq 2p-2$. Bonomo e Cerioli [4] cobriram $\mathcal{B}_{3,3}$ e $\mathcal{B}_{3,4}$, concluindo que o limite permanece justo nestas subclasses. Apresentamos estes resultados nas seções sobre $\mathcal{B}_{p,p}$ e $\mathcal{B}_{p,p+1}$, respectivamente. Mostramos que o limite do Teorema 5.1 também é justo na subclasse $\mathcal{B}_{4,4}$, mas que o limite justo em $\mathcal{B}_{p,p}$, com $p \geq 5$, é uma unidade menor. Para cada $p \geq 5$ e $p \leq q \leq 2p-2$, provamos um limite uma unidade menor e, para algumas combinações destes valores de p e q, provamos que ele é justo.

As demonstrações dos nossos limites seguem o modelo adiante.

Teorema 5.3. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,q}$, com $p = q \geq 5$ ou $p \geq 4$ e $p \leq q \leq 2p-2$. Então, $\lambda(G) \leq p + q - 1$.*

Modelo da prova. Vamos definir recursivamente uma $(p+q-1)$-$L(2,1)$-coloração f de G. Definimos f em uma p-clique $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ de G conforme os casos para p e q tratados nas seções subsequentes.

Suponhamos que f esteja definida em exatamente b blocos de G, com $b \geq 1$, e

1. tais blocos induzam um subgrafo conexo G' de G (G' é um grafo de blocos tal que os blocos de G' são blocos de G);

2. para cada bloco B de G', se, para algum $u \in V(B)$, $N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então B seja o único bloco de G' que contenha o vértice u;

3. f seja uma $(p+q-1)$-$L(2,1)$-coloração de G';

4. $f \in \mathcal{F}_{p,q}$, onde $\mathcal{F}_{p,q}$ é o conjunto de todas as $(p+q-1)$-$L(2,1)$-colorações de G' com restrições sobre as cores nos blocos de $q-p+2$ vértices e possivelmente outras restrições.

Se não existe um bloco B de G' tal que existe $u_1 \in V(B)$ com $N(u_1) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então $G' = G$, e, pela Propriedade 3, f é uma σ-$L(2,1)$-coloração de G, conforme queremos. Então, suponhamos que exista tal bloco B. Definimos f em todos os blocos de $G - V(G')$ que possuem o vértice u_1, de modo que as Propriedades 1 – 4 se mantenham no novo subgrafo colorido $G'' := G[V(G') \cup N(u_1)]$.

Sejam B_1, B_2, ..., B_r os blocos de $G - V(G')$ de $q-p+2$ vértices que contêm u_1 (se não há tais blocos, $r = 0$), e B_{r+1}, B_{r+2}, ..., B_s os outros blocos de $G - V(G')$ que contêm u_1. Seja $\langle v_1, v_2, \ldots, v_t \rangle$ uma ordenação de $\bigcup_{1 \le k \le s} V(B_k) \setminus \{u_1\}$ tal que nas primeiras $|V(B_1)|-1$ posições estão os vértices de $V(B_1) \setminus \{u_1\}$, nas $|V(B_2)|-1$ posições seguintes estão os vértices de $V(B_2) \setminus \{u_1\}$, ..., e nas $|V(B_s)| - 1$ últimas posições estão os vértices de $V(B_s) \setminus \{u_1\}$.

Como atribuímos cores a todos os blocos que contêm u_1 e somente a estes blocos, vemos que as Propriedades 1 e 2 valem em G''. Assim, basta nos concentrarmos na validade em G'' das Propriedades 3 e 4. Pela Propriedade 2, os vértices de B são os únicos que impõem restrições de cores em $N(u_1) \cap \bigcup_{1 \le i \le s} V(B_i)$. Seja $\ell := |V(B)|$. Com o fim de simplificação, consideremos apenas $d_G(u_1) = \Delta(G) = q$ ao longo da prova, o que não é restritivo. Portanto, $t = q - \ell + 1$.

Nas seções subsequentes, conforme os casos para p e q, explicitamos $\mathcal{F}_{p,q}$ e mostramos a definição concreta de f. □

5.4 $\mathcal{B}_{p,p}$

Apresentamos o grafo de blocos $G_{3,3} \in \mathcal{B}_{3,3}$, exibido originalmente por Bonomo e Cerioli [4], para o qual $\lambda(G_{3,3}) = 6$, e exibimos o grafo de blocos $G_{4,4} \in \mathcal{B}_{4,4}$, para o qual $\lambda(G_{4,4}) = 8$. Para $p \ge 5$, provamos que, para $G \in \mathcal{B}_{p,p}$, $\lambda(G) \le 2p - 1$ e exibimos um grafo de blocos $G_{p,p} \in \mathcal{B}_{p,p}$ tal que $\lambda(G_{p,p}) = 2p - 1$.

As possíveis configurações de uma $(2p-1)$-$L(2,1)$-coloração em uma p-clique são expostas a seguir.

Proposição 5.1. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p}$. Se existe uma $(2p-1)$-$L(2,1)$-coloração f de G, então as possíveis configurações de f em uma p-clique $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ são: $\{0, 2, \ldots, 2p-2\}$, $\{1, 3, \ldots, 2p-1\}$ e $\{0, 2, \ldots, 2k, 2k+3, 2k+5, \ldots, 2p-1\}$ para cada $0 \le k \le p-2$.*

Prova. Trivial. □

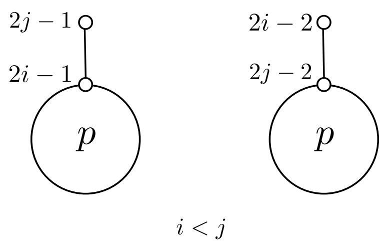

Figura 5.3: Configurações proibidas da Proposição 5.2.

As seguintes configurações são proibidas em uma $(2p-1)$-$L(2,1)$-coloração.

Proposição 5.2. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p}$. Sejam B e B_1 dois blocos de G tais que $V(B) = \{u_1, u_2\}$ e $V(B_1) = \{u_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Se existe uma $(2p-1)$-$L(2,1)$-coloração f de G, então as seguintes configurações de f são proibidas:*

1. *$f(u_1) = 2i - 1$ e $f(u_2) = 2j - 1$, para algum $1 \leq i < j \leq p$; e*
2. *$f(u_1) = 2j - 2$ e $f(u_2) = 2i - 2$, para algum $1 \leq i < j \leq p$.*

Prova. Suponhamos que exista uma $(2p-1)$-$L(2,1)$-coloração f de G. Suponhamos por contradição que $f(u_1) = 2i - 1$ e $f(u_2) = 2j - 1$, para algum $1 \leq i < j \leq p$. Pela Proposição 5.1, se uma cor ímpar $2k + 1$ está atribuída a algum vértice de uma p-clique, então todas as cores ímpares maiores do que $2k + 1$ também estão atribuídas a vértices de tal p-clique. A p-clique $V(B_1)$ possui um vértice cuja cor é $2i - 1$ (o vértice u_1), mas ela evita a cor $2j - 1$. Temos, assim, uma contradição. Logo, a Configuração 1 é proibida.

Observemos que f possui a Configuração 2 se, e somente se, o reverso de f em relação a $[0, 2p-1]$ possui a Configuração 1. Portanto, a proibição da Configuração 1 implica a proibição da Configuração 2. $\square$

O limite de Bonomo e Cerioli é justo para $p = 3$.

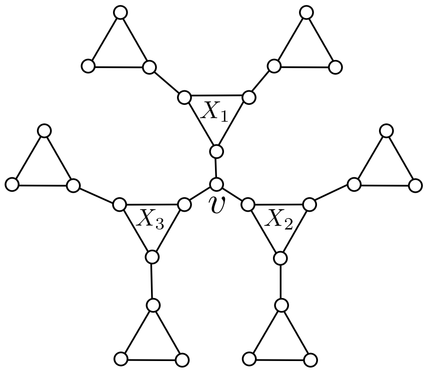

Figura 5.4: $G_{3,3}$.

Proposição 5.3 ([4]). *Seja $G_{3,3}$ o grafo na Figura 5.4. Então, $\lambda(G_{3,3}) = 6$.*

Prova. Suponhamos por contradição que exista uma 5-$L(2,1)$-coloração f de $G_{3,3}$. Para cada 3-clique X em $G_{3,3}$, temos que $f(X) \in \{\{0,2,4\}, \{0,2,5\}, \{0,3,5\}, \{1,3,5\}\}$. Sejam $X = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $X' = \{v_4, v_5, v_6\}$ 3-cliques de $G_{3,3}$ tais que $v_1v_4 \in E(G_{3,3})$. Se $f(X) = \{0,2,5\}$, temos que $f(v_1) \notin \{2,5\}$. De fato, $f(v_1) = 2$ implica $f(v_4) = 4$, mas não podemos ter $f(X') = \{0,2,4\}$, e $f(v_1) = 5$ implica $f(v_4) \in \{1,3\}$, mas não podemos ter $f(X') \in \{\{0,3,5\}, \{1,3,5\}\}$. Analogamente, se $f(X) = \{0,3,5\}$, temos que $f(v_1) \notin \{0,3\}$. Logo, $f(X_1), f(X_2), f(X_3) \in \{\{0,2,4\}, \{1,3,5\}\}$. Se existem $i, j \in \{1,2,3\}$ tais que $f(X_i) \neq f(X_j)$, não há cor disponível para v. Portanto, $f(X_1) = f(X_2) = f(X_3)$. Mas, em ambas as possibilidades para $f(X_i)$, não há cor disponível para v, uma contradição. $\square$

O limite de Bonomo e Cerioli também é justo para $p = 4$.

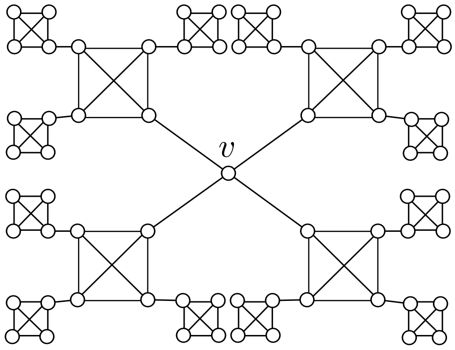

Figura 5.5: $G_{4,4}$.

Proposição 5.4. *Seja $G_{4,4}$ o grafo de blocos da Figura 5.5. Então, $\lambda(G_{4,4}) = 8$.*

Prova. Suponhamos por contradição que exista uma 7-$L(2,1)$-coloração f de $G_{4,4}$. Analisemos os possíveis valores de $f(v)$. Notemos que basta considerar os casos em que $f(v)$ é ímpar; se $f(v)$ é par, então o reverso de f em relação a $[0,7]$ é uma 7-$L(2,1)$-coloração de G com $f^R(v)$ ímpar.

- $f(v) = 7$: No máximo $|\{0,2,4\}| = 3$ cores pares estão atribuídas em $N(v)$, de modo que, para algum vizinho w de v, $f(w)$ é ímpar (menor do que 7). Logo, pela Proposição 5.2, f tem uma configuração proibida do tipo 1. Então, $f(v) \neq 7$.

- $f(v) = 5$: No máximo $|\{0,2\}| = 2$ cores pares estão atribuídas em $N(v)$, de modo que, para algum vizinho w de v, $f(w)$ é um ímpar menor do que 5. Logo, pela Proposição 5.2, f tem uma configuração proibida do tipo 1. Então, $f(v) \neq 5$.

- $f(v) = 3$: Temos que $f(N(v)) = \{0,5,6,7\}$, pois, se $1 \in f(N(v))$, então, pela Proposição 5.2, f tem uma configuração proibida do tipo 1. Seja w o vizinho de v tal que $f(w) = 5$, e seja $\{w, x_1, x_2, x_3\}$ a 4-clique que contém w. Pela Proposição 5.1, $f(\{x_1,x_2,x_3\}) = \{0,2,7\}$. Sem perda de generalidade, $f(x_1) = 2$. Seja y o vizinho de x_1 que não w, x_2 nem x_3. Temos que $f(y)$ é um par maior do que 2, logo, pela Proposição 5.2, f tem uma configuração proibida do tipo 2. Então, $f(v) \neq 3$.

- $f(v) = 1$: No máximo $|\{4,6\}| = 2$ cores pares estão atribuídas em $N(v)$. Logo, para algum vizinho w de v, temos que $f(w) \in \{3,5\}$. Seja $\{w, x_1, x_2, x_3\}$ a 4-clique que contém w. Suponhamos que $f(w) = 3$. Pela Proposição 5.1, $f(\{x_1,x_2,x_3\}) = \{0,5,7\}$. Sem perda de generalidade, $f(x_1) = 0$. Seja y o vizinho de x_1 que não w, x_2 nem x_3. Temos que $f(y)$ é par (maior do que 0), logo, pela Proposição 5.2, f tem uma configuração proibida do tipo 2. Portanto, $f(w) = 5$. Pela Proposição 5.1, $f(\{x_1, x_2, x_3\}) \in \{\{0, 2, 7\}, \{0, 3, 7\}\}$. Sem perda de generalidade, x_1 é o vértice de cor 2, se $f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{0, 2, 7\}$; e x_1 é o vértice de cor 0 se $f(\{x_1, x_2, x_3\}) = \{0, 3, 7\}$. O vizinho y de x_1 que não w, x_2 nem x_3 tem uma cor par maior do que a de x_1, logo, pela Proposição 5.2, f tem uma configuração proibida do tipo 2. Então, $f(v) \neq 1$.

Portanto, $f(v) \notin [0, 7]$, uma contradição. □

Teorema 5.4. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p}$. Se $p \geq 5$, então $\lambda(G) \leq 2p - 1$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ aos vértices da p-clique inicial $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{p,p}$ é o conjunto de todas as $(2p-1)$-$L(2,1)$-colorações de G' com as seguintes restrições:

- se existem um bloco B de G' com $V(B) = \{u_1, u_2\}$ e um bloco B_1 de $G - V(G')$ com $V(B_1) = \{u_1, v_2, \ldots, v_p\}$, então $(f(u_1), f(u_2)) \notin \{(2i-1, 2j-1) : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{(2j-2, 2i-2) : 1 \leq i < j \leq p\} \cup \{(3,1), (5,1), (5,3), (2p-4, 2p-6), (2p-2, 2p-6), (2p-2, 2p-4)\}$;

- para cada bloco B de G', se, para algum $u \in V(B)$, $N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, cada bloco de $G - V(G')$ que contém u é um K_2 e $f(u) \in \{2p-3, 2p-1\}$, então existe $v \in V(B)$ tal que $f(v)$ é ímpar e $f(v) < f(u)$;

- para cada bloco B de G', se, para algum $u \in V(B)$; $N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, cada bloco de $G - V(G')$ que contém u é um K_2 e $f(u) \in \{0, 2\}$, então existe $v \in V(B)$ tal que $f(v)$ é par e $f(v) > f(u)$;

- para cada bloco B de G' com $2 \leq |V(B)| \leq p-1$, $f(V(B))$ consiste de pelo menos $|V(B)| - 1$ cores de mesma paridade e todas as cores em $f(\{u \in V(B) : N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset\})$ têm a mesma paridade.

Suponhamos que $f(u_1)$ seja par. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 2p-1]$ f^R, temos que $f^R(u_1)$ é ímpar. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) = 2j - 1$, para algum $1 \leq j \leq p$.

Suponhamos que $2 \leq \ell \leq p-1$ e que haja exatamente $\ell - 1$ cores ímpares em $f(V(B))$. Seja u_2 o vértice de B cuja cor é par; $a_1, a_2, \ldots, a_{p-3}$ $p-3$ cores dentre as pertencentes a $\{0, 2, \ldots, 2p-2\} \setminus \{2j-2, 2j, f(u_2)\}$ tais que $a_1 > a_2 > \cdots > a_{p-3}$; e $b_1, b_2, \ldots, b_{p-\ell+1}$ as $p - \ell + 1$ cores pertencentes a $\{1, 3, \ldots, 2p-1\} \setminus f(V(B))$ tais que $b_1 < b_2 < \cdots < b_{p-\ell+1}$. Consideremos primeiramente $0 \leq r \leq p - \ell - 1$. Para cada $1 \leq k \leq r$, $f(v_k) := a_k$. Se algum v_{k_1} recebe a cor 0 e todos os blocos de $G - V(G')$

que contêm v_{k_1} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_1}) := b_1$; se algum v_{k_2} recebe a cor 2 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_2} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_2}) := b_2$. Atribuamos injetivamente as cores em $\{b_1, b_2, \ldots, b_{p-\ell+1}\} \setminus \{f(v_{k_1}), f(v_{k_2})\}$ aos vértices em $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{p-\ell+1}\}$. Observemos que, se $r \geq p - \ell$, então $r = p - \ell + 1$. Consideremos $r = p - \ell + 1$. Pela Propriedade 4, se $\ell = 2$, então $f(u_1) \notin \{2p-3, 2p-1\}$; e, se $\ell = 3$ e $f(u_1) \in \{2p-3, 2p-1\}$, então existe um vértice u_3 em $V(B)$ tal que $f(u_3)$ é ímpar e $f(u_3) < f(u_1)$. Seja

$$A := \begin{cases} \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-3}, 2p-3, 2p-1\} & \text{se } \ell = 2, \\ \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-3}, 2p-3, 2p-1\} \setminus \{f(u_3)\} & \text{se } \ell = 3 \text{ e } f(u_1) \leq 2p-5, \\ \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-3}, 2p-1\} & \text{se } \ell = 3 \text{ e } f(u_1) = 2p-3, \\ \{0, 2, \ldots, 2p-4\} \setminus \{f(u_2)\} & \text{se } \ell = 3 \text{ e } f(u_1) = 2p-1, \\ \{a_1, a_2, \ldots, a_{p-3}\} & \text{se } 4 \leq \ell \leq p-1. \end{cases}$$

Atribuamos injetivamente as cores em A aos vértices em $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-\ell+1}\}$. Se algum v_{k_1} recebe a cor 0 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_1} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_1}) := b_1$; se algum v_{k_2} recebe a cor 2 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_2} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_2}) := b_2$.

Suponhamos que $3 \leq \ell \leq p - 1$ e que haja ℓ cores ímpares em $f(V(B))$. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ $p-2$ cores dentre as pertencentes a $\{0, 2, \ldots, 2p-2\} \setminus \{2j-2, 2j\}$ tais que $a_1 > a_2 > \cdots > a_{p-2}$; e $b_1, b_2, \ldots, b_{p-\ell}$ as $p - \ell$ cores pertencentes a $\{1, 3, \ldots, 2p-1\} \setminus f(V(B))$ tais que $b_1 < b_2 < \cdots < b_{p-\ell}$. Como $p - 2 \geq 3$, temos que $a_1 \notin \{0, 2\}$. Consideremos primeiramente $r = 0$. Definamos $f(v_1) := a_1$ e $f(v_2) := a_{p-2}$, e atribuamos injetivamente as cores em $\{a_2, a_3, \ldots, a_{p-3}\}$ aos vértices em $\{v_3, v_4, \ldots, v_{p-\ell+1}\}$. Consideremos $1 \leq r \leq p - \ell + 1$. Para cada $1 \leq k \leq r$, $f(v_k) := a_k$. Se algum v_{k_1} recebe a cor 0 ou 2 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_1} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_1}) := b_1$; se algum v_{k_2}, diferente de v_{k_1}, recebe a cor 2 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_2} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_2}) := b_2$. Observemos que, se $\ell = p - 1$, então $f(v_1) = a_1 \notin \{0, 2\}$ e possivelmente $f(v_2) \in \{0, 2\}$. Atribuamos injetivamente as cores em $\{b_1, b_2, \ldots, b_{p-\ell}\} \setminus \{f(v_{k_1}), f(v_{k_2})\}$ aos vértices em $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{p-\ell+1}\}$.

Suponhamos agora que $\ell = 2$ e que $f(u_2)$ seja ímpar, onde u_2 é o vértice de B que não u_1. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{p-2}$ $p-2$ cores dentre as pertencentes a $\{0, 2, \ldots, 2p-2\} \setminus \{2j-2, 2j\}$ tais que $a_1 > a_2 > \cdots > a_{p-2}$; e $b_1, b_2, \ldots, b_{p-2}$ as $p-2$ cores pertencentes a $\{1, 3, \ldots, 2p-1\} \setminus f(V(B))$ tais que $b_1 < b_2 < \cdots < b_{p-2}$. Como $p - 2 \geq 3$, temos que $a_1 \notin \{0, 2\}$. Seja $\ell_1 := |V(B_1)|$. Consideremos $r = 0$ e $\ell_1 = p$. Pela Propriedade 4, $f(u_2) < f(u_1)$ e $7 \leq f(u_1) \leq 2p - 1$. Para cada $1 \leq k \leq j - 1$, $f(v_k) := 2k - 2$, e, para cada $j + 1 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k - 1$.

Notemos que $\{0,2,4\} \subset f(V(B_1))$. Agora consideremos $r = 0$ e $3 \leq \ell_1 \leq p-1$. Definamos $f(v_1) := a_1$ e $f(v_2) := a_{p-2}$; atribuamos injetivamente as cores em $\{a_2, a_3, \ldots, a_{p-3}\}$ aos vértices em $\{v_3, v_4, \ldots, v_{\ell_1}\}$; e atribuamos injetivamente as cores em $\{b_1, b_2, \ldots, b_{p-2}\}$ aos vértices em $\{v_{\ell_1+1}, v_{\ell_1+1}, \ldots, v_{p-1}\}$. Consideremos então $1 \leq r \leq p-1$. Para cada $1 \leq k \leq r$, $f(v_k) := a_k$. Se algum v_{k_1} recebe a cor 0 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_1} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_1}) := b_1$; se algum v_{k_2} recebe a cor 2 e todos os blocos de $G - V(G')$ que contêm v_{k_2} são K_2, então redefinamos $f(v_{k_2}) := b_2$. Atribuamos injetivamente as cores em $\{b_1, b_2, \ldots, b_{p-\ell}\} \setminus \{f(v_{k_1}), f(v_{k_2})\}$ aos vértices em $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_{p-\ell+1}\}$.

Finalmente, suponhamos que $\ell = p$. Pela Proposição 5.1, $f(V(B)) = \{1, 3, \ldots, 2p-1\}$ ou $f(V(B)) = \{0, 2, \ldots, 2k-4, 2k-1, \ldots, 2p-1\}$, para algum $2 \leq k \leq j$. Consideremos $f(V(B)) = \{1, 3, \ldots, 2p-1\}$. Como $p - 4 \geq 1$, $\{4, 6, \ldots, 2p-2\} \setminus \{2j-2, 2j\} \neq \emptyset$. Definamos $f(v_1) := a$, para alguma cor $a \in \{4, 6, \ldots, 2p-2\} \setminus \{2j-2, 2j\}$. Consideremos então $f(V(B)) = \{0, 2, \ldots, 2k-4, 2k-1, \ldots, 2p-1\}$. Se $f(u_1) \leq 2p-5$, então $f(v_1) := 2p-2$. Se $f(u_1) = 2p-3$, então, pela Proposição 5.1, $f(V(B)) \neq \{0, 2, \ldots, 2p-6, 2p-3, 2p-1\}$, e definamos $f(v_1) := 2p-6$. Se $f(u_1) = 2p-1$, então, pela Proposição 5.1, $f(V(B)) \neq \{0, 2, \ldots, 2p-4, 2p-1\}$, e definamos $f(v_1) := 2p-4$.

Em todos os casos, as Propriedades 3 e 4 são válidas em G''. $\square$

O limite do Teorema 5.4 é justo.

Para $p \geq 5$, seja $G_{p,p}$ o grafo de blocos tal que $V(G_{p,p}) := \{v\} \cup \{x_{i,j} : 1 \leq i \leq p \text{ e } 1 \leq j \leq p\}$ e $E(G_{p,p}) := \{vx_{i,1} : 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_{i,j_1}x_{i,j_2} : 1 \leq i \leq p \text{ e } 1 \leq j_1 < j_2 \leq p\}$.

