COPPE UFRJ
Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

HISTÓRIA E ENSINO DE MATRIZES: PROMOVENDO REFLEXÕES SOBRE O DISCURSO MATEMÁTICO

Aline Caetano da Silva Bernardes

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Nelson Maculan Filho
Tatiana Marins Roque

Rio de Janeiro
Março de 2016

HISTÓRIA E ENSINO DE MATRIZES: PROMOVENDO REFLEXÕES SOBRE O DISCURSO MATEMÁTICO

Aline Caetano da Silva Bernardes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof.ª Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D. Sc.

Prof.ª Tatiana Marins Roque, D. Sc.

Prof.ª Marcia Helena da Costa Fampa, D. Sc.

Prof.ª Tinne Hoff Kjeldsen, Ph. D.

Prof. Marcelo Miranda Viana da Silva, D. Sc.

Prof. Gert Felix Schubring, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2016

Bernardes, Aline Caetano da Silva

História e Ensino de Matrizes: promovendo reflexões sobre o discurso matemático/Aline Caetano da Silva Bernardes. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XIII, 273 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Nelson Maculan Filho

Tatiana Marins Roque

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 235 – 242.

1. História das matrizes. 2. Ensino de Matrizes. 3. Regras metadiscursivas. 4. Consciência histórica. 5. Concepções. I. Maculan Filho, Nelson *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Para aquelas que me ligam ao passado e ao futuro: Maria José e Sofia.

Por mais história no ensino de matemática.

Agradecimentos

Ao longo desses seis anos de doutorado, interrompidos com a chegada de Sofia, tive a oportunidade de trocar ideias com muitas pessoas sobre a pesquisa. Com certeza, esta lista deveria ser maior. Faltam-me palavras para expressar, mas estas linhas transbordam sentimentos…

Inicio os agradecimentos pelos meus orientadores, Professor Nelson Maculan e Professora Tatiana Roque, sem os quais eu não estaria escrevendo estas palavras hoje… Agradeço ao Professor Nelson Maculan e ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação pela oportunidade de fazer o doutorado e desenvolver uma pesquisa em uma área distinta daquelas contempladas pelo programa. Agradeço imensamente à Tatiana Roque por me inspirar e atrair para a História da Matemática, por possibilitar "o nascimento de uma alma" dando vida às minhas ideias inicialmente toscas, pela grande contribuição para a minha formação e pelo apoio nos momentos decisivos para a realização deste trabalho.

À Professora Tinne Hoff Kjeldsen pela oportunidade de discutir e aprimorar o projeto inicial da tese por um mês em Copenhagen e por todas as suas contribuições a esta pesquisa.

Aos colegas Cleber Haubrichs dos Santos e Fábio Xavier Penna pelo apoio na parte matemática do trabalho. Ao colega José Cal Neto pelas revisões com o inglês e pelos gráficos construídos com o Maple.

À querida Professora Ana Teresa e ao Professor Victor Giraldo pelas conversas e sugestões sobre a metodologia do trabalho.

Às queridas Leticia Rangel e Beatriz Malajovich (Bia) com quem compartilhei os (muitos!) momentos difíceis e, claro, os momentos de satisfação e alegria da minha trajetória no doutorado. À Bia, em especial, o meu muito obrigada pela ajuda com o LaTeX e com a formatação da tese. À querida Bruna Moustapha por "segurar minhas mãos" na véspera da defesa. À minha querida irmã Angélica pela paciência e disponibilidade sempre que solicitei sua leitura e opinião sobre a análise dos dados. A todos aqueles que, com uma palavra amiga, incentivaram-me a seguir em frente nos momentos de desânimo, sintam-se todos representados nestas linhas.

Aos alunos do PROFMAT-UNIRIO, aos alunos da UERJ e da UFRRJ (Nova Iguaçu), que participaram dos estudos de campo da pesquisa como voluntários, pela prontidão em dispor seu tempo para os encontros e em fazer todas as atividades propostas.

Às Professoras Marcia Fampa e Celina Figueiredo pela prontidão em assistir duas prévias e pelas sugestões para as considerações finais do texto.

Aos membros examinadores do trabalho pelos seus questionamentos e sugestões, que enriqueceram o texto.

Ao meu grande amor Bauer por me acompanhar nas viagens internacionais à trabalho, por cuidar da nossa Sofia todas as vezes em que estive ausente e por suportar a minha ausência por tanto tempo, principalmente nos meses que antecederam a defesa.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que esta pesquisa se tornasse realidade.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D. Sc.)

HISTÓRIA E ENSINO DE MATRIZES: PROMOVENDO REFLEXÕES SOBRE O DISCURSO MATEMÁTICO

Aline Caetano da Silva Bernardes

Março/2016

Orientadores: Nelson Maculan Filho
Tatiana Marins Roque

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Apresentamos uma proposta que articula história das matrizes ao ensino de Álgebra Linear. Os referenciais teóricos e metodológicos são inspirados no modelo introduzido por Tinne Hoff Kjeldsen (2011a), para integrar história ao ensino de matemática, bem como na *teoria da matemática como um discurso* proposta por Anna Sfard (2008). Com base em dois estudos de campo, realizados com estudantes de graduação em matemática, investigamos, em primeiro lugar, como fontes históricas podem promover reflexões sobre regras metadiscursivas relacionadas a matrizes e determinantes, a partir de conflitos comognitivos. Analisamos também o impacto dessas reflexões na formação de concepções (SFARD, 1991) dos estudantes, ligadas a esses conceitos. Além disso, investigamos como o estudo poderia contribuir para o desenvolvimento de uma consciência histórica (RÜSEN, 2001), a fim de possibilitar a formação de uma visão desnaturalizada (GIRALDO; ROQUE, 2014) de matrizes e determinantes. Dentre as conclusões, observamos que os estudantes explicitaram algumas de suas metarregras; que as reflexões sobre as metarregras influenciaram, em alguns casos, mudanças nas concepções dos estudantes e que o estudo contribuiu para o desenvolvimento de uma consciência histórica, assim como para a formação de uma visão desnaturalizada sobre matrizes e determinantes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D. Sc.)

HISTORY AND TEACHING OF MATRICES: PROMOTING REFLECTIONS ON THE MATHEMATICAL DISCOURSE

Aline Caetano da Silva Bernardes

March/2016

Advisors: Nelson Maculan Filho
Tatiana Marins Roque

Department: Systems Engineering and Computer Science

We present a proposal that articulates the history of matrices to linear algebra teaching. The theoretical and methodological frameworks are inspired by the model introduced by Tinne Hoff Kjeldsen (2011a), to integrate history with the teaching of mathematics, as well as in Sfard's theory of *Thinking as Commmunication* (SFARD, 2008). Based on two teaching experiments conducted with undergraduate students in mathematics, we investigate at first, how historical sources can promote reflections on metadiscursive rules related to matrices and determinants, from commognitive conflicts. We also analyze the impact of these reflections in students' conceptions (SFARD, 1991), related to these concepts. Furthermore, we investigated how the study could contribute to the development of a historical consciousness (RÜSEN, 2001), with the aim of enabling the formation of a denaturalized vision (GIRALDO; ROQUE, 2014) of matrices and determinants. Among the findings, we have found that students made explicit some of their metarules; the reflections on metarules influenced changes in some of their conceptions, and lastely the study contributed to the development of a historical consciousness together with the formation of a denaturalized vision of matrices and determinants.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas décadas, muitas pesquisas têm discutido e defendido a importância do uso de história da matemática no ensino de matemática. Essas pesquisas, assim como este trabalho, se inserem em uma linha de pesquisa da educação matemática que investiga as relações entre a história da matemática e a educação matemática. Alguns dos temas que norteiam a agenda dessa linha de pesquisa em alguns eventos importantes no cenário internacional são[1]: referenciais teóricos e metodológicos que podem ser usados para integrar a história ao ensino; experimentos de ensino com o uso da história e materiais de ensino explorando a história; uso de fontes originais em sala de aula e seus efeitos; e matemática e culturas.

Quando se pensa em usar história no ensino de matemática muitas questões se colocam. Com qual finalidade? Para motivar os alunos a aprender matemática? Para introduzir um conceito? Como? Apresentando a biografia de um matemático? Contando uma anedota sobre algum matemático conhecido? Tomando um problema da história para formular uma questão? Adotando, de fato, uma abordagem histórica para ensinar matemática? Do ponto de vista histórico, uma dificuldade que se coloca é como planejar uma abordagem histórica sem distorcer a história e sem interpretar a matemática do passado a partir das concepções da matemática do presente, isto é, sem projetar no passado os conceitos como entendidos e defini-

[1]Os temas citados constam na lista de tópicos para submissão de artigos para apresentação no ESU 7 (*7th European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education*, realizado em julho de 2014, em Copenhagen e na lista proposta pelo TSG25 (*Topic Study Group*) sobre o papel da história da matemática na educação matemática, para a submissão de propostas a serem apresentadas nas sessões desse grupo, que acontecerão no ICMI 13 (*13th International Congress on Mathematical Education*), a ser realizado em julho de 2016, em Hamburgo.

dos hoje. Ainda assim, a história tem sido integrada ao ensino de matemática de diferentes formas, fundamentadas a partir de diferentes justificativas.

Uma publicação que apresenta um "estado da arte" das pesquisas até 2000 é o *History in Mathematics Education, The ICMI Study* (FAUVEL; MAANEN, 2000). Trata-se de um trabalho realizado pelo *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics* (HPM), grupo de estudos filiado ao *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) desde 1976 e que tem como objetivo investigar o papel da história da matemática na educação matemática. O capítulo 7 desse estudo, coordenado por Constantinus Tzanakis e Abraham Arcavi, fornece uma longa lista de argumentos favoráveis ao uso da história no ensino e também uma lista de objeções. Não apresentaremos essas listas em detalhes, ao invés disso, apresentaremos algumas categorizações propostas mais recentemente para classificar os diferentes argumentos usados na defesa do uso da história no ensino, a fim de prover um panorama de como a articulação entre história e ensino tem sido feita.

No capítulo 21 do *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*, Michael N. Fried (2014) identifica três temas principais que agrupam as justificativas usadas em tentativas recentes de relacionar a história da matemática com a educação matemática: o *tema motivacional*, o *tema curricular* e o *tema cultural*.

O *tema motivacional*, de cunho afetivo, inclui os exemplos de uso da história visando tornar a matemática mais interessante, menos formal, mais humana. Entram aqui os exemplos de usos de anedotas ou estórias para que os estudantes percebam os matemáticos como pessoas humanas, passíveis de erros, como qualquer um. Não importa se as estórias são verdadeiras, se contém erros ou não. No entanto, essa justificativa para usar a história é vista como problemática. Primeiro, ela supõe que a matemática por si só não é interessante, é preciso algo a mais para reavivá-la, para atrair os estudantes. Segundo, tal uso da história ignora a própria especificidade da história como uma forma de conhecimento a ser aprendido e levado a sério.

O *tema curricular*, de cunho mais pedagógico e, em certa medida, motivacional também, inclui os exemplos que usam a história para ensinar tópicos do currículo como funções, equações, números, entre outros. Nessa perspectiva, os tópicos podem ser ensinados primeiro para depois serem discutidos de um ponto de vista histórico ou pode-se partir da história para introduzir um determinado conceito. Os conceitos, em algum momento, são abordados do ponto de vista moderno, pois a perspectiva é determinada pelo currículo e o tratamento histórico tem que ser adaptado para ficar consistente com a abordagem moderna. Há uma tendência, nas propostas agrupadas nesse tema, em se enxergar os conceitos modernos como implícitos na matemática do passado.

O *tema cultural*, como o próprio título sugere, parte da perspectiva de que matemática e a cultura são inseparáveis. A matemática é concebida como uma atividade essencialmente humana, como uma expressão da cultura, logo a história e a matemática também são inseparáveis. A história é vista aqui como parte da própria matemática. Tal perspectiva contribui para transformar a imagem que os estudantes têm da matemática, em que os objetos matemáticos e suas relações são eternas, são como entidades platônicas, vistas da mesma forma em todo lugar, em qualquer tempo (FRIED, 2014). Em contraposição a essa imagem, a visão cultural contribui para promover um senso de diversidade nos estudantes, a partir do reconhecimento de diferentes contextos, necessidades e práticas que contribuiriam para a construção do que chamamos hoje de matemática. Um dos exemplos citados por Fried nesse tema é a etnomatemática, em referência às pesquisas de Ubiratan D'Ambrosio. A etnomatemática investiga a matemática praticada por grupos culturais, incluindo comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma certa faixa etária, sociedades indígenas, entre outros (D'AMBROSIO, 2002).

Um dos exemplos que Fried (2014) cita para o tema curricular é a chamada *abordagem genética*. Trata-se de uma das abordagens mais antigas defendendo o uso de história no ensino e que estabelece uma relação entre a evolução histórica da matemática e a aprendizagem da matemática (SCHUBRING, 2011). Schubring (ibid.) discute as interpretações dos principais representantes da abordagem genética. O matemático alemão Otto Toeplitz (1841-1940), um dos defensores dessa abordagem, introduziu uma distinção entre abordagem genética direta e abordagem genética indireta. Na primeira, os conceitos matemáticos são apresentados por meio do seu desenvolvimento histórico, o que requer o uso direto da história. Na abordagem indireta, uma análise histórica é realizada e, então, usada para ensinar um tópico, o que requer do professor compreender e refletir sobre os processos históricos antes de transmiti-los aos alunos.

Fried (2014) menciona a abordagem genética como um caso particular do tema curricular, com ênfase para as posições que consideram que as dificuldades que surgiram na história podem reproduzir-se nas dificultadas enfrentadas pelos alunos durante a aprendizagem de um determinado tópico. Dentre os trabalhos citados por Fried que ilustram o uso da abordagem genética indireta, destacamos o trabalho de Jean-Luc Dorier (1998), que conduziu junto com outros colaboradores um programa de pesquisa sobre o ensino de Álgebra Linear (DORIER, 2000), de longa duração. A partir de um levantamento histórico da gênese da teoria dos espaços vetoriais, Dorier fez uma análise epistemológica da natureza da Álgebra Linear e um análise didática das dificuldades dos estudantes com o formalismo inerente à disciplina, cujo desenvolvimento histórico passou por um processo de formalização, unificação e generalização de métodos. A partir dessas análises, Dorier coloca que situações de ensino devem ser elaboradas de modo a levar os estudantes a compreenderem e refletirem sobre o que se ganha com a unificação e a generalização de métodos. Assim, os estudantes poderão aceitar o formalismo e lidar com ele de forma mais satisfatória.

Outras categorizações foram propostas além dessas três introduzidas por Fried. Uffe Thomas Jankvist (2009) classifica os argumentos sobre o uso da história no ensino em duas categorias: *história como uma ferramenta*[2] e *história como um objetivo*[3]. Os argumentos classificados em "história como uma ferramenta" são aqueles que têm por objetivo a aprendizagem de matemática. Tal propósito se relaciona com o ensino e aprendizagem de "questões internas" à matemática (*inner-issues* ou *in-issues*), por exemplo, os conjuntos numéricos e suas cardinalidades, funções etc. Na categoria "história como um objetivo", encontram-se os argumentos que levam em conta a aprendizagem de aspectos da própria história da matemática. Não se trata de aprender história em si, mas sim de aprender aspectos do desenvolvimento histórico da matemática, por exemplo: mostrar aos estudantes que a matemática existe e evolui no tempo e no espaço, mostrar que a "evolução da matemática" se deve a muitas culturas diferentes e que essas culturas moldam a matemática e

[2]No original: history as a tool.
[3]No original: history as a goal.

também o inverso. Essa segunda categoria se relaciona com "meta-aspectos" ou "meta-questões" (*meta-issues*) de matemática. Exemplos: como a matemática evolui no tempo? Que forças e mecanismos estão presentes na sua evolução? Circunstâncias sociais e culturais desempenham que papel na evolução da matemática? (ibid., p. 22)

Comparando as classificações de Fried e de Uffe, os argumentos agrupados nos temas motivacional e curricular podem ser considerados como abordando a história como uma ferramenta. Ambos têm como objetivo ensinar tópicos de matemática. Jankvist também cita o argumento motivacional na categoria "história como uma ferramenta". Já o tema cultural, por considerar a história como parte da própria matemática, não se limita a questões internas (*in-issues*) da matemática. Logo, esse tema pode ser equiparado à categoria "história como um objetivo".

Ambas as classificações anteriores apontam diferentes papeis da história da matemática na educação matemática. Apesar de haver um consenso geral de que a história pode desempenhar um papel importante na educação matemática, reconhece-se também a carência de estudos empíricos, que forneçam evidências e investiguem se e como a história contribui para melhorar o ensino em algum aspecto (JANKVIST, 2009; ROQUE, 2014). Schubring (2011) aponta a escassez de exemplos positivos do uso da história no ensino e afirma que há mais "apelos eufóricos" ao uso da história do que reflexões sobre o seu uso.

Ainda sobre os papeis da história na educação matemática, destacamos os trabalhos de Tinne Hoff Kjeldsen e seus colaboradores (KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) e de Tatiana Roque e Victor Giraldo (ROQUE, 2014; GIRALDO; ROQUE, 2014), cujas ideias contribuíram para nossa proposta de realizar um experimento de ensino articulando história com o ensino de Álgebra Linear, mais especificamente com o ensino de matrizes, tendo como sujeitos futuros professores de matemática.

Kjeldsen (2011a) apresenta um argumento teórico propondo a integração entre história e ensino de matemática baseando-se na teoria de Anna Sfard (2008) que concebe a matemática como um discurso (*Thinking as communicating* e em quadros metodológicos adaptados da historiografia da matemática (KJELDSEN, 2011b). Segundo Sfard (2008), a matemática é vista como uma forma bem definida de comunicação ou como um tipo de discurso governado por dois tipos de regras: **regras no nível do objeto** e **regras metadiscursivas**. As primeiras são descritas como narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso, que são os próprios objetos matemáticos. As definições matemáticas, as propriedades dos objetos matemáticos são regras do nível do objeto. As segundas dizem respeito às ações daqueles que produzem o discurso (**metarregras**), isto é, como os matemáticos definem, como demonstram; como professores de matemática convencem os alunos sobre a consistência de uma definição, sobre a validade de uma propriedade etc. Sfard defende que a aprendizagem matemática requer uma postura de participação no discurso, a agregação das regras do nível do objeto e o desenvolvimento constante de novas metarregras do discurso. Recentemente, algumas pesquisas baseadas no quadro discursivo de Sfard (GÜÇLER, 2013; VIIRMAN, 2013; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) têm apontado para a importância e o desafio da educação matemática em planejar situações de ensino que promovam a aprendizagem de metarregras. Essas regras têm um caráter contingente e estão geralmente implícitas no discurso, de modo que é difícil para os estudantes aprendê-las por si só. De acordo com (SFARD, 2008), a aprendizagem de metarregras se dá por meio do contato com discursos governados por outras metarregras. O encontro do aprendiz com um novo discurso é denominado *conflito comognitivo*.

O argumento de Kjeldsen (2011a) traz a ideia de que a história pode servir como uma estratégia privilegiada para explicitar as metarregras do discurso e torná-las objetos de reflexão dos estudantes. A história é rica em discursos governados por metarregras que, geralmente, não influenciam o discurso matemático atual. Ao compreender as metarregras que orientaram as ações dos matemáticos no passado, por contraste, os estudantes podem perceber suas próprias metarregras. O argumento baseia-se na noção de conflito comognitivo.

Nossa perspectiva de investigação emergiu a partir do argumento teórico de Kjeldsen: elaborar uma proposta de ensino com o objetivo inicial de promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, por meio de conflitos comognitivos, planejados a partir de fontes históricas envolvendo matrizes. Ao refletirem sobre metarregras observadas nas fontes históricas do passado, os estudantes poderiam perceber e se tornar conscientes de suas próprias metarregras quando lidam com matrizes e determinantes. A oportunidade de fazer um estágio na Universidade de Roskilde - Dinamarca - com Tinne Hoff Kjeldsen, durante um mês em 2012, possibilitou aprimorar o projeto de pesquisa inicial para a tese e discutir alguns de seus artigos citados aqui.

Dentro da perspectiva acima, pareceu-nos interessante relacionar as reflexões sobre metarregras com as concepções dos participantes do estudo sobre matrizes e determinantes. Assim, investigamos também se essas reflexões têm impacto na formação de concepções. Usamos, para isso, as pesquisas que investigam **concepções** sobre um determinado conceito matemático (SFARD, 1991). Nossos principais exemplos são os trabalhos de Iiris Attorps (2006) e Ruhama Even (1993), que identificaram concepções limitadas ou inadequadas sobre o conceito de *equação* e de *função* (respectivamente) por parte de professores e de futuros professores de matemática. Concepções limitadas ou inadequadas comprometem a aprendizagem dos conceitos, assim essas pesquisas alertam para a importância de influenciar as concepções de estudantes e professores sobre um determinado conceito.

Nosso segundo objetivo é investigar a possibilidade de desenvolvimento de uma **consciência histórica**, direcionada à constituição de **uma visão desnaturalizada** dos conceitos de matriz e determinante. No campo da história, Jörn Rüsen (2001) explica o que significa pensar historicamente por meio do conceito de **consciência histórica**, definido como o processo mental segundo o qual os homens interpretam sua experiência da evolução temporal de seu mundo e de si mesmos, de forma tal que possam orientar, intencionalmente, sua vida prática no tempo. Rüsen defende que as experiências do passado devem ser interpretadas visando a constituição de um sentido para compreender o presente e, com isso, fazer projeções para o futuro. Achamos interessante que futuros professores interpretem práticas matemáticas do passado relacionadas à matrizes para refletir sobre suas práticas no presente.

Inserindo-se nas discussões sobre os saberes do professor de matemática, Victor Giraldo e Tatiana Roque (2014) argumentam que os conceitos matemáticos são apresentados de modo *naturalizado*, isto é, sua existência, importância e papel na matemática são assumidos como dados, sem problematização. As demandas e tensões que impulsionaram sua gênese e seu desenvolvimento não são levadas em conta no ensino. Desse modo, a história da matemática pode contribuir para revelar certas sutilezas inerentes à gênese do conceito como, por exemplo, o que levou à sua definição atual, com que finalidade foi criado etc. Giraldo e Roque apontam que essas sutilezas genéticas estão ausentes na formação de professores e defendem que a constituição de uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos é um aspecto essencial do conhecimento pedagógico de conteúdo, no sentido de (SHULMAN, 1986).

Em outro trabalho, Roque (2014) faz uma reflexão sobre o que se perde com a constituição dos objetos matemáticos, cuja consequência é a dissimulação do processo histórico do seu desenvolvimento. Os objetos matemáticos tornam-se *opacos* em relação aos fatores que suscitaram sua gênese e impulsionaram seu desenvolvimento. Desse modo, o uso da história é sugerido para resgatar o desenvolvimento histórico dos objetos matemáticos, exibindo práticas em que os mesmos objetos não eram essenciais ou eram utilizados de modo distinto do de hoje e com outras finalidades. Roque defende que exibir as sinuosidades do percurso da constituição pode contribuir para desfazer tal opacidade e dar um sentido aos objetos matemáticos. As ideias de Roque (2014) e as de Giraldo e Roque (2014) têm em comum o recurso à história da matemática, visando resgatar práticas matemáticas que tenham relação com um conceito matemático.

Reconhecendo que nossa proposta de ensino promove um conhecimento histórico sobre matrizes, pareceu-nos interessante relacionar as ideias de Roque (2014) sobre desfazer a opacidade dos objetos matemáticos e de Giraldo e Roque (2014) sobre constituir uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos com a noção de consciência histórica.

A motivação inicial em propor um experimento de ensino com uma abordagem histórica teve influência da minha atuação na disciplina de Álgebra Linear 1 principalmente na Licenciatura em Matemática do CEDERJ[4], na modalidade à distância, durante os anos de 2010 a 2013. Lecionar essa disciplina despertou-me o interesse em conhecer a história da Álgebra Linear. A escolha pelo tópico matrizes para desenvolver a proposta foi motivada pelo ensino de matrizes. O conceito de matriz

[4]O Consórcio Cederj (Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro) é formado por sete instituições públicas de ensino superior: CEFET, UENF, UERJ, UFF, UFRJ, UFRRJ e UNIRIO. Seu objetivo é levar a educação superior, gratuita e de qualidade a todo o Estado do Rio de Janeiro.

costuma ser o ponto de partida de muitos cursos e livros didáticos de Álgebra Linear no Brasil, que se estruturam em torno desse objeto e, portanto, conferem a ele um papel importante nessa disciplina. Nessa abordagem, as matrizes são apresentadas de um modo *naturalizado*, como um objeto, um fato.

Ao longo desses anos de pesquisa, conversando com vários alunos que já haviam cursado as disciplinas de Álgebra Linear e com professores do ensino básico sobre a especificidade da regra para a multiplicação de matrizes e raramente alguém sabia a origem dessa especificidade. Esse fato se relaciona ao modo naturalizado com o qual as matrizes (e os conceitos matemáticos em geral) são ensinadas. As regras para as operações com matrizes costumam ser introduzidas sem problematização.

Dada a carência de estudos empíricos no campo, este trabalho contribui com um experimento de ensino que articula história das matrizes e ensino de matrizes. Não é nosso objetivo usar a história para introduzir o conceito de matriz nem propor uma nova maneira de ensinar matrizes. Este trabalho pretende ser uma contribuição para a discussão sobre o papel da história como uma estratégia para promover reflexões sobre as metarregras do discurso, bem como sobre seu papel em desenvolver uma visão desnaturalizada dos objetos matemáticos, por meio do caso particular das matrizes.

No capítulo 1, apresentamos os referenciais teóricos que norteiam nosso estudo. Começamos por descrever os principais conceitos da teoria Sfard até chegar nos conceitos de *metarregras* e *conflitos comognitivos*. Em seguida, revisitamos o argumento teórico introduzido em (KJELDSEN, 2011a) e fazemos uma pequena revisão bibliográfica descrevendo seus trabalhos que propõem o uso de história para promover reflexões sobre metarregras. Apresentamos a definição usada neste trabalho para *concepções*, em referência a Sfard (1991). Discutimos em mais detalhes as ideias de Roque (2014) e de Giraldo e Roque (2014) e revisitamos a definição para *consciência histórica* de (RÜSEN, 2001). Terminamos esse capítulo apresentando os objetivos do trabalho e as questões de pesquisa.

No capítulo 2, apresentamos a parte histórica do trabalho, que consiste em dois episódios, tendo como protagonistas os matemáticos James Joseph Sylvester (1814-1897) e Arthur Cayley (1821-1895). Para isso, baseamo-nos na interpretação histórica de Frédéric (BRECHENMACHER, 2006b). Em seguida, apresentamos os conceitos de *objetos epistêmicos* e de *técnicas epistêmicas*, os quais possibilitam descrever e analisar episódios de pesquisa a partir da prática da matemática, contextualizando no tempo e no espaço os objetos e ferramentas envolvidos. Fazemos uma releitura dos episódios históricos de Sylvester e de Cayley à luz desses conceitos, a fim de comparar o papel das matrizes em cada episódio. Terminamos apresentando as metarregras que foram identificadas por nós em cada episódio para serem exploradas nos estudos de campo.

No capítulo 3, discutimos a natureza da pesquisa e descrevemos os instrumentos de geração de dados. Além disso, explicamos como o material de ensino foi organizado. Dado que as fontes históricas estão escritas em francês e inglês, optamos por elaborar dois roteiros de ensino que serviram de base para trabalhar com os participantes do estudo. O primeiro roteiro aborda o episódio histórico de Sylvester e, o segundo, aborda o episódio de Cayley.

No capítulo 4, fazemos um breve relato de um estudo piloto e um relato mais detalhado dos dois estudos de campo principais da pesquisa. Apresentamos os sujeitos da pesquisa e descrevemos a organização dos encontros. A intervenção teve o formato de um minicurso com o tema "**Diferentes papeis da noção de matriz em dois episódios da História das Matrizes**". Os resultados da pesquisa baseiam-se nos dois estudos de campo.

No capítulo 5, apresentamos os resultados alcançados com a pesquisa. As questões de pesquisa demandaram três análises distintas dos dados gerados nos estudos de campo. Assim, esse capítulo está dividido em três seções. Em cada parte, apresentamos a metodologia de análise, a análise propriamente dita, uma discussão e respondemos a questão de pesquisa. Por fim, no capítulo 6, apresentamos as considerações finais e algumas perspectivas para continuação da pesquisa.

Capítulo 2

Fundamentação teórica e questões de pesquisa

Neste capítulo, apresentamos a fundamentação teórica que sustenta esta investigação, embasando seus pressupostos, dando suporte ao planejamento de um experimento de ensino sobre história das matrizes, bem como ao desenvolvimento da análise e das conclusões do trabalho.

A primeira parte da fundamentação teórica foi inspirada pelos trabalhos de Kjeldsen e colaboradores (KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014). Esses pesquisadores propuseram um quadro teórico e metodológico para integrar história da matemática ao ensino de matemática, com base na teoria que concebe a matemática como um discurso de Anna Sfard - *Thinking as Communicating* (SFARD, 2008). Iniciamos, apresentando os principais conceitos dessa teoria até chegar nos conceitos de **metarregras** e **conflitos comognitivos**, tendo como principal referência (SFARD, 2008). Apresentamos um exemplo de como Sfard (2007) aplica o "quadro comognitivo" para investigar a aprendizagem de números negativos. Em seguida, explicamos o argumento teórico de Kjeldsen (2011a) e apresentamos os referenciais metodológicos utilizados em seus trabalhos.

Continuamos com a apresentação da definição utilizada para o termo **concepção**, em referência a Sfard (1991). Apresentamos também os trabalhos de Attorps (2006) e de Ruhama Even (1993), nossos principais exemplos de investigações sobre concepções. Em seguida, explicamos as ideias de Roque (2014) sobre desfazer a opacidade dos objetos matemáticos e de Giraldo e Roque (2014) sobre a visão "naturalizada" dos conceitos matemáticos. Apresentamos também a definição para **consciência histórica** de (RÜSEN, 2001) e explicamos como relacionamos as ideias de Giraldo e de Roque com esse conceito. Ao final do capítulo, apresentamos nossos objetivos e as questões de pesquisa.

2.1 A Matemática como um tipo de discurso e as regras que o governam

A teoria que concebe a matemática como um discurso baseia-se na perspectiva da *aprendizagem por participação*, no lugar da *aprendizagem por aquisição.* Com essa mudança no modelo de aprendizagem, o aprendiz passa a ser visto como um participante, principiante, buscando acesso às formas de fazer humanas já bem estabelecidas historicamente, no lugar de adquirir o conhecimento como se fosse um bem, uma mercadoria.

A *perspectiva da aprendizagem por participação* enfatiza os aspectos sociais, culturais e históricos do desenvolvimento humano ao deslocar o foco da aprendizagem do individual (*perspectiva aquisicionista*) para o coletivo, para o fazer humano. Nas palavras de Sfard: "esta abordagem considera todas as capacidades exclusivamente humanas como resultando do fato fundamental de que humanos são seres sociais, engajados em atividades coletivas desde o dia em que nasceram e por toda sua vida[1]"(SFARD, 2008, p. 79, tradução nossa).

Ao passo que os *aquisicionistas* consideram o desenvolvimento cognitivo começando com aquisições pessoais para depois ocorrer a participação em atividades coletivas, os *participacionistas* defendem que a aprendizagem humana ocorre a partir da participação em atividades coletivas para, então, o indivíduo desenvolver a capacidade de implementá-las à sua própria maneira.

Mais do que isso, a aprendizagem humana é vista como um conjunto de transformações nas formas de fazer humanas, sejam elas individuais ou coletivas, que resultam de dois processos complementares: *a individualização do coletivo*, ou seja, versões pessoais de atividades coletivas e *a coletivização do individual*, isto é, va-

[1]No original: [. . .] this approach views all the uniquely capacities as resulting from the fundamental fact that humans are social beings, engaged in collective activities from the day they are born and throughout their lives. (SFARD, 2008, p. 79)

riações individuais de atividades que alcançam uma dimensão coletiva e adquirem permanência. (SFARD, 2008, p. 80). Dessa forma, as atividades coletivas "têm suas raízes em nossa herança cultural e são constantemente moldadas e remoldadas por sucessivas gerações de praticantes[2]"(SFARD, 2001, p. 25, nossa tradução).

A partir dessa perspectiva, Sfard propõe definições novas para as noções de *comunicação* e *pensamento*. A *comunicação* passa a ser vista como um tipo de atividade coletiva padronizada que se dá por meio de ações e reações entre os indivíduos que estão tentando se comunicar: "*Comunicação* é uma atividade padronizada, realizada coletivamente, na qual a ação A de um indivíduo é seguida pela ação B de outro indivíduo [...][3]"(SFARD, 2008, p. 86, nossa tradução, itálico no original).

O termo "padronizada" empregado por Sfard ao definir comunicação significa que as ações e reações desencadeadas em uma comunicação ocorrem de modo repetitivo e não acidental, isto é, para cada ação comunicativa, apenas alguns tipos de reações são observadas e esperadas. Por exemplo, ao abordar uma pessoa a fim de pedir informações sobre a localização de algo, esperamos alguns tipos de resposta, como: i) que direções tomar para chegar ao lugar desejado, ii) uma resposta dizendo que não se conhece o lugar ou não sabe como chegar lá etc. Não se espera ou não é comum, por exemplo, que a pessoa nos ignore e não nos responda.

O *pensamento* é definido como uma versão individualizada da comunicação interpessoal (SFARD, 2008, p. 81), isto é, o pensamento é um ato de comunicação consigo mesmo e não precisa ser visível, audível, ou mesmo expresso por palavras. Colocar o pensamento como um ato de comunicação possibilita transpor a ideia de que o pensamento precede a comunicação e possibilita olhar para processos cognitivos e processos de comunicação interpessoal como diferentes manifestações do mesmo fenômeno. Para destacar a unidade entre esses dois processos, Sfard cunhou o termo *commognition* combinando as palavras *communicational* e *cognition*. Daqui em diante, utilizaremos os termos "comognição"e "comognitivo"como tradução para *commognition* e *commognitive*[4], respectivamente.

---

[2]No original: [...] have their roots in our cultural heritage and are constantly shaped and re-shaped by successive generations of practitioners. (SFARD, 2001, p. 25)

[3]No original: *Communication* is a collectively performed patterned activity in which action A of an individual is followed by action B of another individual [...] (SFARD, 2008, p. 86)

[4]Encontramos a palavra "comognição" como tradução para *commognition* em (CARVALHO; MARCONDES, 2011). Esses pesquisadores utilizaram a abordagem comunicacional de Sfard para analisar o discurso de alunos surdos. Em outros trabalhos, como (SOUZA, 2012; PASSOS; TEI-

Existem diferentes tipos de comunicação que diferem entre si pelos seus *objetos de comunicação*, pelos *mediadores* usados e pelas *regras* seguidas pelos participantes. Falaremos sobre esses elementos mais à frente, direcionando-os para a aprendizagem matemática.

Os diferentes tipos de comunicação são chamados de *discursos*, eles trazem juntos alguns indivíduos e excluem outros. Dessa forma, a sociedade é dividida em várias comunidades de discursos e a matemática é vista como um tipo de discurso. Aprender matemática requer fazer parte do discurso matemático e ser capaz de individualizá-lo, em outras palavras: "se tornar capaz de fazer uma comunicação matemática não somente com os outros, mas também consigo mesmo[5]"(SFARD, 2007, p. 575, tradução nossa). Sfard propõe, ainda, que aprender matemática equivale a modificar e estender o próprio discurso.

O discurso matemático possui uma característica que o difere consideravelmente dos outros. Em áreas como história, zoologia e química, os seus objetos de estudo (o homem no tempo, os animais, a matéria e a energia, respectivamente) e os seus respectivos discursos são entidades separadas. Na matemática, os objetos do discurso são os próprios objetos matemáticos (números, funções, conjuntos, formas geométricas etc.) que são vistos como "construtos discursivos", sendo assim, eles são parte do próprio discurso.

Além disso, o discurso matemático pode ser visto como uma estrutura com vários níveis, em que cada camada pode se tornar o objeto de outro extrato discursivo (SFARD, 2008, p. 129). Daí, Sfard conclui que a matemática é um sistema que se autoproduz, pois produz os objetos sobre os quais ela fala. A característica de gerar seus próprios objetos, que é inerente ao discurso matemático, cria a seguinte circularidade: "Alguma familiaridade com os objetos do discurso parece ser uma precondição para a participação, mas ao mesmo tempo a participação no discurso é uma precondição para se adquirir essa familiaridade[6]"(SFARD, 2008, p. 161, tradução

XEIRA; SILVA, 2011) encontramos a palavra "commognitivo" como tradução para *commognitive*. Optamos por adotar como tradução "comognição" e "comognitivo", isto é, sem duplicar a consoante "m".

[5]No original: [...] becoming able to have mathematical communication not only with others, but also with oneself. (SFARD, 2007, p. 575)

[6]No original: Some familiarity with the objects of the discourse seems a precondition to participation, but at the same time participation in the discourse is a precondition for gaining this familiarity. (SFARD, 2008, p. 161)

nossa). Essa situação paradoxal coloca um grande desafio para a aprendizagem da matemática.

Diante de tal dificuldade, Sfard propõe distinguir o discurso matemático dos outros por meio de suas características externas ou visíveis, ao invés de se basear em seus objetos, que são inseparáveis do próprio discurso. As quatro propriedades seguintes são consideradas críticas para decidir se um determinado exemplo de discurso pode ser considerado matemático (SFARD, 2008, p. 133):

- *uso da palavra* (*word use*) - palavras-chave que constituem o discurso matemático, como “dois”, “matriz”, “função”, “derivada”, “cilindros”;

- *mediadores visuais* (*visual mediators*) - artefatos simbólicos criados para possibilitar a comunicação, como gráficos ou figuras geométricas;

- *narrativas* (*narratives*) - sequências de enunciados que servem para descrever objetos, relações entre objetos ou processos. As narrativas podem ser endossadas, isto é, aceitas como verdadeiras pela comunidade matemática, ou podem ser rejeitadas. Como exemplo de narrativas, temos i) $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$, ii) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, iii) a multiplicação de matrizes não é comutativa;

- *rotinas* (*routines*) - padrões repetitivos característicos de um determinado discurso, por exemplo, regularidades podem ser notadas ao observar como e quando termos matemáticos ou mediadores visuais são empregados, ao acompanhar processos de criação e substancialização (substantiation)[7] sobre números ou formas geométricas (como definir, como provar, como convencer, como resolver um problema matemático etc.), entre outros.

Voltando aos objetos de comunicação, Sfard os divide em dois tipos: *objetos primários* e *objetos discursivos*. Os primeiros existem independentemente dos dis-

[7]Sfard emprega o termo *substantiate* em referência ao processo pelo qual os participantes de um discurso se tornam convencidos de que uma dada narrativa pode ser “endossada”, isto é, aceita como válida. Na matemática, por exemplo, um novo teorema só é “endossado” após a apresentação de uma demonstração à comunidade matemática. Na escola, os processos usados para convencer (*substantiate*) são qualitativamente distintos daqueles usados por matemáticos profissionais e são gradualmente transformados. Por exemplo, no ensino básico, apresentar exemplos e ilustrações faz parte do processo de convencer os estudantes sobre a validade de um teorema. Usaremos a palavra “substancializar” como tradução para *substantiate* de narrativas. De acordo com o dicionário Aurélio da língua portuguesa, substancializar significa “transformar em substância” ou “considerar como substância”.

cursos humanos, como por exemplo, os animais. O segundo tipo surge ao se associar um nome ou artefato simbólico a um objeto primário. Nesse processo, um par é criado: $\langle$ nome ou pronome, objeto primário específico $\rangle$. Ao se associar um nome, digamos *Sansão*, a um cachorro, estamos criando o objeto discursivo $\langle$ Sansão, cachorro $\rangle$. Nesse caso, temos um objeto discursivo *simples*.

Existem ainda os objetos discursivos *compostos* que são criados quando um nome ou pronome é associado a objetos existentes, discursivos ou primários, por meio de um dos seguintes processos:

- *equivaler* (*saming*) - quando um significante é associado (por meio de um nome) a um número de coisas que não eram consideradas equivalentes, por exemplo, quando atribuímos o nome *animais* a peixes, pássaros, mamíferos etc.; ou quando chamamos de *fração* todos os símbolos da forma $\frac{a}{b}$ onde a e b são números inteiros (e $b \neq 0$);

- *encapsular* (*encapsulating*) - quando um significante é associado a um conjunto de objetos e quando o mesmo significante é utilizado no singular para se referir a propriedades de todos os membros do conjunto, por exemplo, quando falamos em função quadrática, encapsulamos conjuntos de pares ordenados tais como $\{(1,1), (2,4), (3,9), \ldots\}$,

- *reificar* (*reifying*) - quando um nome ou pronome é introduzido e usado para substituir narrativas sobre processos por "estórias atemporais" sobre objetos, por exemplo, o significante $\frac{2}{3}$ é introduzido e a narrativa "Eu dividi o todo por 3 e tomei 2 partes" é substituída por "Eu tenho $\frac{2}{3}$ do todo".

Sfard apresenta um exemplo que ilustra bem o surgimento de um objeto discursivo composto: *número cinco*. Em primeiro lugar, o processo de contar os dedos de uma mão é *reificado* por meio dos termos *cinco dedos*. Da mesma forma, os termos *cinco maçãs* reificam o processo de contar cinco maças. O resultado de ambos os processos é *cinco*. O objeto discursivo *número cinco* surge quando o significante *cinco* é associado a todos os exemplos de *cinco coisas*, o que corresponde ao processo de equivaler (*saming*) (SFARD, 2008, p. 171).

Os objetos primários e os objetos discursivos que surgem apenas por meio dos processos de *saming* e de encapsulamento são definidos como *objetos concretos*. Os objetos discursivos que se originam pelo processo de reificação, podendo também passar pelos outros processos, são definidos como *objetos abstratos*. Baseada nessa distinção, Sfard define os objetos matemáticos como "objetos discursivos abstratos com significantes distintamente matemáticos"(SFARD, 2008, p. 172), isto é, significantes reconhecidos como matemáticos. Um exemplo de objeto concreto é "animal", o qual é o resultado de tornar equivalentes (*saming*) os objetos peixes, pássaros, mamíferos etc. Já o objeto "número"ou "5"é um exemplo de objeto abstrato, pois é o resultado de um processo de reificar e de equivaler *saming*.

Voltamos a falar, então, sobre o discurso matemático e sobre a matemática como uma atividade coletiva padronizada. Os padrões podem ser descritos como resultado de processos governados por regras. Nesse contexto, há dois tipos de regras: **regras do nível do objeto** e **regras metadiscursivas**[8].

As regras do nível do objeto são definidas como "narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso"[9], já as regras metadiscursivas ou **metarregras** "definem padrões na atividade dos discursantes ao tentar produzir e substancializar narrativas no nível do objeto"[10] (SFARD, 2008, p. 201, nossa tradução).

No caso do discurso matemático, as regras do nível do objeto dizem respeito às propriedades dos objetos matemáticos. Na geometria euclidiana, por exemplo, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180^o. Em álgebra, $ab = ba$, onde a e b são números reais. Na física, a lei da gravitação de Newton e as leis do movimento de Newton são exemplos de regras do nível do objeto.

As metarregras dizem respeito às ações dos discursantes, ou ainda, ao modo como eles interpretam o conteúdo do discurso. Elas estão, geralmente, implícitas no discurso e se manifestam quando julgamos, por exemplo, se uma determinada descrição pode ser considerada como uma definição ou se uma demonstração pode ser aceita como correta. As metarregras incluem normas, valores, objetivos de uma comunidade e podem ser empregadas para designar padrões repetitivos associados a diferentes atividades:

[8]No original: object-level rules e metadiscursive rules.

[9]No original: narratives about regularities in the behavior of objects of the discourse (SFARD, 2008, p. 201).

[10]No original: define patterns in the activity of the discursants trying to produce and substantiate object-level narratives. (SFARD, 2008, p. 201)

> [...] é possível falar sobre as metarregras que regulam a participação (por exemplo, levantar as mãos antes de falar, trabalhar em grupos), ou metarregras que caracterizam as intenções dos participantes (por exemplo, se engajar genuinamente em uma atividade matemática, versus agindo de modo a agradar o professor, ou metarregras que regulam as regras do nível do objeto em matemática (por exemplo, usar a metáfora do movimento para calcular limites, usar gráficos para compreender funções)[11].(GÜÇLER, 2013, p. 441, tradução nossa)

A distinção entre os dois tipos de regra não é absoluta. Metarregras em um discurso podem se tornar regras do nível do objeto em outro discurso. Dado que a matemática é vista como um sistema que se autoproduz e se amplia incorporando os seus meta discursos, cada camada do discurso pode se tornar o objeto de outra camada. Por exemplo, a narrativa "a ordem dos fatores não altera o produto", frequentemente pronunciada no discurso da aritmética, é considerada uma metarregra da aritmética. Mais tarde, ela se transforma em uma regra do nível do objeto no discurso da álgebra: "$ab = ba$", em que a e b são números reais.

A palavra regra possui muitas conotações, nem todas se aplicam às metarregras. Para diferenciar regras de metarregras, Sfard se baseia em cinco características:

- variabilidade (*variability*) - regras metadiscursivas são estruturas dinâmicas, constantemente criadas e recriadas dentro das interações em curso. Um exemplo expressivo é a mudança da noção de rigor na matemática entre os séculos XVIII e XIX. As metarregras que moldaram a visão dos analistas do século XVIII (como Euler, Lagrange, D'Alembert, Laplace, L'Hospital, para citar alguns) os levaram a ter uma confiança extrema no simbolismo algébrico e a priorizar a obtenção de resultados. Já os analistas do século XIX (como Cauchy, Bolzano, Weierstrass, entre outros) passaram a ser governados por metarregras que os levaram a se preocupar com os fundamentos do cálculo. A matemática passou a requerer, não apenas resultados, mas definições claras

[11] No original: it is possible to talk about the metarules regulating participation (e.g., raising hands before speaking, working in groups), or metarules characterizing participants' intentions (e.g., genuinely engaging in mathematical activity versus acting to please the teacher), or the metarules regulating the object-level rules of mathematics (e.g., using the metaphor of motion to compute limits, using graphs to realize functions). (GÜÇLER, 2013, p. 441)

seguindo uma arquitetura particular (SCHUBRING, 2005; GRABINER, 1974; ROQUE, 2012).

- tacitividade (*tacitness*) - metarregras são construções implícitas mais do que princípios explícitos que os participantes do discurso seguiriam de uma maneira consciente e intencional. Elas são convenções estabelecidas com o tempo e não uma necessidade imposta. Por outro lado, não é raro que uma pessoa faça reflexões e comentários explícitos sobre princípios que guiam suas ações. Em Matemática, por exemplo, a atividade de *definir* requer a articulação consciente de metarregras, como descrever o conceito de maneira concisa e com vistas à generalização.

- normatividade (*normativeness*) - metarregras não devem ser confundidas com normas. Nem toda regra metadiscursiva é uma norma. De acordo com Sfard (2008, p. 204), para que certa regra seja considerada como uma norma em uma comunidade, duas condições devem ser satisfeitas: ela deve ser amplamente seguida pelos membros da comunidade e deve ser endossada pela maioria, especialmente pelos *experts*. Nesse caso, a metarregra em questão é explicitada no discurso.

- flexibilidade (*flexibility*) - a ideia de seguir regras sugere um controle rigoroso nas ações dos participantes de um discurso, no entanto, metarregras restringem o escopo de um discurso mais do que determinam o que fazer, isto é dizem o que é apropriado fazer ou não fazer em uma determinada situação. Esse papel das metarregras faz com que elas tornem a comunicação possível, pois eliminam infinitas opções de ações e reações que não seriam adequadas em uma comunicação, deixando os participantes com um certo número de opções possíveis.

- contingência (*contingency*) - como dissemos acima, metarregras são convenções historicamente estabelecidas mais do que uma necessidade imposta. As razões para isso têm a ver com os julgamentos humanos e suas escolhas ao longo do tempo. As regras metadiscursivas possuem um aspecto de inevitabilidade. Para ilustrar essa ideia, Sfard (2008, p. 207) cita um exemplo apresentado por

> Wittgenstein[12] sobre as metarregras que governam a atividade de demonstrar. No exemplo, Wittgenstein diz que após se debruçar sobre uma demonstração, ele passa simplesmente a aceitar o resultado como um costume ou um fato natural da nossa história.

Voltando ao conceito de *rotina* descrito anteriormente, esse termo também pode ser definido como um conjunto de metarregras que descrevem uma ação discursiva repetitiva. As metarregras podem ser de dois tipos: i) aquelas que descrevem o "como" de uma rotina, isto é, aquelas que determinam ou restringem o curso de uma ação ou procedimento, por exemplo, como resolver uma equação do segundo grau, como determinar a matriz canônica de uma transformação linear; ii) aquelas que descrevem o "quando" de uma rotina, isto é, que determinam ou restringem as situações nas quais o participante do discurso julga uma ação como apropriada. Para ilustrar, Sfard (2008, p. 211) cita um exemplo em que alunos, diante de uma expressão do tipo x^2-3x+5, reagem iniciando o cálculo $(-b\pm\sqrt{\triangle})/2a$ sem qualquer indicação para fazê-lo. Na rotina para construir o gráfico da função $y = x^2 - 3x + 5$, o procedimento para o cálculo das raízes se aplica. Mas, na rotina para determinar a imagem de um número pela mesma função, o mesmo procedimento não se aplica.

Assumindo que aprender matemática é alterar o discurso, Sfard distingue dois níveis de aprendizagem: **no nível do objeto** (*object-level learning*) e **no nível meta** (*metalevel learning*). A aprendizagem no nível do objeto resulta da expansão do discurso por estender o vocabulário, construir novas rotinas e produzir narrativas endossadas, por exemplo, aprender novas palavras como triângulo, função, aprender suas definições, propriedades etc. A aprendizagem no nível meta envolve mudanças nas metarregras do discurso, por exemplo, definir uma palavra ou identificar uma figura geométrica de uma nova maneira.

Para dar um exemplo mais concreto da aprendizagem no nível meta, recorremos ao modelo do pensamento geométrico em cinco níveis (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor) proposto pelo casal Pierre e Dina van Hiele[13]. No nível da *análise*, o aprendiz identifica uma figura geométrica a partir de uma análise informal de seus elementos, baseado na observação e experimentação. Nesse nível, quadrados e retângulos são reconhecidos pela sua forma. No nível da

[12](WITTGENSTEIN, 1978, p. 9), conforme citado por (SFARD, 2008, p. 207).

[13]O modelo de van Hiele para o pensamento geométrico pode ser visto em (HIELE, 1986).

deducão informal, a mesma rotina de identificar uma figura geométrica deve ser realizada pelo uso justificado de definições, pelo reconhecimento das propriedades das figuras, pela distinção das condições necessárias e suficientes para que uma figura seja um membro de uma categoria. Nesse nível, o aprendiz deve ser capaz de reconhecer um quadrado e um retângulo pelas suas propriedades e de reconhecer que um quadrado é um retângulo porque possui todas as propriedades de um retângulo. As metarregras envolvidas na rotina de identificação de figuras geométricas em cada nível são diferentes. Para que o aprendiz ascenda de um nível para o outro, ele deve aprender as metarregras apropriadas. Sfard (2007) apresenta esse exemplo, mais detalhadamente, descrevendo um experimento em que duas crianças devem identificar triângulos em um conjunto de figuras.

Ainda sobre o nível meta de aprendizagem, como as metarregras são contingentes e tácitas, isto é, são o resultado de convenções, de escolhas e são implícitas no discurso, elas não são fáceis de se perceber de uma maneira consciente e natural. É pouco provável que os aprendizes alcancem esse tipo de aprendizagem sozinhos. Como, então, esse tipo de aprendizagem pode ser alcançado?

Na abordagem comunicacional ou comognitiva é esperado que a aprendizagem no nível meta se origine no encontro direto do aprendiz com um novo discurso, governado por metarregras diferentes daquelas segundo as quais o estudante vem se apoiando nas suas ações. Esse encontro é denominado um **conflito comognitivo**, descrito como um fenômeno que ocorre quando narrativas aparentemente conflitantes se originam a partir de diferentes discursos, que diferem no uso das palavras, nas regras de substancialização etc. Sfard (2008, p. 256).

O conceito de conflito comognitivo é fundamental na teoria de Sfard, pois é uma fonte indispensável para a aprendizagem no nível meta. Os discursos governados por diferentes metarregras, e que contém narrativas conflitantes, não são vistos como incompatíveis, mas como *incomensuráveis*, no sentido em que não compartilham um critério para decidir qual narrativa deve ser aceita como válida (endossada) e qual deve ser descartada.

A resolução do conflito não se baseia em evidências empíricas que confirmem uma narrativa e descartem a outra, mas se dá por meio de uma escolha entre os dois discursos conflitantes, de acordo com o que faz sentido para o pensamento do indivíduo sobre o mundo. Isso demanda uma aceitação gradual, uma individualização do outro discurso. E para que o conflito comognitivo não se revele uma barreira para a comunicação, mas sim a porta de entrada para o novo discurso, a individualização requer a participação e o suporte de um veterano no novo discurso, o qual pode ser um professor, um estudante, um profissional qualificado, um nativo de outro país etc. (SFARD, 2008, p. 282)

Identificar a ocorrência de conflitos comognitivos não é uma tarefa simples. Narrativas conflitantes também podem surgir a partir de opiniões distintas e é fácil incorrer no erro de confundir esse caso com um conflito discursivo. Sfard (2008, p. 256) alerta que:

> Conflito discursivo deve ser suspeitado apenas nos casos em que as narrativas conflitantes aparecem como factuais, ou seja, reconhecidas como verdadeiras de acordo com regras metadiscursivas bem definidas e a possibilidade de um erro em sua construção ou substancialização foi eliminada.[14]

Sfard (2007) apresenta um exemplo em que o quadro comognitivo é aplicado para investigar a aprendizagem sobre números negativos por alunos (faixa etária de 12 a 13 anos) de uma escola israelense. A intervenção foi realizada ao longo de trinta encontros de uma hora e foi conduzida pelo professor da turma. A escolha do tópico foi motivada pela crença da pesquisadora de que aprender números negativos e suas operações é bastante desafiador para os alunos, principalmente a regra que enuncia que: "*menos vezes menos dá mais*". Sfard apresenta, então, uma maneira de substancializar essa regra (Figura 2.1), por meio de uma demonstração, baseada no princípio de que o discurso estendido deve preservar algumas características (regras do nível do objeto) do discurso numérico original, como as propriedades das operações de adição e de multiplicação (associatividade, comutatividade, distributividade).

[14]No original: Discursive conflict should be suspected only in those cases when the conflicting narratives appear as factual, that is, as endorsable according to well-defined metadiscursive rules, and the possibility of an error in their construction and substantiation has been eliminated. (SFARD, 2008, p. 256)

Assumindo que as leis básicas para números positivos não devem ser violadas e que as regras $a \times (-b) = -ab$ e $-(-a) = a$ já tenham sido derivadas dessas leis:

$$0 = 0 \times (-b) = [a + (-a)](-b). \tag{2.1}$$

Da lei distributiva,

$$[a + (-a)](-b) = a(-b) + (-a)(-b). \tag{2.2}$$

De (2.1) e (2.2) e da regra $a(-b) = -ab$:

$$-ab + (-a)(-b) = 0. \tag{2.3}$$

De (2.3) e da regra $-(-a) = a$:

$$(-a)(-b) = -(-ab) = ab. \tag{2.4}$$

Figura 2.1: Regra dos sinais a partir das regras (axiomas) do discurso numérico (SFARD, 2007, p. 583, tradução nossa).

Sfard argumenta que, ao contrário dos números positivos, não há um modelo concreto a partir do qual a regra dos sinais na multiplicação de dois números negativos possa ser deduzida. Antes dos números negativos, as narrativas matemáticas eram verificadas por:

> [...] confrontar as proposições em questão com a realidade independente do discurso. Consequentemente, decisões relativas a endossar ou não os enunciados matemáticos eram percebidas pelos participantes do discurso matemático como impostas pelo próprio mundo[15]. (SFARD, 2007, p. 583)

O processo de substancialização da regra dos sinais repousa na coerência interna do discurso. Assim, há uma mudança considerável nas metarregras envolvidas

[15]No original: [...] confronting propositions in question with discourse-independent reality. Consequently, decisions about the endorsability of mathematical statements were perceived by the participants of mathematical discourse as imposed by the world itself. (SFARD, 2007, p. 583)

nas definições das operações com os números negativos, sobretudo na multiplicação de negativos, em comparação com aquelas envolvidas nas operações com números positivos.

Sfard apresenta por meio de um esquema o conflito comognitivo que tem o potencial de desencadear a aprendizagem. A Tabela 2.1 mostra a metarregra antiga[16] e a nova[17] para endossar as definições das operações com números positivos e negativos, respectivamente.

Antiga metarregra	**Nova metarregra**
O conjunto de regras do nível do objeto a serem cumpridas pelo objeto definido deve ser satisfeito por um modelo concreto.	O conjunto de regras do nível do objeto a serem cumpridas pelo objeto definido deve ser consistente com outro conjunto predeterminado de regras do nível do objeto chamadas axiomas.

Tabela 2.1: Metarregras envolvidas nas operações com números positivos e com números negativos (SFARD, 2007, p. 584, tradução nossa).

Sfard observa que os critérios para decidir que propriedades do discuso numérico original seriam mantidas (os axiomas) ao estender as operações para os números negativos não foram óbvias nem mesmo para os matemáticos e cita nomes como Chuquet, Stifel, Cardano e Descartes, os quais consideravam os números negativos como *falsos, absurdos, fictícios*. No entanto, nada é dito sobre o momento histórico em que a transição das metarregras relacionadas às operações com os números ocorreu. A mudança foi gradualmente estabelecida ao longo do século XIX com as tentativas de fundamentar as operações com os números negativos, principalmente a multiplicação. Como nos traz Schubring (2012), foi com base na abordagem algebrizante alemã e no princípio da permanência que o problema de fundamentar as operações no campo numérico estendido dos números inteiros foi resolvido.

A elaboração da abordagem algebrizante levou o professor de matemática Wilhelm A. Förstemann (1791-1836) a propor a substituição da noção de quantidade, concebida para os números, por dois conceitos: o de grandeza e o de número. As operações algébricas só poderiam ser realizadas com os números e não com as grandezas (linhas, planos, sólidos, tempo, conjuntos de pessoas etc.) (SCHUBRING,

[16]No original: The set of object-level rules to be fulfilled by the defined object must be satisfied by a concrete model. (SFARD, 2007, p. 584, tradução nossa)

[17]No original: The set of object-level rules to be fulfilled by the defined object must be consistent with a predetermined set of other object-level rules called axioms. (SFARD, 2007, p. 584, tradução nossa)

2012, p. 62). O princípio da permanência, inicialmente formulado por Förstemann, postula que as regras para as operações estendidas devem corresponder às regras nos casos originais, isto é, às regras válidas no campo dos números positivos. Assim, a regra $(a - b) \cdot c = ac - bd$ válida para números positivos deve também ser válida no campo ampliado dos números positivos e negativos. Logo, $(a + \bar{b}) \cdot c = ac + \bar{b} \cdot c$, em que $\bar{b}$ é o oposto de b. O princípio da permanência leva então à definição das regras dos sinais: $\bar{b} \cdot c = b \cdot \bar{c} = -bc$ e $\bar{b} \cdot \bar{c} = bc$ (ibid., p. 63). A aceitação definitiva da fundamentação das operações com números negativos, conforme proposta por Förstemann, deu-se com a publicação de uma obra pelo matemático alemão Hermann Hankel, em 1867. Kankel assumiu os conceitos de Förstemann, baseou-se no princípio da permanência para estender o significado das operações e enfatizou que as extensões das operações são convenções e não necessitam de demonstrações (ibid., p. 64).

Retomando o exemplo de utilização do quadro comognitivo apresentado por Sfard, a mudança nas metarregras (Tabela 2.1) foi explorada pelo professor da turma por meio de atividades que pediam aos alunos para encontrar o resultado de contas, pedindo também que explicassem sua conclusão, por exemplo, $(+2) \times (-5) = ?$, $6 \times (-2) = ?$, $(-3) \times (-2) = ?$. Apesar de intensos e longos debates com a turma, o professor não conseguiu que os alunos alcançassem a transição entre as metarregras descritas na Tabela (2.1).

Dois conflitos comognitivos foram observados. Um foi o já esperado conflito ocasionado pelas metarregras descritas na Tabela (2.1). E o outro surgiu por meio de diferenças nos discursos dos próprios alunos ao decidir o sinal do resultado da multiplicação de um número positivo por outro negativo. Duas posições surgiram e dividiram a turma. Uma delas defendia que o resultado deveria ser negativo, pois o número negativo poderia ser tomado tantas vezes quanto fosse o número positivo. No exemplo $6 \times (-2) = ?$, -2 poderia ser somado a ele mesmo 6 vezes, resultando em -12. O argumento apresentado substituiu os novos números pelos já conhecidos e se baseou nas rotinas desenvolvidas previamente. Sfard concluiu que o argumento se baseou na referência a um modelo concreto, no caso, o dos números positivos.

A segunda posição defendia que o resultado poderia ser positivo ou negativo de acordo com o sinal do número de maior valor absoluto. Em linguagem matemática:

$$(+a) \times (-b) = \begin{cases} ab & \text{se} \quad a > b \\ -ab & \text{se} \quad a < b \end{cases}$$

Nenhum questionamento sobre o caso em que $a = b$ é descrito no texto. Sfard observa que o aluno que anunciou a segunda posição, de que o resutado da multiplicação deveria depender do sinal do maior número, evocou a rotina anteriormente desenvolvida para a adição com números negativos trocando uma operação por outra:

$$(+a) + (-b) = \begin{cases} |a - b| & \text{se} \quad a > b \\ -|a - b| & \text{se} \quad a \leq b \end{cases}$$

Ainda sobre essa posição, Sfard não explicita a metarregra que influenciou o discurso do estudante, mas argumenta que o aluno fez sua escolha para a lei da multiplicação de negativos sem referência a axiomas e sem se incomodar com propriedades como comutatividade, associatividade ou distributividade.

A pesquisadora concluiu que nenhum dos conflitos comognitivos contribuiu para a aprendizagem no nível meta. O professor usou sequências de números para endossar a multiplicação de números negativos, por exemplo:

$$\begin{array}{rcrcr} 3 & \times & (-3) & = & -9, \\ 2 & \times & (-3) & = & -6, \\ 1 & \times & (-3) & = & -3, \\ 0 & \times & (-3) & = & 0, \\ (-1) & \times & (-3) & = & 3, \\ (-2) & \times & (-3) & = & 6, \end{array} \tag{2.5}$$

No entanto, a nova regra metadiscursiva não foi explicitada, os alunos não reconheceram o conflito comognitivo e não alcançaram a mudança nas metarregras (conforme Tabela (2.1)). É curioso que a essência da nova metarregra não parece ter sido explorada no experimento, pelo menos não na parte da multiplicação com números negativos. A consistência da operação de multiplicação no campo estendido dos números com um conjunto pré-determinado de regras do nível do objeto (os axiomas) não foi explorada. A permanência da validade da distributividade da multiplicação em relação à adição não foi explorada pelo professor. Logo, não é surpreendente que os alunos não tenham alcançado a transição nas metarregras.

A dificuldade com a regra dos sinais é um exemplo claro da importância de que as metarregras do discurso devem ser levadas em conta e exploradas em situações de ensino e aprendizagem. Os resultados do experimento relatado em (SFARD, 2007) e descrito acima apontam as dificuldades inerentes a uma aprendizagem no nível meta e também o desafio de implementar uma situação de ensino em que as metarregras do discurso sejam explicitadas e percebidas pelos estudantes.

Mais pesquisadores têm aplicado o quadro comognitivo, enfatizando a importância da aprendizagem no nível meta e colocando o desafio para a educação matemática de criar situações de ensino e aprendizagem em que as metarregras sejam explicitadas e tornadas objetos de discussão e reflexão dos aprendizes (GÜÇLER, 2013; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014). O exemplo que apresentamos ilustrou o uso do quadro comognitivo de Sfard para analisar a aprendizagem de estudantes em um nível equivalente ao nível básico brasileiro. Algumas pesquisas vêm aplicando esse quadro para investigar as práticas de ensino no nível superior, bem como as interações entre professores e alunos (VIIRMAN, 2013; GÜÇLER, 2013). Viirman (2013) comparou o discurso de alguns professores no contexto de aulas sobre funções, destacando as diferenças e similaridades nas rotinas empregadas para construção e substancialização de narrativas sobre funções. Güçler (2013) analisou o discurso de um professor no contexto de aulas de cálculo e o discurso dos alunos, apontando inconsistências quanto ao uso de metarregras no discurso de ambos. Apesar de já ser esperada um descompasso entre a comunicação do professor e dos alunos, Guçler argumenta que o quadro comognitivo contribuiu para explicitar as diferenças.

Os conceitos de metarregras e de conflito comognitivo são de especial interesse para nossa pesquisa. Pretendemos planejar situações de ensino por meio de conflitos comognitivos com o objetivo inicial de promover reflexões sobre metarregras e, com isso, levar os estudantes a perceberem e se conscientizarem de suas próprias metarregras. Os tópicos escolhidos para desenvolver nosso estudo foram matrizes e determinantes no contexto da disciplina Álgebra Linear. Nosso público de interesse é a licenciatura em matemática e nossa estratégia para planejar os conflitos se apóia em uma abordagem histórica inspirada pelos trabalhos de Kjeldsen e seus colaboradores (KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014), que entrelaçaram a história da matemática e a teoria discursiva da aprendizagem de Sfard. Não é nosso objetivo usar a história da matemática ou o quadro comognitivo de Sfard para introduzir matrizes e determinantes ou mesmo ensinar esses tópicos. Nossa proposta de ensino explora aspectos do desenvolvimento histórico das matrizes. Na próxima seção, explicamos como Kjeldsen e seus colaboradores propõem usar a história da matemática para explicitar as metarregras do discurso e torná-las objetos de reflexão dos estudantes.

2.2 História da Matemática e regras metadiscursivas

Tinne Hoff Kjeldsen (2011a) apresenta um argumento teórico defendendo a história da matemática como uma estratégia privilegiada para revelar metarregras do passado. Como as metarregras são contingentes e estabelecidas historicamente, elas podem ser tratadas no nível do objeto no discurso histórico, uma vez que a historiografia da matemática discute muitos princípios e normas que governaram a atividade dos matemáticos ao longo do tempo. Assim, regras metadiscursivas no discurso matemático se tornam regras do nível do objeto no discurso histórico, de modo que o que está implícito em um discurso (matemático) pode ser tornado explícito a partir de outro discurso (histórico). Desse modo, as metarregras deixam de ser tácitas e podem ser tornadas objetos de reflexão dos alunos. Ao longo desta seção, apresentaremos alguns exemplos, a partir dos trabalhos de Kjeldsen e Blomhøj (2012), Kjeldsen e Petersen (2014), de como as metarregras do discurso matemático passam a ser explicitadas com o uso de fontes históricas.

A ideia é, então, promover situações de aprendizagem em que os alunos sejam encorajados a investigar o desenvolvimento de práticas matemáticas por meio de fontes históricas primárias e secundárias e a compreender: a visão que os matemáticos tinham sobre suas próprias práticas, como concebiam seus objetos de estudo e como formulavam e substancializavam suas narrativas matemáticas. Desse modo, os alunos terão contato com discursos governados por metarregras distintas das atuais e, possivelmente, diferentes das suas próprias:

> [...] os textos históricos podem desempenhar o papel de "interlocutores", como discursantes agindo de acordo com metarregras que são diferentes daquelas que governam o discurso matemático dos nossos dias e (talvez) dos estudantes[18]. (KJELDSEN, 2011a, p. 52, tradução nossa)

O argumento repousa sobre o conceito de conflito comognitivo. Sendo as fontes históricas primárias discursos governados por metarregras do passado, possivelmente diferentes das atuais, as situações de aprendizagem mencionadas acima podem promover conflitos comognitivos. Kjeldsen afirma, então, que ao conhecerem outras metarregras distintas das suas, os alunos poderão refletir sobre suas próprias metarregras.

Kjeldsen discute a abordagem adequada para que seu argumento possa ser colocado em prática e possa alcançar resultados positivos, isto é, promover reflexões sobre metarregras. Ela chama a atenção para o cuidado de não seguir uma abordagem anacrônica ou a abordagem dita *Whig*, termo cunhado pelo historiador britânico Herbert Butterfield em 1931, em uma obra bastante influente intitulada "*The Whig Interpretation of History*"(BUTTERFIELD, 1931). Na visão *Whig*, a história é escrita considerando o passado como "o início de uma marcha progressiva à iluminação"(BROMBERG; SAITO, 2010), isto é, o passado é escrito com as lentes do presente, selecionando apenas os momentos que são familiares à matemática do presente.

