



INTERSEÇÃO DE CAMINHOS MAIS LONGOS EM GRAFOS

Paloma Thomé de Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Julho de 2016

INTERSEÇÃO DE CAMINHOS MAIS LONGOS EM GRAFOS

Paloma Thomé de Lima

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof.^a. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Claudson Ferreira Bornstein, Ph.D.

Prof.^a. Cristina Gomes Fernandes, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JULHO DE 2016

Lima, Paloma Thomé de

Interseção de Caminhos Mais Longos em Grafos/Paloma Thomé de Lima. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

X, 63 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 61 – 63.

1. Caminhos Mais Longos. 2. Interseção de Caminhos Mais Longos. I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Aos meus pais, Lúcia e Bento.

Agradecimentos

Aos meus pais, agradeço por sempre me apoiarem incondicionalmente em todos os aspectos da minha vida. Agradeço, principalmente, por terem me ensinado a ter fé: em Deus, em mim e nos outros. Agradeço à minha família (a carioca e a gaúcha) por sempre ter me recebido com muito carinho, mesmo com as minhas constantes ausências em razão dos estudos. Ao meu irmão (e amigo), por me incentivar sempre e me fazer rir muito. E, claro, agradeço à Luna, por sempre ter estudado junto comigo, dormindo em cima de muitos dos rascunhos que deram origem a essa dissertação. ♡

Agradeço à minha orientadora, Márcia, que me ensinou muito nos últimos cinco anos. Agradeço por ter me apresentado ao mundo dos grafos com as melhores aulas que tive na minha graduação, por ter acreditado no meu potencial e pelas muitas oportunidades que me proporcionou. Obrigada também pelas muitas conversas e pela companhia nos *anima mundis* :)

Durante toda a minha vida, eu tive a sorte de encontrar professores excelentes, por quem nutri grande admiração e que marcaram, cada um ao seu jeito, a minha trajetória acadêmica. Em especial, agradeço à Alexandra por ter me inspirado muito durante a graduação e por sempre ter tido tempo de conversar comigo olhando nos meus olhos. Agradeço a ela e também à Prof. Celina Figueiredo por terem me ajudado muito na definição dos próximos passos que daria após o mestrado e por terem me incentivado a buscar o melhor.

Agradeço à Prof. Cristina Fernandes e ao Prof. Claudson Bornstein, pela oportunidade de tê-los como avaliadores deste trabalho. A todos da secretaria do PESC (em especial à Claudia, ao Gutty e ao Ricardo), sempre dispostos a ajudar, e à Lourdes, pelo cafezinho de todos os dias, combustível essencial ao estudo. Agradeço também ao CNPq pelo suporte financeiro ao longo do mestrado.

Impossível não ser eternamente grata pelos amigos que fiz no PESC. Em especial, agradeço ao Luisinho, ao Carlos, ao Rodrigo e ao Alexsander, que me aguentam mesmo eu sendo ranzinza e me ajudam sempre. Ao Gabriel, por estar sempre disposto a estudar comigo e a conversar sobre a vida e a UFRJ. Ao Daniel Posner, pela amizade sincera e por ter lido este texto de ponta a ponta, fazendo sugestões, corrigindo erros e tecendo os comentários mais engraçados. Ao Bola e ao Roberto,

obrigada por todas as conversas, risadas e pelas sopas de legumes. Ao Michel (minha turma), por ter (sobre)vivido comigo na Matemática Aplicada.

E, claro, agradeço à Taísa, um ser humano ao mesmo tempo humilde e brilhante, que me inspira muito a ser uma pessoa melhor (exceto em questões literárias, cinematográficas ou relativas ao starbucks). Obrigada pelas conversas intermináveis pelo skype, por ler meus textos e ouvir minhas demonstrações. Principalmente, obrigada por me dar a honra e o prazer de ser sua amiga :)

Nem só dos amigos da UFRJ foram feitos esses dois anos. Tem também aqueles que já vem de muito, muito antes. Obrigada à Ana Clara, por ser parte essencial da minha vida há muitos *aniversauros* e há muitas sociais de natal com chapéu de rena. Obrigada por ter acompanhado todos os passos dessa caminhada (de perto e de longe) e por ter estado comigo sempre que precisei. Hoje, o armário, amanhã, o mundo! ♡

Também fora da UFRJ, o Sonhar Acordado trouxe para minha vida pessoas incríveis, amigadas que foram além do trabalho voluntário e que me incentivaram na reta final desta etapa. Assim, não posso deixar de agradecer à Carol Baía, minha dupla querida, que compartilha comigo (e entende) os momentos de crise acadêmica. À Nathalia, que me entende, mesmo com a minha lua em áries. E à Cinthya e à Luiza (criatura apertável), pela amizade que só cresce a cada dia, por terem me incentivado muito e pelas tantas conversas, que tornaram muito mais leves os últimos meses desse mestrado.

Agradeço à Janaína e à sua família querida. É uma honra caminhar ao seu lado e aprender com você. Obrigada pela amizade, por estar sempre disposta a ajudar e por ter sempre torcido sinceramente pela minha felicidade.

Sobretudo, agradeço a Deus e aos meus anjos de guarda, que guiam meus passos nessa caminhada, embalando meu sono nas noites difíceis e celebrando comigo os dias de vitórias. Agradeço por ter todas essas pessoas ao meu lado e também por ter tanto a agradecer em todos os dias da minha vida.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

INTERSEÇÃO DE CAMINHOS MAIS LONGOS EM GRAFOS

Paloma Thomé de Lima

Julho/2016

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Em 1966, T. Gallai propôs o problema de determinar se a interseção de todos os caminhos mais longos de um grafo é não vazia. Uma forma mais geral de abordar o problema é determinar o tamanho do menor subconjunto de vértices cuja interseção com qualquer caminho mais longo do grafo é não vazia. Para um grafo G , o tamanho deste subconjunto é denotado por $lpt(G)$. Se \mathcal{C} é uma classe de grafos e $lpt(G) = 1$ para todo $G \in \mathcal{C}$, dizemos que a classe responde positivamente à pergunta de Gallai. Uma variação deste problema consiste em considerar um número fixo de caminhos mais longos.

Esta dissertação apresenta uma coletânea de resultados importantes sobre o assunto, principalmente sobre a interseção de todos os caminhos mais longos ou de um número fixo deles em algumas classes específicas de grafos.

Nossa principal contribuição foi a de determinar novas classes de grafos que respondem positivamente à pergunta de Gallai, como os grafos cadeia, P_4 -esparcos, estrelados, $(2K_2, C_4)$ -free, ptolemaicos e $(P_5, K_{1,3})$ -free, assim como grafos que são obtidos através da operação de join de dois outros grafos e grafos cujos componentes biconexos são split, de intervalo ou possuem um vértice universal. Também fornecemos limites superiores para $lpt(G)$ nas classes $2K_2$ -free, $(P_5, \text{criquet})$ -free e para grafos de interseção de subárvores de uma estrela estendida.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INTERSECTION OF LONGEST PATHS IN GRAPHS

Paloma Thomé de Lima

July/2016

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

In 1966, T. Gallai asked whether it was true that all longest paths in a graph share a common vertex. A general approach to this problem is to determine the size of the smallest subset of vertices of a graph such that every longest path intersect. Given a graph G , we denote the size of this set by $lpt(G)$. If \mathcal{C} is a graph class and $lpt(G) = 1$ for all $G \in \mathcal{C}$, we say \mathcal{C} answers positively to Gallai's question. A variant of this problem consists in considering a fixed number of longest paths.

In this work, we present a survey of the results concerning the general problem and its variant for a fixed number of longest paths, when restricted to specific graph classes.

Our main contribution was determining new graph classes that answer positively to Gallai's question, such as chain graphs, P_4 -sparse graphs, starlike graphs, $(2K_2, C_4)$ -free graphs, ptolemaic graphs and $(P_5, K_{1,3})$ -free graphs, as well as graphs that are the join of two other graphs and graphs whose blocks are split graphs, interval graphs or graphs with a universal vertex. We also provide upper bounds on $lpt(G)$ for $2K_2$ -free graphs, $(P_5, \text{criquet})$ -free graphs and graphs that are intersection graphs of subtrees of an extended star.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Definições e notação	3
2 Interseção de caminhos mais longos	6
2.1 O problema	6
2.2 Exemplos	9
2.3 Número fixo de caminhos mais longos	11
2.3.1 A construção de Skupień	12
2.3.2 Três caminhos mais longos	18
3 Interseção de todos os caminhos mais longos em classes de grafos	22
3.1 Árvores	22
3.2 Grafos outerplanares	23
3.3 2-árvores	24
3.4 Grafos arco-circulares	28
3.5 Grafos com $\alpha'(G) \leq 3$	34
3.6 Limites superiores para $lpt(G)$	38
4 Resultados para todos os caminhos mais longos em classes de grafos	41
4.1 Grafos cadeia e join de dois grafos	41
4.2 Grafos tipo split	42
4.3 Grafos ptolemaicos	47
4.4 Relação com conjunto dominante	49
4.5 Componentes biconexos	55
5 Conclusão	59
Referências Bibliográficas	61

Lista de Figuras

1.1	Grafo de Petersen.	4
2.1	Ciclo formado por $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$	8
2.2	Grafo de Walther.	9
2.3	Grafo de Walther, Voss e Zamfirescu.	10
2.4	Grafo de Schmitz.	11
2.5	Grafo obtido a partir da subdivisão do vértice v em v_1, v_2 e v_3	12
2.6	Grafos da família \mathcal{H}	13
2.7	Grafos H'	14
2.8	Grafos construídos através da construção I.	15
2.9	Grafos construídos através da construção II.	16
2.10	Caminhos mais longos descritos no Teorema 2.4.	18
2.11	Caminho Q_x	19
2.12	Caminhos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4	20
3.1	Casos considerados no Teorema 3.2.	24
3.2	Exemplos de 2-árvores.	24
3.3	Caminhos Q_e, Q_f e Q_g	28
3.4	Arco xy	29
3.5	O arco J_4 pode ser adicionado a \mathcal{P}	29
4.1	Grafos $K_{1,3}$ e criquet.	50
4.2	Grafo do Teorema 4.13.	50
4.3	Caso 1 do Teorema 4.14.	51
4.4	Caso 2 do Teorema 4.14.	51
4.5	Caso 3 do Teorema 4.14.	51
4.6	Caso 4.1 do Teorema 4.14.	52
4.7	Caso 4.2 do Teorema 4.14.	52
4.8	Grafo do Teorema 4.15.	53
4.9	Grafo do Teorema 4.16.	54
4.10	Grafo do Teorema 4.17.	54
4.11	Grafo do Teorema 4.18.	55

Capítulo 1

Introdução

Dois problemas sobre caminhos mais longos em grafos receberam considerável atenção nos últimos tempos. O primeiro deles, de natureza algorítmica, consiste em determinar o tamanho de um caminho mais longo de um grafo. Este é um problema desafiador, sabidamente NP-difícil [12], que está resolvido apenas quando consideramos grafos que possuem propriedades bem específicas. O segundo problema, igualmente desafiador e objeto central deste trabalho, é de natureza estrutural, relativo à interseção dos caminhos mais longos de um grafo.

Em 1966, o matemático húngaro T. Gallai [11] propôs a seguinte pergunta: dado um grafo conexo G , existe um vértice que pertence a todos os seus caminhos mais longos? Já sabemos que a resposta para essa pergunta é negativa, ou seja, existem grafos tais que, para todo vértice, existe um caminho mais longo que não o contém. No entanto, a busca por uma resposta para a pergunta de Gallai motivou muitas outras perguntas interessantes relacionadas ao tema. A principal delas vem do fato de que, ainda que existam exemplos de grafos cujos caminhos mais longos possuem interseção vazia, muitos são os exemplos em que isso não acontece. Isso é, se restringimos o universo dos grafos a ser considerado, a resposta à pergunta pode passar a ser positiva, o que naturalmente motivou o estudo do problema em classes específicas de grafos.

O primeiro progresso obtido neste sentido foi o de Klavžar e Petkovšek [21], em 1990, que mostraram que a resposta é afirmativa no caso da classe dos grafos split. Posteriormente, outras classes de grafos foram consideradas e hoje já se sabe que na classe dos grafos arco-circulares [3, 18], outerplanares [9], 2-árvores [9] e grafos com emparelhamento de tamanho menor ou igual a três [6], os grafos são tais que seus caminhos mais longos possuem interseção não vazia. Recentemente, Chen et al. [7] mostraram o mesmo para a classe dos grafos série-paralelos, que inclui a classe dos grafos outerplanares e as 2-árvores. Entre as classes nas quais a resposta à pergunta de Gallai é negativa estão a dos grafos planares e dos grafos bipartidos, como veremos no Capítulo 2. Determinar as propriedades que garantem resposta

positiva à pergunta de Gallai é um problema interessante, ainda não resolvido para muitas classes de grafos que possuem estrutura conhecida e bastante estudada, como é o caso dos grafos distância-hereditários, grafos de permutação e grafos cordais, assim como algumas de suas subclasses.

Nesse sentido, nossa principal contribuição neste trabalho foi a determinação de novas classes de grafos que respondem positivamente à pergunta de Gallai, como é o caso da classe dos grafos cadeia, P_4 -esparços, estrelados, $(2K_2, C_4)$ -free, ptolemaicos e $(P_5, K_{1,3})$ -free. Obtivemos que o mesmo acontece em grafos que são obtidos através da operação de join de dois outros grafos e grafos cujos componentes biconexos são split, de intervalo ou possuem um vértice universal.

Uma forma mais geral de abordar o problema em questão é procurar por uma transversal dos caminhos mais longos que possua tamanho mínimo. Isso é, determinar o tamanho do menor subconjunto de vértices de um grafo tal que todo caminho mais longo o intersecta. Se este conjunto tem tamanho um para um dado grafo, então este responde positivamente à pergunta de Gallai. Esta abordagem foi primeiramente utilizada por Rautenbach e Sereni [25] que, no mesmo trabalho, forneceram limites superiores para o tamanho desse conjunto em classes de grafos, como grafos planares e grafos com treewidth limitado. Uma contribuição deste trabalho é o estabelecimento de limites superiores na classe dos grafos $2K_2$ -free, $(P_5, \text{criquet})$ -free e dos grafos de interseção de subárvores de uma estrela estendida.

Uma vez que determinar se há um vértice na interseção de todos os caminhos mais longos de um grafo se mostrou um problema de considerável dificuldade mesmo quando restrito a classes específicas de grafos, uma alternativa natural seria considerar uma quantidade menor de caminhos mais longos. Intuitivamente, este problema parece mais tratável, tendo em vista que um resultado básico da teoria dos grafos nos diz que a interseção de quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo é sempre não vazia. No entanto, determinar se sempre há um vértice na interseção de quaisquer três caminhos mais longos ainda é um problema em aberto. Axenovich [1] e Kensell [20] determinaram configurações proibidas para a união de três caminhos mais longos e, com isso, determinaram características que um contraexemplo minimal para a conjectura, caso ele exista, deveria possuir, como ter apenas um bloco não trivial e não ter triângulos. Observamos que, claramente, se todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum, então quaisquer três também têm. Mas quais classes que respondem negativamente à pergunta de Gallai são tais que quaisquer três caminhos mais longos sempre se intersectam? Em [9], de Rezende et al. provaram que se um grafo é tal que todos os seus blocos não triviais são hamiltonianos, então quaisquer três de seus caminhos mais longos possuem interseção não vazia. Além deste, ainda não são conhecidos outros resultados sobre essa variante do problema em classes específicas de grafos.

Ainda tendo em vista a ideia de considerar um número fixo de caminhos mais longos, também é um problema em aberto determinar qual o maior número k tal que, em qualquer grafo, quaisquer k caminhos mais longos possuem um vértice em comum. Em 1996, Skupień [27] mostrou através de uma construção que, para todo inteiro p maior ou igual a sete, existe um grafo tal que quaisquer $p - 1$ caminhos mais longos têm um vértice em comum, porém existe um conjunto de p caminhos mais longos cuja interseção é vazia. Com isso temos que k é menor ou igual a seis. Além de ser interessante por si só, a construção oferece grande intuição sobre características de grafos que não possuem um vértice em comum a seus caminhos mais longos. Desde então, nenhum outro resultado foi exibido melhorando essa cota.

O objetivo central deste trabalho é apresentar, de forma organizada e com notação uniforme, os resultados existentes na literatura que motivaram o nosso estudo, além de exibir detalhadamente os resultados por nós obtidos. Assim, esta dissertação está organizada da seguinte forma: na próxima seção deste capítulo apresentaremos a notação utilizada ao longo do texto e algumas definições importantes. No Capítulo 2, apresentaremos alguns resultados básicos sobre o problema, além de exemplos já conhecidos de grafos que respondem negativamente à pergunta de Galai. Neste mesmo capítulo, também consideramos a versão do problema com número fixo de caminhos mais longos. Nos Capítulos 3 e 4 apresentamos os resultados sobre todos os caminhos mais longos em classes de grafos, sendo o Capítulo 3 uma coletânea de resultados já conhecidos que motivaram o nosso estudo e o Capítulo 4 as contribuições desta dissertação. Finalmente, no Capítulo 5 estão os comentários finais e possibilidades de trabalhos futuros relacionados ao tema.

1.1 Definições e notação

Ao longo desta dissertação, denotamos por $V(G)$ o conjunto de vértices de um grafo G e por $E(G)$ o seu conjunto de arestas. Todos os grafos são simples e conexos, a menos que explicitamente dito o contrário.

Dado um grafo G e $x, y \in V(G)$, dizemos que x e y são *adjacentes* se $xy \in E(G)$ e que x e y são os *extremos* da aresta xy . O *grau* de x , denotado por $g(x)$, é o número de vértices de G adjacentes a x . Se G é tal que $g(x) = 3$ para todo $x \in V(G)$, dizemos que G é um grafo *cúbico*. Um *caminho* em G é uma sequência de vértices distintos $P = x_1x_2 \dots x_k$ tal que $x_i x_{i+1} \in E(G)$, $1 \leq i \leq k - 1$. Os vértices x_1 e x_k são denominados *extremos* de P . Os vértices que não são extremos de P são *vértices internos* de P . Se x é um vértice que pertence a P , dizemos que P *passa* por x , assim como se xy é uma aresta tal que x e y são vértices consecutivos em P , dizemos que P *passa* por xy . Denotamos por P^{-1} o caminho reverso de P , ou seja, $P^{-1} = x_k x_{k-1} \dots x_1$. O *tamanho* ou *comprimento* de um caminho P é o seu número

de vértices, ou seja, $|V(P)|$. Dados $x, y \in V(G)$, um xy -caminho é um caminho que possui extremos nos vértices x e y . Um caminho é *hamiltoniano* se contém todos os vértices do grafo. Dado um caminho $P = x_1x_2 \dots x_k$, um *segmento de P* é um caminho que está contido em P .

Dados dois caminhos P e Q , denotamos por $P \cdot Q$ o caminho obtido através da concatenação dos dois caminhos. Note que um deles pode ser composto por uma única aresta e , neste caso, denotamos por $P \cdot e$ a concatenação do caminho P com a aresta e .

Se $P = x_1x_2 \dots x_k$ é um caminho em G e $x_kx_1 \in E(G)$, então $C = x_1x_2 \dots x_kx_1$ é um *ciclo* em G . Dado um ciclo C desenhado no plano sem cruzamento de arestas e $x, y \in V(C)$, denotamos por C_{xy} o segmento de C que vai do vértice x ao vértice y no sentido horário. Um ciclo é um *ciclo hamiltoniano* se $V(C) = V(G)$. Um grafo é *hipohamiltoniano* se o grafo obtido da remoção de qualquer vértice de G possui um ciclo hamiltoniano, mas G não possui. Um exemplo bastante conhecido de grafo hipohamiltoniano é o grafo de Petersen, ilustrado na Figura 1.1.

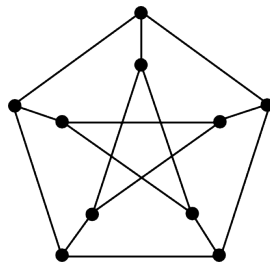


Figura 1.1: Grafo de Petersen.

Dado $x \in V(G)$, denotamos por $N(x)$ o conjunto dos vértices que são adjacentes a x , ou seja, sua *vizinhança*. O grau de um vértice x , denotado por $g(x)$ é dado por $|N(x)|$. Um vértice x é uma *folha* se $g(x) = 1$. Se $S \subseteq V(G)$ então $N(S)$ é o conjunto dos vértices que possuem ao menos um vizinho em S e não pertencem a S .

Se $S \subseteq V(G)$, o *subgrafo induzido* por S em G , denotado por $G[S]$, possui conjunto de vértices S e conjunto de arestas $\{uv \mid u, v \in S \text{ e } uv \in E(G)\}$. Se $F \subseteq E(G)$, o subgrafo induzido por F em G consiste no grafo com conjunto de vértices formado pelos extremos de F e conjunto de arestas igual a F .

Um *emparelhamento* em um grafo G é um conjunto $M \subseteq E(G)$ tal que nenhum par de arestas em M tem um extremo em comum. O tamanho de um emparelhamento máximo em um grafo é denotado por $\alpha'(G)$. Um emparelhamento M é perfeito se todo vértice de G é extremo de uma aresta de M .

Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente* se $G[S]$ não tem nenhuma aresta. Um grafo G é *completo* se entre quaisquer dois vértices de G existe uma aresta. Denotamos por K_n o grafo completo com n vértices. Um conjunto $K \subseteq V(G)$ é uma *clique* se $G[K]$ é um grafo completo. Um vértice x é *simplicial* se $N(x)$ é uma clique.

Denotamos por $\omega(G)$ o tamanho da maior clique de G .

Dado $x \in V(G)$ com $N(x) = \{y_1, \dots, y_k\}$, o grafo obtido a partir de G pela *subdivisão do vértice x* consiste no grafo H com conjunto de vértices $V(H) = V(G) \setminus \{x\} \cup \{x_1, \dots, x_k\}$ e conjunto de arestas $E(H) = E(G) \cup \{x_i y_i \mid 1 \leq i \leq k\} \setminus \{xv \mid v \in N(x)\}$. Os vértices x_1, \dots, x_k são os *vértices correspondentes a x* em H .

Dado um grafo G e uma aresta $xy \in E(G)$, o grafo obtido a partir de G através da *subdivisão da aresta xy* é o grafo H tal que $V(H) = V(G) \cup \{u\}$ e $E(H) = \{xu, yu\} \cup E(G) \setminus \{xy\}$.

Um grafo H é *minor* de um grafo G se G contém um subgrafo que é obtido a partir de H através de operações sucessivas de subdivisão de arestas.

Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, denotamos por $G \setminus S$ o grafo $G[V(G) \setminus S]$. Se $S = \{x\}$, denotamos o grafo $G[V(G) \setminus \{x\}]$ por $G \setminus x$. O conjunto $S \subseteq V(G)$ é um *separador* se $G \setminus S$ é desconexo e é um *xy -separador* se $G \setminus S$ é desconexo e x e y estão em componentes conexos distintos de $G \setminus S$. Uma *articulação* é um vértice x tal que $G \setminus x$ é desconexo.

Um grafo é k -conexo se o grafo obtido através da remoção de quaisquer $k - 1$ vértices é conexo. Em particular, um grafo é *2-conexo* se não possui articulação. Um *bloco* ou *componente biconexo* de G é um subgrafo 2-conexo maximal de G . Dado um bloco B de G , um *caminho pendente* de B é um caminho que possui apenas um extremo em B e é maximal no sentido de seu extremo fora de B .

Finalmente, definimos a seguir classes de grafos que serão citadas ao longo do texto. Um grafo é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes. Um grafo é de *intervalo* se é grafo de interseção de intervalos da reta real e é *planar* se admite uma representação no plano sem cruzamento de arestas. Um grafo é *cordal* se todo ciclo de tamanho pelo menos quatro possui uma corda, isso é, uma aresta ligando dois vértices que não são adjacentes no ciclo. Dado um grafo H , dizemos que um grafo G é *H -free* se G não possui H como subgrafo induzido. Por exemplo, os grafos P_5 -free são os grafos que não possuem um caminho induzido com cinco vértices. Um grafo é (H_1, H_2, \dots, H_k) -free se não possui H_1, H_2, \dots nem H_k como subgrafo induzido.

Capítulo 2

Interseção de caminhos mais longos

Neste capítulo, introduzimos os conceitos e resultados básicos sobre o problema da interseção dos caminhos mais longos em grafos e apresentamos exemplos conhecidos de grafos que não possuem um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos. Também introduzimos a variante do problema para uma quantidade fixa de caminhos e seus principais resultados.