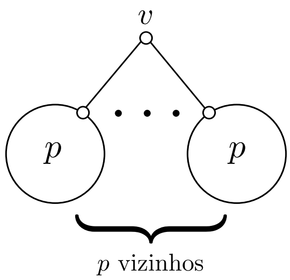

Figura 5.6: $G_{p,p}$, com $p \geq 5$.

Proposição 5.5. *Para $p \geq 5$, $\lambda(G_{p,p}) = 2p-1$.*

Prova. Pelo Teorema 5.4, $\lambda(G_{p,p}) \leq 2p-1$. Suponhamos por contradição que exista uma $(2p-2)$-$L(2,1)$-coloração f de $G_{p,p}$. Em $[0, 2p-2]$, há p cores pares e $p-1$ cores ímpares, logo, para toda p-clique $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$, $f(\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}) = \{0, 2, \ldots, 2p-2\}$. Se $f(v)$ é ímpar, então há no máximo $p-2$ vizinhos de cor par, e, se $f(v)$ é par, então no máximo $p-1$ vizinhos de v têm cor par. Temos, portanto, uma contradição. Assim, $\lambda(G_{p,p}) \geq 2p-1$. $\square$

5.5 $\mathcal{B}_{p,p+1}$

Apresentamos o grafo de blocos $G_{3,4} \in \mathcal{B}_{3,4}$, exibido originalmente por Bonomo e Cerioli [4], para o qual $\lambda(G_{3,4}) = 7$. Para $p \geq 4$, provamos que, para $G \in \mathcal{B}_{p,p+1}$, $\lambda(G) \leq 2p$ e exibimos um grafo de blocos $G_{p,p+1} \in \mathcal{B}_{p,p+1}$ tal que $\lambda(G_{p,p+1}) = 2p$.

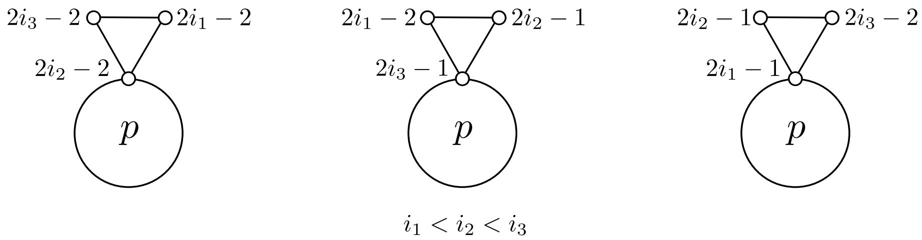

Figura 5.7: Configurações proibidas da Proposição 5.6.

A seguir, expomos configurações proibidas em uma $2p$-$L(2,1)$-coloração.

Proposição 5.6. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p+1}$. Sejam B e B_1 dois blocos de G tais que $V(B) = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $V(B_1) = \{u_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$. Se existe uma $2p$-$L(2,1)$-coloração f de G, então as seguintes configurações de f são proibidas:*

1. *para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2\}$, com $f(u_1) = 2i_2 - 2$;*

2. *para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1\}$, com $f(u_1) = 2i_3 - 1$; e*

3. *para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 1, 2i_3 - 2\}$, com $f(u_1) = 2i_1 - 1$.*

Prova. Suponhamos que exista uma $2p$-$L(2,1)$-coloração f de G. Notemos que f possui a Configuração 3 se, e somente se, o reverso de f em relação a $[0, 2p]$ possui a Configuração 2. Portanto, a proibição da Configuração 2 implica a proibição da Configuração 3. Assim, basta analisarmos as configurações 1 e 2.

Suponhamos por contradição que a Configuração 1 seja possível. Em $[0, 2i_1 - 3]$, há no máximo $i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_1 - 1, 2i_2 - 4]$, há no máximo $i_2 - i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3 - 3]$, há no máximo $i_3 - i_2 - 1$ cores não consecutivas; e, em $[2i_3 - 1, 2p]$, há no máximo $p - i_3 + 1$. Logo, $|f(V(B_1))| \leq 1 + (i_1 - 1) + (i_2 - i_1 - 1) + (i_3 - i_2 - 1) + (p - i_3 + 1) = p - 1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 1 é proibida.

Suponhamos por contradição que a Configuração 2 seja possível. Em $[0, 2i_1 - 3]$, há no máximo $i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_1 - 1, 2i_2 - 2]$, há no máximo $i_2 - i_1$ cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3 - 3]$, há no máximo $i_3 - i_2 - 1$ cores não consecutivas; e, em $[2i_3 + 1, 2p]$, há no máximo $p - i_3$. Logo, $|f(V(B_1))| \leq$

$1+(i_1-1)+(i_2-i_1)+(i_3-i_2-1)+(p-i_3)=p-1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 2 é proibida. $\square$

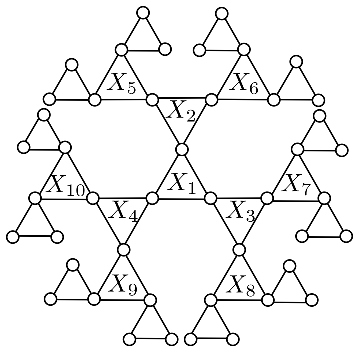

Figura 5.8: $G_{3,4}$.

Proposição 5.7 ([4]). *Seja $G_{3,4}$ o grafo na Figura 5.8. Então, $\lambda(G_{3,4})=7$.*

Prova. Suponhamos por contradição que exista uma 6-$L(2,1)$-coloração de $G_{3,4}$. Seja $\mathcal{T} := \{\{0,2,4\}, \{0,2,5\}, \{0,2,6\}, \{0,3,5\}, \{0,3,6\}, \{0,4,6\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,6\}, \{2,4,6\}\}$. Para cada 3-clique X em $G_{3,4}$, temos que $f(X) \in \mathcal{T}$. Denominemos $T=\{a_1,a_2,a_3\} \in \mathcal{T}$ um trio *bom* se existem $T_1,T_2,T_3 \in \mathcal{T}$ tais que $T \cap T_i = \{a_i\}$ para $1 \le i \le 3$. O conjunto de trios bons é $\{\{0,2,5\}, \{0,3,6\}, \{1,3,5\}, \{1,4,6\}\}$. Claramente, $f(X_i)$ é um trio bom, para $1 \le i \le 10$. Denominemos $T=\{a_1,a_2,a_3\} \in \mathcal{T}$ um trio *muito bom* se existem trios bons T_1,T_2,T_3 tais que $T \cap T_i = \{a_i\}$ para $1 \le i \le 3$. É fácil ver que os únicos trios muito bons são $\{0,3,6\}$ e $\{1,3,5\}$. Para $1 \le i \le 4$, $f(X_i)$ são trios muito bons. Como $f(X_1)$ é um trio muito bom e $\{0,3,6\} \cap \{1,3,5\} = \{3\}$, dois dentre $f(X_2), f(X_3), f(X_4)$ não são trios muito bons, uma contradição. $\square$

O lema subsequente exibe, para cada cor par $2i-2 \le p$ de $[0,2p]$, uma família de 2-subconjuntos de $[0,2p] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$. Para cada 2-subconjunto $\{a,b\}$ desta família, atribuindo $2i-2$, a e b aos vértices u, v e w, respectivamente, de um bloco B de três vértices, as configurações proibidas da Proposição 5.6 (e mais outras) são evitadas nas vizinhanças de v e de w.

Lema 5.1. *Seja $p \ge 4$ um inteiro. Para todo $1 \le i \le \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 2-subconjuntos de $[0,2p] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$ dois a dois disjuntos tal que*

1. *$|\mathcal{A}_i| = p-1$;*
2. *cada conjunto pertencente a $\mathcal{A}_i$ consiste de inteiros não consecutivos;*
3. *para cada $\{a,b\} \in \mathcal{A}_i$, $\{a,b\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2\} : 1 \le i_1 < i_2 \le i-1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-2\} : i+1 \le i_1 < i_2 \le p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1\} : 1 \le i_1 < i_2 \le i-2\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1\} : i+1 \le i_1 < i_2 \le p\}$; e*

4. se $i = 3$, então $\{1, 2p-1\} \notin \mathcal{A}_i$.

Prova. A seguir, examinamos os quatro casos: $\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_3$; $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}$; e $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1$, $i \neq 3$.

Consideremos $\mathcal{A}_1$. Cada conjunto de $\mathcal{A}_1$ deve estar contido em $[2, 2p]$. Como $|[2, 2p]| = 2p - 1 \equiv 1 \pmod 2$, temos que $(2p-1) \mod 6 \in \{1, 3, 5\}$. Notemos que: $2p - 1 \equiv 1 \pmod 6$ implica $p \geq 4$; $2p - 1 \equiv 3 \pmod 6$ implica $p \geq 5$; e $2p - 1 \equiv 5 \pmod 9$ implica $p \geq 6$. Seja $r := 6\lfloor \frac{2p-1}{6} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}_1 := \{\{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 7\}, \ldots, \{r-4, r-1\}, \{r-3, r\}, \{r-2, r+1\}\}$. Se $2p-1 \equiv 3 \pmod 6$, então removamos $\{2p-8, 2p-5\}$, $\{2p-7, 2p-4\}$ e $\{2p-6, 2p-3\}$ de $\mathcal{A}_1$ e acrescentemos $\{2p-8, 2p-3\}$, $\{2p-7, 2p-2\}$, $\{2p-6, 2p-1\}$ e $\{2p-5, 2p\}$. Se $2p - 1 \equiv 5 \pmod 6$, então acrescentemos $\{2p-4, 2p-1\}$ e $\{2p-3, 2p\}$ a $\mathcal{A}_1$.

Examinemos $\mathcal{A}_3$. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_3$ deve estar contido em $[0, 2] \cup [6, 2p]$. Se $p = 4$, então $\mathcal{A}_3 := \{\{0, 6\}, \{1, 8\}, \{2, 7\}\}$. Se $p = 5$, então $\mathcal{A}_3 := \{\{6, 9\}, \{0, 7\}, \{1, 8\}, \{2, 10\}\}$. Se $p = 6$, então $\mathcal{A}_3 := \{\{6, 9\}, \{7, 10\}, \{0, 8\}, \{1, 12\}, \{2, 11\}\}$. Consideremos então $p \geq 7$. Como $|[6, 2p-2]| = 2p - 7 \equiv 1 \pmod 2$, temos que $(2p-7) \mod 6 \in \{1, 3, 5\}$. Notemos que: $2p - 7 \equiv 1 \pmod 6$ implica $p \geq 7$; $2p - 7 \equiv 3 \pmod 6$ implica $p \geq 8$; e $2p - 7 \equiv 5 \pmod 9$ implica $p \geq 9$. Seja $r := 6\lfloor \frac{2p-7}{6} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}_1 := \{\{6, 9\}, \{7, 10\}, \{8, 11\}, \ldots, \{r, r+3\}, \{r+1, r+4\}, \{r+2, r+5\}\}$. Acrescentemos $\{1, 2p\}$ e $\{2, 2p-1\}$ a $\mathcal{A}_3$. Se $2p-7 \equiv 1 \pmod 6$, então acrescentemos $\{0, 2p-2\}$ a $\mathcal{A}_3$. Se $2p - 7 \equiv 3 \pmod 6$, então removamos $\{2p-10, 2p-7\}$, $\{2p-9, 2p-6\}$ e $\{2p-8, 2p-5\}$ de $\mathcal{A}_3$ e acrescentemos $\{2p-10, 2p-5\}$, $\{2p-9, 2p-4\}$, $\{2p-8, 2p-3\}$, $\{2p-7, 2p-2\}$ e $\{0, 2p-6\}$. Se $2p - 7 \equiv 5 \pmod 6$, então acrescentemos $\{2p-6, 2p-3\}$, $\{2p-5, 2p-2\}$ e $\{0, 2p-4\}$ a $\mathcal{A}_3$.

Examinemos $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}$, para $p \geq 6$ (se $p \in \{4, 5\}$, então $\lceil \frac{p+1}{2} \rceil = 3$, e $\mathcal{A}_3$ já foi tratado). Consideremos p par. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p+2}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-2] \cup [p+2, 2p]$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p+2}{2}} := \{\{0, p+2\}, \{1, p+3\}, \{2, p+4\}, \ldots, \{p-2, 2p\}\}$. Consideremos p ímpar. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-3] \cup [p+1, 2p]$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}} := \{\{p+1, p+4\}, \{0, p+2\}, \{1, p+3\}, \{2, p+5\}, \{3, p+6\}, \ldots, \{p-3, 2p\}\}$.

Finalmente, consideremos $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1$, $i \neq 3$. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_i$ deve estar contido em $[0, 2i-4] \cup [2i, 2p]$. Temos que $|[2i, 2p - (2i-4)]| = 2p - 4i + 5 \geq 5$. Como $2p - 4i + 5$ é ímpar, $(2p - 4i + 5) \mod 6 \in \{1, 3, 5\}$. Seja $r := 6\lfloor \frac{2p-4i+5}{6} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}_1 := \{\{2i, 2i+3\}, \{2i+1, 2i+4\}, \{2i+2, 2i+5\}, \ldots, \{r+2i-6, r+2i-3\}, \{r+2i-5, r+2i-2\}, \{r+2i-4, r+2i-1\}\}$. Acrescentemos $\{1, 2p-2i+5\}, \{2, 2p-2i+6\}, \ldots, \{2i-4, 2p\}$ a $\mathcal{A}_i$. Se $2p-4i+5 \equiv 1 \pmod 6$, então acrescentemos $\{0, 2p-2i+4\}$ a $\mathcal{A}_i$. Se $2p - 4i + 5 \equiv 3 \pmod 6$, então removamos $\{2p-2i-4, 2p-2i-1\}$, $\{2p-2i-3, 2p-2i\}$ e $\{2p-2i-2, 2p-2i+1\}$ de $\mathcal{A}_i$ e acrescentemos $\{2p-2i-4, 2p-2i+1\}$, $\{2p-2i-3, 2p-2i+2\}$, $\{2p-2i-2, 2p-2i+3\}$,

$\{2p-2i-1, 2p-2i+4\}$ e $\{0, 2p-2i\}$. Se $2p-4i+5 \equiv 5 \pmod 6$, então acrescentemos $\{2p-2i, 2p-2i+3\}$, $\{2p-2i+1, 2p-2i+4\}$ e $\{0, 2p-2i+2\}$ a $\mathcal{A}_i$.

Em cada caso, as Propriedades 1 – 4 são válidas. $\square$

Analogamente ao Lema 5.1, o próximo lema trata das cores ímpares de $[0, 2p]$.

Lema 5.2. *Seja $p \geq 4$ um inteiro. Para todo $1 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 2-subconjuntos de $[0, 2p] \setminus \{2i-2, 2i-1, 2i\}$ dois a dois disjuntos tal que*

1. *$|\mathcal{A}_i| = p - 1$;*

2. *cada conjunto pertencente a $\mathcal{A}_i$ consiste de inteiros não consecutivos;*

3. *para cada $\{a, b\} \in \mathcal{A}_i$, $\{a, b\} \notin \{\{2i_1 - 2, 2i_2 - 1\} : 1 \leq i_1 \leq i - 1$ e $i + 1 \leq i_2 \leq p\} \cup \{\{2i_1 - 1, 2i_2 - 2\} : 1 \leq i_1 \leq i - 1$ e $i + 2 \leq i_2 \leq p + 1\}$;*

4. *se $i = 1$, então $\{\{3, 2p\}, \{4, 2p-1\}, \{5, 2p\}\} \cap \mathcal{A}_i = \emptyset$; e*

5. *se $i = 2$ e $p \geq 5$, então $\{5, 2p\} \notin \mathcal{A}_i$.*

Prova. Examinemos os três casos: $\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}$; e $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1$.

Consideremos $\mathcal{A}_1$. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_1$ deve estar contido em $[3, 2p]$. Como $|[3, 2p]| = 2p - 2 \equiv 0 \pmod 2$, $(2p-2) \mod 6 \in \{0, 2, 4\}$. Notemos que: $2p - 2 \equiv 0 \pmod 6$ implica $p \geq 4$; $2p - 2 \equiv 2 \pmod 6$ implica $p \geq 5$; e $2p - 2 \equiv 4 \pmod 9$ implica $p \geq 6$. Se $2p - 2 \equiv 0 \pmod 6$, então $\mathcal{A}_1 := \{\{3, 6\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}\} \cup \{\{9, 12\}, \{10, 13\}, \{11, 14\}, \ldots, \{2p-5, 2p-2\}, \{2p-4, 2p-1\}, \{2p-3, 2p\}\}$. Se $2p - 2 \equiv 2 \pmod 6$, então $\mathcal{A}_1 := \{\{3, 7\}, \{4, 8\}, \{5, 9\}, \{6, 10\}\} \cup \{\{11, 14\}, \{12, 15\}, \{13, 16\}, \ldots, \{2p-5, 2p-2\}, \{2p-4, 2p-1\}, \{2p-3, 2p\}\}$. Se $2p-2 \equiv 4 \pmod 6$, então $\mathcal{A}_1 := \{\{3, 8\}, \{4, 9\}, \{5, 10\}, \{6, 11\}, \{7, 12\}\} \cup \{\{13, 16\}, \{14, 17\}, \{15, 18\}, \ldots, \{2p-5, 2p-2\}, \{2p-4, 2p-1\}, \{2p-3, 2p\}\}$.

Examinemos $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p}{2} \rceil}$. Notemos que $\lceil \frac{p}{2} \rceil \geq 2$. Consideremos p ímpar. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-2] \cup [p+2, 2p]$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}} := \{\{p-2, p+2\}, \{p-3, p+3\}, \ldots, \{0, 2p\}\}$. Consideremos p par. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-3] \cup [p+1, 2p]$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p}{2}} := \{\{p+1, 2p\}, \{0, p+2\}, \{1, p+3\}, \ldots, \{p-3, 2p-1\}\}$.

Finalmente, consideremos $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil - 1$. Cada 2-subconjunto de $\mathcal{A}_i$ deve estar contido em $[0, 2i-3] \cup [2i+1, 2p]$. Temos que $|[2i+1, 2p-(2i-2)]| = 2p - 4i + 2 \geq 4$. Como $2p - 4i + 2$ é par, $(2p - 4i + 2) \mod 6 \in \{0, 2, 4\}$. Se $2p-4i+2 \equiv 0 \pmod 6$, então $\mathcal{A}_i := \{\{2i+1, 2i+4\}, \{2i+2, 2i+5\}, \{2i+3, 2i+6\}, \ldots, \{2p-2i-3, 2p-2i\}, \{2p-2i-2, 2p-2i+1\}, \{2p-2i-1, 2p-2i+2\}\} \cup \{\{2i-3, 2p-2i+3\}, \{2i-4, 2p-2i+4\}, \ldots, \{0, 2p\}\}$. Se $2p-4i+2 \equiv 2 \pmod 6$, então $\mathcal{A}_i := \{\{2i+1, 2i+5\}, \{2i+2, 2i+6\}, \{2i+3, 2i+7\}, \{2i+4, 2i+8\}\} \cup \{\{2i+9, 2i+12\}, \{2i+10, 2i+13\}, \{2i+11, 2i+14\}, \ldots \{2p-2i-3, 2p-2i\},$

$\{2p-2i-2, 2p-2i+1\}\}$, $\{2p-2i-1, 2p-2i+2\}\} \cup \{\{2i-3, 2p-2i+3\}$, $\{2i-4, 2p-2i+4\}$, $\ldots$, $\{0, 2p\}\}$. Se $2p-4i+2 \equiv 4 \pmod 6$, então $\mathcal{A}_i :=$ $\{\{2i+1, 2i+3\}$, $\{2i+2, 2i+4\} \cup \{\{2i+5, 2i+8\}$, $\{2i+6, 2i+9\}$, $\{2i+7, 2i+10\}$, $\ldots \{2p-2i-3, 2p-2i\}$, $\{2p-2i-2, 2p-2i+1\}\}$, $\{2p-2i-1, 2p-2i+2\}\} \cup$ $\{\{2i-3, 2p-2i+3\}$, $\{2i-4, 2p-2i+4\}$, $\ldots$, $\{0, 2p\}\}$.

Em cada caso, as Propriedades $1-5$ são válidas. □

Teorema 5.5. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p+1}$. Se $p \geq 4$, então $\lambda(G) \leq 2p$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ aos vértices da p-clique inicial $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{p,p+1}$ é o conjunto de todas as $2p$-$L(2,1)$-colorações de G' com as seguintes restrições:

- se existem um bloco B de G' com $V(B) = \{u_1, u_2, u_3\}$ e um bloco B_1 de $G - V(G')$ com $V(B_1) = \{u_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$, então
  - $f(V(B)) \in \{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\}$ implica que $f(u_1) \neq 2i_2-2$;
  - $f(V(B)) \in \{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p\}$ implica que $f(u_1) \neq 2i_3-1$;
  - $f(V(B)) \in \{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\}$ implica que $f(u_1) \neq 2i_1-1$;
  - $f(V(B)) = \{1, 4, 2p-1\}$ implica que $f(u_1) \neq 2p-1$; e $f(V(B)) = \{1, 2p-4, 2p-1\}$ implica que $f(u_1) \neq 1$;
  - $f(V(B)) = \{0, 2p-3, 2p-1\}$ implica que $f(u_1) \neq 2p-3$; e $f(V(B)) = \{1, 3, 2p\}$ implica que $f(u_1) \neq 3$;
  - $f(V(B)) = \{0, 2p-5, 2p-3\}$ implica que $f(u_1) \neq 2p-5$; e $f(V(B)) = \{3, 5, 2p\}$ implica que $f(u_1) \neq 5$;
  - $f(V(B)) = \{0, 2p-5, 2p-1\}$ implica que $f(u_1) \neq 2p-5$; e $f(V(B)) = \{1, 5, 2p\}$ implica que $f(u_1) \neq 5$;
- para cada bloco B de G' com $|V(B)| = p$, se, para algum $u \in V(B)$, $N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset$, então
  - se $f(V(B)) = \{0, 3, \ldots, 2p-1\}$, então $f(u) \neq 0$; e, se $f(V(B)) = \{1, 3, \ldots, 2p-3, 2p\}$, então $f(u) \neq 2p$;
  - se $f(V(B)) = \{0, 2, 5, \ldots, 2p-1\}$, então $f(u) \neq 2$; e, se $f(V(B)) = \{1, 3, \ldots, 2p-5, 2p-2, 2p\}$, então $f(u) \neq 2p-2$;

- para cada bloco B de G' com $|V(B)| = p$, se $f(V(B))$ consiste somente de cores pares, então $f(V(B)) = \{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ ou $f(V(B)) = \{2, 4, \ldots, 2p\}$.

Suponhamos que $f(u_1) \geq p$. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 2p]$ f^R, temos que $f^R(u_1) \leq p$. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) \leq p$.

