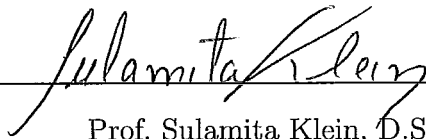


UM ESTUDO DAS ESTRUTURAS DE GRAFOS SEM GARRAS

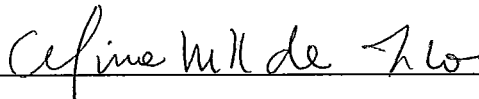
Patrícia Rodrigues da Silva Soares

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

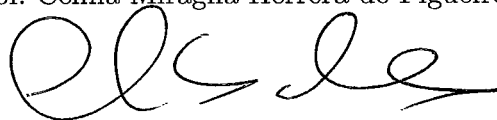
Aprovada por:



Prof. Sulamita Klein, D.Sc.



Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



Prof. Cláudia Linhares Sales, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2008

SOARES, PATRÍCIA RODRIGUES DA
SILVA SOARES

Um estudo das estruturas de grafos sem
garras [Rio de Janeiro] 2008

XX, 152 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia de Sistemas e Com-
putação, 2008)

Dissertação – Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1 - Grafos sem garras

2 - Grafos Berge e sem garras

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao Senhor Deus. Bendize, ó minha alma, ao Senhor, e tudo o que há em mim
bendiga ao Seu santo nome.
Salmos 103:1, Bíblia Sagrada.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, porque mesmo quando tudo diz que não, Ele nos encoraja a prosseguir. A Ele, toda honra e toda glória!

Aos meus pais, que abdicaram de seus sonhos para que os meus fossem realizados. Agradeço também ao meu irmão que sempre esteve ao meu lado com seu carinho e dedicação. Eu amo muito vocês!

À professora Sulamita Klein, pela pessoa admirável que é. Obrigada pela paciência, compreensão, dedicação, pelas dicas e conselhos que foram de fundamental importância, não só para o desenvolvimento deste trabalho, mas também para minha vida. Os meus sinceros agradecimentos!

Às professoras Celina Miraglia Herrera de Figueiredo e Cláudia Linhares Sales, por aceitarem fazer parte desta banca, reunindo valor inestimável a este trabalho.

Ao professor Valdomiro pelo carinho e confiança.

Aos amigos Júnior, Márcio, Thiago, Paula, Renata, Deusenir, Nanci e Viviane por compreenderem minha ausência e pelo apóio.

Aos amigos do laboratório: Raquel, por me ajudar na instalação dos programas necessário para a confecção deste trabalho; André e Bernardo, por me ajudarem com o linux; Danilo e Rodrigo, por me ajudarem com o latex; Raphael e Thatiana, por me ajudarem com o tgif; e Fabiano por me ajudar na formatação deste trabalho. Obrigada a todos pela paciência e por muitas vezes deixarem seus afazeres para me ajudar.

Enfim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente me ajudaram a chegar até aqui.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM ESTUDO DAS ESTRUTURAS DE GRAFOS SEM GARRAS

Patrícia Rodrigues da Silva Soares

Março/2008

Orientador: Sulamita Klein

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma garra é um grafo bipartido composto por quatro vértices e três arestas, onde um vértice é adjacente a todos os outros. Um grafo é sem garras se ele não admite como subgrafo induzido a garra. Este trabalho descreve um estudo sobre a estrutura dos grafos sem garras. Inicialmente apresentamos os resultados desenvolvidos por Chvátal e Sbihi sobre os grafos Berge e sem garras, onde baseados em um teorema de decomposição (todo grafo Berge e sem garras pode ser decomposto via corte-clique em dois tipos de grafos indecomponíveis, chamados elementar e peculiar), eles provam que o problema de reconhecimento desses tipos de grafos é resolvido em tempo polinomial. A estrutura dos grafos peculiares é completamente descrita pela sua definição porém o mesmo não acontece com os grafos elementares, então completando esse estudo, apresentamos os resultados desenvolvidos por Maffray e Reed que mostram uma caracterização dos grafos elementares, em termos de subgrafos proibidos e aumento de um grafo linha de um multigrafo bipartido; produzindo assim uma descrição completa da estrutura dos grafos Berge e sem garras. A seguir apresentamos em linhas gerais os resultados recentes obtidos por Chudnovsky e Seymour sobre a estrutura dos grafos sem garras em geral.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A SURVEY OF THE STRUCTURES OF CLAW-FREE GRAPHS

Patrícia Rodrigues da Silva Soares

March/2008

Advisor: Sulamita Klein

Department: Systems Engineering and Computer Science

A claw is a bipartite graph consisting of four vertices and three edges, where one of the vertices is adjacent to all the others. A graph is claw-free if none of its induced subgraphs is a claw. This work describes a survey of the structure of claw-free graphs. First, we present the Chvátal e Sbihi's results about claw-free Berge graphs, where based on a decomposition theorem (all claw-free Berge graphs can be decomposed via clique-cutsets into two types of indecomposable graphs called elementary and peculiar) , they prove than the recognition problem of claw-free Berge graphs can be solve in polynomial-time. The structure of peculiar graphs is completely determined by their definition, but it was not so for elementary graphs. Therefore to complete this study, we present the Maffray e Reed's results than shows a characterization of these graphs in terms of forbidden subgraphs and augmentation of a line-graph of a bipartite multigraph; producing a complete description of the structure of claw-free Berge graphs. After, we describe the recent results obtained for Chudnovsky e Seymour about the structure of claw-free graphs in general.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Definições e Notações Básicas	3
1.2	Grafos Perfeitos	12
1.3	Grafos Linha	13
1.3.1	Grafos linha de grafos bipartidos	14
1.3.2	Grafos linha de multigrafos bipartidos	15
2	Grafos Berge e sem garras	23
2.1	Preliminares	24
2.2	Reconhecimento de grafos Berge e sem garras	34
2.3	Algoritmo Polinomial	65
2.4	Reconhecimento de grafos Berge e sem garras através dos grafos elementares e dos grafos peculiares	70
3	A estrutura dos grafos elementares	85
3.1	Definições Locais	86
3.2	Caracterização dos grafos elementares	89
3.3	Coloração elementar	108
3.3.1	Coloração elementar para os grafos não-cobipartidos . . .	118
3.3.2	Coloração elementar para os grafos cobipartidos	128
4	Grafos sem garras	130
4.1	Classes básicas de grafos sem garras	132

4.1.1	Grafos linha - S_0	132
4.1.2	Icosaedro - S_1	132
4.1.3	O XX-strip - S_2	133
4.1.4	Grafo de intervalo circular - S_3	134
4.1.5	Uma extensão de $L(K_6)$ - S_4	134
4.1.6	2-simplicial do tipo anti-chapéu - S_5	136
4.1.7	A classe S_6	137
4.1.8	Grafos Antiprismatic.	138
4.2	Algumas Decomposições	140
4.3	Teorema de decomposição	144
5	Conclusão	146

Lista de Figuras

1.1	Garra.	1
1.2	Diamante.	7
1.3	Garra.	10
1.4	Grafo G e o seu grafo linha $L(G)$	14
1.5	Grafos que buscam exemplificar o método para encontrar a raiz linha de um grafo linha de um grafo bipartido.	15
1.6	Grafos que buscam exemplificar que as arestas paralelas em um grafo são vértices gêmeos em seu grafo linha, mas a recíproca não é verdadeira em geral.	16
1.7	Grafos que buscam exemplificar o ajuste de grafos bipartidos que possuem arestas pendentes. Com A_1 e A_2 sendo átomos em H'	17
1.8	Grafos que buscam exemplificar que se um átomo em $L(B) = H$ pertence a mais de duas cliques maximais, então H não é um grafo linha de um multigrafo bipartido.	18
1.9	Grafos que buscam exemplificar que se um átomo simplicial em $L(B) = H$ não corresponde a um vértice pendente em B , então B não é sensato.	18
1.10	Grafos que buscam exemplificar que se um átomo é não-simplicial e $N(A)$ é formado por duas cliques disjuntas com arestas entre elas, então B não é um grafo linha de um multigrafo bipartido.	19

1.11	Grafos que buscam exemplificar que H é um grafo linha de um multigrafo bipartido B se e somente se cada átomo A_i (em H) pode ser reduzido a um vértice x_{A_i}	20
1.12	(a) Diamante, (b) Gema e (c) 4-rodas.	20
1.13	Grafos que buscam exemplificar o método para encontrar a raiz linha de um grafo linha de um multigrafo bipartido.	21
1.14	(a) O grafo D ; (b) O grafo pirâmide.	21
2.1	Garra.	23
2.2	Grafo G e o seu grafo Gallai $Gal(G)$	24
2.3	Grafo H e o seu grafo Gallai $Gal(H)$	25
2.4	Buraco ímpar C_{2k+1} e o seu grafo Gallai $Gal(C_{2k+1})$	26
2.5	O grafo \bar{C}_7 e o seu grafo Gallai $Gal(\bar{C}_7)$	26
2.6	O grafo \bar{C}_9 e o seu grafo Gallai $Gal(\bar{C}_9)$	27
2.7	A pirâmide G e seu grafo Gallai $Gal(G)$	27
2.8	Grafo que busca exemplificar a garra formada pelos vértices $v_i v v_2 v_3$, com $i = 5$	29
2.9	Grafo que busca exemplificar a garra formada pelos vértices $v_4 v v_6 v_7$	29
2.10	Grafo que busca exemplificar a garra formada pelos vértices $v_1 v v_5 v_6$	29
2.11	Grafo que busca exemplificar a garra formada pelos vértices $w v v_1 v_{2k+1}$	30
2.12	Grafo que busca exemplificar a garra formada pelos vértices $v_3 v_1 w_1 w_2$	31
2.13	Grafo que busca exemplificar a garra formada pelos vértices $v_4 v_1 w_1 w_2$	31
2.14	Grafo que busca exemplificar o buraco de comprimento cinco formada pelos vértices $v_1 v_4 v_2 w_2 v_3$	31
2.15	A garra formada pelos vértices $v v_1 w_2 w_3$	32
2.16	Grafo que busca exemplificar o buraco de comprimento cinco formado pelos vértices $v_1 w_3 w_1 v_2 w_3$	33
2.17	Exemplos de grafos.	36
2.18	Construindo o grafo G através de G_0 e G_1	36

2.19	Grafo que busca exemplificar a tentativa de uma coloração elementar para G_1	37
2.20	Subgrafos induzidos do grafo G	37
2.21	Estágios de uma coloração elementar para o grafo H_1	38
2.22	Grafo que busca exemplificar que toda aresta comum de G_0 estende para uma única clique maximal em G	38
2.23	Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar gerado no Caso 1.	40
2.24	Grafo que busca exemplificar a garra gerada no Caso 2.	41
2.25	Grafo que busca exemplificar a garra em G	42
2.26	Grafo que busca exemplificar a hipótese em que N não é um corte-clique.	43
2.27	Grafo que busca exemplificar a garra gerada em F^* , supondo que K_v não é uma clique.	43
2.28	Grafo que busca exemplificar a garra gerada em F^* , supondo que K_v tem um único vértice x	44
2.29	Grafo que busca exemplificar a garra gerada em F^* , supondo que $K_v = K_w$	44
2.30	Grafo que busca exemplificar o menor dos caminhos estendidos $u_1u_2 \dots u_k$ no buraco F^*	45
2.31	Grafo que busca exemplificar a garra v_2v_1vz , gerada em G	46
2.32	Grafo que busca exemplificar a garra v_3vv_4z , gerada em G	46
2.33	Grafo que busca exemplificar a garra $v_2v_1zv_3$, gerada em G	47
2.34	Grafo que busca exemplificar a garra zv_2v_3 , gerada em G	47
2.35	Grafo que busca exemplificar a garra $zv_iv_2u_2$, gerada em G , se $zv_i \in E$, com $i = 4$	48
2.36	Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar $v_1zv_3v_4 \dots v_{2t}$, gerado em G	48
2.37	Grafo que busca exemplificar o caminho $u_0u_1 \dots u_ku_{k+1}$ gerado em F^*	49
2.38	Subgrafos induzidos do grafo G	49

2.39	Grafo que busca exemplificar a rotulação dos vértices.	50
2.40	Grafo que busca exemplificar a garra v_2v_1vw , gerada em G	51
2.41	Grafo que busca exemplificar a garra $v_3v_1v_4$, gerada em G	51
2.42	Grafo que busca exemplificar a rotulação dos vértices. Com $G' \subset G$.	52
2.43	Grafo que busca exemplificar a garra wv_1v_4 , gerada em G	53
2.44	Grafo que busca exemplificar a garra $v_2v_1vv_3$, gerada em G . . .	53
2.45	Grafo que busca exemplificar a garra $v_3v_2v_4v$, gerada em G . . .	54
2.46	Grafo que busca exemplificar a garra yxv_1v_3 (com $v_1, v_3 \in N(y)$), gerada em G se x é não-adjacente a v_1 e a v_2	55
2.47	Grafo que busca exemplificar o que acontece quando K_2 não é uma clique comum.	55
2.48	Grafo que busca exemplificar (com $i = 1$) que e_1 e e_2 têm a mesma cor, se $x_1 \in H$ e $x_2 \in H$	57
2.49	Grafo que busca exemplificar a garra $v_2v_1v_3x_2$, gerada em G . . .	57
2.50	Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar $v_2v_3 \dots v_ix_2x_i$ (com $i = 4$), gerado em G , se i for par.	58
2.51	Grafo que busca exemplificar garra $x_1x_2v_1v_3$, gerada em G	58
2.52	O buraco ímpar $v_1x_1x_2v_5 \dots v_{2t}$, gerado em G se x_2 for adjacente aos vértices v_3, v_4 e v_5	58
2.53	Exemplo que busca exemplificar a conclusão do Caso 2.2.	59
2.54	Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar gerado em G , se i for ímpar. Aqui $i = 3$	59
2.55	Grafo que busca exemplificar a garra x_1x_2yz gerada em G , su- pondo que $y = v_1$ e $z = v_i$, para $i = 4$	60
2.56	Grafo que busca exemplificar a garra $x_2x_1x_3x$, gerada em G , se $x \in K$ não é adjacente nem a x_1 e nem a x_3	60
2.57	Grafo que busca exemplificar a garra $v_3v_2x_1v_4$, gerada em G . . .	61
2.58	Grafo que busca exemplificar a garra $v_4v_3x_3v_5$, gerada em G . . .	61
2.59	Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar $x_1x_2x_3v_6v_1$ gerado em G no Caso 1.	62

2.60	Grafo que busca exemplificar que a aresta v_3v_4 é especial.	62
2.61	Grafo que busca exemplificar que as arestas v_1v_2 e v_jv_{j+1} , com $j = 4$, têm cores diferentes.	62
2.62	Grafos que buscam exemplificar a coloração das arestas de G , quando G possui vértices gêmeos x e y e $G - x$ é elementar. . .	63
2.63	Exemplo de uma coloração elementar, seguindo o caminho proposto por Chvátal e Sbihi.	64
2.64	Exemplo de aplicação do algoritmo de Whitesides.	67
2.65	Exemplo da aplicação do algoritmo utilizado por Hayward.	68
2.66	(a) Exemplo de grafo peculiar; (b) Exemplo de grafo peculiar com os vértices rotulados.	71
2.67	Exemplo de um subgrafo induzido F , de G	72
2.68	Exemplo de um grafo G para o caso em que algum vértice x fora de F tem dois vizinhos em F que são não-adjacentes entre si. . .	73
2.69	Grafos que buscam exemplificar as possíveis garras centradas em N_2	73
2.70	Grafos que buscam exemplificar as possíveis garras centradas em N_1	73
2.71	Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1c_1c_2b_2$	74
2.72	Grafos que buscam exemplificar que $K_2 - y$ é um corte-clique. . .	74
2.73	Grafos que buscam exemplificar que $(K_2 - y) \cup D_1$ é um corte-clique. .	74
2.74	Grafos que buscam exemplificar que $(K_1 - y) \cup D_2$ é um corte-clique. .	75
2.75	Grafo que busca exemplificar o buraco $xa_1d_1d_2c_2$	75
2.76	Grafo que busca exemplificar o buraco $xa_1c_1d_2b_2$	75
2.77	Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1d_1c_2a_2$	76
2.78	Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1d_1c_2d_2$	76
2.79	Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1c_1d_2b_2$	76
2.80	Grafo induzido pelos vértices: $x, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$	76

2.81	Exemplo de um grafo G para o caso em que nenhum vértice $x \in V(G)$ fora de F tem dois vizinhos em F que são não-adjacentes entre si.	77
2.82	Grafo que busca exemplificar o caminho $u_1u_2 \dots u_r$, com $r=5$	77
2.83	Grafo que busca exemplificar a garra $xu_1u_iu_r$, com $i = 3$ e $r = 5$	78
2.84	Grafo que busca exemplificar o caminho v_1, v_2, \dots, v_s , com $s = 3$	79
2.85	Grafo que busca exemplificar o buraco $v_1v_2 \dots v_su_{r-1} \dots u_2$, com $v_1 = u_1$ e $v_s = u_r$, para $s = 3$ e $r = 5$	79
2.86	Exemplo de um grafo G , com $r = 4$	79
2.87	Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar $w_1w_2 \dots w_tu_3u_2$, com $t = 3$	80
2.88	Exemplo para o Observação 3.2.	81
2.89	Grafo que busca exemplificar a negação da Observação 3.3.	81
2.90	Grafo que busca exemplificar a negação da Observação 2.10.	82
2.91	Grafos que buscam exemplificar a negação da Observação 2.11.	82
2.92	Exemplo de um grafo peculiar.	83
3.1	As cinco maravilhas do mundo não-elementar: (a) pirâmide, (b) farol, (c) mausoleo, (d) jardim e (e) colosso.	89
3.2	Exemplo de que a operação de compressão é inversa à operação de aumento.	90
3.3	O grafo D considerando as cliques K_1 e K_2	91
3.4	Grafos que buscam exemplificar a garra $v_rv_0v_jv_k$ gerada em G , com $r = 1$, $j = 3$ e $k = 5$	92
3.5	Grafos que buscam exemplificar a garra $v_kv_xv_rv_j$ gerada em G , com $r = 4$, $j = 2$ e $k = 5$	92
3.6	Grafos que buscam exemplificar o colosso $v_0v_1v_2v_3v_4v_kv_x$ gerado em G , com $k = 5$	93
3.7	Grafos que buscam exemplificar a garra $v_kv_xv_rv_j$ gerada em G , com $k = 5$, $r = 2$ e $j = 4$	93

3.8	Grafo que busca exemplificar a não-adjacência entre v_k e v_2 . . .	93
3.9	Grafos que buscam exemplificar o buraco $v_k x v_0 v_2 v_3$ gerado em G , com $k = 5$	94
3.10	Grafos que buscam exemplificar a pirâmide $v_0 v_1 v_k v_2 v_4 x$ gerada em G , com $k = 5$	94
3.11	Grafos que buscam exemplificar a garra $v_0 x v_k v_j$ gerada em G , com $k = 5$	94
3.12	Grafo que busca exemplificar a garra $v_1 v_2 v_4 z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_4	95
3.13	Grafo que busca exemplificar: (a) A garra $v_1 v_0 v_3 z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_0 ; (b) O buraco $v_0 v_2 v_3 v_4 z$ gerado em G , se z é adjacente a v_0	96
3.14	Grafo que busca exemplificar a garra $v_3 v_2 v_4 z$ gerada em G , se v_2 é não-adjacente a z	96
3.15	Grafo que busca exemplificar a pirâmide $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_0	96
3.16	Grafo que busca exemplificar a garra $v_0 v_1 x z$ gerada em G , se z é não-adjacente a x	97
3.17	Grafo que busca exemplificar o jardim $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 x z$ gerado em G , se z é adjacente a x	97
3.18	Grafos que buscam exemplificar: (a) A garra $v_2 v_0 v_3 z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_0 ; (b) A garra $v_0 v_1 x z$ gerada em G , se z é não-adjacente a x	98
3.19	Grafo que busca exemplificar a garra $z v_2 v_4 x$ gerada em x , se z é adjacente a v_4	98
3.20	Grafo que busca exemplificar o farol $v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 x z$ gerado em G	98
3.21	Grafos que buscam exemplificar: (a) O buraco $v_0 v_2 v_3 v_4 z$ gerado em G , se z é adjacente a v_0 ; (b) O buraco $x v_0 v_1 v_4 z$ gerado em G , se z é adjacente a x	99

3.22 Grafo que busca exemplificar o mausoleo $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ gerado em G	99
3.23 Grafo que busca exemplificar a garra azv_2v_4 gerada em G , se algum vértice $z \in Z$ é adjacente a algum vértice $a \in A$	100
3.24 Grafo que busca exemplificar o colosso $abcv_1v_2v_3v_4$ gerado em G , se b é não-adjacente ao vértice c	101
3.25 Grafo que busca exemplificar o buraco bcv_4av_2 gerado em G , se b é adjacente a c	101
3.26 Grafo que busca exemplificar a garra v_0wux gerada em G , se A_1 não é uma clique.	102
3.27 Grafo que busca exemplificar a garra v_1v_0wu gerada em G , se w e u são não-adjacentes.	102
3.28 Grafo que busca exemplificar a garra v_0wux gerada em G , se w e u são adjacentes.	102
3.29 Grafos que buscam exemplificar: (a) A garra v_0xsw gerada em G , se s e x são não-adjacentes; (b) A garra v_1swu gerada em G , se s e u são adjacentes.	103
3.30 Exemplo para o Caso 1: $G = H$	104
3.31 Exemplo para o Caso 2: $G \neq H$	105
3.32 A pirâmide G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$	106
3.33 O farol G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$	106
3.34 O mausoleo G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$	106
3.35 O jardim G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$	107
3.36 O colosso G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$	107
3.37 Um grafo elementar G e seu esqueleto H	108
3.38 Grafos que buscam exemplificar que se o par X_iY_i é completo, a i -ésima aumento de um grafo é equivalente a multiplicação dos vértices x_i e y_i de H . Em particular $i = 1$ e H' o grafo obtido de H multiplicando os vértices x_1 e y_1	109

3.39	Grafos que buscam exemplificar que se Q é uma clique pseudo-maximal de H contendo x_i e não y_i , então $N(x_i'') \cap H = Q$, quando $x_i'' \in X_i$ é um vértice sem adjacências em Y_i . Em particular $i = 1$ e $G \oplus i$	110
3.40	Grafos que buscam exemplificar o caso em que devemos incluir uma aresta pendente em B . Onde v_Q é o vértice de B que corresponde a Q de H e em particular $i = 1$	110
3.41	Grafos que buscam exemplificar os aumentos feitos no grafo H até conseguir o grafo G . Em particular $i = 1$	111
3.42	O grafo H com seu H^-	111
3.43	Grafos que buscam exemplificar as cliques maximais de G	112
3.44	Grafos que buscam exemplificar como encontrar as cliques normais de um grafo G	113
3.45	Grafo que busca exemplificar os átomos planos de H . Neste exemplo os átomos planos de H são triviais.	114
3.46	Grafos que buscam exemplificar que a vizinhança de U em G são duas cliques disjuntas e não adjacentes, quando U é um átomo simplicial em H	115
3.47	Exemplo das moléculas de um grafo G	117
3.48	Grafo que busca exemplificar a coloração das arestas entre duas moléculas adjacentes, quando somente um dos pares $\{X, Y\}$, $\{Y, U\}$ e $\{U, W\}$ é um aumento.	120
3.49	Grafo que busca exemplificar a coloração das arestas entre as moléculas adjacentes em G quando \hat{U} é um átomo simplicial em H	121
3.50	Grafos que buscam exemplificar a coloração das arestas entre as moléculas adjacentes em G quando \hat{X} e \hat{Y} são átomos não-simpliciais em H	122
3.51	Grafos que buscam exemplificar que se as arestas dentro de uma clique normal não têm a mesma cor, não é possível encontrar uma coloração elementar para um grafo G	123

3.52 Grafos que buscam exemplificar que as arestas coloridas em X_i e Y_i têm a mesma cor, que é diferente da cor das X_iY_i -arestas. 123

3.53 Grafo que busca exemplificar que K^* é bipartido incompleto quando em K^* contém uma X_iY_i -aresta. 124

3.54 Grafo que busca exemplificar a coloração das arestas entre M e $N_G(M) - K$ 125

3.55 Grafo que busca exemplificar que as arestas incidentes em K , mas não dentro de K , são verdes. 125

3.56 Grafos que buscam exemplificar : Um grafo G elementar; as moléculas de G e seu esqueleto H 127

3.57 Grafos que buscam exemplificar como construir o grafo H^+ através de G ou de H 127

3.58 Grafo que busca exemplificar uma coloração elementar para um grafo cobipartido G 129

3.59 Grafos que buscam exemplificar uma coloração elementar, nos moldes do Teorema 3.4, para um grafo cobipartido G 129

4.1 Grafos: (a) icosa(0),(b) icosa(-1) ou (c) icosa(-2). 133

4.2 Grafos: (a) O grafo H_1 , (b) Um exemplo do grafo $H_1 - X$, em particular $X = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ 133

4.3 (a) Exemplo da representação de um grafo de intervalo circular e (b) o grafo de intervalo circular dessa representação. 134

4.4 H : O grafo K_6 com um vértice v_0 adjacente ao vértice $v_1 \in V(K_6)$. 135

4.5 Uma extensão de $L(K_6)$ 136

4.6 (a) O grafo H_5 para $n = 2$ e (b) O grafo $H_5 - X$, em particular $X = \{a_1, b_1\}$ 137

4.7 (a) Grafo H_4 para $n = 2$ e (b) O grafo $H_6 - X$, em particular $X = \{a_1, b_1, c_2\}$ 137

4.8 Exemplo de um grafo prismatic (G) e seu complementar (\bar{G}), um grafo antiprismatic. 138

4.9	Exemplo de uma orientação cíclica para os triângulos S e T . . .	139
4.10	O grafo rodador, P_1	140
4.11	O grafo torcido, P_2	140
4.12	W-join, onde $A, Z, S_1, S_2, C_1, C_2 \subseteq V(G)$, sendo C_1 e C_2 cliques.	141
4.13	0-join.	142
4.14	1-join.	142
4.15	2-join generalizado.	143
4.16	6-join.	144

Capítulo 1

Introdução

Um grafo é dito *sem garras* se ele não admite como subgrafo induzido a garra (veja na Figura 1.1).

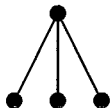


Figura 1.1: Garra.

A motivação para estudar as propriedades dos grafos sem garras surgiu da caracterização dos grafos linha dada por Beineke em [1, 2], isto por que a classe dos grafos sem garras contém propriamente a classe dos grafos linha. O interesse nesta classe de grafos se intensificou entre as décadas de 70 e 80. Durante este período alguns resultados importantes sobre esses tipos de grafos foram observados; entre outros, podemos citar que em 1976, Parthasarathy e Ravindra [33] provaram que todo grafo Berge sem garra, é perfeito. Mais tarde em 1984, Giles et al [21] apresentaram uma prova alternativa deste fato. Ambas as provas foram baseadas em propriedades de grafos minimalmente imperfeitos, não explorando a estrutura dos grafos Berge sem garras. Ainda em 1984, Hsu e Nemhauser [25] apresentaram um algoritmo polinomial que determina uma clique ponderada máxima e uma coloração mínima para todos os grafos perfeitos e sem garras. Recentemente em [8], Chudnovsky e Seymour mostraram que todo grafo Berge

é perfeito. Isso não invalida os resultados obtidos anteriormente em [33] e [21], pois eles possibilitaram que se estudasse com mais profundidade a estrutura dos grafos em questão.

Faz parte da história dos grafos sem garras que Abdellah Ben Rebea comunicou a seus colegas em Grenoble que havia descoberto uma maneira de achar anti-buracos ímpares em um grafo sem garras e sem buracos ímpares. Infelizmente ele morreu em um acidente de carro antes de descrever o seu método. Em 1988, Chvátal e Sbihi [16] desenvolveram um algoritmo polinomial que resolveu o problema de reconhecimento de grafos Berge sem garras. Esse algoritmo é baseado em um teorema de decomposição que descreve a estrutura desses grafos. Este trabalho homenageia Abdellah Ben Rebea, usando inclusive um lema de sua autoria.

Quase uma década depois, estendendo os estudos de Chvátal e Sbihi, Maffray e Reed em [31] completaram os estudos sobre a estrutura dos grafos perfeitos e sem garras, apresentando resultados importantes que são citados e usados inclusive em [28, 14, 15].

Recentemente (a partir de 2006), Chudnovsky e Seymour formularam uma série de artigos, [15, 9, 10, 11, 12, 13], que buscam descrever de um maneira geral a estrutura de todos os grafos sem garras, e para isso apresentaram algumas classes básicas desses tipos de grafos, obtendo assim um teorema de decomposição para a classe dos grafos sem garras.

O objetivo desta dissertação foi de apresentar, com detalhes, os resultados sobre grafos Berge e sem garras e descrever de uma maneira sucinta os estudos mais recentes sobre os grafos sem garras em geral, apresentando um texto de forma mais clara e simples para que se possa conhecer melhor esta classe de grafos.