Um sentido oposto à interpretação *Whig* busca ressaltar as diferenças entre a matemática produzida em um determinado momento histórico, em um certo local e aquela produzida nos dias de hoje. Para além do contexto matemático, deve-se levar em conta também os contextos científico, cultural, social e filosófico do episódio em questão:

> Para vencer os anacronismos, deve-se tentar mergulhar nos problemas que caracterizavam o pensamento de certa época em toda sua

[18]No original: [...] the historical texts can play the role as "interlocutors", as discussants acting according to metarules that are different than the ones that govern the discourse of our days mathematics and (maybe) of the students. (KJELDSEN, 2011a, p. 52)

> complexidade, considerando os fatores científicos, mas também os culturais, sociais e filosóficos. Só assim, será possível vislumbrar os problemas e, portanto, o ambiente em que se definiram os objetos, se inventaram métodos e estabeleceram resultados. (ROQUE, 2012, p. 19)

Dentro da proposta de promover reflexões sobre as regras do discurso, interpretar a matemática do passado com as lentes do presente impedirá que as diferenças entre as metarregras da fonte histórica e as atuais sejam destacadas. Para vencer o anacronismo, Kjeldsen propõe investigar a matemática do passado como um produto histórico a partir da sua prática:

> Isto implica estudar as fontes no contexto histórico apropriado no que diz respeito ao *workshop* intelectual de seus autores [...] colocar questões como: Como a matemática era vista naquele momento? Como o matemático que escreveu a fonte via a matemática? Qual foi a sua intenção? Por que e como os matemáticos introduziram certos conceitos? [...] Que tipos de ferramentas estavam disponíveis para o matemático (grupo de matemáticos)? Por que e como eles empregaram certas estratégias de demonstrações?[19] (KJELDSEN, 2011a, p. 53, tradução nossa)

As questões colocadas na citação acima convidam a uma visão da matemática como um fenômeno social e cultural e exploram processos históricos de mudança, como a percepção sobre a própria matemática, a compreensão dos seus objetos, a noção de rigor etc. Para responder tais tipos de questões e fornecer explicações para os referidos processos de mudança, Kjeldsen propõe adotar a chamada **abordagem por múltiplas perspectivas**. Os termos “múltiplas perspectivas”foram tomados, pela pesquisadora, do historiador dinamarquês Bernard Eric Jensen[20]. Nessa abordagem, episódios do passado podem ser estudados sob vários pontos de observação, ou várias perspectivas, dependendo dos objetivos do pesquisador:

[19] No original: This implies to study the sources in their proper historical context with respect to the intellectual workshop of their authors, [...], ask questions such as: how was mathematics viewed at the time? How did the mathematician, who wrote the source, view mathematics? What was his/hers intention? Why and how did mathematicians introduce certain concepts? [...] Which kinds of tools were available for the mathematician (group of mathematicians)? Why and how did they employ certain strategies of proofs? (KJELDSEN, 2011a, p. 53)

[20] Os termos “abordagem das múltiplas perspectivas”são uma tradução dos termos em dinamarquês “flerperspektivisk tilgang”do trabalho do historiador Bernard Eric Jensen 2003, conforme citado por Kjeldsen e Blomhøj (2012, p. 332).

> Episódios da história da matemática podem ser, por exemplo, estudados a partir da perspectiva de subdisciplinas dentro da matemática para compreender como outros campos da matemática influenciaram a emergência e/ou o desenvolvimento do episódio em consideração. Eles podem ser estudados do ponto de vista das aplicações para entender, por exemplo, a dinâmica entre a matemática pura e a matemática aplicada, ou o papel da modelagem matemática na produção do conhecimento matemático e/ou científico[21]. (KJELDSEN, 2011a, p. 54, tradução nossa)

Em outro artigo, a pesquisadora explica como implementar essa abordagem em uma escala menor, isto é, não combinando muitas perspectivas simultaneamente, já que o objetivo não é formar profissionais em história da matemática, mas sim promover reflexões sobre as diferenças no modo como a matemática, seus problemas, conceitos, métodos e argumentos foram abordados na fonte em relação aos livros-textos e à forma como são abordados nos dias atuais.

> Ela pode ser implementada em um escala menor, com os estudantes lendo partes selecionadas de textos matemáticos originais, com foco explícito em perspectivas que apontem abordagens de pesquisa ou a natureza e função de entidades matemáticas específicas (problemas, conceitos, métodos, argumentos), na ordem de descobrir, discutir e refletir sobre as diferenças entre como essas abordagens e entidades são apresentadas em seus livros textos e a forma inicial de concebê-las e usá-las[22]. (KJELDSEN, 2011b, p. 169, tradução nossa)

Entendemos que a escolha das perspectivas influencia tanto na formulação de questões históricas a serem investigadas pelos estudantes, como na seleção das fon-

[21]No original: Episodes in the history of mathematics can e.g. be studied from the perspective of sub-disciplines within mathematics to understand if, and if so, how other fields in mathematics have influenced the emergence and/or the development of the episode under consideration. They can be studied from an applied point of view to understand e.g. dynamics between pure and applied mathematics, or the role of mathematical modelling in the production of mathematical and/or scientific knowledge. (KJELDSEN, 2011a, p. 54)

[22]No original: It can be implemented on a small scale, by having students read selected pieces of original mathematical texts where they focus explicitly on perspectives that address research approaches or the nature and function of specific mathematical entities (problems, concepts, methods, arguments), in order to uncover, discuss, and reflect upon the differences between how these approaches and entities are presented in their text book and the former way of conceiving and using them. (KJELDSEN, 2011b, p. 169)

tes históricas para compor atividades ou situações de ensino visando explorar as diferenças citadas acima.

Kjeldsen (2011a) sugere ainda o uso dos conceitos de **objetos epistêmicos** e **técnicas epistêmicas** para "abrir as fontes". Esses conceitos são utilizados para distinguir os elementos que fornecem as respostas e os elementos que geram questões matemáticas em um episódio de pesquisa, isto é, as ferramentas utilizadas pelos matemáticos e os seus objetos de estudo, respectivamente. Desse modo, esses conceitos possibilitam *insights* sobre a dinâmica da produção do conhecimento matemático. Identificar as ferramentas empregadas pelos matemáticos envolvidos na resolução de um problema ou no desenvolvimento de uma nova teoria e identificar os seus objetos de estudo seria o ponto de partida para os estudantes explorarem as fontes. Nós também usamos esses conceitos para comparar o papel das matrizes em dois episódios históricos (Seção 3.2).

O uso dos conceitos de objetos epistêmicos e técnicas epistêmicas é ilustrado em (KJELDSEN, 2011a) por meio de atividades baseadas em quatro fontes primárias: duas fontes de Fermat e duas fontes de Newton. As atividades foram planejadas com o objetivo de promover uma aprendizagem no nível meta e o uso desses conceitos dá suporte à aprendizagem de metarregras. As fontes de Fermat mostram procedimentos para encontrar o máximo ou o mínimo de quantidades que possuem uma relação de dependência. Ambos os procedimentos foram ilustrados com a situação de dividir um segmento em duas partes a e b tal que seu produto seja máximo. As fontes de Newton mostram um procedimento para encontrar a relação entre os fluxões dados os fluentes e um procedimento para traçar tangentes a curvas. Os conceitos de objetos e técnicas epistêmicos são usados para explorar os objetos matemáticos e as ferramentas em uso nas fontes, por meio de perguntas como: "Quais são os objetos matemáticos que Fermat e Newton estão lidando?", "Como eles percebem os objetos?", "Quais são os problemas que eles estão tentando resolver?" "Quais são as técnicas que eles estão usando? Como nós fazemos nos dias de hoje?".

No trabalho citado, Kjeldsen (ibid.) não havia testado as atividades elaboradas, elas tiveram o papel de ilustrar como elaborar uma situação de ensino em que os alunos investiguem fontes primárias, guiados por atividades históricas, a fim de revelar metarregras implícitas nas fontes e torná-las objetos explícitos de reflexão.

Mais dois artigos (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) foram publicados defendendo e aplicando o argumento teórico aqui descrito. No primeiro, Kjeldsen e Blomhøj apresentam a análise de dois relatórios de pesquisa elaborados por alunos da Universidade de Roskilde, na Dinarmarca, com vistas a avaliar como e em que sentido metarregras do discurso matemático podem ser tornadas objetos explícitos de reflexão e se houve aprendizagem no nível meta (*metalevel learning*), isto é, se os alunos aprenderam novas metarregras. Vale destacar que o conceito de regras metadiscursivas não foi explicitamente apresentado aos estudantes, isto é, eles discutiram sobre as ideias por trás de algumas metarregras.

Os relatórios foram o produto final de uma pesquisa desenvolvida pelos próprios estudantes, sob a orientação de Kjeldsen e de Blomhøj, no âmbito de um programa da Universidade de Roskilde, que abrange cursos tanto no nível de graduação quanto de mestrado. A pesquisa foi desenvolvida em grupo, ao longo de um semestre e foi orientada pelos seguintes requerimentos:

> [...] os estudantes devem trabalhar com um problema que lide com a natureza da matemática e sua “arquitetura”como uma disciplina científica tais como seus conceitos, métodos, teorias, fundação etc. de maneira que o *status* da matemática, seu desenvolvimento histórico, ou seu lugar na sociedade seja iluminado[23]. (KJELDSEN, 2011b, p.172, aspas no original, tradução nossa)

Os temas dos relatórios analisados em (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012) são: “*Physics' influence on the development of differential equations and the following development of theory*”(A influência da física no desenvolvimento das equações diferenciais e o desenvolvimento subsequente da teoria) e “*Fourier and the concept of a function – the transition from Euler's to Dirichlet's concept of a function*”(Fourier e o conceito de uma função: a transição de Euler a Dirichlet). Falaremos um pouco sobre a análise dos pesquisadores a respeito do primeiro relatório, no qual os estudantes envolvidos investigaram os episódios de pesquisa sob a seguinte perspectiva: *como outra disciplina científica influenciou a formulação de problemas pelos matemáticos, bem como os métodos que eles usavam para resolver problemas.*

[23]No original: [...] the students should work with a problem that deals with the nature of mathematics and its “architecture”as a scientific subject such as its concepts, methods, theories, foundation etc., in such a way that the status of mathematics, its historical development, or its place in society gets illuminated. (KJELDSEN, 2011b, p.172)

Os estudantes analisaram fontes primárias publicadas no final do século XVII com as soluções do problema da braquistócrona por Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli e a solução do problema da catenária por Johann Bernoulli. A leitura das fontes foram amparadas pela tradução inglesa de Henk J. M. Bos[24]. Kjeldsen e Blomhøj, em sua análise, se concentraram no problema da catenária, de acordo com o qual, considerando uma corda flexível suspensa livremente por dois pontos sob a ação da gravidade, deve-se descrever a curva formada pela corda. Ao longo da análise, trechos dos relatórios dos estudantes foram apresentados para ilustrar reflexões sobre metarregras. Os estudantes apresentaram no relatório o modo como Bernoulli deduziu a equação diferencial associada ao problema da catenária e como a equação foi resolvida.

Bernoulli deduziu a equação diferencial do problema utilizando argumentos geométricos baseados em infinitesimais, no triângulo característico de Leibniz e em leis da estática. Os estudantes tiveram dificuldades em compreender o tipo de argumento de Bernoulli que, aos olhos de hoje, parece carecer de rigor matemático. No final do século XVII, argumentos geométricos, com o emprego de infinitesimais, eram aceitos devido aos resultados frutíferos que tais procedimentos permitiam alcançar, apesar dos problemas com a fundamentação do cálculo e com a natureza das quantidades ditas infinitesimais. Nos dias de hoje, tais argumentos não seriam aceitos sem a utilização do conceito de limites e de funções. Kjeldsen e Blomhøj apontam que os estudantes se tornaram cientes de que os padrões de rigor mudam com o tempo. A leitura e discussão dos textos históricos, de fato, promoveram oportunidades para que eles refletissem sobre as metarregras relacionadas à noção de rigor que governavam o discurso presente nas fontes históricas.

De acordo com Kjeldsen e Blomhøj, na discussão dos estudantes sobre como Bernoulli resolveu a equação diferencial por meio de uma construção geométrica, eles observaram que os matemáticos do século XVII não conheciam as funções exponenciais e logarítmicas, portanto, Bernoulli não poderia descrever a solução analiticamente. Assim, os estudantes puderam refletir sobre a metarregra relacionada ao que era entendido como solução de uma equação diferencial: uma construção geométrica no século XVII e uma função nos dias de hoje.

[24](BOS, 1975) conforme citado por (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012, p. 343).

Os pesquisadores ressaltaram que o trabalho promoveu uma oportunidade de aprendizagem das regras do nível do objeto, pois os estudantes discutiram por que a argumentação de Bernoulli resultou em uma resposta correta se ele não usou os conceitos de limite e de função.

Baseados na análise dos dois relatórios, Kjeldsen e Blomhøj concluíram que por meio de do estudo de fontes históricas e do uso de métodos históricos apropriados para responder questões históricas, os estudantes podem se engajar em discussões e reflexões sobre metarregras do discurso matemático. Sobre a possibilidade de desenvolver metarregras e modificar o discurso matemático, os pesquisadores observaram que se trata de uma questão complexa e difícil de documentar. No entanto, apontaram que oportunidades para conflitos comognitivos podem ser criadas em situações de aprendizagem por meio de investigações históricas em fontes originais e a partir de discussões sobre as fontes com o professor.

Os pesquisadores concluíram ainda que, a partir de tais situações de aprendizagem, os estudantes se tornam cientes de que existem regras metadiscursivas que governam as narrativas dos textos matemáticos e que as metarregras que governam o discurso das fontes são diferentes daquelas que governam as narrativas dos livros-textos contemporâneos.

Kjeldsen e Petersen (2014) implementaram um curso experimental em uma escola dinamarquesa com o título "*The concept of a function viewed through historical and contemporary lenses*" (O conceito de uma função visto por meio de lentes históricas e contemporâneas) visando testar o argumento teórico introduzido em (KJELDSEN, 2011a). A elaboração e implementação do curso, aplicado em 13 aulas de 50 minutos, foi parte da pesquisa de dissertação de mestrado da segunda autora.

Além da teoria da matemática como um discurso de Sfard (2008) e da abordagem das múltiplas perspectivas (KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN, 2011b; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012), também compuseram o quadro teórico da pesquisa as noções de *imagem de conceito* e *definição de conceito*[25] definidos por Tall e Vinner 1981 e o

[25] Para estudar o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo, Tall e Vinner 1981 definiram os termos *imagem de conceito* e *definição de conceito*. A imagem de conceito se refere a toda a estrutura cognitiva que é associada com o conceito, incluindo todas as imagens mentais, propriedades associadas e processos. A definição de conceito é definido como a descrição escrita (a forma das palavras) que explica o conceito. O último conceito pode ser pessoal, isto é, a definição de um indivíduo para um conceito, ou formal, a definição aceita pela comunidade matemática.

modelo de Sfard (1991) para formação do conceito[26].

Com o quadro teórico acima formado, Kjeldsen e Petersen investigaram se, e em que sentido, atividades históricas podem ser usadas para: i) revelar as regras metadiscursivas dos estudantes em matemática e torná-las objetos de reflexão, ii) dar suporte à aprendizagem de conceitos matemáticos, especificamente do conceito de função e iii) desenvolver uma consciência histórica nos estudantes. Os alunos já haviam estudado vários tópicos sobre funções na ocasião do curso, assim, a intervenção dos pesquisadores não teve como objetivo introduzir o conceito de função.

O material utilizado no curso contou com extratos de fontes primárias de Euler, de 1748, e de Dirichlet, de 1837, livros didáticos sobre o tópico função, textos de história da matemática, além de roteiros com atividades. As perspectivas que guiaram a elaboração do material foram: *as forças impulsionadoras no desenvolvimento da matemática* e *a influência dos atores na formação dos conceitos matemáticos*.

Inicialmente, a turma foi dividida em quatro grupos (denominados grupos base) e cada um trabalhou com um tema:

- Grupo base 1: Definições históricas de uma função.
- Grupo base 2: O debate sobre a corda vibrante.
- Grupo base 3: Euler, Dirichlet e a sociedade no qual eles viviam.
- Grupo base 4: O conceito moderno de uma função.

Os estudantes no grupo base 1 analisaram duas definições do conceito de função, as quais voltaremos a falar. Os estudantes do grupo base 2 trabalharam com a discussão da corda vibrante que foi um fator impulsionador no desenvolvimento do conceito de uma função. Os estudantes do grupo base 3 trabalharam com as comunidades matemáticas nas quais Euler e Dirichlet estavam inseridos e também com as mudanças que ocorreram no final do século XVIII e que influenciaram a educação, a pesquisa e as academias.

[26]Sfard (1991) argumenta que os conceitos matemáticos podem ser interpretados de duas formas: operacional e estrutural. A concepção operacional fala sobre processos, algoritmos e ações relacionados a um conceito matemático. A concepção estrutural trata um conceito matemático como um objeto abstrato. Sfard propõe um modelo para a formação de um conceito em três etapas: interiorização, condensação e reificação. O modelo parte da introdução do conceito por meio de processos (interiorização), isto é, desenvolve primeiro a interpretação operacional, e tem como objetivo desenvolver a interpretação estrutural do conceito (condensação e reificação).

Os alunos trabalharam na configuração acima por algumas aulas e, nas demais, novos grupos foram formados (denominados grupos *experts*) da seguinte forma: cada grupo *expert* foi formado com pelo menos um integrante de cada grupo base. Assim, cada integrante comunicava o trabalho realizado no grupo base de modo que todos puderam conhecer um pouco sobre o trabalho de todos os grupos. Kjeldsen denomina essa configuração de *estrutura matricial*.

O tema do grupo base 1 foi direcionado para explorar duas metarregras (KJELDSEN; PETERSEN, 2014, p. 33):

- Generalidade da variável: refere-se à norma de que uma variável, em uma função, pode assumir todos os valores e não poderiam ser restritos a um intervalo, por exemplo.

- Validade geral da análise: refere-se à norma de que resultados, regras, técnicas e enunciados da análise devem ser geralmente válidos.

As metarregras acima eram dominantes na análise do século XVIII. Euler, em seu *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à análise infinita), de 1748, apresentou as seguintes descrições para as noções de variável e de função, respectivamente:

> Uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentes e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários. (EULER, 1748 apud ROQUE, 2012, p. 374)

> Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes. (EULER, 1748 apud ROQUE, 2012, p. 374)

A definição de Euler identifica uma função a uma expressão analítica. O problema da corda vibrante, discutido por D'Alembert, pelo próprio Euler e por Daniel Bernoulli, colocou a questão de como poderia ser a forma inicial da corda, que até o momento era descrita por uma função associada à sua expressão analítica. Esse problema consiste em determinar a função que descreve a posição de uma corda, presa em suas extremidades, em um instante t, após sofrer uma deformação. Euler chegou à conclusão de que a forma inicial poderia ser estabelecida por diferentes expressões analíticas definidas em intervalos distintos e, até mesmo, por uma curva desenhada à mão livre. Ele propôs uma nova definição, estendendo o conceito de função, em sua obra *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial), publicada em 1755:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x, de qualquer maneira, ou que são determinadas por x, são chamadas de funções de x. (EULER, 1748 apud ROQUE, 2012, p. 378)

Vemos que Euler se orientava segundo as metarregras já citadas, *generalidade da variável* e *validade geral da análise*. Dirichlet e seus contemporâneos não se orientavam pela metarregra da *generalidade da variável*, como podemos observar na definição de função (contínua) enunciada por ele em um artigo de 1837:

> Seja a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b. Se, a cada x, corresponde um único y finito de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b, $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isto, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (LEJEUNE-DIRICHLET, 1837 apud ROQUE, 2012, p. 458)

As definições acima, influenciadas por diferentes concepções, permitem compreender o papel que as fontes históricas desempenham como interlocutores com discursos governados por diferentes metarregras. Para ilustrar como Kjeldsen e Petersen exploraram as metarregras nas atividades, apresentamos algumas questões trabalhadas pelo grupo base 1:

1. Quais foram os conceitos centrais na definição de Euler de uma função?

2. Que princípio caracteriza uma variável de acordo com Euler e como esse princípio é chamado?

3. O que é o princípio da generalidade da variável?

4. Quais as similaridades entre o princípio da generalidade da variável e o princípio da generalidade da validade da análise? [...]

6. Encontre três diferenças entre o conceito de função de Dirichlet e a definição de Euler. [...] (KJELDSEN; PETERSEN, 2014, p. 35, tradução nossa)[27]

Os pesquisadores coletaram dados a partir das seguintes fontes: respostas dos grupos bases às atividades históricas, artigos elaborados pelos grupos *expert*, questionário aplicado ao fim do curso, gravações em vídeo das aulas e das discussões dos grupos. Entre os resultados que a pesquisa alcançou, destacamos: algumas metarregras de alguns alunos foram diagnosticadas e, em vários momentos, eles pareciam se orientar por metarregras que não estão de acordo com aquelas aceitas pela comunidade matemática. Durante a análise, Kjeldsen e Petersen (2014) observaram que alguns alunos pareciam se orientar por uma metarregra que coincidia com a de Euler e seus contemporâneos, aquela sobre a generalidade da variável, isto é, alguns alunos concordaram que a variável independente em uma função também pode assumir qualquer valor nos dias de hoje, assim como para Euler.

Kjeldsen e Petersen (Ibid.) também observaram a manifestação de conflitos em alguns episódios. Um aluno sinalizou um conflito entre a noção de função descontínua de Euler (em que uma função é definida por mais de uma expressão analítica, em diferentes intervalos do domínio) e a metarregra da generalidade da variável. O mesmo aluno formulou um exemplo com uma função definida por mais de uma sentença e concluiu que seu exemplo ia contra o princípio da generalidade da variável. Se a variável não podia ser restrita a um intervalo, de acordo com

[27]No original: 1. What are the central concepts in Euler's definition of a concept? 2. Which principle characterizes a variable according to Euler, and what is this principle called? 3. What is the principle of the generality of the variable all about? 4. What are the similarities between the principle of the generality of the variable and the principle of the generality of the validity of analysis? [...] 6. Find three ways in which Dirichlet's concept of a function differ from Euler's definition. [...] (KJELDSEN; PETERSEN, 2014, p. 35)

esse princípio, deveríamos poder substituí-la nas diferentes expressões analíticas. Os pesquisadores concluíram que a história da matemática tem potencial para criar conflitos comognitivos e, logo, para promover mudanças nas metarregras dos alunos.

Tanto em (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012), quanto em (KJELDSEN; PETERSEN, 2014), a investigação histórica foi orientada por uma ou mais perspectivas, isto é, dentro da abordagem das múltiplas perspectivas. Já as noções de objetos epistêmicos e técnicas epistêmicas não foram exploradas. A partir do seu argumento teórico, Kjeldsen elaborou um quadro metodológico para integrar a história da matemática ao ensino de matemática de modo a conscientizar os alunos de que existem regras que moldam o discurso matemático, que tais regras mudam com o tempo e que influenciam o modo como interpretamos o conteúdo matemático. Nos trabalhos citados, as metarregras também dão suporte à aprendizagem de conceitos matemáticos (por exemplo, o conceito de função) e contribuem para desenvolver consciência histórica nos estudantes. Voltaremos a esse último ponto, sobre o desenvolvimento de uma consciência histórica, na Seção 2.5.

Nos resultados alcançados por Kjeldsen e seus colaboradores, vemos que a história da matemática tem grande potencial para promover conflitos comognitivos e reflexões sobre as metarregras que governaram o discurso das fontes usadas. Vimos, acima, como (SFARD, 2007) usou o quadro comognitivo para desenvolver metarregras apropriadas para a aprendizagem da regra dos sinais na multiplicação de números negativos. Comparando o trabalho desses pesquisadores com o de Sfard (ibid.), que não utiliza histórica da matemática, eles não discutem se as situações de ensino orientadas por uma abordagem histórica, como proposto por eles, contribuem para o desenvolvimento de metarregras apropriadas por parte dos estudantes.

De acordo com (SFARD, 2008), uma aprendizagem no nível meta (*metalevel learning*) envolve mudanças nas metarregras do discurso, por exemplo, definir uma palavra de outro modo ou identificar uma figura geométrica por um novo processo de justificação. As situações de ensino elaboradas nos trabalhos de Kjeldsen e seus colaboradores visam promover reflexões sobre metarregras, conscientizar da existência de tais regras moldando os discursos e do fato de que elas mudam com o tempo. Desse modo, a aprendizagem no nível meta se ampara no conhecimento das metarregras que governaram a matemática do passado e na conscientização de suas próprias metarregras, o que também é importante para a aprendizagem de matemática em si, pois tal conscientização pode levar os estudantes a problematizar as suas próprias metarregras.

Alinhamo-nos com a proposta de Kjeldsen e seus colaboradores sobre o uso da história da matemática para promover reflexões sobre as metarregras do discurso. No entanto, nosso público alvo é formado por futuros professores de matemática, isto é, estudantes de cursos de licenciatura em matemática. Tendo como tópico de interesse as matrizes, inspiramo-nos no quadro metodológico explicado acima e usamos fontes históricas sobre matrizes para planejar conflitos comognitivos e promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes. Esperamos que, com isso, os estudantes percebam as metarregras segundo as quais eles se orientam quando lidam com esses objetos matemáticos nas disciplinas de Álgebra Linear. A importância de promover uma aprendizagem no nível meta para esse público tem, ainda, mais peso, pois se trata de tópicos que fazem parte do currículo do ensino básico e, portanto, que eles vão ter que ensinar em sua futura prática.

Dentre os trabalhos cujas propostas discutimos aqui, apenas um (KJELDSEN; PETERSEN, 2014) relatou os resultados de um estudo empírico com o quadro metodológico elaborado por Kjeldsen. Assim, nosso trabalho é uma contribuição, fornecendo mais um estudo empírico na direção de investigar as contribuições da história em revelar e promover reflexões sobre as metarregras do discurso matemático, em particular, do discurso da Álgebra Linear. Não é nosso objetivo promover o desenvolvimento de novas metarregras do discurso atual, como vimos no exemplo do ensino da regra dos sinais para a multiplicação de números negativos (SFARD, 2007). Mais especificamente, nosso objetivo inicial é *promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, por meio de conflitos comognitivos planejados com base em fontes históricas sobre matrizes, a fim de que os estudantes percebam e se conscientizem das metarregras segundo as quais eles se orientam quando lidam com matrizes e determinantes*. Para isso, uma proposta de ensino foi desenvolvida a partir de dois episódios da história das matrizes (Seção 3.1) e implementada em dois estudos de campo. O primeiro episódio se destaca pela introdução das matrizes no contexto da resolução de um problema geométrico em que a principal ferramenta utilizada era determinante, isto é, determinantes eram calculados sem matrizes. O segundo se destaca pela introdução de um cálculo simbólico com as matrizes e por mostrar a origem das definições das operações com matrizes. Além disso, os episódios mostram diferentes interpretações e usos da noção de matriz. Dois roteiros de ensino foram elaborados de modo a apresentar as práticas matemáticas presentes nos episódios. Por fim, quatro metarregras foram identificadas por nós nesses episódios históricos e exploradas nos roteiros por meio de atividades específicas.

Ainda como parte desse objetivo inicial, desejamos investigar se as reflexões sobre as metarregras têm impacto no modo como os estudantes veem e entendem esses tópicos. Na próxima seção, apresentamos o referencial teórico que dará suporte a essa parte da investigação.

2.3 Concepções

2.3.1 Concepções ou crenças?

Na área de Educação Matemática, alguns estudos investigam como as **crenças** e **concepções** influenciam a prática pedagógica de professores em sala de aula, por exemplo, (SHOENFELD, 2011) e (FURINGHETTI; MORSELLI, 2011). O interesse em investigar crenças ou concepções se justifica pela visão de que essas variáveis afetam a maneira como uma pessoa interage com seu mundo. Philipp (2007), por exemplo, sugere pensar em crenças como lentes através das quais um indivíduo olha para interpretar o mundo. Em relação a estudantes, suas crenças sobre matemática podem influenciar a imagem que eles formam da matemática como uma disciplina (JANKVIST, 2009).

A literatura sobre crenças aponta uma variedade de descrições para os termos crenças e concepções e não há consenso sobre uma definição para cada um deles (PEHKONEN, 2004; FURINGHETTI; PEHKONEN, 2002). Pretendemos trazer as ideias de alguns pesquisadores sobre as dificuldades em definir esses termos, bem como algumas definições apresentadas na literatura. Como parte do objetivo inicial, desejamos investigar se as reflexões sobre metarregras têm impacto no modo como os estudantes vêem matrizes e determinantes. Após discutir como a literatura diferencia crenças de concepções, vamos justificar nossa escolha por investigar as concepções sobre matrizes e determinantes e apresentar nossa opção para definir o termo "concepções".

Furinghetti e Pehkonen (2002) tentaram caracterizar o termo crenças por meio de uma pesquisa envolvendo 22 especialistas da educação matemática que trabalham no campo das crenças. Aos especialistas cabia responder um questionário baseado em nove caracterizações para crenças colhidas na literatura e fornecer sua própria caracterização. Dezoito especialistas enviaram suas respostas e apenas a metade forneceu uma caracterização. Os resultados revelaram alguns pontos de convergência, como o componente afetivo das crenças e seu efeito no comportamento e nas reações do indivíduo. No entanto, uma das conclusões apresentadas foi a dificuldade em fornecer uma caracterização comum para os possíveis campos de aplicação (educação matemática, filosofia, educação geral, psicologia e sociologia). Os autores concluíram ainda que qualquer caracterização desse termo deve levar em conta o contexto, a situação específica, a população e os objetivos que se tem em mente ao utilizá-lo.

Pehkonen (2004) aponta que a principal dificuldade em definir o termo crenças está em distingui-lo de **conhecimento**. Observamos que alguns pesquisadores se preocupam em distinguir crenças de conhecimento, crenças de concepções e concepções de conhecimento. Segundo Thompson (1992), há duas características que permitem distinguir crenças de conhecimento: *convicção* e *consensualidade*. Crenças podem ser mantidas com vários graus de convicção e não são consensuais, ao contrário de conhecimento:

> [...] uma característica do conhecimento é o acordo geral sobre procedimentos para avaliar e julgar sua validade; conhecimento deve atender a critérios que envolvem cânones de evidência. Crenças, por outro lado, são frequentemente mantidas ou justificadas por razões que não atendem aqueles critérios e, assim, são caracterizados por uma falta de acordo sobre como devem ser avaliadas ou julgadas[28]. (THOMPSON, 1992, p. 130, tradução nossa)

No sétimo capítulo do *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, voltado para o tema "crenças e afeto de professores de matemática",

[28]No original: [...] a characteristic of knowledge is general agreement about procedures for evaluating and judging its validity; knowledge must meet criteria involving canons of evidence. Beliefs, on the other hand, are often held or justified for reasons that do not meet those criteria, and, thus, are characterized by a lack of agreement over how they are to be evaluated or judged. (THOMPSON, 1992, p. 130)

Philipp apresentou as seguintes definições para os termos crenças, concepções e conhecimento:

> **Crenças** - Compreensões, premissas ou proposições, psicologicamente mantidas, sobre o mundo que são entendidos como verdadeiros. Crenças são mais cognitivas, são percebidas menos intensamente e são mais difíceis de mudar do que atitudes. Crenças devem ser pensadas como lentes que afetam a visão sobre algum aspecto do mundo ou como disposições em direção a uma ação. Crenças, ao contrário de conhecimento, podem ser mantidas com variados graus de convicção e não são consensuais. [...]
> **Concepção** - Noção geral ou estrutura mental incluindo crenças, significados, conceitos, proposições, regras, imagens mentais e preferências.
> **Conhecimento** - Crenças mantidas com certeza ou justificadas como verdadeiras. O que é conhecimento para uma pessoa pode ser crença para outra, dependendo se a concepção é tida como inquestionável[29]. (PHILIPP, 2007, p. 259, tradução nossa)

Na definição de Philipp, *concepções* são vistas como algo mais geral, incluindo crenças. Levando em conta que crenças podem ser verdadeiras ou falsas, o conhecimento é uma crença justificada como verdadeira.

Diferentes caracterizações para o termo concepções são apresentadas e discutidas em (FURINGHETTI; PEHKONEN, 2002) e a maioria também aponta para a ideia de uma noção mais geral, que inclui crenças como um subconjunto. Pehkonen (2004) afirma que, quando se fala em concepções, o componente cognitivo é destacado e, quando se fala em crenças, o componente afetivo é destacado. Thompson (1992), apesar de diferenciar esses termos, diz que a distinção entre eles "não pode ser uma coisa terrivelmente importante".

Um outro olhar sobre a diferença entre crenças e conhecimento é apresentado por Furinghetti e Phekonen (2002). Eles recomendam que, ao lidar com crenças e

[29]No original: **Beliefs** - Psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. Beliefs are more cognitive, are felt less intensely, and are harder to change than attitudes. Beliefs might be thought of as lenses that affect one's view of some aspect of the world or as dispositions toward action. Beliefs, unlike knowledge, may be held with varying degrees of conviction and are not consensual [...] **Conception** - a general notion or mental structure encompassing beliefs, meanings, concepts, propositions, rules, mental images, and preferences. **Knowledge** - beliefs held with certainty or justified true belief. What is knowledge for one person may be belief for another, depending upon whether one holds the conception as beyond question. (PHILIPP, 2007, p. 259)

termos relacionados, dois tipos de conhecimento devem ser considerados: o *objetivo*, ou oficial, aquele que é aceito por uma comunidade e o *subjetivo*, ou pessoal, que não é necessariamente sujeito a uma avaliação externa e se baseia nas próprias experiências e percepções. Apoiados nessa dicotomia, esses pesquisadores argumentam que crenças e termos relacionados pertencem ao conhecimento subjetivo, que possuem diferentes graus de estabilidade e, portanto, são abertos a mudança.

Há uma interação entre os conhecimentos objetivo e subjetivo. Quando um indivíduo estuda matemática (conhecimento objetivo), ele amplia seu conhecimento subjetivo. Se o tópico em estudo é matrizes, por exemplo, o conhecimento do indivíduo sobre matrizes é reconhecido como conhecimento subjetivo, cuja tendência é se aproximar assintoticamente do conceito oficial de matrizes (conhecimento objetivo). Por outro lado, o conhecimento objetivo também pode ser ampliado e enriquecido quando um conhecimento subjetivo é compartilhado publicamente, justificado e aceito pela sociedade. (PEHKONEN, 2001, p. 15)

Muito próxima da perspectiva acima de diferenciar o conhecimento oficial do pessoal, isto é, o conhecimento objetivo do conhecimento subjetivo, Sfard apresenta uma definição para **conceito** e para **concepção**:

> a palavra "conceito"(algumas vezes chamada de "noção") será mencionada sempre que uma ideia matemática é comunicada na sua forma "oficial" - como um construto teórico dentro do "universo formal do conhecimento ideal"; o agrupamento inteiro de representações e associações internas evocadas pelo conceito - a contrapartida do conceito no universo subjetivo, interno do conhecimento humano - será denominado uma "concepção"[30]. (SFARD, 1991, p. 3, aspas no original)

As definições de Sfard estabelecem uma relação entre **conceito** e **concepção**, em que o primeiro pertence ao "universo formal do conhecimento" e se aplica quando "uma ideia matemática é comunicada na sua forma oficial". Já o termo concepção é associado à contrapartida interna do conceito no universo subjetivo do conhecimento, isto é, a todas as representações e associações que são evocadas em conexão

[30]No original: the word "concept"(sometimes replaced by "notion") will be mentioned whenever a mathematical idea is concerned in its "official" form - as a theoretical construct within "the formal universe of ideal knowledge"; the whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept - the concept's counterpart in the internal, subjective "universe of human knowing" - will be referred to as a "conception". (SFARD, 1991, p. 3)

com um determinado conceito. Assim, o conceito pode ser associado ao conhecimento objetivo e, concepção, ao conhecimento subjetivo; no entanto, na definição de Sfard, uma concepção é atrelada a um conceito. Assim, concepções dizem respeito ao nosso entendimento sobre um determinado conceito matemático, o que internalizamos sobre o conceito.

As representações e associações internas às quais Sfard se refere na definição de concepção precisam ser melhor explicadas. Entendemos que essas representações incluem tanto signos usados para representar os objetos matemáticos, como qualquer tipo de esquema visual que possa representar um determinado conceito na estrutura cognitiva de um indivíduo. Ao pensar em funções, as representações evocadas por um estudante podem ser algumas expressões analíticas como $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x - 1$, entre outras. Tais representações podem levar o estudante a formar uma concepção de que funções são expressões analíticas. Entendemos as associações internas como contextos, ideias, situações que o indivíduo relaciona com o conceito e que permite conferir um sentido a ele. Para exemplificar, a associação da multiplicação de números naturais com a ideia de adição repetida, comum nos anos iniciais, costuma levar os alunos a formar a concepção da multiplicação como uma operação que aumenta, isto é, o produto de dois números naturais é maior que multiplicando e multiplicador.

Sfard (1991) define o termo "concepções" em conexão com "conceitos" para designar duas interpretações, segundo as quais as noções matemáticas podem ser concebidas: *estruturalmente*, isto é, como *objetos* e *operacionalmente*, isto é, como *processos*. Na concepção estrutural, noções matemáticas são vistas como objetos abstratos, por exemplo, a circunferência pode ser vista como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo. Na concepção operacional, noções matemáticas são interpretadas como processos, algoritmos e ações, por exemplo, a circunferência pode ser vista como a curva obtida por girar o compasso em torno de um ponto fixo. Sfard argumenta que as duas concepções, apesar de aparentemente incompatíveis (como um conceito matemático pode ser um objeto e um processo ao mesmo tempo?), são complementares e defende que ambas são necessárias para uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos. As duas interpretações da circunferência trazem *insights* diferentes sobre o conceito. A interpretação desse conceito como um lugar geométrico enfatiza o conjunto de pontos que forma a curva, já a descrição operacional enfatiza o processo de construção da circunferência. Desse modo, conceber os conceitos a partir de apenas uma dessas interpretações proporciona uma compreensão limitada do mesmo.

Em outro artigo, Sfard sugere uma relação entre metarregras e concepções, segundo a qual metarregras moldam concepções, no contexto da diferenciação entre metarregras e normas:

> [...] por repetir-se incessantemente, as regras não escritas e, em sua maior parte, não intencionadas, moldam as concepções de "conduta normal"das pessoas e, como tal, tem um impacto normativo[31]. (SFARD, 2000, p. 170, aspas no original)

Na citação acima, "as regras não escritas" são as metarregras. Apesar de sugerir que metarregras moldam as concepções de conduta normal das pessoas passando ao *status* de normas, Sfard não investiga o impacto das metarregras na formação de concepções no trabalho citado e nem nos trabalhos posteriores. O termo "concepções" não está sendo usado em conexão com um conceito na citação acima. A sugestão de Sfard levou-nos a pensar em relacionar **as reflexões sobre metarregras** com as concepções que os estudantes têm sobre matrizes e determinantes, no sentido de investigar se essas reflexões influenciam na formação de concepções sobre esses tópicos. Para isso, apoiamo-nos na definição de "concepção" proposta por Sfard (1991) como a contrapartida interna do conceito.

Uma outra perspectiva de investigação seria analisar a influência das metarregras dos estudantes em suas concepções sobre matrizes e determinantes, no entanto, consideramos tal questão complexa e delicada. Tal investigação demandaria um levantamento das metarregras dos estudantes quando lidam com matrizes e determinantes, bem como de suas concepções sobre esses conceitos. Não foi nosso objetivo fazer um mapeamento geral das metarregras dos estudantes quando lidam com matrizes e determinantes. Por outro lado, de acordo com Jankvist (2009, p. 87) que usou história da matemática para alterar crenças de estudantes sobre a matemática como uma disciplina, "reflexões parecem ser um elemento central para mudar crenças". Como

[31] No original: [......] by incessantly repeating themselves, the unwritten and mostly unintended rules shape people's conceptions of "normal conduct"and, as such, have a normative impact. (SFARD, 2000, p. 170)

nosso objetivo inicial é promover reflexões sobre metarregras, decidimos investigar o impacto dessas reflexões na formação de concepções sobre matrizes e determinantes. Ao se conscientizarem sobre as suas próprias metarregras quando lidam com matrizes e determinantes, os estudantes poderão refletir sobre a visão que eles têm acerca desses conceitos, percebendo e (talvez) revendo as suas próprias concepções sobre esses conceitos.

Na próxima seção, apresentaremos alguns trabalhos que investigaram concepções sobre um determinado tópico do currículo e que apontam a importância de influenciar as concepções dos estudantes sobre um conceito.

2.3.2 Concepções sobre conceitos matemáticos: o que as pesquisas apontam

Algumas pesquisas têm se dedicado a investigar concepções e crenças de professores e de alunos sobre a matemática, e.g. (THOMPSON, 1992) e (JANKVIST, 2009), e de professores sobre o ensino de matemática, e.g. (THOMPSON, 1984). No entanto, há poucos estudos investigando concepções de professores e de alunos sobre um determinado tópico do currículo. Nosso principais exemplos são o trabalho de tese de Iiris Attorps (2006) sobre as concepções acerca do tópico equações e a pesquisa de Ruhama Even (1993) sobre o conhecimento de conteúdo e o conhecimento pedagógico de conteúdo acerca do tópico funções.

Attorps (2006) investigou as concepções sobre equações por parte de professores de matemática baseada na definição proposta por Sfard (1991). Attorps conduziu um estudo preliminar com 30 estudantes em sua formação inicial para o ensino de matemática. O estudo principal contou com 10 professores de matemática em campo e 75 estudantes em formação inicial. Dentre os instrumentos para coleta de dados, a pesquisa contou com a aplicação de questionários, gravações em vídeo de aulas e entrevistas.

As concepções sobre equações dos participantes da pesquisa foram descritas a partir de três perspectivas: *concepções sobre a aprendizagem de equações*[32] considerando as experiências prévias de aprendizagem na escola e na universidade, *con-*

[32]No original: *teachers' conceptions about learning of equations.*

cepções sobre o conteúdo de equações[33] e *concepções pedagógicas sobre o conteúdo de equações*[34] Attorps estabelece as perspectivas acima com base nas categorias para o conhecimento do professor introduzidas por Lee Shulman (1986), em particular, o *conhecimento de conteúdo* e o *conhecimento pedagógico de conteúdo*.

As concepções dos professores sobre o conteúdo de equações remetem ao conhecimento matemático relativo a equações. Elas foram investigadas por meio de questões como "Descreva o que é uma equação" e por meio de uma extensa lista, com exemplos e contraexemplos de equações, em que os professores participantes do estudo tinham que identificar quais eram equações. Vemos que as questões são diretamente vinculadas com o conteúdo de equações. Os resultados apontaram que a maioria dos professores tinham uma visão *operacional* de equações, no sentido de (SFARD, 1991), isto é, demonstraram conceber a noção de equação como um procedimento de cálculo (processo), mais do que como uma estrutura algébrica (objeto). Alguns professores consideraram expressões do tipo $x^2 - 5x - 10$ como equações, alegando que seria possível encontrar um valor para x. Ao pedir aos professores que descrevessem o que é uma equação, as seguintes categorias de concepções foram estabelecidas: *uma ilustração concreta, uma ferramenta para encontrar a incógnita, uma igualdade entre duas quantidades* e *uma transição para o pensamento algébrico*. Na primeira categoria, os professores expressaram suas concepções usando a *metáfora da balança*. As respostas agrupadas nas três primeiras categorias sinalizam que a maioria possuía uma visão operacional do conceito.

As concepções pedagógicas sobre o conteúdo de equações remetem ao conhecimento pedagógico de conteúdo. Elas foram investigadas por meio de questões abordando os objetivos do ensino de equações, como os alunos são motivados a aprender equações, os tipos de erros que os alunos cometem, dentre outras. As concepções identificadas nas respostas foram agrupadas nas seguintes categorias: *equações como uma ferramenta, equações de acordo com os objetivos no currículo de matemática* e *equações de um ponto de vista geral*. As concepções na primeira categoria sugerem que os professores entendem a álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas do dia a dia ou da própria matemática. Por outro lado, as concepções na terceira categoria apontam para a transição do pensamento

[33]No original: *teachers' subject matter conceptions about equations*.
[34]No original: *teachers pedagogical content conceptions about equations*.

aritmético para o algébrico (ATTORPS, 2006, p. 170).

Ruhama Even (1993) investigou concepções de futuros professores sobre o conceito de função. O objetivo do estudo foi investigar o conhecimento de conteúdo dos (futuros) professores de matemática e suas inter-relações com o conhecimento pedagógico de conteúdo, no contexto do ensino de funções. Mais especificamente, o estudo enfatiza duas característica da *concepção moderna* do conceito de função como "uma correspondência univalente entre dois conjuntos": a natureza arbitrária do conceito, tanto para a relação considerada como também para os conjuntos envolvidos e, a propriedade da univalência, segundo a qual cada elemento do domínio é associado a um único elemento no contradomínio. O termo "concepção"não é definido por Even. Em alguns momentos, esse termo é usado em referência à noção de imagem conceitual de Tall e Vinner (1981).

Os instrumentos utilizados para gerar os dados foram questionários e entrevistas organizadas com questões sobre funções, cujas respostas requeriam maior elaboração e reflexão em relação ao questionário. O estudo foi conduzido com 162 estudantes, de oito universidades dos Estados Unidos, que estavam finalizando um curso de formação inicial de professores equivalente as nossas licenciaturas. A Figura 2.2 mostra a parte inicial do questionário.

Os resultados do estudo de Even mostraram que a maioria dos estudantes não possuía uma concepção moderna de funções. As respostas às questões 1 e 2 (Figura 2.2) sugerem concepções i) de que funções são (ou sempre podem ser representadas por) equações ou fórmulas[35]; ii) gráficos de funções devem sempre ser suaves[36] e iii) funções são "conhecidas"[37]. Essa última concepção foi marcada por respostas que indicavam tipos específicos de funções, por exemplo: "existem infinitas parábolas que satisfazem as condições"[38] (EVEN, 1993, p. 107, tradução nossa), em resposta à questão 2.

Tais concepções sugerem uma visão limitada do conceito de função no que diz respeito à sua natureza arbitrária. Conceber funções como equações e que possuem como gráficos curvas suaves pode conduzir ao erro de aceitar como funções

[35]No original: functions are (or can always be represented as) equations or formulas.

[36]No original: graphs of functions should be "nice".

[37]No original: functions are "known."

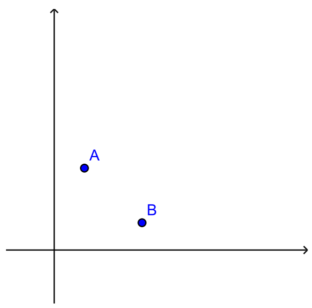
[38]No original: "There are infinite parabolas that would satisfy the conditions."(EVEN, 1993, p. 107)

circunferências ou elipses, por exemplo. Even explica os resultados encontrados argumentando que a ênfase, na maioria dos cursos de matemática, é sobre funções cujas relações podem ser representadas por uma expressão analítica e que têm por gráfico curvas suaves. Assim, mesmo que sejam apresentados à definição “moderna” de função, o que fica é a experiência maior com casos particulares. Essa situação não é muito diferente nos cursos de licenciatura em matemática no Brasil.

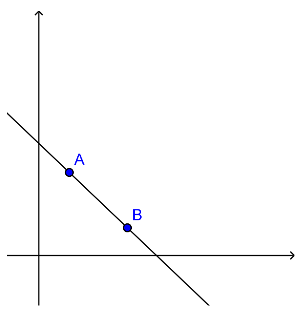
1. a) Dê uma definição para função. b) Um estudante diz que ele/ela não entendeu essa definição. Dê uma versão alternativa que ajude o estudante a compreender.

2. Como funções e equações se relacionam?

3. É pedido a um estudante que forneça um exemplo de um gráfico de uma função que passe pelos dos pontos A e B (veja Fig. 1). O estudante dá a seguinte resposta (veja Fig. 2)



(a) Figura 1



(b) Figura 2

Quando questionado se existe outra resposta, o estudante diz: “Não”.

- Se você acha que o estudante está correto - explique porque.
- Se você acha que o estudante está errado - quantas funções que satisfazem a condição você pode encontrar? Explique.

[. . .]

Figura 2.2: Questões aplicadas na pesquisa de Even (1993, p. 99, tradução nossa).

Tanto Attorps (2006) quanto Even (1993) detectaram concepções limitadas em algum aspecto, por parte dos estudantes, sobre os tópicos equações e funções. Esses resultados mostram que os participantes das pesquisas possuíam uma compreensão parcial ou inadequada sobre esses conceitos. Compreender equações apenas como *uma ferramenta para encontrar a incógnita* pode sugerir que outros aspectos considerados importantes na aprendizagem desse conceito não foram devidamente compreendidos, por exemplo, os significados do sinal de igual, os diferentes usos das letras na álgebra, o significado da solução de uma equação. A associação de funções com equações sinaliza uma compreensão inadequada do conceito de função. Desse modo, os resultados dessas pesquisas apontam para a importância de promover situações em que os estudantes possam desenvolver concepções mais adequadas sobre os conceitos matemáticos, isto é, que aproximem sua compreensão sobre um conceito do conhecimento objetivo.

Nossa proposta de ensino não foi planejada visando desenvolver concepções específicas sobre os conceitos de matrizes e determinantes. Como parte do nosso objetivo inicial, pretendemos promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes. Esperamos que esse processo de reflexão possa levar os participantes a perceberem e reverem suas concepções sobre esses conceitos. A proposta de ensino foi desenvolvida a partir de dois episódios da história das matrizes (Seção 3.1), que mostram o momento em que as matrizes foram introduzidas, no contexto da solução de um problema geométrico cuja principal ferramenta utilizada era determinante, isto é, determinantes eram usados sem matrizes. Além disso, os episódios trazem diferentes interpretações da noção de matriz. A partir do conteúdo dos roteiros, elencamos três temas para identificar concepções e investigar possíveis influências das reflexões sobre as metarregras: **concepções sobre o que é matriz**, **concepções sobre o que é determinante** e **concepções sobre a utilidade de calcular determinantes**.

2.4 A visão "naturalizada" do ensino

Victor Giraldo e Tatiana Roque (2014) apontam que os conceitos matemáticos são apresentados de uma maneira *naturalizada* tanto no ensino básico quanto no superior, isto é, sua existência, sua importância, seu papel na Matemática são assumidos como dados arbitrariamente. Em particular, observamos que isso ocorre com o ensino das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear. As matrizes costumam ser o ponto de partida de muitos cursos e livros didáticos de Álgebra Linear no Brasil, os quais se estruturam em torno desse objeto matemático e, portanto, conferem a ele (ou reforçam) um papel importante nessa disciplina.

Algumas pesquisas em história da Álgebra Linear (BRECHENMACHER, 2006b; HAWKINS, 2008) mostram que as matrizes surgiram depois de determinantes, sistemas lineares, transformações lineares, formas quadráticas, dentre outros. Assim, as matrizes nem sempre tiveram a importância e o papel que têm hoje nessa disciplina. Não podemos nem mesmo falar sobre uma disciplina chamada Álgebra Linear antes dos anos 1920. Além disso, determinantes eram calculados sem matrizes, algo inesperado para estudantes que, em geral, só conhecem a definição de determinantes a partir de matrizes (quadradas).

Em outro artigo, Roque (2014) discute o que fica perdido na constituição dos objetos matemáticos que se tornam *opacos* "na dissimulação do processo histórico que levou à sua constituição como um objeto"(ibid., p. 170). Inspirada nas ideias de Foucault, Roque argumenta que os objetos matemáticos trazem encapsulados os problemas que ficaram pelo caminho, no processo de sua constituição. A história pode, então, desempenhar o papel de *desfazer a opacidade de um objeto matemático* desmascarando o percurso da sua constituição como um objeto, revelando as demandas, as tensões, os problemas que impulsionaram sua criação, seu desenvolvimento e tudo o mais por trás das escolhas que o elegeram como algo a ser incorporado no ensino:

> O papel de tal abordagem para o ensino seria, assim, mostrar que a opacidade é uma construção particular à nossa matemática e ao tipo de formalização da qual ela decorre. Isto implicou em uma escolha por deixar de lado outras práticas, outros saberes que podem possuir, até mesmo, cientificidades diferentes da nossa. Entender estas matemáticas teria a função de trazer um sentido para os objetos de nossa matemática, que poderiam ser exibidos como uma criação singular, essencialmente distinta de práticas desenvolvidas em outros momentos históricos. (ROQUE, 2014, p. 170)

Roque toma o exemplo das equações para desenvolver as ideias acima e questionar o discurso matemático, isto é, que matemática se deve ensinar e por quê. O ensino das equações é apontado como problemático por apresentar este objeto como um *dado*, isto é, um fato incontornável (Ibid., p. 170). Os alunos devem aprender a resolver equações por meio de uma fórmula ou de algumas técnicas e devem aprender a aplicá-las na resolução de problemas preparados para testar seus conhecimentos.

As ideias de Roque (2014) sobre a opacidade dos objetos matemáticos e as ideias de Giraldo e Roque (2014) sobre a visão naturalizada dos conceitos matemáticos guardam semelhanças. Apresentar os objetos como um dado, um fato incontornável, algo que deve ser resolvido por certas técnicas e que deve ser aplicado a problemas preparados de antemão, corresponde ao modo naturalizado de ensinar os conceitos.

Na abordagem tradicional da Álgebra Linear, as matrizes são definidas como tabelas de números. Em seguida, as operações com matrizes são definidas geralmente sem problematização. Vemos que as matrizes também são ensinadas como um fato incontornável, como se sempre tivessem existido assim com essa forma e com as mesmas finalidades. A especificidade da regra para a multiplicação de matrizes não costuma ser problematizada. Ao adotar como ponto de partida as matrizes e suas operações, fica difícil explorar a origem da multiplicação de matrizes como composição de transformações lineares (Seção 3.1.2). A consistência interna e lógica do discurso matemático que legitima as definições de matriz e de suas operações não parece ser suficiente para dar um sentido à sua aprendizagem. Ao longo da nossa pesquisa, conversamos com muitos estudantes que já haviam concluído pelo menos uma disciplina de Álgebra Linear e também com alguns professores do ensino básico, raramente alguém sabia dizer sobre a origem da multiplicação de matrizes.

Ainda na abordagem tradicional, determinantes são definidos a partir de matrizes quadradas e não é feita uma reflexão sobre essa escolha ou se há outras possibilidades[39]. As matrizes e suas operações passam a ter mais sentido com as transformações lineares, como um objeto que transforma geometricamente vetores e espaços vetoriais (de dimensão finita). O fato de as matrizes oferecerem uma repre-

[39]Marco A. P. Cabral e Paulo Goldfeld (2012) exploram as interpretações geométricas de determinantes como área com sinal do paralelogramo formado por dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e como volume com sinal do paralelepípedo formado por três vetores em $\mathbb{R}^3$, antes de partir para a definição de determinantes de matrizes. Há, contudo, uma definição de determinantes de vetores, com base em formas multilineares alternadas. Uma versão mais formal dessa definição pode ser encontrada em (RAMIS; DESCHAMPS; ODOUX, 1993, p. 346).

sentação alternativa que simplifica o tratamento de outros objetos como sistemas lineares, transformações lineares, formas bilineares, entre outros, confere a elas um papel importante nas disciplinas de Álgebra Linear. No entanto, existiram outras práticas consistentes em que as matrizes não eram essenciais e não tinham a mesma importância de hoje, como veremos na parte histórica (Seção 3.1).

No nível básico, o ensino de matrizes e determinantes é ainda mais delicado. Podemos dizer que as matrizes são ensinadas para o cálculo de determinantes e para a resolução de sistemas lineares. No entanto, a maioria dos exemplos de sistemas lineares pode ser resolvida manipulando as próprias equações sistema. Assim, os alunos não devem ver sentido algum em aprender matrizes e determinantes, muito menos em fazer contas com esses objetos.

Giraldo e Roque (ibid.) argumentam que um aspecto essencial do *conhecimento pedagógico de conteúdo*, em referência a (SHULMAN, 1986), é a constituição de uma *visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos* e sugerem que a história da matemática pode contribuir para constituir tal visão ao revelar as demandas e tensões que impulsionaram a gênese dos conceitos. Para melhor explicar as ideias de Giraldo e Roque (2014), vamos apresentar as categorias para *o conhecimento do professor* introduzidas por Lee Shulman, bem como algumas contribuições importantes para a pesquisa sobre os saberes necessários para o ensino e a formação do professor de matemática.

O **conhecimento pedagógico de conteúdo** é uma das categorias apresentadas por Lee Shulman para o conhecimento do professor, acerca do conteúdo e com o próposito do ensino, no artigo *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching* (SHULMAN, 1986), que se tornou uma referência nas pesquisas em Educação Matemática nas linhas de formação de professores e saberes docentes, apesar de o texto não ser direcionado ao ensino de matemática. No mesmo artigo, Shulman distinguiu mais duas categorias para o conhecimento do professor: **conhecimento disciplinar de conteúdo** ou **conhecimento de conteúdo** e **conhecimento curricular**[40].

[40]No Brasil, as categorias acima também são conhecidas como *saber de conteúdo*, *saber pedagógico de conteúdo* e *saber de currículo.* De acordo com (RANGEL, 2015), ambos os termos *saber* e *conhecimento* são admitidos como tradução da língua inglesa para a portuguesa e são entendidos como sinônimos em dicionários tradicionais da língua portuguesa. Essa pesquisadora aponta também que a literatura em Educação Matemática, às vezes, estabelece diferença entre os dois termos. Optamos por utilizar o termo *conhecimento* no lugar de *saber* por uma questão de

O **conhecimento de conteúdo** se refere ao conhecimento *de* e *sobre* a disciplina, isto é, ao conteúdo *per se*. Shulman (1986, p. 9) menciona que esse conhecimento inclui compreender as *estruturas substantivas* e *estruturas sintáticas* da disciplina. As primeiras correspondem às variedades de formas que conceitos e princípios básicos de uma disciplina são organizados, enquanto as segundas são identificadas à gramática da disciplina e correspondem ao conjunto de regras que determinam o que é legítimo e o que pode violar as regras dentro de um certo domínio disciplinar. Em matemática, as estruturas substantivas incluem, além dos conceitos: procedimentos, propriedades, entre outros; já as estruturas sintáticas incluem: uma compreensão dos padrões de evidência, dos métodos de demonstração, entre outros.

O **conhecimento pedagógico de conteúdo** corresponde a um conhecimento *sobre* o conteúdo *para o ensino*. Não se identifica ao conhecimento de conteúdo e nem ao conhecimento pedagógico puros, mas se articula a partir deles. Esse tipo de conhecimento inclui as formas de representação mais úteis, as analogias mais potenciais para o ensino, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, isto é, as estratégias que tornam um determinado conteúdo mais facilmente ensinável aos alunos (Ibid., p. 9).

O **conhecimento curricular** se refere ao conhecimento dos programas e orientações para o ensino, de acordo com cada nível de escolaridade, bem como dos recursos didáticos adequados (e os que não o são) para ensinar determinado tópico. Envolve ainda ser capaz de fazer articulações verticais ou horizontais nos conteúdos curriculares.

Dentre as categorias acima, que foram ampliadas em outro artigo também clássico (SHULMAN, 1987), o pesquisador destaca o *conhecimento pedagógico de conteúdo* identificando-o ao corpo do conhecimento próprio para o ensino como a combinação entre conteúdo e pedagogia:

> Ele representa a combinação entre conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como certos tópicos, problemas e questões são organizadas, representadas e adaptadas para os diversos interesses e habilidades dos aprendizes, e apresentadas para instrução.[41].(SHULMAN, 1987, p. 8)

---

preferência, sem qualquer intenção de distingui-los.

[41]No original: It represents the blending of content and pedagogy into a understanding of how

Uma contribuição central de Shulman foi a ênfase colocada no papel do conteúdo no ensino, que alterou o cenário das pesquisas sobre o conhecimento do professor. Antes de seus trabalhos, as pesquisas focavam aspectos gerais do ensino, sem muita relevância para o papel do conteúdo (BALL; THAMES; PHELPS, 2008). A falta de atenção para a importância do conhecimento de conteúdo disciplinar como um aspecto importante e que integra o conhecimento do professor foi denominada por Shulman como o *paradigma perdido*.

Deborah Ball, em um artigo que também se tornou uma referência na pesquisa em Educação Matemática, examinou o conhecimento de conteúdo[42] sobre o tópico divisão em um estudo envolvendo dezoito estudantes de cursos de formação de professores de matemática nos Estados Unidos (BALL, 1988), equivalentes à nossa licenciatura. No texto, a pesquisadora considera dois aspectos desse conhecimento: o *conhecimento substantivo*[43] e *um conhecimento* **sobre** *matemática*. Esse último é descrito como:

> [...] conhecimento sobre matemática inclui compreensão sobre a natureza do conhecimento na disciplina - de onde vem, como muda e como a verdade é estabelecida; a centralidade relativa de ideias diferentes, bem como o que é convencional ou socialmente acordado em matemática versus o que é necessário ou lógico[44]. (BALL, 1988, p. 4)

Ambos os aspectos citados por Ball têm relação com as *estruturas substantiva* e *sintáticas* de uma disciplina - no nosso caso, matemática - mencionadas em (SHULMAN, 1986).

As categorias introduzidas por Shulman sofreram revisões na literatura em Educação Matemática desde 1986. Uma das críticas a essas categorias, apresentada na revisão bibliográfica realizada por Letícia Rangel em sua tese de doutorado, é que a noção de conhecimento pedagógico de conteúdo passa a ideia de um corpo de

---

particular topics, problems or issues are organized, represented, and adapted to the diverses interests and abilities of learners, and presented for instruction. (SHULMAN, 1987, p. 8)

[42]No original: subject matter knowledge.

[43]No original: substantive knowledge.

[44]No original: Knowledge about mathematics includes understandings about the nature of knowledge in the discipline - where it comes from, how it changes, and how truth is established; the relative centrality of different ideas, as well as what is conventional or socially agreed upon in mathematics versus what is necessary or logical. (BALL, 1988, p. 4)

conhecimento predeterminado, a ser alcançado pelo professor, mais do que um processo de construção - (GRAEBER; TIROSH, 2008), conforme citado por (RANGEL, 2015, p. 43).

Ball e colaboradores apresentaram um refinamento da noção de conhecimento pedagógico de conteúdo por meio da noção de **conhecimento de matemática para o ensino**[45] (RANGEL, 2015; BALL; THAMES; PHELPS, 2008). Dessa forma, a ênfase passa a ser colocada no uso do conhecimento *para o ensino*, isto é, na prática do professor, mais do que *sobre o professor* propriamente dito:

> Por "conhecimento de matemática para ensino", nós entendemos o conhecimento de matemática necessário para realizar o trabalho de ensino de matemática. Importante notar aqui que a definição começa com ensino, não com professores. Tem relação com as tarefas envolvidas em ensinar e as demandas matemáticas sobre essas tarefas[46]. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395, tradução nossa, grifo no original)

Para ilustrar sua abordagem, que se baseia na prática do professor, Ball, Thames e Phelps (2008) apresentam o seguinte exemplo que mostra que as demandas matemáticas necessárias para o ensino são substanciais:

Subtração A	Subtração B	Subtração C
307	307	307
-168	-168	-168
139	261	169

Figura 2.3: Exemplos de subtrações em (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

Para verificar que a subtração A está correta e as subtrações B e C estão erradas, basta efetuar a conta (Figura 2.3). No entanto, na atividade de ensinar, o professor precisa ir além e analisar os erros nas subtrações B e C. No cálculo realizado em B, é provável que o aluno tenha realizado uma subtração entre o maior algarismo e o

[45]No original: content knowledge for teaching.

[46]No original: By "mathematical knowledge for teaching", we mean the mathematical knowledge needed to carry out the work of teaching mathematics. Important to note here is that definition begins with teaching, not teachers. It is concerned with the tasks involved in teaching and the mathematical demands of these tasks. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008, p. 395)

menor, em cada casa decimal (por exemplo: $8 - 7 = 1$, $6 - 0 = 6$ e $3 - 1 = 2$). O resultado mostrado na subtração C sugere que o aluno obteve o algarismo 9 a partir do cálculo de $17 - 8$, indicando que 1 “foi emprestado” de 3. Assim, o algarismo 1 em 169 teria resultado de $2 - 1$. O aluno que realizou a subtração C parece não ter compreendido bem o processo de decomposição envolvido e o valor posicional dos algarismos. Ball, Thames e Phelps (2008) argumentam que o professor precisa ter um tipo de conhecimento de matemática diferente do citado conhecimento de conteúdo.

No Brasil, muitas pesquisas sobre formação de professores e os saberes necessários para o professor de matemática se amparam nos trabalhos de Shulman, de Ball e de seus colaboradores. Uma revisão bibliográfica bastante detalhada pode ser encontrada em (RANGEL, 2015). Recentemente, foi lançado um livro que reúne algumas pesquisas brasileiras sobre o saber do professor de matemática (ROQUE; GIRALDO, 2014).

As ideias de Giraldo e Roque (2014), acerca da contribuição da história para constituir uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos, inserem-se na discussão sobre os saberes docentes em matemática. Segundo esses pesquisadores, conhecer as sutilezas genéticas encapsuladas na apresentação atual dos conceitos e articulá-las ao ensino é *um aspecto essencial do conhecimento pedagógico de conteúdo*. No artigo citado, Giraldo e Roque ilustram suas ideias a partir do conceito de função, com base em uma crítica à lacuna existente entre a abstração e generalidade da definição de função e o estreito repertório de exemplos que são apresentados no ensino, geralmente, funções afins e quadráticas. Esses pesquisadores também se baseiam em uma análise histórica dos desenvolvimentos que levaram à necessidade de se definir formalmente uma função, entre eles, a necessidade de explorar exemplos variados de funções que não podiam ser definidas por expressões analíticas, como funções definidas por mais de uma expressão, funções descontínuas em todos os pontos, funções contínuas que não são deriváveis em nenhum ponto etc. Seus argumentos são ilustrados por uma proposta que combina tecnologia com a história, sendo que a história não é usada diretamente. A proposta apresentada consiste em explorar aspectos qualitativos de funções racionais, como o comportamento assintótico, em ambientes gráficos, os quais permitem lidar com exemplos de funções mais variados que uma abordagem convencional dificultaria.

Não é nosso objetivo propor uma nova maneira de ensinar matrizes e determinantes como intencionaram Giraldo e Roque (2014) com o conceito de função. No entanto, o entendimento de que o ensino de matrizes apresenta esse tópico de forma naturalizada foi um dos fatores que motivaram sua escolha para desenvolver uma proposta de ensino com uma abordagem histórica.

Voltemos às ideias de (ROQUE, 2014) sobre a contribuição da história da matemática para desfazer ou questionar a opacidade dos objetos matemáticos. Quatro momentos históricos são apresentados por Roque com o objetivo de discutir alguns pressupostos escondidos sob a notação simbólica com a qual as equações são enunciadas e resolvidas: *um problema babilônico*, *a álgebra árabe*, *a Arte Analítica de Viète* e *as grandezas em Descartes*. A partir da descrição das práticas matemáticas de cada um desses momentos, Roque refuta, por exemplo, que o objeto equação é necessário para resolver problemas numéricos. Esses problemas podem ser resolvidos por outros métodos, como fizeram os babilônios, empregando procedimentos geométricos de completar o quadrado[47] na resolução de problemas, que hoje reconheceríamos como de equações do 2º grau, sem o uso de simbolismo algébrico. Roque sugere que esses momentos históricos sejam utilizados no ensino para sensibilizar alunos e professores da existência de pressupostos mascarados pelo objeto equação e, com isso, buscar um sentido para esse conceito.

Estamos de acordo com Roque (2014) que a história pode contribuir para revelar certos aspectos dos conceitos matemáticos escondidos sob as definições e sob a forma atual do discurso que os apresenta de forma naturalizada. Em particular, nossa proposta resgata dois momentos históricos da noção de matriz (Seção 3.1) e mostram como os objetos matriz e determinante eram utilizados antes de se constituírem nos objetos que conhecemos hoje. As ideias de Roque (2014) e as ideias de Giraldo e Roque (2014) têm mais um ponto em comum: o recurso à história da matemática visando resgatar práticas matemáticas em que o conceito em questão seja usado de modo distinto do que conhecemos hoje e com outras finalidades. Tudo isso levou-nos a pensar se e como nossa proposta poderia contribuir para desenvolver uma visão

[47]O procedimento geométrico empregado pelos babilônios em problemas que hoje resolveríamos com equações do 2º, bem como as práticas matemáticas descritas nos outros três momentos históricos são mais detalhadamente explicados em (ROQUE, 2012).

desnaturalizada sobre esses objetos.

Como vimos acima, o exemplo apresentado por Giraldo e Roque (2014) para romper com a visão naturalizada dos conceitos matemáticos não faz uso direto da história da matemática, isto é, sua proposta não consiste em ensinar história das funções. Já a proposta de (ROQUE, 2014) para desfazer a opacidade dos objetos matemáticos requer o uso direto da história. No entanto, Roque não discute como suas ideias podem ser aplicadas em uma atividade de ensino. Entendemos que expor práticas matemáticas do passado a professores e estudantes, por si só, não é suficiente para desenvolver uma visão desnaturalizada. É necessário orientar o desenvolvimento de uma interpretação histórica adequada das práticas do passado. Para isso, pareceu-nos interessante usar o conceito de **consciência histórica**, que abordaremos na próxima seção. Na verdade, vamos propor a constituição de uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos por meio do desenvolvimento de uma consciência histórica. Na próxima seção, explicamos essa opção e apresentamos a metodologia que fornecerá parâmetros para essa parte da investigação.