Suponhamos que $r \geq 1$ e que $2 \leq \ell \leq p-1$. Se $f(u_1) = 2i-2$, para algum $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$, então seja $\mathcal{A}_i$ a família de 2-subconjuntos de $[0, 2p]$ dada pelo Lema 5.1; se $f(u_1) = 2i-1$, para algum $1 \leq i \leq p$, então seja $\mathcal{A}_i$ a família de 2-subconjuntos de $[0, 2p]$ dada pelo Lema 5.2. Se $p = 4$ e $f(u_1) = 3$, então $\mathcal{A}_2 := \{\{a, b\}\ \{a', b'\}\}$, onde $\{a, b\}$ é um 2-subconjunto de $\{0, 6, 8\} \setminus \{f(u_2)\}$ e $\{a', b'\}$ é um 2-subconjunto de $\{1, 5, 7\} \setminus \{f(u_2)\}$, para algum $u_2 \in V(B) \setminus \{u_1\}$. Seja $\{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_{p-\ell}, b_{p-\ell}\}\}$ uma subfamília de $\mathcal{A}_i$ com $p - \ell$ conjuntos tal que $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{p-\ell}, b_{p-\ell}\} \subseteq \bigcup_{\{a,b\} \in \mathcal{A}_i} \{a, b\} \setminus f(V(B) \setminus \{u_1\})$. Notemos que $2(p-\ell) = 2p - 2\ell \geq 2\lfloor \frac{p-\ell+2}{2} \rfloor \geq 2r$, porque, se $p - \ell \geq 2$, então $2p - 2\ell \geq p - \ell + 2$, e, se $p - \ell = 1$, então $2p - 2\ell = 2 = 2\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 2\lfloor \frac{p-\ell+2}{2} \rfloor$. Definamos $f(v_1) := a_1$, $f(v_2) := b_1$, $\ldots$, $f(v_{2r-1}) := a_r$ e $f(v_{2r}) := b_r$. Falta atribuir cores aos $p - \ell - 2r + 2$ vértices $v_{2r+1}, \ldots, v_{p-\ell+2}$. Há pelo menos $2p - \ell - 2r - 1$ cores em $[0, 2p] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1\} \cup f(V(B)) \cup f(\{v_1, \ldots, v_{2r}\})$. Temos que $2p - \ell - 2r - 1 \geq p - \ell - 2r + 2$ e $2p - \ell - 2r - 1 \geq 2(p - \ell - 2r + 2) - 1$, porque $\ell \geq 2$ e $r \geq 1$. Então, atribuamos cores a $v_{2r+1}, \ldots, v_{p-\ell+2}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r = 0$ e $\ell = 2$. Seja u_2 o vértice de B que não u_1. Consideremos $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$. Seja

$$A := \begin{cases} \{0, \ldots, 2p-2\} \setminus \{2i-2\} & \text{se } f(u_2) \text{ é ímpar,} \\ \{1, \ldots, 2i-5\} \cup \{2i, \ldots, 2p\} & \text{se } f(u_2) \text{ é par e } f(u_2) < f(u_1), \\ \{0, \ldots, 2i-4\} \cup \{2i+1, \ldots, 2p-1\} & \text{se } f(u_2) \text{ é par e } f(u_2) > f(u_1). \end{cases}$$

Atribuamos injetivamente as cores em A aos vértices em $V(B_1) \setminus \{u_1\}$. Há pelo menos $2p - |V(B_1)| - 2$ cores em $[0, 2p] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1, f(u_2)\} \cup f(V(B_1) \setminus \{u_1\})$. Temos que $2p - |V(B_1)| - 2 \geq p - |V(B_1)| + 1$ e, se $|V(B_1)| \geq 3$, $2p - |V(B_1)| - 2 \geq 2(p - |V(B_1)| + 1) - 1$. Logo, podemos atribuir cores a $\{v_{|V(B_1)|}, \ldots, v_p\}$ conforme o Corolário 5.1. Consideremos agora $f(u_1) = 2i - 1$, para algum $1 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil$. Seja

$$A := \begin{cases} \{1, \ldots, 2p-1\} \setminus \{2i-1\} & \text{se } f(u_2) \text{ é par,} \\ \{0, \ldots, 2i-4\} \cup \{2i+1, \ldots, 2p-1\} & \text{se } f(u_2) \text{ é ímpar e } f(u_2) < f(u_1), \\ \{1, \ldots, 2i-3\} \cup \{2i+2, \ldots, 2p\} & \text{se } f(u_2) \text{ é ímpar e } f(u_2) > f(u_1). \end{cases}$$

Atribuamos injetivamente as cores em A aos vértices em $V(B_1) \setminus \{u_1\}$, e atribuamos cores a $\{v_{|V(B_1)|}, \ldots, v_p\}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r = 0$ e $\ell = 3$. Sejam u_2 e u_3 os dois vértices de B que não u_1. Temos que $f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-2\}$, para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1$ se, e somente se, $f^R(V(B)) = \{2i'_1-2, 2i'_2-2, 2i'_3-1\}$, para algum $1 \leq i'_1 < i'_2 < i'_3 \leq p$; e $f(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 1, 2i_3 - 2\}$, para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p + 1$ se, e somente se, $f^R(V(B)) = \{2i'_1 - 2, 2i'_2 - 1, 2i'_3 - 1\}$, para algum $1 \leq i'_1 < i'_2 < i'_3 \leq p$. Assim, se $f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-2\}$ ou $f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-2\}$, redefinamos f: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Logo, basta analisar as seis seguintes possibilidades para $f(V(B))$. Observemos que, com esta redefinação, já não restringimos $f(u_1)$ a ser no máximo p. Em cada um dos casos, i_1, i_2, i_3 são inteiros tais que $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p + 1$.

1. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2\}:}$

   Pela Propriedade 4, $f(u_1) \neq 2i_2 - 2$. Se $f(u_1) = 2i_1 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_1 - 1$, $f(v_k) := 2k - 2$, e, para cada $i_1 + 1 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k - 1$. Se $f(u_1) = 2i_3 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_3 - 2$, $f(v_k) := 2k - 1$, e, para cada $i_3 + 1 \leq k \leq p + 1$, $f(v_{k-2}) := 2k - 2$.

2. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 1\}:}$

   Se $f(u_1) = 2i_1 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_1 - 1$, $f(v_k) := 2k - 2$, para cada $i_1 + 1 \leq k \leq i_3 - 1$, $f(v_{k-1}) := 2k - 1$, e, para cada $i_3 + 1 \leq k \leq p + 1$, $f(v_{k-2}) := 2k - 2$. Se $f(u_1) = 2i_2 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_2 - 2$, $f(v_k) := 2k - 1$, e, para cada $i_2 + 1 \leq k \leq p + 1$, $f(v_{k-2}) := 2k - 2$. Se $f(u_1) = 2i_3 - 1$, então, para cada $1 \leq k \leq i_3 - 1$, $f(v_k) := 2k - 1$, e, para cada $i_3 + 1 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k - 1$.

3. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 1, 2i_3 - 2\}:}$

   Se $f(u_1) = 2i_1 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_1 - 1$, $f(v_k) := 2k - 2$, para cada $i_1+1 \leq k \leq i_3-1$, $f(v_{k-1}) := 2k-2$, e, para cada $i_3 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k-1$. Se $f(u_1) = 2i_2 - 1$, então, para cada $1 \leq k \leq i_2 - 1$, $f(v_k) := 2k - 1$, e, para cada $i_2 + 1 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k - 1$. Se $f(u_1) = 2i_3 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_1 - 1$, $f(v_k) := 2k - 1$, para cada $i_1 + 1 \leq k \leq i_3 - 1$, $f(v_{k-1}) := 2k - 2$, e, para cada $i_3 + 1 \leq k \leq p + 1$, $f(v_{k-2}) := 2k - 2$.

4. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1\}:}$

   Pela Propriedade 4, $f(u_1) \neq 2i_3 - 1$. Se $f(u_1) = 2i_1 - 2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_1 - 1$, $f(v_k) := 2k - 2$, e, para cada $i_1 + 1 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k - 2$.

   Consideremos $f(u_1) = 2i_2 - 1$. Suponhamos que $2i_1 - 2 = 0$. Pela Propriedade 4, se $f(V(B)) \in \{\{0, 2p-5, 2p-3\}, \{0, 2p-5, 2p-1\}, \{0, 2p-3, 2p-1\}\}$, então $f(u_1) \notin \{2p - 5, 2p - 3\}$ e, portanto, $3 \leq f(u_1) \leq 2p - 7$. Para cada

$1 \leq k \leq i_2-1$, $f(v_k) := 2k-1$, e, para cada $i_2+2 \leq k \leq p+1$, $f(v_{k-2}) := 2k-2$. Suponhamos então que $2i_1-2 \geq 2$. Para cada $1 \leq k \leq i_1-1$, $f(v_k) := 2k-2$, para cada $i_1 \leq k \leq i_2-1$, $f(v_k) := 2k-1$, e, para cada $i_2+2 \leq k \leq p+1$, $f(v_{k-2}) := 2k-2$.

5. $f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-1\}$:

   Consideremos $f(u_1) = 2i_1 - 1$. Suponhamos que $2i_1 - 1 = 1$. Pela Propriedade 4, $f(V(B)) \neq \{1, 2p-4, 2p-1\}$. Logo, $2i_2 - 2 \leq 2p-6$. Para cada $2 \leq k \leq i_2 - 1$, $f(v_{k-1}) := 2k-1$, e, para cada $i_2+1 \leq k \leq p+1$, $f(v_{k-2}) := 2k-2$. Suponhamos então que $2i_1-1 \geq 3$. Para cada $1 \leq k \leq i_1-1$, $f(v_k) := 2k-2$, para cada $i_1+1 \leq k \leq i_2-1$, $f(v_{k-1}) := 2k-1$, e, para cada $i_2+1 \leq k \leq p+1$, $f(v_{k-2}) := 2k-2$.

   Se $f(u_1) = 2i_2-2$, então, para cada $1 \leq k \leq i_2-1$, $f(v_k) := 2k-2$, e, para cada $i_2+1 \leq k \leq p$, $f(v_{k-1}) := 2k-2$.

   Consideremos $f(u_1) = 2i_3 - 1$. Suponhamos que $2i_3 - 1 = 2p-1$. Pela Propriedade 4, $f(V(B)) \neq \{1, 4, 2p-1\}$. Logo, $2i_2 - 2 \geq 6$. Para cada $1 \leq k \leq i_2-1$, $f(v_k) := 2k-2$, e, para cada $i_2 \leq k \leq p-1$, $f(v_k) := 2k-1$. Suponhamos então que $2i_3-1 \leq 2p-3$. Para cada $1 \leq k \leq i_2-1$, $f(v_k) := 2k-2$, para cada $i_2 \leq k \leq i_3-1$, $f(v_k) := 2k-1$, e, para cada $i_3+2 \leq k \leq p+1$, $f(v_{k-2}) := 2k-2$.

6. $f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1\}$:

   Temos que $f(u_1) = 2i-1$, para algum $i \in \{i_1, i_2, i_3\}$. Para cada $1 \leq k \leq i-1$, $f(v_k) := 2k-2$, e, para cada $i+2 \leq k \leq p+1$, $f(v_{k-2}) := 2k-2$.

Suponhamos que $r = 0$ e que $4 \leq \ell \leq p-1$. Há pelo menos $2p-\ell-1$ cores em $[0, 2p] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(V(B)))$. Temos que $2p-\ell-1 \geq p-\ell+2$ e $2p-\ell-1 \geq 2(p-\ell+2)-1$, porque $\ell \geq 4$. Então, atribuamos cores a $v_1, \ldots, v_{p-\ell+2}$ conforme o Corolário 5.1.

Finalmente, suponhamos que $|V(B)| = p$. Basta que consideremos apenas $f(u_1) \leq p$. Pela Propriedade 4, se $f(V(B))$ consiste somente de cores pares, então $f(V(B)) = \{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ ou $f(V(B)) = \{2, 4, \ldots, 2p-2\}$. Assim, é suficiente que examinemos as seis seguintes possibilidades para $f(V(B))$. Nos casos em que aparecem, i_1 e i_2 são inteiros tais que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq p+1$.

1. $f(V(B)) = \{0, 2, \ldots, 2p-2\}$:

   Definamos $f(v_1) := 2p$. Se $f(u_1) \in \{0, 2\}$, então $f(v_2) := 5$; se $4 \leq f(u_1) \leq p$, então $f(v_2) := 1$.

2. $f(V(B)) = \{2, 4, \ldots, 2p\}$:

   Definamos $f(v_1) := 0$ e $f(v_2) := 2p-1$.

3. $\underline{f(V(B)) = \{1, 3, \ldots, 2p-1\}:}$

   Definamos $f(v_1) := a$ e $f(v_2) := b$, para algum $a \in \{0, 2, \ldots, 2p\} \setminus \{f(u_1) - 1, f(u_1) + 1\}$ e algum $b \in \{0, 2, \ldots, 2p\} \setminus \{f(u_1) - 1, f(u_1) + 1, a\}$.

4. $\underline{f(V(B)) = \{0, 2, \ldots, 2i_1 - 4, 2i_1 - 1, \ldots, 2p-1\}:}$

   Suponhamos que $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \leq i \leq \min\{i_1 - 1, \lceil \frac{p+1}{2} \rceil\}$. Notemos que $2i_1 - 1 \geq 5$, pois, se $2i_1 - 1 = 3$, então, pela Propriedade 4, $f(u_1) \neq 0$. Suponhamos que $2i_1 - 1 = 5$. Pela Propriedade 4, $f(u_1) \neq 2$ e, portanto $f(u_1) = 0$. Definamos $f(v_1) := 3$ e $f(v_2) := 2p$. Suponhamos que $2i_1 - 1 \geq 7$. Se $f(u_1) \leq 2i_1 - 6$, então $f(v_1) := 2i_1 - 3$ e $f(v_2) := 2p$; caso contrário ($f(u_1) = 2i_1 - 4$), definamos $f(v_1) := 1$ e $f(v_2) := 2p$.

   Suponhamos agora que $f(u_1) = 2i - 1$, para algum $i_1 \leq i \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil$. Notemos que $p - 1 \geq \frac{p}{2} + 1 \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$, pois $p \geq 4$. Logo, $f(u_1) \leq 2(p-2) - 1 = 2p - 5$. Definamos $f(v_1) := 2p - 2$ e $f(v_2) := 2p$.

5. $\underline{f(V(B)) = \{1, 3, \ldots, 2i_1 - 5, 2i_1 - 2, \ldots, 2p\}:}$

   Suponhamos que $f(u_1) = 2i - 1$, para algum $1 \leq i \leq \min\{i_1 - 2, \lceil \frac{p}{2} \rceil\}$. Notemos que $f(u_1) \leq 2(p-2) - 1 = 2p - 5$, porque $p - 1 \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$. Se $2i_1 - 2 \leq 2p - 2$, então $f(v_1) := 2p - 3$ e $f(v_2) := 2p - 1$. Suponhamos então que $2i_1 - 2 = 2p$. Se $f(u_1) = 1$, então $f(v_1) := 2p - 4$ e $f(v_2) := 2p - 2$; se $f(u_1) \geq 3$, então $f(v_1) := 0$ e $f(v_2) := 2p - 2$.

   Suponhamos agora que $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $i_1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$. Notemos que $f(u_1) \leq 2p - 4$. Definamos $f(v_1) := 0$ e $f(v_2) := 2p - 1$.

6. $\underline{f(V(B)) = \{0, \ldots, 2i_1 - 4, 2i_1 - 1, \ldots, 2i_2 - 1, 2i_2 + 2, \ldots, 2p\}:}$

   Se $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \leq i \leq \min\{i_1 - 1, \lceil \frac{p+1}{2} \rceil\}$, então $f(v_1) := 2i_1 - 2$ e $f(v_2) := 2i_2 + 1$. Se $f(u_1) = 2i - 1$, para algum $i_1 \leq i \leq \min\{i_2, \lceil \frac{p}{2} \rceil\}$, então $f(v_1) := 2i_1 - 3$ e $f(v_2) := 2i_2 + 1$. Se $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $i_2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$, então $f(v_1) := 2i_1 - 3$ e $f(v_2) := 2i_2$.

Em todos os casos, as Propriedades 3 e 4 são válidas em G''. $\square$

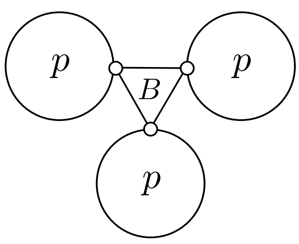

Figura 5.9: $G_{p,p+1}$, com $p \geq 4$.

O limite do Teorema 5.5 é justo.

Para $p \geq 4$, seja $G_{p,p+1}$ o grafo de blocos tal que $V(G_{p,p+1}) := \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{x_{i,j} : 1 \leq i \leq 3 \text{ e } 1 \leq j \leq p\}$ e $E(G_{p,p+1}) := \{u_i x_{i,1} : 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_{i,j_1} x_{i,j_2} : 1 \leq i \leq 3 \text{ e } 1 \leq j_1 < j_2 \leq p\}$.

Proposição 5.8. *Para $p \geq 4$, $\lambda(G_{p,p+1}) = 2p$.*

Prova. Pelo Teorema 5.5, $\lambda(G_{p,p+1}) \leq 2p$. Suponhamos por contradição que exista uma $(2p-1)$-$L(2,1)$-coloração f de $G_{p,p+1}$. Seja B o bloco de $G_{p,p+1}$ tal que $V(B) = \{u_1, u_2, u_3\}$. Temos que, para algum $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$, $f(V(B))$ contém duas cores $2i_1 - 2$ e $2i_2 - 2$ ou $f(V(B))$ contém duas cores $2i_1 - 1$ e $2i_2 - 1$. Logo, f possui uma configuração proibida análoga a alguma da Proposição 5.2, uma contradição. Assim, $\lambda(G_{p,p+1}) \geq 2p$. □

5.6 $\mathcal{B}_{p,p+2}$

Para cada $p \geq 4$, provamos que, para $G \in \mathcal{B}_{p,p+2}$, $\lambda(G) \leq 2p + 1$ e exibimos um grafo de blocos $G_{p,p+2} \in \mathcal{B}_{p,p+2}$ tal que $\lambda(G_{p,p+2}) = 2p + 1$.

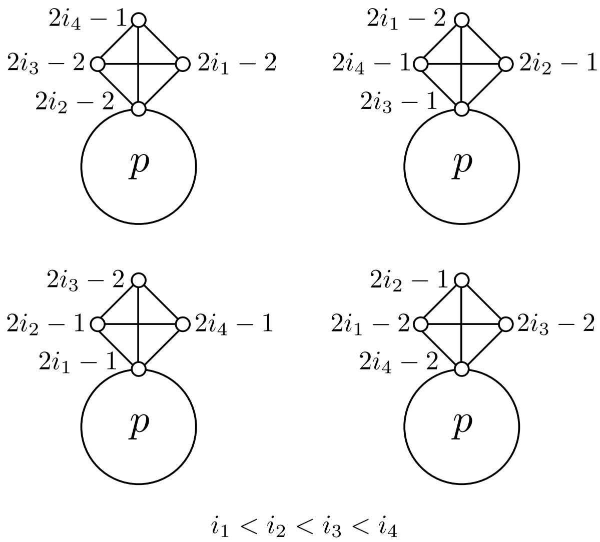

Figura 5.10: Configurações proibidas da Proposição 5.9.

A seguir, expomos configurações proibidas em uma $(2p+1)$-$L(2,1)$-coloração.

Proposição 5.9. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p+2}$. Sejam B e B_1 dois blocos de G tais que $V(B) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e $V(B_1) = \{u_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$. Se existe uma $(2p+1)$-$L(2,1)$-coloração f de G, então as seguintes configurações de f são proibidas:*

1. *para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 2,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1\}$, com $f(u_1) = 2i_2 - 2$;*

2. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 1,\ 2i_4 - 1\}$, *com* $f(u_1) = 2i_3 - 1$; *e*

3. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 1,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1\}$, *com* $f(u_1) = 2i_1 - 1$.

4. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 2\}$, *com* $f(u_1) = 2i_4 - 2$.

Prova. Suponhamos que exista uma $(2p+1)$-$L(2,1)$-coloração f de G. Temos que f possui a Configuração 2 se, e somente se, o reverso de f em relação a $[0, 2p+1]$ f^R possui a Configuração 1 e que f possui a Configuração 4 se, e somente se, f^R possui a Configuração 3. Assim, basta analisarmos as configurações 1 e 3.

Suponhamos por contradição que a Configuração 1 de f seja possível. Em $[0, 2i_1 - 3]$, há no máximo $i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_1 - 1, 2i_2 - 4]$, há no máximo $i_2 - i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3 - 3]$, há no máximo $i_3 - i_2 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_3 - 1, 2i_4 - 2]$, há no máximo $i_4 - i_3$; e, em $[2i_4, 2p+1]$, há no máximo $p - i_4 + 1$ cores não consecutivas. Logo, $|f(V(B_1))| \leq 1 + (i_1 - 1) + (i_2 - i_1 - 1) + (i_3 - i_2 - 1) + (i_4 - i_3) + (p - i_4 + 1) = p - 1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 1 é proibida.

Suponhamos por contradição que a Configuração 3 de f seja possível. Em $[0, 2i_1 - 3]$, há no máximo $i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_1 + 1, 2i_2 - 2]$, há no máximo $i_2 - i_1 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3 - 3]$, há no máximo $i_3 - i_2 - 1$ cores não consecutivas; em $[2i_3 - 1, 2i_4 - 2]$, há no máximo $i_4 - i_3$; e, em $[2i_4, 2p+1]$, há no máximo $p - i_4 + 1$ cores não consecutivas. Logo, $|f(V(B_1))| \leq 1 + (i_1 - 1) + (i_2 - i_1 - 1) + (i_3 - i_2 - 1) + (i_4 - i_3) + (p - i_4 + 1) = p - 1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 3 é proibida. □

O caso em que $p = 4$ é mostrado separadamente a seguir.

Teorema 5.6. *Seja* $G \in \mathcal{B}_{4,6}$. *Então,* $\lambda(G) \leq 9$.

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, 5, 7\}$ à 4-clique inicial.

Seja $\mathcal{A} := \{\{0,2,5,7\}, \{0,2,5,8\}, \{0,3,6,9\}, \{1,3,5,7\}, \{1,3,5,8\}, \{1,4,6,8\}, \{1,4,7,9\}, \{2,4,6,8\}, \{2,4,7,9\}\}$. Temos que $\mathcal{A}$ consiste de 4-subconjuntos de cores não consecutivas de $[0,9]$ e que $\mathcal{A}$ é simétrica em relação a $[0,9]$, no seguinte sentido: se $\{a,b,c,d\} \in \mathcal{A}$, então $\{9-d, 9-c, 9-b, 9-a\} \in \mathcal{A}$. Para cada $A_1 \in \mathcal{A}$ e para cada $a \in A_1$, existe $A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \cap A_2 = \{a\}$. Além disso, para cada $a \in [0,9]$, existem $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tais que $A_1 \cap A_2 = \{a\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{4,6}$ é o conjunto de todas as 9-$L(2,1)$-colorações de G' tais que:

- para cada bloco B com $|V(B)| = 4$, $f(V(B)) \in \mathcal{A}$; e

- para cada bloco B com $|V(B)| = 3$, ou $f(V(B)) \subset A_1$, para algum $A_1 \in \mathcal{A}$, ou $f(V(B)) \in \{\{0,3,8\},\{1,6,9\}\}$.

Suponhamos que $\ell = 2$. Seja u_2 o vértice de B que não u_1. Existem $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ tais que $A_1 \cap A_2 = \{f(u_1)\}$. Temos que no máximo um destes conjuntos contém $f(u_2)$. Se algum deles contém $f(u_2)$, então, sem perda de generalidade, seja A_2 tal conjunto. Se $|V(B_1)| = 4$, então atribuamos injetivamente as cores em $A_1 \setminus \{f(u_1)\}$ a v_1, v_2 e v_3, e as cores em $A_2 \setminus \{f(u_1), f(u_2)\}$ a v_4 e v_5; caso contrário, atribuamos injetivamente as cores em $A_1 \setminus \{f(u_1)\}$ a v_1 e v_2, as cores em $A_2 \setminus \{f(u_1), f(u_2)\}$ a v_3 e v_4 e a única cor em $A_1 \setminus \{f(u_1), f(v_1), f(v_2)\}$ a v_5.

