



COMPLEXIDADE DOS PROBLEMAS SANDUÍCHE E PROBE PARA  
SUBCLASSES DE GRAFOS-(K,L)

Fernanda Vieira Dias Couto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Sulamita Klein  
Luerbio Faria

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2016

COMPLEXIDADE DOS PROBLEMAS SANDUÍCHE E PROBE PARA  
SUBCLASSES DE GRAFOS-(K,L)

Fernanda Vieira Dias Couto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Sulamita Klein, D.Sc.

---

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

---

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, PhD

---

Prof. Fábio Protti, D.Sc.

---

Prof. Vinícius Fernandes dos Santos, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
FEVEREIRO DE 2016

Couto, Fernanda Vieira Dias

Complexidade dos Problemas Sanduíche e Probe para subclasses de grafos- $(k, \ell)$ /Fernanda Vieira Dias Couto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XIII, 107 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Sulamita Klein

Luerbio Faria

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 102 – 107.

1. Problemas Sanduíche em Grafos. 2. Problemas Probe em Grafos. 3. Grafos- $(k, \ell)$ . 4. Caracterização de Cografos- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$ . 5. Subclasses de Grafos Perfeitos. 6. Condições de Contorno. I. Klein, Sulamita *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*A minha Lis.*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus que me capacitou e escolheu para chegar até aqui.

Em segundo lugar, ao meu marido que me deu suporte e apoio durante todos estes anos de doutorado, em especial, durante o período de sete meses de doutorado sanduíche em que estivemos distantes. Agradeço também aos meus pais que investiram e acreditaram em mim sempre me incentivando a estudar e me dando o suporte necessário para que eu pudesse me dedicar inteiramente aos estudos. Obrigada pelo carinho, pelo apoio e pela confiança depositada em mim.

Aos meus amigos do LAC, em especial a Luís Felipe e Diana, que sempre estão dispostos a ajudar a quem quer que seja e em qualquer momento. Obrigada por me aturarem por tanto tempo.

Sem dúvida alguma, o período em que estive na França foi o mais difícil de todos esses quatro anos e preciso agradecer imensamente a todos que foram me visitar, sobretudo, ao meu marido, a minha amiga Nathane e a minha prima Aline.

Ao meu amigo Vinícius Fernandes dos Santos, que deu um novo rumo e ânimo a esta tese. Obrigada pela paciência e confiança.

Aos meus orientadores Luerbio e Sula, que acreditaram em mim quando aceitaram me orientar, me ajudaram muito a obter os resultados aqui descritos e investiram sempre em mim.

A Sylvain Gravier, meu orientador durante o período de doutorado sanduíche na França, que me deu suporte em todos os momentos em que estive fora do meu país, principalmente nos períodos mais difíceis quando minha real vontade era voltar para o Brasil. Preciso agradecer também toda a paciência que ele teve comigo, sobretudo no início, quando meu francês era péssimo. Obrigada por todas as lições de francês e de culinária francesa e, principalmente, por todas as nossas discussões sobre alguns dos temas apresentados nesta tese.

Aos professores Jayme Szwarcfiter, Fábio Protti e Vinícius dos Santos, que aceitaram participar da banca da defesa desta tese de doutorado prontamente.

A CAPES, FAPERJ e CNPq que financiaram este trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## COMPLEXIDADE DOS PROBLEMAS SANDUÍCHE E PROBE PARA SUBCLASSES DE GRAFOS-(K,L)

Fernanda Vieira Dias Couto

Fevereiro/2016

Orientadores: Sulamita Klein  
Luerbio Faria

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho apresentamos uma caracterização estrutural e decomposição para cografos-(2,1) e (1,2). Além disso, apresentamos resultados concernentes a dicotomia P versus NP-completo da complexidade computacional do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS-( $k, \ell$ ) e FORTEMENTE CORDAIS-( $k, \ell$ ). Especificamente, mostramos que para grafos fortemente cordais-( $k, \ell$ ), o PROBLEMA SANDUÍCHE é NP-completo para  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 1$ , fixos, bem como para  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$ , fixo. Para grafos cordais-( $k, \ell$ ), provamos que o problema é NP-completo para  $k + \ell \geq 3$ , com  $k$  e  $\ell$  inteiros positivos fixos e para  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$  fixo. Ainda sobre problemas sanduíche e como uma aplicação da caracterização para cografos-(2,1) e (1,2), mostramos que, embora o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS DE LIMIAR seja polinomial, o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR é NP-completo. Através desse resultado, conseguimos classificar completamente a dicotomia P versus NP-completo da complexidade computacional do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS-( $k, \ell$ ). Introduzimos o conceito de PROBLEMAS SANDUÍCHE COM CONDIÇÕES DE CONTORNO e apresentamos alguns resultados polinomiais para algumas classes para as quais o problema sanduíche na versão original é NP-completo. No âmbito de PROBLEMAS PROBE, analisamos a complexidade dos problemas PROBE PARTICIONADO JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR e ambas as versões probe para cografo-(2,1) e (1,2). Obtivemos algoritmos em tempo polinomial para os mesmos. Além disso, trabalhamos com classes de grafo definidas por subgrafos proibidos, estudo este que nos conduziu a um resultado interessante que relaciona a Conjectura para Grafos Probe Perfeitos com a Conjectura Forte para Grafos Probe Perfeitos e com o mais famoso problema em aberto para PROBLEMAS SANDUÍCHE: o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

SANDWICH AND PROBE PROBLEMS COMPLEXITY FOR SUBCLASSES OF  
(K,L)-GRAPHS

Fernanda Vieira Dias Couto

February/2016

Advisors: Sulamita Klein  
Luerbio Faria

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work we present a structural characterization and decomposition for cographs- $(2,1)$  and  $(1,2)$ . Moreover, we present results concerning the P versus NP-complete dichotomy of CHORDAL- $(k,\ell)$  and STRONGLY CHORDAL- $(k,\ell)$  GRAPH SANDWICH PROBLEMS computational complexity. Specifically, we show that, for strongly chordal- $(k,\ell)$ , the GRAPH SANDWICH PROBLEM is NP-complete for  $k \geq 1$  and  $\ell \geq 1$ , fixed, as well as for  $k = 0$  and  $\ell \geq 3$ , fixed. For chordal- $(k,\ell)$  graphs, we prove that the problem is NP-complete for  $k + \ell \geq 3$ , with  $k$  and  $\ell$  positive fixed integers and for  $k = 0$  and  $\ell \geq 3$ , fixed. Still about graph sandwich problems and as an application of the characterization for cographs- $(2,1)$  and  $(1,2)$ , we show that, although we can solve THRESHOLD GRAPH SANDWICH PROBLEM in polynomial time, JOIN OF TWO THRESHOLD GRAPH SANDWICH PROBLEM is NP-complete. With this result, we could fully classify the P versus NP-complete dichotomy of COGRAPH- $(k,\ell)$  GRAPH SANDWICH PROBLEM computational complexity. We introduced the concept of GRAPH SANDWICH PROBLEMS WITH BOUNDARY CONDITIONS and we show some polynomial time results for some classes for which GRAPH SANDWICH PROBLEM is NP-complete. Under PROBE PROBLEMS, we analyze PARTITIONED PROBE JOIN OF TWO THRESHOLD and both probe versions for cograph- $(2,1)$  and  $(1,2)$  complexities. We present polynomial time algorithms for these problems. Furthermore, we deal with graph classes defined by forbidden subgraphs and this study lead us to an interesting result that relates the Probe Perfect Graph Conjecture with Strong Probe Perfect Graph Conjecture and with the most famous open GRAPH SANDWICH PROBLEM: PERFECT GRAPH SANDWICH PROBLEM.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Organização do texto . . . . .	3
1.2 Principais Definições e Notações . . . . .	4
1.3 Problemas de Partição . . . . .	6
1.3.1 Grafos- $(k, \ell)$ . . . . .	7
1.4 Grafos Cordais . . . . .	7
1.4.1 Reconhecimento de Grafos Cordais . . . . .	8
1.4.2 Grafos Fortemente Cordais . . . . .	9
1.5 Cografos . . . . .	12
1.5.1 Decomposição Modular . . . . .	13
1.5.2 Grafos de Limiar . . . . .	17
<b>2 Problemas Sanduíche para Grafos Cordais e Fortemente Cordais-<math>(k, \ell)</math></b>	<b>19</b>
2.1 Problemas Sanduíche . . . . .	19
2.1.1 Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais- $(k, \ell)$ . . . . .	21
2.1.2 Problemas Sanduíche para Grafos Cordais- $(k, \ell)$ . . . . .	25
<b>3 Problemas Sanduíche com Condições de Contorno</b>	<b>35</b>
3.1 Definição e Motivação . . . . .	35
3.2 Problema Sanduíche para Grafos- $(k, \ell)$ com Condições de Contorno . . . . .	36
3.3 Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(2, 1)$ com Condições de Contorno . . . . .	39
3.3.1 Procedimento limpador de para-brisa . . . . .	41
<b>4 Caracterização Estrutural e Decomposição para Cografos-<math>(2, 1)</math>: uma generalização natural de grafos de limiar</b>	<b>51</b>
4.1 Caracterização estrutural e decomposição para cografos- $(2, 1)$ e $(1, 2)$ . . . . .	52



<b>5</b>	<b>Problema Sanduíche para Cografos-<math>(k, \ell)</math></b>	<b>60</b>
5.1	PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR . . . . .	60
5.2	PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(2, 1)$ . . . . .	67
5.3	PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Problemas Probe em Grafos</b>	<b>75</b>
6.1	Introdução ao Problema Probe em Grafos . . . . .	75
6.2	PROBE COGRAFO- $(2, 1)$ e $(1, 2)$ . . . . .	77
6.2.1	PROBE PARTICIONADO JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR . . . . .	78
6.2.2	PROBE PARTICIONADO COGRAFO- $(2, 1)$ (PP-COGRAFO- $(2, 1)$ ) . . . . .	80
6.2.3	PROBE COGRAFO- $(2, 1)$ . . . . .	83
6.3	Sanduíches, Probes e Subgrafos Induzidos Proibidos . . . . .	83
6.3.1	PROBE PERFEITO . . . . .	89
6.4	PROBLEMA PROBE PARA GRAFOS LIVRES DE $C_k$ . . . . .	90
6.5	PROBE LIVRE DE $(C_4, \dots, C_{ N })$ . . . . .	93
6.6	PROBE LIVRE DE $(K_r \setminus e)$ . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>98</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>102</b>

# Lista de Figuras

1.1	Grafo cordal. . . . .	7
1.2	Grafo não cordal. . . . .	7
1.3	Duas cordas ímpares em $G_1$ , que não é fortemente cordal (pois não é cordal) e $G_2$ grafo fortemente cordal. . . . .	9
1.4	$i > j > k$ e $(v_i, v_k), (v_j, v_k) \in E(G) \Rightarrow (v_i, v_j) \in E(G)$ . . . . .	9
1.5	$i > j > k > l$ e $(v_i, v_l), (v_j, v_l), (v_j, v_k) \in E(G) \Rightarrow (v_i, v_k) \in E(G)$ . . . . .	9
1.6	$u$ e $v$ incompatíveis e $u' \sim v'$ . . . . .	10
1.7	Sóis incompletos. . . . .	11
1.8	Sóis. . . . .	11
1.9	Em (a) um sol incompleto e em (b) um sol que é subgrafo induzido do grafo (a). . . . .	12
1.10	Em (c) um sol incompleto e em (d) um sol que é subgrafo induzido do grafo (a). . . . .	12
1.11	Construção de um cografo a partir de um $K_1$ e seguidas aplicações das operações de união e junção. . . . .	13
1.12	Exemplo de um módulo em $G$ . . . . .	14
1.13	Um módulo vizinhança $M = V(G)$ e seus submódulos primais maximais. . . . .	16
1.14	Árvore de decomposição do grafo ilustrado na Figura 1.13. . . . .	16
1.15	Grafo $G$ e sua respectiva co-árvore. . . . .	17
1.16	Construção de um grafo de limiar a partir de um $K_1$ e seguidas aplicações das operações de adição de um vértice isolado ou de um vértice universal. . . . .	18
2.1	$3K_5$ é subgrafo proibido para grafos cordais-(4,2). . . . .	21
2.2	Exemplo da construção da instância especial para $FC(1, 1)$ -SP . . . . .	22
2.3	Exemplo da instância quando $k = 2$ e $\ell = 1$ . Note que quando $G$ tem dois triângulos isolados ( $2K_3$ ), $G'$ terá 3 triângulos isolados. . . . .	23
2.4	Exemplo da construção da instância quando $k = 3$ . . . . .	24
2.5	Componente decisão colorida. . . . .	26
2.6	Componente cláusula correspondente a $(X, Y, Z)$ . . . . .	27
2.7	Marcas do Zorro nas orientações positiva e negativa, da esquerda para direita. . . . .	27

2.8	Exemplo de $G_I$ obtido a partir da instância $U = \{X, Y, Z\}, C = \{(\bar{X}, Y, Z), (\bar{X}, \bar{Y}, Z)\}$ do 3SAT. . . . .	28
3.1	À esquerda, $c_1a_2a_3a_4a_5c_1$ é um ciclo oco de $c_1$ . À direita, dois ciclos ocos de $c_1$ e $c_2$ com interseção: $c_1a_1a_2a_3a_4c_2c_1$ é ciclo oco de $c_2$ , $c_1a_3a_4a_5a_6c_2c_1$ é ciclo oco de $c_1$ . Note que o buraco $c_1c_2a_4a_3c_1$ está na interseção dos ciclos ocos de $c_1$ e $c_2$ . . . . .	41
3.2	À esquerda um ciclo cordal onde a interseção dos ciclos ocos de $c_1$ e $c_2$ em $G_2[C_{kl}]$ não é um buraco e à direita um ciclo onde a interseção dos ciclos ocos de $c_1$ e $c_2$ é um buraco. . . . .	42
3.3	A zona cinza compreende todas as arestas da região delimitada pelas arestas cinzas. $a_{\Omega^+}$ e $a_{\Omega^-}$ são os últimos vértices de $T_o[C_{kl}]$ adjacentes a $c_1$ e $c_2$ antes de um vértice não adjacente, respectivamente. Para que haja solução cordal, $c_1$ deve ser adjacente a todos os vértices $a_j$ , $1 \leq j \leq \Omega^+$ e $c_2$ deve ser adjacente a todos os vértices $a_r$ , $\Omega^- \leq r \leq p$ , pois a vizinhança de $c_1$ precisa cobrir os ciclos ocos de $c_2$ e vice-versa. . . . .	43
3.4	Exemplo de ciclos $C_{kl}$ com vértices de $T_o$ ordenados: à esquerda um exemplo onde $c_1 = c_2$ e, à direita, $c_1 \neq c_2$ . . . . .	44
3.5	Animação da cordalização do ciclo $C_{kl}$ através do procedimento limpador de para-brisa. Considere as figuras de cima para baixo da esquerda para a direita. A primeira apresenta um ciclo $C_{kl}$ onde $c_1 = c_2$ a ser cordalizado. A segunda mostra a inserção da A-aresta $c_1a_2$ ; a terceira, da aresta $c_1a_3$ e assim sucessivamente até que a aresta $c_1a_5$ seja inserida. Note que esta é a única forma de cordalizar $C_{kl}$ . . . . .	46
3.6	Animação da cordalização do ciclo $C_{kl}$ através do procedimento limpador de para-brisa. Considere as figuras de cima para baixo da esquerda para a direita. A primeira apresenta um ciclo $C_{kl}$ onde $c_1 \neq c_2$ a ser cordalizado. A segunda mostra a inserção da A-aresta $c_1a_2$ ; a terceira, da aresta $c_1a_3$ . Observe que a aresta $c_1a_4 \notin E^2$ e $c_1a_5 \in E^2$ . Logo $c_1a_3a_4a_5c_1$ é um ciclo oco de $c_1$ . Como $c_2$ cobre o ciclo oco de $c_1$ , podemos, na figura 6, remover a aresta $c_1a_5$ e inserir as A-arestas $c_2a_3$ , como na figura 7; $c_2a_4$ , como na figura 8 e assim sucessivamente até inserirmos a aresta $c_2a_7$ , como na figura 11. . . . .	47
3.7	Ilustração da inexistência de <i>novos ciclos</i> após a adição de A-arestas. . . . .	48
3.8	Figura que ilustra a inexistência de ciclo induzido por vértices de árvores distintas de $\mathcal{F}$ . . . . .	49
3.9	Exemplo da remoção de uma aresta de $E^2 \setminus E^1$ da floresta de $G$ . . . . .	50

4.1	À esquerda, um grafo $G$ que é um cografo-(2, 1) satisfazendo as propriedades 2a, 2b, 2c e 2d, onde $w \in K^{1,1}$ e $x \in K^{1,2}$ . À direita, um grafo de limiar obtido a partir da contração de todas as arestas dentro de cada $B_i$ de $G$ . Observe que cada biclique $B_i$ de $G$ é transformada em um único vértice $b_i$ devido à contração de arestas. . . . .	59
5.1	Exemplo de uma instância particular $(V, E^1, E^3)$ do JTT-SP obtida a partir da instância de MONOTONE NAE 3SAT: $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_5))$ . Arestas sólidas são arestas obrigatórias de $E^1$ , arestas pontilhadas são arestas proibidas de $E^3$ e arestas omitidas são arestas opcionais. . . . .	63
5.2	Exemplo da divisão em dois grafos de limiar da instância particular $(V, E^1, E^3)$ do JTT-SP $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_5))$ de acordo com a atribuição verdade: $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = F, x_2 = V$ . Vértices com cores distintas estão em grafos de limiar distintos. Arestas sólidas são arestas obrigatórias de $E^1$ , arestas pontilhadas são arestas proibidas de $E^3$ e arestas omitidas são arestas opcionais. . . . .	64
6.1	Exemplo da construção de uma instância particular para PROBE LIVRE DE $C_4$ : para cada vértice $y_o$ em $P'$ (à esquerda), adicionamos um $C_4 \{y_1^o y_2^o y_3^o y_4^o y_1^o\}$ tal que $y_o y_i^o$ são adjacentes, para $i = 1, \dots, 4$ e $o = 1, \dots,  P' $ . Vértices brancos são vértices de $P'$ e vértices pretos estão em $N'$ . Note que esta construção força cada vértice de $P'$ a estar em $P$ e, particularmente neste exemplo, cada vértice de $N'$ também estará em $N$ . . . . .	87
6.2	Exemplo da substituição de arestas obrigatórias e proibidas por $C_4$ 's e $P_4$ 's, respectivamente: à esquerda, um $C_4 wxyzw$ com uma aresta proibida $wy$ de $(V, E^1, E^3)$ ; à direita, o grafo que o substitui em $G' = (P' + N', E')$ . Arestas sólidas são arestas obrigatórias e arestas pontilhadas são arestas proibidas de $(V, E^1, E^3)$ , à esquerda. À direita, vértices brancos são atribuídos a $P'$ enquanto vértices pretos são atribuídos a $N'$ . . . . .	91
7.1	Nossa contribuição para o diagrama de [40]. . . . .	100

# Lista de Tabelas

7.1	Complexidade dos problemas sanduíche para grafos fortemente cordais- $(k, \ell)$ e cordais- $(k, \ell)$ . Observe que, quando $k = \ell = 1$ , a complexidade dos dois problemas é diferente. Denotamos por $*$ essa complexidade, onde para grafos cordais- $(1, 1)$ , i.e grafos split, o problema é polinomial [40], e para grafos fortemente cordais- $(1, 1)$ , o problema é NP-completo [21]. O símbolo $[**]$ significa que o resultado ainda não foi publicado. . . . .	98
7.2	Complexidade computacional do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ antes de iniciarmos o estudo. . . . .	99
7.3	Dicotomia P versus NP-c do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell), k, \ell$ fixos. . . . .	99

# Capítulo 1

## Introdução

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE surgiram como uma generalização natural dos PROBLEMAS DE RECONHECIMENTO, que consistem em, dado um grafo  $G$ , ser capaz de reconhecer  $G$  se um grafo pertence a uma determinada classe ou não. Algumas classes de grafos têm seu reconhecimento em tempo polinomial, como por exemplo, a classe dos grafos cordais [36, 45, 51]. Entretanto, existem outras para as quais não se conhece um algoritmo de reconhecimento com número de passos polinomial. Por exemplo, ainda não existe algoritmo polinomial para reconhecer se um grafo pertence à classe  $(k, \ell)$  para  $k$  ou  $\ell \geq 3$ , isto é, reconhecer se um grafo pode ter seu conjunto de vértices particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques para  $k$  ou  $\ell \geq 3$ . Este é um problema bastante difícil e pertence à classe de problemas NP-completos [3, 4].

Em 1995, Golumbic, Kaplan e Shamir [40] definiram um novo problema cujo objetivo era determinar a existência (ou não existência) de um grafo  $G$  “ensanduichado” entre outros dois dados grafos  $G^1$  e  $G^2$  onde  $G^2$  é supergrafo de  $G^1$  e satisfazendo a uma determinada propriedade  $\Pi$ . A este problema foi dado o nome de PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE  $\Pi$  e ele foi definido formalmente da seguinte maneira: dados dois grafos  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$ , existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e que satisfaça  $\Pi$ ? Note que se  $G^1 = G^2$  temos um PROBLEMA DE RECONHECIMENTO. É importante ressaltar que não interessa considerar os casos em que os grafos da entrada do problema,  $G^1$  e  $G^2$ , pertencem à classe de grafos que satisfazem  $\Pi$ , pois neste caso, bastaria tomar  $G = G^1$  ou  $G = G^2$ , e o problema estaria resolvido. De maneira semelhante, o problema é trivial se a propriedade  $\Pi$  é *ancestral* (i.e., todo supergrafo de  $G$  satisfaria  $\Pi$ ), ou se  $\Pi$  é *hereditária* (i.e., todo subgrafo de  $G$  satisfaria  $\Pi$ ), pois nesses casos, bastaria que verificássemos se  $G^2$  e  $G^1$ , respectivamente, satisfizessem a propriedade. De forma geral, se o reconhecimento de  $\Pi$  for NP-completo, então o PROBLEMA SANDUÍCHE também o será, contudo, se o reconhecimento puder ser executado em tempo polinomial, nada podemos afirmar, a princípio, sobre a complexidade do PROBLEMA SANDUÍCHE.

Na prática temos algumas aplicações para os PROBLEMAS SANDUÍCHE, tais como:

*mapeamento físico do DNA; raciocínio temporal; sincronização de processos paralelos; árvores filogenéticas, sistemas esparsos de equações lineares.* Todos esses problemas podem ser encontrados de forma sucinta em [40].

Neste trabalho apresentaremos nossos resultados concernentes a problemas sanduíche sob duas perspectivas: a mesma introduzida por Golubic, Kaplan e Shamir em [40] e uma que generaliza a anterior ao atribuir propriedades aos grafos da entrada do problema sanduíche [22]. PROBLEMAS SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE  $\Pi$  COM CONDIÇÕES DE CONTORNO é a nomenclatura que utilizamos para esta segunda perspectiva. Em termos gerais, além de focar na propriedade  $\Pi$  exigida para o grafo sanduíche, focamos também nos grafos da entrada do problema e introduzimos o que denominamos *condições de contorno*: propriedades que  $G^1$  e  $G^2$ , grafos da entrada, devem satisfazer. Tais propriedades podem ser iguais ou não e podem ser exigidas somente para um dos dois grafos. Observe que estudar problemas sanduíche sob a perspectiva de Golubic et al. não é interessante quando o problema de reconhecimento para a mesma propriedade é sabido NP-completo. Entretanto, o estudo de problemas sanduíche com condições de contorno aplica-se mesmo quando o problema de reconhecimento da propriedade  $\Pi$  em questão é NP-completo. Desta forma, é interessante observar a mudança de tratabilidade dos problemas ao exigirmos que os grafos de entrada satisfaçam propriedades especiais.

Até o momento, priorizamos o estudo destes problemas à três classes de grafos: cordais- $(k, \ell)$ , fortemente cordais- $(k, \ell)$  e cografos- $(k, \ell)$ . Sendo assim, é necessário a contextualização de PROBLEMAS DE PARTIÇÃO que, além de importantes para este texto, são de extrema importância no âmbito dos problemas combinatórios. Na maioria desses problemas, busca-se uma partição do conjunto de vértices do grafo em subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_k$  de modo que tal partição satisfaça algumas restrições. Essas restrições podem ser *internas*, como por exemplo, particionar o conjunto de vértices em uma clique ou em um conjunto independente, ou *externas*, como exigir que os subconjuntos  $V_i$  e  $V_j$  sejam completamente adjacentes ou completamente não adjacentes. Um famoso PROBLEMA DE PARTIÇÃO foi introduzido por Brandstädt em [33], quando ele definiu a classe dos grafos- $(k, \ell)$ , uma generalização dos grafos *split*. Os grafos- $(k, \ell)$  são aqueles que podem ter seu conjunto de vértices particionado em no máximo  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques. Os grafos *split* são o caso particular em que  $k = \ell = 1$ .

Além desta classe, apresentamos a classe dos grafos *cordais* e uma de suas subclasses, a classe dos grafos *fortemente cordais*. Embora os problemas de reconhecimento para ambas as classes tenha solução polinomial [32, 36, 45, 51], os problemas sanduíche para estas classes pertencem à classe dos problemas NP-completos [35, 40]. Sabe-se ainda que o reconhecimento de grafos  $(k, \ell)$  é NP-completo quando  $k$  ou  $\ell \geq 3$ , e polinomial caso contrário [3–5]. Contudo, para problemas sanduíche, a gama de problemas com soluções polinomiais é ainda menor, pois o problema é NP-completo para  $k + \ell \geq 3$  [25, 40]. A motivação inicial para trabalharmos com a classe dos grafos cordais- $(k, \ell)$  e fortemente

cordais- $(k, \ell)$  está no fato de que o reconhecimento destes problemas é executado em tempo polinomial para todo  $k, \ell$  [46].

Os *cografos* também podem ser reconhecidos em tempo polinomial, bem como uma de suas subclasses: a classe dos grafos de limiar. Estes, por sua vez, são, ao mesmo tempo, *cografos* e grafos- $(1, 1)$ .

Em 1994, surgem os grafos *probe* de intervalo [68] e conseqüentemente um novo problema de reconhecimento a ser estudado. Introduzido por Zhang et al., o problema de reconhecimento de grafos *probe* é conhecido em duas versões: a versão particionada, um caso particular do PROBLEMA SANDUÍCHE e a versão não particionada. O objetivo geral de um problema PROBE  $\mathcal{C}$  é, dado um grafo  $G = (V, E)$ , determinar se existe uma partição de  $V$  em um conjunto de *vértices probe*  $P$  e em um conjunto independente  $N$  de *vértices não probe* tais que, a adição de arestas incidentes a vértices de  $N$  gera um grafo pertencente à classe  $\mathcal{C}$ . Quando a partição  $(P, N)$  é dada, o problema é dito *particionado*, caso contrário, é dito *não particionado*. Neste contexto, vamos trabalhar com *cografos*- $(k, \ell)$  e algumas subclasses definidas por subgrafos proibidos.

## 1.1 Organização do texto

Neste texto, no Capítulo 1, além da introdução, apresentamos as principais definições e notações que utilizaremos. No Capítulo 2, provamos que o problema sanduíche para grafos cordais- $(k, \ell)$  é NP-completo para  $k + \ell \geq 3$ , onde  $k, \ell$  são inteiros fixos positivos. Quando a propriedade  $\Pi$  é ser “grafo fortemente cordal- $(k, \ell)$ ”, temos que o problema sanduíche é NP-completo para  $k, \ell \geq 1$  [21]. Ainda provamos que o problema sanduíche para grafos cordais- $(k, \ell)$  e fortemente cordais- $(k, \ell)$  é NP-completo quando  $k = 0$  e  $\ell \geq 3$ . Além disso, no Capítulo 3, provamos que os seguintes problemas sanduíche com condições de contorno são solucionáveis em tempo polinomial: para a propriedade “ser grafo  $(k, \ell)$ ”, para todo  $k, \ell$  com  $G^1$  pertencente a uma classe com algoritmo polinomial para  $k$ -coloração (ver seção 1.2) e  $G^2$  pertencente a uma classe com número polinomial de cliques maximais [20]; e para a propriedade “ser grafo cordal- $(2, 1)$ ” com  $G^2$  pertencente a uma classe com número polinomial de cliques. No Capítulo 4, apresentamos uma caracterização estrutural e decomposição para *cografos*- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  [23] que nos conduz aos estudos do Capítulo 5 sobre PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ . Neste mesmo capítulo, apresentamos o primeiro caso de não monotonicidade de problemas sanduíche quando a propriedade considerada é a junção de duas propriedades para as quais sabemos que o problema sanduíche é solucionável em tempo polinomial. Particularmente, trabalhamos com a propriedade “ser grafo de limiar”, para a qual o problema sanduíche é sabido ser polinomial. Contudo, provamos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR é NP-completo, embora PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS DE LIMIAR seja solucionável em tempo polinomial.



No Capítulo 6, introduzimos o problema de reconhecimento de grafos probe em duas versões: particionada e não particionada. Os resultados apresentados no início deste capítulo são uma aplicação da caracterização estrutural e decomposição para cografos-(2, 1) e (1, 2), apresentada no Capítulo 4. Especificamente, provamos que os problemas PROBE COGRAFO-(2, 1) e (1, 2) são solucionáveis em tempo polinomial. Nas demais seções deste capítulo, trabalhamos com classes definidas por subgrafos proibidos e obtivemos resultados para grafos 2-conexos e 3-conexos fazendo comparações entre as versões particionada e não particionada do problema probe para as classes e também com o problema sanduíche para as mesmas classes. Tais comparações nos conduzem ao estudo de duas famosas conjecturas para grafos probe perfeitos que, caso sejam provadas falsas, nos permitiriam afirmar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS é NP-completo. Além disso, ainda neste capítulo, trabalhamos com as classes de grafos livres de  $C_k$ ,  $k \geq 4$  e livres de  $K_r \setminus e$ , onde  $K_r \setminus e$  é um grafo completo menos uma aresta. Por fim, no Capítulo 7, resumimos nossas contribuições para os problemas descritos.

## 1.2 Principais Definições e Notações

Um grafo  $G$  é um par ordenado  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito não vazio de *vértices* e  $E$  é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos denominados *arestas*. Denotamos os conjuntos de vértices e arestas de  $G$  por  $V(G)$  e  $E(G)$ , respectivamente. Utilizaremos a notação  $|V(G)| = n$  e  $|E(G)| = m$  para denotar as cardinalidades dos conjuntos de vértices e arestas de  $G$ , respectivamente.

Um grafo  $G$  é dito *trivial* se  $n = 1$ .

Um vértice  $v$  é *adjacente* a um vértice  $w$  em  $G$  se  $(v, w) \in E(G)$ . Neste caso  $v, w$  são *vizinhos* ou estão *ligados* em  $G$  e dizemos que a aresta  $e = vw$  é incidente a  $v$  e  $w$  ou tem *extremos*  $v$  e  $w$ . De maneira mais informal, diremos eventualmente que  $v$  *vê*  $w$  e vice-versa. Denotamos o conjunto de vértices de  $G$  que são adjacentes a  $v$  por  $N(v)$  e, por  $N[v]$ , o conjunto  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Chamamos  $N(v)$  e  $N[v]$  de *vizinhança aberta* e *vizinhança fechada* de  $v$ , respectivamente.

Um vértice  $v$  é dito *universal* se  $N(v) = V(G) - v$ . Um vértice  $w$  é dito *isolado* quando  $N(w) = \emptyset$ .

O *grau* de um vértice  $v$  é a cardinalidade do conjunto  $N(v)$ .

O *tamanho* de um grafo  $G$  é igual a  $n + m$ .

O *complemento* de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de  $G$  e tal que dois vértices são vizinhos em  $\overline{G}$  se e somente se não são vizinhos em  $G$ .

Um grafo  $G$  é *completo* se todos os seus vértices são universais. Denotamos por  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices.

Um grafo é *nulo*, ou *completamente independente*, quando todos os seus vértices são isolados.

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Um subgrafo  $H$  de  $G$  é dito *subgrafo gerador* se  $V(H) = V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Dado um conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$ ,  $X \neq \emptyset$ , o *subgrafo de  $G$  induzido* por  $X$ , denotado por  $G[X]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V(H) = X$  e  $E(H)$  é o conjunto das arestas de  $G$  que têm ambos os extremos em  $X$ .

Um grafo  $H$  é um *supergrafo* de um grafo  $G$  se  $V(G) \subseteq V(H)$  e  $E(G) \subseteq E(H)$ .

A *união* de dois grafos  $G = (V_G, E_G)$  e  $H = (V_H, E_H)$  é a união de seus conjuntos de vértices e de arestas:  $G \cup H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$ .

A *união disjunta* de dois grafos  $G = (V_G, E_G)$  e  $H = (V_H, E_H)$  é a união de seus conjuntos de vértices e arestas quando  $V_G$  e  $V_H$  são disjuntos:  $G + H = (V_G + V_H, E_G + E_H)$ .

A *junção* (do inglês *join*)  $G \oplus H$  de dois grafos  $G = (V_G, E_G)$  e  $H = (V_H, E_H)$  é a união dos grafos com todas as arestas que unem os vértices de  $G$  com os vértices de  $H$ , i.e.,  $G \oplus H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H \cup \{uv : u \in V_G, v \in V_H\})$ .

Um grafo  $G$  é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos  $V_1, V_2$ , tais que toda aresta de  $G$  tem um extremo em  $V_1$  e o outro em  $V_2$ . Um grafo *bipartido completo* é um grafo bipartido que possui uma aresta entre cada par de vértices  $x, y$ , sendo  $x \in V_1$  e  $y \in V_2$ . Denotamos por  $K_{n_1, n_2}$  o grafo bipartido completo, onde  $n_1$  e  $n_2$  são as cardinalidades de  $V_1$  e  $V_2$  respectivamente. Chamaremos um grafo bipartido completo de *biclique*.

Um *caminho* em um grafo  $G$  é uma sequência  $P = v_1 v_2 \cdots v_k$  onde  $v_1, v_2, \dots, v_k$  são vértices distintos dois a dois e  $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ . Uma *corda* em  $P$  é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos de  $P$ . Um *caminho induzido* em um grafo é um caminho sem cordas. Denotamos por  $P_k$  o caminho induzido por  $k$  vértices.

Um *ciclo* num grafo  $G$  é uma sequência  $C = v_1 v_2 \cdots v_k v_{k+1}$ , onde  $v_1 v_2 \cdots v_k$  é um caminho,  $v_{k+1} = v_1$  e  $k \geq 3$ . O número  $k$  é o comprimento do ciclo  $C$ . Se um ciclo tem comprimento par, então ele é denominado *ciclo par*. Caso contrário, é dito *ciclo ímpar*. Uma corda em  $C$  é qualquer corda do caminho  $v_1 v_2 \cdots v_k$ . Um *ciclo induzido* é um ciclo que não possui cordas. Denotamos por  $C_k$  um ciclo induzido por  $k$  vértices.

Um conjunto  $S$  é *maximal* (resp. *minimal*) em relação a uma propriedade  $\Pi$  se  $S$  satisfaz  $\Pi$  e todo conjunto  $S'$  que contém propriamente (resp. *está contido propriamente em*)  $S$  não satisfaz  $\Pi$ .

Um grafo é *conexo* se para todo par de vértices distintos  $v, w$  de  $G$  existe um caminho de  $v$  a  $w$ . Caso contrário,  $G$  é dito *desconexo*. Um *componente conexo* de  $G$  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ .

Um grafo é *k-conexo* se a remoção de qualquer conjunto com  $k-1$  vértices mantém  $G$  conexo. Em outras palavras, para tornar  $G$  desconexo, pelo menos  $k$  vértices são necessários.

Sejam  $v, w \in V(G)$ . A *distância* entre  $v$  e  $w$  em  $G$ , denotada por  $d_G(v, w)$ , é o comprimento do menor caminho entre  $v$  e  $w$  em  $G$ .

Uma *árvore*  $T$  é um grafo acíclico e conexo. Uma árvore  $T$  é denominada *enraizada* quando algum vértice  $v \in V(T)$  é escolhido como especial. Este vértice é então chamado de *raiz* da árvore. Uma *folha* é um vértice que não possui filhos.

Uma *árvore geradora* de um grafo  $G$  é um subgrafo gerador de  $G$  que é uma árvore.

Uma *floresta*  $F$  é um grafo acíclico.

Um conjunto de vértices  $M$  de um grafo  $G$  é uma *clique* se  $G[M]$  é um grafo completo. Denotaremos por  $\omega(G)$  a *cardinalidade da maior clique de  $G$* .

Um conjunto de vértices  $S$  é um *conjunto independente* de  $G$  se  $G[S]$  é um grafo nulo. Denotaremos por  $\alpha(G)$  a *cardinalidade do maior conjunto independente de  $G$* .

Uma *coloração própria de vértices* em um grafo  $G$  é uma atribuição de cores aos vértices de  $G$  de modo que vértices adjacentes recebam cores distintas. Neste trabalho, vamos nos referir a este tipo de coloração simplesmente utilizando a palavra *coloração*. Uma  *$k$ -coloração* é uma coloração própria dos vértices do grafo com  $k$  cores. O *número cromático* de  $G$ , denotado  $\chi(G)$  é o menor  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração de  $G$ . Neste caso, dizemos que  $G$  é  *$k$ -cromático*.

Um grafo  $G$  é dito *perfeito* se  $G$  e cada um de seus subgrafos induzidos tiver a propriedade que seu número cromático  $\chi$  é igual ao tamanho de sua maior clique  $\omega$ .

Um *buraco* é um ciclo sem cordas de tamanho pelo menos 5.

Dizemos que uma classe de grafos  $\mathcal{C}$  é *hereditária* se todo subgrafo de um grafo  $G$  em  $\mathcal{C}$  também pertence a  $\mathcal{C}$ . Uma classe  $\mathcal{C}$  é dita *ancestral* se todo supergrafo de um grafo  $G$  pertencente à  $\mathcal{C}$  também está em  $\mathcal{C}$ . Quando considerarmos propriedades hereditárias e ancestrais com relação a subgrafos induzidos, estará explícito no texto.

### 1.3 Problemas de Partição

Um problema clássico em teoria dos grafos é o problema de partição, que consiste na busca por uma partição do conjunto de vértices de um dado grafo em subconjuntos  $V_1, V_2, \dots, V_k$  que satisfazem certas propriedades. Pode-se exigir, por exemplo, que  $V_i$  seja uma clique ou um conjunto independente, o que seriam *restrições internas*. Poderíamos também fazer *restrições externas*, isto é restrições entre os subconjuntos. Desta forma pode-se exigir que  $V_i$  e  $V_j$  sejam completamente adjacentes ou completamente não-adjacentes, por exemplo.

Os grafos *split* são grafos que podem ter seu conjunto de vértices particionado em um conjunto independente e uma clique. Este é um famoso problema de partição, onde só temos restrições internas, e que é resolvido em tempo polinomial. Brandstädt em [3], definiu a classe dos *grafos- $(k, \ell)$*  que são uma generalização dos grafos split, que são *grafos- $(1, 1)$* .

O objetivo principal deste capítulo é introduzir o conceito de grafos- $(k, \ell)$ , em particular, o conceito de grafos- $(2, 1)$ , para em seguida, abordar o algoritmo de reconhecimento desta classe particular de grafos. Para finalizar, vamos apresentar a subclasse dos *grafos cordais*- $(2, 1)$  juntamente com sua caracterização por subgrafos proibidos e seu algoritmo de reconhecimento.

### 1.3.1 Grafos- $(k, \ell)$

Um grafo  $G$  é um *grafo*- $(k, \ell)$ , ou simplesmente  $(k, \ell)$ , se o conjunto de vértices de  $G$  puder ser particionado em  $k$  conjuntos independentes e  $\ell$  cliques.

É importante ressaltar que as cliques desta definição não são necessariamente máximas e, além disso, alguns dos  $k$  conjuntos independentes ou das  $\ell$  cliques podem ser vazios.

Brandstädt, ainda em [3–5], apresentou um algoritmo polinomial para reconhecer as classes  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  e  $(2, 2)$ , e mostrou que o problema de reconhecimento de grafos  $(k, \ell)$  para  $k \geq 3$  ou  $\ell \geq 3$  é NP-completo. Feder, Hell, Klein e Motwani em [33] também propuseram algoritmos polinomiais para essas classes, que surgiram como subproduto de algoritmos de partição em subgrafos densos e esparsos.

## 1.4 Grafos Cordais

Um grafo é dito *cordal* ou *triangularizado* quando todo ciclo de tamanho maior que 3 possui uma *corda*, i.e, aresta que liga dois vértices não consecutivos no ciclo. O grafo da Figura 1.1 é cordal, enquanto o da Figura 1.2 não o é, já que possui o ciclo  $d, e, f, g, d$  que tem tamanho 4 e não possui cordas.