2.5 Consciência histórica

O fato de que nossa proposta promove um conhecimento histórico sobre matrizes, bem como as ideias de Roque (2014) e de Giraldo e Roque (2014) discutidas na seção anterior, levaram-nos a investigar a possibilidade do desenvolvimento de uma **consciência histórica** nos estudantes com vistas à constituição de uma visão desnaturalizada dos conceitos de matriz e determinantes. Para isso, inspiramo-nos na conceituação apresentada pelo historiador e filósofo alemão Jörn Rüsen (1938-), cujos trabalhos versam sobre a Teoria da História (RÜSEN, 2001).

Antes de descrever como Rüsen define "consciência histórica", é interessante apresentar sua perspectiva sobre o que é a história. A história não é vista como uma realidade pronta e completa para ser apreendida e apropriada (RÜSEN, 2001, p. 67). Além disso, nem tudo o que aconteceu antes, seja com o homem ou com o mundo, é história só porque já aconteceu. Um determinado evento torna-se história quando "se torna presente, como passado, em um processo consciente de rememoração"(ibid., p. 68). Para Rüsen, a história é uma forma elaborada de memória, que "trama as peças do passado rememorado em uma unidade temporal aberta para o futuro, oferecendo às pessoas uma interpretação da mudança temporal"(ibid., p. 164).

Assim, a história não se relaciona só com o passado, mas também com o presente e, por meio desse, com o futuro. De acordo com Assis (2010), uma singularidade na teoria de Rüsen é a articulação dessa relação entre passado, presente e futuro com o significado filosófico de *sentido*:

> [...] as histórias de fato remetem ao passado de grupos humanos, mas fazem-no, sobretudo, por estarem interessadas em extrair "um sentido para o presente". Histórias têm ou constituem sentido quando, desde uma situação presente, explicitam os processos que atam o passado de um grupo humano ao seu futuro. (ASSIS, 2010, p. 19)

Rüsen explica o que significa pensar historicamente por meio do conceito de **consciência histórica**, o qual é descrito como: "a suma das operações mentais com as quais os homens interpretam sua experiência da evolução temporal de seu mundo e de si mesmos, de forma tal que possam orientar, intencionalmente, sua vida prática no tempo."(RÜSEN, 2001, p. 57). Assim, a consciência histórica não se resume a um conhecimento sobre o passado, sendo entendida como um processo mental segundo o qual o homem interpreta o passado movido por uma necessidade de compreender as transformações que o cercam:

> "O homem necessita estabelecer um quadro interpretativo do que experimenta como mudança de si mesmo e de seu mundo, ao longo do tempo, a fim de poder agir nesse decurso temporal, ou seja, assenhorar-se dele de forma tal que possa realizar as intenções de seu agir."(RÜSEN, 2001, p. 57)

Rüsen organiza em quatro grupos os procedimentos mentais básicos envolvidos na consciência histórica (RÜSEN, 2009, p. 168):

- A percepção de "um outro" tempo como diferente, o que permite definir com clareza o passado, na sua diferença e distanciamento do presente.
- A interpretação desse tempo como um movimento temporal no mundo humano, de acordo com alguns aspectos compreensíveis. Rüsen cita a "evidência

da permanência de certos valores, tais como exemplos de regras gerais, o progresso" (ibid., p. 168). Em nosso entendimento, a interpretação do passado orienta-se por perspectivas que têm ligação com as experiências do presente. Assim, a interpretação busca, a partir da distinção entre passado e presente, conexões de significados e sentidos com a realidade presente.

- A orientação da ação humana pela interpretação histórica. É o que integra a história interpretada no fluxo da experiência presente, como capaz de orientar as ações do futuro.

- A motivação para a ação que uma orientação oferece. Rüsen apresenta como exemplo a predisposição a um sacrifício e afirma que é nesta etapa que a consciência histórica conduz ao futuro.

Apoiaremo-nos na definição apresentada por Rüsen para a noção de consciência histórica, mas teremos como referencial metodológico a *abordagem das múltiplas perspectivas* como proposto por Kjeldsen e seus colaboradores (KJELDSEN; PETERSEN, 2014; JANKVIST; KJELDSEN, 2011) para *investigar a possibilidade de desenvolvimento de uma consciência histórica*. Desse modo, não orientaremos o desenvolvimento de uma consciência histórica segundo os grupos de operações mentais apresentados acima.

Jankvist e Kjeldsen (2011, p. 836), sem se basearem na definição de Rüsen (ibid.), descrevem o que eles entendem por desenvolver uma consciência histórica em um "sentido qualificado", apontando a reflexão sobre a prática matemática como uma premissa para isso:

> A habilidade de refletir sobre sua própria prática matemática e a dos outros a partir de diferentes ângulos é uma premissa para desenvolver consciência histórica em um sentido qualificado, isto é, para adquirir *insights* sobre, por um lado, como os matemáticos pensavam e agiam em diferentes contextos intelectuais, em diferentes momentos e, por outro lado, como isso muda ao longo do tempo e das culturas[48].

[48]No original: The ability to reflect upon one's own and other's mathematical practices from different angles is a premise for developing historical awareness in a qualified sense, i.e. acquiring insights into, on the one hand, how mathematicians have thought and acted in different intellectual contexts at different times, and on the other hand, how this have changed over time and through cultures. (JANKVIST; KJELDSEN, 2011, p. 836)

A *abordagem das múltiplas perspectivas* desempenha um papel relevante no desenvolvimento de uma consciência histórica, fornecendo diferentes ângulos para interpretar práticas matemáticas do passado. Baseados nessa abordagem, Kjeldsen e Petersen (2014) investigaram o desenvolvimento de uma consciência histórica sobre o conceito de função, em um experimento com alunos que estavam cursando um nível equivalente ao ensino médio brasileiro (*high school*). As perspectivas que nortearam o estudo das fontes históricas foram: i) as forças impulsionadoras no desenvolvimento da matemática e ii) a influência dos atores na formação dos conceitos matemáticos. Dentre os recursos que os pesquisadores utilizaram nos trabalhos com os estudantes, eles citaram: roteiros de atividades, extratos de fontes primárias com as definições de função por Euler e Dirichlet; fontes secundárias incluindo livros de história da matemática (*A History of Mathematics* de Katz (2009) foi citado) e artigos sobre a história das funções.

Em relação à perspectiva das forças impulsionadoras no desenvolvimento da matemática, Kjeldsen e Petersen (ibid.) tiveram como foco o debate sobre o problema das cordas vibrantes, que atuou como uma força impulsionadora externa no desenvolvimento do conceito de função. A segunda perspectiva, a influência dos atores na formação dos conceitos matemáticos, foi explorada pela questão da receptividade de alguns matemáticos contemporâneos a Euler à definição mais abrangente apresentada por ele para satisfazer as condições iniciais da corda[49]. A abordagem das múltiplas perspectivas norteou a seleção do material usado no experimento e, também, a análise dos dados que se pautou em investigar o desenvolvimento de uma consciência histórica nos estudantes segundo as perspectivas acima. Kjeldsen e seus colaboradores (JANKVIST; KJELDSEN, 2011; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) não se basearam na definição de Rüsen (2001).

Entendemos que para constituir uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos com base na história da matemática, não basta expor os estudantes a episódios do desenvolvimento dos conceitos. A noção de consciência histórica de Rüsen (2001) clama por uma interpretação do passado com vistas à constituição de um sentido para compreender as transformações que nos cercam e fazer projeções

[49]Para saber mais sobre a influência do problema das cordas vibrantes no desenvolvimento do conceito de função, bem como sobre as definições de função apresentadas por Euler, veja (ROQUE, 2012).

para o futuro. A interpretação adequada de episódios matemáticos do passado pode levar os estudantes a compreenderem o que está por trás das escolhas do discurso atual, das definições matemáticas atuais e do papel que os objetos matemáticos têm hoje na matemática. Desse modo, propomos um caminho para a constituição de uma visão desnaturalizada por meio do desenvolvimento de uma consciência histórica. Para isso, a abordagem das múltiplas perspectivas pode contribuir, fornecendo diferentes ângulos para orientar a interpretação histórica.

Os episódios históricos explorados em nossa proposta (Seção 3.1) possibilitam resgatar o problema que suscitou a introdução da noção de matriz, as demandas que influenciaram diferentes interpretações dessa noção nesses episódios, bem como o que levou à definição das operações com matrizes do modo como conhecemos hoje. Além disso, o primeiro episódio mostra que os determinantes eram amplamente usados, antes da introdução de matriz. Desse modo, estabelecemos as seguintes perspectivas que orientarão nossa investigação sobre o desenvolvimento de uma consciência histórica:

- **Os objetos matemáticos não são eternos.**
- **Os objetos matemáticos não são iguais para todos.**

A escolha das perspectivas acima justifica-se pela nossa finalidade de que as interpretações históricas elaboradas pelos estudantes sejam voltadas para constituir uma visão desnaturalizada dos conceitos de matriz e de determinante. A visão naturalizada promovida pelo ensino apresenta os objetos matemáticos como entidades imutáveis e atemporais. Sendo a matemática vista como uma atividade dinâmica, seus objetos são criados dentro de práticas específicas, situadas no tempo e no espaço. Como consequência, **os objetos matemáticos não são eternos**, eles têm um início e são criados por algum motivo. Além disso, **eles não são iguais para todos**, podendo adquirir interpretações distintas ao longo de diferentes episódios de pesquisa, ou mesmo, sofrer modificações em sua definição, como ocorreu com o conceito de função. Observamos que a segunda perspectiva diz respeito às mudanças que uma noção matemática pode sofrer ao longo do seu desenvolvimento histórico, até adquirir o *status* de objeto matemático e tornar-se mais ou menos estável, passando a fazer parte do discurso matemático. Isso não impede que o mesmo objeto volte a sofrer modificações.

Optamos por enunciar as perspectivas de um modo mais geral, no entanto, elas foram consideradas por meio do caso particular da história das matrizes. Essas perspectivas influenciaram o planejamento dos roteiros de ensino, dentre outros fatores que também contaram para planejá-los, como por exemplo, as metarregras que seriam exploradas.

A partir das ideias apresentadas nesta e na última seção, nosso segundo objetivo é investigar a possibilidade de desenvolvimento de uma **consciência histórica**, direcionada à formação de uma **visão desnaturalizada** dos conceitos de matriz e determinante.

2.6 Questões de pesquisa

Tendo como aporte a fundamentação teórica apresentada neste capítulo, nosso estudo têm como objetivos:

- promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes (SFARD, 2008; KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014), por meio de conflitos comognitivos planejados com base em fontes históricas, a fim de que:
  - os estudantes percebam e se conscientizem das metarregras segundo as quais eles se orientam quando lidam com matrizes e determinantes e
  - os estudantes percebam e revejam suas concepções (SFARD, 1991) sobre matrizes e determinantes.
- investigar a possibilidade de desenvolvimento de uma **consciência histórica** (RÜSEN, 2001), direcionada à formação de uma **visão desnaturalizada** (GIRALDO; ROQUE, 2014) dos conceitos de matriz e determinante.

Este trabalho tem, portanto, como foco uma proposta que articula a história da matemática ao ensino de matrizes. As questões de pesquisa que direcionam de forma mais específica nosso estudo, são:

QP1: Como fontes históricas possibilitam promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, a partir de conflitos comognitivos?

QP2: Qual o impacto das reflexões sobre as metarregras nas concepções dos estudantes sobre matrizes e determinantes?

QP3: Que contribuições o estudo trouxe para o desenvolvimento de uma consciência histórica nos estudantes?

Ao longo da pesquisa, um estudo piloto foi realizado com um grupo de professores de matemática visando testar o material de ensino e os instrumentos de geração de dados para responder à primeira questão. Resultados parciais foram apresentados em (BERNARDES; ROQUE, 2014). A experiência com o estudo piloto contribuiu para refinar a primeira questão de pesquisa e para estabelecermos os percursos da análise de dados. Além disso, essa primeira experiência suscitou o interesse em investigar as concepções dos estudantes sobre matrizes e determinantes. Mais dois estudos de campo foram realizados com estudantes de licenciatura em matemática de duas universidades a fim de conduzir a investigação e fornecer uma base para respondermos às questões de pesquisa acima.

Visando responder à primeira questão de pesquisa, pretendemos investigar reflexões tanto sobre as metarregras históricas, isto é, aquelas que governaram o discurso das fontes primárias (Seção 3.3), quanto as metarregras reveladas pelos participantes durante o estudo. Também pretendemos investigar que conflitos se manifestaram e como foram percebidos pelos participantes (Seção 6.1). Reflexões sobre metarregras foram encorajadas por meio de atividades específicas, denominadas *atividades históricas*, conforme (KJELDSEN; PETERSEN, 2014). Essas atividades foram baseadas em extratos e resumos das fontes históricas sobre matrizes disponibilizados em dois roteiros de ensino (Seção 4.3).

Mario S. Aguilar (2010) propõe, em sua tese de doutorado, considerar o conceito de *reflexão* como uma atividade cognitiva, um processo mental pelo qual ações, crenças, conhecimento ou sentimentos são conscientemente considerados e examinados. Contudo, reflexões podem ser externadas, compartilhadas ou confrontadas por meio de discussões. Em nosso caso, entendemos as reflexões como um processo mental consciente, em que as metarregras são percebidas, examinadas e entendidas como ações do fazer matemático que mudam com o tempo. Desse modo, esperamos que, com as reflexões, os participantes percebam e se conscientizem das suas próprias metarregras. Na revisão bibliográfica de sua tese, Aguilar (ibid.) aponta os instrumentos indicados pela literatura em educação matemática para detectar reflexões: relatos escritos, discussões em grupo, entrevistas e questionários (AGUILAR, 2010, p. 77). O registro por escrito das respostas dos participantes às atividades históricas, realizadas em grupos, e a gravação em áudio das discussões enquanto eles realizavam as atividades forneceram evidências para ilustrar reflexões sobre metarregras.

Visando responder à segunda questão de pesquisa, identificamos algumas concepções dos participantes sobre matrizes e determinantes antes da intervenção e ao final. Analisamos as mudanças e se as reflexões sobre as metarregras influenciaram tais mudanças (Seção 6.2). Os dados que forneceram a base para a análise foram obtidos a partir de entrevistas semiestruturadas, conduzidas no início e no fim da intervenção.

Visando responder à terceira questão, investigamos o desenvolvimento de uma consciência histórica (Seção 6.3), por parte dos participantes do estudo, a partir de duas perspectivas: i) os objetos matemáticos não são eternos e ii) os objetos matemáticos não são iguais para todos. Os dados utilizados na análise foram gerados a partir das entrevistas semiestruturadas finais, de um questionário aplicado ao final da intervenção e de um pequeno artigo produzido pelos participantes.

Capítulo 3

História das matrizes

Ao se comparar a ordem de exposição de alguns conceitos matemáticos com a ordem na qual os mesmos surgiram na história, é comum perceber uma inversão. A noção de matriz surgiu depois das noções de determinantes, sistemas lineares, transformações lineares, formas quadráticas e de autovalores, ou seja, a ordem inversa na qual são apresentados hoje na disciplina de Álgebra Linear.

O termo matriz foi introduzido pelo matemático inglês James Joseph Sylvester, em 1850, em um artigo dedicado a um problema de natureza geométrica (SYLVESTER, 1850a). Oito anos depois, Arthur Cayley, contemporâneo e amigo de Sylvester, publicou uma memória na qual definiu as operações com matrizes e enunciou as propriedades dessas operações (CAYLEY, 1858).

Apesar dos trabalhos de Sylvester e de Cayley sobre matrizes, bem como de outros que se seguiram, os tratados de álgebra só passaram a adotar a representação matricial em seus textos a partir do final do século e a linguagem matricial só se popularizou a partir de 1920.

Frédéric Brechenmacher (2006b, p. 6,7) aponta os fatores que influenciaram a adoção da notação matricial nos tratados de álgebra nos anos 1920-1930: i) A eficiência de uma notação em permitir a apresentação de teoremas gerais de forma mais compacta e o valor pedagógico de uma representação apresentada como simples; e ii) o desenvolvimento e a aplicação de uma série de procedimentos operatórios relacionados à representação matricial que fundaram o caráter unificador dessa representação. Veremos, neste capítulo, o desenvolvimento de dois desses procedimentos: uma combinatória de extração de submatrizes e o cálculo simbólico de potências de matrizes.

A teoria das matrizes fez parte do processo da formalização, unificação e generalização de métodos para resolver problemas (hoje ditos) lineares em domínios anteriormente distintos, o que culminou na constituição da disciplina Álgebra Linear nos anos 1930. Antes disso, os objetos, problemas e métodos hoje reconhecidos como pertencentes ao domínio da Álgebra Linear eram vistos como pertencentes a domínios distintos, como a teoria das formas bilineares, a teoria dos determinantes e mesmo uma "teoria das matrizes".

Neste capítulo, apresentamos dois episódios da história das matrizes à luz da interpretação histórica de Frédéric Brechenmacher. Esse historiador da matemática discutiu as diferentes identidades e significações que a noção de matriz assumiu dentro das práticas elaboradas por Sylvester, Cayley e Edward Weyr, entre 1850 e 1890 (BRECHENMACHER, 2006b). Explicaremos algumas das práticas dos dois primeiros matemáticos.

Kjeldsen (2009) indica o uso dos conceitos de **objetos epistêmicos** e **técnicas epistêmicas** para comparar episódios de pesquisa, com respeito à gênese ou ao desenvolvimento histórico de uma noção. Assim, apresentamos esses conceitos neste capítulo e fazemos uma releitura dos episódios apresentados, à luz desses conceitos, com o objetivo de investigar os papeis que a noção de matriz adquiriu em cada episódio. A releitura parte do filtro histórico de Brechenmacher.

Não é nosso objetivo fazer a história da noção de matriz neste trabalho, o que demandaria uma pesquisa mais aprofundada na historiografia. Para promover reflexões sobre as metarregras do discurso, precisamos destacar as diferenças entre as metarregras que moldaram os discursos do passado e aquelas que moldam o discurso de hoje. Essas diferenças são mais aparentes em fontes históricas secundárias que se baseiam na concepção da matemática como uma prática, como é o caso dos trabalhos de Brechenmacher (2006a), Brechenmacher (2006b), o que justifica nossa opção pela interpretação histórica desse pesquisador.

Finalizamos este capítulo apresentando algumas regras metadiscursivas observadas nos discursos de Sylvester e Cayley, que foram exploradas nos estudos de campo conduzidos durante a pesquisa.

3.1 Os trabalhos de Sylvester e Cayley como descritos por Brechenmacher

A parte histórica da pesquisa se apoia principalmente nas ideias apresentadas no artigo *Les Matrices: formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930)* (BRECHENMACHER, 2006b). Esse trabalho se baseia na concepção da matemática como uma prática ou um conjunto de práticas e leva em conta os contextos sociais, culturais e intelectuais dentro dos quais as atividades matemáticas são desenvolvidas.

A metodologia utilizada constrói uma rede de textos representada graficamente por nós e ligações entre esses nós. De acordo com esse pesquisador, o processo se inicia com a escolha de um momento de referência. No caso da história das matrizes, os anos 1930 foram escolhidos. A partir daí, faz-se uma pesquisa bibliográfica de todas as referências nos tratados publicados nos anos 1920-1930. Esse primeiro *corpus* de textos, em seguida, é completado por um esgotamento das referências bibliográficas, o que permitiu fixar o período de 1850 a 1930. Em seguida, é feito um recorte com base na maneira como os textos e autores do período considerado se organizam em redes (BRECHENMACHER, 2006b, p. 8).

O gráfico representa as relações mantidas por diferentes textos de uma rede, o que permite visualizar a existência de pontos de convergência, de nós e o entrelaçamento das referências bibliográficas (Figura 3.1). Cada nó representa um autor que pertence à rede e as ligações representam algum tipo de relação, seja utilizar a mesma prática ou se basear na prática de algum outro matemático em comum. A partir do gráfico, vemos que alguns nós se destacam, como Sylvester, Cayley, Weyr e Frobenius. No artigo citado, Brechenmacher detalha as práticas ligadas a matrizes dos três primeiros matemáticos.

Dentre outros historiadores que se dedicaram à história das matrizes, citamos Thomas Hawkins. Em um artigo publicado em 2008, Hawkins mencionou rapidamente a origem da "álgebra simbólica de matrizes" sendo introduzida independentemente por três matemáticos: Cayley em 1858, Edmond Laguerre na França em 1867 e Georg Frobenius na Alemanha em 1877 (HAWKINS, 2008). O foco do artigo está em dois problemas resolvidos por Frobenius com o emprego da álgebra matricial, que são apresentados em notação moderna. A origem das matrizes é discutida por esse pesquisador como se essa noção tivesse as mesmas significações para os matemáticos envolvidos e sem levar em conta as especificidades das práticas matemáticas de cada um. Esse tipo de abordagem dificulta a identificação das metarregras envolvidas no discurso dos matemáticos do passado uma vez que as diferenças não são destacadas.

Brechenmacher, em sua abordagem, discute as diferenças nas práticas matemáticas de Sylvester e Cayley ligadas à noção de matriz. Isso proporcionou-nos um primeiro olhar sobre como esses matemáticos interpretavam seus objetos de estudo, sobre que ferramentas foram empregadas por eles e como eles as empregavam. Logo, sua abordagem possibilitou identificar algumas metarregras nos discursos desses matemáticos.

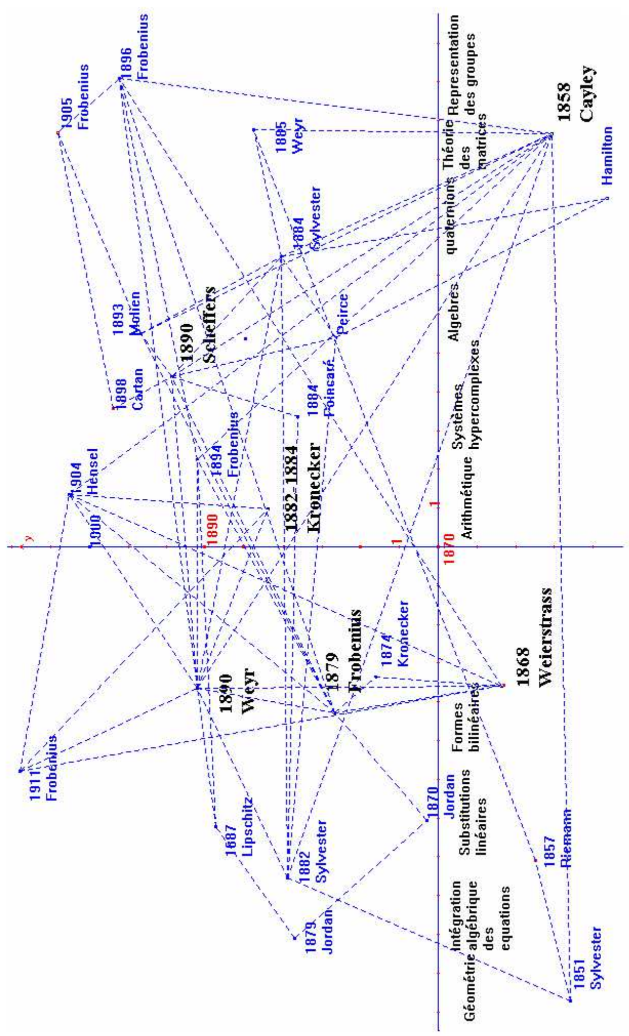


Figura 3.1: Rede de textos apresentada em (BRECHENMACHER, 2006b, p. 49).

3.1.1 Episódio de pesquisa I: Sylvester e o problema dos contatos

Sylvester (1814-1897) nasceu em Londres. Durante sua formação, sofreu preconceitos pela sua origem judia. Foi retirado pela família da *London University*, devido a uma tentativa de ferir um colega com uma faca no refeitório. Em seguida, foi para a *Royal Institution* em Liverpool, em 1829, onde novamente não se estabeleceu devido a referências constantes contra sua origem judia (PARSHALL, 1998; CAYLEY, 1889).

Em 1831, quando finalmente havia se estabelecido no *St John's College*, em Cambridge, ficou doente três vezes por um longo período, o que o afastou dos estudos. Em 1837, ele fez os exames do *Mathematical Tripos*[1] ficando em segundo lugar (*Second Wrangler*). No entanto, devido sua origem judia, ele não recebeu o título correspondente (PARSHALL, 1998).

No ano seguinte, Sylvester foi admitido para uma cadeira de filosofia no *University College London* (fundada como *London University*), a primeira instituição na Inglaterra livre de organização religiosa. Ao longo da sua carreira, atuou em cadeiras de matemática em outras universidades na Inglaterra. Esteve nos Estados Unidos por dois períodos de sua vida. Na primeira vez, como professor de matemática na *University of Virginia* por quase cinco meses e, na segunda vez, na *The Johns Hopkins University* em Baltimore, começando no ano de 1876. Em 1883, ocupou a cadeira de *Savilian Professor of Geometry* em Oxford, uma posição de destaque na Universidade de Oxford.

Sylvester foi um matemático bastante ativo: esteve ligado a várias academias de ciências (nos Estados Unidos, Göttingen, Naples, Boston, St Petersburg, Berlim, para citar algumas), ganhou prêmios em reconhecimento a contribuição de suas pesquisas (*Royal Medal* (1860), *Copley Medal* (1880) e *De Morgan Gold Medal* (1887)). Foi o primeiro editor do *American Mathematical Journal* e um grande contribuidor desse periódico.

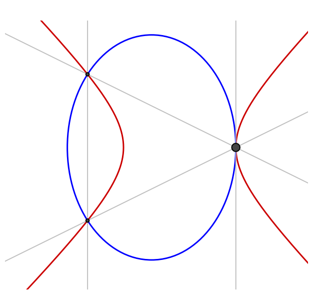
As publicações do (também) autor de poemas e sonetos estão reunidas em quatro volumes no *The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester* e abrangem

[1] O *Mathematical Tripos* era um exame de matemática pelo qual todos os estudantes tinham que passar independente da formação, antes de se especializarem em um campo de interesse (CRILLY, 2011).

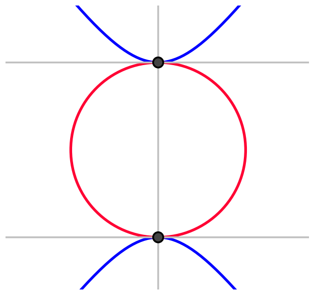
assuntos sobre análise finita, álgebra, determinantes, teoria da eliminação, teoria das equações, teoria das partições, teoria das formas, teoria dos invariantes e covariantes, matrizes, números hamiltonianos, etc .

Entre 1850 e 1851, Sylvester publicou uma série de artigos analisando a natureza dos pontos de interseções (reais/complexos, finitos/infinitos) entre duas cônicas e os *tipos de contatos* entre duas cônicas e entre duas quádricas (SYLVESTER, 1850a; SYLVESTER, 1850b; SYLVESTER, 1851a, 1851a). Delimitaremos o episódio da pesquisa de Sylvester de acordo com os artigos (SYLVESTER, 1850a; SYLVESTER, 1850b; SYLVESTER, 1851a), tendo como foco **o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas**, o qual nos referiremos daqui em diante como **o problema dos contatos**.

O termo **contato** era empregado para designar os pontos de interseção em que duas cônicas se tangenciam[2]. Existem quatro tipos de contatos que podem ser caracterizados pela multiplicidade[3] (2, 3 ou 4) do(s) ponto(s) de interseção no(s) qual(is) as cônicas se tangenciam[4] (Figuras 3.2 e 3.3):



(a) Contato simples



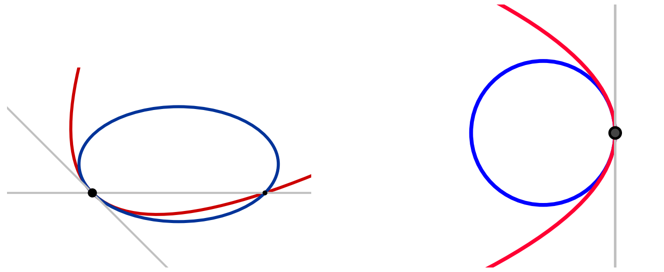
(b) Contato diplóide

Figura 3.2: Contato simples (*simple contact*): um ponto de interseção duplo. Contato diplóide (*diploidal contact*): dois pontos de interseção duplos.

[2]Nos pontos de interseção em que duas cônicas se tangenciam, as retas tangentes a cada curva no ponto em questão são coincidentes. Dito de outra forma: escrevendo a equação que representa uma cônica como $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ e considerando o ponto $P(x_0, y_0)$ como sendo o ponto de contato, a derivada implícita de y em relação a x em cada curva $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ é igual no ponto P.

[3]O termo "multiplicidade" utilizado em referência aos pontos de interseção das cônicas se refere ao conceito algébrico de *índice de interseção*, o qual generaliza a noção intuitiva de contar o número de vezes que duas curvas algébricas se intersectam em um ponto. No Apêndice A, apresentamos uma definição formal desse conceito, com base no livro de Israel (VAINSENCHER, 2005).

[4]De acordo com o Teorema de Bézout, o número de pontos de interseção, contados com multiplicidade, de duas curvas planas projetivas, sem fatores irredutíveis em comum, é igual ao produto entre os graus de cada uma das curvas (VAINSENCHER, 2005, p. 62). No nosso caso, as cônicas projetivas têm 4 pontos de interseção, contados com multiplicidade.



(a) Contato próximo (b) Contato confluente

Figura 3.3: Contato próximo (*proximal contact*): um ponto de interseção triplo. Contato confluente (*confluent contact*): um ponto de interseção quádruplo.

Como afirma Brechenmacher (2006b), a principal contribuição de Sylvester em sua abordagem, em relação aos trabalhos de outros matemáticos sobre o mesmo problema, foi o recurso ao cálculo de determinantes.

As cônicas eram representadas por meio de equações homogêneas de segundo grau com três variáveis, por exemplo:

$$U : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0,$$

com coeficientes reais. O polinômio homogêneo no lado esquerdo da equação era considerado a *característica* da cônica. Observamos que Sylvester estava lidando com cônicas projetivas.

No artigo (SYLVESTER, 1850b), publicado no *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Sylvester investigou a natureza dos pontos de interseção entre duas cônicas U e V e os tipos de pontos de contatos. Ele partia da equação cúbica em μ obtida ao igualar a zero o determinante de $U + \mu V$ (veja Figura 3.4), ou na notação de Sylvester: $\square(U + \mu V) = 0$.

Quando as raízes μ de $|U + \mu V| = 0$ são distintas, não há pontos de contato. Em caso de ocorrência de raízes duplas ou triplas (com multiplicidade algébrica 2 ou 3, respectivamente), há pontos de contato.

Em linguagem atual, se
$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz=0$ e $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=0$
são as equações homogêneas das cônicas U e V, respectivamente:

$$U+\mu V=(a+\mu A)x^2+(b+\mu B)y^2+(c+\mu C)z^2+2(d+\mu D)xy+2(e+\mu E)xz+2(f+\mu F)yz$$

é uma família de cônicas que passam pelos mesmos pontos de interseção de U e de V. Usando nossa notação:

$$|U+\mu V|=\begin{vmatrix} a+\mu A & d+\mu D & e+\mu E \\ d+\mu D & b+\mu B & f+\mu F \\ e+\mu E & f+\mu F & c+\mu C \end{vmatrix}.$$

Figura 3.4: Quadro explicativo da prática de Sylvester.

Conhecendo a existência de quatro tipos de contatos, a análise da multiplicidade das raízes de $|U+\mu V|=0$ se revelou um critério insuficiente para contemplar todos os casos. Para estabelecer as condições que distinguem dois tipos de contatos no caso de raiz dupla e no caso de raiz tripla, Sylvester comparou os fatores comuns no desenvolvimento polinomial de um outro determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2W}{d\xi^2} & \frac{d^2W}{d\xi d\eta} & \frac{d^2W}{d\xi d\varsigma} & p \\ \frac{d^2W}{d\eta d\xi} & \frac{d^2W}{d\eta^2} & \frac{d^2W}{d\eta d\varsigma} & q \\ \frac{d^2W}{d\varsigma d\xi} & \frac{d^2W}{d\varsigma d\eta} & \frac{d^2W}{d\varsigma^2} & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix}$$

$$=Ap^2+Bq^2+Cr^2+2Fqr+2Grp+2Hpq,$$

onde todos os coeficientes são funções quadráticas de μ e faça

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ F=0,\ G=0,\ H=0;$$

cada uma dessas seis equações em μ terá uma e a mesma raiz em comum[5].(SYLVESTER, 1850b, p. 273-274)

Na citação acima, Sylvester estava discutindo as condições para o caso de contato diplóidel[6]. Dentro desse quadro de resolução de um problema geométrico, em que condições eram estabelecidas para classificar os tipos de contatos entre duas cônicas, Sylvester introduziu as noções de **determinantes menores**, em outro artigo publicado no mesmo ano, no *Philosophical Magazine*:

> Imagine qualquer determinante colocado sob a forma de um arranjo ordenado quadrado de termos. Esse quadrado pode ser considerado como divisível em linhas e colunas. Agora suponha que qualquer linha e qualquer coluna possa ser eliminada, nós obtemos dessa forma um quadrado, um termo a menos em largura e em profundidade que o quadrado original; e por variar em qualquer maneira possível a seleção da linha e da coluna excluídos, nós obtemos, suponha que o quadrado original possua n linhas e n colunas, n^2 quadrados menores, cada um dos quais representará o que eu denomino um **Primeiro Determinante Menor** relativo ao determinante principal ou completo. Agora suponha que duas linhas e duas colunas sejam eliminadas do quadrado original, nós obtemos um sistema de $\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$ quadrados (...) Esses constituem o que eu chamo de um sistema de **Segundos Determinantes Menores;** e assim, em geral, nós podemos formar um sistema de r-ésimos determinantes menores pela exclusão de r

[5]No original:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2W}{d\xi^2} & \frac{d^2W}{d\xi d\eta} & \frac{d^2W}{d\xi d\varsigma} & p \\ \frac{d^2W}{d\eta d\xi} & \frac{d^2W}{d\eta^2} & \frac{d^2W}{d\eta d\varsigma} & q \\ \frac{d^2W}{d\varsigma d\xi} & \frac{d^2W}{d\varsigma d\eta} & \frac{d^2W}{d\varsigma^2} & r \\ p & q & r & 0 \end{vmatrix}$$

$$= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Fqr + 2Grp + 2Hpq,$$

where all the coefficients are quadratic functions of μ [se referindo a $W = U + \mu V$], and make

$$A = 0,\ B = 0,\ C = 0,\ F = 0,\ G = 0,\ H = 0;$$

each of these six equations in μ will have one and the same root in common. (SYLVESTER, 1850b, p. 273-274)

[6]Observamos que os coeficientes A, B, C, D, E, F, G, H acima podem ser expressos por meio dos determinantes menores de ordem 2×2. Sendo D_{ij} o menor obtido pela eliminação da linha i e da coluna j, o determinante acima pode ser expresso por: $D_{11}p^2 + D_{22}q^2 + D_{33}r^2 + 2D_{12}pq + 2D_{13}pr + 2D_{23}qr$.

> linhas e r colunas, e um tal sistema, *em geral*, conterá
>
> $$\left\{\begin{matrix} n(n-1)\ldots(n-r+1) \\ 1.2\ldots r \end{matrix}\right\}^2$$
>
> determinantes distintos[7]. (SYLVESTER, 1850a, p. 147, tradução nossa, grifo nosso).

No mesmo artigo, propriedades sobre os determinantes menores foram enunciadas e, em seguida, aplicadas para classificar o tipo de contato entre duas cônicas. A prática desenvolvida por Sylvester consistia em comparar os fatores comuns no desenvolvimento polinomial do determinante completo $|U + \mu V|$ e nos primeiros determinantes menores:

> Sejam agora U e V características de duas cônicas, isto é, cada uma, uma função de somente três letras, pode ser mostrado [...] que as diferentes espécies de contatos entre essas duas cônicas corresponderão a propriedades peculiares da característica composta $U + \mu V$.
>
> Se o determinante dessa função tem duas raízes iguais, as cônicas simplesmente se tocam; se ele tem três raízes iguais, as cônicas têm um contato simples de mais alta ordem, isto é, de mesma curvatura; se seus seis primeiros determinantes menores se anulam simultaneamente para o mesmo valor de μ, as cônicas têm um contato duplo. Se o mesmo valor de μ, o qual torna todos esses primeiros menores iguais a zero, for ao mesmo tempo não apenas uma raiz dupla mas uma raiz tripla de
>
> $$\square(U + \mu V) = 0,$$

[7] Imagine any determinant set out under the form of a square array of terms. This square may be considered as divisible into lines and columns. Now conceive any one line and any one column to be struck out, we get in this way a square, (...) and by varying in every possible manner the selection of the line and column excluded, we obtain, (...), n^2 such minors squares, each of which will represent what I term a First Minor Determinant relative to the principal or complete determinant. Now suppose two lines and two columns struck out from the original square, we shall obtain a system of $\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$ squares, each two terms lower than the principal square, and representing a determinant of one lower order than those above referred to. These constitute what I term a system of Second Minor Determinants; and so in general we can form a system of rth minor determinants by the exclusion of r lines and r columns, and such system *in general* will contain

$$\left\{\begin{matrix} n(n-1)\ldots(n-r+1) \\ 1.2\ldots r \end{matrix}\right\}^2$$

distinct determinants.(SYLVESTER, 1850a, p. 147) então as cônicas têm um contato simples da mais alta ordem possível, quase uma coincidência absoluta, isto é, eles se encontram em quatro pontos consecutivos[8]. (SYLVESTER, 1850a, p. 148, tradução nossa)

Resumimos a estratégia de Sylvester na Tabela 3.1. Do ponto de vista geométrico, o procedimento algébrico que possibilita classificar o tipo de contato tem relação direta com os tipos de cônicas degeneradas pertencentes à família $U + \mu V$, as quais ocorrem nas raízes μ de $|U + \mu V| = 0$.

Tipo de contato	**Determinante completo**	**Fatores comuns nos menores**
Não há contatos	$(\mu - a)(\mu - b)(\mu - c)$	1
Contato simples	$(\mu - a)^2(\mu - b)$	1
Contato diplóide	$(\mu - a)^2(\mu - b)$	$(\mu - a)$
Contato próximo	$(\mu - a)^3$	1
Contato confluente	$(\mu - a)^3$	$(\mu - a)$

Tabela 3.1: Classificação dos tipos de contatos.

Cada caso de multiplicidade da raiz μ, acarreta cônicas degeneradas de diferentes tipos (retas distintas/coincidentes, tangentes ao(s) ponto(s) de contato(s) ou não)[9]:

Seja agora $\square(U + \lambda V)$ tendo todas as suas raízes iguais. Essa condição será satisfeita [...] por fazer

$$U = x^2 + yz + yx$$
$$V = ax^2 + ayz + byx.$$

Aqui, **somente um par distinto de retas podem ser desenhadas contendo as interseções**, mostrando que três dos seus

[8]No original: Now let U and V be characteristics of two conics, that is, let each be a function of only three letters, it may be shown (see my paper* in the *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* for November, 1850) that the different species of contacts between these two conics will correspond to peculiar properties of the compound characteristic $U + \mu V$.

If the determinant of this function have two equal roots, the conics simply touch; if it have three equal roots, the conics have a single contact of a higher order, that is, the same curvature; if its six first minors become zero simultaneously for the same value of μ, the conics have a double contact. If the same value of μ, which makes all these first minors zero, be at the same time not merely a double root (as of analytical necessity it always must be) but a treble root of

$$\square(U + \mu V) = 0,$$

then the conics have a single contact of the highest possible order short of absolute coincidence, that is, they meet in four consecutive points. (SYLVESTER, 1850a, p. 148)

[9]Para mais detalhes, veja (BRECHENMACHER, 2006b, p. 54).

> quatro pontos coincidem. Isto pode ser denominado "Contato Próximo"[10]. (SYLVESTER, 1851a, p. 224, grifo nosso)

A citação acima é um extrato do artigo publicado em 1851, no *Philosophical Magazine*, no qual Sylvester parte das propriedades da "característica composta" $U + \mu V = 0$ e chega às características de U e V.

Sylvester estendeu o método para classificar os tipos de contatos entre duas cônicas baseado na comparação do desenvolvimento polinomial dos menores para investigar as interseções entre duas quádricas (representadas por equações homogêneas de grau 2 a quatro variáveis) e, de forma mais geral, entre duas formas quadráticas (n variáveis). A generalização da técnica de extração de sistemas de determinantes menores foi baseada em uma representação em forma de tabela retangular à qual Sylvester denominou *matriz* (BRECHENMACHER, 2006b, p. 14):

> (...) nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isto não representará em si mesmo um determinante, mas, uma **Matriz** da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p, e selecionar quaisquer p linhas e p colunas, os quadrados correspondendo ao que pode ser chamado de determinantes de p-ésima ordem[11]. (SYLVESTER, 1850a, p. 150, tradução nossa, grifo nosso)

A noção de matriz, em Sylvester, é associada "a uma prática específica que articula a extração de menores a uma decomposição polinomial para resolver o problema colocado pela existência de raízes múltiplas"(BRECHENMACHER, 2006b, p. 16).

Observamos que, no artigo em que a noção de matriz foi introduzida, não foi apresentada uma representação em forma de tabela. Em outro artigo, publicado

[10]No original: Now let $\square(U + \lambda V)$ have all its roots equal. This condition will be satisfied [...] by making

$$U = x^2 + yz + yx$$
$$V = ax^2 + ayz + byx.$$

Here only one distinct pair of lines can be drawn to contain the intersections, showing that three out of the four points come together. This may be termed "Proximal Contact". (SYLVESTER, 1851a, p. 224)

[11](...) we must commence, not with a square, but with an oblong arrangement of terms consisting, suppose, of m lines and n columns. This will not in itself represent a determinant, but is, as it were, a Matrix out of which we may form various systems of determinants by fixing upon a number p and selecting at will p lines and p columns, the square corresponding to which we may be termed determinants of the p^{th} order. (SYLVESTER, 1850a, p. 150)

em 1851 no *Philosophical Magazine*, Sylvester fala novamente sobre o problema dos contatos, sem empregar matrizes diretamente. Em uma nota de rodapé, uma certa matriz quadrada é mencionada em conexão com o determinante de uma *função binária*:

> (...) a teoria das funções quadráticas se mistura a uma teoria mais ampla de funções binárias, consistindo da soma de múltiplos de produtos binários formados por combinar cada um do conjunto de quantidades x, y e z ... com cada um do mesmo número de quantidades do conjunto x', y' e z' ... Por exemplo,
>
> $$axx' + bxy' + cxz'$$
>
> $$+a'yx' + b'yy' + c'yz'$$
>
> $$+a''zx' + b''zy' + c''zz'$$
>
> seria uma função binária e seu determinante (não mais, como em uma função quadrática, simétrico sobre dua diagonal) corresponderia à matriz quadrada
>
> $$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}.$$
>
> (SYLVESTER, 1851a, p. 222, tradução nossa)[12]

[12]No original: the theory of quadratic functions merges in a larger theory of binary functions, consisting of the sum of the multiples of binary products formed by combining each of one set of quantities x, y, z, ... with each of the same number of quantities of another set, as x', y', z' ... For instance,

$$axx' + bxy' + cxz'$$
$$+a'yx' + b'yy' + c'yz'$$
$$+a''zx' + b''zy' + c''zz'$$

would be a binary function, and its determinant (no longer, as in a quadratic function, symmetrical about either diagonal) would correspond to the square matrix

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}.$$

(SYLVESTER, 1851a, p. 222)

3.1.2 Episódio de pesquisa II: Cayley e o cálculo simbólico com matrizes

Cayley (1821-1895) também foi um matemático inglês. Nasceu em Richmond, Londres. Passou os primeiros sete anos de sua vida em St. Petersburg, onde seu pai foi um comerciante bem sucedido e onde aprendeu o idioma francês[13].

Em 1842, Cayley obteve o título de *Senior Wrangler*, que designava a melhor colocação nos exames do *Mathematical Tripos*, no *Trinity College Cambridge*. Sem a indicação para um cargo de professor de matemática em uma universidade, Cayley se dedicou à lei, como advogado, durante cerca de 14 anos. Paralelamente, manteve sua dedicação à pesquisa. Em 1863, foi eleito para a posição de *Sadleirian Professor* de Matemática Pura da Universidade de Cambridge (o primeiro a assumir essa posição), cadeira que manteve pelo resto de sua vida.

Cayley também esteve nos Estados Unidos por um período de seis meses, em 1882, atendendo a um convite para ministrar um curso na *Johns Hopkins University*, em Baltimore, onde Sylvester era professor. Eles tiveram estreitas relações de amizade e desenvolveram trabalhos em colaboração[14]. Nas memórias de Sylvester, citadas na Seção 3.1.1, encontram-se algumas menções a Cayley reconhecendo sua contribuição. As suas publicações estão reunidas em 13 volumes nos *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*[15], elas versam sobre temas em geometria analítica, transformações lineares, matrizes, determinantes, teoria dos invariantes, teoria das equações, cálculo, funções homogêneas, equações diferenciais, teoria dos grupos etc. Ele recebeu algumas honras em reconhecimento à sua pesquisa como a *Royal Medal* em 1859, a *Copley Medal* em 1882, a *De Morgan Medal* em 1884.

A generalização da prática de extração de sistemas de determinantes menores para determinantes de qualquer ordem colocou o problema de enumeração desses sistemas, o que chamou a atenção de Cayley para a noção de matriz e o levou a publicar três artigos sucessivos em 1855 (BRECHENMACHER, 2006b). A noção de matriz foi utilizada por Cayley, pela primeira vez, no artigo *Remarques sur la*

[13]As informações apresentadas sobre a biografia de Cayley foram, principalmente, baseadas em (FORSYTH, 1895). Andrew R. Forsyth foi o sucessor de Cayley na cadeira de Professor de Matemática Pura de Cambridge e foi o editor da coletânia de artigos de Cayley.

[14]Cayley e Sylvester lançaram as bases para a teoria dos invariantes. (BRECHENMACHER, 2006b, p. 16)

[15]Todos eles podem ser acessados na biblioteca digital ⟨http://archive.org/index.php⟩

notation des functions algébriques (Notas sobre a notação das funções algégricas), no qual ele introduziu uma notação para matriz, como sendo prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas.

> Eu uso a notação
>
> $$\left|\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{array}\right|$$
>
> para representar o que eu chamo de matriz, ou seja, um sistema de quantidades arranjadas em forma de quadrado, mas totalmente independentes (eu não falo aqui de matrizes retangulares). Essa notação me parece muito cômoda para a teoria das equações lineares; eu escrevo, por exemplo:
>
> $$(\xi, \eta, \zeta, \dots) = \left(\left|\begin{array}{cccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \dots \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \dots \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \dots \\ \vdots & & & \end{array}\right| \right)(x, y, z, \dots)$$
>
> para representar o sistema de equações
>
> $$\begin{array}{ccccccccc} \xi & = & \alpha x & + & \beta y & + & \gamma z & \dots, \\ \eta & = & \alpha' x & + & \beta' y & + & \gamma' z & \dots, \\ \zeta & = & \alpha'' x & + & \beta'' y & + & \gamma'' z & \dots, \end{array}$$
>
> (CAYLEY, 1855, p. 185, tradução nossa)[16]

> [...] e daí por
>
> $$\left(\left|\begin{array}{cccc} a, & h, & g, & \dots \\ h, & b, & f, & \dots \\ g, & f, & c, & \dots \\ \vdots & & & \end{array}\right| \right)(x, y, z)^2$$

[16]Nesta seção, as citações mais extensas não serão apresentadas na língua original.

a função quadrática

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy \ldots$$

(CAYLEY, 1855, p. 187, tradução nossa)

Em 1858, Cayley publicou uma memória sobre matrizes: *A Memoir on the Theory of Matrices* (CAYLEY, 1858). Nela, ele descreve o que é uma matriz, define as operações com matrizes, enuncia as propriedades das operações, enuncia e demonstra um resultado a que ele se refere como “teorema notável” e apresenta aplicações desse resultado. Delimitaremos o episódio da pesquisa de Cayley por essa memória.

Na primeira página da memória, Cayley apresenta uma definição para o termo matriz:

> O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas nesta memória eu considero somente matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz sem qualificação deve ser interpretado como uma matriz quadrada; nesse sentido restrito, um conjunto de quantidades arranjadas na forma de um quadrado,
>
> $$\begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\ a\ ,\ \ b\ ,\ \ c\ )} \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{array}$$
>
> é dito ser uma matriz. A noção de matriz surge naturalmente a partir de uma notação abreviada para um conjunto de equações lineares, ou seja, as equações
>
> $$\begin{array}{lcccccc} \mathbf{X} & = & ax & + & by & + & cz \\ \mathbf{Y} & = & a'x & + & b'y & + & c'z \\ \mathbf{Z} & = & a''x & + & b''y & + & c''z\ldots, \end{array}$$
>
> podem ser simplesmente representadas por
>
> $$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\ a\ ,\ \ b\ ,\ \ c\ )} \\ a'\ , & b'\ , & c' \\ a''\ , & b''\ , & c'' \end{array} (x, y, z)$$
>
> e a consideração de um tal sistema conduz às noções mais fundamentais na teoria das matrizes. (CAYLEY, 1858, p. 17, tradução

nossa).

Como mostra o trecho acima, Cayley descreve matriz como “um conjunto de quantidades organizadas em forma de quadrado”[17] e, novamente, associa a noção de matriz a uma notação “cômoda” de um conjunto de equações lineares. Na página seguinte, a notação acima é explicada como um conjunto de “funções lineares”:

> 2. A notação
>
> $$\begin{array}{l} (\ a\ ,\ \ b\ ,\ \ c\ )(x,y,z) \\ \left| \begin{array}{l} a',\ \ b',\ \ c' \\ a'',\ b'',\ c'' \end{array} \right| \end{array}$$
>
> representa o conjunto de funções lineares
>
> $$\big(\,(a,\ b,\ c)(x,y,z)\,,\big(a',\ b',\ c'\big)(x,y,z)\,,\big(a'',\ b'',\ c''\big)(x,y,z)\,\big),$$
>
> chamando-as de $(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z})$, temos
>
> $$\begin{array}{rl} (\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = & (\ a\ ,\ \ b\ ,\ \ c\ )(x,y,z) \\ & \left| \begin{array}{l} a',\ \ b',\ \ c' \\ a'',\ b'',\ c'' \end{array} \right| \end{array}$$
>
> (CAYLEY, 1858, p. 18, tradução nossa)

Notemos que, apesar de inicialmente Cayley se referir a **sistemas de equações**, ao explicar a notação, ele se refere a um **conjunto de funções lineares**. Não parecia necessitar da diferença reconhecida hoje entre sistemas de equações lineares e transformações lineares. Vale mencionar que a expressão “transformações lineares” era bastante utilizada por Cayley, apesar de não ser empregada na memória de 1858. Alguns artigos são dedicados a transformações lineares, por exemplo, (CAYLEY, 1845).

Voltando à primeira página da memória, logo após definir matriz, Cayley faz uma analogia entre matrizes e números, dizendo que matrizes se comportam como quantidades simples (*single quantity*), podendo ser adicionadas e multiplicadas ou compostas.

[17] Cayley anuncia que o termo matriz sem qualificação deverá ser compreendido como matriz quadrada, embora ele também considere matrizes retangulares.

As operações com matrizes são definidas com base na relação entre matrizes e sistemas de equações. A multiplicação de matrizes, por exemplo, é definida a partir da seguinte composição:

> 11. As equações
>
> $$(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; a \;,\; b \;,\; c \;)} \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}(x,y,z)\,, \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; \alpha \;,\; \beta \;,\; \gamma \;)} \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}(\xi,\eta,\zeta)$$
>
> dão
>
> $$(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; A \;,\; B \;,\; C \;)} \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{array}(\xi,\eta,\zeta) = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; a \;,\; b \;,\; c \;)} \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; \alpha \;,\; \beta \;,\; \gamma \;)} \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}(\xi,\eta,\zeta)$$
>
> (CAYLEY, 1858, p. 20)

Em seguida, Cayley apresenta o resultado da "composição de matrizes" como:

$$\begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\;(a,\,b,\,c)(\alpha,\alpha',\alpha''),\; (a,\,b,\,c)(\beta,\beta',\beta''),\; (a,\,b,\,c)(\gamma,\gamma',\gamma'')\;)} \\ (a',b',c')(\alpha,\alpha',\alpha''), & (a',b',c')(\beta,\beta',\beta''), & (a',b',c')(\gamma,\gamma',\gamma'') \\ (a'',b'',c'')(\alpha,\alpha',\alpha''), & (a'',b'',c'')(\beta,\beta',\beta''), & (a'',b'',c'')(\gamma,\gamma',\gamma'') \end{array} = \begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; a \;,\; b \;,\; c \;)} \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{array}\begin{array}{|ccc|} \multicolumn{3}{c}{(\; \alpha \;,\; \beta \;,\; \gamma \;)} \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{array}.$$

A matriz nula e a matriz unidade (identidade) são definidas antes das operações. Após definir as operações com matrizes, Cayley enuncia as propriedades das operações. Ele menciona a não validade da comutatividade para a multiplicação ou composição de matrizes e a validade da associatividade, dentre outras propriedades, e apresenta a noção de matriz inversa ou recíproca.

De acordo com Brechenmacher, a historiografia considera essa memória como um dos primeiros trabalhos sobre a teoria das álgebras associativas, enfatizando as leis das operações sobre as matrizes. No entanto, a motivação inicial de Cayley teria sido um problema já abordado por Charles Babbage: **determinar a expressão das funções homográficas de periodicidade dada**, ou seja, encontrar $\phi(x) = \dfrac{ax+\alpha}{bx+\beta}$ tal que $\phi^n(x) = x$ (BRECHENMACHER, 2006b).

Outro ponto levantado por Brechenmacher diz respeito ao *teorema notável*, em torno do qual a teoria das matrizes é desenvolvida, anunciado na primeira página da memória:

> Obtenho um **teorema notável** de que qualquer matriz satisfaz uma equação algébrica de sua própria ordem, o coeficiente da maior potência sendo a unidade e, os das outras potências, funções dos termos da matriz, o último coeficiente sendo, de fato, o determinante;[18] (CAYLEY, 1858, p. 17, grifo nosso)

Mais da metade da memória é dedicada a aplicações do teorema notável: determinar uma matriz periódica e de ordem dada, conhecendo-se a periodicidade (isto é, determinar uma matriz de ordem n satisfazendo $M^p = I$ para algum valor de p dado) e determinar todas as matrizes que comutam com uma matriz dada (isto é, dada a matriz M, determinar as matrizes L que satisfazem $ML = LM$).

Cayley faz uma observação no final da memória mencionando Babbage como já tendo investigado o problema da expressão das funções homográficas de periodicidade dada e relacionando as aplicações apresentadas com esse problema. Babbage fez parte de uma geração de matemáticos da primeira metade do século XIX cuja corrente de pensamento foi designada como escola algébrica inglesa[19]. A abordagem dessa escola tinha como ponto forte um simbolismo algébrico. Segundo Brechenmacher (2006b, p. 19), os problemas do cálculo de potências e raízes de matrizes retomam uma preocupação tradicional dessa escola, após os trabalhos de Herschell, em 1813, sobre a notação dos operadores diferenciais e a propriedade $f^n(f(x)) = f^{n+1}(x)$.

A prática elaborada para resolver o problema de exprimir as potências e raízes de uma matriz se baseia em uma **dupla interpretação da noção de matriz**: ora como um **sistema de números**, ora como uma **quantidade simples** (single quantity). Logo após definir a operação de multiplicar uma matriz por um número, Cayley introduziu a noção de *matriz como uma quantidade simples*.

[18]No original: I obtain a remarkable theorem that any matrix whatever satisfies an algebraical equation of its own order, the coefficient of the highest power being unity, and those of the other powers functions of the terms of the matrix, the last coefficient being in fact the determinant; (CAYLEY, 1858, p. 17)

[19]Os principais matemáticos associados a essa corrente são G. Peacock, D. F. Gregory, A. de Morgan, W. R. Hamilton e G. Boole. (BRECHENMACHER, 2006b, p. 19).

> 10. Nós temos, em particular,
>
> $$m\begin{array}{c} (\ 1,\ 0,\ 0\ ) \\ \left|\begin{array}{ccc} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{c} (\ m,\ 0,\ 0\ ) \\ \left|\begin{array}{ccc} 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{array}\right| \end{array}$$
>
> ou, trocando a matriz no lado esquerdo pela unidade, podemos escrever
>
> $$m = \begin{array}{c} (\ m,\ 0,\ 0\ ) \\ \left|\begin{array}{ccc} 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{array}\right| \end{array}$$
>
> A matriz no lado direito é dita ser **a matriz quantidade simples** m **considerada como envolvendo a matriz unidade.**[20](CAYLEY, 1858, p. 20, tradução nossa, grifo nosso)

Na demonstração do "teorema notável", Cayley interpreta a matriz dada M ora como uma quantidade múltipla ora como uma quantidade simples, ou seja, ora como uma matriz, ora como um número:

> O teorema geral mencionado será melhor compreendido pelo desenvolvimento completo de um caso particular. Imagine uma matriz
>
> $$M = \begin{array}{c} (\ a,\ b) \\ \left|\begin{array}{cc} c, & d \end{array}\right| \end{array}$$
>
> e forme o determinante
>
> $$\left|\begin{array}{cc} a - M, & b \\ c, & d - M \end{array}\right|,$$

[20]No original: 10. We have, in particular,

$$m\begin{array}{c} (\ 1,\ 0,\ 0\ ) \\ \left|\begin{array}{ccc} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{array}\right| \end{array} = \begin{array}{c} (\ m,\ 0,\ 0\ ) \\ \left|\begin{array}{ccc} 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{array}\right| \end{array}$$

or replacing the matrix on the left-hand side by unity, we may write

$$m = \begin{array}{c} (\ m,\ 0,\ 0\ ) \\ \left|\begin{array}{ccc} 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{array}\right| \end{array}$$

The matrix on the right-hand side is said to be the single quantity m considered as involving the matrix unity. (CAYLEY, 1858, p. 20)

> o desenvolvimento completo da expressão desse determinante é
>
> $$M^2 - (a+d)M^1 + (ad - bc)M^0;$$
>
> [...] e substituindo esses valores o determinante se torna igual à matriz zero [...][21](CAYLEY, 1858, p. 23)

Sobre o determinante formado, Cayley considera que:

$$\begin{array}{|cc|}(a-M, & b \quad\;\;) \\ c, & d-M\end{array} = \begin{array}{|cc|}(\,a\,, & b) \\ c\,, & d\end{array} - M \begin{array}{|cc|}(\,1\,, & 0) \\ 0\,, & 1\end{array}$$

ou seja, a matriz original M, diminuída pela mesma matriz considerada como uma quantidade simples (número), envolvendo a matriz *unidade* (identidade).

Após a demonstração do "teorema notável", são apresentadas as aplicações, sendo a primeira delas o problema de determinar as raízes quadradas de uma matriz quadrada de ordem 2. Com base no mesmo resultado, Cayley desenvolveu uma prática de fatoração de polinômios de matrizes:

> [...]
>
> $$M^2 - (a+d)M + ad - bc = 0$$
>
> e sejam X_i, X_{ii} as quantidades simples, raízes da equação
>
> $$\begin{array}{|cc|}(a-X, & b \quad\;\;) \\ c, & d-X\end{array} = 0,$$
>
> ou
>
> $$X^2 - (a+d)X + ad - bc = 0.$$

[21]No original: The general theorem before referred to will be best understood by a complete development of a particular case. Imagine a matrix

$$M = \begin{array}{|cc|}(\,a\,, & b) \\ c\,, & d\end{array}$$

and form the determinant

$$\left|\begin{array}{cc} a-M, & b \\ c, & d-M\end{array}\right|,$$

the developed expression of this determinant is

$$M^2 - (a+d)M^1 + (ad - bc)M^0;$$

[...] and substituting these values the determinant becomes equal to the matrix zero [...] (CAYLEY, 1858, p. 23)

A equação satisfeita pela matriz pode ser escrita

$$(M - X_i)(M - X_{ii}) = 0$$

[...] à primeira vista, pareceria que nós deveríamos ter um dos fatores simples igual a zero, o que, obviamente, não é o caso, uma tal equação significaria que a matriz perfeitamente indeterminada M seria igual a uma quantidade simples, considerada como envolvendo a matriz unidade. A explicação é que cada um dos fatores simples é uma matriz indeterminada, de fato, $(M - X_i)$ representa a matriz[22]

$$\begin{matrix} (a - X_i, & b &) \\ \Big| & c, & d - X_i\Big| \end{matrix} = 0,$$

(CAYLEY, 1858, p. 26-27)

Na citação acima, Cayley descreveu a fatoração de polinômios em matrizes e discutiu o fato de que um produto de matrizes igual à matriz nula, não implica que qualquer dos fatores do produto seja igual à matriz nula. O termo “indeterminada” é empregado para designar matrizes cujo determinante é nulo, nesse caso, tais matrizes não possuem inversa.

A noção de matriz evoluiu e adquiriu uma nova identidade com a memória de Cayley. As matrizes deixaram de ser consideradas apenas como **geradora de sistemas de determinantes menores** e passam a ser associadas às **leis de um**

[22]No original: [...]

$$M^2 - (a + d)M + ad - bc = 0$$

and let X_i, X_{ii} be the single quantities, roots of the equation

$$\begin{matrix} (a - X, & b &) \\ | & c, & d - X| \end{matrix} = 0,$$

or

$$X^2 - (a + d)X + ad - bc = 0.$$

The equation satisfied by the matrix may be written

$$(M - X_i)(M - X_{ii}) = 0$$

[...] it would at first sight seem that we ought to have one of the simple factors equal to zero, which is obviously not the case, for such equation would signify that the perfectly indeterminate matrix M was equal to a single quantity, considered as involving the matrix unity. The explanation is that each of the simple factors is an indeterminate matrix, in fact $(M - X_i)$ stands for the matrix

$$\begin{matrix} (a - X_i, & b &) \\ | & c, & d - X_i| \end{matrix} = 0,$$

(CAYLEY, 1858, p. 26-27)

cálculo simbólico e a um **teorema notável**. Brechenmacher (2006b) defende que essa nova identidade surgiu para resolver um problema específico, que se situa em um contexto cultural específico, influenciado pela herança deixada pela escola algébrica inglesa.

Trinta anos depois de ter introduzido o termo "matriz", Sylvester passou a conceber as matrizes em referência a Cayley, em seus trabalhos sobre potências e raízes de substituições lineares (transformações lineares) (SYLVESTER, 1882) e em outros.

3.2 Objetos e técnicas epistêmicas

Os conceitos de objetos epistêmicos e técnicas epistêmicas foram adaptados da historiografia das ciências por Moritz Epple a partir dos estudos de Hans-Jörg Rheinberger sobre a prática experimental de biologistas moleculares. Esses conceitos possibilitam descrever e analisar episódios de pesquisa a partir da prática da matemática, contextualizando no tempo e no espaço os objetos e ferramentas envolvidos. Epple interpreta o quadro metodológico desenvolvido por Rheinberger (1997) e propõe uma adaptação para a história da matemática em (EPPLE, 1999), conforme citado por (EPPLE, 2004).

Objetos epistêmicos são os objetos sob investigação no episódio de pesquisa a ser analisado, são as construções intelectuais ou ainda os processos que são referidos como objetos pelos cientistas estudados. Tratam-se de elementos da pesquisa que induzem questões, uma vez que estão sob investigação, porque são parcialmente ou vagamente compreendidos. Já as **técnicas epistêmicas** são os procedimentos, as técnicas que permitem determinar algumas das características dos objetos de pesquisa, possibilitando formular questões precisas sobre os objetos e fornecendo ferramentas para responder às questões colocadas. Em geral, as técnicas são produtos finais de atividades anteriores (EPPLE, 2004).

Para citar um exemplo, vamos considerar o texto *Ars Magna de Cardano*, a partir da tradução de Witmer (1993). Nele, o que está sob investigação são as soluções de equações expressas por radicais, em especial, a solução de equações cúbicas e a apresentação de métodos para transformar equações. Assim, considerando o episódio da pesquisa sobre a resolução de equações por radicais delimitado por esse texto, o objeto epistêmico é composto pelas equações algébricas. Já as técnicas epistêmicas são as regras da álgebra que se aplicam à resolução de equações conhecidas até o momento, bem como as proposições de Euclides empregadas para demostrar essas regras.

Há, ainda, um terceiro conceito, o de **configuração epistêmica**, que diz respeito à totalidade dos recursos intelectuais envolvidos em um episódio de pesquisa. Tais recursos compreendem a linguagem matemática, as técnicas utilizadas, os tópicos de pesquisa e os problemas abertos sob consideração em um episódio, ou seja, todo o horizonte de ideias seguidas pelos pesquisadores envolvidos (EPPLE, 2004, p. 148). Retomando o exemplo de Cardano, a configuração epistêmica inclui, dentre outros elementos, a chamada *arte cossista*[23] de resolver equações, praticada pelos algebristas dos séculos XIV, XV e XVI, a álgebra árabe; bem como as contribuições de Scipione del Ferro, Tartaglia e Ludovico Ferrari na resolução de alguns tipos de equação, citadas pelo próprio Cardano.

De um ponto vista historiográfico, a leitura das fontes a partir dos conceitos de objetos, técnicas e configurações epistêmicas é adequada quando se deseja comparar episódios da pesquisa matemática relacionados a uma determinada noção matemática ou ao desenvolvimento de uma teoria. Seu ponto forte está em ressaltar a dinâmica das configurações epistêmicas, mostrando que os objetos e técnicas epistêmicas não são imutáveis e atemporais, eles são localizados no tempo e no espaço. Isso permite destacar as diferenças ao comparar episódios de pesquisa relacionados a uma mesma noção, que pode ser considerada objeto em um determinado episódio e, mais tarde, se tornar uma técnica de pesquisa. Para darmos mais um exemplo, os logaritmos foram o objeto epistêmico de John Napier e Henri Briggs no início do século XVII e se tornaram uma técnica epistêmica para os astrônomos, como nas tabelas logarítmicas de Johannes Kepler (FAUVEL; GRAY, 1987).

Também pode acontecer que técnicas aplicadas em determinadas situações podem constituir objetos de investigação. Os números complexos e os números negativos ilustram essa situação, pois eram considerados nos passos intermediários

[23] A tradução para o alemão da palavra "coisa" (incógnita) deu origem ao termo "coss", e a prática de resolver equações ficou conhecida como arte "cossista". Ao longo do século XVI, difundiram-se diversos textos "cossistas". Neles, o autor introduzia operações aritméticas e definia a notação que ia usar para as quantidades desconhecidas e suas potências e indicava como realizar operações com essas quantidades. (ROQUE, 2012)

da resolução de equações por Cardano e seus contemporâneos, não sendo aceitos como soluções (ROQUE, 2012). Quando a natureza e o estatuto matemático desses números começaram a ser discutidos, podemos dizer que eles assumiram o papel de objetos epistêmicos, como, por exemplo, com os trabalhos de Argand e de Gauss. Vemos, assim, que objetos e técnicas podem trocar de lugar de um episódio a outro.

Epple (2004) utilizou essa metodologia para analisar duas contribuições influentes na topologia no início do século passado: dois episódios simultâneos da pesquisa matemática sobre a teoria dos nós, cujos principais matemáticos envolvidos foram James W. Alexander e Kurt Reidemeister. Kjeldsen (2009) também aplicou essa metodologia para analisar dois episódios simultâneos da pesquisa matemática, no final do século XIX, associados à origem da teoria da convexidade. O primeiro foi delimitado pelas pesquisas de Karl Hermann Brunn (1862-1939) sobre corpos convexos e o segundo pelas pesquisas de Hermann Minkowski (1864-1909). A interpretação desses episódios, segundo a metodologia em questão, contribuiu para revelar as diferenças nas configurações epistêmicas de cada um, o que permitiu compreender e explicar por que as práticas elaboradas por Minkowski, e não as de Brunn, conduziram ao desenvolvimento da teoria da convexidade (KJELDSEN, 2009). A respeito da aplicabilidade da metodologia, Kjeldsen destaca que os conceitos adaptados por Epple favorecem a distinção entre o modo como os elementos que geram o problema e os elementos que geram as respostas funcionam, interagem e mudam no curso do trabalho de um matemático ou de um grupo de matemáticos.

Os conceitos de objetos e técnicas epistêmicos também foram utilizados em propostas de ensino com abordagens históricas, como (JANKVIST, 2009; KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012). Esses conceitos são usados nesses trabalhos com o objetivo de abrir as fontes, propondo que estudantes identifiquem os objetos sob investigação e as técnicas empregadas nesses textos. Utilizaremos esses conceitos na parte empírica da pesquisa com um objetivo similar.