2.1 O problema

Um caminho é mais longo se possui comprimento máximo dentre todos os caminhos do grafo. O problema da interseção dos caminhos mais longos foi proposto por Gallai [11] e consiste em determinar se existe um vértice que pertence a todos os caminhos mais longos de um grafo. Primeiramente, é importante notar que este problema está definido para grafos conexos, uma vez que em um grafo desconexo dois caminhos mais longos podem estar em componentes conexos distintos e, por isso, não se intersectarem. Desta forma, ao longo de todos os capítulos desta dissertação, os grafos considerados serão conexos, a menos que explicitamente dito o contrário.

A pergunta proposta por Gallai foi motivada pelo fato de que um resultado simples e muito conhecido da teoria dos grafos nos diz que, em todo grafo, quaisquer dois caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum, como veremos a seguir.

Proposição 2.1. Se G é um grafo conexo e P e Q dois caminhos mais longos de G , então $V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$.

Prova. Suponha por absurdo que $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$. Como G é conexo, existe um caminho R com um extremo em $V(P)$ e outro em $V(Q)$ tal que $|V(R) \cap V(P)| =$

$|V(R) \cap V(Q)| = 1$ e $|E(R)| \geq 1$. Seja $x \in V(P) \cap V(R)$ e $y \in V(Q) \cap V(R)$. O vértice x divide o caminho P em dois segmentos, ambos com um extremo em x . Seja P' o maior entre esses dois segmentos. Analogamente, seja Q' o maior segmento de Q com extremo em y . Logo, $|E(P')| \geq \frac{|E(P)|}{2}$ e $|E(Q')| \geq \frac{|E(Q)|}{2}$. Podemos então construir um caminho $R' = P' \cdot R \cdot Q'$, onde $|E(R')| > |E(P)|$, um absurdo. ■

Uma forma mais geral de abordar o problema foi definida por Rautenbach e Sereni [25] e consiste em determinar o tamanho do menor conjunto $S \subseteq V(G)$ tal que todo caminho mais longo de G possui ao menos um vértice em S . Esse conjunto é chamado de *transversal de caminhos mais longos* e o tamanho mínimo de um tal conjunto é denotado por $lpt(G)$, sigla que vem do termo em inglês *longest paths transversal*. Assim, se um grafo G é tal que $lpt(G) = 1$, então ele responde afirmativamente à pergunta de Gallai. Se ele é tal que $lpt(G) > 1$, então ele responde negativamente à pergunta.

Dada uma classe de grafos \mathcal{C} , dizemos que ela responde afirmativamente à pergunta de Gallai se $lpt(G) = 1$ para todo $G \in \mathcal{C}$. No Capítulo 3, serão apresentadas classes de grafos com essa propriedade, enquanto que na Seção 2.2, serão apresentadas classes que respondem negativamente à pergunta de Gallai.

Em 1990, Klavžar e Petkovšek [21] provaram um resultado que transforma o problema de considerar todos os caminhos mais longos de um grafo em um problema mais restrito, considerando para cada bloco B de G , apenas os caminhos que possuem ao menos uma aresta em B .

Dado um grafo G e um caminho mais longo P de G , dizemos que um bloco B é *essencial para P* se o caminho P contém pelo menos uma aresta de B . Uma articulação v é *essencial para P* se $v \in V(P)$. Denotamos por $\mathcal{P}_B(G)$ o conjunto de caminhos mais longos que possuem ao menos uma aresta em B .

Dado G , podemos definir uma árvore $T(G)$ com conjunto de vértices $A \cup B$, onde cada vértice de A está associado a uma articulação de G e cada vértice de B está associado a um bloco de G . Dados $a \in A$ e $b \in B$, existe aresta $ab \in E(T)$ se a articulação representada por a está contida no bloco representado por b . É fácil notar que, para todo caminho P e todo bloco B de G , P restrito a B é ainda um caminho, isso é, os vértices de $V(P) \cap V(B)$ aparecem consecutivamente em P . Assim, a cada caminho mais longo P de G , temos um caminho $f(P)$ associado a ele em $T(G)$. O caminho $f(P)$ é dado pelos vértices correspondentes aos blocos e às articulações essenciais para P , na ordem em que P os intersecta. Denotamos o caminho P restrito ao bloco B por \tilde{P} , quando está claro quem é o bloco B .

Teorema 2.1. [21] $lpt(G) = 1$ se e somente se, para todo bloco B de G , os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ possuem um vértice em comum.

Prova. Se $lpt(G) = 1$, é imediato observar que os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ possuem um vértice em comum, para todo bloco B de G . Supomos então que os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ possuem um vértice em comum, para todo bloco B de G . Temos dois casos.

Caso 1: Quaisquer dois caminhos mais longos de G possuem um bloco essencial comum.

Consideramos a família $\{f(P) \mid P \text{ é caminho mais longo de } G\}$. Quaisquer dois caminhos pertencentes a esta família possuem um vértice em comum em $T(G)$, pois os caminhos mais longos de G possuem dois a dois um bloco essencial comum. Se este vértice é uma articulação, então todos os caminhos mais longos de G passam por essa articulação. Se esse vértice corresponde a um bloco, então existe um bloco B tal que todo caminho mais longo de G possui aresta em B . Então, por hipótese, todos os caminhos mais longos de G têm um vértice em comum.

Caso 2: Existe um par de caminhos mais longos de G que não possui bloco essencial em comum.

Sejam P e Q esses caminhos. Já sabemos que $V(P) \cap V(Q) \neq \emptyset$. Se $|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$, ou bem P e Q têm uma aresta em comum ou existe um ciclo em G formado com arestas de P e Q apenas. Em ambos os casos P e Q possuiriam um bloco essencial comum. Logo, temos que $|V(P) \cap V(Q)| = 1$. Seja $x \in V(P) \cap V(Q)$. Queremos mostrar que x está na interseção de todos os caminhos mais longos de G . Para isso, suponha por absurdo que exista um caminho mais longo R que não contenha x .

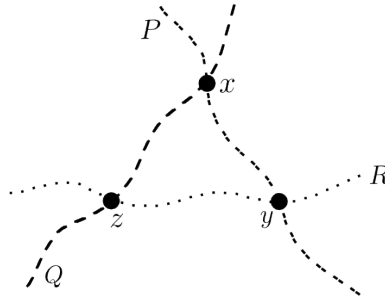


Figura 2.1: Ciclo formado por $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$.

Sabemos que $V(P) \cap V(R) \neq \emptyset$ e $V(Q) \cap V(R) \neq \emptyset$. Tomamos $z \in V(Q) \cap V(R)$ de forma que $V(Q_{xz}) \cap V(R) = \{z\}$ e $y \in V(P) \cap V(R)$ de forma que $V(P_{xy}) \cap V(R) = \{y\}$. Isso nos garante que $V(R_{zy}) \cap V(Q_{xz}) = \{z\}$ e $V(R_{zy}) \cap V(P_{xy}) = \{y\}$. Além disso, temos que $V(P_{xy}) \cap V(Q_{xz}) = \{x\}$ pois $|V(P) \cap V(Q)| = 1$. Logo, $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$ é um ciclo em G , o que significa que P e Q possuem um bloco essencial em comum, um absurdo. Com isso temos que, neste caso, x está em todos os caminhos mais longos de G . ■

Conforme observado em [9], a demonstração acima prova, na realidade, um teo-

rema um pouco mais forte do que o enunciado por Klavžar e Petkovšek.

Teorema 2.2. [9] Seja \mathcal{P} um conjunto de caminhos mais longos de G . Se os caminhos de \mathcal{P} não possuem um vértice em comum, então existe bloco B em G que é essencial a todos os caminhos mais longos de \mathcal{P} .

De fato, no caso 1 da demonstração acima temos que ou bem os caminhos mais longos têm uma articulação em comum, ou existe um bloco essencial comum a todos os caminhos mais longos de \mathcal{P} . No caso 2, os caminhos mais longos em questão se intersectam.

2.2 Exemplos

O primeiro exemplo que mostrou que a resposta para a pergunta de Gallai era negativa foi dado por Walther [31], em 1970. O grafo, apresentado na Figura 2.2, tem 25 vértices, seu caminho mais longo tem tamanho 21 e basta considerar 13 dos seus caminhos para provar que a interseção de todos os caminhos mais longos deste grafo é vazia. Notamos também que este grafo é bipartido e planar, o que mostra que existem grafos G nestas classes tais que $lpt(G) > 1$. Além deste, muitos outros surgiram posteriormente [26] e nesta seção apresentaremos um breve histórico da busca por tais grafos.

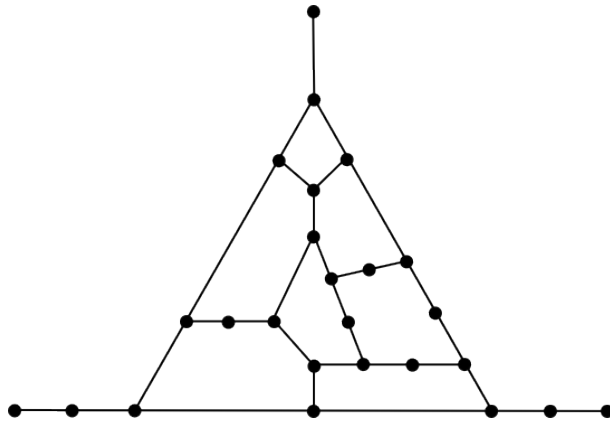


Figura 2.2: Grafo de Walther.

Em artigos publicados em 1974 e 1976, Walther e Voss [30] e Zamfirescu [32], respectivamente, encontraram um grafo ainda menor que o de Walther, com 12 vértices, que possui caminhos mais longos que não se intersectam. Este grafo está representado na Figura 2.3.

Ele é derivado do grafo de Petersen (Figura 1.1), através da subdivisão de um de seus vértices. É um fato conhecido que o grafo de Petersen é hipohamiltoniano. Assim, podemos construir um caminho no grafo da Figura 2.3 que não contém um dado vértice v de grau três e um dos vértices de grau um a partir do ciclo

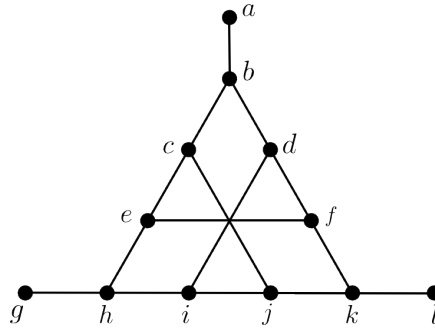


Figura 2.3: Grafo de Walther, Voss e Zamfirescu.

hamiltoniano de $P \setminus v$, onde P é o grafo de Petersen. Dessa forma, podemos obter os caminhos dados pelas seguintes sequências de vértices:

1. $g h e c j i d f k l$, que não contém os vértices a e b ;
2. $g h i j c b d f k l$, que não contém os vértices a e e .

Analogamente ao caminho 1, podemos construir um caminho que não contém os vértices k e l e outro que não contém g e h , dados respectivamente pelas seguintes sequências de vértices:

3. $a b c j i d f e h g$
4. $a b d i j c e f k l$

E analogamente ao caminho 2, podemos obter caminhos que não contêm os vértices c, d, f, i e j , dados respectivamente pelas seguintes sequências de vértices:

5. $a b d f e h i j k l$
6. $a b c e f k j i h g$
7. $g h e c b d i j k l$
8. $g h e c j k f d b a$
9. $a b c e h i d f k l$

Os caminhos obtidos são, de fato, mais longos pois se o grafo tivesse um caminho que não contivesse apenas um vértice, necessariamente seria um vértice de grau um, o que implicaria que esse caminho corresponderia a um ciclo hamiltoniano no grafo de Petersen, pois conteria todos os vértices de grau três do grafo de Walther, Voss e Zamfirescu. Assim, podemos concluir que este grafo não possui um vértice que pertence a todos os seus caminhos mais longos.

Uma vez encontrados grafos que respondem negativamente à pergunta de Gallai, uma pergunta natural é: eles são os menores possíveis ou existem grafos mais simples que estes que também possuem interseção vazia dos seus caminhos mais longos? O menor exemplar conhecido até hoje ainda é o de Walther, Voss e Zamfirescu.

Em [32], Zamfirescu conjecturou que este seja, de fato, o menor exemplo existente. Para o caso dos grafos planares, em 1975, Schmitz obteve um novo grafo que também responde negativamente à pergunta de Gallai (Figura 2.4), mas possui 17 vértices. Seus caminhos mais longos têm tamanho 13 e basta considerar 7 de seus caminhos mais longos para verificar que a interseção de todos eles é vazia. Este é o menor exemplo conhecido de grafo planar satisfazendo $lpt(G) > 1$. Também é o menor grafo bipartido conhecido satisfazendo a esta propriedade.

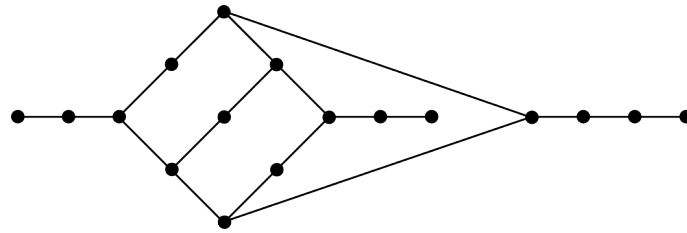


Figura 2.4: Grafo de Schmitz.

Uma classe de grafos que possui a particularidade de todos os seus grafos responderem negativamente à pergunta de Gallai é a classe dos grafos hipotraçáveis, ou seja, grafos que não possuem um caminho hamiltoniano mas tais que a remoção de qualquer vértice faz com que o grafo remanescente possua um caminho hamiltoniano. Em [28], Thomassen provou que existe um número infinito de grafos hipotraçáveis que são planares.

Mais recentemente, Dino e Zamfirescu [10] exibiram um grafo com 30 vértices que responde negativamente à pergunta de Gallai e que é subgrafo de uma grade triangular. Seguindo a mesma ideia de investigar grafos que são subgrafos de grades regulares, Nadeem et al. [24] encontraram um grafo com 46 vértices que é subgrafo de uma grade quadrangular e um com 94 vértices que é subgrafo de uma grade hexagonal.

Tendo em vista que os exemplos até aqui exibidos possuem vértices de grau um, uma pergunta natural é o que acontece se adicionamos a restrição de o grafo possuir conectividade mais alta. O primeiro grafo 2-conexo que responde negativamente à pergunta de Gallai foi construído em 1972, por Zamfirescu [33], e trata-se de um grafo planar, com 82 vértices. Hoje já se conhece um exemplo 2-conexo menor, devido a Skupień [27], com 26 vértices. No entanto, o menor exemplo 2-conexo e planar é devido a Zamfirescu [32] e tem 32 vértices. Outros exemplos com maior conectividade foram encontrados por Grünbaum [14] e Zamfirescu [33].

2.3 Número fixo de caminhos mais longos

Em 1996, Skupień [27] mostrou que, para $p \geq 7$, existem grafos que possuem p caminhos mais longos com interseção vazia. Já vimos na Seção 2.1 que, em qualquer

grafo, quaisquer dois caminhos mais longos têm um vértice em comum. O que acontece quando $3 \leq p \leq 6$ ainda é um problema em aberto. Em particular, o caso em que $p = 3$ recebeu uma atenção maior até o presente momento. A questão sobre os três caminhos mais longos aparece em [15] como uma conjectura:

Conjectura 2.1. Seja G um grafo qualquer. Quaisquer três caminhos mais longos de G têm um vértice em comum.

A seguir, apresentamos a construção proposta por Skupień, um resumo dos resultados existentes para o caso em que $p = 3$ e, em detalhes, o resultado de de Rezende et al. sobre a interseção de três caminhos mais longos em grafos cujos componentes biconexos possuem um ciclo hamiltoniano, o único resultado atualmente existente na literatura sobre classes de grafos que satisfazem a Conjectura 2.1.

2.3.1 A construção de Skupień

Através da construção do grafo de Walther, Voss e Zamfirescu (Figura 2.3) a partir do grafo de Petersen, podemos ter uma intuição de que os grafos hipohamiltonianos possuem certa importância na construção de grafos que possuem uma quantidade fixa de caminhos mais longos que não se intersectam. Generalizando a ideia anteriormente apresentada, suponha que G seja um grafo hipohamiltoniano com $n - 2$ vértices e que possua pelo menos um vértice de grau 3. Seja v um desses vértices. Considere o grafo H obtido pela subdivisão de v em três vértices $\{v_1, v_2, v_3\}$, como na Figura 2.5.

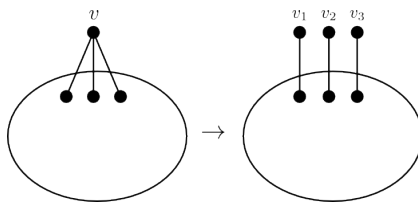


Figura 2.5: Grafo obtido a partir da subdivisão do vértice v em v_1, v_2 e v_3 .

Assim, o grafo H tem n vértices e tem um caminho de tamanho $n - 2$, obtido a partir de um ciclo hamiltoniano de $G \setminus u$ para algum $u \in V(G)$, $u \neq v$. Este caminho começa e termina em um vértice correspondente ao vértice v e, por definição, não contém u . Ele é, de fato, mais longo pois nenhum caminho pode conter os três vértices correspondentes a v , pois eles possuem grau um e, se houvesse um caminho de tamanho $n - 1$ em H , teríamos que este caminho necessariamente começaria e terminaria em vértices correspondentes a v e conteria todos os outros vértices do grafo, o que corresponderia a um ciclo hamiltoniano em G , uma contradição com o fato de G ser hipohamiltoniano. Logo, o caminho obtido de tamanho $n - 2$ é, de

fato, um caminho mais longo de H . Assim, para cada vértice de $V(H) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ pode-se construir um caminho mais longo de H que não contém aquele vértice. Com isso, temos um conjunto de $n - 3$ caminhos mais longos cuja interseção é vazia. Mais que isso, quaisquer $n - 2$ caminhos mais longos desse grafo possuem interseção não vazia.

Skupień observou, em [27], que existem grafos hipohamiltonianos de ordem n com pelo menos um vértice de grau três para cada $n \geq 18$. Assim, a construção acima a partir destes grafos hipohamiltonianos mostra que para $p \geq 17$ existem grafos que possuem um conjunto de p caminhos mais longos que não possuem um vértice em comum mas tais que quaisquer $p - 1$ deles têm interseção não vazia. Qual seria, então, o menor p para o qual isso acontece? Um limite superior para esse valor foi obtido também por Skupień [27], que constrói uma sequência G^p de grafos com essa propriedade para $p \geq 7$. A sequência é construída a partir de uma família $\mathcal{H} = \{H_j \mid j \geq 8, j \text{ par}\}$ de grafos. Para cada $k \geq 2$, os grafos H_{4k} e H_{4k+2} são definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(H_{4k}) &= \{u_1, u_2, \dots, u_{2k}, v_1, v_2, \dots, v_{2k}\} \\ E(H_{4k}) &= \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, u_i v_i \mid 1 \leq i \leq 2k - 1\} \cup \{u_{2k} v_1\} \cup \{v_{2k} u_1\} \cup \{u_{2k} v_{2k}\}. \\ V(H_{4k+2}) &= \{u_1, u_2, \dots, u_{2k+1}, v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\} \\ E(H_{4k+2}) &= \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1}, v_i u_i \mid 1 \leq i \leq 2k\} \cup \{u_{2k+1} u_1\} \cup \{v_{2k+1} v_1\} \cup \{u_{2k+1} v_{2k+1}\}. \end{aligned}$$

A figura a seguir ilustra os primeiros grafos desta família.

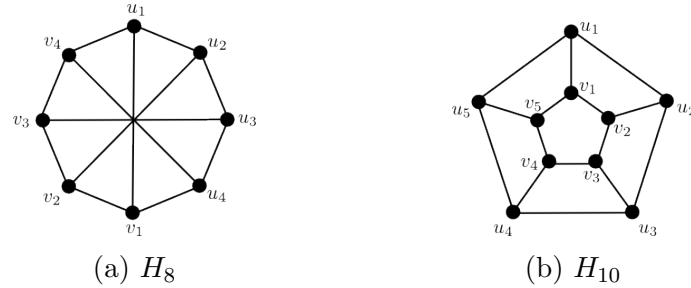


Figura 2.6: Grafos da família \mathcal{H} .

As arestas do tipo $u_i v_i$ serão chamadas de *aros* de H_j . Denotaremos por H'_{4k} e H'_{4k+2} os grafos obtidos a partir de H_{4k} e H_{4k+2} através da subdivisão de todos os aros, como ilustrado na Figura 2.7.

Antes de enunciar a construção da família de grafos G^p , vamos analisar algumas propriedades importantes que os grafos H_{4k} e H_{4k+2} possuem.

Lema 2.1. Se C é um ciclo hamiltoniano em H_j , então C não contém todos os aros do grafo, nem todos os aros exceto um.

Prova. A prova está dividida em quatro casos.

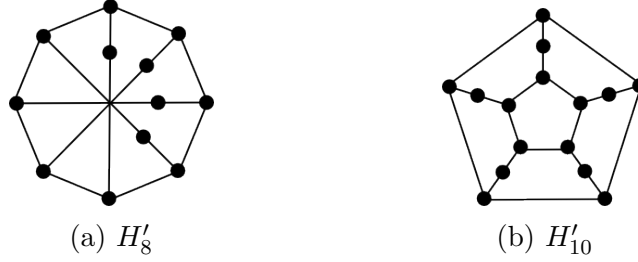


Figura 2.7: Grafos H' .

Caso 1: $j = 4k + 2$ e H_j possui um ciclo hamiltoniano que contém todos os seus aros.

Seja C esse ciclo. Como H_j é um grafo cúbico, temos que $E(H_j) \setminus E(C)$ é um emparelhamento perfeito em G . Como C contém todos os aros, temos que o conjunto de arestas deste emparelhamento está contido em dois ciclos ímpares disjuntos, um absurdo.

Caso 2: $j = 4k + 2$ e H_j possui um ciclo hamiltoniano que contém todos os seus aros exceto um.

Supomos, sem perda de generalidade, que o aro u_2v_2 não pertence a C . Como os vértices u_2 e v_2 pertencem ao ciclo hamiltoniano, temos que C contém as arestas u_1u_2 , u_2u_3 , v_1v_2 e v_2v_3 . Mas, como os aros u_1v_1 e u_3v_3 pertencem ao ciclo C , temos que $u_2u_3v_3v_2v_1u_1u_2$ formam um subciclo em C , um absurdo.

Caso 3: $j = 4k$ e H_j possui um ciclo hamiltoniano que contém todos os seus aros.

Novamente, $E(H_j) \setminus E(C)$ é um emparelhamento perfeito. Como C contém todos os aros, o conjunto de arestas deste emparelhamento está contido no ciclo dado por $\{u_iu_{i+1}, v_iv_{i+1} | 1 \leq i \leq 2k - 1\} \cup \{u_{2k}v_1\} \cup \{v_{2k}u_1\}$ e $u_2v_2 \in E(C)$. Se $u_1u_2 \in E(C)$ e $v_3v_2 \in E(C)$, então o conjunto de arestas do emparelhamento está contido nos caminhos $u_2u_3 \dots u_{2k}v_1v_2$ e $v_3v_4 \dots v_{2k}u_1$, que possuem número ímpar de vértices, um absurdo. O argumento é análogo no caso em que $u_2u_3 \in E(C)$ e $v_2v_1 \in E(C)$. Logo, temos que ou $u_2u_3 \in E(C)$ e $v_2v_3 \in E(C)$ ou $u_1u_2 \in E(C)$ e $v_2v_1 \in E(C)$. Suponha que $u_2u_3 \in E(C)$ e $v_2v_3 \in E(C)$. Como $u_2v_2 \in E(C)$ e $u_3v_3 \in E(C)$ por hipótese, temos um subciclo em C , um absurdo. O caso em que $u_1u_2 \in E(C)$ e $v_2v_1 \in E(C)$ é análogo a esse.

Caso 4: $j = 4k$ e H_j possui um ciclo hamiltoniano que contém todos os seus aros exceto um.

Suponha que u_1v_1 seja o aro que não está em C . Então o emparelhamento $E(H_j) \setminus E(C)$ contém a aresta u_1v_1 e o conjunto das arestas restantes do emparelhamento

está contido nos caminhos $u_2u_3 \dots u_{2k}$ e $v_2v_3 \dots v_{2k}$, ambos com número ímpar de vértices, um absurdo. ■

Lema 2.2. Seja $v \in V(H_j)$. O grafo $H_j \setminus v$ tem um ciclo hamiltoniano que contém todos os aros de $H_j \setminus v$.

Prova. Por simetria, podemos supor que $v = u_1$.

Caso 1: $j = 4k+2$. Para obter um ciclo hamiltoniano que passe por todos os aros de H_j consideramos as arestas: $E(C) = \{v_{2k+1}v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} u_{i+1} u_{i+2} v_{i+2} \mid i \text{ ímpar}, i < 2k+1\}$.