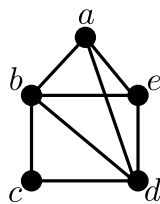


Figura 1.1: Grafo cordal.

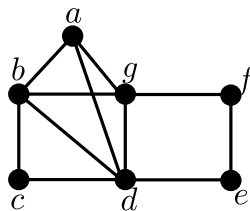


Figura 1.2: Grafo não cordal.

Um vértice  $v \in V$  é denominado *simplicial* se o subgrafo induzido pela vizinhança de  $v$ ,  $N(v)$ , é completo. Por exemplo, no grafo da Figura 1.1 o vértice  $a$  é um vértice simplicial, pois sua vizinhança induz um  $K_3$ .

A propriedade “ser cordal” é uma *propriedade hereditária*, isto é, todo subgrafo induzido de um grafo cordal é também um grafo cordal.

Um *esquema de eliminação perfeita* é uma sequência de vértices  $\alpha = v_1, v_2, \dots, v_n$ , onde cada  $v_i$  é um vértice simplicial do subgrafo induzido por  $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ . Em outras palavras, uma sequência  $\alpha$  é um esquema de eliminação perfeita se, para cada  $v_i$ , o subgrafo induzido por  $N(v_i) - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  for completo.

No texto que segue, apresentaremos alguns resultados da literatura que serão úteis para este trabalho.

**Teorema 1.1.** [31, 36] *Um grafo  $G = (V, E)$  é cordal se e somente se  $G$  possui um esquema de eliminação perfeita.*

**Lema 1.2.** [31] *Seja  $G = (V, E)$  um grafo cordal que não seja um grafo completo. Então  $V$  contém dois vértices não adjacentes simpliciais.*

### 1.4.1 Reconhecimento de Grafos Cordais

Para reconhecer se um grafo pertence ou não à classe dos grafos cordais, vamos utilizar o Teorema 1.1 e o seguinte Lema:

**Lema 1.3.** [45, 51] *Seja  $G = (V, E)$  um grafo cordal. Considere que  $G$  é um grafo de entrada para o algoritmo de busca em largura lexicográfica [45, 64]. Então a sequência  $S$  de vértices  $v$  ordenados decrescentemente segundo  $\text{largura}(v)$  é um esquema de eliminação perfeita.*

O Teorema 1.1 nos diz que um grafo é cordal se e somente se ele possui um esquema de eliminação perfeita e o Lema 1.3 nos fornece uma ferramenta para determinar tal esquema. Sendo assim, unindo estes dois resultados, é possível obtermos um *Algoritmo de Reconhecimento para grafos cordais* que consiste, basicamente, em: dado um grafo  $G = (V, E)$ , aplicar o algoritmo de busca em largura lexicográfica e ordenar os vértices de  $V$  em ordem decrescente de largura. Em seguida, basta verificar se tal ordenação é um esquema de eliminação perfeita. Esse reconhecimento pode ser feito em tempo polinomial, apenas aplicando a definição, ou seja, dada a sequência  $\alpha = v_1, v_2, \dots, v_n$ , para cada  $v_i$  deve ser verificado se os vértices  $v_j \in N(v_i)$ , com  $j > i$ , induzem uma clique. Claramente,  $\alpha$  será um esquema de eliminação perfeita se todas as verificações forem satisfeitas. Este algoritmo tem complexidade  $O(nm)$ , mas é possível utilizar um processo alternativo para o reconhecimento mais eficiente, como descrito em [64], que faz com que o tempo de execução do algoritmo de reconhecimento de grafos cordais seja da ordem do tamanho do grafo, e, portanto, linear.

## 1.4.2 Grafos Fortemente Cordais

A classe dos grafos *fortemente cordais* é uma subclasse da classe dos grafos cordais. Nesta seção, vamos introduzir as principais definições e notações desta classe que serão importantes no decorrer deste trabalho.

Um grafo cordal é *fortemente cordal* se todos os seus ciclos pares de tamanho maior do que 5 têm uma *corda ímpar*, i.e., uma corda entre vértices não consecutivos do um ciclo e que estão separados por uma distância ímpar. Observe a Figura 1.3.

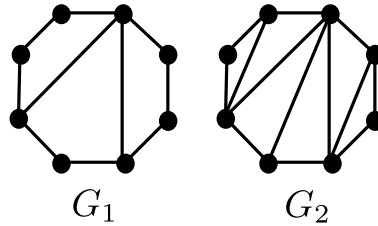


Figura 1.3: Duas cordas ímpares em  $G_1$ , que não é fortemente cordal (pois não é cordal) e  $G_2$  grafo fortemente cordal.

Um *esquema de eliminação perfeita forte* é uma ordenação  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dos vértices de  $V(G)$  satisfazendo as seguintes condições para cada  $i, j, k$  e  $l$ :

1. Se  $i > j > k$  e  $(v_i, v_k), (v_j, v_k) \in E(G)$  então  $(v_i, v_j) \in E(G)$ .



Figura 1.4:  $i > j > k$  e  $(v_i, v_k), (v_j, v_k) \in E(G) \Rightarrow (v_i, v_j) \in E(G)$ .

2. Se  $i > j > k > l$  e  $(v_i, v_l), (v_j, v_l), (v_j, v_k) \in E(G)$  então  $(v_i, v_k) \in E(G)$ .

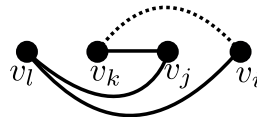


Figura 1.5:  $i > j > k > l$  e  $(v_i, v_l), (v_j, v_l), (v_j, v_k) \in E(G) \Rightarrow (v_i, v_k) \in E(G)$ .

**Lema 1.4.** [32] *Um grafo é fortemente cordal se e somente se ele admite um esquema de eliminação perfeita forte.*

Dois vértices  $u, v$  são *compatíveis*, e denotamos por  $u \sim v$ , se  $N[u] \subset N[v]$  ou  $N[v] \subset N[u]$ . Caso contrário, dizemos que  $u$  e  $v$  são *incompatíveis*.

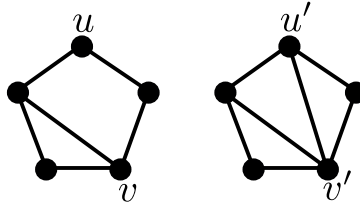


Figura 1.6:  $u$  e  $v$  incompatíveis e  $u' \sim v'$ .

No exemplo da Figura 1.6 temos que  $u$  e  $v$  são incompatíveis pois  $u$  não pertence à vizinhança fechada de  $v$  assim como  $v$  não pertence à vizinhança fechada de  $u$ . Já os vértices  $u'$  e  $v'$  são tais que  $N[u'] \subset N[v']$ . Note que a vizinhança fechada de  $v'$  não está contida na vizinhança fechada de  $u'$ .

Um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é *simples* se os vértices em  $N[v]$  são compatíveis dois a dois, ou equivalentemente, se  $\{N[u] : u \sim v\}$  é ordenada linearmente por inclusão.

**Lema 1.5.** [32] *Seja  $v$  um vértice simples em  $G$ . Então  $v$  é simplicial em  $G$ .*

**Teorema 1.6.** [32] *Um grafo  $G$  é fortemente cordal se e somente se todo subgrafo induzido de  $G$  tem um vértice simples.*

Ou, ainda, de forma semelhante ao Lema 1.2, temos:

**Lema 1.7.** [32] *Suponha  $G = (V, E)$  um grafo fortemente cordal não trivial. Então  $G$  tem pelo menos dois vértices simples.*

Podemos ainda caracterizar esta classe de grafos por subgrafos proibidos [32]. Em 1981, para apresentar tal caracterização, Farber introduziu algumas definições que atualmente possuem outra denominação. O que denotarmos por *sol* nas seguintes definições, foi chamado por ele de *trampolim*.

Um *sol incompleto* é um grafo cordal com  $2n$  vértices, para algum  $n \geq 3$ , cujo conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos  $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  e  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

1.  $W$  é um conjunto independente, e
2. para cada  $i, j$ ,  $w_i$  é adjacente a  $u_j$  se e somente se  $i \equiv j \pmod{n}$  ou  $i \equiv j + 1 \pmod{n}$ .

(Veja os exemplos da Figura 1.7.)

Um *sol* é um *sol incompleto* no qual  $G[u_1, u_2, \dots, u_n]$  é um grafo completo. (Veja os exemplos da Figura 1.8)

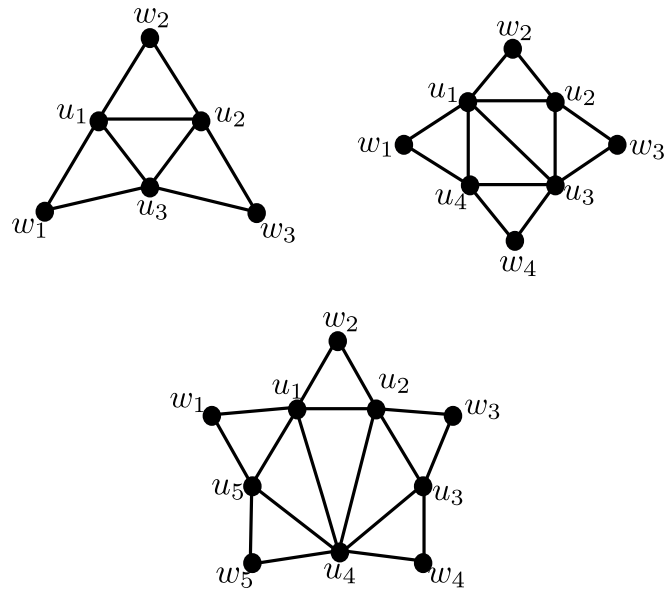


Figura 1.7: Sóis incompletos.

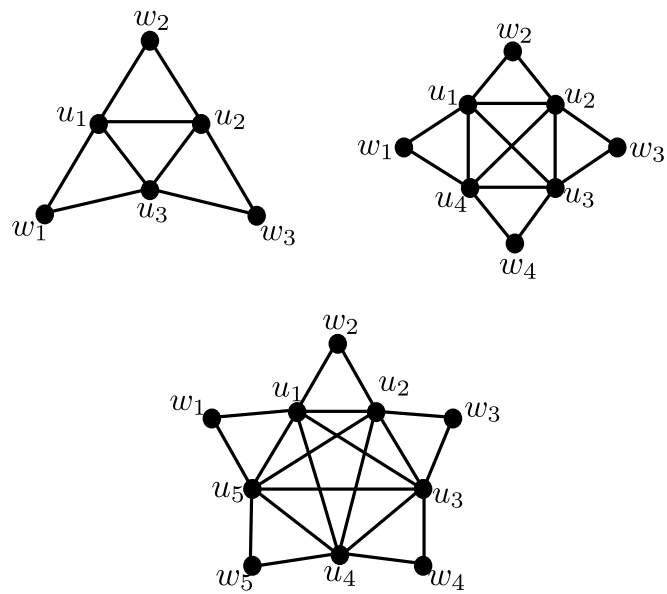


Figura 1.8: Sóis.

**Teorema 1.8.** [32] *Um grafo é fortemente cordal se e somente se é cordal e não admite sol como subgrafo induzido.*

**Lema 1.9.** [32] *Nenhum sol é fortemente cordal.*

**Lema 1.10.** [32] *Seja  $G$  um sol incompleto. Então  $G$  tem um subgrafo induzido que é um sol.*

Observe os exemplos das figuras 1.9 e 1.10.



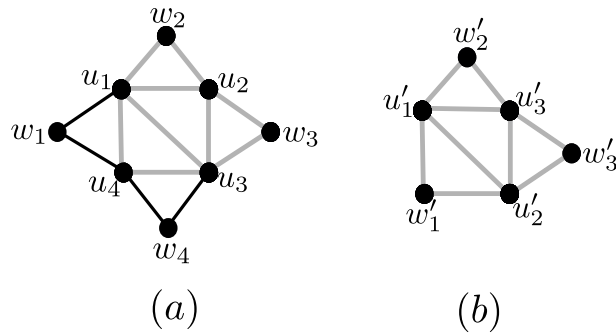


Figura 1.9: Em (a) um sol incompleto e em (b) um sol que é subgrafo induzido do grafo (a).

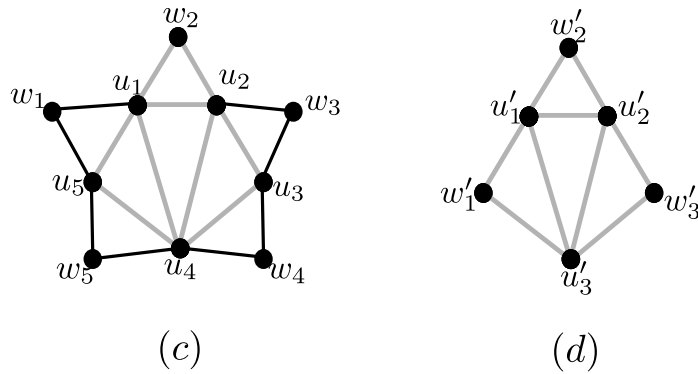


Figura 1.10: Em (c) um sol incompleto e em (d) um sol que é subgrafo induzido do grafo (a).

## 1.5 Cografos

Os cografos surgiram em diversas áreas da Matemática, tendo sido objeto de pesquisa de vários cientistas independentemente. Esta independência fez com que vários sinônimos para o termo cografo surgissem, dentre os quais podemos citar: grafos  $D^*$  [47], grafos sem  $P_4$ , grafos HD [63] e grafos redutíveis por complemento [16]. Responsável pela introdução do termo cografo tal como conhecemos, H. Lerchs [49, 50] definiu a classe e suas propriedades estruturais e algorítmicas. Um algoritmo com complexidade quadrática foi desenvolvido por Stewart [62] a fim de reconhecer a classe dos cografos. Posteriormente, o primeiro algoritmo linear, mas não único [9, 44], foi introduzido por Corneil et al. [18]. Em particular, Habib e Paul [44] descreveram um algoritmo com apenas dois passos: no primeiro passo, utiliza-se uma técnica de refinamento para produzir uma ordenação especial dos vértices e, no segundo passo, executa-se um simples teste para verificar se um dado grafo é um cografo, utilizando tal ordenação.

**Definição 1.11.** [49] *Formalmente, os cografos são definidos recursivamente da seguinte forma:*

1. O grafo trivial  $K_1$  é um cografo;
2. Se  $G_1, \dots, G_k$  são cografos, então a união  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$  também é cografo;
3. Se  $G$  é cografo, então  $\overline{G}$  também é cografo.

Em particular, os Itens 2 e 3 da Definição 1.11 garantem que podemos obter um cografo a partir de um de um grafo trivial, através de um número finito de operações não só de união mas também de junção. A Figura 1.11 ilustra a construção de um grafo  $G$  que é cografo.

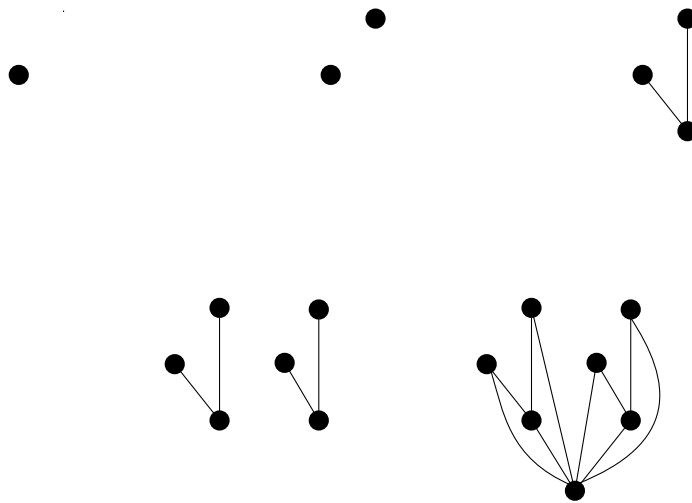


Figura 1.11: Construção de um cografo a partir de um  $K_1$  e seguidas aplicações das operações de união e junção.

Um resultado importante, provado em [50], afirma que os cografos podem ser representados por uma árvore de decomposição única, denominada de *co-árvore*. Através de uma co-árvore é possível analisar diversas propriedades e características de um cografo, fato que auxilia na solução de problemas considerados difíceis, em geral. Podemos destacar que tal representação é a chave para o reconhecimento linear dos cografos [18, 44].

### 1.5.1 Decomposição Modular

A *decomposição modular*, descoberta independentemente por Möhring [54], e Muller e Spinrad [57], é um processo utilizado, como o nome sugere, para decompor um grafo. Em qualquer estágio, o subgrafo que está sendo decomposto é chamado de *módulo*. No passo geral, cada um dos subgrafos é decomposto recursivamente e este processo continua até que todos os subgrafos que estão sendo decompostos contenham somente um vértice.

A noção de módulo surgiu naturalmente a partir de diferentes estruturas combinatorias [54]. A decomposição modular desempenhou papéis muito importantes no estudo do PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para várias classes de grafos, tais como: cografos [18], grafos de intervalo [55], grafos de permutação [58] e outras classes de grafos perfeitos [6, 39], bem como no problema de orientação transitiva [38, 52]. A seguir, abordamos algumas propriedades e definições sobre decomposição modular.

**Definição 1.12.** Um módulo  $M$  de um grafo  $G$  é um subconjunto de vértices de  $V(G)$  tal que cada vértice em  $V(G) \setminus M$  ou é adjacente a todos os vértices de  $M$  ou a nenhum vértice de  $M$ .

Como exemplo, na Figura 1.12,  $M = \{a, b, c\}$  é um módulo de  $G$ , onde os vértices do conjunto  $A = \{1, 2\}$  são adjacentes a todos os vértices de  $M$  e os vértices do conjunto  $N = \{3, 4\}$  são não-adjacentes a todos os vértices de  $M$ .

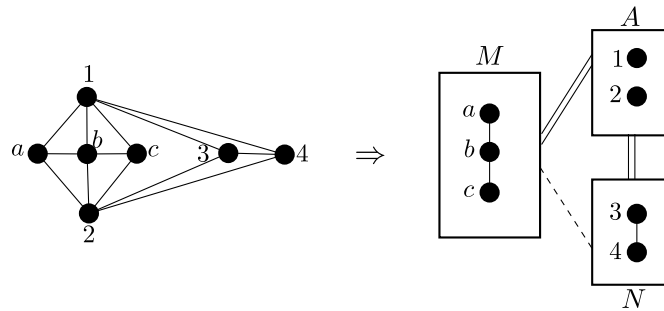


Figura 1.12: Exemplo de um módulo em  $G$ .

**Definição 1.13.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo.

- $V' \subseteq V$  é dito um módulo trivial de  $G$  se  $V' = V$  ou  $|V'| = 1$ .  $V'$  é um módulo próprio se  $V' \neq V$ .
- $G$  é um grafo primal se  $G$  contém somente módulos triviais.
- Dois módulos  $V', V''$  são sobrepostos se os conjuntos  $V' \cap V'', V' \setminus V''$  e  $V'' \setminus V'$  são todos não-vazios.
- Um módulo  $V'$  é forte se para todo módulo  $V''$ , os módulos  $V'$  e  $V''$  são não sobrepostos, i.e.,  $V' \cap V'' = \emptyset$  ou  $V' \subseteq V''$  ou  $V'' \subseteq V'$ .
- Dois vértices  $x, y \in V$  são gêmeos se  $\{x, y\}$  é um módulo de  $G$ , ou seja,  $x$  e  $y$  têm a mesma vizinhança em  $G$ . Os gêmeos  $x, y$  são gêmeos verdadeiros se  $xy \in E$ , caso contrário,  $x, y$  são gêmeos falsos.

Através da decomposição modular de um grafo  $G$  é possível construir uma árvore correspondente a  $G$  denominada *árvore de decomposição modular*, de extrema importância em algumas aplicações em grafos [6, 18, 39, 55, 58].

Basicamente, a decomposição modular particiona o conjunto de vértices de um grafo em módulos através de uma análise da conectividade de  $G$  e de  $\overline{G}$ .

**Teorema 1.14** (Gallai [37], Habib [41], Habib & Maurer [42], Sumner [63]). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com pelo menos dois vértices. Então exatamente uma das seguintes condições é verdadeira:*

1. *Se  $G$  é desconexo, então  $G$  pode ser decomposto em componentes conexos;*
2. *Se  $\overline{G}$  é desconexo, então  $G$  pode ser decomposto em componentes conexos de  $\overline{G}$ ;*
3. *Se  $G$  e  $\overline{G}$  são conexos, então existe algum  $V' \subseteq V$  e uma única partição  $P$  de  $V$  tal que:*
  - (a)  $|V'| > 3$ ;
  - (b)  $G[V']$  é um subgrafo primal maximal de  $G$ ;
  - (c) Para toda classe  $S$  da partição  $P$ ,  $S$  é um módulo e  $|S \cap V'| = 1$ .

De acordo com o Teorema 1.14, a árvore de decomposição de  $G$  possui três tipos de nós: *paralelo*, *serial* e *vizinhança*, correspondendo aos itens 1, 2 e 3, respectivamente. Cada vértice de  $G$  corresponde a uma folha da árvore de decomposição modular. Cada módulo de  $G$  está associado a um nó da árvore, cujas folhas descendentes de  $M$  correspondem ao módulo  $M$ . De maneira mais precisa, a árvore de decomposição é construída da seguinte forma: consideremos o módulo  $M = V(G)$ . Se  $|M| = 1$ , então a decomposição modular é uma árvore trivial. Caso contrário,  $M$  é um módulo paralelo, serial ou vizinhança. Se  $M$  é um módulo paralelo, criamos um vértice  $P$  na árvore, cujos filhos de  $P$  correspondem à decomposição modular dos componentes conexos de  $G[M]$ . Se  $M$  é um módulo serial, criamos um vértice  $S$  na árvore e inserimos, como filhos deste vértice, as decomposições modulares dos componentes conexos de  $\overline{G[M]}$ . Se  $M$  é um módulo vizinhança, criamos um vértice  $N$  na árvore e inserimos, como filhos deste vértice, as decomposições modulares dos submódulos primais maximais de  $M$ .

Note que, dado um módulo  $M$ , tanto no caso paralelo como no caso serial, cada componente conexo é um submódulo primal maximal de  $M$ .

Em [60], foi provado que cada vértice em um módulo vizinhança  $N$  está contido em um único submódulo primal maximal de  $N$ . Como há uma única decomposição possível em cada etapa, há uma única decomposição modular de um grafo. Observe o exemplo de decomposição modular do grafo  $G$  ilustrado na Figura 1.13.

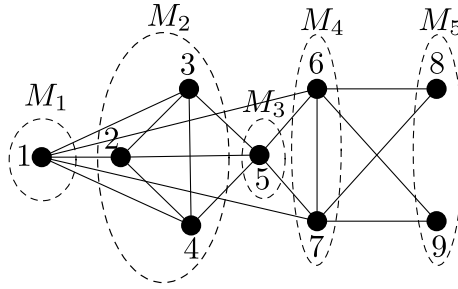


Figura 1.13: Um módulo vizinhança  $M = V(G)$  e seus submódulos primais maximais.

Seja  $M = V(G)$ . Como os módulos  $V(G)$  e  $\overline{V(G)}$  são conexos, temos que  $M$  é um módulo vizinhança e seus módulos primais maximais são  $M_1 = \{1\}$ ,  $M_2 = \{2, 3, 4\}$ ,  $M_3 = \{5\}$ ,  $M_4 = \{6, 7\}$  e  $M_5 = \{8, 9\}$ .

As folhas da árvore de decomposição são os vértices do grafo e os nós internos são os módulos fortes do grafo  $G$ . Os módulos  $M_2$  e  $M_4$  são seriais (rotulados por  $S_1$  e  $S_2$ ) e o módulo  $M_5$  é paralelo (rotulado por  $P_1$ ) em  $G$ .

A árvore de decomposição modular de  $G$  está representada na Figura 1.14.

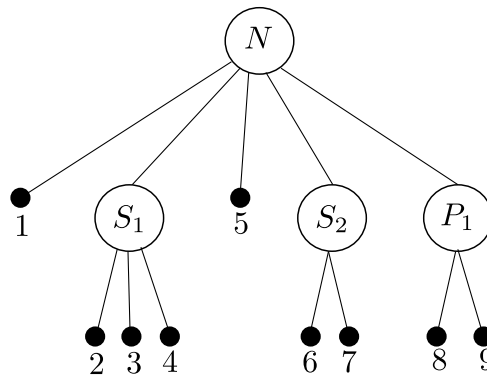


Figura 1.14: Árvore de decomposição do grafo ilustrado na Figura 1.13.

## Co-árvore

Quando a árvore de decomposição tem apenas módulos paralelos e seriais, temos uma *co-árvore*. Observe na Figura 1.15.

A estrutura da classe dos cografos é muito bem definida, o que permite fácil identificação. O Teorema 1.15 [16], estabelece a equivalência entre três diferentes caracterizações de cografos.

**Teorema 1.15** (Corneil, Lerchs e Burlingham [16]). *Dado um grafo  $G$ , as seguintes afirmações são equivalentes.*

1.  $G$  é cografo;

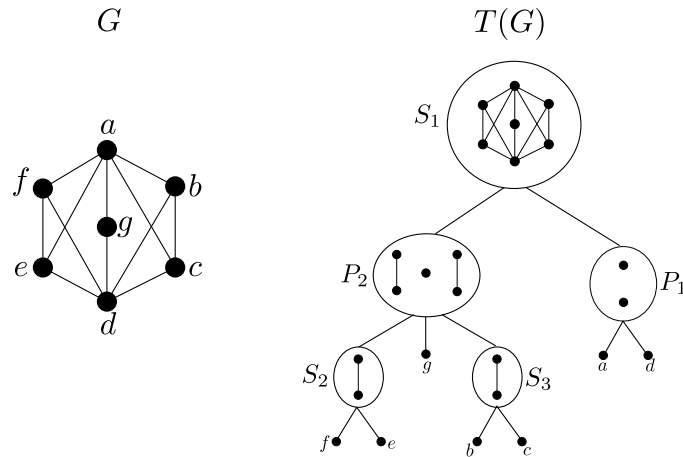


Figura 1.15: Grafo  $G$  e sua respectiva co-árvore.

2.  $G$  não contém  $P_4$  como subgrafo induzido;
3. O complemento de todo subgrafo conexo não trivial de  $G$  é desconexo.

A equivalência  $(1) \Leftrightarrow (3)$  do Teorema 1.15 garante que toda árvore de decomposição dos cografos é uma co-árvore. Desta forma, é possível enunciar o seguinte Corolário:

**Corolário 1.16.** [16] Um grafo  $G$  é um cografo se e somente se, para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$  com pelo menos dois vértices, exatamente uma das condições abaixo é satisfeita:

1.  $H$  é desconexo;
2.  $\overline{H}$  é desconexo.

Dada tal estrutura bem definida, o RECONHECIMENTO DE COGRAFOS pode ser executado em tempo linear [18, 44].

## 1.5.2 Grafos de Limiar

*Grafos de Limiar* (do inglês, Threshold) são um tipo especial de cografos e grafos split. Mais formalmente, um grafo é de limiar se e somente se é ao mesmo tempo um cografo e um grafo split. Introduzidos por Chvátal e Hammer em 1977 [15], o Teorema 1.17 os caracteriza.

**Teorema 1.17.** Para cada grafo  $G$ , as seguintes três condições são equivalentes:

1.  $G$  é um grafo de limiar;
2.  $G$  não tem subgrafo induzido isomorfo a  $2K_2, P_4$  ou  $C_4$ ;

3. Existe uma ordenação  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dos vértices de  $G$  e uma partição de  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  em conjuntos disjuntos  $P$  e  $Q$  tais que

- Cada  $v_j \in P$  é adjacente a todos os vértices  $v_i$  com  $i < j$ ,
- Cada  $v_j \in Q$  é adjacente a nenhum vértice  $v_i$  com  $i < j$ .

### Construção de um grafo de Limiar

Grafos de limiar podem ser construídos a partir de um grafo trivial  $K_1$  por repetidas aplicações das duas operações descritas a seguir:

1. Adição de um vértice isolado ao grafo.
2. Adição de um vértice universal ao grafo.

Observe o exemplo da Figura 1.16.

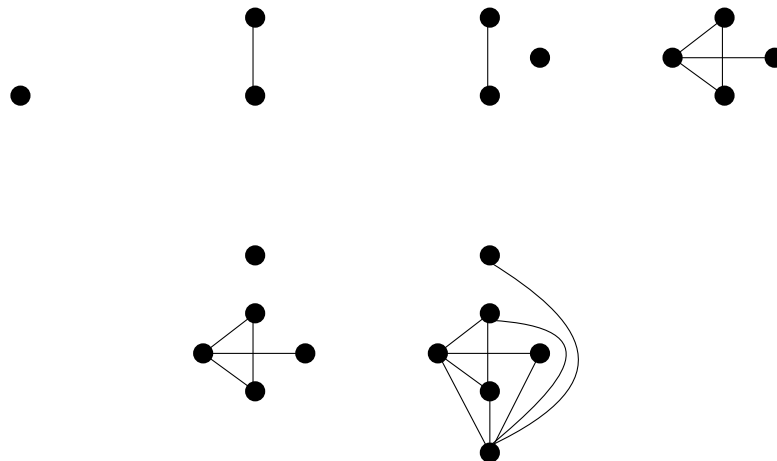


Figura 1.16: Construção de um grafo de limiar a partir de um  $K_1$  e seguidas aplicações das operações de adição de um vértice isolado ou de um vértice universal.

O seguinte resultado será utilizado posteriormente.

**Teorema 1.18** (Chvátal & Hammer [15]). *Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Então  $G$  é um grafo de limiar se e somente se todo subgrafo induzido de  $G$  tem um vértice isolado ou um vértice universal.*

O reconhecimento de grafos de limiar pode ser executado em tempo linear [15].

## Capítulo 2

# Problemas Sanduíche para Grafos Cordais e Fortemente Cordais- $(k, \ell)$

Neste capítulo introduziremos PROBLEMAS SANDUÍCHE e descreveremos alguns resultados importantes da literatura destacando aqueles que têm ligação direta com nosso trabalho. Além disso, apresentaremos aqui nossas contribuições referentes a este tema.

### 2.1 Problemas Sanduíche

Os PROBLEMAS SANDUÍCHE surgiram como uma generalização natural dos PROBLEMAS DE RECONHECIMENTO, que consistem basicamente em determinar se um dado grafo satisfaz ou não determinada propriedade ou se pertence ou não a uma determinada classe de grafos. Golumbic, Kaplan e Shamir, em 1995 introduziram este problema da seguinte forma [40]:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE  $\Pi$  ( $\Pi$ -SP)

*Entrada:* Dois grafos  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e que satisfaça à propriedade  $\Pi$ ?

O grafo  $G$ , se existir, é denominado *grafo sanduíche* devido ao fato que  $G$  deve estar “ensanduichado” entre  $G^1$  e  $G^2$ , sendo, portanto, supergrafo de  $G^1$  e subgrafo de  $G^2$ . Observe que, quando fazemos  $E^1 = E^2 = E$  temos claramente um PROBLEMA DE RECONHECIMENTO. Como visto e por questão de simplicidade, vamos utilizar a mesma notação utilizada em inglês para denotar o PROBLEMA SANDUÍCHE:  $\Pi$ -SP.

É fácil notar que toda aresta de  $G^1$  deve pertencer a  $G$  e que, portanto, temos arestas obrigatórias chamadas *arestas forçadas*. Além disso, as arestas que pertencem ao complemento do grafo  $G^2$  são ditas *arestas proibidas* e correspondem ao conjunto  $(E^3)$ , i.e, o conjunto das arestas que não podem pertencer ao grafo sanduíche. Às arestas de  $G^2 \setminus G^1$



atribuímos a denominação de *arestas opcionais*, uma vez que podem ser adicionadas a  $G$  com a finalidade de obter um grafo que satisfaça à propriedade  $\Pi$  almejada. Assim, podemos reformular o enunciado do problema:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE  $\Pi$  ( $\Pi$ -SP)

*Entrada:* Uma tripla de conjuntos  $(V, E^1, E^3)$ , onde  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$ , onde  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ , que satisfaça à propriedade  $\Pi$ ?

Este problema já foi estudado para diversas classes de grafos. Golubic *et al.*, no mesmo artigo em que definem o problema [40], trabalham com várias classes, dentre as quais podemos destacar a classe dos *grafos split* e dos *grafos cordais*. Posteriormente, o problema foi trabalhado para propriedades relacionadas à partição de grafos, tais como *conjunto homogêneo*, onde um *conjunto homogêneo*  $H$  em  $G = (V, E)$  é um conjunto de vértices de  $G$  tal que cada vértice de  $V \setminus H$  é adjacente a todos os vértices de  $H$  ou a nenhum dos vértices de  $H$  [56]; *1-junção*, onde um grafo  $G = (V, E)$  é uma *partição 1-junção* ou simplesmente uma *partição junção* se  $V$  pode ser particionado em  $V_L$  e  $V_R$  de modo que  $|V_L| \geq 2$  e  $|V_R| \geq 2$ , onde  $V_R$  contém um conjunto não vazio  $A_R$  que satisfaz a propriedade de que todo vértice de  $A_L$  é adjacente a todo vértice de  $A_R$  e nenhum vértice de  $V_L \setminus A_R$  é adjacente a vértices de  $V_L$  [29]; e *grafos- $(k, \ell)$*  [25]. Além das já citadas, outras propriedades já estudadas podem ser encontradas em [26, 40, 53, 65].

Dada uma propriedade  $\Pi$ , definimos a sua *propriedade complementar*  $\bar{\Pi}$  da seguinte maneira: para todo grafo  $G$ ,  $G$  satisfaz  $\Pi$  se e somente se  $\bar{G}$  satisfaz  $\bar{\Pi}$  [40].

O Fato 2.1 mostra que pode ser interessante trabalhar PROBLEMAS SANDUÍCHE envolvendo propriedades complementares.

**Fato 2.1.** *Existe um grafo sanduíche com propriedade  $\Pi$  para a instância  $(V, E^1, E^3)$  se e somente se existe um grafo sanduíche com propriedade  $\bar{\Pi}$  para a instância  $(V, E^3, E^1)$ .*

Contudo, para algumas propriedades  $\Pi$ , o estudo de PROBLEMAS SANDUÍCHE torna-se trivial. Por exemplo, quando o PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para a propriedade  $\Pi$  é sabidamente NP-completo, o PROBLEMA SANDUÍCHE também o será. Além disso, quando a propriedade requerida para o grafo sanduíche é *ancestral*, a instância para o problema é SIM se e somente se  $G^2$  satisfaz à propriedade. O mesmo ocorre quando  $\Pi$  é *hereditária*, basta trocar  $G^2$  por  $G^1$  a satisfaz. Em ambos os casos, se o reconhecimento de  $\Pi$  está em  $P$ , então o PROBLEMA SANDUÍCHE também é solucionável em tempo polinomial. Caso contrário, pertence à classe NP-completo.

Neste capítulo, daremos ênfase aos resultados relacionados às seguintes propriedades: pertencer à classe dos grafos cordais e pertencer à classe dos grafos- $(k, \ell)$ . Mais precisamente, ao iniciarmos este estudo estávamos interessados em classificar completamente a dicotomia P versus NP-completo da complexidade computacional dos PROBLE-

MAS SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  e CORDAIS- $(k, \ell)$ , cujos problemas de reconhecimento são solucionáveis em tempo polinomial por algoritmo baseado no Teorema 2.1.

**Teorema 2.2.** [46] *Um grafo cordal  $G$  é  $(k, \ell)$  se e somente se  $G$  não contém um  $(\ell + 1)K_{k+1}$  como subgrafo induzido (Figura 2.1).*

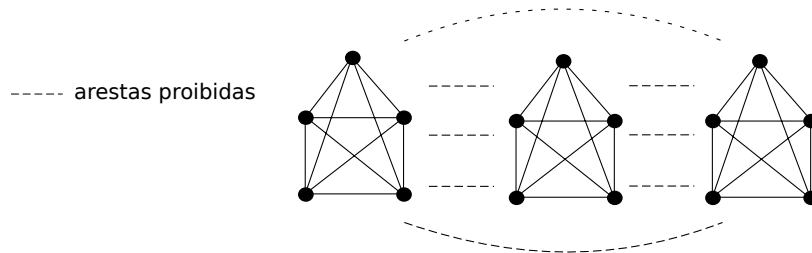


Figura 2.1:  $3K_5$  é subgrafo proibido para grafos cordais- $(4,2)$ .

### 2.1.1 Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais- $(k, \ell)$

Formalmente, o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$ , o qual denotaremos por FC  $(k, \ell)$ -SP pode ser formulado da seguinte forma:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  - (FC  $(k, \ell)$  - SP)

*Entrada:* Dois grafos  $G^1 = (V, E)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  fortemente cordal- $(k, \ell)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ ?

Inicialmente vamos mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(1, 1)$  é NP-completo.

#### Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais- $(1, 1)$

Com a finalidade de provar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(1, 1)$  é NP-completo faremos uma redução polinomial a partir do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BIPARTIDOS CORDAIS, que foi provado NP-completo [61].

Lembramos que um grafo bipartido é *bipartido cordal* se cada um de seus ciclos de tamanho pelo menos 6 tem uma corda.

O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BIPARTIDOS CORDAIS pode ser formulado da seguinte maneira:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS BIPARTIDOS CORDAIS - (BIPARTIDO CORDAL-SP)

*Entrada:*  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$ , tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  bipartido cordal tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ ?

A Proposição 2.3 será utilizada no decorrer da demonstração.

**Proposição 2.3.** [24] *Sejam  $G = (X, Y, E)$  um grafo bipartido e  $G'$  um grafo obtido pela adição de arestas a  $X$  com o intuito de que  $X$  induza uma clique. Então  $G$  é bipartido cordal se e somente se  $G'$  é fortemente cordal.*

**Teorema 2.4.** O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(1, 1) é NP-completo.

*Demonstração.* O problema está claramente em NP, uma vez que, dado um grafo  $G$  o reconhecemos fortemente cordal-(1, 1) em tempo polinomial bem como determinamos se ele é um grafo sanduíche para  $(G^1, G^2)$ . Para finalizar a prova da NP-completude, vamos considerar a seguinte instância  $(G^1, G^2)$  do FORTEMENTE CORDAL-(1, 1)-SP obtida a partir de  $(G^1, G^2)$ , uma instância do problema NP-completo BIPARTIDO CORDAL-SP [61], tal que existe um grafo sanduíche  $G$  bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal-(1, 1) para  $(G^1, G^2)$ .

Inicialmente observamos que BIPARTIDO CORDAL-SP é NP-completo mesmo quando  $G^1$  é conexo. Seja  $G^1 = (X, Y, E^1)$  um grafo bipartido com bipartição  $V = (X, Y)$  e defina  $G^1$  e  $G^2$  da seguinte forma:  $G^1 = (X, Y, E^1)$ , onde  $E^1 = E^1 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\}$  e  $G^2 = (V, E^2 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\})$ . Isto conclui a construção de  $(G^1, G^2)$ .

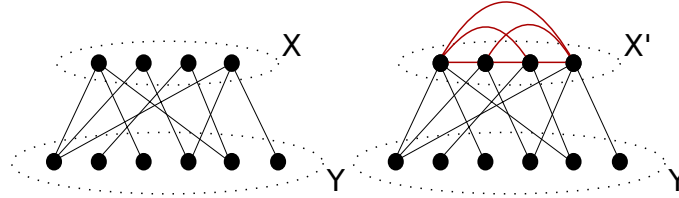


Figura 2.2: Exemplo da construção da instância especial para FC(1, 1)-SP

A prova da NP-completude do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-(1, 1) segue da Proposição 2.3. □

**Problema Sanduíche para Grafos Fortemente Cordais-( $k, \ell$ ),  $k \geq 1, \ell \geq 1$**

Esta seção destina-se a mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS-( $k, \ell$ ) é NP-completo para  $k + \ell \geq 2$ , onde  $k$  e  $\ell$  são inteiros não nulos.

**Lema 2.5.** *Sejam  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 1$  fixos, se FC( $k, \ell$ )-SP é NP-completo, então FC( $k, \ell + 1$ )-SP é NP-completo.*

*Demonstração.* Observe que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ , está em NP, dado que podemos checar em tempo polinomial se um grafo  $G$  é um grafo sanduíche para o par  $(G^1, G^2)$  e se  $G$  é fortemente cordal- $(k, \ell)$  [32, 46].

Consideramos a seguinte instância especial  $(G^1, G^2)$  do FC $(k, \ell + 1)$ -SP obtida a partir de  $(G^1, G^2)$ , uma instância do problema NP-completo FC $(k, \ell)$ -SP, tal que existe um grafo sanduíche  $G$  fortemente cordal- $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, \ell + 1)$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ , para  $(G^1, G^2)$ .

A partir de  $G^1, G^2$ , definimos uma clique adicional  $K$  tal que  $|K| = k + 1$ . Além disso, fazemos  $V(G^1) = V(G^2) = V(G^1) \cup V(K)$ ,  $E(G^1) = E^1 \cup E(K)$ , e  $E(G^2) = E^2 \cup E(K)$ .