Suponhamos que $\ell = 3$. Sejam u_2 e u_3 os vértices de B que não u_1. Consideremos $|V(B_1)| = 4$. Pela Propriedade 4, $f(V(B)) \subset A_1$, para algum $A_1 \in \mathcal{A}$, ou $f(V(B)) \in \{\{0,3,8\},\{1,6,9\}\}$. Suponhamos que $f(V(B)) \subset A_1$. Existe $A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $A_1 \cap A_2 = \{f(u_1)\}$. Atribuamos injetivamente as cores em $A_2 \setminus \{f(u_1)\}$ a v_1, v_2 e v_3 e uma cor em $A_1 \setminus f(V(B))$ a v_4. Suponhamos agora que $f(V(B)) = \{0,3,8\}$. Se $f(u_1) = 0$, então $f(v_1) := 2$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$; se $f(u_1) = 3$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$; se $f(u_1) = 8$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 5$. Notemos que, se $f(V(B)) = \{1,6,9\}$, então $f^R(V(B)) = \{0,3,8\}$, onde f^R é o reverso de f em relação $[0,9]$. Logo, não é necessário tratar separadamente o caso em que $f(V(B)) = \{1,6,9\}$; basta que redefinamos f: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Consideremos então $|V(B_1)| \leq 3$. Se $f(u_1) \geq 5$, então redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, no restante da demonstração, $f^R(u_1) \leq 4$. Notemos que, como $\mathcal{A}$ é simétrica e $\{0,3,8\} = \{9-9, 9-6, 9-1\}$, tal redefinição mantém a Propriedade 4. Analisemos os casos seguintes.

1. <u>$f(u_1) = 0$:</u>

   Se $f(V(B)) \subset \{0,3,6,9\}$, então $f(v_1) := 2$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 5$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) = \{0,2,5\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := 3$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) \neq \{0,2,5\}$ e $f(V(B)) \subset \{0,2,5,7\}$ ou $f(V(B)) \subset \{0,2,5,8\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := a$ e $f(v_4) := b$, onde a é alguma cor em $\{2,5\} \setminus f(V(B))$ e b é alguma cor em $\{7,8\} \setminus f(V(B))$.

2. <u>$f(u_1) = 1$:</u>

   Se $f(V(B)) \subset \{1,3,5,7\}$, então $f(v_1) := 4$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) \subset \{1,3,5,8\}$, então $f(v_1) := 4$, $f(v_2) := 6$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$. Se $f(V(B)) \subset \{1,4,7,9\}$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) \subset \{1,4,6,8\}$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.

3. <u>$f(u_1) = 2$:</u>

Se $f(V(B)) \subset \{0,2,5,7\}$, então $f(v_1) := 4$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$.
Se $f(V(B)) \subset \{0,2,5,8\}$, então $f(v_1) := 4$, $f(v_2) := 6$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.
Se $f(V(B)) \subset \{2,4,7,9\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$.
Se $f(V(B)) \subset \{2,4,6,8\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.

4. $\underline{f(u_1) = 3}$:

   Se $f(V(B)) \subset \{0,3,6,9\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 5$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) = \{1,3,5\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := 0$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) \neq \{1,3,5\}$ e $f(V(B)) \subset \{1,3,5,7\}$ ou $f(V(B)) \subset \{1,3,5,8\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := a$ e $f(v_4) := b$, onde a é alguma cor em $\{1,5\} \setminus f(V(B))$ e b é alguma cor em $\{7,8\} \setminus f(V(B))$.

5. $\underline{f(u_1) = 4}$:

   Se $f(V(B)) = \{4,7,9\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 6$, $f(v_3) := 2$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(V(B)) \neq \{4,7,9\}$ e $f(V(B)) \subset \{1,4,7,9\}$ ou $f(V(B)) \subset \{2,4,7,9\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 8$, $f(v_3) := a$ e $f(v_4) := b$, onde a é alguma cor em $\{1,2\} \setminus f(V(B))$ e b é alguma cor em $\{7,9\} \setminus f(V(B))$. Se $f(V(B)) = \{4,6,8\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 2$ e $f(v_4) := 9$. Se $f(V(B)) \neq \{4,6,8\}$ e $f(V(B)) \subset \{1,4,6,8\}$ ou $f(V(B)) \subset \{2,4,6,8\}$, então $f(v_1) := 7$, $f(v_2) := 9$, $f(v_3) := a$ e $f(v_4) := b$, onde a é alguma cor em $\{1,2\} \setminus f(V(B))$ e b é alguma cor em $\{6,8\} \setminus f(V(B))$.

Finalmente, suponhamos que $\ell = 4$. Pela Propriedade 4, $f(V(B)) \in \mathcal{A}$. Logo, existe $A_2 \in \mathcal{A}$ tal que $f(V(B)) \cap A_2 = \{f(u_1)\}$. Atribuamos injetivamente $A_2 \setminus \{f(u_1)\}$ a v_1, v_2 e v_3.

Vemos que as Propriedades 3 e 4 são válidas em G''. □

As duas proposições seguintes e o lema após têm um papel análogo aos lemas 5.1 e 5.2 da seção anterior.

Proposição 5.10. *Seja $p \geq 5$ um inteiro tal que $p+1 \equiv 0 \pmod 3$. Para todo $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 3-subconjuntos de $[0, 2p+1] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$ dois a dois disjuntos tal que*

1. $|\mathcal{A}_i| \geq \frac{p+4}{3}$*;*

2. *cada conjunto pertencente a $\mathcal{A}_i$ consiste de inteiros não consecutivos;*

3. *para cada $\{a,b,c\} \in \mathcal{A}_i$, se $2i-2 < a < b < c$, então $\{a,b,c\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-2\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\}$;*

4. *para cada* $\{a,b,c\} \in \mathcal{A}_i$, *se* $a < b < 2i-2 < c$, *então* $\{a,b,c\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-1$ *e* $i+1 \leq i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ *e* $i+1 \leq i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ *e* $i+1 \leq i_3 \leq p+1\}$.

Prova. Examinemos os casos: $\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}$ com p ímpar; $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}$ com p par; $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1$ e p ímpar; e $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1$ e p par.

Primeiramente consideremos $\mathcal{A}_1$. Cada conjunto de $\mathcal{A}_1$ deve estar contido em $[2, 2p+1]$. Como $|[2, 2p+1]| = 2p \equiv 1 \pmod 3$, temos que $2p \mod 9 \in \{1, 4, 7\}$. Observemos que: $2p \equiv 1 \pmod 9$ implica $p \geq 5$; $2p \equiv 7 \pmod 9$ implica $p \geq 8$; e $2p \equiv 4 \pmod 9$ implica $p \geq 11$. Seja $r := 9\lfloor \frac{2p}{9} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}_1 := \{\{2,5,8\}, \{3,6,9\}, \{4,7,10\}, \ldots, \{r-7, r-4, r-1\}, \{r-6, r-3, r\}, \{r-5, r-2, r+1\}\}$. Se $2p \equiv 7 \pmod 9$, então $r = 2p - 7$ e acrescentemos $\{2p-5, 2p-2, 2p+1\}$ a $\mathcal{A}_1$. Claramente, as Propriedades 2, 3 e 4 são válidas. Temos que $|\mathcal{A}_1| = \frac{r}{3} = 3\lfloor \frac{2p}{9} \rfloor$ se $2p \mod 9 \in \{1, 4\}$ e que $|\mathcal{A}_1| = 3\lfloor \frac{2p}{9} \rfloor + 1$ caso contrário. Se $2p \equiv 1 \pmod 9$, então $3\lfloor \frac{2p}{9} \rfloor = \frac{2p-1}{3} \geq \frac{p+4}{3}$. Se $2p \equiv 4 \pmod 9$, então $3\lfloor \frac{2p}{9} \rfloor = \frac{2p-4}{3} \geq \frac{p+4}{3}$. Se $2p \equiv 7 \pmod 9$, então $3\lfloor \frac{2p}{9} \rfloor + 1 = \frac{2p-7}{3} + 1 = \frac{2p-4}{3} \geq \frac{p+4}{3}$. Portanto, vale a Propriedade 1.

Consideremos $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}$ com p ímpar. Temos que $\lceil \frac{p+1}{2} \rceil = \frac{p+1}{2}$ e cada conjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-3] \cup [p+1, 2p+1]$. Como $p+1 \equiv 0 \pmod 3$ e, por hipótese, $p+1 \equiv 0 \pmod 2$, $|[p+1, 2p+1]| = p+1 \equiv 0 \pmod 6$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}} := \{\{0, p+1, p+4\}, \{1, p+2, p+5\}, \{2, p+3, p+6\}, \ldots, \{\frac{p-5}{2}, 2p-4, 2p-1\}, \{\frac{p-3}{2}, 2p-3, 2p\}, \{\frac{p-1}{2}, 2p-2, 2p+1\}\}$. Claramente, as Propriedades 2, 3 e 4 são válidas. Temos que $|\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}}| = \frac{p+1}{2} \geq \frac{p+4}{3}$ e, portanto, a Propriedade 1 é satisfeita.

Agora examinemos $\mathcal{A}_{\lceil \frac{p+1}{2} \rceil}$ com p par. Temos que $\lceil \frac{p+1}{2} \rceil = \frac{p+2}{2}$ e cada conjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p+2}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-2] \cup [p+2, 2p+1]$. Temos que $|[p+2, 2p+1]| = p \equiv 2 \pmod 6$, pois $p \equiv 2 \pmod 3$ e, por hipótese, $p \equiv 0 \pmod 2$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p+2}{2}} := \{\{0, p+2, p+5\}, \{1, p+3, p+6\}, \{2, p+4, p+7\}, \ldots, \{\frac{p-8}{2}, 2p-6, 2p-3\}, \{\frac{p-6}{2}, 2p-5, 2p-2\}, \{\frac{p-4}{2}, 2p-4, 2p-1\}, \{p-4, p-2, 2p\}\}$. Temos que $|\mathcal{A}_{\frac{p+2}{2}}| = \frac{p}{2} \geq \frac{p+4}{3}$. Logo, valem as Propriedades 1 – 4.

Examinemos $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1$ e p ímpar. Cada conjunto de $\mathcal{A}_i$ deve estar contido em $[0, 2i-4] \cup [2i, 2p+1]$. Temos que $2i \leq 2(\lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1) = 2\frac{p+1}{2} - 2 = p - 1$. Logo, $|[2i, 2p+1]| \geq p+3 > p+2 = |[p, 2p+1]|$. Como $p+2 \equiv 1 \pmod 3$, temos que $(p+2) \mod 9 \in \{1, 4, 7\}$.

- <u>$p+2 \equiv 1 \pmod 9$:</u> $\mathcal{A}_i := \{\{p, p+3, p+6\}, \{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \ldots, \{2p-8, 2p-5, 2p-2\}, \{2p-7, 2p-4, 2p-1\}, \{2p-6, 2p-3, 2p\}, \{0, p-1, 2p+1\}\}$.

- <u>$p+2 \equiv 4 \pmod 9$:</u> $\mathcal{A}_i := \{\{p, p+3, p+6\}, \{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \ldots, \{2p-11, 2p-8, 2p-5\}, \{2p-10, 2p-7, 2p-4\}, \{2p-9, 2p-6, 2p-3\}, \{0, 2p-1, 2p+1\}\}, \{p-1, 2p-2, 2p\}\}$.

- $\underline{p+2 \equiv 7 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p, p{+}3, p{+}6\}, \{p{+}1, p{+}4, p{+}7\}, \{p{+}2, p{+}5, p{+}8\}, \ldots, \{2p{-}14, 2p{-}11, 2p{-}8\}, \{2p{-}13, 2p{-}10, 2p{-}7\}, \{2p{-}12, 2p{-}9, 2p{-}6\}, \{2p-5, 2p-2, 2p+1\}, \{0, 2p-3, 2p-1\}, \{p-1, 2p-4, 2p\}\}$.

Claramente, valem as Propriedades 1 – 4.

Finalmente, consideremos $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1$ e p par. Cada conjunto de $\mathcal{A}_i$ deve estar contido em $[0, 2i-4] \cup [2i, 2p+1]$. Temos que $2i \leq 2(\lceil \frac{p+1}{2} \rceil - 1) = 2\frac{p+2}{2} - 2 = p$. Logo, $|[2i, 2p+1]| \geq p+2 > p+1 = |[p+1, 2p+1]|$. Como $p+1 \equiv 0 \pmod 3$, $p+1 \mod 9 \in \{0, 3, 6\}$.

- $\underline{p+1 \equiv 0 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p{+}1, p{+}4, p{+}7\}, \{p{+}2, p{+}5, p{+}8\}, \{p{+}3, p{+}6, p{+}9\}, \ldots, \{2p{-}7, 2p{-}4, 2p{-}1\}, \{2p{-}6, 2p{-}3, 2p\}, \{2p{-}5, 2p{-}2, 2p{+}1\}\}$.

- $\underline{p+1 \equiv 3 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p{+}1, p{+}4, p{+}7\}, \{p{+}2, p{+}5, p{+}8\}, \{p{+}3, p{+}6, p{+}9\}, \ldots, \{2p{-}10, 2p{-}7, 2p{-}4\}, \{2p{-}9, 2p{-}6, 2p{-}3\}, \{2p{-}8, 2p{-}5, 2p{-}2\}, \{0, 2p-1, 2p+1\}\}$.

- $\underline{p+1 \equiv 6 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \{p+3, p+6, p+9\}, \ldots, \{2p-13, 2p-10, 2p-7\}, \{2p-12, 2p-9, 2p-6\}, \{2p-11, 2p-8, 2p-5\}, \{2p-4, 2p-2, 2p\}, \{0, 2p-3, 2p-1\}\}$.

Claramente, valem as Propriedades 2, 3 e 4. Para satisfazer a Propriedade 1, é suficiente adicionar exatamente um conjunto a $\mathcal{A}_i$. Notemos que $2 \leq 2i-2 \leq p-2$ e $p-2 \geq 6$. Se $2i-2 = p-2$, acrescentemos $\{2, 4, p\}$ a $\mathcal{A}_i$. Se $2i-2 = 2$, acrescentemos $\{p-4, p-2, p\}$. Se $4 \leq 2i-2 \leq p-4$, acrescentemos $\{2, p-2, p\}$. $\square$

Proposição 5.11. *Seja $p \geq 5$ um inteiro tal que $p+1 \equiv 0 \pmod 3$. Para todo $1 \leq i \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 3-subconjuntos de $[0, 2p+1] \setminus \{2i-2, 2i-1, 2i\}$ dois a dois disjuntos tal que*

1. *$|\mathcal{A}_i| \geq \frac{p+4}{3}$;*

2. *cada conjunto pertencente a $\mathcal{A}_i$ consiste de inteiros não consecutivos;*

3. *para cada $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_i$, se $a < b < c < 2i-1$, então $\{a, b, c\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq i-1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq i-1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq i-1\}$;*

4. *para cada $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_i$, se $a < 2i-1 < b < c$, então $\{a, b, c\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 \leq i-1$ e $i+1 \leq i_2 < i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 \leq i-1$ e $i+2 \leq i_2 < i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-2\} : 1 \leq i_1 \leq i-1$ e $i+2 \leq i_2 < i_3 \leq p+1\}$.*

Prova. Examinemos os casos: $\mathcal{A}_1$; $\mathcal{A}_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}$ com p ímpar; $\mathcal{A}_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}$ com p par; $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1$ e p ímpar; e $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1$ e p par.

Primeiramente consideremos $\mathcal{A}_1$. Cada conjunto de $\mathcal{A}_1$ deve estar contido em $[3, 2p+1]$. Como $|[3, 2p+1]| = 2p - 1 \equiv 0 \pmod 3$, temos que $2p - 1 \mod 9 \in \{0, 3, 6\}$. Observemos que: $2p - 1 \equiv 0 \pmod 9$ implica $p \geq 5$; $2p - 1 \equiv 6 \pmod 9$ implica $p \geq 8$; e $2p - 1 \equiv 3 \pmod 9$ implica $p \geq 11$. Seja $r := 9\lfloor \frac{2p-1}{9} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}_1 := \{\{3, 6, 9\}, \{4, 7, 10\}, \{5, 8, 11\}, \ldots, \{r-6, r-3, r\}, \{r-5, r-2, r+1\}, \{r-4, r-1, r+2\}\}$. Se $2p - 1 \equiv 6 \pmod 9$, então $r = 2p - 7$ e acrescentemos $\{2p-4, 2p-2, 2p\}$ a $\mathcal{A}_1$. É fácil ver que as Propriedades 2, 3 e 4 valem. Temos que $|\mathcal{A}_1| = \frac{r}{3} = 3\lfloor \frac{2p-1}{9} \rfloor$ se $2p - 1 \mod 9 \in \{0, 3\}$ e que $|\mathcal{A}_1| = 3\lfloor \frac{2p-1}{9} \rfloor + 1$ caso contrário. Se $2p - 1 \equiv 0 \pmod 9$, então $3\lfloor \frac{2p-1}{9} \rfloor = \frac{2p-1}{3} \geq \frac{p+4}{3}$. Se $2p - 1 \equiv 3 \pmod 9$, então $3\lfloor \frac{2p-1}{9} \rfloor = \frac{2p-4}{3} \geq \frac{p+4}{3}$. Se $2p - 1 \equiv 6 \pmod 9$, então $3\lfloor \frac{2p-1}{9} \rfloor + 1 = \frac{2p-7}{3} + 1 = \frac{2p-4}{3} \geq \frac{p+4}{3}$. Logo, vale a Propriedade 1.

Examinemos $\mathcal{A}_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}$ com p par. Temos que $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor = \frac{p}{2}$ e cada conjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-3] \cup [p+1, 2p+1]$. Notemos que, em $[0, p-3]$, há $\frac{p-2}{2}$ ímpares e $\frac{p-2}{2}$ pares e que $\frac{p-2}{2} \geq \frac{p+1}{3}$, porque $p \geq 8$. Como $p + 1 \equiv 0 \pmod 3$ e, por hipótese, $p + 1 \equiv 1 \pmod 2$, $|[p+1, 2p+1]| = p + 1 \equiv 3 \pmod 6$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p}{2}} := \{\{1, p+1, p+4\}, \{0, p+2, p+5\}, \{3, p+3, p+6\}, \{5, p+7, p+10\}, \{2, p+8, p+11\}, \{7, p+9, p+12\}, \ldots, \{2\frac{p-5}{3} - 1, 2p-7, 2p-4\}, \{2\frac{p-2}{6} - 2, 2p-6, 2p-3\}, \{2\frac{p-2}{3} - 1, 2p-5, 2p-2\}, \{2\frac{p+1}{3} - 1, 2p-1, 2p+1\}\}$. Temos que $|\mathcal{A}_{\frac{p}{2}}| = \frac{p}{2} \geq \frac{p+4}{3}$ e, portanto, as Propriedades 1 – 4 são satisfeitas.

Examinemos agora $\mathcal{A}_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}$ com p ímpar. Temos que $\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor = \frac{p+1}{2}$ e cada conjunto de $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}}$ deve estar contido em $[0, p-2] \cup [p+2, 2p+1]$. Temos que $|[p+2, 2p+1]| = p \equiv 5 \pmod 6$, porque $p \equiv 2 \pmod 3$ e, por hipótese, $p \equiv 1 \pmod 2$. Definamos $\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}} := \{\{1, p+2, p+5\}, \{0, p+3, p+6\}, \{3, p+4, p+7\}, \ldots, \{2\frac{p-5}{3} - 3, 2p-9, 2p-6\}, \{2\frac{p-5}{6} - 2, 2p-8, 2p-5\}, \{2\frac{p-5}{3} - 1, 2p-7, 2p-4\}, \{2\frac{p+1}{6} - 1, 2p-3, 2p\}, \{2\frac{p+7}{6} - 2, 2p-2, 2p+1\}, \{p-4, p-2, 2p-1\}\}$. Temos que $|\mathcal{A}_{\frac{p+1}{2}}| = \frac{p+1}{2} \geq \frac{p+4}{3}$. Logo, as Propriedades 1 – 4 é satisfeita.

Consideremos $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1$ e p ímpar. Cada conjunto de $\mathcal{A}_i$ deve estar contido em $[0, 2i-3] \cup [2i+1, 2p+1]$. Temos que $2i + 1 \leq 2(\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1) + 1 = 2\frac{p+1}{2} - 1 = p$. Logo, $|[2i+1, 2p+1]| \geq p + 2 > p + 1 = |[p+1, 2p+1]|$. Como $p + 1 \equiv 0 \pmod 3$, $p + 1 \mod 9 \in \{0, 3, 6\}$.

- <u>$p + 1 \equiv 0 \pmod 9$:</u> $\mathcal{A}_i := \{\{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \{p+3, p+6, p+9\}, \ldots, \{2p-7, 2p-4, 2p-1\}, \{2p-6, 2p-3, 2p\}, \{1, 2p-5, 2p+1\}, \{0, p, 2p-2\}\}$.

- <u>$p + 1 \equiv 3 \pmod 9$:</u> $\mathcal{A}_i := \{\{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \{p+3, p+6, p+9\}, \ldots, \{2p-10, 2p-7, 2p-4\}, \{2p-9, 2p-6, 2p-3\}, \{2p-8, 2p-5, 2p-2\}, \{1, 2p-1, 2p+1\}\}, \{0, p, 2p\}\}$.

- $\underline{p+1 \equiv 6 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \{p+3, p+6, p+9\}, \ldots, \{2p-13, 2p-10, 2p-7\}, \{2p-12, 2p-9, 2p-6\}, \{2p-11, 2p-8, 2p-5\}, \{0, 2p-4, 2p-1\}, \{1, 2p-3, 2p\}, \{p, 2p-2, 2p+1\}\}$.

Claramente, valem as Propriedades 1 – 4.

Finalmente, consideremos $\mathcal{A}_i$, para algum $2 \leq i \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1$ e p par. Cada conjunto de $\mathcal{A}_i$ deve estar contido em $[0, 2i-3] \cup [2i+1, 2p+1]$. Temos que $2i+1 \leq 2(\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1) + 1 = 2\frac{p}{2} - 1 = p-1$. Logo, $|[2i+1, 2p+1]| \geq p+3 > p+2 = |[p, 2p+1]|$. Como $p+2 \equiv 1 \pmod 3$, temos que $(p+2) \mod 9 \in \{1, 4, 7\}$.

- $\underline{p+2 \equiv 1 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p, p+3, p+6\}, \{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \ldots, \{2p-8, 2p-5, 2p-2\}, \{2p-7, 2p-4, 2p-1\}, \{2p-6, 2p-3, 2p\}, \{1, p-1, 2p+1\}\}$.

- $\underline{p+2 \equiv 4 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p, p+3, p+6\}, \{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \ldots, \{2p-11, 2p-8, 2p-5\}, \{2p-10, 2p-7, 2p-4\}, \{2p-9, 2p-6, 2p-3\}, \{1, 2p-2, 2p\}\}, \{p-1, 2p-1, 2p+1\}\}$.

- $\underline{p+2 \equiv 7 \pmod 9}$: $\mathcal{A}_i := \{\{p, p+3, p+6\}, \{p+1, p+4, p+7\}, \{p+2, p+5, p+8\}, \ldots, \{2p-14, 2p-11, 2p-8\}, \{2p-13, 2p-10, 2p-7\}, \{2p-12, 2p-9, 2p-6\}, \{2p-5, 2p-2, 2p+1\}, \{1, 2p-4, 2p\}, \{p-1, 2p-3, 2p-1\}\}$.

Claramente, valem as Propriedades 1 – 4. □

Lema 5.3. *Seja $p \geq 5$ um inteiro. Para todo $1 \leq i \leq p+1$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 3-subconjuntos de $[0, 2p+1] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$ dois a dois disjuntos tal que*

1. $|\mathcal{A}_i| \geq \lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor$;
2. *cada conjunto pertencente a $\mathcal{A}_i$ consiste de inteiros não consecutivos;*
3. *para cada $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_i$, se $2i-2 < a < b < c$, então $\{a, b, c\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-2\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1\}$;*
4. *para cada $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_i$, se $a < b < 2i-2 < c$, então $\{a, b, c\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-1$ e $i+1 \leq i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ e $i+1 \leq i_3 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ e $i+1 \leq i_3 \leq p+1\}$.*

Prova. Dividimos a prova em três casos, conforme o valor de $(p+1) \mod 3$.