O texto foi organizado em cinco capítulos. No Capítulo 1, são apresentadas as definições básicas e notações utilizadas no decorrer da dissertação, assim como uma breve introdução sobre grafos perfeitos e grafos linha.

No Capítulo 2, apresentamos os estudos feitos por Chvátal e Sbihi [16] sobre os grafos Berge e sem garras. Mostramos que um grafo sem garras é Berge se e somente se ele pode ser decomposto, via corte-clique, em dois tipos de grafos indecomponíveis, chamados de elementar e peculiar; e que baseado nisso, os autores produziram um algoritmo em tempo polinomial para o reconhecimento de grafos Berge e sem garras. Vimos também que eles apresentam um caminho para obter uma coloração elementar (obviamente para os grafos que são elementares) para os grafos Berge, sem garras e sem corte-clique que possuam certas propriedades.

No Capítulo 3, como extensão dos estudos apresentados por Chvátal e Sbihi [16], vimos uma caracterização completa dos grafos elementares. Mostramos em detalhes os passos de uma coloração elementar para todos os grafos Berge e sem garras, tendo como base uma definição dada através do grafo linha de um multigrafo bipartido (que chamamos de esqueleto do grafo). Conseguimos assim descrever os passos de uma coloração elementar para todos os grafos, analisando separadamente os grafos não cobipartidos e os grafos cobipartidos.

No Capítulo 4, descrevemos em linhas gerais os estudos de Chudnovsky e Seymour [15, 9, 10, 11, 12, 13] sobre a estrutura geral dos grafos sem garras e apresentamos o teorema de decomposição como consequência desses estudos.

Finalmente, apresentamos no Capítulo 5, as conclusões obtidas nesta dissertação.

1.1 Definições e Notações Básicas

Nesta seção estão as definições básicas de grafos utilizadas nesta dissertação. Nossa idéia é ter as definições e notações mais importantes para a dissertação agrupadas em uma seção, a fim de facilitar uma eventual consulta por parte do leitor. Porém, quando acharmos necessário, algumas definições serão repetidas e outras serão introduzidas ao longo do texto.

Um **grafo simples**, ou simplesmente um **grafo** é um par ordenado $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito não vazio de **vértices**, e E é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados **arestas**. A aresta e formada pelos vértices u, v é representada por $e = uv$, ou por uv , ou simplesmente por e . Quando conveniente escrevemos $V(G)$ e $E(G)$ representando o conjunto de vértices e arestas, respectivamente, de um grafo G . Utilizaremos a notação $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$ para denotarmos a cardinalidade de $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente.

Dois vértices u, v de um grafo G são **adjacentes** se uv é uma aresta. Neste caso, u e v são chamados **vértices extremos** da aresta uv , dizemos também que o vértice u **vê** o vértice v ou vice-versa. Caso contrário os vértices u e v são chamados **não-adjacentes**, ou dizemos que u **perde** v , ou que uv é uma **não-aresta**.

Uma aresta uv é dita **incidente** aos vértices u e v .

Duas arestas são **adjacentes** se têm pelo menos um vértice extremo em comum.

Na **representação geométrica** (no plano) de um grafo $G = (V, E)$, cada vértice $v \in V(G)$ está associado a um ponto no plano e cada aresta $uv \in E(G)$ está associada a uma linha que une os pontos correspondente aos vértices u e v .

Um grafo é dito **planar** se ele admite uma representação geométrica na qual não há cruzamento de linhas (arestas).

Um grafo que é formado por apenas um vértice é dito um **grafo trivial**.

Um **grafo nulo** G é um grafo tal que para todo par de vértices distintos de G , eles são não-adjacentes.

Chamamos de *arestas paralelas* duas arestas que possuem os mesmos extremos.

Se relaxarmos a definição de grafos simples e permitirmos a existência de pares não ordenados repetidos (arestas paralelas) e a existência de pares não ordenados (laços), temos então um *multigrafo*.

Sejam $G = (V, E)$ e $H = (V, E)$ dois grafos. Nós chamamos G e H *isomorfos*, se há uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ com $xy \in E(G) \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E(H)$ para todo $x, y \in V(G)$. Este mapeamento é chamado *isomorfismo*.

Definimos a *união* de dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ como sendo o grafo $G = G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Se H é um subgrafo de G , $V(H) \subseteq V(G)$ e $V(H) \neq V(G)$ então H é dito um *subgrafo próprio* de G .

Dado um subconjunto H de $V(G)$ o *subgrafo de G induzido por H* , representado por $G[H]$, tem H como conjunto de vértices, e dois vértices são adjacentes em $G[H]$ se e somente se são adjacentes em G .

O *complementar* \bar{G} de um grafo G é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de G e dois vértices são adjacentes em \bar{G} se e somente se são não-adjacentes em G .

Um *passeio* em um grafo G é uma seqüência de vértices: $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$, para todo $1 \leq i \leq k - 1$. Em particular, se não há repetição de vértices o passeio é dito um *caminho*. O comprimento de

um caminho é dado pelo seu número de arestas. Um caminho de k vértices é denotado por P_k . Observe que P_k tem $k - 1$ arestas e logo possui comprimento $k - 1$.

Um *ciclo de comprimento k* é uma seqüência de vértices distintos $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$, tal que v_i é adjacente a v_{i+1} , para todo $i = 1, \dots, k - 1$, e v_k é adjacente a v_1 .

Uma *corda* em um caminho (ciclo) é uma aresta que é incidente a dois vértices não consecutivos do caminho (ciclo).

Um *buraco* é um ciclo, sem cordas, de comprimento maior ou igual a cinco. Um buraco de comprimento k é representado por C_k , $k \geq 5$. Observe que C_k tem k vértices e k arestas. O complementar de C_k , $k \geq 5$, é chamado de *anti-buraco*, denotado por \bar{C}_k .

Um grafo G é dito *cíclico* quando G contém um ciclo como subgrafo induzido. Caso contrário, dizemos que G é *acíclico*.

Um conjunto S é *maximal (minimal)* em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém propriamente S (que está contida propriamente em S) não satisfaz P .

Dizemos que dois conjuntos X e Y são *adjacentes* se existe pelo menos algum vértice de X adjacente a algum vértice de Y .

Um grafo é *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices, caso contrário ele é chamado de *desconexo* ou *não-conexo*.

Um *componente conexo* de um grafo desconexo G é um subgrafo induzido, conexo e maximal de G .

O grafo obtido de G pela **remoção do vértice** v é denotado por $G - v$. E as arestas incidentes a v deixam de existir.

O grafo obtido de G pela **remoção da aresta** e é denotado por $G - e$. Observe que neste caso, os vértices extremos desta aresta não deixam de existir.

O grafo obtido de G pela **remoção do subgrafo** H é denotado por $G - H$ e é o subgrafo induzido por $V(G) - V(H)$.

Um **grafo completo** G é um grafo tal que para todo par de vértices distintos de G , eles são adjacentes. Um grafo completo de k vértices é representado por K_n . Em particular o grafo completo com três vértices será chamado de **triângulo**.

Um **Diamante** é um grafo completo com quatro vértices sem uma aresta, isto é, um $K_4 - e$. Tal grafo pode ser representado geometricamente pela Figura 1.2.

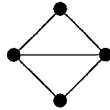


Figura 1.2: Diamante.

Uma **clique** K de um grafo G é um subconjunto de vértices de $V(G)$, tal que $G[K]$ é completo.

O **número clique** de um grafo $G = (V, E)$, representado por $\omega(G)$, é a cardinalidade de uma maior clique de G , isto é:

$$\omega(G) = \max\{|K| \mid K \subseteq V(G) \text{ e } K \text{ é uma clique de } G\}.$$

Chama-se **corte** de um grafo $G = (V, E)$ conexo, um subconjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ que se removido desconecta o grafo. Em particular se X for uma clique ele é chamado de **corte-clique**.

Uma **árvore** $T = (V, E)$ é um grafo acíclico e conexo. A árvore T é denominada enraizada quando algum vértice $v \in V(T)$ é escolhido como especial. Este vértice é então chamado de **raiz** da árvore. Em particular, cada um de seus vértices também pode ser chamado de **nó** da árvore.

Sejam v, w dois vértices de uma árvore enraizada T de raiz R . Se v pertence ao caminho de R a w em T , então denominamos v ancestral de w e w descendente de v . Em particular, se $(v, w) \in E(T)$ então v é **pai** de w e w é **filho** de v . Sejam z o pai de v e v o pai de w , denominamos z o **avô** de w . Dois vértices que possuem o mesmo pai são chamados de **irmãos**. A raiz R de uma árvore não possui pai, enquanto que todo $v \neq R$ possui um único pai. Uma **folha** é um vértice que não possui filhos. Uma árvore é chamada **árvore binária** se todo nó interno possui exatamente dois filhos.

A **vizinhança** de um vértice v de $V(G)$, representada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices que são adjacentes a v .

O **grau de um vértice** v é dado pela cardinalidade de $N(v)$.

Um vértice v é dito **isolado** se $N(v) = 0$.

Um vértice v é dito **simplicial** se $N(v)$ é uma clique.

Dois vértices são **gêmeos** se são adjacentes e possuem a mesma vizinhança.

Um vértice é **pendente** se tem exatamente um vizinho.

Uma aresta é **pendente** se um dos seus extremos é um vértice pendente.

Um subconjunto H de vértices de um grafo G é um *conjunto homogêneo* se todo vértice de $V(G) - H$ ou é adjacente a todo vértice de H ou é não-adjacente a todo vértice de H , e $|H| \geq 2$, $|V(G) - H| \geq 1$.

Um *átomo* é uma clique que é um conjunto homogêneo maximal. Consideramos que um átomo pode ser um único vértice e neste caso ele é chamado de *átomo trivial*.

Um átomo é *simplicial* se a sua vizinhança é uma clique.

Um átomo é *isolado* se a sua vizinhança é vazia.

Um átomo é *pendente* se sua vizinhança é um átomo.

Um *conjunto independente* ou *conjunto estável* de G é um subconjunto S de vértices de G tal que o subgrafo induzido $G[S]$ é nulo.

O *número de independência* de um grafo G , representado por $\alpha(G)$, é a cardinalidade do maior conjunto independente de G , isto é:

$$\alpha(G) = \max\{|V'| \mid V' \subseteq V(G) \text{ e } V' \text{ é um conjunto independente de } G\}.$$

Um grafo $G = (V, E)$ é *bipartido* se seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois conjuntos V_1, V_2 , isto é, $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tal que toda aresta de G tem um extremo em V_1 e outro em V_2 . Dizemos que (V_1, V_2) é uma bipartição de G . Note que V_1 e V_2 são conjuntos independentes de G . Um grafo é dito *bipartido completo* se é bipartido e possui uma aresta para cada par de vértices v_1, v_2 , sendo $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Denotamos por $K_{r,s}$ o grafo bipartido completo, onde $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$.

Um grafo $G = (V, E)$ é *k-multipartido*, $k \geq 2$ se $V(G)$ pode ser particionado em k conjuntos independentes V_1, V_2, \dots, V_k , não-vazios, tais que se $\{x, y\} \in E(G)$ então $x \in V_i$ e $y \in V_j$, $i \neq j$. G é *multipartido* se ele é

k -multipartido para algum $k \geq 2$. Em particular um grafo **bipartido** é um grafo 2-multipartido. G é **multipartido completo** se ele é multipartido e $\{x, y\} \in E(G)$ se e somente se $x \in V_i$ e $y \in V_j$, $i \neq j$.

O complemento \bar{G} de um grafo G bipartido com bipartição (V_1, V_2) é dito um grafo **cobipartido**. Vamos denotá-lo por $\bar{G} = (V_1, V_2; E)$. Note que V_1, V_2 são cliques em \bar{G} .

Uma **garra** é um grafo bipartido composto por quatro vértices e três arestas. Tal grafo pode ser representado geometricamente pela figura abaixo.



Figura 1.3: Garra.

Uma **coloração dos vértices** de um grafo é a atribuição de uma cor a cada vértice.

Uma **coloração própria dos vértices** de um grafo é a atribuição de uma cor a cada vértice, de modo que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

Uma **coloração ótima dos vértices** de um grafo é uma coloração própria que utiliza o menor número de cores possível.

O **número cromático** de um grafo G , representado por $\chi(G)$, é dado pelo número de cores utilizado numa coloração ótima dos vértices de G .

Uma **coloração das arestas** de um grafo é a atribuição de uma cor a cada aresta.

Uma **coloração própria das arestas** de um grafo é a atribuição de uma cor a cada aresta, de modo que arestas adjacentes tenham cores diferentes.

Observações:

Em algumas figuras desta dissertação representamos os subconjuntos de vértices de um grafo $G = (V, E)$ por caixas retangulares ou circulares. Supondo que X e Y são subconjuntos de $V(G)$, as adjacências entre X e Y são indicadas da seguinte maneira:

— *Uma única linha contínua entre X e Y* : todo vértice de X é adjacente a todo vértice de Y ;

— *Uma única linha pontilhada entre X e Y* : todo vértice de X é não-adjacente a todo vértice Y ;

— *Uma linha contínua e uma pontilhada entre X e Y* : os vértices de X são adjacentes parcialmente aos vértices de Y , isto é, existe pelo menos algum vértice de X adjacente a algum vértice de Y e algum vértice de X não-adjacente a algum vértice de Y ;

— *Não existe linha entre X e Y* : ou não temos informações sobre as adjacências entre X e Y , ou a informação não é relevante.

Além disso, se v é um vértice de $V(G)$ e $v \notin X$, representamos a relação entre v e os vértices de X do seguinte modo:

— *Uma linha contínua entre v e X* : o vértice v é adjacente a todos os vértices de X ;

— *Uma linha pontilhada entre v e X* : o vértice v é não adjacente a todo vértice de X ;

— *Uma linha contínua e uma pontilhada entre v e X* : o vértice v é adjacente parcialmente aos vértices de X , isto é, v é adjacente a algum vértice de X e não-adjacente a algum vértice de X ;

— *Não existe linha entre v e X* : ou não temos informações sobre as adjacências entre v e X , ou a informação não é relevante.

A mesma notação é usada para representar a relação de adjacência entre dois vértices $v, w \in V(G)$:

— *Uma linha contínua entre v e w* : vw é uma aresta;

— *Uma linha pontilhada entre v e w* : vw é uma não-aresta;

— *Uma linha contínua e uma pontilhada entre v e w* : vw pode ser uma aresta ou não, dependendo da conveniência, que será informada no texto.

— *Não existe linha entre v e w* : ou não temos informações sobre as adjacências entre v e w , ou a informação não é relevante.

Dentro das provas dos teoremas, lemas e etc. que compõem o corpo desta dissertação, utilizamos as figuras com molduras para destacá-las do texto e assim não confundir o leitor. E as figuras sem molduras são aquelas que não estão dentro de nenhuma prova.

1.2 Grafos Perfeitos

Nesta seção, introduziremos algumas informações sobre grafos perfeitos, buscando um melhor entendimento por parte do leitor dos capítulos que compõem o corpo desta dissertação.

Um grafo G é *perfeito* se para cada subgrafo induzido H de G , o número cromático de H , $\chi(H)$, é igual ao tamanho de sua clique máxima, $\omega(H)$.

Um grafo G é *minimalmente imperfeito* se G não é perfeito, mas todo subgrafo induzido próprio de G é perfeito.

O conceito de grafo perfeito, foi introduzido por Claude Berge em 1960. Nesta mesma época, ele propôs duas conjecturas sobre estes tipos de grafos, que despertaram muito interesse.

A conjectura fraca de grafos perfeitos: *Um grafo G é perfeito se e somente se \bar{G} é perfeito.*

A conjectura forte de grafos perfeitos: *Um grafo G é perfeito se e somente se G não contém buraco ímpar e nem anti-buraco ímpar, como subgrafo induzido.*

Um grafo que não contém buraco ímpar e nem anti-buraco ímpar, como subgrafo induzido, é chamado de *grafo Berge*. Logo, provar que todo grafo Berge é perfeito era equivalente a provar a conjectura forte para grafos perfeitos.

Em 1972, Lovász [29] provou o seguinte teorema :

Teorema 1.1 [29] *Um grafo G é perfeito se e somente se $\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$ para todo subgrafo induzido H de G .*

E como corolário imediato desse teorema obteve o resultado seguinte:

Teorema 1.2 [29] *Um grafo G é perfeito se e somente se \bar{G} é perfeito.*

Observe que o Teorema 1.2 é exatamente a conjectura fraca de grafos perfeitos.

Já a conjectura forte foi provada recentemente, em 2006, por Chudnovsky, Robertson, Seymour e Thomas [8], encerrando um dos mais famosos problemas em aberto da teoria dos grafos.

E 2005, Chudnovsky, Cornuéjols, Liu, Seymour e Vušković [7] apresentaram um algoritmo em tempo polinomial (com complexidade $O(n^9)$) para decidir se um grafo é Berge.

1.3 Grafos Linha

Seja $G = (V, E)$ um grafo. O *grafo linha* de G , denotado por $L(G)$, é o grafo construído a partir de G , onde os vértices de $L(G)$ são as arestas de G e dois vértices em $L(G)$ são adjacentes se suas respectivas arestas em G têm pelo menos um vértice extremo em comum. Nesses moldes dizemos que G é a *raiz linha* de $L(G)$. Um grafo G e o correspondente grafo linha $L(G)$ são mostrados na Figura 1.4.

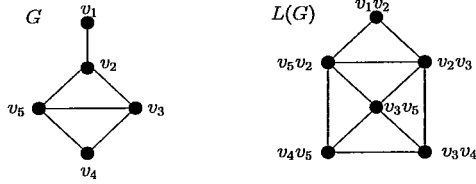


Figura 1.4: Grafo G e o seu grafo linha $L(G)$.

Em 1943, Krausz [26] apresentou uma caracterização para grafos linha. Como extensão desse resultado, ele forneceu uma forma de construção do grafo G a partir do grafo $H = L(G)$, porém este método não produz um algoritmo de tempo polinomial. Algum tempo depois, Hemminger [24] e Bermond e Meyer [4] apresentaram um teorema de caracterização de grafos linha em função de subgrafos proibidos, e a garra é uma desses subgrafos. Posteriormente, em 1974 um algoritmo mais eficiente que o anteriormente citado, com complexidade linear, foi introduzido por Lehot [27].

Nesta seção, nosso interesse é estudar a estrutura do grafo linha de um grafo bipartido e do grafo linha de um multigrafo bipartido, pois este estudo nos levará a resultados de grande relevância que servirão como base para o entendimento desta dissertação.

1.3.1 Grafos linha de grafos bipartidos

Em 1974, Harary e Holzmann [22] provaram o teorema de caracterização dos grafos linha de grafos bipartidos, que é o seguinte:

Teorema 1.3 [22] *Um grafo $G = (V, E)$ é um grafo linha de um grafo bipartido se e somente se ele não contém garra, nem diamante e nem buraco ímpar como subgrafo induzido.*

Com base no Teorema 1.3, Maffray e Reed [31] observaram que quando um grafo H não contém garra e nem diamante como subgrafo induzido, a vizinhança de todo vértice ou é uma clique (o vértice é simplicial) ou duas cliques sem arestas

entre elas. A partir dessa idéia, dado um grafo H com as propriedades desse teorema, é fácil encontrar sua raiz linha, B . Descreveremos a seguir tal método.

- Cada clique maximal de H é um vértice em B ;
- Ligue dois vértices em B se as suas cliques correspondentes em H têm pelo menos um vértice em comum;
- Finalmente, adicione uma aresta pendente para cada vértice simplicial de H e faça esta aresta incidir no vértice que representa a clique maximal (em B) contendo esse vértice.

Como H não contém buraco ímpar como subgrafo induzido, então B também não o tem como subgrafo induzido e assim B é bipartido. Pode-se verificar facilmente que $H = L(B)$ e o processo de construção de B é claramente polinomial.

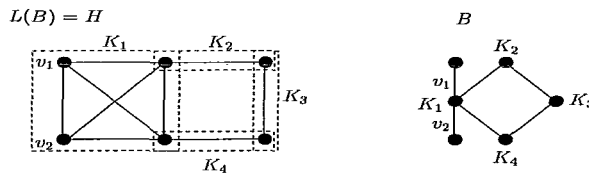


Figura 1.5: Grafos que buscam exemplificar o método para encontrar a raiz linha de um grafo linha de um grafo bipartido.

1.3.2 Grafos linha de multigrafos bipartidos

Para os casos em que H é um grafo linha de um multigrafo bipartido, Maffray e Reed [31] apresentam um outro método para encontrar a raiz linha, B , de H . Porém, antes de apresentarmos tal método é preciso estudar um pouco sobre a relação entre a presença de arestas paralelas em um grafo e a presença de vértices gêmeos em seu grafo linha. Arestas paralelas em um grafo são vértices gêmeos no grafo linha. Porém, a recíproca não é verdadeira em geral. Por exemplo, observe na Figura 1.6 que as arestas $e_1, e_2 \in E(B)$ são paralelas, logo os vértices correspondentes $e_1, e_2 \in V(H)$ são gêmeos. Por outro lado, os vértices

$e_3, e_5 \in V(H)$ são gêmeos, mas as aresta correspondentes $e_3, e_5 \in E(B)$ não são paralelas.

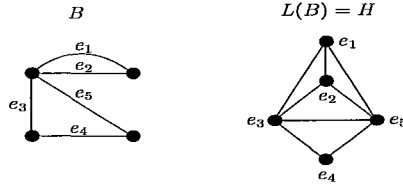


Figura 1.6: Grafos que buscam exemplificar que as arestas paralelas em um grafo são vértices gêmeos em seu grafo linha, mas a recíproca não é verdadeira em geral.

Porém em grafos bipartidos a recíproca só não vale por causa de um pequeno caso de degeneração que pode ser corrigido como veremos a seguir.

Temos que se B é um grafo bipartido, dois vértices x e y são gêmeos em $L(B) = H$ se e somente se ou (a) ou (b) é satisfeito, onde:

- (a) as arestas correspondentes aos vértices x e y em B são paralelas;
- (b) as arestas correspondentes aos vértices x e y em B são ambas arestas penderes e incidentes em um mesmo vértice em B .

Vamos “ajustar” nosso grafo para que usemos somente o item (a). Observe que para o caso (b) podemos identificar os vértices penderes dessas duas arestas penderes. O grafo linha não mudará e agora caímos no caso (a). Estendendo essa idéia, procedemos da seguinte maneira:

- Para cada vértice b_i (com $1 \leq i \leq n$), de B , que tem vários vizinhos penderes, seja m_{b_i} a multiplicidade total das arestas que ligam b_i a seus vizinhos penderes,
- Troque esses vizinhos penderes por um novo vértice b'_i e coloque m_{b_i} arestas paralelas entre b_i e b'_i .

Depois de fazer isso para todos os vértices relevantes, obtemos um novo grafo bipartido B' tal que $L(B) = L(B')$ com a propriedade que quaisquer vértices gêmeos em $L(B')$ são arestas paralelas em B' , isto é, os átomos de $L(B')$ são exatamente os conjuntos maximais de arestas paralelas em B' .

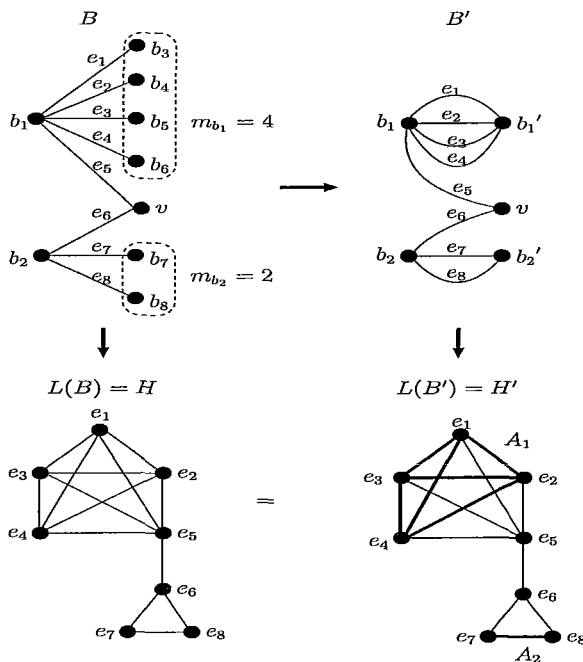


Figura 1.7: Grafos que buscam exemplificar o ajuste de grafos bipartidos que possuem arestas pendentes. Com A_1 e A_2 sendo átomos em H' .

Em particular, os átomos simpliciais de $L(B')$ correspondem a um conjunto de vértices pendentes de B que têm a mesma vizinhança. Podemos observar isto na Figura 1.7, onde os únicos subconjuntos de vértices pendentes em B , a saber, $\{b_3, b_4, b_5, b_6\}$ e $\{b_7, b_8\}$, correspondem respectivamente aos átomos A_1 e A_2 em $L(B')$.

Um grafo em que todos os vértices têm no máximo um vizinho pendente é chamado de grafo *sensato*.

Como acabamos de ver, todo grafo linha de um grafo bipartido B é também igual ao grafo linha de multigrafo bipartido sensato. Assim, vamos assumir nesta dissertação que todos os grafos, cujos grafos linha estamos considerando, são sensatos.

Ainda como conseqüências dos fatos estudados, sobre os átomos no grafo linha de um multigrafo bipartido, $L(B) = H$, temos:

— Pela homogeneidade dos átomos, dois átomos adjacentes pertencem a exatamente uma clique maximal; e quaisquer duas cliques maximais se interceptam em no máximo um átomo;

— Todo átomo pertence a no máximo duas cliques maximais. Pois se considerarmos um grafo H contendo um átomo que contraria a afirmação acima, veremos que H não é um grafo linha de um multigrafo bipartido. Por exemplo, seja A um átomo de um grafo H que pertence a três cliques maximais e B a raiz linha de H . Observe, na Figura 1.8 abaixo, que em H o vértice e_5 é adjacente aos vértices e_2 e e_3 mas não é adjacente aos vértices e_1 e e_4 , porém em B se fizermos a aresta e_5 adjacente as arestas e_2 e e_3 , utilizando para isso o vértice extremo do lado esquerdo, ela também será adjacente a aresta e_1 e se fizermos o mesmo utilizando o vértice extremo do lado direito a aresta será adjacente a aresta e_4 , que é um absurdo.

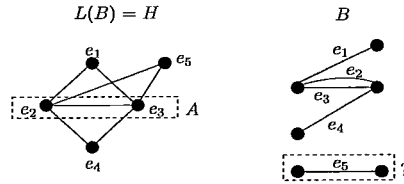


Figura 1.8: Grafos que buscam exemplificar que se um átomo em $L(B) = H$ pertence a mais de duas cliques maximais, então H não é um grafo linha de um multigrafo bipartido.

— Todo átomo simplicial em $L(B) = H$ corresponde a um vértice pendente em B ; pois caso contrário B não seria sensato.

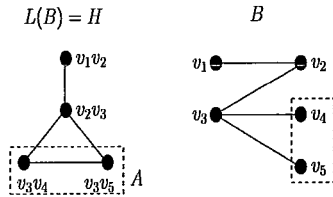


Figura 1.9: Grafos que buscam exemplificar que se um átomo simplicial em $L(B) = H$ não corresponde a um vértice pendente em B , então B não é sensato.

— Se A é um átomo não-simplicial então $N(A)$ é formado por duas cliques disjuntas sem arestas entre elas. De fato, se $N(A)$ é formada por mais de duas cliques disjuntas, então H não é um grafo linha de um multigrafo bipartido (Figura 1.8). E se $N(A)$ é formada por duas cliques disjuntas com arestas entre elas, H também não é um grafo linha de um multigrafo bipartido (Figura 1.10).

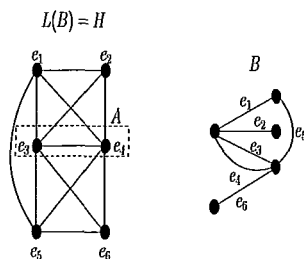


Figura 1.10: Grafos que buscam exemplificar que se um átomo é não-simplicial e $N(A)$ é formado por duas cliques disjuntas com arestas entre elas, então B não é um grafo linha de um multigrafo bipartido.

Em particular, se A está em uma clique maximal Q , há pelo menos um átomo em $H - Q$ que é adjacente a A e não-adjacente a todos os vértices de $Q - A$.

Outro fato importante citado por Maffray e Reed [31] diz que, um grafo H é um grafo linha de um multigrafo bipartido B se e somente se quando cada átomo A_i (em H) é reduzido a um vértice x_{A_i} , o grafo obtido dessa redução (que chamaremos aqui de H') é o grafo linha de um grafo simples (que aqui chamamos de B'). Então podemos obter a raiz linha de H multiplicando cada aresta x_{A_i} de B' pelo tamanho do átomo A_i correspondente em H .