Isso conclui a construção da instância  $(G^1, G^2)$  (ver Figura 2.3 como exemplo).

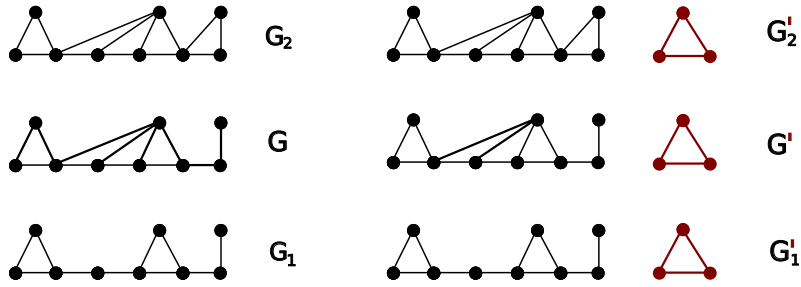


Figura 2.3: Exemplo da instância quando  $k = 2$  e  $\ell = 1$ . Note que quando  $G$  tem dois triângulos isolados ( $2K_3$ ),  $G'$  terá 3 triângulos isolados.

Suponha que exista um grafo sanduíche  $G$  fortemente cordal- $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ . Considere  $G'$  formado por  $G$  mais as arestas forçadas de  $(G^1, G^2)$ . Com o objetivo de provar que o grafo  $G'$  é fortemente cordal, consideramos a sequência de eliminação forte iniciada por qualquer sequência de vértices de  $K$ , seguida pela sequência de eliminação forte do grafo  $G$ , fortemente cordal. Para provar que  $G'$  é  $(k, \ell + 1)$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ , consideramos uma  $(k, \ell)$ -partição para  $G$  e construímos uma  $(k, \ell + 1)$ -partição para  $G'$  formada pelos  $k$  conjuntos independentes e pelas  $\ell$  cliques de  $G$  juntamente com  $K$ .

Suponha agora que existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, \ell + 1)$  para  $(G^1, G^2)$ ,  $k \geq 1, \ell \geq 1$ . Dado  $G = G' - K$ , provaremos que  $G$  é um grafo sanduíche fortemente cordal- $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ . Suponha, por contradição que  $G$  não seja fortemente cordal- $(k, \ell)$ . Primeiramente, observe que, como “ser fortemente cordal” é uma propriedade hereditária,  $G$  deve ser fortemente cordal. Logo, se  $G$  não for fortemente cordal- $(k, \ell)$ , então isso se deve ao fato de que  $G$  não é um grafo- $(k, \ell)$ . Segue do Teorema 2.1 que  $G$  contém um  $(\ell + 1)(K_{k+1})$  como subgrafo induzido. Como  $G'$  é a união disjunta de  $G$  e  $K$ , em  $G'$  existe um  $(\ell + 2)K_{k+1}$  como subgrafo induzido formado por  $K$  e pelo  $(\ell + 1)(K_{k+1})$  induzido de  $G$ . Pelo Teorema 2.1,  $G'$  não é fortemente cordal- $(k, \ell + 1)$ , uma contradição. Consequentemente,  $G$  é fortemente cordal- $(k, \ell)$ .  $\square$

**Teorema 2.6.** *Se  $\ell \geq 1$ ,  $\ell$  fixo, então FC $(1, \ell)$ -SP é NP-completo.*

*Demonstração.* A prova é feita por indução utilizando o Teorema 2.4 e o Lema 2.5.  $\square$

**Lema 2.7.** Dado  $k \geq 1$ ,  $\text{FC}(k, 1)$ -SP é NP-completo.

*Demonstração.* Claramente  $\text{FC}(k, 1)$ -SP,  $k \geq 1$  está em NP [32, 46]. Vamos considerar a seguinte instância especial  $(G^1, G^2)$  do  $\text{FC}(k, 1)$ -SP obtida a partir de  $(G^1, G^2)$ , uma instância conexa do problema NP-completo BIPARTIDO CORDAL-SP [61], tal que existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, 1)$ ,  $k \geq 1$  para  $(G^1, G^2)$ .

Observe que, se existe um grafo sanduíche  $G$  bipartido cordal, então  $G^1 = (V, E^1)$  é obrigatoriamente bipartido. Seja  $G^1 = (X, Y, E^1)$ . Dado  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$ , descrevemos:

- $V(G^1) = V(G^2) = V(G^1) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$ ,
- $E(G^1) = E^1 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\} \cup \{(w_i, w_j), (w_i, y_1) | i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}\}$ ,  
e
- $E(G^2) = E^2 \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\} \cup \{(w_i, w_j), (w_i, y_1) | i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}\}$ .

Isso conclui a construção da instância  $(G^1, G^2)$  (veja a Figura 2.4 como um exemplo).

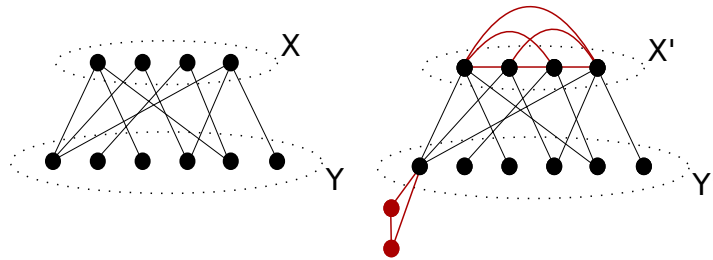


Figura 2.4: Exemplo da construção da instância quando  $k = 3$ .

Vamos provar que existe um grafo sanduíche  $G$  bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$  se e somente se existe um grafo sanduíche  $G'$  fortemente cordal- $(k, 1)$  para o par  $(G^1, G^2)$ .

Suponha que  $G$  é um grafo sanduíche bipartido cordal para  $(G^1, G^2)$ . Seja  $G'$  o grafo onde  $V(G') = V(G^1)$  e  $E(G') = E(G) \cup \{(w_i, w_j), (w_i, y_1) | i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}\} \cup \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\}$ . Vamos mostrar que  $G'$  é fortemente cordal e vamos exibir a partição do seu conjunto de vértices em  $k$  conjuntos independentes e uma clique. Observe que um sol de  $G'$  pertence inteiramente a um bloco de  $G'$ . Como  $y_1$  é uma articulação, temos que um sol de  $G'$  pertence ao grafo  $G'[V]$ . Pela Proposição 2.3,  $G'[V]$  é fortemente cordal. Então, podemos garantir que  $G'$  é fortemente cordal. Além disso, podemos exibir a  $(k, 1)$ -partição de  $G'$ : cada vértice de  $\{w_1, w_2, \dots, w_{k-1}\}$  participa de um conjunto independente, a parte  $Y$  forma mais um conjunto independente (totalizando  $k$  conjuntos independentes) e a clique é induzida por  $X$ .

Agora suponha que  $G'$  seja um grafo sanduíche fortemente cordal- $(k, 1)$  para  $(G^1, G^2)$ . Provaremos que  $G = (V, E)$  é bipartido cordal, onde  $E = E(G'[V]) \setminus \{(x_i, x_j) | x_i, x_j \in X\}$ . Podemos assumir que a instância  $(G^1, G^2)$  do problema NP-completo para grafos bipartidos cordais [61] seja tal que  $G^1$  é conexo e  $G^2$  é bipartido. Suponha, por contradição, que  $G$  contenha um  $C_6$ . Neste caso, teríamos um sol em  $G'[V]$ , e, portanto, uma contradição.  $\square$

**Teorema 2.8.** *Se  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 1$ ,  $k, \ell$  fixos, então FC( $k, \ell$ )-SP é NP-completo.*

*Demonstração.* Segue do Lema 2.7 e do Teorema 2.6.  $\square$

### 2.1.2 Problemas Sanduíche para Grafos Cordais- $(k, \ell)$

Este problema pode ser formulado da seguinte forma:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(k, \ell)$  - CORDAL( $k, \ell$ )-SP

*Instância:*  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$ , tal que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Questão:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e  $G$  é um grafo cordal- $(k, \ell)$ ?

Golumbic, Kaplan e Shamir provaram que o CORDAL- $(1, 1)$ -SP, i.e SPLIT-SP é solucionável em tempo polinomial [40]. Vamos provar a seguir que o CORDAL- $(2, 1)$ -SP é NP-completo [21].

#### Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(2, 1)$

A seguir provaremos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$  é NP-completo.

**Teorema 2.9.** [19] *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$  é NP-completo.*

Com a finalidade de provar o Teorema 2.9, vamos apresentar o PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS (TCG) introduzido por Bodlaender, Fellows e Warnow em [2] e utilizado por Golumbic, Kaplan e Shamir a fim de mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS é NP-completo. Note que vamos denotar por TCG, assim como denotado em inglês, o PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS.

O PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS (TCG) pode ser formulado da seguinte maneira:

PROBLEMA DA TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS (TCG)

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$  e uma coloração própria de vértices  $c : V \rightarrow \mathbb{Z}$ .

*Pergunta:* Existe um supergrafo  $G' = (V, E')$  de  $G$  que seja cordal e também esteja propriamente colorido em vértices por  $c$ ?

**Teorema 2.10.** [2] O problema TCG é NP-completo mesmo quando cada cor é atribuída a exatamente dois vértices.

Para mostrar que o TCG é NP-completo, foi feita uma redução polinomial para o TCG a partir do problema NP-completo 3SAT [38]:

3-SATISFABILIDADE (3SAT)

*Entrada:* Um conjunto de variáveis  $U$  e uma coleção de cláusulas  $\mathcal{C}$  de  $U$  de modo que cada cláusula tenha exatamente 3 literais.

*Pergunta:* Existe uma atribuição verdadeira para  $U$  de modo que cada cláusula seja satisfeita?

Neste trabalho, vamos apresentar a instância construída para provar o Teorema 2.10 objetivando mostrar que o grafo construído, além de ser cordal, é também um grafo-(2, 1). Os detalhes da prova da NP-completude do problema TCG podem ser encontrados em [2]. Desta forma, mostraremos que o PROBLEMA DA (2, 1)-TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS ((2, 1)-TCG) é NP-completo.

PROBLEMA DA (2, 1)-TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS ((2, 1)-TCG)

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$  e uma coloração própria de vértices  $c : V \rightarrow \mathbb{Z}$ .

*Pergunta:* Existe um supergrafo  $G' = (V, E')$  de  $G$  que seja cordal-(2, 1) e também esteja propriamente colorido em vértices por  $c$ ?

*Construção da instância particular  $G_I = (V, E)$  para (2, 1)-TCG:*

Considere uma instância  $I = (U, \mathcal{C})$  do 3SAT, onde  $U$  é um conjunto de variáveis lógicas e  $\mathcal{C}$  é uma coleção de cláusulas com  $n = |U|$  e  $m = |\mathcal{C}|$ . Vamos construir o grafo  $G_I = (V, E)$ , que consiste de  $n$  componentes decisão e  $m$  componentes cláusula. Vamos assumir que nenhuma cláusula de  $I$  contenha um literal e seu complemento.

Cada componente decisão possui os vértices:  $H$  (cabeça),  $S_X, S_{\bar{X}}$  (ombros),  $K_X^i, K_{\bar{X}}^i$  (joelhos) e  $F$  (pé), como na Figura 2.5. A instância particular  $G_I = (V, E)$  para o problema TCG tem apenas uma cabeça e um pé, um par de ombros para cada variável  $X$  e um par de joelhos para cada aparição de  $X$  ou  $\bar{X}$  em uma cláusula  $i$ .

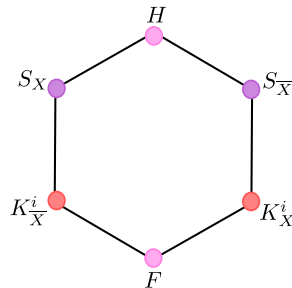


Figura 2.5: Componente decisão colorida.

A atribuição de cores a cada um desses vértices será feita da seguinte forma: Cabeça e pé recebem a mesma cor; a cada par de ombros  $S_X, S_{\bar{X}}$  é atribuída uma mesma cor, e cada par de joelhos  $K_X^i, K_{\bar{X}}^i$  também recebe uma cor.

Para criarmos a *componente cláusula* não acrescentamos vértices às componentes já criadas, apenas arestas entre os joelhos do grafo.

Um joelho  $K_X^i$  é *verdadeiro* se o literal  $X$  associado a ele recebe valor verdadeiro, caso contrário, o joelho é dito *falso*.

Seja  $L$  um literal da  $i$ -ésima cláusula. Chamamos  $K_L^i$  de *joelho ativo* e  $K_{\bar{L}}^i$  de *joelho inativo*. Para cada par  $K_L^i$  e  $K_{\bar{L}}^i$ , apenas um joelho é ativo.

Considere a cláusula  $(X, Y, Z)$ . A componente cláusula correspondente será como a representada na Figura 2.6. Isso conclui a construção do grafo  $G_I$ .

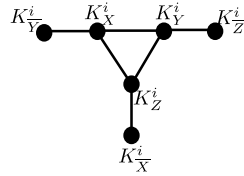


Figura 2.6: Componente cláusula correspondente a  $(X, Y, Z)$ .

Observe que existem apenas duas maneiras de cordalizar a componente relativa à variável  $X$  respeitando a coloração dos vértices. Como as arestas  $(H, F), (S_X, S_{\bar{X}}), (K_X^i, K_{\bar{X}}^i)$  ficam proibidas de serem acrescentadas devido a coloração, para triangularizarmos a componente decisão, ou adicionamos as arestas  $(H, K_X^i), (S_X, K_X^i), (S_X, F)$  ou as arestas  $(H, K_{\bar{X}}^i), (S_{\bar{X}}, K_{\bar{X}}^i), (S_{\bar{X}}, F)$ . Ambas as orientações formam a *orientação positiva* e a *orientação negativa* da *Marca do Zorro*, respectivamente.

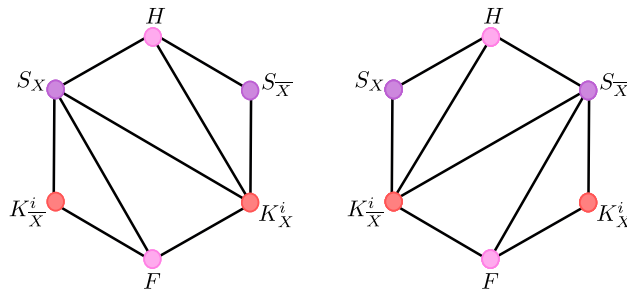


Figura 2.7: Marcas do Zorro nas orientações positiva e negativa, da esquerda para direita.

Além disso, é importante ressaltar que, ou inserimos todas as arestas  $(H, K_X^i)$  ou todas as arestas  $(H, K_{\bar{X}}^i)$ .



Se as Marcas do Zorro estiverem orientadas positivamente na componente decisão referente a  $X$ , então o literal  $X$  receberá valor *verdadeiro*. Caso contrário, receberá valor *falso*.

Para a conveniência do leitor oferecemos, na Figura 2.8, um exemplo de grafo  $G_I$  obtido a partir de uma instância particular do 3SAT.

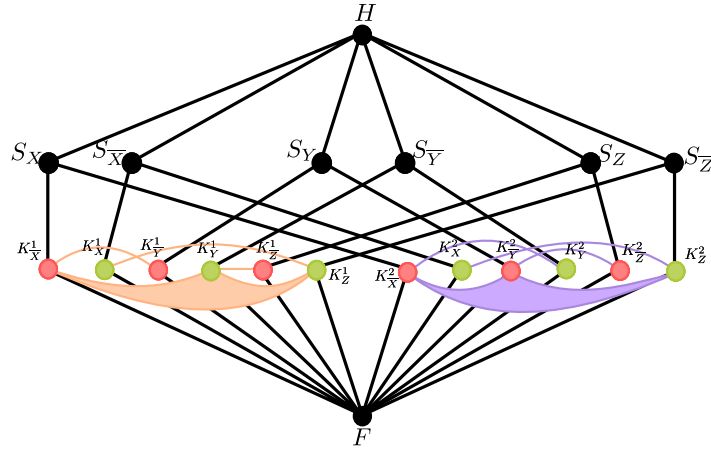


Figura 2.8: Exemplo de  $G_I$  obtido a partir da instância  $U = \{X, Y, Z\}, C = \{(\bar{X}, Y, Z), (\bar{X}, \bar{Y}, Z)\}$  do 3SAT.

Considerem os seguintes conjuntos:

- $O_V$  e  $O_F$  os conjuntos dos ombros verdadeiros e falsos do grafo, respectivamente,
- $J_V$  e  $J_F$  os conjuntos dos joelhos verdadeiros e falsos do grafo, respectivamente.

A fim de obter um grafo cordal-(2,1), vamos adicionar a  $G_I$  o seguinte conjunto de arestas:

- A orientação positiva da *Marca do Zorro* em cada componente decisão;
- As arestas entre todos os vértices de  $O_V \cup J_V$ , formando assim uma clique destes vértices;
- As arestas com uma extremidade em  $O_V$  e outra em  $J_F$ , e
- As arestas com uma extremidade em  $J_V$  e outra em  $O_F$ .

**Lema 2.11.** *O supergrafo  $G$  construído a partir de  $G_I$  quando  $I$  é uma instância satisfável, é um grafo cordal-(2,1).*

*Demonstração.* Em [2] foi mostrado que o grafo  $G$  é cordal. Pelo Teorema 2.1, para mostrar que o grafo é também (2,1), é suficiente provar que o grafo  $G$  não possui triângulos isolados.

Podemos observar que toda aresta que foi adicionada a  $G_I$  a fim de transformá-lo no grafo  $G$  tem como um de seus extremos um joelho verdadeiro ou um ombro verdadeiro. Portanto, se estas arestas adicionarem novos triângulos ao grafo, então, certamente, esses triângulos são compostos por pelo menos um joelho verdadeiro ou um ombro verdadeiro.

Note que, devido a componente cláusula (Figura 2.6), são formados três tipos de triângulos no grafo, a saber: os que são compostos unicamente por joelhos ativos de uma mesma cláusula; os que são compostos por pelo menos um joelho verdadeiro e o pé  $F$ , e os que são compostos por 2 joelhos falsos relativos a uma mesma cláusula e o pé  $F$ . Os triângulos do primeiro tipo têm pelo menos um joelho verdadeiro, já que a instância do problema 3SAT deve ser satisfeita. Os triângulos do segundo tipo têm claramente um joelho verdadeiro, entretanto, os triângulos do terceiro tipo não possuem nem joelhos verdadeiros nem ombros verdadeiros. Denotaremos por  $T^*$  o conjunto dos triângulos que são formados por 2 joelhos falsos e pelo pé  $F$ .

Observe ainda que não são formados triângulos compostos pela cabeça  $H$  e joelhos falsos, já que  $H$  não é adjacente a tais vértices. Além disso, joelhos falsos de cláusulas distintas não são adjacentes.

Assim, podemos afirmar:

**Afirmção 2.12.** *Excluindo-se as arestas da componente cláusula, todos os triângulos de  $G$  têm pelo menos um ombro verdadeiro ou um joelho verdadeiro.*

Esta Afirmção é relevante já que joelhos verdadeiros e ombros verdadeiros formam uma clique e, portanto, temos pelo menos uma aresta entre cada par de triângulos.

**Afirmção 2.13.** *Os triângulos de  $T^*$  não são isolados dois a dois.*

Esta Afirmção é imediata já que todos os triângulos de  $T^*$  têm um vértice comum: o pé  $F$ .

**Afirmção 2.14.** *Os triângulos de  $T^*$  são ligados aos demais triângulos do grafo.*

De fato, basta observarmos que o vértice  $F$  é adjacente a todo joelho e a todo ombro verdadeiro, devido às Marcas do Zorro.

Portanto, a adição do conjunto de arestas que descrevemos gera um grafo cordal-(2, 1).

A partir desta argumentação, é possível perceber que o pé  $F$  deve pertencer a clique, assim como os ombros e joelhos verdadeiros. Dessa forma, fica fácil obter a (2, 1)-partição do grafo cordal  $G$ .

**Clique:** ombros verdadeiros, joelhos verdadeiros e o pé.

**Conjuntos independentes:**

$S_1$  : cabeça, joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos verdadeiros inativos, joelhos falsos inativos.

$S_2$  : ombros falsos, joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos falsos inativos.

□

**Teorema 2.15.** *O PROBLEMA DA  $(2, 1)$ -TRIANGULAÇÃO PARA GRAFOS COLORIDOS é NP-completo, mesmo quando uma cor é atribuída a exatamente dois vértices.*

A prova do Teorema 2.15 utiliza a mesma redução polinomial a partir do problema 3-SAT feita para mostrar que TCG é NP-completo [2], sabendo que o Lema 2.11 é válido.

Agora temos as ferramentas necessárias para provar o Teorema 2.9.

*Demonstração.* Inicialmente, vamos mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2,1)$  pertence à classe NP.

Um certificado para este problema é o próprio grafo  $G = (V, E)$ . Devemos verificar se  $G$  é supergrafo de  $G^1 = (V, E^1)$  e subgrafo de  $G^2 = (V, E^2)$ . Podemos verificar se  $G$  é um grafo cordal em tempo polinomial [36, 51]. Em seguida, basta verificarmos se este grafo não possui triângulos isolados, já que, sendo cordal, podemos utilizar a caracterização de grafos cordais- $(2, 1)$  [46] descrita no Teorema 2.1. Esta verificação é feita em tempo  $O(nm)$  [46]. Logo, conseguimos certificar que  $G$  é um grafo cordal- $(2, 1)$  em tempo polinomial e, conseqüentemente, este problema pertence à classe NP.

Para provar que este problema é NP-completo, basta fazermos uma redução polinomial a partir do  $(2, 1)$ -TCG para o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$ , que é imediata, considerando que as arestas obrigatórias da instância particular  $(V', E^1, E^2)$  para CORDAL- $(2, 1)$ -SP são as arestas de  $G = (V, E)$ , instância genérica colorida por uma coloração  $c$  para  $(2, 1)$ -TCG, as arestas proibidas de  $E^3$  são as arestas entre vértices de mesma cor e  $V' = V$ .

□

### **Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(1, 2)$**

Com o objetivo de provar que o CORDAL- $(1, 2)$ -SP é NP-completo, também vamos mostrar que o PROBLEMA DA  $(1, 2)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS é NP-completo novamente baseados na redução polinomial feita a partir do 3-SAT para TCG feita por Bodlaender, Fellows e Warnow [2] para mostrar que TCG é NP-completo.

PROBLEMA DA  $(1, 2)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS  $((2, 1)$ -TCG

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$  e uma coloração própria de vértices  $c : V \rightarrow \mathbb{Z}$ .

*Pergunta:* Existe um supergrafo  $G' = (V, E')$  de  $G$  que seja cordal- $(1, 2)$  e também esteja propriamente colorido em vértices por  $c$ ?

Para a demonstração do Lema 2.16, estamos considerando a mesma instância  $G_I$  apresentada na prova de  $(2, 1)$ -TCG.

**Lema 2.16.** *A instância  $I$  do 3-SAT é satisfável se e somente se existe uma  $(1, 2)$ -triangulação para  $G_I$  respeitando a coloração própria de  $G_I$ .*

*Demonstração.* A suficiência do Lema 2.16 já foi feita por Bodlaender *et al.* [2]. Para provar a necessidade, suponha que exista uma atribuição verdadeira  $f$  para  $I$ . Vamos adicionar o seguinte conjunto de arestas a fim de obter um grafo cordal-(1,2) respeitando a coloração própria de  $G_I$ :

- A orientação positiva da *Marca do Zorro* para cada componente decisão;
- Todas as arestas entre joelhos verdadeiros e ombros verdadeiros, com a finalidade de obter uma clique;
- Arestas tais que cada ombro verdadeiro seja adjacente a cada joelho falso;
- Todas as arestas entre joelhos ativos e
- Arestas entre joelhos verdadeiros inativos adjacentes a joelhos falsos ativos e joelhos falsos ativos adjacentes a joelhos verdadeiros inativos.

Seja  $G_1$  a instância  $G_I$  mais essas arestas adicionais e considere os seguintes conjuntos:

- $S_1 = \{\text{Ombros Falsos, Joelhos Falsos Inativos}\}$ ;
- $S_2 = \{\text{Cabeça}\}$ ;
- $S_3 = \{\text{Joelho Verdadeiro Inativo adjacente a um Joelho Verdadeiro Ativo}\}$ ;
- $S_4 = \{\text{Joelho Falso Ativo adjacente a um Joelho Falso Inativo}\}$ ;
- $S_5 = \{\text{Joelho Falso Ativo adjacente a um Joelho Verdadeiro Inativo (na mesma componente cláusula)}\}$ , e
- $S_6 = \{\text{Joelhos Verdadeiros Ativos, Ombros Verdadeiros, Pé}\}$ .

Primeiramente observe que essas arestas adicionadas estão no conjunto de arestas opcionais de  $G_I$ . Vamos analisar as vizinhanças de cada vértice desses conjuntos.

Ombros falsos são adjacentes à cabeça e a alguns joelhos verdadeiros. Como a cabeça e joelhos verdadeiros formam uma clique, cada ombro falso é um vértice simplicial e pode ser removido. Joelhos falsos ativos são adjacentes ao pé, aos ombros verdadeiros e a um joelho ativo. Esse conjunto é também uma clique e joelhos falsos inativos são vértices simpliciais, então podem ser excluídos. Seja  $G_2$  o grafo resultante após estas remoções.

A vizinhança da cabeça em  $G_2$  é formada por ombros verdadeiros e joelhos verdadeiros, o que induz uma clique em  $G_2$ . Então a cabeça é um vértice simplicial que pode ser removido do grafo. Seja  $G_3$  o grafo após a remoção da cabeça.

Os vértices de  $S_3$  em  $G_3$  são adjacentes ao pé, aos ombros verdadeiros e aos joelhos verdadeiros. Novamente, este conjunto de vértices induz uma clique em  $G_3$ . Assim, joelhos verdadeiros inativos adjacentes a joelhos verdadeiros ativos são vértices simpliciais em  $G_3$  que podem ser removidos originando  $G_4$ .

Os vértices de  $S_4$  em  $G_4$  são adjacentes a ombros verdadeiros, ao pé e a todos os joelhos ativos. Joelhos ativos formam uma clique assim como ombros verdadeiros, e o pé é adjacente a cada ombro verdadeiro. Além disso, ombros verdadeiros são adjacentes a todos os joelhos. Então, esta vizinhança também induz um clique, o que caracteriza cada joelho falso ativo adjacente a um joelho falso inativo como um vértice simplicial em  $G_4$ . Seja  $G_5$  o grafo obtido após a remoção dos vértices de  $S_4$ .

Os vértices de  $S_5$  são adjacentes a cada joelho ativo, a todos os joelhos verdadeiros inativos adjacentes a um joelho falso ativo, aos ombros verdadeiros e ao pé em  $G_5$ . Consequentemente, os vértices de  $S_5$  são simpliciais e podem ser removidos, formando o grafo  $G_6$ , que é claramente uma clique.

Observe que, se seguirmos a ordem desses conjuntos, qualquer ordem de eliminação de vértices aplicada a cada conjunto conduz a um esquema de eliminação perfeita para o grafo  $G_1$ . Além disso, podemos apresentar a  $(1, 2)$ -partição para os vértices de  $G_1$ :

**Conjunto Independente:** Ombros Falsos e Joelhos Falsos Inativos;

**Clique 1:** Cabeça, Ombros Verdadeiros e Joelhos Verdadeiros, e

**Clique 2:** Pé e Joelhos Falsos Ativos.

Isso conclui a prova do Lema 2.16. □

Assim, podemos formular o Teorema 2.17.

**Teorema 2.17.** *O PROBLEMA DA  $(1, 2)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS é NP-completo, mesmo quando cada cor é atribuída a exatamente dois vértices.*

A prova do Teorema 2.17 segue do Lema 2.16.

**Teorema 2.18.** *CORDAL- $(1, 2)$ -SP é NP-completo.*

*Demonstração.* Claramente, CORDAL- $(1, 2)$ -SP está em NP. A prova da NP-completude é uma redução polinomial a partir de  $(1, 2)$ -TCG. A instância particular  $(V', E^1, E^3)$  é construída a partir de uma instância genérica  $G = (V, E)$  colorida de acordo com uma coloração  $c$  de  $(1, 2)$ -TCG de modo que  $V' = V$ ,  $E^1 = E$  e  $E^3$  são as arestas entre vértices de mesma cor. □

**Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(k, \ell)$ ,  $k + \ell \geq 3$ ,  $k, \ell > 0$**

Até agora provamos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  são NP-completos baseados na redução feita por Bodlaender et al. em [2]. Nesta seção, vamos mostrar que tais resultados podem ser estendidos a fim de mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS- $(k, \ell)$ , com  $k$  e  $\ell$  fixos tais que  $k + \ell \geq 3$ ,  $k, \ell > 0$  é também NP-completo.

Pela definição de grafos  $(k, \ell)$ , podemos afirmar que:

**Afirmção 2.19.** *Se um grafo  $G$  é  $(k, \ell)$  então  $G$  é  $(k + 1, \ell + 1)$ .*

Para mostrar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS- $(k, \ell)$  é NP-completo, vamos mostrar que o PROBLEMA DA  $(k, \ell)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS  $((k, \ell)$ -TCG) é também NP-completo, para  $k + \ell \geq 3$  com  $k, \ell > 0$  fixos.

PROBLEMA DA  $(k, \ell)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS  $((k, \ell)$ -TCG)

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$  e uma coloração própria de vértices  $c : V \rightarrow \mathbb{Z}$ .

*Pergunta:* Existe um supergrafo  $G' = (V, E')$  de  $G$  que seja cordal- $(k, \ell)$  e também esteja propriamente colorido em vértices por  $c$ ?

O Corolário enunciado abaixo segue da Afirmação 2.19 e do Teorema 2.15.

**Corolário 2.20.** *O PROBLEMA DA  $(k, \ell)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS é NP-completo, mesmo quando cada cor é atribuída a exatamente dois vértices, para  $k \geq 2$  e  $\ell \geq 1$ , fixos.*

De maneira semelhante, o Corolário 2.21 segue da Afirmação 2.19 e do Teorema 2.17.

**Corolário 2.21.** *O PROBLEMA DA  $(k, \ell)$ -TRIANGULAÇÃO DE GRAFOS COLORIDOS é NP-completo, mesmo quando cada cor é atribuída a exatamente dois vértices, para  $k \geq 1$  e  $\ell \geq 2$ , fixos.*

Em posse destes dois Corolários, o Teorema 2.22 pode ser provado de maneira semelhante aos Teoremas 2.15 e 2.17.

**Teorema 2.22.** *Se  $k + \ell \geq 3$ ,  $k, \ell > 0$ ,  $k, \ell$  fixos, então CORDAL- $(k, \ell)$ -SP é NP-completo.*

### Problema Sanduíche para Grafos (Fortemente) Cordais- $(0, \ell)$ , $\ell \geq 3$

Para provar que FC- $(0, \ell)$ -SP e CORDAL- $(0, \ell)$ -SP são problemas NP-completos, vamos fazer uma redução polinomial a partir do problema de decisão NP-completo denominado COBERTURA POR  $\ell$  CLIQUES introduzido por Karp [48].

COBERTURA POR  $\ell$  CLIQUES pode ser formulado da seguinte forma:

COBERTURA POR  $\ell$  CLIQUES

*Entrada:* Um grafo  $H = (V_H, E_H)$

*Pergunta:* Existe uma partição de  $V_H$  em  $\ell$  cliques?

*Construção da instância particular  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  para (FORTEMENTE) CORDAL- $(0, \ell)$ -SP:*

Considere uma instância geral  $H = (V_H, E_H)$  para o problema da COBERTURA POR  $k$  CLIQUES. Vamos construir uma instância particular  $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$  do (FORTEMENTE) CORDAL- $(0, \ell)$ -SP para  $k \geq 3$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V &= V_H \\ E^1 &= \emptyset \\ E^2 &= E_H \end{aligned}$$

**Lema 2.23.** *O grafo  $H = (V_H, E_H)$  tem uma cobertura por  $\ell$  cliques se e somente se existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  (fortemente) cordal para  $(G^1, G^2)$ .*

*Demonstração.* Inicialmente suponha que  $V_H$  pode ser particionado em  $\ell$  cliques  $K^1, K^2, \dots, K^\ell$  tais que  $V_H = K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^\ell$ . Vamos construir o grafo sanduíche  $G = (V, E)$  fazendo:

$$\begin{aligned} V &= V_H \\ E &= E(G^2[K^1]) \cup E(G^2[K^2]) \cup \dots \cup E(G^2[K^\ell]) \end{aligned}$$

Observe que  $G$  tem o mesmo conjunto de vértices que  $G^1$  e  $G^2$ , tem todas as arestas obrigatórias e toda aresta de  $E$  pertence a  $E^2$ . Além disso,  $G$  é cordal pois é composto por  $k$  componentes conexas que são cliques. Note ainda que  $G$  é fortemente cordal, uma vez que não possui um sol como subgrafo induzido. Portanto,  $G$  é (fortemente) cordal- $(0, \ell)$ .

Agora suponha que tenhamos um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  (fortemente) cordal- $(0, \ell)$  para a instância  $(G^1, G^2)$ . Neste caso, existe uma cobertura por  $\ell$  cliques para  $G$ . Como  $G$  é subgrafo de  $G^2$  com o mesmo conjunto de vértices e, por construção,  $G^2 = H$ , temos que  $H$  também tem uma cobertura por  $\ell$  cliques.  $\square$

**Teorema 2.24.** *Se  $\ell \geq 3$  fixo, então FC- $(0, \ell)$ -SP e CORDAL- $(0, \ell)$ -SP são NP-completos.*

*Demonstração.* Este problema está claramente em NP [32, 46].

A prova da NP-completude segue do Lema 2.23.  $\square$

Neste Capítulo, introduzimos o conceito de PROBLEMA SANDUÍCHE e trabalhamos com as classes de grafos cordais- $(k, \ell)$  e fortemente cordais- $(k, \ell)$ . Os resultados apresentados para ambas as classes constam, em sua maioria, no artigo publicado pelo Journal of the Brazilian Computer Society [21].

## Capítulo 3

# Problemas Sanduíche com Condições de Contorno

### 3.1 Definição e Motivação

Neste capítulo, propomos uma nova abordagem relacionada a problemas sanduíche: ao invés de escolher apenas a propriedade  $\Pi$ , vamos escolher também *condições de contorno*, i.e., propriedades  $\Pi^i$  atribuídas aos grafos de entrada  $G^i, i = 1, 2$  com o intuito de tornar problemas sabidamente difíceis em problemas mais tratáveis. Formalmente temos:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE  $\Pi$  COM CONDIÇÕES DE CONTORNO

*Entrada:* Dois grafos  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$  e  $G^i$  satisfaz  $\Pi^i, i = 1, 2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e  $G$  satisfaça  $\Pi$ ?

Denotaremos esse problema através de uma tripla  $(\Pi^1, \Pi, \Pi^2)$ -SP. Quando não exigirmos que  $G^i$  satisfaça uma determinada propriedade  $\Pi^i$ , substituímos  $\Pi^i$  por  $*$  na tripla. Desta forma, denotamos por  $(*, \Pi, *)$ -SP o problema sanduíche para a propriedade  $\Pi$  (sem condições de contorno).

Notamos que grande parte dos problemas sanduíche conhecidos são NP-completos. O trabalho de Golubic et al. [40] contém um diagrama que mostra a complexidade (naquela época) de problemas sanduíche para algumas subfamílias de grafos perfeitos. Podemos citar ainda outros artigos que apresentam provas de NP-completude para problemas sanduíche, tais como [25, 35]. Frente à dificuldade de resolver alguns deles em tempo polinomial, começamos a pensar sobre algumas propriedades que, quando inteligentemente aplicadas, podem alterar a tratabilidade do problema. Fazendo uma comparação direta com o problema de Golubic, Kaplan e Shamir, podemos afirmar que estudar o problema sanduíche é interessante quando a propriedade  $\Pi$  almejada é reconhecida em tempo polinomial. Em contrapartida, o estudo de problemas sanduíche com condições de



contorno é interessante em várias aplicações, tais como:

- Quando o problema sem condições de contorno é NP-completo e não possui algoritmo aproximativo e o problema com condições de contorno é NP-completo porém com algoritmo aproximativo;
- Quando o problema sem condições de contorno é NP-completo e o problema com condições de contorno é polinomial,
- Quando o problema sem condições de contorno é polinomial e o problema com condições de contorno é polinomial mais eficiente.

Nas próximas seções, analisaremos alguns problemas sanduíche, que na versão original introduzida por Golumbic, Kaplan e Shamir [40], são NP-completos e após atribuímos condições especiais para  $G^1$  e  $G^2$ , obtivemos soluções em tempo polinomial.

### 3.2 Problema Sanduíche para Grafos- $(k, \ell)$ com Condições de Contorno

É bastante interessante observar como a complexidade de um problema pode mudar de NP-completo para polinomial quando atribuímos a  $G^1$  ou  $G^2$  algumas condições particulares. Os resultados que apresentamos a seguir são frutos de colaboração dos professores Fábio Protti e Loana Tito Nogueira.

Vamos trabalhar com o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS- $(k, \ell)$  com algumas condições fortes, que nos permitirão obter uma solução em tempo polinomial para alguns problemas relacionados. Obviamente, não vamos considerar os casos nos quais  $G^1$  ou  $G^2$  satisfaz a propriedade  $\Pi$ , pois teríamos um caso trivial que podemos solucionar fazendo  $G = G^1$  ou  $G = G^2$ .

Agora definiremos alguns conceitos que utilizaremos no decorrer deste texto.

**Definição 3.1.** Para um inteiro fixo  $k$ ,  $\text{POLY-COLOR}(k)$  denota uma família infinita de grafos  $G$ , fechada para subgrafo induzido, para o qual existe um polinômio  $p$  tal que decidir se  $G$  é  $k$ -colorível pode ser feito em tempo  $O(p(n))$ , onde  $n = |V(G)|$ .

**Definição 3.2.** NÚMERO POLINOMIAL DE CLIQUES MAXIMAIS, ou simplesmente PNMC, denota uma família infinita de grafos  $G$  para o qual existe um polinômio  $q$  tal que o número de cliques maximais de  $G$  é limitado por  $O(q(n))$ , onde  $n = |V(G)|$ . Quando as cliques não forem maximais, denotaremos por PNC.

Grafos cordais são um exemplo de classe de grafo que está contida em  $\text{POLY-COLOR}(k)$ . Da mesma forma, a sigla PNMC também pode ser usada para esta mesma classe, uma vez que o número de cliques maximais de um grafo cordal é no máximo  $n$ .

O objetivo desta seção é provar que os seguintes problemas sanduíche com condições de contorno são solucionáveis em tempo polinomial:

(POLY-COLOR( $k$ ), ( $k, \ell$ ), PNMC)-SP

*Instância:* Um grafo  $G^1 = (V, E^1)$  pertencente a POLY-COLOR( $k$ ) e um grafo  $G^2 = (V, E^2)$  pertencente a PNMC tal que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e que seja um grafo- $(k, \ell)$ ?

(\*, (2, 1), PNMC)-SP

*Instância:* Grafos  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tal que  $G^2$  pertence a PNMC e tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$  e que seja um grafo-(2, 1)?

**Teorema 3.3.** [20] Para  $k, \ell$  fixos, (POLY-COLOR( $k$ ), ( $k, \ell$ ), PNMC)-SP é solucionável em tempo polinomial.

A prova do Teorema 3.3 é baseada no Algoritmo 1

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo para solucionar POLY-COLOR( $k$ ), ( $k, \ell$ ), PNMC)-SP

---

```

1 início
2   Seja  $C$  a coleção de cliques maximais de  $G^2$ ;
3   para cada subcoleção  $\{C_1, C_2, \dots, C_\ell\}$  de  $C$  faça
4     Seja  $C' = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \dots \cup V(C_\ell)$ ;
5     se  $G^1 \setminus C'$  é  $k$ -colorível então
6       retorna  $G = (V, E^1 \cup E(C^1) \cup \dots \cup E(C_\ell))$ 
7     fim
8   retorna Não existe  $G$  sanduíche  $(k, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ ;
9 fim
10 fim

```

---

*Demonstração.* A prova é baseada no Algoritmo 1. Primeiramente, mostramos que o algoritmo roda em tempo polinomial. Como  $G^2$  tem um número polinomial de cliques maximais, podemos listá-las em tempo polinomial utilizando, por exemplo, o algoritmo em [66]. Em seguida, como  $\ell$  é fixo, todas as subcoleções possíveis com  $\ell$  cliques maximais também podem ser listadas em tempo polinomial. Para cada uma delas, computamos  $C'$  e  $G^1 \setminus C'$  como mostrado no algoritmo. Note que  $G^1 \setminus C'$  está em POLY-COLOR( $k$ ), dado que ele é um subgrafo induzido de  $G^1$ . Portanto, podemos testar se  $G^1 \setminus C'$  é  $k$ -colorível em tempo polinomial (lembre-se que  $k$  também é fixo).