Caso 2: $j = 4k$. Consideramos a seguinte sequência de arestas em H_j : $E(C) = \{v_{2k-1}v_{2k}u_{2k}v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} u_{i+1} u_{i+2} v_{i+2} \mid i \text{ ímpar}, i < 2k-1\}$. ■

Lema 2.3. Para todo $j \geq 2$, H'_j não possui ciclo hamiltoniano. Além disso, seu ciclo mais longo não contém exatamente dois vértices.

Prova. Se H'_j fosse hamiltoniano, então teríamos um ciclo hamiltoniano em H_j que conteria todos os seus aros, o que é um absurdo, pelo Lema 2.1. Se apenas um vértice não está contido no maior ciclo, então este vértice de H'_j foi originado a partir da subdivisão de um aro de H_j . Nesse caso, teríamos um ciclo hamiltoniano em H_j que contém todos os seus aros, exceto um, o que também é um absurdo pelo Lema 2.1. ■

Para cada $p \geq 7$, o grafo G^p é construído da seguinte forma:

Construção I. Se p é ímpar:

1. Começar com o grafo H'_{p+1} ;
2. Fixar $x \in V(H'_{p+1})$ tal que $g(x) = 3$ e subdividir as três arestas incidentes nele;
3. Subdividir o vértice x em três vértices de grau 1.

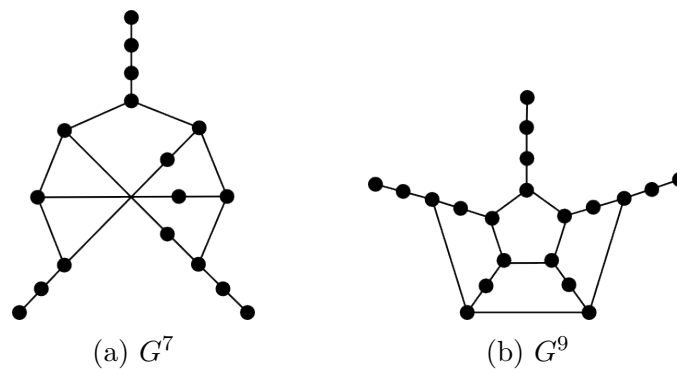


Figura 2.8: Grafos construídos através da construção I.

Construção II. Se p é par:

1. Começar com o grafo H_p ;
2. Fixar um aro xz e subdividir três vezes esse aro;
3. Duplicar o aro adjacente a um vizinho de x ;
4. Subdividir todos os aros, exceto xz ;
5. Subdividir o vértice central do aro xz em dois vértices de grau 1.

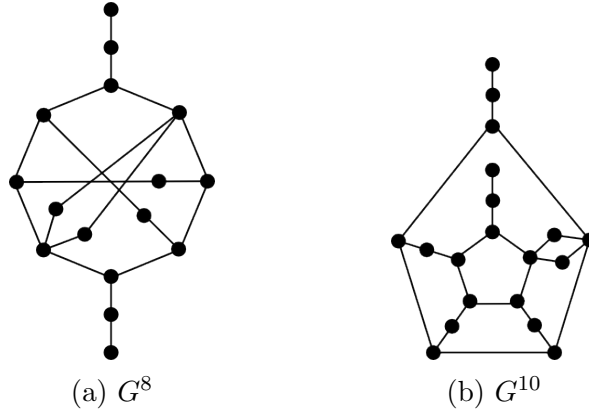


Figura 2.9: Grafos construídos através da construção II.

Teorema 2.3. [27] Um caminho mais longo de G^p tem tamanho $n - 4$ se p é ímpar e $n - 3$ se p é par.

Prova. Se p é ímpar, então G^p foi construído de acordo com a construção I. Sejam x_1, x_2 e x_3 os vértices obtidos a partir de x no passo 3 da construção I. Denotaremos por P_i o caminho que começa em $x_i \in \{x_1, x_2, x_3\}$ e termina no primeiro vértice de grau três encontrado a partir de x_i . Definimos que x_3 é o vértice tal que $|V(P_3)| = 4$. Como $g(x_i) = 1$ e $|V(P_i)| \geq 3$ para $1 \leq i \leq 3$, temos que qualquer caminho mais longo de G^p não contém pelo menos dois vértices do grafo. Seja $u \in V(G^p)$ tal que $g(u) = 3$ e $u \notin P_i$, para $1 \leq i \leq 3$. Pelo Lema 2.2, podemos construir um caminho a partir do ciclo hamiltoniano que contém todos os aros de $H_{p+1} \setminus u$. Este caminho começa em x_1 , termina em x_2 e não contém apenas os vértices de P_3 . Como este caminho não contém apenas os vértices de P_3 , é um caminho de tamanho $n - 4$ em G^p . Vamos provar que este caminho é, de fato, mais longo. Suponha que exista um caminho Q de tamanho pelo menos $n - 3$. Ele necessariamente tem extremos em x_1 e x_2 e contém todos os vértices de $V(G^p) \setminus \{x \in V(P_3) \mid g(x) \leq 2\}$. Logo, temos que Q corresponde a um ciclo em H'_{p+1} . Mas isso significaria que H'_{p+1} possui um ciclo hamiltoniano ou um ciclo que contém todos os vértices exceto um, o que contradiz o Lema 2.3.

Se p é par, então G^p foi construído conforme a construção II. Analogamente ao caso anterior, denotamos por x_1 e x_2 os vértices de grau um obtidos no passo 5 da construção II e por P_1 e P_2 os caminhos que começam em x_1 e x_2 , respectivamente, e

terminam no primeiro vértice de grau três encontrado a partir deles. Seja $u \in V(G^p)$ tal que $g(u) = 3$ e $u \notin P_i$, $i = 1, 2$. Podemos obter um caminho de tamanho $n - 3$ em G_p a partir do ciclo hamiltoniano de $H_p \setminus u$ que contém todos os seus aros. Este caminho tem tamanho $n - 3$ pois não contém o vértice u , o vértice obtido através da subdivisão do aro incidente a u e também um vértice obtido a partir da subdivisão do aro que foi duplicado no passo 3 da construção II. Vamos provar que este caminho é mais longo em G^p . Suponha que exista um caminho Q de tamanho pelo menos $n - 2$. Sejam v_1 e v_2 os vértices gêmeos obtidos a partir da subdivisão do aro que foi duplicado no passo 3. Se o caminho Q não possui um extremo em $\{v_1, v_2\}$, então, para ter tamanho pelo menos $n - 2$, ele precisa ter extremos em x_1 e x_2 . Nesse caso, Q corresponderia a um ciclo em H'_p que não contém no máximo um de seus vértices, um absurdo pelo Lema 2.3. Se Q possui um extremo em $\{v_1, v_2\}$, então necessariamente possui o outro extremo em $\{x_1, x_2\}$. Supomos, sem perda de generalidade, que seja em x_2 e, com isso, Q não contém os dois vértices de P_1 com grau menor ou igual a dois. Logo, Q é um caminho hamiltoniano no grafo $G^p \setminus \{x \in V(P_1) \mid g(x) \leq 2\}$ que começa em $\{v_1, v_2\}$ e termina em x_2 . Isso é uma contradição pois tal caminho não existe, dado que o grafo em questão é bipartido com uma das partes contendo dois vértices a mais que a outra, devido à duplicação do aro feita no passo 3. ■

Corolário 2.1. [27] Seja P um caminho mais longo de G^p . O número de vértices de grau maior ou igual a três que não estão contidos em P é no máximo 1.

Prova. Seja v tal que $g(v) \geq 3$. Se $v \notin V(P)$, então o vértice originado da subdivisão do aro incidente a v também não pertence a P . O corolário segue a partir daí do Teorema 2.3. ■

Teorema 2.4. [27] Para todo $p \geq 7$, G^p tem p caminhos mais longos que têm interseção vazia, mas quaisquer $p - 1$ caminhos mais longos têm interseção não vazia.

Prova. O grafo G^p possui exatamente p vértices de grau maior ou igual a três. Para cada um desses vértices, construiremos um caminho mais longo que não o contém. Seja $u \in V(G^p)$ tal que $g(u) \geq 3$. Sejam P_1, P_2 e, no caso em que p é ímpar, P_3 , conforme definidos no Teorema 2.3. Se p é ímpar, então construímos um caminho mais longo que não contém u através do ciclo hamiltoniano de $H'_{p+1} \setminus u$ que contém todos os seus aros, conforme feito na prova do Teorema 2.3. Se p é par e $u \notin V(P_i)$, $i = 1, 2$, então podemos aplicar o mesmo procedimento, mas com o grafo $H'_p \setminus u$. Se $u \in P_2$, temos o seguinte caminho, onde a_{ij} é o vértice obtido a partir da subdivisão do aro $u_i v_i$: $P_1 \cdot v_{2k} a_{2k} u_{2k} u_{2k-1} a_{2k-1} v_{2k-1} \dots u_3 a_3 v_3 v_2 a_{21} u_2 a_{22}$, se $p = 4k$ e $P_1 \cdot v_{2k+1} a_{2k+1} u_{2k+1} u_{2k} a_{2k} v_{2k} \dots v_3 a_3 u_3 u_2 a_{21} v_2 a_{22}$, se $p = 4k + 2$, conforme

na figura abaixo. Assim temos um conjunto de p caminhos mais longos que possuem interseção vazia. Pelo Corolário 2.1, temos que quaisquer $p - 1$ caminhos mais longos possuem um vértice em comum. ■

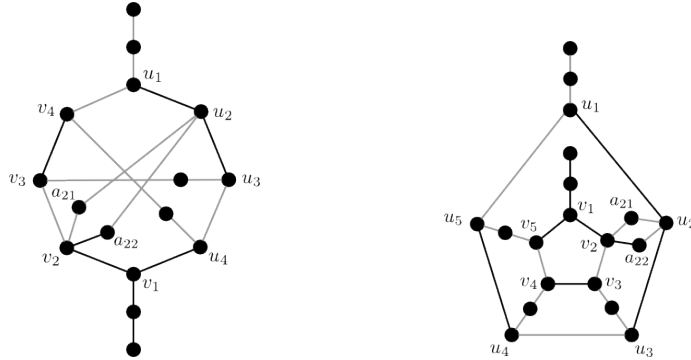


Figura 2.10: Caminhos mais longos descritos no Teorema 2.4.

2.3.2 Três caminhos mais longos

Enquanto que um resultado básico nos diz que a interseção de quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo é sempre não vazia, determinar se sempre há um vértice na interseção de quaisquer três caminhos mais longos de qualquer grafo ainda é um problema em aberto, apresentado como conjectura em [15].

Em 2009, Axenovich [1] determinou duas configurações proibidas para a união de três caminhos mais longos e também mostrou que um contraexemplo minimal para essa conjectura, caso ele exista, deve possuir no máximo um bloco não trivial. Dois anos mais tarde, Kensell [20] determinou novas características que um contraexemplo minimal deveria possuir, como não ter triângulos.

No sentido de determinar classes de grafos que respondam afirmativamente à pergunta sobre os três caminhos mais longos, de Rezende et al. [9] provaram um resultado para grafos cujos componentes biconexos não triviais possuem um ciclo hamiltoniano. Este teorema será o objeto central desta seção.

Lema 2.4. Seja G um grafo e sejam P_1 , P_2 e P_3 caminhos em G . Se $\sum_{i=1}^3 |E(P_i)| \geq 2n - 2$, então P_1 , P_2 e P_3 possuem um vértice em comum.

Prova. Suponha que P_1 , P_2 e P_3 não possuem um vértice em comum. Então, cada vértice aparece em no máximo dois caminhos. Logo, $\sum_{i=1}^3 |V(P_i)| \leq 2n$ e, assim, $\sum_{i=1}^3 |E(P_i)| \leq 2n - 3$. ■

Teorema 2.5. [9] Se G é um grafo conexo em que todos os blocos não triviais possuem um ciclo hamiltoniano, então quaisquer três caminhos mais longos em G possuem um vértice em comum.

Prova. Sejam P_1, P_2 e P_3 caminhos mais longos de G e suponha por absurdo que P_1, P_2 e P_3 não possuem um vértice em comum. Pelo Teorema 2.2, existe um bloco B tal que os três caminhos possuem ao menos uma aresta em B . Se B é um bloco trivial, o resultado segue diretamente. Supomos então que $|V(B)| \geq 3$ e, por hipótese, B tem um ciclo hamiltoniano C . Denotamos por \tilde{P}_i o caminho dado por $P_i \cap B$. Vamos provar que $|E(\tilde{P}_1)| + |E(\tilde{P}_2)| + |E(\tilde{P}_3)| \geq 2|E(C)|$ e, pelo Lema 2.4, temos que existe um vértice na interseção dos caminhos \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 e \tilde{P}_3 .

Se ao menos um dos três caminhos possui todos os vértices de B , então o resultado segue do fato que os outros dois caminhos precisam se intersectar em B . Assumimos então que cada um dos três caminhos contém dois caminhos pendentes de B . Se esses caminhos pendentes intersectam B em apenas dois vértices, então esses dois vértices estão na interseção dos três caminhos mais longos. Sejam então T_x, T_y e T_z três destes caminhos pendentes que possuem origens distintas x, y e z , respectivamente. Além disso, tomamos T_x, T_y e T_z como sendo os mais longos dentre os caminhos pendentes de B contidos em P_1, P_2 ou P_3 .

Vamos dividir a prova em dois casos e, para isso, usaremos um grafo auxiliar H . O grafo H é bipartido, com bipartição (A, B) , onde $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{P_1, P_2, P_3\}$. Existe aresta de um vértice $i \in A$ para um vértice $P_j \in B$ se e somente se o caminho P_j não contém um caminho pendente de B a partir do vértice i .

Caso 1: H possui um emparelhamento perfeito.

Seja M um tal emparelhamento perfeito. Supomos sem perda de generalidade que as arestas do emparelhamento M são xP_1, yP_2 e zP_3 . Supomos também que se C está desenhado no plano sem cruzamento de arestas, então x, y e z aparecem nesta ordem no ciclo C quando percorrido no sentido horário. Considere os caminhos pendentes R e R' tais que $P_1 = R \cdot \tilde{P}_1 \cdot R'$. Temos que $|E(T_y)| + |E(T_z)| \geq |E(R)| + |E(R')|$, pois T_x não está contido em P_1 ($xP_1 \in M$), logo $T_x \neq R, R'$ e também porque T_y e T_z foram escolhidos de forma a terem tamanho maior ou igual ao de R e ao de R' . Assim, consideramos o caminho $Q_x = T_z^{-1} \cdot C_{zy} \cdot T_y$.

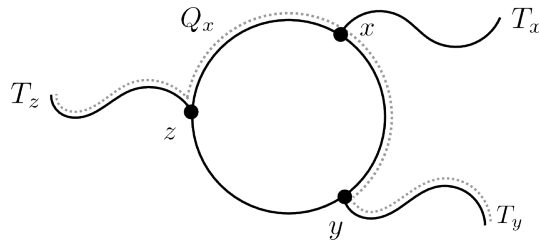


Figura 2.11: Caminho Q_x .

Como P_1 é um caminho mais longo do grafo, temos que $|E(P_1)| \geq |E(Q_x)|$. Logo, $|E(R)| + |E(\tilde{P}_1)| + |E(R')| \geq |E(T_z)| + |E(C_{zy})| + |E(T_y)|$. Como $|E(T_y)| + |E(T_z)| \geq |E(R)| + |E(R')|$, temos que $|E(\tilde{P}_1)| \geq |E(C_{zy})|$. Aplicando o mesmo argumento para os caminhos P_2 e P_3 , teremos que $|E(\tilde{P}_2)| \geq |E(C_{xz})|$ e $|E(\tilde{P}_3)| \geq |E(C_{yx})|$. Assim,

temos que $|E(\tilde{P}_1)| + |E(\tilde{P}_2)| + |E(\tilde{P}_3)| \geq |E(C_{zy})| + |E(C_{xz})| + |E(C_{yx})| = 2|E(C)|$.

Caso 2: H não possui um emparelhamento perfeito.

Pelo Teorema de Hall, temos que existe $X \subset A$ tal que $|N(X)| < |X|$. É fácil ver que, por construção, todo vértice de B em H possui grau maior ou igual a um. Se $|X| = 1$, então este vértice de X pertence aos três caminhos mais longos. Não pode ser o caso em que $|X| = 3$, pois teríamos que $|N(X)| \leq 2$ e isso implicaria a existência de um vértice de grau zero em B . Logo, temos que $|X| = 2$ e $|N(X)| \leq 1$. Como consequência, os dois vértices de X não são adjacentes a dois vértices de B (os que pertencem a $B \setminus N(X)$). Em outras palavras, existem dois caminhos de B que possuem caminhos pendentes com as mesmas extremidades. Supomos, sem perda de generalidade, que P_1 e P_2 sejam estes caminhos. Podemos assumir que os extremos em C dos caminhos pendentes de P_3 são distintos dos de P_1 e P_2 , pois caso contrário os três caminhos já teriam um vértice em comum.

Assim, B contém quatro caminhos pendentes com extremos distintos em C . Suponha que as origens sejam x, y, z, w e que, se C está desenhado no plano sem cruzamento de arestas, elas apareçam nesta ordem no ciclo C quando percorrido no sentido horário. Chamamos de T_u o caminho pendente com extremo em u . Construimos os seguintes caminhos em G :

$$\begin{aligned} Q_1 &= T_z^{-1} \cdot C_{zy} \cdot T_y \\ Q_2 &= T_w^{-1} \cdot C_{wz} \cdot T_z \\ Q_3 &= T_x^{-1} \cdot C_{xw} \cdot T_w \\ Q_4 &= T_y^{-1} \cdot C_{yx} \cdot T_x \end{aligned}$$

Como $|E(C_{zy})| + |E(C_{wz})| + |E(C_{xw})| + |E(C_{yx})| = 3|E(C)|$, temos que

$$\sum_{i=1}^4 |E(Q_i)| = 2(|E(T_x)| + |E(T_y)| + |E(T_z)| + |E(T_w)|) + 3|E(C)|.$$

Como os caminhos pendentes de P_1 e P_2 possuem os mesmos extremos, temos que

$$\begin{aligned} &|E(P_1)| + |E(P_2)| + 2|E(P_3)| = \\ &= 2(|E(T_x)| + |E(T_y)|) + (|E(\tilde{P}_1)| + |E(\tilde{P}_2)|) + 2(|E(T_z)| + |E(T_w)| + |E(\tilde{P}_3)|) \\ &= 2(|E(T_x)| + |E(T_y)| + |E(T_z)| + |E(T_w)|) + |E(\tilde{P}_1)| + |E(\tilde{P}_2)| + 2|E(\tilde{P}_3)| \end{aligned}$$

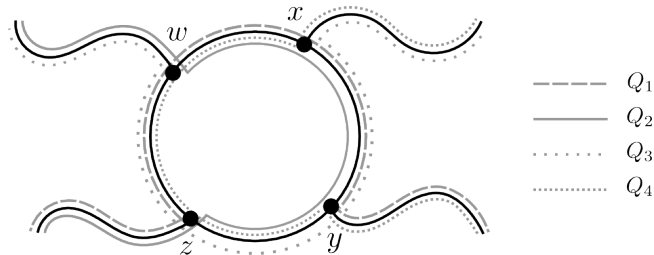


Figura 2.12: Caminhos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 .

Finalmente, como $|E(P_i)| \geq |E(Q_i)|$, temos que $|E(\tilde{P}_1)| + |E(\tilde{P}_2)| + 2|E(\tilde{P}_3)| \geq 3|E(C)|$. Por hipótese, nenhum dos três caminhos contém todos os vértices de B e, por isso, $|E(\tilde{P}_3)| < |E(C)|$. Concluimos que $|E(\tilde{P}_1)| + |E(\tilde{P}_2)| + |E(\tilde{P}_3)| \geq 2|E(C)|$. ■

Conforme comentado em [8, 9], uma pergunta natural a partir deste resultado seria se o enunciado poderia ser estendido para considerar todos os caminhos mais longos. A resposta a esta pergunta é não, como mostrado pelo contraexemplo de Walther, Voss e Zamfirescu, na Figura 2.3.

Capítulo 3

Interseção de todos os caminhos mais longos em classes de grafos

Ainda que se conheçam exemplos de grafos que respondem negativamente à pergunta de Gallai (como vimos na Seção 2.2), muitos são os grafos que possuem um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos. Neste capítulo, apresentaremos os resultados sobre classes de grafos que respondem positivamente à pergunta de Gallai estudados ao longo da nossa pesquisa. Na Seção 3.1, apresentamos o resultado para árvores, que terá desdobramentos interessantes na Seção 3.6, sobre limites superiores para $lpt(G)$ em classes de grafos. Nas Seções 3.2 e 3.3, apresentamos os resultados de Rezende et al. para grafos outerplanares e 2-árvores, respectivamente. Na Seção 3.4, serão abordados os resultados de Balister et al. e Joos para a classe dos grafos arco-circulares. Finalmente, na Seção 3.5, está um resultado obtido mais recentemente, em 2015, para grafos que possuem um emparelhamento máximo de tamanho no máximo três.

3.1 Árvores

Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Dada uma família de conjuntos $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_k\}$, dizemos que \mathcal{F} satisfaz a *propriedade Helly* se para todo $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ tal que $A \cap B \neq \emptyset$ para todo $A, B \in \mathcal{F}'$ temos que $\bigcap_{S \in \mathcal{F}'} S \neq \emptyset$. O fato de que sempre há um vértice na interseção de todos os caminhos mais longos de uma árvore é uma consequência direta do fato de que um conjunto de subárvores de uma árvore satisfaz a propriedade Helly.

Teorema 3.1. Seja T uma árvore e $\mathcal{F} = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ um conjunto de subárvores de T . Se $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$ então $\bigcap_{i=1}^k V(T_i) \neq \emptyset$

Prova. Por indução em n , o número de vértices de T . Se $n = 1$, o resultado segue imediatamente. Seja T uma árvore com $n \geq 2$ vértices e $f \in V(T)$ uma folha de T .

Se existe i tal que $|V(T_i)| = 1$, então todas as subárvores se intersectam em T_i . Logo, podemos assumir que $|V(T_i)| \geq 2$ para todo i . Retiramos a folha f de T . As subárvores de \mathcal{F} ainda se intersectam duas a duas em $T \setminus f$, pois se duas delas se intersectavam em f , elas também se intersectavam no vizinho de f em T (já que $|V(T_i)| \geq 2$ para todo i). Logo $\bigcap_{i=1}^k V(T_i) \neq \emptyset$ em $T \setminus f$ e, portanto, em T também. ■

O resultado para caminhos mais longos é um corolário desta propriedade que as subárvores de uma árvore possuem. Podemos considerar um conjunto de subárvores dado pelo conjunto dos caminhos mais longos de T . Já sabemos que eles se intersectam dois a dois, pela Proposição 2.1. Logo, pelo teorema acima, sabemos que sempre existe um vértice que pertence a todos os caminhos mais longos de uma árvore.

Corolário 3.1. Se G é árvore, então $lpt(G) = 1$.

3.2 Grafos outerplanares

Já vimos, através do grafo de Schmitz (Figura 2.4), que não é verdade que os caminhos mais longos de um grafo planar sempre possuem um vértice em comum. No entanto, nesta seção, abordaremos uma importante subclasse dos grafos planares em que isso acontece. Dizemos que um grafo é *outerplanar* se ele admite uma representação planar tal que todos os seus vértices estão na face externa.

A partir do Teorema 2.2, foi provado em [9] que todos os caminhos mais longos de um grafo outerplanar possuem um vértice em comum.

Teorema 3.2. [9] Se G é outerplanar, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Suponha por absurdo que tal vértice não exista. Pelo Teorema 2.2, existe um bloco B tal que todo caminho mais longo de G possui pelo menos uma aresta em B . Se B é um bloco trivial, então o resultado segue diretamente. Senão, considere uma representação outerplanar de G e seja C um ciclo hamiltoniano em B . Seja R^* o maior caminho pendente de B e seja $v \in V(B)$ tal que $V(B) \cap V(R^*) = \{v\}$. Vamos provar que v é um vértice que está em todo caminho mais longo de G . Suponha por absurdo que exista um caminho mais longo P que não contém v . Seja $x \in V(P) \cap V(B)$ tal que $|V(C_{xv})|$ seja mínimo e, analogamente, seja $y \in V(P) \cap V(B)$ tal que $|V(C_{vy})|$ seja menor possível. Temos necessariamente que $x \neq y$, pois caso contrário P intersectaria B em apenas um vértice, o que não é possível pois B é essencial a P .

Consideraremos dois casos:

Caso 1: $xy \in E(P)$. Considere o caminho P' obtido a partir de P trocando a aresta xy por C_{xy} . Note que P' é de fato um caminho pois $V(P) \cap V(C_{xy}) = \{x, y\}$.



Figura 3.1: Casos considerados no Teorema 3.2.