Para exemplificar o parágrafo acima, considere B um multigrafo bipartido; H o grafo linha de B ; H' o grafo construído através da redução dos átomos de H ; B' a raiz linha de H' ; e B'' o grafo construído através de B' multiplicando cada aresta x_{A_i} de B' pelo tamanho do átomo A_i de H (Figura 1.11).

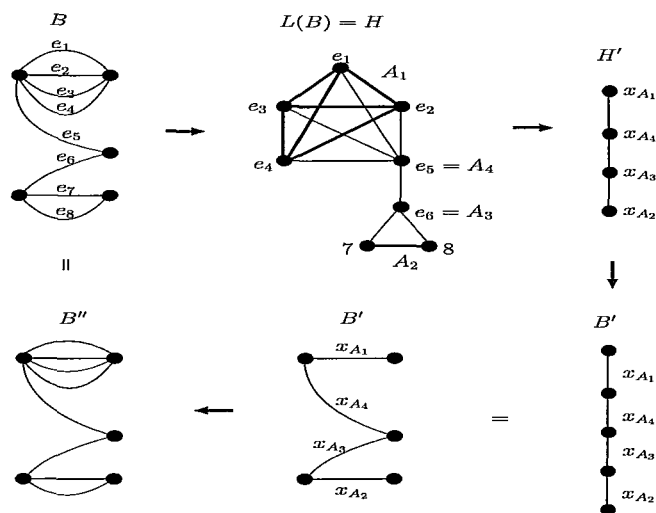


Figura 1.11: Grafos que buscam exemplificar que H é um grafo linha de um multigrafo bipartido B se e somente se cada átomo A_i (em H) pode ser reduzido a um vértice x_{A_i} .

Agora, observe que se x e y são dois vértices de grau três em um diamante em $L(B)$, eles necessariamente representam arestas paralelas em B , e assim são gêmeos. Logo, $L(B)$ não pode conter, como subgrafo induzido, os grafos chamados de gema e 4-rodas apresentados na Figura 1.12. Por outro lado, se um grafo não contém gema, nem 4-rodas e nem garra como subgrafo induzido então os dois vértices de grau três em um diamante devem, necessariamente ser gêmeos. Baseados nesta idéia Maffray e Reed [31] enunciaram o Teorema 1.4.

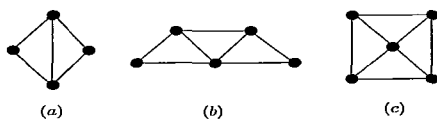


Figura 1.12: (a) Diamante, (b) Gema e (c) 4-rodas.

Teorema 1.4 [31] *Um grafo H é o grafo linha de um multigrafo bipartido se e somente se H não contém garra, nem gema, nem 4-rodas e nem buraco ímpar como subgrafo induzido.*

O método utilizado para encontrar a raiz linha de um grafo linha de um multigrafo bipartido tem como base o Teorema 1.4. Logo, dado um grafo linha H que satisfaça as propriedades do Teorema 1.4, podemos obter a raiz linha bipartida de H como segue:

- Crie um vértice x_Y para cada clique maximal Y de H ;
- Se duas cliques maximais Y e Z têm pelo menos um vértice em comum, coloque $|Y \cap Z|$ arestas paralelas entre x_Y e x_Z ;
- Para cada átomo simplicial S , em H , crie um vértice x_{S_i} e acrescente $|S_i|$ arestas paralelas entre x_{S_i} e $x_{S_i \cup N(S_i)}$, com $1 \leq i \leq n$.

Para exemplificar o método acima, considere Y, Z, W e X cliques maximais em H , tal que, $v_1, v_2, v_3, v_4 \in Y$; $v_3, v_5 \in Z$; $v_5, v_6, v_7 \in W$ e $v_4, v_6 \in X$. Sejam, também, S_1 e S_2 átomos simpliciais, tal que $v_1, v_2 \in S_1$ e $v_7 \in S_2$. Então, utilizando o método acima descrito, temos:

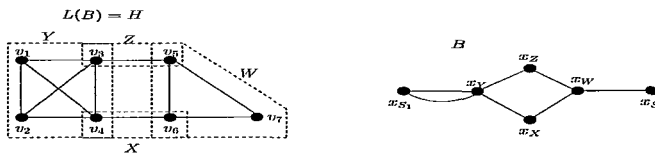


Figura 1.13: Grafos que buscam exemplificar o método para encontrar a raiz linha de um grafo linha de um multigrafo bipartido.

O Teorema 1.4 pode ser estendido. Para isso considere os dois grafos apresentados na Figura 1.14, chamados de grafo D e pirâmide.

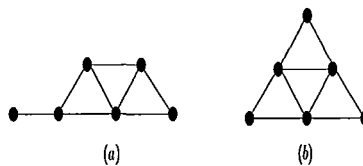


Figura 1.14: (a) O grafo D ; (b) O grafo pirâmide.

Teorema 1.5 [31] *Um grafo conexo G é ou o grafo linha de um multigrafo bipartido ou um grafo cobipartido se e somente se ele não contém garra, nem buraco ímpar, nem anti-buraco ímpar, nem D e nem pirâmide como subgrafo induzido.*

Capítulo 2

Grafos Berge e sem garras

Uma *garra* é um grafo bipartido composto por quatro vértices e três arestas (veja na Figura 2.1). Um grafo é *sem garras* se ele não admite como subgrafo induzido a garra.

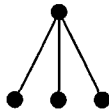


Figura 2.1: Garra.

A classe dos grafos sem garras é uma classe vasta que contém em particular a classe dos grafos linha. Neste capítulo vamos nos restringir aos grafos Berge e sem garras. Aqui abordaremos com detalhes o problema de reconhecimento desses tipos de grafos e neste sentido apresentamos os resultados obtidos por Chavátal e Sbihi [16] sobre os grafos Berge e sem garras, inclusive mostrando que esse reconhecimento é feito em tempo polinomial.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na Seção 2.1 introduziremos alguns resultados preliminares, na Seção 2.2 provamos em detalhes o teorema de reconhecimento de grafos Berge e sem garras dado por Chvátal e Sbihi [16], na Seção 2.3 apresentamos um algoritmo em tempo polinomial para o reconhecimento desses tipos de grafos, e na Seção 2.4 mostramos em detalhes que todo grafo Berge e sem garras pode ser decomposto, via corte-clique, em dois grafos

indecomponíveis chamados *elementar* e *peculiar*; e veremos que a estrutura dos grafos peculiares é completamente descrita pela sua definição.

2.1 Preliminares

Um grafo G é chamado *elementar* se suas arestas podem ser coloridas com duas cores, de tal maneira que todo P_3 tenha suas duas arestas coloridas com cores distintas. Tal coloração é chamada de *coloração elementar*.

Seja G um grafo, o grafo *Gallai* de G , denotado por $Gal(G)$, é o grafo construído a partir de G onde os vértices de $Gal(G)$ são as arestas de G e existem arestas entre v e $w \in V(Gal(G))$ se v e w em G induzem um P_3 . Um grafo G e o correspondente grafo Gallai $Gal(G)$ são mostrados na Figura 2.2.

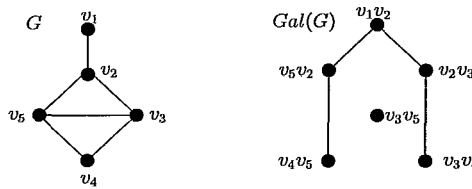


Figura 2.2: Grafo G e o seu grafo Gallai $Gal(G)$.

Proposição 2.1 [31] *Um grafo $G = (V, E)$ é elementar se e somente se $Gal(G)$ é bipartido.*

Prova: Por definição $E(G) = V(Gal(G))$. Suponha que G é um grafo elementar. Então as arestas de G podem ser coloridas com duas cores k (com $k = 1, 2$), logo podemos particionar essas arestas, de acordo com suas cores, em dois conjuntos $E_k(G)$. Assim $V(Gal(G))$ pode ser particionado em dois conjuntos $V_k(Gal(G))$ tal que $E_k(G) = V_k(Gal(G))$, $k = 1, 2$. E observe que para k fixo, $1 \leq i, j \leq n$ com $i \neq j$, se $e_i, e_j \in V_k(Gal(G))$ então e_i, e_j em $E_k(G)$ não formam um P_3 , portanto não existe arestas entre $e_i, e_j \in V_k(Gal(G))$ e com isso, $Gal(G)$ é bipartido.

Suponha agora que $Gal(G)$ é bipartido, então $V(Gal(G))$ pode ser particionado em dois conjuntos independentes $V_k(Gal(G))$ (com $k = 1, 2$) e também podemos afirmar que $Gal(G)$ é 2-colorível em vértices. Com isso, para $e_i, e_j \in V_k(Gal(G))$ (com $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$) e k fixo, temos que e_i, e_j em $E_k(G)$ não formam um P_3 . Portanto, G é 2-colorível em arestas e não existe um P_3 onde suas arestas sejam da mesma cor, logo G é elementar. ■

É fácil construir $Gal(G)$ e verificar se o mesmo é bipartido. Logo o reconhecimento de grafos elementares é polinomial.

Observação 2.1 [16] *Todo grafo elementar é Berge e sem garras.*

Prova: Provaremos que essa observação é verdadeira mostrando que: (i) a garra, (ii) o buraco ímpar e (iii) o anti-buraco ímpar não são grafos elementares.

(i) Seja o grafo H uma garra. $Gal(H)$ é claramente um K_3 (veja na Figura 2.3) logo não é um grafo bipartido então pela Proposição 2.1, H não é um grafo elementar.



Figura 2.3: Grafo H e o seu grafo Gallai $Gal(H)$.

(ii) Seja C_{2k+1} um buraco ímpar. Claramente $Gal(C_{2k+1})$ também é um buraco ímpar (veja na Figura 2.4), logo não é um grafo bipartido, então pela Proposição 2.1, C_{2k+1} não é um grafo elementar.

(iii) Seja \bar{C}_{2k+1} um anti-buraco ímpar formado pelos vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k+1}$ e as arestas $v_i v_j$ tal que $1 \leq i, j \leq 2k + 1$, com $i \neq j$. Pela construção de $Gal(\bar{C}_{2k+1})$ é fácil ver que ele contém pelo menos um buraco ímpar de comprimento $2k + 1$ (Por exemplo, $\{v_1 v_3, v_1 v_4, v_1 v_5, \dots, v_1 v_{2k}, v_2 v_{2k}, v_2 v_{2k+1}, v_3 v_{2k+1}, v_1 v_3\}$, onde $v_i v_j$ são os vértices de $Gal(\bar{C}_{2k+1})$ correspondentes as arestas $v_i v_j$ que formam um P_3 em C_{2k+1}). Isso acontece pois os únicos P_3 's existentes em

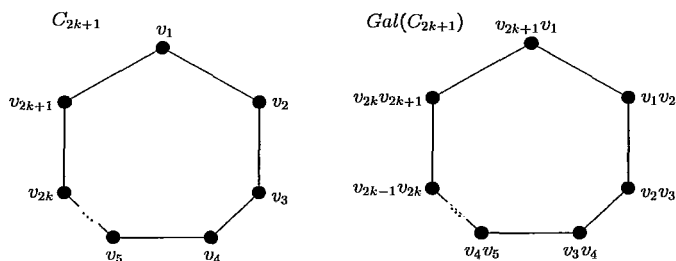


Figura 2.4: Buraco ímpar C_{2k+1} e o seu grafo Gallai $Gal(C_{2k+1})$.

um \bar{C}_{2k+1} são formados por um vértice $v_i \in \bar{C}_{2k+1}$ e mais dois vértices consecutivos em \bar{C}_{2k+1} , onde obviamente esses vértices consecutivos não podem ser nem v_{i-1} e nem v_{i+1} . Logo \bar{C}_{2k+1} não é bipartido e assim podemos concluir, pela Proposição 2.1, que G não é elementar. ■

Através dos exemplos apresentados nas Figuras 2.5 e 2.6, buscamos exemplificar, para dois casos particulares, o que descrevemos na propriedade (iii) da Observação 2.1.

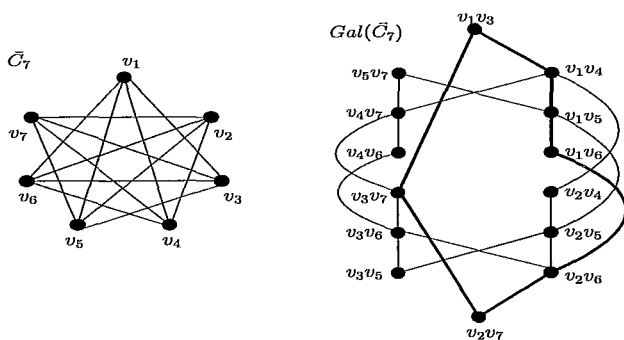


Figura 2.5: O grafo \bar{C}_7 e o seu grafo Gallai $Gal(\bar{C}_7)$.

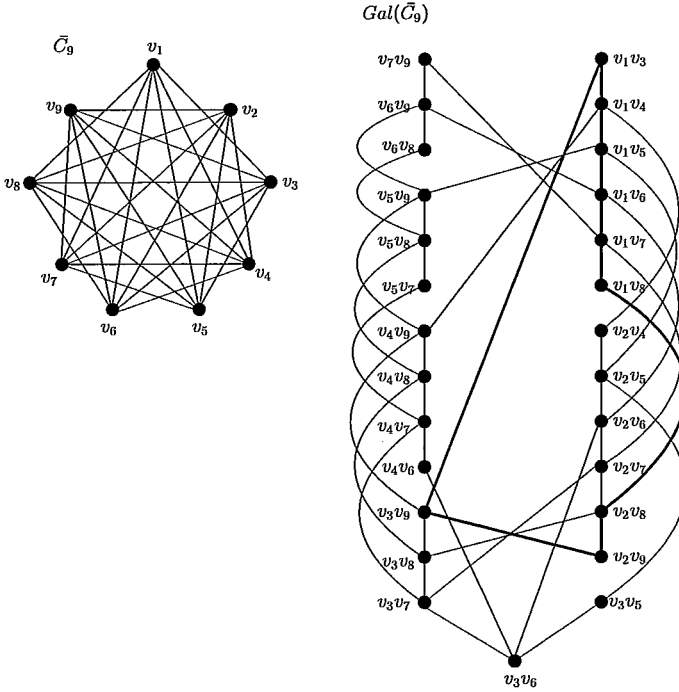


Figura 2.6: O grafo \bar{C}_9 e o seu grafo Gallai $Gal(\bar{C}_9)$.

Observação 2.2 *Nem todo grafo Berge e sem garras é elementar.*

Prova: De fato, consideremos a pirâmide G . Em particular, a pirâmide é o menor grafo Berge, sem garras, que não é elementar.

Como a pirâmide é um grafo pequeno, é fácil ver que ela é Berge (pois não contém buracos ímpares e nem anti-buracos ímpares como subgrafo induzido) e não contém garras como subgrafo induzido. Observe na Figura 2.7 que $Gal(G)$ é um C_9 , isto é, um buraco ímpar, então $Gal(G)$ não é bipartido, e assim, pela Proposição 2.1, G não é elementar. ■

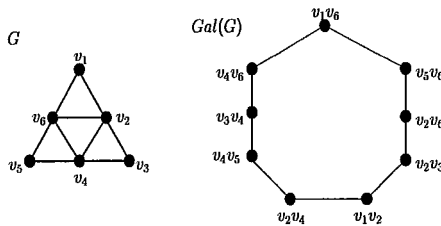


Figura 2.7: A pirâmide G e seu grafo Gallai $Gal(G)$.

Observação 2.3 *Se $G = (V, E)$ é um grafo linha de um grafo bipartido, então G é elementar.*

Prova: Por contrapositivo suponha que G não é um grafo elementar então pela Proposição 2.1, $Gal(G)$ não é bipartido, logo $Gal(G)$ possui um buraco ímpar como subgrafo induzido e assim G também possui um buraco ímpar como subgrafo induzido (Figura 2.4), portanto pelo Teorema 1.3, G não é um grafo linha de um grafo bipartido. ■

Lema 2.1 (Ben Rebea) *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, sem garras tal que $\alpha(G) \geq 3$. Se G contém um anti-buraco ímpar, então G contém um buraco de comprimento cinco.*

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo sem garras, conexo e com $\alpha(G) \geq 3$.

Suponha que G contém um anti-buraco ímpar como subgrafo induzido, denotado por A .

Rotule os vértices de A por $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$, tal que $v_i v_{i+1} \notin E(G)$, para todo i (com $v_{2k+2} = v_1$).

Assuma que $k \geq 3$, pois caso contrário A seria um anti-buraco de comprimento cinco. E como um anti-buraco de comprimento cinco é isomorfo a um buraco de comprimento cinco, o lema satisfaz esse caso.

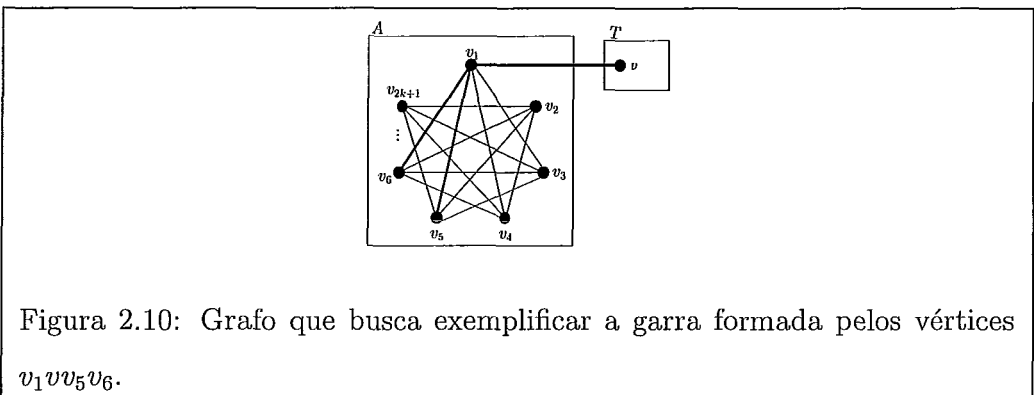
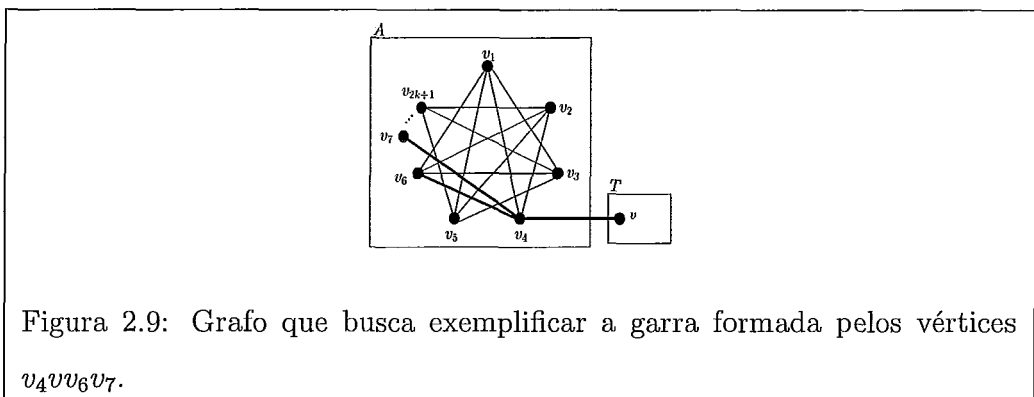
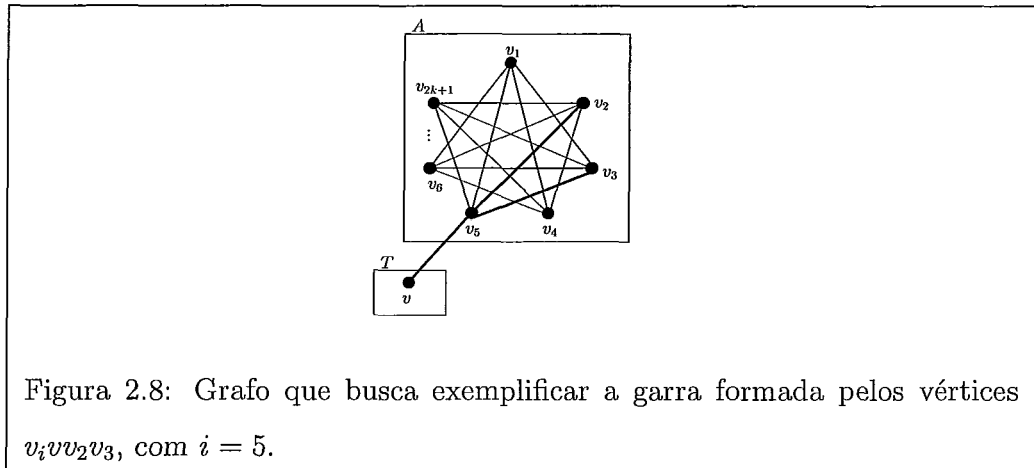
Seja T o conjunto de todos os vértices v de G , tal que $A \cup \{v\}$ contenha um conjunto independente de tamanho três.

Antes de provarmos este lema, precisamos analisar as Afirmções (A1) e (A2).

(A1) Nenhum vértice em T tem um vizinho em A .

De fato, por absurdo considere um vértice arbitrário v em T . Assuma que $vv_2 \notin E(G)$ e $vv_3 \notin E(G)$. Observe que, para todo $i = 5, 6, \dots, 2k + 1$, v_i é adjacente a v_2 e v_3 logo devemos ter $vv_i \notin E(G)$, pois caso contrário $v_i vv_2 v_3$ é uma garra (Figura 2.8). Devemos ter também $vv_4 \notin E(G)$, pois caso contrário

$v_4vv_6v_7$ é uma garra (Figura 2.9). Da mesma maneira $vv_1 \notin E(G)$, pois caso contrário $v_1vv_5v_6$ é uma garra (Figura 2.10).

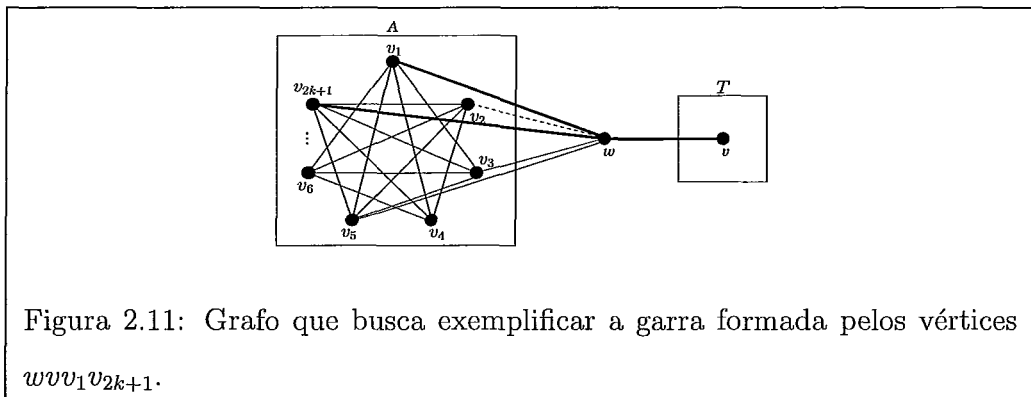


A seguir mostramos que:

$$(A2) T = \emptyset$$

Por absurdo, assumamos que $T \neq \emptyset$. Como G é conexo, existe pelo menos uma aresta $vw \in E(G)$, tal que $v \in T$ e $w \notin T$. Por (A1), temos que $w \notin A$. Como $w \notin T$, por simetria podemos assumir que $wv_1 \in E(G)$ e logo $wv_2 \notin E(G)$, pois caso contrário wv_1v_2 é uma garra. Então $wv_3 \in E(G)$, pois caso contrário $w \in T$, visto que w poderia fazer parte de um conjunto independente de tamanho três, isto é, poderíamos ter $\alpha(G) = \{w, v_2, v_3\}$.

Repetidas aplicações deste argumento mostram que $wv_i \in E(G)$ sempre que i é ímpar. Mas então $wv_1v_2v_3v_4v_5v_6 \dots v_{2k+1}$ é uma garra (Figura 2.11), contradição. Logo $T = \emptyset$.

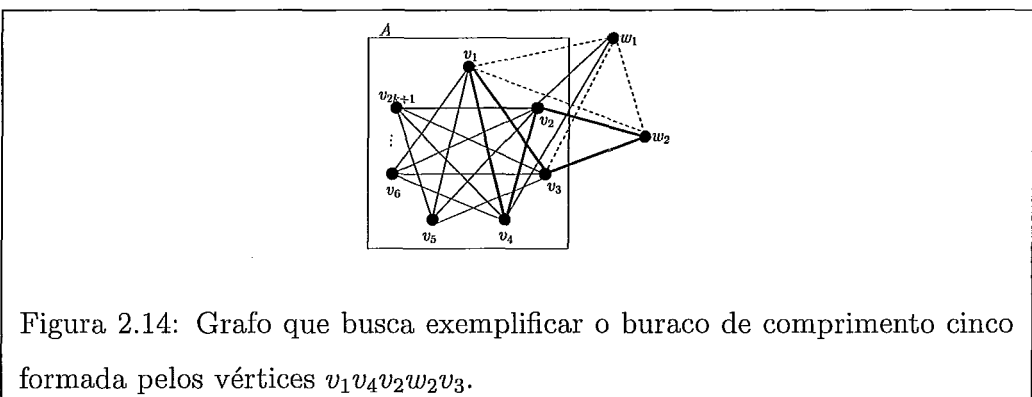
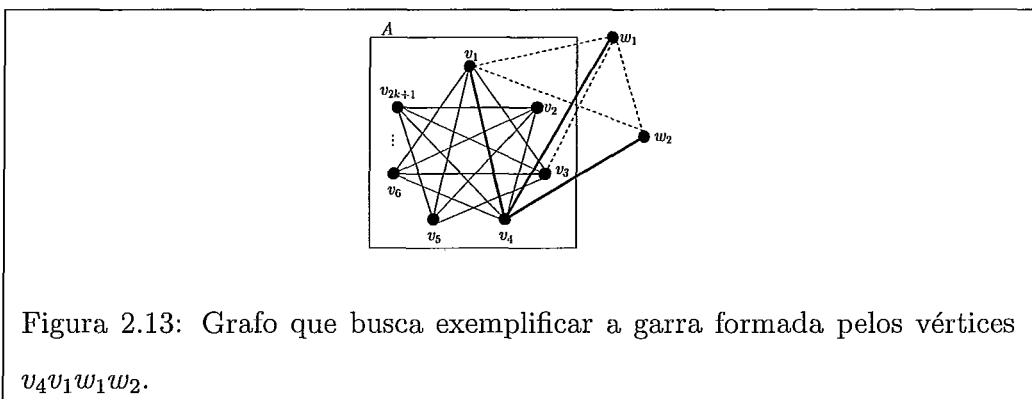
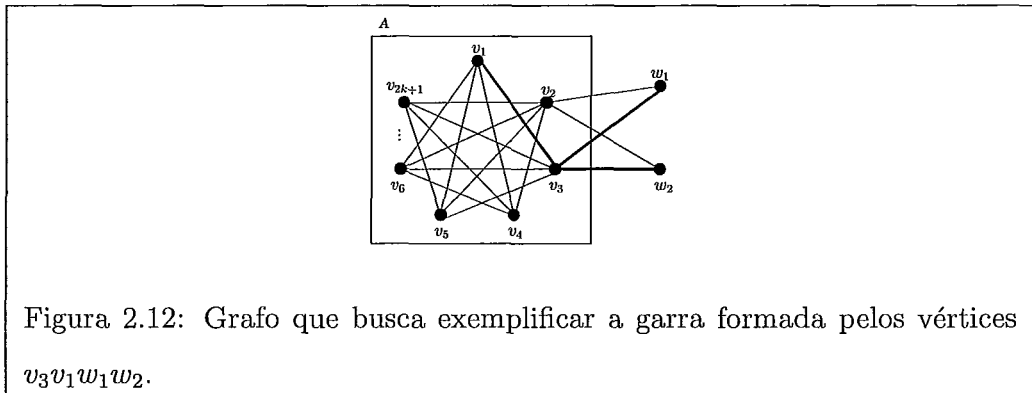


Agora estamos preparados para a prova do lema em questão, e para isso, consideramos os dois casos exclusivos a seguir:

Caso 1: Algum vértice em A está em um conjunto independente de tamanho três.

Assuma que v_1 e algum $w_1, w_2 \in V(G)$ fora de A são dois a dois não-adjacentes, isto é, assumamos que $\alpha(G) = \{v_1, w_1, w_2\}$. Por (A2), devemos ter $w_1v_2 \in E(G)$ e $w_2v_2 \in E(G)$; note que $w_1v_3 \notin E(G)$ ou $w_2v_3 \notin E(G)$ ou ambos (pois caso contrário teríamos a garra $v_3v_1w_1w_2$ (Figura 2.12)); logo podemos assumir que $w_1v_3 \notin E(G)$. Agora (A2) implica que $w_1v_4 \in E(G)$. Devemos ter $w_2v_4 \notin E(G)$, pois caso contrário $v_4v_1w_1w_2$ é uma garra (Figura 2.13). E assim,

por (A2) $w_2v_3 \in E(G)$. Logo $v_1v_4v_2w_2v_3$ é um buraco de comprimento cinco (Figura 2.14).