Agora, assumamos que o Algoritmo 1 retorne uma resposta positiva para o problema. Então existe uma subcoleção  $\{C_1, \dots, C_\ell\}$  com exatamente  $\ell$  cliques maximais de  $G^2$

tal que  $G^1 \setminus C'$ , onde  $C' = \cup_{i=1}^{\ell} V(C_i)$ , é  $k$ -colorível. Assim, é claro que o grafo  $G = (V, E_1 \cup E(C_1) \cup \dots \cup E(C_{\ell}))$  retornado pelo algoritmo é um grafo sanduíche e também um grafo- $(k, \ell)$ : uma partição- $(k, \ell)$  de  $G$  é formada por  $k$  conjuntos independentes de  $G^1 \setminus C'$  mais as  $\ell$  cliques  $C_1, C_2 \setminus C_1, C_3 \setminus (C_1 \cup C_2), \dots, C_{\ell} \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{\ell-1})$ . Observamos que, de acordo com a definição de uma partição- $(k, \ell)$ , algumas partes podem ser vazias.

Finalmente, assumamos que o Algoritmo 1 retorne uma resposta negativa para o problema. Assumamos também por contradição que existe um grafo sanduíche  $(k, \ell)$  com uma partição- $(k, \ell)$  formada por conjuntos independentes  $S_1, \dots, S_k$  e cliques  $Q_1, \dots, Q_k$ . Como  $G^2$  é um grafo sanduíche, toda  $Q_i$  é uma clique de  $G^2$  (não necessariamente maximal). Seja  $Q'_i$  uma clique maximal de  $G^2$  tal que  $Q_i \subseteq Q'_i, i = 1 \dots \ell$ . Se  $Q'_i = Q'_j$  para algum  $i \neq j$ , descarte uma delas e repita este processo até que não existam duplicatas. Se sobrarem menos de  $\ell$  cliques maximais, complete a subcoleção de cliques maximais atual de modo que ela contenha  $\ell$  elementos distintos  $C_1, C_2, \dots, C_{\ell}$  (note que o número de cliques maximais de  $G^2$  é assumido ser pelo menos  $\ell$ ). Então é claro que o algoritmo considera a subcoleção  $\{C_1, C_2, \dots, C_{\ell}\}$ . Seja  $C' = \cup_{i=1}^{\ell} V(C_i)$ . Como, por construção,  $C'$  contém  $Q = \cup_{i=1}^{\ell} V(Q_i)$ , claramente  $G^1 \setminus C'$  é  $k$ -colorível, já que é um subgrafo do subgrafo  $k$ -colorível  $G \setminus Q$ . Isto significa que o Algoritmo 1 retorna uma resposta positiva, uma contradição. □

Observamos que o Teorema 3.3 é um modelo que nos permite estabelecer diversos corolários, como afirmamos a seguir.

**Corolário 3.4.** (CORDAL,  $(k, \ell)$ ), CORDAL)-SP é solucionável em tempo polinomial.

**Corolário 3.5.** (COGRAFO,  $(k, \ell)$ , GRAU LIMITADO  $\Delta$ )-SP é solucionável em tempo polinomial.

**Corolário 3.6.** (COMPARABILIDADE,  $(k, \ell)$ , LIVRE DE TRIÂNGULOS)-SP é solucionável em tempo polinomial.

O Teorema 3.7 apresenta uma diferença sutil com relação ao Teorema 3.3 uma vez que não é necessário restringir  $G^1$  dado que  $k = 2$ .

**Teorema 3.7.** [22] Existe um algoritmo polinomial para  $(*, (2, 1), \text{PNMC})$ -SP.

A prova do Teorema 3.7 é baseada no Algoritmo 2.

A corretude do Algoritmo 2 segue da demonstração feita para o Algoritmo 1, afinal, podemos verificar em tempo linear se um grafo é bipartido.

---

**Algoritmo 2:** Algoritmo para solucionar  $(*,(2,1), \text{PNMC})\text{-SP}$ 

---

```
1 Seja  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$  a coleção de cliques maximais de  $G^2$ ;  
2 para cada  $C_i \in \mathcal{C}$  faça  
3   | se  $G^1 \setminus V(C_i)$  é bipartido então  
4   |   | retorna  $G = (V, E^1 \cup E(C_i))$   
5   | fim  
6 fim  
7 retorna Não existe grafo- $(2, 1)$  sanduíche  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ 
```

---

### 3.3 Problema Sanduíche para Grafos Cordais- $(2, 1)$ com Condições de Contorno

Nesta seção mostraremos que  $(*, \text{CORDAL-}(2, 1), \text{PNC})\text{-SP}$  é solucionável em tempo polinomial, onde PNC significa que o grafo pertence a uma classe infinita de grafos com número polinomial de cliques (maximais e não maximais), contendo, por exemplo, os grafos com grau limitado, grafos livres de algum grafo completo e grafos planares. Começamos, portanto, avaliando a estrutura de um grafo cordal- $(2, 1)$ .

**Observação 3.8.** *Um grafo cordal  $G$  é bipartido se e somente se  $G$  é uma floresta. Portanto, um grafo cordal- $(2, 1)$  tem seu conjunto de vértices particionado em uma floresta  $\mathcal{F}$  e uma clique  $K$ .*

Dado um grafo  $G$  cordal- $(2, 1)$  com partição  $(\mathcal{F}, K)$ , dizemos que uma *aresta transversal* é uma aresta incidente a um vértice na floresta e a outro vértice na clique.

Dizemos que uma *A-aresta* é uma aresta transversal que pertence a  $E^2 \setminus E^1$  enquanto que, a uma aresta transversal que pertence a  $E^1$ , atribuímos o nome de *B-aresta*.

Denotaremos por  $T_i$  e  $N_K(T_i)$  a  $i$ -ésima árvore de  $\mathcal{F}$  e a vizinhança dos vértices de  $T_i$  na clique  $K$ , respectivamente.

Como  $G^2$  tem um número polinomial de cliques, seja  $\mathcal{K}$  a coleção de todas estas cliques.

Para solucionar o problema, apresentaremos a seguinte “estratégia de solução” : identificamos cada clique de  $G^2$ . Para cada clique  $K^i \in \mathcal{K}$ , removemo-la de  $G^1$  e checamos se  $V \setminus K^i$  induz uma floresta  $\mathcal{F}$  em  $G^1 \setminus K^i$ . Se a resposta for NÃO, passamos para a próxima clique em  $\mathcal{K}$ . Se a resposta for SIM, temos que analisar se o grafo resultante composto por  $K$  e  $\mathcal{F}$  pode ser feito cordal através do procedimento “limpador de para-brisa”, descrito a seguir. Se a resposta for NÃO para cada escolha de  $K^i \in \mathcal{K}$ , concluímos que não existe grafo sanduíche para  $(G^1, G^2)$ .

Esta “estratégia de solução” conduz ao Algoritmo 3.

---

**Algoritmo 3:** Algoritmo para solucionar  $(*, \text{CORDAL-}(2,1), \text{PNC})\text{-SP}$ 

---

```
1 início
2    $G \leftarrow G^1$ ;
3   se  $G^1$  é cordal-(2,1) então
4     | retorna  $G = G^1$ 
5   senão
6     | se  $G^2$  é cordal-(2,1) então
7       | retorna  $G = G^2$ 
8     | senão
9       | Enumere todas as cliques  $K^1, K^2, \dots, K^j$  de  $G^2$ ;
10      | para cada clique  $K^i, 1 \leq i \leq j$  faça
11        |    $H = G^1[V \setminus K^i]$ ;
12        |   se  $H$  é uma floresta  $\mathcal{F}$  então
13          |     para cada componente conexo  $T_o$  de  $\mathcal{F}$  faça
14            |       para cada par  $(e_k, e_l)$  de B-arestas faça
15              |         Seja  $C_{k,l} = c_1 c_2 a_1 \dots a_p c_1$  o ciclo formado por  $(e_k, e_l)$ ,
16                |         onde  $c_1, c_2 \in K^i$  e  $a_j \in T_o$ ;
17                |         Procedimento limpador de para-brisa  $(C_{k,l})$ ;
18              |       fim
19            |     fim
20          |   se o procedimento limpador de para-brisa retornou  $E$  então
21            |      $i \leftarrow j + 1$ 
22          |   senão
23            |      $i \leftarrow i + 1$ 
24          |   fim
25        |   fim
26      |   se o procedimento limpador de para-brisa retornou  $E$  então
27        |     se  $G=(V,E)$  é cordal então
28          |       | retorna  $G = (V, E)$ ;
29        |     | senão
30          |       | retorna Não existe grafo sanduíche cordal-(2,1) para  $(G^1, G^2)$ ;
31        |     | fim
32      |   | senão
33        |     | retorna Não existe grafo sanduíche cordal-(2,1) para  $(G^1, G^2)$ ;
34      |   | fim
35    |   fim
36  | fim
37 fim
```

---

### 3.3.1 Procedimento limpador de para-brisa

Seja  $C_{kl} = c_1c_2a_1 \dots a_p c_1$  um ciclo formado pelas  $B$ -arestas  $(e_k, e_l)$ , onde  $c_1, c_2 \in K$  e  $a_j \in T_o$ . O procedimento tem o objetivo de tornar o ciclo  $C_{kl}$  cordal analisando as vizinhanças de  $c_1$  e  $c_2$ . Antes de apresentar o procedimento, vamos enunciar Lemas e uma definição que o esclarecem.

**Definição 3.9.** Chamaremos de ciclo oco de  $c_i$  um ciclo sem cordas incidentes a  $c_i$  em  $G^2$  ( $A$ -arestas) de tamanho pelo menos 4, formado por arestas incidentes a  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Observe os exemplos da Figura 3.1.

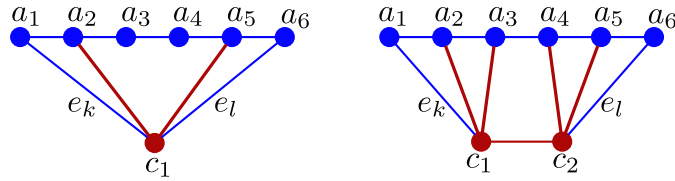


Figura 3.1: À esquerda,  $c_1a_2a_3a_4a_5c_1$  é um ciclo oco de  $c_1$ . À direita, dois ciclos ocas de  $c_1$  e  $c_2$  com interseção:  $c_1a_1a_2a_3a_4c_2c_1$  é ciclo oco de  $c_2$ ,  $c_1a_3a_4a_5a_6c_2c_1$  é ciclo oco de  $c_1$ . Note que o buraco  $c_1c_2a_4a_3c_1$  está na interseção dos ciclos ocas de  $c_1$  e  $c_2$ .

**Lema 3.10.** Se  $c_1 = c_2$ , então existe uma única maneira de tornar o ciclo  $C_{kl}$  cordal, a saber, adicionar todas as  $A$ -arestas com um extremo em  $c_1$  e os outros em  $a_j \in T_o \cap C_{kl}$ .

*Demonstração.* De fato, como não podemos adicionar arestas com dois extremos em  $T_o$  com a finalidade de tornar  $C_{kl}$  cordal, caso contrário  $\mathcal{F}$  deixa de ser uma floresta, a única forma de tornar  $C_{kl}$  cordal é adicionando todas as arestas incidentes a  $c_1$  e aos demais vértices do ciclo (todos em  $T_o$ ). Claramente, se uma dessas arestas for proibida, ou seja, não for aresta de  $G^2$ , então teremos um ciclo oco de  $c_1$ . Ou seja, o ciclo não pode ser tornado cordal com esta partição  $(\mathcal{F}, K)$ . □

**Lema 3.11.** Se a interseção dos ciclos ocas de  $c_1$  e  $c_2$  em  $G_2[C_{kl}]$  é um buraco,  $c_1 \neq c_2$ , então o ciclo  $C_{kl}$  não pode ser tornado cordal.

*Demonstração.* De fato, como não podemos inserir arestas com dois extremos na árvore  $T_o$ , ou seja, com dois extremos  $a_j$ , a única maneira de tornar  $C_{kl}$  cordal é adicionando arestas com um extremo em  $c_1$  ou  $c_2$ . Como a interseção dos ciclos ocas de  $c_1$  e  $c_2$  é também um buraco, não temos arestas em  $G^2$  para cobrir este buraco. Consequentemente, o ciclo  $C_{kl}$  não pode ser tornado cordal. Observe a Figura 3.2. □

Por questão de simplicidade, vamos chamar de *ciclos ocas intersectantes* apenas aqueles cuja a interseção é um buraco.

Diremos que um ciclo oco de  $c_i$  está *coberto*, se  $c_j$  é adjacente a todos os vértices do ciclo oco de  $c_i$ ,  $i \neq j, i, j = 1, 2$ .

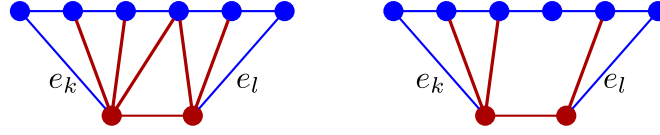


Figura 3.2: À esquerda um ciclo cordal onde a interseção dos ciclos ocos de  $c_1$  e  $c_2$  em  $G_2[C_{kl}]$  não é um buraco e à direita um ciclo onde a interseção dos ciclos ocos de  $c_1$  e  $c_2$  é um buraco.

**Lema 3.12.** *Se  $C_{kl}$  pode ser tornado cordal, então  $N(c_1) \cap G_2[C_{kl}]$  cobre os ciclos ocos de  $c_2$  e  $N(c_2) \cap G_2[C_{kl}]$  cobre os ciclos ocos de  $c_1$ .*

*Demonstração.* Claramente, se um ciclo oco de  $c_1$  não é coberto por  $c_2$ , o ciclo  $C_{kl}$  terá um buraco e, portanto, não poderá ser tornado cordal.  $\square$

**Lema 3.13.** *Se  $c_1$  tem vizinhanças  $N_1, N_2$  em  $G_2[C_{kl}]$  separadas por um ciclo oco de  $c_1$ , então não podemos inserir arestas incidentes a  $c_1, N_1$  e  $N_2$  simultaneamente.*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que possamos inserir uma aresta  $c_1n_i$  e outra  $c_1m_j$ , onde  $n_i \in N_1$  e  $m_j \in N_2$  e, sem perda de generalidade, suponha que a aresta  $c_1n_i$  é a última antes do ciclo de  $c_1$  e a aresta  $c_1m_j$  é a primeira após este ciclo oco. Note que, mesmo que  $c_2$  cubra este ciclo oco, ele não deixa de existir, pois, como visto no Lema 3.10, a única maneira de eliminá-lo seria inserindo arestas de  $G^2$  incidentes a  $c_1$  e aos vértices deste ciclo oco, que não existem o que configura uma contradição.  $\square$

Arestas incidentes a  $c_i$  que cubrem um ciclo oco de  $c_j, i \neq j, i, j = 1, 2$  são chamadas *A-arestas obrigatórias (Aao)*.

Se o conjunto de *A-arestas obrigatórias* de  $c_i$  está determinado, então, toda *A-aresta* incidente a  $c_i$  após um ciclo oco de  $c_i$  é dita *A-aresta proibida (Aap)*,  $i = 1, 2$ .

Chamaremos de *zona cinza (zc)* o conjunto de vértices de cardinalidade pelo menos 2 de  $C_{kl}$  que é a interseção das vizinhanças de  $c_1, c_2$  em  $G^2$ . As arestas incidentes a vértices em  $zc$  são chamadas *A-arestas opcionais*.

Observe o exemplo da Figura 3.3.

**Fato 3.14.** *Se para  $C_{kl}$  uma *A-aresta*  $c_ia_j$  é obrigatória e para  $C_{pq}$  a mesma aresta  $c_ia_j$  é proibida, então não podemos tornar esses ciclos cordais.*

**Fato 3.15.** *Se para  $C_{kl}$  uma *A-aresta*  $c_ia_j$  é opcional e para  $C_{kq}$  a mesma aresta  $c_ia_j$  é obrigatória (resp. proibida), então  $c_ia_j$  deve ser adicionada ao conjunto de arestas obrigatórias (resp. proibidas) de  $c_i$ .*

**Lema 3.16.** *Após a análise de todos os ciclos formados por *B-arestas*  $e_1e_p$ , se o conjunto de *A-arestas opcionais* não for vazio, então todas as *A-arestas opcionais* devem ser adicionadas ao ciclo  $C_{kl}$ , tornando o conjunto de *A-arestas opcionais* vazio.*

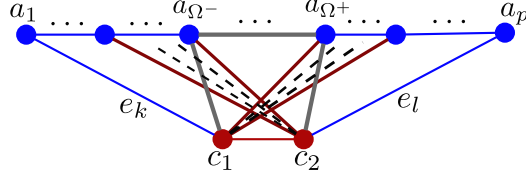


Figura 3.3: A zona cinza compreende todas as arestas da região delimitada pelas arestas cinzas.  $a_{\Omega^+}$  e  $a_{\Omega^-}$  são os últimos vértices de  $T_o[C_{kl}]$  adjacentes a  $c_1$  e  $c_2$  antes de um vértice não adjacente, respectivamente. Para que haja solução cordal,  $c_1$  deve ser adjacente a todos os vértices  $a_j$ ,  $1 \leq j \leq \Omega^+$  e  $c_2$  deve ser adjacente a todos os vértices  $a_r$ ,  $\Omega^- \leq r \leq p$ , pois a vizinhança de  $c_1$  precisa cobrir os ciclos ocios de  $c_2$  e vice-versa.

*Demonstração.* De fato, não há impedimento para adicioná-las uma vez que todas as arestas proibidas já foram determinadas. □

**Lema 3.17.** *Seja  $(G^1, G^2)$  uma instância SIM para  $(*, \text{CORDAL}-(2, 1), \text{PNC})$ . Após a análise de todos os ciclos formados por B-arestas  $(e_k, e_l)$ , se o conjunto de A-arestas opcionais for vazio, então o ciclo  $C_{kl}$  é cordal.*

*Demonstração.* Vamos analisar dois casos:  $c_1 = c_2$  e  $c_1 \neq c_2$ .

1.  $c_1 = c_2$

Neste caso, como visto no Lema 3.10,  $c_1$  deve ser adjacente em  $G^2$  a todos os vértices  $a_j$  de  $C_{kl}$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Assim, podemos apresentar um esquema de eliminação perfeita para  $C_{kl}$ , considerando que os vértices de  $T_o$  que pertencem a  $C_{kl}$  estão ordenados da seguinte forma:  $a_1$  e  $a_p$  são os vértices adjacentes a  $c_1$  em  $G^1$ ;  $a_2$  é o vértice adjacente a  $a_1$  em  $G^2$ ;  $a_3$  é adjacente a  $a_2$  em  $G^2$  e assim por diante até que  $a_{p-1}$  é adjacente a  $a_p$  em  $G^2$ . Primeiramente podemos eliminar os vértices  $a_1$  e  $a_p$ , que são simpliciais. Em seguida, os vértices  $a_2$  e  $a_{p-1}$  que tornaram-se simpliciais. Repetimos este procedimento até que reste o vértice  $c_1$ . Logo,  $C_{lp}$  é cordal.

2.  $c_1 \neq c_2$

Se não existir ciclo oco de  $c_1$  e de  $c_2$ , então  $c_1$  e  $c_2$  são adjacentes a todos os vértices  $a_j$  de  $C_{kl}$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Neste caso, podemos seguir o mesmo procedimento descrito no item 1 exceto pelo fato de que no fim temos  $c_1$  e  $c_2$  para eliminar.

Suponha, sem perda de generalidade, que exista ciclo oco de  $c_1$ . Pelo Lema 3.12, temos que  $c_2$  cobre o ciclo oco de  $c_1$ . Pelo Lema 3.13, após o ciclo oco de  $c_1$  não existem mais cordas de  $C_{kl}$  incidentes a  $c_1$ . Logo, seja  $a_{\Omega^+}$  o último vizinho de  $c_1$  em  $G^2[C_{kl}]$  antes do ciclo oco de  $c_1$  e considere que  $c_1$  é adjacente a  $a_1$  em  $G^1$  e  $c_2$  é adjacente a  $a_p$  em  $G^1$  e a ordem dos demais vértices de  $T_o$  no ciclo é



a mesma descrita no item 1. Além disso, considere que não existe zona cinza em  $C_{kl}$  (consideraremos esta hipótese a seguir). Neste caso, o esquema de eliminação perfeita de  $C_{kl}$  segue o mesmo procedimento descrito no item 1 sendo iniciado pelos vértices  $a_1$  e  $a_p$ , que são simpliciais, até alcançarmos o vértice  $a_{\Omega}^+$  que é adjacente a  $c_1$  e  $c_2$ . Neste caso, ou bem  $a_{\Omega}^+$  não tem mais vizinhos em  $T_o \cap C_{kl}$  ou tem um vizinho que é adjacente a  $c_i$ , onde  $i = 1$  ou  $2$  (ou exclusivo). Neste caso, eliminamos  $c_i$  que é simplicial e em seguida voltamos a eliminar os vértices de  $T_o \cap C_{kl}$  a partir de  $a_{\Omega}^+$ , que tornou-se simplicial. O último vértice a ser removido é  $c_j, i \neq j, j = 1$  ou  $2$  (ou exclusivo).

Agora, consideremos que temos uma zona cinza em  $C_{kl}$ . Note que eliminamos os vértices como descrito anteriormente, começando por  $a_1$  e  $a_p$  até alcançarmos um vértice  $a_q$  na zona cinza. Note que este vértice é adjacente a  $c_1$  e  $c_2$  e seu vizinho  $a_{q+1}$  em  $T_o \cap C_{kl}$  ou bem é adjacente a outro vértice vizinho de  $c_1$  e  $c_2$ , o que possibilita a remoção de  $a_q$ , ou é adjacente a um vértice vizinho de  $c_i$ , onde  $i = 1$  ou  $2$  (ou exclusivo). Neste caso, removemos  $c_i$ , que é simplicial e continuamos a eliminar os vértices de  $T_o \cap C_{kl}$  a partir de  $a_q$  que será simplicial. O último vértice a ser eliminado é  $c_j, i \neq j, j = 1$  ou  $2$  (ou exclusivo).

Logo, o ciclo  $C_{kl}$  é cordal.

□

Vamos considerar que os vértices de  $T_o \cap C_{kl}$  estão ordenados como na prova do Lema 3.17, i.e., em  $G^1$ ,  $c_1$  é adjacente a  $a_1$  que é adjacente a  $a_2$  que é adjacente a  $a_3$  e assim sucessivamente até que  $a_{p-1}$  é adjacente a  $a_p$  que é adjacente a  $c_2$ . Observe a Figura 3.4.

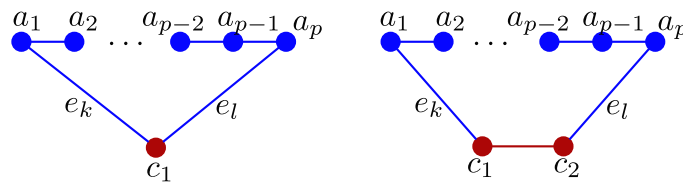


Figura 3.4: Exemplo de ciclos  $C_{kl}$  com vértices de  $T_o$  ordenados: à esquerda um exemplo onde  $c_1 = c_2$  e, à direita,  $c_1 \neq c_2$ .

O procedimento *limpador de para-brisa* analisa se não há ciclos ociosos intersectantes de  $c_1$  e  $c_2$ , uma vez que, nestes casos, não haverá solução cordal, bem como se a vizinhança de  $c_1$  cobre os ciclos ociosos de  $c_2$  e vice-versa. Além disso, arestas duvidosas, i.e, arestas da zona cinza, são adicionadas apenas após a análise de todos os ciclos de um componente conexo. Sendo assim, uma vez que uma aresta é adicionada é porque ela não é proibida. Considere  $a_{\Omega^+}$  e  $a_{\Omega^-}$  os últimos vizinhos de  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente, antes de um não vizinho em  $G^2[C_{kl}]$ ,  $1 \leq \Omega \leq p$ .

Por questão de simplicidade, considere  $N_{T_o[C_{kl}]}(c_i) = N_i$ ,  $i = 1, 2$ .

O procedimento *limpador de para-brisa* pode ser formulado da seguinte forma.

### **Procedimento limpador de para-brisa**

Se  $c_1 = c_2$ , então

Se  $c_1$  é adjacente a  $\{a_2, \dots, a_{p-1}\}$ , então

$Aao \leftarrow \{c_1 a_j \mid j = \{2, \dots, p-1\}\}$

Adicione todas as  $A$ -arestas  $c_1 a_j$ ,  $j = 2, \dots, p-1$ .

Senão

Retorna “Passe para a próxima clique  $K^{i+1}$ ”

Senão

Se  $c_2$  não é adjacente a  $\{a_{\Omega^+}, a_{\Omega^++}, \dots, a_{p-1}\}$ , então

Retorna “Passe para a próxima clique  $K^{i+1}$ ”

Senão

Se  $c_1$  não é adjacente a  $\{a_{\Omega^-}, a_{\Omega^-+}, \dots, a_2\}$ , então

Retorna “Passe para a próxima clique  $K^{i+1}$ ”

Senão

$zc \leftarrow zc \cup \{c_r \varepsilon \mid \varepsilon \in \{a_{\Omega^-}, a_{\Omega^-+}, \dots, a_{\Omega^-+}, a_{\Omega^+}\} \cap (N_1 \cap N_2), r = 1, 2\}$

$Aap \leftarrow Aap \cup \{c_1 a_\lambda, c_2 a_\gamma \mid 1 \leq \gamma < \Omega^-, \Omega^+ < \lambda \leq p\}$

Se  $Aap \cap \{c_1 a_\alpha, c_2 a_\beta \mid \Omega^+ \leq \beta \leq p, 2 \leq \alpha \leq \Omega^-\} = \emptyset$ , então

Se  $zc \cap \{c_1 a_\alpha, c_2 a_\beta \mid \Omega^+ \leq \beta \leq p, 2 \leq \alpha \leq \Omega^-\} = \emptyset$ , então

$Aao \leftarrow Aao \cup \{c_1 a_\alpha, c_2 a_\beta \mid \Omega^+ \leq \beta \leq p, 2 \leq \alpha \leq \Omega^-\}$

$E \leftarrow E \cup Aao$

Senão

$Aao \leftarrow Aao \cup \{\{c_1 a_\alpha, c_2 a_\beta \mid \Omega^+ \leq \beta \leq p, 2 \leq \alpha \leq \Omega^-\} \setminus zc\}$

$E \leftarrow E \cup Aao$

Senão

Retorna “Passe para a próxima clique  $K^{i+1}$ ”

Se existir outro ciclo, então

Retorna “Passe para o próximo par de  $B$ -arestas”

Senão

$E \leftarrow E \cup zc$

Retorna  $E$

### **Fim do Procedimento limpador de para-brisa**

Observe as Figuras 3.5 e 3.6.

Seja  $G^1$  o grafo obtido a partir de  $G$  após a adição das arestas de  $K^i \in K$ , i.e., sem adição de  $A$ -arestas.

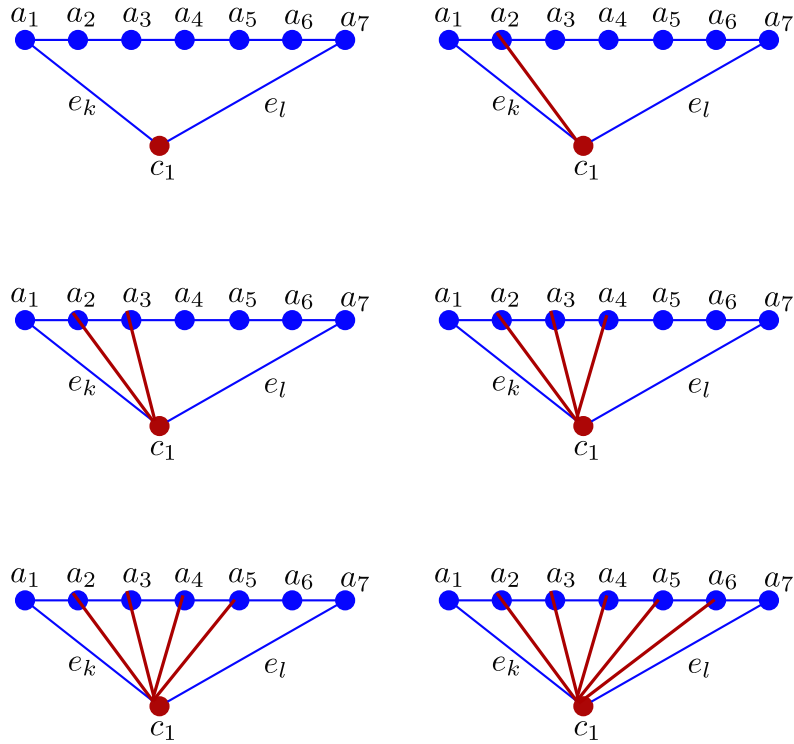


Figura 3.5: Animação da cordalização do ciclo  $C_{kl}$  através do procedimento limpador de para-brisa. Considere as figuras de cima para baixo da esquerda para a direita. A primeira apresenta um ciclo  $C_{kl}$  onde  $c_1 = c_2$  a ser cordalizado. A segunda mostra a inserção da  $A$ -aresta  $c_1a_2$ ; a terceira, da aresta  $c_1a_3$  e assim sucessivamente até que a aresta  $c_1a_5$  seja inserida. Note que esta é a única forma de cordalizar  $C_{kl}$ .

**Lema 3.18.** *A adição de  $A$ -arestas com o intuito de tornar  $G$  cordal não cria um novo ciclo, i.e., cada  $A$ -aresta adicionada é uma corda de um ciclo em  $G^1$ .*

*Demonstração.* Por favor, acompanhe a Figura 3.7. Suponha por contradição que tenhamos criado um novo ciclo  $C$  formado por uma  $A$ -aresta,  $a_1 = (x_1, x_2)$ , que adicionamos a  $G$  no passo procedimento *limpador de para-brisa*. Se tal aresta foi adicionada, então havia um par de  $B$ -arestas,  $b_1 = (y_1, y_2), b_2 = (y_3, y_4)$ , em  $G$  (Observe Figura 3.7(a)). Então,  $a_1$  é uma corda para um ciclo de  $G^1$ . Suponha agora que temos outra aresta transversal  $d_1 = (z_1, z_2)$  que forma  $C$  com  $a_1$ . Claramente, se  $d_1$  for uma  $B$ -aresta e forma um ciclo com  $a_1$ , então temos um caminho  $P_1$  que vai de  $z_1$  até  $x_1$  e um caminho  $P_2$  que vai de  $x_1$  até  $y_1$  (Observe a Figura 3.7(b)). Assim, temos um ciclo de  $G^1$ ,  $C' = P_1 \cup P_2 \cup y_2, z_2, z_1$  no qual  $a_1$  é uma corda. Entretanto, se  $d_1$  for uma  $A$ -aresta, então  $d_1$  foi adicionada entre um par de  $B$ -arestas. Se este par de arestas for  $(b_1, b_2)$ , então  $a_1$  e  $d_1$  são arestas de um mesmo ciclo de  $G^1$ . Suponha, portanto, que exista pelo menos mais uma  $B$ -aresta,  $b_3 = (y_5, y_6)$  tal que  $d_1$  é uma corda do ciclo de  $G^1$  que contém  $b_3$ . Neste caso, temos caminhos  $P_1$  que vai de  $y_5$  a  $z_1$ ,  $P_2$  que liga  $z_1$  a  $x_1$  e  $P_3$  que vai de  $x_1$  a  $y_1$ . Desta forma

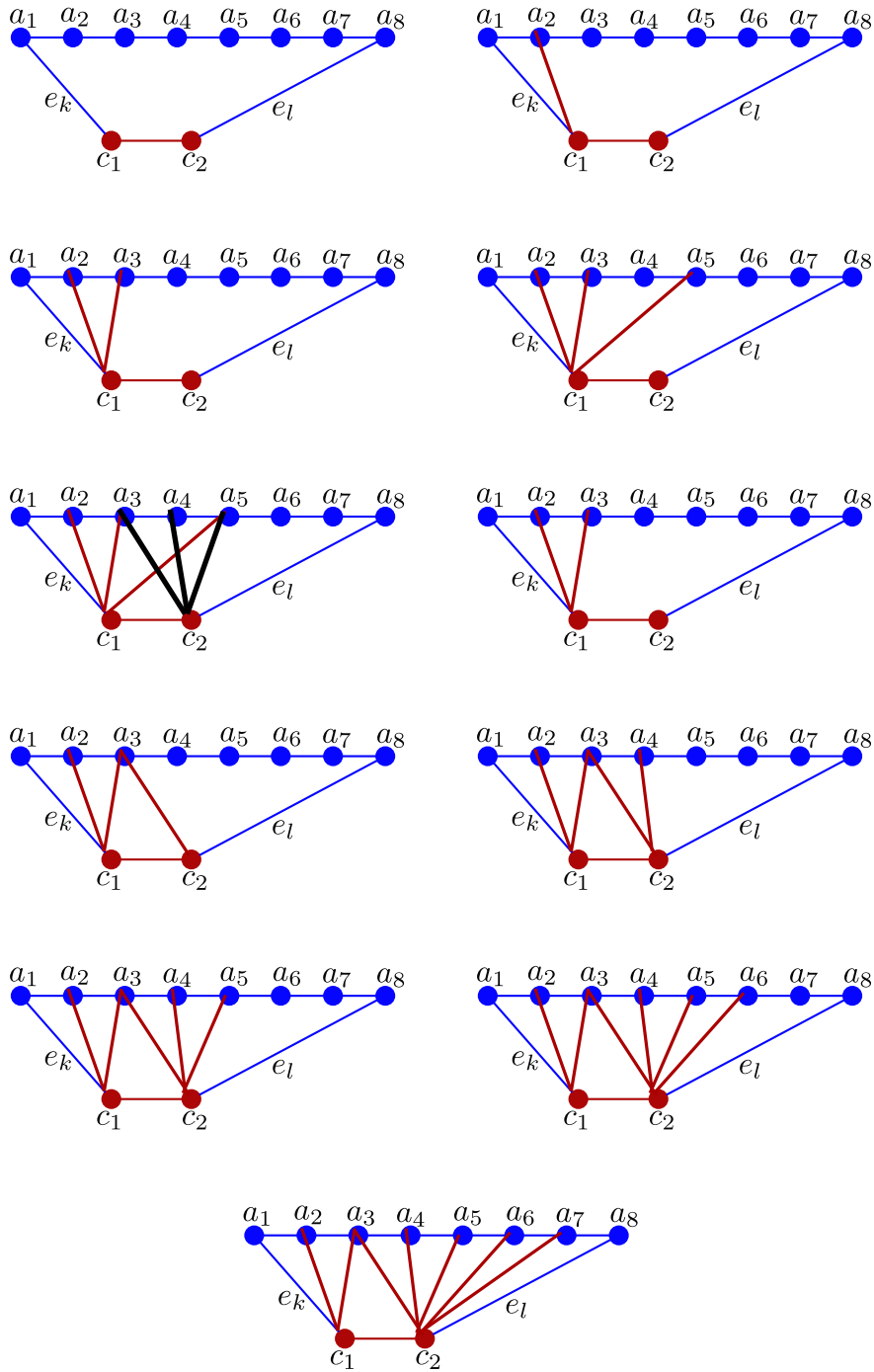


Figura 3.6: Animação da cordalização do ciclo  $C_{kl}$  através do procedimento limpador de para-brisa. Considere as figuras de cima para baixo da esquerda para a direita. A primeira apresenta um ciclo  $C_{kl}$  onde  $c_1 \neq c_2$  a ser cordalizado. A segunda mostra a inserção da  $A$ -aresta  $c_1a_2$ ; a terceira, da aresta  $c_1a_3$ . Observe que a aresta  $c_1a_4 \notin E^2$  e  $c_1a_5 \in E^2$ . Logo  $c_1a_3a_4a_5c_1$  é um ciclo oco de  $c_1$ . Como  $c_2$  cobre o ciclo oco de  $c_1$ , podemos, na figura 6, remover a aresta  $c_1a_5$  e inserir as  $A$ -arestas  $c_2a_3$ , como na figura 7;  $c_2a_4$ , como na figura 8 e assim sucessivamente até inserirmos a aresta  $c_2a_7$ , como na figura 11.

$C'' = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup y_2, y_6, y_5$  contém  $a_1$  e  $d_1$  como cordas, o que caracteriza um novo absurdo (observe a Figura 3.7). Logo, não criamos novos ciclos adicionando  $A$ -arestas a  $G$ .

□

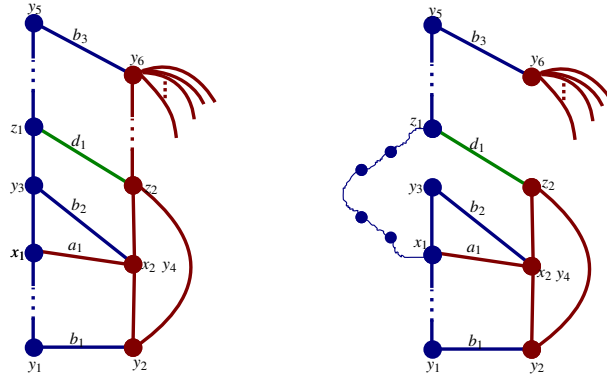


Figura 3.7: Ilustração da inexistência de *novos ciclos* após a adição de  $A$ -arestas.

Portanto, como ao adicionarmos  $A$ -arestas a  $G^1$  não criamos novos ciclos, pelo Lema 3.18, a cordalidade de  $G$  depende apenas da possibilidade de torná-lo cordal sem utilizar arestas de  $E^2$  com dois extremos na floresta.

**Lema 3.19.** *Se  $G = (V, E)$  é cordal então todos os ciclos de  $G^1$  são cordais após o procedimento limpador de para-brisa.*

*Demonstração.* Segue do fato de que a propriedade “ser cordal” é hereditária. Consequentemente, se  $G$  é cordal, todo subgrafo induzido de  $G$  é também cordal, em particular os ciclos de  $G^1$ . □

**Lema 3.20.** *Se todos os ciclos de  $G^1$  são cordais após o procedimento limpador de para-brisa, então  $G = (V, E)$  é cordal.*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que  $G$  não seja cordal embora todo ciclo de  $G^1$  seja cordal. Neste caso,  $G$  tem um ciclo  $C_1$  sem corda. Como  $\mathcal{F}$  é floresta e  $K$  é clique, todo ciclo sem cordas de  $G$  possui duas arestas transversais. Além disso, é importante observar que não existe ciclo sem cordas em  $G$  induzido por vértices de árvores distintas de  $\mathcal{F}$  (observar Figura 3.8). Como o procedimento *limpador de para brisas* verifica se é possível tornar cordal todo ciclo de  $G^1$  e retornou uma resposta positiva,  $C^1$  é um ciclo formado pela adição de  $A$ -arestas, o que configura um absurdo, de acordo com o Lema 3.18. □

**Lema 3.21.** *Existe um grafo sanduíche  $G$  cordal-(2, 1) para o par  $(G^1, G^2)$  se e somente se  $G$  pode ser obtido através da “estratégia de solução”.*

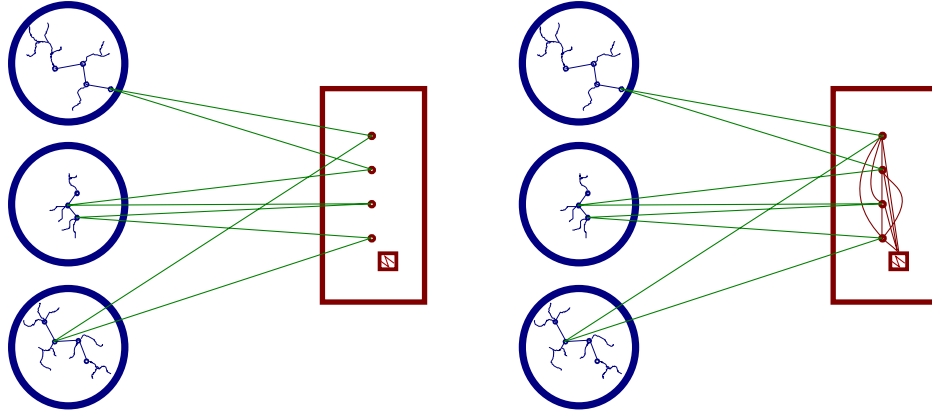


Figura 3.8: Figura que ilustra a inexistência de ciclo induzido por vértices de árvores distintas de  $\mathcal{F}$ .

*Demonstração.* A suficiência do Lema 3.9 é clara, uma vez que obteremos um grafo cordal (Lemas 3.19 e 3.20) cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma floresta e uma clique que é um grafo sanduíche para  $(G^1, G^2)$ .