Antes de partirmos para a releitura dos episódios segundo os conceitos acima, façamos uma comparação entre a abordagem de Brechenmacher e a de Epple. Ambos se baseiam na concepção da matemática como uma prática e preocupam-se em destacar semelhanças e diferenças a partir da comparação de práticas ou episódios de pesquisa. Além disso, ambas as abordagens possibilitam situar no tempo e no espaço as noções matemáticas envolvidas.

Brechenmacher procura situar a noção de matriz dentro do contexto cultural que é próprio de cada episódio, relacionando-a com a prática desenvolvida. Já a perspectiva de Epple possibilita destacar a dinâmica na produção do conhecimento, ao observar as mudanças nos objetos e técnicas ao longo de um ou mais episódios de pesquisa.

Ressaltamos a importância da visão compartilhada pelas abordagens historiográficas acima para o ensino de matemática. Sendo a matemática vista como uma atividade dinâmica, seus objetos são construídos dentro de práticas específicas, situadas no tempo e no espaço. Isso quer dizer que os objetos matemáticos têm um início e podem se alterar ao longo do tempo. Essas ideias constrastam com a visão que é promovida pelo ensino dessa disciplina, que apresenta os objetos matemáticos como entidades imutáveis e atemporais.

3.2.1 Releitura do episódio I

Retomamos aqui o episódio da pesquisa de Sylvester, delimitado pelas publicações que abordam o **o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas**, ou, como temos nos referido, **o problema dos contatos** (SYLVESTER, 1850a; SYLVESTER, 1850b; SYLVESTER, 1851a).

Os tipos de contatos entre duas cônicas foram o principal elemento gerador de questões e, portanto, o objeto epistêmico desse episódio. Apesar de não se tratar de um novo objeto - uma vez que a classificação em quatro tipos de contatos já era conhecida e o problema de identificá-los já havia sido abordado por outros matemáticos como Plücker, em 1828 (BRECHENMACHER, 2006a, p. 10), por métodos analíticos - Sylvester elaborou uma prática que permite identificar os tipos de contatos entre duas cônicas de uma nova maneira, com recurso ao cálculo de determinantes. Esse é um exemplo de episódio de pesquisa onde o objeto sob investigação era conhecido e compreendido em alguma extensão.

Dentre os elementos que contribuíram para gerar respostas ao problema dos contatos, temos os determinantes, a ferramenta chave que permitiu estabelecer os critérios para a classificação. Assim, nesse episódio, os determinantes estão no papel de técnicas epistêmicas. Além disso, a representação das cônicas por equações em coordenadas homogêneas, também contribuiu para gerar respostas, assim, também fazem parte das técnicas epistêmicas nesse episódio da pesquisa de Sylvester.

Os determinantes menores foram introduzidos e propriedades sobre eles foram enunciadas, assim, eles também funcionaram como elementos geradores de questões:

> [...] nós devemos ser capazes de determinar o significado e o efeito de fatores comuns, um ou mais entrando nos sistemas sucessivos de determinantes menores, derivados do determinante completo de $U + \mu V$. (SYLVESTER, 1850a, p. 150, tradução nossa)

Ao mesmo tempo, eles foram os objetos fundamentais da técnica desenvolvida para classificar os tipos de contatos entre duas cônicas. Dessa forma, eles desempenharam o papel de objeto epistêmico e ao mesmo tempo de técnica epistêmica.

As matrizes não foram o objeto de investigação de Sylvester nos trabalhos considerados por nós para delimitar este episódio de pesquisa. Elas foram introduzidas em conexão com a técnica de extração de menores que deixou de se apoiar no determinante completo, para se basear na tabela por trás do determinante, isto é, as matrizes ofereceram uma representação, a partir da qual os menores poderiam ser gerados. Assim, as matrizes contribuíram, em certa medida, para gerar a resposta do problema, isto é, para a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. Logo, a noção de matriz está entre as técnicas epistêmicas do episódio em questão.

A configuração epistêmica de Sylvester compreende os objetos epistêmicos, as técnicas epistêmicas, bem como todo o quadro técnico da geometria analítica, da geometria projetiva e também o das formas quadráticas.

3.2.2 Releitura do episódio II

As matrizes já eram conhecidas por Cayley por meio dos trabalhos de Sylvester e Cayley já havia definido algumas operações com matrizes em memórias anteriores. No entanto, na memória de 1858, elas se tornam seu objeto principal de investigação. A partir das matrizes, questões foram colocadas acerca da possibilidade de formar funções com matrizes (potências, polinômios, raiz quadrada etc.). Além disso, uma prática de fatoração de polinômios com matrizes foi elaborada. Dessa forma, as matrizes funcionaram como o elemento gerador de questões, constituindo-se, portanto, em objeto epistêmico nesse episódio, ou seja, as matrizes adquirem um *status* bem diferente do episódio anterior. Temos aqui mais um exemplo de uma noção que surge no papel de técnica e se torna o objeto epistêmico de outro episódio.

As questões que poderiam ser colocadas sobre as matrizes dependem do método de gerar respostas, isto é, das técnicas epistêmicas, as ferramentas matemáticas pelas quais Cayley investigou seu objeto. São elas: o cálculo simbólico aplicado a "quantidades simples", os determinantes, equações polinomiais e a fatoração de equações polinomiais que foi estendida para matrizes.

A configuração epistêmica na qual Cayley trabalhou inclui todo o quadro técnico das transformações lineares, dentro do qual a matriz passou a representar uma "notação abreviada" e as operações com matrizes foram definidas. A herança deixada pela escola algébrica inglesa também está incluída na configuração epistêmica desse episódio.

3.2.3 Sobre o papel da noção de matriz em cada episódio

Comparando os dois episódios, em ambos o objeto epistêmico era conhecido em alguma extensão. No primeiro, a classificação dos pontos de contato entre duas cônicas em quatro tipos já era conhecida e a identificação do tipo de contato já havia sido tratada anteriormente por métodos analíticos. No segundo, as matrizes já eram conhecidas por Cayley a partir dos trabalhos de Sylvester. Além disso, os dois episódios possuem uma técnica epistêmica em comum: os determinantes. Os determinantes menores surgiram como um objeto epistêmico no primeiro episódio e trocaram de papel no mesmo episódio, ao se tornarem uma técnica para gerar respostas sobre o problema dos contatos.

A diferença mais marcante está no papel das matrizes em cada episódio. Essa noção surgiu em meio às técnicas epistêmicas no primeiro episódio e contribuiu para resolver o problema dos contatos uma vez que a técnica de extração de menores foi baseada em uma representação em forma de tabela, ainda que Sylvester não a tenha usado diretamente. Assim, as matrizes desempenharam o papel de uma técnica epistêmica. No segundo episódio, a noção de matriz se tornou o objeto epistêmico. A memória de 1858 foi intencionalmente dedicada a estudar esse objeto. As matrizes passaram a ser caracterizadas pelas leis de um cálculo simbólico, pelo enunciado do "teorema notável" e pela prática de fatoração de polinômios de matrizes (BRE-

CHENMACHER, 2006b). Elas ofereceram uma nova linguagem, segundo a qual problemas já conhecidos puderam ser tratados de outra forma e novos problemas puderam ser colocados. Outra diferença está nos problemas em torno dos quais as pesquisas de Sylvester e de Cayley se desenvolveram, o que tem relação direta com os objetos epistêmicos, uma vez que as questões de pesquisa- os problemas - são formulados em função desses objetos. Além disso, os problemas em cada episódio demandaram técnicas distintas em busca de soluções. Os objetos epistêmicos são diferentes e, apesar dos determinantes constituírem uma técnica epistêmica comum, as demais técnicas também são diferentes. A configuração epistêmica dentro da qual a pesquisa está inserida influencia seu desenvolvimento bem como a forma com a qual os matemáticos definem os seus objetos de estudo.

As mudanças destacadas acima ilustram como os objetos matemáticos surgem de forma dinâmica e como eles se modificam ao longo do mesmo ou de diferentes laboratórios de pesquisa, o que contribui para desconstruir a visão ainda muito comum dos objetos matemáticos como entidades imutáveis e atemporais.

3.3 Identificando metarregras nos discursos de Sylvester e de Cayley

Nesta seção, explicitaremos algumas metarregras presentes nos discursos de Sylvester e de Cayley com base nos episódios de pesquisa delineados nas seções anteriores. Não faremos uma exposição de todas as metarregras ou rotinas subjacentes às práticas de Sylvester e de Cayley, pois além de demandar uma análise bastante aprofundada dos trabalhos desses matemáticos, isso alongaria esta apresentação desnecessariamente. Escolhemos quatro metarregras para serem exploradas em nossa proposta de ensino. O que determinou a escolha dessas quatro metarregras diante de tantas outras implícitas nos discursos desses matemáticos foi o interesse por aquelas que expressavam ações ou influenciavam concepções sobre determinantes e matrizes notadamente distintas das atuais.

Em (KJELDSEN; PETERSEN, 2014), duas metarregras do passado foram exploradas no *design* de um curso experimental sobre a história do conceito de função: **validade geral da análise** e **generalidade da variável** (veja Seção 2.2). No texto do trabalho, os pesquisadores apresentaram as regras selecionadas como "metarregras históricas". O adjetivo parece ter sido empregado pelo fato de que as metarregras em questão abarcam princípios ou normas, dominantes no século XVIII, reconhecidos e discutidos na historiografia da matemática. De acordo com o argumento teórico de Kjeldsen, regras metadiscursivas no discurso matemático se tornam regras do nível do objeto no discurso histórico, isto é, as mesmas regras que estão implícitas no primeiro discurso se tornam o objeto do segundo ao serem explicitadas nas narrativas desse discurso. Isso sugere que metarregras podem ser identificadas, inicialmente, no discurso histórico, abrindo-se a possibilidade de uma análise do discurso original governado por essas metarregras.

Já em (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012), metarregras do passado foram apontadas diretamente a partir de fontes primárias. Nesse artigo, o argumento teórico de Kjeldsen foi ilustrado com a análise de dois relatórios produzidos por grupos de estudantes da Universidade de Roskilde (veja Seção 2.2). Além das metarregras acima (validade geral da análise e generalidade da variável), outras foram apontadas durante a análise dos relatórios, sendo ilustradas com citações de fontes primárias. Como exemplo, no primeiro relatório, Kjeldsen e Blomhøj mostraram trechos da solução do problema da catenária apresentada por Johann Bernoulli no século XVII, que foi baseada na construção geométrica de uma hipérbole equilátera. Nos dias de hoje, a solução de uma equação diferencial é uma função. Desse modo, uma metarregra acerca do que era entendido como a solução de uma equação diferencial (a construção geométrica de uma curva) foi apontada.

Trazendo um exemplo fora da história da matemática, Güçler (2013) identificou metarregras a partir da análise do discurso de um professor em aulas de cálculo diferencial e da análise do discurso de seus estudantes a partir de entrevistas. A pesquisadora investigou as metarregras relacionadas ao *uso de palavras*, ao uso de *mediadores visuais* e ao modo como algumas narrativas sobre limites eram endossadas (por exemplo, "o limite é um processo", "o limite é um número"). Uma metarregra relacionada ao uso de palavras foi o uso da **metáfora do movimento contínuo** (por exemplo, "quanto mais x se aproxima de 0, mais os valores da função se aproximam de 1") sempre que o professor falava sobre o comportamento de funções no contexto da definição informal de limites e do cálculo de limites. Uma metarregra relacionada ao uso de mediadores visuais foi **traçar gráficos**, empregada sempre que o professor introduzia alguma definição ou enunciava alguma propriedade de limites.

O caminho que traçamos para identificar as metarregras baseia-se no argumento teórico de Kjeldsen, ao afirmar que metarregras implícitas no discurso matemático tornam-se explícitas no discurso histórico. Inicialmente, identificamos quatro metarregras sobre determinantes e matrizes, que governaram os discursos de Sylvester e de Cayley, a partir da interpretação histórica de Brechenmacher (2006b). Em seguida, realizamos uma análise em fontes primárias desses matemáticos (SYLVESTER, 1850a; SYLVESTER, 1851a; SYLVESTER, 1851c; CAYLEY, 1858) com o objetivo de compreender em que rotinas subjacentes às práticas desses matemáticos as metarregras selecionadas se inseriam.

Primeira metarregra no discurso de Sylvester:

Determinantes são ferramentas usadas para investigar propriedades geométricas de curvas e superfícies e são calculados a partir de funções (polinômios homogêneos de grau 2).

Como vimos na Seção 3.1.1, a originalidade de Sylvester está no recurso ao cálculo de determinantes para resolver o problema de identificar os tipos de contatos entre duas cônicas ou duas quádricas. Brechenmacher (2006b, p. 10) expressa uma ideia fundamental subjacente à prática de Sylvester quando diz:

> Estas publicações sucessivas permitiram acompanhar a elaboração progressiva de um método que se caracteriza por uma **tradução de propriedades geométricas ou analíticas dentro do quadro do cálculo de determinantes**[24] (grifo nosso, tradução nossa).

A citação acima faz referência aos artigos publicados sobre o problema dos contatos. Mostramos na Seção 3.1.1, a partir de vários extratos desses artigos, como

[24]No original: Ces publications successives permettent de suivre l'élaboration progressive d'une méthode qui se caractérise par une traduction de propriétés géométriques ou analytiques dans le cadre du calcul des déterminants. (BRECHENMACHER, 2006b, p. 10)

Sylvester empregou determinantes, sem o uso de matrizes, em sua prática para identificar os tipos de contatos entre duas cônicas. Observamos ainda que Sylvester falava em **determinantes de funções**, sendo as funções polinômios homogêneos de grau 2, que representavam as cônicas. Mais especificamente, os coeficientes do polinômio homogêneo $U+\mu V$, em que U e V representam as cônicas cujos pontos de contato serão investigados, eram utilizados no cálculo do determinante dessa função que, por sua vez, resultava em um polinômio cúbico em μ (veja quadro explicativo na Figura **??**):

$$|U+\mu V| = \begin{vmatrix} a+\mu A & d+\mu D & e+\mu E \\ d+\mu D & b+\mu B & f+\mu F \\ e+\mu E & f+\mu F & c+\mu C \end{vmatrix}.$$

De acordo com (SFARD, 2008, p. 201), metarregras estão envolvidas na atividade padronizada de formulação e substancialização (*substantiation*) das regras no nível do objeto, isto é, na elaboração de definições, de classificações, na construção de demonstrações, entre outros. O recurso ao cálculo de determinantes de polinômios homogêneos foi recorrente na atividade de Sylvester de formular o método para identificar os tipos de contatos. Assim, o modo como esse matemático empregou determinantes levou-nos a considerar para este trabalho a metarregra: *determinantes são ferramentas usadas para investigar propriedades geométricas de curvas e superfícies e são calculados a partir de funções (polinômios homogêneos de grau 2).*

Nos dias de hoje, determinantes são definidos no contexto da Álgebra Linear como uma função que associa matrizes quadradas a números e são vistos como propriedades de matrizes quadradas, o que não ocorria antes, uma vez que a noção de matriz surgiu depois de determinantes. Essa mudança no objeto sobre o qual os determinantes passaram a ser calculados se reflete tanto nas regras do nível do objeto quanto nas regras metadiscursivas, as quais passaram a encerrar uma relação de dependência entre matrizes e determinantes que não existia antes.

Em relação às regras do nível do objeto, a definição de determinante passou a ser expressa com base em matrizes quadradas[25]. O mesmo ocorreu com as propriedades

[25]Há a definição de determinante de um operador linear (AXLER, 1997; CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1990) e determinante de um conjunto de vetores (RAMIS; DESCHAMPS; ODOUX, 1993).

dos determinantes. No que diz respeito às regras metadiscursivas, o objeto sobre o qual o determinante é aplicado deixou de ser um polinômio homogêneo, ou uma forma quadrática, e passou a ser uma matriz. Ainda que se deseje utilizar determinantes como uma ferramenta para investigar propriedades de outros objetos matemáticos, eles deverão, antes, ser representados por uma matriz.

Segunda metarregra no discurso de Sylvester

Matriz como mãe dos determinantes menores: uso de matrizes como uma representação em conexão com a técnica de geração de sistemas de menores.

De acordo com Brechenmacher (2006b, p. 14), "A extração efetiva dos menores de um determinante de ordem n se apoia sobre uma representação em tabela retangular que Sylvester denomina a "matriz" dos "menores" "[26].

Ao introduzir o termo "matriz", Sylvester explicita sua concepção sobre a mesma como uma fonte de determinantes menores (SYLVESTER, 1850a, p. 150), denominada por Brechenmacher (2006b, p. 15), de forma mais concisa, como "*mère de mineurs*" ou **mãe dos menores**. Essa visão foi reforçada em outro artigo dedicado a enunciar propriedades dos determinantes menores:

> Eu defini em artigos anteriores uma "Matriz" como um arranjo retangular de termos, dos quais diferentes sistemas de determinantes podem ser gerados, a partir do ventre de uma mãe comum; esses determinantes cognatos não são de modo algum isolados em suas relações uns com os outros [...][27] (SYLVESTER, 1851c, p.302, tradução nossa)

Tal concepção da noção de matriz tem relação direta com a ação de Sylvester de se apoiar em uma representação em forma de tabela para extrair os determinantes menores e para formular as narrativas sobre esses novos objetos, isto é, para

[26]No original: L'extraction effective des mineurs d'un déterminant d'ordre n s'appuie alors sur une représentation en tableau rectangulaire que Sylvester dénomme la "matrice" des "mineurs". (BRECHENMACHER, 2006b, p. 14)
[27]No original: I have in previous papers defined a "Matrix" as a rectangular array of terms, out of which different systems of determinants may be engendered, as from the womb of a common parent; these cognate determinants being by no means isolated in their relations to one another [...] (SYLVESTER, 1851c, p.302, grifo do autor)

enunciar suas propriedades. Essa ação levou-nos a considerar para este trabalho a metarregra *Matriz como mãe dos determinantes menores: uso de matrizes como uma representação em conexão com a técnica de geração de sistemas de menores.* Essa regra metadiscursiva, em primeiro lugar, destaca o momento em que as matrizes foram introduzidas e mostra como essa noção foi utilizada antes que se constituísse no objeto matemático que conhecemos hoje.

Destacamos que as matrizes foram introduzidas como "arranjos retangulares de termos" no primeiro episódio. De maneira muito próxima à de Sylvester, a atual definição de matriz se apoia na representação desse objeto como uma tabela de números e essa costuma ser a única definição apresentada em muitos livros didáticos de Álgebra Linear. Há contudo outra definição, mais formal, identificando matriz a uma certa função:

> Uma $m \times n$ **matriz sobre o corpo** F é uma função A do conjunto dos pares de inteiros (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, no corpo F. Os **elementos** da matriz A são os escalares $A(i, j) = A_{ij}$, [...] (HOFFMAN; KUNZE, 1970, p. 6, grifos no original, tradução nossa).

A segunda definição não é necessariamente a mais adequada para introduzir o conceito de matriz, mas questionamo-nos se ela também não deveria ser apresentada em algum momento do curso de Álgebra Linear a fim de oferecer uma outra perspectiva sobre esse conceito. Geralmente, os livros apresentam o símbolo $a_{i,j}$ para denotar o termo geral de uma matriz A, ou, ainda, o símbolo $[a_{i,j}]$ para denotar a matriz A de uma forma mais compacta, mas o enfoque costuma ser o de matriz como uma tabela. Identificar o conceito de matriz a uma tabela parece ser suficiente para dar conta dos problemas colocados no ensino básico e no superior que, geralmente, não envolvem matrizes grandes. No entanto, tal identificação não é nada adequada para lidar com problemas que envolvem matrizes grandes e esparsas, nos quais o uso de um computador é imprescindível. Armazenar centenas, milhares ou milhões de posições cujo elemento é nulo não só não é inteligente, como também demandaria grande espaço de armazenamento na memória desnecessariamente. Nesse caso, pensar em matriz como uma função é muito mais adequado.

Primeira metarregra no discurso de Cayley

Matriz é uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas de equações lineares.

A interpretação de matriz como "uma notação muito cômoda para a teoria das equações lineares" (CAYLEY, 1855, p. 185) influenciou substancialmente o modo como as operações com matrizes foram definidas. Cayley também indicou as matrizes como uma notação prática para formas bilineares e formas quadráticas, mas a memória de 1858 dá mais ênfase à associação entre matrizes e sistemas lineares:

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \begin{array}{|c|}\hline a\ ,\ b\ ,\ c \\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \\ a''\ ,\ b''\ ,\ c'' \\ \end{array}(x, y, z)$$

Figura 3.5: Associação entre matrizes e sistemas de equações lineares.

A notação com a matriz no lado direito, segundo Cayley, representa o conjunto de funções lineares:

$$\big((a,\ b,\ c)(x, y, z)\,, (a',\ b',\ c')(x, y, z)\,, (a'',\ b'',\ c'')(x, y, z)\big)$$

Cayley baseou-se na relação acima (Figura 3.5) para introduzir e também para substancializar as definições das operações de adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por uma quantidade simples, multiplicação (ou composição) de matrizes, bem como as definições de matriz zero (matriz nula) e de matriz unidade (matriz identidade).

Como observamos na Seção 3.1.2, não parecia necessitar da diferença reconhecida hoje entre sistemas de equações lineares e transformações lineares ou a diferença entre uma equação e uma função. Apesar de mencionar conjuntos de equações lineares várias vezes na memória de 1858, Cayley fala em funções lineares ao explicar a notação da Figura 3.5. Na memória de 1858, Cayley não fala em transformações lineares, mas há artigos dedicados ao estudo de transformações lineares, por exemplo, (CAYLEY, 1845).

O uso da relação acima para definir as operações com matrizes levou-nos a considerar a metarregra: *matriz é uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas lineares.* Atualmente, as operações com matrizes são definidas de modo abstrato, sem problematizar o porquê ou a origem de tais definições. Refletir sobre essa metarregra e seu papel na teoria das matrizes exposta por Cayley possibilita compreender, particularmente, o porquê da especificidade da regra para a multiplicação de matrizes.

Segunda metarregra no discurso de Cayley

Dupla interpretação da noção de matriz: uma matriz é considerada ora como uma quantidade simples (número), ora como uma quantidade múltipla (um sistema de números).

Vimos na Seção 3.1.2 que Cayley elaborou uma prática de fatoração de polinômios de matrizes baseado na natureza dual da noção de matriz, interpretando-a ora como um sistema de números, ora como uma quantidade simples (BRECHENMACHER, 2006b). Um resultado fundamental para o desenvolvimento da prática de fatoração de polinômios de matrizes foi o teorema notável. A interpretação da noção de matriz como uma quantidade simples chama a atenção na demonstração desse teorema quando um certo determinante de ordem 2 é formado:

> Imagine uma matriz
>
> $$M = \begin{array}{cccc} (& a, & b &) \\ | & c, & d & | \end{array},$$
>
> e forme o determinante
>
> $$\begin{vmatrix} a - M, & b \\ c, & d - M \end{vmatrix},$$
>
> a expressão desenvolvida desse determinante é
>
> $$M^2 - (a+d)M^1 + (ad - bc)M^0;$$

[...][28] (CAYLEY, 1858, p.23, tradução nossa)

Na sequência da demonstração, Cayley emprega a interpretação da noção de matriz como uma quantidade múltipla e, ao final, volta a interpretá-la como uma quantidade simples para justificar o determinante acima (Seção 3.1.2). Assim, vemos que, na rotina para construir a demonstração do teorema notável, Cayley alternou entre as duas interpretações acima, considerando uma matriz como uma quantidade simples quando essa interpretação favorecia o cálculo simbólico que estava sendo empregado. Essa ação de Cayley levou-nos a considerar a metarregra *dupla interpretação da noção de matriz: uma matriz é considerada ora como uma quantidade simples (número), ora como uma quantidade múltipla (um sistema de números).*

A metarregra acima difere substancialmente das atuais segundo as quais uma matriz não é sequer vista como uma quantidade, mas sim como uma tabela de números ou de um ponto de vista mais formal como uma função. Matematicamente, podemos considerar a associação entre uma matriz escalar (com todos os elementos da diagonal principal iguais e os demais nulos) e um número real ou complexo, mas não uma matriz "cheia". Na demonstração do teorema notável, a matriz cheia M é interpretada como uma quantidade simples e é subtraída dos elementos a e d da sua diagonal principal. Do ponto de vista atual, o procedimento simbólico de Cayley envolve subtrações entre números e matrizes, assim, a demonstração do teorema notável não seria aceita nos dias de hoje.

[28]No original: Imagine a matrix

$$M = \begin{array}{cccc} (& a, & b &) \\ | & c, & d & | \end{array},$$

and form the determinant

$$\begin{vmatrix} a - M, & b \\ c, & d - M \end{vmatrix},$$

the developed expression of this determinant is

$$M^2 - (a + d)M^1 + (ad - bc)M^0;$$

[...] (CAYLEY, 1858, p. 23)

Capítulo 4

Metodologia e material de ensino

4.1 A natureza da investigação

Revisitando os objetivos da pesquisa, pretendemos:

- promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes (SFARD, 2008; KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014), por meio de conflitos comognitivos planejados com base em fontes históricas, a fim de que:
  - os estudantes percebam e se conscientizem das metarregras segundo as quais eles se orientam quando lidam com matrizes e determinantes e
  - os estudantes percebam e revejam suas concepções (SFARD, 1991) sobre matrizes e determinantes.
- investigar a possibilidade de desenvolvimento de uma **consciência histórica** (RÜSEN, 2001), direcionada à formação de uma **visão desnaturalizada** (GIRALDO; ROQUE, 2014) dos conceitos de matriz e determinante.

Este trabalho tem, portanto, como foco uma proposta que articula história da matemática ao ensino de matrizes. Dados os objetivos acima, a ideia de realizar uma pesquisa de campo e de adotar uma abordagem experimental, pareceu-nos a mais adequada para conduzir a investigação.

Compreender os fenômenos descritos nos objetivos requer uma análise cuidadosa, baseada em diferentes tipos de dados, como entrevistas, atividades escritas, gravação em áudio de discussões dos alunos etc. Para planejar a investigação empírica e organizar a análise dos dados, orientamo-nos por uma abordagem qualitativa. De acordo com Godoy, em uma pesquisa quantitativa, o pesquisador "preocupa-se com a medição objetiva e a quantificação dos resultados", já a pesquisa qualitativa:

> Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo. (GODOY, 1995, p. 58)

Os objetivos desta investigação demandam uma compreensão do processo e não uma quantificação de resultados. Não nos parece adequado, portanto, usar dados quantitativos e análises estatísticas. Assim, identificamos a natureza da nossa investigação empírica como qualitativa. Para realizá-la, um material de ensino composto por dois roteiros históricos foi elaborado e testado em um estudo piloto. Depois disso, dois estudos de campo foram realizados. Os resultados são apresentados e discutidos no capítulo 6 e foram baseados nesses dois estudos de campo. Na próxima seção apresentamos os tipos de dados que forneceram material para a análise e os métodos para gerá-los.

4.2 Métodos para geração de dados

Dada a natureza qualitativa da investigação, passamos à apresentação das técnicas de geração de dados que adotamos.

4.2.1 Entrevistas semiestruturadas

Visando investigar *o impacto das reflexões sobre as metarregras nas concepções dos estudantes sobre matrizes e determinantes* (QP2), realizamos *entrevistas do tipo semiestruturada* para identificar concepções dos participantes sobre matrizes e determinantes. Essas entrevistas foram conduzidas no início e no fim da intervenção e contribuíram com dados para comparar concepções dos participantes antes e depois do estudo. As entrevistas finais também contribuíram com dados para investigar *as* *contribuições do estudo para o desenvolvimento de uma consciência histórica nos estudantes* (QP3).

A *entrevista semiestruturada* orienta-se por um roteiro com questões abertas. De acordo com (MANZINI, 2012), essa modalidade de entrevista permite flexibilidade com respeito à sequência com a qual as questões são feitas e quanto à possibilidade de inserir perguntas complementares para entender melhor o fenômeno investigado. Por essas características, achamos este tipo de técnica mais adequado aos nossos objetivos. Há outras duas modalidades. A entrevista estruturada é orientada por um roteiro com perguntas fechadas. Quando esse tipo de entrevista é realizada, as perguntas são feitas seguindo a sequência em que foram elaboradas. As entrevistas não-estruturadas podem ter como ponto de partida uma questão geradora, sem um roteiro previamente estabelecido.

Nossa opção pela modalidade de entrevista semiestruturada justifica-se pela necessidade de que as questões fossem abertas. Também foi importante ter uma certa flexibilidade para formular novas questões diante de determinadas respostas dos participantes ou para estimular repostas mais detalhadas. O roteiro das entrevistas iniciais é apresentado no Apêndice B para que o leitor tenha acesso às questões a qualquer momento durante a leitura da tese.

O roteiro inicia-se com duas questões que visavam deixar os participantes mais confortáveis com a situação de estarem sendo entrevistados e, também, obter informações sobre a abordagem na primeira disciplina de Álgebra Linear cursada por cada participante, isto é, se o curso partiu do conceito de matriz, como as matrizes foram ensinadas, qual foi a sequência adotada (por exemplo: matrizes, determinantes, sistemas lineares, ...) etc.

- Diga o que você espera do minicurso sobre história das matrizes.
- Fale como foi a abordagem no primeiro curso que você fez de Álgebra Linear.

As demais questões foram elaboradas com base em dois eixos:

Eixo 1: Concepções sobre matrizes e sobre determinantes.

- Diga, com as suas próprias palavras, o que você acha que é uma matriz.

- O que é determinante?
- Você saberia dar um exemplo da utilidade de calcular determinantes?
- Você vê relação entre matrizes e sistemas lineares?
- Você saberia dizer algum exemplo de aplicação geométrica de matrizes?

Eixo II: Conhecimento prévio sobre história das matrizes e visão sobre como a matemática muda com o tempo

- Você sabe alguma coisa sobre a história das matrizes?
- Você saberia dizer para que elas foram inventadas?
- Imagine que você estivesse dando aula sobre matrizes no ensino básico e um aluno seu perguntasse: "Professor, por que na multiplicação de matrizes temos que multiplicar linhas por colunas?" O que você responderia?
- Diga como você acha que as ferramentas e os conceitos matemáticos surgem.
- Você acha que as noções matemáticas sofrem algum tipo de mudança ao longo do tempo?

A maioria das questões foi mantida no roteiro das entrevistas finais, justamente para avaliar possibilidades de mudanças nas respostas dos participantes. Dentre os ajustes feitos de uma versão para a outra, as duas primeiras questões foram retiradas e duas outras foram acrescentadas:

- Fale o que você achou do minicurso.
- Qual seria, na sua opinião, o papel da noção de matriz no estudo da Álgebra Linear?

A segunda pergunta acima, relacionada ao eixo I, foi incluída com o objetivo inicial de investigar as concepções dos participantes sobre o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear. Outra mudança foi na questão "você acha que as noções matemáticas sofrem algum tipo de mudança ao longo do tempo?", alterada para "fale se você acha que a noção de matriz sofreu alguma mudança ao longo do tempo.”, a fim de direcionar mais as respostas. Ao longo do trabalho, os objetivos e as questões de pesquisa foram refinados e nem todas as questões do roteiro das entrevistas foram utilizadas para a análise.

4.2.2 Registro por escrito de atividades

Outra técnica para geração de dados que utilizamos na investigação foi o registro por escrito de dois tipos de atividades: *atividades históricas* e *produção de um pequeno artigo*.

As atividades históricas, conforme (KJELDSEN; PETERSEN, 2014), são questões discursivas que abordam o conteúdo histórico dos roteiros e a matemática envolvida; algumas têm como objetivo específico encorajar reflexões sobre as metarregras identificadas por nós (veja Seção 6.1), que governaram o discurso nas fontes históricas utilizadas. Optamos por apresentar as questões das atividades históricas na Seção 4.3, em que falaremos sobre a elaboração e a organização do material de ensino.

Salientamos que o conceito de regras metadiscursivas não foi explicitado nos enunciados das atividades. Não utilizamos os termos “regras metadiscursivas” ou “metarregras” com os participantes. Exploramos os conteúdos das metarregras (conforme apresentamos na Seção 6.1). Essa escolha metodológica se deve as nossas expectativas de que, desse modo, as reflexões seriam mais espontâneas. As respostas dos alunos às atividades históricas foram analisadas com vistas a responder a questão (QP1), qual seja: *como fontes históricas possibilitam promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, a partir de conflitos comognitivos?*

A atividade final teve como proposta a produção de um pequeno artigo (Figura 4.1), no qual os participantes pudessem sintetizar o que aprenderam com o estudo e o que o conhecimento sobre a histórica das matrizes representou para eles na perspectiva de futuros professores. Os dados advindos desses artigos forneceram base para responder a questão de pesquisa (QP3).

Atividade final: Você foi convidado pelo jornal de periodicidade mensal "Conversando sobre matemática" a escrever um pequeno artigo (mínimo 1 página, máximo 2 páginas) abordando a história da noção de matriz, comparando os papeis que esta noção desempenhou para os matemáticos Sylvester e Cayley com o papel que a mesma desempenha hoje para a Álgebra Linear e discutindo se o conhecimento da história deste objeto traz alguma contribuição para o conhecimento do professor e para o ensino deste tópico. Você poderá se basear nos roteiros e nas atividades realizadas. Crie um título para o seu artigo.

Figura 4.1: Atividade final: Produção de um pequeno artigo.

4.2.3 Áudios das discussões

Outra técnica utilizada para gerar dados foi a gravação em áudio das discussões dos alunos enquanto respondiam as atividades históricas. Os dados advindos dos áudios da discussão foram essenciais para analisar o discurso dos participantes e, combinados com as respostas escritas das atividades históricas, foram a base para a análise que contribuiu para responder à questão de pesquisa (QP1).

Entendemos que as respostas por escrito das atividades históricas representam uma síntese da discussão que tomou lugar durante as atividades, isto é, representam o produto final das reflexões. Temos que levantar ainda a hipótese de que apresentar uma resposta por escrito não é garantia de que um processo de reflexão ocorreu. O aúdio das discussões possibilitou examinar detalhes das reflexões que seriam perdidos se nos baseássemos apenas nas respostas escritas, por exemplo, os posicionamentos diferentes, como e quando as reflexões tiveram início, se todos os integrantes se engajaram na discussão, se a resposta escrita representa todo o grupo etc. Os áudios foram essenciais para detectar a manifestação de conflitos comognitivos. Somente as respostas por escrito não forneceriam uma base adequada para a análise.

Nossa escolha em gravar apenas o áudio das discussões e não gravar o vídeo deve-se à intenção de evitar qualquer tipo de constrangimento que pudesse inibir os participantes de falar. Para nós, foi imprescindível que os participantes falassem, externassem seus pontos de vista e seus conhecimentos durante as atividades. Isto não poderia ser colocado em risco. Assim, abrimos mão de capturar expressões faciais, gestos, entre outros sinais que poderiam ser significativos.

As atividades históricas foram realizadas em grupos. Todas as discussões, de cada grupo, foram gravadas em áudio. Devido ao volume de dados e ao tempo que a transcrição demandaria, os áudios foram integralmente transcritos por outra pessoa e as transcrições foram conferidas por nós.

4.2.4 Questionários

Um pequeno questionário foi aplicado no início dos estudos de campo com o objetivo de traçar o perfil do grupo. Este questionário continha questões como nome, idade, período que estava cursando na universidade, se estava cursando licenciatura ou bacharelado em Matemática, se já havia feito a disciplina de História da Matemática, entre outras. Foi solicitado que cada participante criasse um codinome para ser usado na análise dos dados, bem como neste texto.

No final de cada estudo de campo, foi aplicado outro questionário com o objetivo de obter um *feedback* dos participantes sobre os roteiros e sobre o minicurso (Apêndice D). Neste questionário, os participantes foram convidados a fazer um depoimento final sobre o minicurso e sobre o que eles aprenderam referente aos episódios da história das matrizes.

Os dados advindos do último questionário também contribuíram para investigar o desenvolvimento de uma consciência histórica (KJELDSEN; PETERSEN, 2014; RÜSEN, 2001) nos participantes.

4.3 O material de ensino

Dois roteiros de ensino foram elaborados visando orientar o trabalho com os participantes durante os encontros nos estudos de campo, bem como fornecer um material de consulta acessível, em língua portuguesa. O primeiro roteiro foi dedicado a apresentar um resumo da prática de Sylvester em torno do problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas (BRECHENMACHER, 2006b; SYLVESTER, 1850b; SYLVESTER, 1851b; SYLVESTER, 1851c), que rendeu a introdução da noção de matriz. O segundo foi dedicado a apresentar uma tradução de parte da memória em que (CAYLEY, 1858) define as operações com matrizes e enuncia as propriedades das operações.

Com respeito aos nossos princípios para elaborar os roteiros, quando começamos a pensar qual direção seguir para planejar os encontros, tínhamos em mente, em primeiro lugar desviar-nos tanto quanto possível de uma interpretação histórica *Whig*. Em outras palavras, queríamos evitar uma abordagem anacrônica, isto é, aquela que interpreta o passado com as lentes do presente. Evitar tal abordagem é imprescindível se desejamos que os participantes percebam as diferenças entre as metarregras do passado e as do presente. Uma proposta colocada por (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012) para vencer o anacronismo ao utilizar história para elaborar situações de ensino e aprendizagem é *investigar o desenvolvimento histórico da matemática a partir da sua prática*. Isso pode ser feito com o uso de fontes primárias ou de fontes secundárias que se baseiem na concepção da matemática como uma prática, como é o caso dos trabalhos de Brechenmacher (2006a), Brechenmacher (2006b) que contemplam a história das matrizes. Na verdade, essa postura é essencial para destacar as diferenças entre as metarregras que moldaram os discursos do passado e aquelas que moldam o discurso de hoje, a fim de promover reflexões sobre metarregras.

Ainda com o objetivo de evitar uma abordagem *Whig* e, também, para fornecer direções para interpretar as fontes, Kjeldsen e colaboradores (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) propõem adotar a *abordagem por múltiplas perspectivas*, segundo a qual episódios do passado podem ser estudados sob vários pontos de observação, ou várias perspectivas, dependendo dos objetivos do pesquisador. Para elaborar os roteiros, orientamo-nos pela abordagem das múltiplas perspectivas, conforme o quadro metodológico proposto por Kjeldsen e colaboradores. As perspectivas que influenciaram o recorte dos episódios históricos são: i) os objetos matemáticos não são eternos e ii) os objetos matemáticos não são iguais para todos. As metarregras históricas a serem exploradas também influenciaram o planejamento dos roteiros, na seleção dos extratos dos artigos de Sylvester e de Cayley.

Algumas dificuldades devem ser levadas em conta quando se deseja utilizar fontes primárias como, por exemplo, a dificuldade do conteúdo matemático do episódio histórico a ser explorado e o fato de não estarmos lidando com profissionais em história da matemática. Nos estudos de campo, trabalhamos com alunos em nível de graduação, a maioria não havia passado pela disciplina História da Matemática. Além disso, mergulhar no episódio histórico de Sylvester requer algum conhecimento de Geometria Projetiva, o que não está no currículo das graduações.

Iris Gulik-Gulikers (2005), conforme citado por Jankvist (2009, p. 95), sugere buscar um equilíbrio entre o nível de conhecimento dos participantes, o grau de dificuldade do tópico matemático que se deseja trabalhar e o tempo disponível. Para viabilizar uma proposta de ensino envolvendo o estudo de um tópico que, geralmente, não é abordado no nível superior, inserimos algumas ilustrações, definições e explicações em linguagem moderna e propomos alguns exercícios matemáticos para acompanhar o conteúdo matemático do episódio histórico.

Os objetivos gerais de aprendizagem dos roteiros são:

- conhecer o problema cuja resolução motivou a introdução das matrizes;
- conhecer a origem das definições das operações com matrizes,
- comparar as interpretações de matriz de Sylvester e de Cayley.

A estrutura geral de cada roteiro se divide em: introdução ao que será abordado no material; apresentação do matemático protagonista do episódio da pesquisa sobre matrizes em questão; resumo da prática matemática contendo definições, exemplos, ilustrações e extratos de fontes primárias traduzidos no caso do primeiro roteiro e uma tradução de parte da memória de (CAYLEY, 1858) no caso do segundo roteiro. Ambos os roteiros possuem exercícios de matemática e atividades históricas. No estudo piloto e em um dos estudos de campo, os exercícios de matemática foram avaliados e renderam bônus em avaliações, em disciplinas de Álgebra Linear. Isso foi combinado com o professor dos participantes. As respostas a esses exercícios não foram analisadas nesta investigação.

Nas citações de extratos de fontes primárias, optamos por manter as notações originais. Nos textos escritos por nós, notações modernas foram utilizadas. Devido à restrição do tempo que teríamos nos encontros, não incluímos nos roteiros informações ou referências históricas para abordar o contexto social, cultural e filosófico da época.

Nos estudos de campo, foi oferecido um minicurso sobre história das matrizes. Um pré-requisito importante para participação foi ter concluído ou estar cursando a segunda disciplina de Álgebra Linear. Logo, não foi nosso objetivo usar a história da matemática para introduzir o conceito de matriz ou mesmo para ensinar Álgebra Linear.

4.3.1 Roteiro Sylvester

O primeiro roteiro, denominado daqui em diante como **Roteiro Sylvester**, tem como título **"O surgimento das matrizes no estudo de cônicas por Sylvester"**. Nele, é apresentado um resumo do contexto matemático dentro do qual o termo matriz foi introduzido, isto é, o problema que estava na agenda da pesquisa de Sylvester, bem como as ferramentas matemáticas utilizadas para resolvê-lo.

A Tabela 4.1 mostra a estrutura do roteiro e uma descrição sucinta do que é apresentado em cada seção. O roteiro está integralmente disponibilizado no Apêndice E.

Seção	**Conteúdo**
Introdução	Uma introdução do que será apresentado no texto.
Um retrato de James Joseph Sylvester	Apresentação de alguns dados biográficos de Sylvester.
O problema que interessou Sylvester	Apresentação dos tipos de contatos entre duas cônicas e uma introdução ao problema investigado por Sylvester.
Seções cônicas	Apresentação de duas formas de se obter as seções cônicas: fixando a superfície cônica e variando o plano de interseção ou fixando o plano de interseção e variando a superfície cônica
A geometria onde retas são pontos e planos são retas	Uma breve introdução à Geometria Projetiva.
De volta às cônicas de Sylvester	Representação de cônicas por meio de equações homogêneas de grau 2, a três variáveis.
A classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas	Um resumo da prática elaborada por Sylvester para classificar os tipos de contatos entre duas cônicas.
Atividades	Questões discursivas abordando o conteúdo histórico do roteiro.

Tabela 4.1: Estrutura de seções do Roteiro Sylvester

Como vimos na Seção 3.1.1, Sylvester resolveu o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas com recurso ao cálculo de determinantes. Após apresentar no roteiro o que significa o termo "contato" e os tipos de contatos existentes entre duas cônicas em $\mathbb{R}^2$, colocamos o problema de como decidir se há contato ou não entre os pontos de interseção (reais) de duas cônicas (quando existem) e, no caso de haver pontos de contato, como classificar o tipo de contato.

Sylvester representava cônicas por equações homogêneas de segundo grau a três variáveis. Em notação matemática, uma cônica U era representada por uma equação do tipo

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'xy + 2b'xz + 2c'yz = 0,$$

com coeficientes a, b, c, a', b', c' reais.

Métodos projetivos eram utilizados. Como nenhuma disciplina sobre geometria projetiva costuma ser oferecida em cursos de graduação, preocupamo-nos em fazer uma introdução apresentando os conceitos de coordenadas homogêneas, pontos projetivos, linhas projetivas, cônicas projetivas e plano projetivo real. Para isso, utilizamos notações modernas e baseamo-nos em (BRANNAN; ESPLEN; GRAY, 1998).

Para que os participantes pudessem compreender a representação de cônicas em $\mathbb{R}^2$ por meio de equações homogêneas, trabalhamos de forma bastante intuitiva a identificação de $\mathbb{R}^2$ com o plano afim $z = 1$. Além de exemplos com ilustrações, alguns exercícios matemáticos foram propostos para este fim, como por exemplo:

> Exercício 3
>
> Dadas as equações homogêneas abaixo, obtenha a representação das cônicas em coordenadas cartesianas.
>
> a) $x^2 + y^2 = z^2$.
>
> b) $2x^2 + y^2 - 4xz + 2yz = 0$.

Após a introdução de conceitos da geometria projetiva, elaboramos um resumo da prática de Sylvester para a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas de $\mathbb{R}^2$. Optamos por apresentar esse resumo em linguagem moderna para facilitar o entendimento. Neste caso, consideramos que não seria produtivo trabalhar diretamente com os artigos de Sylvester devido à complexidade do assunto e a sua notação inconstante e rebuscada. No entanto, foram incluídos ao longo do resumo traduções de extratos de artigos de Sylvester, como a descrição que ele apresenta para a noção de *determinante menor*.

Após apresentar um resumo da prática de Sylvester, outros exercícios matemáticos são propostos para que os participantes pudessem identificar se haviam pontos de contato entre duas cônicas dadas e, em caso afirmativo, classificá-los. Em seguida aos exercícios, falamos sobre o que motivou Sylvester a introduzir o termo matriz e apresentamos traduções de extratos em que Sylvester descreve ou fala explicitamente sobre a sua concepção da noção de matriz.

Ao final do roteiro, são propostas as atividades históricas formadas por questões discursivas, abordando o conteúdo histórico dos roteiros e a matemática envolvida. Algumas questões são propostas com o objetivo de favorecer a troca de ideias sobre o que cada integrante do grupo alcançou com o conteúdo (histórico e matemático) do roteiro. Outras são propostas com o objetivo de suscitar discussões sobre as metarregras definidas na Seção (6.1) e reflexões sobre as metarregras relacionadas a matrizes e determinantes que fazem parte do seu próprio repertório. Dentre essas, destacamos as questões 3, 6 e 7. Reproduzimos na Figura 4.2 a lista das atividades históricas do primeiro roteiro.

Na segunda questão, introduzimos conceitos similares aos de objetos epistêmicos e técnicas epistêmicas, os quais chamamos de *objetos de investigação* e *técnicas* (respectivamente). Para abrir o roteiro, especificamos o principal objeto de investigação de Sylvester, isto é, a classificação dos tipos de contato entre duas cônicas, e solicitamos que os participantes identificassem as técnicas empregadas.

Salientamos que os termos “regras metadiscursivas” e “metarregras” não foram utilizados nos enunciados das atividades, nem mesmo mencionados para os alunos durante os encontros, mas sim o conteúdo das metarregras foi explorado. Essa escolha se deve à nossa expectativa por reflexões mais espontâneas.

Questão 1: Faça um resumo descrevendo como Sylvester classifica os tipos de contatos entre duas cônicas U e V.

Questão 2: Sylvester utiliza vários conceitos/ferramentas matemáticas na prática elaborada por ele para resolver o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. Para entender o papel de cada um deles na sua pesquisa, vamos identificar quais desempenham o papel de induzir novo conhecimento (objeto(s) de investigação) e quais ajudam a fornecer as respostas do problema colocado (técnicas).

O objeto de investigação de Sylvester é: a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.

Liste todos os conceitos/ferramentas matemáticas que constituem as técnicas utilizadas por Sylvester, de acordo com o texto.

Questão 3: Descreva a diferença entre como Sylvester utilizava determinantes neste episódio da pesquisa sobre matrizes e como nós utilizamos nos dias de hoje. Veja o extrato IV.

Questão 4: Explique o que é um *primeiro determinante menor* de acordo com a definição apresentada por Sylvester no Extrato I. O que é um *segundo determinante menor*? E um *r-ésimo determinante menor*?

Questão 5: Por que Sylvester precisou introduzir os determinantes menores?

Questão 6: Baseando-se nos Extratos II, III, explique o que era uma matriz e qual o papel desta noção para Sylvester.

Questão 7: Compare a definição de matriz apresentada no Extrato II com a definição atual. Aponte pelo menos uma semelhança e pelo menos uma diferença.

Figura 4.2: Atividades históricas do Roteiro Sylvester.

4.3.2 Roteiro Cayley

O segundo roteiro ou **Roteiro Cayley**, como denominaremos daqui em diante, tem como título "**Cayley e o cálculo simbólico com matrizes**". Nele, apresentamos uma tradução de algumas páginas da memória de Cayley, de 1858. Assim, os participantes da pesquisa de campo tiveram a oportunidade de ter contato com uma fonte primária sobre matrizes.

Apresentamos a estrutura do roteiro e uma descrição sucinta do que é apresentado em cada seção na Tabela 4.2. O roteiro completo está integralmente disponibilizado no Apêndice F.

Seção	**Conteúdo**
Introdução	Uma introdução do que será apresentado no texto.
O matemático da vez	Apresentação de alguns dados biográficos de Cayley.
A memória de 1858	Tradução de algumas páginas da memória de 1858 sobre a teoria das matrizes.
Atividades	Questões discursivas abordando o conteúdo histórico do roteiro.

Tabela 4.2: Estrutura de seções do Roteiro Cayley

A proposta de trabalho para este roteiro foi bastante diferente do primeiro. Como vimos na Seção 3.1.2, nas páginas iniciais memória de 1858, Cayley descreve o que é uma matriz, define as operações com matrizes e apresenta as propriedades das operações. Mais da metade da memória é dedicada a apresentar aplicações do cálculo simbólico com matrizes. Consideramos que, apesar das diferenças nas notações, o nível do conteúdo matemático da memória está ao alcance de alunos em nível de graduação que já tenham cursado a primeira disciplina de Álgebra Linear. Assim, optamos por disponibilizar diretamente uma tradução da memória, ao invés de elaborar um resumo da prática de Cayley, como fizemos no primeiro roteiro.

Além de propiciar a oportunidade aos participantes de formular a sua própria interpretação do conteúdo da memória, o trabalho com fontes primárias é a estratégia mais direta para conhecer a prática matemática. E, por último, uma razão ainda mais forte, o acesso direto ao discurso favorece a explicitação de metarregras. Não disponibilizamos a tradução de toda a memória. As primeiras páginas com a descrição do que é uma matriz e com a definição das operações são integralmente disponibilizadas, com exceção das propriedades das operações. Além dessas páginas, disponibilizamos a demonstração do *teorema notável* e o primeiro exemplo de aplicação desse teorema: o cálculo das raízes quadradas da matriz identidade.

Assim como no primeiro roteiro, exercícios matemáticos são propostos para acompanhar o conteúdo matemático da fonte. Novamente, atividades históricas são propostas ao final do roteiro. Dentre as questões formuladas com objetivo de suscitar reflexões sobre metarregras, destacamos as questões 2, 3, 4, 6 e 7. A lista das atividades históricas do segundo roteiro é apresentada na Figura 4.3. A primeira questão é proposta para os participantes "abram a fonte", isto é, o ponto de partida da investigação é identificar o objeto de investigação de Cayley e as técnicas empregadas por ele. No próximo capítulo, descrevemos os sujeitos da pesquisa e como os estudos de campo foram conduzidos.

Questão 1: Qual é o objeto de investigação de Cayley de acordo com o que você viu neste roteiro? Liste as técnicas[1] utilizadas por Cayley na parte da memória que você estudou.

Questão 2: Compare a descrição de matriz apresentada por Cayley (veja a primeira página da tradução da memória) com a definição atual. Você vê semelhanças? Se sim, quais? Você vê diferenças? Se sim, quais?

Questão 3: Fale sobre o modo como Cayley estabelece as regras para as leis de adição, de multiplicação por uma quantidade simples e multiplicação ou composição de duas matrizes. Compare com o modo como os livros didáticos de Álgebra Linear apresentam as operações com matrizes.

Questão 4: Explique o que Cayley quis dizer com "*uma matriz considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade*"(veja o item 10 do extrato).

Questão 5:

a) Enuncie, com suas palavras, o "teorema notável"que Cayley menciona na primeira página da memória e apresenta nos itens 21, 22 e 23 da memória.

b) A demonstração do teorema para matrizes de ordem 2, no item 21, faz uso do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} a-M, & b \\ c, & d-M \end{vmatrix},$$

cuja expressão é $M^2-(a+d)M^1+(ad-bc)M^0$. Nos dias de hoje, a demonstração de Cayley seria aceita como correta? Explique.

Questão 6: Compare o modo como Sylvester usou determinantes - de acordo com o primeiro roteiro - e o modo como Cayley usa determinantes - de acordo com este roteiro.

Questão 7: Para você, o que é matriz? O que era matriz para Sylvester? O que era matriz para Cayley?

Figura 4.3: Atividades históricas do Roteiro Cayley.

Capítulo 5

Estudos de campo

Neste capítulo, apresentaremos a parte empírica da nossa investigação. Ao longo de um ano, três estudos de campo foram realizados: um estudo piloto e mais dois estudos de campo. A Tabela 5.1 mostra o período e a carga horária de cada um.

	Período	**Encontros**	**Carga horária**
Estudo piloto	maio de 2014	2 encontros	10 horas
Estudo de campo I	outubro e novembro de 2014	6 encontros	18 horas
Estudo de campo II	outubro e novembro de 2014	6 encontros	18 horas

Tabela 5.1: Cronograma da pesquisa de campo.

Tanto no estudo piloto quanto nos estudos de campo optamos por trabalhar com voluntários que houvessem passado por cursos tradicionais[1] de Álgebra Linear. Por isso, não consideramos a opção de conduzir a pesquisa em um curso de Álgebra Linear que fosse ministrado pela autora deste trabalho.

Para o estudo piloto, aproveitamos a oportunidade de ter, naquele momento, uma turma cursando a disciplina Álgebra Linear em um programa de mestrado oferecido na UNIRIO. Conseguimos captar 6 voluntários para participar do minicurso oferecido por nós e, logo, da pesquisa.

Ao buscar voluntários para o estudo principal da pesquisa em cursos de licenciatura em matemática, fizemos contato com duas outras instituições no estado do Rio de Janeiro (UFRRJ e UERJ). Deparamo-nos com turmas relativamente pequenas

[1] O adjetivo "tradicional" está sendo empregado no sentido que explicamos na introdução deste texto, isto é, um curso que parte da noção de matriz e que apresenta esse tópico como um produto pronto e acabado, sem discutir a natureza do conceito de matriz e sem problematizar as operações com matrizes, bem como suas origens.

(10 alunos em média) e notamos uma certa dificuldade em captar voluntários. Os estudantes geralmente estão ocupados com suas disciplinas e não têm muito tempo para atividades extras, sobretudo, porque muitos já trabalham.

Conseguimos a adesão de voluntários para fazer um estudo de campo em ambas as instituições que fizemos contato. Para não desmotivar os estudantes que voluntariaram-se a participar da pesquisa, realizamos os encontros nas próprias instituições e conduzimos os dois estudos de campo ao mesmo tempo.

Nas próximas seções, faremos um breve relato do estudo piloto e um relato mais detalhado dos estudos de campo. Apresentaremos também a análise dos dados organizados por questão de pesquisa e de acordo com os resultados obtidos.

5.1 Estudo piloto

Um estudo piloto foi realizado em maio de 2014 com um grupo de professores do ensino básico que estavam cursando o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT[2]) na UNIRIO. Naquele momento, o grupo de professores citado estava cursando a disciplina Álgebra Linear, como parte das atividades do mestrado. O convite para participar do estudo piloto foi feito à turma, que tinha cerca de 15 alunos. Apresentamos a proposta de um minicurso com o seguinte tema: **Diferentes papeis da noção de matriz em dois episódios da História das Matrizes**. Seis alunos manifestaram interesse e aceitaram, esclarecidamente, participar do estudo que foi realizado em dois encontros com cerca de 5 horas de duração cada.

Os principais objetivos do estudo piloto foram testar o material de ensino, as atividades históricas, a forma como o minicurso seria conduzido pela pesquisadora e decidir como a análise de dados seria realizada.

Planejamos a geração de dados por meio de: i) um questionário inicial com o objetivo de traçar o perfil do grupo; ii) as respostas escritas das atividades históricas; iii) dois relatórios, um sobre cada roteiro; iv) gravação em áudio das discussões dos participantes enquanto faziam as atividades escritas e v) um depoimento ao final

[2]O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, é um curso de pós-graduação *stricto sensu* que visa o aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica. A UNIRIO é uma das instituições que fazem parte desta rede.

do estudo. Algumas anotações foram feitas ao final dos encontros para registrar comentários relevantes dos participantes, quanto tempo os participantes levaram para fazer as atividades, entre outras coisas.

Na ocasião do estudo, o tempo de atuação profissional dos participantes no ensino básico variava de 3 a 12 anos. Dois deles não haviam tido nenhum curso de História da Matemática até o momento (Tabela 5.2), mas isso não era um impedimento para participar do estudo.

Participante	**Experiência**	**Se cursou História da Matemática**
R	3 anos	Sim
Fe	4 anos	Na graduação
J	6 anos	Não
M	7 anos	Na graduação e em uma especialização
T	7 anos	Não
Fa	12 anos	Na graduação

Tabela 5.2: Quadro informativo sobre os participantes do estudo piloto.

As respostas ao questionário inicial (Figura **??**) revelaram algumas informações interessantes como, por exemplo, na questão sobre como foi o ensino de matrizes no curso que eles fizeram na graduação e no curso que estavam fazendo no mestrado, obtivemos comentários como: "No aprendizado foi-se mostrando a técnica em detrimento da utilização, o como fazer em relação ao saber fazer" (Participante R) e "Todas as vezes em que estudei matrizes, apenas aprendi como um tabela que armazena números e que possui suas operações" (Participante T).

Na questão sobre "por que na multiplicação de matrizes temos que multiplicar linhas por colunas", obtivemos respostas como:

> Sinceramente eu pensaria em dar uns cascudos num aluno desses (risos). Diria que ele deveria aceitar aquilo como verdade. Infelizmente essa seria a minha resposta. Não pensaria em outra coisa. (Participante J)
>
> Eu diria que a multiplicação de matrizes é definida dessa forma, pois cada elemento da matriz é o produto interno de uma linha por uma coluna, que na prática podem ser entendidos (linhas e colunas) como coordenadas de vetores [...] E, tentaria convencê-los que essa teoria está embasada numa matemática superior [...] Até porque, a imensa maioria dos livros de ensino médio (e mesmo

> os do ensino superior) apenas definem como se efetua tal multiplicação sem dar maiores detalhes do porquê é feito de tal maneira. (Participante Fa)

1. Em qual instituição você cursou a graduação e em que ano se formou? Você fez o curso de licenciatura ou bacharelado em matemática?
2. Informe há quanto tempo você atua como professor no ensino básico.
3. Fale da sua experiência como aluno no curso de Álgebra Linear que você teve na graduação e que está tendo agora em um curso de mestrado (Diga como foi/está sendo o curso, se você gosta de Álgebra Linear, se você acha a disciplina fácil/normal/difícil de aprender e o que mais você achar importante.)
4. Fale como foi/está sendo o ensino de matrizes no curso que você fez na graduação e no curso que está fazendo agora no mestrado (Diga se a abordagem dos cursos partiu da noção de matriz; se fez sentido para você aprender matrizes, as operações e suas respectivas propriedades falando da abordagem que foi seguida em cada curso.)
5. Imagine que um aluno seu, durante uma aula sobre matrizes, lhe faça a seguinte pergunta "Por que na multiplicação de matrizes temos que multiplicar linhas por colunas?" O que você responderia?
6. Você já teve algum curso de História da Matemática? Se sim, em que nível (graduação/especialização)? Diga também o que você achou do curso, se o mesmo contribuiu e de que maneira para sua formação.
7. Que importância você vê, se você vê alguma, em aprender História da Matemática?
8. Para você, as noções matemáticas sofrem algum tipo de mudança ao longo do tempo? Explique sua posição.

Figura 5.1: Questionário aplicado no início do estudo piloto.

O primeiro encontro foi dedicado a trabalhar o Roteiro Sylvester. Como a matemática envolvida na prática de Sylvester geralmente não faz parte do currículo das licenciaturas, optamos por fazer uma apresentação em *slides* com dados biográficos de Sylvester, com algumas noções de geometria projetiva e com a prática desenvolvida por ele para resolver o problema dos contatos. A apresentação foi gravada em vídeo, com a câmera totalmente voltada para a pesquisadora. Após finalizar a apresentação e fazer algumas discussões sobre as ideias do roteiro, os participantes foram divididos em três duplas para fazer as atividades históricas. Eles levaram cerca de uma hora para fazer as atividades.

É interessante mencionar a surpresa que os participantes tiveram quando dissemos que Sylvester calculava determinantes a partir de polinômios homogêneos de grau 2, a três variáveis, no problema dos contatos entre duas cônicas. Eles manifestaram curiosidade em saber qual a definição de determinantes que Sylvester utilizava. Em outro momento, eles perguntaram sobre a origem da definição da multiplicação de matrizes.

O segundo encontro foi dedicado a trabalhar o Roteiro Cayley. Um dos participantes não pôde comparecer por motivos de saúde em família. Em um primeiro momento, propusemos um estudo dirigido sobre algumas páginas da memória de Cayley (CAYLEY, 1858). Sugerimos que os participantes fizessem uma leitura individual e marcassem os pontos que acharam interessantes ou que ficaram em dúvida. Em seguida, iniciamos uma leitura conjunta e uma discussão coletiva sobre as ideias de Cayley. Depois, os participantes foram divididos em dois grupos para a discussão das atividades, procurando manter a mesma configuração do primeiro encontro, com exceção de um participante que teve que ser alocado para um dos grupos restantes. Assim um grupo ficou com três integrantes e outro, com dois.

Uma característica marcante dos participantes do estudo piloto é que, em vários momentos, os participantes iniciavam discussões sobre o ensino de matrizes, principalmente se seria possível ensinar a multiplicação de matrizes a partir da composição de transformações lineares no nível básico. A maioria mostrou-se resistente a essa ideia.

Tanto no primeiro como no segundo encontro, as discussões de cada grupo foram gravadas em áudio. Um relato desse estudo, com uma apresentação resumida da análise dos dados advindos das atividades, dos áudios e dos relatórios, bem como alguns resultados iniciais pode ser encontrado em (BERNARDES; ROQUE, 2014).

A experiência com o estudo piloto apontou-nos a necessidade de alguns ajustes nos roteiros: alguns exercícios matemáticos foram retirados, retiramos parte da memória de Cayley disponibilizada no segundo roteiro, visando deixar o material mais leve, e reformulamos algumas atividades históricas, visando tornar os enunciados mais claros.

Além dos ajustes nos roteiros, o estudo piloto também proporcionou-nos a oportunidade de fazer um "ensaio" da análise dos dados, apontando alguns caminhos para decidirmos como ela deveria ser realizada. Foi, também, uma oportunidade de confirmar o argumento teórico de Kjeldsen (2011c) sobre o papel da história da matemática em revelar metarregras, tornando-as objetos explícitos de reflexão dos participantes e, ainda, testar se as atividades históricas elaboradas por nós, de fato, encorajaram o grupo a refletir sobre as metarregras que governavam o discurso das fontes e sobre suas próprias metarregras.

Dentre os resultados que a pesquisa alcançou com o estudo piloto, foi possível detectar algumas metarregras de alguns participantes. Observamos que as discussões sobre as metarregras do passado, explicitadas por meio do conteúdo dos roteiros e das atividades históricas, levaram alguns participantes a refletirem sobre suas próprias metarregras.

Um resultado muito positivo, a nosso ver, foi que nesse grupo, cujos participantes eram professores no ensino básico, as reflexões sobre as metarregras forneceram uma perspectiva para que eles refletissem sobre o modo como matrizes, determinantes e sistemas lineares são ensinados no nível básico e sobre o próprio currículo desse nível de ensino. A citação abaixo ilustra nossa conclusão:

> Foi muito interessante perceber que o conceito de matriz surgiu a partir de ideias muito diferentes do que se ensina nas escolas hoje em dia. O que, aliás, permite-nos ter um olhar mais crítico sobre o currículo de matemática nas escolas do ensino médio. (Participante Fa, depoimento)

O comentário acima remete à importância de promover o desenvolvimento de uma consciência histórica para professores. A interpretação de outras práticas sobre matrizes e determinantes levou o participante Fa a refletir sobre a sua própria prática e sobre o currículo do ensino básico.

5.2 Estudo de campo 1: sujeitos da pesquisa e estrutura do minicurso

Esse estudo foi realizado com seis alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UERJ (Universidade Estadual do Rio de Janeiro). Esses alunos já haviam cursado duas disciplinas de Álgebra Linear à época do estudo. Foi oferecido a eles um minicurso com o mesmo tema do estudo piloto: **Diferentes papeis da noção de matriz em dois episódios da História das Matrizes**. O convite para participar do estudo foi feito por intermédio de uma professora do Instituto de Matemática e Estatística desta instituição, que reuniu um grupo de alunos antecipando que se tratava de um convite para participar de uma pesquisa. Os seis aceitaram, esclarecidamente, participar como voluntários.

Os participantes serão identificados por codinomes sugeridos por eles próprios: João, Mário, Yhedi, Maria, Fernando e Darth[3]. A faixa etária variou de 18 a 24 anos e eles estavam cursando diferentes períodos do curso. A maioria não havia cursado História da Matemática, mas isto não era um impedimento para participar do minicurso. Na Tabela 5.3, resumimos algumas informações sobre o perfil dos participantes.

Participante	**Idade**	**Curso (L/B em Matemática)**	**Período**	**Cursou História da Matemática**
João	20 anos	Bacharelado	4^o	Não
Mário	20 anos	Licenciatura	4^o	Não
Yhedi	21 anos	Licenciatura e Bacharelado	8^o	Sim
Maria	18 anos	Licenciatura e Bacharelado	4^o	Não
Fernando	19 anos	Licenciatura e Bacharelado	6^o	Não
Darth	24 anos	Bacharelado	?	Cursando

Tabela 5.3: Quadro informativo sobre os participantes do estudo principal 1.

Esse estudo de campo foi realizado ao longo de seis encontros, nos meses de outubro e novembro de 2014, com três horas de duração cada, totalizando dezoito horas de trabalho. O primeiro encontro foi reservado para fazer as entrevistas iniciais

[3]O participante Darth só compareceu aos dois primeiros encontros realizando a entrevista inicial e participando da introdução ao Roteiro Sylvester.

com os participantes (Apêndice B) e parte do último encontro foi reservado para fazer as entrevistas finais. Assim, o minicurso foi realizado ao longo de cinco encontros. O cronograma do estudo de campo pode ser visto na Tabela 5.4.

Encontro	**Programação**
1º dia	Entrevistas iniciais
2º dia	Roteiro Sylvester - introdução
3º dia	Roteiro Sylvester - atividades históricas
4º dia	Roteiro Cayley - leitura coletiva da memória e atividades históricas
5º dia	Atividades históricas e questionário final
6º dia	Atividade final e entrevistas finais

Tabela 5.4: Agenda do estudo de campo 1.

A implementação dos roteiros foi a mesma que no estudo piloto. O Roteiro Sylvester foi trabalhado em dois encontros. No primeiro, fizemos uma apresentação em slides com dados biográficos de Sylvester, com uma introdução a conceitos de geometria projetiva necessários para acompanhar a prática matemática de Sylvester e com a apresentação do problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. No segundo encontro, os participantes, divididos em grupos, trabalharam nas atividades históricas.

Os conceitos de geometria projetiva foram introduzidos com linguagem moderna. Já a solução do problema dos contatos foi apresentada procurando seguir a notação original tanto quanto possível e sem utilizar matrizes, isto para que os participantes pudessem "mergulhar no pensamento da época". Essas escolhas não foram uma imposição, em alguns momentos, matrizes e notações modernas eram utilizadas para facilitar o entendimento.

As atividades históricas foram realizadas durante os encontros. Os participantes foram divididos em dois grupos assim designados: grupo 1.1 - João, Mario e Darth - e grupo 1.2 - Fernando, Maria e Yhedi. Essa configuração foi mantida para todas as atividades realizadas em grupo. Não houve um critério especial para organizar os grupos, apenas observamos nas entrevistas iniciais participantes mais desinibidos e alguns mais tímidos e sugerimos a divisão de modo a formar grupos misturando os desinibidos com os tímidos. Quando as atividades históricas do primeiro roteiro foram finalizadas, os grupos compartilharam suas conclusões fazendo uma leitura em voz alta das respostas.

O Roteiro Cayley também foi trabalhado em duas etapas: um estudo dirigido sobre as primeiras páginas do artigo de Cayley (1858) e a realização das atividades históricas. Na primeira etapa (4^o encontro), foi dado um tempo para que os participantes lessem as páginas do artigo e foi sugerido que eles marcassem e anotassem todo tipo de dúvida. Em seguida, fizemos uma leitura coletiva discutindo os pontos de dúvida e as ideias de Cayley. No mesmo encontro, os participantes iniciaram as atividades históricas que foram finalizadas no encontro seguinte.