Caso 2: Nenhum vértice em A está em um conjunto independente de tamanho três.

Como $\alpha(G) \geq 3$, há vértices fora de A , dois a dois não-adjacentes, que chamaremos de w_1, w_2, w_3 . Vamos construir os conjuntos de vértices M_1, M_2, M_3

da seguinte forma: $v \in M_j$ se $v \in A$ e $vw_j \notin E(G)$. A seguir apresentaremos algumas informações a fim de provarmos o Caso 2 e assim concluirmos a prova do Lema 2.1:

(A2.1): Pela hipótese deste caso, temos que M_1, M_2 e M_3 são conjuntos dois a dois disjuntos. De fato, se para algum vértice $v_i \in A$, $v_i \in M_1$ e $v_i \in M_2$, então $v_i w_1 \notin E(G)$ e $v_i w_2 \notin E(G)$; com isso v_i, w_1, w_2 formam um conjunto independente de tamanho três, o que contradiz o Caso 2.

(A2.2): Além disso, cada vértice v em A pertence a algum M_j pois caso contrário se $v \notin M_j$, para todo $j = 1, 2, 3$, teríamos as arestas vw_1, vw_2 e vw_3 , como w_1, w_2 e w_3 são dois a dois não-adjacentes formaríamos a garra $vw_1 w_2 w_3$ (Figura 2.15).

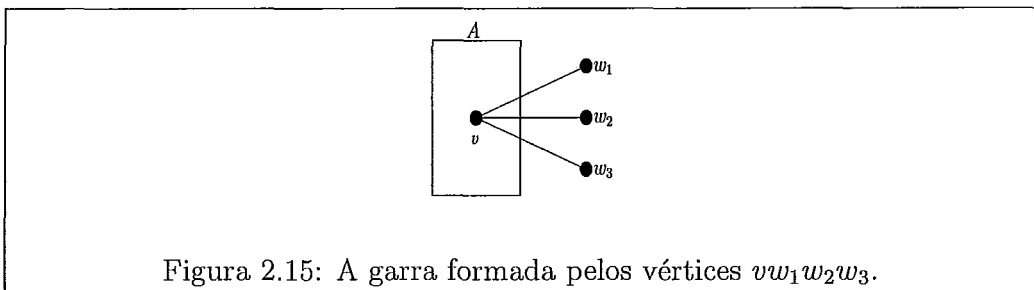


Figura 2.15: A garra formada pelos vértices $vw_1 w_2 w_3$.

(A2.3): Todos os vértices em A não podem pertencer ao mesmo M_j pois se $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k+1} \in M_j$, então não existiria as arestas $v_1 w_j, v_2 w_j, v_3 w_j, \dots, v_{2k+1} w_j$, o que implicaria em $w_j \in T$, mas $T = \emptyset$, absurdo.

(A2.4): Pela simetria de A assumamos que $v_1 \in M_1$ e $v_3 \in M_3$, então respectivamente, $v_1 w_1 \notin E(G), v_3 w_3 \notin E(G)$, pela definição de M_j .

(A2.5): Por (A2), devemos ter $v_2 w_1 \in E(G)$ (caso contrário, $w_1 \in T$) e $v_2 w_3 \in E(G)$ (caso contrário, $w_3 \in T$). Observe que se $v_2 w_1 \notin E(G)$, então poderíamos ter $v_2 \in \alpha(G)$ e $w_1 \in \alpha(G)$ logo $w_1 \in T$ e similarmente se $v_2 w_3 \notin E(G)$, poderíamos ter $v_2 \in \alpha(G)$ e $w_3 \in \alpha(G)$, logo $w_3 \in T$, mas sabemos que $T = \emptyset$, então é um absurdo.

Então $v_1 w_3 v_2 w_1 v_3 v_1$ é um buraco de comprimento cinco. Portanto pelas Afirmações (A1) e (A2), o lema está provado. ■

Para visualizar melhor o Caso 2, preparamos um pequeno resumo:

- Por (A2.4), $v_1w_1 \notin E(G)$;
- Por (A2.1), M_1, M_2 e M_3 são dois a dois disjuntos, então como por (A2.4) $v_1 \in M_1$, devemos ter $v_1 \notin M_2$ e $v_1 \notin M_3$, logo $v_1w_2 \in E(G)$ e $v_1w_3 \in E(G)$;
- Por (A2.5), $v_2w_1 \in E(G)$ e $v_2w_3 \in E(G)$;
- Por (A2.2), e (A2.5): $v_2 \in M_2$ logo $v_2w_2 \notin E(G)$, pois caso contrário teríamos $v_2 \notin M_2$ e como $v_2 \notin M_1$ e $v_2 \notin M_3$, estaríamos negando (A2.2);
- Por (A2.3), $v_3 \notin M_1$ (pois $v_1 \in M_1$ e os M_j 's são dois a dois disjuntos), então $v_3w_1 \in E(G)$;
- Sabemos que $v_3 \notin M_1$; por (A2.2) $v_3 \in M_2$ ou $v_3 \in M_3$, então, $v_3w_2 \notin E(G)$ ou $v_3w_3 \notin E(G)$;
- Por (A2.4) $v_3w_3 \notin E(G)$, então, $v_3w_2 \in E(G)$;
- Logo $v_1w_3w_1v_2w_3$ é um buraco de comprimento cinco (que pode ser visualizado na Figura 2.16).

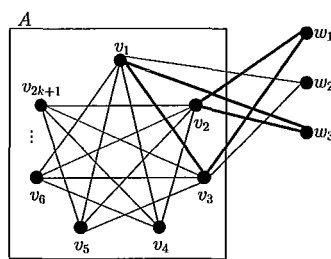


Figura 2.16: Grafo que busca exemplificar o buraco de comprimento cinco formado pelos vértices $v_1w_3w_1v_2w_3$.

2.2 Reconhecimento de grafos Berge e sem garras

Já sabemos que todo grafo elementar é Berge e não tem garras. Porém nem todo grafo Berge e sem garras é elementar. A pirâmide (Figura 2.7) exemplifica este fato. Chvátal e Sbihi [16] observaram que a pirâmide admite vários cortes cliques e segundo eles, essa observação foi fundamental para chegar ao resultado a seguir:

Teorema 2.1 [16] *Um grafo $G = (V, E)$ sem garras e sem corte-cliques é Berge se e somente se G tem pelo menos uma das seguintes propriedades:*

- (i) G é elementar,
- (ii) $\alpha(G) \geq 3$ e G não contém buraco de comprimento maior ou igual a cinco.

Antes de iniciarmos a prova do Teorema 2.1, daremos uma idéia de qual caminho seguir. A prova da parte “se” do teorema é quase imediata pelo Lema de Ben Rebea. Já a parte “somente se” é um pouco mais complicada, e para isso Chvátal e Sbihi [16] consideram um grafo $G = (V, E)$ Berge e sem garras; logo é preciso provar que ou G tem um corte-clique ou uma das propriedades (i) ou (ii) do Teorema 2.1. Então eles assumem que G contém um buraco par de comprimento maior ou igual a seis, pois, observe que se isso não acontecer, só podemos ter dois casos:

— G tem a propriedade (ii). Neste caso, essa parte (somente se) do teorema já estaria provado. Ou,

— $\alpha(G) \leq 2$. Aqui teríamos G sendo um grafo cobipartido e assim ele também seria um grafo elementar. Os grafos Berge com a propriedade $\alpha(G) \leq 2$ são exatamente os grafos complementares de grafos bipartidos (grafos cobipartidos), logo são elementares. De fato, se G é cobipartido, ele é formado por duas cliques e algumas arestas entre elas, podemos então colorir as arestas das duas cliques de uma mesma cor e as outras arestas (que ligam as duas cliques) de outra cor.

Então assumindo que G contém um buraco par de comprimento maior ou igual a seis, só nos resta provar que:

Todo grafo Berge e sem garras, G , que contém um buraco de comprimento maior ou igual a seis é elementar ou contém um corte-clique.

Para provar tal afirmação os autores utilizaram o algoritmo de Whitesides [36]; pois eles observaram que, dado um grafo G , se esse algoritmo não encontrasse um corte-clique (em G), ele apresentava uma certa estrutura que levaria à prova de que G é elementar. Essa estrutura consiste em uma seqüência G_0, G_1, \dots, G_t , de subgrafos induzidos de G , tal que, $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_t$; onde o último termo da seqüência, G_t , é o próprio grafo G ; o primeiro termo G_0 é um buraco arbitrariamente escolhido em G ; e cada G_{i+1} surge de G_i adicionando um subgrafo induzido de G , ou seja, em cada G_{i+1} , há um caminho sem cordas $u_0 u_1 \dots u_{k+1}$, tal que $u_0 \in G_i$, $u_{k+1} \in G_i$ e u_1, u_2, \dots, u_k são vértices de $G_{i+1} - G_i$.

Buscando uma coloração elementar para um grafo G sem corte-clique, vamos utilizar a estrutura dada pelo algoritmo de Whitesides [36]. Então, primeiro colorimos um buraco par, G_0 , de comprimento maior ou igual a seis e estendemos essa coloração para G_1 e assim por diante. Ou seja, a coloração de G_i é estendida para a coloração de G_{i+1} em um único caminho e se não for possível obter uma coloração elementar, significa que G_{i+1} tem um buraco ímpar como subgrafo induzido.

Vamos agora utilizar o grafo G da Figura 2.17 (a) para exemplificar a busca de uma coloração elementar para suas arestas, porém cabe ressaltar que teríamos os mesmos resultados se usássemos o grafo G' da Figura 2.17 (b).

Seja G_0 o buraco $v_1 v_2 \dots v_6$; $G_1 = G - v$ o grafo que surge de G_0 adicionando o vértice w e as arestas $w v_2, w v_3$ e $w v_4$ (Figura 2.18 (a)) e G_2 o grafo que surge de G_1 adicionando o vértice v e as arestas $v v_1, v v_2$ e $v v_3$ (Figura 2.18 (b)).

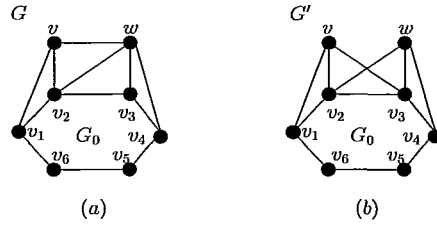


Figura 2.17: Exemplos de grafos.

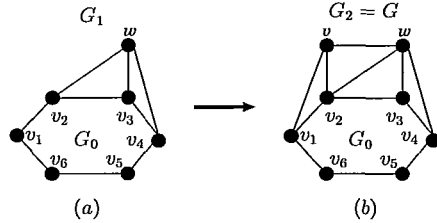


Figura 2.18: Construindo o grafo G através de G_0 e G_1 .

Na Figura 2.18 (a), inicialmente começamos com a coloração das arestas de G_0 , intercalando as cores verde e vermelho; observe que v_3w pode ter qualquer uma das duas cores utilizadas (pois a aresta wv_3 faz parte das cliques v_2v_3w e v_4v_3w), mas, se pensarmos no grafo G (Figura 2.18 (b)) a aresta wv_3 pode ser forçada assumir a cor da aresta v_3v_4 .

Para analisar, mais detalhadamente, esse impasse em relação à cor da aresta wv_3 considere uma aresta arbitrária com um extremo, w , fora de G_0 e outro extremo, v_3 , em G_0 . Podemos separar essa análise em três casos:

Caso 1: Se $wv_2 \notin E(G)$, wv_3 é forçada assumir a cor de v_3v_4 (Figura 2.19 (a)).

Caso 2: Se $wv_4 \notin E(G)$, wv_3 é forçada assumir a cor de v_2v_3 (Figura 2.19 (b)).

Caso 3: Se $wv_2 \in E(G)$ e $wv_4 \in E(G)$. Aqui, Chvátal e Sbihi [16] assumem que algum vértice v é adjacente ao vértice w (Figura 2.20 (a)) ou exatamente ao vértice v_3 (Figura 2.20 (b)). Logo, isso resulta que G contém (como subgrafo induzido) um dos grafos da Figura 2.20.

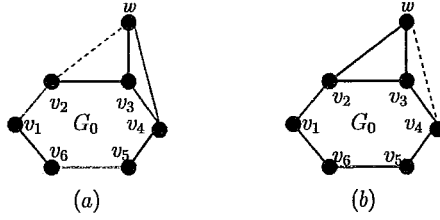


Figura 2.19: Grafo que busca exemplificar a tentativa de uma coloração elementar para G_1 .

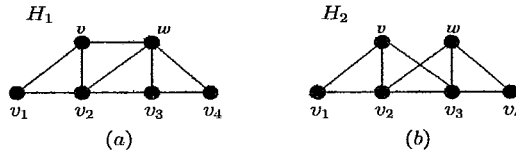


Figura 2.20: Subgrafos induzidos do grafo G .

Observe que cada um desses dois grafos tem uma coloração única. De fato, a seguir vamos apresentar os passos de uma coloração elementar para o grafo H_1 (Figura 2.20 (a)); e uma coloração elementar para o grafo H_2 (Figura 2.20 (b)) é feita de maneira análoga.

A coloração das arestas de H_1 é realizada da seguinte forma:

1. Colorimos as arestas do P_4 ($v_1v_2v_3v_4$), intercalando as cores verde e vermelha, isto é, v_1v_2 recebe a cor verde, v_2v_3 a cor vermelha e v_3v_4 a cor verde.
2. A cor verde da aresta v_1v_2 , força colorir a aresta v_2w de vermelho.
3. A cor vermelha da aresta v_2w , força colorir a aresta wv_4 de verde.
4. A cor verde da aresta wv_4 , força colorir a aresta wv de vermelho.
5. A cor vermelha da aresta wv , força colorir as arestas vv_1 e wv_3 de verde.
6. A cor vermelha da aresta v_2v_3 , força colorir a aresta v_2v de verde. Terminando assim a coloração elementar de H_1 .

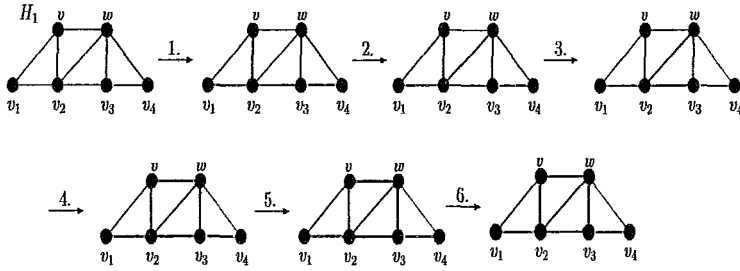


Figura 2.21: Estágios de uma coloração elementar para o grafo H_1 .

Observe que a aresta v_2v_3 tem uma característica que as outras arestas de G_0 não tem: ela estende para uma clique maior (v_2v_3w) contendo uma aresta (v_3w) de cor diferente da sua. Esta observação, levou Chvátal e Sbihi [16] a chamarem uma aresta v_2v_3 do buraco G_0 , de **aresta especial** se ela está contida em um dos grafos da Figura 2.20, com $v_1, v_2, v_3, v_4 \in G_0$; e chamar as outras arestas de G_0 de **aresta comum**.

É fácil ver que toda aresta comum de G_0 estende para uma única clique maximal em G , pois caso contrário, não conseguiríamos uma coloração elementar para G . De fato, suponha que a aresta comum v_3v_4 (de G_0) também estenda para uma outra clique maximal em G , a saber, v_3v_4x . Então a aresta v_2v_3 força colorir a aresta v_3x de verde; e a aresta v_5v_4 força colorir a aresta v_4x também de verde. Logo as arestas dos P'_3 s, v_2v_3x e v_5v_4x possuem cores iguais. Por outro lado, podemos notar que a aresta wv_3 força colorir a aresta v_3x de vermelho; e a aresta wv_4 força colorir a aresta v_4x também de vermelho. Logo as arestas dos P'_3 s, v_2v_3x e v_5v_4x possuem cores iguais, e assim G não é elementar (Figura 2.22).

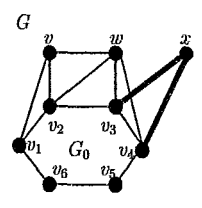


Figura 2.22: Grafo que busca exemplificar que toda aresta comum de G_0 estende para uma única clique maximal em G .

Com isso, para garantir sempre uma coloração elementar para os grafos Berge, sem garras, sem corte-clique e que contém um buraco de comprimento maior ou igual a seis como subgrafo induzido, é preciso considerar o seguinte caso especial:

(A3) Cada vértice fora de G_0 tem pelo menos um vizinho em G_0 .

Neste caso, a coloração de G_0 pode ser estendida para a coloração de G diretamente, sem passar pela seqüência $G_0, G_1, \dots, (G_t = G)$: A cor de cada aresta comum, e , será dada para todas as arestas da única clique máxima em G que contém e , e as cores das arestas restantes de G tem a coloração forçada em um passo adicional. Podemos usar os mesmos argumentos, mesmo no caso em que G_0 não é um buraco; desde que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

(a) Cada vértice em G_0 está situado em algum buraco em G_0 de comprimento maior ou igual a seis.

(b) Nenhum triângulo em G_0 estende para um diamante em G .

(c) G_0 não tem corte-clique.

Finalmente isso resulta que se G não tem corte-clique, então G contém um subgrafo induzido G_0 com as propriedades (a), (b), (c) e (A3), (isso será visto no Lema 2.2); de fato, se G não tem corte-clique então cada um de seus subgrafos maximais G_0 com as propriedades (a), (b) e (c) deve também satisfazer (A3).

Assim, já sabendo que caminho devemos seguir para provar o Teorema 2.1 ainda precisamos de alguns resultados importantes para concluirmos tal prova. O Lema 2.2 descreve a estrutura de um grafo conexo, Berge e sem garras que contém como subgrafo induzido um buraco de comprimento maior ou igual a seis. O Lema 2.3 prova, utilizando alguns fatos, observações e proposições, que se G é um grafo Berge sem garras e possui como subgrafo induzido um grafo com as propriedades dadas pelo Lema 2.2, então esse grafo é elementar. Tais fatos e

proposições nos fornecem um caminho para obter uma coloração elementar para todos os grafos Berge e sem garras que tenham as propriedades do Lema 2.2. Vale destacar que no Capítulo 3 desta dissertação veremos que Maffray e Reed [31] estenderam esses resultados para obter uma coloração elementar para todos os grafos Berge e sem garras, mas antes de estudarmos os resultados obtidos por eles precisamos entender o que foi feito nos dois Lemas acima citados.

Observação 2.4 [16] *Seja $G = (V, E)$ um grafo Berge e sem garras. Se algum vértice de G é adjacente a três vértices consecutivos de um buraco par H de comprimento maior ou igual a seis, então tal vértice não é adjacente a nenhum outro vértice do buraco.*

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo Berge e sem garras e H um buraco par de comprimento maior ou igual a seis. Rotule H por v_1, v_2, \dots, v_{2k} , $k \geq 2$. Seja v um vértice de G adjacente a três vértices consecutivos de H , por exemplo v_1, v_2 e v_3 e suponha por absurdo que v seja adjacente a algum outro vértice de H . Podemos ter dois casos:

Caso 1: v é adjacente a exatamente quatro vértices consecutivos de H .

Sem perda de generalidade, suponha que v seja adjacente a $v_1v_2v_3$ e v_4 . Nesse caso $v_1vv_4v_5 \dots v_{2k}$ é um buraco ímpar, isto é, G é Berge. Absurdo, (veja na Figura 2.23).

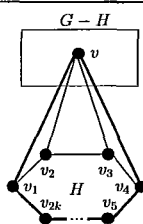


Figura 2.23: Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar gerado no Caso 1.

Caso 2: v é adjacente a um vértice v_1 de H , $i \neq 4$, $i \neq 2k$.

Neste caso, teremos uma garra, $v_1vv_3v_i$ em G (Figura 2.24), o que contradiz a hipótese.

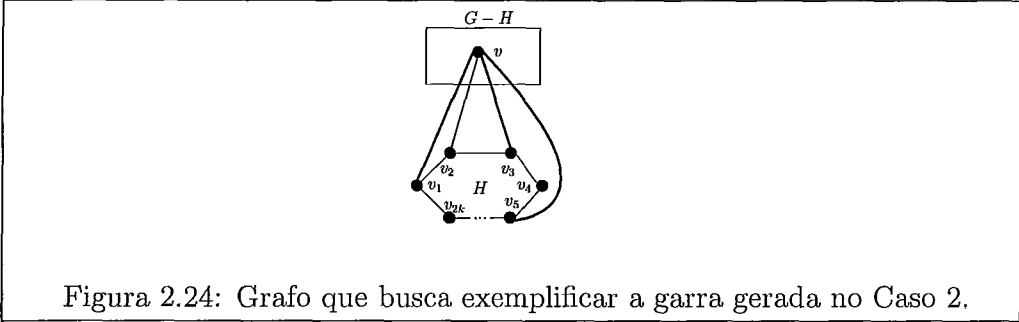


Figura 2.24: Grafo que busca exemplificar a garra gerada no Caso 2.

Logo, pelos Casos 1 e 2, provamos a Observação 2.4.

Lema 2.2 [16] *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, Berge e sem garras. Se G contém um buraco de comprimento maior ou igual a seis, então ou G tem um subgrafo induzido F com as propriedades:*

(i) *Cada vértice de F está em algum buraco em F de comprimento maior ou igual a seis.*

(ii) *Nenhum triângulo em F estende para um diamante em G .*

(iii) *F não tem corte-clique.*

(iv) *Cada vértice fora de F tem pelo menos um vizinho em F .*

Ou senão, G tem um corte-clique.

Prova: Seja G um grafo Berge e sem garras, que contém um buraco de comprimento maior ou igual a seis.

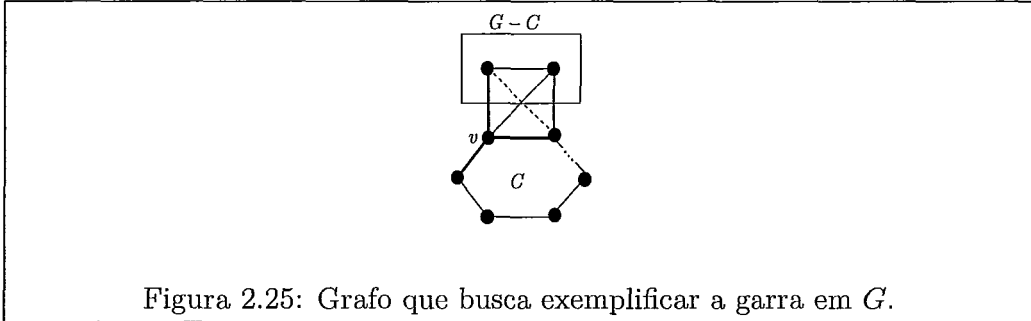
Seja F um subgrafo maximal de G com as propriedades (i), (ii) e (iii). Temos que $F \neq \emptyset$. De fato, um buraco de comprimento maior ou igual a seis tem essas propriedades, pois:

— Pela hipótese, se G , contém um buraco C de comprimento maior ou igual a seis, então, sendo $F = C$, a propriedade (i) está satisfeita;

— Nenhum triângulo com alguns de seus vértices em C estende para um diamante em G , pois caso contrário, teremos garras em G , contrariando a hipótese

(Figura 2.25);

— C não tem corte-clique, pois C é um buraco.



Se F também tem a propriedade (iv) , então o lema está provado.

Por outro lado se F não tem a propriedade (iv) , nós vamos mostrar que então existe um corte-clique em G . Para isso, seja T algum componente do subgrafo induzido em G por todos os vértices que não têm vizinhos em F . E seja N o conjunto de todos os vértices fora de T com pelo menos um vizinho em T . É fácil ver que N é um conjunto, que se retirado de G , separa T de F , ou seja, N é um corte de G .

Vale mencionar, que com o intuito de facilitar a visualização do leitor nas figuras apresentadas nesta prova, consideramos F um buraco de comprimento maior ou igual a seis, porém sabemos que por hipótese F não é necessariamente um buraco.

Afirmamos que N é um corte-clique. De fato, suponha, por absurdo, o contrário, isto é, suponha que N possui dois vértices não adjacentes v e w . Observe que há um caminho sem cordas $u_1 u_2 \dots u_k$, com $u_1 = v$; $u_2, u_3, \dots, u_{k-1} \in T$; $u_k = w$ e $k \geq 3$. Seja F^* um subgrafo de G induzido por todos os vértices de F , juntamente com u_1, u_2, \dots, u_k . Vamos mostrar que F^* satisfaz (i) , (ii) , (iii) e então F não é maximal, o que gera uma contradição!

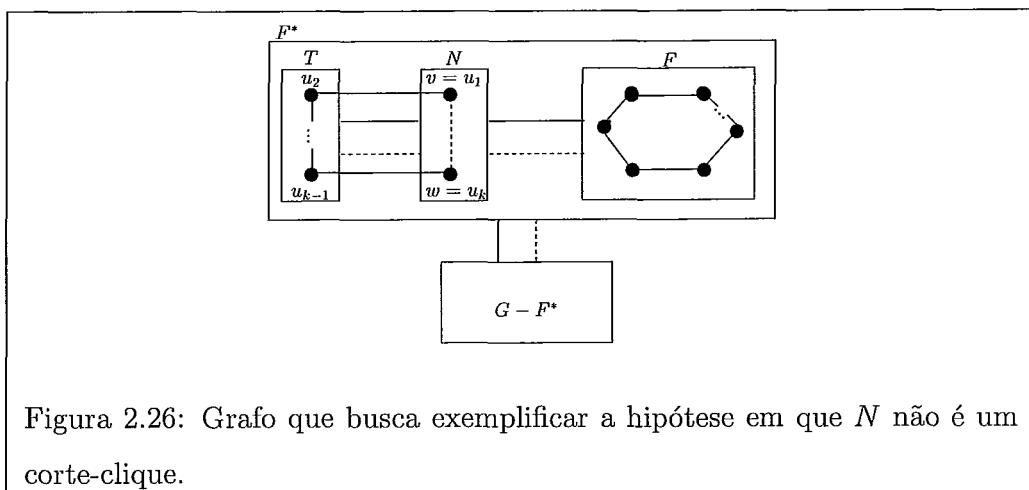


Figura 2.26: Grafo que busca exemplificar a hipótese em que N não é um corte-clique.

Com este objetivo, denote por K_x o conjunto de vizinhos de x que pertencem a F . Afirmamos que:

(A4) K_v e K_w são cliques maximais em F .

De fato, basta mostrarmos que K_v é uma clique maximal em F , pois por simetria, o que mostrarmos para K_v é análogo para K_w . Observe que K_v é uma clique, pois caso contrário v junto com u_2 e dois vértices não adjacentes em K_v formariam uma garra (Figura 2.27).

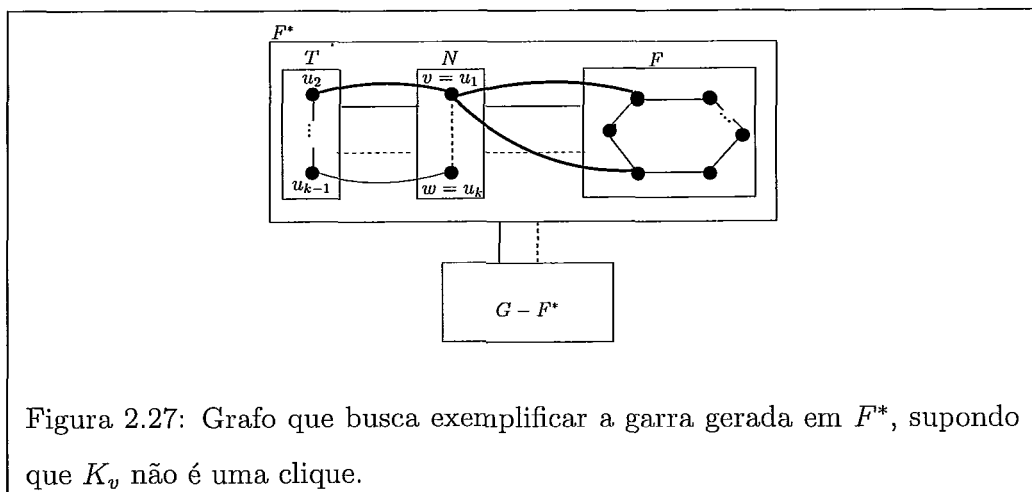
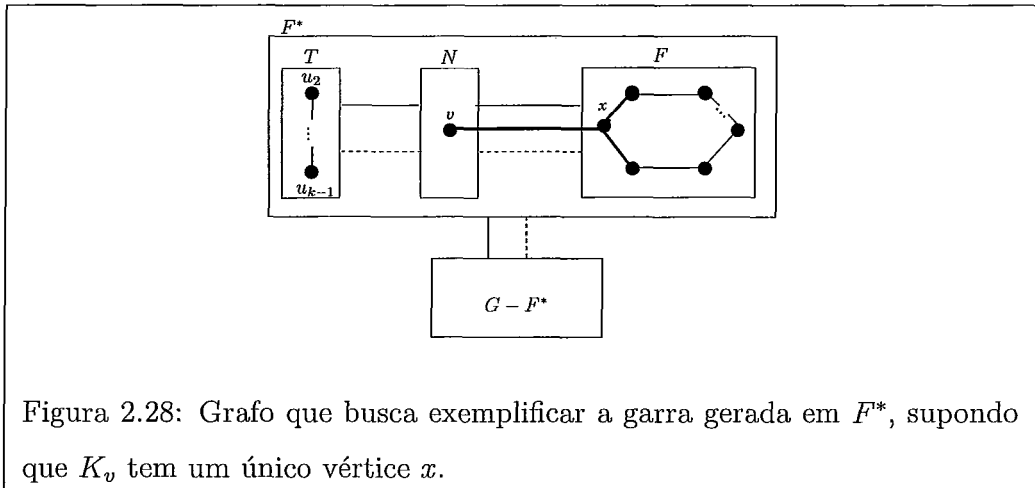


Figura 2.27: Grafo que busca exemplificar a garra gerada em F^* , supondo que K_v não é uma clique.