Suponhamos que $p+1 \equiv 0 \pmod 3$. Então, $\lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor = \frac{p+4}{3}$. Pela Proposição 5.10, para $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 3-subconjuntos de $[0, 2p+1] \setminus \{2i -$

$3, 2i-2, 2i-1\}$ dois a dois disjuntos que satisfaz as Propriedades $1-4$. Consideremos então $\lceil \frac{p+1}{2} \rceil + 1 \leq i \leq p+1$. Temos que $1 \leq p+2-i \leq \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor$. Seja $j := p+2-i$. Pela Proposição 5.11, existe uma família $\mathcal{A}'_j$ de 3-subconjuntos de $[0, 2p+1] \setminus \{2j-2, 2j-1, 2j\}$ dois a dois disjuntos com determinadas propriedades. Facilmente obtemos $\mathcal{A}_i$ a partir de $\mathcal{A}'_j$: $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_i \Leftrightarrow \{(2p+1)-a, (2p+1)-b, (2p+1)-c\} \in \mathcal{A}'_j$. A validade das Propriedades $1-4$ em $\mathcal{A}_i$ é consequência das propriedades de $\mathcal{A}'_j$ expostas na Proposição 5.11. Assim, no que segue, podemos supor que, se $p+1 \equiv 0 \pmod 3$, então o lema vale.

Suponhamos agora que $p+1 \equiv 1 \pmod 3$. Então, $p \geq 6$, $\lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor = \frac{p+3}{3}$ e $(p-1)+1 \equiv 0 \pmod 3$. Portanto, o lema vale para $p-1$: para $1 \leq i \leq (p-1)+1 = p$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 3-subconjuntos de $[0, 2(p-1)+1] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$ dois a dois disjuntos que satisfaz as Propriedades $1-4$. Resta definir $\mathcal{A}_{p+1}$. Pela Proposição 5.11, existe uma família $\mathcal{A}'_1$ de 3-subconjuntos de $[0, 2(p-1)+1] \setminus \{0, 1, 2\}$ dois a dois disjuntos com determinadas propriedades. Obtemos $\mathcal{A}_{p+1}$ a partir de $\mathcal{A}'_1$: $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_{p+1} \Leftrightarrow \{(2p+1)-a, (2p+1)-b, (2p+1)-c\} \in \mathcal{A}'_1$. A satisfação das Propriedades $1-4$ em $\mathcal{A}_{p+1}$ segue das propriedades de $\mathcal{A}'_1$ dadas pela Proposição 5.11. No restante da prova, podemos supor que o lema vale caso $(p+1) \bmod 3 \in \{0, 1\}$.

Finalmente, suponhamos que $p+1 \equiv 2 \pmod 3$. Então, $p \geq 7$, $\lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor = \frac{p+2}{3}$ e $(p-1)+1 \equiv 1 \pmod 3$. Portanto, o lema vale para $p-1$: para $1 \leq i \leq p$, existe uma família $\mathcal{A}_i$ de 3-subconjuntos de $[0, 2(p-1)+1] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$ dois a dois disjuntos que satisfaz as Propriedades $1-4$. Pela Proposição 5.11, existe uma família $\mathcal{A}'_1$ de 3-subconjuntos de $[0, 2(p-2)+1] \setminus \{0, 1, 2\}$ dois a dois disjuntos com determinadas propriedades. Obtemos $\mathcal{A}_{p+1}$ a partir de $\mathcal{A}'_1$: $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_{p+1} \Leftrightarrow \{(2p+1)-a, (2p+1)-b, (2p+1)-c\} \in \mathcal{A}'_1$. A satisfação das Propriedades $1-4$ em $\mathcal{A}_{p+1}$ segue das propriedades de $\mathcal{A}'_1$ dadas pela Proposição 5.11. $\square$

Teorema 5.7. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p+2}$. Se $p \geq 5$, então $\lambda(G) \leq 2p+1$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ aos vértices da p-clique inicial $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{p,p+2}$ é o conjunto de todas as $(2p+1)$-$L(2,1)$-colorações de G' tais que: se existem um bloco B de G' com $V(B) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e um bloco B_1 de $G - V(G')$ com $V(B_1) = \{u_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$, então

- $f(V(B)) \in \{2i_1-2,\ 2i_2-2,\ 2i_3-2,\ 2i_4-1 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_2-2$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1-2,\ 2i_2-1,\ 2i_3-1,\ 2i_4-1 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_3-1$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 1,\, 2i_2 - 1,\, 2i_3 - 2,\, 2i_4 - 1 : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le p + 1\}$ implica $f(u_1) \ne 2i_1 - 1$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 2,\, 2i_2 - 1,\, 2i_3 - 2,\, 2i_4 - 2 : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \le p + 1\}$ implica $f(u_1) \ne 2i_4 - 2$;

Suponhamos que $f(u_1)$ é ímpar. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 2p+1]$ f^R, temos que $f^R(u_1)$ é par. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \le i \le p+1$.

Suponhamos que $r \ge 1$ e $\ell = 2$. Seja u_2 o vértice de B que não u_1. Seja $\mathcal{A}_i$ a família de 3-subconjuntos de $[0, 2p+1] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1\}$ do Lema 5.3. Seja $\{\{a_1, b_1, c_1\}, \ldots, \{a_r, b_r, c_r\}\}$ uma subfamília de $\mathcal{A}_i$ tal que $f(u_2) \notin \bigcup_{1 \le k \le r} \{a_k, b_k, c_k\}$. Notemos que, se, para algum $\{a, b, c\} \in \mathcal{A}_i$, $f(u_2) \in \{a, b, c\}$, então $|\mathcal{A}_i \setminus \{\{a, b, c\}\}| \ge \lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{p+1}{3} \rfloor \ge r$. Definamos $f(v_1) := a_1$, $f(v_2) := b_1$, $f(v_3) := c_1$, $\ldots$, $f(v_{3r-2}) := a_r$, $f(v_{3r-1}) := b_r$, $f(v_{3r}) := c_r$. Falta atribuir cores aos $p - 3r + 1$ vértices $v_{3r+1}, \ldots, v_{p+1}$. Há pelo menos $2p - 3r - 2$ cores em $[0, 2p+1] \setminus (\{2i-3, 2i-2, 2i-1, f(u_2)\} \cup f(\{v_1, \ldots, v_{3r}\}))$. Temos que $2p - 3r - 2 \ge p - 3r + 1$, porque $p \ge 5$, e que $2p - 3r - 2 \ge 2(p - 3r + 1) - 1$, porque $r \ge 1$. Portanto, podemos atribuir cores aos vértices $v_{3r+1}, \ldots, v_{p+1}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r \ge 1$ e $3 \le \ell \le p - 3$. Neste caso, $p \ge 6$. Sejam $u_2, u_3, \ldots, u_\ell$ os vértices de B que não u_1. No caso anterior, no qual supomos que $r \ge 1$ e $\ell = 2$, vimos que, para todos os valores possíveis de $f(u_1)$ e $f(u_2)$, conseguimos colorir B_1, $\ldots$, B_r de modo que f restrita a $\{u_1, u_2\} \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)$ seja uma $(2p+1)$-$L(2,1)$-coloração de $G[V(B) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)]$. Logo, a fim de provar que, para todos os valores possíveis de $f(V(B))$, conseguimos colorir B_1, $\ldots$, B_r, é suficiente demonstrar a seguinte proposição: se existe uma $(2p+1)$-$L(2,1)$-coloração f_1 de $G[(V(B) \setminus \{u_\ell\}) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)]$ tal que, para cada $1 \le k \le \ell - 1$, $f_1(u_k) = f(u_k)$, então existe uma $(2p+1)$-$L(2,1)$-coloração f_2 de $G[V(B) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)]$ tal que, para cada $1 \le k \le \ell$, $f_2(u_k) = f(u_k)$. Suponhamos que exista tal f_1. Para cada $w \in (V(B) \setminus \{u_\ell\}) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)$, $f_2(w) := f_1(w)$, e $f_2(u_\ell) := f(u_\ell)$. Se $f(u_\ell) \notin f_1(V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r))$, então f_2 está conforme. Suponhamos então que $f(u_\ell) \in f_1(V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r))$. Logo, para algum $1 \le k \le r$, $f_2(V(B_k) \setminus \{u_1\}) = \{a, b, c\}$ e $f_2(u_\ell) = a$. Vamos redefinir f_2 em $V(B_k) \setminus \{u_1\}$. Há pelo menos $p - 2$ cores em $[0, 2p+1] \setminus (\{2i-3, 2i-2, 2i-1\} \cup f_2(V(B) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)))$ (lembrando que a cor a tem duas ocorrências, uma em $f_2(V(B))$ e outra em $f_2(V(B_k))$). Acrescentando as cores b e c, temos pelo menos $p \ge 6$ cores disponíveis para atribuir em $V(B_k) \setminus \{u_1\}$. Como $|\{1, 3, 5, \ldots, 2p+1\} \setminus \{2i-3, 2i-1\}| = p - 1$, nem todas estas p são ímpares (se $f(u_1) = 0$, há p ímpares em $\{3, \ldots, 2p+1\}$ e $p+1$ cores disponíveis). Sejam

$a_1, \ldots, a_6$ 6 destas cores tais que nem todas sejam ímpares. A seguir, escolhemos 3 cores a'_1, a'_2 e a'_3. Se há pelo menos 3 cores pares dentre $a_1, \ldots, a_6$, então escolhamos estas. Caso contrário, há 1 ou 2 pares dentre $a_1, \ldots, a_6$. Seja a'_1 um destes pares e sejam a'_2 e a'_3 dois ímpares que não $a'_1 - 1$ nem $a'_1 + 1$. Notemos que há pelo menos 4 ímpares dentre $a_1, \ldots, a_6$ e pelo menos 2 destes são diferentes de $a'_1 - 1$ e $a'_1 + 1$. Atribuamos injetivamente as a'_1, a'_2 e a'_3 aos vértices em $V(B_k) \setminus \{u_1\}$. Assim, f_2 está conforme. Para cada $1 \leq k \leq 3r$, $f(v_k) := f_2(v_k)$. Falta atribuir cores aos $p - \ell - 3r + 3$ vértices $v_{3r+1}, \ldots, v_{p-\ell+3}$. Há pelo menos $2p - \ell - 3r$ cores em $[0, 2p+1] \setminus (\{2i-3, 2i-2, 2i-1, f(u_2), \ldots, f(u_\ell)\} \cup f(\{v_1, \ldots, v_{3r}\})$. Temos que $2p - \ell - 3r \geq p - \ell - 3r + 3$ e $2p - \ell - 3r \geq 2(p - \ell - 3r + 3) - 1$, porque $\ell \geq 2$ e $r \geq 1$. Então, atribuamos cores aos vértices $v_{3r+1}, \ldots, v_{p-\ell+3}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r \geq 1$ e $p - 2 \leq \ell \leq p$. Neste caso, $p - \ell + 3 \leq 5$ e, portanto, $r = 1$. A seguir, escolhemos 3 cores a_1, a_2 e a_3. Se há no máximo $p - 2$ cores pares em $f(V(B))$, então sejam a_1, a_2 e a_3 quaisquer três cores em $\{0, 2, \ldots, 2p\} \setminus f(V(B))$. Caso contrário, existem $p - 1$ ou p cores pares e no máximo 1 cor ímpar em $f(V(B))$. Consideremos que haja p cores pares em $f(V(B))$. Logo, há pelo menos $|\{1, 3, \ldots, 2p+1\} \setminus \{2i-3, 2i-1\}| \geq p - 1 \geq 4$ cores ímpares disponíveis. Seja a_1 a única cor em $\{0, 2, \ldots, 2p\} \setminus f(V(B))$, sejam a_2 e a_3 duas cores dentre $\{1, 3, \ldots, 2p+1\} \setminus \{2i-3, 2i-1\}$ diferentes de $a_1 - 1$ e $a_1 + 1$. Consideremos então que haja $p - 1$ cores pares e 1 cor ímpar $2j - 1$ em $f(V(B))$. Logo, há exatamente duas cores em $\{0, 2, \ldots, 2p\} \setminus f(V(B))$ e pelo menos $p - 2 \geq 3$ cores a'_1, a'_2 e a'_3 em $\{1, 3, \ldots, 2p+1\} \setminus \{2i-3, 2i-1, 2j-1\}$. Temos que $2j - 2 \notin f(V(B))$. Assim, escolhamos $2j-2$ para a_1, e sejam a_2 e a_3 duas cores em $\{a'_1, a'_2, a'_3\} \setminus \{2j-3\}$. Para cada $1 \leq k \leq 3$, $f(v_k) := a_k$. Falta atribuir cores aos $p - \ell$ vértices $v_4, \ldots, v_{p-\ell+3}$. Há pelo menos $2p - \ell - 3$ cores em $[0, 2p+1] \setminus (\{2i-3, 2i-2, 2i-1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\})$ $\cup f(\{v_1, v_2, v_3\})$. Temos que $2p - \ell - 3 \geq p - \ell$ e $2p - \ell - 3 \geq 2(p - \ell) - 1$, porque $\ell \geq 3$. Então, atribuamos cores aos vértices $v_4, \ldots, v_{p-\ell+3}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r = 0$, $2 \leq \ell \leq p$ e $\ell \neq 4$. Há pelo menos $2p - \ell$ cores em $[0, 2p+1] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1\} \cup f(V(B)))$. Temos que $2p - \ell \geq p - \ell + 3$. Se $\ell \leq 3$, então $2p - \ell \geq 2(p-1) - 1 \geq 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}| - 1$; se $\ell \geq 5$, então $2p - \ell \geq 2(p - \ell + 3) - 1 \geq 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}| - 1$. Portanto, podemos atribuir cores aos vértices $v_1, \ldots, v_{p-\ell+3}$ de acordo com o Corolário 5.1.

Finalmente, suponhamos que $r = 0$ e $\ell = 4$. Sejam u_2, u_3 e u_4 os vértices de B que não u_1 tais que $f(u_2) < f(u_3) < f(u_4)$. Analisemos os quatro casos seguintes, nos quais verificamos que existem pelo menos $p-1$ cores não consecutivas disponíveis para $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$.

- $\underline{2i - 2 < f(u_2) < f(u_3) < f(u_4)\text{:}}$

O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, 2i-4]$ é $i-1$; em $[2i, f(u_2)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_2)-2i}{2} \rceil$; em $[f(u_2)+1, f(u_3)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2} \rceil$; em $[f(u_3)+1, f(u_4)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2} \rceil$; e, em $[f(u_4)+1, 2p+1]$, é $\lceil \frac{2p-f(u_4)+1}{2} \rceil$.

Suponhamos que $f(u_2)$ seja ímpar. Há pelo menos $i-1+\frac{f(u_2)-2i+1}{2}+\frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2}+\frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2}+\frac{2p-f(u_4)+1}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que $f(u_2)$ e $f(u_4)$ sejam pares. Há pelo menos $i-1+\frac{f(u_2)-2i}{2}+\frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2}+\frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2}+\frac{2p-f(u_4)+2}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que $f(u_2)$ seja par e $f(u_4)$ ímpar. Há pelo menos $i-1+\frac{f(u_2)-2i}{2}+\frac{f(u_3)-f(u_2)+f(u_4)-f(u_3)-1}{2}+\frac{2p-f(u_4)+1}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

- $f(u_2) < 2i-2 < f(u_3) < f(u_4)$:

  O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, f(u_2)-1]$ é $\lceil \frac{f(u_2)}{2} \rceil$; em $[f(u_2)+1, 2i-4]$, é $\lceil \frac{2i-f(u_2)-4}{2} \rceil$; em $[2i, f(u_3)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_3)-2i}{2} \rceil$; em $[f(u_3)+1, f(u_4)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2} \rceil$; e, em $[f(u_4)+1, 2p+1]$, é $\lceil \frac{2p-f(u_4)+1}{2} \rceil$.

  Suponhamos que $f(u_2)$ seja ímpar. Há pelo menos $\frac{f(u_2)+1}{2}+\frac{2i-f(u_2)-3}{2}+\frac{f(u_3)-2i}{2}+\frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2}+\frac{2p-f(u_4)+1}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_2)$ e $f(u_3)$ sejam pares. Pela Propriedade 4, $f(u_4)$ é par. Logo, há pelo menos $\frac{f(u_2)}{2}+\frac{2i-f(u_2)-4}{2}+\frac{f(u_3)-2i}{2}+\frac{f(u_4)-f(u_3)}{2}+\frac{2p-f(u_4)+2}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_2)$ seja par e $f(u_3)$ seja ímpar. Há pelo menos $\frac{f(u_2)}{2}+\frac{2i-f(u_2)-4}{2}+\frac{f(u_3)-2i+1}{2}+\frac{f(u_4)-f(u_3)-1+2p-f(u_4)+1+1}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

- $f(u_2) < f(u_3) < 2i-2 < f(u_4)$:

  O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, f(u_2)-1]$ é $\lceil \frac{f(u_2)}{2} \rceil$; em $[f(u_2)+1, f(u_3)-1]$ é $\lceil \frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2} \rceil$; em $[f(u_3)+1, 2i-4]$ é $\lceil \frac{2i-f(u_3)-4}{2} \rceil$; em $[2i, f(u_4)-1]$ é $\lceil \frac{f(u_4)-2i}{2} \rceil$; e, em $[f(u_4)+1, 2p+1]$ é $\lceil \frac{2p-f(u_4)+1}{2} \rceil$.

  Suponhamos que $f(u_2)$ seja ímpar. Há pelo menos $\frac{f(u_2)+1}{2}+\frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2}+\frac{2i-f(u_3)-4}{2}+\frac{f(u_4)-2i+2p-f(u_4)+1+1}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_2)$ seja par. Há pelo menos $\frac{f(u_3)-f(u_2)-1+2i-f(u_3)-4+1}{2}+\frac{f(u_4)-2i+2p-f(u_4)+1+1}{2}+\frac{f(u_2)}{2}=p-1$ cores não consecutivas.

- $f(u_2) < f(u_3) < f(u_4) < 2i-2$:

  O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, f(u_2)-1]$ é $\lceil \frac{f(u_2)}{2} \rceil$; em $[f(u_2)+1, f(u_3)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2} \rceil$; em $[f(u_3)+1, f(u_4)-1]$, é $\lceil \frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2} \rceil$; em $[f(u_4)+1, 2i-4]$, é $\lceil \frac{2i-f(u_4)-4}{2} \rceil$; e, em $[2i, 2p+1]$, é $p-i+1$.

  Suponhamos que $f(u_2)$ e $f(u_3)$ sejam ímpares. Há pelo menos $\frac{f(u_2)+1}{2}+\frac{f(u_3)-f(u_2)}{2}+\frac{f(u_4)-f(u_3)-1}{2}+\frac{2i-f(u_4)-4}{2}+p-i+1=p-1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que $f(u_2)$ seja ímpar e $f(u_3)$ par. Há pelo menos $\frac{f(u_2)+1}{2} + \frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2} + \frac{f(u_4)-f(u_3)-1+2i-f(u_4)-4+1}{2} + p - i + 1 = p - 1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que $f(u_2)$ seja par e $f(u_3)$ ímpar. Pela Propriedade 4, $f(u_4)$ é ímpar. Há pelo menos $\frac{f(u_2)}{2} + \frac{f(u_3)-f(u_2)-1}{2} + \frac{f(u_4)-f(u_3)}{2} + \frac{2i-f(u_4)-3}{2} + p - i + 1 = p - 1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que $f(u_2)$ e $f(u_3)$ sejam pares. Há pelo menos $\frac{f(u_2)}{2} + \frac{f(u_3)-f(u_2)}{2} + \frac{f(u_4)-f(u_3)-1+2i-f(u_4)-4+1}{2} + p - i + 1 = p - 1$ cores não consecutivas.

Vemos que as Propriedades 3 e 4 são válidas em G''. $\square$

Os limites dos teoremas 5.6 e 5.7 são justos.
Para $p \geq 4$, seja $G_{p,p+2}$ o grafo de blocos construído da seguinte forma:

- Começamos com um bloco B que é um K_4.
- Para cada vértice x de B, adicionamos um K_p que compartilha x com B. Sejam B_1, B_2, B_3 e B_4 os blocos adicionados nesta etapa.
- Para cada $1 \leq i \leq 4$, para cada vértice y de B_i com grau igual a $p-1$ (há $p-1$ tais vértices em B_i), adicionamos um K_4 que compartilha y com B_i. Sejam B_5, B_6, ... e B_{4p} os blocos adicionados nesta etapa.
- Para cada $5 \leq i \leq 4p$, para cada vértice z de B_i com grau igual a 3 (há 3 tais vértices em B_i), adicionamos um K_p que compartilha z com B_i. Sejam B_{4p+1}, B_{4p+2}, ... e B_{16p-12} os blocos adicionados nesta etapa.

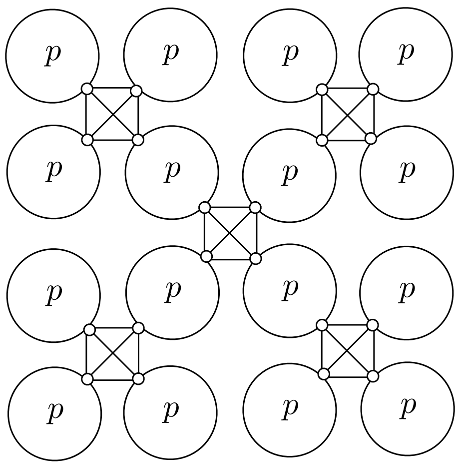

Figura 5.11: $G_{p,p+2}$, com $p \geq 4$. Cada K_p que não é um bloco terminal compartilha cada um de seus p vértices com um K_4.

Proposição 5.12. *Para $p \geq 4$, $\lambda(G_{p,p+2}) = 2p+1$.*

Prova. Pelo Teorema 5.6, $\lambda(G_{4,6}) \leq 9$ e, pelo Teorema 5.7, para $p \geq 5$, $\lambda(G_{p,p+2}) \leq 2p+1$. Suponhamos por contradição que exista uma $2p$-$L(2,1)$-coloração f de $G_{p,p+2}$. Se $f(V(B))$ contém pelo menos 3 cores pares $2i_1-2$, $2i_2-2$ e $2i_3-2$ tais que $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p+1$, então f tem uma configuração proibida semelhante à Configuração 1 da Proposição 5.6. Se $f(V(B))$ contém pelo menos 3 cores ímpares $2i_1-1$, $2i_2-1$ e $2i_3-1$ tais que $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p$, então f tem uma configuração proibida semelhante à Configuração 2 ou à Configuração 3 da Proposição 5.6. Logo, $f(V(B))$ contém 2 cores pares e 2 cores ímpares, e é fácil ver que $f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-2, 2i_4-1\}$, para algum $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p$, pois qualquer outro posicionamento das cores força uma configuração proibida análoga a alguma da Proposição 5.6.

Seja B' o bloco de p vértices que compartilha com B o vértice de cor $2i_1-1$. Temos que $2p \in f(V(B'))$. Logo, o bloco B'' de 4 vértices que compartilha com B' o vértice de cor $2p$ possui alguma configuração proibida da Proposição 5.6, uma contradição. Assim, $\lambda(G_{p,p+2}) \geq 2p+1$. □

5.7 $\mathcal{B}_{p,p+3}$

Para cada $p \geq 5$, provamos que, para $G \in \mathcal{B}_{p,p+3}$, $\lambda(G) \leq 2p+2$.