Para provar a necessidade, suponha que exista um grafo sanduíche  $G$  cordal- $(2, 1)$  para  $G^1, G^2$ . Neste caso,  $G$  pode ser particionado em uma floresta e uma clique. Certamente, todas as arestas dessa clique estão em  $G^2$ .

**Afirmção 3.22.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo sanduíche cordal- $(2, 1)$  para o par  $(G^1, G^2)$ . Se existir uma aresta  $e = (x, y)$  de  $(E^2 \setminus E^1)$  em uma árvore de  $G$ , então  $e$  pode ser removida sem arruinar a cordalidade de  $G$ .*

*Demonstração.* De fato, suponha por contradição que tenhamos um ciclo induzido de tamanho no mínimo 4 obtido após a remoção de  $e$ . Note que, antes da remoção, o ciclo estava cordalizado. Consequentemente,  $x, y$  possuíam dois vizinhos comuns, por exemplo,  $z, w$  (observe a Figura 3.9). Devido a isso,  $z, w$  devem pertencer a clique. Portanto, temos que  $(z, w) \in E$  e, por conseguinte, o ciclo ainda encontra-se cordalizado, contradizendo nossa suposição.  $\square$

Então, sem perda de generalidade, podemos supor que todas as arestas da floresta estão em  $E^1$ .

Logo,  $G$  pode ser obtido utilizando a “estratégia de solução”.

$\square$

Portanto, como a adição de  $A$ -arestas não cria um novo ciclo, a cordalidade de  $G$  depende somente da possibilidade de torná-lo cordal utilizando o procedimento *limpador de para-brisa*.

**Lema 3.23.** *Os ciclo de  $G^1$  podem ser tornados cordais se e somente se o procedimento limpador de para-brisa retorna cada ciclo de  $G^1$  cordalizado.*

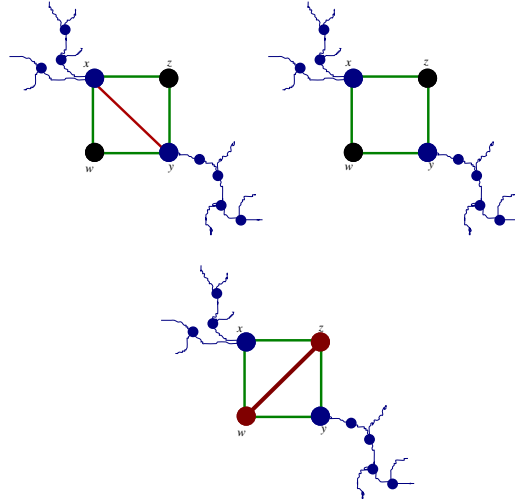


Figura 3.9: Exemplo da remoção de uma aresta de  $E^2 \setminus E^1$  da floresta de  $G$ .

*Demonstração.* Os Lemas 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.16 e 3.17 e os Fatos 3.14 e 3.15 provam a necessidade do Lema 3.23. Para a suficiência, basta observar que o procedimento só utiliza  $A$ -arestas obrigatórias e opcionais, ou seja, apenas arestas de  $G^2$ . Sendo assim, se o procedimento retorna ciclos cordais, então é possível torná-los cordais respeitando as restrições do PROBLEMA SANDUÍCHE. □

Podemos agora enunciar o principal teorema desta seção.

**Teorema 3.24.** *Existe um algoritmo polinomial para  $(*, \text{CORDAL}-(2, 1), \text{PNC})\text{-SP}$ .*

*Demonstração.* Segue dos Lemas 3.10– 3.23. □

Neste capítulo introduzimos o conceito de PROBLEMA SANDUÍCHE COM CONDIÇÕES DE CONTORNO e trabalhamos inicialmente com a classe de grafos  $(k, \ell)$ . Os resultados apresentados na Seção 3.2 estão publicados parcialmente na revista Matemática Contemporânea [22] e na edição especial para o congresso FAW'13 do Lecture Notes in Computer Science [20]. O resultado apresentado na Seção 3.3, concernente à classe de grafos cordais- $(2, 1)$ , provado ser um problema NP-completo quando estudado na versão original do problema sanduíche [19], foi provado ser polinomial quando consideramos um grafo  $G^2$  pertencente a uma classe com número polinomial de cliques e ainda não está publicado.

## Capítulo 4

# Caracterização Estrutural e Decomposição para Cografos- $(2, 1)$ : uma generalização natural de grafos de limiar

Grafos perfeitos atraem muita atenção em teoria dos grafos bem como PROBLEMAS DE PARTIÇÃO. Em [3–5], Brandstädt et al. provaram que o PROBLEMA DE RECONHECIMENTO para a classe dos grafos- $(k, \ell)$  é NP-completo, para  $k$  ou  $\ell$  pelo menos 3 e polinomial caso contrário. Neste capítulo, vamos restringir este PROBLEMA DE RECONHECIMENTO a uma subclasse de grafos perfeitos: os *cografos*.

Como visto na Introdução 1, cografos são definidos recursivamente. Além desta, existem algumas outras formas equivalentes de caracterizar um cografo [17], entretanto, uma das mais conhecidas é a caracterização por subgrafos proibidos.

**Teorema 4.1** (Corneil et al. 1981 [17]). *Um cografo é um grafo sem  $P_4$ .*

Corneil em 1985 [18], apresentou o primeiro, mas não o único algoritmo em tempo linear para reconhecer cografos [9, 44].

Para cografos- $(k, \ell)$  já existe uma caracterização por subgrafos proibidos [7, 8, 34], mas nenhuma caracterização estrutural para esta classe é conhecida, exceto para grafos de limiar (ver Capítulo 1), i.e., cografos- $(1, 1)$ .

O objetivo deste capítulo é apresentar uma generalização da caracterização para grafos de limiar: uma caracterização estrutural e uma decomposição para cografos- $(2, 1)$ . Como consequência, podemos caracterizar cografos- $(1, 2)$  e, de acordo com estas caracterizações, podemos reconhecer cografos- $(2, 1)$  e cografos- $(1, 2)$  em tempo linear.



## 4.1 Caracterização estrutural e decomposição para cografos-(2, 1) e (1, 2)

Nesta seção, apresentamos uma caracterização para cografos-(2, 1). Como Corolário temos a caracterização para grafos-(1, 2). Antes, porém, seguem definições, proposições e lemas que nos serão de grande valia para a demonstração do Teorema principal.

**Definição 4.2.** *Sejam  $x, y$  vértices. Dizemos que temos vizinhanças aninhadas se  $N(x) \subseteq N(y)$  ou  $N(y) \subseteq N(x)$ .*

**Fato 4.3.** *Um cografo-(2, 1) é um cografo que pode ser particionado em um grafo bipartido  $B$  e uma clique  $K$ .*

**Proposição 4.4.** *Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então cada componente conexo de  $B$  é uma biclique.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que exista um componente conexo  $B_i = (X_i, Y_i)$  de  $B$  que não seja uma biclique. Neste caso, falta pelo menos uma aresta em  $B_i$ , por exemplo  $e = ab$ , onde  $a \in X_i$  e  $b \in Y_i$ . Como  $B_i$  é conexo, existe um caminho entre  $a$  e  $b$ , denotado por  $P_{ab}$  e, como  $G$  deve ser um cografo,  $2 \leq |P_{ab}| \leq 3$ . Se  $|P_{ab}| = 3$ ,  $a$  e  $b$  devem ser vértices da mesma partição, uma contradição. Se  $|P_{ab}| = 2$ , então temos uma aresta entre  $a$  e  $b$ , outra contradição. Logo,  $B_i$  é uma biclique.  $\square$

Os Lemas abaixo nos fornecem ferramentas e intuição para provar o Teorema 4.14.

**Lema 4.5.** *Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $G$  pode ser particionado em um conjunto  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$  de bicliques maximais  $B_i$   $i = 1, \dots, \ell$  e em uma clique  $K$ .*

*Demonstração.* Segue da Proposição 4.4.  $\square$

Para os próximos Lemas, vamos considerar um grafo  $G$  que pode ser particionado em uma coleção de bicliques maximais  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$ , onde  $B_i = (X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ , e em uma clique  $K$ .

**Lema 4.6.** *Seja  $x \in K$  tal que  $N(x) \cap B_i \neq \emptyset$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $X_i \subseteq N(x)$  ou  $Y_i \subseteq N(x)$ .*

*Demonstração.* Suponha, sem perda de generalidade, que existe um vértice  $a \in X_i$  que seja adjacente a  $x$  mas que  $x$  não seja adjacente a pelo menos um vértice de ambos conjuntos  $X_i$  e  $Y_i$ , por exemplo  $b$  e  $c$ , respectivamente. Note que  $bcax$  é um  $P_4$  em  $G$ , uma contradição.  $\square$

**Lema 4.7.** *Seja  $x \in K$  tal que  $N(x) \cap B_i \neq \emptyset$  e  $N(x) \cap B_j \neq \emptyset$ ,  $i \neq j$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $B_i \subseteq N(x)$  e  $B_j \subseteq N(x)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $a$  e  $b$  vizinhos de  $x$  em  $B_i$  e  $B_j$ , respectivamente. Suponha, por contradição, que  $x$  não seja adjacente a pelo menos um vértice em  $B_i$  (ou  $B_j$ ). Seja  $c$  este vértice. Como, pelo Lema 4.6,  $x$  é completamente adjacente aos vértices de  $X_i$  ou  $Y_i$  (ou  $X_j$  ou  $Y_j$ ), podemos começar um passeio a partir de  $c$  e depois  $v$  (qualquer vértice da partição oposta à partição a qual  $c$  pertence) e então, chegamos a  $x$  e finalmente  $b$  (ou  $a$ ). Este caminho é um  $P_4$  em  $G$ , uma contradição.  $\square$

**Lema 4.8.** *Sejam  $x$  e  $y$  vértices distintos de  $K$  e, sem perda de generalidade, assumamos que  $a \in X_i$ , tal que  $xa \in E(G)$  e  $ya \notin E(G)$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $B_i \subseteq N(x)$  ou  $Y_i \subseteq N(y)$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $x$  não seja adjacente a um vértice  $v$  em  $B_i$ . Pelo Lema 4.6, temos que  $X_i$  ou  $Y_i$  é completamente adjacente a  $x$ .

- $X_i \subseteq N(x)$

Neste caso,  $v$  está em  $Y_i$  e temos o seguinte  $P_4$ :  $vaxy$  se  $y$  não é adjacente a  $v$ .

- $Y_i \subseteq N(x)$

Primeiro, observe que  $vy \notin E(G)$ , senão teríamos um  $P_4$ :  $axyv$ . Segundo, note que  $vwxy$  é um  $P_4$  para qualquer  $w \in Y_i$ , se  $y$  não é adjacente a  $w$ .

Então, se  $B_i \not\subseteq N(x)$ , então  $Y_i \subseteq N(y)$ .

$\square$

**Lema 4.9.** *Sejam  $x$  e  $y$  vértices distintos de  $K$  tais que existe  $X_i, a \in N(x) \cap X_i$  e  $b \in N(y) \cap X_i$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $a \in N(y)$  ou  $b \in N(x)$ .*

*Demonstração.* Por contradição, suponha que exista um vértice  $a \in X_i$  tal que  $a \in N(x) \setminus N(y)$  e outro vértice  $b \in X_i$  tal que  $b \in N(y) \setminus N(x)$ . Neste caso, claramente temos um  $P_4$ :  $axyb$ , uma contradição.

$\square$

Pelos Lemas 4.6 e 4.9, podemos deduzir o seguinte Lema:

**Lema 4.10.** *Sejam  $x$  e  $y$  vértices distintos de  $K$  tais que existe  $X_i, a \in N(x) \cap X_i$  e  $b \in N(y) \cap X_i$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $N(x) \cap B_i \subseteq N(y) \cap B_i$  ou  $N(y) \cap B_i \subseteq N(x) \cap B_i$ .*

**Lema 4.11.** *Sejam  $x$  e  $y$  vértices distintos de  $K$  tais que  $a \in N(x) \cap B_i$  e  $b \in N(y) \cap B_j$ ,  $i \neq j$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1), então  $a \in N(y)$  ou  $b \in N(x)$ .*

*Demonstração.* De fato, suponha que nem  $a \in N(y)$  nem  $b \in N(x)$ . Neste caso, claramente temos um  $P_4$ :  $axyb$  em  $G$ , uma contradição. □

**Lema 4.12.** *Seja  $L(x)$  a lista de bicliques tais que  $N(x) \cap B_i \neq \emptyset$ . Se  $G = (V, E)$  é um cografo-(2, 1) e  $B_i \in L(x) \setminus L(y)$ , então  $B_i \subseteq N(x)$ .*

*Demonstração.* Segue do Lema 4.8. □

**Lema 4.13.** *Sejam  $x, y \in K$ . Se  $L(x) = B_i$  e  $L(y) = B_j$ , então  $i = j$ .*

*Demonstração.* Suponha  $i \neq j$ . Isto contradiz o Lema 4.11. Então,  $i = j$ . □

Agora, vamos enunciar o principal Teorema desta seção. Veja a Figura 4.1 como exemplo.

**Teorema 4.14.** *Seja  $G$  um grafo. Então, as seguintes afirmações são equivalentes.*

1.  $G$  é um cografo-(2, 1).
2.  $G$  pode ser particionado em uma coleção de bicliques maximais  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$  e uma clique  $K$  tal que  $B_i = (X_i, Y_i)$  e  $V(K)$  é a união de conjuntos  $K^1$  e  $K^2$  não intersectantes tais que as seguintes propriedades são válidas.
  - (a) Não existem arestas entre vértices de  $B_i$  e  $B_j$ , para  $i \neq j$ ;
  - (b) Seja  $L(v)$  a lista de bicliques na vizinhança de  $v$ ,  $\forall v \in V$ .  
 $K^1 = \{v \in K | N(v) \cap B \subseteq B_1\} = K^{1,1} \cup K^{1,2}$  e  
 $K^2 = \{v \in K | L(v) \geq 2, B_i \in L(v) \Leftrightarrow B_i \subseteq N(v)\}$ , onde  
 $K^{1,1} = \{v \in K^1 | vx \in E(G), \forall x \in X_1\}$  e  
 $K^{1,2} = K^1 \setminus K^{1,1}$  e vale que  $uy \in E(G), \forall u \in K^{1,2}$  e  $y \in Y_1$ ;
  - (c)  $G[X_1 \cup Y_1 \cup K^{1,1} \cup K^{1,2}]$  é a junção de dois grafos de limiar  $(K^{1,1}, Y_1)$  e  $(K^{1,2}, X_1)$ ;
  - (d) Existe uma ordenação  $v_1, v_2, \dots, v_{|K^2|}$  dos vértices de  $K^2$  tal que  $N(v_i) \subseteq N(v_j), \forall i \leq j$  e  $N(v) \subseteq N(v_1), \forall v \in K^1$ .
3.  $G$  é a junção de dois grafos de limiar ou pode ser obtido a partir da junção de dois grafos de limiar através da aplicação de qualquer sequência das seguintes operações:
  - União disjunta com uma biclique;
  - Junção com um vértice.

*Demonstração.* Primeiro mostraremos que se  $G$  é um cografo-(2, 1), então  $G$  pode ser particionado em uma coleção de bicliques maximais  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$  e uma clique  $K$  tal que  $B_i = (X_i, Y_i)$  e  $V(K)$  é a união de conjuntos  $K^1$  e  $K^2$  não intersectantes tais que as propriedades 2a, 2b, 2c e 2d são válidas.

Suponha que  $G$  é um cografo-(2, 1). Pelo Lema 4.5, temos que  $G$  pode ser particionado em uma coleção de bicliques  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$  e uma clique  $K$ .

**Afirmção 4.15.** *Podemos particionar  $V(K)$  em dois conjuntos disjuntos  $K^1$  e  $K^2$ , tais que  $K^1 = K^{1,1} \cup K^{1,2}$  e tal que existe  $i \in \{1, \dots, \ell\}$  para o qual  $K^{1,1}$  é o conjunto dos vértices que são adjacentes a  $X_i$ ,  $K^{1,2}$  é o conjunto de vértices adjacentes a  $Y_i$  e  $K^2$  é o conjunto de vértices que são adjacentes a pelo menos duas bicliques de  $G$ .*

*Demonstração da Afirmção 4.15:* Seja  $K^2$  o conjunto de vértices de  $K$  que são adjacentes a pelo menos duas bicliques de  $G$ . Note que, pelo Lema 4.7, se um vértice  $x \in K$  é adjacente a duas bicliques diferentes  $B_i$  e  $B_j$ , então  $B_i \subseteq N(x)$  e  $B_j \subseteq N(x)$ . Se um vértice em  $K$  não é adjacente a pelo menos duas bicliques, então ele é adjacente a apenas uma biclique ou a nenhuma delas. No primeiro caso, pelo Lema 4.13, cada vértice que vê uma única biclique, vê a mesma biclique  $B_i$ . Sem perda de generalidade, assumimos que  $i = 1$ . Então, a  $K^1$ , atribuímos estes vértices. Seja  $x \in K^1$  um vértice que não seja completamente adjacente a uma biclique  $B_i$  e não veja nenhuma outra biclique. Neste caso, como  $N(x) \cap B_i \neq \emptyset$ , pelo Lema 4.6, temos que, ou  $X_i \subseteq N(x)$  ou  $Y_i \subseteq N(x)$ . Vamos assumir que o segundo nunca ocorre, uma vez que, se ocorrer, podemos reposicionar os vértices de maneira apropriada. De fato, considere  $K^0$  o conjunto dos vértices de  $K$  que não vêm uma biclique. Pelo Lema 4.12, cada vértice de  $K \setminus K^0$  precisa ser completamente adjacente às bicliques em suas vizinhanças. Então, se existe qualquer vértice em  $K^{1,1}$  ou  $K^{1,2}$ , ele deve ser completamente adjacente a  $B_1$ . Se  $|K^0| \leq 2$ , então criamos uma nova biclique com um ou dois vértices. Note que cada vértice de  $K$  será adjacente a ela, incluindo os vértices de  $K^{1,1}$  e  $K^{1,2}$ , que são adjacentes a duas bicliques agora. Consequentemente, eles vão ser movidos de  $K^{1,1}$  e  $K^{1,2}$  para  $K^2$ . Observe que, neste caso,  $K^1$  será vazio. Senão, se  $|K^0| > 2$ , então além de criar uma nova biclique com exatamente dois vértices e seguindo o mesmo procedimento descrito anteriormente para vértices em  $K^{1,1}$  e  $K^{1,2}$ , movemos os vértices restantes de  $K^0$  para  $K^1$ . Note que, após estes reposicionamentos, eles serão os únicos com uma única biclique em suas vizinhanças. Nos dois casos, esta nova biclique vai ser chamada de  $B_1$ , já que é aquela que está na vizinhança de cada vértice de  $K$ . A antiga  $B_1$  será agora  $B_2$  e assim sucessivamente. Observe que não existe interseção entre  $K^1$  e  $K^2$  e  $K$  pode ser obtida pela união destes dois conjuntos.  $\square$

A seguir, provaremos que  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$  e  $K^1, K^2$  satisfaz as Propriedades 2a, 2b, 2c e 2d.

Suponha que exista uma aresta  $e = ab$  entre duas bicliques maximais diferentes  $B_i$  e  $B_j$ ,  $a \in B_i$  e  $b \in B_j$ , contradizendo a Propriedade 2a. Neste caso temos um  $P_4$ :  $vabw$ ,

para cada par de vértices não adjacentes  $v \in B_i$  e  $w \in B_j$ . Note que existe pelo menos dois vértices não adjacentes em  $B_i$  e  $B_j$ , uma vez que elas são duas bicliques maximais distintas em  $G$ . Além disso, como  $B$  é um grafo bipartido,  $vb \notin E(G)$  e  $bw \notin E(G)$ .

A Propriedade 2b segue da afirmação 4.15.

A fim de provar a Propriedade 2c, como  $K^{1,1} \cup K^{1,2}$  induz uma clique,  $X_1 \cup Y_1$  induz uma biclique e  $K^{1,1}$  (resp.  $K^{1,2}$ ) é completamente adjacente a  $X_1$  (resp.  $Y_1$ ), resta provar que  $(K^{1,1}, Y_1)$  e  $(K^{1,2}, X_1)$  são grafos de limiar. Claramente, ambos são grafos split e, como “ser cografo” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzidos, ambos são cografos. Então  $(K^{1,1}, Y_1)$  e  $(K^{1,2}, X_1)$  são grafos de limiar.

Para provar que a Propriedade 2d é válida, sejam  $v$  e  $w$  vértices de  $K^2$ . Sejam  $L(v)$  e  $L(w)$  as listas de bicliques vistas por  $v$  e  $w$ , respectivamente. Pelo Lema 4.11, temos que  $L(v) \cap L(w) \neq \emptyset$  e então, pelo Lema 4.10,  $N(v) \cap B_i \subseteq N(w) \cap B_i$  ou  $N(w) \cap B_i \subseteq N(v) \cap B_i$  para toda biclique  $B_i \in L(v) \cap L(w)$ . Como, pelo Lema 4.7,  $v$  e  $w$  vê completamente todas as bicliques em suas vizinhanças, podemos afirmar que  $N(v) \subseteq N(w)$  ou  $N(w) \subseteq N(v)$ .

**Afirmção 4.16.**  $\bigcap_{w \in K^2} L(w) \neq \emptyset$ .

*Demonstração da Afirmção 4.16:* Seja  $w \in K^2$ . Por definição,  $w$  vê duas ou mais bicliques completamente. Neste caso, temos que  $N(v) \subseteq N(w)$  ou  $N(w) \subseteq N(v)$ , para  $v \neq w$ ,  $v, w \in K^2$ . Consequentemente, temos que existe uma ordenação dos vértices  $v_1, v_2, \dots, v_{|K^2|}$  de  $K^2$  tal que  $N(v_1) \subseteq N(v_2) \subseteq \dots \subseteq N(v_{|K^2|})$ .

Se  $K^1 \neq \emptyset$ , então afirmamos que  $B_1 \subseteq \bigcap_{w \in K^2} L(w)$ .

Suponha, por contradição que  $B_1 \not\subseteq \bigcap_{w \in K^2} L(w)$ . Sejam  $x \in K^1$  e  $w \in K^2$  tais que  $w$  não veja  $B_1$ . Então teríamos o seguinte  $P_4$ :  $axwb$ , para cada  $a \in B_1$  adjacente a  $x$  e para cada  $b \in B_i \subseteq L(w)$ .

Então,  $B_1 \subseteq \bigcap_{w \in K^2} L(w)$ . □

Agora vamos mostrar que, se  $G$  pode ser particionado em uma coleção de bicliques  $B = \{B_1, \dots, B_\ell\}$  e em uma clique  $K$  tal que  $B_i = (X_i, Y_i)$  e  $V(K)$  é a união de dois conjuntos  $K^1$  e  $K^2$  não intersectantes tais que as Propriedades 2a, 2b, 2c e 2d são válidas, então  $G$  é a junção de dois grafos de limiar ou pode ser obtido a partir da junção de dois grafos de limiar através da aplicação de qualquer sequências das seguintes operações:

- União disjunta com uma biclique;
- Junção com um vértice.

Prova por indução sobre  $\ell$  e  $|K^2|$ :

Se  $B = \{B_1\}$  e  $K^2 = \emptyset$ , então, pelas Propriedades 2b e 2c, temos que  $G$  é a junção de  $(X_1, K^2)$  e  $(Y_1, K^1)$ , dois grafos de limiar.

Suponha então que  $\ell = j$ ,  $j \geq 2$ ,  $|K^2| = k$ ,  $k \geq 1$  e que a Afirmção é verdadeira quando  $\ell = j - 1$  ou  $|K^2| = k - 1$ . Seja  $v \in K^2$  o vértice com a maior vizinhança. Ou  $v$

vê  $B$  completamente e, conseqüentemente é um vértice universal, ou não. Então, se  $v$  é um vértice universal, então removemos  $v$  de  $G$ , podemos aplicar a hipótese de indução e afirmamos que  $G \setminus \{v\}$  foi obtido pela junção de dois grafos de limiar ou pela junção de dois grafos de limiar seguido por qualquer seqüência de uniões disjuntas com bicliques maximais ou junções com um vértice. Então, obtemos  $G$  a partir de  $G \setminus \{v\}$  fazendo a junção com  $v$ . Senão, dado que  $v$  é o vértice em  $K^2$  com a maior vizinhança e, como temos vizinhanças aninhadas em  $K^2$ , temos que se  $v$  não é um vértice universal, então  $v$  deixa de ver uma biclique  $B_h$  (observe que  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $B_h$ , uma vez que  $v \in K^2$ ). Neste caso, todo vértice de  $K^2$  não é adjacente a nenhum vértice de  $B_h$ . Logo,  $B_h$  é uma biclique disjunta de  $G$ . Se removermos  $B_h$  de  $G$ , pela hipótese de indução, temos que  $G \setminus \{V(B_h)\}$  foi obtido pela junção de dois grafos de limiar ou pela junção de dois grafos de limiar seguido por qualquer seqüência de: uniões disjuntas com uma biclique maximal ou junções com um vértice. Então,  $G$  pode ser obtido a partir de  $G \setminus V(B_h)$  seguido pela união disjunta com  $B_h$ .

Finalmente, provaremos que se  $G$  é a junção de dois grafos de limiar ou pode ser obtido através da junção de dois grafos de limiar pelas aplicações de qualquer seqüência de uniões disjuntas com bicliques ou junções com um vértice, então  $G$  é cografo-(2, 1).

Primeiro, se  $G$  é o junção de dois grafos de limiar,  $G$  é claramente cografo-(2, 1), uma vez que foi obtido pelo junção de dois cografos split. Segundo, como a junção de dois grafos de limiar resulta em um cografo-(2, 1) e bicliques também são cografos (Proposição 4.4), temos que a união disjunta de um cografo e uma biclique também é um cografo. Além disso, podemos atribuir cada partição da biclique adicionada a uma partição da já existente bipartição. Então, o grafo obtido após cada união disjunta com uma biclique é um cografo-(2, 1). De maneira semelhante, se adicionarmos um vértice universal a um cografo-(2, 1), continuaremos a ter um cografo e podemos atribuir o vértice universal à clique já existente. Portanto,  $G$  continua sendo um cografo-(2, 1). □

**Corolário 4.17.** *A propriedade das vizinhanças aninhadas é válida para quaisquer dois vértices em  $K^{1,1} \cup K^2$  ou  $K^{1,2} \cup K^2$ .*

*Demonstração.* Segue do Lema 4.13 e da Afirmação 4.16. □

**Observação 4.18.** *O grafo obtido pela contração de todas as arestas dentro de cada  $B_i$  é um grafo de limiar.*

A Figura 4.1 é também um exemplo da Observação anterior.

Como cografos-(2, 1) são o complemento de cografos-(1, 2), segue que:

**Corolário 4.19.** *Seja  $G$  um grafo. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1.  $G$  é um cografo-(1, 2).

2.  $G$  pode ser particionado em uma coleção  $B$  e um conjunto independente  $S$  tais que  $B$  é a junção de  $B_1, \dots, B_\ell$ , onde cada  $B_i$  é uma união disjunta de duas cliques  $X_i$  e  $Y_i$  e  $V(S)$  é a união de conjuntos não intersectantes  $S^1$  e  $S^2$  tais que as seguintes propriedades são válidas.

(a) Existem todas as arestas possíveis entre vértices de  $B_i$  e  $B_j$ , para  $i \neq j$ ;

(b) Seja  $L(v)$  a lista de bicliques na vizinhança de  $v$ ,  $\forall v \in V$ .

$$S^1 = \{v \in S \mid \overline{N(v)} \cap B \subseteq B_1\} = S^{1,1} \cup S^{1,2} \text{ e}$$

$$S^2 = \{v \in S \mid B_1 \notin L(v), B_i \in L(v) \Leftrightarrow B_i \subseteq N(v)\} = S \setminus S^1, \text{ onde}$$

$$S^{1,1} = \{v \in S^1 \mid vx \notin E(G), \forall x \in X_1\} \text{ e}$$

$$S^{1,2} = S^1 \setminus S^{1,1} \text{ e vale que } uy \notin E(G), \forall u \in S^{1,2} \text{ e } y \in Y_1;$$

(c)  $G[X_1 \cup Y_1 \cup S^{1,1} \cup S^{1,2}]$  é a união de dois grafos de limiar  $(S^{1,1}, Y_1)$  e  $(S^{1,2}, X_1)$ ;

(d) Existe uma ordenação  $v_1, v_2, \dots, v_{|S^2|}$  dos vértices de  $S^2$  tal que  $N(v_i) \supseteq N(v_j), \forall i \leq j$  e  $N(v) \supseteq N(v_{|S^2|}), \forall v \in S^1$ .

3.  $G$  é a união de dois grafos de limiar ou pode ser obtido a partir da união de dois grafos de limiar através da aplicação de qualquer sequência das seguintes operações:

- Junção com uma biclique;
- União com um vértice.

Como uma decomposição modular pode ser encontrada em tempo linear (para mais detalhes, ver [43]), temos:

**Corolário 4.20.** *O reconhecimento de cografos-(2,1) e cografos-(1,2) pode ser feita em tempo linear.*

Neste Capítulo apresentamos uma caracterização estrutural e decomposição para cografos-(2,1) e (1,2). Baseados em tal resultado, pudemos generalizar a classe dos grafos de limiar.

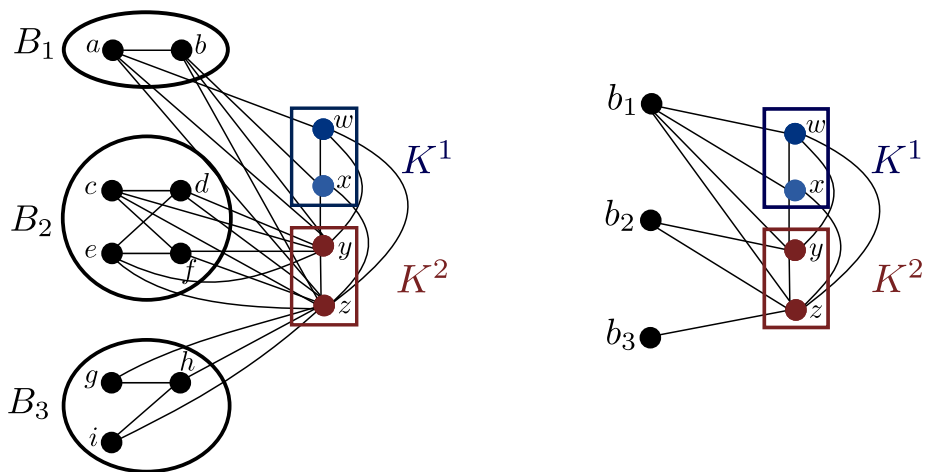


Figura 4.1: À esquerda, um grafo  $G$  que é um cografo- $(2, 1)$  satisfazendo as propriedades 2a, 2b, 2c e 2d, onde  $w \in K^{1,1}$  e  $x \in K^{1,2}$ . À direita, um grafo de limiar obtido a partir da contração de todas as arestas dentro de cada  $B_i$  de  $G$ . Observe que cada biclique  $B_i$  de  $G$  é transformada em um único vértice  $b_i$  devido à contração de arestas.



## Capítulo 5

# Problema Sanduíche para Cografos- $(k, \ell)$

Neste capítulo, vamos aplicar a caracterização estrutural e decomposição para Cografos- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  que apresentamos no Capítulo 4. Especificamente, trabalharemos com COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP iniciando pelo estudo de COGRAFO- $(2, 1)$ -SP. A seguir, enunciaremos formalmente o problema.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$  - (COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP)

*Entrada:* A tripla  $(V, E^1, E^3)$  tal que  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  cografo- $(k, \ell)$  tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ ?

Com base na decomposição para cografos- $(2, 1)$  descrita no Capítulo 4 procuramos inicialmente solucionar o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR, uma vez que o “núcleo” de um cografo- $(2, 1)$ , como apontado na decomposição, é a junção de dois grafos de limiar. Caso fosse possível determinar um algoritmo em tempo polinomial para resolver JTT-SP, teríamos, pelo Teorema 4.14, que COGRAFO- $(2, 1)$ -SP também seria polinomial. Nossa primeira intuição apontava para a solução polinomial, uma vez que GRAFO DE LIMAR-SP e COGRAFO-SP são problemas solucionáveis em tempo polinomial [40]. Contudo, o resultado obtido foi bem diferente do esperado.

### 5.1 PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR

Vamos formalizar o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR. Denotaremos por JTT a junção de dois grafos de limiar. Tal notação está em conformidade com este termo em inglês (join of two thresholds).

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR- (JTT-SP)

*Entrada:* A tripla  $(V, E^1, E^3)$  tal que  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$  e tal que  $G$  seja a junção de dois grafos de limiar?

Mostraremos que JTT-SP é NP-completo.

A Proposição 5.1 apresentada a seguir é a chave para mostrar que GRAFO DE LIMIAR-SP é solucionável em tempo polinomial e será de grande importância no decorrer desta seção.

**Proposição 5.1** (Golubic, Kaplan e Shamir [40]). *Seja  $(V, E^1, E^3)$  uma instância de GRAFO DE LIMIAR-SP e seja  $v \in V$  um vértice isolado em  $G^1$  ou em  $G^3$ . Existe um grafo sanduíche de limiar para  $(V, E^1, E^3)$  se e somente se existe um grafo sanduíche de limiar para  $(V, E^1, E^3)_{V \setminus \{v\}}$ .*

Para demonstrar o principal resultado desta seção, enunciado abaixo, faremos uma redução polinomial a partir do problema NP-completo NEM TODOS IGUAIS 3SAT MONÓTONO [38], que pode ser formulado da seguinte forma:

NEM TODOS IGUAIS 3SAT MONÓTONO - (MONÓTONO NAE3SAT)

*Entrada:* Um par  $(X, C)$  onde  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  é o conjunto de variáveis e  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  é a coleção de cláusulas sobre  $X$  tal que cada cláusula  $c \in C$  tem exatamente 3 literais positivos.

*Pergunta:* Existe uma atribuição verdade para  $X$  tal que cada cláusula tenha pelo menos um literal verdadeiro e um literal falso?

**Teorema 5.2.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR é um problema NP-completo.*

*Demonstração.* Com o objetivo de reduzir MONÓTONO NAE 3SAT para JTT-SP vamos construir primeiramente uma instância particular  $(V, E^1, E^3)$  para JTT-SP a partir de uma instância genérica  $(X, C)$  de MONÓTONO NAE 3SAT. Em seguida, no Lema 5.6 provaremos que se existe um grafo sanduíche que seja a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ , então existe uma atribuição verdade satisfazendo cada cláusula de  $(X, C)$  tal que em cada cláusula temos pelo menos um literal verdadeiro e um literal falso. Finalmente, no Lema 5.8 provaremos que, se existe uma atribuição verdade satisfazendo cada cláusula de  $(X, C)$ , uma instância do MONÓTONO NAE 3SAT, então existe um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$  que seja a junção de dois grafos de limiar.  $\square$

**Observação 5.3.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$  que é a junção de dois grafos de limiar  $H_1, H_2$ . Se  $e = xy \in E^3$ , então  $x, y$  estão ambos em  $H_1$  ou em  $H_2$ .*

**Observação 5.4.** *Se  $G$  é a junção de dois grafos de limiar, então  $G$  é um cografo. Consequentemente,  $G$  não tem  $P_4$ 's induzidos.*

**Observação 5.5.** Se  $G$  é a junção de dois grafos de limiar  $H_1, H_2$  e  $G$  não tem um  $C_4$  induzido  $abcd$ , então  $abcd$  não pode estar inteiramente contido em  $H_1$  ou  $H_2$ .

Construção da instância particular  $(V, E^1, E^3)$  para JTT-SP:

### Componente variável

- Vértices: Para cada variável  $x_i \in X$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  adicione vértices  $x_1^i, y_1^i, x_2^i, y_2^i$ . Para cada vez que a variável  $x_i \in X$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  aparece em uma cláusula  $c_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , adicione vértices  $c_i^j, d_i^j, h_i^j$ .
- Para  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ , adicione as seguintes arestas obrigatórias:  $\{x_1^i x_2^i, x_1^i y_2^i, x_2^i y_1^i, y_1^i y_2^i, c_i^j d_i^j\}$ .
- Para  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j \in \{1, \dots, m\}$ , adicione as seguintes arestas proibidas:  $\{x_1^i y_1^i, x_2^i y_2^i, y_1^i c_i^j, y_1^i d_i^j, y_1^i h_i^j, c_i^j h_i^j, d_i^j h_i^j\}$

### Componente Cláusula

- Vértices: Para cada cláusula  $c_j \in C$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ , adicione os vértices  $r_1^j, r_2^j, r_3^j$ .
- Para  $j \in \{1, \dots, m\}$  adicione as seguintes arestas obrigatórias:  $\{r_1^j r_2^j, r_1^j r_3^j, r_2^j, r_3^j\}$ . Para cada cláusula  $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j) \in C$ , adicione a  $E^1$  as arestas  $h_1^j r_1^j, h_2^j r_2^j, h_3^j r_3^j$ .
- Arestas Proibidas: Para cada cláusula  $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j) \in C$ , adicione a  $E^3$  as arestas  $h_1^j r_2^j, h_2^j r_3^j, h_3^j r_1^j$ .

Observe a Figura 5.2 como exemplo.

**Lema 5.6.** Se existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  que é a junção de dois grafos de limiar para a instância particular  $(V, E^1, E^3)$  construída acima, então existe uma atribuição verdade satisfazendo cada cláusula de  $(X, C)$ , uma instância genérica de MONÓTONO NAE 3SAT.

*Demonstração.* Suponha que exista um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  que seja a junção de dois grafos de limiar  $H_1, H_2$ . Vamos definir a atribuição verdade para  $(X, C)$ : para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , a variável  $x_i$  é verdadeira se e somente se  $x_1^i, y_1^i \in H_1$ . Suponha que, para algum  $j \in \{1, \dots, m\}$ , cada literal da cláusula  $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$  seja falso. Se  $l_q^j = x_i$ ,  $q \in \{1, 2, 3\}$ , então, como  $c_j$  é falso,  $x_1^i, y_1^i \notin H_1$ . Assim,  $x_1^i, y_1^i \in H_2$  e, pelas Observações 5.3 e 6.45,  $x_2^i, y_2^i \in H_1$ . Pela Observação 5.3, podemos afirmar também que  $c_i^j, d_i^j, h_i^j, r_1^j, r_2^j, r_3^j$  pertence a  $H_2$ .

**Afirmção 5.7.** Se três vértices  $x, y, z$  pertencem ao mesmo grafo de limiar tais que  $xy \in E^1$  e  $zx, zy \in E^3$ , então  $z \in S$ , onde  $S$  é o conjunto independente do grafo de limiar.

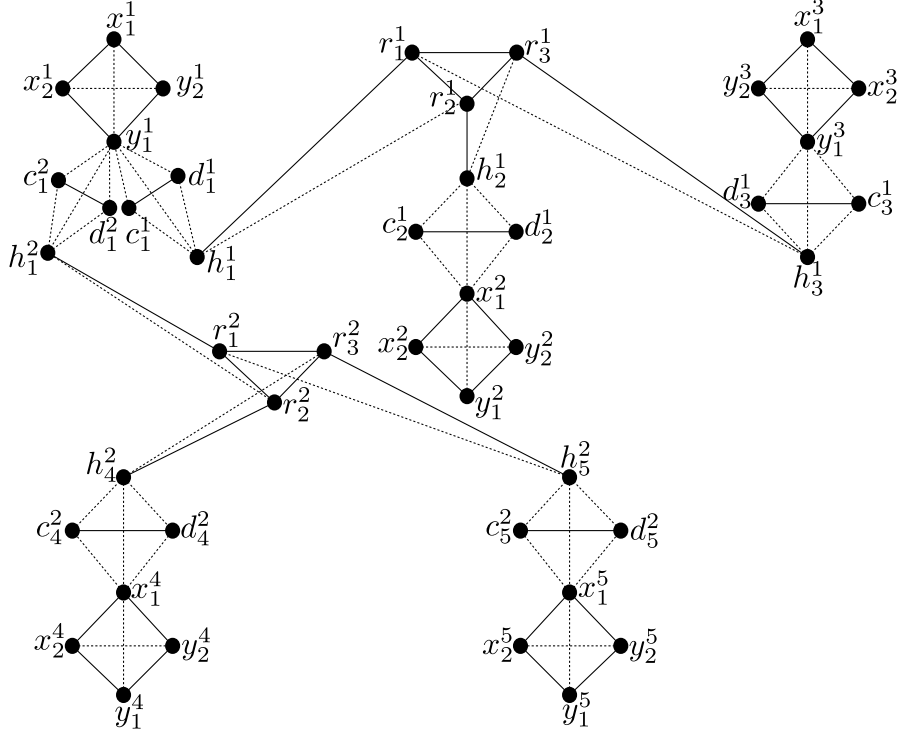


Figura 5.1: Exemplo de uma instância particular  $(V, E^1, E^3)$  do JTT-SP obtida a partir da instância de MONOTONE NAE 3SAT:  $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_5))$ . Arestas sólidas são arestas obrigatórias de  $E^1$ , arestas pontilhadas são arestas proibidas de  $E^3$  e arestas omitidas são arestas opcionais.