E mais, K_v é não-vazio (isto é v tem pelo menos um vizinho em F), pois, caso contrário v pertenceria a T .

Além disso, o conjunto K_v não pode ter um único vértice x , pois caso contrário x junto com v e dois vértices não adjacentes vizinhos de x em F (os quais são garantidos por (i)), formariam uma garra (Figura 2.28).

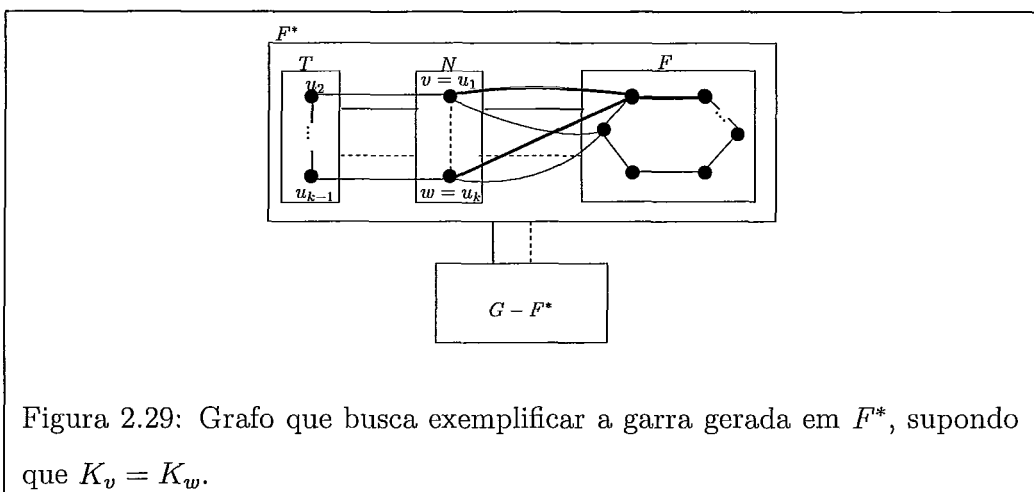


Então, K_v deve ter pelo menos dois vértices, e assim sua maximalidade em F é garantida por (ii).

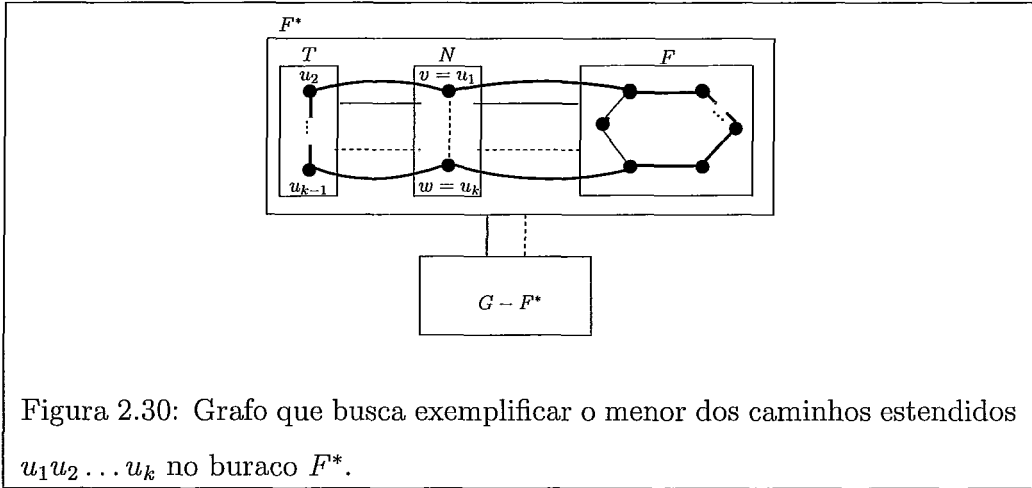
Note também que:

(A5) $K_v \neq K_w$

Caso contrário, algum vértice em K_v junto com v, w e algum de seus vizinhos em $F - K_v$ formariam uma garra (Figura 2.29).



Vamos mostrar que F^* satisfaz (i): Para isso precisamos somente estender o caminho $u_1u_2\dots u_k$ em um buraco de comprimento maior ou igual a cinco em F^* (como, por hipótese, G é Berge, o comprimento deste buraco é maior ou igual a seis). Por (A4), (A5) e (iii), há um caminho em $F - (K_v \cap K_w)$ vindo de $K_w - K_v$ para $K_v - K_w$; o menor desses caminhos ($u_1u_2\dots u_k$) estende ao buraco desejado (Figura 2.30).



Vamos mostrar que F^* satisfaz (ii): Precisamos considerar somente os triângulos em F^* que não estão totalmente em F ; eles são vxy com $x, y \in K_v$ e wxy com $x, y \in K_w$. Novamente por simetria, nos restringimos somente a K_v , pois para K_w a prova é análoga. Suponha, por absurdo, que existe algum triângulo em F^* que estende para um diamante em G . Então existem vértices distintos x, y, z , com $x, y \in K_v$, $z \neq v$ tal que z é adjacente a x e adjacente exatamente ou a v ou a y (observe que, até o momento, nada sabemos sobre a adjacência de z , se ele for adjacente a x, v e y ; teremos a clique $zxyv$ e não um diamante, como supomos anteriormente).

Por (i), existe um buraco H em F de comprimento maior ou igual a seis que passa por x . Como $x \in K_v$ então v é adjacente a x , e com isso, v também deve ser adjacente a pelo menos um vizinho de x em H , pois caso contrário teríamos uma garra centrada em x . Logo, podemos rotular os vértices de H com v_1, v_2, \dots, v_{2t} tal que $v_2 = x$ e $K_v \cap H = \{v_2, v_3\}$.

Agora, podemos estudar as adjacências de z , e para isso, devemos analisar dois casos:

Caso 1: z é adjacente a x e a y , mas z não é adjacente a v . Se $v_3 \neq y$, temos: Por (i), $zv_3 \in E(G)$, pois caso contrário, se xyv_3 fosse um triângulo em F , então junto com z teríamos um triângulo em F que estenderia para um diamante em G . Por outro lado, se $v_3 = y$, devemos ter $zv_1 \in E(G)$, pois caso contrário v_2v_1vz seria uma garra (Figura 2.31).

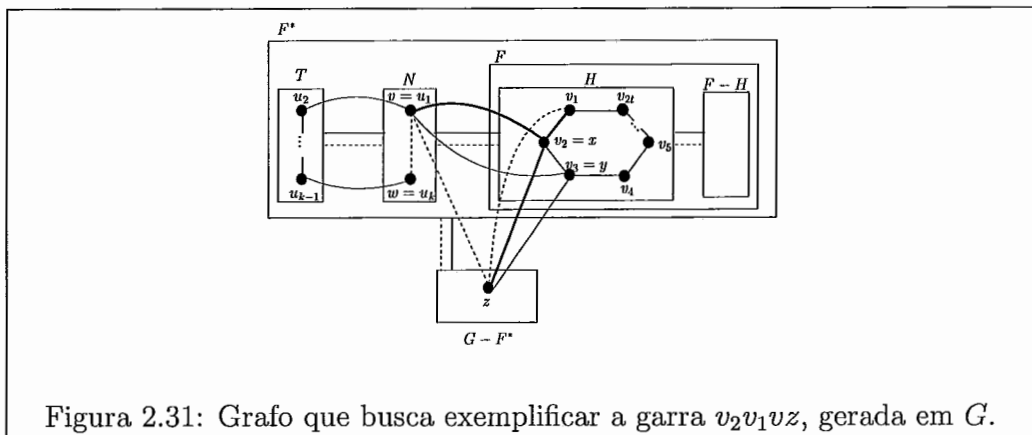


Figura 2.31: Grafo que busca exemplificar a garra v_2v_1vz , gerada em G .

Então, pela Observação 2.4, $zv_4 \notin E(G)$. Mas então v_3vv_4z é uma garra (Figura 2.32).

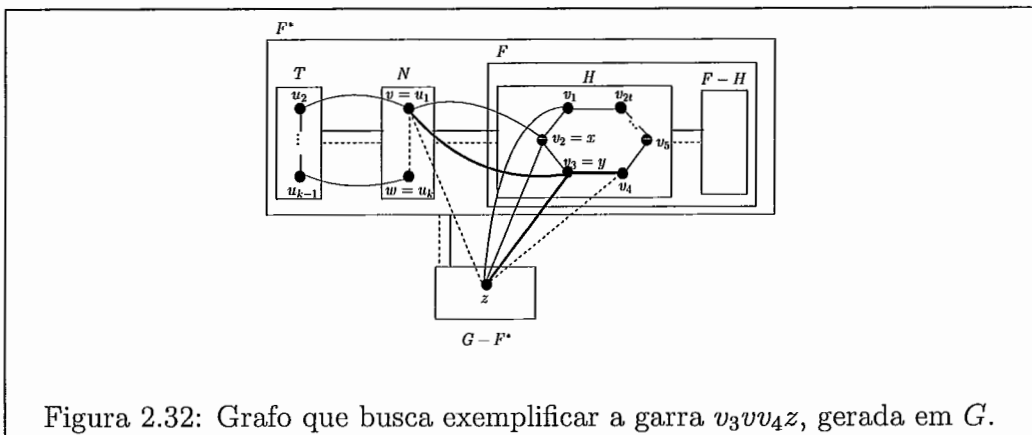


Figura 2.32: Grafo que busca exemplificar a garra v_3vv_4z , gerada em G .

Caso 2: z é adjacente a x e a v , mas z não é adjacente a y . Por (ii), $zv_3 \notin E(G)$. Pois caso contrário, se xyv_3 (com $v_3 \notin y$) fosse um triângulo em F ,

então junto com z teríamos um triângulo em F que estenderia para um diamante em G .

Devemos ter $zv_1 \in E(G)$, pois caso contrário $v_2v_1zv_3$ é uma garra (Figura 2.33).

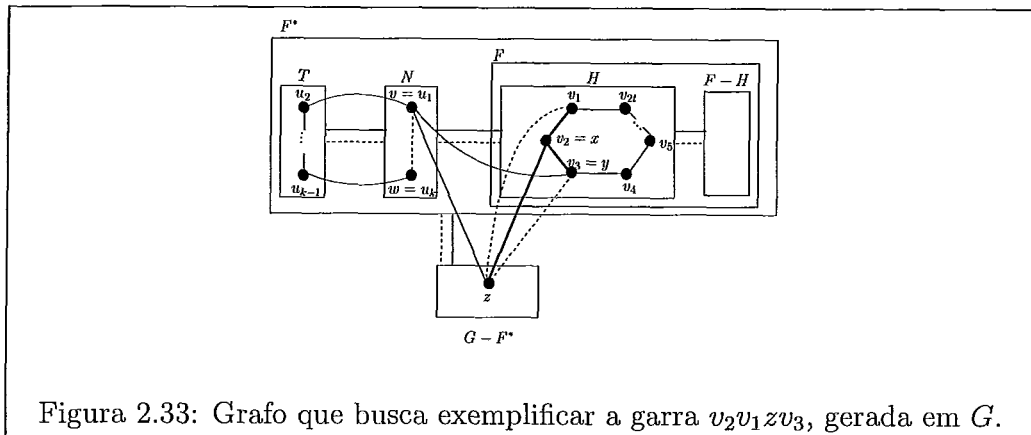


Figura 2.33: Grafo que busca exemplificar a garra $v_2v_1zv_3$, gerada em G .

Devemos ter $zu_2 \in E(G)$, pois caso contrário vzu_2v_3 é uma garra (Figura 2.34).

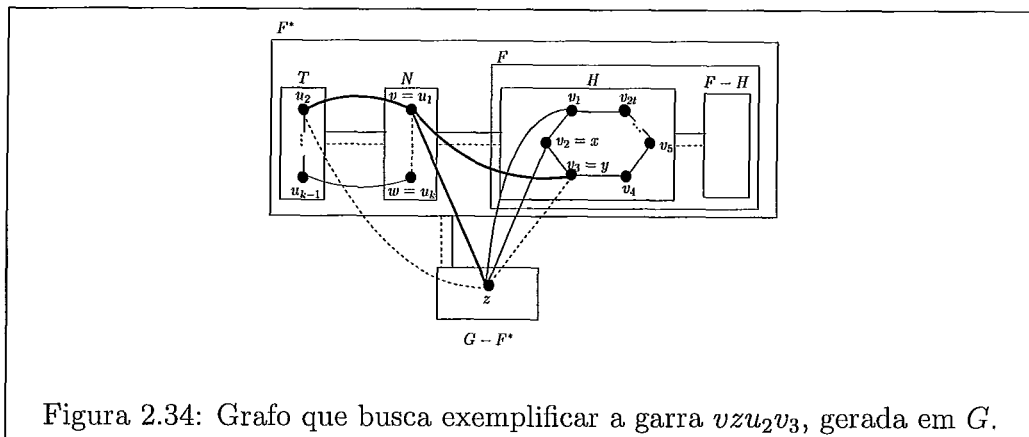
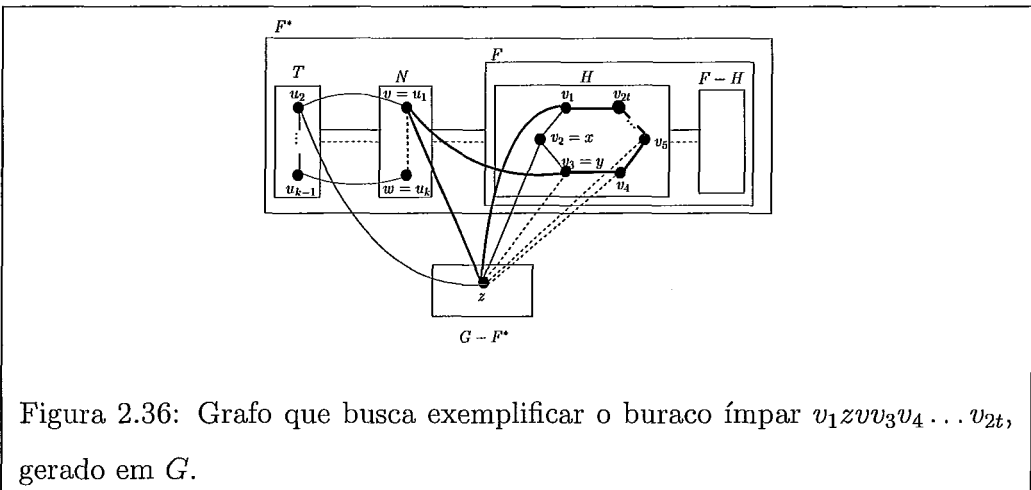
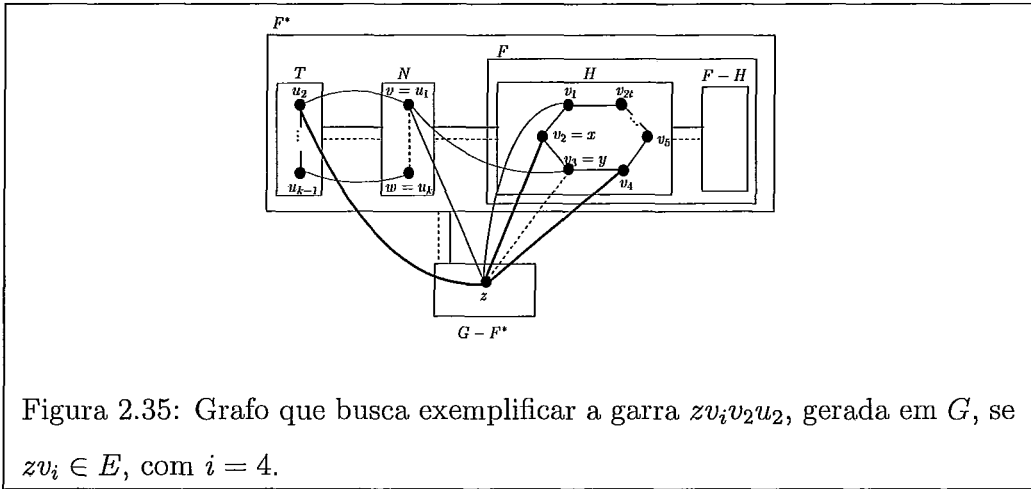


Figura 2.34: Grafo que busca exemplificar a garra vzu_2v_3 , gerada em G .

Devemos ter $zv_i \notin E(G)$, para todo $i = 4, 5, \dots, 2t$, pois caso contrário $zv_iv_2u_2$ é uma garra (Figura 2.35).

Mas então $v_1zv_3v_4 \dots v_{2t}$ é um buraco ímpar, gerando assim uma contradição (Figura 2.36).



Vamos mostrar que F^* satisfaz (iii): Nesse caso usamos a observação usada por Sue Whitesides em [36]: Basta estendermos o caminho $u_1 u_2 \dots u_k$ para um caminho sem cordas com ambos os extremos em F . Por (A4) e (A5), há vértices não adjacentes u_0 em $K_v - K_w$ e u_{k+1} em $K_w - K_v$; o caminho desejado é $u_0 u_1 \dots u_k u_{k+1}$ (Figura 2.37).

Então F^* satisfaz (i), (ii) e (iii), e logo F não é maximal, que é um absurdo. Portanto, F satisfaz a propriedade (iv) e assim o Lema 2.2 está provado. ■

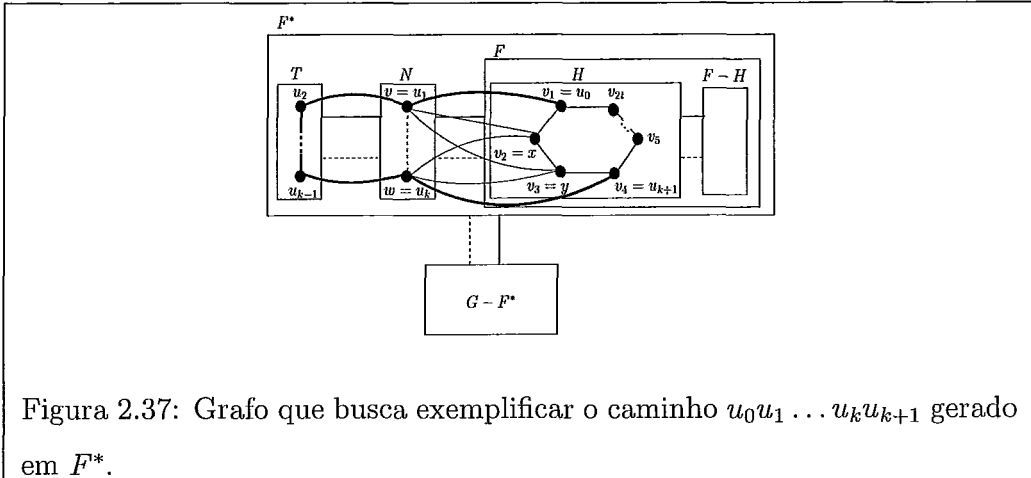


Figura 2.37: Grafo que busca exemplificar o caminho $u_0 u_1 \dots u_k u_{k+1}$ gerado em F^* .

Antes de apresentarmos o Lema 2.3 precisamos entender alguns termos, observações e proposições que são dadas a seguir. Em todas elas consideramos que o grafo $G = (V, E)$ é Berge e sem garras; e que F é um subgrafo induzido de G com as propriedades (i), (ii), (iii), (iv) do Lema 2.2; e definimos os grafos H_1 e H_2 da seguinte maneira: $V(H_1) = V(H_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v, w\}$ e $E(H_1) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v v_1, v v_2, v w, w v_2, w v_3, w v_4\}$ e $E(H_2) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v v_1, v v_2, v v_3, w v_2, w v_3, w v_4\}$. Uma possível representação geométrica desses grafos pode ser visualizada na Figura 2.38.

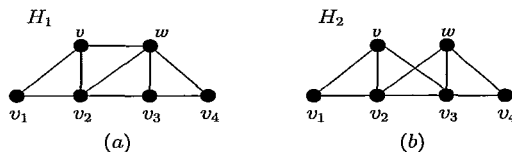


Figura 2.38: Subgrafos induzidos do grafo G .

Uma clique maximal de F será chamada **clique especial** se ela contém os vértices v_2 e v_3 de um grafo H_1 ou H_2 em G , com $v_1, v_2, v_3, v_4 \in F$; senão a clique será chamada de **clique comum**.

Cabe informar ao leitor, que para facilitar a visualização das provas abaixo, utilizaremos alguns grafos. Porém, vale ressaltar, que os usaremos a título de

exemplo e que os mesmos poderiam ser quaisquer grafos, desde que satisfaçam as hipóteses exigidas.

Observação 2.5 [16] *Para todo vértice x de F , o subgrafo induzido de F por $N(x)$ consiste de duas cliques não-vazias, disjuntas e sem arestas entre elas.*

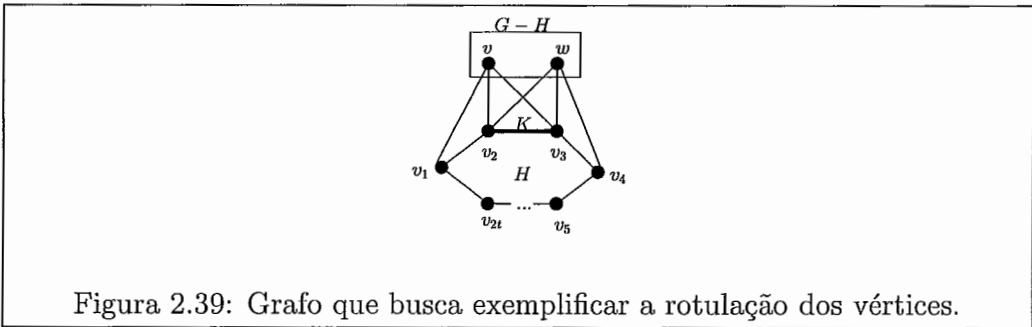
Note que, se isso não acontecesse, teríamos uma garra ou um buraco ímpar como subgrafo induzido de F .

Proposição 2.2 [16] *Toda clique comum está contida em uma única clique maximal em $G = (V, E)$.*

Prova: Seja K uma clique maximal de F que estende para pelo menos duas cliques maximais de G .

Escolha um vértice u em K . Pela propriedade (i) do Lema 2.2, existe um buraco $H \subset F$ de comprimento maior ou igual a seis tal que $u \in H$.

Pela Observação 2.5, podemos rotular os vértices de H com v_1, v_2, \dots, v_{2t} , de tal maneira que tenhamos $v_2 = u$ e com isso $v_3 \in K$. Sejam dois vértices não-adjacentes, v e w , ambos adjacentes a v_2 e v_3 .



Observe que devemos ter $vv_1 \in E(G)$, ou $wv_1 \in E(G)$, ou ambos; pois caso contrário, v_2v_1vw é uma garra (Figura 2.40).

Então, sem perda de generalidade, assumamos que $vv_1 \in E(G)$.

Pela Observação 2.4, $vv_4 \notin E(G)$, logo devemos ter $wv_4 \in E(G)$, pois caso contrário, v_3v_4vw é uma garra (Figura 2.41). Ainda pela Observação 2.4, como $wv_4 \in E(G)$, devemos ter $wv_1 \notin E(G)$.

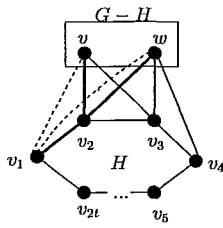


Figura 2.40: Grafo que busca exemplificar a garra v_2v_1vw , gerada em G .

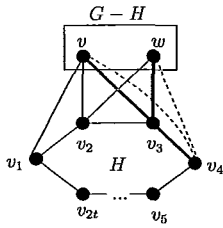


Figura 2.41: Grafo que busca exemplificar a garra v_3vwwv_4 , gerada em G .

Logo K é especial. Portanto, se uma clique K estende para duas ou mais cliques maximais de G ela não pode ser comum. ■

Aqui apresentaremos alguns fatos e proposições relevantes para a continuação de nossa análise. Porém, tendo em vista que algumas das provas são repetitivas achamos por bem omití-las.

Seja $C(K)$ a única clique maximal de G que contém uma clique comum $K \in F$. Diremos que uma aresta x_1x_2 de G é *singular* se não existe alguma clique comum K com $x_1 \in C(K)$ e $x_2 \in C(K)$.

Fato 2.1 [16] *Para toda clique maximal K_1 e K_2 de F , algum buraco em F usa uma aresta de K_1 e uma aresta de K_2 .*

Fato 2.2 [16] *Sejam K_1, K_2 cliques maximais disjuntas em F , tal que algum vértice x de G é adjacente a todos os vértices em $K_1 \cup K_2$. Então não existe aresta x_1x_2 com $x_1 \in K_1$ e $x_2 \in K_2$.*

Fato 2.3 [16] Se K_1 e K_2 são cliques comuns disjuntas então $C(K_1)$ e $C(K_2)$ têm no máximo um vértice em comum.

Fato 2.4 [16] Seja H um buraco em F de comprimento maior ou igual a seis, com vértices v_1, v_2, \dots, v_{2t} . Se existe algum vértice v e w em G tal que $vv_1, vv_2, ww_2, ww_3, ww_4 \in E(G)$ e $vv_3 \notin E(G)$ então $N(v) \cap H = \{v_1, v_2\}$ e $N(w) \cap H = \{v_2, v_3, v_4\}$.

Como consequência do Fato 2.3 temos a seguinte proposição:

Proposição 2.3 [16] Se K_1 e K_2 são cliques comuns distintas, então $C(K_1)$ e $C(K_2)$ não tem arestas em comum.

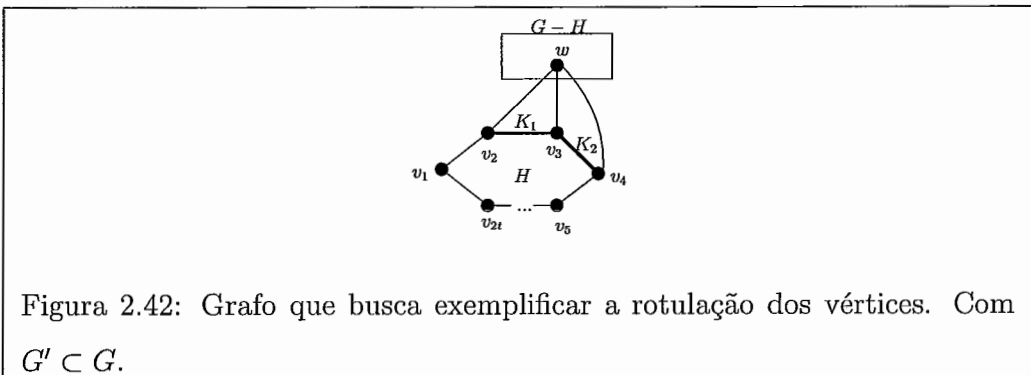
Prova: Sejam K_1 e K_2 cliques comuns distintas. Por absurdo, suponha que $C(K_1)$ e $C(K_2)$ tenham pelo menos dois vértices em comum.

Pelo contrapositivo do Fato 2.3, $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. E pela Observação 2.5, essa interseção é formada por um único vértice, que chamaremos de u .

Pela propriedade (i) do Lema 2.2, existe um buraco $H \subset F$ de comprimento maior ou igual a seis, tal que $u \in H$.

Pela Observação 2.5, podemos rotular os vértices de H com v_1, v_2, \dots, v_{2t} de tal maneira que tenhamos $v_2 \in K_1$, $v_3 = u$ e $v_4 \in K_2$.

Considere um vértice $w \in C(K_1) \cap C(K_2)$, tal que $v_3 \neq w \in V(G)$.



Como v_3 e w não são vértices gêmeos em G , ento para algum vértice v em G , podemos ter dois casos:

Caso 1: $vw \in E$ e $vv_3 \notin E(G)$ para algum $v \neq v_3$.