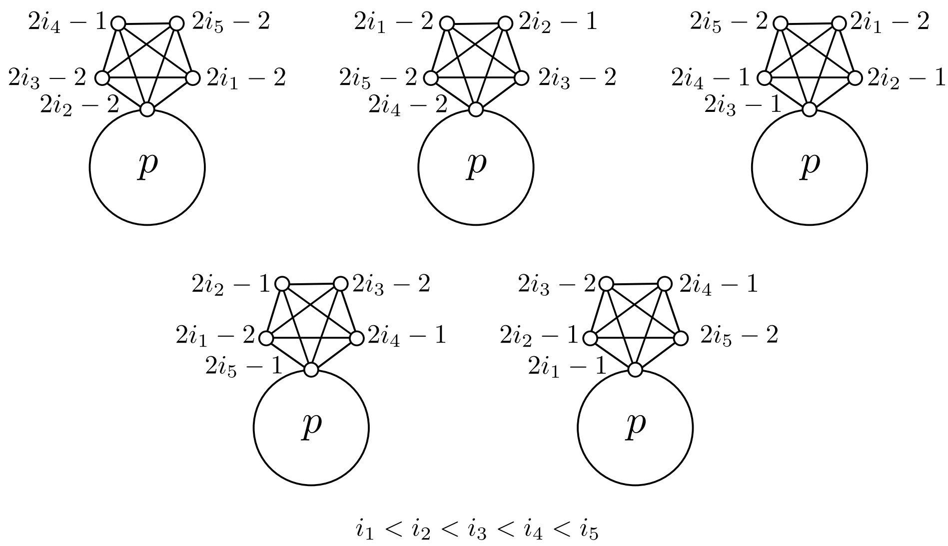

Figura 5.12: Configurações proibidas da Proposição 5.13.

A seguir, expomos configurações proibidas em uma $(2p+2)$-$L(2,1)$-coloração.

Proposição 5.13. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p+3}$. Sejam B e B_1 dois blocos de G tais que $V(B) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ e $V(B_1) = \{u_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$. Se existe uma $(2p+2)$-$L(2,1)$-coloração f de G, então as seguintes configurações de f são proibidas:*

1. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p+2$, $f(V(B)) = \{2i_1-2,\ 2i_2-2,\ 2i_3-2,\ 2i_4-1,\ 2i_5-2\}$ *e* $f(u_1) = 2i_2-2$;

2. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p+2$, $f(V(B)) = \{2i_1-2,\ 2i_2-1,\ 2i_3-2,\ 2i_4-2,\ 2i_5-2\}$ *e* $f(u_1) = 2i_4-2$;

3. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p+2$, $f(V(B)) = \{2i_1-2,\ 2i_2-1,\ 2i_3-1,\ 2i_4-1,\ 2i_5-2\}$ *e* $f(u_1) = 2i_3-1$;

4. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p+1$, $f(V(B)) = \{2i_1-2,\ 2i_2-1,\ 2i_3-2,\ 2i_4-1,\ 2i_5-1\}$ *e* $f(u_1) = 2i_5-1$;

5. *para algum* $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p+2$, $f(V(B)) = \{2i_1-1,\ 2i_2-1,\ 2i_3-2,\ 2i_4-1,\ 2i_5-2\}$ *e* $f(u_1) = 2i_1-1$;

Prova. Suponhamos que exista uma $(2p+2)$-$L(2,1)$-coloração f de G. Temos que f possui a Configuração 2 se, e somente se, o reverso de f em relação a $[0, 2p+2]$ f^R possui a Configuração 1 e que f possui a Configuração 5 se, e somente se, f^R possui a Configuração 4. Assim, basta analisarmos as configurações 1, 3 e 4.

Suponhamos por contradição que a Configuração 1 de f seja possível. Em $[0, 2i_1-3]$, há no máximo i_1-1 cores não consecutivas; em $[2i_1-1, 2i_2-4]$, há no máximo i_2-i_1-1 cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3-3]$, há no máximo i_3-i_2-1 cores não consecutivas; em $[2i_3-1, 2i_4-2]$, há no máximo i_4-i_3; em $[2i_4, 2i_5-3]$, há no máximo i_5-i_4-1 cores não consecutivas; e, em $[2i_5-1, 2p+2]$, há no máximo $p-i_5+2$ cores não consecutivas. Logo, $|f(V(B_1))| \leq 1+(i_1-1)+(i_2-i_1-1)+(i_3-i_2-1)+(i_4-i_3)+(i_5-i_4-1)+(p-i_5+2) = p-1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 1 é proibida.

Suponhamos por contradição que a Configuração 3 de f seja possível. Em $[0, 2i_1-3]$, há no máximo i_1-1 cores não consecutivas; em $[2i_1-1, 2i_2-2]$, há no máximo i_2-i_1 cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3-3]$, há no máximo i_3-i_2-1 cores não consecutivas; em $[2i_3+1, 2i_4-2]$, há no máximo i_4-i_3-1; em $[2i_4, 2i_5-3]$, há no máximo i_5-i_4-1 cores não consecutivas; e, em $[2i_5-1, 2p+2]$, há no máximo $p-i_5+2$ cores não consecutivas. Logo, $|f(V(B_1))| \leq 1+(i_1-1)+(i_2-i_1)+(i_3-i_2-1)+(i_4-i_3-1)+(i_5-i_4-1)+(p-i_5+2) = p-1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 3 é proibida.

Suponhamos por contradição que a Configuração 4 de f seja possível. Em $[0, 2i_1-3]$, há no máximo i_1-1 cores não consecutivas; em $[2i_1-1, 2i_2-2]$, há no máximo i_2-i_1 cores não consecutivas; em $[2i_2, 2i_3-3]$, há no máximo i_3-i_2-1 cores não consecutivas; em $[2i_3-1, 2i_4-2]$, há no máximo i_4-i_3; em $[2i_4, 2i_5-3]$, há no máximo i_5-i_4-1 cores não consecutivas; e, em $[2i_5+1, 2p+2]$, há no máximo $p-i_5+1$ cores não consecutivas. Logo, $|f(V(B_1))| \leq 1+(i_1-1)+(i_2-i_1)+(i_3-$

$i_2 - 1) + (i_4 - i_3) + (i_5 - i_4 - 1) + (p - i_5 + 1) = p - 1$, uma contradição. Portanto, a Configuração 4 é proibida. $\square$

Tratamos separadamente o caso em que $p = 5$ a seguir.

Teorema 5.8. *Seja $G \in \mathcal{B}_{5,8}$. Então, $\lambda(G) \leq 12$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ à 5-clique inicial.

Aqui, $\mathcal{F}_{5,8}$ é o conjunto de todas as 12-$L(2,1)$-colorações de G' com a restrição: para cada bloco B com $|V(B)| = 5$, $f(V(B)) \notin \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 2,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 7\} \cup \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 2,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 7\} \cup \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 1,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 7\} \cup \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 1 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 6\} \cup \{2i_1 - 1,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq 7\}$.

Suponhamos que $\ell = 5$. A seguir, atribuímos cores a v_1, v_2, v_3 e v_4 conforme as possibilidades para $f(V(B))$. Seja f^R o reverso de f em relação a $[0, 12]$. Para cada configuração $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ de $f(V(B))$ que examinamos adiante, indicamos entre parênteses a configuração correspondente $\{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5\}$ de $f^R(V(B))$ se estas duas são diferentes. Claramente, não é necessário considerar um caso separado para $\{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5\}$, e, de fato, não o fazemos: se $f(V(B)) = \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5\}$, então basta redefinir $f(v) := f^R(v)$, para cada $v \in V(G')$ e, assim, temos $f(V(B)) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Os casos seguintes estão divididos da seguinte forma: nos casos 1 e 2, todas as cores de $f(V(B))$ têm a mesma paridade; nos casos $3 - 6$, há exatamente 1 salto de paridade em $f(V(B))$; os casos 7 e 8 correspondem às configurações de $f(V(B))$ que começam numa cor par e possuem exatamente 2 saltos de paridade; os casos $9 - 12$ correspondem às configurações de $f(V(B))$ que começam numa cor ímpar e possuem exatamente 2 saltos de paridade; nos casos $13 - 15$, há exatamente 3 saltos de paridade em $f(V(B))$; e, no caso 16, há exatamente 4 saltos de paridade em $f(V(B))$. Em cada um dos casos em que aparecem, $i_1, \ldots, i_5$ são inteiros tais que $1 \leq i_1 < \cdots < i_5 \leq 7$.

1. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2, 2i_4 - 2, 2i_5 - 2\}}$:

   Temos que $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $i \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$. Atribuamos injetivamente as cores em $\{1, 3, \ldots, 11\} \setminus \{2i - 3, 2i - 1\}$.

2. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1, 2i_4 - 1, 2i_5 - 1\}}$:

   Se $f(u_1) \in \{1, 3\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 8$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) \in \{5, 7\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) \in \{9, 11\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 4$ e $f(v_4) := 6$.

3. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1, 2i_4 - 1, 2i_5 - 1\}}$: $(f^R(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1, 2i_4 - 1, 2i_5 - 2\})$

   Notemos que $2i_1 - 2 \in \{0, 2\}$ e $2i_2 - 1 \in \{3, 5\}$. Se $f(u_1) = 2i_1 - 2$, então $f(v_1) := 4$, $f(v_2) := 6$, $f(v_3) := 8$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) = 3$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 8$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 5$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 8$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 7$, então $f(v_1) := a_1$, $f(v_2) := a_2$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$, onde $\{a_1, a_2\} = \{0, 2, 4\} \setminus \{2i_1 - 2\}$. Se $f(u_1) = 9$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 11$, então $f(v_1) := a_1$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$, onde a_1 é alguma cor em $\{0, 2\} \setminus \{2i_1 - 2\}$.

4. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 1, 2i_4 - 1, 2i_5 - 1\}}$: $(f^R(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1, 2i_4 - 2, 2i_5 - 2\})$

   Notemos que $2i_2 - 2 \in \{2, 4\}$ e $2i_3 - 1 \in \{5, 7\}$. Se $f(u_1) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2\}$, então $f(v_1) := 6$, $f(v_2) := 8$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 5$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 8$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 7$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 2i_4 - 1 = 9$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := a_1$ e $f(v_4) := 12$, onde a_1 é alguma cor em $\{5, 7\} \setminus \{2i_3 - 1\}$. Se $f(u_1) = 2i_5 - 1 = 9$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 11$. Se $f(u_1) = 11$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$.

5. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2, 2i_4 - 1, 2i_5 - 1\}}$: $(f^R(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 1, 2i_3 - 2, 2i_4 - 2, 2i_5 - 2\})$

   Notemos que $2i_3 - 2 \in \{4, 6\}$ e $2i_4 - 1 \in \{7, 9\}$. Se $f(u_1) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2\}$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 12\} \setminus \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2\}$. Se $f(u_1) \in \{2i_4 - 1, 2i_5 - 1\}$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{1, 3, \ldots, 11\} \setminus \{2i_4 - 1, 2i_5 - 1\}$.

6. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2, 2i_4 - 2, 2i_5 - 1\}}$: $(f^R(V(B)) = \{2i_1 - 1, 2i_2 - 2, 2i_3 - 2, 2i_4 - 2, 2i_5 - 2\})$

   Notemos que $2i_4 - 2 \in \{6, 8\}$ e $2i_5 - 1 \in \{9, 11\}$. Se $f(u_1) = 0$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{3, 5, \ldots, 11\} \setminus \{2i_5 - 1\}$. Se $f(u_1) = 2$, então $f(v_1) := 5$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 4$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) \in \{6, 8\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 2i_5 - 1$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{1, 3, \ldots, 11\} \setminus \{2i_5 - 1\}$.

7. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1, 2i_4 - 2, 2i_5 - 2\}}$: $(f^R(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 2, 2i_3 - 1, 2i_4 - 1, 2i_5 - 2\})$

Se $f(u_1) \in \{2i_1-2,\ 2i_4-2,\ 2i_5-2\}$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{0,2,\dots,12\} \setminus \{2i_1-2, 2i_4-2, 2i_5-2\}$. Se $f(u_1) \in \{2i_2-1,\ 2i_3-1\}$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{1,3,\dots,11\} \setminus \{2i_2-1, 2i_3-1\}$.

8. $\underline{f(V(B)) = \{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-2, 2i_5-2\}}$:

   Notemos que $2i_2-2 \in \{2,4\}$, $2i_3-1 \in \{5,7\}$ e $2i_4-2 \in \{8,10\}$ Se $f(u_1) = 0$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{3,5,\dots,11\} \setminus \{2i_3-1\}$. Se $f(u_1) = 2i_1-2 = 2$, então $f(v_1) := 0$ e atribuamos injetivamente as cores em $\{5,7,\dots,11\} \setminus \{2i_3-1\}$. Se $f(u_1) = 2i_2-2 = 2$, então $f(v_1) := 4$ e atribuamos injetivamente as cores em $\{5,7,\dots,11\} \setminus \{2i_3-1\}$. Se $f(u_1) = 4$ (e, portanto, $2i_3-1 = 7$, $2i_4-2 = 10$, $2i_5-2 = 12$), então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 6$, $f(v_3) := 8$ e $f(v_4) := 11$. Se $f(u_1) = 8$ (e, portanto, $2i_1-2 = 0$, $2i_2-2 = 2$, $2i_3-1 = 5$ e $2i_4-2 = 8$), então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := a$, onde a é alguma cor em $\{10,12\} \setminus \{2i_5-2\}$. Se $f(u_1) = 2i_4-2 = 10$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(u_1) = 2i_5-1 = 10$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 12$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{1,3,\dots,9\} \setminus \{2i_3-1\}$. Se $f(u_1) = 2i_3-1$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{1,3,\dots,11\} \setminus \{2i_3-1\}$.

9. $\underline{f(V(B)) = \{1,4,7,9,11\}}$: $(f^R(V(B)) = \{1,3,5,8,11\})$

   Se $f(u_1) = 1$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 8$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) = 4$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(u_1) = 7$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 9$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 5$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 11$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 8$.

10. $\underline{f(V(B)) = \{1,4,6,9,11\}}$: $(f^R(V(B)) = \{1,3,6,8,11\})$

    Se $f(u_1) = 1$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) \in \{4,\ 6\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 8$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) \in \{9,\ 11\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 5$ e $f(v_4) := 7$.

11. $\underline{f(V(B)) = \{1,4,6,8,11\}}$:

    Se $f(u_1) = 1$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 8$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) \in \{4,\ 6,\ 8\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 11$, então $f(v_1) := 3$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.

12. $\underline{f(V(B)) = \{1,3,6,9,11\}}$:

    Se $f(u_1) \in \{1,\ 3\}$, então $f(v_1) := 5$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 6$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 4$ e $f(v_4) := 8$. Se $f(u_1) \in \{9,\ 11\}$, então $f(v_1) := 0$, $f(v_2) := 2$, $f(v_3) := 5$ e $f(v_4) := 7$.

13. $\underline{f(V(B)) = \{0, 2, 5, 8, 11\}}$: $(f^R(V(B)) = \{1, 4, 7, 10, 12\})$

    Se $f(u_1) \in \{0,\ 2,\ 8\}$, então $f(v_1) := 4$, $f(v_2) := 6$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) \in \{5,\ 11\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 3$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.

14. $\underline{f(V(B)) = \{0, 3, 5, 8, 11\}}$: $(f^R(V(B)) = \{1, 4, 7, 9, 12\})$

    Se $f(u_1) \in \{0,\ 8\}$, então $f(v_1) := 2$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 6$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) \in \{3,\ 5\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 7$, $f(v_3) := 9$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) = 11$, então $f(v_1) := 2$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.

15. $\underline{f(V(B)) = \{0, 3, 6, 8, 11\}}$: $(f^R(V(B)) = \{1, 4, 6, 9, 12\})$

    Se $f(u_1) \in \{0,\ 6,\ 8\}$, então $f(v_1) := 2$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 10$ e $f(v_4) := 12$. Se $f(u_1) \in \{3,\ 11\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 9$.

16. $\underline{f(V(B)) = \{0, 3, 6, 9, 12\}}$:

    Se $f(u_1) \in \{0,\ 6,\ 12\}$, então $f(v_1) := 2$, $f(v_2) := 4$, $f(v_3) := 8$ e $f(v_4) := 10$. Se $f(u_1) \in \{3,\ 9\}$, então $f(v_1) := 1$, $f(v_2) := 5$, $f(v_3) := 7$ e $f(v_4) := 11$.

Suponhamos que $2 \leq \ell \leq 4$ e $|V(B_1)| \leq 4$. Há pelo menos $11 - \ell$ cores em $[0, 12] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}))$. Temos que $11 - \ell \geq 9 - \ell$ e $11 - \ell \geq 5 \geq 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}| - 1$. Logo, podemos atribuir cores aos vértices $v_1, \ldots, v_{9-\ell}$ conforme o Corolário 5.1.

Finalmente, suponhamos que $2 \leq \ell \leq 4$ e $|V(B_1)| = 5$. Primeiramente, atribuímos cores a $v_1, \ldots, v_4$. Consideremos $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \leq i \leq 7$. Se há no máximo 3 cores pares em $f(V(B))$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 12\} \setminus f(V(B))$ a $v_1, \ldots, v_4$. Caso contrário, há exatamente 4 cores pares em $f(V(B))$ e atribuamos injetivamente as cores em $\{1, 3, \ldots, 11\} \setminus \{2i - 3, 2i - 1\}$. Consideremos então $f(u_1) = 2i - 1$, para algum $1 \leq i \leq 6$. Se há no máximo 2 cores ímpares em $f(V(B))$, então atribuamos injetivamente as cores em $\{1, 3, \ldots, 11\} \setminus f(V(B))$ a $v_1, \ldots, v_4$. Caso contrário, ou $f(V(B))$ consiste somente de cores ímpares, ou $f(V(B))$ consiste de 3 cores ímpares e 1 cor par. Se há somente cores ímpares em $f(V(B))$, então atribuímos cores a $v_1, \ldots, v_4$ analogamente ao caso 2 visto anteriormente, no qual $f(V(B))$ consiste de 5 cores ímpares: de acordo com o valor de $2i - 1$, ou atribuímos 4 pares maiores, ou atribuímos 2 pares menores e 2 pares maiores, ou atribuímos 4 pares menores. Suponhamos então que haja em $f(V(B))$ 3 cores ímpares e 1 cor par. Analisemos as duas possibilidades seguintes para $f(V(B))$, em que $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 7$.

- $\underline{f(V(B)) = \{2i_1 - 2, 2i_2 - 1, 2i_3 - 1, 2i_4 - 1\}}$: $(f^R(V(B)) = \{2i_1 - 1,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 1,\ 2i_4 - 2\})$

$$A := \begin{cases} \{1,3,\ldots,2i_2-3\} \cup \{2i_2+2, 2i_2+4, \ldots, 12\} & \text{se } i = i_2, \\ \{1,3,\ldots,2i_2-3\} \cup \{2i_2+1, 2i_2+3, \ldots, 2i_3-3\} & \\ \cup\{2i_3+2, 2i_2+4, \ldots, 12\} & \text{se } i = i_3, \\ \{0,2,\ldots,2i_1-4\} \cup \{2i_1, 2i_1+2, \ldots, 2i_4-4\} & \\ \cup\{2i_4+1, 2i_4+3, \ldots, 11\} & \text{se } i = i_4. \end{cases}$$

- $\underline{f(V(B)) = \{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-1\}:}$ ($f^R(V(B)) = \{2i_1-1,\ 2i_2-1,\ 2i_3-2,\ 2i_4-1\}$)

$$A := \begin{cases} \{1,3,\ldots,2i_1-3\} \cup \{2i_1+1, 2i_1+3, \ldots, 2i_2-1\} & \\ \cup\{2i_2, 2i_2+2, \ldots, 12\} & \text{se } i = i_1, \\ \{1,3,\ldots,2i_1-3\} \cup \{2i_1+1, 2i_1+3, \ldots, 2i_3-3\} & \\ \cup\{2i_3+2, 2i_2+4, \ldots, 12\} & \text{se } i = i_3, \\ \{0,2,\ldots,2i_2-4\} \cup \{2i_2, 2i_2+2, \ldots, 2i_4-4\} & \\ \cup\{2i_4+1, 2i_4+3, \ldots, 11\} & \text{se } i = i_4. \end{cases}$$

Atribuamos injetivamente as cores em A a v_1, v_2, v_3, v_4. Resta colorir os $5-\ell$ vértices $v_5 \ldots, v_{9-\ell}$. Há pelo menos $7-\ell$ cores em $[0,12] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}) \cup f(\{v_1,\ldots,v_4\}))$. Como $7-\ell \geq 5-\ell$ e $7-\ell \geq 2(5-\ell)-1$, podemos atribuir cores a $v_5,\ldots,v_{9-\ell}$ conforme o Corolário 5.1.

Vemos que as Propriedades 3 e 4 são válidas em G''. $\square$

Lema 5.4. *Seja $p \geq 6$. Para cada $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+2}{2} \rceil$ e cada $a \in [0, 2p+2]$, existe uma família $\mathcal{A}(2i-2, a)$ de 4-subconjuntos de $[0, 2p+2] \setminus \{2i-3, 2i-2, 2i-1, a\}$ dois a dois disjuntos tal que*

1. *$|\mathcal{A}(2i-2, a)| = \lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor$;*

2. *cada conjunto pertencente a $\mathcal{A}_i$ consiste de inteiros não consecutivos;*

3. *para cada $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \in \mathcal{A}(2i-2, a)$, se $2i-2 < c_1 < c_2 < c_3 < c_4$, então $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-2\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+2\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-2, 2i_4-2\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+2\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1, 2i_4-2\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+2\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1\}$;*

4. *para cada* $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \in \mathcal{A}(2i-2, a)$, *se* $c_1 < c_2 < 2i-2 < c_3 < c_4$, *então* $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-1$ *e* $i+1 \leq i_3 < i_4 \leq p+2\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-2, 2i_4-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ *e* $i+1 \leq i_3 < i_4 \leq p+2\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1, 2i_4-1\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ *e* $i+1 \leq i_3 < i_4 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-1, 2i_4-2\} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq i-2$ *e* $i+1 \leq i_3 < i_4 \leq p+2\}$;

5. *para cada* $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \in \mathcal{A}(2i-2, a)$, *se* $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < 2i-2$, *então* $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-2, 2i_4-2\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+2\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-2, 2i_4-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1, 2i_4-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-2, 2i_4-1\} : i+1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq p+1\}$;

Prova. Seja $\{a_1, \ldots, a_p\}$ um subconjunto de $\{0, 2, \ldots, 2p+2\} \setminus \{2i-2, a\}$ com p pares distintos tal que $a_1 < \cdots < a_p$, e $r := 4\lfloor \frac{p}{4} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}(2i-2, a) := \{\{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{a_5, a_6, a_7, a_8\}, \ldots, \{a_{r-3}, a_{r-2}, a_{r-1}, a_r\}\}$. Conforme os casos seguintes, possivelmente adicionamos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-2, a)$.

- <u>$p+2 \equiv 3 \pmod 4$:</u>

  Temos que $|\mathcal{A}(2i-2, a)| = \frac{p-1}{4} = \lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor$.

- <u>$p+2 \equiv 2 \pmod 4$:</u>

  Temos que $|\mathcal{A}(2i-2, a)| = \frac{p}{4} = \lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor$.

- <u>$p+2 \equiv 1 \pmod 4$:</u>

  Neste caso, $p \geq 7$; $r = p-3$; $|\mathcal{A}(2i-2, a)| = \frac{p-3}{4}$; e $\lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor = \frac{p+1}{4}$. Logo, para satisfazer a Propriedade 1, basta acrescentarmos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-2, a)$. Notemos que $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+2}{2} \rceil = \frac{p+3}{2}$ e, portanto, $0 \leq 2i-2 \leq p+1$. Se $2i-2 = p+1$, então acrescentemos $\{1, a_{p-2}, a_{p-1}, a_p\}$; se $0 \leq 2i-2 \leq p-1$, então acrescentemos $\{p+2, p+4, p+6, p+8\}$.