Nesse estudo de campo, foram utilizados os seguintes instrumentos de geração de dados: i) entrevistas semiestruturadas realizadas antes e depois do minicurso; ii) registro das respostas escritas às atividades históricas de ambos os roteiros; iii) a gravação em áudio das discussões dos dois grupos enquanto eles realizavam as atividades históricas de ambos os roteiros, iv) um pequeno artigo proposto como atividade final e v) um questionário final enviado por e-mail.

Sobre a receptividade dos participantes com relação aos roteiros, eles não demonstraram muitas dificuldades em acompanhar o primeiro roteiro, mesmo na parte da introdução de conceitos de geometria projetiva, que foi novo para todos. No questionário final, algumas sugestões dadas para melhorar o Roteiro Sylvester sugeriram dificuldades que eles não externaram durante os encontros:

> [...] a parte que trata de geometria projetiva é um pouco confusa, pelo próprio conteúdo. Com a explicação falada, se torna menos difuso. Esta explicação poderia ser incluída e fazer desta parte do roteiro um pouco mais aprofundada. (Fernando)
>
> Para mim, o minicurso foi muito instrutivo, talvez mais alguns exemplos poderiam ter sido apresentados durante os encontros. (Maria)

Em relação ao segundo roteiro, alguns pontos foram delicados durante a leitura da memória de Cayley sobre matrizes (tradução das primeiras páginas da memória), como compreender o modo como Cayley definiu a multiplicação de matrizes, compreender a demonstração do teorema notável e sua aplicação para determinar as raízes da matriz identidade de ordem 2. Uma boa dose de tempo foi dedicada a discutir esses pontos com os participantes. Alguns participantes registraram suas dificuldades nas respostas ao questionário final:

> Algo que me causou estranheza foi a utilização da matriz como uma "quantidade simples", nome dado por Cayley para dizer quando uma matriz estava em "pé de igualdade" com um número, mas consegui aceitar a argumentação e entender as proposições propostas por Cayley baseadas nessa ideia de "quantidade simples". (Yhedi)
>
> Somente a passagem onde é descrita a multiplicação de matrizes, onde poderia ser descrita de forma mais branda, com mais passadas e explicações. A maneira que é apresentada muito sucinta. (Fernando)

Finalizamos este relato sobre o estudo de campo 1 apresentando alguns depoimentos registrados no questionário final:

> Apreciei o fato de o roteiro começar com uma introdução a respeito do tema a ser tratado, das notas históricas e os retratos sobre Sylvester e Cayley. Os exercícios também foram bem propostos. (Maria)
>
> Principalmente no que diz respeito à evolução histórica delas. As diferentes visões e concepções de uma matriz, este mesmo objeto que, apesar de ser um instrumento de notação, tem múltiplos significados. (Fernando)
>
> Percebi que o tempo fez com que esses conhecimentos e conceitos primordiais de Sylvester e Cayley fossem se perdendo no ensino de matrizes, o que me foi passado e ainda continua a ser passado para todos é que matrizes são meramente tabelas ou arranjos de linhas e colunas, determinantes são números associados a matrizes através de uma continha entre os elementos que compõem a matriz. (Yhedi)

5.3 Estudo de campo 2: sujeitos da pesquisa e estrutura do minicurso

Esse estudo de campo foi realizado com três alunos da UFRRJ (Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro) - Instituto Multidisciplinar, localizado na cidade de Nova Iguaçu. Na época do estudo, os participantes estavam cursando a segunda disciplina de Álgebra Linear. A pequena turma composta por nove alunos, dos quais seis estavam presentes, foi convidada a participar de um estudo de campo, no qual seria oferecido o mesmo minicurso dos estudos anteriores. No dia, cinco alunos manifestaram interesse em participar, no entanto, dois justificaram a impossibilidade de participar do estudo logo depois.

Os três estudantes que aceitaram, esclarecidamente, em participar da pesquisa eram alunos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da instituição acima, na ocasião do estudo. Assim como no estudo de campo 1, eles serão identificados por codinomes, que foram sugeridos por eles próprios: Matemático, Francisca e Raelo. Informações sobre o perfil desses participantes são apresentados na Tabela 5.5. Nenhum dos três estudantes havia passado por um curso de História da Matemática até a ocasião do estudo.

Participante	**Idade**	**Curso (L/B em Matemática)**	**Período**
Matemático	19 anos	Bacharelado	3^o
Francisca	22 anos	Licenciatura	4^o
Raelo	27 anos	Licenciatura	5^o

Tabela 5.5: Quadro informativo sobre os participantes do estudo de campo 2.

Esse estudo de campo também ocorreu ao longo de seis encontros, nos meses de outubro e novembro de 2014, com três horas de duração cada, totalizando dezoito horas de trabalho, com a mesma programação do estudo de campo 1. O cronograma, com diferenças apenas nos últimos encontros, pode ser visto na Tabela 5.6.

Encontro	**Programação**
1º dia	Entrevistas iniciais
2º dia	Roteiro Sylvester - introdução
3º dia	Roteiro Sylvester - atividades históricas
4º dia	Roteiro Cayley - leitura coletiva da memória e atividades históricas
5º dia	Roteiro Cayley - atividades históricas e atividade final
6º dia	Entrevistas finais

Tabela 5.6: Agenda do estudo de campo 2.

A implementação dos roteiros de ensino ocorreu da mesma forma que no estudo de campo 1 e os mesmos instrumentos para geração de dados foram utilizados. Como haviam apenas três participantes, as atividades históricas foram realizadas pelos três, em conjunto. Ao longo da análise dos dados, eles serão referenciados como grupo 2.1.

Notamos que nesse grupo, os participantes tiveram mais dificuldade em acompanhar o conteúdo do primeiro roteiro. Durante a introdução dos conceitos de geometria projetiva, eles ficaram bastante curiosos para saber mais sobre os pontos no infinito. O grupo estranhou bastante o uso dos termos "funções binárias" (ou funções bilineares nos termos de hoje) nos extratos de artigos de Sylvester, disponibilizados nos roteiros. Além disso, o grupo estranhou também o cálculo de um determinante a partir dos coeficientes de uma equação polinomial homogênea. Diferente dos participantes do estudo de campo 1, eles não haviam estudado ainda os conceitos de formas quadráticas e formas bilineares. Foi sugerido que eles pesquisassem esses conceitos em livros didáticos de Álgebra Linear para o encontro seguinte. Para facilitar o entendimento dos participantes, comparamos o conceito de função binária de Sylvester com o conceito moderno de forma bilinear e falamos sobre a representação matricial de uma forma bilinear e de uma forma quadrática.

Sylvester não apresentou uma definição para o "determinante de uma função binária" nos artigos sobre o problema dos contatos. Em (SYLVESTER, 1851b), um exemplo da prática elaborada foi apresentado, sem o uso de tabelas. O resultado do determinante de $U + \lambda V$ foi apresentado na forma de uma expressão polinomial em função de λ e dos coeficientes das equações das cônicas U e V. As páginas do artigo com o exemplo foram disponibilizadas para que os alunos verificassem como Sylvester trabalhava com determinantes, sem o uso de matrizes. Outras dificuldades foram percebidas pelas sugestões e opiniões expressas por esses participantes no questionário final, como por exemplo: "Não ficou muito clara para mim a diferença entre pontos de contato e pontos de interseção" (Matemático). O mesmo participante sugeriu como melhoria para o minicurso, utilizar algum *software* para facilitar a visualização das seções cônicas como interseção entre uma superfície cônica e o plano $z = 1$ (Roteiro Sylvester).

Um momento muito interessante no primeiro encontro ocorreu quando um dos participantes declarou que finalmente havia entendido a origem do termo matriz, após a leitura de um extrato do artigo de Sylvester (veja Extrato II, Roteiro Sylvester, Apêndice E):

> Matemático: Agora dá para entender porque o nome é matriz,

> também.
>
> Pesquisadora: Como?
>
> Matemático: Porque que o nome dessa bendita tabela é matriz.
>
> Raelo: Ah, é verdade.
>
> Matemático: Porque ela gera o determinante. Matriz com essa ideia de ...
>
> Raelo: É como se fosse uma matriz mãe que gera ...
>
> Matemático: Ele fala matriz mãe.

Em relação ao segundo roteiro, notamos as mesmas dificuldades que no estudo de campo 1: compreender o modo como Cayley definiu a multiplicação de matrizes, compreender a demonstração do teorema notável e sua aplicação para determinar as raízes da matriz identidade de ordem 2. Esses pontos foram mais delicadas e demandaram uma explicação detalhada, no quadro, das passagens matemáticas apresentadas por Cayley em sua memória.

Esse grupo proporcionou um momento de muita emoção quando a participante Francisca, após entender a origem da definição da multiplicação de matrizes, declarou que é esse tipo de coisa que ela quer fazer: "ajudar as pessoas a verem e entenderem essas coisas". Declarou ainda que, daquele momento em diante, não precisaria mais dizer que "a multiplicação é assim porque é e pronto, ou porque é a definição".

Dentre as sugestões para melhoria do roteiro, os participantes sugeriram a apresentação de exemplos para que os exercícios matemáticos possam ser feitos com mais segurança[4]. Finalizamos esta seção com uma opinião sobre o segundo roteiro e com dois depoimentos sobre o minicurso:

> [...] o formato de começar com o histórico do matemático e o contexto no qual ele está inserido é muito legal porque não passa a ideia de uma Matemática tão sofisticada que nada tem a ver com o convívio social. (Matemático)
>
> Muito interessante a forma como foi apresentada a história de Cayley. Gostei do roteiro ter mantido as notações da época, além das explicações bem didáticas sobre algumas propriedades de matrizes. (Raelo)

[4]Nesse grupo, a entrega dos exercícios matemáticos resolvidos foi considerada na avaliação do professor da turma.

> O minicurso esclareceu muito sobre o surgimento das matrizes, assunto que até então eu não conhecia. Mas não foi só isso, nós também (finalmente!) descobrimos o porquê de as operações com matrizes serem do jeito que são. Saímos agora, um pouco mais seguros sobre esse conteúdo importante pra muitas áreas. Outro aspecto muito legal foi conhecer o contexto e um pouco da trajetória de matemáticos precursores da Teoria das matrizes. (Matemático)

No próximo capítulo, apresentamos os resultados alcançados com a pesquisa, a partir dos estudos de campo relatados nesta seção e na anterior.

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo, apresentamos os resultados alcançados com os estudos de campo 1 e 2. Cada uma das três questões de pesquisa demandou uma análise de dados específica. Por isso, a apresentação dos resultados foi organizada em três grandes seções, uma para tratar de cada questão de pesquisa.

Visando responder à primeira questão de pesquisa, analisamos principalmente as discussões dos participantes enquanto faziam as atividades históricas propostas nos roteiros de ensino. As discussões foram gravadas em áudio e transcritas integralmente. Na análise, buscamos evidenciar reflexões sobre as metarregras históricas (Seção 3.3), discussões em que os participantes explicitassem suas metarregras relacionadas a matrizes e determinantes e discussões que indicassem conflitos comognitivos.

Além das reflexões sobre as metarregras históricas, que é um resultado em si, foram diagnosticadas três metarregras no discurso dos participantes e foram detectados três conflitos comognitivos nas discussões. Essas reflexões levaram os participantes a explicitarem suas próprias metarregras, a refletirem sobre elas e também suscitaram discussões sobre conceitos que eles estavam aprendendo ou haviam aprendido nas disciplinas de Álgebra Linear. Algumas metarregras históricas produziram conflitos comognitivos nos participantes.

Destacamos as reflexões sobre a primeira metarregra identificada no episódio de Sylvester, segundo a qual *determinantes eram calculados a partir dos coeficientes de polinômios homogêneos*. Essa metarregra foi escolhida por contrastar com o modo com o qual determinantes são calculados hoje: por meio de matrizes. O contato com um discurso governado por essa metarregra (extratos dos artigos de Sylvester) suscitou reflexões muito ricas, levando os participantes a explicitarem a metarregra segundo a qual *determinantes são propriedades de matrizes* e a questioná-la, em alguns casos. Desse modo, os participantes perceberam que essas regras mudam com o tempo. A conscientização de tal mudança levou-nos a identificar um conflito comognitivo, o qual não se manifestou na forma de uma dificuldade ou de um conflito na acepção comum da palavra, mas sim pelo reconhecimento de uma mudança nas regras do discurso.

Outra metarregra histórica cujas reflexões conduziram a resultados interessantes foi a *dupla interpretação da noção de matriz*, a qual governou o discurso de Cayley na memória de 1858. Um dos resultados foi o diagnóstico de uma metarregra identificada no discurso de dois participantes e enunciada como: *demonstrações de resultados que se baseiam apenas em casos particulares não têm validade*. Cayley baseou-se na dupla interpretação da noção de matriz na demonstração do *teorema notável*, cujos argumentos suscitaram muitas discussões e produziram um conflito comognitivo em alguns participantes. Nesse caso, o conflito se manifestou por meio de dúvidas e de intensos debates.

Visando responder à segunda questão de pesquisa, tivemos como foco para a análise as entrevistas conduzidas no início e no fim da intervenção. Em uma primeira etapa, identificamos e classificamos em categorias as concepções dos participantes sobre "o que é matriz", "o que é determinante" e sobre "a utilidade de calcular determinantes", antes e após a intervenção. Em uma segunda etapa, comparamos as concepções iniciais e as finais, para as três questões mencionadas. O objetivo foi investigar se as reflexões sobre as metarregras tiveram impacto nas concepções, em relação a essas questões, isto é, se mudanças observadas nas concepções, após a intervenção, poderiam ser associadas a essas reflexões. Para isso, observamos nas respostas dos participantes às entrevistas finais se novas representações e associações para matrizes foram indicadas e se tinham relação com as reflexões sobre as metarregras.

Os resultados apontam que as reflexões tiveram uma influência mais marcante nas concepções sobre "o que é matriz". Duas categorias estabelecidas inicialmente desapareceram, dando lugar a uma nova categoria na classificação das concepções identificadas ao final da intervenção. As reflexões sobre as metarregras reforçaram associações, no sentido de (SFARD, 1991), para o conceito de matriz. Por exemplo, a metarregra que influenciou o modo como Cayley estabeleceu as operações com matrizes, qual seja, *matriz era uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas lineares*, reforçou a associação com sistemas lineares. Essa associação refletiu-se nas respostas de alguns participantes, nas entrevistas finais, levando à formação de novas concepções.

Visando responder à terceira questão de pesquisa, analisamos a atividade final, que consistia na produção de um pequeno artigo, os questionários finais e algumas questões das entrevistas finais. A análise foi amparada na metodologia das múltiplas perspectivas (KJELDSEN, 2011a; KJELDSEN, 2011b; KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014). O objetivo nessa parte da pesquisa foi investigar o desenvolvimento de uma consciência histórica (RÜSEN, 2001) nos participantes, com orientação para as seguintes perspectivas: i) os objetos matemáticos não são eternos; ii) os objetos matemáticos não são iguais para todos. Essas perspectivas foram consideradas a partir do caso particular da história das matrizes. Os episódios históricos resgatam o problema que impulsionou a gênese das matrizes por meio do desenvolvimento da técnica de extração de menores. Além disso, trazem duas interpretações distintas de matrizes como "mãe dos menores"e como uma notação prática expressar e manipular sistemas lineares.

Buscamos evidenciar na análise a interpretação histórica realizada pelos estudantes na direção das perspectivas acima, bem como os desdobramentos dessa interpretação. Dentre os desdobramentos, citamos a compreensão da especificidade da regra para a multiplicação de matrizes, as projeções para o futuro com as reflexões sobre o ensino de matrizes e determinantes e a formação de uma visão desnaturalizada desses conceitos. A partir das reflexões sobre a prática de Sylvester em torno do problema dos contatos e o modo como os determinantes eram empregados alguns participantes vislumbraram a possibilidade de ensinar determinantes sem matrizes. Essas reflexões que implicam mudanças no ensino são autênticas, não foram mencionadas pela pesquisadora durante os encontros. Até então, o cálculo de determinantes por matrizes era uma prática *naturalizada* por esses participantes. O episódio de Sylvester trouxe o exemplo de uma prática em que as matrizes não eram o elemento central e determinantes eram calculados sem matrizes de modo consistente. Esse resultado ilustra as contribuições do estudo para a formação de uma visão desnaturalizada dos conceitos de matriz e determinante.

Iniciamos cada seção apresentando o percurso estabelecido para a análise, ou seja, a metodologia. Em seguida, descrevemos os resultados alcançados e finalizamos a seção com uma discussão e com nossas conclusões em direção a uma resposta para a questão de pesquisa.

6.1 Questão de pesquisa 1: metarregras e conflitos comognitivos

6.1.1 Metodologia de Análise

A análise apresentada nesta parte foi realizada visando responder à primeira questão de pesquisa (QP1): **Como fontes históricas possibilitam promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, a partir de conflitos comognitivos?**

Foram analisados os dados advindos das respostas escritas às atividades históricas e das discussões, gravadas em áudio, enquanto os participantes realizavam essas atividades. As atividades foram feitas em grupo, em ambos os estudos de campo (estudo de campo 1 - grupos 1.1 e 1.2, estudo de campo 2 - grupo 2.1) .

A análise desses dados baseou-se no discurso dos participantes segundo os conceitos de metarregras e de conflitos comognitivos. Retomando a definição desses conceitos, as **metarregras** ou **regras metadiscursivas** são aquelas que definem padrões na atividade dos discursantes ao tentar produzir e substancializar (*substantiate*) narrativas no nível do objeto e um **conflito comognitivo** é definido como uma situação que ocorre quando narrativas aparentemente conflitantes originam-se a partir de discursos governados por metarregras distintas. As diferenças nos discursos podem ser percebidas pelo *uso das palavras*, pelos *mediadores visuais*, pelas regras para substancializar narrativas etc. (SFARD, 2008)

Assim, começamos por explorar os dados em busca de indícios de reflexões sobre as metarregras históricas, isto é, aquelas que foram selecionadas por nós nos episódios de pesquisa de Sylvester e de Cayley (Seção 3.3), como também as metarregras dos próprios participantes. Inicialmente, olhamos para as respostas às atividades históricas. Em cada roteiro, algumas atividades foram selecionadas (Tabela 6.1) por apontar de forma mais direta ideias relacionadas às quatro metarregras identificadas por nós nos episódios de pesquisa.

Roteiro Sylvester	**Roteiro Cayley**
Questões 3, 6 e 7	Questões 2, 3, 5 e 7

Tabela 6.1: Questões para encorajar reflexões sobre metarregras.

Em seguida, exploramos as transcrições dos áudios de todos os grupos em busca de discussões sobre metarregras, começando pelas atividades elencadas na Tabela 6.1. No entanto, notamos que algumas discussões sobre metarregras iniciaram-se espontaneamente ou intensificaram-se enquanto os grupos faziam as outras questões. Percorremos, então o restante das transcrições em busca de mais discussões que fornecessem evidências de reflexões sobre metarregras.

Em um segundo momento, classificamos cada trecho de discussão, marcado na etapa anterior, de acordo com a(s) metarregra(s) em torno da(s) qual(is) a discussão desenrolava-se: aquelas selecionadas nos episódios ou as próprias metarregras dos participantes.

Quanto aos conflitos comognitivos, verificamos a ocorrência de narrativas conflitantes no discurso dos participantes, em relação ao das fontes históricas, que fossem baseadas em metarregras distintas. Inicialmente, esperávamos detectar conflitos por meio de dúvidas ou discordâncias em relação ao discurso das fontes. No entanto, houve um caso, em que os participantes reconheceram explicitamente uma mudança nas metarregras, sem manifestar sinal de dúvida ou de discordância. Esse caso também foi reconhecido por nós como a manifestação de um conflito comognitivo, como veremos na análise dos dados.

Em suma, as transcrições foram percorridas várias vezes buscando discussões que ilustrassem: i) reflexões sobre as metarregras selecionadas nos episódios de pesquisa, ii) reflexões sobre as próprias metarregras dos participantes e iii) possíveis conflitos comognitivos. Há discussões que mostram tanto indícios de reflexões sobre as metarregras selecionadas nos episódios, quanto sobre as próprias metarregras dos participantes. Há trechos que mostram indícios de conflitos e, ao mesmo tempo, sugerem reflexões sobre metarregras. Nesses casos, selecionamos os trechos que, em nosso ponto de vista, melhor ilustram um determinado resultado. Vale lembrar que entendemos as reflexões como um processo consciente, isto é, consideramos que se os participantes refletem sobre suas metarregras, eles tornam-se conscientes delas.

Não foi nosso objetivo comparar os resultados dos dois estudos de campo. Assim, optamos por organizar a apresentação dos resultados por roteiro. Para cada um, começaremos por fazer uma descrição geral das respostas escritas a todas as atividades históricas. Em seguida, apresentaremos a análise das discussões dessas atividades organizadas em três partes: reflexões sobre metarregras do discurso de Sylvester/Cayley, reflexões sobre as próprias metarregras e manifestação de conflitos comognitivos.

6.1.2 Roteiro Sylvester

As atividades históricas

Na primeira questão, esperávamos que os participantes elaborassem um resumo da prática de Sylvester para classificar o tipo de contato (quando há) entre duas cônicas a fim de que eles retomassem e lembrassem de todas as etapas do procedimento.

Questão 1.

Faça um resumo descrevendo como Sylvester classifica os tipos de contatos entre duas cônicas U e V.

Dentre os três grupos, o grupo 1.2 apresentou um resumo completo da prática de Sylvester:

> Dadas as duas cônicas a serem estudadas, Sylvester monta o elemento $U + \lambda V$ e em seguida calcula o determinante $|U + \lambda V| = 0$. Desse processo, resultam os lâmbdas que serão as raízes de $|U+\lambda V| = 0$. [...] Sylvester baseou-se na multiplicidade algébrica de cada uma das raízes. [...] Caso existam fatores comuns diferentes de 1, entre o determinante completo e os determinantes menores, os contatos serão diploidal (no caso de multiplicidade 2) ou confluente (em caso de multiplicidade 3); [...] (Grupo 1.2)

O grupo 1.1 apresentou sua resposta apenas enumerando os tipos de contatos e indicando as condições para que cada um ocorra. E o grupo 2.1 foi ainda mais sucinto, descrevendo apenas o início do processo com o estudo da multiplicidade das raízes do determinante completo de $U + \lambda V$.

Na segunda questão, introduzimos noções semelhantes as de objetos epistêmicos e técnicas epistêmicas, denominando-os como *objetos de investigação* e *técnicas*. Indicamos a *classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas* como o objeto de investigação de Sylvester (veja Seção 3.2.1) e pedimos que os participantes listassem as técnicas empregadas.

Questão 2.

Sylvester utiliza vários conceitos/ferramentas matemáticas na prática elaborada por ele para resolver o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. Para entender o papel de cada um deles na sua pesquisa, vamos identificar quais desempenham o papel de induzir novo conhecimento (objeto(s) de investigação) e quais ajudam a fornecer as respostas do problema colocado (técnicas).

O objeto de investigação de Sylvester é: a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. Liste todos os conceitos/ferramentas matemáticas que constituem as técnicas utilizadas por Sylvester, de acordo com o texto.

Consideramos que as respostas dos três grupos foram bem próximas nesta questão. Todos mencionaram o emprego de determinantes e determinantes menores:

> Conceito de determinantes, determinantes menores, noções de geometria projetiva, geometria analítica. (Grupo 1.1)
>
> Operações com polinômios homogêneos, por exemplo o cálculo de λV e propriamente o cálculo de $U+\lambda V$. Cálculo de determinantes. Noção de multiplicidade das raízes de um polinômio. Introdução do conceito de Determinante Menor. (Grupo 1.2)
>
> Equações homogêneas. Determinantes completos e "menores". Geometria projetiva e analítica. (Grupo 2.1)

O grupo 1.2 mostrou certa dificuldade em isolar as ferramentas, por exemplo: o grupo respondeu "cálculo de determinantes", ao invés de "determinantes"; "introdução ao conceito de determinante menor", ao invés de "determinante menor". De qualquer forma, consideramos que esse grupo reconheceu os determinantes e os menores como técnicas utilizadas por Sylvester.

Os grupos 1.1 e 2.1 mencionaram elementos considerados por nós como pertencentes à *configuração epistêmica* de Sylvester, como por exemplo: noções de geometria projetiva e geometria analítica. Como não introduzimos esse conceito para eles, então "aceitamos" os elementos citados como parte das técnicas. Por fim, os grupos não mencionaram as matrizes como uma técnica nas respostas acima. A dificuldade de ver as matrizes como parte das técnicas pode estar relacionada ao fato de que elas não foram utilizadas diretamente na resolução do problema dos contatos. Para investigar se haviam pontos de contatos entre duas cônicas U e V, o ponto de partida de Sylvester era a equação $|U+\lambda V|=0$, que envolvia o determinante completo. Nos casos de raízes com multiplicidade algébrica dupla ou tripla na equação cúbica obtida, os determinantes menores eram comparados com o determinante completo em busca de fatores comuns. Logo, os determinantes sobressaem dentre as ferramentas utilizadas. Além disso, representações em forma de tabela eram pouco empregadas por Sylvester no episódio considerado. Vale destacar que os participantes não tiveram acesso aos artigos de Sylvester, suas respostas basearam-se no resumo da prática de Sylvester apresentado no roteiro que continha várias citações dos artigos.

Na terceira questão, esperávamos que os participantes comparassem o modo como Sylvester empregava os determinantes, a partir de certas funções (polinômios homogêneos, com o modo atual, em que determinantes são calculados a partir de matrizes quadradas. Esta questão teve como objetivo encorajar reflexões sobre a primeira metarregra selecionada no discurso de Sylvester, segundo a qual, determinantes eram calculados a partir de polinômios homogêneos de grau 2, com a finalidade de investigar propriedades geométricas de curvas e superfícies.

Questão 3.

Descreva a diferença entre como Sylvester utilizava determinantes neste episódio da pesquisa sobre matrizes e como nós utilizamos nos dias de hoje. Veja o extrato IV.

O extrato IV foi indicado no enunciado porque trata-se de uma passagem em que Sylvester (1851b, p. 222) referiu-se ao determinante de uma função binária - em termos atuais, uma forma bilinear - explicitando o objeto sobre o qual o determinante era calculado:

Extrato IV:

(...) a teoria das funções quadráticas mistura-se a uma teoria mais ampla de funções binárias, consistindo da soma de múltiplos de produtos binários formados por combinar cada um do conjunto de quantidades x, y e z ... com cada um do mesmo número de quantidades do conjunto x', y' e z' ... Por exemplo,

$$\begin{aligned} &axx' + bxy' + cxz' \\ &+a'yx' + b'yy' + c'yz' \\ &+a''zx' + b''zy' + c''zz' \end{aligned}$$

seria uma função binária e seu determinante (não mais, como em uma função quadrática, simétrico sobre dua diagonal) corresponderia à matriz quadrada

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}\ .$$

(SYLVESTER, 1851a, p. 222, tradução nossa)

Os polinômios homogêneos com três variáveis e de grau 2, que representavam as cônicas na prática de Sylvester, são funções do tipo que Sylvester menciona no extrato acima.

O grupo 2.1 apresentou sua resposta comparando o objeto sobre o qual os determinantes eram calculados na prática de Sylvester com o objeto sobre o qual essa ferramenta apoia-se nos dias de hoje: "No passado, Sylvester utilizava o conceito de determinantes para equações binárias. Atualmente, utilizamos o conceito de determinantes sempre com uma relação com o conceito de matrizes." O grupo 1.1 apontou como diferença a ordem com a qual os conceitos de matriz e determinante são apresentados nos dias de hoje e a ordem com a qual esses conceitos surgiram: "Nos dias de hoje, construímos o conceito de determinante a partir de matrizes, já Sylvester construiu o conceito de matrizes a partir de determinantes." Já o Grupo 1.2 mencionou o objeto sobre o qual os determinantes eram calculados baseando-se em um trecho do extrato IV, no qual Sylvester associa ao determinante de uma função binária uma certa matriz quadrada (em termos atuais, a matriz canônica da forma bilinear):

> Para Sylvester, o determinante era um ente proveniente de uma função binária, e no fundo era o determinante que estava associado a uma matriz quadrada. Já para nós uma matriz é associada a um determinante, que por sua vez, é associado a um número. (Grupo 1.2)

Apesar das diferenças nas respostas dos três grupos para a Questão 3, todas mencionam a primeira metarregra que identificamos no discurso de Sylvester, segundo a qual determinantes eram calculados a partir de certas funções (polinômios homogêneos). Além disso, as respostas apontam para uma metarregra que governa o discurso da Álgebra Linear, segundo a qual determinantes são vistos como propriedades de matrizes.

A quarta questão foi proposta apenas com o intuito de que os alunos retomassem o conceito de determinante menor, conforme introduzido por Sylvester. Os participantes estavam familiarizados com o conceito de *cofator*, mas não haviam visto aplicações do conceito de *menor de uma matriz.*

Questão 4.

Explique o que é um *primeiro determinante menor* de acordo com a definição apresentada por Sylvester no Extrato I. O que é um *segundo determinante menor*? E um *r-ésimo determinante menor*?

Todos os grupos basearam sua resposta no extrato do artigo em que Sylvester introduziu os determinantes menores, incluído no roteiro.

A quinta questão foi proposta para que os alunos discutissem o papel da noção de determinante menor na prática desenvolvida por Sylvester. Nos dois casos de ocorrência de raiz, do polinômio cúbico $|U + \lambda V| = 0$, com multiplicidade algébrica maior que 1, um critério a mais foi necessário para decidir entre dois tipos de contatos associados a cada um desses casos. Assim, a noção de determinante menor desempenha um papel chave na prática de Sylvester. Além disso, foi com o intuito de generalizar a técnica de extração de sistemas de determinantes menores, a qual foi baseada em uma tabela retangular, que Sylvester introduziu a noção de matriz (BRECHENMACHER, 2006b, p. 14).

Questão 5.

Por que Sylvester precisou introduzir os determinantes menores?

Ambos os grupos mencionaram o papel da noção de determinantes menores na classificação dos tipos de contatos quando ocorriam raízes com multiplicidade algébrica maior que 1. Apresentamos a resposta mais elaborada:

> Quando a multiplicidade de cada raiz do polinômio era igual a um, Sylvester concluiu que não havia contato entre as cônicas (o determinante D pode ser escrito como $(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$). Mas, quando uma raiz tem multiplicidade 2 ou 3, Sylvester precisava diferenciar os contatos simples e diplóide e o contato próximo e confluente. Assim, ele introduziu os determinantes menores para gerar um outro critério (a análise dos fatores comuns entre os determinantes menores) para a classificação. (Grupo 1.2)

As questões 6 e 7 tiveram como objetivo encorajar reflexões sobre a segunda metarregra selecionada no episódio de pesquisa de Sylvester, segundo a qual matrizes eram usadas como uma representação em forma de tabela, para a extração de menores (matriz como mãe dos determinantes menores).

Questão 6. Baseando-se nos Extratos II, III, explique o que era uma matriz e qual o papel dessa noção para Sylvester.

Os Extratos II e III, indicados no enunciado, referem-se a trechos de artigos de Sylvester (1850b), Sylvester (1851c) em que ele descreve a noção de matriz.

Extrato II:

> (...) nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isso não representará em si mesmo um determinante, mas, uma **Matriz** da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p, e selecionar quaisquer p linhas e p colunas, os quadrados correspondendo ao que pode ser chamado de determinantes de p-ésima ordem. (SYLVESTER, 1850b, p. 150, tradução nossa, grifo nosso)

Extrato III:

> Eu defini, em um artigo anterior, uma "Matriz" como um arranjo retangular de termos, dos quais diferentes sistemas de determinantes podem ser gerados, a partir do ventre de uma mãe comum (...) (SYLVESTER, 1851b, p. 247, tradução nossa)

Os três grupos falaram de matriz como um arranjo retangular de termos, como na descrição de Sylvester, e mencionaram o papel da matriz como uma fonte geradora de determinantes menores, por exemplo: "Para Sylvester matriz é um arranjo retangular, donde se é possível formar vários sistemas de determinantes de uma mesma ordem." (Grupo 1.1)

Questão 7.

Compare a definição de matriz apresentada no Extrato II com a definição atual. Aponte pelo menos uma semelhança e pelo menos uma diferença.

Todos os grupos apontaram como semelhança a definição de matriz baseada na sua representação, isto é, como um arranjo retangular de números. Sobre as diferenças observadas, a resposta do grupo 1.1 toca na relação entre determinante e matriz para Sylvester: "A diferença é que Sylvester usou determinantes para construir a ideia de matrizes. E nós fazemos o oposto." Já a resposta do grupo 1.2 menciona novamente o papel das matrizes para Sylvester "[...] para ele, matriz também designava um arranjo do qual se originavam diferentes sistemas de determinantes."

O grupo 2.1 apresentou uma resposta curiosa sobre as diferenças observadas: "A diferença é que hoje em dia somente conseguimos calcular determinantes [menores] de matrizes quadradas." Ao serem questionados sobre essa resposta, os integrantes do grupo indicaram que estavam referindo-se aos determinantes menores. Durante as discussões sobre o Extrato II em que Sylvester introduz o termo matriz, eles estranharam a ideia de gerar determinantes menores a partir de uma matriz retangular. Isso porque eles estavam familiarizados com o conceito de *cofator*, que é usado no procedimento para calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem maior que três. Obter os cofatores de uma matriz passa pela determinação dos menores da matriz, no entanto, o procedimento aplica-se a uma matriz quadrada. O áudio das discussões desse grupo confirma a explicação dada por eles.

Nas próximas seções, examinamos as discussões dos participantes enquanto realizavam as atividades históricas, com base nas transcrições dos áudios, a fim de captar reflexões sobre metarregras e a ocorrência de conflitos comognitivos.

Reflexões sobre metarregras no discurso de Sylvester

A primeira metarregra selecionada no discurso de Sylvester encerra a ideia de que **determinantes são ferramentas usadas para investigar propriedades geométricas de curvas e superfícies e são calculados a partir de funções - polinômios homogêneos de grau 2**. Ela foi explorada na Questão 3 das atividades históricas, que solicitava aos participantes descrever a diferença entre como Sylvester utilizava determinantes e como nós utilizamos nos dias de hoje. Para desenvolver a resposta, sugerimos que os participantes levassem em conta o Extrato IV, em que Sylvester explicita o objeto sobre o qual o determinante era calculado, qual seja, funções binárias.

Todos os grupos discutiram intensamente sobre ideias relacionadas à primeira metarregra, com mais ênfase no objeto em relação ao qual os determinantes eram calculados no discurso de Sylvester (polinômios homogêneos), em comparação ao modo como os determinantes são calculados nos dias de hoje (a partir de matrizes quadradas). Para ilustrar, apresentamos alguns trechos de discussões durante a resolução da Questão 3.

> Yhedi: Então, o determinante associado à matriz. A gente que faz o contrário, a gente que associa matriz ao número real que é o determinante.
> Maria: Ah, tá. Me perdi. [pausa]
> Maria: A utilização nos dias de hoje é diferente. Porque hoje em dia, da matriz você chega em um determinante e com ele foi o contrário, do determinante, ele pediu para encontrar uma matriz e associar a esse determinante. E para ele esse determinante era determinante de uma função, hoje em dia determinante é de uma matriz. Você quer que eu escreva ou está bom?
> (Grupo 1.2)

> Matemático: Como é que ele utilizava determinante? Utilizava determinante pra relacionar com uma função.
> Raelo: Função binária no caso. Mas hoje em dia a gente faz o que? Hoje a gente aprende matriz ...
> Matemático: Mas o determinante está relacionado com a matriz.
> Raelo: Hoje em dia a gente sabe isso não é?
> (Grupo 2.1)

> Darth: A diferença é que hoje a gente liga sempre determinante à matriz.
> Mário: A gente usa determinante só para calcular equações, sistemas de equações [lineares].
> Darth: Isso. Só matriz.
> Mário: Ou para saber se [a matriz] tem inversa ou não.
> Darth: Então, tudo ligado à matriz. Então, a gente usa determinante hoje em dia ligado à matriz e ele não entendia assim, ele via a parte funcional do determinante.
> (Grupo 1.1)

Nas falas acima, os participantes não especificaram que determinantes são calculados a partir de matrizes **quadradas**, mas percebemos que o foco da discussão estava na mudança do objeto sobre o qual determinantes eram calculados: de uma função binária para uma matriz.

O grupo 1.2 mencionou ainda a inversão na ordem de apresentação das matrizes e determinantes, em relação à ordem com as quais surgiram. Nas falas do grupo 1.1, o participante Mario apresentou alguns exemplos de usos de determinante e observou que sempre estão ligados a matrizes. Levando em conta que esse grupo já havia concluído dois cursos de Álgebra Linear, achamos curioso que os exemplos apresentados por esse participante tenham sido tomados do conteúdo inicial do primeiro curso e do que se aprende no ensino básico.

A segunda metarregra selecionada por nós diz respeito ao uso que Sylvester fazia de matriz como uma representação em forma de tabela, a partir da qual sistemas de menores podem ser extraídos. Essa regra tem sido enunciada na seguinte forma, mais concisa: **matriz como mãe dos determinantes menores**.

Apesar de todos os grupos terem apresentado respostas escritas para as Questões 6 e 7, os áudios não revelaram muitas reflexões sobre a segunda metarregra. Pelas falas nos áudios, deduzimos que, ao final, os grupos 1.1 e 1.2 dividiram-se para escrever as últimas questões. Apenas o grupo 2.1 apontou em suas discussões o papel das matrizes para Sylvester:

> Raelo: A semelhança é que a gente ainda usa matrizes retangulares.
> Matemático: É, a semelhança é essa, que é um arranjo retangular igual o nosso.

> Raelo: E a diferença agora? A diferença é que a gente não faz agora essa questão dos determinantes menores, a gente não faz isso, ou melhor a gente faz mais ou menos isso quando a gente calcula matriz dos cofatores, mas é bem diferente que a gente multiplica...
> Matemático: Por menos um. A diferença ... acho que ele enxerga determinante mesmo na matriz que não é quadrada.
> Raelo: A gente só vê na matriz quadrada.
> Matemático: Ele vê vários determinantes numa matriz quadrada.
> Raelo - A diferença que hoje em dia a gente só calcula com matriz quadrada.
> (Grupo 2.1)

O diálogo acima, que se passou enquanto o grupo fazia a Questão 7, esclarece a resposta apresentada para essa questão, apontando a diferença entre a definição apresentada por Sylvester no Extrato II e a definição atual: "hoje em dia somente conseguimos calcular determinantes [menores] de matrizes quadradas". O extrato menciona, explicitamente, que vários sistemas de determinantes menores podem ser formados a partir de uma matriz retangular por fixar um número p e selecionar quaisquer p linhas e p colunas. Os participantes Matemático e Raelo conectaram essa ideia com o procedimento de calcular cofatores de uma matriz, empregado para calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem maior que 3.

Reflexões sobre as próprias metarregras

Buscamos encorajar reflexões sobre as próprias metarregras dos participantes solicitando que eles comparassem o modo como Sylvester usou determinantes e o modo como usamos hoje, que apontassem semelhanças e diferenças entre a definição de matriz apresentada por ele e a atual, bem como que discutissem o papel das matrizes no primeiro episódio estudado.

Nos diálogos apresentados anteriormente, podemos encontrar vários indícios de que os participantes perceberam e discutiram sobre suas próprias metarregras. Em vários momentos, todos os grupos discutiram sobre ideias relacionadas a uma metarregra que governa o discurso da Álgebra Linear, segundo a qual **determinantes são vistos como propriedades de matrizes quadradas**. O diálogo seguinte, que se passou enquanto o grupo 2.1 discutia a diferença entre o modo como Sylvester utilizou determinantes e como nós utilizamos nos dias de hoje (Questão 3), ilustra uma reflexão sobre a metarregra em questão:

> Matemático: Nos dias de hoje ...
> Raelo: Utilizamos o conceito de determinante ...
> Matemático: Sempre ligado a uma matriz.
> [pausa]
> Raelo: A gente não tem nenhum caso que a gente utilize determinante sem pensar em matriz?
> Matemático: Quando vai resolver o sistema, mas aí ...
> Raelo: Mas a gente constrói a matriz.
> Matemático: Não sei de nenhum caso.
> Raelo: Se tem sistema, faz a matriz.
> (Grupo 2.1)

Diante da prática de Sylvester para resolver o problema dos contatos, em que determinantes são calculados a partir dos coeficientes de um polinômio homogêneo de grau 2 com três variáveis, o participante Raelo questionou se, hoje, há alguma situação em que o determinante seja calculado sem se basear em uma matriz. Temos aqui uma situação em que um participante percebeu sua metarregra e a questionou.

O próximo diálogo ilustra uma reflexão sobre a mesma metarregra acima que surgiu espontaneamente, enquanto os integrantes do grupo 1.2 escreviam a resposta da Questão 1:

> Maria: É, eu acho que é assim. É engraçado que a matriz meio que foi concebida para explicar o determinante.
> Yhedi: Estranho porque ..., tipo assim, esses extratos ..., a gente monta sempre ao contrário: matriz, determinante da matriz, [...] Ele [Sylvester] usava determinante da função, determinante do polinômio e depois que ela chega na matriz, depois que ele diz que pode não ser um quadrado bonitinho, pode ser um retângulo, a gente pode tomar um quadrado e ter um determinante.
> (Grupo 1.2)

Os participantes Maria e Yhedi estavam discutindo sobre para quê Sylvester introduziu as matrizes e perceberam que a ordem segundo a qual os conceitos de matriz e determinantes são definidos hoje não foi sempre a mesma. Yhedi refere-se às palavras de Sylvester no Extrato II, quando ele introduz, pela primeira vez, a noção de matriz considerando um "arranjo retangular de termos" e não um "arranjo quadrado". Esse participante concluiu ainda que, hoje, os determinantes são obtidos a partir de matrizes quadradas. Temos aqui uma situação em que alguns participantes refletiram sobre mudanças nas metarregras, eles perceberam que nem sempre determinantes foram calculados a partir de matrizes.

Em outro momento, o participante Yhedi solicitou o pesquisador para saber se poderia descrever a prática de Sylvester empregando matrizes. Naquele momento, Yhedi apontou uma diferença entre a definição de matriz dada por Sylvester e a definição atual.

> Yhedi: Posso falar do termo matriz como a gente fala hoje em dia?
> Pesquisadora: Como assim?
> Yedhi: Para o Sylvester, a matriz é a geradora de um determinante quando você toma p linhas e p colunas. Para a gente, hoje, matriz é qualquer tabela com linhas e colunas e elementos ali dentro ...
> (Grupo 1.2)

A fala de Yhedi sugere que ele parece orientar-se por uma metarregra segundo a qual **o conceito de matriz é descrito com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela**. Podemos perceber tal metarregra em narrativas do tipo "matriz é uma tabela com linhas e colunas", "matriz é um arranjo retangular de números", entre outros. Identificamos a mesma metarregra nas discussões de outro grupo:

> Darth: Agora, uma diferença. Deixa eu pensar.
> Mário: É que ele [Sylvester] usa o determinante para definir o conceito de matriz. E a gente não usa mais. A gente só diz que é uma tabelinha.
> (Grupo 1.1)

Sylvester também descreveu matrizes com base nos elementos característicos de sua representação. No entanto, na descrição apresentada por esse matemático, a noção de matriz é identificada com a prática de extração de determinantes menores. As discussões dos grupos 1.1 e 1.2 acima indicam reflexões sobre o fato de que as matrizes não são mais definidas a partir de determinantes, isto é, o conceito foi isolado do contexto de sua gênese, passando a ser descrito apenas como uma tabela.

Os livros-textos de Álgebra Linear definem matriz como uma tabela ou um agrupamento retangular de números, isto é, esses livros também descrevem o conceito de matriz com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela. Essa definição promove a identificação do conceito de matriz com sua representação em forma de tabela e costuma ser a única definição apresentada aos alunos nas disciplinas de Álgebra Linear.

Conflitos comognitivos

Como vimos nas duas seções anteriores, os participantes perceberam que determinantes nem sempre foram calculados a partir de matrizes e que houve uma mudança nas metarregras em relação ao discurso de Sylvester e ao discurso matemático atual. No primeiro, determinantes eram calculados a partir dos coeficientes de um certo polinômio homogêneo. Nos dias de hoje, determinantes são vistos como propriedades de matrizes. Essa mudança nas metarregras produziu conflitos comognitivos em todos os participantes.

Identificamos outro conflito que se manifestou em todos os grupos. No Extrato IV (veja enunciado da Questão 3, nas atividades históricas), Sylvester disse que o determinante de uma função binária corresponderia a uma certa matriz quadrada, em seguida, ele apresentou o que nós reconhecemos hoje como a matriz canônica de uma forma bilinear (função binária, nas palavras dele). A narrativa de Sylvester sugere que ele partiu de um determinante e associou a ele uma matriz quadrada. Tal narrativa, ao considerar uma correspondência entre determinantes e matrizes quadradas, é conflitante com a dos participantes, que consideravam a correspondência no sentido contrário, isto é, entre matrizes quadradas e determinantes. Para ilustrar o conflito, vamos nos basear nos diálogos do grupo 1.1 cuja discussão foi mais intensa. A discussão sobre a referida correspondência tem início no seguinte trecho:

> Mário: Qual a diferença entre determinante de hoje e do passado?
> João: Me fala e eu escrevo.
> Mário: É que hoje em dia a gente só utiliza determinante para calcular ... A gente associa determinante à matriz. Não. A gente associa matriz a determinante ou determinante à matriz?

> Darth: A gente tem uma matriz e associa o determinante a essa matriz.
> Mário: É.
> João: Ele fez o contrário.
> (Grupo 1.1)

Nos dias atuais, o determinante é visto pela comunidade matemática como uma função que associa a cada matriz quadrada um número. Como duas matrizes podem ter um mesmo determinante, trata-se de uma função que não é injetora. Os integrantes desse grupo estranharam o fato de Sylvester associar um determinante dado a uma matriz quadrada, muito embora não haja ambiguidade na representação analítica da função bilinear, nem na representação matricial apresentada na fonte. Nas falas acima, os participantes pareciam ter aceitado a conclusão de Darth acerca da associação entre uma matriz e um determinante e que Sylvester fez o contrário. No entanto, em outro momento a mesma discussão voltou à tona:

> Mário: Sylvester pegava determinante e fazia correspondência com matriz.
> Darth: Pegava determinante ...
> [...]
> Mário: Ele criava uma correspondência com as matrizes. Foi isso que está aqui no texto, no extrato 4 está escrito isso. Determinante corresponde à matriz quadrada.
> Darth: Uma pergunta: ele criou uma correspondência biunívoca entre determinante e matriz, não é?
> Mário: Porque nem toda matriz tem determinante.
> Darth: Não pode servir como um correspondente.
> Mário - Nem toda matriz tem ...
> Darth: Exato. E, às vezes, duas matrizes diferentes têm o mesmo determinante. Ou seja, não é injetiva. Não é injetiva, não é sobrejetiva [...]
> João: É sobrejetiva.
> Darth: Oi?
> João: É sobrejetiva.
> Darth: Ah, é sobrejetiva. Mas não é injetiva. Realmente, sobrejetiva, porque tu tem um número e pode pegar uma matriz associada, está certo.
> João: É muito boa. A matriz ter uma sobrejeção é uma coisa

muito boa.
(Grupo 1.1)

O conflito que detectamos acima foi desencadeado pelas diferenças entre as metarregras que influenciaram o discurso de Sylvester e as dos participantes que entendiam determinantes como propriedades de matrizes quadradas. A narrativa de Sylvester acerca da correspondência entre um determinante e uma certa matriz (Extrato IV) gerou dúvidas entre os participantes que foram diluídas, pelos eles próprios, ao reconhecerem que estavam diante de um discurso governado por metarregras distintas das atuais.

6.1.3 Roteiro Cayley

As atividades históricas

Nesta seção, apresentamos as atividades "históricas" contidas no Roteiro Cayley e uma descrição geral das respostas escritas elaboradas pelos três grupos às atividades históricas.

Na primeira questão, solicitamos aos participantes identificar os objetos de investigação e as técnicas usadas no episódio de pesquisa de Cayley, de acordo com a tradução da memória de Cayley (CAYLEY, 1858) disponibilizada no roteiro. Com isso, esperávamos que os participantes percebessem que as matrizes adquiriram *status* de objeto de investigação no episódio de Cayley.

Questão 1.

Qual é o objeto de investigação de Cayley de acordo com o que você viu neste roteiro? Liste as técnicas utilizadas por Cayley na parte da memória que você estudou.

Tanto os grupos 1.1 quanto 2.1 mencionaram matrizes como o objeto de investigação de Sylvester, sendo que o primeiro também mencionou as operações com matrizes. Com relação às técnicas, o grupo 1.1 apontou as funções lineares e o grupo 2.1 apontou funções algébricas, sistemas lineares e suas operações. O grupo 1.2 parece não ter entendido o enunciado, sua resposta não deixa claro qual é o objeto e quais as técnicas do episódio de pesquisa de Cayley: "Cayley interpreta as matrizes como uma notação simplificada de sistemas lineares a partir dos quais vai usar para definir as operações com matrizes."

Neste roteiro, os participantes analisaram a demonstração do "teorema notável"apresentado por Cayley cujo resultado afirma que toda matriz (quadrada) satisfaz uma equação algébrica cujo grau coincide com sua ordem, resultado hoje conhecido como Teorema de Cayley-Hamilton[1]. Além disso, analisaram como Cayley aplicou esse resultado para determinar as raízes quadradas da matriz identidade de ordem 2. Cayley utilizou determinantes e polinômios de matrizes. Observamos que nenhum dos grupos citou determinantes e polinômios como técnica. O grupo 2.1 pode ter considerado os polinômios quando mencionou funções algébricas em sua resposta.

Jankvist (2009) também utilizou noções semelhantes as de objetos epistêmicos e de técnicas epistêmicas no estudo de campo de sua tese de doutorado. Esse pesquisador implementou dois módulos de ensino, sobre a história dos códigos corretores de erros e sobre a história da criptografia de chave pública, com uma turma do ensino secundário dinamarquês (16 a 19 anos) ao longo de dois semestres. Dentre as atividades que os estudantes tiveram que cumprir, foi solicitado a eles escreverem um texto descrevendo os objetos e técnicas dos episódios abordados nos módulos de ensino. Ele concluiu que identificar tais noções nos episódios considerados foi uma questão difícil para os estudantes do nível secundário.

Apesar de termos trabalhado com alunos do nível superior e que estudam matemática, também notamos que os participantes de ambos os estudos de campo tiveram dificuldade em fazer essa leitura. Há a possibilidade também da questão não ter sido bem elaborada.

Na questão 2, nosso objetivo foi suscitar nos participantes reflexões sobre a primeira metarregra selecionada no episódio de pesquisa de Cayley e segundo a qual matrizes são vistas como *uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas lineares*.

Questão 2.

Compare a descrição de matriz apresentada por Cayley (veja a primeira página da tradução da memória) com a definição atual. Você vê semelhanças? Se sim, quais? Você vê diferenças? Se sim, quais?

O grupo 1.2 apontou como diferença a associação entre matrizes e sistemas de

[1] O Teorema de Cayley-Hamilton garante que se A é uma matriz quadrada de ordem n e $p_A(x)$ é o seu polinômio característico, então $p_A(A) = 0$ onde 0 é a matriz quadrada nula de ordem n.

equações lineares por Cayley enquanto, nos dias de hoje, matrizes são apresentadas como tabelas de números, isto é, como objetos matemáticos. Já o grupo 2.1 apontou a mesma associação como semelhança. Com relação às diferenças apontadas pelo grupo 2.1: i) "a associação de matriz a uma quantidade" refere-se à dupla interpretação de Cayley sobre matrizes como quantidades múltiplas (um sistema de números) e como quantidades simples (um número) (BRECHENMACHER, 2006b) e ii) "o fato de Cayley definir a matriz do determinante" refere-se à forma como ele estabelece a correspondência entre determinantes e matrizes, partindo de um determinante e associando a ele uma matriz. Optamos por apresentar aqui as respostas completas dos três grupos (Tabela (6.2)).

Grupo	**Semelhanças**	**Diferenças**
1.1	Os dois casos associam matrizes como um arranjo retangular.	A ideia de matrizes para Cayley surge naturalmente através de equações lineares.
1.2	Ainda usamos as disposições em linhas e colunas.	Cayley descreve a matriz como sendo a listagem dos coeficientes das equações de um sistema linear, enquanto que nos dias de hoje uma matriz é vista simplesmente como uma tabela ou um arranjo de números. As concepções eram completamente distintas.
2.1	Matrizes são consideradas arranjos de números com linhas e colunas e são associadas a um sistema de equações lineares.	A associação de matriz a uma quantidade e o fato de Cayley definir a matriz do determinante.

Tabela 6.2: Respostas da Questão 2.

Nosso objetivo com a próxima questão foi suscitar discussões sobre a rotina empregada por Cayley para definir as operações com matrizes, com base na primeira metarregra selecionada neste episódio.

Questão 3.

Fale sobre o modo como Cayley estabelece as regras para as leis de adição, de multiplicação por uma quantidade simples e multiplicação ou composição de duas matrizes. Compare com o modo como os livros didáticos de Álgebra Linear apresentam as operações com matrizes.

Os três grupos mencionaram que Cayley apoia-se em sistemas de equações lineares para definir as operações com matrizes.

Como discutimos na Seção 3.1.2, na memória de 1858, Cayley refere-se a "conjuntos de equações lineares" para introduzir as matrizes e suas operações. No entanto, a passagem da representação matricial do sistema para a representação por equações é tratada por meio de *funções lineares*, isto é, a multiplicação de cada linha da matriz dos coeficientes do sistema pela matriz coluna das variáveis do sistema é vista como uma *função linear*. Do ponto de vista atual, reconhecemos que Cayley estava usando transformações lineares em sua memória. A diferença entre sistemas lineares e transformações lineares não parecia necessária.

Em relação ao modo como os livros didáticos apresentam as operações com matrizes, a resposta do grupo 2.1 foi bastante interessante. O grupo apresentou um problema envolvendo multiplicação de matrizes para ilustrar como os livros de Álgebra Linear definem as operações:

> [...] vemos que Cayley mantém a ideia de Sistemas lineares e no livro vemos que é utilizado tabela e intuição. [...] Utilizando exemplos reais, veja:
>
> | 2001 | | |
> |---|---|---|
> | Produção | | |
> | | Acre | RN |
> | soja | 100 | 200 |
> | feijão | 300 | 400 |
>
> | 2002 | | |
> |---|---|---|
> | Produção | | |
> | | Acre | RN |
> | soja | 250 | 400 |
> | feijão | 150 | 100 |
>
> Para calcularmos a produção durante os anos de 2001 e 2002, faríamos:
>
> | 2001/2002 | | |
> |---|---|---|
> | Produção | | |
> | | Acre | RN |
> | soja | 100+250 | 200+400 |
> | feijão | 300+150 | 400+100 |

Durante os encontros, foram disponibilizados alguns livros de Álgebra Linear: (BOLDRINI et al., 1980), (CALLIOLI; DOMINGUES; COSTA, 1990) e (LIMA, 1998). O grupo acima elaborou sua resposta com base em (BOLDRINI et al., 1980). Alguns livros motivam a definição das regras para a multiplicação de matrizes por problemas do tipo acima. Nós questionamos se tais situações não seriam artificiais para problematizar as operações com matrizes.

Os demais grupos argumentaram que os livros didáticos apresentam as definições das operações com matrizes sem nenhuma problematização:

> As operações definidas por Cayley foram construídas sobre a sua ideia de sistemas lineares, ou seja, operar com matrizes era operar com os sistemas por elas representados. De maneira bem adversa, os livros didáticos atuais não dão nenhuma interpretação para matrizes e suas operações são simplesmente apresentadas sem a menor contextualização. (Grupo 1.2)
>
> Diferentemente como o livro de ALI define as operações como uma definição já conhecida, Cayley define as regras através das operações em cima dos Sistemas lineares. (Grupo 1.1)

Nas questões 4 e 5, nosso objetivo foi suscitar reflexões sobre a segunda metarregra selecionada no episódio de pesquisa de Cayley, acerca da *dupla interpretação da noção de matriz.*

Questão 4.

Explique o que Cayley quis dizer com "*uma matriz considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade*" (veja o item 10 do extrato).

As respostas a essa questão foram bem objetivas. Os três grupos mencionaram a associação entre uma matriz escalar e um número, para ilustrar:

> Simplesmente interpretar uma matriz como um escalar multiplicando a matriz unidade (identidade). Colocando assim a matriz em pé de igualdade com um número. (Grupo 1.2)

Questão 5.

a) Enuncie, com suas palavras, o "teorema notável" que Cayley menciona na primeira página da memória e apresenta nos itens 21, 22 e 23 da memória.

b) A demonstração do teorema para matrizes de ordem 2, no item 21, faz uso do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} a - M, & b \\ c, & d - M \end{vmatrix},$$

cuja expressão é $M^2 - (a+d)M^1 + (ad-bc)M^0$. Nos dias de hoje, a demonstração de Cayley seria aceita como correta? Explique.

No item a), os grupos 1.2 e 2.1 mencionaram corretamente o resultado do teorema notável de Cayley sobre a existência de um polinômio de grau igual à ordem da matriz e que é anulado pela matriz. A resposta do grupo 1.1 foi incompleta neste item. No item b), os grupos 1.2 e 2.1 responderam que a demostração não seria considerada correta devido à subtração de um elemento da matriz m pela própria matriz M:

> Acreditamos que não seria aceita pois ele utilizou um método que consiste em subtrair da matriz M a quantidade M envolvendo a matriz unidade e depois calcular o determinante disso concluindo que ele é igual a zero. O problema está no fato de ora Cayley tratar M como uma matriz e ora tratar como uma quantidade simples, isso na mesma demonstração. (Grupo 2.1)
>
> Não. Pois não é definida a adição de um escalar por uma matriz. Dessa forma seria inconcebível, por exemplo, $(a - M)$ ou $(d - M)$. (Grupo 1.2)

O mesmo motivo parece não ter incomodado o grupo 1.1 que justificou sua resposta pelo fato da demonstração apresentada por Cayley contemplar um caso particular: "Não, pois seria considerado um caso particular ou exemplo".

Na Questão 6, solicitamos aos participantes que comparassem o modo como Sylvester e Cayley empregavam determinantes em suas práticas, a fim de que eles notassem que Cayley já calcula o determinante de uma matriz quadrada.

Questão 6.

Compare o modo como Sylvester usou determinantes - de acordo com o primeiro roteiro - e o modo como Cayley usa determinantes - de acordo com esse roteiro.

Todos os grupos observaram que Cayley calculava determinantes a partir de matrizes quadradas, os grupos 1.1 e 1.2 procuraram indicar com que finalidade Sylvester empregava determinantes. Para ilustrar, apresentamos a resposta do grupo 1.2:

> Sylvester usa determinantes como uma ferramenta para obtenção dos pontos de interseção de curvas. Enquanto que Cayley usa determinantes para o cálculo de matrizes que representam sistemas lineares.

Observamos que a resposta do grupo acima não traduz de modo correto a finalidade de Sylvester com o uso determinantes, pois ele utilizou essa ferramenta para classificar os tipos de contatos entre duas cônicas e não para obter os pontos de interseção entre duas curvas quaisquer.

Por fim, com a Questão 7, esperávamos que os participantes comparassem as diferentes interpretações de matriz vistas nos roteiros e discutissem sobre as concepções deles sobre matrizes.

Questão 7.

Para você, o que é matriz? O que era matriz para Sylvester? O que era matriz para Cayley?

Sobre a pergunta "O que era matriz para Sylvester?", os três grupos mencionaram o papel das matrizes para Sylvester como "mãe dos menores". Sobre o que era matriz para Cayley, os três grupos mencionaram o papel de matriz para esse matemático como uma notação cômoda para sistemas de equações lineares. Sobre a primeira parte da questão, suas respostas diferiram sensivelmente:

> [...] nós víamos as matrizes como um arranjo de números reais ou complexos dispostos em linhas e colunas, que podiam ser manipulados com operações, agora conseguimos associar as matrizes com os sistemas de equações lineares e podemos dizer que elas não apenas são números dispostos em linhas e colunas, mas sim representam sistemas de equações. (Grupo 2.1)
>
> Matrizes é ente matemático que consiste em arranjo de informações. (Grupo 1.1)
>
> É uma ferramenta gráfica matemática que pode ser utilizada em diversas áreas de estudo. (Grupo 1.2)

A resposta do grupo 2.1 parece indicar que o conceito de matriz ganhou um certo sentido com a associação a sistemas lineares após a intervenção com o minicurso. Já as respostas dos grupos 1.1 e 1.2 com as narrativas "um ente matemático" e "uma ferramenta gráfica matemática"sugerem que eles não tinham uma ideia bem formada sobre o conceito de matriz.

Nas próximas seções, examinamos as discussões dos participantes enquanto realizavam as atividades históricas, com base nas transcrições dos áudios, a fim de captar reflexões sobre metarregras e a ocorrência de conflitos comognitivos.

Reflexões sobre metarregras no discurso de Cayley

A primeira metarregra selecionada no discurso de Cayley, qual seja, **matriz é uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas de equações lineares**, foi empregada nas rotinas para definir as regras para as operações com matrizes. Ela foi explorada nas Questões 2, 3 e 7 das atividades históricas. A Questão 2 requeria que os participantes levantassem semelhanças e diferenças entre a descrição de matriz apresentada por Cayley e a definição atual. A Questão 3 visava provocar discussões sobre o modo como Cayley definiu as operações com matrizes. A Questão 7 solicitava comparar as concepções de Sylvester e de Cayley sobre matriz e discutir sobre a própria concepção deles.

Para ilustrar reflexões sobre a metarregra em questão, começamos por apresentar alguns trechos de discussões do grupo 1.2, que foram mais acaloradas em relação aos outros grupos. No trecho abaixo, os integrantes estavam iniciando a Questão 2:

> Fernando: A descrição da matriz. Ele descreve a matriz como sendo uma notação mais enxuta de um sistema, não é?
> Yhedi: "Nesta memória, ele apresentou uma notação para as matrizes [...]"[lendo o roteiro] Está aqui. Beleza. [pausa] Primeira página da introdução.
> Fernando: [...] [lendo o roteiro] É isso. A descrição apresentada por Cayley. A notação enxuta para sistemas lineares. E qual a definição atual para a gente?
> (Grupo 1.2)

Baseando-se na introdução do roteiro, o participante Fernando menciona que matriz é uma "notação enxuta" para sistemas lineares. Mais à frente, os integrantes do mesmo grupo discutiram sobre o modo como Cayley definiu as regras para as operações com matrizes (Questão 3):

> Yhedi: Adição, de maneira, para mim, parecidíssima. Ele falou: "Basta você somar termo a termo".
> Fernando: Meio que termo a termo, não é?
> Yhedi: Ele falou que outras duas ... mas parecia isso porque termo a termo é a soma, a multiplicação por escalar. A única diferença é que ele meio que adota o ... ele escreve escalar de maneira diferente.

> [...]
> Fernando: Multiplicação por escalar está antes aqui. Ele primeiro multiplica as variáveis.
> Yhedi: Na verdade, a soma é totalmente diferente. Ele soma os sistemas.
> Fernando: Todas as definições de operações, para ele, são baseadas em sistema. A concepção de uma matriz para ele nada mais é do que um sistema com a notação.
> (Grupo 1.2)

Yhedi começa observando que a definição da soma de matrizes é "parecidíssima" com a de hoje. E depois conclui que, na verdade, a definição da adição de matrizes é diferente da apresentada nos livros didáticos de hoje, pois, no texto de Cayley a adição é definida por meio da "adição de dois sistemas lineares". Em seguida, Fernando observa que todas as definições das operações com matrizes baseiam-se em sistemas lineares e conclui sobre o papel das matrizes como uma notação para trabalhar com sistemas lineares.

Também encontramos evidências de reflexões sobre a primeira metarregra nas discussões dos grupos 1.1 e 2.1. Apresentamos um trecho de uma discussão entre os integrantes do grupo 1.1, em que ideias relacionadas à metarregra em questão são levantadas enquanto eles decidiam sobre as semelhanças e diferenças entre a descrição de matriz de Cayley e a definição atual (Questão 2):

> Mário: De novo. Semelhança, a parte que ele fala de quantidades arranjadas na forma de um quadrado ou retângulo.
> João: A construção ... A diferença é que ele constrói a matriz sobre um sistema linear.
> Mário: Diferença é que a ideia de matriz surgiu a partir de sistemas lineares e não ao contrário.
> (Grupo 1.1)

As discussões do grupo 2.1 não apontam reflexões explícitas sobre a primeira metarregra, mas esse grupo fez uma comparação interessante entre o modo como Cayley apresentou as definições das operações com matrizes com a apresentação de um livro de Álgebra Linear[2], o que, de certa forma, tem relação com a primeira

[2]O livro didático em questão foi o de Boldrini et al. (1980), que foi disponibilizado junto com outros durante os encontros.

metarregra:

> Matemático: Ele estabeleceu as regras [as definições das operações com matrizes], a partir das regras que já existiam para sistemas de equações lineares. O livro didático de Álgebra Linear está falando aqui, ele estabelece as regras usando intuição e tabela. Tabela de alimento, tabela de preço, se você quer saber o preço de cada alimento multiplica a tabela dos alimentos com a dos preços. Mas ele não explica porque faz isso assim.
> Francisca: Usando intuição por tabela?
> Raelo: É intuição e tabela.
> Francisca: Ele escreve isso, "intuição"? Quem é esse cara?
> Matemático: Não. Ele não escreveu isso não, mas ele falou assim, tem uma tabela aqui de soja, uma tabela de grãos por região, aí ele fala que, por exemplo, a soja custa 30, o feijão custa 20, o arroz custa 10 e o milho custa 5. Quanto é que vai ser o custo em cada região, de cada produto, aí você pega essa matriz aqui e multiplica pela matriz coluna com o preço de cada região, aí você vai ter soja, vai multiplicar com coluna da soja ...
> Raelo: Não. Nesse caso é o ensino didático mesmo, tem que fazer um exemplo real para a gente entender o que é, coisa que o Cayley não fazia, ele só usava números e linguagem técnica.
> (Grupo 2.1)

As falas acima levam-nos a refletir sobre o modo como alguns livros didáticos, sobretudo no ensino básico, motivam as definições das regras para as operações com matrizes. O recurso a situações como a descrita pelo grupo 2.1, envolvendo o cálculo do custo da produção de alimentos por meio de matrizes e operações com matrizes, ajuda a ilustrar as operações com matrizes. No entanto, no caso da multiplicação de matrizes, não justifica a especificidade da regra para essa operação.

A segunda metarregra identificada por nós no discurso de Cayley diz respeito à **dupla interpretação da noção de matriz** ora como uma "quantidade simples", isto é, um número, ora como uma "quantidade múltipla", isto é, a própria matriz. Ela foi explorada principalmente na Questão 5 por meio da demonstração do "teorema notável", que se baseia na noção de matriz como "quantidade simples". No entanto, observamos reflexões sobre essa metarregra enquanto os grupos faziam outras questões. Os trechos abaixo ilustram reflexões de integrantes do grupo 2.1

sobre a metarregra em questão.

> Francisca: A semelhança seria, no caso ...
> Matemático: A questão do arranjo que, mesmo atualmente, a gente consegue fazer essa analogia de matriz com sistema linear.
> Francisca: A associação de matrizes com sistemas lineares. E a diferença gritante é que ele pega uma matriz como se fosse um número, uma quantidade.
> (Grupo 2.1)

Francisca observou como diferença entre a descrição de matriz apresentada por Cayley e a definição atual (Questão 2), a dupla interpretação de matriz por Cayley, mais especificamente, a possibilidade de interpretar uma matriz como um número, de acordo com a noção de matriz quantidade simples. A discussão sobre a metarregra em questão voltou à tona enquanto o grupo fazia a Questão 5:

> Raelo: Mas o que ele fez de mais na demonstração? Ele subtraiu na matriz, "a" da matriz ...
> Matemático: Ele subtraiu a matriz M da quantidade associada a matriz unidade M.
> Raelo: A matriz M ...
> Matemático: A matriz M ele falou que é a, b, c, d.
> Raelo: Menos a quantidade M envolvendo a matriz unidade.
> Matemático: Daí ele associou a matriz a uma quantidade, aí ele fez a matriz menos essa quantidade para esse determinante.
> Raelo: Por que isso é errado? Tá, a gente não faz hoje em dia, mas a demonstração estava certa. Se a gente lê a explicação dele, a gente entende.
> Francisca: É.
> Matemático: Ele fala: imagina essa matriz aqui e forme o determinante $a - M$ ... Eu acho que não seria correto nos dias de hoje porque nos dias de hoje isso aqui não faz sentido, $a - M$ se o M é uma matriz, nos dias de hoje. Para ele M era uma matriz e ao mesmo tempo um número, mas nos dias de hoje M é uma matriz e uma matriz não é um número.
> (Grupo 2.1)

Para demonstrar "o teorema notável", Cayley operou simbolicamente com M e formou o seguinte determinante:

$$\left| \begin{matrix} a - M, & b \\ c & d - M \end{matrix} \right|,$$

a fim de obter a expressão $\mathsf{M}^2 - (\mathsf{a}+\mathsf{d})\mathsf{M}^1 + (\mathsf{ad}-\mathsf{bc})\mathsf{M}^0$. A operação foi justificada com base na noção de matriz como quantidade simples. No entanto, na demonstração, M não é um escalar. Ele aplica a noção de "matriz quantidade simples" a uma matriz cheia.