Observe que devemos ter $vv_2 \in E(G)$ ou $vv_4 \in E(G)$ ou ambos, pois caso contrário wvv_2v_4 é uma garra (Figura 2.43).

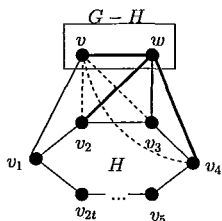


Figura 2.43: Grafo que busca exemplificar a garra wvv_2v_4 , gerada em G .

Por simetria, considere $vv_2 \in E(G)$. Então, observe que devemos ter $vv_1 \in E(G)$, pois caso contrário, $v_2v_1vv_3$ é uma garra (Figura 2.44).

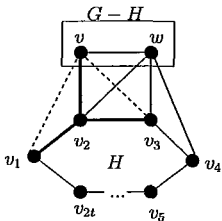


Figura 2.44: Grafo que busca exemplificar a garra $v_2v_1vv_3$, gerada em G .

Portanto, pelo Fato 2.4, podemos concluir, que K_1 é uma clique especial (por definição), que é um absurdo.

Caso 2: $vw \notin E(G)$ e $vv_3 \in E(G)$, para algum $v \neq w$ em G .

Como $vw \notin E(G)$ então, pela Proposição 2.2, $v \notin C(K_1)$ e $v \notin C(K_2)$; logo $vv_2 \notin E(G)$ e $vv_4 \notin E(G)$ e assim $v_3v_2v_4v$ é uma garra, que é um absurdo (Figura 2.45). ■

Fato 2.5 [16] *Seja $v_1v_2 \dots v_{2t}$ um buraco em F de comprimento maior ou igual a seis; seja também v, w vértices em G adjacentes com $vv_1 \in E(G)$, $vv_2 \in E(G)$, $vv_3 \notin E(G)$, $wv_1 \notin E(G)$, $wv_2 \in E(G)$, $wv_3 \in E(G)$. Então vv_{2t} ou $wv_4 \in E(G)$.*

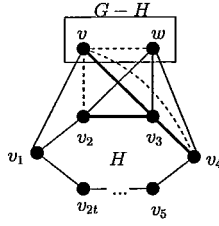


Figura 2.45: Grafo que busca exemplificar a garra $v_3v_2v_4v$, gerada em G .

Para $i = 1, 2$, defina R_i como o conjunto de todos os pares ordenados (s, r) de vértices tal que para algum H_i (da Figura 2.38) com $v_1, v_2, v_3, v_4 \in F$ tem-se $v_2 = s, v_3 = r$.

Fato 2.6 [16] *Seja H um buraco em F de comprimento maior ou igual a seis, com vértices v_1, v_2, \dots, v_{2t} . Se $(v_2, v_3) \in R_1$ então existem vértices adjacentes v, w em G com $N(v) \cap H = \{v_1, v_2\}$, $N(w) \cap H = \{v_2, v_3, v_4\}$. Se $(v_2, v_3) \in R_2$ então existem vértices não-adjacentes v, w com $N(v) \cap H = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $N(w) \cap H = \{v_2, v_3, v_4\}$.*

Fato 2.7 [16] *Seja H um buraco em F de comprimento maior ou igual a seis, com vértices v_1, v_2, \dots, v_{2t} tal que $(v_2, v_3) \in R_1 \cup R_2$. Se $xv_2 \in E(G)$ e $xv_3 \in E(G)$ para algum vértice x em G então $xv_1 \in E(G)$ ou $xv_4 \in E(G)$.*

Fato 2.8 [16] *Toda clique especial é formada por exatamente dois vértices.*

Fato 2.9 [16] *Quaisquer duas cliques especiais são disjuntas.*

Proposição 2.4 [16] *Para cada vértice x em G há pelo menos uma clique comum $K \in F$ com $x \in C(K)$.*

Prova: Pela Observação 2.5 e pelo Fato 2.9, todo vértice de F pertence a pelo menos uma clique comum. Então, observe que precisamos somente provar que todo vértice fora de F pertence a pelo menos uma clique maximal de G , $C(K)$, sendo K uma clique comum de F .

Pela propriedade (ii) do Lema 2.2, precisamos provar que todo vértice fora de F é adjacente a pelo menos dois vértices em alguma clique comum. Para isso, seja x um vértice qualquer fora de F .

Pela propriedade (iv) do Lema 2.2, cada vértice fora de F tem pelo menos um vizinho em F , então existe um vértice $y \in F$ tal que $y \in N(x)$.

Pela propriedade (i) do Lema 2.2, existe um buraco $H \subset F$ de comprimento maior ou igual a seis, tal que $y \in H$. Observe que x deve ser adjacente a pelo menos um dos dois vizinhos de y em H , pois caso contrário, y, x e dois vizinhos de y em H formariam uma garra (Figura 2.46).

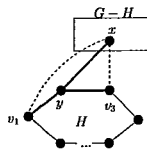


Figura 2.46: Grafo que busca exemplificar a garra yxv_1v_3 (com $v_1, v_3 \in N(y)$), gerada em G se x é não-adjacente a v_1 e a v_2 .

Vamos rotular os vértices de H com v_1, v_2, \dots, v_{2t} tal que $y = v_2, xv_2 \in E(G)$ e $xv_3 \in E(G)$.

Seja K_i denotado como a clique maximal de F que contém v_i e v_{i+1} . Se K_2 é comum, então a proposição está provada.

Por outro lado, se K_2 não é uma clique comum, então pelo Fato 2.9, K_1 e K_3 são cliques comuns. E pelo Fato 2.7, $x \in N(v_1) \cup N(v_4)$ (Figura 2.47).■

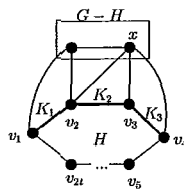


Figura 2.47: Grafo que busca exemplificar o que acontece quando K_2 não é uma clique comum.

Fato 2.10 [16] *Seja x_1x_2 uma aresta singular. Se K_1 e K_2 são cliques comuns com $x_1 \in C(K_1)$ e $x_2 \in C(K_2)$ então K_1 e K_2 devem ser disjuntas.*

Como uma extensão da Observação 2.4, temos a seguinte observação:

Observação 2.6 [16] *Seja $G = (V, E)$ um grafo Berge e sem garras. Se H é um buraco em G , com vértices v_1, v_2, \dots, v_{2t} tal que $t \geq 3$, então:*

- (1) *Cada vértice de G tem no máximo quatro vizinhos em H ;*
- (2) *Se um vértice tem precisamente quatro vizinhos em H então esses vizinhos são $v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}$ tal que i e j tenham paridades diferentes;*

Proposição 2.5 [16] *Seja x_1x_2 uma aresta singular. Se K_1 e K_2 são cliques comuns com $x_1 \in C(K_1)$ e $x_2 \in C(K_2)$, então K_1 e K_2 têm a mesma cor, em uma coloração elementar.*

Prova: Seja x_1x_2 uma aresta singular em G . E suponha que K_1 e K_2 sejam cliques comuns com $x_1 \in C(K_1)$ e $x_2 \in C(K_2)$. Seja $e_i \in E(K_i)$, para todo $i = 1, 2$.

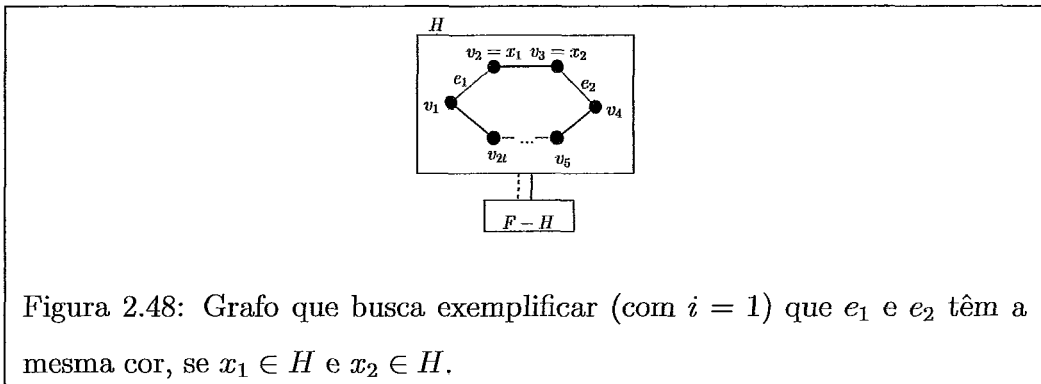
Pelo Fato 2.1, algum buraco H em F usa uma aresta e_1 de K_1 e uma aresta e_2 de K_2 . Como K_1 e K_2 são cliques e $e_i \in E(K_i)$, é fácil ver que a cor de e_i será dada para todas as arestas de K_i , ou seja, se provarmos que e_1 e e_2 têm a mesma cor, então, trivialmente K_1 e K_2 têm a mesma cor. E para isso, supondo que $v_1, v_2, \dots, v_{2t} \in H$, precisamos provar que $e_1 = v_i v_{i+1}$ e $e_2 = v_j v_{j+1}$, tal que i e j tenha a mesma paridade.

Pelo Fato 2.10, K_1 e K_2 são disjuntas, logo e_1 e e_2 também são. Assim, se o comprimento do buraco for quatro, é fácil ver que K_1 e K_2 têm a mesma cor. Suponha, portanto que H tenha comprimento maior ou igual a seis.

Observe que x_2 não pode ser adjacente a ambos os extremos de e_1 ; pois caso contrário, pela propriedade (ii) do Lema 2.2, x_2 seria adjacente a todos os vértices de K_1 e assim teríamos $x_2 \in C(K_1)$, contrariando a singularidade da

aresta x_1x_2 , que é um absurdo. E da mesma maneira, x_1 não pode ser adjacente a ambos os extremos de e_2 .

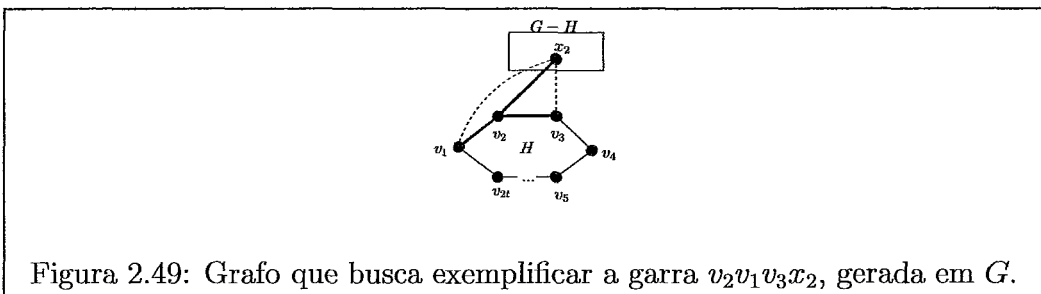
Se $x_1 \in H$ e $x_2 \in H$, então, devemos ter $e_1 = v_i v_{i+1}$, $x_1 = v_{i+1}$, $x_2 = v_{i+2}$ e $e_2 = v_{i+2} v_{i+3}$, para algum i . E aí está feito, pois basta colorir as arestas de H intercalando as cores, que teremos e_1 e e_2 da mesma cor (Figura 2.48).



Porém, se isso não acontecer, podemos analisar dois casos:

Caso 1: $x_1 \in H$ e $x_2 \notin H$.

Suponha, sem perda de generalidade, que $e_1 = v_1 v_2$ e $x_1 = v_2$. Como, $x_2 v_1 \notin E(G)$ (pela singularidade da aresta $x_1 x_2$), devemos ter $x_2 v_3 \in E(G)$, pois caso contrário, $v_2 v_1 v_3 x_2$ é uma garra (Figura 2.49).



Portanto, pela Observação 2.6, e_1 e e_2 têm a mesma cor.

Caso 2: $x_1 \notin H$ e $x_2 \notin H$.

Caso 2.1: Os únicos vizinhos de cada x_i em H são os extremos de e_i . Sem perda de generalidade, suponha $e_1 = v_1 v_2$ e $e_2 = v_i v_{i+1}$ para algum i com $3 \leq i \leq 2t - 1$. Com isso, observe que $v_2 v_3 \dots v_i x_2 x_1$ é um buraco, logo i deve

ser ímpar, pois caso contrário, teríamos buraco ímpar como subgrafo induzido de G (Figura 2.50).

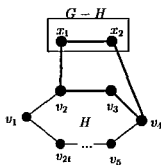


Figura 2.50: Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar $v_2v_3 \dots v_i x_2 x_1$ (com $i = 4$), gerado em G , se i for par.

Caso 2.2: x_1 tem exatamente três vizinhos em H e x_2 tem no máximo três vizinhos em H . Sem perda de generalidade, suponha que x_1 seja adjacente a v_1, v_2 e v_3 . Observe que precisamos ter: $x_2v_1 \in E(G)$ ou $x_2v_3 \in E(G)$ ou ambos, pois caso contrário, poderíamos ter a garra $x_1x_2v_1v_3$ (Figura 2.51).

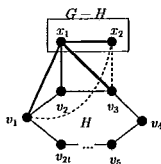


Figura 2.51: Grafo que busca exemplificar garra $x_1x_2v_1v_3$, gerada em G .

Por simetria, considere $x_2v_3 \in E(G)$. Logo, x_2 não pode ser adjacente a todos os três vértices v_3, v_4 e v_5 ; pois caso contrário, $v_1x_1x_2v_5 \dots v_{2t}$ é um buraco ímpar (Figura 2.52).

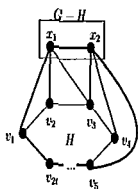


Figura 2.52: O buraco ímpar $v_1x_1x_2v_5 \dots v_{2t}$, gerado em G se x_2 for adjacente aos vértices v_3, v_4 e v_5 .

Portanto, os vizinhos de x_2 pertencem ao conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Mas observe que, pela singularidade da aresta x_1x_2 , ou $x_2v_1 \in E(G)$ ou $x_2v_2 \in E(G)$. Por hipótese, x_2 tem no máximo três vizinhos em H . Como e_1 e e_2 não possuem vértices em comum, devemos ter $e_1 = v_1v_2$ e $e_2 = v_3v_4$ (Figura 2.53).

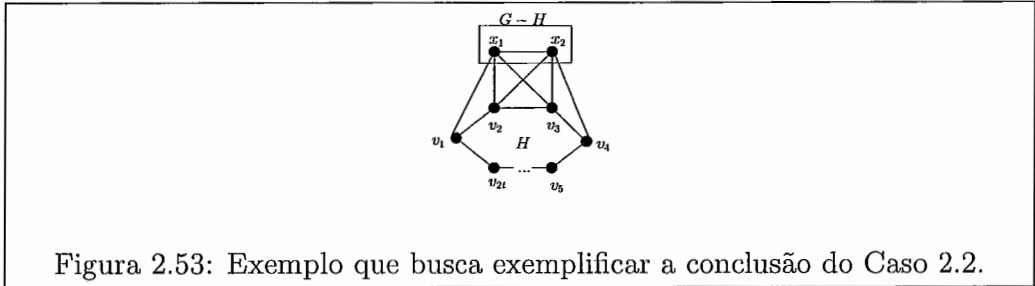


Figura 2.53: Exemplo que busca exemplificar a conclusão do Caso 2.2.

Caso 2.3: x_1 tem quatro vizinhos em H . Sem perda de generalidade, suponha que x_1 seja adjacente a v_1, v_2, v_i, v_{i+1} , tal que i seja par; pois caso contrário, teríamos buraco ímpar como subgrafo induzido de G (Figura 2.54).

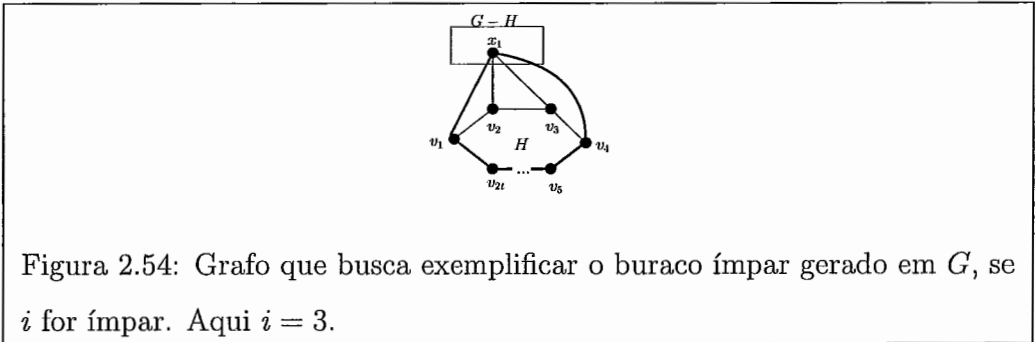


Figura 2.54: Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar gerado em G , se i for ímpar. Aqui $i = 3$.

Observe que pelo Fato 2.7, nem v_1v_2 e nem v_iv_{i+1} é especial. Logo, como x_1x_2 é uma aresta singular, x_2 não pode ser adjacente a nenhum vértice $y \in \{v_1, v_2\}$ e a nenhum vértice $z \in \{v_i, v_{i+1}\}$. Mas então x_1x_2yz é uma garra (Figura 2.55), que é um absurdo. Logo, x_1 não pode ter quatro vizinhos em H . ■

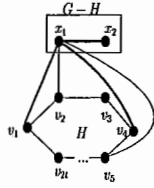


Figura 2.55: Grafo que busca exemplificar a garra x_1x_2yz gerada em G , supondo que $y = v_1$ e $z = v_i$, para $i = 4$.

Proposição 2.6 [16] *Se x_1x_2 e x_2x_3 são arestas singulares, então x_1 e x_3 são vértices adjacentes.*

Prova: Por absurdo, suponha que $x_1x_3 \notin E(G)$ e existem arestas singulares x_1x_2 e x_2x_3 . Pela Proposição 2.4, $x_2 \in C(K)$, para alguma clique comum K . Logo $x_1 \notin C(K)$, pois x_1x_2 é uma aresta singular. Pela Proposição 2.2, x_1 deve ser não-adjacente a pelo menos um vértice em K ; pois caso contrário, já que $x_1 \notin C(K)$, teríamos a clique comum K contida em duas cliques maximais de G , contrariando a Proposição 2.2. Pela propriedade (ii) do Lema 2.2, x_1 e x_3 podem ser adjacentes a no máximo um vértice em K . Por outro lado, cada vértice $x \in K$ deve ser adjacente a pelo menos um vértice do conjunto $\{x_1, x_3\}$, pois caso contrário, $x_2x_1x_3x$ é uma garra (Figura 2.56).

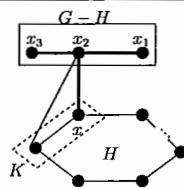
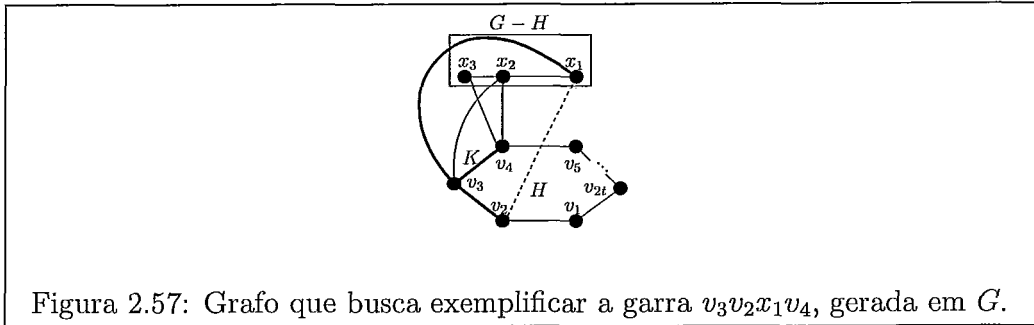


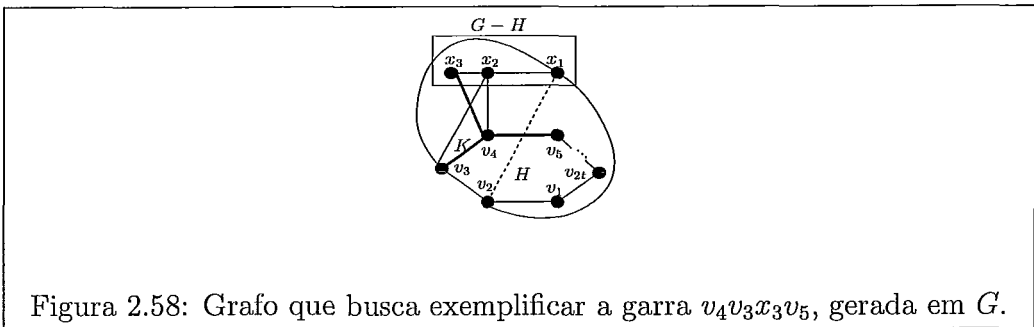
Figura 2.56: Grafo que busca exemplificar a garra $x_2x_1x_3x$, gerada em G , se $x \in K$ não é adjacente nem a x_1 e nem a x_3 .

Então podemos concluir que existem $y, z \in K$, tal que $yx_1 \in E(G)$, $zx_1 \notin E(G)$, $yx_3 \notin E(G)$ e $zx_3 \in E(G)$. Pela propriedade (i) do Lema 2.2, existe um buraco de comprimento maior ou igual a seis tal que $y \in H$. Pela Observação

2.5, podemos rotular os vértices de H com v_1, v_2, \dots, v_{2t} , tal que, $v_3 = y$ e $v_4 = z$. Note que $x_1v_2 \in E(G)$, pois caso contrário, $v_3v_2x_1v_4$ é uma garra (Figura 2.57).



E também, $x_3v_5 \in E(G)$, pois caso contrário, $v_4v_3x_3v_5$ é uma garra (Figura 2.58).



Assim podemos analisar dois casos:

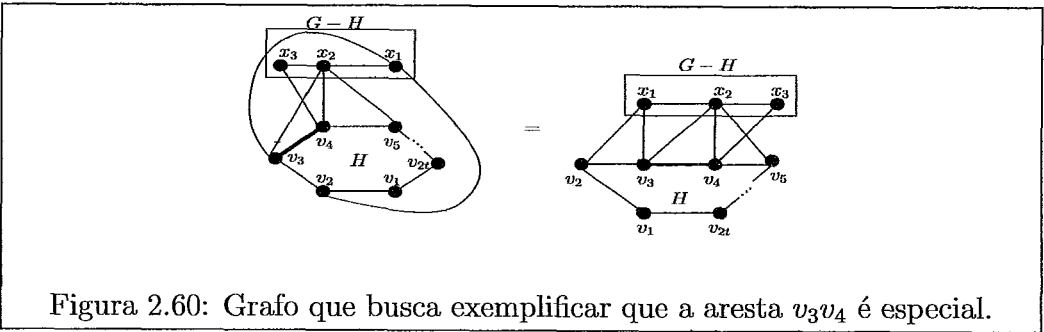
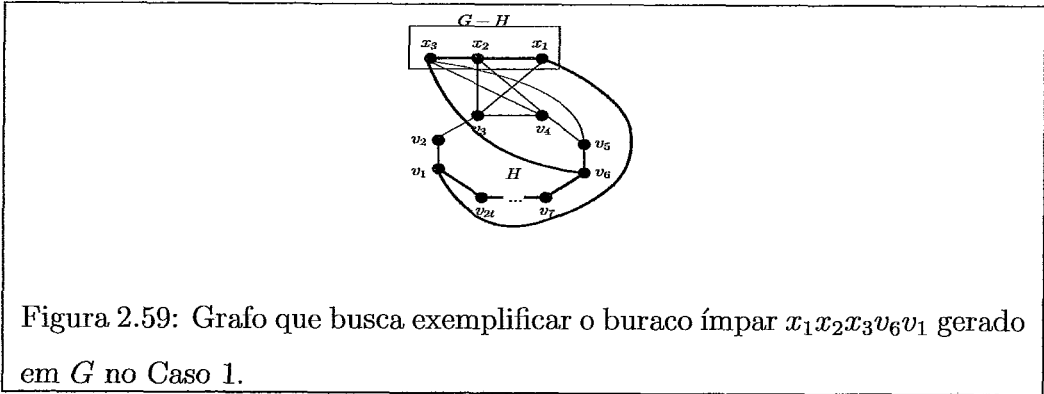
Caso 1: $x_2v_2 \notin E(G)$ e $x_2v_5 \notin E(G)$.

Pelo Fato 2.5, $x_1v_1 \in E(G)$, com $v = x_1$ e $w = v_2$; e $x_3v_6 \in E(G)$, com $v = x_2$ e $w = x_4$. Pelo Fato 2.4, $N(x_2) \cap H = \{v_3, v_4\}$. Mas então $v_1x_1x_2x_3v_6 \dots v_{2t}$ é um buraco ímpar (Figura 2.59). Absurdo.

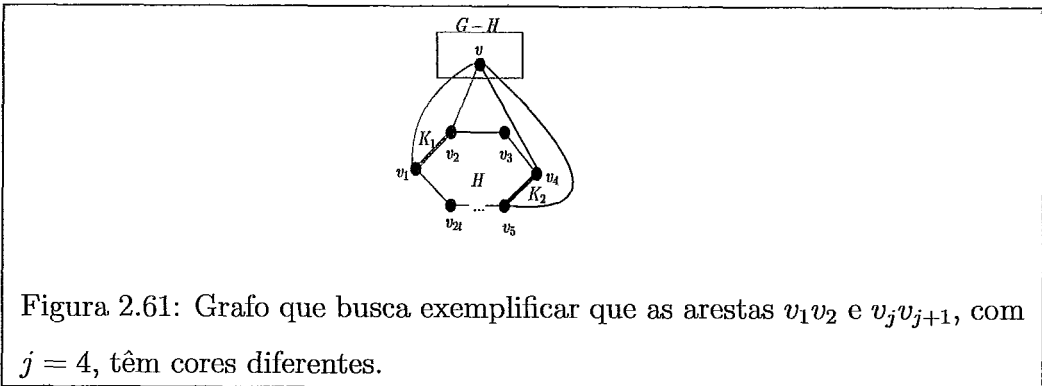
Caso 2: $x_2v_2 \in E(G)$ ou $x_2v_5 \in E(G)$.

Por simetria, seja $x_2v_5 \in E(G)$. Então, pelo Fato 2.4, a aresta v_3v_4 é especial, que é um absurdo (Figura 2.60). ■

Proposição 2.7 [16] *Se K_1 e K_2 são cliques comuns distintas de mesma cor, em uma coloração elementar, então $C(K_1)$ e $C(K_2)$ não possuem vértices em comum.*



Prova: Por hipótese, K_1 e K_2 são cliques comuns distintas de mesma cor. Por absurdo, suponha que algum vértice v de G pertence as cliques $C(K_1)$ e $C(K_2)$. Pelo Fato 2.1, existe um buraco $v_1v_2 \dots v_{2t}$ em F (que chamaremos de H) tal que v_1v_2 é uma aresta de K_1 e para algum j , v_jv_{j+1} é uma aresta de K_2 . Como K_1 e K_2 não possuem vértices em comum, os vértices v_1, v_2, v_j e v_{j+1} são diferentes. Pela hipótese, v é adjacente a todos esses vértices (v_1, v_2, v_j, v_{j+1}), logo, pela Observação 2.6, j deve ser par. Mas então v_1v_2 e v_jv_{j+1} têm cores diferentes (Figura 2.61), absurdo. ■



Lembrando o que definimos na Seção 2.1, dizemos que dois vértices em um grafo G são **vértices gêmeos** se são adjacentes e possuem a mesma vizinhança.

Lema 2.3 [16] *Seja $G = (V, E)$ um grafo Berge e sem garras. Se G contém um subgrafo induzido F com as propriedades (i), (ii), (iii), (iv) do Lema 2.2, então G é elementar.*

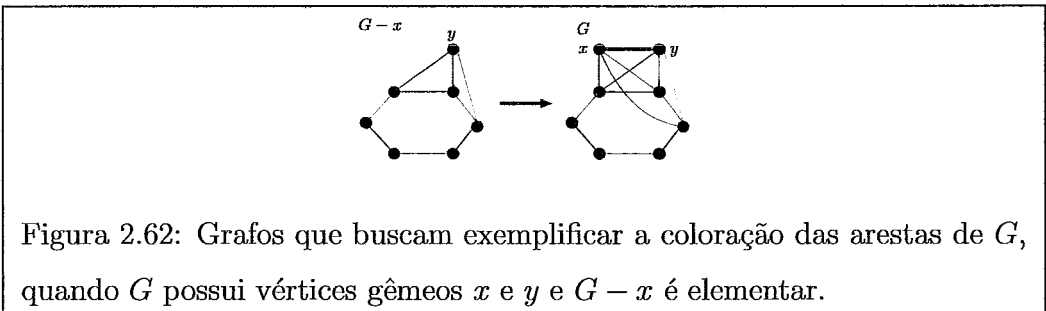
Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo Berge e sem garras. Suponha que G contém um subgrafo induzido F com as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) do Lema 2.2.