- <u>$p+2 \equiv 0 \pmod 4$:</u>

  Neste caso, $p \geq 6$; $r = p-2$; $|\mathcal{A}(2i-2, a)| = \frac{p-2}{4}$; e $\lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor = \frac{p+2}{4}$. Logo, para satisfazer a Propriedade 1, basta acrescentarmos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-2, a)$. Notemos que $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+2}{2} \rceil = \frac{p+2}{2}$ e, portanto, $0 \leq 2i-2 \leq p$. Se $2i-2 = p$, então acrescentemos $\{1, 3, a_{p-1}, a_p\} = \{0, 2, 4, 2p+1\}$; se $0 \leq 2i-2 \leq p-2$, então acrescentemos $\{p+1, p+3, p+5, p+7\}$. □

Lema 5.5. *Seja* $p \geq 6$. *Para cada* $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$ *e cada* $a \in [0, 2p+2]$, *existe uma família* $\mathcal{A}(2i-1, a)$ *de* 4*-subconjuntos de* $[0, 2p+2] \setminus \{2i-2, 2i-1, 2i, a\}$ *dois a dois disjuntos tal que*

1. $|\mathcal{A}(2i-1,a)| = \lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor$;

2. *cada conjunto pertencente a* $\mathcal{A}_i$ *consiste de inteiros não consecutivos;*

3. *para cada* $\{c_1,c_2,c_3,c_4\} \in \mathcal{A}(2i-1,a)$, *se* $c_1 < 2i-1 < c_2 < c_3 < c_4$, *então* $\{c_1,c_2,c_3,c_4\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-2, 2i_4-2\} : 1 \le i_1 \le i-1$ *e* $i+2 \le i_2 < i_3 < i_4 \le p+2\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1, 2i_4-2\} : 1 \le i_1 \le i-1$ *e* $i+1 \le i_2 < i_3 < i_4 \le p+2\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-1\} : 1 \le i_1 \le i-1$ *e* $i+2 \le i_2 < i_3 < i_4 \le p+1\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-2, 2i_3-1, 2i_4-2\} : 1 \le i_1 \le i-1$ *e* $i+2 \le i_2 < i_3 < i_4 \le p+2\}$;

4. *para cada* $\{c_1,c_2,c_3,c_4\} \in \mathcal{A}(2i-1,a)$, *se* $c_1 < c_2 < c_3 < 2i-1 < c_4$, *então* $\{c_1,c_2,c_3,c_4\} \notin \{\{2i_1-2, 2i_2-2, 2i_3-2, 2i_4-2\} : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le i-1$ *e* $i+2 \le i_4 \le p+2\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-1, 2i_4-2\} : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le i-1$ *e* $i+2 \le i_4 \le p+2\} \cup \{\{2i_1-1, 2i_2-1, 2i_3-2, 2i_4-2\} : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le i-1$ *e* $i+2 \le i_4 \le p+1\} \cup \{\{2i_1-2, 2i_2-1, 2i_3-2, 2i_4-1\} : 1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le i-1$ *e* $i+1 \le i_4 \le p+2\}$;

Prova. Seja $\{a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}\}$ um subconjunto de $\{1, 3, \ldots, 2p+1\} \setminus \{2i-1, a\}$ com $p-1$ ímpares distintos tal que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{p-1}$, e $r := 4\lfloor \frac{p-1}{4} \rfloor$. Definamos $\mathcal{A}(2i-1,a) := \{\{a_1,a_2,a_3,a_4\}, \{a_5,a_6,a_7,a_8\}, \ldots, \{a_{r-3}, a_{r-2}, a_{r-1}, a_r\}\}$. Conforme os casos seguintes, possivelmente adicionamos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-1,a)$.

- $p+2 \equiv 3 \pmod 4$:

  Temos que $|\mathcal{A}(2i-1,a)| = \frac{p-1}{4} = \lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor$.

- $p+2 \equiv 2 \pmod 4$:

  Neste caso, $p \ge 8$; $r = p-4$; $|\mathcal{A}(2i-1,a)| = \frac{p-4}{4}$; e $\lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor = \frac{p}{4}$. Logo, para satisfazer a Propriedade 1, basta acrescentarmos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-1,a)$. Notemos que $1 \le i \le \lceil \frac{p+1}{2} \rceil = \frac{p+2}{2}$ e, portanto, $1 \le 2i-1 \le p+1$. Se $2i-1 = p+1$, então acrescentemos $\{0, a_{p-3}, a_{p-2}, a_{p-1}\}$; se $1 \le 2i-1 \le p-1$, então acrescentemos $\{p+2, p+4, p+6, p+8\}$.

- $p+2 \equiv 1 \pmod 4$:

  Neste caso, $p \ge 7$; $r = p-3$; $|\mathcal{A}(2i-1,a)| = \frac{p-3}{4}$; e $\lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor = \frac{p+1}{4}$. Logo, para satisfazer a Propriedade 1, basta acrescentarmos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-1,a)$. Notemos que $1 \le i \le \lceil \frac{p+1}{2} \rceil = \frac{p+1}{2}$ e, portanto, $1 \le 2i-1 \le p$. Se $2i-1 = p$, então acrescentemos $\{0, 2, a_{p-2}, a_{p-1}\}$; se $1 \le 2i-1 \le p-2$, então acrescentemos $\{p+1, p+3, p+5, p+7\}$.

- $p+2 \equiv 0 \pmod 4$:

Neste caso, $p \geq 6$; $r = p - 2$; $|\mathcal{A}(2i-1, a)| = \frac{p-2}{4}$; e $\lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor = \frac{p+2}{4}$. Logo, para satisfazer a Propriedade 1, basta acrescentarmos um conjunto a $\mathcal{A}(2i-1, a)$. Notemos que $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil = \frac{p+2}{2}$ e, portanto, $1 \leq 2i - 1 \leq p + 1$. Se $2i - 1 = p + 1$, então acrescentemos $\{0, 2, 4, a_{p-1}\}$; se $1 \leq 2i - 1 \leq p - 1$, então acrescentemos $\{p+2, p+4, p+6, p+8\}$. $\square$

Teorema 5.9. *Seja $G \in \mathcal{B}_{p,p+3}$. Se $p \geq 6$, então $\lambda(G) \leq 2p + 2$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ aos vértices da p-clique inicial $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{p,p+3}$ é o conjunto de todas as $(2p+2)$-$L(2,1)$-colorações de G' tais que: se existem um bloco B de G' com $V(B) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ e um bloco B_1 de $G - V(G')$ com $V(B_1) = \{u_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$, então

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 2,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p + 2\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_2 - 2$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 2,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p + 2\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_4 - 2$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 1,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p + 2\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_3 - 1$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 2,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 1 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p + 1\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_5 - 1$;

- $f(V(B)) \in \{2i_1 - 1,\ 2i_2 - 1,\ 2i_3 - 2,\ 2i_4 - 1,\ 2i_5 - 2 : 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5 \leq p + 2\}$ implica $f(u_1) \neq 2i_1 - 1$.

Suponhamos que $f(u_1) \geq p + 1$. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 2p+2]$ f^R, temos que $f^R(u_1) \leq p + 1$. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) \leq p + 1$.

Suponhamos que $r \geq 1$ e $\ell = 2$. Seja u_2 o vértice de B que não u_1. Se $f(u_1) = 2i - 2$ para algum $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+2}{2} \rceil$, então seja $\mathcal{A} := \mathcal{A}(2i-2, f(u_2))$, onde $\mathcal{A}(2i-2, f(u_2))$ é a família de 4-subconjuntos de $[0, 2p+2]$ do Lema 5.4; caso contrário, $f(u_1) = 2i - 1$ para algum $1 \leq i \leq \lceil \frac{p+1}{2} \rceil$ e seja $\mathcal{A} := \mathcal{A}(2i-1, f(u_2))$, onde $\mathcal{A}(2i-1, f(u_2))$ é a família de 4-subconjuntos de $[0, 2p+2]$ do Lema 5.5. Seja $\{\{a_1, b_1, c_1, d_1\}, \ldots, \{a_r, b_r, c_r, d_r\}\}$ uma subfamília de $\mathcal{A}$ com r conjuntos distintos. Por definição, $f(u_2) \notin \bigcup_{1 \leq k \leq r} \{a_k, b_k, c_k, d_k\}$ e $|\mathcal{A}| = \lfloor \frac{p+2}{4} \rfloor \geq r$. Definamos $f(v_1) := a_1$, $f(v_2) := b_1$, $f(v_3) := c_1$, $f(v_4) := d_1$, $\ldots$, $f(v_{4r-3}) := a_r$, $f(v_{4r-2}) := b_r$, $f(v_{4r-1}) := c_r$, $f(v_{4r}) := d_r$. Falta atribuir cores aos $p - 4r + 2$ vértices $v_{4r+1}, \ldots, v_{p+2}$. Há pelo menos $2p - 4r - 1$ cores em $[0, 2p+2] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1, f(u_2)\} \cup$

$f(\{v_1, \ldots, v_{4r}\}))$. Temos que $2p-4r-1 \geq p-4r+2$ e $2p-4r-1 \geq 2(p-4r+2)-1$. Logo, podemos atribuir cores aos vértices $v_{4r+1}, \ldots, v_{p+2}$ conforme o Lema 5.1.

Suponhamos que $r \geq 1$ e $3 \leq \ell \leq p-4$. Notemos que, neste caso, $p \geq 7$. Sejam $u_2, u_3, \ldots, u_\ell$ os vértices de B que não u_1. No caso anterior, no qual supomos que $r \geq 1$ e $\ell = 2$, vimos que, para todos os valores possíveis de $f(u_1)$ e $f(u_2)$, conseguimos colorir $B_1, \ldots, B_r$ de modo que f restrita a $\{u_1, u_2\} \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)$ seja uma $(2p+2)$-$L(2,1)$-coloração de $G[\{u_1, u_2\} \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)]$. Logo, a fim de provar que, para todos os valores possíveis de $f(V(B))$, conseguimos colorir $B_1, \ldots, B_r$, é suficiente demonstrar a seguinte proposição: se existe uma $(2p+2)$-$L(2,1)$-coloração f_1 de $G[(V(B) \setminus \{u_\ell\}) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)]$ tal que, para cada $1 \leq k \leq \ell - 1$, $f_1(u_k) = f(u_k)$, então existe uma $(2p+2)$-$L(2,1)$-coloração f_2 de $G[V(B) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)]$ tal que, para cada $1 \leq k \leq \ell$, $f_2(u_k) = f(u_k)$. Suponhamos que exista tal f_1. Para cada $w \in (V(B) \setminus \{u_\ell\}) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)$, $f_2(w) := f_1(w)$, e $f_2(u_\ell) := f(u_\ell)$. Se $f(u_\ell) \notin f_1(V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r))$, então f_2 está conforme. Suponhamos então que $f(u_\ell) \in f_1(V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r))$. Logo, para algum $1 \leq k \leq r$, $f_2(V(B_k) \setminus \{u_1\}) = \{a, b, c, d\}$ e $f_2(u_\ell) = a$. Vamos redefinir f_2 em $V(B_k) \setminus \{u_1\}$. Há pelo menos $p-2$ cores em $[0, 2p+2] \setminus (\{f_2(u_1)-1, f_2(u_1), f_2(u_1)+1\} \cup f_2(V(B) \cup V(B_1) \cup \cdots \cup V(B_r)))$ (lembrando que a cor a tem duas ocorrências, uma em $f_2(V(B))$ e outra em $f_2(V(B_k))$). Acrescentando as cores b, c e d, temos pelo menos $p+1 \geq 8$ cores disponíveis para atribuir em $V(B_k) \setminus \{u_1\}$. Sejam $a_1, \ldots, a_8$ 8 destas cores tais que $a_1 < \cdots < a_8$. A seguir, escolhemos 4 cores a'_1, a'_2, a'_3 e a'_4 dentre $a_1, \ldots a_8$.

- $\underline{f_2(u_1) < a_2}$: Escolhemos a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 dentre a_2, a_3, $\ldots$, a_8 de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_2 < f_2(u_1) < a_3}$: Se $a_1 \equiv a_2 \pmod 2$, então $a'_1 := a_1$, $a'_2 := a_2$ e escolhemos a'_3 e a'_4 dentre $a_3, a_4, \ldots, a_8$ de modo que $a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$. Caso contrário, $a'_1 := a$, onde a é a cor em $\{a_1, a_2\}$ tal que $a \equiv f(u_1) \pmod 2$, e escolhemos a'_2, a'_3 e a'_4 dentre $a_3, a_4, \ldots, a_8$ de modo que $a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_3 < f_2(u_1) < a_6}$: Escolhemos a'_1 e a'_2 dentre a_1, a_2 e a_3 de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \pmod 2$ e escolhemos a'_3 e a'_4 dentre a_6, a_7 e a_8 de modo que $a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_6 < f_2(u_1) < a_7}$: Se $a_7 \equiv a_8 \pmod 2$, então $a'_1 := a_7$, $a'_2 := a_8$ e escolhemos a'_3 e a'_4 dentre $a_1, a_2, \ldots, a_6$ de modo que $a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$. Caso contrário, $a'_1 := a$, onde a é a cor em $\{a_7, a_8\}$ tal que $a \equiv f(u_1) \pmod 2$, e escolhemos a'_2, a'_3 e a'_4 dentre $a_1, a_2, \ldots, a_6$ de modo que $a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_7 < f_2(u_1)}$: Escolhemos a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 dentre a_1, a_2, $\ldots$, a_7 de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

Atribuamos injetivamente a'_1, a'_2, a'_3 e a'_4 aos vértices em $V(B_k) \setminus \{u_1\}$ e, assim, f_2 está conforme. Para cada $1 \leq k \leq 4r$, $f(v_k) := f_2(v_k)$. Falta atribuir cores aos $p - \ell - 4r + 4$ vértices $v_{4r+1}, \ldots, v_{p-\ell+4}$. Há pelo menos $2p - \ell - 4r + 1$ cores em $[0, 2p+2] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1, f(u_2), \ldots, f(u_\ell)\} \cup f(\{v_1, \ldots, v_{4r}\})$. Temos que $2p - \ell - 4r + 1 \geq p - \ell - 4r + 4$ e $2p - \ell - 4r + 1 \geq 2(p - \ell - 4r + 4) - 1$, porque $\ell \geq 3$ e $r \geq 1$. Então, atribuamos cores a $v_{4r+1}, \ldots, v_{p-\ell+4}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r \geq 1$ e $p-3 \leq \ell \leq p$. Neste caso, $p-\ell+4 \leq 7$ e, portanto, $r = 1$. Temos que $|[0, 2p+2] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}))| \geq p+1 \geq 7$. Portanto, há pelo menos 7 cores disponíveis $a_1, a_2, \ldots, a_7$. A seguir, escolhemos 4 cores a'_1, a'_2, a'_3 e a'_4 dentre $a_1, a_2, \ldots, a_7$.

- $\underline{f(u_1) < a_1 \text{ ou } a_7 < f(u_1)}$: Escolhemos a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 dentre $a_1, a_2, \ldots, a_7$ de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_1 < f(u_1) < a_2}$: Se há 4 cores pares ou 4 cores ímpares dentre $a_2, a_3, \ldots, a_7$, então escolhemos a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 dentre $a_2, a_3, \ldots, a_7$ de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$. Suponhamos então que não haja 4 cores pares nem 4 cores ímpares dentre $a_2, a_3, \ldots, a_7$. Logo, há exatamente 3 cores ímpares dentre $a_2, a_3, \ldots, a_7$. Seja $a'_1 := a_1$ e sejam a'_2, a'_3, a'_4 as 3 cores ímpares dentre $a_2, a_3, \ldots, a_7$.

- $\underline{a_2 < f(u_1) < a_3}$: Se $a_1 \equiv a_2 \pmod 2$, então $a'_1 := a_1$ e $a'_2 := a_2$ e escolhemos a'_3 e a'_4 dentre $a_3, a_4, \ldots, a_7$ de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \pmod 2$. Caso contrário, escolhemos a'_1 como a cor dentre a_1 e a_2 tal que $a'_1 \equiv f(u_1) \pmod 2$ e escolhemos a'_2, a'_3 e a'_4 dentre $a_3, a_4, \ldots, a_7$ de modo que $a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_3 < f(u_1) < a_5}$: Escolhemos a'_1 e a'_2 dentre a_1, a_2, a_3 de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \pmod 2$ e escolhemos a'_3 e a'_4 dentre a_5, a_6, a_7 de modo que $a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$.

- $\underline{a_5 < f(u_1) < a_6}$: Se $a_6 \equiv a_7 \pmod 2$, então escolhemos a'_1 e a'_2 dentre a_1, a_2, $\ldots$, a_5 de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \pmod 2$, $a'_3 := a_6$ e $a'_4 := a_7$. Caso contrário, escolhemos a'_1, a'_2 e a'_3 dentre $a_1, a_2, \ldots, a_5$ de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \equiv a'_3 \pmod 2$ e escolhemos a'_4 como a cor dentre a_6 e a_7 tal que $a'_4 \equiv f(u_1) \pmod 2$.

- $\underline{a_6 < f(u_1) < a_7}$: Se há 4 cores pares ou 4 cores ímpares dentre $a_1, a_3, \ldots, a_6$, então escolhemos a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 dentre $a_1, a_3, \ldots, a_6$ de modo que $a'_1 \equiv a'_2 \equiv a'_3 \equiv a'_4 \pmod 2$. Suponhamos então que não haja 4 cores pares nem 4 cores ímpares dentre $a_1, a_3, \ldots, a_6$. Logo, há exatamente 3 cores ímpares dentre $a_1, a_3, \ldots, a_6$. Sejam a'_1, a'_2, a'_3 as 3 cores ímpares dentre $a_1, a_3, \ldots, a_6$ e seja $a'_4 := a_7$.

Para cada $1 \leq k \leq 4$, $f(v_k) := a'_k$. Falta atribuir cores aos $p - \ell$ vértices $v_5, \ldots, v_{p-\ell+4}$. Há pelo menos $2p-\ell-3$ cores em $[0, 2p+2] \setminus (\{f(u_1)-1, f(u_1), f(u_1)+$

$1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}) \cup f(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$. Temos que $2p - \ell - 3 \geq p - \ell$ e $2p - \ell - 3 \geq 2(p - \ell) - 1$. Então, atribuamos cores aos vértices $v_5, \ldots, v_{p-\ell+4}$ conforme o Corolário 5.1.

Suponhamos que $r = 0$, $2 \leq \ell \leq p$ e $\ell \neq 5$. Há pelo menos $2p - \ell + 1$ cores em $[0, 2p+2] \setminus (\{f(u_1) - 1, f(u_1), f(u_1) + 1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}))$. Temos que $2p - \ell + 1 \geq p - \ell + 4$. Se $\ell \leq 4$, então $2p - \ell + 1 \geq 2(p - 1) - 1 \geq 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}| - 1$; se $\ell \geq 6$, então $2p - \ell + 1 \geq 2(p - \ell + 4) - 1 \geq 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}| - 1$. Portanto, podemos atribuir cores aos vértices $v_1, \ldots, v_{p-\ell+4}$ de acordo com o Corolário 5.1.

Finalmente, suponhamos que $r = 0$ e $\ell = 5$. Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 as cores em $f(V(B) \setminus \{u_1\})$ tais que $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$. Seja f^R o reverso de f em relação a $[0, 2p+2]$. Suponhamos que $c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < f(u_1)$ ou $c_1 < c_2 < c_3 < f(u_1) < c_4$. Então, $f^R(u_1) < (2p + 2) - c_4 < (2p + 2) - c_3 < (2p + 2) - c_2 < (2p + 2) - c_1$ ou $(2p+2) - c_4 < f^R(u_1) < (2p+2) - c_3 < (2p+2) - c_2 < (2p+2) - c_1$, e redefinamos f em $V(G')$: $f(v) := f^R(v)$ para cada $v \in V(G')$. Portanto, basta considerar os três casos seguintes, em que verificamos que há $p - 1$ cores não consecutivas disponíveis para $v_1, \ldots, v_{p-1}$. Observemos que, com esta redefinação, já não restringimos $f(u_1)$ a ser no máximo $p + 1$.

- $\underline{f(u_1) < c_1 < c_2 < c_3 < c_4}$:

  O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, f(u_1) - 2]$ é $\lceil \frac{f(u_1)-1}{2} \rceil$; em $[f(u_1)+2, c_1-1]$, é $\lceil \frac{c_1 - f(u_1)-2}{2} \rceil$; em $[c_1+1, c_2-1]$, é $\lceil \frac{c_2-c_1-1}{2} \rceil$; em $[c_2+1, c_3-1]$, é $\lceil \frac{c_3-c_2-1}{2} \rceil$; em $[c_3+1, c_4-1]$, é $\lceil \frac{c_4-c_3-1}{2} \rceil$; e, em $[c_4+1, 2p+2]$, é $\lceil \frac{2p-c_4+2}{2} \rceil$.

  Suponhamos que $f(u_1)$ seja par e c_1 ímpar. Há no mínimo $\frac{f(u_1)}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-1}{2} + \frac{c_2-c_1-1}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p - 1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_1)$ e c_1 sejam pares. Se ocorrem 0 ou 1 ou 2 saltos de paridade em $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, então $c_1 \equiv c_2 \pmod 2$ ou $c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ ou $c_3 \equiv c_4 \pmod 2$ e há no mínimo $\frac{f(u_1)}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-2}{2} + \frac{(c_2-c_1-1)+(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p - 1$ cores não consecutivas. Caso contrário, ocorrem 3 saltos de paridade em $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, c_4 é ímpar e, portanto, há no mínimo $\frac{f(u_1)}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-2}{2} + \frac{c_2-c_1-1}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+3}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_1)$ seja ímpar e c_1 par. Se ocorrem 0 ou 1 ou 2 saltos de paridade em $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, então $c_1 \equiv c_2 \pmod 2$ ou $c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ ou $c_3 \equiv c_4 \pmod 2$ e há no mínimo $\frac{f(u_1)-1}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-1}{2} + \frac{(c_2-c_1-1)+(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p - 1$ cores não consecutivas. Caso contrário, ocorrem 3 saltos de paridade em $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, c_4 é ímpar e, portanto, há no mínimo $\frac{f(u_1)-1}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-1}{2} + \frac{c_2-c_1-1}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+3}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_1)$ e c_1 sejam ímpares. Pela Propriedade 4, não ocorrem 3 saltos de paridade em $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Se ocorre 0 ou 1 salto de paridade em

$\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, então dois dentre os pares de cores $\{c_1, c_2\}$, $\{c_2, c_3\}$ e $\{c_3, c_4\}$, digamos $\{c'_1, c'_2\}$ e $\{c'_3, c'_4\}$, satisfazem $c'_1 \equiv c'_2 \pmod 2$ e $c'_3 \equiv c'_4 \pmod 2$, e, portanto, há no mínimo $\frac{f(u_1)-1}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-2}{2} + \frac{(c_2-c_1-1)+(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+2}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas. Caso contrário, ocorrem 2 saltos de paridade em $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$; $c_1 \equiv c_2 \pmod 2$ ou $c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ ou $c_3 \equiv c_4 \pmod 2$; e c_4 é ímpar. Logo, há no mínimo $\frac{f(u_1)-1}{2} + \frac{c_1-f(u_1)-2}{2} + \frac{(c_2-c_1-1)+(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+1}{2} + \frac{2p-c_4+3}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

- $\underline{c_1 < f(u_1) < c_2 < c_3 < c_4:}$

  O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, c_1-1]$ é $\lceil \frac{c_1}{2} \rceil$; em $[c_1+1, f(u_1)-2]$, é $\lceil \frac{f(u_1)-c_1-2}{2} \rceil$; em $[f(u_1)+2, c_2-1]$, é $\lceil \frac{c_2-f(u_1)-2}{2} \rceil$; em $[c_2+1, c_3-1]$, é $\lceil \frac{c_3-c_2-1}{2} \rceil$; em $[c_3+1, c_4-1]$, é $\lceil \frac{c_4-c_3-1}{2} \rceil$; e, em $[c_4+1, 2p+2]$, é $\lceil \frac{2p-c_4+2}{2} \rceil$.