Além disso, como o segmento C_{xy} possui ao menos um vértice além de x e y (no caso, v), temos que $|V(P')| > |V(P)|$, um absurdo.

Caso 2: $xy \notin E(P)$. Considere o vértice z adjacente a x em P tal que $|V(C_{yz})|$ seja mínimo. Sejam P_1 e P_2 caminhos em G tais que $P = P_1 \cdot P_2$, $V(P_1) \cap V(P_2) = \{z\}$, $x \in V(P_1)$ e $y \in V(P_2)$. Tais caminhos existem pois G é outerplanar. Assim, temos que P_2 contém apenas vértices de C_{yz} e, possivelmente, um caminho pendente R que intersecta B em algum vértice de C_{yz} . Consideramos o caminho P' dado por $P' = P_1 \cdot C_{vz}^{-1} \cdot R^*$. Como $|E(R^*)| \geq |E(R)|$ e como C_{vz} possui ao menos um vértice a mais que C_{yz} , temos que o caminho P' é maior que P , um absurdo. ■

3.3 2-árvores

Um grafo é uma k -árvore se é um grafo completo com k vértices ou se pode ser obtido a partir de uma k -árvore através da adição de um vértice simplicial de grau k . Toda k -árvore é um grafo cordal. Além disso, um fato bastante conhecido é que as k -árvores são grafos k -conexos. Abordaremos um caso específico de k -árvore, que é o caso em que $k = 2$. O problema da interseção dos caminhos mais longos nesta classe foi resolvido por de Rezende et al. em 2013, resultado que será apresentado nesta seção.

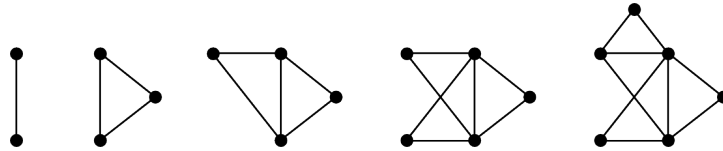


Figura 3.2: Exemplos de 2-árvores.

Dados um caminho P e uma aresta $xy \in E(G)$, dizemos que xy *confina* P se $V(P) \setminus \{x, y\}$ está contido em uma única componente conexa de $G \setminus \{x, y\}$. O caminho *cruza* a aresta se xy não confina P . Se P é um caminho em G e $x \in V(P)$, podemos escrever $P = P' \cdot P''$, onde $V(P') \cap V(P'') = \{x\}$. Denotaremos esse fato apenas por $P = P'xP''$, ficando subentendido que P' e P'' são como aqui descrito.

Se $e = xy \in E(G)$, definimos $C_e(P)$ como o conjunto dos vértices das componentes conexas de $G \setminus \{x, y\}$ que contêm ao menos um vértice de P . Ou seja, $C_e(P) = \{v \in V(G) \mid v \text{ pertence a uma componente conexa de } G \setminus \{x, y\} \text{ que intersecta } V(P)\}$. Se P é um único vértice x , então $C_e(v)$ é o conjunto de vértices da componente conexa que contém o vértice x .

Lema 3.1. [9] Se $xy \in E(G)$, então ou x ou y pertence à interseção de todos os caminhos mais longos que cruzam xy .

Prova. Suponha por absurdo que existam dois caminhos P e Q que cruzam xy e tais que $x \in V(P)$, $x \notin V(Q)$, $y \in V(Q)$ e $y \notin V(P)$. Então $P = P'xP''$ e $Q = Q'yQ''$. Supomos sem perda de generalidade que $|V(P')| \geq |V(P'')|$ e $|V(Q')| \geq |V(Q'')|$. Se P' e Q' estão em componentes conexas distintas de $G \setminus \{x, y\}$, o caminho $P' \cdot xy \cdot Q'$ é maior que P , um absurdo. Se P' e Q' estão na mesma componente conexa, consideramos os caminhos $P' \cdot xy \cdot Q''$ se $|V(P')| \geq |V(Q')|$ ou $Q' \cdot xy \cdot P''$, caso contrário. ■

Lema 3.2. [9] Se G possui dois caminhos mais longos P e Q e uma aresta $e \in E(G)$ tais que $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Consideramos todos os caminhos mais longos de G e vamos dividir a prova em dois casos.

Caso 1: Existem caminhos mais longos P e Q e uma aresta e satisfazendo $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$ tais que um dos caminhos possui apenas um dos extremos de e .

Seja $e = xy$ e suponha que $V(Q) \cap \{x, y\} = \{x\}$. Como $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, temos que $x \in V(P)$, pois caso contrário P e Q não teriam nenhum vértice em comum. Seja $P = P'xP''$ e $Q = Q'xQ''$. Como $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$, temos que $P' \cdot Q'$, $P' \cdot Q''$, $P'' \cdot Q'$ e $P'' \cdot Q''$ também são caminhos em G . Logo $|V(P')| = |V(P'')| = |V(Q')| = |V(Q'')|$. Seja $R = P' \cdot Q'$, onde supomos que P' não contém y . O caminho R também é mais longo e cruza a aresta e , pois $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$ implica $C_e(P') \cap C_e(Q') = \emptyset$. Como R cruza xy e contém apenas x , pelo Lema 3.1, temos que todo caminho mais longo que cruza xy também contém x .

Consideremos agora os caminhos que não cruzam xy . Seja S um caminho confinado por xy . Vamos mostrar que $x \in V(S)$. Temos que $C_e(S) \cap C_e(P) = \emptyset$ ou $C_e(S) \cap C_e(Q) = \emptyset$, pois $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$. Suponha que $x \notin V(S)$. Como S não contém x , temos que, necessariamente, $C_e(S) \subseteq C_e(Q)$, caso contrário esses dois caminhos não teriam um vértice em comum. Logo, $C_e(S) \cap C_e(P) = \emptyset$ e S intersecta P em y (se $y \notin V(P)$ já temos um absurdo). Seja $S = S'yS''$ e supomos que $|V(S'')| \geq |V(S')|$. Então $P' \cdot xy \cdot S''$ é um caminho em G e possui comprimento maior que P , pois $|V(P')| = \frac{|V(P)|}{2}$ e $|V(S'')| > \frac{|V(P)|}{2}$, um absurdo. Logo $x \in V(S)$.

Caso 2: Para quaisquer P, Q e $e \in E(G)$ satisfazendo $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$ temos que $V(P) \cap \{x, y\} \cap V(Q) = \{x, y\}$.

Seja S um caminho mais longo confinado pela aresta xy . Vamos mostrar que S contém tanto x quanto y . Novamente temos que $C_e(S) \cap C_e(Q) = \emptyset$ ou $C_e(S) \cap C_e(P) = \emptyset$. Supomos, s.p.g., $C_e(S) \cap C_e(P) = \emptyset$. Nesse caso, P e S são dois caminhos mais longos que satisfazem a hipótese do caso 2, e com isso, concluímos que $x \in V(S)$ e $y \in V(S)$. Além disso, pelo Lema 3.1, os caminhos que cruzam xy se intersectam em x ou em y . Logo, um desses dois vértices está na interseção de todos os caminhos mais longos de G . ■

Se as arestas e, f e g formam um triângulo T em G , denotaremos por v_e, v_f e v_g os vértices de T , onde para cada $h \in \{e, f, g\}$, v_h é o vértice de T que não é extremo da aresta h . Chamaremos v_h de vértice oposto à aresta h em T .

Lema 3.3. [9] Seja $\{e, f, g\} \subseteq E(G)$ um triângulo em G . Se G não tem menor de K_4 , então $C_e(v_e) \cap C_f(v_f) \cap C_g(v_g) = \emptyset$.

Prova. Suponha que $u \in C_e(v_e) \cap C_f(v_f) \cap C_g(v_g)$. Como $u \in C_e(v_e)$, temos que $u \neq v_f$ e $u \neq v_g$. Analogamente, $u \in C_f(v_f)$ implica $u \neq v_e$. Além disso, existe um caminho de u até v_e contido em $C_e(v_e)$ e que, portanto, não contém v_g e nem v_f . O mesmo acontece de u para os outros vértices do triângulo. Logo, G tem um menor de K_4 . ■

Dado um triângulo T em um grafo, dizemos que T é um *triângulo forte* se, para cada aresta $e \in E(T)$, existe um caminho mais longo P tal que e confina P e tal que $C_e(P) = C_e(v_e)$.

Lema 3.4. [9] Seja G uma 2-árvore. Se toda aresta de G confina um caminho mais longo, então G contém um triângulo forte.

Prova. Seja G uma 2-árvore em que toda aresta confina um caminho mais longo. Definimos um grafo bipartido com conjunto de vértices $A \cup B$, onde cada vértice de A é associado a um elemento de $E(G)$ e cada vértice de B representa um triângulo de G . Existe aresta entre $a \in A$ e $b \in B$ se e somente se a aresta correspondente a a pertence ao triângulo correspondente a b e se existe um caminho mais longo P que é confinado por e e tal que $C_e(P) = C_e(v_e)$. Por hipótese, toda aresta de G confina ao menos um caminho mais longo. Seja $e = xy \in E(G)$ e P um caminho mais longo confinado por e . Se $G \setminus \{x, y\}$ é conexo, como toda aresta de G está em pelo menos um triângulo, temos que existe um triângulo $\{e, f, g\}$ em que $C_e(P) = C_e(v_e)$. Se $G \setminus \{x, y\}$ é desconexo, como G é 2-árvore temos que $\{x, y\}$ é um separador minimal de G e, com isso, existe em $C_e(P)$ um vértice v_e adjacente a x e a y . Logo, existe

um triângulo em G tal que $C_e(P) = C_e(v_e)$. Assim, concluímos que todo vértice de A tem grau pelo menos um. Como G é uma 2-árvore, temos que $|A| = 2|B| + 1$. Logo, existe em B um vértice de grau pelo menos três, que representa um triângulo forte em G . ■

Teorema 3.3. [9] Se G é uma 2-árvore, então $lpt(G)=1$.

Prova. Seja G uma 2-árvore. Se existe uma aresta e que não confina nenhum caminho mais longo, então todo caminho mais longo cruza e e, pelo Lema 3.1, todos os caminhos mais longos de G se intersectam em um dos extremos de e . Supomos, então, que toda aresta de G confina ao menos um caminho mais longo e, pelo Lema 3.4, G tem um triângulo forte. Seja T esse triângulo.

Se existe um caminho mais longo P confinado por uma aresta $e \in E(T)$ tal que $C_e(P) \neq C_e(v_e)$, temos que, como T é um triângulo forte, existe caminho mais longo Q confinado por e tal que $C_e(Q) = C_e(v_e)$. Logo, $C_e(P) \cap C_e(Q) = \emptyset$ e, pelo Lema 3.2, todos os caminhos mais longos de G têm um vértice em comum. Podemos então supor que todo caminho mais longo P confinado por uma aresta $e \in E(T)$ é tal que $C_e(P) = C_e(v_e)$.

Se um caminho mais longo P é confinado simultaneamente pelas três arestas de T , temos que $C_e(P) = C_e(v_e)$, $C_f(P) = C_f(v_f)$ e $C_g(P) = C_g(v_g)$. Se P possui algum outro vértice além de v_e , v_f e v_g então este vértice pertence a $C_e(v_e) \cap C_f(v_f) \cap C_g(v_g)$ e com isso G possui um minor de K_4 , um absurdo. Logo, $V(P) = V(T)$ e como P é mais longo temos que $V(G) = V(T)$. Concluímos então que cada caminho mais longo pode ser confinado por no máximo duas arestas de T .

Seja P um caminho mais longo confinado por e e por g . Logo, P cruza f . Todo vértice $u \in V(P) \setminus V(T)$ é tal que $u \in C_e(P) \cap C_g(P) = C_e(v_e) \cap C_g(v_g)$. Então temos que $u \notin C_f(v_f)$. Ou seja, o único vértice de P que pode pertencer a $C_f(v_f)$ é o próprio v_f . Se $v_f \notin V(P)$, temos que, como T é forte, existe um caminho mais longo Q tal que $C_f(Q) = C_f(v_f)$. Ou seja, $C_f(P) \cap C_f(Q) = \emptyset$ e, pelo Lema 3.2, todos os caminhos mais longos de G têm um vértice em comum. Se $v_f \in V(P)$, então P possui uma aresta no triângulo e, portanto, P contém todos os vértices de T . Logo, podemos supor que todo caminho mais longo confinado por exatamente duas arestas contém todos os vértices de T .

Até aqui concluímos que cada caminho mais longo pode ser confinado por no máximo duas arestas e, se é confinado por exatamente duas, então ele contém todos os vértices do triângulo forte. Pelo Lema 3.1, para cada aresta $h \in E(T)$, uma das extremidades de h está contida em todo caminho mais longo que cruza h . Vamos orientar as arestas de T na direção desta extremidade. Para cada h , podemos supor que existe um caminho Q_h confinado por h e que não contém ambas as suas extremidades. Isso é verdade pois se todo caminho confinado por h contivesse os

dois extremos de h então, pelo Lema 3.1 já teríamos que todos os caminhos mais longos se intersectariam. Além disso, o caminho Q_h é confinado apenas pela aresta h , pois se fosse confinado por alguma outra aresta, teria que conter todos os vértices do triângulo forte e , em particular, os dois extremos de h . Logo Q_h cruza as outras duas arestas de T . Com isso, temos que a orientação está bem definida, pois para toda aresta de $h \in E(T)$ existe ao menos um caminho que cruza h .

Caso 1: A orientação obtida para T não tem sumidouro.

Pela orientação de f e g , temos que Q_e contém v_e e v_f (pois cruza f e g) e não contém v_g . Seja $Q_h = Q'_h v_h Q''_h$, onde $V(Q'_h) \cap V(T) = \{v_h\}$. Construimos o caminho $Q = Q'_g \cdot v_g v_e \cdot Q''_e$. Note que Q é de fato um caminho pois, como Q_g cruza e , temos que $V(Q'_g) \cap C_e(v_e) = \emptyset$ e, como Q_e é confinado por e , temos que $V(Q''_e) \subseteq C_e(v_e)$.

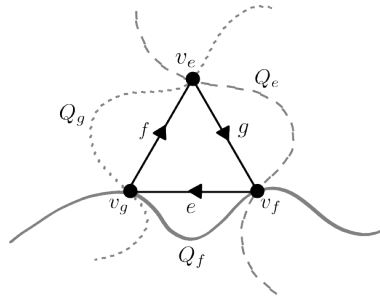


Figura 3.3: Caminhos Q_e , Q_f e Q_g .

Como o caminho Q não pode ser mais longo que o caminho Q_e , temos que $|V(Q'_e)| > |V(Q'_g)|$. Analogamente, usando os caminhos $Q_1 = Q'_f \cdot v_f v_g \cdot Q''_g$ e $Q_2 = Q'_e \cdot v_e v_f \cdot Q''_f$, temos que $|V(Q'_g)| > |V(Q'_f)|$ e $|V(Q'_f)| > |V(Q'_e)|$, um absurdo.

Caso 2: A orientação tem um sumidouro.

Vamos mostrar que, neste caso, todo caminho mais longo contém o sumidouro, digamos v_f . Seja P um caminho mais longo de G . Se P é confinado por pelo menos duas arestas, já sabemos que P contém todos os vértices de T . Se P cruza g , pela orientação de g temos que P contém v_f . Se P é confinado por g , então P cruza e e, portanto, contém v_f . ■

3.4 Grafos arco-circulares

Dizemos que um grafo é *arco-circular* se é grafo de interseção de um conjunto de arcos de um círculo C . Uma subclasse dos grafos arco-circulares bastante estudada é a dos grafos de intervalo. A partir da definição das classes, é fácil ver que todo grafo de intervalo é arco-circular e que um grafo arco-circular é de intervalo se e somente se possui alguma representação em que os arcos do modelo não cobrem todo o círculo. O problema da interseção dos caminhos mais longos em ambas as

classes foi abordado em 2004, por Balister et al. [3]. Neste artigo, o problema é resolvido para a classe dos grafos de intervalo, conforme vemos no teorema a seguir. Esta prova não será apresentada aqui pois, no Capítulo 4, ela será abordada de forma a considerar outros grafos além dos grafos de intervalo.

Teorema 3.4. [3] Se G é de intervalo, então $lpt(G) = 1$.

A prova apresentada em [3] para os grafos arco-circulares, no entanto, possuía uma falha, que foi observada por Rautenbach e Sereni [25] em 2014, e corrigida por Joos [18] em 2015.

Seja C um círculo e \mathcal{F} uma coleção de arcos de C tal que $G = \Omega(\mathcal{F})$. Podemos assumir que \mathcal{F} cobre C . Escolhemos $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{K} = \{K_0, K_1, \dots, K_{n-1}\}$ e

- $C = K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_{n-1}$;
- n é mínimo;
- $K_i \subset A \in \mathcal{F}$ implica $K_i = A$.

Ordenamos ciclicamente os elementos de \mathcal{K} no sentido horário e consideramos os índices dos elementos de \mathcal{K} módulo n . Dados $x, y \in C$, o arco A que começa em x e termina em y no sentido horário é tal que $x = l(A)$ e $y = r(A)$.

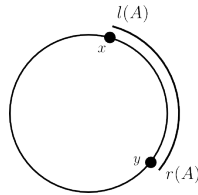


Figura 3.4: Arco xy .

Seja $\mathcal{P} = (A_1, A_2, \dots, A_t)$ a sequência de arcos correspondente a um caminho em um grafo arco-circular. O *suporte do caminho* é dado por:

$$Supp(\mathcal{P}) = A_1 \cup (A_2 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_{t-2} \cap A_{t-1}) \cup A_t.$$

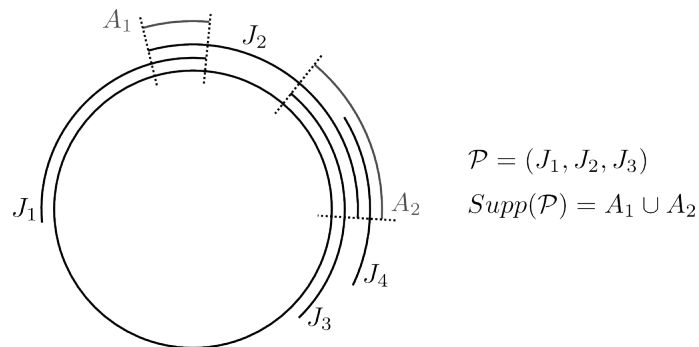


Figura 3.5: O arco J_4 pode ser adicionado a \mathcal{P} .

O suporte é uma estrutura interessante do ponto de vista dos caminhos mais longos de um grafo arco-circular pois temos que se A é um arco qualquer do modelo, então $A \in \mathcal{P}$ se e somente se $A \cap \text{Supp}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Isso é verdade pois se A é um arco que intersecta o suporte, significa que o caminho poderia ser aumentado com a inclusão de A . A sequência de arcos $\mathcal{P} = (A_1, A_2, \dots, A_t)$ que corresponde a um caminho mais longo de G é chamada de *cadeia mais longa* de \mathcal{F} .

Lema 3.5. [3] Se \mathcal{P} é uma cadeia mais longa de arcos em \mathcal{F} , então $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} = \{K_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ e I é um conjunto de índices contíguos em \mathbb{Z}_n .

Prova. Como os arcos de \mathcal{K} cobrem C , temos que ao menos um arco de \mathcal{K} intersecta o suporte de \mathcal{P} , logo pertence a \mathcal{P} , o que implica que $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. O lema é verdadeiro se $|\mathcal{K}| \leq 3$, pois qualquer $I \subset \{0, 1, 2\}$ é de índices contíguos módulo 3.

Supomos então que $n \geq 4$. Supomos que $K_i, K_j, K_k, K_l \in \mathcal{K}$ estão ordenados ciclicamente com $K_i, K_k \in \mathcal{P}$ e $K_j, K_l \notin \mathcal{P}$. Como K_j e K_l não são consecutivos em \mathcal{K} , temos que $K_j \cap K_l \neq \emptyset$. Logo $C \setminus (K_j \cup K_l)$ é união disjunta de dois arcos de C . Como $\text{Supp}(\mathcal{P}) \cap K_j = \text{Supp}(\mathcal{P}) \cap K_l = \emptyset$, $\cup_{A \in \mathcal{P}} A$ é conexo e $\text{Supp}(\mathcal{P})$ intersecta os dois arcos de $C \setminus (K_j \cup K_l)$, temos que existe $A \in \mathcal{P}$ tal que $K_j \subset A$ ou $K_l \subset A$, uma contradição. ■

Lema 3.6. [3] Seja $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{t+1}\}$ um conjunto de números reais e seja J_1, J_2, \dots, J_t uma sequência de intervalos abertos tal que $x_k, x_{k+1} \in J_k$, para todo $1 \leq k \leq t$. Se $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{t+1}}$, então os intervalos $J_{j_1}, J_{j_2}, \dots, J_{j_t}$ podem ser ordenados de forma que $x_{i_k}, x_{i_{k+1}} \in J_{j_k}$ para todo $1 \leq k \leq t$.

Prova. Para cada $i = 1, \dots, t$, consideramos $J_i^* \subset J_i$ o intervalo fechado com extremos em x_i e x_{i+1} . Sejam $\mathcal{X} = \{[x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{i_2}, x_{i_3}], \dots, [x_{i_t}, x_{i_{t+1}}]\}$ e $J^* = \{J_1^*, J_2^*, \dots, J_t^*\}$. Vamos mostrar que existe bijeção $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow J^*$ tal que $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}] \subseteq \Phi([x_{i_k}, x_{i_{k+1}}])$, para todo $1 \leq k \leq t$. Para verificar a existência desta bijeção vamos aplicar o teorema de Hall no seguinte grafo bipartido: $V(B) = \mathcal{X} \cup J^*$ e existe aresta entre um vértice $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}] \in \mathcal{X}$ e $J_i^* \in J^*$ se e somente se $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}] \subset J_i^*$.

Seja $S \subseteq \{1, \dots, t\}$ e $X(S) = \{x_{i_k} \in X \mid [x_{i_k}, x_{i_{k+1}}] \subset J_i^*, \text{ para algum } i \in S\}$. Isso é, $|X(S)|$ é o número de vizinhos de $\{J_k \mid k \in S\}$. Queremos mostrar que $|X(S)| \geq |S|$, para todo $S \subseteq \{1, \dots, t\}$. Escrevemos $\cup_{i \in S} J_i^*$ como união de intervalos fechados e disjuntos: $\cup_{j=1}^r [a_j, b_j]$. Definimos S_j tal que $\cup_{i \in S_j} J_i^* = [a_j, b_j]$, $j = 1, \dots, r$. Temos então que $|X \cap [a_j, b_j]| \geq |S_j| + 1$, pois S_j contém $|S_j|$ intervalos do tipo $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$. Logo, temos que $|X(S_j)| \geq |S_j|$. Como $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, temos $|X(S)| = \sum_{j=1}^r |X(S_j)| \geq \sum_{j=1}^r |S_j| = |S|$. ■

Seja $\mathcal{P} = (J_1, \dots, J_t)$ uma cadeia tal que $\mathcal{K} \not\subseteq \mathcal{P}$ e seja $\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \subset \text{Supp}(\mathcal{P})$ um conjunto de pontos distintos tal que $x_k, x_{k+1} \in J_k$. Pelo Lema 3.6, podemos assumir que x_1, x_2, \dots, x_{t+1} são consecutivos no sentido horário.

Sejam $p, q \in \{1, \dots, t\}$ tal que $p < q$. Se $[x_p, x_{p+1}], [x_q, x_{q+1}] \subseteq J_p \cap J_q$ então podemos trocar J_p e J_q de posição na cadeia. Isso é, a sequência

$$J_1, J_2, \dots, J_{p-1}, J_q, J_{p+1}, \dots, J_{q-1}, J_p, J_{q+1}, \dots, J_t$$

ainda é uma cadeia, com os mesmos arcos de \mathcal{P} .

Definimos $\Delta K_i = \{x \mid l(K_{i+1}) \leq x \leq r(K_i)\}$. Ou seja, $\Delta K_i = K_i \cap K_{i+1}$. Note que se $A \subset K_i \cup K_{i+1}$ e $n \geq 3$, então $A \setminus \Delta K_{i+1}$ é conexo.

Lema 3.7. [18] Se \mathcal{P} é uma cadeia e $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} = \{K_{a+1}, K_{a+2}, \dots, K_{b-1}\} \neq \mathcal{K}$, então os arcos de \mathcal{P} podem ser reordenados em uma nova cadeia \mathcal{P}^* tal que:

1. K_{a+1} precede K_{b-1} , se são distintos;
2. Se A precede K_{b-1} , então $\Delta K_{b-1} \not\subseteq A$;
3. Se A precede K_{a+1} , então $A \subseteq K_a \cup K_{a+1}$ e $A \setminus \Delta K_{a+1}$ é conexo;
4. Se K_{b-1} precede A , então $A \subseteq K_{b-1} \cup K_b$ e $A \setminus \Delta K_b$ é conexo;
5. Se K_{a+1} precede A , então $\Delta K_a \not\subseteq A$.