Pelo Teorema 1.3, F é um grafo linha de um grafo bipartido, então, pela Observação 2.3, F é elementar e assim suas arestas podem ser coloridas com duas cores de tal forma que o grafo induzido por todas as arestas de uma mesma cor consiste de cliques disjuntas em vértices. E além do mais essas cliques são maximais em F .

Para estender a coloração de F para G , vamos considerar dois casos:

Caso 1: O grafo G possui vértices gêmeos.

Suponha que $x, y \in G$ sejam vértices gêmeos. Observe que se $G - x$ é elementar, então G também é elementar, pois para estender a coloração de $G - x$ para G , basta colorir cada aresta xz (onde $z \in V(G)$, $z \neq y$ e $z \in N(y)$) com a cor da aresta yz , e não é preciso se preocupar com a cor da aresta xy pois ela não pertence a um P_3 (podemos ver um exemplo na Figura 2.62).



Além disso, pela estrutura de F , apenas um dos vértices gêmeos pode pertencer a F .

Logo como queremos estender a coloração de F para G e vimos que a coloração de vértices gêmeos é fácil, para simplificar esse processo de extensão,

vamos remover os vértices gêmeos de F , para não comprometer a coloração das arestas de F e conseqüentemente as de G . Então, deletando esses vértices, sempre que possível, obteremos um grafo G_0 sem vértices gêmeos tal que $F \subset G_0 \subset G$, e G_0 é elementar se e somente se G é elementar.

Então, sem perda de generalidade, podemos assumir o Caso 2, abaixo:

Caso 2: O grafo G não possui vértices gêmeos.

Aqui a coloração de F será estendida para a coloração de G em dois estágios. No primeiro estágio nós consideramos todas as clique comuns K , e em cada uma delas, atribuímos para todas as arestas de $C(K)$ a cor de K . A Proposição 2.3, nos garante que a nenhuma aresta será dada duas cores. Quando esse estágio termina, as únicas arestas não coloridas serão as arestas singulares.

No segundo estágio, precisamos colorir as arestas restantes. Para cada aresta singular x_1x_2 , a Proposição 2.4 garante a existência de uma clique comum K tal que $C(K)$ intercepta um de $\{x_1, x_2\}$. As Proposições 2.4 e 2.5 garantem que toda clique comum K , tal que $C(K)$ intercepta um de $\{x_1, x_2\}$, tem a mesma cor. Daremos a x_1x_2 a outra cor (em particular, cada aresta singular com ambos os extremos em F , será dada a cor, que ela tinha originalmente na coloração de F). É claro, que precisamos verificar que, para cada tripla de vértices x_1, x_2, x_3 com $x_1x_2 \in E(G)$, $x_2x_3 \in E(G)$, $x_1x_3 \notin E(G)$, as duas arestas x_1x_2 e x_2x_3 têm cores diferentes, isto é, verificar se a coloração é elementar. A Proposição 2.6 garante que no máximo uma dessas duas arestas é singular: se precisamente uma dessas é singular então ela será colorida apropriadamente no segundo estágio do procedimento de coloração. Se nenhuma dessas arestas é singular então as duas tem cores diferentes pelas Proposições 2.2 e 2.7. ■

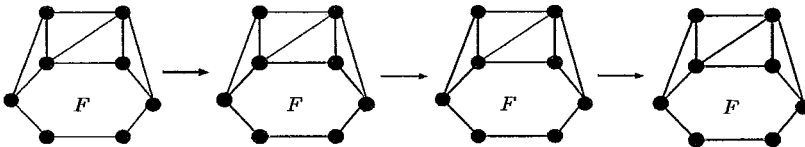


Figura 2.63: Exemplo de uma coloração elementar, seguindo o caminho proposto por Chvátal e Sbihi.

Prova do Teorema 2.1:

(\Leftarrow) Seja $G = (V, E)$ um grafo sem garras e sem corte-clique. Se G tem a propriedade (i), isto é, se G é elementar, já provamos (na Seção 2.1) que ele é Berge. Por outro lado, se G tem a propriedade (ii) deste teorema considerando que um conjunto vazio é uma clique então todo grafo sem corte-clique é conexo. Assim pelo Lema de Ben Rebea, G é Berge.

(\Rightarrow) Seja $G = (V, E)$ um grafo sem garras, sem corte-clique e Berge. Então pelos Lemas 2.2 e 2.3, G é elementar. ■

2.3 Algoritmo Polinomial

Nesta seção buscamos explicar como o Teorema 2.1 pode fornecer um algoritmo em tempo polinomial para reconhecer os grafos Berge e sem garras. Para isso definiremos as classes \mathcal{C} e \mathcal{C}^* como descrito abaixo:

— \mathcal{C} é uma classe de grafos fechada para subgrafos induzidos, isto é, se $G \in \mathcal{C}$ e H é um subgrafo induzido de G então $H \in \mathcal{C}$.

— \mathcal{C}^* é uma classe de grafos definida recursivamente, então dizemos que: $G \in \mathcal{C}^*$ se ou $G \in \mathcal{C}$ ou então G tem um corte-clique e todos os subgrafos próprios induzidos de G estão em \mathcal{C}^* .

Sue Whitesides [35] mostrou que se existe um algoritmo, em tempo polinomial, para testar os membros de uma classe \mathcal{C} , então os membros de \mathcal{C}^* também podem ser testados em tempo polinomial. E para justificar essa afirmação, ela apresenta alguns argumentos, sendo um deles o Algoritmo 2.1, no qual, dado um grafo G , decide se $G \in \mathcal{C}^*$ ou não.

Algoritmo 2.1

- Passo 1: Coloque G em uma lista de espera.
- Passo 2: Se a lista de espera está vazia então retorne $G \in \mathcal{C}^*$ e pare; senão remova arbitrariamente um grafo H da lista de espera;
- Passo 3: Se H tem um corte-clique, então o conjunto de vértices de H é dividido em três conjuntos V_1, V_2, K tal que K é uma clique, V_1 e V_2 são não-vazios, e não existe arestas entre V_1 e V_2 . Neste caso coloque $H - V_1$ e $H - V_2$ na lista de espera e retorne ao passo 1.
- Passo 4: Agora H não tem corte-clique. Se $H \in \mathcal{C}$ então retorne ao passo 2. Senão escreva $G \notin \mathcal{C}^*$ e pare.

Esse algoritmo pode ser visualizado como uma árvore binária de decomposição, onde: os nós desta árvore são os grafos que passam pela lista de espera; G é a raiz da árvore; e os $H - V_1$ e $H - V_2$ (no passo 3) são os filhos de H na árvore (lembrando que no algoritmo H é um grafo que está na lista de espera). Note que o número de nós da árvore é igual ao número de iterações desse algoritmo; e como mostrado por Gavril [20], esse número não excede n^2 , onde n é o número de vértices de G .

Um exemplo da árvore binária de decomposição (tendo como base o algoritmo em questão) pode ser visto na Figura 2.64, onde em cada etapa as arestas coloridas representam um corte-clique no grafo.

Observe que no passo 3 do algoritmo é preciso verificar se H tem corte-clique ou não. Para fazer essa verificação foi usado o algoritmo de Whitesides [36], que faz essa verificação em $O(mn)$ passos (onde n é o número de vértices e m é o número de arestas do grafo).

Chvátal e Sbihi [16] perceberam que podiam utilizar o Algoritmo 2.1 para fazer o reconhecimento de grafos Berge e sem garras. Então, a fim de ajustar esse problema de reconhecimento aos parâmetros do algoritmo, definiram \mathcal{C} sendo a

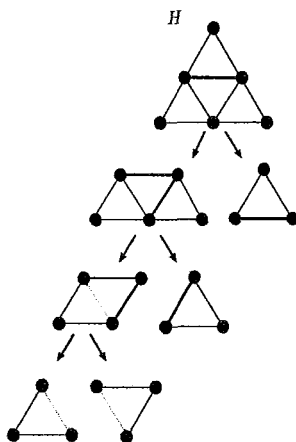


Figura 2.64: Exemplo de aplicação do algoritmo de Whitesides.

classe de todos os grafos sem garras H , tal que cada componente conexo, G , de H tem pelo menos uma das propriedades (i) ou (ii) do Teorema 2.1. Porém é preciso verificar se realmente o algoritmo em questão pode ser utilizado para fazer o reconhecimento dos grafos Berge e sem garras. E para isso basta verificar se:

- (1) \mathcal{C} é fechado para subgrafo induzido;
- (2) Existe um algoritmo em tempo polinomial para testar os membros de \mathcal{C} ;
- (3) Um grafo sem garras é Berge se e somente se pertence a \mathcal{C}^* .

Aqui nos cabe lembrar que:

- \mathcal{C} representa a classe de todos os grafos sem garras, H , tal que cada componente conexo, G , de H possui as propriedades (i) ou (ii) do Teorema 2.1;
- $\mathcal{C}^* \in G$ se $G \in \mathcal{C}$ ou G tem corte-clique e todos os seus subgrafos próprios estão em \mathcal{C}^* .

Vamos, agora, apresentar as verificações cabíveis:

- (1) \mathcal{C} é fechado para subgrafos induzidos.

Aqui é preciso verificar se (1) é satisfeito, quando G possui a propriedade (i) e quando possui a propriedade (ii) do Teorema 2.1. Então, para isso, seja F um subgrafo induzido de G . Observe que todo subgrafo induzido de um grafo

elementar é elementar. Logo se G tem a propriedade (i), isto é, se G é elementar, F também é.

Quando G possui a propriedade (ii), precisamos mostrar que cada subgrafo induzido, F , de um grafo sem garras e conexo, G , com a propriedade (ii) tem pelo menos uma das propriedades (i) ou (ii). Observe que, por hipótese, $\alpha(G) \geq 3$ e G não contém buraco de comprimento maior ou igual a cinco. Então pelo contra-positivo do Lema de Ben Rebea, G é Berge. Logo F é Berge. Além disso, suponha que F não tem a propriedade (ii). Então $\alpha(G) \leq 2$. Porém os grafos Berge, F , com $\alpha(G) \leq 2$ são exatamente os grafos cobipartidos.

(2) *Existe um algoritmo em tempo polinomial para testar os membros de \mathcal{C} .*

Caso 1: Os grafos elementares podem ser reconhecidos em tempo polinomial (veja Seção 2.1).

Caso 2: Os grafos com $\alpha(G) \geq 3$ e com buraco de comprimento maior ou igual a cinco podem ser reconhecido em tempo polinomial (visto que o teste para verificar se $\alpha(G) \geq 3$ é feito em tempo polinomial; e verificar se um grafo possui buraco de comprimento maior ou igual a cinco também é feito em tempo polinomial, como podemos observar no próximo parágrafo).

Segue de uma observação de Ryan Hayward [23]: Dado um grafo G , para verificar se para cada par de arestas xy e yz (com x e z não-adjacentes) as mesmas pertencem a um buraco de comprimento maior ou igual a cinco, considere o seguinte algoritmo: teste se x e z pertencem a mesma componente conexa do grafo obtido de G , deletando todos os vizinhos em comum de x e z , assim como todos os vizinhos de y exceto x e z .

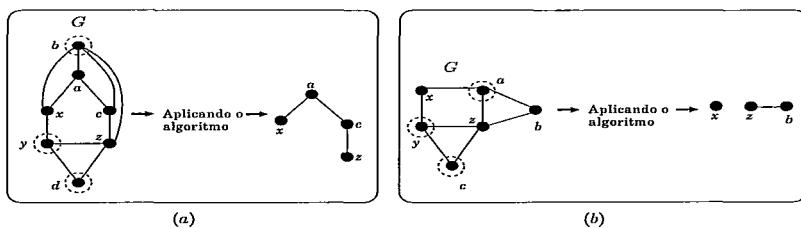


Figura 2.65: Exemplo da aplicação do algoritmo utilizado por Hayward.

Observe que na Figura 2.65 (a), o algoritmo nos retorna um grafo onde x e z pertencem a mesma componente conexa, logo x e z , em G , fazem parte de um buraco de comprimento maior ou igual a cinco. E na Figura 2.65 (b), o algoritmo nos retorna um grafo onde x e z não pertencem a mesma componente conexa, logo x e z , em G , não fazem parte de um buraco de comprimento maior ou igual a cinco.

(3) *Um grafo sem garras é Berge se, e somente se, pertence a classe \mathcal{C}^* .*

(\Rightarrow) Seja G um grafo Berge e sem garras.

Caso 1: Suponha que G não tem corte-clique, então pelo Teorema 2.1, $G \in \mathcal{C}$ e logo $G \in \mathcal{C}^*$.

Caso 2: Suponha, agora, que G tem corte-clique, então podemos decompor esse grafo de modo a construirmos uma árvore de decomposição onde G é a raiz dessa árvore e as folhas, são subgrafos próprios de G sem corte-clique, sem garras e Berge, logo pertencem a \mathcal{C} então, $G \in \mathcal{C}^*$.

(\Leftarrow) Suponha que $G \in \mathcal{C}^*$. Por indução forte no número de vértices de G , temos:

(3.1) Tome $|V(G)| = 1$. Então G é trivialmente um grafo Berge e sem garras.

(3.2) Suponha o resultado válido para todo grafo com menos do que n vértices, $n > 1$. Seja G um grafo com $|V(G)| = n$ e $G \in \mathcal{C}^*$. Então $G \in \mathcal{C}$ ou G tem um corte-clique e todos os seus subgrafos próprios estão em \mathcal{C}^* . Se $G \in \mathcal{C}$ então, pelo Teorema 2.1, o grafo G , sem garras, é Berge. Se G tem um corte-clique K então cada componente $G_i \cup K$ onde G_i são componentes conexos de $G - K$, satisfazem a hipótese (3.2) de indução pois $|V(G_i \cup K)| < n$. Logo G é Berge.

Portanto, a partir de tais verificações podemos concluir que o Teorema 2.1 produz um algoritmo em tempo polinomial para o reconhecimento de grafos Berge e sem garras.

2.4 Reconhecimento de grafos Berge e sem garras através dos grafos elementares e dos grafos peculiares

Até o momento, neste capítulo, buscamos apresentar uma descrição de alguns grafos Berge e sem garras (assim como um algoritmo para o seu reconhecimento), tendo como foco principal a relação desses grafos com a coloração de suas arestas. Isto é, verificamos que tipo de estrutura apresentava alguns grafos que permitiam uma coloração elementar. Porém, como já citado na Seção 2.1, segundo Chvátal e Sbihi [16], existem grafos que não apresentam este tipo de coloração, mas mesmo assim são grafos Berge e sem garras, vimos então que esses grafos devem ter a propriedade (ii) do Teorema 2.1. Fazendo assim, o que os autores chamam de refinamento desta propriedade, eles definem os grafos peculiares:

Um grafo é chamado de *Peculiar* se pode ser obtido da seguinte maneira: Comece com um grafo completo K , particione seu conjunto de vértices em subconjuntos $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$. Então, para cada $i = 1, 2, 3$ remova pelo menos uma aresta com um extremo em A_i e o outro extremo em B_{i+1} ($i = 4$ pode ser interpretado como $i = 1$). Finalmente, adicione as cliques não-vazias K_1, K_2, K_3 disjuntas duas a duas e, para cada $i = 1, 2, 3$, faça cada vértice em K_i adjacente a todos os vértices em $K - (A_i \cup B_i)$.

Observação 2.7 [16] *Todo grafo peculiar contém o grafo da Figura 2.66 (a), como subgrafo induzido.*

Em particular, se considerarmos o grafo G da Figura 2.66 (b), temos, $A_1 = \{d_2\}$, $A_2 = \{b_1\}$, $A_3 = \{a_2\}$, $B_1 = \{d_1\}$, $B_2 = \{a_1\}$, $B_3 = \{b_2\}$, $K_1 = \{x\}$, $K_2 = \{c_2\}$ e $K_3 = \{c_1\}$.

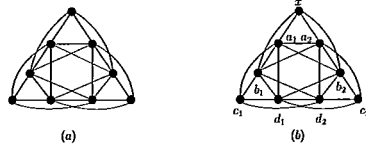


Figura 2.66: (a) Exemplo de grafo peculiar; (b) Exemplo de grafo peculiar com os vértices rotulados.

Assim podemos apresentar o seguinte Teorema:

Teorema 2.2 [16] *Se um grafo Berge e sem garras não tem corte-clique então ele é elementar ou peculiar.*

A prova do Teorema 2.2 é imediata através do Lema 2.4.

Lema 2.4 [16] *Seja G um grafo Berge, sem garras e sem corte-clique. Se G não é elementar, então ele contém um subgrafo induzido isomorfo ao grafo da Figura 2.66 (a).*

Prova: Seja G um grafo Berge, sem garras, sem corte-clique e não-elementar. Então, pelo Teorema 2.1, $\alpha(G) \geq 3$ e G não contém buraco de comprimento maior ou igual a cinco.

O Teorema de Dirac [17], afirma que todo grafo G sem buraco de comprimento maior ou igual a quatro, tem um corte-clique ou senão é completo.

Por hipótese, G não é elementar (logo não é completo) e não possui corte-clique, então pelo contrapositivo do Teorema de Dirac [17] G tem buraco de comprimento maior ou igual a quatro, como subgrafo induzido; mas, já vimos o comprimento desse buraco não pode ser de comprimento maior ou igual a cinco, logo G tem um buraco de comprimento igual a quatro como subgrafo induzido.

Seja F um subgrafo induzido maximal de G , sem corte-clique, com $\alpha(F) = 2$. Observe que F não é vazio, pois um buraco de comprimento quatro tem essas propriedades. Além disso, pelas propriedades de F , podemos também afirmar que ele é elementar; e mais, $F \neq G$, já que G (por hipótese) não é elementar.

Para facilitar a visualização desta prova, consideramos o grafo F da Figura 2.67. Vale ressaltar, que usamos esse grafo (assim como outros grafos dentro desta prova) a título de exemplo e que F (e os outros grafos que serão utilizados) poderia ser qualquer grafo, desde que satisfizesse às hipóteses exigidas. Observe que este exemplo satisfaz as hipóteses exigidas para F , isto é: $\alpha(G) = 2$, F não tem corte-clique e F é elementar (visto que F é cobipartido).

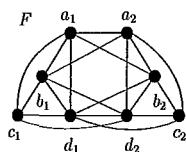


Figura 2.67: Exemplo de um subgrafo induzido F , de G .

Vamos separar esta prova em dois casos:

Caso 1: Algum vértice $x \in V(G)$ fora de F tem dois vizinhos em F que são não-adjacentes entre si.

Para prosseguir neste caso vamos definir alguns conceitos: sejam $D = \{y \in F - N(x) \mid y \text{ é adjacente a todos os vértices restantes em } F - N(x)\}$ e $C = (F - N(x)) - D$. O conjunto de vértices de F é particionado em duas cliques K_1 e K_2 . Sejam também: $N_i = K_i \cap N(x)$, $C_i = K_i \cap C$ e $D_i = K_i \cap D$. Vamos considerar os vértices: $a_i, b_i \in N_i$, $c_i \in C_i$ e $d_i \in D_i$, para $i = 1, 2$.

Como $F \cup \{x\}$ não tem corte-clique, observe que a maximalidade de F implica que $\alpha(F \cup \{x\}) = 3$. Então $C_1 \neq \emptyset$ e $C_2 \neq \emptyset$.

A partir de agora vamos analisar, por meio de subgrafos proibidos, a possibilidade de existência das arestas entre quaisquer dois conjuntos dados anteriormente.

Nenhum vértice em C_1 é adjacente a algum vértice em N_2 . Pois, caso contrário, haveria uma garra centrada em N_2 (Figura 2.69).

Da mesma forma, nenhum vértice em C_2 é adjacente a algum vértice em N_1 . Pois, caso contrário, haveria uma garra centrada em N_1 (Figura 2.70).

Por exemplo, seja G o grafo da figura , abaixo. Observe que $x \in (V(G) - F)$ e x tem dois vizinhos em F , (b_1 e b_2), que não são adjacentes entre si. Aqui temos: $N(x) = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$; $F - N(x) = \{c_1, d_1, d_2, c_2\}$; $D = \{d_1, d_2\}$; $C = \{c_1, c_2\}$; $K_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ e $K_2 = \{a_2, b_2, d_2, c_2\}$; $N_1 = \{a_1, b_1\}$ e $N_2 = \{a_2, b_2\}$; $C_1 = \{c_1\}$ e $C_2 = \{c_2\}$; $D_1 = \{d_1\}$ e $D_2 = \{d_2\}$.

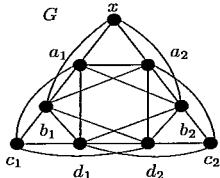


Figura 2.68: Exemplo de um grafo G para o caso em que algum vértice x fora de F tem dois vizinhos em F que são não-adjacentes entre si.

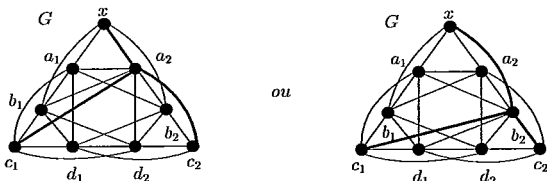


Figura 2.69: Grafos que buscam exemplificar as possíveis garras centradas em N_2 .

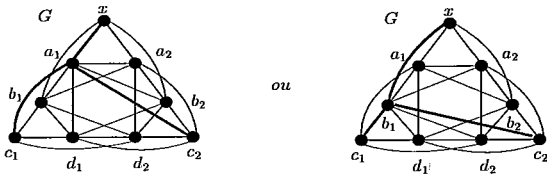
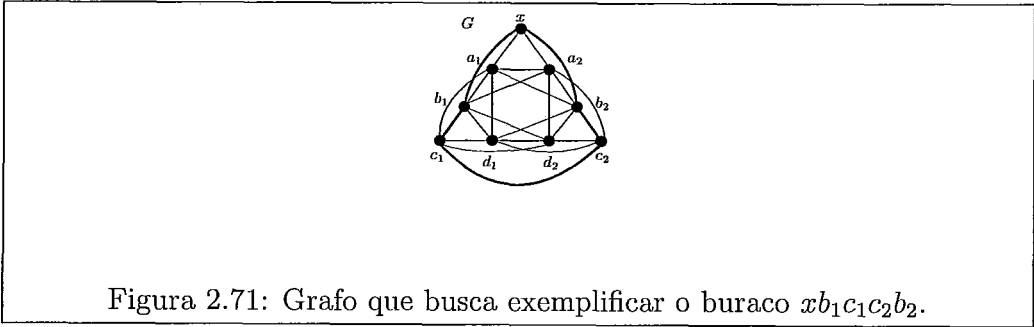
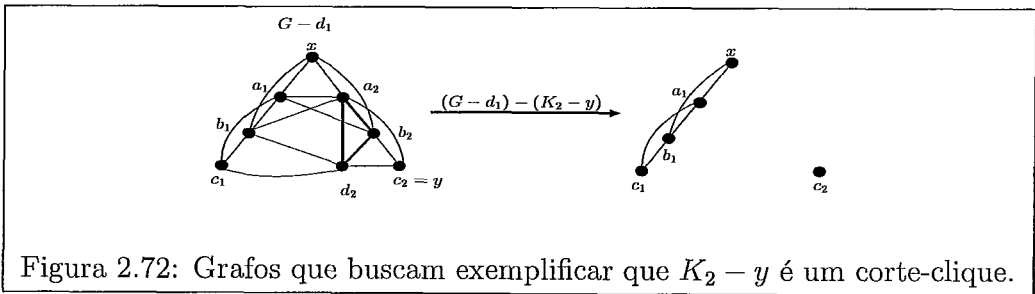


Figura 2.70: Grafos que buscam exemplificar as possíveis garras centradas em N_1 .

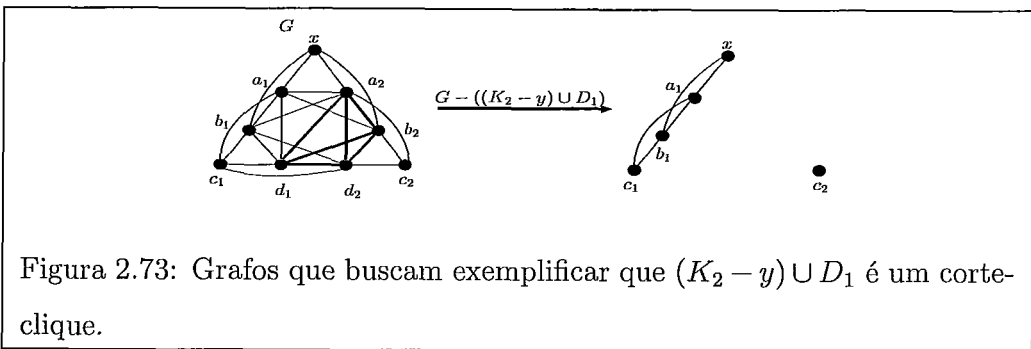
Nenhum vértice em C_1 é adjacente a algum vértice em C_2 . Pois, caso contrário, $xb_1c_1c_2b_2$, (com $b_1b_2 \notin E(G)$, e $c_1c_2 \in E(G)$) seria um buraco de comprimento cinco (Figura 2.71).



Observe que $D_1 \neq \emptyset$ e $D_2 \neq \emptyset$. Pois, caso contrário, se $D_1 = \emptyset$ e supondo que existe um vértice $y \in C_2$, então $K_2 - y$ seria um corte-clique em F . Similarmente para D_2 (Figura 2.72).

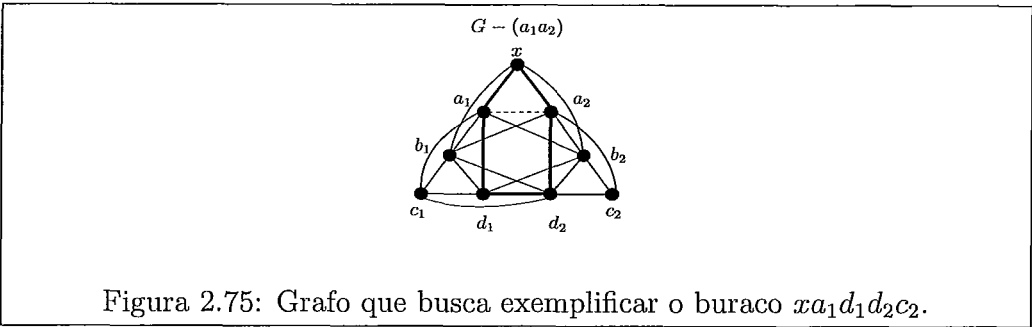
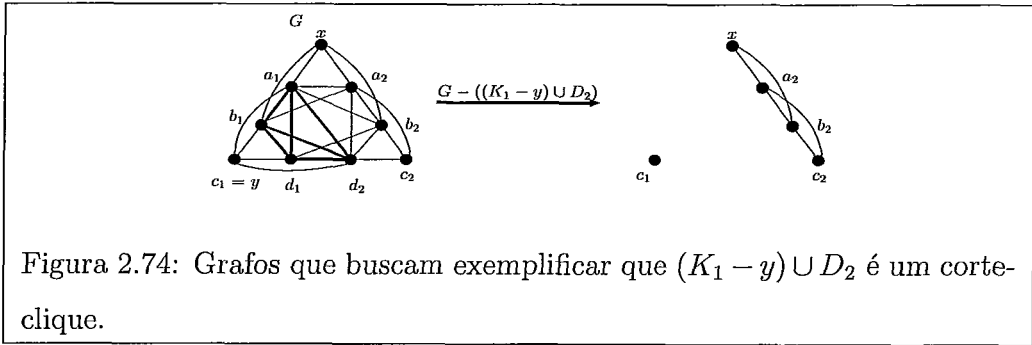


Alguns vértices $d_1 \in D_1$ tem um não-vizinho $a_2 \in N_2$. Pois, caso contrário, $(K_2 - y) \cup D_1$, com $y \in C_2$ seria um corte-clique em F (Figura 2.73).

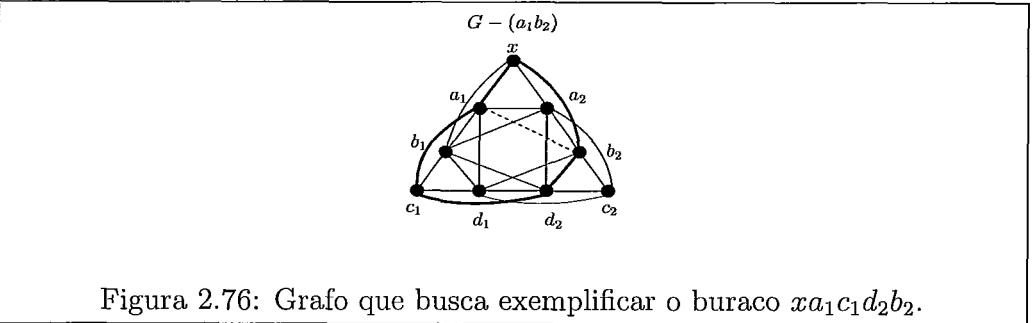


Pela simetria do grafo, algum vértice $d_2 \in D_2$ tem um não-vizinho $a_1 \in N_1$. Pois, caso contrário, $(K_1 - y) \cup D_2$, com $y \in C_1$, seria um corte-clique em F (Figura 2.74).