O participante Raelo pareceu não se incomodar com as subtrações $a - M$ e $d - M$ no determinante indicado, ao contrário de Matemático, o qual alegou que "nos dias de hoje isso aqui não faz sentido" pois uma matriz M não é mais vista como um número.

O próximo trecho ilustra uma reflexão do grupo 1.2 sobre a mesma noção de matriz como quantidade simples, a discussão ocorreu enquanto o grupo fazia a Questão 4.

> Yhedi: Agora sim, aquele negócio que você apontou.
> Fernando: Ele escreveu um número como sendo uma matriz vezes a unidade. Escreveu numa letra, não é? Escalar como sendo a matriz vezes a identidade. Como sendo o escalar vezes a identidade, mas aquilo para ele é uma notação de matriz. [pausa] Mas até agora não entendi porque eles chamam de uma matriz considerada com a quantidade simples.
> Yhedi: É o número.
> Fernando: Mas que raio de número é esse?
> Yhedi: Qualquer número, tá? Três. Vai ser três ou... 300 030 003 [matriz diagonal].
> (Grupo 1.2)

O participante Fernando estranhou a ideia de interpretar uma matriz como uma quantidade simples, já Yhedi compreendeu que essa interpretação de Cayley levava a considerar uma certa matriz como um número: a matriz hoje dita escalar, com os elementos da diagonal principal iguais a um número m e os demais elementos nulos, era associada ao número m por Sylvester. Atualmente, essa associação seria aceita como válida na comunidade matemática sob a justificativa de que o espaço vetorial real das matrizes quadradas do tipo escalar, de ordem n, sobre o corpo dos números reais, e o espaço dos números reais são isomorfos.

Por fim, não observamos discussões entre os integrantes do grupo 1.1[3] enquanto realizavam a Questão 4, sobre a interpretação de matriz como uma quantidade simples. O participante João solicitou a intervenção do pesquisador no momento em que pensavam nas questões 4 e 5 alegando que "Essa história de quantidade simples está meio confusa". Não apresentaremos trechos dessa conversa aqui, devido à qualidade do áudio que ficou comprometida, mas foi necessário que o pesquisador discutisse junto com eles o modo como Sylvester definiu uma matriz considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade e o problema que surge na demonstração do teorema notável, quando ele forma o determinante estabelecendo uma operação entre os termos da diagonal e a própria matriz.

Reflexões sobre as próprias metarregras

Nos trechos de discussões citados anteriormente, podemos encontrar indícios de que os participantes refletiram sobre suas próprias metarregras, por exemplo, na fala do participante Matemático ao observar que, nos dias de hoje, uma matriz não é considerada um número.

Encontramos mais discussões reforçando que alguns participantes orientam-se pela metarregra segundo a qual **o conceito de matriz é descrito com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela**. As discussões relacionadas a essa metarregra surgiam sempre que os participantes levantavam as semelhanças entre a descrição de matriz apresentada por Cayley e a definição atual e também quando tentavam responder "o que é matriz?".

> Yhedi: Então vamos lá. A descrição apresentada por Cayley e a descrição atual e as semelhanças.
> Fernando: Quais?
> Yhedi: A disposição de linhas e colunas. Informação, tabela.
> Fernando: Sim.
> Yhedi: Mesmo ele fazendo sua própria representação do sistema, a matriz continua sendo um arranjo de linhas e colunas.
> (Grupo 1.2)

[3] O grupo 1.1 passou a ser composto por Mario e João. O participante de codinome Darth deixou de participar do minicurso a partir do 4^o encontro.

> Francisca: Acho que está bom. Ih, não sei definir isso. Pra você o que é matriz? Uma tabela, ou melhor, uma matriz é um vetor onde eu posso colocar vários dados e manipulá-los do jeito que eu quiser.
> Raelo: Ok, pra mim o ... Mas, espera aí, são 3 [participantes].
> Francisca: A gente tem que chegar a um consenso.
> Matemático: Eu acho que é um arranjo de números.
> [...]
> Raelo: Seja A a matriz quadrada de duas colunas ... Você falou que é um arranjo de números.
> Matemático: Um arranjo de números de reais ou complexos dispostos em linhas e colunas.
> (Grupo 2.1)

> João: Sete. O que é matriz para você, Mário? Para mim é um ente matemático que consiste numa tabela. Pronto. A grosso modo, é uma tabela.
> Mário: Matriz é uma tabela que tem como entradas números reais.
> João: No qual eu posso fazer operações. Ponto.
> (Grupo 1.1)

A metarregra em discussão - a qual influencia o modo como o conceito de matriz é descrito - foi identificada na seção anterior, a partir das discussões que ocorreram durante as atividades do Roteiro Sylvester. As citações acima ilustram reflexões sobre essa metarregra por parte dos três grupos. A partir do reconhecimento de semelhanças com a descrição de matriz apresentada por Cayley, os participantes explicitaram o modo como eles próprios descrevem esse conceito, isto é, a partir dos elementos característicos da representação em forma de tabela.

Outra metarregra foi identificada no discurso de dois participantes do grupo 1.1. O trecho abaixo ilustra uma discussão sobre a validade da demonstração de Cayley para o "teorema notável"(Questão 5).

> Mário: Isso só dá para um caso particular e estende para o ...
> João: Só no caso particular?
> Mário: Admite que é verdadeira .... Acredito que não. Letra b.
> João: Consideramos isso apenas como exemplo. [pausa]
> Mário: Seria considerado um caso particular ou exemplo. (Grupo 1.1)

Os participantes concluem que a demonstração não seria aceita como correta porque a mesma é construída para uma matriz de ordem 2, isto é, apenas um caso particular é contemplado na demonstração. As falas acima sugerem que Mário e João pareciam orientar-se por uma metarregra segundo a qual **demonstrações de resultados que se baseiam apenas em casos particulares não têm validade**.

No artigo, Cayley (1858) comentou a validade do teorema para uma matriz quadrada de ordem 3 e mencionou não achar necessário "realizar uma demonstração formal do teorema no caso geral de uma matriz de qualquer grau". A metarregra revelada por Mario e João está de acordo com as regras para demonstrar em matemática, mas o grupo não percebeu o problema mais grave na demonstração apresentada, qual seja: a subtração de um elemento da matriz pela própria matriz. Voltaremos a falar sobre essa demonstração na próxima seção.

Conflitos comognitivos

O conflito originado pela metarregra acerca da dupla interpretação da noção de matriz por Cayley manifestou-se em vários momentos nas discussões, sendo mais expressivo nas falas sobre a demonstração do teorema notável. Inicialmente, todos os grupos tiveram dificuldades de interpretar o uso da noção de *matriz como uma quantidade simples* nessa demonstração.

Apresentamos um trecho em que o grupo 2.1 discute sobre o teorema notável e sobre a equação satisfeita por uma matriz (quadrada de ordem 2). O trecho é parte de uma discussão que aconteceu enquanto esse grupo fazia a Questão 5. Outras partes da mesma discussão foram trazidas, anteriormente, para ilustrar reflexões sobre a segunda metarregra selecionada por nós no discurso de Cayley. As falas abaixo iniciam-se logo após um dos participantes ler o enunciado do teorema na introdução do artigo de Cayley.

> Matemático: Eu entendi o seguinte [sobre o teorema notável], quando isso aqui ficou mais claro para mim. Só que não sei o que é esse M, como ele [Cayley] acha esse M. Não sei se M é o determinante. Não sei.
>
> Francisca: Acho que esse M é como se fosse um ... sei lá, eu olhei isso aqui e lembrei do menos lambda.
>
> Raelo: Nesse caso, o determinante lembra o polinômio carac-

terístico de cara.
Matemático - Eu também entendi isso. Mas ela falou ...
Raelo: Mas tem a ver o polinômio característico com o teorema? Essa parte não tem nada de polinômio característico não. Não sei onde está esse teorema.
Matemático: Ele falou que toda matriz vai satisfazer um sistema de equações. Um sistema não, vai satisfazer uma equação.
Raelo: Satisfaz uma equação algébrica de própria ordem.
Matemático: É, ele diz que toda matriz vai satisfazer uma equação algébrica de ordem igual, de grau igual a ordem da própria matriz.
Raelo: Que é justamente o polinômio característico, no caso.
(Grupo 2.1)

As falas acima sugerem que Matemático não havia compreendido, até o momento da discussão acima, o papel do símbolo M no determinante formado por Cayley no início da demonstração do "teorema notável". Como dissemos acima, Cayley operou simbolicamente com M baseando-se na noção de matriz como quantidade simples e apresentou como resultado do determinante o polinômio $\mathsf{M}^2-(\mathsf{a}+\mathsf{d})\mathsf{M}^1+(\mathsf{ad}-\mathsf{bc})\mathsf{M}^0$. Logo após apresentar esse resultado, ele exibiu "os valores"das potências de M como matrizes:

[...]
os valores de M^2, M^1, M^0 são,

$$\left(\begin{array}{cc} a^2+bc\,, & b(a+d) \\ c(a+d)\,, & d^2+bc \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc} a, & b \\ c, & d \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{array}\right)$$

[...] (CAYLEY, 1858, p. 23)

Na mesma demonstração, ele interpretou o símbolo M como uma "quantidade simples"(isto é, um número) e como uma "quantidade múltipla"(isto é, uma matriz). Ainda sobre o mesmo diálogo do grupo 2.1, Francisca associou o símbolo M a λ, que representa a variável no polinômio característico $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ de uma matriz quadrada M. E Raelo, no final desse diálogo, identificou o polinômio da equação algébrica mencionada na memória com o polinômio característico da matriz M.

A discussão continuou e os participantes concluíram que a equação algébrica referida no teorema notável não tem relação com o polinômio característico da matriz

M, pois a variável do polinômio na equação algébrica de Cayley é uma matriz (M) e não um número real (λ):

> Matemático: Não. Não vai ter o polinômio característico porque ele não vai achar o valor originário [autovalores], vai achar a matriz. [pausa] Quando faz o polinômio característico, faz B menos lambda igual a um monte de coisas vezes lambda. Aí lambda é um número real, no polinômio característico. Aqui ele está fazendo P de uma matriz lá ...
> Raelo: É. São casos diferentes.
> Matemático: É parecido, mas não é o polinômio característico. (Grupo 2.1)

De fato, o conceito de polinômio característico de uma matriz M não foi definido por Cayley na memória em questão, mas vemos no polinômio da equação algébrica um antecedente para esse conceito. Logo depois, o participante Matemático pareceu ter entendido o significado do símbolo M no determinante formado por Cayley ao concluir que: "A matriz M menos a quantidade M envolvendo aquilo que ele falou. Ele fez a matriz M menos a quantidade M envolvendo a matriz unitária."Matemático compreendeu que o discurso da fonte era governado por uma metarregra bastante distinta da atual.

O conflito que acabamos de descrever também se manifestou entre os grupos 1.1 e 1.2. Esses grupos também estranharam o determinante formado por Cayley e o cálculo simbólico com a matriz M, em que a noção de *matriz como uma quantidade simples* é aplicada a uma matriz cheia. Para ilustrar como o conflito manifestou-se para esses grupos, trazemos um trecho da discussão do grupo 1.2, cujo início foi citado acima para ilustrar reflexões sobre a segunda metarregra selecionada por nós no discurso de Cayley.

> Fernando: Mas que viagem. É muita viagem porque olha só que ele faz a seguir. Ele pega o M grande que é a matriz cheia. Isso aqui tanto é uma matriz quanto é um número.
> Yhedi: Não.
> Fernando: Mas aqui, olha só, está operando com números. Aqui ele está operando com números. Aqui, isso aqui é um número. Só que isso é uma matriz.
> Yhedi: Mas quando ele opera a matriz como um número, ele está

> trabalhando M vezes a identidade.
> Fernando: Hum?
> Yhedi: Quando ele trabalha a matriz como número, é o número vezes a identidade.
> Fernando: Mas essa matriz aqui, cara?
> [Neste momento, eles solicitaram a ajuda da pesquisadora.]
> Fernando: Essa história de quantidade simples está meio confusa. Como é que eu pego uma matriz cheia qualquer e associo a um número?
> Pesquisadora: Não tem sentido nenhum para a gente, hoje.
> Yhedi: Pois é. O que não faz sentido ...
> (Grupo 1.2)

Logo após a fala de Yhedi, o participante João, integrante do grupo 1.1 informou que estava com a mesma dúvida. O conflito parece não ter sido resolvido para João e seu grupo, não detectamos discussões do grupo 1.1 sobre a metarregra acerca da dupla interpretação da noção de matriz.

O conflito que descrevemos acima manifestou-se por meio de uma dúvida em relação ao significado do símbolo M, no determinante formado por Cayley, a partir de uma matriz contendo os elementos $a - M$ e $d - M$. Esse conflito teve origem nas diferenças entre as metarregras por trás do discurso de Cayley e do discurso dos participantes. Cayley orientou-se por uma metarregra que permitia uma dupla interpretação da noção de matriz ora como uma quantidade simples, isto é, um número, ora como um "sistema de números". Nos dias de hoje, isso não seria aceito, pois uma matriz não é sequer vista como uma quantidade.

6.1.4 Considerações sobre metarregras e conflitos comognitivos

A análise realizada na seção anterior possibilitou investigar se, e como, os grupos refletiram sobre quatro metarregras identificadas por nós, em dois episódios da história das matrizes (Tabela 6.3), a partir da interpretação histórica de Brechenmacher (2006b). Essas metarregras foram exploradas por meio de atividades que designamos como históricas nos roteiros de ensino. Não introduzimos o conceito de "metarregra"nesses roteiros, nem mesmo mencionamos esse termo durante os encontros com os participantes. Mas, sim, exploramos o conteúdo das metarregras descrito como ações dos discursantes quando lidavam com matrizes e determinantes ou interpretações particulares desses conceitos.

Episódio Sylvester	**Episódio Cayley**
Determinantes eram ferramentas usadas para investigar propriedades geométricas de curvas e superfícies e eram calculados a partir de funções - polinômios homogêneos de grau 2.	Matriz era uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas de equações lineares.
Matriz como mãe dos determinantes menores: uso de matrizes como uma representação em conexão com a técnica de geração de sistemas de menores.	Dupla interpretação da noção de matriz: uma matriz era considerada ora como uma quantidade simples, ora como uma quantidade múltipla.

Tabela 6.3: Metarregras selecionadas nos episódios de pesquisa.

Os resultados indicam que o argumento teórico de Kjeldsen (2011c), Kjeldsen e Blomhøj (2012), sobre o uso da história da matemática como uma estratégia para revelar metarregras do passado e torná-las objetos explícitos de reflexão dos estudantes, **verifica-se parcialmente em relação às metarregras históricas** (Tabela 6.3). Observamos dificuldades em alguns grupos de se engajar nas discussões de algumas as atividades históricas. Como descrevemos na seção anterior, notamos que os integrantes dos grupos do estudo de campo 1 (grupos 1.1 e 1.2), ao final das atividades do primeiro roteiro, pareciam cansados e dividiram-se para terminar as questões. Assim, não detectamos discussões significativas nos áudios desses grupos para avaliar as reflexões sobre a metarregra *Matriz como mãe dos menores*.

Outro exemplo foi a dificuldade externada por um integrante do grupo 1.1 (João) em relação à noção de matriz como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade, o que o levou a solicitar a intervenção do pesquisador para explicar o uso dessa noção na demonstração do teorema notável. O grupo não iniciou uma discussão sobre a metarregra acerca da dupla interpretação de matrizes, mesmo após a explicação do pesquisador. De acordo com Sfard (2008, p. 257), discursos governados por metarregras distintas são *incomensuráveis*, no sentido de que não compartilham um critério comum para decidir qual narrativa deve ser reconhecida como válida. Pelos critérios atuais, o uso de matriz como um número na demonstração do teorema notável não seria aceito como válido, mas é preciso situar a memória de (CAYLEY, 1858) em seu contexto e levar em conta que os critérios eram outros, isto é, as metarregras eram outras. O participante João parece ter tido dificuldade de situar a memória de Cayley no contexto de seu tempo e não percebeu que havia metarregras distintas em uso, nem que o que faz sentido em matemática muda ao longo do tempo.

Metarregras dos participantes	**Roteiro**
Determinantes são propriedades de matrizes quadradas.	Sylvester.
Descrição de matriz com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela.	Sylvester e Cayley.
Demonstrações de teoremas que se baseiam em casos particulares não têm validade.	Cayley.

Tabela 6.4: Metarregras detectadas a partir das discussões.

A análise aponta que todos os grupos refletiram acerca do objeto sobre o qual os determinantes eram calculados nos trabalhos de Sylvester: polinômios homogêneos de grau 2 com três variáveis. Essas reflexões levaram os participantes a explicitarem a metarregra segundo a qual *determinantes são propriedades de matrizes*. Tal regra também molda o discurso da maioria dos livros-textos de Álgebra Linear brasileiros que definem determinantes a partir de matrizes quadradas. As metarregras dos participantes, detectadas a partir das discussões podem ser vistas na Tabela 6.4.

O primeiro roteiro de ensino, com a apresentação do problema dos contatos mostrando como os determinantes eram utilizados e como a noção de matriz foi introduzida, propiciou aos participantes a descoberta de que nem sempre determinantes foram calculados a partir de matrizes quadradas e, também, de que a ordem segundo a qual alguns conceitos são ensinados difere da ordem do seu desenvolvimento histórico. Temos aqui uma situação em que **os participantes refletiram sobre mudanças nas metarregras**.

Os extratos dos artigos originais e as atividades históricas tiveram um papel fundamental em fomentar as reflexões. Os participantes discutiram bastante sobre a relação de dependência entre os conceitos de determinantes e matrizes. Hoje determinantes dependem de matrizes, mas nas narrativas de Sylvester ocorre o inverso. Ao perceber que nem sempre determinantes foram calculados a partir de matrizes, houve um participante (Raelo, grupo 2.1) que **problematizou sobre a metarregra segundo a qual determinantes são propriedades de matrizes**, questionando se sempre calculamos determinantes de matrizes: “A gente não tem nenhum caso que a gente utilize determinante sem pensar em matriz?”. Geralmente, os estudantes costumam conhecer a definição de determinantes apenas a partir de matrizes (quadradas) nos cursos de Álgebra Linear, esse foi o caso dos participantes de ambos os estudos de campo.

O segundo roteiro propiciou o contato com algumas páginas da memória de Cayley (1858), traduzidas para o português pela própria pesquisadora. Os participantes puderam observar as diferenças nas notações, no estilo do texto e, o que eles mais esperavam: como a multiplicação de matrizes foi definida. Os resultados acerca das reflexões sobre as metarregras que governaram o discurso no episódio Cayley indicam que todos grupos refletiram sobre *a noção de matriz como uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas de equações lineares* ou sobre questões relacionadas a essa metarregra.

De acordo com (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012), com cenários de aprendizagem que colocam os estudantes para investigar fontes históricas, guiados por questões históricas, eles tornam-se cientes de que existem regras metadiscursivas que governam as narrativas dos textos matemáticos e que as metarregras que governam o discurso das fontes são diferentes daquelas que governam as narrativas dos livros-textos contemporâneos. A oportunidade de analisar como Cayley definiu as regras para as operações com matrizes levou um dos grupos (2.1) a refletir sobre como um texto moderno (BOLDRINI et al., 1980) definia essas operações.

Os extratos das fontes originais propiciaram o contato com discursos moldados por metarregras, que encerram diferentes interpretações sobre a noção de matriz: (*matriz com mãe dos menores e matriz como uma notação cômoda para sistemas lineares*). Esses extratos também propiciaram aos participantes um exemplo de que as noções sofrem mudanças ao longo do tempo. As atividades explorando essas metarregras desafiaram os participantes a refletirem sobre o que é uma matriz. A análise apontou que vários participantes descrevem matrizes como tabelas ou por meio dos elementos que caracterizam a representação em forma de tabela. Isso leva-nos a uma reflexão sobre o ensino de matrizes que diz respeito ao contexto pedagógico: apenas a definição de matriz como uma tabela é apresentada aos estudantes. O objeto matriz também pode ser definido como uma função que tem como argumento os índices das entradas (HOFFMAN; KUNZE, 1970). Dessa forma, questionamo-nos se é adequado prover futuros professores com apenas uma definição do conceito de matriz, no lugar de apresentar as duas definições e de discutir sobre as vantagens e os limites de cada uma. A definição de matriz como uma tabela tem a vantagem de proporcionar uma imagem desse conceito que possibilita o acesso direto a todos elementos. No entanto, tal concepção pode não ser eficaz quando se trabalha com matrizes de ordem grande e que apresentam muitos elementos nulos (matrizes esparsas). Armazenar todas as posições nulas de uma matriz esparsa ocuparia memória, desnecessariamente, em um computador. Neste caso, a definição de matriz como uma função pode ser mais eficaz ao otimizar o registro e facilitar o acesso aos elementos não nulos.

Nas reflexões envolvendo a metarregra "*descrição de matriz com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela*", alguns participantes perceberam que a definição atual de matriz esconde todas as interpretações atribuídas a essa noção ao longo do tempo, como vimos nas palavras de Mario, ao dizer "A gente só diz que é uma tabelinha" e, também, com Yhedi, ao alegar na entrevista final e no questionário final que o ensino "banalizou"o conceito de matriz.

Comparando nossos resultados com os de Kjeldsen e Petersen (2014), a análise mostrou que é possível diagnosticar metarregras dos participantes em situações de ensino, em que fontes históricas são investigadas, o que é consistente com os resultados desses pesquisadores. Por outro lado, uma diferença é que não detectamos metarregras dos participantes que sejam discrepantes com o discurso dos livros didáticos modernos e nem com o discurso passado pelo ensino. No entanto, não analisamos o discurso dos alunos em atividades de natureza exclusivamente matemática, como esses pesquisadores fizeram.

Alguns conflitos comognitivos foram detectados nas discussões dos alunos. Uma breve descrição de cada um, bem como o que disparou cada conflito está resumido na Tabela 6.5. A tarefa de detectar conflitos comognitivos não foi simples, como alertou Sfard (2008, p. 256). Inicialmente, esperávamos encontrar conflitos na acepção comum da palavra, ou seja, esperávamos encontrar nas discussões pontos de dificuldade, momentos de surpresa ou dúvida. No entanto, os participantes sabiam que estavam lidando com fontes históricas e que, portanto, poderiam deparar-se com ideias muito diferentes. Assim, houve situações em que os participantes perceberam que o discurso era governado por metarregras que não estão mais em vigor e externaram a metarregra vigente, como foi o caso do primeiro conflito registrado na Tabela 6.5. Neste caso, não foi observada a ocorrência de narrativas conflitantes expressando-se por meio de uma falta de entendimento, ou por meio de discordâncias em relação à fonte histórica, mas os participantes perceberam que houve uma mudança nas metarregras em jogo. Vale mencionar, ainda, que o modo e a finalidade com a qual Sylvester empregou determinantes foi introduzido pela pesquisadora na apresentação do roteiro, então não foi um elemento totalmente novo no momento em que os estudantes realizaram as atividades.

Conflitos comognitivos detectados	**Roteiro**
Sobre a mudança no objeto em relação ao qual os determinantes passaram a ser calculados.	Sylvester.
Sobre o sentido da correspondência entre determinantes e matrizes.	Sylvester.
Sobre o cálculo simbólico realizado por Cayley na demonstração do teorema notável.	Cayley.

Tabela 6.5: Conflitos comognitivos detectados a partir das discussões dos grupos.

O mesmo não ocorreu com os dois últimos conflitos registrados na Tabela 6.5, cujas discussões mostram que os participantes não perceberam de imediato que as metarregras em jogo eram outras. No caso do segundo conflito, houve momentos de dúvidas. No entanto, os participantes discutiram entre si e perceberam que Sylvester invertia a ordem da correspondência entre matrizes e determinantes, isto é: partindo de um determinante, ele associava um matriz quadrada ao mesmo. E o terceiro conflito manifestou-se por meio de intensas discussões acerca da demonstração do teorema notável, na qual Cayley alternava entre a interpretação de matriz como uma quantidade simples (associada à matriz identidade) e como uma quantidade múltipla.

A noção de conflito comognitivo é proposta por Sfard como recurso necessário para que o aprendiz realize uma transição entre metarregras, isto é, para que ele aprenda novas metarregras. Na Seção 2.1, mostramos como essa noção foi utilizada para promover aprendizagem sobre a multiplicação de números negativos, que requeria uma mudança de metarregras (SFARD, 2007). Quando o aprendiz altera suas metarregras, Sfard considera que ocorre uma aprendizagem no nível meta. Não foi nosso objetivo alterar as metarregras dos participantes. No entanto, podemos dizer que nosso estudo promoveu uma aprendizagem no nível meta diante de duas situações: os participantes explicitaram e refletiram sobre suas próprias metarregras e perceberam que tais regras mudam ao longo do tempo e ao longo de diferentes episódios de pesquisa.

Como o estudo de Kjeldsen e Blomhøj (2012) apontou, a análise na seção anterior também mostrou que o uso de fontes originais e as atividades históricas propiciaram não só o aprendizado de regras metadiscursivas, como também a oportunidade de discutir sobre regras no nível do objeto. Nas discussões em busca de dirimir o segundo conflito apresentado na Tabela 6.5, o grupo 1.1 observou que a função que associa a cada matriz um certo número denominado determinante não é injetora mas é sobrejetora. Já o grupo 2.1, nas discussões em torno terceiro conflito, reconheceu na equação algébrica de Cayley o polinômio característico de uma matriz, conceito que eles estavam estudando na disciplina Álgebra Linear 2, no momento do minicurso.

Chegamos a uma conclusão semelhante a de Kjeldsen e Petersen (2014) no que diz respeito à experiência vivenciada pelos estudantes em uma situação de aprendizagem que não era familiar para eles. Os participantes do nosso estudo tiveram a oportunidade de discutir sobre a noção de matriz e conceitos relacionados de maneira não-operacional, isto é, em um nível mais conceitual, fora dos padrões de aplicar técnicas prontas para resolver problemas matemáticos. As atividades históricas levaram-nos a refletir sobre o que é o objeto matriz. E essa não foi uma tarefa trivial para eles. Em geral, nas aulas fala-se **de** matemática e não **sobre** matemática. A ênfase do ensino costuma ser nas regras do nível do objeto, com pouco espaço (ou nenhum) para refletir sobre a natureza dos objetos, sobre as regras do discurso etc. Então, os estudantes não costumam ter muitas oportunidades de fazerem reflexões do tipo meta sobre matemática de uma forma orientada.

QP1: Como fontes históricas possibilitam promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, a partir de conflitos comognitivos?

Disponibilizar extratos dos textos de Sylvester e Cayley, mantendo as notações originais, foi essencial para exibir a prática desses matemáticos e mostrar como eles definiam e argumentavam nas demonstrações. Como coloca (KJELDSEN, 2011a), os textos históricos desempenham o papel de interlocutores como discursantes agindo de acordo com metarregras distintas. Assim, o uso de fontes primárias é primordial para permitir o contato com um discurso moldado por metarregras distintas e, assim, possibilitar o conflito comognitivo. No entanto, para que o conflito não se revele como uma barreira para a aprendizagem, é preciso estabelecer como a fonte será utilizada. Dependendo da complexidade matemática da fonte e do perfil público-alvo, explicações adicionais podem ser necessárias. Em nosso caso, os textos de Sylvester utilizam noções de geometria projetiva e fornecemos uma introdução de alguns conceitos para dar suporte e condições aos participantes de compreender o contexto matemático do episódio. Além disso, fizemos uma apresentação oral do episódio de Sylvester e do problema da classificação dos tipos de contatos. No segundo roteiro, fizemos um estudo dirigido das páginas da memória de Cayley (1858).

De acordo com Kjeldsen (2011a), regras metadiscursivas no discurso matemático tornam-se regras do nível do objeto no discurso histórico, de modo que o que está implícito em um discurso (no caso, o discurso matemático) pode ser tornado explícito a partir de outro discurso (histórico). Assim, todo o suporte dado para investigar as fontes, com o resumo apresentado no primeiro roteiro e as apresentações orais da pesquisadora, teve o papel de trazer as metarregras para o nível do objeto, isto é, de explicitá-las e torná-las objetos de discussão. As atividades históricas também tiveram um papel importante em fomentar e direcionar as discussões em torno das metarregras que queríamos explorar e para que os participantes explicitassem suas próprias metarregras.

6.2 Questão de pesquisa 2: concepções sobre matrizes e determinantes

6.2.1 Metodologia de análise

A análise apresentada nesta seção tem foco nos dados advindos das entrevistas iniciais e finais (Apêndice B) e foi realizada com o intuito de responder à segunda questão de pesquisa (QP2), a saber: **qual o impacto das reflexões sobre as metarregras nas concepções dos estudantes sobre matrizes e determinantes?** O termo "concepções"é utilizado em referência a Sfard (1991), como a totalidade das representações e associações evocadas pelo conceito.

Assim, nosso objetivo foi investigar se as reflexões sobre as metarregras influenciaram mudanças nas concepções dos participantes da pesquisa. Para isso, analisamos as respostas apresentadas por eles nas seguintes questões das entrevistas iniciais e das finais: "o que é matriz?", "o que é determinante?"e "qual a utilidade de calcular determinantes?". Analisamos, também, as respostas para a questão "qual é o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear?", que foi incluída nas entrevistas finais.

A análise nesta parte da pesquisa foi dividida em três etapas: i) identificar as concepções dos participantes a partir das suas respostas nas entrevistas iniciais e finais às três questões acima, ii) comparar as concepções identificadas na etapa anterior e analisar as possíveis mudanças e iii) observar se as mudanças têm relação com as reflexões sobre as metarregras.

Em relação à primeira etapa, visando ter uma visão global das concepções identificadas antes e depois da intervenção, vislumbramos a possibilidade de classificar as concepções em categorias, agrupando-as por afinidade, em cada uma das questões anteriores. A sistematização e descrição de dados por categorias é uma técnica empregada em algumas metodologias para análise de dados, como a *análise de conteúdo* de Laurence Bardin (2004).

A análise de conteúdo consiste em "um conjunto de técnicas de análises de comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens", tendo como finalidade "a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção e de recepção das mensagens" (BARDIN, 2004, p. 33, 34). A mensagem pode ser verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada (FRANCO, 2003). No nosso caso, a mensagem é composta pelas respostas dos participantes às questões colocadas anteriormente.

Uma das fases da análise de conteúdo é justamente a **categorização**, que tem por objetivo fornecer uma representação simplificada dos dados. Segundo Franco (2003), trata-se de uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação seguida de um reagrupamento baseado em analogias. Esse processo orienta-se segundo algumas regras: a da *exclusão mútua*, em que um único princípio de classificação deve orientar a organização dos dados em categorias; *pertinência*, em que o sistema de categorias deve refletir os objetivos da investigação; e *objetividade e fidedignidade*, em que os dados devem ser codificados da mesma maneira quando submetidos a várias análises, isto é, o mesmo sistema de categorias deve ser produzido, se os dados forem olhados por pesquisadores diferentes ou pelo mesmo pesquisador em diferentes momentos (ibid., p. 59).

Tomamos como princípio básico de classificação o agrupamento das concepções por afinidade, para cada uma das quatro questões elencadas anteriormente Dessa forma, as categorias de concepções emergiram das respostas dos participantes às questões. As categorias obtidas foram revisadas e refinadas várias vezes até chegarmos à forma apresentada na análise.

Na segunda etapa, comparamos as concepções identificadas na etapa anterior, em busca de possíveis mudanças. Inicialmente, observamos mudanças no sistema de categorias estabelecido para cada uma das três questões elencadas anteriormente ("O que é matriz?", "O que é determinantes?" e "Qual a utilidade de calcular determinantes?"). O surgimento de uma nova categoria foi considerado um indicador de mudança nas concepções. No caso de não haver mudanças no sistema de categorias obtido para as concepções, em relação a uma das questões consideradas, observamos se cada participante mudou de concepção, isto é, se sua resposta passou a ser considerada em uma categoria diferente do sistema inicial (antes da intervenção).

Na terceira etapa, buscamos possíveis relações entre as mudanças observadas e as reflexões sobre as metarregras. Analisamos se os participantes traziam em suas respostas associações e/ou representações para os conceitos de matriz que tivessem relação com as metarregras históricas e aquelas observadas em seus discursos. Em outras palavras, analisamos se as reflexões sobre as metarregras forneceram novas associações e representações para o conceito de matriz. As etapas da análise estão indicadas na Figura 6.1.

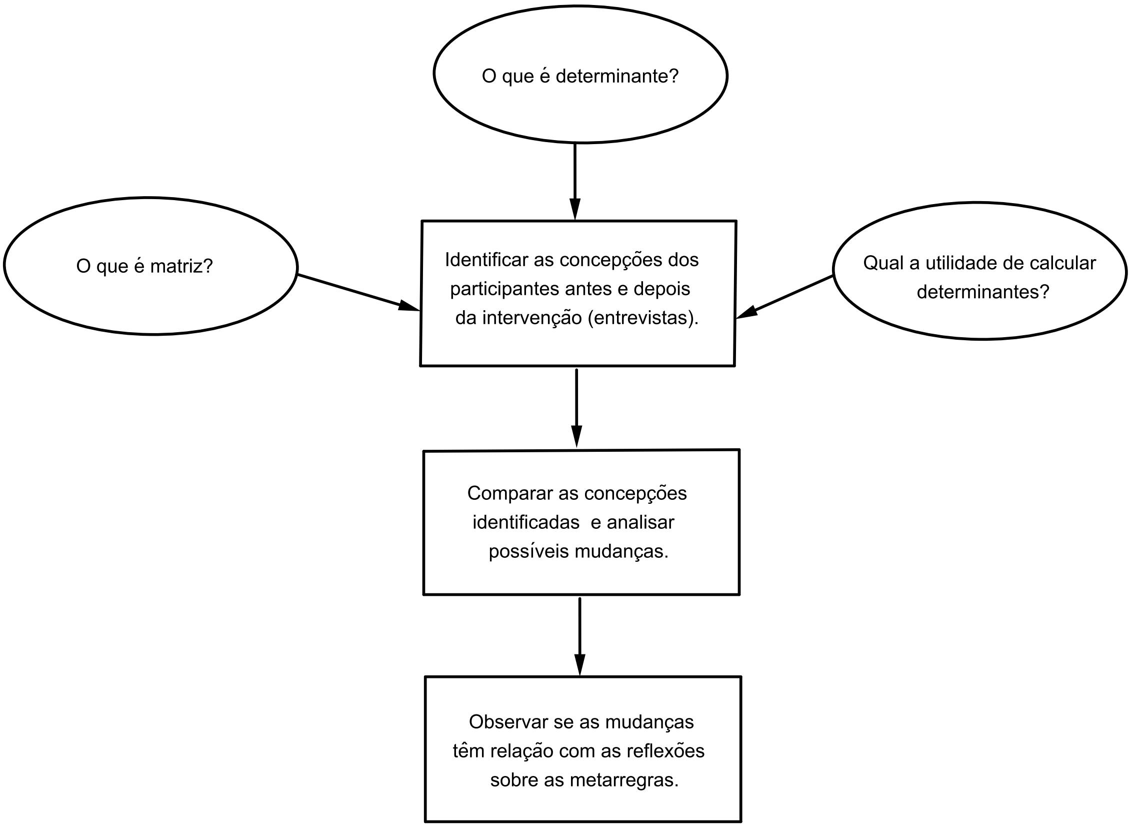


Figura 6.1: Etapas da análise - Questão de pesquisa 2.

6.2.2 Concepções sobre o que é matriz

Antes da intervenção

A fim de investigar que concepções os participantes traziam sobre o que é uma matriz, pedimos que eles procurassem descrever com suas próprias palavras o que eles entendiam ser uma matriz, sem repetir simplesmente a definição.

Após analisar as ideias apontadas nas respostas, identificamos três categorias de concepções sobre o que é uma matriz: *uma ideia sem sentido*, *repositório de números ou tabela* e *matriz como um objeto matemático ou associada a outros objetos*. Cabe observar que alguns participantes apontaram mais de uma concepção em suas falas.

Categoria 1: uma ideia sem sentido

Consideramos nesta categoria, descrições que sinalizavam não ver sentido no conceito de matriz. As citações abaixo ilustram a concepção de matriz como uma ideia sem sentido.

> Mas, a princípio, as matrizes não têm muito sentido para a gente, são números jogados aleatoriamente. (Raelo, EC2)
>
> Não sei explicar. Não faço a menor ideia. Eu sei que é um ente construído sobre um anel. (João, EC1)

Podemos perceber pelas declarações “números jogados aleatoriamente”, “um ente construído sobre um anel”, que os participantes acima pareciam não atribuir sentido algum ao conceito de matriz.

Categoria 2: repositório de números ou tabela

Alguns participantes descreveram matrizes como um meio de representar informações numéricas ou como um meio de armazenar dados para serem manipulados em computadores. Descrições sugerindo matrizes como tabelas de números também foram consideradas nesta categoria. As citações abaixo ilustram a concepção de matriz como um repositório de números ou dados.

> Eu vejo matriz, porque eu trabalho com informática, uma coisa que eu vou armazenar uma grande quantidade de dados, entendeu? E fazer operações com esses dados. (Francisca, EC2)
>
> Primeiramente, a gente é apresentado à matriz como uma coisa, uma tabela com vários números. (Fernando, EC1)
>
> Matriz é como se fosse um tipo de representação que você pega determinados elementos e engloba em certas posições [...] (Mario, EC1)
>
> Também pode servir como uma tabela [...] (Yhedi, EC1)

Nos fragmentos acima, frases como “uma coisa que eu vou armazenar uma grande quantidade de dados”, “uma tabela com vários números” e a ideia de “englobar” elementos em posições sugerem uma concepção de matriz como um repositório de números ou, em uma visão mais computacional, um meio de armazenar dados a fim de manipulá-los, de realizar operações com eles.

Durante a entrevista, Mario foi solicitado a explicar melhor o que quis dizer com “um tipo de representação” e, como resposta, mencionou situações que foram apresentadas a ele no ensino básico, como quantidade de frutas em um feira.

Categoria 3: matriz como um objeto matemático ou associada a outros objetos

As descrições de matriz como um objeto matemático ou associada a outros objetos como conjunto, vetor (elemento de um espaço vetorial), foram consideradas nesta categoria. As falas abaixo exemplificam esta categoria.

> [...] eu vejo matriz como sendo um conjunto, assim, bem específico, que os elementos têm que estar naquele tipo de exposição, nas linhas e na coluna. (Matemático, EC2)
>
> Mas eu já discuti isso algumas vezes com meus colegas, a gente chegou à conclusão de interpretar uma matriz como um vetor [elemento de um espaço vetorial]. (Fernando, EC1)
>
> Acho que é como se fosse um objeto matemático que é usado para representar alguma situação real, por exemplo, algum problema assim, alguma empresa, enfim, importação e exportação, custo, alguma coisa assim. (Maria, EC1)
>
> [...] numa visão mais pura, [pode servir] como um vetor. (Yhedi, EC1)

As descrições acima distinguem-se das categorias de concepções anteriores por não identificarem explicitamente matrizes com sua representação em forma de tabela, dentre outras coisas. Apesar de Matemático mencionar a ordenação dos elementos de uma matriz em linhas e colunas, para ele matriz é, acima de tudo, um conjunto de números. As respostas de Fernando e de Yhedi surpreendem por sugerirem uma visão abstrata do conceito de matriz, eles concebem matrizes também como vetores, isto é, como elementos de um espaço vetorial. Em vários momentos da entrevista, Fernando declarou-se insatisfeito com a definição de matriz como uma tabela e mencionou que já havia discutido com seus colegas (entre eles o Yhedi) sobre a natureza do conceito de matriz e a melhor conclusão que chegaram foi interpretar matrizes como vetores.

Quanto à fala de Maria, consideramos sua resposta um pouco vaga, não sabemos o que ela entende por objeto matemático. O restante da sua fala sugere que as matrizes servem para *modelar* problemas envolvendo importação, exportação e custo, o que vai além de representar.

Após a intervenção

Duas categorias de concepções sobre o que é matriz foram observadas nas entrevistas finais: *matrizes como um meio de representar sistemas lineares* e *repositório de números ou tabela*.

Categoria 1: matriz como um meio de representar sistemas lineares

Consideramos, nesta categoria, descrições apontando a associação com sistemas lineares, no sentido exprimir um sistema por meio de matrizes. As seguintes citações ilustram a concepção de matriz como um meio de representar sistemas lineares:

> Agora eu acho que matriz, ela é várias coisas, assim. Mas acho que a noção que mais ..., que mais faz sentido é a do ..., da representação de um sistema de equações lineares [...] (Matemático, EC2)
>
> Pode, no caso, ter ..., ter ..., como que eu diria? Analogia com os sistemas lineares também, que você poderia tirar números dali. (Raelo, EC2)
>
> Não é simplesmente um arranjo de números e tal. Ficou bem mais claro. Eu acho que agora eu consigo associar a matriz a sistemas lineares, entendeu? (Francisca, EC2)
>
> É também uma forma de representar sistemas de equações lineares [...] (Maria, EC1)

Após a intervenção, alguns participantes passaram a associar matrizes a sistemas lineares, trazendo a interpretação vista no Roteiro Cayley de matriz como uma notação prática para sistemas lineares. Isso não significa que esses participantes desconheciam a notação de sistemas lineares por meio de matrizes, ou melhor, por meio de um produto matricial, mas essa associação parece ter sido reforçada após a intervenção.

Categoria 2: repositório de números ou tabela

Consideramos aqui as descrições que identificam matriz com sua representação em forma de tabela. Respostas contendo expressões como “arranjo de termos”, “arranjo retangular também foram levadas em conta neste grupo. Os trechos abaixo exemplificam a concepção de matriz como um repositório de números ou tabela:

> É ..., agora eu estou mais com a ideia de que pode ser um arranjo de termos que pode ser representado em linhas e colunas. (Yhedi, EC1)
>
> De uma maneira geral, matriz é ..., como eu posso dizer? Uma tabela. (Fernando, EC1)
>
> Matriz é um arranjo retangular no qual podemos fazer operações entre elas. (Mario, EC1)
>
> [...] ela também é uma tabela que representa, que você pode operar. Um arranjo de informações também. (Maria, EC1)

As falas acima indicam que alguns participantes passaram a utilizar os termos de Sylvester e de Cayley ao descrever matriz como um “arranjo retangular” ou um “arranjo de termos”. Durante as atividades históricas, alguns participantes identificaram como semelhança entre as definições de matriz apresentadas nas fontes históricas e a definição atual esse modo de descrever as matrizes que se baseia na sua representação em forma de tabela.

Comentários gerais

As categorias indicando concepções de *matriz como uma ideia sem sentido* e como um *repositório de números ou tabela* sugerem uma visão limitada do conceito de matriz. Levando em conta que a maioria dos participantes havia concluído pelo menos uma disciplina de Álgebra Linear à época do minicurso, é preocupante encontrar estudantes declarando que as matrizes não têm sentido para eles. Além disso, consideramos que entender matrizes apenas como uma tabela ou como um repositório de números também indica uma concepção limitada do conceito de matriz. Uma interpretação importante, em nosso ponto de vista, é a de matriz como uma transformação linear[4]. Na literatura de ensino de matrizes, Wawro et al. (2012)

[4]Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um mapeamento que satisfaz as seguintes propriedades: i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todo u e v em $\mathbb{R}^m$ e ii) $T(av) = aT(v)$ para qualquer

apresentam uma proposta de ensino, que não utiliza história da matemática, para desenvolver nos estudantes a interpretação de matrizes como objetos matemáticos que transformam geometricamente o plano e o espaço. Tal interpretação, de fundo geométrico, das matrizes não foi explorada neste estudo.

Novas concepções foram formadas após a intervenção, dando lugar a uma nova categoria. Duas categorias iniciais desapareceram. O surgimento da categoria *matriz como um meio de representar sistemas lineares* sugere que alguns participantes passaram a associar matrizes com sistemas lineares. Uma das metarregras exploradas nas atividades históricas e que foi objeto de reflexão dos grupos diz respeito à interpretação e uso de *matriz como uma notação cômoda para sistemas de equações lineares*. Interpretamos o surgimento dessa concepção como um resultado das reflexões acerca dessa metarregra. Como dissemos anteriormente, esse resultado não indica que esses participantes desconheciam a notação de sistemas lineares por meio de matrizes, ou melhor, por meio de um produto matricial. Mas, as reflexões sobre a metarregra mencionada parecem ter reforçado uma associação para o conceito de matriz. Com isso, alguns participantes passaram a atribuir um sentido às matrizes.

A categoria que representa as concepções de matriz como *um repositório de números ou tabela* se manteve. No entanto, após a intervenção, os participantes passaram a utilizar também os termos empregados por Sylvester e por Cayley para descrever matrizes ("arranjo retangular", "arranjo de termos"). Durante as reflexões sobre as metarregras históricas, os participantes explicitaram uma metarregra que enunciamos como *descrição de matriz com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela*. Assim, além da influência do modo como Sylvester e Cayley descreveram matrizes, entendemos que o processo de conscientização dessa metarregra também influenciou as concepções contribuindo para reforçar, em alguns participantes, a associação de matriz com a sua representação em forma de tabela.

Estamos cientes que não podemos comparar mudanças nas concepções dos estudantes apenas com base nas categorias. Apesar de uma categoria ter sido mantida na classificação das concepções, houve participantes que mudaram suas concepções. Raelo, por exemplo, apresentou inicialmente uma concepção de matriz como uma

escalar a e v em $\mathbb{R}^m$. Pode ser mostrado que, dadas as bases canônicas de R^m e R^n, existe uma única matriz $A_{n\times m}$ tal que $T(u) = Au$ para todo u em $\mathbb{R}^m$.

ideia sem sentido e, depois, passou a apresentar uma concepção de matriz como um meio de representar sistemas lineares. Outro exemplo é Maria que apresentou uma concepção de matriz como um objeto matemático e, depois passou a apresentar uma concepção de matriz tanto como um meio de representar sistemas lineares como, também, um repositório de números ou tabela. Matemático e Francisca também mudaram suas concepções. Matemático havia externado uma concepção de matriz associada a ideia de conjunto na entrevista inicial. Após a intervenção, esse participante passou a associar matrizes com sistemas lineares. Já Francisca, apresentou inicialmente uma concepção de matriz como um repositório de dados e, ao final, também passou a associar matrizes com sistemas lineares.

Levando em conta que foi pedido aos participantes que não se restringissem a repetir a definição em suas respostas, é notável a ausência de conexões com outros conceitos de Álgebra Linear nas descrições apresentadas, sobretudo com o conceito de transformações lineares. A única associação com outros conceitos observada nas falas, nas entrevistas iniciais, foi a de matriz como elemento de um espaço vetorial. Interpretamos as concepções agrupadas nas categorias *matriz como um repositório de números ou tabela* e *matriz como um objeto matemático ou associada a outros objetos* como uma consequência do modo naturalizado segundo o qual o conceito de matriz é ensinado. As falas dos participantes nessas categorias refletem uma visão de matriz como um objeto e não indicam associações que mostrem a necessidade do conceito.

Outra explicação para a ausência de conexões com outros conceitos de Álgebra Linear nas concepções apresentadas está na pergunta "O que é matriz?", a qual talvez não tenha contribuído sara suscitar tais conexões. As concepções descritas na próxima seção trazem mais informações sobre como os participantes percebiam as conexões entre matrizes e outros objetos da Álgebra Linear. Esse foi, também, um dos motivos que nos levou a inserir nas entrevistas finais a pergunta "Qual seria, na sua opinião, o papel da noção de matriz no estudo da Álgebra Linear?".

6.2.3 Concepções sobre o papel das matrizes nos estudos de Álgebra Linear

Como o papel das matrizes foi discutido a partir de dois episódios de pesquisa com práticas matemáticas acentuadamente distintas e interpretações distintas do conceito de matriz, inserimos uma questão a mais no roteiro das entrevistas finais com o objetivo de investigar o que os participantes pensam sobre o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear. Os participantes levantaram três principais ideias em suas respostas, dando lugar a três categorias: *matriz como uma ferramenta para resolver problemas*, *representar outros objetos* e *facilitar a resolução de sistemas lineares e o tratamento de transformações lineares*.

Categoria 1: matriz como uma ferramenta para resolver problemas

Foram agrupadas nesta categoria as respostas que apontam exemplos de usos de matriz na resolução de problemas. Os trechos abaixo ilustram a concepção de matriz como uma ferramenta para resolver problemas:

> É tão mecânico o ensino da matriz, que eu ..., eu não consigo ver um significado além de ter a matriz para poder calcular um determinante [...] E com matriz você descobre, por exemplo, a questão dos autovalores, dos autovetores, do polinômios característicos, do polinômio minimal, o que seja. (Raelo, EC2)
>
> Serve para um monte de coisa. Serve para você achar determinante, serve para você descobrir o resultado de um sistema. Serve para achar o espaço, subespaço. (Francisca, EC2)

Os exemplos apresentados indicam, por um lado, que esses participantes percebem a importância das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear, sendo aplicadas na resolução de vários problemas, mas não especificam o papel das matrizes nos procedimentos mencionados. Além disso, alguns exemplos apresentados sugerem uma visão bastante operacional dos conceitos envolvidos. De acordo com Sfard (1991), na visão operacional, as noções matemáticas são interpretadas como processos, algoritmos e ações. Dizer, por exemplo, que matrizes servem para calcular determinantes, sugere uma interpretação de ambos os conceitos restrita ao processo, ao algoritmo do cálculo para obtenção do determinante.

Categoria 2: representar outros objetos

Consideramos, nesta categoria, ideias indicando o papel das matrizes, nas disciplinas de Álgebra Linear, de representar outros objetos, como: cônicas, quádricas e transformações lineares. Os fragmentos abaixo ilustram essa concepção:

> [...] ela pode representar cônicas, quádricas [...], acho que virou como se fosse um meio de representar essas coisas. (Mario, EC1)
>
> No meu curso Álgebra Linear 1, [...] matriz não expressou literalmente nada no curso, [...] [Em Álgebra Linear 2] Passou a ter sentido porque você podia representar transformação linear como uma matriz. [...] Então as matrizes, assim, teriam um papel de representar uma transformação linear. (Yhedi, EC1)
>
> [Em Álgebra Linear 1] A matriz só como sendo objeto dessa tabela. Pega a tabela e vamos estudar operações e propriedades em cima dela, por exemplo. [Em Álgebra Linear 2] E depois começa a utilizar a matriz como uma ferramenta representativa. [...] Que hora pode ser, como eu falei, um vetor - define o espaço vetorial das matrizes, pode ser uma transformação linear, pode ser um determinante. Então ela acaba representando muitas coisas, esse mesmo objeto matriz. (Fernando, EC1)

Como podemos ver nas falas acima, expressões como "ela pode representar cônicas, quádricas", "teriam um papel de representar uma transformação linear" e "ferramenta representativa", indicam uma concepção sobre o papel de matriz como um meio de representar outros objetos matemáticos estudados na própria disciplina de Álgebra Linear. As concepções identificadas nesta categoria mostram que, para alguns participantes, o papel das matrizes vai além de oferecer uma notação alternativa para sistemas lineares, como surgiu nas concepções sobre o que é matriz (categoria 1, após a intervenção).

Categoria 3: facilitar a resolução de sistemas lineares e o tratamento de transformações lineares

Algumas descrições apontam o papel das matrizes em facilitar a resolução de sistemas lineares e simplificar o tratamento de outros objetos como transformações lineares. As citações abaixo ilustram esta categoria:

> Facilitar solução de sistema linear. (João, EC1)
>
> É possível operar o sistema linear sem você ter que ficar escrevendo as incógnitas várias vezes. A matriz seria uma ferramenta para fazer isso, para facilitar essas operações, que, na verdade, no fundo, você ... Se você botar as incógnitas todas em posições iguais nas equações, aí você organiza só os coeficientes e aí vai manipulando eles. (Matemático, EC2)
>
> De resolver sistemas também. Álgebra Linear, em vez de você resolver sistemas lineares, você passa para matriz, escalona a matriz, faz operações elementares. (Maria, EC1)
>
> Eu acho que matrizes, para a minha visão, é algo que facilita você enxergar alguns conceitos de Álgebra Linear como transformações, funções lineares, acho que a matriz tem esse papel de facilitar a visão. (Mario, EC1)
>
> O papel ..., acho que seria facilitar, não é? Os estudos. (Francisca, EC2)

Como podemos ver nos fragmentos acima, a ideia de representação também está presente aqui, porém, com um sentido a mais, o de simplificar a resolução de problemas, como determinar o conjunto solução de um sistema linear, e o de simplificar a manipulação ou o tratamento de transformações lineares, dentre outros. Isso motivou-nos a distinguir mais uma concepção nas respostas dos participantes.

Comentários gerais

Identificar as concepções sobre o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear permitiu-nos captar as conexões que os participantes faziam entre matriz e os demais conceitos dessa disciplina, o que não apareceu nas concepções sobre o que é matriz. Para isso, foi preciso colocar uma pergunta mais direta aos participantes.

Não tivemos a intenção de investigar influências das reflexões sobre metarregras para as concepções sobre o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear, pois tais concepções só foram identificadas nas entrevistas finais. Desse modo, não foi possível analisar mudanças nessas concepções.

Comparando as concepções identificadas aqui com aquelas identificadas para a questão “o que é matriz?”, após a intervenção, observamos que a concepção de Matemático revelou que esse participante não entende as matrizes só como um meio de representar sistemas lineares, mas também que para ele as matrizes facilitam a resolução de sistemas lineares; Yhedi e Fernando, apesar de entenderem matrizes como um repositório de números ou tabelas, revelaram que as matrizes têm o papel de representar outros objetos; Mario e Maria, que também sinalizaram entender matrizes como um repositório de números ou tabelas, revelaram que as matrizes têm o papel de facilitar a resolução de sistemas lineares e o tratamento de transformações lineares.

6.2.4 Concepções sobre o que é determinante

Antes da intervenção

Ao analisar as respostas dos participantes para a pergunta “o que é determinante?”, identificamos as seguintes categorias de concepções: *determinante como uma operação com os elementos da matriz, determinante como um número ou como uma função* e *determinante como um forma de representar a matriz.*

Categoria 1: determinante como uma operação com os elementos da matriz

Nesta categoria, foram consideradas as narrativas identificando o determinante ao algoritmo do cálculo para obtê-lo, a partir de uma matriz quadrada. As seguintes citações ilustram a concepção de determinante como um procedimento:

> Determinante, para mim, é uma operação que você faz com as entradas da matriz. E é uma operação que você faz com todos os elementos da matriz, resulta num número real. (Fernando, EC1)
>
> Um tipo de combinação de todos os elementos que estão dentro da matriz. (Yhedi, EC1)
>
> [...] seria as multiplicações nas diagonais [Regra de Sarrus]. Como eu vou explicar isso? [risos] Então, seria um produto das diagonais, subtraindo com as diagonais inversas. (Raelo, EC2)

Como podemos ver nos fragmentos acima, descrições do determinante como "uma operação com as entradas da matriz", "um tipo de combinação de todos os elementos", "as multiplicações nas diagonais" indicam que, para esses participantes, o determinante resume-se a uma conta com os elementos da matriz, um algoritmo.

Categoria 2: determinante como número ou como função

Alguns participantes descreveram o determinante como um número associado a uma matriz quadrada, outros como uma função que associa a cada matriz quadrada, de uma certa ordem e com elementos reais, um número real. A associação de determinante a um número ou a uma função pressupõe uma correspondência entre matrizes quadradas e números, por isso consideramos ambas as ideias em uma mesma categoria. Os trechos abaixo exemplificam a concepção de determinante como sendo um número ou uma função:

> Determinante é um número que você associa à matriz, é um único número associado àquela matriz. (Matemático, EC2)
>
> É um número que é associado a cada matriz quadrada. À matriz quadrada a gente associa um número real, esse número é o determinante. (Yhedi, EC1)
>
> É uma função que associa, nas matrizes de um anel real . . . , numa matriz de um anel real, um número real. Associa uma matriz com o anel sobre o qual ela está construída. Acho que é isso, se eu não me engano. (João, EC1)
>
> Ah, determinante para mim é um número. Sempre tive essa ideia, que determinante era um número. (Mario, EC1)
>
> [. . .] é um valor que eu acho que vai me ajudar com a matriz [. . .] (Francisca, EC2)

Ao descrever determinante como um número, os participantes acima não especificaram como, ou segundo que regra, um número seria associado a uma matriz quadrada. Do mesmo jeito, aqueles que descreveram determinante como uma função, não fizeram menção às propriedades que a caracterizam: linearidade em cada coluna, o determinante é nulo se as colunas são vetores linearmente dependentes e o determinante da matriz identidade é igual a 1.

Categoria 3: Determinante como um representante da matriz

Nesta categoria, foram consideradas respostas que sinalizavam a ideia de determinante como um representante da matriz. As citações abaixo ilustram a concepção de determinante como um representante da matriz:

> Eu não sei, acho que talvez uma forma de representar uma matriz, porque podem ter matrizes com o mesmo determinante, não é? (Maria, EC1)
>
> Ele é como se fosse um representante dela, assim.(Matemático, EC2)

Durante a entrevista, Maria mencionou o fato de que diferentes matrizes podem ter o mesmo determinante, ainda assim, continuou declarando o determinante como um representante da matriz.

Após a intervenção

Agrupamos as respostas dadas à pergunta "O que é determinante?", após a intervenção, nas mesmas categorias que emergiram das descrições fornecidas nas entrevistas iniciais. Os dados não apontaram categorias novas. Não faremos uma descrição de cada categoria, uma vez que já fizemos acima. Faremos alguns comentários sobre as respostas dos alunos e observaremos diferenças que porventura tenham surgido.

Categoria 1: Determinante como uma operação com os elementos da matriz

Respostas descrevendo o determinante por meio do procedimento para seu cálculo, a partir de uma matriz quadrada, continuaram a apareceram nas entrevistas finais, porém, com uma frequência menor que nas entrevistas iniciais.

> É uma operação que se faz com as matrizes e condensa todas as entradas dela em um único número real. (Fernando, EC1)

Observamos que a frequência de respostas nesta categoria diminuiu, em relação ao início da intervenção.

Categoria 2: Determinante como um número ou como uma função

Descrições associando o determinante a um número ou a uma função continuaram aparecendo após a intervenção. Observamos que esse tipo de resposta foi mais frequente nas entrevistas finais.

> [...] é um número que eu descobri que eu consigo extrair também de equações. Para mim, a ideia de determinante era só de matriz. (Francisca, EC2)
>
> Determinante ..., ainda, eu acho que é um número associado a uma matriz. (Matemático, EC2)
>
> Determinante é um número real no qual eu posso associar a uma matriz, através de uma matriz eu associo um número real. (Mario, EC1)
>
> Eu não mudei essa ideia dele ser um número [...] antes eu falei que era um número associado a uma matriz quadrada. Na verdade, depois do curso, eu pude ver que o determinante existia independente da matriz, não precisa ter matriz para ter determinante, o determinante pode surgir a partir de qualquer arranjo quadrado de termos, foi mais ou menos essa ideia.(Yhedi, EC1).
>
> Tá, ainda continua uma função que associa uma matriz a um ... Em muitos livros de Álgebra Linear, eu vejo que ele é uma função que leva uma matriz a uma cara da malha. (João, EC1)

Uma diferença que notamos é que alguns participantes vislumbraram a possibilidade de considerar determinantes desvencilhados de matrizes, como podemos ver na fala de Yhedi, que observou que no passado determinantes existiram sem matrizes e na fala de Francisca, que se refere ao modo como Sylvester calculou determinantes: a partir dos coeficientes dos polinômios homogêneos que representavam as cônicas.

Categoria 3: Determinante como um representante da matriz

Novamente, observamos descrições de determinantes como um representante da matriz. Notamos que esse tipo de resposta foi dada pelos mesmos participantes.

> [...] porque é como se fosse um representante dela [da matriz], assim. Representa mais ou menos de que tipo ela é. (Matemático, EC2)

> Acho que determinante é um jeito de você representar uma matriz. (Maria, EC1)

Comentários gerais

As mesmas categorias foram identificadas antes e após a intervenção. Esse resultado não indica que os participantes mantiveram suas concepções após a intervenção. Como já dissemos antes, estamos cientes de que mudanças nas concepções dos participantes não podem ser investigadas apenas pelo sistema de categorias obtido.

Observamos que a frequência de descrições apontando para a concepção de determinantes como uma operação com os elementos da matriz foi menor após a intervenção. O participante Yhedi havia revelado duas concepções sobre o que é determinante no início da intervenção: uma operação com os elementos da matriz e um número associado a uma matriz quadrada. No final da intervenção, esse participante manteve sua concepção de determinante como um número associado a uma matriz. O participante Raelo não soube responder à questão colocada na entrevista final, ele não se mostrou muito à vontade durante a entrevista. As concepções dos demais participantes foram consideradas nas mesmas categorias iniciais (antes da intervenção).

Destacamos que alguns participantes mencionaram a possibilidade de considerar determinantes sem matrizes na categoria de concepções de *determinante como um número ou como uma função.* Interpretamos essa mudança como resultado das reflexões sobre uma das metarregras observadas no discurso de Sylvester, segundo a qual *determinantes eram obtidos a partir dos coeficientes dos polinômios homogêneos que representavam as cônicas.*

A categoria *determinante como uma operação com os elementos da matriz* sugere uma visão operacional desse conceito, no sentido de Sfard (1991). Interpretar o determinante unicamente como um processo, indica que o entendimento desses participantes sobre esse tópico restringe-se a um nível operacional e que eles não alcançaram um entendimento em um nível estrutural ou conceitual. Nesse sentido, as concepções de determinante apenas como uma operação com os elementos da matriz sugerem uma visão limitada do conceito de determinante.

Observamos ainda que a concepção de determinantes como um representante da matriz, mantida pelos mesmos participantes (Maria, EC1 e Matemático, EC2) após a intervenção, não é uma interpretação adequada uma vez que diferentes matrizes podem ter o mesmo determinante.

6.2.5 Concepções sobre a utilidade dos determinantes

Antes da intervenção

Identificamos duas categorias nas respostas à pergunta “Você saberia dar um exemplo da utilidade de calcular determinante?”. Tais categorias indicam duas concepções sobre a aplicabilidade dos determinantes: *determinante como uma ferramenta para resolver problemas* e *determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares.*

Categoria 1: determinante como uma ferramenta para resolver problemas

Foram consideradas nesta categoria, exemplos que citavam problemas cuja resolução requer uma aplicação direta de determinantes. Os fragmentos abaixo ilustram a concepção de determinantes como uma ferramenta para resolver problemas:

> Bom, teria como calcular matriz inversa usando determinante, sei lá, algo assim. (Raelo, EC2)
>
> Resolução de sistema, achar os autovalores. Bom, não é uma utilização prática [. . .] Saber se dois, saber se dois vetores são linearmente dependentes ou independentes. Se eu colocá-los dentro de uma matriz e o determinante der zero. (Yhedi, EC1)
>
> Determinante, como o próprio nome já indica, ele determina alguma característica sobre a matriz. Por exemplo, se ela é inversível ou não, esse tipo de coisa. (Fernando, EC1)
>
> É, tem também a do . . . que você usa pra fazer . . . Pra saber se . . . [pausa] Quando você pega três pontos do R^3, pra saber se eles são colineares, [. . .] (Matemático, EC2)
>
> Resolver sistemas lineares e calcular a matriz inversa. (Mário, EC1)

Como podemos ver nas falas acima, os participantes citaram exemplos de problemas da Álgebra Linear e da Geometria Analítica, cuja resolução requer um uso corriqueiro de determinantes e mais voltado para fazer contas. Exemplos desse tipo foram os mais frequentes. Três participantes não souberam responder ou não se lembraram de nenhum exemplo.

Categoria 2: determinante como um ferramenta para classificar sistemas lineares

Observamos nas respostas alguns exemplos indicando o uso de determinantes para investigar o tipo do conjunto solução de um sistema linear, o que envolve um nível de complexidade a mais em relação à categoria anterior. A citação abaixo ilustra a concepção de determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares:

> Você usa quando vai resolver algum sistema usando matriz, aí, dependendo do determinante, você tem como ter uma noção se vai ter solução ou se não vai ter, e se vão ter infinitas, se vai ter uma solução única. O determinante te dá uma ideia da solução. (Matemático, EC2)

O trecho acima indica o emprego de determinantes num sentido mais qualitativo, envolvendo mais do que resolver o sistema, mas investigar a natureza do conjunto solução. Matemático refere-se à Regra de Cramer para classificar sistemas lineares por meio de determinantes. Não foram apresentados exemplos de um uso mais qualitativo de determinantes em outras situações diferentes do contexto de sistemas lineares.

Após a intervenção

Duas categorias de concepções foram identificadas nas respostas dos participantes sobre a utilidade de calcular determinantes, nas entrevistas finais: *determinante como uma ferramenta para resolver problemas* e *determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares e para investigar os tipos de contatos entre cônicas*.

Categoria 1: determinante como uma ferramenta para resolver problemas

Exemplos que indicam problemas cuja resolução requer uma aplicação direta de determinantes continuaram a ser mencionados nas entrevistas finais. Os trechos abaixo ilustram a concepção de determinante como uma ferramenta para resolver problemas:

> [. . .] o cálculo de determinante me ajuda a achar o polinômio característico, o polinômio minimal da . . . , de uma matriz [. . .] (Francisca, EC2)
>
> [. . .] encontrar um polinômio característico. Um método, na verdade, não é um determinante, você calcula como se fosse um determinante, você faz o produto vetorial entre dois vetores, não é propriamente um determinante [. . .] (Yhedi, EC1)
>
> [. . .] o determinante de uma matriz te diz se ela é invertida ou não. (Fernando, EC1)
>
> [. . .] determinantes também ajudam na solução de sistemas lineares. (João, EC1)

A maioria dos participantes (com exceção de um) apresentou pelo menos um exemplo da utilidade de calcular determinantes após a intervenção.

Categoria 2: determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares e para investigar os tipos de contatos entre cônicas

Assim como na etapa anterior, consideramos aqui respostas que indicassem um uso mais qualitativo dos determinantes e não apenas envolvendo uma aplicação direta. As falas abaixo ilustram esta categoria de concepções:

> Tem a estória dos sistemas, você diz se ele é possível, você vê . . . se ele tem uma solução única ou não, aí você usa o determinante para isso, não é? (Matemático, EC2)
>
> Por exemplo, para você discernir os contatos entre duas cônicas. (Maria, EC1)
>
> Problemas de contato entre duas cônicas não coincidentes [pausa], [. . .] (João, EC1)
>
> Utilidade de calcular determinante eu vi através de determinantes menores [. . .] utilidade também para ver o tipo de contatos de certas cônicas. (Mario, EC1)

Além da utilidade em investigar o tipo do conjunto solução de um sistema linear, os participantes trouxeram exemplos dos roteiros de ensino, especialmente do primeiro em que Sylvester usou determinantes para identificar e classificar o tipo de contato entre duas cônicas. Assim, esta categoria amplia a que foi identificada antes da intervenção (categoria 2) e algumas de suas concepções parecem ter sido influenciadas pelo próprio material.

Comentários gerais

Nas entrevistas iniciais, três participantes não souberam dar qualquer resposta para a utilidade de calcular determinantes. Esse dado é preocupante, pois a maioria dos participantes haviam concluído recentemente a segunda disciplina de Álgebra Linear e alguns ainda estavam cursando essa disciplina. Após a intervenção, apenas um participante não soube apresentar um exemplo (Raelo). Como já mencionamos anteriormente, esse mesmo participante não se mostrou muito à vontade durante a entrevista final.

Nas entrevistas finais, identificamos novamente a primeira categoria de concepções, indicando o *determinante como uma ferramenta para resolver problemas*. A segunda concepção identificada após a intervenção, *determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares e para investigar os tipos de contatos entre cônicas*, amplia a que foi encontrada nas entrevistas iniciais. A frequência de respostas na categoria alterada foi maior em relação à categoria estabelecida inicialmente (*determinante como um ferramenta para classificar sistemas lineares*). As respostas mencionam não só a investigação do tipo de conjunto solução de um sistema linear, como também o caso estudado no primeiro roteiro de ensino, em que determinantes eram empregados para identificar e classificar o tipo de contato entre duas cônicas.

À primeira vista, parece natural que a maioria dos participantes mencionem os exemplos explorados nos roteiros. No entanto, temos que levar em conta que três participantes não souberam responder à questão colocada na entrevista inicial, como dissemos acima. Temos que considerar também que o primeiro roteiro explorou um problema de natureza geométrica em que determinantes foram a principal ferramenta utilizada na resolução. Observando os exemplos apresentados antes e depois da intervenção, poucos indicam o uso de determinantes em problemas geométricos.