Prova. Seja $\mathcal{P} = (J_1, \dots, J_t)$ e seja $\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \subset \text{Supp}(\mathcal{P})$ tal que $x_k, x_{k+1} \in J_k$ e x_1, \dots, x_{t+1} aparecem consecutivos no círculo no sentido horário. Como \mathcal{P} é mais longa, temos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} = \{K_{a+1}, \dots, K_{b-1}\}$, onde $a+1, \dots, b-1$ são consecutivos em \mathbb{Z}_n . Como K_a e K_b não estão em \mathcal{P} , temos que $x_i \in (K_{a+1} \cup \dots \cup K_{b-1}) \setminus (K_a \cup K_b)$. Caso contrário, teríamos que $K_a \notin \mathcal{P}$ mas $K_a \cap \text{Supp}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, um absurdo.

Primeiro, provaremos 3 e 5. Seja $\mathcal{P}' = (J_{j_1}, J_{j_2}, \dots, J_{j_s})$ uma subsequência de \mathcal{P} tal que $A \in \mathcal{P}'$ se e somente se, em \mathcal{P}

- (i) K_{a+1} precede A e $\Delta K_a \subseteq A$, ou
- (ii) A precede K_{a+1} e $A \not\subseteq K_a \cup K_{a+1}$, se $n \geq 3$, e $A \setminus \Delta K_{a+1}$ é desconexo, $n = 2$.

Se $n \geq 3$: Seja $A \in \mathcal{P}'$ satisfazendo (i). Como $\Delta K_a \subseteq A$, temos que $l(K_a), l(A), l(K_{a+1}), r(K_a), r(A), r(K_{a+1})$ aparecem nesta ordem em sentido em C .

Se $A \in \mathcal{P}'$ satisfaz (ii): Seja $A = J_p$. Como A precede K_{a+1} em \mathcal{P} , x_p e x_{p+1} vem antes, no sentido horário, de x_{a+1} . Logo $A \cap (K_{a+1} \setminus K_a) \neq \emptyset$. Como A não pode conter propriamente nenhum elemento de \mathcal{K} temos que $l(K_a), l(K_{a+1}), l(A), r(K_a), r(K_{a+1}), r(A)$ aparecem nesta ordem no círculo se $A \cap \Delta K_a \neq \emptyset$. Caso contrário, $l(K_a), l(K_{a+1}), r(K_a), l(A), r(K_{a+1}), r(A)$ aparecem nesta ordem no círculo.

Se $n = 2$: Seja $A \in \mathcal{P}'$ satisfazendo (i). Neste caso temos que $l(A), l(K_{a+1}), r(K_a), r(A)$ aparecem nesta ordem em C . Se A satisfaz (ii), temos que $l(A), l(K_a), r(K_{a+1}), r(A)$ aparecem nesta ordem em C .

Seja $L = \{i \mid J_i \in \mathcal{P} \text{ e } J_i \text{ satisfaz (i)}\}$ e $R = \{i \mid J_i \in \mathcal{P} \text{ e } J_i \text{ satisfaz (ii)}\}$. Seja $L_{\mathcal{P}} = \{J_i \in \mathcal{P} \mid i \in L\}$ e $R_{\mathcal{P}} = \{J_i \in \mathcal{P} \mid i \in R\}$. Por definição, $R_{\mathcal{P}}$ e $L_{\mathcal{P}}$ definem uma partição de \mathcal{P}' . Além disso, todos os arcos de $R_{\mathcal{P}}$ precedem os de $L_{\mathcal{P}}$. Notamos que todos os arcos de $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ satisfazem 3 e 5.

Lema 3.8. Sejam L e R como definidos acima e não vazios. Seja $p \in R$ e $q \in L$. É possível trocar J_p e J_q de posição em \mathcal{P} , ainda obtendo uma cadeia e, com isso, os conjuntos L e R perdem exatamente os elementos q e p , respectivamente.

Prova. Como $J_p \in R_{\mathcal{P}}$ e $J_q \in L_{\mathcal{P}}$, temos que J_p precede J_q . Como J_p satisfaz (ii), temos que $l(K_a), l(K_{a+1}), l(J_p), r(K_{a+1})$ e $r(J_p)$ aparecem nesta ordem em C . Como J_q satisfaz (i), temos que $l(K_a), l(J_q), l(K_{a+1}), r(K_a), r(J_q), r(K_{a+1})$ aparecem nesta ordem no círculo. Temos então que a ordem destes pontos no círculo é $l(K_a), l(J_q), l(K_{a+1}), l(J_p), r(K_a), r(J_q), r(J_p)$.

Como J_p precede J_q em \mathcal{P} , temos que $[x_p, x_{p+1}], [x_q, x_{q+1}] \subseteq J_p \cap J_q$. Logo, é possível trocá-los de posição no caminho. Cada conjunto perdeu exatamente um elemento. Na nova configuração, J_q precede K_{a+1} em \mathcal{P} , mas $J_q \subseteq K_a \cup K_{a+1}$ pois $l(K_a)$ está à esquerda de J_q e $r(K_{a+1})$ está à direita de J_q . Além disso, K_{a+1} precede J_p , mas $\Delta K_a \not\subseteq J_p$ pois $l(K_a)$ e $l(K_{a+1})$ aparecem antes de $l(J_p)$ em C . ■

Lema 3.9. Cada elemento $J_p \in R_{\mathcal{P}}$ pode ser trocado de posição com K_{a+1} em \mathcal{P} .

Prova. Seja q tal que $J_q = K_{a+1}$, isso é, $p < q$, pois J_p precede K_{a+1} em \mathcal{P} . Temos então que $l(K_{a+1}), l(J_p), r(K_{a+1})$ e $r(J_p)$ aparecem nesta ordem em C . Como J_p precede K_{a+1} em \mathcal{P} temos que $[x_p, x_{p+1}], [x_q, x_{q+1}] \subseteq J_p \cap K_{a+1}$. ■

Lema 3.10. Cada elemento $J_q \in L_{\mathcal{P}}$ pode ser trocado por K_{a+1} em \mathcal{P} .

Prova. Seja p tal que $J_p = K_{a+1}$. Então $p < q$ pois K_{a+1} precede J_q em \mathcal{P} . Temos então que $l(J_q), l(K_{a+1}), r(J_q), r(K_{a+1})$ aparecem nessa ordem no círculo. Como K_{a+1} precede J_q em \mathcal{P} , temos que $[x_p, x_{p+1}], [x_q, x_{q+1}] \subseteq J_q \cap K_{a+1}$. ■

Seja $\gamma \in \mathbb{N}$ tal que $K_{a+1} = J_\gamma$ e $f(\mathcal{P}') = \max \{ \{\gamma\} \cup L \cup R \} - \min \{ \{\gamma\} \cup L \cup R \}$. Seja $\alpha = \min \{ \{\gamma\} \cup L \cup R \}$ e $\beta = \max \{ \{\gamma\} \cup L \cup R \}$. Note que α não diminui e β não aumenta, logo $f(\mathcal{P}')$ não aumenta com as trocas. Se aplicamos o Lema 3.8 repetidamente, podemos supor que $L = \emptyset$ ou $R = \emptyset$. Se $\mathcal{P}' = \emptyset$, então sabemos que 3 e 5 já são satisfeitos. Supomos então que $\mathcal{P}' \neq \emptyset$ e que $\mathcal{P}' = L_{\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{P}' = R_{\mathcal{P}}$.

Caso 1: $\mathcal{P}' = L_{\mathcal{P}}$.

Temos então que $K_{a+1} = J_\alpha$ e $\beta = \max \{ L \}$. Trocamos K_{a+1} com J_β . Agora temos que $L = \emptyset$ e $R \subseteq \{ \alpha + 1, \dots, \beta - 1 \}$. Assim, $f(\mathcal{P}')$ diminui de pelo menos uma unidade, dado que agora $\beta \notin L \cup R$.

Caso 2: $\mathcal{P}' = R_{\mathcal{P}}$.

Temos que $K_{a+1} = J_\beta$ e $\alpha = \min \{ R \}$. Trocamos K_{a+1} por J_α . Temos que $R = \emptyset$ e $L \subseteq \{ \alpha + 1, \dots, \beta - 1 \}$. Também neste caso temos que $f(\mathcal{P}')$ decresce de pelo menos uma unidade.

Assim, aplicando sucessivamente essas trocas no máximo $\beta - \alpha$ vezes temos que $f(\mathcal{P}') = 0$ e, com isso, os itens 3 e 5 são satisfeitos. A partir deste ponto, supomos que a ordem de \mathcal{P} satisfaz 3 e 5.

Se $a+1 = b-1$, então \mathcal{P} satisfaz 1 trivialmente. O item 2 é satisfeito pois, por 3, se A precede K_{b-1} , temos que $A \setminus \Delta K_{b-1}$ é conexo, e como consideramos todos os intervalos com extremos distintos, temos $\Delta K_{b-1} \not\subseteq A$. Finalmente, 4 é satisfeito pois, por 5, $\Delta K_a \not\subseteq A$ e porque A não pode conter K_b , pela escolha de \mathcal{K} . Notamos que esses argumentos valem também se $|\mathcal{K}| = 2$. Supomos então que K_{a+1} e K_{b-1} são distintos, o que implica $n \geq 3$, pois $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} \neq \mathcal{K}$. Por 3, temos que K_{a+1} precede K_{b-1} . Definimos $\mathcal{P}'' = (J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_l})$ uma subsequência de \mathcal{P} tal que $A \in \mathcal{P}''$ se e somente se, em \mathcal{P} :

- (a) K_{b-1} precede A e $A \not\subseteq \Delta K_{b-1}$, ou
- (b) A precede K_{b-1} e $K_{b-1} \cap K_b \subseteq A$.

Temos que $K_{a+1} \notin \mathcal{P}''$, pois $K_{b-1} \cap K_b \not\subseteq K_{a+1}$, pela escolha de \mathcal{K} . Analogamente ao que foi feito anteriormente, definimos $L' = \{i \mid J_i \in \mathcal{P} \text{ e } J_i \text{ satisfaz (a)}\}$ e $R' = \{i \mid J_i \in \mathcal{P} \text{ e } J_i \text{ satisfaz (b)}\}$. Temos novamente que se $A \notin \mathcal{P}''$, então A satisfaz 2 e 4. Seja $\gamma' \in \mathbb{N}$ tal que $K_{b-1} = J_{\gamma'}$ e $\alpha' = \min \{\{\gamma'\} \cup L' \cup R'\}$. Notamos que $\gamma < \alpha'$. Isso implica que K_{a+1} precede todos os arcos que pertencem a \mathcal{P}'' e assim, argumentando exatamente como foi feito no caso de K_{b-1} e \mathcal{P}' , a ordem relativa entre os arcos de \mathcal{P} em relação a K_{a+1} não mudará. Com isso temos uma ordem \mathcal{P}^* de \mathcal{P} que satisfaz as condições do lema. \blacksquare

Teorema 3.5. [3, 18] Se G é arco-circular, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Supomos que G não é de intervalo e consideramos \mathcal{F} um conjunto de arcos de um círculo C tal que $G = \Omega(\mathcal{F})$. Tomamos uma cobertura \mathcal{K} do círculo conforme descrita anteriormente.

Se $|\mathcal{K}| = 1$, então toda cadeia mais longa de \mathcal{F} possui o arco K_0 .

Seja \mathcal{P} uma cadeia mais longa tal que $|\mathcal{P} \cap \mathcal{K}|$ seja menor possível. Podemos assumir que $n \geq 2$ e que $|\mathcal{P} \cap \mathcal{K}| < n$. Pelo Lema 3.5, temos que $\mathcal{P} \cap \mathcal{K} = \{K_{a+1}, \dots, K_{b-1}\}$. Vamos provar que toda cadeia mais longa de \mathcal{F} contém K_{b-1} .

Suponha por absurdo que existe uma cadeia mais longa \mathcal{Q} em G tal que $K_{b-1} \notin \mathcal{Q}$. Seja $\mathcal{Q} \cap \mathcal{K} = \{K_{l+1}, \dots, K_{m-1}\}$. Temos que $K_{b-1} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$, $K_{l+1} \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{P}$ pois $|\mathcal{Q} \cap \mathcal{K}| \geq |\mathcal{P} \cap \mathcal{K}|$ e os índices são contíguos. Além disso, $K_b, \dots, K_l \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Seja \mathcal{R} a cadeia formada por (K_b, \dots, K_l) . Reordenamos as cadeias \mathcal{P} e \mathcal{Q} tal que \mathcal{P}^* e \mathcal{Q}^* satisfazem o Lema 3.7. Seja $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1 K_{b-1} \mathcal{P}_2$ e $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}_1 K_{l+1} \mathcal{Q}_2$. Pelo Lema 3.7 temos que:

- (i) Se $A \in \mathcal{P}_1$, então $\Delta K_{b-1} \not\subseteq A$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{P}_2$, então $A \subseteq K_{b-1} \cup K_b$ e $A \setminus \Delta K_b$ é conexo;
- (iii) Se $A \in \mathcal{Q}_1$, então $A \subseteq K_l \cup K_{l+1}$ e $A \setminus \Delta K_{l+1}$ é conexo;

(iv) Se $A \in \mathcal{Q}_2$, então $\Delta K_l \not\subseteq A$.

Consideramos duas novas cadeias obtidas a partir de \mathcal{P}^* e \mathcal{Q}^* . Sejam $\mathcal{C}_1 = \mathcal{P}_1 K_{b-1} \mathcal{R} K_{l+1} \mathcal{Q}_1^{-1}$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{P}_2^{-1} K_{b-1} \mathcal{R} K_{l+1} \mathcal{Q}_2$.

Lema 3.11. \mathcal{C}_1 é uma cadeia.

Prova. É suficiente provar que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}_1 = \emptyset$. Suponha por absurdo que existe $A \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}_1$. Se $n = 2$, então $\mathcal{K} = \{K_{b-1}, K_{l+1}\}$. Como $A \in \mathcal{Q}_1$, temos que A precede K_{l+1} e, com isso, por (iii), $A \setminus \Delta K_{l+1}$ é conexo. Como $A \in \mathcal{P}_1$, temos que A precede K_{b-1} e, por (i), $\Delta K_{b-1} \not\subseteq A$.

Então, ou $A \subseteq K_{l+1}$ ou $A \subseteq K_{b-1}$. Como $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, temos que $Supp(\mathcal{P}) \cap A \neq \emptyset$ e $Supp(\mathcal{Q}) \cap A \neq \emptyset$. Logo, ou $K_{b-1} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ ou $K_{l+1} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, um absurdo.

Agora consideramos o caso em que $n \geq 3$. Como $A \in \mathcal{Q}_1$, por (iii), temos que $A \subseteq K_l \cup K_{l+1}$. Como $A \in \mathcal{Q}$, temos que $A \cap Supp(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$ e, com isso, $A \cap (K_{l+1} \setminus K_l) \neq \emptyset$. Temos então que $r(K_l)$, $r(A)$ e $r(K_{l+1})$ são pontos consecutivos em C . Por (i), temos que $\Delta K_{b-1} \not\subseteq A$, ou seja, $K_{b-1} \cap K_b \not\subseteq A$. Isso implica que $b \neq l + 1$ e, com isso, $\mathcal{R} \neq \emptyset$.

Logo, $K_l \notin \mathcal{P}$. Como $A \in \mathcal{P}$, temos que $A \cap Supp(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, logo, $Supp(\mathcal{P}) \cap (K_l \cup K_{l+1}) \neq \emptyset$, o que implica que \mathcal{P} contém K_l ou K_{l+1} , um absurdo. ■

Lema 3.12. \mathcal{C}_2 é uma cadeia.

A prova de que \mathcal{C}_2 também é cadeia é análoga a essa, mas usando os itens (ii) e (iv), no lugar de (i) e (iii). Com isso, concluímos que $|\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| \geq |\mathcal{P}| + |\mathcal{Q}| + 2$. Isso implica que $|\mathcal{C}_1| > |\mathcal{P}|$ ou $|\mathcal{C}_2| > |\mathcal{P}|$, um absurdo. ■

3.5 Grafos com $\alpha'(G) \leq 3$

O problema da interseção dos caminhos mais longos para grafos tais que $\alpha'(G) \leq 3$ foi resolvido em 2015, por Chen [6], resultado que será apresentado nesta seção. A pergunta para esta classe específica de grafos foi motivada pela observação de que o grafo de Walther, Voss e Zamfirescu (Figura 2.3) obtido a partir do grafo de Petersen possui um emparelhamento de tamanho seis. A pergunta que surge a partir desta observação é se $lpt(G) = 1$ para todo grafo tal que $\alpha'(G) \leq 5$. Os casos em que $4 \leq \alpha'(G) \leq 5$ ainda permanecem em aberto.

Teorema 3.6. [6] Se G é tal que $\alpha'(G) \leq 3$, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Se G não possui ciclos, então G é uma árvore e já sabemos que $lpt(G) = 1$. Suponha então que $C = v_1 v_2 \dots v_r$ seja um ciclo em G . Se C é hamiltoniano, então $lpt(G) = 1$. Como $\alpha'(G) \leq 3$, temos que $r \leq 7$. Seja $P = x_1 x_2 \dots x_s$ um caminho mais longo de G . Como $\alpha'(G) \leq 3$, então $s \leq 7$. Como C não é um ciclo hamiltoniano e G é conexo, temos que $s > r$.

Afirmação 3.1. $|V(P) \cap V(C)| \geq 1$.

Prova. Suponha por absurdo que $V(P) \cap V(C) = \emptyset$. Se $s \geq 6$, então $x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6, v_1v_2$ é um emparelhamento de tamanho quatro em G , um absurdo. Logo, $s \leq 5$. Como $s > r$, temos que $r \leq 4$. Se $r = 4$, então $v_1v_2, v_3v_4, x_1x_2, x_3x_4$ é emparelhamento em G . Assim, temos que $r = 3$. Como G é conexo, existe caminho conectando um vértice de P e um vértice de C . Logo, podemos construir um novo caminho, contendo todos os vértices de C e pelo menos três vértices de P , sendo, portanto, maior que P , um absurdo. ■

Como $3 \leq s \leq 7$ e $s > r$, temos que $r \leq 6$. Trataremos a seguir, separadamente, cada um dos casos $r = 3, 4, 5, 6$. Os casos $r = 3, 4, 5$ possuem estrutura semelhante. Primeiro prova-se um lema sobre o tamanho da interseção de um caminho mais longo qualquer Q com o ciclo C . Depois, provamos que todo vértice $v \in V(C) \setminus V(Q)$ é tal que $g(v) = 2$. O fato de que todos os caminhos mais longos se intersectam em cada caso decorre de uma aplicação direta desses dois resultados.

Caso 1: $r = 3$.

Lema 3.13. Se Q é um caminho mais longo de G , então $|V(Q) \cap V(C)| = 1$ ou $|V(Q) \cap V(C)| = 3$.

Prova. Já sabemos que $|V(Q) \cap V(C)| \geq 1$. Suponha que $|V(Q) \cap V(C)| = 2$. Supomos, s.p.g., que $v_1, v_2 \in V(Q)$. Se $v_1v_2 \in E(Q)$, podemos aumentar Q substituindo a aresta v_1v_2 pelo segmento $v_1v_3v_2$. Se $v_1v_2 \notin E(Q)$, então $v_1v_3 \cdot Q_{v_2v_1}$ é um ciclo mais longo que C em G , um absurdo. ■

Lema 3.14. Se existe caminho mais longo $Q = y_1y_2 \dots y_s$ tal que $|V(Q) \cap V(C)| = 1$, então, para todo $v \in V(C) \setminus V(Q)$, $g(v) = 2$.

Prova. Como $\alpha'(G) \leq 3$, temos que $s \leq 5$, caso contrário, y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6 e uma aresta de C formariam um emparelhamento de tamanho quatro em G . Podemos obter um caminho contendo todos os vértices de C e pelo menos metade dos vértices de P . Se $s \leq 4$, este caminho seria mais longo que Q . Logo, $s = 5$. Como Q é mais longo, temos que $V(Q) \cap V(C) = \{y_3\}$ e supomos, s.p.g., que $v_1 = y_3$. Para cada $v \in \{v_2, v_3\}$, temos que:

1. $vy_j \notin E(G)$ se $j \neq 3$, pois nesse caso teríamos um ciclo de tamanho maior que C em G .
2. $vz \notin E(G) \forall z \in V(G) \setminus (V(Q) \cup V(C))$, pois neste caso, se $v = v_3$, então $y_1y_2y_3v_2v_3z$ é um caminho mais longo que Q em G . Analogamente, se $v = v_2$, temos o caminho $y_1y_2y_3v_3v_2z$.

Logo, $g(v) = 2$. ■

Se G possui um caminho mais longo que contém apenas um dos vértices do ciclo, por exemplo, v_1 , temos que qualquer outro caminho que contenha v_2 ou v_3 também deverá conter v_1 , pois $g(v_2) = g(v_3) = 1$. Assim concluímos que v_1 está em todo caminho mais longo de G .

Caso 2: $r = 4$.

Lema 3.15. Se Q é um caminho mais longo de G , então $|V(Q) \cap V(C)| \geq 2$.

Prova. Suponha que exista um caminho mais longo $Q = y_1y_2 \dots y_s$ de G tal que $|V(Q) \cap V(C)| = 1$. Suponha que $V(Q) \cap V(C) = \{v_1\}$. Se $s \geq 6$, então y_1y_2, y_3y_4, y_5y_6 e v_2v_3 é um emparelhamento de tamanho quatro em G . Se $s \leq 5$, podemos obter um caminho contendo os quatro vértices de C e pelo menos três vértices de Q , um absurdo. ■

Lema 3.16. Para quaisquer dois caminhos mais longos Q e Q' de G tais que $|V(Q) \cap V(C)| = |V(Q') \cap V(C)| = 2$, temos $V(Q) \cap V(C) = V(Q') \cap V(C) = \{v_i, v_{i+2}\}$, com $i \in \{1, 2\}$.

Prova. O caminho Q não pode conter dois vértices consecutivos de C . Caso contrário, suponha sem perda de generalidade que $v_1, v_2 \in V(Q)$. Se $v_1v_2 \in E(Q)$, então substituímos esta aresta em Q pelo segmento $v_1v_4v_3v_2$, um absurdo. Se $v_1v_2 \notin E(Q)$, então temos um ciclo mais longo que C em G . Assim, $V(Q) \cap V(C) = \{v_1, v_3\}$ ou $V(Q) \cap V(C) = \{v_2, v_4\}$.

Suponha por absurdo que $V(Q) \cap V(C) = \{v_1, v_3\}$ e $V(Q') \cap V(C) = \{v_2, v_4\}$. A aresta $v_1v_3 \notin E(Q)$, caso contrário poderíamos substituir a aresta v_1v_3 pelo segmento $v_1v_2v_3$ em Q . O mesmo vale para a aresta v_2v_4 em Q' . Como o tamanho do maior ciclo de G é quatro, temos que $v_1w_1v_3$ é segmento de Q e $v_2w_2v_4$ é segmento de Q' , onde $w_1, w_2 \notin V(C)$. Se $w_1 = w_2$, então $v_1w_1v_2v_3v_4$ é um ciclo mais longo que C em G . Se $w_1 \neq w_2$, então $v_1w_1v_3v_4w_2v_2v_1$ é um ciclo maior que C em G . ■

Lema 3.17. Se existe caminho mais longo Q tal que $|V(Q) \cap V(C)| \leq 3$, então para todo $v \in V(C) \setminus V(Q)$, temos que $g(v) = 2$.

Prova. Sabemos que $|V(Q) \cap V(C)| \geq 2$. Tanto no caso em que $|V(Q) \cap V(C)| = 2$ quanto quando $|V(Q) \cap V(C)| = 3$, temos que se $v_i \notin V(Q)$, então $v_{i-1}, v_{i+1} \in V(Q)$. Como o tamanho do maior ciclo de G é quatro, temos que $v_{i-1}b_iv_{i+1}$, é um segmento de Q em G , onde b_i pode ser um vértice de C no caso em que $|V(Q) \cap V(C)| = 3$. Além disso, neste caso, temos que v_{i-1} e v_{i+1} não são vértices terminais de Q , pois caso contrário poderíamos adicionar v_i em Q . Supomos que $v_{i-1} = y_k$ e $v_{i+1} = y_j$, $0 < k < j < s$. Então, para cada $v = v_i \in V(C) \setminus V(Q)$, temos:

1. $v_i b_i \notin E(G)$. Caso contrário, se $v_i b_i \in E(G)$, podemos acrescentar v_i em Q , entre os vértices v_{i-1} e b_i .
2. v_i não é adjacente a nenhum vértice de Q diferente de v_{i-1} e v_{i+1} , pois nesse caso teríamos um ciclo de tamanho maior que quatro em G .
3. $v_i z \notin E(G)$, para todo $z \in V(G) \setminus (V(C) \cup V(Q))$. Suponha por absurdo que $v_i z \in E(G)$. Sabemos que $|V(Q)| \geq 5$. Se $|V(Q)| \geq 6$, então $y_1 y_2, y_3 y_4, y_5 y_6$ e $v_i z$ formam um emparelhamento de tamanho quatro em G . Logo, $|V(Q)| = 5$. Assim, $z v_i v_{i-1} b_i v_{i+1} y_{j+1}$ é um caminho de tamanho pelo menos seis em G , um absurdo.