  Suponhamos que c_1 seja ímpar e $f(u_1)$ par. Há no mínimo $\frac{c_1+1}{2} + \frac{f(u_1)-c_1-1}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-2}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que c_1 seja par, $f(u_1)$ par e c_2 ímpar. Se ocorrem 0 ou 2 saltos de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$, então c_4 é ímpar e há no mínimo $\frac{c_1}{2} + \frac{f(u_1)-c_1-2}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-1}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+3}{2} = p-1$ cores não consecutivas. Caso contrário, ocorre 1 salto de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$; $c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ ou $c_3 \equiv c_4 \pmod 2$; e há no mínimo $\frac{c_1}{2} + \frac{f(u_1)-c_1-2}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-1}{2} + \frac{(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que c_1, $f(u_1)$ e c_2 sejam pares. Pela Propriedade 4, não ocorrem 2 saltos de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$. Se ocorre 0 salto de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$, então há no mínimo $\frac{c_1}{2} + \frac{f(u_1)-c_1-2}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-2}{2} + \frac{c_3-c_2}{2} + \frac{c_4-c_3}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas. Caso contrário, ocorre 1 salto de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$; $c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ ou $c_3 \equiv c_4 \pmod 2$; c_4 é ímpar; e há no mínimo $\frac{c_1}{2} + \frac{f(u_1)-c_1-2}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-2}{2} + \frac{(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+1}{2} + \frac{2p-c_4+3}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_1)$ seja ímpar e c_2 par. Então, há no mínimo $\frac{c_1+(f(u_1)-c_1-2)+1}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-1}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

  Suponhamos que $f(u_1)$ e c_2 sejam ímpares. Se ocorrem 0 ou 2 saltos de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$, então c_4 é ímpar e há no mínimo $\frac{c_1+(f(u_1)-c_1-2)+1}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-2}{2} + \frac{c_3-c_2-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+3}{2} = p-1$ cores não consecutivas. Caso contrário, ocorre 1 salto de paridade em $\{c_2, c_3, c_4\}$; $c_2 \equiv c_3 \pmod 2$ ou $c_3 \equiv c_4 \pmod 2$; e há no mínimo $\frac{c_1+(f(u_1)-c_1-2)+1}{2} + \frac{c_2-f(u_1)-2}{2} + \frac{(c_3-c_2-1)+(c_4-c_3-1)+1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

- $\underline{c_1 < c_2 < f(u_1) < c_3 < c_4:}$

O número máximo de cores não consecutivas disponíveis em $[0, c_1 - 1]$ é $\lceil \frac{c_1}{2} \rceil$; em $[c_1+1, c_2-1]$, é $\lceil \frac{c_2-c_1-1}{2} \rceil$; em $[c_2+1, f(u_1)-2]$, é $\lceil \frac{f(u_1)-c_2-2}{2} \rceil$; em $[f(u_1)+2, c_3-1]$, é $\lceil \frac{c_3-f(u_1)-2}{2} \rceil$; em $[c_3+1, c_4-1]$, é $\lceil \frac{c_4-c_3-1}{2} \rceil$; e, em $[c_4+1, 2p+2]$, é $\lceil \frac{2p-c_4+2}{2} \rceil$.

Suponhamos que c_2 e c_3 sejam pares. Há no mínimo $\frac{c_1+(c_2-c_1-1)+1}{2} + \frac{f(u_1)-c_2-2}{2} + \frac{c_3-f(u_1)-2}{2} + \frac{(c_4-c_3-1)+(2p-c_4+2)+1}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que c_2 seja ímpar e c_3 par. Então, há no mínimo $\frac{c_1}{2} + \frac{c_2-c_1-1}{2} + \frac{(f(u_1)-c_2-2)+(c_3-f(u_1)-2)+1}{2} + \frac{(c_4-c_3-1)+(2p-c_4+2)+1}{2} = p-1$ cores não consecutivas. O caso em que c_2 seja par e c_3 seja ímpar é análogo.

Suponhamos que c_2 seja ímpar, $f(u_1)$ par e c_3 ímpar. Então, há no mínimo $\frac{c_1}{2} + \frac{c_2-c_1-1}{2} + \frac{f(u_1)-c_2-1}{2} + \frac{c_3-f(u_1)-1}{2} + \frac{c_4-c_3-1}{2} + \frac{2p-c_4+2}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

Suponhamos que c_2, $f(u_1)$ e c_3 sejam ímpares. Pela Propriedade 4, c_1 e c_4 não são ambos pares. Então, há no mínimo $\frac{c_1+(c_2-c_1-1)+(c_4-c_3-1)+(2p-c_4+2)+2}{2} + \frac{f(u_1)-c_2-2}{2} + \frac{c_3-f(u_1)-2}{2} = p-1$ cores não consecutivas.

Vemos que as Propriedades 3 e 4 são válidas em G''. □

5.8 $\mathcal{B}_{p,q}$, com $p+4 \leq q \leq 2p-2$

Nesta seção, seja $G \in \mathcal{B}_{p,q}$, com $p \geq 6$ e $p+4 \leq q \leq 2p-2$. Temos que $q = p + p' - 2$, para algum $6 \leq p' \leq p$, e que p' é o maior tamanho possível de um bloco que compartilhe um vértice com um bloco de p vértices. Para cada $p \geq 6$ e $6 \leq p' \leq p$, provamos que, se p' é par, então $\lambda(G) \leq 2p + p' - 3 = p + q - 1$; caso contrário, $\lambda(G) \leq 2p + p' - 4 = p + q - 2$.

Teorema 5.10. *Se $p \geq 6$ e p' par, então $\lambda(G) \leq 2p + p' - 3$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 2p-2\}$ aos vértices da p-clique inicial $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{p,q}$ é o conjunto de todas as $(p+q-1)$-$L(2,1)$-colorações de G' tais que: para cada bloco B de G' com $p' \leq |V(B)| \leq p$, $f(V(B))$ consiste de pelo menos $|V(B)|-1$ cores com a mesma paridade e $f(\{u \in V(B) : N(u) \cap (V(G) \setminus V(G')) \neq \emptyset\})$ consiste de cores com a mesma paridade.

Aqui, os blocos B_1, B_2, …, B_r são aqueles com **pelo menos** p' **vértices** que contêm u_1.

Suponhamos que $f(u_1)$ seja ímpar. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 2p + p' - 3]$ f^R, temos que $f^R(u_1)$ é par. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \leq i \leq p - 1 + \frac{p'}{2}$.

Suponhamos que $r \geq 1$ e $2 \leq \ell \leq p'-1$. Temos que $p'-1 \leq |V(B_1)\setminus\{u_1\}| \leq p-1$ e $|\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}\}\setminus(V(B_1)\setminus\{u_1\})| = (p+p'-\ell-1)-|V(B_1)\setminus\{u_1\}| \leq p-\ell$. Nos dois casos seguintes, verificamos que há pelo menos $|V(B_1) \setminus \{u_1\}|$ cores disponíveis de mesma paridade que podemos atribuir injetivamente aos vértices de $V(B_1)\setminus\{u_1\}$ e que há pelo menos $p + p' - \ell - 1 - |V(B_1) \setminus \{u_1\}|$ cores disponíveis de mesma paridade que podemos atribuir injetivamente aos vértices de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}\} \setminus (V(B_1) \setminus \{u_1\})$. Desta forma, valem em G'' as Propriedades 3 e 4.

- <u>Há no máximo $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ cores pares em $f(V(B))$:</u>

  Em $\{0, 2, \ldots, 2p + p' - 4\} \setminus f(V(B))$, existem pelo menos $(p - 1 + \frac{p'}{2}) - \lceil \frac{\ell}{2} \rceil \geq p - 1 + \frac{p'}{2} - \lceil \frac{p'-1}{2} \rceil = p - 1$ cores pares disponíveis e, em $\{1, 3, \ldots, 2p+p'-3\} \setminus (\{2i-3, 2i-1\} \cup f(V(B)))$, existem pelo menos $(p-1+\frac{p'}{2})-2-(\ell-1) \geq p-\ell+1$ cores ímpares disponíveis.

- <u>Há pelo menos $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil + 1$ cores pares em $f(V(B))$:</u>

  Portanto, há no máximo $\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor - 1$ cores ímpares em $f(V(B))$. Em $\{0, 2, \ldots, 2p + p' - 4\} \setminus f(V(B))$, existem pelo menos $(p - 1 + \frac{p'}{2}) - \ell \geq p - \ell + 2$ cores pares disponíveis e, em $\{1, 3, \ldots, 2p+p'-3\}\setminus(\{2i-3, 2i-1\}\cup f(V(B)))$, existem pelo menos $(p-1+\frac{p'}{2})-2-(\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor-1) \geq p-2+\frac{p'}{2}-\lfloor \frac{p'-1}{2} \rfloor = p-2+\frac{p'}{2}-\frac{p'-2}{2} = p-1$ cores ímpares disponíveis.

Suponhamos agora que $r = 0$ e $2 \leq \ell \leq p' - 1$. Em $[0, 2p+p'-3] \setminus (\{2i-3, 2i-2, 2i-1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}))$, há pelo menos $2p+p'-4-\ell \geq 2p+p'-4-(p'-1) = 2p-3 \geq 2(p'-2)-1 \geq 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}|-1$ cores. Logo, podemos atribuir cores aos vértices $v_1, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}$ conforme o Corolário 5.1.

Finalmente, suponhamos que $p' \leq \ell \leq p$. Há no máximo 1 cor ímpar $2j - 1$ em $f(V(B))$. Em $\{1, 3, \ldots, 2p + p' - 3\} \setminus \{2i - 3, 2i - 1, 2j - 1\}$, há pelo menos $p - 4 + \frac{p'}{2} \geq p - 1$ cores ímpares disponíveis. Logo, podemos atribuir estas cores injetivamente aos vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}$. □

Teorema 5.11. *Se $p \geq 7$ e p' ímpar, então $\lambda(G) \leq 2p + p' - 4$.*

Prova. Atribuamos injetivamente as cores em $\{0, 2, \ldots, 2p - 2\}$ aos vértices da p-clique inicial $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.

Aqui, $\mathcal{F}_{p,q}$ é o conjunto de todas as $(p+q-2)$-$L(2,1)$-colorações de G' tais que: para cada bloco B de G' com $p' - 1 \leq |V(B)| \leq p$, $f(V(B))$ consiste de pelo menos $|V(B)|-1$ cores com a mesma paridade e $f(\{u \in V(B) : N(u)\cap(V(G)\setminus V(G')) \neq \emptyset\})$ consiste de cores com a mesma paridade.

Aqui, os blocos B_1, B_2, ..., B_r são aqueles com **pelo menos** $p' - 1$ **vértices** que contêm u_1.

Suponhamos que $f(u_1)$ seja ímpar. Então, tomando o reverso de f em relação a $[0, 2p + p' - 4]$ f^R, temos que $f^R(u_1)$ é par. Redefinamos f em $V(G')$: para cada $v \in V(G')$, $f(v) := f^R(v)$. Assim, ao longo da prova, basta que consideremos $f(u_1) = 2i - 2$, para algum $1 \le i \le p - 1 + \frac{p'-1}{2}$.

Suponhamos que $r \ge 1$ e $2 \le \ell \le p' - 2$. Temos que $p' - 2 \le |V(B_1) \setminus \{u_1\}| \le p - 1$ e $|\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}\} \setminus (V(B_1) \setminus \{u_1\})| = (p + p' - \ell - 1) - |V(B_1) \setminus \{u_1\}| \le p - \ell + 1$. Nos dois casos seguintes, verificamos que há pelo menos $|V(B_1) \setminus \{u_1\}|$ cores disponíveis de mesma paridade que podemos atribuir injetivamente aos vértices de $V(B_1) \setminus \{u_1\}$ e que há pelo menos $p + p' - \ell - 1 - |V(B_1) \setminus \{u_1\}|$ cores disponíveis de mesma paridade que podemos atribuir injetivamente aos vértices de $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}\} \setminus (V(B_1) \setminus \{u_1\})$. Assim, valem em G'' as Propriedades 3 e 4.

- <u>Há no máximo $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil$ cores pares em $f(V(B))$:</u>

  Em $\{0, 2, \ldots, 2p+p'-5\} \setminus f(V(B))$, existem pelo menos $(p-1+\frac{p'-1}{2}) - \lceil \frac{\ell}{2} \rceil \ge p-1+\frac{p'-1}{2} - \lceil \frac{p'-2}{2} \rceil = p-1$ cores pares disponíveis e, em $\{1, 3, \ldots, 2p+p'-4\} \setminus (\{2i-3, 2i-1\} \cup f(V(B)))$, existem pelo menos $(p-1+\frac{p'-1}{2}) - 2 - (\ell - 1) \ge p - \ell + 1$ cores ímpares disponíveis.

- <u>Há pelo menos $\lceil \frac{\ell}{2} \rceil + 1$ cores pares em $f(V(B))$:</u>

  Portanto, há no máximo $\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor - 1$ cores ímpares em $f(V(B))$. Em $\{0, 2, \ldots, 2p+p'-5\} \setminus f(V(B))$, existem pelo menos $(p-1+\frac{p'-1}{2}) - \ell \ge p - \ell + 2$ cores pares disponíveis e, em $\{1, 3, \ldots, 2p+p'-4\} \setminus (\{2i-3, 2i-1\} \cup f(V(B)))$, existem pelo menos $(p-1+\frac{p'-1}{2}) - 2 - (\lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor - 1) \ge p - 2 + \frac{p'-1}{2} - \lfloor \frac{p'-2}{2} \rfloor = p - 2 + \frac{p'-1}{2} - \frac{p'-3}{2} = p - 1$ cores ímpares disponíveis.

Suponhamos agora que $r \ge 1$ e $\ell = p' - 1$. Temos que $p' - 2 \le |V(B_1) \setminus \{u_1\}| \le p - 1$ e $|\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \setminus (V(B_1) \setminus \{u_1\})| = p - |V(B_1) \setminus \{u_1\}| \le p - p' + 2$. Há no máximo 1 cor ímpar $2j - 1$ em $f(V(B))$, logo, em $\{1, 3, \ldots, 2p+p'-4\} \setminus \{2i-3, 2i-1, 2j-1\}$, há pelo menos $p - 4 + \frac{p'-1}{2} \ge p - 1$ cores ímpares disponíveis. E, em $\{0, 2, \ldots, 2p+p'-5\} \setminus f(V(B))$, há pelo $p - 1 + \frac{p'-1}{2} - p' + 1 \ge p - p' + 3$. Assim, atribuímos injetivamente as cores ímpares disponíveis aos vértices de $V(B_1) \setminus \{u_1\}$ e as cores pares disponíveis aos vértices de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \setminus (V(B_1) \setminus \{u_1\})$. Desta forma, valem as Propriedades 3 e 4 em G''.

Suponhamos que $r = 0$ e $2 \le \ell \le p' - 1$. Em $[0, 2p+p'-4] \setminus (\{2i-3, 2i-2, 2i-1\} \cup f(V(B) \setminus \{u_1\}))$, há pelo menos $2p + p' - 5 - \ell \ge 2p + p' - 5 - (p' - 1) = 2p - 4 > 2(p' - 3) - 1 \ge 2|V(B_1) \setminus \{u_1\}| - 1$ cores. Logo, podemos atribuir cores aos vértices $v_1, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}$ conforme o Corolário 5.1.

Finalmente, suponhamos que $p' \le \ell \le p$. Há no máximo 1 cor ímpar $2j - 1$ em $f(V(B))$. Em $\{1, 3, \ldots, 2p+p'-4\} \setminus \{2i-3, 2i-1, 2j-1\}$, há pelo menos $p - 4 + \frac{p'-1}{2} \ge p - 1$ cores ímpares disponíveis. Logo, podemos atribuir estas cores injetivamente aos vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{p+p'-\ell-1}$. $\square$

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho, consideramos o problema da $L(2,1)$-coloração nas seguintes classes de grafos, as quais são generalizações da classe das árvores: k-árvores, cactos e grafos de blocos. Nosso estudo se concentrou em limites superiores para o número $L(2,1)$-cromático dos grafos pertencentes a cada uma destas classes e consistiu da apresentação dos limites conhecidos na literatura e da obtenção de novos limites.

Buscamos deixar claro que as provas dos limites para k-árvores, cactos e grafos de blocos (tanto as provas dos limites conhecidos, como as dos novos) compartilham uma estrutura semelhante à da prova do limite para árvores: [ordenação π dos vértices do grafo] $\rightarrow$ [algoritmo de $L(2,1)$-coloração cujas entradas são o grafo e π] $\rightarrow$ [análise do maior comprimento possível de uma $L(2,1)$-coloração realizada pelo algoritmo]. Para as árvores, a ordenação π é tal que cada vértice possui no máximo um vizinho que o antecede, e, a cada iteração, o algoritmo atribui cor a um vértice. No caso das k-árvores, cada vértice possui no máximo k vizinhos que o antecedem em π, e, a cada iteração, também é atribuída uma cor a um vértice. Já para os cactos e os grafos de blocos, cada bloco possui no máximo um "bloco pai" que o antecede em π, e, a cada iteração, o algoritmo atribui cor a todos os vértices dos blocos não coloridos que compartilham uma articulação com um bloco já colorido.

Para k-árvores, exibimos o limite conhecido de Bodlaender *et al.* [3] e obtivemos um limite menor, baseado no destes autores. A melhoria foi conseguida pela adição de uma propriedade à ordenação dos vértices utilizada na prova do limite de Bodlaender *et al.* e pela contagem mais minuciosa de cores proibidas. Fica em aberto a justeza deste limite.

Provamos limites superiores justos para o número $L(2,1)$-cromático de cactos. Calamoneri e Petreschi [6] já haviam provado limites justos para grafos periplanares, classe que contém os cactos, com grau máximo pelo menos oito, e Li e Zhou [22] mostraram um limite justo para grafos periplanares com grau máximo igual a três. Portanto, este trabalho contribuiu com limites justos para cactos com grau no máximo sete, e, no caso em que o grau máximo é três, mostramos que, se a cintura é pelo menos quatro, então o limite justo é uma unidade menor do que o de Li e Zhou. Assim, limites justos para cactos em função do grau máximo e da cintura é uma questão fechada. Um problema em aberto interessante é a caracterização dos cactos que atingem os limites; já no caso das árvores não é conhecida tal caracterização.

Para grafos de blocos, apresentamos o limite de Bonomo e Cerioli [4], o qual é justo na classe de todos os grafos de blocos, e analisamos a justeza de tal limite quando fixamos os valores Δ e ω do grau máximo e do número-clique, respectivamente. Obtivemos limites menores nos casos em que $\omega \leq \Delta \leq 2\omega - 2$ e provamos que, em alguns dos casos, os limites obtidos são justos. Ainda resta estudar a justeza de nosso limite para $\omega \geq 5$ e $\omega + 3 \leq \Delta \leq 2\omega - 2$. Também falta examinar se o limite de Bonomo e Cerioli é justo quando $2\omega - 1 \leq \Delta \leq 3\omega - 5$.

Mostramos, ainda, um novo limite para o número $L(2,1)$-cromático de grafos gerais, do qual se conclui que grafos com conectividade igual a um e com uma determinada relação entre o grau máximo e o tamanho do maior bloco satisfazem a Conjectura de Griggs e Yeh.

Referências Bibliográficas

[1] G.F. Barros, M.R. Cerioli e D.F. Posner. $L(2,1)$-coloração de k-árvores e grafos com *treewidth* limitado. *Anais do XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 2014. Disponível em: `http://proceedings.sbmac.org.br/sbmac`.

[2] P. Bella, D. Kráľ, B. Mohar e K. Quittnerová. Labeling planar graphs with a condition at distance two. *European Journal of Combinatorics*, v. 28, pp. 2201–2239, 2007.

[3] H.L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan e J. van Leeuwen. Approximations for λ-colorings of graphs. *The Computer Journal*, v. 47, pp. 193–204, 2004.

[4] F. Bonomo e M.R. Cerioli. On the $L(2,1)$-labelling of block graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, v. 88, pp. 468–475, 2011.

[5] T. Calamoneri. The $L(h,k)$-labelling problem: a survey and annotated bibliography. Disponível em: `http://wwwusers.di.uniroma1.it/~calamo/PDF-FILES/survey.pdf`.

[6] T. Calamoneri e R. Petreschi. $L(h,1)$-labeling subclasses of planar graphs. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, v. 64, pp. 414–426, 2004.

[7] M. Cerioli, N. Martins, D. Posner e R. Sampaio. Um algoritmo FPT para o problema da $L(2,1)$-coloração. *Anais do XLIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 2615–2622, 2011.

[8] M.R. Cerioli e D.F. Posner. On λ-coloring split, chordal bipartite and weakly chordal graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 35, pp. 299–304, 2009.

[9] M.R. Cerioli e D.F. Posner. Limites superiores em λ-colorações de cografos, grafos de permutação e grafos linha. *Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, pp. 489–495, 2009.

[10] M.R. Cerioli e D.F. Posner. On $L(2,1)$-coloring split, chordal bipartite, and weakly chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 160, pp. 2655–2661, 2012.

[11] G.J. Chang e D. Kuo. The $L(2,1)$-labeling problem on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 9, pp. 309–316, 1996.

[12] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. i. recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, v. 85, pp. 12–75, 1990.

[13] R. Diestel. *Graph Theory.* Springer, 2005.

[14] Z. Dvořák, D. Kráľ, P. Nejedlý e R. Škrekovski. Distance constrained labelings of planar graphs with no short cycles. *Discrete Applied Mathematics*, v. 157, pp. 2634–2645, 2009.

[15] N. Eggemann, F. Havet e S.D. Noble. k-$L(2,1)$-labelling for planar graphs is NP-complete for $k \geq 4$. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, pp. 1777–1788, 2010.

[16] J. Fiala, T. Kloks e J. Kratochvíl. Fixed-parameter complexity of λ-labelings. *Discrete Applied Mathematics*, v. 113, pp. 59–72, 2001.

[17] J. Fiala, P. Golovach e J. Kratochvíl. Distance constrained labelings of graphs of bounded treewidth In: L. Caires, G. Italiano, L. Monteiro, C. Palamidessi e M. Yung (Eds.), *Automata, Languages and Programming*, v. 3580, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 360–372, 2005.

[18] D. Gonçalves. On the $L(p,1)$-labelling of graphs, In: S. Felsner (Ed.), *2005 European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb '05)*, v. AE, *DMTCS Proceedings*, pp. 81–86. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2005.

[19] J.R. Griggs e R.K. Yeh. Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 5, pp. 586–595, 1992.

[20] D. Kráľ. Coloring powers of chordal graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 18, pp. 451–461, 2004.

[21] D. Kráľ e R. Škrekovski. A theorem about the channel assignment problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 16, pp. 426–437, 2003.

[22] X. Li e S. Zhou. Labeling outerplanar graphs with maximum degree three. *Discrete Applied Mathematics*, v. 161, pp. 200–211, 2013.

[23] M. Molloy e M.R. Salavatipour. A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 94, pp. 189–213, 2005.

[24] D.F.D. Posner. *$L(2,1)$-colorações: algoritmos e limites superiores em classes de grafos*. Dissertação de Mestrado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, 2009.

[25] D.F.D. Posner. *Sobre $L(2,1)$-colorações de classes de grafos*. Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, 2014.

[26] D. Sakai. Labeling chordal graphs: distance two condition. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 7, pp. 133–140, 1994.

[27] J.L. Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, 1986.

[28] J. van den Heuvel e S. McGuinness. Coloring the square of a planar graph. *Journal of Graph Theory*, v. 42, pp. 110–124, 2003.

[29] W.-F. Wang e K.-W. Lih. Labeling planar graphs with conditions on girth and distance two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 17, n. 2, pp. 264–275, 2003.

[30] W.-F. Wang e X.-F. Luo. Some results on distance two labelling of outerplanar graphs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, v. 25, pp. 21–32, 2009.