Além da mudança na segunda categoria, destacamos também os participantes que mudaram suas concepções. João, Maria e Francisca não souberam citar um exemplo da utilidade dos determinantes nas entrevistas iniciais. Já nas entrevistas finais, esses participantes citaram o uso de determinantes no problema dos contatos, conforme viram no Roteiro Sylvester. João também citou o exemplo do uso de determinantes para a resolução de sistemas lineares, tendo sido considerado também na primeira categoria. Francisca, nas entrevistas finais, citou exemplos vistos na disciplina Álgebra Linear. Sua resposta foi considerada na primeira categoria. O participante Mario mudou suas concepções, os exemplos apresentados por ele nas entrevistas iniciais envolviam um uso mais corriqueiro de determinantes. Nas entrevistas finais, esse participante também trouxe o exemplo do uso de determinantes na classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.

6.2.6 Considerações sobre concepções

A análise dos dados, apresentada na seção anterior, mostrou as concepções dos participantes de ambos os estudos de campo realizados sobre *o que é matriz*, *o que é determinante* e a *a utilidade dos determinantes*, antes e depois da intervenção. A análise foi baseada nos dados obtidos a partir de entrevistas semiestruturadas, conduzidas no início e no fim da intervenção. Também foram identificadas concepções sobre *o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear*, após a intervenção. Para cada uma dessas questões, as concepções identificadas foram agrupadas em categorias seguindo um critério de afinidade. As categorias não foram estabelecidas previamente à análise, mas, sim, emergiram das respostas.

Agrupar as concepções em categorias favoreceu uma visão mais global das concepções dos participantes. Por outro lado, trabalhar com um universo de 8 participantes dificultou, em alguns momentos, estabelecer as categorias. Em alguns casos, foi inevitável considerar uma categoria que representa a concepção de apenas um participante. Não podemos garantir que os participantes continuaram ou continuam a manter as concepções externadas ao final da intervenção, isso requereria um estudo longitudinal, o que foge aos objetivos desta investigação. De qualquer forma, entendendo as concepções como parte do conhecimento subjetivo, parece-nos natural esperar que estejam em constante mudança. À medida que o indivíduo apreende novas representações e associações sobre um conceito, suas concepções se ampliarão.

Mudanças nas concepções são mais evidentes quando as categorias mudam, no entanto, estamos cientes de que não podemos analisar mudanças apenas com base no sistema de categorias obtido. A análise mostrou uma situação em que as categorias de concepções iniciais se mantiveram após a intervenção (concepções sobre o que é determinante). No entanto, os participantes mudaram suas concepções, sendo considerados em categorias diferentes após a intervenção. Nesses casos, descrevemos as mudanças ocorridas, acompanhando os participantes cujas concepções foram alteradas.

Os resultados mostram que alguns participantes possuíam algumas concepções limitadas sobre matrizes e determinantes, seja porque apontam para uma compreensão parcial ou operacional do conceito, como por exemplo, as concepções de matriz como *uma ideia sem sentido* e de *determinante como uma operação com os elementos de uma matriz*; seja porque revelam uma compreensão incorreta, distorcida, do conceito, como por exemplo, as concepções de *determinante como um representante da matriz*. Concepções limitadas também foram observadas nos trabalhos de Attorps (2006), que investigou concepções de professores sobre equações e, de Even (1993), que investigou concepções de futuros professores sobre o conceito de função. Tanto Attorps como Even associaram as causas que contribuíram para a formação de tais concepções limitadas a experiências prévias de aprendizagem. Não investigamos as experiências prévias de aprendizagem dos participantes do estudo, mas ao buscar voluntários para participar da pesquisa, verificamos que todos haviam aprendido matrizes pelo modo tradicional, isto é, o curso de Álgebra Linear começou com matrizes como um objeto.

Em relação às *concepções dos participantes sobre o que é matriz* (Tabela 6.6), os resultados mostram mudanças significativas em relação às concepções iniciais.

Concepções sobre o que é matriz	
Antes	Depois
Uma ideia sem sentido.	Um meio de representar sistemas lineares.
Um repositório de números ou tabela.	Um repositório de números ou tabela.
Um objeto matemático ou associada a outros objetos.	–

Tabela 6.6: Concepções sobre o que é matriz, antes e depois da intervenção.

De acordo com os resultados representados na Tabela 6.6, novas concepções foram formadas após a intervenção, dando lugar a uma nova categoria. Duas categorias iniciais desapareceram. A concepção de matriz *como um meio de representar sistemas lineares* sinaliza que alguns participantes passaram a atribuir um sentido ao conceito de matriz, o que consideramos como um resultado positivo diante das concepções anteriores consideradas na categoria *matriz como uma ideia sem sentido*.

As reflexões sobre as metarregras reforçaram associações, no sentido de Sfard (1991), para o conceito de matriz. Por exemplo, refletir sobre a metarregra que influenciou o modo como Cayley estabeleceu as operações com matrizes, qual seja, *matriz era uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas lineares e transformações lineares*, levou alguns participantes a *reforçarem* a associação com sistemas lineares. É claro que os participantes, tendo passado pela primeira disciplina de Álgebra Linear, já sabiam que sistemas lineares podem ser expressos por meio de um produto matricial. Por isso, entendemos que as reflexões *reforçaram* tal associação, levando à formação de novas concepções.

Estamos cientes de que interpretar matriz apenas como um meio de representar sistemas de equações lineares ainda é restritivo. Além disso, temos que levar em conta que tal representação envolve uma multiplicação matricial. Em nosso ponto de vista, uma interpretação que não pode deixar de ser explorada nas disciplinas de Álgebra Linear é a de matriz como uma transformação linear, como proposto por (WAWRO et al., 2012). Esses pesquisadores apresentam uma proposta de ensino para desenvolver nos estudantes a interpretação de matrizes como objetos matemáticos que transformam geometricamente o plano e o espaço. O que queremos discutir é que tal concepção é ainda limitada se levarmos em conta a variedade de objetos que as matrizes podem representar. Mas, dentro da nossa proposta, o surgimento da categoria matriz como um meio de representar sistemas lineares sinaliza que alguns participantes passaram a atribuir um sentido ao conceito de matriz e alguns deixaram de ver matrizes apenas como um objeto.

Em relação à categoria que se manteve, *matriz como um repositório de números ou tabela*, explicitar a própria metarregra que influencia o modo como o conceito de matriz é descrito, *com base nos elementos característicos da sua representação em forma de tabela*, reforçou a associação de matriz com a sua representação em forma de tabela. Essa associação refletiu-se nas respostas de alguns participantes, levando um deles (Maria) a mudar suas concepções e outros a reafirmarem suas concepções. Uma mudança que notamos nessa categoria, após a intervenção é que alguns participantes passaram a utilizar os mesmos termos de Sylvester e Cayley para descrever o que é matriz, por exemplo: "matriz é um **arranjo retangular** no qual podemos fazer operações entre elas" (Mario, entrevista final). Temos que considerar, portanto, que há outras fontes de influência para as concepções.

Em relação ao papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear, os resultados indicam três concepções (Tabela 6.7), identificadas ao final da intervenção.

Concepções sobre o papel das matrizes nos estudos de Álgebra Linear
Matriz como uma ferramenta para resolver problemas.
Representar outros objetos.
Facilitar a resolução de sistemas lineares e o tratamento de transformações lineares.

Tabela 6.7: Concepções sobre o papel das matrizes nos estudos de Álgebra Linear.

Como os participantes não foram questionados sobre o papel das matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear antes da intervenção, não foi possível estabelecer comparações e avaliar mudanças. Esses resultados não contribuirão diretamente para responder à questão de pesquisa QP2, no entanto, a segunda e terceira categorias de concepções (Tabela 6.7), lança luz sobre alguns resultados anteriores. As concepções sobre o papel das matrizes em *representar outros objetos* e em *facilitar a resolução de sistemas lineares e o tratamento de transformações lineares* indicam que há participantes que não vêem matrizes apenas como um meio de representar sistemas lineares ou apenas como repositórios de números ou tabelas.

Não foi nosso objetivo investigar influência das reflexões sobre as metarregras nas concepções sobre o papel das matrizes nos estudos de Álgebra Linear. Algumas narrativas sugerem a abordagem de ensino das disciplinas de Álgebra Linear como fonte de influência para essas concepções. A fala de Raelo ilustra essa observação: "É tão mecânico o ensino da matriz, que eu . . . , eu não consigo ver um significado além de ter a matriz para poder calcular um determinante". No entanto, nossos dados não permitem generalizar essa observação.

Em relação às *concepções sobre o que é determinante*, os resultados mostram que não houve formação de novas concepções após a intervenção. As concepções identificadas antes da intervenção mantiveram-se (Tabela 6.8).

De um modo geral, a metarregra segundo a qual *determinantes são propriedades de matrizes* subjaz as três concepções identificadas sobre o que é determinante. No

Concepções sobre o que é determinante
Determinante como uma operação com os elementos da matriz.
Determinante como um número ou como uma função.
Determinante como um representante da matriz.

Tabela 6.8: Concepções sobre o que é determinante, antes e depois da intervenção.

entanto, os fatores que podem ter influenciado a formação das concepções sobre o que é determinante parecem ir além das metarregras exploradas e detectadas em nosso estudo. Os dados gerados não nos permitem inferir sobre o que leva um participante a interpretar o determinante como uma operação com os elementos de uma matriz quadrada e/ou como uma função que toma elementos em um conjunto de matrizes quadradas e os associa com números. Já a concepção de determinante como um representante da matriz parece ser decorrente de uma associação equivocada entre determinar se uma matriz possui inversa ou não e representar uma matriz, de acordo com as falas dos dois participantes (Matemático, EC2 e Maria, EC1). Ilustramos nossa conclusão com uma fala de Matemático: "Representa mais ou menos de que tipo ela é.".

Como salientamos na análise, apesar das categorias terem se mantido, um dos participantes (Yhedi) mudou suas concepções deixando de interpretar determinantes como *operação com os elementos de uma matriz*. Além disso, observamos um outro tipo de mudança. Yhedi (EC1) e Francisca (EC2), ao reafirmarem sua concepção de determinante como um número, sugeriram que determinantes não precisam ser obtidos apenas a partir de matrizes quadradas, por exemplo: "depois do curso, eu pude ver que o determinante existia independente da matriz, não precisa ter matriz para ter determinante"(Yhedi, EC1). A metarregra segundo a qual *determinantes são propriedades de matrizes* parece ter perdido sua exclusividade. Vemos essa mudança como sendo decorrente das reflexões sobre a metarregra explorada no primeiro roteiro, segundo a qual *determinantes são calculados a partir dos coeficientes de polinômios homogêneos com a finalidade de investigar propriedades geométricas de curvas*. Podemos dizer que, para esses dois participantes, a *concepção de que determinante é um número* não é exatamente a mesma que eles externaram no início do estudo, uma vez que eles passaram a considerar a possibilidade de obter determinantes a partir de outros objetos matemáticos (polinômios homogêneos que representavam as cônicas no episódio de Sylvester).

Dentre as *concepções sobre a utilidade dos determinantes*, os resultados não mostram a formação de concepções totalmente novas. Das duas concepções identificadas no início do estudo, a primeira foi repetida e a segunda foi ampliada (veja Tabela 6.9).

Concepções sobre a utilidade dos determinantes	
Antes	Depois
Determinante como uma ferramenta para resolver problemas.	Determinante como uma ferramenta para resolver problemas.
Determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares.	Determinante como uma ferramenta para classificar sistemas lineares e para investigar os tipos de contatos entre cônicas.

Tabela 6.9: Concepções sobre a utilidade de calcular determinantes, antes e depois da intervenção.

Após a intervenção, mais participantes passaram a ver nos determinantes uma utilidade que vai além de procedimentos que envolvem cálculos corriqueiros, como determinar se uma matriz possui inversa, determinar o polinômio característico de uma matriz etc. É claro que esses e outros procedimentos têm seu valor e ampla aplicabilidade, mas os determinantes também servem como uma ferramenta para fazer investigações mais elaboradas, como o caso estudado no Roteiro Sylvester mostrou, com o emprego de determinantes para investigar os tipos de contatos entre duas cônicas.

Em nossa interpretação dos resultados, a ampliação da segunda concepção foi fortemente influenciada pelo exemplo de utilização dos determinantes no episódio de Sylvester. No entanto, não podemos descartar que as discussões sobre a metarregra *determinantes são calculados a partir dos coeficientes de polinômios homogêneos com a finalidade de investigar propriedades geométricas de curvas*, observada no contexto da resolução do problema dos contatos, tenham influenciado tal mudança nas concepções de alguns participantes. Desse modo, associamos a mudança observada nas concepções sobre a utilidade de calcular determinantes não só às reflexões sobre as metarregras, como também ao próprio material de ensino que trouxe um exemplo novo para os participantes sobre a utilidade de calcular determinantes. Apesar de parecer óbvio que os estudantes citem um exemplo que foi apresentado a eles no minicurso, vale destacar que nas entrevistas iniciais três participantes não souberam dar nenhum exemplo de uso dos determinantes. E os estudantes haviam concluído pelo menos uma disciplina de Álgebra Linear na época do minicurso.

QP2: Qual o impacto das reflexões sobre as metarregras nas concepções dos participantes sobre matrizes e determinantes?

De acordo com os resultados alcançados, percebemos influência das reflexões sobre as metarregras nas concepções dos participantes sobre as três questões "o que é matriz", sobre "o que é determinante" e "sobre a utilidade de calcular determinantes". As reflexões sobre as metarregras reforçaram ou forneceram associações para os conceitos de matriz e de determinante.

Consideramos que o impacto foi maior nas concepções sobre "o que é matriz". A categoria *um meio de representar sistemas lineares*, que surgiu após a intervenção, sugere influências das reflexões sobre a metarregra que governou o discurso de Cayley: *matriz como uma notação cômoda usada para trabalhar com sistemas de equações lineares e transformações lineares*. Nesse caso, as reflexões sobre as metarregras contribuíram em reforçar uma associação para o conceito de matriz, no sentido de (SFARD, 1991). Tal associação levou alguns participantes a atribuir um sentido para o conceito de matriz.

Em alguns casos, detectamos outras fontes de influências, além das reflexões sobre as metarregras. No caso da concepção de matriz como *um repositório de números ou tabela*, que se manteve após a intervenção, percebemos influência também das descrições de matriz dadas por Sylvester e Cayley (disponibilizadas nos roteiros), além da própria definição de matriz como uma tabela de números.

Outras fontes de influência também foram observadas no caso das concepções sobre a utilidade de calcular determinantes após as intervenções. Na concepção de *determinantes como uma ferramenta para classificar sistemas lineares e para investigar os tipos de contatos entre cônicas*, observamos que também houve influência do próprio Roteiro Sylvester, no qual foi abordado o problema dos contatos. O material também contribuiu para oferecer uma nova *associação*, no sentido de Sfard (1991), para o conceito de determinante.

Concluindo, as reflexões sobre as metarregras tiveram um impacto maior no caso das concepções sobre o que é matriz. Avaliando a intervenção feita e o material utilizado, nossa ênfase foi o conceito de matrizes. Os extratos das fontes primárias foram selecionados de modo a explorar: duas interpretações distintas da noção de matriz, o momento em que as matrizes foram introduzidas e o problema que impulsionou sua introdução. Então, apesar de muito ter sido discutido sobre determinantes, a ênfase foi o conceito de matrizes. Assim, é razoável o resultado de que as concepções sobre matrizes tenham sido as mais influenciadas pelas reflexões sobre as metarregras.

Temos que levar em conta, ainda, que não são só metarregras ou reflexões sobre metarregras contam para a formação de uma concepção. De acordo com Attorps (2006), as experiências enquanto alunos tanto no ensino básico como mais tarde na universidade influenciam o desenvolvimento de concepções sobre conceitos matemáticos. Assim, o fenômeno de formação de concepções é complexo, podendo ter fontes de influência diversas.

6.3 Questão de pesquisa 3: desenvolvimento de uma consciência histórica

6.3.1 Metodologia de Análise

Nesta seção, apresentamos a metodologia estabelecida para fazer a análise dos dados com vistas a responder a questão de pesquisa QP3, qual seja: **que contribuições o estudo trouxe para o desenvolvimento de uma consciência histórica nos estudantes?** A análise foi realizada com base nos dados obtidos com as entrevistas finais (Apêndice B), com a atividade final (Apêndice C) e com o questionário final (Apêndice D).

Os termos "consciência histórica" são usados em nosso trabalho à luz da conceituação de Rüsen (2001), como as "operações mentais com as quais os homens interpretam sua experiência da evolução temporal de seu mundo e de si mesmos, de forma tal que possam orientar, intencionalmente, sua vida prática no tempo" (p. 57), isto é, como o processo de construção intelectual dentro do qual o passado é interpretado com vistas à constituição de um sentido para compreender as transformações que nos cercam e fazer projeções para o futuro. Propomos a formação de uma visão desnaturalizada do ensino a partir do desenvolvimento de uma consciência histórica. Assim, a constituição de um sentido direciona-se, em nosso caso, a uma visão desnaturalizada dos conceitos de matriz e determinante.

Para decidir nosso percurso nesta parte da pesquisa, orientamo-nos pela análise apresentada em (KJELDSEN; PETERSEN, 2014) para investigar o desenvolvimento de uma consciência histórica, em torno do tópico funções, segundo perspectivas previamente estabelecidas. Dentro do quadro metodológico elaborado por essa pesquisadora e seus colaboradores (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014) para integrar a história da matemática ao ensino de matemática, é proposto o uso da *abordagem por múltiplas perspectivas* que consiste em estudar episódios do passado sob vários pontos de observação, ou várias perspectivas, dependendo dos objetivos do pesquisador (veja Seção 2.2).

Kjeldsen e Petersen (2014) investigaram o desenvolvimento de uma consciência histórica com respeito a duas perspectivas: *a influência dos atores* (os matemáticos envolvidos) *na formação do conceito de função* e *às forças impulsionadoras, internas e externas, no desenvolvimento histórico desse conceito*. A análise foi realizada a partir de relatórios e artigos produzidos pelos alunos participantes da pesquisa, bem como a partir de questionários. Ela foi apresentada trazendo citações dos dados que ilustravam discussões relacionadas às perspectivas estabelecidas.

Buscamos analisar o desenvolvimento de uma consciência histórica, a partir do caso particular da história das matrizes, com orientação para as seguintes perspectivas:

- **Os objetos matemáticos não são eternos.**
- **Os objetos matemáticos não são iguais para todos.**

Optamos por enunciar as perspectivas de um modo mais geral, no entanto, elas foram consideradas por meio de um caso particular com episódios da história das matrizes. Essas perspectivas influenciaram o planejamento dos roteiros de ensino, dentre outros fatores que também contaram para planejá-los, como por exemplo, as metarregras que seriam exploradas. Desse modo, as perspectivas forneceram direções, por meio dos roteiros de ensino, para os participantes interpretarem as fontes.

Para fazer a análise, construímos um inventário com o registro de todas as falas, encontradas nas entrevistas finais, no questionário final e na atividade final, ilustrando discussões e reflexões relacionadas às perspectivas acima. O inventário foi organizado em três partes: na primeira, registramos discussões e reflexões que tivessem relação com a primeira perspectiva, para cada participante; na segunda, discussões e reflexões relacionadas à segunda perspectiva e, na terceira, falas que indicavam algum tipo de reflexão sobre o ensino de matrizes.

Vale lembrar que a atividade final teve como proposta a produção de um pequeno artigo (Apêndice C), no qual os participantes pudessem sintetizar o que aprenderam com o estudo e o que o conhecimento sobre a histórica das matrizes representou para eles na perspectiva de futuros professores. No estudo de campo 1, a atividade final foi feita em grupo (os mesmos grupos das atividades históricas). No estudo de campo 2, essa atividade foi feita individualmente.

O questionário final (Apêndice D) contribuiu para a análise, principalmente, com a última questão em que os participantes foram convidados a fazer um depoimento final sobre o minicurso e sobre o que eles aprenderam referente aos episódios da história das matrizes. Nas entrevistas finais, olhamos principalmente para as questões do eixo II (conforme Seção 4.2.1).

6.3.2 Análise

Os dados obtidos com as entrevistas iniciais (eixo II) mostram que os participantes desconheciam qualquer informação sobre o surgimento das matrizes e sobre a origem da definição da multiplicação de matrizes. As respostas dos participantes à questão "Imagine que você estivesse dando aula sobre matrizes no ensino básico e um aluno seu perguntasse: *Professor, por que na multiplicação de matrizes temos que multiplicar linhas por colunas?* O que você responderia?" mostram não só que eles desconhecem a origem da definição da multiplicação de matrizes, como também mostram como eles interpretam o significado de uma definição matemática:

> Eu acho que ia continuar todo um segmento que me ensinaram, que seria uma ordem, seria como se fosse um teorema, que eu não preciso questionar o axioma, no caso. Eu vou aceitar aquilo como verdade e passar isso para o meu aluno também. (Raelo, EC2)
>
> Eu diria exatamente a mesma resposta que me deram: porque é assim e pronto. (Francisca, EC2)

> Como eu falei antes para você, até hoje eu não sei o porquê de ser uma linha por uma coluna. Geralmente, quando eu não quero que o aluno me faça esse tipo de pergunta, eu boto assim no quadro: “definição”. Que aí ele entende como uma definição que ele vai ter que utilizar. (Yhedi, EC1)

Apesar de nenhum dos participantes ter cursado a disciplina História da Matemática, a maioria apontou que acreditava que as noções matemáticas sofrem mudanças ao longo do tempo. No entanto, nenhum deles apresentou um exemplo concreto de mudança. O exemplo mais significativo foi o dos números, apresentado por Matemático (EC2), com base na sua intuição de que os números e a reta real nem sempre existiram: “[...] não é natural, assim, você pensar em infinitos números entre 0 e 1”. Uma das participantes não apresentou um exemplo específico de uma noção matemática que tenha se modificado, mas apresentou uma reflexão interessante, fazendo uma analogia com as mudanças que a linguagem sofre:

> Não sei se a senhora escutou, mas eu sempre escuto uma coisa assim: “Ah, o livro nunca muda, é sempre o mesmo cálculo, então pra que mudar o livro? [. . .] Porque por exemplo, português. Cada hora tem uma modificação no idioma. Idioma é uma coisa com vida, cada hora tem uma modificação. Mas o livro de cálculo, o que muda de uma edição para a outra? A capa? Mas eu acho que sim, porque a matemática não é uma coisa imutável, acho que é uma coisa viva, que à medida que a gente vai refletindo, descobrindo, acho que sim, pode ter mudanças de conceitos. (Maria, entrevista inicial, EC1)

Em relação à perspectiva **os objetos matemáticos não são eternos**, o primeiro roteiro explorou o episódio da pesquisa de Sylvester em torno do problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. Esse episódio é marcado pela origem do objeto matemático matriz. Conforme vimos na Seção 3.1.1, a noção de matriz foi introduzida no contexto da resolução desse problema, de natureza geométrica.

A generalização da técnica de extração de sistemas de determinantes menores foi baseada em uma representação em forma de tabela retangular à qual Sylvester denominou *matriz* (BRECHENMACHER, 2006b). As matrizes foram introduzidas como uma representação a partir da qual sistemas de determinantes poderiam ser formados. Assim, o primeiro episódio forneceu um caso particular da gênese de um objeto matemático: a introdução da noção de matriz com uma finalidade específica, voltada para atender a prática de extração de determinantes menores.

Tanto a introdução da noção de matriz no contexto do problema dos contatos, como o motivo para sua introdução, foram discutidos durante as atividades históricas. Os dados advindos das entrevistas finais, do questionário final e da atividade final permitiram acessar a síntese que eles fizeram sobre essas questões ao final da intervenção.

Alguns participantes fizeram considerações no pequeno artigo (atividade final) explicitando tanto o contexto dentro do qual a noção de matriz teve início, bem como o motivo da sua introdução:

> O surgimento das matrizes deu-se com o principal propósito de guardar as informações dos determinantes menores.
> [...]
> Em ultima análise, é possível afirmar que a definição matrizes dada por Sylvester surgiu do problema de contatos entre duas cônicas não coincidentes.
> [...]
> É de suma importância lembrar que o principal objetivo de Sylvester era estudar o tipo de contatos das cônicas utilizando determinantes menores, sendo a matriz para ele um objeto que não tinha o valor como hoje é dado. (João e Mário - EC1, atividade final)

> O primeiro matemático a introduzir o termo "Matriz" foi James Joseph Sylvester (1814-1897) no período entre 1850 e 1851. Ele o fez para denominar um "arranjo retangular" do qual podiam ser extraídos vários do que ele chamou "Determinantes menores". (Matemático - EC2, atividade final, grifos como no original)

A observação de João e Mário, de que a matriz não tinha para Sylvester o mesmo valor que tem hoje, mostra que esses participantes perceberam, a partir da interpretação da prática de Sylvester, que as matrizes nem sempre tiveram a importância que tem hoje.

As perspectivas não foram explicitadas no enunciado da atividade final, nem nas perguntas do questionário final. Assim, houve participantes que mencionaram apenas um dos elementos acerca da origem das matrizes (o contexto da introdução e o motivo) no texto que produziram para a atividade final ou no questionário. Por exemplo, Maria (EC1) mencionou apenas que a noção de matriz tem origem no contexto da resolução do problema dos contatos: "Achei interessante o fato de a introdução da noção de matriz ter surgido de um problema de classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.". Já Yhedi (EC1) mencionou apenas o motivo da introdução das matrizes:

> Posteriormente, nos foi introduzida a noção de matriz como um arranjo dessa vez não necessariamente quadrado, mas sim um arranjo retangular qualquer, do qual poderíamos observar os arranjos quadrados menores, que eram formados dentro da matriz, que seria um gerador primordial dos determinantes, chegando a ser citada por Sylvester como a mãe dos determinantes. (Yhedi - EC1, questionário final)

Houve participantes que não mencionaram nada sobre a origem das matrizes em seus artigos (atividade final), nem nos questionários. Quando perguntados nas entrevistas finais, se sabiam para que as matrizes foram inventadas, os mesmos participantes apresentaram as seguintes respostas:

> Eu acho que ainda não, assim, afirmar com essa certeza toda. Porque aqui no minicurso a gente estudou esses dois matemáticos que foram, digamos assim, os pioneiros na teoria de matrizes e todos os dois abordaram esse objeto matriz sobre pontos de vista completamente diferentes. (Fernando - EC1, entrevista final)
>
> Para o Sylvester, ele fez aquilo para poder fazer ... Estudar o contato entre as cônicas. (Raelo - EC2, entrevista final)

Parece que não ficou muito claro para Fernando o motivo da introdução das matrizes. Ele não esteve presente no dia em que os participantes do estudo de campo 1 discutiram as atividades históricas do primeiro roteiro, assim ele perdeu a oportunidade de compartilhar e discutir o que entendeu e o que não entendeu sobre a prática de Sylvester. Esse não foi o caso de Raelo, Já Raelo, não perdeu um encontro. Ele mostrou-se um tanto nervoso com a entrevista final. De qualquer forma, não fez considerações significantes sobre a origem das matrizes nas outras fontes de dados, de modo que não conseguimos acessar o que ele alcançou sobre essa questão.

Em relação à perspectiva **os objetos matemáticos não são iguais para todos**, os episódios históricos explorados nos roteiros de ensino trazem duas interpretações diferentes da noção de matriz. No episódio de Sylvester, as matrizes desempenharam o papel de uma representação, de uma fonte (mãe dos menores) para gerar os sistemas de determinantes menores. No episódio de Cayley, as matrizes são interpretadas como uma notação para "conjunto de equações lineares"(sistemas lineares). A partir dessa interpretação, Cayley enunciou as leis das operações com matrizes e desenvolveu um cálculo simbólico com esses objetos. As diferentes interpretações do objeto matriz por esses dois matemáticos são carregadas de significados e têm forte relação com suas práticas.

As interpretações do objeto matriz por Sylvester e Cayley foram bastante discutidas pelos participantes durante as atividades históricas. Todos os participantes fizeram considerações comparando o significado das matrizes, nos dois episódios de pesquisa, na atividade final. Mostraremos aqui considerações nas falas dos participantes que mostram um olhar para a prática atual. Os participantes de ambos os estudos não são professores formados, então suas falas refletem suas experiências como aprendizes. O trecho abaixo é o primeiro parágrafo do pequeno artigo feito pelo grupo 1.2, composto por Yhedi, Maria e Fernando (EC1). O grupo faz uma rápida consideração, que mostra a percepção deles sobre as diferenças sofridas pelo objeto matriz ao longo do seu desenvolvimento.

> Tabela de informações? Arranjos de números? Linhas e colunas? Determinante? Hãm? Todas essas palavras nos remetem diretamente as noções e conceitos provenientes do estudo de matrizes. Atualmente as matrizes são constantemente usadas para as mais diversas aplicações, entretanto, nem sempre existiram as matrizes da maneira como as conhecemos. (Yhedi, Maria e Fernando - EC1, atividade final)

A observação do grupo de Yhedi, Maria e Fernando, de que as matrizes nem sempre existiram do modo como conhecemos hoje, mostra que eles perceberam que as noções matemáticas podem sofrer mudanças, isto é, os objetos matemáticos não são estáticos. Apesar de nenhum participante sugerir o contrário nas entrevistas iniciais, quando perguntamos se eles achavam que as noções matemáticas podem mudar, poucos souberam apresentar um exemplo concreto. Os roteiros de ensino forneceram um exemplo concreto de mudança com a noção de matriz e as diferentes interpretações atribuídas a ela em dois episódios históricos.

O grupo acima prosseguiu seu pequeno artigo descrevendo as interpretações de matriz para Sylvester e para Cayley. Depois, eles apresentaram uma comparação entre ambas as interpretações e uma reflexão sobre a forma com a qual aprenderam matrizes:

> É interessante perceber que depois de publicados, os estudos de Cayley deram uma nova identidade, um novo sentido ao estudo das matrizes, visto que agora não eram mais as "mães" dos determinantes menores, mas sim objetos matemáticos que caracterizavam-se a partir das leis de um cálculo simbólico e o enunciado de um "teorema notável".
>
> Se tentarmos agora fazer um paradigma com o que nos é ensinado hoje em sala de aula, seja no ensino médio ou mesmo no ensino superior, acreditamos que o termo matriz acabou sendo banalizado com o passar dos anos. A matriz acaba sendo apresentada como uma tabela de informações, qualquer "coisa" que podemos colocar em linhas e colunas e em muitas outras ocasiões, como uma mera ferramenta ou um simples instrumento "coringa" para resolvermos de um jeito mais simples, problemas que, em um outro ambiente, se tornariam mais complexos. (Yhedi, Maria e Fernando - EC1, atividade final)

A reflexão apresentada pelo grupo de Yhedi, Maria e Fernando é muito rica e mostra que eles perceberam que a definição de matriz como uma tabela de números oculta a rede de significados atribuídos a essa noção ao longo da história.

O próximo trecho mostra uma observação apresentada por um único participante sobre o *status* objeto/técnica das matrizes nos dois episódios de pesquisa, que foi discutido com os grupos nos dois estudos de campo: "Em 1858, Cayley produziu o texto *A Memoir on the theory of matrices* onde ele discutiu matrizes, não como uma ferramenta somente, mas como objeto de estudo."(Matemático - EC2, atividade final). Esse participante percebeu que o papel das matrizes mudou de um episódio para o outro. No episódio de Sylvester, elas desempenhavam o papel de uma ferramenta, uma técnica. No episódio de Cayley, elas passaram a ser o objeto de investigação. Desse modo, há um processo dinâmico de desenvolvimento do conceito por trás da forma que conhecemos hoje:

> É possível perceber que de Sylvester para Cayley houveram muitas mudanças e avanços na noção, ainda em formação, de matriz. De Cayley até o nosso contexto também houveram diversas modificações que não devem ser desprezadas. Assim, conhecer um pouco desse processo pode ser um artifício importante na hora de introduzir o conceito de matriz [...] (Matemático - EC2, atividade final)

Destacamos a observação de Matemático, no trecho anterior, reconhecendo que conhecer o processo de desenvolvimento de um conceito pode contribuir para ensiná-lo. A reflexão desse participante mostra a importância de desenvolver uma consciência histórica em professores e futuros professores e de como isso pode enriquecer o conhecimento pedagógico de conteúdo. O próximo trecho, com a fala de outro participante, reforça o que dissemos:

> [...] eu achava da minha cabeça que surgiu tudo direto, matrizes começou tudo na hora. A mesma pessoa que descobriu matrizes, descobriu [como] fazer operação com ela, aí o minicurso me trouxe isso: que foram coisas distintas, como se fossem trabalhos que não tinham nenhuma conexão. Se o Cayley falar, "Sylvester, é possível operar a matriz.", Sylvester falando para ele, "você está ficando maluco, não tem como."(Mario, entrevista final, EC1)

A fala de Mario sugere que ele tinha uma imagem da matemática e do desenvolvimento dos objetos matemáticos bastante limitada. A ideia de um único responsável por trás da criação de uma teoria, no caso, a teoria das matrizes, foi substituída pela ideia de um processo de desenvolvimento histórico do conceito de matriz com a contribuição de práticas matemáticas distintas, podendo ter a contribuição de mais um matemático.

A origem da regra para a multiplicação de matrizes foi um outro ponto tocado por praticamente todos os participantes, seja na atividade final ou no questionário final:

> As diferentes visões e concepções de uma matriz, esse mesmo objeto que, apesar de ser um instrumento de notação, tem múltiplos significados. No curso eu tive a oportunidade de conhecer mais a fundo o que levou as matizes à forma que conhecemos hoje e porque suas operações são definidas da maneira que são. (Fernando - EC1, questionário final)

Não foram trabalhados outros episódios da história das matrizes no minicurso oferecido, além dos episódios de Sylvester e de Cayley. A distância temporal entre a memória de Cayley e o momento em que as matrizes passaram a compor os textos algébricos é de cerca de 60 anos. Desse modo, a fala de Fernando sobre "conhecer mais a fundo o que levou as matrizes à forma que conhecemos hoje" é um pouco precipitada.

Apresentamos mais uma fala retirada do depoimento de Francisca (EC2) no questionário final, que representa a satisfação de todos os participantes em conhecer a origem da multiplicação de matrizes: "[...] gostaria de ressaltar que o ponto mais relevante do minicurso foi realmente entender a operação de multiplicação de matrizes". Em sua atividade final, Francisca apresentou uma reflexão sobre o ensino das operações com matrizes e sugeriu usar as ideias de Cayley para definir as operações:

> Algo muito comum de acontecer quando os alunos começam a ter contado com as propriedades e operações de matrizes é o fato de não entenderem muito bem as propriedades de multiplicação de matrizes que muitas das vezes é ensinado de forma básica, forçando o aluno a simplesmente gravar que ele deve multiplicar linha com a coluna, estudando as propriedades que Cayley enuncia, utilizando os sistemas de equações lineares, fica mais clara essa ideia . (Francisca - EC2, atividade final)

A parte da memória de Cayley (1858) disponibilizada no segundo roteiro mostra como Cayley definiu as operações com matrizes, a partir de "operações análogas com sistemas de equações lineares", usando as palavras de Cayley. Como já dissemos outras vezes, não parecia necessário para Cayley diferenciar sistemas de equações lineares de transformações lineares, como fazemos hoje (Seção 3.1.2). Algumas vezes, Cayley falava em conjuntos de equações e, outras vezes, em conjunto de funções lineares. Apesar de termos falado sobre essa diferença ao discutir a memória e como as operações com matrizes foram definidas, a maioria dos participantes continuou usando os termos de Cayley.

Finalizando a análise, apresentamos mais algumas reflexões sobre a prática atual no que diz respeito ao uso de matrizes e ao seu ensino. A forma como Sylvester empregou determinantes em seu episódio, calculando-os a partir dos coeficientes de um polinômio homogêneo de grau 2 com três variáveis e o fato de as matrizes terem surgido depois dos determinantes chamou a atenção dos participantes para a dependência do conceito de determinantes sobre o conceito de matrizes e despertou reflexões muito interessantes em alguns participantes:

> Conhecendo um pouco da história das matrizes é possível retirar do ensino a dependência que o conceito de determinante tem em relação às matrizes, visto que as matrizes foram definidas para apenas guardar as informações de um determinante, ou um sistema de determinantes.
>
> [...]
>
> O conhecimento da historia das matrizes poderia, inclusive, alterar a ordem de apresentação dos seguintes conteúdos, tendo em vista que a concepção de determinantes é anterior as matrizes, e portanto não depende do conceito de matriz, sendo assim é possível que no ensino de determinantes sejam conhecidos antes matrizes. A mesma coisa pode acontecer com relação a sistemas lineares e matrizes, inclusive, é mais favorável que assim o fosse feito, pois além de facilitar a construção de cada operação com matrizes, quebra ideia de que para resolver um dado sistema linear é necessário o conceito de matrizes e determinantes. (Mario e João - EC1, atividade final)
>
> [...] tendo conhecimento do contexto histórico e matemático que moveu o surgimento de determinada teoria, tem-se uma visão mais ampla do tópico em questão e, consequentemente, há possibilidade para o professor ministrar uma aula melhor adequada e fundamentada. Desse modo, o professor tem espaço para criação de

> uma abordagem completamente diferente da de muitos cursos de Álgebra Linear, e até mesmo do ensino médio (onde o conceito de matriz é apresentado logo de início). (Yhedi, Maria e Fernando - EC1, atividade final)

Esses participantes passaram a vislumbrar a possibilidade de introduzir determinantes e sistemas lineares antes de matrizes. Eles não especificaram como introduziriam os determinantes sem se basear no conceito de matriz e isso não foi trabalhado no minicurso. No entanto, as considerações acima são muito ricas na medida em que trazem reflexões sobre o ensino e mostram que esses participantes fizeram projeções para o futuro com a interpretação histórica realizada. Os trechos do artigo de Mario e João mostram que a experiência de conhecer práticas matemáticas, em que as matrizes não eram a ferramenta mais importante, bem como que determinantes e sistemas lineares eram tratados sem o uso de matrizes e de modo consistente, contribuíram para *desnaturalizar* algumas ideias sobre o ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Além de vislumbrarem mudanças na sequência com o qual esses tópicos costumam ser ensinados, esses participantes refutaram a ideia de que um sistema linear deve ser resolvido por meio de matrizes e determinantes.

6.3.3 Considerações sobre o desenvolvimento de uma consciência histórica

O referencial metodológico para esta parte da pesquisa apoia-se na **abordagem das múltiplas perspectivas**, como elaborado por Kjeldsen e colaboradores (KJELDSEN; BLOMHØJ, 2012; KJELDSEN; PETERSEN, 2014). O desenvolvimento de uma consciência histórica foi investigado a partir das seguintes perspectivas: **i) os objetos matemáticos não são eternos** e **ii) os objetos matemáticos não são iguais para todos**.

A análise apresentada na seção anterior leva-nos a concluir, em primeiro lugar, que os participantes tornaram-se cientes de que as matrizes possuem uma história. As perspectivas adotadas forneceram direções para os participantes interpretarem o passado, a partir do material disponibilizado nos roteiros com o resumo da prática de Sylvester e os extratos de artigos desse matemático e de Cayley. Desse modo, os participantes refletiram sobre outras práticas matemáticas e sobre suas próprias práticas. Segundo Jankvist e Kjeldsen (2011), a habilidade de refletir sobre sua própria prática matemática e a dos outros, a partir de diferentes ângulos, é considerada uma premissa para desenvolver consciência histórica em um sentido qualificado.

Os resultados indicam que a maioria dos participantes tornaram-se cientes de que os objetos matemáticos não são eternos, por meio do caso particular da gênese das matrizes. Isso foi acessado nos dados, observando-se discussões sobre o contexto dentro do qual essa noção surgiu, bem como do seu papel em servir como uma representação a partir da qual determinantes menores eram gerados na prática de Sylvester. Os resultados também mostram que a maioria compreendeu que os objetos matemáticos não são iguais para todos, por meio de duas interpretações diferentes da noção de matriz, elaboradas por Sylvester e por Cayley.

Nosso principal exemplo de investigação do desenvolvimento de uma consciência histórica com a metodologia das múltiplas perspectivas é o trabalho de Kjeldsen e Petersen (2014). Para isso, esses pesquisadores basearam-se no caso particular da história das funções e trabalharam com estudantes que estavam cursando um nível de ensino equivalente ao ensino médio. Nossos sujeitos são alunos de cursos de licenciatura e bacharelado em matemática. Fazendo uma comparação entre nossos resultados e os de Kjeldsen e Petersen, destacamos que essa metodologia também tem grande potencial para desenvolver uma consciência histórica em futuros professores. Podemos dizer que as perspectivas foram um objetivo a ser atingido, uma vez que serviram de referências para investigar o que os participantes alcançaram. Além disso, foram um meio para desenvolver consciência histórica, uma vez que influenciaram a elaboração dos roteiros e forneceram direções para os participantes interpretarem o passado.

Retomando o significado de consciência histórica de (RÜSEN, 2001), podemos concluir que os participantes compreenderam o presente a partir da interpretação das práticas matemáticas do passado, para o caso particular da especificidade da regra para a multiplicação de matrizes. Isso foi proporcionado pelos extratos da memória de Cayley (1858). Além disso, os resultados mostram as projeções que alguns participantes fizeram para o futuro, ao vislumbrar mudanças na forma de ensinar matrizes e determinantes. Como exemplo, alguns mencionaram a possibilidade de ensinar determinantes antes de matrizes, como vimos na atividade final de Mario e de João, que também sugeriram o ensino de sistemas lineares sem determinantes e matrizes. Além disso, esses participantes e, também Francisca, vislumbraram a possibilidade de usar as ideias de Cayley para introduzir as regras para as operações com matrizes.

Destacamos a contribuição do estudo para a formação de uma visão desnaturalizada dos conceitos de matriz e determinante. De acordo com Giraldo e Roque (2014), os conceitos matemáticos são ensinados como um dado, um fato incontornável, como se sempre tivessem existido do mesmo modo que são apresentados hoje e com a mesma finalidade. Como coloca (JAHNKE et al., 2000), no capítulo sobre o uso de fontes originais no ensino, do *ICMI Study*, a história lembra-nos que os conceitos foram inventados e que isso não acontece por si só. As discussões dos participantes, relacionadas às perspectivas estabelecidas, podem ser vistas como um resultado na perspectiva da formação de uma visão desnaturalizada sobre o conceito de matriz. Além disso, os resultados mostram que alguns participantes compreenderam que as matrizes nem sempre tiveram a importância que tem hoje, a partir da prática de Sylvester. Essa reflexão, apresentada por Mario e João em sua atividade final, é autêntica. Isso não foi explicitamente mencionado nas discussões entre a pesquisadora e os estudantes.

As reflexões de alguns participantes sobre alterar a ordem com a qual determinantes e matrizes são ensinadas, mencionadas anteriormente, também apontam para a formação de uma visão desnaturalizada desses conceitos. Essas reflexões também foram espontâneas, a ideia de ensinar determinantes sem matrizes não foi mencionada pela pesquisadora nos encontros. E são ricas na medida em que mostram que uma certeza foi balançada. O cálculo de determinantes a partir de matrizes era, até então, um procedimento naturalizado, realizado de forma mecânica, com pouco ou nenhum questionamento ou reflexão.

Mencionamos um último exemplo, que indica a formação de uma consciência histórica, a conclusão de Yhedi, Maria e Fernando, a partir da comparação das interpretações de Sylvester e Cayley sobre a noção de matriz. Esses participantes mencionaram em seu artigo que "o termo matriz acabou sendo banalizado com o passar dos anos". A conclusão desses participantes mostra que eles perceberam que a definição de matriz como uma tabela encapsula e oculta a rede de significados atribuídos a essa noção ao longo da história. A conclusão desse grupo é bem explicada pelas palavras de Brechenmacher (2006b, p. 3):

> Nos anos trinta do século XX, a noção de matriz tornou-se um elemento fundamental na arquitetura do conhecimento algébrico. A aquisição desse *status* de elementar dentro de uma teoria, a Álgebra Linear, deu às matrizes uma identidade forte e, ao mesmo tempo, esconde a pluralidade da sua história[5]

O *status* de elementar, ao qual Brechenmacher refere-se acima, pode ser compreendido ao observar que a disciplina Álgebra Linear se estrutura a partir da noção de matriz. Ao resgatar duas práticas em torno da noção de matriz, nosso estudo contribuiu para que alguns participantes refletissem sobre o discurso matemático e sobre o que ficou perdido com a constituição do objeto matemático matriz.

A partir das considerações acima, vemos que a interpretação das práticas de Sylvester e de Cayley levou os participantes a constituírem um sentido para as práticas atuais em torno das matrizes e determinantes, questionando-as e fazendo projeções para o futuro. Vemos, também, que a constituição de um sentido foi direcionada para a formação de uma visão desnaturalizada desses conceitos. Os resultados alcançados com esta parte da pesquisa corroboram com as ideias de Giraldo e Roque (2014) de que a história pode ter um papel na construção de uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos.

Que contribuições o estudo trouxe para o desenvolvimento de uma consciência histórica?

Sintetizando as considerações anteriores, nosso estudo contribuiu, em primeiro lugar, para que os participantes compreendessem que as matrizes têm uma história, isto é, por trás do objeto matemático matriz, definido como uma tabela de números, há um processo de desenvolvimento histórico. A partir do caso particular da história das matrizes, nosso estudo contribuiu para que os participantes percebessem que os objetos matemáticos não são eternos, isto é, eles têm um início e um motivo para

[5]No original: Au cours des années trente du XX^{e} siècle, la notion de matrice est devenue un élément de base dans l'architecture du savoir algébrique. L'acquisition de ce statut élémentaire au sein d'une théorie, l'algèbre linéaire, a donné aux matrices une identité forte et, dans le même temps, a écrasé la pluralité de leur histoire. (BRECHENMACHER, 2006b, p. 3)

serem criados. Além disso, não são iguais para todos, isto é, podem sofrer mudanças ao longo de diferentes práticas matemáticas.

A interpretação das experiências do passado levou os participantes a compreenderem a especificidade da regra para a multiplicação de matrizes e resultou em interessantes projeções para o futuro. O estudo também contribuiu para que os participantes refletissem sobre o ensino de matrizes e vislumbrassem mudanças. O cálculo de determinantes a partir de matrizes (quadradas) era algo que os participantes dos estudos de campo não haviam questionado ou refletido antes, era uma prática naturalizada. Assim, uma certeza foi balançada ao descobrirem que matrizes surgiram depois de determinantes e, portanto, determinantes não foram sempre calculados a partir de matrizes, como no episódio de Sylvester. Isso levou alguns participantes a vislumbrarem a possibilidade de ensinar determinantes antes de matrizes. A descoberta da origem das definições das operações com matrizes levou alguns participantes a vislumbrar a possibilidade de usar as ideias de Cayley para introduzir essas operações no ensino.

Os resultados sintetizados nos parágrafos acima podem ser vistos na perspectiva da formação de uma visão desnaturalizada dos conceitos de matriz e determinante. Além dos elementos do desenvolvimento histórico das matrizes, já levantados nos parágrafos acima, o estudo contribuiu para que alguns participantes percebessem que o objeto matriz nem sempre tiveram a importância que tem hoje. O episódio de Sylvester em que a principal ferramenta era determinantes, calculados sem matrizes e de modo consistente, proporcionou um exemplo de uma prática na qual matrizes não eram a ferramenta mais importante.

Por fim, o estudo contribuiu para que alguns participantes percebessem o que fica perdido com a constituição dos objetos matemáticos. No caso particular das matrizes, sua definição como uma tabela de números esconde os significados atribuídos a essa noção ao longo da história, bem como os fatores que impulsionaram seu desenvolvimento.

Capítulo 7

Considerações finais

A pesquisa teve como foco uma proposta articulando história das matrizes com o ensino de matrizes, no contexto das disciplinas de Álgebra Linear, implementada em dois estudos de campo. Os sujeitos da pesquisa foram alunos voluntários de cursos de graduação em matemática, de duas instituições de ensino superior, do estado do Rio de Janeiro. A proposta foi desenvolvida com o objetivo inicial de promover reflexões sobre metarregras relacionadas a matrizes e determinantes, a partir de conflitos comognitivos, planejados com base em fontes históricas. Com essas reflexões, esperávamos que os participantes do estudo percebessem e tomassem consciência das metarregras segundo as quais eles se orientam quando lidam com esses conceitos e que também percebessem e repensassem suas concepções sobre esses conceitos. Foi também nosso objetivo investigar as contribuições do estudo para o desenvolvimento de uma consciência histórica, direcionada para a formação de uma visão desnaturalizada de matrizes e determinantes.

Em relação ao primeiro objetivo, investigamos as condições para que fontes históricas sejam utilizadas de modo a promover reflexões sobre metarregras e o impacto dessas reflexões nas concepções dos participantes. Os resultados apresentados no Capítulo 6 levam-nos a concluir que o uso de fontes primárias possibilita planejar conflitos comognitivos, promover reflexões sobre as metarregras históricas e levar os estudantes a explicitarem suas próprias metarregras. Para isso, o uso dessas fontes deve ser orientado por atividades históricas que explorem o modo como os matemáticos lidavam com os seus objetos de investigação, o modo como usavam as ferramentas matemáticas, o modo como argumentavam etc. Desse modo, as diferenças entre a matemática das fontes e a matemática de hoje ganham destaque. Explicações adicionais sobre a matemática da fonte foram necessárias em nosso caso, no primeiro roteiro. Os resultados também indicam que as reflexões sobre as metarregras influenciaram mudanças nas concepções dos estudantes, trazendo associações para o conceito de matriz e contribuindo para oferecer aos estudantes um sentido para esse conceito (como um meio de representar sistemas lineares). Sobre os determinantes, o primeiro roteiro trouxe um exemplo da aplicação dessa ferramenta a um problema de natureza geométrica, o que foi uma grande novidade para os participantes do estudo.

Em relação ao segundo objetivo, investigamos a possibilidade de desenvolvimento de uma consciência histórica nos participantes do estudo, com orientação para as perspectivas de que *os objetos matemáticos não são eternos* e *não são iguais para todos*, considerando o caso particular da história das matrizes. Os resultados levam-nos a concluir que o estudo contribuiu para o desenvolvimento de uma consciência histórica nos participantes, que investigaram dois episódios da história das matrizes, conheceram a gênese dessa noção e o motivo de sua introdução. Além disso, discutiram diferentes interpretações para a noção de matriz a partir de duas práticas matemáticas distintas. Os participantes elaboraram uma interpretação histórica que os levaram a refletir sobre o ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Alguns vislumbraram a possibilidade de alterar a ordem com a qual esses conceitos são ensinados e também de usar as ideias de Cayley para introduzir as operações com matrizes. Nesse sentido, os resultados indicam também que o estudo contribuiu para a formação de uma visão desnaturalizada sobre matrizes e determinantes.

Validade e confiabilidade dos métodos e dos resultados da pesquisa

Não apresentamos na tese uma discussão explícita sobre a *validade* da pesquisa. O conceito de *validade* é comumente associado a formas de pesquisas quantitativas. Nessa perspectiva de pesquisa, de cunho mais positivista, a validade é entendida como a extensão em que uma medida representa corretamente os conceitos em estudo, ou seja, o grau em que uma medida representa precisamente o que se espera (OLLAIK; ZILLER, 2012). De modo geral, em pesquisas qualitativas, o conceito é associado à credibilidade da pesquisa. Assim, verificar a validade de uma pesquisa equivale a determinar se seus procedimentos metodológicos são coerentes e apropriados para responder às questões de pesquisa propostas e se os resultados são consistentes.

Há várias concepções de validade de uma pesquisa. Mason (2002) descreve três aspectos ou dimensões do processo de avaliação do *design*, dos métodos, da análise de dados e das conclusões de uma pesquisa: a *validade*, a *confiabilidade* e a *generalizabilidade*[1]. A noção de validade tem um sentido similar ao já mencionado. A noção de confiabilidade é aplicada para avaliar o quão confiáveis e precisos são os instrumentos de pesquisa. Para Mason (2002), discutir a validade e a confiabilidade da pesquisa requer convencer os outros que os dados da pesquisa não foram inventados ou deturpados e que o registro dos dados, bem como a análise foi feita de forma cuidadosa, honesta e precisa. A noção de *generalizabilidade* é aplicada para avaliar em que medida as conclusões tiradas a partir de um caso particular podem ser gerais. Essa terceira noção é bastante delicada quando se trata de pesquisas qualitativas baseadas em estudos de casos. Como argumenta Ottesen (2009), a generalização requer que casos típicos sejam selecionados para representar um conjunto maior, o que nem sempre é possível dadas as especificidades de cada caso, dos sujeitos da pesquisa, das condições em que a pesquisa é realizada etc. Além disso, como colocam Ollaik e Ziller (2012), em pesquisas qualitativas, a intenção não é generalizar, mas descrever, analisar, compreender. Ottesen (2009) e Aguilar (2010) verificam a validade de suas pesquisas, na área de Educação Matemática, segundo as dimensões dadas por Mason.

Ollaik e Ziller (2012) incluem as três dimensões de Mason no conceito de validade. Segundo esses pesquisadores, dentre as diferentes concepções de validade, há aquelas que dão mais ênfase à validade dos resultados, sendo denominadas de *validade externa*. Há aquelas que dão mais ênfase à validade do processo, dos métodos empregados na pesquisa, sendo denominadas de *validade interna*. Os pesquisadores descrevem mais dois tipos de validade: *a transacional* e *a transformacional*.

Os métodos para verificar a validade da pesquisa dependem das concepções adotadas, bem como do autor. Por exemplo, segundo Mason (2002, p. 188), a confia-

[1]No original: validity, reliability e generalizability.

bilidade da metodologia pode ser verificada por meio de uma descrição completa e honesta do processo de pesquisa. Nesse sentido, lembramos que, para cada questão de pesquisa proposta por nós, a metodologia de análise foi descrita em detalhes. Além disso, ao longo da análise ou nas seções de "considerações", logo após a análise, buscamos descrever não só os momentos positivos da pesquisa, mas também os momentos delicados, como por exemplo: a ocorrência de grupos que não discutiram sobre alguma metarregra histórica (Seção 6.1.2) e também os participantes que não responderam uma ou outra questão das entrevistas impossibilitando que suas concepções fossem identificadas (Seção 6.2).

As teses brasileiras em educação matemática não costumam apresentar uma discussão explícita sobre a validade e confiabilidade dos métodos da pesquisa, bem como dos resultados (veja, por exemplo, Rangel (2015), Araujo (2015)). Isso não significa que os pesquisadores não sejam transparentes quanto aos métodos empregados em suas pesquisas, ou que não justifiquem suas escolhas, ou ainda que não tenham sido cuidadosos com a coleta de dados e com a análise dos dados. Desse modo, apesar de reconhecermos a importância de verificar a credibilidade da pesquisa, também não apresentamos uma discussão explícita, verificando a validade e a confiabilidade dos métodos da pesquisa, bem como dos resultados.

Replicabilidade da proposta de ensino

A proposta de ensino apresentada neste trabalho foi planejada tendo em mente estudantes de graduação em matemática, com especial interesse em alunos de licenciatura em matemática. Um pré-requisito para a participação no minicurso oferecido foi ter cursado pelo menos a primeira disciplina de Álgebra Linear. Um dos grupos de participantes (UFRRJ) estava cursando a segunda disciplina no momento do estudo de campo. Acreditamos que, por não terem estudado formas bilineares e formas quadráticas antes, esse grupo teve mais dificuldade em entender como Sylvester montava um determinante a partir dos coeficientes da equação homogênea que representava as cônicas. O outro grupo que já havia concluído as duas disciplinas (UERJ) teve mais facilidade em acompanhar a prática de Sylvester. Já o segundo roteiro traz um conteúdo mais familiar para alunos de graduação.

Os roteiros foram testados em um estudo piloto com um grupo de professores do ensino básico que estavam cursando o Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT na UNIRIO. Na ocasião, os professores-participantes estavam cursando a disciplina Álgebra Linear como parte do programa de disciplinas obrigatórias do curso. Desse modo, eles haviam revisitado recentemente vários conceitos de Álgebra Linear. Ainda assim, esse grupo também mostrou dificuldade em entender como Sylvester montava um determinante a partir dos coeficientes da equação homogênea que representava as cônicas. Outra dificuldade que esse grupo mostrou foi em entender "a composição de sistemas lineares" apresentada na memória de Cayley (1858).

Em todos os estudos de campo realizados, trabalhamos com sujeitos que haviam cursado as disciplinas de Álgebra Linear recentemente ou estavam cursando uma delas. Seria interessante aplicar a proposta com outros grupos de professores do ensino básico que não tenham cursado essas disciplinas recentemente, a fim de avaliar se eles acompanhariam os roteiros.

Nossa proposta de ensino não foi planejada com o intuito de introduzir o conceito de matriz ou de determinantes. Dada a complexidade matemática do primeiro roteiro, que demandou a introdução de conceitos de geometria projetiva, consideramos que não seria adequado utilizá-lo com a finalidade de introduzir o conceito de matriz no âmbito das disciplinas de Álgebra Linear. Já o segundo roteiro, com uma tradução das primeiras páginas da memória de Cayley (1858), consideramos que pode ser usado para introduzir a noção de matriz em um curso de Álgebra Linear, desde que os alunos já tenham estudado sistemas lineares antes.

Analisar uma fonte primária foi uma experiência nova e muito rica para os participantes do estudo, no sentido de ter a oportunidade de ver uma matemática já conhecida escrita com outra notação, usada com outras finalidades e desenvolvida com argumentos que não são considerados válidos nos dias de hoje, como foi o caso do uso da interpretação de matriz como uma quantidade simples na demonstração do teorema notável (Roteiro Cayley). O que acabamos de descrever é discutido pela literatura como um dos efeitos e dos benefícios do uso de fontes primárias no ensino, qual seja, tornar o "familiar não familiar":

> Reorientação (uma tradução de *dépaysement*), a qual desafia a percepção por tornar o familiar não familiar, eventualmente causando uma reorientação nas visões do leitor e assim um aprofundamento da compreensão matemática - fontes [primárias] também

> lembram os estudantes que os construtos matemáticos surgem em um instante no tempo (e no espaço) e que não acontece por si só[2]. (JANKVIST, 2014, p. 880, tradução nossa)

Nossa proposta também não foi planejada com o intuito de ser aplicada ao ensino de matrizes no nível básico. No entanto, consideramos que o segundo roteiro, com algumas adaptações, também está ao alcance de alunos do ensino básico que já tenham estudado sistemas lineares.

Que reflexões o estudo traz para o ensino de matrizes nas disciplinas de Álgebra Linear?

O estudo leva a ver que o ensino da Álgebra Linear com a abordagem tradicional, que inicia com o ensino de matrizes como um objeto e de modo naturalizado, é problemática. Os resultados obtidos a partir da identificação das concepções dos participantes sobre "o que é matriz", antes da intervenção, indicam que o ensino de matriz como um objeto torna o conceito esvaziado de sentido para os estudantes. Essa conclusão é evidenciada pela reflexão apresentada por um grupo de participantes na atividade final:

> Se tentarmos agora fazer um paradigma com o que nos é ensinado hoje em sala de aula, seja no ensino médio ou mesmo no ensino superior, acreditamos que o termo matriz acabou sendo banalizado com o passar dos anos. A matriz acaba sendo apresentada como uma tabela de informações, qualquer "coisa" que podemos colocar em linhas e colunas[...] (Yhedi, Maria e Fernando - EC1, atividade final)

Como vimos na parte histórica do trabalho, Sylvester introduziu as matrizes a partir da noção de determinantes, como a *mãe dos determinantes menores*, isto é, como uma representação a partir da qual determinantes menores podiam ser extraídos. Em outras palavras, as matrizes surgiram como uma técnica no episódio de pesquisa de Sylvester. Já Cayley, introduziu as matrizes a partir de sistemas

[2]No original: Reorientation (a translation of dépaysement), which challenges one's perception by making the familiar unfamiliar, eventually causing a reorientation of the reader's views and thus a deepening of the mathematical understanding – also sources remind students that mathematical constructs have come into being at one point in time (and space) and that this did not happen by itself. (JANKVIST, 2014, p. 880)

lineares, como uma notação prática para representar os sistemas lineares, isto é, como uma representação que facilita o tratamento desse objeto. As matrizes foram a última noção a surgir historicamente, em relação aos outros objetos que compõem hoje o domínio da Álgebra Linear. Temos aqui um exemplo em que a ordem lógica da exposição dos conceitos difere consideravelmente da ordem da invenção. O modo como o discurso matemático apresenta os seus conceitos seguindo uma estrutura lógica, axiomática e dedutiva costuma inverter a ordem segundo a qual os conceitos surgem na história. O filósofo francês Léon Brunschvicg alertava sobre essa diferença e para a necessidade de reverter a ordem da exposição a fim de dar um sentido para as noções matemáticas (BRUNSCHVICG, 1912 apud ROQUE, 2012, p. 30). Nosso estudo leva a refletir sobre o que se perde com a inversão da ordem da invenção no caso das matrizes. No modo de escrever a matemática, as ferramentas são apresentadas antes dos problemas e como um objeto em si. Ao começar com matrizes, o conceito é apresentado como um objeto e os estudantes não percebem o que colocou a necessidade da sua introdução.

De acordo com Brechenmacher (2006b), o papel dessa noção em oferecer uma representação que simplifica o tratamento de outros objetos como transformações lineares, formas bilineares, formas quadráticas, sistemas de equações lineares, sistemas de equações diferenciais lineares etc. foi um dos fatores que levou a adoção da representação matricial nos tratados de álgebra a partir dos anos 1930. Os resultados das concepções dos participantes sobre "o papel das matrizes nos estudos de Álgebra Linear" também apontam que a maioria dos participantes do estudo vê sentido nas matrizes como uma representação para outros objetos e/ou como uma representação que facilita a resolução de sistemas lineares e o tratamento de transformações lineares.

Desse modo, o estudo leva-nos a concluir que não é apropriado iniciar o curso de Álgebra Linear pelo conceito de matriz. Consideramos que é artificial começar com matrizes sem que a necessidade desse conceito e da representação que ele oferece tenham sido colocadas. Temos a clareza de que o estudo não permite fazer prescrições sobre como deve ser o ensino de Álgebra Linear, mas podemos apontar alguns encaminhamentos. Assim, sugerimos que esse conceito seja introduzido somente quando houver necessidade da representação matricial, por exemplo, a partir do estudo de sistemas lineares. Achamos interessante que a multiplicação de matrizes seja introduzida a partir da composição de transformações lineares, o que possibilita ao aluno atribuir um sentido a esta operação, bem como entender a especificidade da regra para multiplicar matrizes.

Quanto ao estudo de determinantes, as concepções dos participantes sobre "o que é determinante" e os exemplos apresentados sobre "a utilidade de calcular determinantes" apontam poucas associações com contextos geométricos. Achamos que seria interessante introduzir determinantes a partir da interpretação geométrica desse conceito como área com sinal do paralelogramo formado por dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e como volume com sinal do paralelepípedo formado por três vetores em $\mathbb{R}^3$, conforme fazem Cabral e Goldfeld (2012). Além disso, consideramos importante resgatar aspectos do desenvolvimento histórico dos determinantes mostrando que nem sempre foram calculados a partir de matrizes e que a definição desse conceito baseada em matrizes foi uma construção posterior.

Implicações do estudo para a formação de professores

Refletindo sobre o que os participantes alcançaram em termos de uma consciência histórica e da formação de uma visão desnaturalizada sobre matrizes e determinantes, reconhecemos a importância deste tipo de estudo para a formação de professores, em especial, para o desenvolvimento do conhecimento pedagógico de conteúdo. Somos consonantes com o argumento de Giraldo e Roque (2014) sobre a importância de constituir uma visão desnaturalizada dos conceitos matemáticos, *como um aspecto essencial do conhecimento pedagógico de conteúdo*, bem como sobre o papel da história da matemática para constituir tal visão. Nesse sentido, acreditamos que a história da matemática pode fazer uma ponte entre a formação matemática e o conhecimento pedagógico de conteúdo.

Nossa pesquisa não teve como perspectiva de investigação analisar as contribuições do estudo para o conhecimento pedagógico de conteúdo dos participantes. No entanto, as reflexões apresentadas nas discussões sobre a possibilidade de alterar a ordem com a qual matrizes, determinantes e sistemas lineares são ensinados, bem como a possibilidade de usar as ideias de Cayley para introduzir as operações com matrizes, apontam para possíveis contribuições no sentido de enriquecer o conhecimento pedagógico de conteúdo dos participantes do estudo. Eles próprios reconheceram a importância de conhecer o processo de desenvolvimento do conceito para ensiná-lo:

> [...] tendo conhecimento do contexto histórico e matemático que moveu o surgimento de determinada teoria, tem-se uma visão mais ampla do tópico em questão e, consequentemente, há possibilidade para o professor ministrar uma aula melhor adequada e fundamentada. Desse modo, o professor tem espaço para criação de uma abordagem completamente diferente da de muitos cursos de Álgebra Linear, e até mesmo do ensino médio (onde o conceito de matriz é apresentado logo de início). (Yhedi, Maria e Fernando - EC1, atividade final)

Estamos cientes de que nossas reflexões sobre a importância desse tipo de estudo para enriquecer o conhecimento pedagógico de conteúdo baseiam-se nas intenções que os participantes manifestaram em fazer mudanças no ensino de matrizes, determinantes e sistemas lineares. Não temos como saber se eles de fato implementarão tais mudanças quando forem ensinar esses conceitos. Essa incerteza suscita uma perspectiva de investigação sobre o impacto desse tipo de estudo na prática do professor. Tendo desenvolvido uma visão desnaturalizada sobre os conceitos matemáticos, o que o professor mudaria em suas aulas?

Sobre a formação do professor para conduzir uma proposta de ensino com uma abordagem histórica

Muitos pesquisadores defendem que a história da matemática deve ser integrada ao ensino básico, o que nos leva a refletir sobre a formação histórica do professor de matemática. Hoje, muitos cursos de licenciatura em matemática no Brasil possuem uma disciplina obrigatória de História da Matemática em seu programa curricular, o que é um passo no sentido de oferecer uma formação histórica a futuros professores de matemática. No entanto, uma disciplina não nos parece suficiente para dar conta de tal formação. É preciso iniciar a discussão sobre como deve ser a formação histórica do professor de matemática. Se queremos que professores do ensino básico usem história da matemática com seus alunos, a formação histórica deve permear toda a formação inicial. Acreditamos que vivenciar exemplos de propostas de ensino com abordagens históricas também pode contribuir para tal formação, ou seja, se a história for integrada ao ensino de cálculo, geometria, álgebra etc.

A discussão anterior remete a outra questão: como deve ser a formação do professor para conduzir uma proposta de ensino com uma abordagem histórica em cursos de formação de professores? No caso desta pesquisadora, que elaborou e implementou a proposta aqui relatada, a formação e alguma experiência como professora da disciplina em questão, Álgebra Linear, foram importantes. No caso da nossa proposta, sua elaboração demandou uma certa maturidade matemática, conhecimento de história da matemática e de tendências historiográficas recentes para não incorrer no erro de seguir uma abordagem anacrônica, além do conhecimento das discussões sobre a integração da história no ensino.

A questão colocada acima insere-se na discussão sobre a formação dos formadores de professores de matemática[3]. Schubring e colaboradores (2000) apontam uma questão preocupante sobre o nível de qualificação dos professores que ensinam história da matemática para futuros professores como um dos obstáculos ao uso efetivo de história da matemática no ensino:

> Um problema análogo, no entanto, é o próprio nível de qualificação dos formadores de professores, isto é, aqueles que têm que ensinar história da matemática para futuros professores, fazendo um uso crítico das fontes históricas e julgando o valor da literatura secundária[4]. (SCHUBRING et al., 2000, p. 141, tradução nossa)

A citação anterior levanta um problema na formação de quem ensina a disciplina de História da Matemática nos cursos de graduação. Se a disciplina é lecionada com uma abordagem anacrônica, a formação histórica dos futuros professores fica comprometida. Uma solução que parece natural é o formador buscar por constante atualização, mas há uma carência de obras em português sobre história da matemática que tragam as discussões mais recentes da historiografia. Há também uma carência de materiais didáticos que sirvam de referência para propostas de ensino com abordagens históricas e que não distorçam a história, isto é, que não

[3]Para uma discussão mais geral sobre a formação de formadores de professores, veja (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013).

[4]No original: An analogous problem, however, is the level of qualification of the teacher trainers themselves, i.e. those who have to teach mathematics history to future teachers and are expected to impart a critical use of historical sources and to judge the value of secondary literature. (SCHUBRING et al., 2000, p. 141)

sejam anacrônicas.

Perspectivas

Algumas perspectivas de pesquisa emergem a partir das conclusões apresentadas nos itens anteriores. O grupo de professores com o qual trabalhamos no estudo piloto mostrou-se um pouco cético sobre a possibilidade de usar as ideias de Cayley para introduzir as operações com matrizes no ensino básico. Na verdade, esse grupo mostrou expectativa de que o minicurso proveria uma proposta de ensino de matrizes pronta para ser aplicada no ensino básico. Já os grupos de estudantes de Álgebra Linear com os quais trabalhamos nos estudos de campo principais da pesquisa mostraram-se mais receptivos a fazer mudanças no ensino, bem como a usar história no ensino, pelo menos em suas intenções. Assim, seria interessante aplicar nossa proposta em um grupo de professores e investigar o impacto da formação de uma visão desnaturalizada dos conceitos em suas práticas. Em outras palavras, tendo desenvolvido uma visão desnaturalizada sobre matrizes e determinantes, o que o professor mudaria em suas aulas? Acreditamos que, com isso, o estudo pode contribuir para a discussão sobre os saberes do professor.