Logo, $g(v_i) = 2$. ■

Então, se existe caminho mais longo Q tal que $|V(Q) \cap V(C)| = 2$, suponha que $V(Q) \cap V(C) = \{v_1, v_3\}$. Como nesse caso temos que $g(v_2) = g(v_4) = 2$, qualquer outro caminho que contenha um deles, também conterá v_1 e v_3 . Se todo caminho mais longo que não contém todos os vértices de C é tal que $|V(Q) \cap V(C)| = 3$, então suponha que $v_1, v_2, v_3 \in V(Q)$, para algum Q . Nesse caso temos que $g(v_4) = 2$. Logo, todo caminho que contém v_4 também conterá v_1 e v_3 . Em ambos os casos temos que v_1 e v_3 estão em todo caminho mais longo de G .

Caso 3: $r = 5$.

Lema 3.18. Se Q é um caminho mais longo de G , então $|V(Q) \cap V(C)| \geq 3$.

Prova. Suponha por absurdo que exista caminho mais longo Q tal que $|V(Q) \cap V(C)| \leq 2$. Sabemos que $|V(Q)| \geq 6$. Então $y_1 y_2, y_3 y_4, y_5 y_6$ e uma aresta do ciclo formam um emparelhamento de tamanho quatro em G , um absurdo. ■

Lema 3.19. Se existe caminho mais longo Q de G tal que $|V(Q) \cap V(C)| \leq 4$, então para todo $v \in V(C) \setminus V(Q)$, temos que $g(v) = 2$.

Prova. Como $r = 5$, temos que pelo menos dois vértices de $V(Q) \cap V(C)$ são adjacentes em C . Supomos, sem perda de generalidade, que $v_1 v_2 \in E(Q)$. Se $|V(Q) \cap V(C)| = 3$, então $v_4 \in V(Q)$. Caso contrário, $y_1 y_2, y_3 y_4, y_5 y_6$ e $v_3 v_4$ (ou $v_4 v_5$) seria um emparelhamento de tamanho quatro em G . Se $|V(Q) \cap V(C)| = 4$, então exatamente um vértice de C não pertence a Q . Em ambos os casos, temos novamente que se $v_i \in V(C) \setminus V(Q)$, então $v_{i-1}, v_{i+1} \in V(Q)$. Supomos que $v_{i-1} = y_k$ e $v_{i+1} = y_j$ e temos que:

1. $v_i b_i \notin E(G)$ se $v_{i-1} b_i v_{i+1}$ é segmento de Q e $v_i b_{ij} \notin E(G)$ se $v_{i-1} b_{i1} b_{i2} v_{i+1}$ é segmento de Q .
2. v_i não é adjacente a y_{k-1} e y_{j+1} , pois neste caso seria possível adicionar v_i a Q .

3. v_i não é adjacente a nenhum outro vértice do caminho pois nesse caso teríamos um ciclo de tamanho pelo menos seis em G .
4. $v_i z \notin E(G)$ para todo $z \in V(G) \setminus (V(Q) \cup V(C))$, caso contrário, $y_1 y_2$, $y_3 y_4$, $y_5 y_6$ e $v_i z$ seria um emparelhamento de tamanho quatro em G .

Logo, $g(v_i) = 2$. ■

Assim, se existe caminho Q tal que $|V(Q) \cap V(C)| = 3$, supomos que $V(Q) \cap V(C) = \{v_1, v_2, v_4\}$, e temos que $g(v_3) = g(v_5) = 2$. Logo, todo caminho que contém v_3 ou v_5 também contém v_2 , que pertenceria a todo caminho mais longo de G . Se todo caminho que não contém todos os vértices de C são tais que $|V(Q) \cap V(C)| = 4$, então $g(v_5) = 2$ e todo caminho que contém v_5 também contém v_1 e v_4 que, neste caso, estão em todo caminho mais longo de G .

Caso 4: $r = 6$.

Como temos um ciclo C de tamanho 6 em G , vale que $R = V(G) \setminus V(C)$ é um conjunto independente, senão teríamos um emparelhamento de tamanho quatro em G . Temos também que $s = 7$. Seja $x \in R$. Supomos, sem perda de generalidade, que $xv_1 \in E(G)$. Nesse caso, temos que $xv_2 \notin E(G)$ e $xv_6 \notin E(G)$, caso contrário seria possível aumentar o ciclo C com a inclusão de x . Se $xv_4 \in E(G)$, então $R = \{x\}$, pois caso contrário teríamos um emparelhamento de tamanho quatro em G . Se $|R| = 1$, o grafo teria apenas sete vértices e seria hamiltoniano, logo teríamos trivialmente que $lpt(G) = 1$. Portanto, supomos que $xv_4 \notin E(G)$ e que $|R| \geq 2$. Seja $y \neq x$ tal que $y \in R$. Se $yv_2 \in E(G)$, $yv_4 \in E(G)$ ou $yv_6 \in E(G)$, então temos um emparelhamento de tamanho quatro em G . Logo, $N_C(R) = \{v_1, v_3, v_5\}$ e $v_1 \in R$. Como o tamanho de um caminho mais longo de G é sete, o tamanho de um caminho mais longo de $G \setminus \{v_1\}$ é no máximo cinco e R é um conjunto independente, temos que v_1 pertence a todo caminho mais longo de G . ■

3.6 Limites superiores para $lpt(G)$

Em [3], Balister et al. concluem seu artigo com a observação de que usando a propriedade Helly para subárvores de uma árvore, é possível provar que todo grafo cordal possui uma clique K tal que todo caminho mais longo do grafo possui ao menos um vértice em K , ou seja, que se G é cordal, então $lpt(G) \leq \omega(G)$. Mais tarde, em [25], Rautenbach e Sereni forneceram limites superiores para este parâmetro em grafos planares, grafos com treewidth limitado e também um limite para grafos em geral. Nesta seção, apresentaremos esses resultados sobre limites superiores para $lpt(G)$ em classes de grafos.

Uma *decomposição em árvore* para G é uma árvore T , cujos vértices X_1, X_2, \dots, X_k representam subconjuntos de $V(G)$ tais que:

1. para cada $u \in V(G)$ existe i tal que $u \in X_i$;
2. para cada $uv \in E(G)$ existe i tal que $u \in X_i$ e $v \in X_i$;
3. para cada $u \in V(G)$ o conjunto $T_u = \cup\{X_i \mid u \in X_i\}$ é uma subárvore de T .

A *largura de uma decomposição de G* é dada por $\max_i\{|X_i|\} - 1$. O *treewidth* de G , denotado por $tw(G)$, é a largura da decomposição de largura mínima para um grafo G . Denotamos o treewidth de G por $tw(G)$.

Teorema 3.7. [25] Se G tem treewidth k , então $lpt(G) \leq tw(G) + 1$.

Prova. Seja G um grafo tal que $tw(G) = k$ e seja T uma árvore da decomposição de G de largura k . A cada vértice $v \in V(G)$ temos a subárvore $T_v = \cup\{X_i \mid v \in X_i\}$ associada. E, a cada caminho mais longo P de G , associamos a subárvore definida por $T_P = \cup\{T_v \mid v \in P\}$. Sejam P_1, P_2, \dots, P_k os caminhos mais longos de G . Como cada dois deles têm interseção não vazia, temos que as subárvores $T_{P_1}, T_{P_2}, \dots, T_{P_k}$ também têm, duas a duas, interseção não vazia. Logo existe um vértice X_j em T que pertence a todas essas subárvores. Este vértice corresponde a um conjunto de vértices em G tal que todo caminho mais longo intersecta. Como $tw(G) = k$, temos que $|X_j| \leq k + 1$. ■

Com exatamente a mesma ideia, podemos provar um resultado análogo para grafos cordais. Uma *árvore característica* de um grafo cordal é uma árvore T , cujos vértices X_1, X_2, \dots, X_k representam as cliques maximais de G e tal que, para todo $u \in V(G)$ o conjunto $T_u = \cup\{X_i \mid u \in X_i\}$ é uma subárvore de T .

Teorema 3.8. [3] Se G é um grafo cordal, então $lpt(G) \leq \omega(G)$ e existe uma clique tal que todo caminho mais longo intersecta.

Já vimos pelo grafo de Schmitz na Figura 2.4 que $lpt(G) > 1$ na classe dos grafos planares. Em [25], Rautenbach e Sereni apresentaram um limite superior para este parâmetro em grafos planares, que usa como ferramenta o conhecido teorema de Lipton e Tarjan sobre separadores balanceados nesta classe, que será enunciado a seguir.

Teorema 3.9. [22] Se G é um grafo planar, então $V(G)$ pode ser particionado em três conjuntos A , B e C de maneira que nenhuma aresta com um extremo em A possua um extremo em B , $|A| \leq \frac{2}{3}n$, $|B| \leq \frac{2}{3}n$ e $|C| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$.

Teorema 3.10. [25] Se G é planar, então $lpt(G) \leq 9\sqrt{n} \log(n)$.

Prova. Por indução em n . Se G é um grafo planar com dois vértices, o resultado segue imediatamente. Seja G um grafo planar com n vértices, onde $n \geq 3$, e seja l o tamanho do caminho mais longo de G . Pelo Teorema 3.9, existe $X \subseteq V(G)$ tal que $|X| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n}$ e tal que toda componente conexa de $G \setminus X$ tem tamanho no máximo $\frac{2}{3}n$. Se todo caminho possui um vértice em X , o teorema está provado. Caso contrário, existe um caminho mais longo inteiramente contido em uma das componentes conexas de $G \setminus X$. Nesse caso, todos os caminhos mais longos que não intersectam X estão contidos em uma mesma componente, pois quaisquer dois desses caminhos possuem um vértice em comum. Seja Y o conjunto de vértices desta componente conexa. Pela hipótese de indução, Y possui um subconjunto Y' de tamanho no máximo $9\sqrt{\frac{2}{3}n} \log(\frac{2}{3}n)$ tal que todo caminho mais longo inteiramente contido em $G[Y]$ possui ao menos um vértice em Y' . Assim, $X \cup Y'$ é um conjunto que todo caminho mais longo de G intersecta, de tamanho $|X \cup Y'| \leq 2\sqrt{2}\sqrt{n} + 9\sqrt{\frac{2}{3}n} \log(\frac{2}{3}n) \leq 9\sqrt{n} \log(n)$. ■

Capítulo 4

Resultados para todos os caminhos mais longos em classes de grafos

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos ao longo deste trabalho. Nossa principal contribuição foi a de determinar novas classes de grafos que respondem positivamente à pergunta de Gallai. Na Seção 4.1, consideramos uma subclasse dos grafos bipartidos que inclui os grafos cadeia. Nesta mesma seção, também consideramos grafos obtidos através da operação de join de dois outros grafos. Nas seções 4.2 e 4.3, consideramos as classes dos grafos estrelados, P_4 -esparsos, $(2K_2, C_4)$ -free, grafos de interseção de subárvores de uma estrela estendida e grafos ptolemaicos. Na Seção 4.4, consideramos a classe dos grafos $(P_5, K_{1,3})$ -free e fornecemos limites superiores para $lpt(G)$ nas classes $(P_5, \text{criquet})$ -free e $2K_2$ -free. Finalmente, na seção 4.5 são abordados os grafos em que todo componente biconexo é split, de intervalo ou possui um vértice universal. Parte dos resultados apresentados neste capítulo foi apresentada no *14th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, que aconteceu entre os dias 6 e 8 de junho de 2016 na Itália, no trabalho *Intersection of Longest Paths in Graph Classes*.

4.1 Grafos cadeia e join de dois grafos

Já vimos, através do grafo de Schmitz (Figura 2.4), que não é verdade que todo grafo bipartido possui um vértice que pertence a todos os seus caminhos mais longos. No entanto, algumas subclasses dos grafos bipartidos satisfazem essa propriedade.

Uma questão que permanece em aberto é caracterizar os grafos bipartidos G com $lpt(G) = 1$. Nesse sentido, mostramos aqui uma subclasse dos grafos bipartidos que satisfaz essa propriedade.

Teorema 4.1. Se $G = (X, Y, E)$ é um grafo bipartido com $|Y| \leq |X|$ e existe $v \in Y$ tal que $g(v) = |X|$, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Suponha por absurdo que exista um caminho mais longo P de G que não contenha v . Como v é adjacente a todos os vértices de X , o caminho P deve ter ambos os extremos em Y pois caso contrário seria possível incluir v em uma das extremidades de P . Logo $|V(P) \cap X| < |V(P) \cap Y|$. Mas como $|X| \geq |Y|$, existe $u \in X$ tal que $u \notin V(P)$. Seja $P = p_1 p_2 \cdots p_k$. Podemos então aumentar P substituindo a aresta $p_{k-1} p_k$ pelo segmento $p_{k-1} v u$. ■

Um conjunto de vértices $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ possui a *propriedade da vizinhança aninhada* se existe uma ordem dos seus vértices tal que $N(x_{i_1}) \subseteq N(x_{i_2}) \subseteq \dots \subseteq N(x_{i_k})$. Um grafo bipartido $G = (X, Y, E)$ é *cadeia* se uma das partes da bipartição possui a propriedade da vizinhança aninhada. Os grafos cadeia formam uma subclasse dos grafos bipartidos que satisfaz às condições do Teorema 4.1.

Corolário 4.1. Se G é cadeia, então $lpt(G) = 1$.

Ainda seguindo uma ideia análoga à da prova apresentada acima, podemos provar que se um grafo G é join de dois grafos, então $lpt(G) = 1$. O *join* de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ é o grafo $G = G_1 \times G_2$ com conjunto de vértices $V(G) = V_1 \cup V_2$ e de arestas $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.

Teorema 4.2. Se G é join de dois grafos, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ tais que $G = G_1 \times G_2$. Supomos, sem perda de generalidade, que $|V_1| \leq |V_2|$. Seja $v \in V_1$. Suponha por absurdo que existe um caminho mais longo P que não passa por v . Se P tem extremos em V_2 então poderíamos incluir v ao final do caminho, obtendo um caminho mais longo que P . Se P tem dois vértices consecutivos em V_2 , então poderíamos incluir v entre esses dois vértices. Então temos que $|V(P) \cap V_2| < |V(P) \cap V_1|$. Mas como $|V_1| \leq |V_2|$, temos que $|V(P) \cap V_2| < |V_2|$, o que implica que existe um vértice $u \in V_2$ tal que $u \notin V(P)$. Então podemos adicionar uv a um dos extremos de P . ■

4.2 Grafos tipo split

Um grafo é *split* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente [13]. Esta classe de grafos possui várias caracterizações, em particular, como grafos de interseção de subestrelas distintas de uma estrela e como grafos $(2K_2, C_4, C_5)$ -free. Klavžar e Petkovšek [21] provaram que, se G é um grafo split, então $lpt(G) = 1$. Provaremos a seguir a generalização deste resultado com uma partição especial do conjunto de vértices do grafo, o que leva ao resultado para grafos estrelados, P_4 -esparsos e $(2K_2, C_4)$ -free.

Teorema 4.3. Seja G um grafo que pode ter seu conjunto de vértices particionado em $k + 1$ conjuntos K, V_1, \dots, V_k de forma que:

1. K é uma clique;
2. Para todo $x \in V_i$ e $y \in V_j$ com $i \neq j$ temos $xy \notin E(G)$;
3. Para todo V_i , existe uma ordem dos seus vértices $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i|V_i|}$ tal que, para todo $x \in K$, se $xv_{ij} \in E(G)$, então $xv_{ik} \in E(G)$ para todo $k < j$;
4. Para todo $x \notin K$, existe $y \in K$ tal que $xy \in E(G)$.

Então $lpt(G) = 1$.

Prova. Seja G um grafo tal como descrito acima e seja t_i o tamanho de um caminho mais longo no grafo $G[V_i]$. Supomos sem perda de generalidade que $t_1 \geq t_i$, para todo i . Iremos mostrar que todo vértice pertencente a $N(v_{1|V_1|}) \cap K$ está em todo caminho mais longo de G . Este conjunto possui ao menos um vértice, pois pelo item 4, todo vértice de V_1 possui ao menos um vizinho em K .

Suponha por absurdo que exista um caminho mais longo P que não contém um vértice $v \in N(v_{1|V_1|}) \cap K$. Pelo item 3, temos que v é adjacente a todo vértice de V_1 . Então temos que:

- (a) P não pode estar inteiramente contido em V_1 , pois nesse caso existiria uma aresta $xy \in E(P)$, com $x \in V_1$ e $y \in V_1$ e nesse caso v poderia ser acrescentado entre x e y em P .
- (b) P não possui extremos e nem dois vértices consecutivos em K .
- (c) P não possui nenhum vértice em V_1 , pois como não pode estar inteiramente contido em V_1 , conteria uma aresta xy tal que $x \in N(V_1)$ e $y \in V_1$, e nesse caso poderíamos incluir v entre x e y no caminho.

Logo, seja $P = p_1p_2 \dots p_l$. Suponha que $p_1 \in V_i$, $i \neq 1$, e seja p_i o menor i tal que $p_i \in V_i$ e $p_{i+1} \notin V_i$. Neste caso temos que $p_{i+1} \in N(V_i)$. Podemos substituir, em P , o segmento $p_1p_2 \dots p_i$ por um caminho formado por todos os vértices de $N(v_{1|V_1|}) \cap K$ que ainda não estão em P mais um caminho de tamanho t_1 que contém apenas vértices de V_1 . Notamos que, como o caminho $p_1p_2 \dots p_i$ está contido em V_i , ele possui tamanho no máximo t_i . Assim, temos que o caminho obtido tem tamanho maior que o de P pois $t_1 \geq t_i$ e existe pelo menos um vértice de $N(v_{1|V_1|}) \cap K$ que não está em P por hipótese. ■

A classe do enunciado acima inclui a dos grafos *split*, que é o caso em que todos os conjuntos V_i são unitários. A seguir usaremos o teorema acima para resolver o problema da interseção dos caminhos mais longos para outras classes de grafos.

Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ e $v \in V_1$, o grafo obtido pela *substituição de v por G_2* é o grafo $G = G_1(v \rightarrow G_2)$, com conjunto de vértices

$V(G) = V_1 \setminus \{v\} \cup V_2$ e conjunto de arestas $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \{xy \mid x \in N(v), y \in V_2\}$. Dado um conjunto independente $\{x_1, \dots, x_k\}$ de vértices de um grafo G e os grafos H_1, \dots, H_k , vamos denotar por $G(x_1, \dots, x_k \rightarrow H_1, \dots, H_k)$ o grafo obtido pela substituição do vértice x_i por H_i em G , para $1 \leq i \leq k$.

Teorema 4.4. Seja $H = (K, S, E)$ um grafo *split* com conjunto independente $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ e sejam $H_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq k$, grafos quaisquer. Se $G = H(s_1, \dots, s_k \rightarrow H_1, \dots, H_k)$, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Da definição de operação de substituição temos que a partição (K, V_1, \dots, V_k) satisfaz as condições apresentadas no Teorema 4.3. ■

Um grafo é *estrelado* se é o grafo de interseção de subárvores de uma estrela [5]. Todo grafo estrelado é, portanto, cordal, uma vez que os grafos cordais são os grafos de interseção de subárvores de uma árvore. Os grafos split formam uma subclasse dos grafos estrelados, pois no modelo de interseção dos grafos estrelados não há a restrição de que as subárvores precisam ser distintas. Se G é um grafo estrelado, então ele pode ser obtido a partir de um grafo split através da operação de substituição acima descrita, quando os grafos H_1, \dots, H_k são grafos completos. Para ver isso, consideramos o modelo de interseção $\mathcal{T} = \{T_v \mid T_v \subset S\}$ de G , onde S é uma estrela com centro no vértice v_0 e com k folhas f_1, \dots, f_k . Definimos $X_0 = \{v \in V(G) \mid v_0 \in T_v\}$ e $X_i = \{v \in V(G) \mid V(T_v) = \{f_i\}\}$. Consideramos então um grafo split $H = (K \cup S, E)$ onde $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, $K = X_0$ e $E = \{xy \mid x, y \in K\} \cup \{s_i x \mid s_i \in S, x \in K, f_i \in T_x \text{ em } \mathcal{T}\}$. Além disso, tomamos cada H_i como um grafo completo com $|X_i|$ vértices. Nesse caso, temos que $G = H(s_1, \dots, s_k \rightarrow H_1, \dots, H_k)$.

Corolário 4.2. Se G é um grafo estrelado, então $lpt(G) = 1$.

Uma outra classe de grafos que contém a classe dos grafos split são os grafos $(2K_2, C_4)$ -free. Maffray e Preissmann [23] deram uma caracterização para os grafos pertencentes a esta classe que permite obter uma resposta para o problema da interseção dos caminhos mais longos.

Teorema 4.5. [23] Um grafo é $(2K_2, C_4)$ -free se e somente se seu conjunto de vértices pode ser particionado em três conjuntos A, B, C de forma que $G[A]$ é uma clique, $G[B]$ é um conjunto independente e $G[C]$ é um C_5 , se C é não vazio. Além disso, todo vértice de A é adjacente a todo vértice de C e nenhum vértice de C é adjacente a vértices de B .

Vemos então que, se G é um grafo $(2K_2, C_4)$ -free com os conjuntos acima descritos (sendo C não vazio, pois caso contrário G seria também split), podemos considerar

o grafo split $H = (K \cup S, E)$, onde $K = A$, $S = B \cup \{v\}$ e $E(G) = \{xy \mid x, y \in K \text{ ou } x \in A, y \in B \text{ em } G\} \cup \{xv \mid x \in A\}$. Assim, $G = H(s_1, \dots, s_{|B|}, v \rightarrow H_1, \dots, H_{|B|+1})$, onde $H_1, \dots, H_{|B|}$ são grafos isomorfos ao K_1 e $H_{|B|+1}$ é isomorfo ao C_5 .

Corolário 4.3. Se G é um grafo $(2K_2, C_4)$ -free, então $lpt(G) = 1$.

Outra classe que consideraremos aqui é uma superclasse de cografos, a classe dos grafos P_4 -esparso. Um grafo é P_4 -esparso se todo subconjunto de tamanho cinco de $V(G)$ induz no máximo um P_4 [4]. Uma caracterização desta classe foi proposta por Jamison e Olariu [17] e utiliza a seguinte definição. Um grafo G é uma *aranha* se $V(G)$ pode ser particionado em três conjuntos S , K e R tais que:

1. $G[K \cup S]$ é split;
2. Todo vértice de R é adjacente a todo vértice de K ;
3. Existe uma bijeção $f : S \rightarrow K$ tal que para todo $x \in S$, $N(x) = \{f(x)\}$ ou $N(x) = K \setminus \{f(x)\}$.

Teorema 4.6. [17] Um grafo G é P_4 -esparso se e somente se, para todo subgrafo induzido H de G , exatamente uma das seguintes condições é satisfeita:

1. H é desconexo;
2. \overline{H} é desconexo;
3. H é isomorfo a um grafo aranha.

Assim, se G é um grafo P_4 -esparso conexo, temos que ou G é o join de dois grafos, ou G é uma aranha. Notando que o grafo aranha pode ser obtido a partir de substituição em um grafo split, concluímos o seguinte resultado para esta classe:

Corolário 4.4. Se G é um grafo P_4 -esparso, então $lpt(G) = 1$.

No Teorema 4.3, a função do item 4 do enunciado é garantir que nenhum caminho mais longo do grafo G possa estar inteiramente contido em um dos conjuntos da partição. Podemos substituir essa condição por outras e obter alguns resultados análogos.

Teorema 4.7. Seja G um grafo que pode ter seu conjunto de vértices particionado em $k + 1$ conjuntos K, V_1, \dots, V_k de forma que:

1. K é uma clique;
2. Para todo $x \in V_i$ e $y \in V_j$ com $i \neq j$ temos $xy \notin E(G)$;
3. Para todo V_i , existe uma ordem dos seus vértices $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i|V_i|}$ tal que para todo $x \in K$, se $xv_{ij} \in E(G)$, então $xv_{ik} \in E(G)$, para todo $k < j$;
4. $G[V_i]$ possui um ciclo hamiltoniano.

Então $lpt(G) = 1$.