*Demonstração.* Como  $x, y, z$  estão todos no mesmo grafo de limiar e  $xy \in E^1$ , então ou  $x \in K$  ou  $y \in K$ , onde  $K$  é a clique do grafo de limiar. Então,  $z$  não pode estar em  $K$  e, conseqüentemente,  $z \in S$ .  $\square$

Logo, pela Afirmação 5.7, temos que  $h_i^j \in S_2$ , onde  $S_2$  é o conjunto independente de  $H_2$ . Note que, neste caso,  $h_1^j r_1^j r_2^j h_2^j$  seria um  $P_4$  em  $G$ , o que é uma contradição pela Observação 6.46. Então,  $h_2^j r_1^j \in E$ . Mas neste caso,  $h_2^j r_1^j r_3^1 h_3^j$  é um  $P_4$  induzido em  $G$  que não podemos destruir, uma contradição.

O caso onde todos os literais são verdadeiros é também impossível, por simetria.  $\square$

**Lema 5.8.** *Se existe uma atribuição verdade satisfazendo cada cláusula de  $X, C$ , uma instância genérica de MONÓTONO NAE 3SAT, então existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  que é a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar inicialmente que, se existe uma atribuição verdade satisfazendo cada cláusula de  $(X, C)$ , uma instância genérica de MONÓTONO NAE 3SAT, então existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  que é a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ .

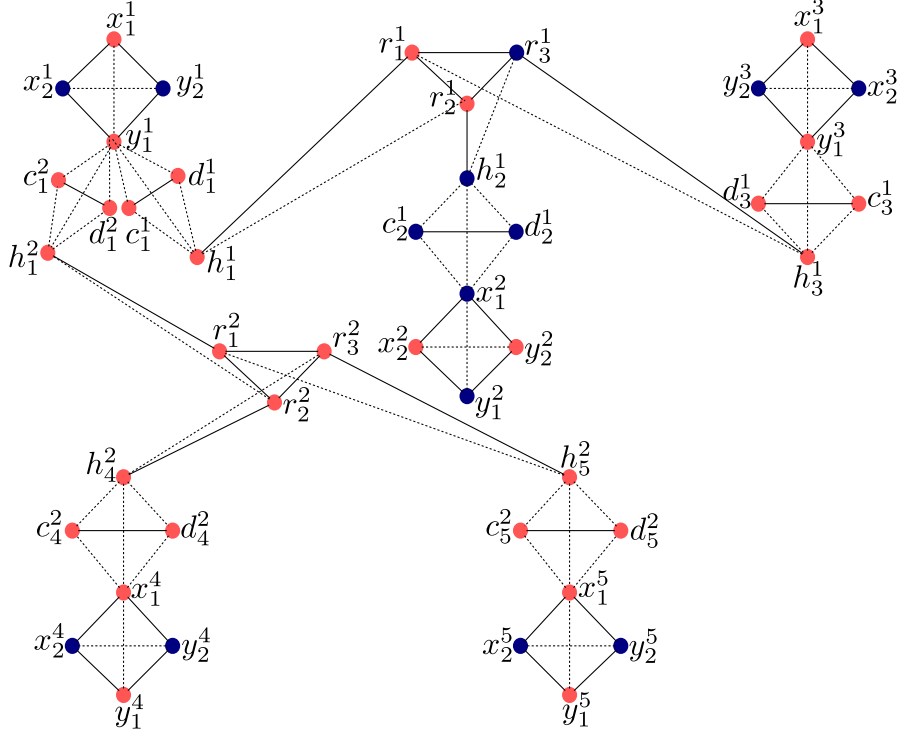


Figura 5.2: Exemplo da divisão em dois grafos de limiar da instância particular  $(V, E^1, E^3)$  do JTT-SP  $I = (X, C) = (\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_4 \vee x_5))$  de acordo com a atribuição verdade:  $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = F, x_2 = V$ . Vértices com cores distintas estão em grafos de limiar distintos. Arestas sólidas são arestas obrigatórias de  $E^1$ , arestas pontilhadas são arestas proibidas de  $E^3$  e arestas omitidas são arestas opcionais.

Assim, suponha que exista uma atribuição verdade que satisfaça  $(X, C)$ . Vamos definir um grafo que é a junção de dois grafos de limiar e também é grafo sanduíche para a instância particular  $(V, E^1, E^3)$  do JTT-SP relacionada à instância  $(X, C)$  do MONÓTONO NAE 3SAT. Temos dois tipos de cláusulas em  $C$ : aquelas com dois literais verdadeiros e um falso (*cláusula tipo 1*) e aquelas com um literal verdadeiro e dois falsos (*cláusula do tipo 2*).

Se a variável  $x_i$  é verdadeira (resp. falsa), então inclua  $x_i^j, y_i^j$  em  $H_1$  (resp.  $H_2$ ) e  $x_2^j y_2^j$  em  $H_2$  (resp.  $H_1$ ), para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pelas Observações 5.3 e 6.45 e pela Afirmação 5.7 temos que, para cada cláusula  $c_j$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  na qual  $x_i$  aparece,  $c_i^j, d_i^j, h_i^j \in H_1$  (resp.  $H_2$ ).

Se tivermos um cláusula tipo 1 (resp. tipo 2)  $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$  e, supondo, sem perda de generalidade que,  $l_1^j$  e  $l_2^j$  são literais verdadeiros (resp. falsos), então  $r_2^j$  e  $r_3^j$  estão em  $H_1$  (resp.  $H_2$ ) e  $r_1^j$  está em  $H_2$  (resp.  $H_1$ ). Com  $H_1$  e  $H_2$  bem definidos pela atribuição verdade para  $(X, C)$ , resta provar que  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$  e  $(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$  são instâncias SIM para GRAFO DE LIMIAR-SP. Com intuito de provar isto, vamos enunciar as seguintes Afirmações.

**Afirmação 5.9.** *A análise local de  $H_1$  e  $H_2$ , i.e., analisar se  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$  e*

$(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$  são instâncias SIM para GRAFO DE LIMIAR-SP considerando um subgrafo induzido por vértices relacionados a apenas uma cláusula, para cada cláusula, é equivalente a análise global, i.e., analisar se  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$  e  $(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$  são instâncias SIM para GRAFO DE LIMIAR-SP considerando todos os seus vértices.

*Demonstração.* Primeiro, vamos considerar os vértices  $x_1^i, y_1^i, x_2^i, y_2^i$ . Por construção de  $(V, E^1, E^3)$ , ambos pares de vértices não podem estar juntos em  $H_1$  ou em  $H_2$ . Então, é claro que: primeiro, quando olhamos localmente para os subgrafos induzidos aos quais eles pertencem, eles estão isolados; segundo, eles podem estar relacionados a diversas cláusulas, mas eles ainda estão isolados quando olhamos globalmente para  $G^1[V_{H_1}]$  ou  $G^1[V_{H_2}]$ . Assim, se os removermos baseados na análise local, teremos certeza que tal remoção é permitida quando consideramos os grafos  $H_1$  e  $H_2$  inteiramente.

Cada vértice restante de  $V$  está relacionado a uma única cláusula. Além disso, entre componentes variáveis, não temos arestas proibidas. Podemos dizer o mesmo sobre os componentes cláusula. Logo, se um destes vértices é considerado isolado na análise local em  $G^1[V_{H_i}]$  ou em  $G^3[V_{H_i}]$ ,  $i = 1, 2$ , então ele também é isolado quando consideramos o grafo inteiro  $G^1[V_{H_i}]$  ou  $G^3[V_{H_i}]$ ,  $i = 1, 2$ .  $\square$

**Afirmção 5.10.**  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$  e  $(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$  são instâncias SIM para GRAFO DE LIMIAR-SP.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos trabalhar com  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$ . De acordo com a Proposição 5.1 e a Afirmção 5.9, vamos descrever um esquema de eliminação de vértices isolados para  $V_{H_1}$  considerando  $H_1$  induzido por vértices relacionados a uma cláusula. Como temos dois tipos de cláusula, vamos lidar com eles separadamente. A fim de simplificar a análise e, como estamos fazendo uma redução a partir de MONÓTONO NAE 3SAT, vamos assumir que todas as variáveis são literais.

- Cláusula tipo 1:  $c_j = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são verdadeiros.

Neste caso,  $\{x_1^i, y_1^i, x_2^3, y_2^3, c_i^j, d_i^j, h_i^j, r_2^j, r_3^j\} \in V_{H_1}$ , para  $i = 1, 2$ . Considere os conjuntos abaixo:

- $I_1 = \{x_1^i, y_1^i, x_2^3, y_2^3\}$ , for  $i = 1, 2$ ;
- $I_2 = \{h_1^j\}$ ;
- $I_3 = \{c_1^j, d_1^j\}$ ;
- $I_4 = \{r_2^j\}$ ;
- $I_5 = \{h_2^j, r_3^j\}$ ;
- $I_6 = \{c_2^j, d_2^j\}$

Afirmamos que, seguindo a ordem descrita para os conjuntos e qualquer ordem dentro dos conjuntos acima, definimos um esquema de eliminação de vértices isolados.

Primeiro,  $I_1$  é um conjunto independente em  $G^1[\bigcup_{q=1,\dots,6} I_q]$ . Além disso, os únicos vizinhos de  $x_1^i$  e  $y_1^i$  em  $G^1[V_{H_1}]$  são  $x_2^i, y_2^i$  (e vice-versa), que não pertencem a  $V_{H_1}$ , para  $i = 1, 2$ . Então,  $x_1^i, y_1^i, x_2^3, y_2^3$  para  $i = 1, 2$  são vértices isolados em  $G^1[\bigcup_{q=1,\dots,6} I_q]$  e então eles podem ser removidos. Seja  $A$  o grafo resultante. O único vizinho de  $h_1^j$  é  $r_1^j$  que não está em  $A$ . Então, podemos remover  $h_1^j$  de  $A$ , obtendo  $B$ . Em  $I_3$  temos  $c_1^j, d_1^j$ , que não é isolado em  $B$ , uma vez que são adjacentes. Mas, em  $G^3[V_B \cap \bigcup_{q=3,\dots,6} I_q]$ , eles são isolados. Então, podem ser removidos e chamaremos de  $C$  o grafo resultante. Seguindo a ordem proposta, somos capazes de remover  $r_2^j$ , que é claramente isolado em  $G^3[V_C \cap \bigcup_{q=4,\dots,6} I_q]$ . Seja  $D$  o grafo que obtemos após esta remoção.  $D$  tem dois vértices isolados  $h_2^j$  e  $r_3^j$  que podem ser removidos, gerando o grafo  $F$ . Finalmente,  $F$  é um grafo de limiar e terminamos a prova.

- Cláusula tipo 2:  $c_j = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  são falsos.

Neste caso,  $\{x_1^3, y_1^3, x_2^i, y_2^i, c_3^j, d_3^j, h_3^j, r_1^j\} \in V_{H_1}$ , para  $i = 1, 2$ . Considere os conjuntos abaixo:

- $I_1 = \{x_1^3, y_1^3, x_2^i, y_2^i, h_3^j, r_1^j\}$ , para  $i = 1, 2$ ;
- $I_2 = \{c_3^j, d_3^j\}$ ;

Afirmamos que, seguindo a eliminação descrita pela ordem dos conjuntos e em qualquer ordem dentro de cada um deles, definimos um esquema de eliminação de vértices isolados.

Note que  $I_1$  é um conjunto independente em  $G^1[I_1 \cup I_2]$  e cada vértice em  $I_1$  é isolado em  $G^1[I_1 \cup I_2]$ . Então, podemos remover todos eles de  $V_{H_1}$  obtendo um grafo  $A$  que é um grafo de limiar.

A análise local de  $(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$  ocorre de maneira similar. Observe que, quando analisamos uma cláusula tipo 1, temos o mesmo esquema de eliminação de vértices isolados que apresentamos acima para o caso de cláusulas tipo 2, por simetria. Quando analisamos uma cláusula tipo 2, temos o mesmo esquema de eliminação de vértices isolados que apresentamos acima no caso de uma cláusula tipo 1, novamente por simetria.

Então, provamos que  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$  e  $(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$  são instâncias SIM para GRAFO DE LIMIAR-SP.

□

Para finalizar a prova do Lema 5.8, após obtermos os grafos sanduíche para as instâncias  $(V_{H_1}, E_{H_1}^1, E_{H_1}^3)$  and  $(V_{H_2}, E_{H_2}^1, E_{H_2}^3)$ , resta adicionarmos todas as arestas entre

vértices de  $H_1$  e  $H_2$  com a finalidade de obtermos uma junção dos dois grafos. Observe que todas estas arestas são permitidas, já que, pela Observação 5.3, arestas proibidas atribuem vértices ao mesmo grafo de limiar.  $\square$

Assim, concluímos a prova de NP-completude de JTT-SP descrita pelo Teorema 5.2 contrariando a intuição inicial que apontava uma solução polinomial para este problema e, conseqüentemente uma solução polinomial para COGRAFO-(2,1)-SP. Instigados por tal resultado e, sem solução para COGRAFO-(2,1)-SP, prosseguimos ao estudo deste problema, descrito na próxima seção.

## 5.2 PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS-(2, 1)

Nesta seção provaremos que COGRAFO-(2,1)-SP é NP-completo. Este problema pode ser formulado da seguinte maneira:

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS-(2, 1) - (COGRAFO-(2, 1)-SP)

*Entrada:* A tripla  $(V, E^1, E^3)$  tal que  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  cografo-(2, 1) tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ ?

**Teorema 5.11.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS-(2, 1) é NP-completo.*

*Demonstração.* Vamos fazer uma redução polinomial a partir do JTT-SP, provado ser NP-completo no Teorema 5.2. Seja  $(V, E^1, E^3)$  uma instância genérica para JTT-SP. Vamos assumir que não existe um vértice  $u$  tal que  $N_{G^3}(u) = \emptyset$ , já que a remoção deste tipo de vértices não afeta a propriedade de ser a junção de dois grafos de limiar. Primeiramente, vamos construir uma instância particular  $(V', E'^1, E'^3)$  para COGRAFO-(2, 1)-SP. Segundo, vamos provar que, se existe um grafo sanduíche que seja a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ , então existe um grafo sanduíche cografo-(2, 1) para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Terceiro, provaremos que se existe um grafo sanduíche cografo-(2, 1) para  $(V', E'^1, E'^3)$ , então existe um grafo sanduíche que é a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ .  $\square$

*Construção de uma instância particular  $(V', E'^1, E'^3)$  para COGRAFO-(2, 1)-SP:*

- $V' = V \cup \{a, b, c, d\}$ ,
- $E'^1 = E^1 \cup \{ab, bc, cd, da\} \cup \{xy | x \in V, y \in \{a, b\}\}$
- $E'^3 = E^3 \cup \{ac, bd\}$

Os Lemas abaixo completam a prova do Teorema 5.11.



**Lema 5.12.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo com um vértice universal  $u$ .  $G$  é um uma junção de dois grafos de limiar se e somente se  $G \setminus \{u\}$  é a junção de dois grafos de limiar.*

*Demonstração.* Suponha que  $G$  seja a junção de dois grafos de limiar. Como “ser a junção de dois grafos de limiar” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzidos,  $G \setminus \{u\}$  é também a junção de dois grafos de limiar. Reciprocamente, suponha que  $G \setminus \{u\}$  seja a junção de dois grafos de limiar. Se adicionarmos um vértice universal  $u'$  a  $G \setminus \{u\}$ , então  $u'$  pode ser atribuído a qualquer grafo de limiar de  $G \setminus \{u\}$  sem arruinar a propriedade de ser um grafo de limiar [15]. O grafo resultante ainda é a junção de dois grafos de limiar, uma vez que independentemente para qual grafo de limiar  $u'$  foi atribuído, ele será adjacente a cada vértice do outro grafo de limiar.  $\square$

**Lema 5.13.** *Se existe um grafo sanduíche que é a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ , então existe um grafo sanduíche cografo-(2, 1) para  $(V', E'^1, E'^3)$ .*

*Demonstração.* De fato, se existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  que seja a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$  tal que  $H_1$  e  $H_2$  são dois grafos de limiar de  $G$ , pelo Lema 5.12, podemos assumir que  $G$  não tem vértices universais. Vamos definir  $G' = (V', E')$  onde  $V' = V \cup \{a, b, c, d\}$ ,  $E' = E \cup \{ab, bc, cd, da\} \cup \{xy | x \in V, y \in \{a, b\}\} \cup E^* \cup E^{**}$ , onde  $E^* = \{cy | \forall y \in H_2\}$  e  $E^{**} = \{dz | \forall z \in H_1\}$ . Claramente,  $G'$  é um grafo sanduíche para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Portanto, para finalizar a prova, afirmamos que  $G'$  é um cografo-(2, 1) e provaremos isto mostrando que  $G'$  ainda é a junção de dois grafos de limiar. Atribuiremos  $a, c$  a  $H_1$ , uma vez que estes vértices precisam estar juntos no mesmo grafo de limiar, pelo Lema 5.3 e 6.45. Pela mesma razão, atribuiremos  $b, d$  a  $H_2$ .  $a$  e  $b$  (resp.  $c$  e  $d$ ) são vértices universais (resp. isolados) dentro dos grafos de limiar aos quais foram adicionados. Então, suas adições não arruinam a propriedade dos grafos serem grafos de limiar [15]. Além disso,  $a, c$  são adjacentes a todo vértice de  $H_2$  e  $b, d$  são adjacentes a todo vértice de  $H_1$ . Portanto,  $G'$  é a junção de dois grafos de limiar e, conseqüentemente, um cografo-(2, 1).  $\square$

**Lema 5.14.** *Se existe um grafo sanduíche cografo-(2, 1) para  $(V', E'^1, E'^3)$ , então existe um grafo sanduíche que é a junção de dois grafos de limiar para  $(V, E^1, E^3)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G' = (V', E')$  um grafo sanduíche cografo-(2, 1) para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Pelo Teorema 4.14, ou  $G'$  tem uma biclique isolada, ou um vértice universal ou  $G'$  é a junção de dois grafos de limiar. Como  $G'^1$  é conexo,  $G'$  não pode ter uma biclique isolada. Além disso, por construção,  $G'^3$  não tem vértice isolado, então  $G'$  não tem vértices universais. Logo,  $G'$  é a junção de dois grafos de limiar. Considere o grafo  $G = (V^*, E^*)$  construído da seguinte forma  $V^* = V' \setminus \{a, b, c, d\}$  e  $E^* = E' \setminus (\{ab, bc, cd, da\} \cup \{xy | x \in V, y \in \{a, b\}\} \cup E^{**} \cup E^{***})$ , onde  $E^{**} = \{cy | \forall y \in H_2\}$  e  $E^{***} = \{dz | \forall z \in H_1\}$ . Como “ser a junção de dois grafos de limiar” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzidos,  $G$  é a junção de dois grafos de limiar.  $\square$

Como o complemento de um cografo- $(2, 1)$  é um cografo- $(1, 2)$  e, de acordo com o Fato 2.1, podemos enunciar o Corolário 5.15.

**Corolário 5.15.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(1, 2)$  é NP-completo.*

Felizmente, o trabalho com JTT-SP não foi em vão e pôde ser utilizado na prova da NP-completude do Teorema 5.11. Motivados por este resultado, seguimos com o estudo de PROBLEMAS SANDUÍCHE para cografos- $(k, \ell)$ , para todo  $k, \ell$ .

### 5.3 PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$

O objetivo desta seção é generalizar os resultados obtidos na seção anterior. Provaremos, inicialmente que, COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP, para  $k$  e  $\ell$  inteiros positivos tais que  $k + \ell \geq 3$ , é um problema NP-completo.

**Teorema 5.16.** *Para  $k, \ell$  inteiros positivos fixos tais que  $k + \ell \geq 3$ , COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP é NP-completo.*

*Demonstração.* COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP está em NP, uma vez que podemos reconhecer um cografo- $(k, \ell)$  em tempo linear [7] e podemos decidir em tempo polinomial se um grafo é um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$ . Provaremos que COGRAFO- $(k, \ell)$  é NP-completo, para  $k, \ell$  inteiros positivos fixos, tais que  $k + \ell \geq 3$ , por indução sobre  $k$  e  $\ell$  usando o Teorema 5.11 e o Corolário 5.15 como bases da indução e os Lemas 5.17 e 5.20 como passos indutivos. □

**Lema 5.17.** *Se COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP é NP-completo, então COGRAFO- $(k + 1, \ell)$ -SP é NP-completo.*

*Demonstração.* Seja  $(V, E^1, E^3)$  uma instância genérica de COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP. Construiremos um instância particular  $(V', E'^1, E'^3)$  para COGRAFO- $(k + 1, \ell)$ -SP da seguinte forma:

- $V' = V \cup \{a_1, \dots, a_{\ell+1}\};$
- $E'^1 = E^1 \cup \{a_i v\}, i = 1, \dots, \ell + 1$  e  $\forall v \in V;$
- $E'^3 = E^3 \cup \{a_i a_j\}, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, \ell + 1\}.$

**Afirmção 5.18.** *Se existe um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então existe um grafo sanduíche cografo- $(k + 1, \ell)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ . Afir-  
mamos que  $G' = (V', E')$  é um grafo sanduíche cografo- $(k+1, \ell)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ , onde  
 $E' = E \cup E'^1$ . De fato, é claro que  $G'$  é um grafo sanduíche para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Além disso,  
 $G'$  é um cografo, uma vez que foi obtido pela junção de dois cografos e podemos atribuir  
cada vértice adicionado a um novo conjunto independente em  $G'$ .  $\square$

**Afirmção 5.19.** *Se existe um grafo sanduíche cografo- $(k+1, \ell)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ , então  
existe um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G'$  um grafo sanduíche cografo- $(k+1, \ell)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Afir-  
mamos que  $G = (V, E)$  é um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ , onde  $E =$   
 $E' \setminus \{a_1, \dots, a_{\ell+1}\}$ .  $G$  é claramente um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$ . Note que  $G$  é  
um cografo, uma vez que “ser cografo” é uma propriedade hereditária para subgrafos in-  
duzidos. Além disso, observe que, em  $G'$ , pelo menos um vértice de  $\{a_1, \dots, a_{\ell+1}\}$  estava  
em um conjunto independente, que, por construção, não poderia conter um vértice de  $V$ .  
Então, removendo o conjunto  $\{a_1, \dots, a_{\ell+1}\}$ , obteremos um cografo- $(k, \ell)$ .  $\square$

Isto conclui a prova do Lema 5.18.  $\square$

**Lema 5.20.** *Se COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP é NP-completo, então COGRAFO- $(k, \ell+1)$ -SP é NP-  
completo.*

*Demonstração.* Seja  $(V, E^1, E^3)$  uma instância genérica de COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP. Vamos  
construir uma instância particular  $(V', E'^1, E'^3)$  para COGRAFO- $(k, \ell+1)$ -SP da seguinte  
forma:

- $V' = V \cup \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ ;
- $E'^1 = E^1 \cup \{a_i a_j\}, i \neq j, i, j \in \{1, \dots, k+1\}$ ;
- $E'^3 = E^3 \cup \{a_i v\}, i = 1, \dots, k+1$  e  $\forall v \in V$ .

**Afirmção 5.21.** *Se existe um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então  
existe um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell+1)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G = (V, E)$  um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ . Afir-  
mamos que  $G' = (V', E')$  é um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell+1)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ , onde  
 $E' = E \cup E'^1$ . De fato, é claro que  $G'$  é um grafo sanduíche para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Além disso,  
 $G'$  é um cografo, uma vez que foi obtido pela união de cografos e podemos atribuir cada  
vértice adicionado a uma nova clique em  $G'$ .  $\square$

**Afirmção 5.22.** *Se existe um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell+1)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ , então  
existe um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ .*

*Demonstração.* Seja  $G'$  um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell + 1)$  para  $(V', E'^1, E'^3)$ . Afir-  
mamos que  $G = (V, E)$  é um grafo sanduíche cografo- $(k, \ell)$  para  $(V, E^1, E^3)$ , onde  $E =$   
 $E' \setminus \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ .  $G$  é claramente um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$ . Note que  $g$  é um  
cografo, uma vez que “ser cografo” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzi-  
dos. Além disso, observe que, em  $G'$ , pelo menos um vértice de  $\{a_1, \dots, a_{k+1}\}$  estava em  
uma clique que, por construção, não poderia conter um vértice de  $V$ . Logo, removendo o  
conjunto  $\{a_1, \dots, a_{k+1}\}$ , obteremos um cografo- $(k, \ell)$ .  $\square$

Isto termina a prova do Lema 5.20.  $\square$

A fim de classificar completamente a dicotomia P versus NP-completo, resta-nos de-  
terminar a complexidade computacional dos casos que possuem parâmetros  $k, \ell$  nulos.  
Começaremos pelo PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(0, \ell)$ ,  $\ell \geq 3$  fixo, formu-  
lado abaixo.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(0, \ell)$  - (COGRAFO- $(0, \ell)$ -SP)

*Entrada:* A tripla  $(V, E^1, E^3)$  tal que  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  cografo- $(0, \ell)$  tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ ?

O Teorema 5.23 prova que COGRAFO- $(0, \ell)$ -SP, para  $\ell \geq 3$  fixo é NP-completo.

**Teorema 5.23.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(0, \ell)$ ,  $\ell \geq 3$  fixo, é NP-  
completo.*

*Demonstração.* Claramente, COGRAFO- $(0, \ell)$ -SP está em NP. Para finalizar a prova da  
NP-completude, vamos fazer uma redução polinomial a partir do problema NP-completo  
COBERTURA POR  $\ell$  CLIQUES, enunciado no Capítulo 2 para o COGRAFO- $(0, \ell)$ -SP. Para  
tal, apresentaremos a instância particular  $G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2)$  construída a partir  
de uma instância genérica  $H = (V_H, E_H)$  para COBERTURA POR  $\ell$  CLIQUES. Em seguida,  
o Lema 5.24 provará que se existe uma cobertura por  $\ell$  cliques para  $H$  então existe um  
grafo sanduíche cografo- $(0, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ . O Lema 5.25 provará que se existe um grafo  
sanduíche cografo- $(0, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ , então existe uma cobertura por  $\ell$  cliques para  $H$ .  $\square$

*Construção da instância particular  $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$  para COGRAFO-  
 $(0, \ell)$ -SP:*

Considere uma instância genérica  $H = (V_H, E_H)$  para o problema da COBERTURA  
POR  $\ell$  CLIQUES. Vamos construir uma instância particular  $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$   
do COGRAFO- $(0, \ell)$ -SP para  $\ell \geq 3$  fixo da seguinte forma:

$$V = V_H$$

$$E^1 = \emptyset$$

$$E^2 = E_H$$

**Lema 5.24.** Se  $H = (V_H, E_H)$  tem uma cobertura por  $\ell$  cliques, então existe um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  cografo- $(0, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $V_H$  pode ser particionado em  $\ell$  cliques  $K^1, K^2, \dots, K^\ell$  tais que  $V_H = K^1 \cup K^2 \cup \dots \cup K^\ell$ . Vamos construir o grafo sanduíche  $G = (V, E)$  fazendo:

$$V = V_H$$

$$E = E(G^2[K^1]) \cup E(G^2[K^2]) \cup \dots \cup E(G^2[K^\ell])$$

Observe que  $G$  tem o mesmo conjunto de vértices que  $G^1$  e  $G^2$ , tem todas as arestas obrigatórias e toda aresta de  $E$  pertence a  $E^2$ . Além disso,  $G$  é cordal pois é composto por  $\ell$  componentes conexas que são cliques. Note ainda que  $G$  é cografo, uma vez que é a união de  $\ell$  cliques, ou seja, de  $\ell$  cografos. Portanto,  $G$  é cografo- $(0, \ell)$ . □

**Lema 5.25.** Se existe um grafo sanduíche cografo- $(0, \ell)$  para  $(G^1, G^2)$ , então existe uma cobertura por  $\ell$  cliques para  $H = (V_H, E_H)$ .

*Demonstração.* Suponha que tenhamos um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  cografo- $(0, \ell)$  para a instância  $(G^1, G^2)$ . Neste caso, existe uma cobertura por  $\ell$  cliques para  $G$ . Como  $G$  é subgrafo de  $G^2$  com o mesmo conjunto de vértices e, por construção,  $G^2 = H$ , temos que  $H$  também tem uma cobertura por  $\ell$  cliques. □

De acordo com o Fato 2.1 e sabendo que o complemento de cografo- $(0, \ell)$ , para  $\ell \geq 3$  é cografo- $(k, 0)$  para  $k \geq 3$  temos que:

**Corolário 5.26.** O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, 0)$ ,  $k \geq 3$  fixo é NP-completo.

Para finalizar a classificação P versus NP-completo da complexidade computacional de COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP basta solucionarmos COGRAFO- $(2, 0)$ -SP e COGRAFO- $(0, 2)$ -SP, uma vez que COGRAFO- $(1, 0)$ -SP (resp. COGRAFO- $(0, 1)$ -SP) tem solução trivial. De fato, basta verificarmos se  $G^1$  (resp.  $G^2$ ) é um conjunto independente (resp. clique). Caso contrário, a resposta é NÃO. A seguir, apresentaremos um algoritmo em tempo polinomial para COGRAFO- $(2, 0)$ -SP. Note que, com este resultado, completaremos a classificação da dicotomia PxNP-completo da complexidade computacional de COGRAFO- $(k, \ell)$ -SP.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(2, 0)$  - (COGRAFO- $(2, 0)$ -SP)

*Entrada:* A tripla  $(V, E^1, E^3)$  tal que  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  cografo- $(2, 0)$  tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ ?

Já mostramos, no Capítulo 4 na Proposição 4.4 que um cografo bipartido tem componentes conexas que são grafo bipartidos completos, ou bicliques, por questão de simplicidade. Claramente, para que haja um grafo sanduíche para uma instância  $(G^1, G^2)$  de COGRAFO- $(2, 0)$ -SP,  $G^1$  que consideraremos conexo (caso contrário, basta resolver

o problema para cada componente conexa) deve ser um grafo bipartido. Caso contrário, a resposta para o problema é NÃO. Resta verificarmos se, em  $G^2$ , temos as arestas necessárias para completarmos a biclique. Caso tais arestas não estejam presentes em  $G^2$  temos que não existe um grafo sanduíche cografo-(2,0) para  $(G^1, G^2)$ .

O Algoritmo soluciona COGRAFO-(0,2)-SP.

---

**Algoritmo 4:** Algoritmo para solucionar COGRAFO-(0,2)-SP

---

```

1 início
2   se  $G^1$  é bipartido então
3      $E \leftarrow E^1$ ;
4     para cada componente conexo  $B_i = (X_i, Y_i)$  de  $G^1$  faça
5       se  $xy \in E^2 \forall x \in X_i$  e  $\forall y \in Y_i$  então
6          $E \leftarrow E \cup \{xy \forall x \in X_i, \forall y \in Y_i\}$ ;
7         Verifique o próximo componente conexo
8       senão
9         retorna Não existe G grafo sanduíche cografo-(2,0) para  $(G^1, G^2)$ ;
10      fim
11     fim
12     retorna  $G = (V, E)$  grafo sanduíche cografo-(2,0) para  $(G^1, G^2)$ 
13   senão
14     retorna Não existe G grafo sanduíche cografo-(2,0) para  $(G^1, G^2)$ 
15   fim
16 fim

```

---

**Lema 5.27.** Dados  $(G^1 = (V, E^1), G^2 = (V, E^2))$ , o Algoritmo 4 decide corretamente e em tempo polinomial se existe  $G = (V, E)$  um grafo sanduíche cografo-(2,0) para COGRAFO-(2,0)-SP.

*Demonstração.* Suponha que o Algoritmo 4 tenha retornado  $G = (V, E)$  como resposta a COGRAFO-(2,0)-SP. Neste caso  $G^1$  é bipartido e todo componente conexo de  $G^1$  pode ser transformado em biclique através da adição de arestas de  $G^2$ . Claramente,  $G = (V, E)$  é um cografo-(2,0).

Agora, suponha que o Algoritmo 4 tenha retornado NÃO como resposta a COGRAFO-(2,0)-SP. Neste caso, ou  $G^1$  não é bipartido, o que claramente é condição suficiente para resposta NÃO, ou para algum componente conexo  $B_i$  de  $G^1$  faltam arestas de  $G^2$  para completar a biclique. Note que se não é possível transformar tal componente em biclique, pela Proposição 4.4, o grafo resultante não é um cografo bipartido.

Logo, o Algoritmo 4 decide corretamente de uma dada instância de COGRAFO-(2,0)-SP é instância SIM ou NÃO.

Note que o Algoritmo 4 roda em tempo  $O((n+m)m)$ , considerando  $m = |E^2|$  e  $n = |V|$ . □

**Teorema 5.28.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(2,0)$  é solucionável em tempo polinomial.*

*Demonstração.* Segue do Lema 5.27. □

Como cografo- $(2,0)$  é a classe complementar da classe cografo- $(0,2)$ , temos, pelo Fato 2.1 o seguinte Corolário:

**Corolário 5.29.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(0,2)$  é solucionável em tempo polinomial.*

Neste capítulo, com base na caracterização apresentada no Capítulo 4, introduzimos o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA A JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR, que provamos ser NP-completo. Além disso, trabalhamos com o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ , que provamos ser NP-completo para  $k + \ell \geq 3$ ,  $k$  e  $\ell$  inteiros positivos fixos. Parte destes resultados foram apresentados no WG'15 e constarão na edição especial do Lecture Notes in Computer Science do evento. O artigo completo que inclui todos os resultados descritos acima concorreu ao prêmio Roberto Diégues Galvão do SBPO 2015 entre os cinco melhores artigos do simpósio. Este capítulo apresenta ainda, os resultados que completam a classificação da dicotomia P versus NP-completo do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ .

# Capítulo 6

## Problemas Probe em Grafos

Neste capítulo, introduziremos os PROBLEMAS PROBE EM GRAFOS bem como apresentaremos nossos resultados para este problema em classes específicas de grafos.

### 6.1 Introdução ao Problema Probe em Grafos

Em 1994, no cenário de mapeamento físico de DNA, surgem, introduzidos por Zhang et al. [68], GRAFOS PROBE DE INTERVALO como um novo modelo teórico de grafos [69, 70]. Mais tarde, o conceito foi generalizado para qualquer classe de grafos e pode ser formalizado da seguinte maneira [11]:

**Definição 6.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma classe de grafos. Um grafo  $G = (V, E)$  é um grafo probe  $\mathcal{C}$  se seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto  $P$  de vértices probes e em um conjunto independente  $N$  de vértices não probes, tal que  $G$  seja um subgrafo gerador de um grafo de  $\mathcal{C}$  que pode ser construído a partir de  $G$  através da adição de arestas entre alguns vértices de  $N$ . Neste caso, dizemos que  $G$  pode ser imerso em um grafo de  $\mathcal{C}$ .*

Se a partição do conjunto de vértices em *probes* e *não probes* é um dado de entrada e se  $G$  pode imerso em um grafo de  $\mathcal{C}$ , então  $G$  é dito *grafo probe particionado de  $\mathcal{C}$* . Caso contrário,  $G$  é dito *grafo probe de  $\mathcal{C}$* . Chamamos o grafo  $H$ , obtido a partir de  $G$  pela adição de arestas entre alguns vértices de  $N$  de *imersão de  $G$* . Nós denotamos um grafo probe particionado como  $G = (P + N, E)$  e, sempre que esta notação for usada, entende-se que trabalhamos com o problema na versão particionada e que  $N$  é um conjunto independente. Neste caso, usaremos a notação  $PP\text{-}\mathcal{C}$ . Quando estivermos lidando com a versão *não particionada* do problema, denotaremos por  $PROBE \mathcal{C}$ .

É interessante observar que a versão particionada do PROBLEMA PROBE é um caso particular de PROBLEMA SANDUÍCHE (ver Capítulo 2). Fazendo uma analogia com o PROBLEMA SANDUÍCHE, no PROBLEMA PROBE, as arestas de  $G$  são todas *obrigatórias*,



as arestas entre vértices em  $N$  são *opcionais* e as arestas com pelo menos um extremo em  $P$ , são *proibidas*. Sendo assim, temos:

**Fato 6.2.** *Se o  $\Pi$ -SP é polinomial, então PP- $\Pi$  é também solucionável em tempo polinomial.*

**Fato 6.3.** *Se PP- $\Pi$  é NP-completo, então  $\Pi$ -SP é NP-completo.*

O PROBLEMA PROBE PARTICIONADO já foi estudado para diversas classes de grafos, tais como *grafos split, cordais, fortemente cordais, grafos de limiar* dentre diversas outras classes, como pode ser visto no survey [11]. A versão não particionada para essas classes foi estudada com sucesso para grafos split, cordais e grafos de limiar, sendo polinomial em todos os casos, bem como a versão particionada. Entretanto, para grafos fortemente cordais, sabe-se apenas que a versão particionada é polinomial.

A relação entre a complexidade computacional dos problemas probes (particionados e não particionados) não é algo conhecido. Intuitivamente, acredita-se que o caso não particionado seja mais “difícil” do que o caso particionado. Entretanto, não existe ainda nenhum resultado teórico que comprove isso. Aliás, pensava-se inclusive que, se o problema de reconhecimento fosse polinomial, então ambas as versões do problema probe seriam também polinomiais. Há poucos anos, o primeiro problema probe particionado para uma determinada propriedade para a qual o problema de reconhecimento é sabido polinomial, foi provado ser NP-completo [28]. Neste artigo, Figueiredo et al. trabalham com a propriedade “ser grafo  $(k, \ell)$  e provam que PROBE PARTICIONADO  $(k, \ell)$  é NP-completo para todo  $k, \ell$  tais que  $k^2 + \ell^2 \geq 8$  e polinomial, caso contrário, classificando totalmente a dicotomia da complexidade P versus NP-completo do PROBE PARTICIONADO  $(k, \ell)$ . Desta maneira, os autores apresentaram o problema PROBE PARTICIONADO  $(2, 2)$  como o primeiro problema probe particionado para uma classe cujo problema de reconhecimento é polinomial, refutando a conjectura de Le e Ridder [67]. A versão não particionada do mesmo problema também é tratada neste artigo e provada ser NP-completa, refutando outra conjectura de Le e Ridder [67], que afirmava que a versão não particionada de um problema probe para uma determinada classe cujo reconhecimento é sabido polinomial é também polinomial. Note que a classe dos grafos  $(2, 2)$  é auto-complementar, o que faz com que as conjecturas sejam falsas mesmo quando restritas a classes auto-complementares. Em um segundo artigo, os mesmos autores trabalham com o a versão não particionada do problema probe para a classe dos grafos  $(k, \ell)$ . Mais uma vez, a dicotomia da complexidade P versus NP-completo do PROBE  $(k, \ell)$  é completamente classificada, de tal modo que para  $k + \ell \geq 3$  o problema é classificado como NP-completo e polinomial nos outros casos [59].

Assim como não conhecemos ainda uma relação entre problemas probes, também não sabemos relacionar a complexidade computacional das versões probes com o PROBLEMA SANDUÍCHE. Como já foi dito, é clara a relação da versão particionada com o

PROBLEMA SANDUÍCHE, uma vez que o PROBE PARTICIONADO  $\mathcal{C}$  é um caso particular do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA  $\mathcal{C}$ . Desta forma, se o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA  $\mathcal{C}$  é solucionável em tempo polinomial, a complexidade computacional do PROBE PARTICIONADO  $\mathcal{C}$  é a mesma. Caso contrário, até o momento nada podemos afirmar sobre o PROBE PARTICIONADO. Será que tal relação existe? Neste texto, vamos apresentar classes infinitas para as quais há relação entre o PROBLEMA SANDUÍCHE e as versões particionada e não particionada do PROBLEMA PROBE.

Em [40], o único problema que ainda permanece em aberto é o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS. No que diz respeito ao PROBE PERFEITO, também não sabemos classificar a complexidade computacional para ambas as versões. Existem duas conjecturas bastante famosas que dizem respeito a classe dos grafos perfeitos:

**Conjectura dos grafos probe perfeitos:** Existe um algoritmo em tempo polinomial para testar se um grafo particionado  $G = (P + N, E)$  é probe perfeito.

**Conjectura forte dos grafos probe perfeitos:** Existe um algoritmo em tempo polinomial para testar se um grafo é probe perfeito.

No decorrer deste capítulo, vamos relacionar ambas conjecturas.

Além disso, vamos trabalhar com a classe dos cografos-(2,1) e (1,2) como uma aplicação da caracterização obtida no capítulo 4.

## 6.2 PROBE COGRAFO-(2, 1) e (1, 2)

O objetivo desta seção é analisar a complexidade computacional do PROBE COGRAFO-(2,1). Como corolário, é possível analisar também a complexidade do PROBE COGRAFO-(1,2), uma vez que as duas classes envolvidas são complementares.