A análise das reflexões sobre metarregras mostrou que os participantes explicitaram três metarregras (veja Tabela 6.4). Uma das diferenças observadas por nós entre nossos resultados e os de Kjeldsen e Petersen (2014) é que os participantes não explicitaram metarregras inadequadas em relação ao discurso matemático atual, como ocorreu com os participantes do estudo de Kjeldsen e Petersen. A partir dessa observação, uma perspectiva de investigação que se coloca é comparar os resultados referentes às reflexões sobre metarregras se o estudo fosse realizado com outro grupo de participantes. As metarregras explicitadas seriam as mesmas? Outra contribuição para discutir o papel da história da matemática em revelar metarregras do discurso matemático e torná-las objetos de reflexão dos estudantes seria elaborar outras propostas de ensino, explorando metarregras históricas que possam ser relacionadas a outras disciplinas como Cálculo, Equações Diferenciais, Geometria, Álgebra etc. Que outros referenciais metodológicos se aplicam para promover reflexões sobre metarregras do discurso matemático?

A partir do diagnóstico de que o ensino de matrizes como um objeto é problemático, uma perspectiva que se revela é elaborar e testar uma proposta de ensino para a disciplina Álgebra Linear, de modo que o estudo do objeto matriz (e de outros como determinantes) tenha sentido para os estudantes. Como colocamos anteriormente, o ensino dessa disciplina não deveria iniciar com matrizes. Seria interessante que tal proposta considerasse a introdução do conceito de matriz a partir da necessidade da representação matricial. A investigação da implementação dessa proposta comporta uma análise das concepções dos estudantes sobre matrizes e determinantes após vivenciar uma experiência de aprendizagem que não apresentasse os conceitos de modo naturalizado. Além disso, configura-se como uma contribuição para as pesquisas sobre ensino de Álgebra Linear.

As sugestões acima são apenas alguns dos possíveis prosseguimentos que podem ser dados à pesquisa aqui relatada. O campo de pesquisa, como um todo, é rico em novas questões de investigação. São necessários mais experimentos de ensino que forneçam evidências dos benefícios do uso da história no ensino de matemática e que façam reflexões sobre esse uso. Temos convicção de que a história só poderia ser usada de modo adequado no ensino básico, se houvesse material para orientar o professor. Nosso trabalho não fornece soluções para as dificuldades no ensino de matrizes e determinantes. Esperamos, contudo, ter contribuído para identificar alguns problemas e propor alguns encaminhamentos.

Referências Bibliográficas

AGUILAR, M. S. **How to stimulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?** Tese (PhD Dissertation) — Roskilde University, Roskilde, 2010.

ARAUJO, E. G. **Ensino de matemática em libras: reflexões sobre minha experiência numa escola especializada.** Tese (Doutorado) — Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: ⟨http://www.matematicainclusiva.net.br/pdf/TESEENIOFINAL.pdf⟩. Acesso em: 18 abr. 2016.

ASSIS, A. *A teoria da história de Jörn Rüsen: uma introdução.* Goiânia: Editora UFG, 2010.

ATTORPS, I. **Mathematics teachers' conceptions about equations**. Tese (Doctoral dissertation) — Faculty of Behavioural Sciences at the University of Helsink, Finland, 2006.

AXLER, S. J. *Linear Algebra Done Right*. 2. ed. [S.l.]: New York: Springer-Verlag, 1997.

BALL, D. The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths. *National Center for Research on Teacher Education*, College of Education, Michigan State University, 1988.

BALL, D.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. *Journal of Teaching Education*, v. 59 (5), p. 389–407, 2008.

BARDIN, L. *Análise de conteúdo.* [S.l.]: Lisboa: Ed. 70, 2004.

BERNARDES, A.; ROQUE, T. Refletcting on meta-discursive rules through episodes from the history of matrices. In: BARBIN U. T. JANKVIST, T. H. K. E. (Ed.). *Proceedings ESU7*. [S.l.: s.n.], 2014.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra LTDA, 1980.

BOS, H. J. M. *The Calculus in the Eighteenth Century II: Techniques and Applications*. Milton Keynes: The Open University Press, 1975. (History of Mathematics Origins and Development of the Calculus 5).

BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J. *Geometry*. [S.l.]: Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

BRECHENMACHER, F. **Histoire du théorèm de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930)**: Formes de représentations et méthodes de décompositions. Tese (Thèse de doctorat) — Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris, 2006.

BRECHENMACHER, F. Les matrices: formes de representation et pratiques opératoires (1850-1930). *Site expert des Ecoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Education Nationale*, 2006. Disponível em: ⟨http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/index-auteur.htm#B⟩. Acesso em: 05 jan. 2016.

BROMBERG, C.; SAITO, F. A história da matemática e a história da ciência. In: BELTRAN, M. H. E.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. (Ed.). *História da Ciência: tópicos atuais*. [S.l.]: São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010. cap. 3, p. 47–71.

BRUNSCHVICG, L. *Les étapes de la philosophie mathématique*. Paris: Librairie Félix Alcan, 1912. Acesso em: 21 fev. 2016.

BUTTERFIELD, H. *The Whig Interpretation of History*. [s.n.], 1931. Disponível em: ⟨http://www.eliohs.unifi.it/testi/900/butterfield/⟩. Acesso em: 17 mar. 2015.

CABRAL, M. A. P.; GOLDFELD, P. *Curso de Álgebra Linear: fundamentos e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, UFRJ, 2012.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1990.

CARVALHO, C. C. S.; MARCONDES, F. G. V. Comognição e o discurso dos alunos surdos nas atividades de generalização de padrões. In: *Anais do III Seminário Internacional de Educação Matemática*. [S.l.: s.n.], 2011.

CAYLEY, A. On the theory of linear transformations. In: FORSYTH, A. R. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*. Cambridge, University Press, 1845. v. 1, 1889, p. 80–94. Disponível em: ⟨http://archive.org/details/collectedmathema02cayluoft⟩. Acesso em: 01 fev. 2016.

CAYLEY, A. Remarque sur le notation des fonctions algébriques (1855). In: FORSYTH, A. R. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*. Cambridge, University Press, 1855. v. 2, 1889, p. 185–188. Disponível em: ⟨http://archive.org/details/collectedmathema02cayluoft⟩. Acesso em: 18 abr. 2012.

CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 148, p. 17–37, 1858.

CAYLEY, A. James joseph sylvester. In: FORSYTH, A. R. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge: University Press, 1889. v. 13, 1897, p. 43–48.

CRILLY, T. Cambridge: The rise and the fall of the mathematical tripos. In: FLOOD, R.; RICE, A.; WILSON, R. (Ed.). *Mathematics in Victorian Britain*. [S.l.]: Oxford University Press, 2011. p. 17–34.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*: Elo entre as tradições e a modernidade. [S.l.]: Autêntica Editora, 2002. (Tendências em Educação Matemática).

DORIER, J.-L. The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and Its Applications*, p. 141–160, 1998. V. 275-276.

DORIER, J.-L. (Ed.). *On the teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

EPPLE, M. *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*. [S.l.]: Wiesbaden: Vieweq, 1999.

EPPLE, M. Knot invariants in vienna and princeton during the 1920s: Epistemic configurations on mathematical research. *Science in Context*, v. 17, p. 131–164, 2004.

EULER, L. Introductio in analysin infinitorum. In: *Opera omnia, sér. 1, vol. VIII-XIX*. [S.l.]: Lousanne: M.M. Bousquet & Soc., 1748. VIII.

EVEN, R. Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 24 (2), p. 94–116, 1993.

FAUVEL, J.; GRAY, J. e. *The History of Mathematics: A Reader*. London: MacMillan Press, 1987.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. van. *History in Mathematics Education - The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema*, v. 27 (47), p. 917–938, 2013.

FORSYTH, A. R. Arthur cayley. In: FORSYTH, A. R. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, University Press, 1895. v. 8, p. ix–xliv. Disponível em: ⟨http://archive.org/details/collectedmathema08cayluoft⟩. Acesso em: 28 nov. 2012.

FRANCO, M. L. P. B. *Análise de conteúdo*. Brasília: Plano Editora, 2003.

FRIED, M. N. History of mathematics in mathematics education. In: MATTHEWS, M. R. (Ed.). *Internationl Handbook Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. cap. 21, p. 669–703.

FURINGHETTI, F.; MORSELLI, F. Beliefs and beyond: hows and whys in the teaching of proof. *ZDM Mathematics Education*, v. 43, p. 587?599, 2011.

FURINGHETTI, F.; PEHKONEN, E. Rethinking characterizations of beliefs. In: LEDER, G. C.; PEHKONEN, E.; TöRNER, G. (Ed.). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* [S.l.]: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. cap. 3, p. 39–57.

GIRALDO, V.; ROQUE, T. História e tecnologia na construção de um ambiente problemático para o ensino de matemática. In: GIRALDO, V.; ROQUE, T. (Ed.). *O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo.* Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014. cap. 1, p. 09–38.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, v. 35 (2), p. 57–63, 1995.

GRABINER, J. V. Is mathematical truth time-dependent? *The American Mathematical Monthly*, v. 81 (4), p. 354–365, 1974.

GRAEBER, A.; TIROSH, D. Pedagogical content knowledge: Useful concept or elusive notion. In: SULLIVAN, P.; WOOD, T. (Ed.). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education - Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*. [S.l.]: Rotterdam, Taipei: Sensei Publishers., 2008. v. 1, p. 117–132.

GÜÇLER, B. Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, p. 439–453, 2013.

GULIK-GULIKERS, I. van. **Meetkunde opnieuw uitgevonden** : - een studie naar de waarde en de toepassing van de geschiedenis van de meetkunde in het wiskundeonderwijs. Tese (Doutorado) — Rijksuniversiteit Groningen, Groningen, 2005.

HAWKINS, T. Frobenius and the symbolical algebra of matrices. *Archive for History of Exact Sciences*, v. 62, p. 23–57, 2008.

HIELE, P. M. van. *Structure and insight: a theory of mathematics education*. [S.l.]: Academic Press, 1986.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Tradução Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Editora Polígono S. A., 1970.

JAHNKE, H. N. et al. The use of original sources in the mathematics classroom. In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. van (Ed.). *History in Mathematics Education, The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers., 2000. p. 291–328.

JANKVIST, U. T. **Using History as a 'Goal' in Mathematics Education.** Tese (Doutorado) — IMFUFA, Roskilde University, Roskilde, 2009. Disponível em: ⟨http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/⟩. Acesso em: 06 abr. 2012.

JANKVIST, U. T. On the use of primary sources in the teaching and learning of mathematics. In: MATTHEWS, M. R. (Ed.). *Internationl Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching*. Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. cap. 27, p. 873–908.

JANKVIST, U. T.; KJELDSEN, T. H. New avenues for history in mathematics education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, v. 20(9), p. 831–862, 2011.

JENSEN, B. E. *Historie - livsverden og fag*. Copenhagen: Gyldental, 2003.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics.* Boston: Addison-Wesley, 2009.

KJELDSEN, T. H. Egg-forms and measure-bodies: Different mathematical practices in the early history of the modern theory of convexity. *Science in Context*, v. 22(1), p. 85–113, 2009.

KJELDSEN, T. H. Does history have a significant role to play for the learning of mathematics?: Multiple perspective approach to history, and the learning of meta level rules of mathematical discourse. In: BARBIN, E.; KRONFELLNER, M.; TZANAKIS, C. (Ed.). *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 6th European Summer University.* Viena: Verlag Holzhausen GmbH, 2011. p. 51–61.

KJELDSEN, T. H. A multiple perspective approach to the history of the practice of mathematics in a competency based mathematics education: history as a means for the learning of differential equation. In: KATZ, V.; TZANAKIS, C. (Ed.). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education.* Washington DC: The Mathematical Association of America, 2011. cap. 15, p. 165–173.

KJELDSEN, T. H. Reflections on and benefits of uses of history in mathematics education exemplified by two types of student work in upper secondary school. In: SRIRAMAN, B. (Ed.). *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education.* [S.l.]: Information Age Publishing, 2011. v. 12, cap. 14, p. 333–356.

KJELDSEN, T. H.; BLOMHØJ, M. Beyond motivation - history as a method for the learning of meta-discursive rules in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 80, p. 327–349, 2012.

KJELDSEN, T. H.; PETERSEN, P. H. Bridging history of the concept of a function with learning of mathematics: Students' meta-discursive rules, concept formation and historical awareness. *Science & Education*, v. 23, p. 29–45, 2014.

LEJEUNE-DIRICHLET, J. P. G. Über die darstellung ganz willkürlicher funktionen nach sinus und cosinusreihen. *Repertorium der Physik 1*, p. 152–174, 1837. In Werke, Bd. I, 1889, p. 133-160.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear.* 3. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

MANZINI, E. J. Uso da entrevista em dissertações e teses produzidas em um programa de pós-graduação em educação. *Revista Percurso*, v. 4 (2), p. 149–171, 2012.

MASON, J. *Qualitative Research.* 2. ed. London, Thousand Oaks, New Delhi: SAGE Publications, 2002.

OLLAIK, L. G.; ZILLER, H. M. Concepções de validade em pesquisas qualitativas. *Educação e Pesquisa*, v. 38, n. 1, p. 229–241, 2012.

OTTESEN, S. T. **Relating University Mathematics Teaching Practices and Students Solution Processes.** Tese (Doutorado) — IMFUFA, Roskilde University, Roskilde, 2009.

PARSHALL, H. H. To belong: The role of community in the life and work of j. j. sylvester. *Mathematical Intelligencer*, v. 20, p. 35–39, 1998.

PASSOS, C. C. M.; TEIXEIRA, P. J. M.; SILVA, W. B. Análise de episódios segundo a teoria da objetivação e análise do discurso. In: *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. [S.l.: s.n.], 2011.

PEHKONEN, E. A hidden regulating factor in mathematics classrooms: mathematics- related beliefs. In: AHTEE O. BJöRKQVIST, E. P. M.; VATANEN, V. (Ed.). *Research on mathematics and science education*. [S.l.]: University of Jyväskylä, 2001. p. 11–35.

PEHKONEN, E. State-of-the-art in mathematical beliefs research. In: NISS, M. (Ed.). *ICME-10 Proceedings and Regular Lectures*. [S.l.]: Copenhagen: ICME-10, 2004. p. 1–14.

PHILIPP, R. A. Mathematics teachers beliefs and affect. In: LESTER, J. F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007. cap. 7, p. 257–315.

RAMIS, E.; DESCHAMPS, C.; ODOUX, J. *Cours de mathématiques spéciales: àlgebre*. Paris: Masson, 1993. v. 1.

RANGEL, L. G. **Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo - Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo.** Tese (Doutorado) — COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, 2015.

RHEINBERGER, H.-J. *Toward a History of Epistemic Things: Synthesizing Proteins in the Test Tube*. [S.l.]: Stanford: Stanford University Press, 1997.

ROQUE, T. *História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. Desmascarando a equação. a história no ensino de que matemática? *Revista Brasileira de História da Ciência*, v. 7 (2), p. 167–185, 2014.

ROQUE, T.; GIRALDO, V. *O Saber do Professor de Matemática: ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2014.

RÜSEN, J. *Razão histórica: fundamentos da ciência histórica*. [S.l.]: Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2001. Tradução Estevão de Rezende Martins.

RÜSEN, J. Como dar sentido ao passado: questões relevantes de meta-história. *História da Historiografia*, v. 2, p. 163–209, 2009.

SCHUBRING, G. *Conflicts between generalization, rigor, and intuition. Number concepts underlying the development of analysis in 17th?19th century France and Germany. Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences*. New York: Springer, 2005.

SCHUBRING, G. Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning, epistemology, history, and semiotics interacting. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, p. 79–104, 2011.

SCHUBRING, G. *Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos?* Rio de Janeiro: E-LIMC, 2012.

SCHUBRING, G. et al. History of mathematics for trainee teachers. In: FAUVEL, J.; MAANEN, J. van (Ed.). *History in Mathematics Education: The ICMI Study.* [S.l.]: Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000. cap. 4, p. 91–142.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conception: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 1–36, 1991.

SFARD, A. On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 2 (3), p. 157–189, 2000.

SFARD, A. There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, v. 46, p. 13–57, 2001.

SFARD, A. When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the Learning Sciences*, v. 16(4), p. 567–615, 2007.

SFARD, A. *Thinking as communicating*: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York: Cambridge University Press, 2008.

SHOENFELD, A. H. Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM Mathematics Education*, v. 43, p. 457–469, 2011.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15(2), p. 4–14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Havard Educational Review*, v. 57, p. 1–22, 1987.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática.** Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

SYLVESTER, J. J. Additions to the articles “on a new class of theorems”, and “on pascal’s theorems”. In: BREWSTER, D. et al. (Ed.). *Philosophical Magazine and Journal of Science.* London: Printers and publishers of the University of London, 1850. XXXVII, p. 213–218. Disponível em: ⟨https://archive.org/stream/s3philosophicalm38londuoft#page/n5/mode/2up⟩. Acesso em: 05 fev. 2016.

SYLVESTER, J. J. On the intersections, contacts, and other correlations of two conics expressed by indeterminate coordinates. In: THOMSON, W. (Ed.). *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Cambridge: Macmillan and co., 1850. V, p. 262–282. Disponível em: ⟨https://archive.org/stream/cambridgeanddub02unkngoog#page/n6/mode/2up⟩. Acesso em: 05 fev. 2016.

SYLVESTER, J. J. An enumeration of the contacts of lines and surfaces of the second order. In: BAKER, H. F. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*. Cambridge, University Press, 1851. v. 1, 1904, p. 219–240. Disponível em: ⟨http://archive.org/details/collectedmathem01sylvrich⟩. Acesso em: 13 mar. 2012.

SYLVESTER, J. J. On the intersection of two conics. In: THOMSON, W. (Ed.). *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Cambridge: Macmillan and co., 1851. VI, p. 18–20. Disponível em: ⟨https://archive.org/stream/cambridgeanddub00ferrgoog#page/n28/mode/2up⟩. Acesso em: 05 fev. 2016.

SYLVESTER, J. J. On the relation between the minor determinants of linearly equivalent quadratic functions. In: BAKER, H. F. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*. Cambridge, University Press, 1851. v. 1, 1904, p. 241–250. Disponível em: ⟨http://archive.org/details/collectedmathem01sylvrich⟩. Acesso em: 13 mar. 2012.

SYLVESTER, J. J. Sur les puissances et les racines des substituitions linéaires. In: BAKER, H. F. (Ed.). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*. Cambridge, University Press, 1882. v. 3, 1909, p. 562–564. Disponível em: ⟨https://archive.org/details/TheCollectedMathematicalPapersOfJamesJosephSylvesterVolumeIii⟩. Acesso em: 01 fev. 2016.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, v. 12, p. 151–169, 1981.

THOMPSON, A. G. The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, v. 15(2), p. 105–127, 1984.

THOMPSON, A. G. Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992. cap. 7, p. 127–146.

VAINSENCHER, I. *Introdução às Curvas Algébricas Planas*. [S.l.]: Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Coleção Matemática Universitária).

VIIRMAN, O. The functions of function discourse ? university mathematics teaching from a commognitive standpoint. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 45(4), p. 512–527, 2013.

WAWRO, M. et al. A hypothetical collective progression for conceptualizing matrices as linear transformations. In: BARBIN U. T. JANKVIST, T. H. K. E. (Ed.). *Proceedings from Fifteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Portland: [s.n.], 2012.

WITMER, R. *Ars Magna, or, The Rules of Algebra.* [S.l.]: New York: Dover Publication, Inc., 1993.

WITTGENSTEIN, L. *Remarks on the foundations of mathematics.* [S.l.]: Oxford: Blackwell., 1978.

Apêndice A

Multiplicidade ou índice de interseção

Apresentamos uma definição para *multiplicidade* ou *índice de interseção* de duas curvas planas projetivas em um ponto, com base no livro *Introdução às Curvas Algébricas Planas* de Israel Vainsencher (2005).

Sejam $\mathbb{C}[X,Y]$ o anel de polinômios nas variáveis X e Y com coeficientes complexos e $\mathbb{P}^2$ o plano projetivo complexo. Dois polinômios F e G em $\mathbb{C}[X,Y]$ determinam duas curvas planas projetivas em $\mathbb{P}^2$. Suponha que F e G não tenham fatores irredutíveis em comum. Seja $P = (x : y : z) \in \mathbb{P}^2$ um ponto de interseção dessas curvas. Por uma mudança de coordenadas, podemos supor que $P = (0 : 0 : 1)$.

Defina o **índice de interseção** de F e G em P por:

$$(F,G)_P = \dim_{\mathbb{C}}\Big(\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle F(X,Y), G(X,Y)\rangle}\Big),$$

Na igualdade acima:

- $\mathbb{C}[[X,Y]] = \big\{ \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}X^iY^j \mid a_{ij} \in \mathbb{C}\big\}$ é o anel das séries de potências formais em X e Y,
- $\langle F(X,Y), G(X,Y)\rangle = \big\{A \cdot F + B \cdot G \mid A,\ B \in \mathbb{C}[[X,Y]]\big\}$ é o ideal gerado por F e G em $\mathbb{C}[[X,Y]]$ e
- o anel quociente $\dfrac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle F(X,Y), G(X,Y)\rangle}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, conforme (VAINSENCHER, 2005, p. 81).

Apêndice B

Roteiros das entrevistas

Roteiro das entrevistas semiestruturas realizadas no início dos dois estudos de campo:

1. Diga o que você espera do minicurso sobre história das matrizes.

2. Fale como foi a abordagem do primeiro curso que você fez de Álgebra Linear.

3. Diga, com as suas próprias palavras, o que você acha que é uma matriz.

4. Você sabe alguma coisa sobre a história das matrizes?

5. Você saberia dizer para que elas foram inventadas?

6. Imagine que você estivesse dando aula sobre matrizes no ensino básico e um aluno seu perguntasse: "Professor, por que na multiplicação de matrizes temos que multiplicar linhas por colunas?" O que você responderia?

7. O que é determinante?

8. Você saberia dar um exemplo da utilidade de calcular determinantes?

9. Você vê relação entre matrizes e sistemas lineares?

10. Você saberia dizer algum exemplo de uma aplicação geométrica de matrizes?

11. Diga como você acha que as ferramentas e conceitos matemáticos surgem?

12. Você acha que as noções matemáticas sofrem algum tipo de mudança ao longo do tempo?

Roteiro das entrevistas semiestruturas realizadas ao final dos dois estudos de campo:

1. Fale o que você achou do minicurso.

2. Fale, novamente, o que você acha que é uma matriz.

3. Qual seria, na sua opinião, o papel da noção de matriz no estudo da Álgebra Linear?

4. Como você responderia hoje a pergunta daquele aluno: “Professor, por que na multiplicação de matrizes temos que multiplicar linhas por colunas?”

5. Para você, o que é determinante?

6. Você saberia dar um exemplo da utilidade de calcular determinantes?

7. Você vê relação entre matrizes e sistemas lineares?

8. Você saberia dizer algum exemplo de uma aplicação geométrica de matrizes?

9. Agora você saberia dizer para que as matrizes foram inventadas?

10. Diga como você acha que as ferramentas e conceitos matemáticos surgem?

11. Fale se você acha que a noção de matriz sofreu alguma mudança ao longo do tempo.

Apêndice C

Atividade final: produção de um pequeno pequeno

Você foi convidado pelo jornal de periodicidade mensal "Conversando sobre matemática" a escrever um pequeno artigo (mínimo 1 página, máximo 2 páginas) abordando a história da noção de matriz, comparando os papeis que esta noção desempenhou para os matemáticos Sylvester e Cayley com o papel que a mesma desempenha hoje para a Álgebra Linear e discutindo se o conhecimento da história deste objeto traz alguma contribuição para o conhecimento do professor e para o ensino deste tópico.

Apêndice D

Questionário final

Objetivo: Obter um *feedback* dos roteiros de ensino e do minicurso.

1. Diga o que você achou mais interessante no primeiro roteiro "O surgimento das matrizes no estudo de cônicas por Sylvester".

2. Diga o que você achou mais interessante no segundo roteiro "Cayley e o cálculo simbólico com matrizes".

3. Apresente, de forma bem argumentada, o seu ponto de vista sobre o primeiro roteiro (elogios, críticas, sugestões, ...).

4. Apresente, de forma bem argumentada, o seu ponto de vista sobre o segundo roteiro (elogios, críticas, sugestões, ...).

5. Você acha que algo pode ser melhorado no primeiro roteiro? Se sim, descreva.

6. Você acha que algo pode ser melhorado no segundo roteiro? Se sim, descreva.

7. Você acha que algo pode ser melhorado no minicurso? Se sim, descreva.

8. Escreva um depoimento dizendo o que você acha que o minicurso acrescentou ao seu conhecimento, se algo surpreendeu você, se algo mudou na sua visão sobre matrizes, sobre o seu ensino ou em relação a qualquer aspecto que você queira ressaltar.

Apêndice E

Roteiro Sylvester

O surgimento das matrizes no estudo de cônicas por Sylvester[1]

Aline Bernardes[2]

E.1 Introdução

Em muitos cursos de Álgebra Linear, o primeiro conceito apresentado é o de matriz. E nesta abordagem, outros conceitos se baseiam na noção de matriz - como determinantes - ou são estreitamente relacionados a ela quando se trabalha em dimensão finita - como transformações lineares, formas bilineares e formas quadráticas.

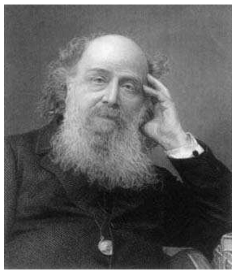
Veremos que na produção do conhecimento relacionado a matrizes, esta noção não foi a primeira a surgir. Vamos conhecer as motivações matemáticas que levaram o matemático James Joseph Sylvester a introduzir a noção de matriz.

[1]Material elaborado para um estudo de campo realizado em outubro/novembro de 2014, como parte da pesquisa de doutorado.

[2]Doutoranda no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC) da COPPE e docente da UNIRIO.

E.2 Um retrato de James Joseph Sylvester

James Joseph Sylvester (1814-1897) nasceu em Londres, teve a sua formação inicial em uma escola para judeus. Aos 14 anos (em 1828) foi para a *London University*, onde foi aluno de Augustus De Morgan (na época, recentemente nomeado para a cadeira de Matemática, com 21 anos). Desde cedo, manifestou aptidão para Matemática.



James Joseph Sylvester

Sofreu preconceitos pela sua origem judia durante a sua formação. Foi retirado pela família da *London University*, devido a uma tentativa de ferir um colega com uma faca no refeitório (PARSHALL, 1998). Em seguida, foi para a *Royal Institution* em Liverpool (em 1829), onde novamente não se estabeleceu devido a referências constantes contra a sua origem judia[3].

Em 1831, quando finalmente havia se estabelecido no *St John's College*, em Cambridge, ficou doente três vezes por um longo período, o que o afastou dos estudos. Em 1837, ele fez os exames do *mathematical tripos*[4] ficando em segundo lugar (*Second Wrangler*). No entanto, devido a sua origem judia, ele não recebeu o título correspondente.

No ano seguinte, foi admitido para uma cadeira de filosofia no *University College London* (fundada como London University), a primeira instituição na Inglaterra livre de organização religiosa.

Ao longo da sua carreira, ele atuou em cadeiras de matemática em outras universidades na Inglaterra. Esteve nos Estados Unidos por dois períodos de sua vida. Na primeira vez, como professor de matemática na *University of Virginia* por quase cinco meses e, na segunda vez, na *The Johns Hopkins University* em Baltimore, começando no ano de 1876. Em 1883, ocupou a cadeira de *Savilian Professor of*

[3] As informações apresentadas sobre a biografia de Sylvester foram baseadas em (CAYLEY, 1889) e (PARSHALL, 1998).

[4] O *mathematical tripos* era um exame de matemática pelo qual todos os estudantes tinham que passar independente da formação, antes de se especializarem no campo de interesse (CRILLY, 2011).

Geometry em Oxford. Esta era uma posição de destaque criada na Universidade de Oxford, desde 1619.

Sylvester esteve ligado a várias academias de ciências - nos Estados Unidos, Göttingen, Naples, Boston, St Petersburg, Berlim, para citar algumas. Foi o primeiro editor do American Journal of Mathematics e um grande contribuidor deste periódico, hoje um periódico de peso no campo da Matemática. Ganhou prêmios em reconhecimento a contribuição de suas pesquisas, como a *Royal Medal* (1860), *Copley Medal* (1880) e *De Morgan Gold Medal* (1887).

As publicações do (também) autor de poemas e sonetos estão reunidas em quatro volumes no *The collected mathematical papers*[5] *of James Joseph Sylvester* e abrangem vários assuntos em matemática, entre eles, determinantes e matrizes.

E.3 O problema que interessou Sylvester

Entre 1850 e 1851, Sylvester publicou uma série de memórias[6] analisando os tipos de interseções e contatos entre duas cônicas e entre duas quádricas. Nesta oficina, nos concentraremos no problema da **classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas**.

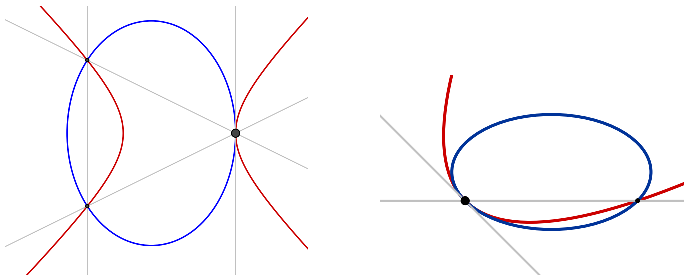
O termo contato é empregado quando dois ou mais pontos de interseção entre duas cônicas coincidem (pontos de interseção com multiplicidade). Existem quatro tipos de contatos, de acordo com o número de pontos de interseção coincidentes (2, 3 ou 4). As figuras abaixo ilustram estes tipos, com o(s) ponto(s) de contato destacado(s) (maior(es) que os outros pontos de interseção simples). Observe ainda que nos pontos de contato as cônicas se tangenciam.

Para pensar: Qual é o número máximo de pontos de interseção reais que duas cônicas podem ter em $\mathbb{R}^2$?

A originalidade na abordagem de Sylvester, em relação aos trabalhos de outros matemáticos sobre o mesmo problema, foi o recurso ao cálculo de determinantes. Segundo o historiador da matemática Frédéric (BRECHENMACHER, 2006b), o problema da caracterização das interseções das cônicas já havia sido tratado antes

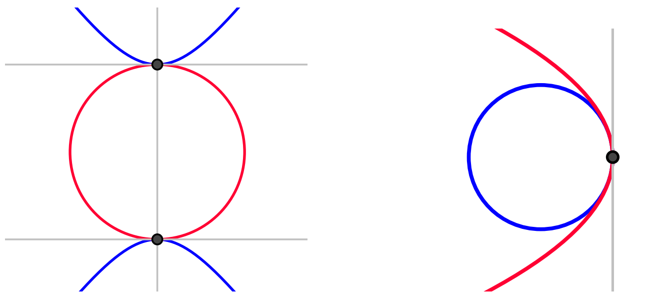
[5]Cada um destes volumes pode ser acessado no endereço ⟨http://archive.org/details/texts⟩

[6]As memórias utilizadas neste trabalho são (SYLVESTER, 1850a; SYLVESTER, 1850b; SYLVESTER, 1851a; SYLVESTER, 1851b).



(a) Contato simples (b) Contato próximo

Figura E.1: (a) Contato simples: dois pontos de interseção comuns e (b) Contato próximo: três pontos de interseção comuns.



(a) Contato diploidal (b) Contato confluente

Figura E.2: (a) Contato diploidal: dois pares de pontos de interseção duplos e (b) Contato confluente: quatro pontos de interseção comuns.

empregando o método analítico, porém, para Sylvester, o método analítico tradicional estava cheio da consideração de equações arbitrárias.

Um outro ponto importante foi a representação que Sylvester utilizou para as cônicas: **equações homogêneas de segundo grau a três variáveis**. Por exemplo, duas cônicas U e V eram representadas por equações do tipo,

$$U : ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz = 0 \quad \text{e} \quad V : Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz = 0,$$

com coeficientes reais. Neste caso, x, y e z são **coordenadas homogêneas**.

Vamos conhecer a prática que Sylvester desenvolveu para classificar os tipos de contatos entre duas cônicas e o contexto matemático em que a noção de matriz surgiu.

E.4 Seções cônicas

A representação geométrica das cônicas como seções obtidas a partir da interseção de um plano com um cone (ou melhor, uma superfície cônica) já é conhecida. Cada cônica é obtida de acordo com a inclinação do plano.

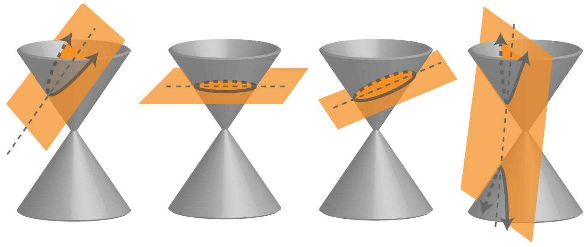
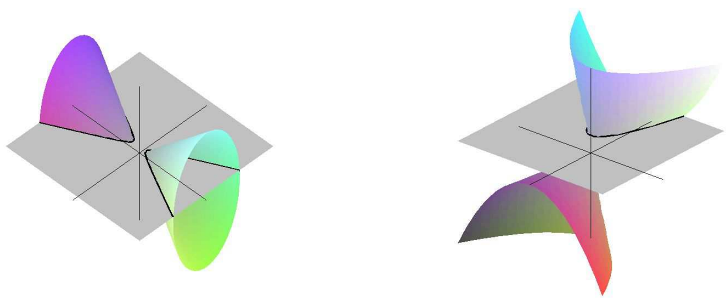


Figura E.3: Seções cônicas

Considerando o sistema de eixos cartesianos xyz e o vértice do cone na origem do sistema, sua equação é $x^2 + y^2 = z^2$.

Se cones mais gerais (ainda com vértice na origem) e planos do tipo $z = k \neq 0$ são utilizados, ainda é possível obter as seções cônicas como resultado da interseção entre eles. Veja a figura abaixo.



(a) Hipérbole (b) Parábola

Figura E.4: Os gráficos ilustram a interseção do plano $z = 1$ com cones não retos.

A equação mais geral possível de um cone em $\mathbb{R}^3$ é $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 0$. Isto é, trata-se da mesma equação dita homogênea que Sylvester utilizou para representar as cônicas.

Exercício 1

Uma equação do tipo $f(x, y, z) = 0$ é dita homogênea de grau k se, para todo t real, $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$. Verifique que a equação acima é homogênea de grau 2.

E.5 A geometria onde retas são pontos e planos são retas

Vemos nos artigos de Sylvester uma mistura de "métodos projetivos" e "métodos analíticos" na abordagem do problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas[7]. Utilizamos os termos "métodos projetivos" e "métodos analíticos" porque na metade do século XIX ainda não era clara a distinção entre as geometrias projetiva e analítica, como se dá nos dias de hoje.

Entenderemos o significado de representar cônicas por meio de equações homogêneas de grau 2 com três variáveis e apresentaremos alguns conceitos da geometria projetiva de um ponto de vista atual.

Imagine "um olho" na origem de $\mathbb{R}^3$ olhando para uma tela fixa, faça corresponder a cada ponto da tela um raio de luz partindo deste ponto e atravessando o olho (Figura E.5). Esta correspondência entre pontos na tela e raios de luz através da origem inspira o conceito atual de **ponto projetivo**[8]:

Um **Ponto**(ou **ponto projetivo**) é uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa através da origem de $\mathbb{R}^3$. O conjunto de tais pontos é denominado **plano projetivo real**.

A representação algébrica de pontos projetivos baseia-se na ideia de que cada reta que passa através da origem em $\mathbb{R}^3$ é unicamente determinada por um ponto Euclidiano $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Logo, este mesmo ponto euclidiano determina um único Ponto[9] (isto é, um ponto projetivo). Vamos representar tal reta pela expressão $[a, b, c]$ e nos referiremos a ela como as **coordenadas homogêneas** do Ponto P.

[7]Por métodos projetivos podemos citar como exemplo a utilização de coordenadas homogêneas. Um exemplo de método analítico é a representação das cônicas por equações.

[8]Para as definições nesta seção, nos baseamos em (BRANNAN; ESPLEN; GRAY, 1998)

[9]Utilizaremos o termo Ponto com a primeira letra maiúscula para designar pontos projetivos, diferenciando-os de pontos euclidianos.

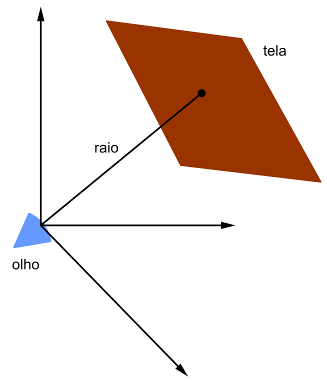


Figura E.5: Pontos na tela e raios de luz através da origem.

Note que a representação acima não é única. Por exemplo, o Ponto com coordenadas homogêneas $[2, 4, 6]$ consiste em uma reta passando pelos pontos $(0, 0, 0)$ e $(2, 4, 6)$. Mas a mesma reta também passa pelos pontos $(1, 2, 3)$ e $(-1, -2, -3)$, de modo que também poderíamos utilizar as coordenadas homogêneas $[1, 2, 3]$ e $[-1, -2, -3]$ para representar o mesmo Ponto (veja Figura E.6).

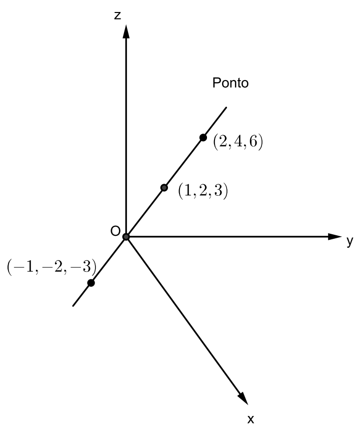


Figura E.6: Coordenadas homogêneas.

De um modo geral, se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e se $\lambda \neq 0$, então o ponto $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ também pertence à reta que passa pela origem e pelo ponto (a, b, c). Assim,

$$[a, b, c] = [\lambda a, \lambda b, \lambda c], \text{ para qualquer } \lambda \neq 0.$$

E.6 De volta às cônicas de Sylvester

Para entendermos como os conceitos acima se relacionam com a representação que Sylvester utilizou para as cônicas (equações homogêneas de grau 2), vamos partir de um exemplo. Considere a equação homogênea $x^2 - yz = 0$. A representação gráfica desta equação em $\mathbb{R}^3$ é uma superfície cônica com vértice na origem.

Considere agora a interseção desta superfície com o plano $z = 1$. Para determinar a interseção, basta substituir $z = 1$ na equação homogênea. O resultado será a parábola $x^2 - y = 0$ (veja a Figura E.4(b) acima).

No sentido contrário ao que fizemos acima, partindo da parábola $\{(x, y, z); x^2 - y = 0, z = 1\}$, contida no plano $z = 1$, como obter a sua representação em coordenadas homogêneas (isto é, a equação da superfície cônica)?

Se o Ponto $[x', y', z']$ pertence ao cone, ele "atravessa"o plano $z = 1$ no ponto $(x'/z', y'/z', 1)$. Veja Figura E.7.

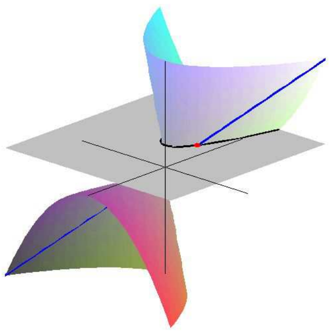


Figura E.7: Ilustração de um Ponto pertencente ao cone e o ponto correspondente no plano $z = 1$.

Se este ponto pertence à parábola contida em $z = 1$, então:

$$\left(\frac{x'}{z'}\right)^2 - \frac{y'}{z'} = 0 \Rightarrow (x')^2 - y'z' = 0,\ z' \neq 0.$$

Note que ficaram de fora os Pontos $[x', y', 0]$. Para "completar"o cone, precisamos incluí-los. Perceba ainda que tais Pontos são retas passando pela origem, paralelas ao plano $z = 1$, portanto não intersectarão este plano. Tais retas são chamadas de *Pontos ideais*[10] do plano $z = 1$. No exemplo em questão, fazendo $z' = 0$ teremos $x' = 0$, então o Ponto (ideal) da forma $[0, y', 0]$ deve ser incluído.

A figura assim determinada (incluindo os Pontos ideais) é denominada como *cônica projetiva*.

[10]Os Pontos ideais são considerados pontos no infinto, na geometria projetiva.

Uma **cônica projetiva** (contida ao plano projetivo real) é um conjunto de Pontos cujas coordenadas homogêneas satisfazem uma equação de segundo grau da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fxz + Gyz + Hz^2 = 0$.

Exercício 2

a) Verifique se os Pontos $[-4, 8, 2]$ e $[1, 1, 3]$ satisfazem a equação homogênea $x^2 - yz = 0$.

b) Determine as coordenadas homogêneas da forma $[a, b, 1]$ para o Ponto $[-4, 8, 2]$.

Lembrando que o gráfico da equação acima é um cone em $\mathbb{R}^3$ e uma vez fixado o plano de interseção (no nosso caso, $z = 1$), podemos associar a representação em coordenadas cartesianas de uma cônica a sua representação em coordenadas homogêneas (e vice-versa) de forma única.

Exercício 3

Dadas as equações homogêneas abaixo, obtenha a representação das cônicas em coordenadas cartesianas.

a) $x^2 + y^2 = z^2$.

b) $2x^2 + y^2 - 4xz + 2yz = 0$.

E.7 A classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas

A prática de Sylvester tinha como ponto de partida o estudo da multiplicidade das raízes da equação obtida igualando o determinante de $U + \lambda V$ a zero, U e V eram as cônicas cujos contatos estavam sendo investigados. Na notação de Sylvester: $\square(U + \lambda V) = 0$.

Porém, isso não foi suficiente para dar conta de todos os tipos de contatos.

- Considerando $U : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0$ e $V : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$,

  $$U+\lambda V = (a+\lambda A)x^2+(b+\lambda B)y^2+(c+\lambda C)z^2+2(d+\lambda D)xy+2(e+\lambda E)xz+2(f+\lambda F)yz$$

  e

  $$\Box(U+\lambda V) = \begin{vmatrix} a+\lambda A & d+\lambda D & e+\lambda E \\ d+\lambda D & b+\lambda B & f+\lambda F \\ e+\lambda E & f+\lambda F & c+\lambda C \end{vmatrix}.$$

- Os pontos de interseção de duas cônicas U e V são as soluções do sistema

  $$\begin{cases} U : ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz = 0 \\ V : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0 \end{cases}$$

  A equação $U + \lambda V = 0$ representa a família de cônicas que passam pelos mesmos pontos de interseção de U e V.

- O determinante de $U + \lambda V$ igual a zero resulta em uma equação polinomial de grau 3 em λ.

- $U + \lambda V$ será uma **cônica degenerada** quando λ for uma das **raízes** dessa equação.

Exercício 4

Analise as possibilidades para as multiplicidades das raízes de $|U + \lambda V| = 0$ e compare com a quantidade de tipos de contatos.

Veremos que quando as três raízes são distintas, as cônicas possuem quatro pontos de interseção distintos, isto é, não há contato.

Dentro deste quadro geométrico, Sylvester introduz o conceito de "determinantes menores" em uma memória de 1850:

Extrato I:

Imagine qualquer determinante colocado sob a forma de um arranjo ordenado quadrado de termos. Este quadrado pode ser considerado como divisível em linhas e colunas. Agora suponha que qualquer linha e qualquer coluna possa ser eliminada, nós obtemos desta forma um quadrado, um termo a menos em largura e em profundidade que o quadrado original; e por variar em qualquer maneira possível a seleção da linha e da coluna excluídos, nós obtemos, suponha que o quadrado original possua n linhas e n colunas, n^2 quadrados menores, cada um dos quais representará o que eu denomino um **Primeiro Determinante Menor** relativo ao determinante principal ou completo. Agora suponha que duas linhas e duas colunas sejam eliminadas do quadrado original, nós obtemos um sistema de $\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$ quadrados (...) Estes constituem o que eu chamo de um sistema de **Segundos Determinantes Menores;** e assim, em geral, nós podemos formar um sistema de r-ésimos determinantes menores pela exclusão de r linhas e r colunas, e um tal sistema, *em geral*, conterá

$$\left\{\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\right\}^2$$

determinantes distintos. (SYLVESTER, 1850b, p. 147)(Nossa tradução e destaques em negrito).

No mesmo artigo, propriedades sobre os determinantes menores foram enunciadas e, em seguida, aplicadas para classificar o tipo de contato entre duas cônicas. A prática desenvolvida por Sylvester consistia em comparar os fatores comuns no desenvolvimento polinomial do determinante completo $|U + \mu V|$ e nos primeiros determinantes menores [11].

Resumimos a estratégia de Sylvester na tabela abaixo:

[11] O que Sylvester denomina como "os primeiros determinantes menores" é definido nos livros de Álgebra Linear modernos como determinantes menores (ou apenas menores) de ordem $n-1$, no caso de uma matriz quadrada de ordem n. Se $n = 3$, os primeiros determinantes menores serão os determinantes de ordem 2 que podem ser formados. Se $n = 4$, serão os determinantes menores de ordem 3 que podem ser formados.

Tipo de contato	Determinante completo	Fatores comuns
Não há contatos	$D = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$	1
Contato simples	$D = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$	1
Contato próximo	$D = (\lambda - a)^3$	1
Contato diploidal	$D = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$	$(\lambda - a)$
Contato confluente	$D = (\lambda - a)^3$	$(\lambda - a)$

Vamos propor um entendimento da prática de Sylvester através de exemplos em que U e V são cônicas não-degeneradas.

Exercício 5

Siga o roteiro abaixo para classificar o tipo de contato (se houver) entre as cônicas:

$$U : 2x^2 - y^2 + 3z^2 = 0 \quad \text{e} \quad V : x^2 + y^2 - 3z^2 = 0.$$

Roteiro:

i) Monte o determinante $|U + \lambda V|$ e determine as raízes de $|U + \lambda V| = 0$.

ii) Se necessário, calcule os primeiros determinantes menores.

iii) Caso tenha feito o item acima, verifique se há fatores comuns entre o determinante completo e os primeiros determinantes menores.

iv) Consulte a tabela acima para classificar o tipo de contato (se houver).

v) Determine a equação em coordenadas cartesianas das cônicas U e V.

vi) Determine os pontos de interseção (reais ou complexos) de U e V e confirme o que você encontrou com o resultado acima.

vii) Utilize um programa de computador para traçar os gráficos U e de V.

viii) A partir da equação em coordenadas homogêneas de $U + \lambda V = 0$: Substitua cada uma das raízes encontradas no item i), passe a equação para a forma cartesiana e visualize o gráfico das cônicas encontradas para cada raiz λ juntamente com os gráficos de U e V. Descreva as cônicas encontradas neste item para cada uma das raízes.

Exercício 6

Utilize o método de Sylvester para classificar os tipos de contatos (se houver) das cônicas:

$$U : x^2 + y^2 + xz = 0 \quad \text{e} \quad V : 2x^2 - y^2 - 4xz = 0.$$

Exercício 7

Utilize o método de Sylvester para classificar os tipos de contatos (se houver) das cônicas:

$$U : x^2 + y^2 - 4z^2 = 0 \quad \text{e} \quad V : x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Sylvester estendeu o método acima para investigar as interseções entre quádricas (equações homogêneas de grau 2 a quatro variáveis) e, de forma mais geral, entre duas formas quadráticas (n variáveis). A generalização da técnica de extração de sistemas de determinantes menores foi baseada em uma tabela retangular à qual Sylvester denominou *matriz* (BRECHENMACHER, 2006b, p. 14):

Extrato II:

> (...) nós devemos começar, não com um quadrado, mas com um arranjo retangular de termos consistindo, suponha, de m linhas e n colunas. Isto não representará em si mesmo um determinante, mas, uma **Matriz** da qual podemos formar vários sistemas de determinantes por fixar um número p, e selecionar quaisquer p linhas e p colunas, os quadrados correspondendo ao que pode ser chamado de determinantes de p-ésima ordem. (SYLVESTER, 1850b, p. 150) (Nossa tradução e destaque.)

Extrato III:

> Eu defini, em um artigo anterior, uma "Matriz" como um arranjo retangular de termos, dos quais diferentes sistemas de determinantes podem ser gerados, a partir do ventre de uma mãe comum (...) (SYLVESTER, 1851b, p. 247) (Nossa tradução)

Extrato IV:

(...) a teoria das funções quadráticas se mistura a uma teoria mais ampla de funções binárias, consistindo da soma de múltiplos de produtos binários formados por combinar cada um do conjunto de quantidades x, y e z ... com cada um do mesmo número de quantidades do conjunto x', y' e z' ... Por exemplo,

$$axx' + bxy' + cxz'$$

$$+a'yx' + b'yy' + c'yz'$$

$$+a''zx' + b''zy' + c''zz'$$

seria uma função binária e seu determinante (não mais, como em uma função quadrática, simétrico sobre dua diagonal) corresponderia à matriz quadrada

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix} .$$

(SYLVESTER, 1851a, p. 222) (Nossa tradução)

E.8 Atividades

Questão 1: Faça um resumo descrevendo como Sylvester classifica os tipos de contatos entre duas cônicas U e V.

Questão 2: Sylvester utiliza vários conceitos/ferramentas matemáticas na prática elaborada por ele para resolver o problema da classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas.
Para entender o papel de cada um deles na sua pesquisa, vamos identificar quais desempenham o papel de induzir novo conhecimento (objeto(s) de investigação) e quais ajudam a fornecer as respostas do problema colocado (técnicas). O objeto de investigação de Sylvester é: a classificação dos tipos de contatos entre duas cônicas. Liste todos os conceitos/ferramentas matemáticas que constituem as técnicas utilizadas por Sylvester, de acordo com o texto.

Questão 3: Descreva a diferença entre como Sylvester utilizava determinantes neste episódio da pesquisa sobre matrizes e como nós utilizamos nos dias de hoje. Veja o extrato IV.

Questão 4: Explique o que é um *primeiro determinante menor* de acordo com a definição apresentada por Sylvester no Extrato I. O que é um *segundo determinante menor*? E um *r-ésimo determinante menor*?

Questão 5: Por que Sylvester precisou introduzir os determinantes menores?

Questão 6: Baseando-se nos Extratos II, III, explique o que era uma matriz e qual o papel desta noção para Sylvester.

Questão 7: Compare a definição de matriz apresentada no Extrato II com a definição atual. Aponte pelo menos uma semelhança e pelo menos uma diferença.

Apêndice F

Roteiro Cayley

Cayley e o cálculo simbólico com matrizes[1]

Aline Bernardes[2]

F.1 Introdução

O matemático Arthur Cayley introduziu a noção de matriz em uma memória intitulada "*Remarques sur la notation des functions algébriques*"(CAYLEY, 1855) (Observações sobre a notação de funções algébricas). Nesta memória, ele apresentou uma notação para as matrizes como sendo prática para representar sistemas lineares e formas quadráticas e definiu a *composição* de matrizes.

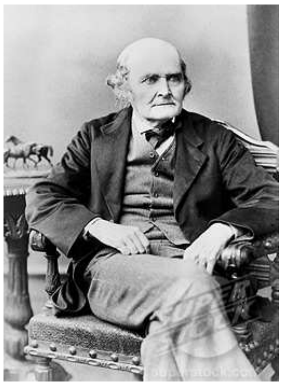
Em 1858, Cayley publica no *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* outra memória intitulada "*A Memoir on the Theory of Matrices*"(Uma Memória sobre a Teoria das Matrizes) (CAYLEY, 1858). Neste texto, as operações com as matrizes são estabelecidas(adição e multiplicação por uma *quantidade simples*, além da multiplicação com matrizes) e propriedades das operações são enunciadas.

[1]Material elaborado para o estudo piloto realizado em maio de 2014, como parte da pesquisa de doutorado.

[2]Doutoranda no Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC) da COPPE e docente da
UNIRIO.

F.2 O matemático da vez

Arthur Cayley (1821-1895) também foi um matemático inglês, nasceu em Richmond, Londres. Passou os primeiros sete anos de sua vida em St. Petersburg, onde seu pai era um comerciante bem sucedido e onde aprendeu o idioma francês.



Arthur Cayley

Em 1842, Cayley obteve o título de *Senior Wrangler*, termos que designavam a melhor colocação nos exames do *Mathematical Tripos*, no Trinity College Cambridge.

Sem a indicação para um cargo de professor de matemática em uma universidade, Cayley se dedicou à lei como advogado durante cerca de 14 anos. Paralelamente, manteve a sua dedicação à pesquisa. Em 1863, foi eleito para a posição de "Sadleirian Professor" de Matemática Pura da Universidade de Cambridge (o primeiro a assumir essa posição), cadeira que ele manteve pelo resto de sua vida.

Cayley também esteve nos Estados Unidos, por um período de seis meses em 1882, atendendo a um convite para ministrar um curso na Johns Hopkins University, em Baltimore, onde Sylvester era professor. Eles tiveram estreitas relações de amizade e desenvolveram trabalhos em colaboração. Nas memórias de Sylvester, citadas no roteiro anterior, encontram-se algumas menções a Cayley reconhecendo a sua contribuição[3].

Ele recebeu algumas honras em reconhecimento a sua pesquisa como a *Royal Medal* em 1859, a *Copley Medal* em 1882, a *De Morgan Medal* em 1884.

As suas publicações estão reunidas em 13 volumes nos *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*[4], elas versam sobre temas em geometria analítica, transformações lineares, matrizes, determinantes, teoria dos invariantes, teoria das equações, cálculo, funções homogêneas, equações diferenciais, teoria dos grupos, etc.

[3]As informações apresentadas sobre a biografia de Cayley foram, principalmente, baseadas em (FORSYTH, 1895). Andrew R. Forsyth foi o sucessor de Cayley na cadeira de Professor de Matemática Pura de Cambridge e foi o editor da coletânia de artigos de Cayley.

[4]Todos eles podem ser acessados na biblioteca digital ⟨http://archive.org/index.php⟩

F.3 A memória de 1858

Apresentamos a seguir uma tradução de algumas páginas da memória de 1858. Faça uma leitura geral desta tradução e marque os termos ou as ideias que você não entendeu. Siga então fazendo as atividades propostas na próxima seção.

A Memoir on the Theory of Matrices. By Arthur Cayley, *1858.*

O termo matriz pode ser usado em um sentido mais geral, mas nesta memória eu considero somente matrizes quadradas e retangulares, e o termo matriz sem qualificação deve ser interpretado como uma matriz quadrada; neste sentido restrito, um conjunto de quantidades arranjadas na forma de um quadrado,

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

é dito ser uma matriz. A noção de matriz surge naturalmente a partir de uma notação abreviada para um conjunto de equações lineares, viz. as equações

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz, \\ Y &= a'x + b'y + c'z, \\ Z &= a''x + b''y + c''z, \end{aligned}$$

podem ser mais simplesmente representadas por

$$(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z),$$

e a consideração de um tal sistema conduz às noções mais fundamentais na teoria das matrizes. Será visto que as matrizes (somente aquelas de mesma ordem) se comportam como quantidades simples; elas podem ser adicionadas, multiplicadas ou compostas, &c.: a lei da adição das matrizes é precisamente similar aquela de adição das quantidades algébricas ordinárias; em consideração a multiplicação (ou composição), existe uma peculiaridade de que as matrizes não são, em geral, permutáveis; entretando, é possível formar potências (positivas, ou negativas, inteiras ou fracionárias) de uma matriz, e assim chegar a noção de uma função racional e uma função inteira de uma matriz ou, geralmente, de qualquer função algébrica de uma matriz. Eu obtenho um teorema notável de que qualquer matriz satisfaz uma equação algébrica de sua própria ordem, o coeficiente da mais alta potência sendo a unidade, e aqueles de outras potências sendo funções dos termos da matriz, o último coeficiente sendo, de fato, o determinante; a regra para a formação desta equação pode ser enunciada na seguinte forma condensada, a qual será inteligível depois de uma leitura da memória, viz. o determinante, formado pela matriz diminuída pela matriz considerada como sendo uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade, será igual a zero. O teorema mostra que cada função racional e inteira (ou, até mesmo, uma função racional) de uma matriz pode ser considerada como uma função racional e inteira, cujo grau é no máximo igual ao da matriz menos a unidade; isto mostra em um certo sentido, que o mesmo [o resultado do teorema] é válido para qualquer função algébrica, qualquer que seja a matriz. Uma das aplicações do teorema é encontrar a expressão geral das matrizes que comutam com uma matriz dada. A teoria das matrizes retangulares parece muito menos importante do que a das matrizes quadradas, e eu não me aprofundo mais do que mostrar como algumas das noções aplicáveis a aquelas [as matrizes quadradas] podem ser estendidas para matrizes retangulares.

1. Por concisão, as matrizes abaixo serão, em geral, de ordem 3, mas deve ser entendido que definições, justificativas e conclusões se aplicam a matrizes de qualquer grau. E sempre que duas ou mais matrizes estiverem relacionadas, elas serão de mesma ordem.

2. A notação

$$\left(\begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

representa o conjunto de funções lineares

$$\big((\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c})(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z}),\ (\mathsf{a}',\mathsf{b}',\mathsf{c}')(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z}),\ (\mathsf{a}'',\mathsf{b}'',\mathsf{c}'')(\mathsf{x},\mathsf{y},\mathsf{z})\big),$$

tal que chamando estes de $(\mathsf{X},\mathsf{Y},\mathsf{Z})$, nós temos

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \left(\begin{array}{ccc} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a''\,, & b''\,, & c'' \end{array}\right)(x, y, z)$$

e, como observado acima, esta fórmula conduz às noções mais fundamentais da teoria.

3. As quantidades $(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z})$ serão identicamente [igual a] zero, se todos os termos da matriz são [iguais a] zero, e nós podemos dizer que

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

é a matriz zero.

Novamente, $(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z})$ será identicamente igual a $(\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z})$, se a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

e esta é dita ser a matriz unidade. Nós podemos, é claro, quando for necessário, dizer, a matriz zero ou (como pode ser o caso) a matriz unidade *de uma tal ordem*. A matriz zero pode, na maior parte, ser representada simplesmente por 0 e a matriz unidade por 1.

4. As equações

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (x, y, z), \quad (\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}') = \begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma \\ \alpha'\,, & \beta'\,, & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

dão

$$(\mathrm{X}+\mathrm{X}', \mathrm{Y}+\mathrm{Y}', \mathrm{Z}+\mathrm{Z}') = \begin{pmatrix} a+\alpha\,, & b+\beta\,, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{pmatrix} (x, y, z)$$

e isto conduz a

$$\begin{pmatrix} a+\alpha\,, & b+\beta\,, & c+\gamma \\ a'+\alpha', & b'+\beta', & c'+\gamma' \\ a''+\alpha'', & b''+\beta'', & c''+\gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,, & b\,, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}$$

como a regra para a adição de matrizes; aquela para subtração é, claro, similar a ela.

8. A equação

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a\,, & b\,, & c \\ a'\,, & b'\,, & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} (mx, my, mz)$$

escrita sob as formas

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = m\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}(x, y, z) = \begin{pmatrix} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{pmatrix}(x, y, z)$$

dá

$$m\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma, & mb, & mc \\ ma', & mb', & mc' \\ ma'', & mb'', & mc'' \end{pmatrix}$$

como regra para multiplicação de uma matriz por uma quantidade simples. O multiplicador m pode ser escrito antes ou depois da matriz e a operação é, portanto, comutativa. Nós temos, é claro, $m(\mathsf{L}+\mathsf{M}) = m\mathsf{L}+m\mathsf{M}$, ou [seja] a operação é distributiva.

10. Nós temos, em particular,

$$m\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{pmatrix},$$

ou trocando a matriz no lado esquerdo pela unidade, nós podemos escrever

$$m = \begin{pmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & m, & 0 \\ 0, & 0, & m \end{pmatrix},$$

A matriz no lado direito é dita ser a quantidade simples m considerada como *envolvendo a matriz unidade.*

11. As equações

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}(x, y, z), \quad (x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}(\xi, \eta, \zeta),$$

dão

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{pmatrix}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}(\xi, \eta, \zeta),$$

e assim, substituindo pela matriz

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{B}, & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}', & \mathrm{B}', & \mathrm{C}' \\ \mathrm{A}'', & \mathrm{B}'', & \mathrm{C}'' \end{pmatrix}$$

seu valor, nós obtemos

$$\begin{pmatrix} (a, b, c)(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a, b, c)(\beta, \beta', \beta''), & (a, b, c)(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a', b', c')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a', b', c')(\beta, \beta', \beta''), & (a', b', c')(\gamma, \gamma', \gamma'') \\ (a'', b'', c'')(\alpha, \alpha', \alpha''), & (a'', b'', c'')(\beta, \beta', \beta''), & (a'', b'', c'')(\gamma, \gamma', \gamma'') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}$$

como regra para multiplicação ou composição de duas matrizes. É para ser observado, que a operação não é comutativa; as matrizes componentes podem ser distinguidas como a primeira ou componente adicional, e a segunda ou a matriz componente mais próxima, e a regra da composição é como segue, viz. qualquer *linha* da matriz composta é obtida por combinar a *linha* correspondente da primeira ou da componente adicional sucessivamente com várias *colunas* da segunda ou componente mais próxima.

21. O teorema geral referido antes será melhor compreendido por um desenvolvimento completo de um caso particular. Imagine a matriz

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix},$$

e forme o determinante

$$\begin{vmatrix} a - \mathrm{M}, & b \\ c, & d - \mathrm{M} \end{vmatrix},$$

o desenvolvimento da expressão do determinante é

$$\mathrm{M}^2 - (\mathrm{a} + \mathrm{d})\mathrm{M}^1 + (\mathrm{ad} - \mathrm{bc})\mathrm{M}^0;$$

os valores de M^2, M^1, M^0 são,

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc, & b(a+d) \\ c(a+d), & d^2 + bc \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

e substituindo estes valores o determinante se torna igual a matriz zero, viz. nós temos

$$\begin{vmatrix} a - \mathrm{M}, & b \\ c, & d - \mathrm{M} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc, & b(a+d) \\ c(a+d), & d^2 + bc \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a^2 + bc) - (a+d)a + (ad - bc), & b(a+d) - (a+d)b \\ c(a+d) - (a+d)c, & d^2 + bc - (a+d)d + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{vmatrix} a-\mathrm{M}, & b \\ c \quad, & d-\mathrm{M} \end{vmatrix}=0$$

em que a matriz do determinante é

$$\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}-\mathrm{M}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

isto é, é a matriz original, diminuída pela mesma matriz considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade. E este é o teorema geral, viz. o determinante, tendo como matriz uma matriz dada menos a mesma matriz considerada como uma simples quantidade envolvendo a matriz unidade, é igual a zero.

22. A seguinte representação simbólica do teorema é, eu acho, de valor informar: seja a matriz M, considerada como uma quantidade simples, representada por $\widetilde{M}$, então, escrevendo 1 para denotar a matriz unidade, $\widetilde{M}1$ representará a matriz M, considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade. Sobre os mesmos princípios de notação, $\widetilde{1}M$ representará, ou pode ser considerado como representanto, simplesmente a matriz M, e o teorema é

$$\mathrm{Det.}(\widetilde{1}.M-\widetilde{M}.1)=0.$$

23. Eu verifiquei o teorema no próximo caso mais simples, de uma matriz de ordem 3, viz. seja M uma tal matriz, suponha

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & i \end{pmatrix},$$

então, o determinante derivado desaparece, ou, nós temos

$$\begin{vmatrix} a-\mathrm{M}, & b \quad, & c \\ d \quad, & e-\mathrm{M}, & f \\ g \quad, & h \quad, & i-\mathrm{M} \end{vmatrix}=0,$$

ou expandindo,

$$\mathrm{M}^3-(\mathrm{a}+\mathrm{e}+\mathrm{i})\mathrm{M}^2+(\mathrm{ei}+\mathrm{ia}+\mathrm{ae}-\mathrm{fh}-\mathrm{cg}-\mathrm{bd})\mathrm{M}-(\mathrm{aei}+\mathrm{bfg}+\mathrm{cdh}-\mathrm{afh}-\mathrm{bdi}-\mathrm{ceg})=0;$$

mas eu não achei necessário realizar o trabalho de uma demonstração formal do teorema no caso geral de uma matriz de qualquer grau [ordem].

26. Como uma ilustração, considere a matriz dada

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix},$$

e seja requerido encontrar a matriz $\mathrm{L} = \sqrt{\mathrm{M}}$. Neste caso, M satisfaz a equação

$$\mathrm{M}^2 - (\mathrm{a} + \mathrm{d})\mathrm{M} + \mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 0;$$

e da mesma maneira se

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

então L satisfaz a equação

$$\mathrm{L}^2 - (\alpha + \delta)\mathrm{L} + \alpha\delta - \beta\gamma = 0;$$

e destas duas equações, e a equação racionalizada $\mathrm{L}^2 = \mathrm{M}$, deveria ser possível expressar L na forma de uma função linear de M: de fato, colocando na última equação para L^2 seu valor ($= \mathrm{M}$), nós encontramos

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\alpha + \delta}[\mathrm{M} + (\alpha\delta - \beta\gamma)],$$

que é a expressão requerida, envolvendo, como deve ser, os coeficientes $\alpha + \delta$, $\alpha\delta - \beta\gamma$ da equação em L. Não há dificuldade em completar a solução; escreva para abreviar $\alpha + \delta = \mathrm{X}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \mathrm{Y}$, então nós temos

$$\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a+\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}, & \dfrac{b}{\mathrm{X}} \\ \dfrac{c}{\mathrm{X}}, & \dfrac{d+\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} \end{pmatrix},$$

e, consequentemente, formando os valores de $\alpha + \delta$ e $\alpha\delta - \beta\gamma$

$$X = \frac{a + d + 2Y}{X},$$

$$Y = \frac{(a + Y)(d + Y) - bc}{X^2},$$

e colocando também $a + d = P$, $ad - bc = Q$, nós encontramos sem dificuldade

$$X = \sqrt{P + 2\sqrt{Q}},$$

$$Y = \sqrt{Q},$$

e os valores de α, β, γ, δ são conhecidos. O sinal de $\sqrt{Q}$ é o mesmo em ambas as fórmulas e existem consequentemente em todas as quatro soluções, isto é, o radical $\sqrt{M}$ tem quatro valores.

A noção de matriz passa a ter uma nova identidade com a memória de Cayley em 1858. Uma matriz não se caracteriza mais como mãe dos menores de um determinante mas pelas leis de um cálculo simbólico e o enunciado de um teorema notável (BRECHENMACHER, 2006b).

F.4 Atividades

Exercício 1: Aplique a solução de Cayley apresentada no item 26 para o problema de determinar a(s) raíz(es) quadrada(s) da matriz identidade de ordem 2.

Exercício 2: O método de Cayley fornece todas as soluções (reais) para o problema de determinar as raízes de uma matriz?
Experimente elevar ao quadrado a matriz $X = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

Exercício 3: Como você resolveria o problema de determinar as raízes quadradas da matriz identidade de ordem 2? Apresente todas as soluções para o problema.

Questão 1: Qual é o objeto de investigação de Sylvester de acordo com o que você viu neste roteiro? Liste as técnicas utilizadas por Cayley na parte da memória que você estudou.

Questão 2: Compare a descrição de matriz apresentada por Cayley (veja a primeira página da tradução da memória) com a definição atual. Você vê semelhanças? Se sim, quais? Você vê diferenças? Se sim, quais?

Questão 3: Fale sobre o modo como Cayley estabelece as regras para as leis de adição, de multiplicação por uma quantidade simples e multiplicação ou composição de duas matrizes. Compare com o modo como os livros didáticos de Álgebra Linear apresentam as operações com matrizes.

Questão 4: Explique o que Cayley quis dizer com "*uma matriz considerada como uma quantidade simples envolvendo a matriz unidade*"(veja o item 10 do extrato).

Questão 5:

a) Enuncie, com suas palavras, o "teorema notável"que Cayley menciona na primeira página da memória e apresenta nos itens 21, 22 e 23 da memória.

b) A demonstração do teorema para matrizes de ordem 2, no item 21, faz uso do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} a - M, & b \\ c, & d - M \end{vmatrix},$$

cuja expressão é $M^2 - (a+d)M^1 + (ad - bc)M^0$. Nos dias de hoje, a demonstração de Cayley seria aceita como correta? Explique.

Questão 6: Compare o modo como Sylvester usou determinantes - de acordo com o primeiro roteiro - e o modo como Cayley usa determinantes - de acordo com este roteiro.

Questão 7: Para você, o que é matriz? O que era matriz para Sylvester? O que era matriz para Cayley?