Prova. A demonstração será análoga à do Teorema 4.3. O fato de $G[V_i]$ possuir um ciclo hamiltoniano e de $|N(V_i) \cap K| \geq 1$ (pois o grafo é conexo) garante que todos os caminhos mais longos possuem ao menos um vértice na clique K . Então, supomos sem perda de generalidade que $|V_1| \geq |V_i|$ para todo i e, exatamente como no Teorema 4.3, provamos que todos os vértices de $N(V_1) \cap K$ pertencem a qualquer caminho mais longo de G . ■

No entanto, se permitimos que alguns caminhos mais longos possam não intersecar a clique, podemos ainda obter, em alguns casos, um limite superior para $lpt(G)$ apenas uma unidade maior.

Teorema 4.8. Seja G um grafo que pode ter seu conjunto de vértices particionado em $k + 1$ conjuntos K, V_1, \dots, V_k de forma que:

1. K é uma clique;
2. Para todo $x \in V_i$ e $y \in V_j$ com $i \neq j$ temos $xy \notin E(G)$;
3. Para todo V_i , existe uma ordem dos seus vértices $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i|V_i|}$ tal que para todo $x \in K$, se $xv_{ij} \in E(G)$, então $xv_{ik} \in E(G)$, para todo $k < j$;
4. $G[V_i]$ tem um vértice que pertence a todos os seus caminhos mais longos.

Então $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Notamos que não é possível que existam dois caminhos mais longos P e Q tais que $V(P) \subseteq V_i$ e $V(Q) \subseteq V_j$ com $i \neq j$, pois sabemos que em todo grafo quaisquer dois caminhos mais longos possuem intersecção não vazia. Logo, se existe um caminho que está inteiramente contido em algum V_i , então todos os outros com essa propriedade estão contidos também no mesmo V_i e são também caminhos mais longos do grafo $G[V_i]$. Pelo item 4, existe um vértice $u \in V_i$ que pertence a estes caminhos.

Analogamente à prova do Teorema 4.3, definimos para cada V_i o número $a_i = \max\{j \mid \exists x \in K \text{ tal que } xv_{ij} \in E(G)\}$. Ou seja, dada a ordenação dos vértices definida pelo item 3, a_i é o maior índice de um vértice de V_i que ainda possui algum vizinho na clique. Além disso, definimos t_i como o tamanho do maior caminho do grafo $G[V_i]$ que possui ao menos um extremo em $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ia_i}\}$. Supomos sem perda de generalidade que $t_1 \geq t_i$ para todo i . Agora podemos mostrar, exatamente como na prova do Teorema 4.3, que todo caminho mais longo que possui ao menos um vértice da clique contém todos os vértices de $N(v_{1a_1}) \cap K$.

Desta forma, se tomamos um vértice $v \in N(v_{1a_1}) \cap K$, temos que todo caminho mais longo de G contém u ou v . ■

Este último caso inclui os grafos que são de interseção de subárvores de uma estrela estendida, isso é, de uma árvore que possui apenas um vértice de grau maior ou igual a três. Para ver isso, consideramos o modelo de interseção $\mathcal{T} = \{T_v \mid T_v \subseteq S\}$ de G , onde S é uma estrela estendida, tal que v_0 é o vértice de grau maior ou igual a três, v_1, \dots, v_k são os vizinhos de v_0 e f_1, \dots, f_k são as k folhas de S , de forma que existe um caminho entre v_i e f_i que não passa por v_0 . Denotamos por P_i este caminho. Definimos $X_0 = \{v \in V(G) \mid v_0 \in T_v\}$ e $X_i = \{v \in V(G) \mid V(T_v) \subseteq V(P_i)\}$. Logo, X_0 é uma clique e cada X_i induz um grafo de intervalo. Para cada X_i , $i \geq 1$, se tomamos os vértices na ordem em que seus extremos iniciais aparecem em P_i a partir de v_i , temos uma ordenação dos vértices de X_i satisfazendo a condição 3 do Teorema 4.8.

Corolário 4.5. Se G é um grafo de interseção de subárvores de uma estrela estendida, então $\text{lpt}(G) \leq 2$.

4.3 Grafos ptolemaicos

Um grafo é *ptolemaico* se para quaisquer quatro vértices u_i de G , $1 \leq i \leq 4$, as distâncias $d_{ij} = d_G(u_i, u_j)$ satisfazem a desigualdade $d_{12}d_{34} \leq d_{13}d_{24} + d_{14}d_{23}$, onde $d_G(u_i, u_j)$ representa o número de arestas em um caminho mínimo de G entre os vértices u_i e u_j . Nesta seção, mostramos que o conjunto de todos os caminhos mais longos de um grafo ptolemaico possui interseção não vazia. Para isso, utilizaremos a seguinte caracterização estrutural dos grafos ptolemaicos que foi dada por Howorka:

Teorema 4.9. [16] As seguintes condições são equivalentes:

1. G é ptolemaico.
2. G é gem-free e cordal.
3. G é distância-hereditário e cordal.
4. Para todo par de cliques maximais não-disjuntas Q e Q' de G , $Q \cap Q'$ separa $Q \setminus Q'$ e $Q' \setminus Q$.

Um *separador* é um subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $G[V(G) \setminus S]$ é desconexo. Um separador é *minimal* se não contém propriamente nenhum outro separador. Um *uv-separador* é um separador tal que u e v estão em componentes conexos distintos de $G[V(G) \setminus S]$. Um *separador minimal de vértices* de G é um *uv-separador* minimal para algum par de vértices $u, v \in V(G)$. Uma família de conjuntos $F = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ é *laminar* se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ implica $F_i \subseteq F_j$ ou $F_j \subseteq F_i$, para todo i, j . Em [29], Uehara e Uno mostraram que algumas famílias de separadores em grafos ptolemaicos possuem a propriedade laminar. Antes, precisaremos do seguinte fato conhecido sobre grafos cordais:

Lema 4.1. [13] Seja G um grafo cordal e S um separador minimal de G . Para cada componente conexo de $G \setminus S$, existe x tal que $S \subseteq N(x)$.

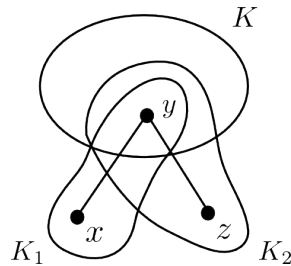
Teorema 4.10. [29] Seja G um grafo ptolemaico. Para toda clique maximal K de G , a família dos separadores minimais de vértices contidos em K é laminar.

Prova. Sejam L_1 e L_2 separadores de G contidos em uma clique maximal K . Suponha por absurdo que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, $L_1 \setminus L_2 \neq \emptyset$ e $L_2 \setminus L_1 \neq \emptyset$. Seja $v_1 \in L_1 \setminus L_2$ e $v_2 \in L_2 \setminus L_1$. Pelo teorema de Howorka, temos que G é cordal. Pelo Lema 4.1, existe vértice x_1 que não pertence a componente conexa que contém K , tal que $L_1 \subseteq N(x_1)$. Como L_1 separa x_1 de $K \setminus L_1$, temos que $x_1 v_2 \notin E(G)$. Analogamente, existe x_2 tal que $L_2 \subseteq N(x_2)$ e $x_2 v_1 \notin E(G)$. Seja K_1 uma clique maximal que contém L_1 e x_1 e K_2 uma clique maximal que contém L_2 e x_2 . Temos que $K_1 \cap K_2 = L_1 \cap L_2$. Como K é clique, temos que $v_1 v_2 \in E(G)$, o que é um absurdo pois, pelo Teorema 4.9, $K_1 \cap K_2$ separa $K_1 \setminus K_2$ de $K_2 \setminus K_1$. ■

Teorema 4.11. Se G é ptolemaico, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Como G é cordal, pelo Teorema 3.8, existe uma clique maximal K tal que todo caminho mais longo de G possui ao menos um vértice em K . Se um caminho mais longo possui dois vértices consecutivos na clique, então ele contém todos os vértices dessa clique. Vamos então considerar os caminhos que não possuem arestas na clique.

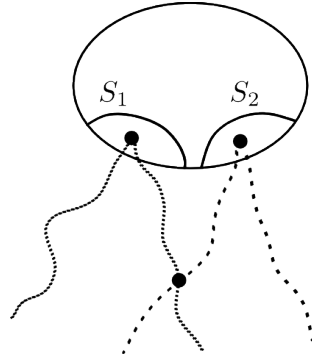
Seja P um caminho mais longo e $y \in V(P) \cap K$. Sejam x e z os dois vértices adjacentes a y em P . Seja K_1 a clique maximal que contém a aresta xy e tal que $|K_1 \cap K|$ seja máximo. Seja K_2 a clique maximal que contém a aresta yz e tal que $|K_2 \cap K|$ seja máximo. Definimos $S_1 = K_1 \cap K$ e $S_2 = K_2 \cap K$. Pelo Teorema 4.9, temos que S_1 separa $K_1 \setminus K$ de $K \setminus K_1$. Analogamente, S_2 separa $K_2 \setminus K$ de $K \setminus K_2$. Como $y \in S_1 \cap S_2$, pelo Teorema 4.10, temos que $S_1 \subseteq S_2$ ou $S_2 \subseteq S_1$. Supomos, sem perda de generalidade, que $S_1 \subseteq S_2$. Nesse caso temos que todos os vértices de S_2 estão em P , pois caso contrário poderíamos incluí-los no caminho entre os vértices y e z .



Além disso, como S_2 separa $K_1 \cup K_2 \setminus K$ de $K \setminus K_1 \cup K_2$, temos que para que P contenha algum outro vértice de K , ele deve intersectar S_2 novamente em um vértice

$y' \in S_2$. Sejam x' e z' os vértices adjacentes a y' no caminho. Analogamente a K_1 e K_2 , temos duas cliques K_3 e K_4 , que contêm $x'y'$ e $y'z'$ respectivamente e temos, sem perda de generalidade que $S_3 \subseteq S_4$ e que P contém todos os vértices de S_4 . Mas $y' \in S_4 \cap S_2$ e, portanto, pelo Teorema 4.10 temos que $S_2 \subseteq S_4$ ou $S_4 \subseteq S_2$. Aplicando o argumento para cada ponto de interseção entre P e K temos que existe um separador S que contém os vértices de $V(P) \cap K$. De uma maneira geral, temos que para cada caminho mais longo P que não possui uma aresta em K , existe um separador S_P tal que $V(P) \cap K = S_P$.

Suponha que existam dois caminhos P_1 e P_2 tais que S_{P_1} e S_{P_2} sejam disjuntos. Se consideramos $G \setminus S_{P_1}$ temos que S_{P_1} separa $P_1 \setminus S_{P_1}$ de S_2 . Como S_1 e S_2 são disjuntos, temos que P_1 e P_2 não se intersectam em K . Mas como $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$, existe um caminho de algum vértice de $P_1 \setminus S_{P_1}$ até S_{P_2} , um absurdo. Logo, S_{P_1} e S_{P_2} não podem ser disjuntos.



Nesse caso, se P_1, \dots, P_l são os caminhos mais longos de G que não possuem uma aresta na clique, temos que os separadores S_{P_1}, \dots, S_{P_l} estão aninhados, ou seja, $S_{P_1} \subseteq \dots \subseteq S_{P_l}$ e que os vértices de S_{P_i} estão em P_i para todo $i = 1, \dots, l$. Então os vértices de S_{P_1} estão contidos em todo caminho mais longo de G . ■

4.4 Relação com conjunto dominante

Dizemos que um conjunto $D \subseteq V(G)$ é *dominante* se todo vértice do grafo que não está em D é adjacente a algum vértice de D . O tamanho de um conjunto dominante fornece uma cota superior para $lpt(G)$.

Proposição 4.1. Se D é um conjunto dominante em G , então $lpt(G) \leq |D|$.

Prova. Suponha por absurdo que algum caminho mais longo P não intersecte nenhum vértice de D . Como D é um conjunto dominante, temos que um extremo de P é adjacente a pelo menos um vértice de D . Logo, podemos incluir esse vértice no caminho, aumentando-o, um absurdo. ■

A seguir vamos verificar o que acontece em alguns casos, como quando o conjunto dominante é uma clique ou um P_3 . Esses resultados ajudam a determinar ou dar limites superiores para $lpt(G)$ em classes de grafos tais como P_5 -free e $2K_2$ -free. Primeiro, observamos que se um grafo não tem $2K_2$ como subgrafo induzido, então ele também não tem P_5 como subgrafo induzido. Em [2], Bacsó e Tuza mostraram que se um grafo é P_5 -free, então ele possui uma clique ou um P_3 dominante.

Teorema 4.12. [2] Todo grafo P_5 -free possui uma clique dominante ou um P_3 dominante.



Figura 4.1: Grafos $K_{1,3}$ e críquet.

A seguir, consideraremos o problema da interseção de caminhos mais longos em grafos $(P_5, K_{1,3})$ -free.

Teorema 4.13. Se G tem uma clique dominante e é $K_{1,3}$ -free, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Seja G um grafo $K_{1,3}$ -free e K uma clique dominante em G . Suponha por absurdo que algum vértice $v \in K$ não pertença a um caminho mais longo P de G . Seja p_1 um extremo de P . Como K é dominante, p_1 é adjacente a algum vértice $u \in K$. Como P é um caminho de comprimento máximo, temos que $u \in V(P)$. Além disso, se p_{i-1} e p_{i+1} são os dois vértices adjacentes a u em P , então $p_{i-1} \notin K$ e $p_{i+1} \notin K$, pois caso contrário P teria dois vértices consecutivos na clique e seria possível aumentar P incluindo v .

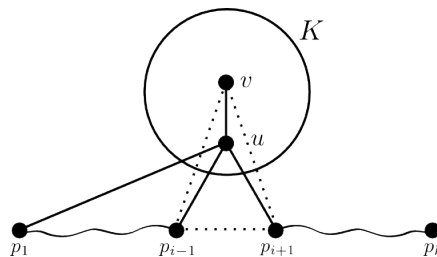


Figura 4.2: Grafo do Teorema 4.13.

Se $p_{i-1}v \in E(G)$, então poderíamos incluir v entre p_{i-1} e u em P . Logo, $p_{i-1}v \notin E(G)$. Analogamente, temos que $p_{i+1}v \notin E(G)$. Se $p_{i-1}p_{i+1} \notin E(G)$, então $\{u, v, p_{i-1}, p_{i+1}\}$ induz um $K_{1,3}$ em G . Logo $p_{i-1}p_{i+1} \in E(G)$. Então, $vp_1 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_k$ é um caminho mais longo que P em G , um absurdo. ■

Teorema 4.14. Se G tem um P_3 dominante e é $K_{1,3}$ -free, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Seja G um grafo $K_{1,3}$ -free e seja xyz um P_3 dominante em G . Seja P um caminho mais longo de G .

Caso 1: $P \cap \{x, y, z\} = \{y\}$ (P intersecta o P_3 apenas no vértice interno).

Sabemos que $p_1y \in E(G)$ e $p_ky \in E(G)$, pois caso contrário seria possível aumentar P . Logo $p_1x \notin E(G)$ e $p_1z \notin E(G)$. Então, $\{x, y, z, p_1\}$ induz um $K_{1,3}$ em G , um absurdo.

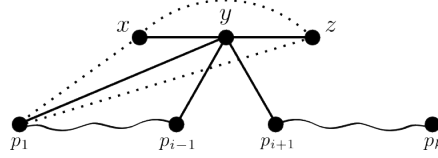


Figura 4.3: Caso 1 do Teorema 4.14.

Caso 2: $P \cap \{x, y, z\} = \{z\}$ (P intersecta o P_3 apenas em um extremo).

Sabemos que $p_1z \in E(G)$ e $p_kz \in E(G)$. Se $p_{i-1}p_{i+1} \in E(G)$, então temos que $xyzp_k \dots p_1$ é um caminho mais longo que P . Logo, $p_{i-1}p_{i+1} \notin E(G)$. Se $yp_{i-1} \in E(G)$, temos um caminho mais longo que P : $xyp_{i-1} \dots p_1zp_{i+1} \dots p_k$. Analogamente, se $yp_{i+1} \in E(G)$, temos $xyp_{i+1} \dots p_kzp_1 \dots p_{i-1}$. Logo, $yp_{i-1} \notin E(G)$ e $yp_{i+1} \notin E(G)$. Mas nesse caso temos que $\{y, z, p_{i-1}, p_{i+1}\}$ induz um $K_{1,3}$ em G , um absurdo.

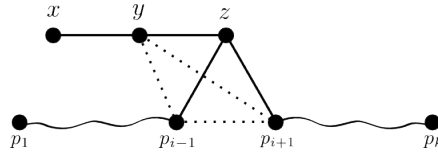


Figura 4.4: Caso 2 do Teorema 4.14.

Caso 3: $P \cap \{x, y, z\} = \{x, z\}$ (P intersecta o P_3 nos dois extremos).

Se $yp_{i-1} \in E(G)$ ou $yp_{i+1} \in E(G)$, podemos incluir y entre x e p_{i-1} ou entre x e p_{i+1} , respectivamente. Logo, $yp_{i-1} \notin E(G)$ ou $yp_{i+1} \notin E(G)$. Analogamente, temos que $yp_{j-1} \notin E(G)$ e $yp_{j+1} \notin E(G)$. Logo temos que $p_{i-1}p_{i+1} \in E(G)$ e $p_{j-1}p_{j+1} \in E(G)$, pois caso contrário teríamos um $K_{1,3}$ induzido em G (por $\{x, y, p_{i-1}, p_{i+1}\}$ ou $\{y, z, p_{j-1}, p_{j+1}\}$). Como p_1 é um extremo do caminho e o P_3 é dominante, temos que $p_1x \in E(G)$ ou $p_1z \in E(G)$. Se $p_1x \in E(G)$, temos que $yxp_1 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_k$ é um caminho mais longo que P . E se $p_1z \in E(G)$, temos que $yzp_1 \dots p_{j-1}p_{j+1} \dots p_k$ é um caminho mais longo que P em G , um absurdo.

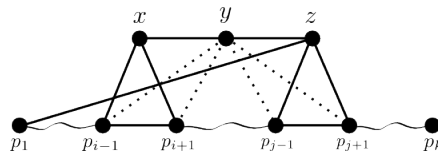


Figura 4.5: Caso 3 do Teorema 4.14.

Pode ser o caso em que $p_{i+1} = p_{j-1}$, mas isso não é um problema pois eles não são usados ao mesmo tempo para formar um $K_{1,3}$ e o segmento $p_{i+1} \dots p_{j-1}$ sempre aparece consecutivo nos caminhos formados.

Caso 4: $P \cap \{x, y, z\} = \{y, z\}$ (P intersecta o P_3 em um extremo e no vértice interno).

4.1: y e z não são consecutivos no caminho.

Conforme casos anteriores temos que $xp_{i-1} \notin E(G)$ e $xp_{i+1} \notin E(G)$. Então, $p_{i-1}p_{i+1} \in E(G)$. Além disso, $p_1y \in E(G)$ ou $p_1z \in E(G)$. Se $p_1y \in E(G)$ temos que o caminho $xyp_1 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_k$ é mais longo que P . Se $p_1z \in E(G)$, consideramos os vértices $\{y, p_{j-1}, p_{j+1}, z\}$:

1. Se $p_{j-1}p_{j+1} \in E(G)$: $xyzp_1 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_{j-1}p_{j+1} \dots p_k$ é um caminho mais longo que P . Logo, $p_{j-1}p_{j+1} \notin E(G)$.
2. Se $yp_{j-1} \in E(G)$: o caminho $xyp_{j-1} \dots p_{i+1}p_{i-1} \dots p_1zp_{j+1} \dots p_k$ é mais longo que P . Logo, $yp_{j-1} \notin E(G)$.
3. Se $yp_{j+1} \in E(G)$: Se $p_kz \in E(G)$, temos que $xyp_{j+1} \dots p_kzp_{j-1} \dots p_1$. Se $p_ky \in E(G)$, temos que $xyp_k \dots p_{j+1}zp_{j-1} \dots p_1$ é mais longo que P em G .

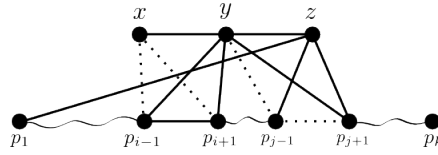


Figura 4.6: Caso 4.1 do Teorema 4.14.

Note que, novamente, pode ser o caso em que $p_{i+1} = p_{j-1}$, mas não há problemas pois os dois vértices não são usados para formar um $K_{1,3}$ e o segmento $p_{i+1} \dots p_{j-1}$ sempre aparece consecutivo nos caminhos formados.

4.2: y e z são consecutivos em P .

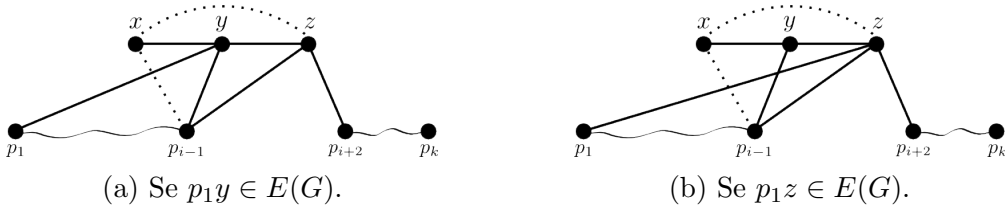


Figura 4.7: Caso 4.2 do Teorema 4.14.

Temos que $xp_{i-1} \notin E(G)$, senão poderíamos incluir x entre p_{i-1} e y em P . Logo $p_{i-1}z \in E(G)$, caso contrário temos $K_{1,3}$ induzido por $\{x, y, z, p_{i-1}\}$. Como o P_3 é

dominante, temos que $p_1y \in E(G)$ ou $p_1z \in E(G)$. Se $p_1y \in E(G)$, temos o caminho $xyp_1 \dots p_{i-1}z p_{i+2} \dots p_k$. Se $p_1z \in E(G)$, temos o caminho $xyp_{i-1} \dots p_1z p_{i+2} \dots p_k$, que é mais longo que P , um absurdo. ■

Corolário 4.6. Se G é um grafo $(P_5, K_{1,3})$ -free, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Consequência dos Teoremas 4.12, 4.13 e 4.14. ■

Uma classe que contém a classe dos grafos $(P_5, K_{1,3})$ -free e será considerada a seguir é a classe dos grafos $(P_5, \text{criquet})$ -free, pois o criquet possui um $K_{1,3}$ como subgrafo induzido.

Teorema 4.15. Se G tem uma clique dominante e é criquet-free, então $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Seja G um grafo criquet-free que possui uma clique dominante K . Suponha por absurdo que K tenha dois vértices distintos v e w que não pertencem a um caminho mais longo P . Seja p_1 um extremo do caminho. Novamente temos que, como K é dominante, p_1 é adjacente a algum vértice $u \in K$. Como P é um caminho mais longo, temos que $u \in P$. Além disso, se p_{i-1} e p_{i+1} são os dois vértices adjacentes a u em P , então $p_{i-1} \notin K$ e $p_{i+1} \notin K$, pois caso contrário P teria dois vértices consecutivos na clique. Temos que $p_{i-1}v \notin E(G)$ e $p_{i+1}v \notin E(G)$, pois caso contrário seria possível incluir v no caminho. Analogamente temos que $p_{i-1}w \notin E(G)$, $p_{i+1}w \notin E(G)$. Logo, necessariamente $p_{i-1}p_{i+1} \in E(G)$, pois caso contrário teríamos um criquet induzido em G .

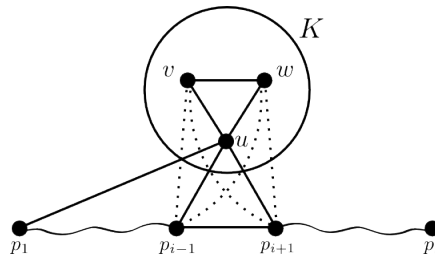


Figura 4.8: Grafo do Teorema 4.15.

Portanto, o caminho $vwup_1 \dots p_{i-1}p_{i+1} \dots p_k$ é um caminho mais longo que P em G , um absurdo. Concluimos que cada caminho mais longo pode evitar no máximo um vértice da clique. Com isso temos que, fixados quaisquer dois vértices de K , então todo caminho mais longo passa por pelo menos um deles e, portanto, $lpt(G) \leq 2$. ■

Teorema 4.16. Se G tem um P_3 dominante e é criquet-free, então $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Seja G um grafo criquet-free que possui um P_3 dominante com conjunto de vértices $\{x, y, z\}$. Vamos provar que um caminho mais longo não pode intersectar o $\{x, y, z\}$ em apenas um vértice extremo do P_3 .