Inicialmente vamos trabalhar com o problema na versão particionada, definida a seguir.

PROBE PARTICIONADO COGRAFO-(2,1)

*Entrada:* Um grafo  $G = (P + N, E)$  tal que  $N$  é um conjunto independente.

*Pergunta:* Existe um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja um cografo-(2,1)?

O resultado principal que iremos apresentar é uma aplicação da caracterização estrutural e decomposição para cografos-(2,1) e (1,2), apresentada no capítulo 4.

A partir da caracterização descrita no Teorema 4.14, a pergunta sobre a complexidade computacional de PROBE COGRAFO-(2,1) e PP-JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR veio à tona.

Vamos mostrar que, similarmente ao PROBE COGRAFO e PP-GRAFOS DE LIMAR, estes dois problemas são solucionáveis em tempo polinomial. Nosso próximo passo

foi considerar o PROBLEMA SANDUÍCHE para ambas as classes. Surpreendentemente, obtivemos dois novos exemplos da não-monotonicidade dos PROBLEMAS SANDUÍCHE. Além disso, ao utilizarmos o Teorema 4.14 para solucionar COGRAFO-(2, 1)-SP, uma outra questão interessante e motivadora surgiu: Dada uma propriedade  $\Pi$  para a qual  $\Pi$ -SP é solucionável em tempo polinomial,  $(\Pi \oplus \Pi)$ -SP também está em P?

Neste capítulo, além de reconhecer em tempo polinomial PROBE COGRAFO-(2, 1) e PP-JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR, nós respondemos negativamente à questão posta anteriormente e, conseqüentemente apresentamos o primeiro problema NP-completo do tipo  $(\Pi \oplus \Pi)$ -SP com  $\Pi$ -SP em P. Com este resultado em mãos, provaremos que COGRAFO-(2, 1)-SP é NP-completo. Ambos os resultados corroboram o fato de que os PROBLEMAS SANDUÍCHE não são monótonos com respeito a sua complexidade computacional.

### 6.2.1 PROBE PARTICIONADO JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR

Vamos provar que um grafo pode ser reconhecido PROBE PARTICIONADO JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR em tempo polinomial. Este resultado é uma aplicação do Teorema 4.14, especificamente da decomposição apresentada.

PROBE PARTICIONADO JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR

*Entrada:* Um grafo  $G = (P + N, E)$  tal que  $N$  é um conjunto independente.

*Pergunta:* Existe um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja uma junção de dois grafos de limiar?

Antes de seguirmos para os nosso Teorema principal, vamos descrever resultados e definições da literatura que nos fornecem embasamento teórico sobre o tema.

**Definição 6.4** (H.N. de Ridder [30]). *Um vértice  $x$  é probe grafo de limiar se*

1.  $x \in P$  e  $x$  é isolado ou universal, ou
2.  $x \in N$  e  $x$  é isolado ou adjacente a todos os vértices probes de  $G$ .

**Teorema 6.5** (H.N. de Ridder [30]). *Um grafo particionado  $G = (P + N, E)$  é um probe grafo de limiar se e somente se todo subgrafo induzido de  $G$  tem um vértice probe grafo de limiar.*

De maneira similar, definimos:

**Definição 6.6.** *Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um vértice  $x \in V$  é probe universal se*

- $x \in P$  e  $x$  é universal, ou
- $x \in N$  e  $x$  é adjacente a todos os vértices probes de  $G$ .

**Definição 6.7.** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um par de vértices  $(x, y)$  é um par probe JTT se

- $x \in P, y \in P$  tais que  $V = N(x) + N(y)$  com  $N_P(x)$  e  $N_P(y)$  completamente adjacentes,  $N_N(x)$  e  $N_P(y)$  completamente adjacentes,  $N_N(y)$  e  $N_P(x)$  completamente adjacentes; ou
- $x \in N, y \in N$  tais que  $P = N(x) + N(y)$  com  $N(x)$  e  $N(y)$  completamente adjacentes, ou
- $x \in P, y \in N$  tais que  $P = N_P(x) + N(y)$  com  $N(x)$  e  $N(y)$  completamente adjacentes e  $V \setminus (N(x) \cup N(y))$  e  $N_P(x)$  completamente adjacentes.

**Lema 6.8.** Sejam  $H_1$  e  $H_2$  instâncias para PP-GRAFO DE LIMIAR tais que existem imersões  $H'_1$  e  $H'_2$  de  $H_1$  e  $H_2$ . Se  $H_1$  ou  $H_2$  tem um vértice probe grafo de limiar, então  $H_1 \oplus H_2$  tem um vértice probe universal.

*Demonstração.* Segue das definições. □

**Lema 6.9.** Seja  $G = (P + N, E)$  um grafo sem um vértice probe universal. Se  $G$  é PP-jtt, então  $G$  tem um par probe JTT.

*Demonstração.* Seja  $G' = H'_1 \oplus H'_2$  uma imersão de  $G$ , onde  $H'_1$  e  $H'_2$  são grafos de limiar. Como  $H'_1$  e  $H'_2$  são grafos de limiar e eles não têm vértices universais, por [15], temos que ambos os grafos têm um vértice isolado. Sejam  $x \in H'_1$  e  $y \in H'_2$  dois vértices isolados. Se os dois são vértices em  $P$  (resp.  $N$ ), então  $N_G(x) = H'_2$  (resp.  $P \cap H'_2$ ) e  $N_G(y) = H'_1$  (resp.  $P \cap H'_1$ ), caso contrário não teríamos uma imersão  $G'$  para  $G$ . Assim,  $(x, y)$  é um par de vértices tal que  $N_G(x) + N_G(y) = V$  (resp.  $N_G(x) + N_G(y) = P$ ). Pela mesma razão, se  $x \in N$  e  $y \in P$ , então  $N_G(x) = P \cap H'_2$  e  $N_G(y) = H'_1$ . Neste caso,  $(x, y)$  é um par de vértices tal que  $N_G(x) + N_G(y) \cap P = P$ . Além disso, uma vez que  $G'$  é uma imersão para  $G$ ,  $N_G(x)$  e  $N_G(y)$  ou  $N_G(x)$  e  $N_G(y) \cap P$  precisam ser completamente adjacentes. Consequentemente,  $G$  tem um par probe JTT. □

**Lema 6.10.** Se  $G = (P + N, E)$  é um PP-JTT sem vértice probe universal e tem um par probe JTT  $(x, y)$ , então, após posicionar  $x$  e  $y$ , existe apenas um modo de particionar  $G$  em duas instâncias factíveis  $H_1$  e  $H_2$  para PP-GRAFO DE LIMIAR, i.e., instâncias que podem ter imersões de  $G$ .

*Demonstração.* Seja  $(x, y)$  um par probe JTT. Podemos particionar  $G$  em  $H_1$  e  $H_2$  da seguinte forma: vamos sempre atribuir  $x$  a  $H_1$ ,  $y$  a  $H_2$  e suas vizinhanças ao grafo de limiar oposto. Se  $x, y \in P$ , então  $(H_1, H_2)$  é uma partição para  $V_G$ . Se  $x \in N$  e  $y \in P$ , então cada vértice ainda não posicionado (vértices de  $N$ ) precisam ser atribuídos a  $H_2$ . Finalmente, se  $x, y \in N$ , então, para cada vértice  $v \in N$ , se  $N(v) = P \cap V_{H_1}$ , então atribuímos  $v$  e sua

vizinhança a  $H_2$ ; caso contrário, se  $N(v) = P \cap V_{H_2}$ , então posicionamos  $v$  e  $N(v)$  em  $H_1$ ; se ambos não são possíveis,  $(x, y)$  não é o par correto. Afirmamos que, nos três casos acima,  $(H_1, H_2)$  é uma partição factível de  $G$ . Claramente, pela definição 6.7,  $(H_1, H_2)$  é uma partição de  $G$ . Além disso, se  $(H_1, H_2)$  é uma instância SIM para PP-JTT, então, como por hipótese a imersão associada não contém um vértice universal, então cada grafo de limiar da imersão contém um vértice isolado. Então, considerando a junção, estes vértices são adjacentes e suas vizinhanças estão no grafo de limiar oposto. Na verdade, este é o par que estamos procurando. Por isso,  $x$  e  $y$  precisam ser posicionados em grafos de limiar diferentes, precisam estar isolados nesses grafos de limiar e suas vizinhanças devem ser atribuídas ao grafo de limiar oposto no qual eles foram posicionados. Note que, quando  $x, y$  estão ambos em  $N$ ,  $N(x) + N(y) = P$ . Então temos que analisar a vizinhança de cada outro vértice em  $N$ , a fim de atribuir cada um deles ao grafo de limiar correto, de acordo com os vértices já posicionados.  $\square$

O Teorema 6.11 a seguir mostra a corretude do Algoritmo 5.

Agora vamos enunciar o Teorema 6.11

**Teorema 6.11.** PROBE PARTICIONADO JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMIAR *pode ser solucionado em tempo polinomial.*

*Demonstração. Corretude do Algoritmo 5.* Suponha que o Algoritmo 5 retornou resposta SIM. Neste caso, após o processo de eliminação dos vértices probe universais, o processo de particionamento em duas possíveis instâncias  $H_1$  e  $H_2$  para PP-GRAFO DE LIMIAR e a execução do algoritmo para solucionar PP-GRAFO DE LIMIAR [11], o Algoritmo 5 recebeu uma resposta SIM com respeito a  $H_1$  e  $H_2$  serem pp-grafo de limiar. Então, como o par  $(x, y)$  associado a  $H_1$  e  $H_2$  é um par probe JTT, é claro que todas as arestas entre probes de  $H_1$  e vértices de  $H_2$  e todas as arestas entre probes de  $H_2$  e vértices de  $H_1$  pertencem a  $G$  e todas as arestas faltantes necessárias para transformar  $G$  na junção de dois grafos de limiar são opcionais.

Agora vamos provar que se a instância é SIM, o Algoritmo 5 retorna SIM. Como  $G$  é uma instância SIM, pelo Lema 6.9, existe um par probe JTT em  $G$  e então, pelo Lema 6.10, o Algoritmo 5 é capaz de encontrar corretamente instâncias  $H_1$  e  $H_2$  factíveis para PP-GRAFO DE LIMIAR. Como o Algoritmo 5 verifica todo par probe JTT de  $G$ , em algum momento vai testar o par correto.  $\square$

## 6.2.2 PROBE PARTICIONADO COGRAFO-(2, 1) (PP-COGRAFO-(2, 1))

Vamos trabalhar com o problema PROBE PARTICIONADO COGRAFO-(2, 1), que pode ser formulado como a seguir:

PROBE PARTICIONADO COGRAFO-(2, 1)

---

**Algoritmo 5:** Algoritmo para solucionar PP - JTT

---

```
1 início
2 enquanto  $G$  tem um vértice probe universal  $v$  faça
3   |  $V = V \setminus \{v\}$ 
4 fim
5 para cada par probe  $JTT(x, y) \in V$  faça
6   se  $x, y \in P$  então
7     |  $P \cap V_{H_1} = N_P(y)$ 
8     |  $P \cap V_{H_2} = N_P(x)$ 
9     |  $N \cap V_{H_1} = N_N(y)$ 
10    |  $N \cap V_{H_2} = N_N(x)$ 
11   fim
12   se  $x \in N$  e  $y \in P$  então
13     |  $P \cap V_{H_1} = N_P(y)$ 
14     |  $P \cap V_{H_2} = N_P(x)$ 
15     |  $N \cap V_{H_1} = N_N(y)$ 
16     |  $N \cap V_{H_2} = N \setminus V_{H_1}$ 
17   fim
18   se  $x, y \in N$  então
19     |  $N \cap V_{H_1} = \{x\}$ 
20     |  $N \cap V_{H_2} = \{y\}$ 
21     |  $P \cap V_{H_1} = N(y)$ 
22     |  $P \cap V_{H_2} = N(x)$ 
23     para cada vértice  $v \in N \setminus \{x, y\}$  faça
24       se  $N(v) = P \cap V_{H_1}$  então
25         |  $N \cap V_{H_2} = N \cap V_{H_2} \cup \{v\}$ 
26       senão
27         se  $N(v) = P \cap V_{H_2}$  então
28           |  $N \cap V_{H_1} = N \cap V_{H_1} \cup \{v\}$ 
29         fim
30       senão
31         | Volta para a linha 4
32       fim
33     fim
34   fim
35   fim
36   se  $G[V_{H_1}] = H_1$  e  $G[V_{H_2}] = H_2$  são PP-GRAFO DE LIMIAR então
37     | retorna  $G$  é PP-JTT
38   fim
39 fim
40 retorna  $G$  não é PP-JTT
41 fim
```

---

*Entrada:* Um grafo  $G = (P + N, E)$  tal que  $N$  é um conjunto independente.

*Pergunta:* Existe um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja um cografo-(2, 1)?

Nesta seção provaremos que PP-COGRAFO-(2, 1) é solucionável em tempo polinomial. Para tal, precisamos da seguinte definição.

**Definição 6.12.** Um subgrafo induzido  $B_i = (P_i + N_i, E_i)$  de um grafo particionado  $G = (P + N, E)$  é chamado probe biclique se  $B_i[P_i]$  é uma biclique  $(X_i, Y_i)$  e  $B_i[N_i]$  é um conjunto independente  $(X'_i, Y'_i)$  tal que  $N_i(x) = Y_i, \forall x \in X'_i$  e  $N_i(y) = X_i, \forall y \in Y'_i$ .

A seguir, apresentamos o Algoritmo 6 baseado na decomposição apresentada no item 2c do Teorema 4.14. Ele também utiliza algumas ferramentas vistas na Seção 6.2.1.

---

**Algoritmo 6:** Algoritmo para solucionar PP - COGRAFO-(2, 1)

---

```

1 início
2   enquanto  $G$  tem um vértice probe universal  $v$  ou uma probe biclique isolada  $B_i$ 
3     faça
4       se  $G$  tem um vértice probe universal  $v$  então
5         |  $V = V \setminus \{v\}$ 
6       fim
7       se  $G$  tem um probe biclique isolada  $B_i$  então
8         |  $V = V \setminus V(B_i)$ 
9       fim
10    fim
11  se  $G$  é um grafo pp-jtt então
12    | retorna  $G$  é pp-cograph-(2, 1)
13  fim
14  retorna  $G$  não é pp-cograph-(2, 1)
15 fim

```

---

**Teorema 6.13.** PROBE PARTICIONADO COGRAFO-(2, 1) pode ser solucionado em tempo polinomial.

*Demonstração.* **Corretude do Algoritmo 6.** Suponha que o Algoritmo 6 retorne resposta SIM. Neste caso, após o processo de eliminação, o algoritmo encontrou um subgrafo  $H$  de  $G$  que é a junção de dois grafos de limiar. Então, para obter uma imersão de  $G$ , acrescentamos a  $H$  vértices probe universais e bicliques isoladas na ordem inversa da ordem de eliminação, adicionando todas as arestas aos vértices probe universais com o intuito de torná-los universais. Pelo Teorema 4.14, o grafo obtido é um cografo-(2, 1).

Agora suponha que o Algoritmo 6 retornou resposta NÃO. Isto significa que, após e remoção de todos os vértices probe universais e todas as probe bicliques isoladas, o Algoritmo 6 recebeu uma resposta NÃO do algoritmo que resolve PP-JTT. Então, pelo Teorema 4.14, não é possível obter uma imersão de  $G$  em um cografo-(2, 1).

□

### 6.2.3 PROBE COGRAFO-(2, 1)

Vamos provar que reconhecer se um grafo é probe cografo-(2, 1) é um problema com solução polinomial.

Teorema 6.14, descrito a seguir, lida com a versão não particionada de PROBE COGRAFO e prova que, dado um grafo  $G$ , então  $G$  tem um número polinomial de partições factíveis.

**Teorema 6.14** (Chandler et al. [10]). *Sejam  $G$  e  $\bar{G}$  conexos e assumamos que  $G$  não seja cografo. Então  $G$  é probe cografo se e somente se existem dois vértices não-adjacentes  $x$  e  $y$  em  $G$  tais que  $G$  é probe cografo com conjunto probe  $P = N(x) + N(y)$  e conjunto não-probe  $N = V \setminus P$ .*

Além disso, Teorema 6.15 prova que é possível reduzir PROBE COGRAFO a PP-COGRAFO em tempo linear.

**Teorema 6.15** (Chandler et al. [10]). *PROBE COGRAFO pode ser reduzido a PROBE PARTICIONADO COGRAFO em tempo  $O(n + m)$ .*

Estes dois resultados prévios, nos permitem enunciar o seguinte Teorema.

**Teorema 6.16.** *PROBE COGRAFO-(2, 1) é um problema solucionável em tempo polinomial.*

## 6.3 Sanduíches, Probes e Subgrafos Induzidos Proibidos

Nesta seção, relacionamos de uma maneira diferente a complexidade computacional dos problemas PROBE e SANDUÍCHE quando a propriedade envolvida nos dois problemas está relacionada com subgrafos induzidos proibidos. Até onde estudamos, este é o primeiro trabalho onde este tipo de relacionamento é feito. Nosso principal resultado é:

- Se LIVRE DE  $F$ -SP é NP-completo, então PP-LIVRE DE  $F$  também é NP-completo,
- Se PP-LIVRE DE  $F^*$  é NP-completo, então PROBE LIVRE DE  $F^*$  é NP-completo, onde  $F$  e  $F^*$  são grafos não completos 3-conexos e 2-conexos, respectivamente.

A seguir, enunciamos estes problemas de decisão.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS LIVRES DE  $F$  (LIVRE DE  $F$ -SP)

*Entrada:* Dois grafos  $G^1 = (V, E^1)$  e  $G^2 = (V, E^2)$  tais que  $E^1 \subseteq E^2$ .

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  livre de  $F$  tal que  $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$ ?

PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $F$  (PP-LIVRE DE  $F$ )

*Entrada:* Um grafo  $G = (P + N, E)$  tal que  $N$  é um conjunto independente.



*Pergunta:* Existe um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja livre de  $F$ ?

PROBE LIVRE DE  $F$

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$ .

*Pergunta:* Existe uma partição de  $V$  em  $(P, N)$  tal que  $N$  é conjunto independente e tal que exista um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja livre de  $F$ ?

**Teorema 6.17.** *Se o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS LIVRES DE  $F$  é NP-completo, onde  $F$  é um grafo 3-conexo e não completo, então PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $F$  é NP-completo.*

*Demonstração.* Suponha que LIVRE DE  $F$ -SP seja NP-completo. Com a finalidade de fazer uma redução polinomial a partir de LIVRE DE  $F$ -SP para PP-LIVRE DE  $F$ , vamos construir uma instância particular  $G = (P + N, E)$  para PP-LIVRE DE  $F$  a partir de uma instância genérica  $(V, E^1, E^3)$  do LIVRE DE  $F$ -SP. Então, primeiramente apresentaremos esta instância particular. Em segundo lugar, provaremos no Lema 6.22 que, se existe um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$  livre de  $F$ , então existe uma imersão para  $G = (P + N, E)$  em um grafo livre de  $F$ . Em terceiro lugar, no Lema 6.23, provaremos que, se existe uma imersão para  $G = (P + N, E)$  em um grafo livre de  $F$ , então existe um grafo sanduíche livre de  $F$  para  $(V, E^1, E^3)$ . □

*Construção da instância particular  $G = (P + N, E)$  para PP-LIVRE DE  $F$ :*

1. Para cada aresta obrigatória  $xy$  em  $E^1$ , remova  $xy$  e adicione  $F$  a  $G$  tal que dois vértices não-adjacentes  $a, b \in F$  serão substituídos por  $x, y$ , i.e., ao invés de ter  $a, b$  em  $F$ , vamos ter  $x, y$  tais que cada aresta de  $F$  incidente a  $a$  e  $b$  será incidente a  $x$  e  $y$ , respectivamente. Posicione  $x, y$  em  $N$  e todos os outros vértices de  $F \setminus \{a, b\}$  em  $P$ .
2. Para cada aresta proibida  $xy$  em  $E^3$ , adicione o subgrafo induzido  $F \setminus \{ab\}$ , onde  $ab$  é uma aresta de  $F$ . Substitua  $a, b$  em  $F \setminus \{ab\}$  por  $x$  e  $y$ , respectivamente. Atribua a  $N$  os vértices  $x, y$  e a  $P$  os demais vértices de  $F \setminus \{a, b\}$ .

**Lema 6.18.**  *$N$  é um conjunto independente.*

*Demonstração.* De fato,  $N = V$  e cada aresta obrigatória de  $(V, E^1, E^3)$  foi removida. Além disso, por construção, cada aresta de  $G$  tem um vértice em  $P$ . Então,  $N$  é um conjunto independente. □

**Lema 6.19.** *O Item 1 da construção de  $G$  força a adição de cada aresta de  $E^1$ .*

*Demonstração.* Como  $F$  é um subgrafo proibido de  $G$ ,  $F$  precisa ser destruída e, por construção, apenas dois vértices de  $F$  estão em  $N$ . Então, a única forma de destruir  $F$  é adicionando tal aresta que, por sua vez é uma aresta de  $E^1$ . □

**Lema 6.20.** *O Item 2 da construção de  $G$  impede a adição de cada aresta de  $E^3$ .*

*Demonstração.* De fato, se adicionarmos as arestas faltantes no Item 2, vamos construir um subgrafo isomorfo a  $F$ , que é proibido em  $G$ . Além disso, como os dois únicos vértices de  $F$  em  $N$  já seriam adjacentes neste caso, não poderíamos destruir tal subgrafo. Como, por construção, essas arestas faltantes são justamente as arestas de  $E^3$ , temos que tais arestas continuam sendo proibidas em  $G$ . □

**Lema 6.21.** *Aplicando os Itens 1 e 2 da construção de  $G$  apresentada acima, não acrescentamos a  $G$  nenhum subgrafo isomorfo a  $F$  exceto pelos adicionados no Item 1.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição que, ao construirmos  $G$ , tenhamos adicionado a  $G$  um subgrafo  $F'$  isomorfo a  $F$ , além dos adicionados no Item 1. Neste caso,  $F'$  precisa conter  $x$  ou  $y$ , uma vez que não adicionamos arestas entre os vértices adicionados e  $V \setminus \{x, y\}$ . Então, se removermos  $x, y$ , certamente vamos desconectar  $F'$ , uma contradição com o fato de  $F'$  ser 3-conexo. □

**Lema 6.22.** *Se existe um grafo sanduíche livre de  $F$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então  $G = (P + N, E)$  é PP-LIVRE DE  $F$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um grafo sanduíche  $H = (V, E')$  livre de  $F$  para  $(V, E^1, E^3)$ . Após destruir todo subgrafo induzido isomorfo a  $F$  que adicionamos no Item 1 obtendo o grafo  $G'$  (existe apenas uma maneira de fazer isto), temos que  $G'[N] = G^1$ , pelos Lemas 6.19 e 6.20. Além disto,  $G'[P]$  é claramente livre de  $F$  e como, pelo Lema 6.21, não criamos nenhum outro subgrafo induzido isomorfo a  $F$ , podemos construir um grafo  $H^* = (V^*, E^*)$  que é uma imersão para  $G$  em um grafo livre de  $F$ :  $V^* = P + N$  e  $E^* = E \cup E'$ . □

**Lema 6.23.** *Se  $G = (P + N, E)$  é PP-LIVRE DE  $F$ , então existe um grafo sanduíche livre de  $F$  para  $(V, E^1, E^3)$ .*

*Demonstração.* Seja  $H^* = (P + N, E^*)$  uma imersão para  $G = (P + N, E)$  em um grafo livre de  $F$ . Considere um grafo  $H = (V', E')$  construído da seguinte forma:  $V' = N$  e  $E' = E^*[N]$ . Primeiramente, afirmamos que  $H$  é um grafo sanduíche, uma vez que  $V' = V$ ,  $E^1 \subseteq E'$  pelo Lema 6.19 e  $E' \cap E^3 = \emptyset$ , pelo Lema 6.20. Resta provar que  $H$  é um grafo livre de  $F$  o que segue do fato de que “ser grafo livre de  $F$ ” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzidos. □

Como PROBE PARTICIONADO  $\mathcal{G}$  é um caso particular do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA  $\mathcal{G}$  (Fatos 6.2 e 6.3), onde  $\mathcal{G}$  é uma classe de grafos ou uma propriedade, podemos enunciar o seguinte Corolário:

**Corolário 6.24.** *O PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS LIVRE DE  $F$  é NP-completo se e somente se PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $F$  é NP-completo, onde  $F$  é um grafo 3-conexo, não completo.*

Podemos generalizar este resultado considerando, ao invés de um único grafo 3-conexo não completo como subgrafo proibido, uma família  $\mathcal{F}$  de grafos 3-conexos não completos como subgrafos proibidos.

**Teorema 6.25.** *Se o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS LIVRES DE  $\mathcal{F}$  é NP-completo, onde  $\mathcal{F}$  é uma família de grafos 3-conexos e não completos, então PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $\mathcal{F}$  é NP-completo.*

*Demonstração.* Esta prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 6.17, com uma pequena mudança na construção de  $G$ : precisamos escolher um subgrafo proibido  $F$  em  $\mathcal{F}$  e construir a instância particular  $G = (P+N, E)$  como apresentado na demonstração do Teorema 6.17. Note que os Lemas 6.54, 6.19, 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23 continuam válidos com esta mudança.  $\square$

Os grafos probe foram introduzidos há mais de 20 anos [68] e ainda não sabemos se existe uma relação entre a complexidade computacional das versões particionado e não particionado para uma determinada classe. A seguir, apresentamos uma relação entre ambas quando consideramos grafos livre  $F^*$ , onde  $F^*$  é um grafo não completo 2-conexo.

**Teorema 6.26.** *Se PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $F^*$  é NP-completo, então PROBE LIVRE DE  $F^*$  é NP-completo, onde  $F^*$  é um grafo não completo 2-conexo.*

*Demonstração.* Suponha que PP-LIVRE DE  $F^*$  seja NP-completo. A fim de fazer uma redução polinomial a partir de PP-LIVRE DE  $F^*$  para PROBE LIVRE DE  $F^*$ , construiremos uma instância particular  $G = (V, E)$  para PROBE LIVRE DE  $F^*$  a partir de uma instância genérica  $G' = (P' + N', E')$  do PP-LIVRE DE  $F^*$ . Então, primeiro apresentaremos tal instância. Em seguida, provaremos no Lema 6.29 que, se existe uma imersão livre de  $F^*$  para  $G'$ , então existe uma partição de  $V$  em  $(P, N)$  tal que  $N$  é um conjunto independente e existe uma imersão para  $G = (V, E)$  em um grafo livre de  $F^*$ . O próximo passo é provar, no Lema 6.30, que, se existe uma partição de  $V$  em  $(P, N)$  tal que  $N$  seja um conjunto independente e que exista uma imersão para  $G = (V, E)$  em um grafo livre de  $F^*$ , então existe uma imersão livre de  $F^*$  para PP-LIVRE DE  $F^*$ .  $\square$

*Construção da instância particular  $G = (V, E)$  para PROBE LIVRE DE  $F^*$ :*

Seja  $G' = (P' + N', E')$  uma instância genérica de PP-LIVRE DE  $F^*$ .

1. Primeiro, faça  $V = P' + N'$  e  $E = E'$ .
2. Para cada vértice  $v$  em  $P'$ , adicionamos um subgrafo isomorfo a  $F^*$  (que por simplicidade chamaremos de  $F^*$ ) a  $G'$  tal que  $v$  é adjacente a cada vértice de  $F^*$  em  $G'$ .

Observe a Figura 6.1 como exemplo.

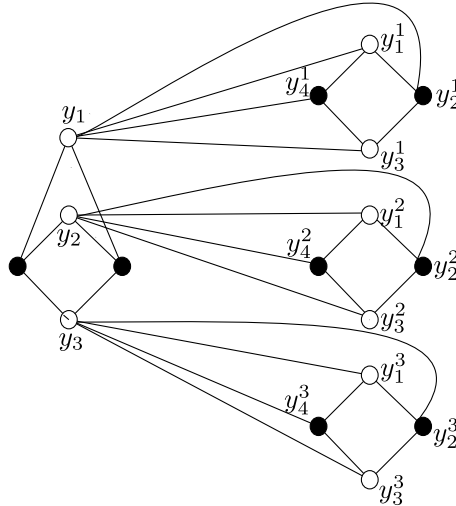


Figura 6.1: Exemplo da construção de uma instância particular para PROBE LIVRE DE  $C_4$ : para cada vértice  $y_o$  em  $P'$  (à esquerda), adicionamos um  $C_4 \{y_1^o y_2^o y_3^o y_4^o\}$  tal que  $y_o y_i^o$  são adjacentes, para  $i = 1, \dots, 4$  e  $o = 1, \dots, |P'|$ . Vértices brancos são vértices de  $P'$  e vértices pretos estão em  $N'$ . Note que esta construção força cada vértice de  $P'$  a estar em  $P$  e, particularmente neste exemplo, cada vértice de  $N'$  também estará em  $N$ .

**Lema 6.27.** *O Item 2 força os vértices de  $P'$  a serem vértices probe de  $G$ .*

*Demonstração.* De fato, como temos que destruir cada subgrafo induzido isomorfo a  $F^*$  adicionado (que, por praticidade, chamaremos de  $F^*$ ), temos que escolher dois vértices de  $F^*$  para serem adicionados a  $N$ . Isto é possível pois  $F^*$  não é clique. Então, vamos ter pelo menos 2 vértices entre os adicionados que estarão em  $N$  e serão adjacentes a  $v$ . Portanto,  $v$  precisa estar em  $P$ . □

**Lema 6.28.** *Construir  $G$  seguindo os passos 1 e 2, não cria um subgrafo induzido isomorfo a  $F^*$ , exceto por aqueles adicionados no Item 2.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que criamos um subgrafo induzido  $F'$  isomorfo a  $F^*$ , além dos subgrafos criados pelo Item 2. claramente,  $v \in F'$ . Se  $v$  substitui um vértice universal de  $F^*$  em  $F'$ , podemos garantir que  $F'$  vai ser destruído quando  $F^*$  for destruído, já que cada aresta faltante de  $F^*$  estará em  $F'$ . Se, além de  $v$ , existe outro vértice de  $G'$  em  $F'$ , então  $v$  é um vértice de corte em  $F'$ , uma contradição com o fato de que  $F'$  é um grafo 2-conexo. □

**Lema 6.29.** *Se  $G' = (P' + N', E')$  é PP-livre de  $F^*$ , então  $G = (V, E)$  é probe livre de  $F^*$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista uma imersão  $H' = (P' + N', E^*)$  de  $G'$  em um grafo livre de  $F^*$ . Podemos construir uma imersão  $H = (P + N, E)$  para  $G$  da seguinte forma:

- Inicialmente,  $P = P'$  e  $N = N'$ ,
- Para cada subgrafo induzido  $F^*$  adicionado Item 2, escolha dois vértices não-adjacentes  $a, b$  e atribua-os a  $N$ . Os demais vértices de cada subgrafo induzido  $F^*$  adicionado no Item 2, atribua a  $P$ .

Claramente,  $(P, N)$  é uma partição para  $V$ . Além disso,  $N$  é um conjunto independente, uma vez que  $N'$  é um conjunto independente e todos os vértices atribuídos a  $N$  não são dois a dois adjacentes e também não são adjacentes a vértices de  $N'$ . Resta provar que  $H$  é livre  $F^*$ , o que segue do fato de que  $H'$  é livre de  $F^*$ , que destruimos cada subgrafo induzido  $F^*$  adicionado e a construção de  $G$  não criou nenhum outro  $F^*$  induzido além dos subgrafos induzidos  $F^*$  já destruídos (pelo Lema 6.28).  $\square$

**Lema 6.30.** *Se  $G = (V, E)$  é probe livre de  $F^*$ , então  $G' = (P' + N', E')$  é PP-livre de  $F^*$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista uma partição de  $V$  em  $(P, N)$  tal que  $N$  seja um conjunto independente e que exista uma imersão  $H$  para  $G$  em um grafo livre de  $F^*$ . Vamos construir  $H' = (P^* + N^*, E^*)$ , uma imersão para  $G'$ , removendo de  $G$  cada  $F^*$  induzido adicionado no Item 2. Claramente,  $P' \subseteq P^*$ , pelo Lema 6.27 e então, podemos afirmar que  $N^* \subseteq N'$ , por construção. Por hipótese,  $H$  é livre de  $F^*$  e, como “ser livre de  $F^*$ ” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzidos,  $H^*$  também é livre de  $F^*$ . Além disso, pela construção de  $G$ , podemos afirmar também que, se existe um vértice  $v \in P^* \setminus P'$ , então  $v$  não é adjacente a nenhum vértice de  $N^*$  e, como  $v$  está em  $P^*$ , também podemos assegurar que nenhuma aresta que transforma  $G$  em  $H$  é incidente a  $v$ . Consequentemente,  $v$  pode ser colocado em  $N^*$ , para todo  $v \in P^* \setminus P'$ . Então temos que  $P^* = P', N^* = N'$  e, portanto,  $H' = (P' + N', E')$  é uma imersão para  $G'$  em um grafo livre de  $F^*$ .  $\square$

Teoremas 6.17 e 6.26 nos permitem enunciar os seguintes Corolários:

**Corolário 6.31.** *Seja  $F$  um grafo 3-conexo que não é uma clique.*

LIVRE DE  $F$ -SP é NP-completo  $\Rightarrow$  PP-LIVRE DE  $F$  é NP-completo  $\Rightarrow$  PROBE LIVRE DE  $F$  é NP-completo.

**Corolário 6.32.** *Seja  $F$  um grafo 3-conexo que não é uma clique.*

PROBE LIVRE DE  $F$  é solucionável em tempo polinomial  $\Rightarrow$  PP-LIVRE DE  $F$  é solucionável em tempo polinomial  $\Rightarrow$  LIVRE DE  $F$ -SP é solucionável em tempo polinomial.

Estes dois Corolários são interessantes porque podemos afirmar que, para grafos livres de  $F$  onde  $F$  é 3-conexo e não completo, o PROBLEMA SANDUÍCHE é o problema mais fácil a ser resolvido no sentido que, se LIVRE DE  $F$ -SP é NP-completo, então PROBE LIVRE DE  $F$  também será NP-completo. Por outro lado, PROBE LIVRE DE  $F$  é o problema mais difícil a ser solucionado neste caso, já que se ele for solucionável em tempo polinomial, PP-LIVRE DE  $F$  e LIVRE DE  $F$ -SP também podem ser resolvidos em tempo polinomial.

### 6.3.1 PROBE PERFEITO

Grafos perfeitos são conhecidos como os grafos nos quais o número cromático de cada subgrafo induzido é igual ao tamanho de sua maior clique. Em 2006, Chudnovsky et al. [14] apresentaram uma caracterização para grafos perfeitos em termos de subgrafos proibidos, provando que a conjectura de Berge estava correta. Antes de apresentarmos o **Teorema Forte de Grafos Perfeitos**, consideremos as seguintes definições.

**Definição 6.33.** *Um grafo é livre de buraco ímpar se ele não contém um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5 como subgrafo induzido.*

**Definição 6.34.** *Um grafo é livre de complemento de burco ímpar se não contém o complemento de uma ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5 como subgrafo induzido.*

**Teorema 6.35** (Teorema Forte de Grafos Perfeitos - Chudnovsky et al. [14]). *Um grafo  $G$  é perfeito se e somente se  $G$  é livre de buraco ímpar e de complemento de buraco ímpar.*

Em diversos artigos, PROBLEMAS PROBE foram discutidos com respeito a subclasses de grafos perfeitos [1, 11–13]. Os resultados estabelecidos levaram a duas conjecturas interessantes.

**Conjectura 6.36** (Conjectura do Grafo Probe Perfeito). *Existe um algoritmo de tempo polinomial para testar se um grafo particionado  $G = (P + N, E)$  é probe perfeito.*

**Conjectura 6.37** (Conjectura Forte do Grafo Probe Perfeito). *Existe um algoritmo de tempo polinomial para testar se um grafo é probe perfeito.*

Com o intuito de contribuirmos com este estudo, enunciaremos o seguinte Teorema.

**Teorema 6.38.** *Seja  $\mathcal{F}^*$  uma família de grafos 2-conexos e não completos. Se PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $\mathcal{F}^*$  é NP-completo, então PROBE LIVRE DE  $\mathcal{F}^*$  é NP-completo.*

*Demonstração.* Esta prova segue os mesmos passos da prova do Teorema 6.26, com algumas pequenas mudanças na construção de  $G$ : precisamos escolher um subgrafo induzido proibido  $F^*$  em  $\mathcal{F}^*$  para fazer adjacente a cada vértice  $v$  em  $P'$  de tal maneira que  $v$  seja

adjacente a todos os vértices de  $F^*$ . Note que os Lemas 6.27, 6.28, 6.29 e 6.30 continuam válidos com esta mudança. □

**Observação 6.39.** *Buracos ímpares e complementos de buracos ímpares são grafos 2-conexos e não completos.*

Segue do Teorema 6.38 e da Observação 6.39 os seguintes Corolários.

**Corolário 6.40.** *Se a Conjectura Forte de Grafos Probe Perfeitos é verdadeira, então a Conjectura de Grafos Probe Perfeitos também é verdadeira.*

**Corolário 6.41.** *Se a Conjectura de Grafos Probe Perfeitos é falsa, então a Conjectura Forte de Grafos Probe Perfeitos também é falsa.*

De acordo com o Corolário 6.41, se o problema PROBE PARTICIONADO PERFEITO for NP-completo, poderíamos enunciar o seguinte Teorema, que provaria que o mais importante problema sanduíche em aberto é NP-completo.

**Teorema 6.42.** *Se o problema PROBE PARTICIONADO PERFEITO for NP-completo, então o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS é NP-completo.*

## 6.4 PROBLEMA PROBE PARA GRAFOS LIVRES DE $C_k$

Mantendo o enfoque em PROBLEMAS PROBE quando consideramos subgrafos proibidos, vamos lidar com a propriedade “ser livre de ciclos de tamanho  $k$ ”, para  $k \geq 4$ . Vamos mostrar que, para qualquer  $k \geq 4$ , fixo, PP-LIVRE DE  $C_k$  e PROBE LIVRE DE  $C_k$  são problemas NP-completos.

Primeiramente, apresentaremos uma redução polinomial a partir de LIVRE DE  $C_4$ -SP que é NP-completo [27] para o caso particular PP-LIVRE DE  $C_4$ . Após isso, vamos mostrar como generalizar a prova para cada  $k \geq 4$  fixo com a finalidade de provar que PP-LIVRE DE  $C_k$  é NP-completo, para  $k \geq 4$ . As versões generalizadas destes problemas estão definidas abaixo.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS LIVRES DE  $C_k$  (LIVRE DE  $C_k$ -SP)

*Entrada:* Uma tripla  $(V, E^1, E^3)$ , onde  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$

*Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  livre de  $C_k$  tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ ?

PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $C_k$  (PP-LIVRE DE  $C_k$ )

*Entrada:* Um grafo  $G = (P + N, E)$  tal que  $N$  é um conjunto independente.

*Pergunta:* Existe um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja um grafo livre de  $C_k$  ?

Agora, vamos enunciar o Teorema 6.43.

**Teorema 6.43.** PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $C_k$  é NP-completo.

*Demonstração.* Com a finalidade de reduzir LIVRE DE  $C_4$ -SP para PP-LIVRE DE  $C_4$ , construiremos uma instância particular  $G' = (P' + N', E')$  de PP-LIVRE DE  $C_4$  a partir de uma instância genérica  $(V, E^1, E^3)$  do LIVRE DE  $C_4$ -SP. Vamos provar que existe um grafo sanduíche livre de  $C_4$  para LIVRE DE  $C_4$ -SP se e somente se  $G' = (P' + N', E')$  é PP-LIVRE DE  $C_4$ . Para mostrar isto, primeiramente descreveremos uma instância particular para PP-LIVRE DE  $C_4$ . Em seguida, provaremos que se a instância particular tem uma imersão em um grafo livre de  $C_4$ , então existe um grafo sanduíche livre de  $C_4$  para  $(V, E^1, E^3)$ . Finalmente, mostraremos que, se existe um grafo sanduíche livre de  $C_4$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então existe uma imersão para  $G$  em um grafo livre de  $C_4$ . □

*Construção da instância particular para PP-LIVRE DE  $C_4$ :*

- Cada aresta obrigatória  $e = xy$  de  $E^1$  será substituída por um  $C_4$ : vamos adicionar dois vértices  $x', y'$  tais que  $xx'yy'x$  induz um  $C_4$ .
- Para cada aresta proibida  $e = ab$  de  $E^3$ , vamos adicionar dois vértices  $a', b'$  tais que  $aa'b'b$  induz um  $P_4$ .
- Cada vértice adicionado vai ser atribuído a  $P'$  e os demais vértices a  $N'$ .

Veja a Figura 6.2 como exemplo.