Suponha por absurdo que um caminho mais longo $P = p_1 \dots p_k$ intersecte $\{x, y, z\}$ apenas em x . Sejam p_{i-1} e p_{i+1} os v\u00e9rtices de P adjacentes a x . Se $p_2y \in E(G)$, temos o caminho $zyp_2 \dots p_k$ que \u00e9 maior que P , um absurdo. Se $p_2z \in E(G)$, temos o caminho $yzp_2 \dots p_k$ que tamb\u00e9m \u00e9 maior que P . Logo, podemos concluir que $p_2x \in E(G)$, pois o P_3 \u00e9 dominante. Al\u00e9m disso, temos que $p_1x \in E(G)$ e $p_kx \in E(G)$. Consideramos o conjunto $\{p_1, p_2, x, y, p_k\}$. Sabemos que $p_1y \notin E(G)$ e $p_ky \notin E(G)$ e j\u00e1 conclu\u00edmos que $p_2y \notin E(G)$. Se $p_1p_k \in E(G)$, podemos formar o caminho $zyp_{i-1} \dots p_1p_k \dots p_{i+1}$. Se $p_2p_k \in E(G)$, temos o caminho $zyp_{i-1} \dots p_2p_k \dots p_{i+1}$, que \u00e9 um caminho com um v\u00e9rtice a mais que P . Logo, podemos concluir que $p_1p_k \notin E(G)$ e $p_2p_k \notin E(G)$ e, portanto, $\{p_1, p_2, x, y, p_k\}$ induz um criquet em G , um absurdo.

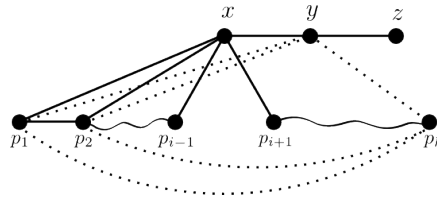


Figura 4.9: Grafo do Teorema 4.16.

Logo, um caminho mais longo n\u00e3o pode intersectar o P_3 dominante apenas em um dos seus extremos. Com isso, temos que todo caminho mais longo possui ao menos um v\u00e9rtice no conjunto $\{y, z\}$ e, assim, $lpt(G) \leq 2$. ■

Corol\u00e1rio 4.7. Se G \u00e9 um grafo $(P_5, \text{criquet})$ -free, ent\u00e3o $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Consequ\u00eancia dos Teoremas 4.12, 4.15 e 4.16. ■

Teorema 4.17. Se G tem uma clique dominante e \u00e9 $2K_2$ -free, ent\u00e3o $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Seja G um grafo $2K_2$ -free que cont\u00e9m uma clique dominante K . Suponha que existam dois v\u00e9rtices distintos v e w que n\u00e3o pertencem a um caminho mais longo P . Seja p_1 um extremo do caminho. Sabemos que $p_1v \notin E(G)$ e $p_1w \notin E(G)$. Seja p_2 o v\u00e9rtice adjacente a p_1 em P . Se $p_2 \in K$, podemos excluir p_1 do caminho e adicionar v e w , obtendo um caminho maior. Logo $p_2 \notin K$.

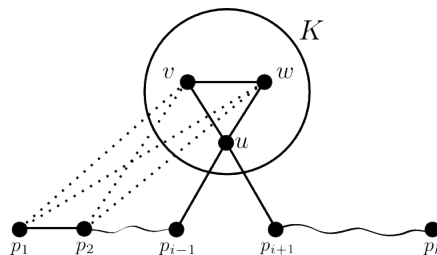


Figura 4.10: Grafo do Teorema 4.17.

Se $p_2v \in E(G)$ ou $p_2w \in E(G)$, então novamente podemos excluir p_1 do caminho e adicionar v e w . Logo, $p_2v \notin E(G)$ e $p_2w \notin E(G)$ e, portanto, $\{v, w, p_1, p_2\}$ induz um $2K_2$ em G , um absurdo.

Concluimos que cada caminho mais longo não contém no máximo um vértice da clique K e, com isso, $lpt(G) \leq 2$. ■

Teorema 4.18. Se G tem um P_3 dominante e é $2K_2$ -free, então $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Seja $\{x, y, z\}$ o conjunto de vértices do P_3 dominante em G . Vamos provar que um caminho mais longo não pode intersectar o $\{x, y, z\}$ em apenas um vértice extremo do P_3 .

Suponha por absurdo que existe um caminho mais longo P que intersecta o P_3 apenas em x . Sejam p_{i-1} e p_{i+1} os vértices adjacentes a x em P . Sabemos que $p_1y \notin E(G)$ e $p_1z \notin E(G)$. Consideramos o conjunto $\{y, z, p_1, p_2\}$. Como G é $2K_2$ -free, temos que ter $p_2y \in E(G)$ ou $p_2z \in E(G)$. Se $p_2y \in E(G)$ temos o caminho $zyp_2 \dots p_k$, obtido excluindo-se o vértice p_1 e acrescentando-se os vértices y e z e, portanto, maior que P , um absurdo. Se $p_2z \in E(G)$ temos o caminho $yzp_2 \dots p_k$, que também é mais longo que P .

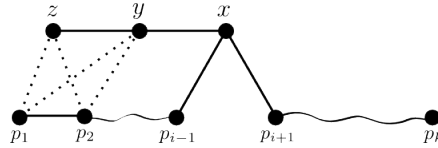


Figura 4.11: Grafo do Teorema 4.18.

Considere o conjunto $\{x, y\}$. Suponha por absurdo que algum caminho mais longo P não intersecte $\{x, y\}$. Como P intersecta $\{x, y, z\}$ temos que P contém apenas o vértice z , um absurdo pois P não pode conter apenas um extremo do P_3 . Logo $lpt(G) \leq 2$. ■

Corolário 4.8. Se G é um grafo $2K_2$ -free, então $lpt(G) \leq 2$.

Prova. Consequência dos Teoremas 4.12, 4.17 e 4.18. ■

4.5 Componentes biconexos

Como vimos no Capítulo 2, os Teoremas 2.1 e 2.2, fornecem uma nova abordagem para o problema da interseção dos caminhos mais longos. Ela consiste em determinar propriedades que um componentes biconexo B de um grafo precisa ter de forma a garantir que a interseção dos caminhos mais longos de $\mathcal{P}_B(G)$, isso é, que possuem ao menos uma aresta em B , seja não vazia. Nesta seção determinamos algumas dessas propriedades.

Teorema 4.19. Seja B um bloco do grafo G . Se B tem um vértice universal, então os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ têm um vértice em comum.

Prova. Seja v um vértice universal do bloco B e seja P um caminho de $\mathcal{P}_B(G)$. Seja xy uma aresta de P que está contida no bloco B . Se v não pertence a P , podemos incluí-lo entre x e y em P , encontrando um novo caminho de comprimento maior, um absurdo. ■

Lema 4.2. Seja $G = (K \cup S, E)$ um grafo split 2-conexo com S maximal e $x, y \in V(G)$. Se P é um xy -caminho mais longo, então P contém todos os vértices de K .

Prova. Seja G um grafo split 2-conexo com partição split (K, S) , onde S é maximal e $x, y \in V(G)$. Seja P um caminho mais longo entre os vértices x e y . Suponha por absurdo que P não contenha um vértice $v \in K$. Se P tem dois vértices consecutivos na clique, então poderíamos incluir v em P sem modificar os extremos do caminho. Como S é maximal, temos que v possui pelo menos um vizinho em S . Se v é adjacente a algum vértice $b \in V(P) \cap S$, consideramos $ab \in E(P)$ e podemos incluir v entre a e b em P , pois $a \in K$. Suponha então que v seja adjacente a um vértice $s \in S$ que não está em P . Como G é 2-conexo, s tem outro vizinho em K além de v . Seja $a \in K$ este vizinho. Se $a \in V(P) \cap K$, consideramos vértices a, b e c tal que $ab \in E(P)$ e $bc \in E(P)$. Como P não tem dois vértices consecutivos na clique, $b \in S$ e $c \in K$. Podemos substituir abc por $asvc$ em P e obter um caminho maior com mesmos extremos, um absurdo. Se $a \notin V(P) \cap K$, consideramos w, b, c tal que $wb \in E(P)$, $bc \in E(P)$ e $w \in K$. Podemos substituir wbc no caminho P por $wasvc$, obtendo um caminho maior e, novamente, com os mesmos extremos, o que seria um absurdo. Logo, todo vértice de K está em P . ■

Teorema 4.20. Seja B um bloco do grafo G . Se B é split, então os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ têm um vértice em comum.

Prova. Seja P um caminho de $\mathcal{P}_B(G)$. Como o caminho P restrito ao bloco B deve ser um caminho em B , temos que este caminho deve ser mais longo possível entre seus extremos, pois caso contrário seria possível aumentar P . Como B é um grafo split 2-conexo, pelo Lema 4.2, temos que existe pelo menos um vértice que pertence a todos os xy -caminhos mais longos de B . Portanto, existe um vértice que pertence a todos os caminhos mais longos de $\mathcal{P}_B(G)$. ■

A seguir, consideraremos o caso em que o componente biconexo B é um grafo de intervalo. Como vimos na Seção 3.4, em [3], foi provado que, em todo grafo de intervalo, os caminhos mais longos possuem um vértice em comum. Uma definição fundamental para a obtenção desse resultado é a de suporte, já apresentada na seção

sobre grafos arco-circulares. A seguir, faremos uma modificação nesta definição de forma a obter um resultado mais geral sobre caminhos em grafos de intervalo, utilizando essencialmente a mesma prova apresentada em [3]. Seja $P = (I_1, I_2, \dots, I_t)$ a sequência de intervalos correspondente a um caminho em um grafo de intervalo. O *suporte do caminho* é dado por:

$$Sup(P) = (I_1 \cap I_2) \cup (I_2 \cap I_3) \cup \dots \cup (I_{t-1} \cap I_t).$$

Esta modificação na definição de suporte é interessante para tratar caminhos mais longos entre pares fixados de vértices. Sejam x e y dois vértices em um grafo de intervalo e seja P um xy -caminho mais longo. Temos que se J é um intervalo qualquer do modelo, então $J \in P$ se e somente se $J \cap Sup(P) \neq \emptyset$. Isso é verdade pois se J é um intervalo que intersecta o suporte, significa que o caminho pode ser aumentado com a inclusão de J , sem ter seus extremos modificados.

Lema 4.3. Seja G um grafo de intervalo e $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ um conjunto de caminhos tal que P_i é um $x_i y_i$ -caminho mais longo. Se $V(P_i) \cap V(P_j) \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$, então $\bigcap_{i=1}^k V(P_i) \neq \emptyset$.

Prova. Por indução no número k de caminhos mais longos.

Se $k = 2$, por hipótese os dois caminhos se intersectam.

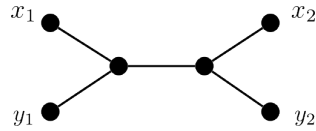
Seja G um grafo de intervalo e P_1, P_2, \dots, P_k , com $k \geq 3$, caminhos tais que P_i é um $x_i y_i$ -caminho mais longo. Seja $P_i = (I_1^i, I_2^i, \dots, I_{t_i}^i)$, onde I_1^i é o intervalo correspondente ao vértice x_i e $I_{t_i}^i$ é o intervalo correspondente ao vértice y_i . Para cada i , consideramos o conjunto formado por todos os $x_j y_j$ -caminhos mais longos menos o i -ésimo. Como neste conjunto os caminhos continuam se intersectando dois a dois, pela hipótese de indução, existe um intervalo J_i que pertence a todo P_j para $j \neq i$.

Sabemos que $J_i \cap Sup(P_i) = \emptyset$. Seja $\Omega(Sup(P_i))$ o fecho convexo do $Sup(P_i)$.

Se existe i tal que $J_i \cap \Omega(Sup(P_i)) \neq \emptyset$, então existe j tal que J_i está entre $I_j^i \cap I_{j+1}^i$ e $I_{j+1}^i \cap I_{j+2}^i$. Logo, $J_i \subseteq I_{j+1}^i$. Isso quer dizer que todo intervalo que intersecta J_i também intersecta I_{j+1}^i . Como J_i está em todo caminho mais longo exceto o i -ésimo, temos que o suporte de todos esses caminhos intersecta J_i . Com isso, temos que o suporte de todos os caminhos (exceto o i -ésimo) intersecta I_{j+1}^i , logo este é um intervalo que corresponde a um vértice que pertence a todos os caminhos mais longos de G .

Se para todo i temos que $J_i \cap \Omega(Sup(P_i)) = \emptyset$, então J_i está sempre à direita ou à esquerda de $Sup(P_i)$. Além disso, como $n \geq 3$ certamente existem dois intervalos na mesma posição relativa em relação aos seus suportes. Supomos sem perda de generalidade que J_1 e J_2 sejam esses intervalos. Nesse caso, $J_1 \cap \Omega(Sup(P_2)) = \emptyset$ ou $J_2 \cap \Omega(Sup(P_1)) = \emptyset$, um absurdo. ■

A prova anterior engloba o caso da interseção de todos os caminhos mais longos em um grafo de intervalo, pois sabemos que eles são mais longos entre seus extremos e têm interseção dois a dois não vazia. A condição de cada par de caminhos ter interseção não vazia é realmente necessária quando consideramos caminhos mais longos com extremos fixos nos grafos de intervalo, como podemos ver através do exemplo abaixo, onde o caminho mais longo entre x_1 e y_1 não intersecta o caminho mais longo entre x_2 e y_2 .



Teorema 4.21. Seja B um bloco do grafo G . Se B é de intervalo, então os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ têm um vértice em comum.

Prova. Seja P um caminho de $\mathcal{P}_B(G)$. Como o caminho P restrito a B deve ser também um caminho em B , este deve ser mais longo entre seus extremos. Como os caminhos mais longos de $\mathcal{P}_B(G)$ possuem interseção dois a dois não vazia, temos que o mesmo acontece com eles quando restritos a B . De fato, suponha por absurdo que dois caminhos mais longos de $\mathcal{P}_B(G)$ não se intersectem em B . Então, eles se intersectam em outro componente biconexo diferente de B , digamos C . Assim, ambos os caminhos possuem pelo menos uma aresta em B e pelo menos um vértice em C . Como existe uma articulação de B que está em todo caminho que liga vértices de B a vértices de C , temos que os dois caminhos se intersectam nesta articulação, ou seja, se intersectam em um vértice de B . Desta forma, como B é um grafo de intervalo, pelo Lema 4.3, temos que os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ possuem um vértice em comum em B . ■

Combinando os resultados obtidos nesta seção, obtemos o seguinte teorema:

Teorema 4.22. Se G é tal que todo componente biconexo de G é um grafo split, de intervalo ou possui um vértice universal, então $lpt(G) = 1$.

Prova. Seja G um grafo tal que todo componente biconexo de G é um grafo split, de intervalo ou que possui um vértice universal. Suponha por absurdo que os caminhos mais longos de G tenham interseção vazia. Pelo Teorema 2.2 temos que existe um bloco B em G tal que todo caminho mais longo de G possui pelo menos uma aresta em B . Ou seja, existe um bloco B tal que todo caminho mais longo de G é um caminho de $\mathcal{P}_B(G)$. Pelos Teoremas 4.19, 4.20 e 4.21 temos que os caminhos de $\mathcal{P}_B(G)$ têm um vértice em comum e, com isso, $lpt(G) = 1$. ■

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação, abordamos o problema da interseção dos caminhos mais longos em classes de grafos, apresentando em detalhes uma coletânea de resultados existentes, assim como nossas contribuições no tema.

Nos Capítulos 2 e 3, apresentamos os resultados já conhecidos que estudamos ao longo deste trabalho e que motivaram os progressos obtidos nesta dissertação. Mais especificamente, no Capítulo 2, apresentamos a construção de Skupień e o resultado de [9] (Teorema 2.5) sobre uma classe de grafos em que quaisquer três caminhos mais longos possuem um vértice em comum, mas que o mesmo não vale para o caso de todos os caminhos mais longos.

No Capítulo 3, nos concentramos em apresentar de forma detalhada e com notação uniforme resultados já conhecidos sobre classes de grafos que respondem positivamente à pergunta de Gallai (Teoremas 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6). Apresentamos também os resultados existentes sobre limites superiores para o tamanho da menor transversal dos caminhos mais longos em classes específicas de grafos (Teoremas 3.7, 3.8 e 3.10).

As contribuições deste trabalho estão no Capítulo 4, onde mostramos resultados (Teoremas 4.1, 4.3, 4.13 e 4.14) que permitem concluir que as classes dos grafos cadeia, estrelados, $(2K_2, C_4)$ -free, P_4 -esparços e $(P_5, K_{1,3})$ -free respondem positivamente à pergunta de Gallai (Corolários 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.6). Também mostramos que o mesmo acontece com a classe dos grafos ptolemaicos (Teorema 4.11), grafos que são obtidos através da operação de join de dois outros grafos (Teorema 4.2) e grafos cujos componentes biconexos são grafos split, de intervalo ou que possuem um vértice universal (Teorema 4.22). Além disso, mostramos resultados (Teoremas 4.8, 4.15, 4.16, 4.17 e 4.18) que permitem fornecer limites superiores para $lpt(G)$ na classe dos grafos de interseção de subárvores de uma estrela estendida, dos grafos $(P_5, \text{criquet})$ -free e dos grafos $2K_2$ -free (Corolários 4.5, 4.7 e 4.8). Parte destes resultados foi apresentada no *14th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, ocorrido entre os dias 6 e 8 de junho de 2016 na Itália, no

trabalho intitulado *Intersection of Longest Paths in Graph Classes*.

Como possibilidade de trabalhos futuros relacionados ao problema da interseção de todos os caminhos mais longos em grafos, consideramos abordar as seguintes questões que permanecem em aberto:

- Caracterizar os grafos bipartidos G tais que $lpt(G) = 1$, pois como vimos nas Seções 2.2 e 4.1, existem exemplos nesta classe de grafos que respondem afirmativamente e de grafos que respondem negativamente à pergunta de Gallai;
- Estudar o problema da interseção de todos os caminhos mais longos em grafos com $4 \leq \alpha'(G) \leq 5$, conforme sugerido por Chen [6], pois na Seção 3.5 vimos a solução do problema quando $\alpha'(G) \leq 3$ e vimos que o exemplo de Walther, Voss e Zamfirescu (Figura 2.3) possui um emparelhamento de tamanho 6;
- Estudar o problema da interseção de todos os caminhos mais longos em grafos de cocomparabilidade e, posteriormente, sem tripla asteroidal, tendo em vista que, até o presente momento, a construção de exemplos conhecidos de grafos com interseção vazia dos caminhos mais longos é fortemente baseada na presença de vértices de grau um que geram triplas asteroidais, como vimos nas Seções 2.2 e 2.3.1;
- Considerar o problema da interseção de todos os caminhos mais longos em grafos cordais e algumas das suas subclasses. Como sugestão de subclasse dos grafos cordais para ser abordada temos as k -árvores (já sugeridas em [8]) uma vez que, por [9], já sabemos que as 2-árvores respondem positivamente à pergunta de Gallai (resultado apresentado na Seção 3.3). Outra subclasse dos grafos cordais a ser considerada é a dos grafos RDV, uma vez que o problema já está resolvido para grafos de intervalo [3] e grafos ptolemaicos (Seção 4.3), duas de suas subclasses;
- Considerar o problema de determinar o tamanho da interseção de todos os caminhos mais longos em classes de grafos. O problema parece interessante pois algumas classes de grafos, como a dos grafos split, podem possuir muitos vértices que pertencem a interseção de todos os caminhos mais longos. Esse estudo pode fornecer também uma melhor intuição a respeito de propriedades que forcem a interseção de todos os caminhos mais longos a ser não vazia.

Para a variante do problema com um número fixo de caminhos, os dois principais problemas que permanecem em aberto são:

- A Conjectura 2.1, apresentada em [15], que afirma que dado um grafo, quaisquer três de seus caminhos mais longos têm um vértice em comum.
- Determinar qual o maior inteiro k tal que, em qualquer grafo, quaisquer k caminhos mais longos possuem um vértice em comum. Conforme vimos na Seção 2.3.1, por [27], sabe-se que $k \leq 6$.

Referências Bibliográficas

- [1] M. AXENOVICH. When do three longest paths have a common vertex? *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, v. 1, pp. 115–120, 2009.
- [2] G. BACSÓ e Z. TUZA. Dominating cliques in P_5 -free graphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, v. 21, pp. 303–308, 1990.
- [3] P. BALISTER, E. GYÖRI, J. LEHEL e R. SCHELP. Longest paths in circular arc graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, v. 13, pp. 311–317, 2004.
- [4] A. BRANDSTÄDT, V. B. LE e J. P. SPINRAD. *Graph Classes: A Survey*. SIAM Monographs in Discrete Mathematics and Applications, 1999.
- [5] M. R. CERIOLO e J. L. SZWARCFITER. Characterizing intersection graphs of substars of a star. *Ars Combinatoria*, v. 79, pp. 21–31, 2006.
- [6] F. CHEN. Nonempty intersection of longest paths in a graph with small matching number. *Czechoslovak Mathematical Journal*, v. 65, pp. 545–553, 2015.
- [7] G. CHEN, J. EHRENMÜLLER, C. G. FERNANDES, C. G. HEISE, S. SHAN, P. YANG e A. N. YATES. Nonempty intersection of longest paths in series-parallel graphs. *Aceito na Discrete Mathematics*, 2016.
- [8] S. F. DE REZENDE. *Caminhos Mais Longos em Grafos*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 2014.
- [9] S. F. DE REZENDE, C. G. FERNANDES, D. M. MARTIN e Y. WAKABAYASHI. Intersecting longest paths. *Discrete Mathematics*, v. 313, pp. 1401–1408, 2013.
- [10] A. DINO e T. ZAMFIRESCU. On longest paths in triangular lattice graphs. *Utilitas Mathematica*, v. 89, pp. 269–273, 2012.

- [11] T. GALLAI. Problem 4, In: P. Erdos e G. Katona (Eds.), *Theory of Graphs*, Proceedings of the Colloquium held at Tihany, Hungary, September 1966, p. 362. Academic Press, New York, 1968.
- [12] M. R. GAREY e D. S. JOHNSON. *Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, 1979.
- [13] M. C. GOLUBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Elsevier, 2004.
- [14] B. GRÜNBAUM. Vertices missed by longest paths or circuits. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, v. 17, pp. 31–38, 1974.
- [15] J. M. HARRIS, J. L. HIRST e M. J. MOSSINGHOFF. *Combinatorics and Graph Theory*. Springer, 2008.
- [16] E. HOWORKA. A characterization of ptolemaic graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 5, pp. 323–331, 1981.
- [17] B. JAMISON e S. OLARIU. A unique tree representation for P_4 -sparse graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 35, pp. 115–129, 1992.
- [18] F. JOOS. A note on longest paths in circular arc graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, v. 35, n. 3, pp. 419–426, 2015.
- [19] S. KENSELL. *Intersection of Longest Paths*. Dissertação de Mestrado, Mathematics Department, Central European University, 2011.
- [20] S. KLAVŽAR e M. PETKOVŠEK. Graphs with nonempty intersection of longest paths. *Ars Combinatoria*, v. 29, pp. 43–52, 1990.
- [21] R. J. LIPTON e R. E. TARJAN. A separator theorem for planar graphs. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 36, pp. 177–189, 1979.
- [22] F. MAFFRAY e M. PREISSMANN. Linear recognition of pseudo-split graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 52, pp. 307–312, 1994.
- [23] F. NADEEM, A. SHABBIR e T. ZAMFIRESCU. Planar lattice graphs with Gallais property. *Graphs and Combinatorics*, v. 29, pp. 1523–1529, 2013.
- [24] D. RAUTENBACH e J. S. SERENI. Transversals of longest paths and cycles. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 28, pp. 335–341, 2014.
- [25] A. SHABBIR, C. T. ZAMFIRESCU e T. I. ZAMFIRESCU. Intersecting longest paths and longest cycles: a survey. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, v. 1, pp. 56–76, 2013.

- [26] Z. SKUPIEŃ. Smallest sets of longest paths with empty intersection. *Combinatorics, Probability and Computing*, v. 5, pp. 429–436, 1996.
- [27] C. THOMASSEN. Planar and infinite hypohamiltonian and hypotraceable graphs. *Discrete Mathematics*, v. 14, pp. 377–389, 1976.
- [28] R. UEHARA e Y. UNO. Laminar structure of ptolemaic graphs with applications. *Discrete Applied Mathematics*, v. 157, pp. 1533–1543, 2009.
- [29] H. J. VOSS e H. WALTHER. Über Kreise in Graphen. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, 1974.
- [30] H. WALTHER. Über die Nichtexistenz zweier Knotenpunkte eines Graphen, die alle längsten Kreise fassen. *Journal of Combinatorial Theory*, v. 8, pp. 330–333, 1970.
- [31] T. ZAMFIRESCU. On longest paths and circuits in graphs. *Mathematica Scandinavica*, v. 38, pp. 211–239, 1976.
- [32] T. ZAMFIRESCU. A two-connected planar graph without concurrent longest paths. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 13, pp. 116–121, 1972.