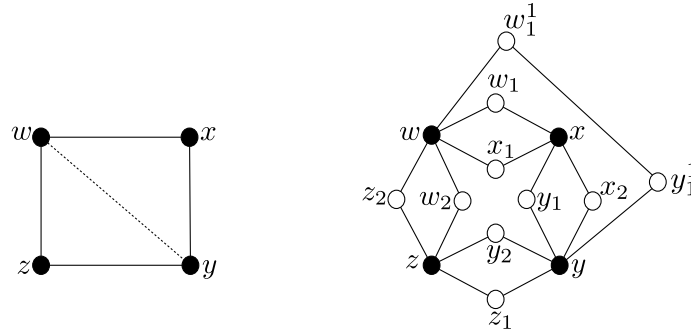


Figura 6.2: Exemplo da substituição de arestas obrigatórias e proibidas por  $C_4$ 's e  $P_4$ 's, respectivamente: à esquerda, um  $C_4$   $wxyzw$  com uma aresta proibida  $wy$  de  $(V, E^1, E^3)$ ; à direita, o grafo que o substitui em  $G' = (P' + N', E')$ . Arestas sólidas são arestas obrigatórias e arestas pontilhadas são arestas proibidas de  $(V, E^1, E^3)$ , à esquerda. À direita, vértices brancos são atribuídos a  $P'$  enquanto vértices pretos são atribuídos a  $N'$ .

Isto conclui a transformação de  $(V, E^1, E^3)$  em  $G' = (P' + N', E')$ . É fácil ver que  $|P' + N'| \leq 2n^2 + n$ , onde  $|V| = n$  e consequentemente, o tamanho de  $G$  é polinomial no tamanho de  $(V, E^1, E^3)$ .

Os Lemas seguintes nos ajudam a provar o Teorema 6.43.



**Lema 6.44.**  $N'$  é um conjunto independente.

*Demonstração.* De fato, por construção,  $V = N'$  e toda aresta obrigatória foi substituída por um  $C_4$ . □

**Lema 6.45.** Cada  $C_4$  adicionado de  $G' = (P' + N', E')$  força a adição de uma aresta obrigatória de  $E^1$ .

*Demonstração.* Como queremos uma imersão para  $G'$  em um grafo livre de  $C_4$ , cada um dos  $C_4$ 's induzidos por  $xx'yy'x$  acrescentados precisa ser destruído. Por construção, a única forma de fazer isto é adicionando a aresta  $xy$ , que é uma aresta obrigatória de  $(V, E^1, E^3)$ . □

**Lema 6.46.** Cada  $P_4$  induzido de  $G' = (P' + N', E')$  impede a adição de arestas de  $E^3$ .

*Demonstração.* De fato, cada  $P_4$  induzido  $aa'b'b$  tem exatamente dois vértices em  $N'$ :  $a$  e  $b$ . Se adicionarmos a aresta  $ab$ , vamos criar um  $C_4$  que não pode ser destruído. □

Lema 6.47 é uma consequência dos Lemas 6.44, 6.45 e 6.46.

**Lema 6.47.** Cada aresta opcional de  $(V, E^1, E^3)$  é uma aresta opcional de  $G' = (P' + N', E')$ .

**Lema 6.48.** Exceto pelos  $C_4$ 's adicionados e após destruí-los, cada  $C_4$  do grafo é um  $C_4$  em  $(V, E^1, E^3)$ .

*Demonstração.* Note que, cada  $C_4$  que poderia ser criado pela adição de um  $P_4$  induzido,  $aa'b'b$ , precisa conter  $a, b$  e  $a'$  ou  $b'$ . Poré, nem  $a'$  nem  $b'$  é adjacente a qualquer outro vértice do grafo além de  $a$  e  $b$ . Então, a adição de  $P_4$ 's não pode criar um  $C_4$  que não existe em  $(V, E^1, E^3)$ . Além disso, se a adição de um  $C_4$ ,  $xx'yy'x$ , criou outro  $C_4$ , deveria existir um vértice  $v$  de  $V$  tal que  $vx$  e  $vy \in E^1$ . Como precisamos adicionar a aresta  $xy$  para destruir  $xx'yy'x$ , os novos  $C_4$ 's,  $vxx'yv$  e  $vxy'yv$ , já estariam destruídos por  $xy$ . Então, após destruir cada  $C_4$  adicionado, os  $C_4$ 's restantes já existiam em  $(V, E^1, E^3)$ . □

**Lema 6.49.** Se  $G' = (P' + N', E')$  é PP-livre de  $C_4$ , então existe um grafo sanduíche livre de  $C_4$  para  $(V, E^1, E^3)$ .

*Demonstração.* Suponha que  $H^* = (P' + N', E^*)$  seja uma imersão para  $G'$  em um grafo livre de  $C_4$  e seja  $G = H^*[N']$ . Pelos Lemas 6.45, 6.46 e 6.47,  $G$  é um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$ . Além disso, como “ser um grafo livre de  $C_4$ ” é uma propriedade hereditária para subgrafos induzidos,  $G$  é livre de  $C_4$ . □

**Lema 6.50.** *Se existe um grafo sanduíche livre de  $C_4$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então  $G' = (P' + N', E')$  é PP-livre de  $C_4$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um grafo sanduíche  $G = (V, E)$  para  $(V, E^1, E^3)$  e seja  $H^* = (V^*, E^*)$  tal que  $V^* = P' + N'$  e  $E^* = E' \cup E$ . Pelos Lemas 6.45, 6.46 e 6.47,  $H^*$  é uma imersão para  $G'$ . Além disso, pelo Lema 6.48 e, como  $G$  é um grafo livre de  $C_4$ ,  $H^*$  é livre de  $C_4$ . □

Agora vamos generalizar esta construção e enunciar o principal Teorema desta seção.

**Teorema 6.51.** *PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $C_k$  é NP-completo.*

*Demonstração.* Com o objetivo de provar que PP-LIVRE DE  $C_k$  é NP-completo, assim como fizemos na prova do Teorema 6.43, vamos fazer uma redução em tempo polinomial a partir do problema NP-completo LIVRE DE  $C_k$ -SP para PP-LIVRE DE  $C_k$ . A prova é bastante similar e vamos mostrar como modificar a instância construída no Teorema 6.43. □

*Construção da instância particular para PP-LIVRE DE  $C_k$ :*

- Cada aresta obrigatória  $e = xz$  de  $E^1$  será substituída por um  $C_k$ : adicionaremos  $k - 2$  vértices  $\{y_1, \dots, y_{k-2}\}$  tais que  $xy_1 \dots y_{k-2}zx$  induza um  $C_k$ .
- Para cada aresta proibida  $e = ac$  de  $E^3$ , vamos adicionar  $k - 2$  vértices  $\{b_1, \dots, b_{k-2}\}$  tais que  $ab_1 \dots b_{k-2}c$  induza um  $C_k$ .
- Cada vértice adicionado será atribuído a  $P'$  e cada um dos vértices restantes será atribuído a  $N'$ .

Isto conclui a transformação de  $(V, E^1, E^3)$  em  $G' = (P' + N', E')$ . É fácil ver que  $|P' + N'| \leq kn^2 - 2n^2 + n$ , onde  $|V| = n$  e consequentemente, o tamanho de  $G$  é polinomial no tamanho de  $(V, E^1, E^3)$ .

Note que a complexidade computacional de PROBE LIVRE DE  $C_k$ , para  $k \geq 4$  fixo, segue como Corolário dos Teoremas 6.26 e 6.51.

**Corolário 6.52.** *PROBE LIVRE DE  $C_k$  é NP-completo.*

## 6.5 PROBE LIVRE DE $(C_4, \dots, C_{|N|})$

Uma questão natural após estudar PROBE LIVRE DE  $C_k$  concerne da complexidade computacional deste problema quando, ao invés de proibir um ciclo de tamanho específico, proibimos uma família de ciclos de tamanho determinado. Nesta seção,

provamos que, PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  e PROBE LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  são problemas NP-completos, quando  $N$  é o conjunto independente de uma partição probe  $(P, N)$ . Podemos definir ambos os problemas da seguinte forma:

PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  - (PP-LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ )

*Entrada:* Um grafo  $G = (P + N, E)$  tal que  $N$  é um conjunto independente.

*Pergunta:* Existe um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja um grafo livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ ?

PROBE LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  - (PROBE LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ )

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$ .

*Pergunta:* Existe uma partição de  $V$  em  $(P, N)$  tal que  $N$  é conjunto independente e tal que exista um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ ?

Para provar que PP-LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  é NP-completo, vamos fazer uma redução polinomial a partir do problema NP-completo CORDAL-SP [40]. Observamos que, em contrapartida, PROBE CORDAL é polinomial mesmo quando a partição probe  $(P, N)$  é dada [1]. A seguir, definimos CORDAL-SP e enunciamos o Teorema 6.53.

PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS CORDAIS (CORDAL-SP)

*Entrada:* Uma tripla  $(V, E^1, E^3)$ , onde  $E^1 \cap E^3 = \emptyset$  *Pergunta:* Existe um grafo  $G = (V, E)$  cordal tal que  $E^1 \subseteq E$  e  $E \cap E^3 = \emptyset$ ?

**Teorema 6.53.** PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  é NP-completo.

*Demonstração.* Para reduzir CORDAL-SP para PP-LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  vamos construir, a partir de uma instância genérica para CORDAL-SP, uma instância particular para PP-LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ . Então, primeiro construiremos a instância particular  $G' = (P' + N', E')$  para PP-LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ . Depois, Lema 6.58 mostrará que, se existe um grafo sanduíche cordal  $G = (V, E)$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então existe uma imersão para  $G' = (P' + N', E')$  em um grafo livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ . Em seguida, o Lema 6.59 provará que, se existe uma imersão para  $G' = (P' + N', E')$  em um grafo livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ , então existe um grafo sanduíche cordal  $G = (V, E)$  para  $(V, E^1, E^3)$ . □

*Construção da instância particular para PP-LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ :*

Seja  $n = |V|$ .

- Para cada aresta obrigatória  $e = xy \in E^1$ , adicione a  $V'$  os vértices  $x, x', y, y'$  tais que  $xx'yy'x$  é um  $C_4$  induzido. Não inclua  $e$  em  $E'$ .

- Para cada aresta proibida  $e = ac \in E^3$ , adicione a  $V'$  os vértices  $b_1, \dots, b_{n-2}$  tais que  $ab_1 \dots b_{n-2}c$  induza um  $P_n$ .
- Faça  $N = V$  e atribua a  $P$  todos os vértices adicionados.

**Lema 6.54.**  $N$  é um conjunto independente e  $|N| = n = |V|$ .

*Demonstração.* Por construção, nenhuma aresta de  $E^1$  foi adicionada a  $E'$  e cada vértice de  $V$  foi atribuído a  $N$ . Assim,  $N$  é um conjunto independente de tamanho  $n$ .  $\square$

**Lema 6.55.** Cada  $C_4$  de  $G' = (P' + N', E')$  adicionado força a adição de uma aresta obrigatória de  $E^1$ .

*Demonstração.* Como  $C_4$  é um subgrafo proibido, cada  $C_4$  induzido pode ser destruído e, como apenas dois vértices de cada  $C_4$  estão em  $N$ , por construção, a única forma de destruí-los é adicionando as arestas entre esses vértices, que são arestas de  $E^1$ .  $\square$

**Lema 6.56.** Cada  $P_n$  induzido de  $G' = (P' + N', E')$  impede a adição de uma aresta de  $E^3$ .

*Demonstração.* De fato, se adicionarmos a aresta incidente aos extremos de um  $P_n$  adicionado formaremos um  $C_n$  que não pode ser destruído. Tal aresta é, por construção, uma aresta proibida de  $(V, E^1, E^3)$ .  $\square$

**Lema 6.57.** além dos  $C_4$ 's adicionados,  $xx'y'yx$  que induzem em  $G'$  a adição das arestas de  $E^1$  e, após a adição das arestas de  $E^1$  em  $G'$ , os únicos  $C_k$ 's em  $G'$ , tais que  $4 \leq k \leq n$ , são ciclos de  $(V, E^1, E^3)$ .

*Demonstração.* Claramente, cada  $P_n$  adicionado pode criar apenas ciclos maiores que  $n$ . Agora, vamos analisar a adição de  $C_4$ 's a  $G'$ . Ao adicionarmos um  $C_4$ ,  $xx'y'yx$ , podemos criar um  $C_k$ , onde  $4 \leq k \leq n$ , que certamente contém  $x$  e  $y$ . Após adicionarmos  $xy \in E^1$ , destruímos o  $C_4$  e reduzimos o  $C_k$  a um ciclo de tamanho  $k - 1$  que pertence a  $(V, E^1, E^3)$ , uma vez que não contém vértices adicionados.  $\square$

**Lema 6.58.** Se existe um grafo sanduíche cordal  $G = (V, E)$  para  $(V, E^1, E^3)$ , então  $G' = (P' + N', E')$  é PP-livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ .

*Demonstração.* Suponha que exista um grafo sanduíche cordal  $G = (V, E)$  para  $(V, E^1, E^3)$ . Vamos construir  $H = (V^*, E^*)$  da seguinte forma:  $V^* = P' + N'$  e  $E^* = E' \cup E$ . Claramente,  $H$  é uma imersão para  $G'$ . Resta mostrar que  $H$  é um grafo livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ . Mas isto segue do Lema 6.57 e do fato que  $G$  é um grafo sanduíche cordal.  $\square$

**Lema 6.59.** Se  $G' = (P' + N', E')$  é PP-livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ , então existe um grafo sanduíche cordal  $G = (V, E)$  para  $(V, E^1, E^3)$ .

*Demonstração.* Suponha que exista uma imersão  $H^* = (P' + N', E^*)$  para  $G'$  em um grafo livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ . Considere  $G' = H^*[V]$ .  $G'$  é um grafo sanduíche para  $(V, E^1, E^3)$ , já que, pelos Lemas 6.55 e 6.56, cada aresta adicionada a  $G'$  é obrigatória ou opcional. Além disso, como “ser livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ ” é uma propriedade hereditária,  $G'$  é livre de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ , o que implica que  $G'$  é cordal. □

Observe que a complexidade computacional de PROBE LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  segue como Corolário dos Teoremas 6.38 e 6.53.

**Corolário 6.60.** PROBE LIVRE DE  $(C_4, \dots, C_{|N|})$  é NP-completo.

## 6.6 PROBE LIVRE DE $(K_r \setminus e)$

Nesta seção provaremos que PROBE LIVRE DE  $(K_r \setminus e)$  é solucionável em tempo polinomial. Observe que, como LIVRE DE  $(K_r \setminus e)$ -SP está em P [27], então a complexidade computacional da versão probe particionada é também polinomial. A seguir, definimos PROBE LIVRE DE  $(K_r \setminus e)$  e apresentamos o algoritmo que resolve o problema.

PROBE LIVRE DE  $(K_r \setminus e)$

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$ .

*Pergunta:* Existe uma partição de  $V$  em  $(P, N)$  tal que  $N$  é conjunto independente e tal que exista um conjunto  $E'$  de arestas com ambos extremos em  $N$  tal que  $G' = (P + N, E + E')$  seja livre de  $(K_r \setminus e)$ ?

Algoritmo 7 roda em tempo  $O(n^r m)$ , onde  $|V| = n$  e  $|E| = m$ .

**Lema 6.61.** Algoritmo 7 decide corretamente se  $G = (V, E)$  é probe livre de  $K_r \setminus e$ .

*Demonstração.* Algoritmo 7 é um algoritmo guloso baseado no fato que, se  $G$  tem um  $K_r \setminus e$  como subgrafo induzido, então ele precisa ser destruído e, para fazer isto, a única opção possível é adicionar a aresta faltante  $e$ . Para podermos adicionar  $e$ ,  $x, y$  precisam ser vértices de  $N$  (se eles têm vizinhos em  $N$ , então a resposta é NÃO, uma vez que eles não podem estar em  $N$ ) e podemos adicionar  $e$ . Este raciocínio se repete até que o grafo seja livre de  $K_r \setminus e$  ou que não possamos adicionar a aresta faltante. □

**Teorema 6.62.** O problema PROBE LIVRE DE  $K_r \setminus e$  é solucionável em tempo polinomial

*Demonstração.* Segue do Lema 6.61. □

---

**Algoritmo 7:** Algoritmo para solucionar PROBE LIVRE DE  $(K_r \setminus e)$ 

---

**Entrada:**  $G = (V, E)$ **Saída:**  $(SIM, G^*)$  ou NÃO

```
1 início
2    $N \leftarrow \emptyset; E^* \leftarrow E;$ 
3   enquanto  $G^* = (V, E^*)$  tem  $K_r \setminus e$  como subgrafo induzido, onde  $e = xy$  faça
4      $E' \leftarrow \emptyset;$ 
5     se  $N_G(x) \cap N = \emptyset$  e  $N_G(y) \cap N = \emptyset$  então
6        $N \leftarrow N \cup \{x, y\}$ 
7        $E' \leftarrow \{xy\}$ 
8     senão
9       retorna NÃO
10    fim
11     $E^* \leftarrow E^* \cup E'$ 
12  fim
13  retorna  $(SIM, G^*)$ 
14 fim
```

---

Neste Capítulo introduzimos o problema de reconhecimento de grafos probe (particionado e não particionado). Inicialmente, utilizando a caracterização estrutural apresentada no Capítulo 4, trabalhamos com a análise complexidade computacional do problema probe para cografos  $(2, 1)$  e  $(1, 2)$ . Estes resultados foram apresentados no WG 2015 e constarão na edição especial do Lecture Notes in Computer Science do evento. Nas seções subsequentes, focamos em classes de grafos definidas por subgrafos proibidos. Trabalhamos com grafos 2 e 3-conexos e, em virtude dos resultados obtidos, pudemos relacionar problemas sanduíche e probe. Além disso, foi possível relacionar duas famosas conjecturas para grafos probe perfeitos: a Conjectura para grafos probe perfeitos e a Conjectura forte para grafos probe perfeitos. É importante destacar que, se a Conjectura para grafos probe perfeitos for falsa e o problema for NP-completo, através dos resultados aqui apresentados, poderíamos afirmar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS é NP-completo. Ainda sobre problemas probe para classes definidas por subgrafos proibidos, abordamos, nas últimas seções, o problema para grafos livres de  $C_k$ ,  $k \geq 4$  e algumas variações, bem como o problema não particionado para grafos livres de  $K_r \setminus e$ . Estes últimos resultados foram apresentados no CTW 2015. Um artigo completo que inclui os resultados deste capítulo, exceto os apresentados no WG 2015 foi submetido para a revista Discrete Applied Mathematics e está sob revisão.

# Capítulo 7

## Conclusão

Desde o mestrado desenvolvemos um trabalho acerca de problemas sanduíche para classes relacionadas a grafos perfeitos e a problemas de partição. Até o momento, estudamos as classes dos grafos cordais- $(k, \ell)$ , fortemente cordais- $(k, \ell)$ , grafos- $(k, \ell)$  e cografos- $(k, \ell)$ . Apresentamos, neste texto, nossos resultados relacionados ao estudo da classificação da dicotomia P versus NP-completo da complexidade de solução dos PROBLEMAS SANDUÍCHE PARA GRAFOS FORTEMENTE CORDAIS- $(k, \ell)$  e CORDAIS- $(k, \ell)$ . A Tabela 7.1 resume o trabalho executado até o momento para estas classes. Os problemas que havíamos deixado em aberto, soubemos, por comunicação pessoal, que foram solucionados por R. Sritharan.

$k \setminus \ell$	0	1	2	3	4	...
0	-	P	P [21]	NP-c [**]	NP-c [**]	...
1	P	*	NP-c [21]	NP-c [21]	NP-c [21]	...
2	?	NP-c [19, 21]	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	...
3	?	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	...
4	?	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	NP-c [20, 21]	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Tabela 7.1: Complexidade dos problemas sanduíche para grafos fortemente cordais- $(k, \ell)$  e cordais- $(k, \ell)$ . Observe que, quando  $k = \ell = 1$ , a complexidade dos dois problemas é diferente. Denotamos por \* essa complexidade, onde para grafos cordais- $(1, 1)$ , i.e grafos split, o problema é polinomial [40], e para grafos fortemente cordais- $(1, 1)$ , o problema é NP-completo [21]. O símbolo [\*\*] significa que o resultado ainda não foi publicado.

Com o intuito de solucionar o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ , começamos o estudo estrutural da classe, uma vez que uma caracterização de tal espécie não existia. Apresentamos no Capítulo 4, uma caracterização estrutural e decomposição para cografos- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$ , que nos possibilitou provar que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  é NP-completo. Já iniciamos o estudo para estender a caracterização estrutural e decomposição para a classe dos cografos- $(k, \ell)$ , mas

ainda não obtivemos resultados conclusivos. Devido ainda a este estudo, apresentamos o primeiro caso de não monotonicidade com relação a junção de duas propriedades para as quais sabemos que o PROBLEMA SANDUÍCHE é polinomial: o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA JUNÇÃO DE DOIS GRAFOS DE LIMAR que é NP-completo, embora o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFO DE LIMAR seja polinomial. Temos grande interesse em continuar o estudo de problemas sanduíche quando consideramos a junção de duas propriedades para as quais sabemos que o problema sanduíche é polinomial. Tendo como base o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$ , mostramos por indução matemática sobre  $k, \ell$  que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$  é NP-completo para  $k + \ell \geq 3$ ,  $k, \ell$  inteiros positivos fixos. Para os casos onde um dos parâmetros é nulo, mostramos que o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, 0)$  e  $(0, \ell)$  é polinomial quando  $k \leq 2$  ou  $\ell \leq 2$  fixo. Em contrapartida, o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS  $(k, 0)$  e  $(0, \ell)$ , com  $k \geq 3$  ou  $\ell \geq 3$  fixo, é NP-completo. As tabelas 7.2 e 7.3 apresentam o que era conhecido sobre a complexidade computacional do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$  e o sabemos atualmente após tal estudo, ou seja, a dicotomia P versus NP-completo totalmente classificada.

$k \setminus \ell$	0	1	2	3	4	...
0	-	trivial	?	?	?	...
1	trivial	P	?	?	?	...
2	?	?	?	?	?	...
3	?	?	?	?	?	...
4	?	?	?	?	?	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 7.2: Complexidade computacional do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$  antes de iniciarmos o estudo.

$k \setminus \ell$	0	1	2	3	4	...
0	-	trivial	P	NP-c	NP-c	...
1	trivial	P	NP-c	NP-c	NP-c	...
2	P	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	...
3	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	...
4	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	NP-c	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabela 7.3: Dicotomia P versus NP-c do PROBLEMA SANDUÍCHE PARA COGRAFOS- $(k, \ell)$ ,  $k, \ell$  fixos.

A Figura 7.1 mostra nossa contribuição ao diagrama apresentado por Golumbic, Kaplan e Shamir no artigo seminal de problemas sanduíche [40].



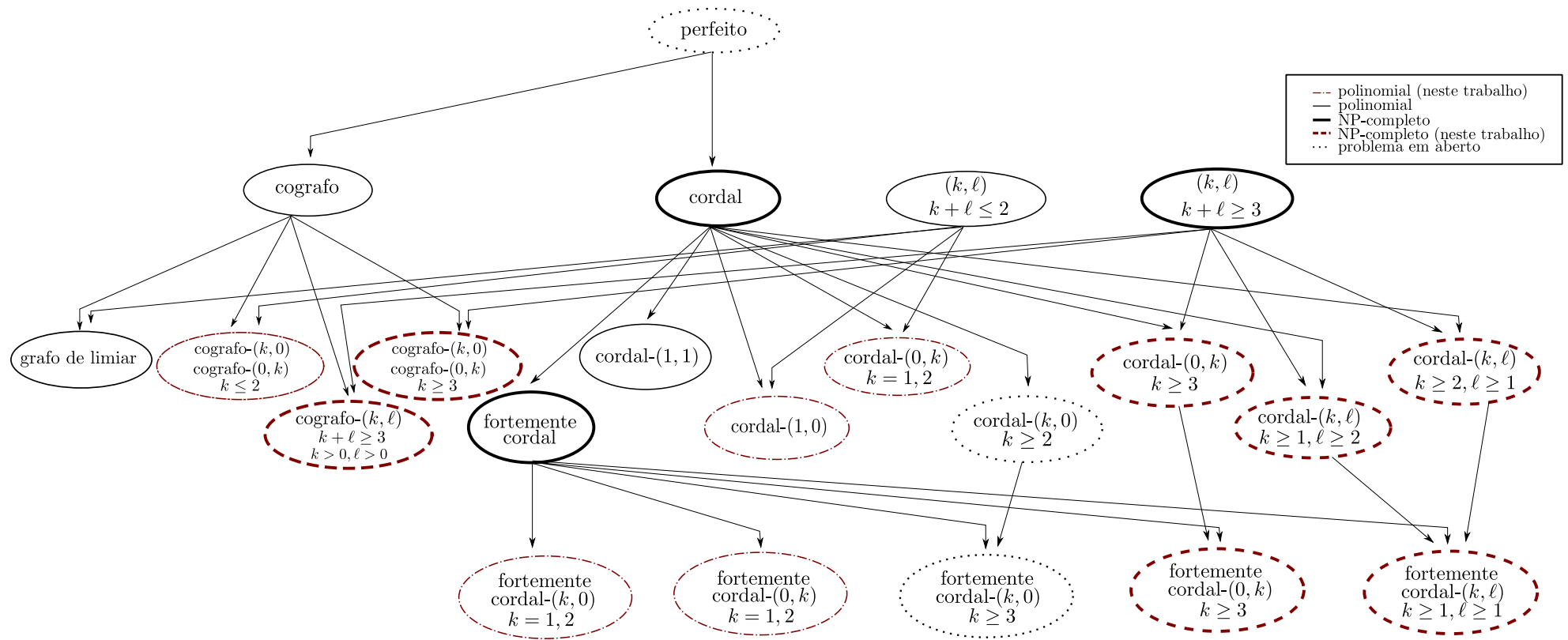


Figura 7.1: Nossa contribuição para o diagrama de [40].

No que concerne a PROBLEMAS SANDUÍCHE COM CONDIÇÕES DE CONTORNO, nosso principal resultado é um algoritmo em tempo polinomial para solucionar o problema  $(*, \text{CORDAL-}(2, 1), \text{PNC})$ , onde PNC significa número polinomial de cliques.

Ainda como aplicação da caracterização estrutural e decomposição para cografos  $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  apresentada no Capítulo 4, provamos que os problemas PROBE PARTICIONADO COGRAFO- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  e PROBE COGRAFO- $(2, 1)$  e  $(1, 2)$  são solucionáveis em tempo polinomial. Pretendemos classificar completamente a dicotomia P versus NP-completo da complexidade computacional do problema PROBE- $(k, \ell)$ .

O estudo de reconhecimento de grafos probe, em ambas as versões, particionada e não particionada, seguiu de encontro a classes definidas por subgrafos proibidos. Começamos estudando os grafos livres de  $C_k$  e provamos que os problemas PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $C_k$  e PROBE LIVRE DE  $C_k$ , para  $k \geq 4$  são NP-completos. Provamos o mesmo para grafos livres de  $(C_4, \dots, C_{|N|})$ , onde  $N$  é o conjunto dos vértices não probe. Ainda trabalhando com classes definidas por subgrafos proibidos, considerando  $F$  um grafo 3-conexo não completo, provamos que se o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS LIVRE DE  $F$  é NP-completo, então o problema PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $F$  é NP-completo e que, neste caso, o problema PROBE LIVRE DE  $F$  também é NP-completo. Quando  $F$  é um grafo 2-conexo não completo, provamos que se o problema PROBE PARTICIONADO LIVRE DE  $F$  é NP-completo, então o problema PROBE LIVRE DE  $F$  é também NP-completo. Além disso, mostramos que podemos estender este resultado para uma família  $\mathcal{F}$  de subgrafos proibidos 2-conexos e não completos e, em posse deste resultado analisamos duas conjecturas super importantes no estudo de grafos probe: a **Conjectura para grafos probe perfeitos** e a **Conjectura forte para grafos probe perfeitos**. Sabendo que a família de subgrafos proibidos para os grafos perfeitos é uma família de grafos 2-conexos e não completos, temos o seguinte resultado: se a Conjectura Forte para grafos probe perfeitos for verdadeira, então a Conjectura para grafos probe perfeitos também é verdadeira. Contudo, caso a Conjectura para grafos probe perfeitos seja falsa, temos um resultado muito mais interessante, pois neste caso, caso PROBE PARTICIONADO PERFEITO seja NP-completo, o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS estaria provado NP-completo.

No que concerne ao problema de reconhecimento de grafos probe, pretendemos continuar o estudo já iniciado para subgrafos desconexos e 1-conexos. Além disso, obviamente queremos nos aprofundar no estudo do problema PROBE PARTICIONADO PERFEITO, para quem sabe, utilizando os resultados apresentados aqui, poderemos solucionar o PROBLEMA SANDUÍCHE PARA GRAFOS PERFEITOS.

# Referências Bibliográficas

- [1] Berry, A., Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., 2004, “Two tricks to triangulate chordal probe graphs in polynomial time”. In: *Proceedings of the fifteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 992–969. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [2] Bodlaender, H., Fellows, M., Warnow, T., 1992, “Two strikes against perfect phylogeny”, *Computer Science*, v. 623, pp. 273–283.
- [3] Brandstädt, A., 1996, “Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques”, *Discrete Math.*, v. 152(1-3), pp. 47–54.
- [4] Brandstädt, A., 2005, “Corrigendum”, *Discrete Math.*, v. 186, pp. 295.
- [5] Brandstädt, A., Le, V. B., Szymczak, T., 1998, “The complexity of some problems related to Graph 3-colorability”, *Discrete Appl. Math.*, v. 89(1-3), pp. 59–73.
- [6] Brandstädt, A., Le, V., Spinrad, J., 1999, *Graph Classes: A Survey*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [7] Bravo, R., Klein, S., Nogueira, L., 2005, “Characterizing  $(k, \ell)$ -partitionable cographs”, *ENDM*, v. 22, pp. 277–280.
- [8] Bravo, R., Klein, S., Nogueira, L., et al., 2011, “Characterization and recognition of  $P_4$ -sparse graphs partitionable into  $k$  independent sets and  $\ell$  cliques”, *Discrete App. Math.*, v. 159, pp. 165–173.
- [9] Bretscher, A., Corneil, D. G., Habib, M., et al., 2003, “A simple linear time LexBFS cograph recognition algorithm”. In: *29th WG Workshop*, pp. 119–130.
- [10] Chandler, D. B., Chang, M.-S., Kloks, T., et al., 2009, *Probe Graphs*. Online Manuscript.
- [11] Chandler, D. B., Chang, M.-S., Kloks, T., et al., 2012, *Probe Graph Classes*. Online Manuscript.

- [12] Chandler, D., Chang, M.-S., Kloks, A., et al., 2006, “On Probe Permutation Graphs”. In: *Theory and Applications of Models of Computation*, v. 3959, *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 494–504.
- [13] Chang, M.-S., Kloks, T., Kratsch, D., et al., 2005, “On the Recognition of Probe Graphs of Some Self-Complementary Classes of Perfect Graphs”. In: Wang, L. (Ed.), *Computing and Combinatorics*, v. 3595, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 808–817. ISBN: 978-3-540-28061-3.
- [14] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., et al., 2006, “The Strong Perfect Graph Theorem”, *Annals of Mathematics*, v. 164, pp. 51–229.
- [15] Chvátal, V., Hammer, P. L., 1977, “Aggregation of Inequalities in Integer Programming”. In: P.L. Hammer, E.L. Johnson, B. K., Nemhauser, G. (Eds.), *Studies in Integer Programming*, v. 1, *Annals of Discrete Math.*, Elsevier, pp. 145 – 162.
- [16] Corneil, D. G., Lerchs, H., Burlingham, L. S., 1981, “Complement reducible graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 3, pp. 163–174.
- [17] Corneil, D. G., Lerchs, H., Stewart Burlingham, L., 1981, “Complement reducible graphs”, *Discrete App. Math.*, v. 3, n. 3, pp. 163–174.
- [18] Corneil, D. G., Perl, Y., Stewart, L. K., 1985, “A linear recognition algorithm for cographs”, *SIAM J. Comput.*, v. 14(4), pp. 926–934.
- [19] Couto, F., 2012, *Problemas Sanduíche para Grafos-(2,1) com Condições de Contorno*. Tese M.Sc., Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.
- [20] Couto, F., Faria, L., Klein, S., et al., 2013, “On (k,l)-Graph Sandwich Problems”. In: *Frontiers in Algorithmics and Algorithmic Aspects in Information and Management*, v. 7924, *LNCS*, pp. 187–197.
- [21] Couto, F., Faria, L., Klein, S., 2014, “Chordal-(k,l) and Strongly Chordal-(k,l) Graph Sandwich Problems”, *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 20, pp. 16–26.
- [22] Couto, F., Faria, L., Klein, S., et al., 2014, “(k, ℓ)-sandwich problems: why not ask for special kinds of bread?” *Matemática Contemporânea*, v. 42, pp. 17–26.
- [23] Couto, F., Faria, L., Gravier, S., et al., 2015, “Structural characterization and decomposition for cographs-(2, 1) and (1, 2): a natural generalization of threshold graphs”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 50, pp. 133 – 138.

- [24] Dahlhaus, E., 1991. “Chordale graphen im besonderen hinblick auf parallele algorithmen”. Habilitation Thesis.
- [25] Dantas, S., de Figueiredo, C., Faria, L., 2004, “On decision and optimization  $(k,l)$ -graph sandwich problems”, *Discrete Appl. Math.*, v. 143, pp. 155–165.
- [26] Dantas, S., Klein, S., de Mello, C. P., et al., 2009, “The Graph Sandwich Problem for  $P_4$ -sparse graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 11, pp. 3664 – 3673.
- [27] Dantas, S., de Figueiredo, C. M. H., da Silva, M. V. G., et al., 2011, “On the forbidden induced subgraph sandwich problems”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 159, pp. 1717–1725.
- [28] Dantas, S., Faria, L., de Figueiredo, C. M., et al., 2013, “The generalized split probe problem”, *Submitted to Discrete Applied Mathematics Special Issue LAGOS 2013*.
- [29] de Figueiredo, C., Klein, S., Vusković, K., 2002, “The graph sandwich problem for 1-join composition is NP-complete”, *Discrete Appl. Math.*, v. 121, pp. 73–82.
- [30] de Ridder, H. N., 2007, *On probe classes of graphs*. Ph.d. thesis, Rostock.
- [31] Dirac, G., 1961, “On rigid circuit graphs”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg*, v. 25, pp. 71–76.
- [32] Farber, M., 1981, *Applications of Linear Programming Duality to Problems Involving Independence and Domination*. Ph.d. thesis, Simon Fraser University, Canada.
- [33] Feder, T., Hell, P., Klein, S., et al., 1999, “Complexity of graph partition problems”. In: *Proceedings of the thirty-first annual ACM symposium on Theory of computing*, STOC ’99, pp. 464–472.
- [34] Feder, T., Hell, P., Hochstättler, W., 2007. “Generalized colourings (matrix partitions) of cographs”. .
- [35] Figueiredo, C., Faria, L., Klein, S., et al., 2007, “On the complexity of the sandwich problems for strongly chordal graphs and chordal bipartite graphs”, *Theor. Comput. Sci.*, v. 381, pp. 57–67.
- [36] Fulkerson, D., Gross, O., 1965, “Incidence matrices and interval graphs”, *Pacific Journal of Mathematics*, v. 15, pp. 835–855.
- [37] Gallai, T., 1967, “Transitiv orientierbaren graphen”, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, v. 18, pp. 25–66.

- [38] Garey, M. R., Johnson, D. S., 1979, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. New York, NY, USA, W. H. Freeman & Co.
- [39] Golumbic, M. C., 1980, *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. New York, Academic Press.
- [40] Golumbic, M., Kaplan, H., Shamir, R., 1995, “Graph sandwich problems”, *J. Algorithm*, v. 19, n. 3, pp. 449–473.
- [41] Habib, M., 1981, *Substitution of structures combinatories*. Ph.d. thesis., Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France.
- [42] Habib, M., Maurer, M. C., 1979, “On the X-join decomposition for undirected graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 3, pp. 198–207.
- [43] Habib, M., Paul, C., 2010, “A survey of the algorithmic aspects of modular decomposition”, *Computer Science Review*, v. 4, n. 1, pp. 41 – 59.
- [44] Habib, M., Paul, C., 2005, “A Simple Linear Time Algorithm for Cograph Recognition”, *Discrete Appl. Math.*, v. 145, n. 2, pp. 183–197.
- [45] Habib, M., McConnell, R., Paul, C., et al., 2000, “Lex-BFS and partition refinement, with applications to transitive orientation, interval graph recognition, and consecutive ones testing”, *Theoretical Computer Science*, v. 234, pp. 59–84.
- [46] Hell, P., Klein, S., Nogueira, L. T., et al., 2004, “Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques”, *Discrete Appl. Math.*, v. 141, pp. 185–194.
- [47] Jung, H. A., 1978, “On a class of posets and the corresponding comparability graphs”, *J. Combin. Theory Ser.*, v. 24 (B), pp. 125–133.
- [48] Karp, R. M., 1972, “Reducibility Among Combinatorial Problems”, *Complexity of Computer Computations*, pp. 85–103.
- [49] Lerchs, H., 1971, *On cliques and kernels*. Dept. of Comp. Sci., University of Toronto.
- [50] Lerchs, H., 1972, *On the clique-kernel structure of graphs*. Department of Computer Science, University of Toronto.
- [51] Lueker, G., Rose, D., Tarjan, R. E., 1976, “Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs”, *SIAM Journal on Computing*, v. 5(2), pp. 266–283.
- [52] McConnel, R. M., Spinrad, J. P., 1999, “Modular decomposition and transitive orientation”, *Discrete Mathematics*, v. 201, pp. 189–241.

- [53] M.C.Golumbic, Wassermann, A., 1998, “Complexity and Algorithms for Graph and Hypergraph Sandwich Problems”, *Graphs and Combinatorics*, v. 14, pp. 223–239.
- [54] Möhring, R. H., Radermacher, F. J., 1984, “Substitution decomposition for discrete structures and connections with combinatorial optimization”, *Annals of Discrete Mathematics*, v. 19, pp. 257–356.
- [55] Möhring, R. H., Radermacher, F. J., 1985, “Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs”. In: Rival, I. (Ed.), *Graphs and Orders*, pp. 41–102. D. Reidel Pub. Comp. Available online: <<http://purl.org/CITIDEL/DBLP/db/conf/stoc/stoc1999.html#FederHKM99>>.
- [56] M.R.Cerioli, Everett, H., de Figueiredo, C., et al., 1998, “The homogeneous set sandwich problem”, *Inf. Process. Lett.*, v. 67, pp. 31–35.
- [57] Muller, J., Spinrad, J., 1989, “Incremental modular decomposition”, *Journal ACM*, v. 36, pp. 1–19.
- [58] Pnueli, A., Lempel, A., Even, S., 1971, “Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs”, *Canad. J. Math.*, v. 23, pp. 160–175.
- [59] Simone Dantas, Luerbio Faria, Celina M.H. de Figueiredo, et al., “The  $(k, \ell)$  UNPARTITIONED PROBE problem NP-complete versus Polynomial dichotomy”, *Submitted to IPL*.
- [60] Spinrad, J., 1982, *Two dimensional partial orders*. Ph.d. thesis, Princeton University, Princeton, N.J.
- [61] Sritharan, R., 2008, “Chordal bipartite completion of colored graphs”, *Discrete Math.*, v. 308, pp. 2581–2588.
- [62] Stewart, L., 1978, *Cographs, a class of tree representable graphs*. Master thesis, University of Toronto, Toronto, Ontario.
- [63] Sumner, D. P., 1974, “Dacey graphs”, *J. Australian Math. Soc.*, v. 18(4), pp. 492–502.
- [64] Szwarcfiter, J. L., 1983, *Grafos e algoritmos computacionais*. Rio de Janeiro.
- [65] Teixeira, R., de Figueiredo, C., 2006, “The sandwich problem for cutsets: clique cutset, k-star cutset”, *Discrete Appl. Math.*, v. 154, pp. 1791–1798.
- [66] Tsukiyama, S., Ide, M., Arujoshi, H., et al., 1977, “A new algorithm for generating all the maximal independent sets”, *SIAM J. Comput.*, v. 6, pp. 505–517.

- [67] V. Le, H. R., 2007, “Characterisations and linear-time recognition of probe co-graphs”, *Proceedings WG 2007, Lecture Notes in Computer Science*, v. 4769.
- [68] Zhang, P., 1994, “Probe interval graph and its application to physical mapping of DNA”, *Manuscript*.
- [69] Zhang, P., Schon, E. A., Fisher, S. G., et al., 1994, “An algorithm based on graph theory for the assembly of contigs in physical mapping of DNA”, *CABIOS 10*, pp. 309 – 317.
- [70] Zhang, P., Ye, X., Liao, L., et al., 1999, “Integrated mapping package - a physical mapping software tool kit”, *Genomics 55*, pp. 78 – 87.