Observe que $a_1a_2 \in E(G)$. Pois, caso contrário, $xa_1d_1d_2c_2$ seria um buraco de comprimento cinco (Figura 2.75).



Agora, considere dois vértices não-adjacentes b_1 e b_2 tal que $b_i \in N_i$. Escolha dois vértices c_1 e c_2 tal que $c_i \in C_i$. Devemos ter $a_1b_2 \in E(G)$, pois caso contrário, $xa_1c_1d_2b_2$ seria um buraco de comprimento cinco (Figura 2.76).



Pela simetria do grafo, devemos ter $a_2b_1 \in E(G)$. Pois, caso contrário, $xb_1d_1c_2a_2$ seria um buraco de comprimento cinco. Em particular, temos $a_1 \neq b_1$ e $a_2 \neq b_2$ (Figura 2.77).

Devemos ter, $d_1b_2 \in E(G)$. Pois, caso contrário, $xb_1d_1c_2d_2$ seria um buraco de comprimento cinco (Figura 2.78).

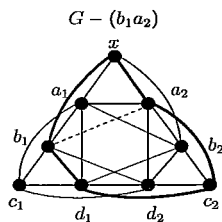


Figura 2.77: Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1d_1c_2a_2$.

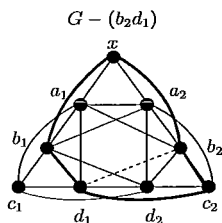


Figura 2.78: Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1d_1c_2d_2$.

Pela simetria do grafo, $d_2b_1 \in E(G)$. Pois, caso contrário, $xb_1c_1d_2b_2$ seria um buraco de comprimento cinco (Figura 2.79).

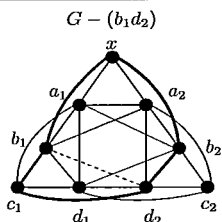


Figura 2.79: Grafo que busca exemplificar o buraco $xb_1c_1d_2b_2$.

Portanto, os vértices: $x, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$ induzem um grafo isomorfo ao grafo da Figura 2.66 (a).

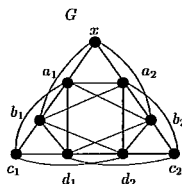


Figura 2.80: Grafo induzido pelos vértices: $x, a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2$.

Caso 2: Nenhum vértice $x \in V(G)$ fora de F tem dois vizinhos em F que são não-adjacentes entre si.

Para o Caso 2, usamos como exemplo o grafo G da figura abaixo; F um subgrafo induzido de G e os vértices $u_2, u_3, u_4 \in V(G)$ estão fora de F .

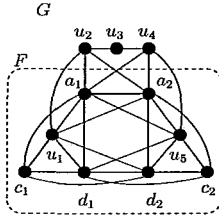


Figura 2.81: Exemplo de um grafo G para o caso em que nenhum vértice $x \in V(G)$ fora de F tem dois vizinhos em F que são não-adjacentes entre si.

Seja T uma componente qualquer do subgrafo induzido de G por todos os vértices fora de F . Como, por hipótese, G não tem corte-clique, então há vértices não-adjacentes em F , tal que cada um deles tem pelo menos um vizinho em T . Logo, há um caminho u_1, u_2, \dots, u_r , em G , com $u_1 \in F$; $u_2, u_3, \dots, u_{r-1} \notin F$; $u_r \in F$; e $u_1 u_r \notin E$ (Figura 2.82).

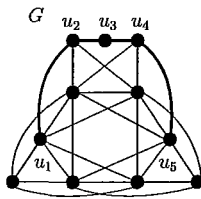
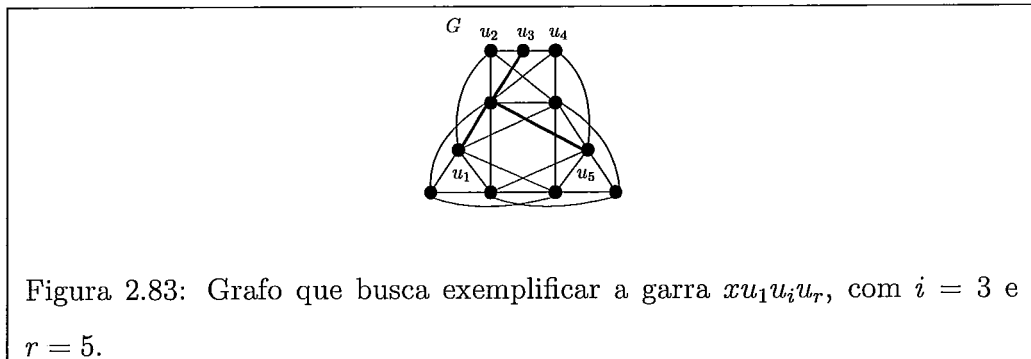


Figura 2.82: Grafo que busca exemplificar o caminho $u_1 u_2 \dots u_r$, com $r=5$.

Seja r o menor possível, então temos um caminho sem cordas e nenhum u_i com $3 \leq i \leq r - 2$ (obviamente $r \geq 5$) tem um vizinho em F . Pois, caso contrário, se $u_i x \in E(G)$ para algum $x \in F$, então pela minimalidade de r , teríamos $xu_i \in E(F)$ e $xu_r \in E(F)$; com isso, $xu_1u_iu_r$ seria uma garra (Figura 2.83).



Seja $A = N(u_2) \cap F$; $B = N(u_{r-1}) \cap F$; e $C = F - (A \cup B)$. Observe que A e B são cliques e então $u_i \in A - B$; $u_r \in B - A$; e em particular temos $r \geq 4$. Então, precisamos analisar o Caso 2, quando $r > 4$ e quando $r = 4$.

No exemplo da Figura 2.86, em G , temos: $A = \{a_1, a_2, u_1\}$; $B = \{a_1, a_2, u_r\}$; e $C = \{c_1, d_1, d_2, c_2\}$. Observe que A e B são cliques ; $A - B = \{u_1\}$ e $B - A = \{u_r\}$, com $r = 5 > 4$.

Caso 2.1: Seja $r > 4$. Como F não tem corte-clique, então existe um caminho v_1, v_2, \dots, v_s em $F - (A \cap B)$ com $v_1 \in A - B$ e $v_s \in B - A$. Considere que s é o menor possível, então temos um caminho sem cordas e $v_2, v_3, \dots, v_{s-1} \notin A \cup B$ (Figura 2.84).

Logo, temos o buraco $v_1v_2 \dots v_s u_{r-1} \dots u_2$ (Figura 2.85), absurdo.

Assim, o Caso 2.1 não é válido, isto é, r não pode ser maior que quatro; e como nenhum u_i com $3 \leq i \leq r - 2$ tem um vizinho em F , podemos concluir que $r = 4$.

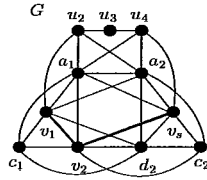


Figura 2.84: Grafo que busca exemplificar o caminho v_1, v_2, \dots, v_s , com $s = 3$.

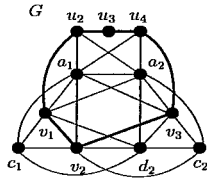


Figura 2.85: Grafo que busca exemplificar o buraco $v_1 v_2 \dots v_s u_{r-1} \dots u_2$, com $v_1 = u_1$ e $v_s = u_r$, para $s = 3$ e $r = 5$.

Com o objetivo de exemplificar o restante desta prova, seja G o novo grafo (figura abaixo) obtido através do exemplo da Figura 2.86 fazendo as devidas modificações, pois provamos no Caso 2.1 que r não pode ser maior que quatro.

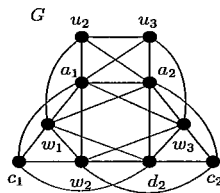


Figura 2.86: Exemplo de um grafo G , com $r = 4$.

Caso 2.2: Seja $r = 4$. Seja $C = F - (A \cup B)$ e observe que $C \neq \emptyset$. Pois, caso contrário, o subgrafo de G induzido por F , junto com u_2 e u_3 , tem um conjunto independente máximo de tamanho dois, isto é $\alpha(F \cup \{u_2, u_3\}) = 2$; e não tem corte-clique. Observe que isso é um absurdo, pois F é o subgrafo induzido maximal de G_2 com tais propriedades.

Seja Q algum componente de C . Como F não tem corte-clique, há vértices não-adjacentes em $A \cup B$, tal que cada um deles tenha pelo menos um vizinho em Q . Logo, há um caminho w_1, w_2, \dots, w_t com $w_1 \in A$; $w_2, w_3, \dots, w_{t-1} \in C$; $w_t \in B$; e $w_1 w_t \notin E(G_2)$.

Seja t o menor possível, então o caminho não tem corda e $t \geq 3$. Mas então $w_1 w_2 \dots w_t u_3 u_2$ é um buraco de comprimento maior ou igual a cinco (Figura 2.87). Absurdo!

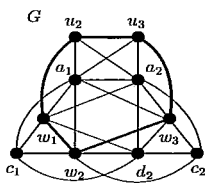


Figura 2.87: Grafo que busca exemplificar o buraco ímpar $w_1 w_2 \dots w_t u_3 u_2$, com $t = 3$.

Portanto, Pelos Casos 2.1 e 2.2, o Caso 2 não é válido e assim, pelo Caso 1, este Lema está provado. ■

Os grafos peculiares podem ser reconhecidos em tempo polinomial diretamente pela sua definição ou indiretamente pelo Lema 2.4.

Agora seja G um grafo conexo, sem garras e com um subgrafo induzido R isomorfo ao grafo da Figura 2.66 (a) tal que G não tenha como subgrafo induzido buraco de comprimento cinco ou seis. Através das Observações 3.2, 3.3, 2.10 e 2.11 que serão apresentadas a seguir, buscamos concluir que G é um grafo peculiar, por definição.

Observação 2.8 [16] *Cada vértice x fora de R é: ou um vértice gêmeo, em $R \cup \{x\}$, de algum vértice em R ou senão é adjacente a todos os vértices de R exceto para algum w_i .*

Vejam os exemplos para melhor entender a observação acima. Note que, se x fora de R não é um vértice gêmeo, em $R \cup \{x\}$, de nenhum vértice em R

e é não-adjacente a algum vértice de R exceto para os w_i 's, temos garra como subgrafo induzido de $R \cup \{x\}$.

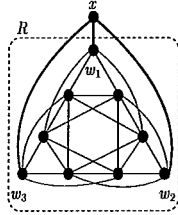


Figura 2.88: Exemplo para o Observação 3.2.

Observação 2.9 [16] *Se algum x e algum w_i são vértices gêmeos em $R \cup \{x\}$ então eles são gêmeos em G .*

Pois, caso contrário, poderíamos ter garras como subgrafo induzido. De fato, no exemplo da Figura 2.4, supomos que x e w_1 são vértices gêmeos em $R \cup \{x\}$, mas não são gêmeos em G ; logo temos uma garra, como subgrafo induzido de G .

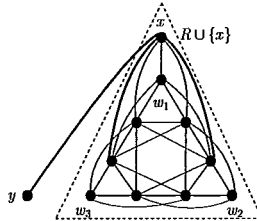


Figura 2.89: Grafo que busca exemplificar a negação da Observação 3.3.

Para cada $i = 1, 2, 3$, seja M_i o conjunto de vértices não-adjacentes a w_i , mas adjacente aos dois w_j 's restantes.

Observação 2.10 [16] *Cada M_i é uma clique.*

Observe que se M_i , para $i = 1, 2, 3$, não for uma clique, poderíamos ter garra como subgrafo induzido de G . Por exemplo seja $M_1 = \{d_1, d_2, x\}$, porém se M_1 não for uma clique temos uma garra como subgrafo induzido de G . E para M_2 e M_3 temos situações análogas (Figura 2.4).

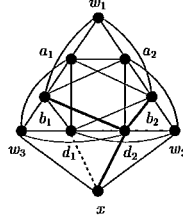


Figura 2.90: Grafo que busca exemplificar a negação da Observação 2.10.

Observação 2.11 [16] *Para cada escolha de v_1, v_2, v_3 , tal que $v_i \in M_i$, pelo menos duas das arestas v_1v_2, v_2v_3, v_1v_3 são arestas de G .*

No exemplo da Figura 2.4 (a), podemos visualizar que se não existe nenhuma das arestas v_1v_2, v_2v_3 e v_1v_3 , temos um buraco de comprimento seis, como subgrafo induzido, que é um absurdo, pois supomos inicialmente que G não teria buraco de comprimento igual a cinco ou seis. Por outro, lado se existe apenas uma das arestas v_1v_2, v_2v_3 ou v_1v_3 , temos um buraco de comprimento cinco que, pelo mesmo motivo citado anteriormente, é um absurdo (Figura 2.4 (b)).

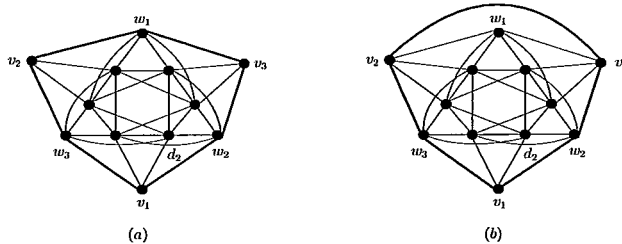


Figura 2.91: Grafos que buscam exemplificar a negação da Observação 2.11.

Observe que pelas Observações 3.2 e 3.3, cada vértice fora de S ou pertence a um dos conjuntos M_1, M_2, M_3 , ou senão é gêmeo de algum vértice w_i . Para concluir que G é peculiar, nós somente precisamos encontrar uma partição apropriada de cada M_i em conjuntos disjuntos e não-vazios A_i e B_i . Para fazer isso, seja $w \in A_i$ se e somente se $x \in M_i$ é não-adjacente a pelo menos um vértice em M_{i+1} , e $B_i = M_i - A_i$. As Observações 2.10 e 2.11 garantem que esta partição

tem a propriedade que buscamos, isto é, G é peculiar.

Para exemplificar o que escrevemo acima, suponha o grafo G dado pela Figura 2.4.

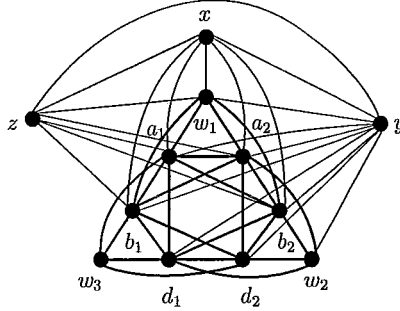


Figura 2.92: Exemplo de um grafo peculiar.

Logo, temos:

- $S = \{w_1, w_2, w_3\}$;
- $M_1 = \{d_1, d_2\}$, $M_2 = \{a_1, b_1\}$ e $M_3 = \{y, a_2, b_2\}$ são cliques;
- z e w_1 são vértices gêmeos em G ;
- x e w_1 são vértices gêmeos em G ;
- Encontrando uma partição apropriada de cada M_i em conjuntos dois a dois disjuntos e não-vazios A_i e B_i , temos: $A_1 = \{d_2\}$, $B_1 = \{d_1\}$, $A_2 = \{b_1\}$, $B_2 = \{a_1\}$, $A_3 = \{a_2\}$, $B_3 = \{b_2, y\}$;
- Para exemplificar a Observação 2.11, temos que $d_1a_1, d_1b_1, d_2b_1, a_1y, a_1a_2, a_1b_2, b_1y, b_1a_2, d_1y, d_1b_2, d_2y, d_2a_2$ e $d_2b_2 \in E(G)$;
- Temos também que d_2a_1, b_1b_2 e $a_2d_1 \notin E(G)$;
- Sejam $K_1 = \{z, x, w_1\}$, $K_2 = \{w_2\}$ e $K_3 = \{w_3\}$, observe que cada vértice de K_i é adjacente a todos os vértices em $K - (A_i \cup B_i)$. De fato, Como $(A_1 \cup B_1) = \{d_1, d_2\}$, então; cada vértice do conjunto $\{z, x, w_1\}$ é adjacente a todos os vértices do conjunto $\{y, a_2, b_2, b_1, a_1\}$.

Como $(A_2 \cup B_2) = \{b_1, a_1\}$, então; cada vértice do conjunto $\{w_2\}$ é adjacente a todos os vértices do conjunto $\{y, a_2, b_2, d_2, d_1\}$.

Como $(A_3 \cup B_3) = \{a_2, y, b_1\}$, então; cada vértice do conjunto $\{w_3\}$ é adjacente a todos os vértices do conjunto $\{a_1, b_1, d_1, d_2\}$.

Finalmente, podemos reescrever o Teorema 2.1 da seguinte forma:

Teorema 2.3 *Um grafo sem garras é Berge se e somente se toda folha em qualquer árvore de decomposição por corte-clique ou é peculiar ou é elementar.*

Capítulo 3

A estrutura dos grafos elementares

No Capítulo 2, apresentamos parte dos estudos feitos por Chvátal e Sbihi [16] sobre grafos Berge e sem garras. Vimos que um grafo sem garras e sem corte-clique é Berge se e somente se ele é ou elementar ou peculiar; e que baseado neste resultado, os autores produziram um algoritmo em tempo polinomial para o reconhecimento desses tipos de grafos. Vimos também, que a estrutura dos grafos peculiares é completamente descrita pela sua definição, mas o mesmo não acontece com os grafos elementares. Então, para completar esse problema de reconhecimento, foi preciso estudar um pouco sobre a estrutura dos grafos elementares. Mostramos, então que todo grafo que tem as propriedades do Lema 2.2 é um grafo elementar e implícito na prova deste lema, foram dados os passos para uma coloração elementar destes grafos. Porém, naturalmente surgem as perguntas: Se um grafo não tem alguma dessas propriedades, ele pode ser elementar? Caso a resposta seja positiva, como obter uma coloração elementar para esses grafos?

Entendemos que baseados nestas questões Maffray e Reed [31] desenvolveram um estudo que descreve completamente a estrutura de todos os grafos elementa-

res e com isso obtemos um algoritmo de decomposição que possibilita descrever os passos para conseguir uma coloração elementar para um grafo G .

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar esses estudos feitos por Maffray e Reed para completar a descrição da estrutura de todos os grafos elementares, e assim produzir uma descrição completa da estrutura de todos os grafos Berge e sem garras.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na Seção 3.1 apresentamos algumas definições específicas e indispensáveis para o entendimento das informações aqui apresentadas. Na Seção 3.2 é dada uma caracterização dos grafos elementares. Na Seção 3.3, estendemos os resultados obtidos no Capítulo 2, apresentando um caminho para obter uma coloração elementar.

3.1 Definições Locais

Nesta seção apresentaremos algumas definições que serão utilizadas, em sua maioria, somente neste capítulo. Porém, por conveniência, nem todas as definições do capítulo estão agrupadas aqui, então, quando necessário iremos apresentá-las ao longo do texto.

Uma aresta é *rasa* se ela não está em um triângulo.

Aumentando um aresta rasa: Seja xy uma aresta rasa de um grafo $G = (V, E)$ e $J = (V', E')$ um grafo cobipartido disjunto de G , onde $V' = X \cup Y$, X e Y são cliques e tal que existe pelo menos uma aresta entre X e Y em J . Podemos construir um novo grafo G' obtido de $G - \{x, y\}$ e J adicionando todas as possíveis arestas entre X e $N(x) - y$ e entre Y e $N(y) - x$. Dizemos então que G é aumentado ao longo de xy e que xy é aumentado, e J é dito o aumento de xy .

Observe que se x_1y_1 e x_2y_2 são arestas rasas não-adjacentes em um grafo, então, depois do aumento de x_1y_1 a vizinhança de x_2 e y_2 pode mudar, porém

a aresta x_2y_2 continua sendo uma aresta rasa. Seja G_1 um grafo aumentado ao longo de x_1y_1 e x_2y_2 (nesta ordem), G_2 um grafo aumentado ao longo de x_2y_2 e x_1y_1 (nesta ordem) e J_i o aumento de x_iy_i , com $i = 1, 2$. É fácil ver, que $G_1 = G_2$, logo não importa a ordem em que as arestas rasas são aumentadas.

Aumentando um emparelhamento de arestas rasas: Seja G um grafo e x_1y_1, \dots, x_hy_h , sendo h arestas rasas de G não adjacentes duas a duas. Seja $(X_1, Y_1; E_1), \dots, (X_h, Y_h; E_h)$, h grafos cobipartidos disjuntos dois a dois e que também são disjuntos de G . Pode-se obter um grafo G' aumentando respectivamente cada aresta x_iy_i com o aumento $(X_i, Y_i; E_i)$. Este grafo é o mesmo seja qual for a ordem em que o aumento das arestas rasas são feitos. Dizemos, então, que aplicamos a operação de **aumentação** em G para obter G' . E G' é uma aumentação de G .

Aqui consideramos que qualquer grafo é uma aumentação dele mesmo.

Um subconjunto H de um grafo G é **homogêneo** se todo vértice de $V(G) - H$ ou é adjacente a todos os vértices de H ou é não-adjacente a todos os vértices de H .

Um **par homogêneo** em um grafo $G = (V, E)$ é um par de subconjuntos disjuntos (Q_1, Q_2) de vértices, tal que todo vértice em $V - (Q_1 \cup Q_2)$, ou é adjacente a todos os vértices de Q_1 ou não-adjacente a todos os vértices de Q_1 ; ou é adjacente a todos os vértices de Q_2 ou não-adjacente a todos os vértices de Q_2 . Além disso, $|Q_1| \geq 2$ ou $|Q_2| \geq 2$ e $|V - (Q_1 \cup Q_2)| \geq 2$.

Um **par homogêneo forte** $\{K_1, K_2\}$ é composto por duas cliques K_1 e K_2 (disjuntas em vértices e não-vazias) com pelo menos uma aresta entre elas, com $|K_1 \cup K_2| \geq 3$, e tal que todo vértice fora de $K_1 \cup K_2$ é não-adjacente a todos os vértice de uma das cliques, e adjacente a todos ou a nenhum vértice da outra clique.

Uma *clique pseudo-maximal* é ou uma clique maximal ou um átomo pendente.

Uma *aresta atômica* é uma aresta onde seus dois extremos estão dentro do mesmo átomo.

Dois átomos adjacentes X, Y serão chamados de *super-aresta* e serão denotada por XY . Duas super-arestas serão incidentes se elas têm um átomo em comum. Uma super-aresta XY será chamada rasa se nenhum átomo diferente de X e Y é adjacente a X e a Y . Observe que uma aresta rasa ou é uma super-aresta rasa ou um átomo isolado.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $x \in V(G)$. *Duplicação* de x é uma operação que acrescenta em G um novo vértice x' tal que $N(x') = N(x) \cup \{x\}$, fazendo com que x e x' sejam vértices gêmeos em um novo grafo. A repetição dessa duplicação (sempre em relação ao mesmo vértice, neste caso, x), é chamada de *multiplicação* de x .

Dado um par homogêneo forte $\{K_1, K_2\}$ em um grafo G , a *compressão* desse par é a criação do subgrafo induzido de G obtido deletando todos os vértices e arestas de $K_1 \cup K_2$ exceto uma aresta ab de K_1 para K_2 . Note que com essa construção a aresta ab nunca fará parte de um triângulo, ou seja, será sempre uma aresta rasa.

Chamamos de *maravilhas* do mundo não-elementar os seguintes grafos: pirâmide, farol, mausoleo, jardim e colosso. Esses grafos podem ser representados geometricamente pelas figuras abaixo:

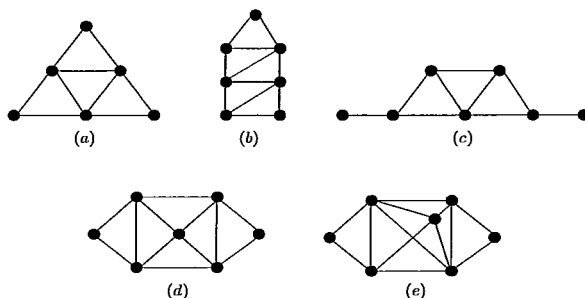


Figura 3.1: As cinco maravilhas do mundo não-elementar: (a) pirâmide, (b) farol, (c) mausoleo, (d) jardim e (e) colosso.

3.2 Caracterização dos grafos elementares

Segue uma caracterização dos grafos elementares dada por Maffray e Reed [31]. Este teorema servirá de base para o estudo que será apresentado na próxima seção sobre coloração elementar de um grafo.

Teorema 3.1 [31] *Para um grafo $G = (V, E)$, as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) G é elementar.

(ii) G não tem garras, é Berge, e não contém nenhuma das cinco maravilhas.

(iii) G é uma aumentoção de um grafo linha de um multigrafo bipartido.

Antes de apresentarmos a prova deste teorema precisamos compreender a relação entre a operação de compressão e a operação de aumentoção, que será dada na Observação 3.1. Também faz-se necessário entender a estrutura de um grafo conexo, Berge e sem garras que possui um grafo D como subgrafo induzido (o grafo D pode ser visto na Figura 1.14 (a)).

Observação 3.1 *A operação de compressão é inversa a operação de aumentoção.*

De fato, observe que a aumentoção inclui duas cliques K_1 e K_2 (do grafo cobipartido), com pelo menos uma aresta entre K_1 e K_2 ; e retira do grafo , a ser

aumentado, uma aresta rasa ab . Já na compressão do grafo, são deletadas K_1 e K_2 deixando somente uma aresta ab que tem um extremo em K_1 e o outro em K_2 . Logo, note que a aresta ab é sempre uma aresta rasa no grafo comprimido.

Por exemplo, seja B um multigrafo bipartido; $G_1 = L(B)$; $J = (X, Y; E)$ um grafo cobipartido, onde $X = K_1$ e $Y = K_2$ são duas cliques que o compõem; G a aumentação de G_1 e G' o grafo obtido da compressão de G .

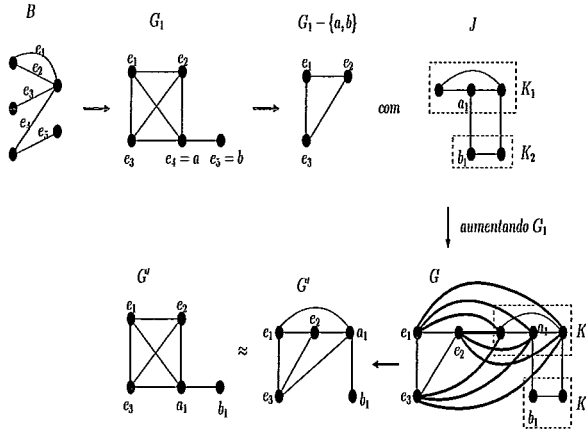


Figura 3.2: Exemplo de que a operação de compressão é inversa à operação de aumento.

Conseqüentemente, se a compressão G' de G é o grafo linha de um multigrafo bipartido, nós simplesmente aumentamos o grafo G' (utilizando o grafo cobipartido adequado) ao longo da aresta ab e assim conseguimos G ; neste caso, estamos fazendo o caminho inverso da compressão.

Para entender a prova da implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$ do Teorema 3.1, precisamos analisar a estrutura de um grafo $G = (V, E)$ conexo, Berge, sem garras e que possui um grafo D rotulado como na Figura 3.2, como subgrafo induzido. Para isso, sejam K_1 e K_2 duas cliques tal que $\{v_1, v_2\} \subseteq K_1$ e $\{v_3, v_4\} \subseteq K_2$, com $v_1, v_2, v_3, v_4 \in D$.

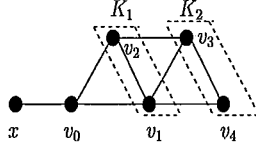


Figura 3.3: O grafo D considerando as cliques K_1 e K_2 .

Para encontrar um par homogêneo forte num grafo G com as propriedades citadas, Maffray e Reed [31] desenvolveram o seguinte algoritmo:

Algoritmo 3.1

- Passo 1 (*inicialização*): Dado um grafo D , como base, inicializamos o procedimento com $K_1 = \{v_1, v_2\}$, $K_2 = \{v_3, v_4\}$, e fixamos $k = 5$.
- Passo2 (*passo principal*): Se existe um vértice z em $(G - K_1 - K_2)$ que é adjacente a todos os vértices de algum K_i e adjacente a algum, mas não a todos os vértices de K_{3-i} , então adicione z em K_i ; rotule z com k ; incremente k por 1; repita o passo 1; senão pare.

Veremos através das afirmações (A6) e (A7) que de fato este procedimento encontra o par homogêneo que estamos procurando. Para isso, algumas observações se fazem necessárias.

Observação 3.2 [31] *Todo vértice em K_i tem um vizinho em K_{3-i} .*

De fato, todo vértice $v_p \in K_i$, com $p \geq 2$, tem um vizinho $v_r \in K_{3-i}$, com $r < p$ pelo algoritmo.

Observação 3.3 [31] *Todo vértice em K_i tem um não-vizinho em K_{3-i} , exceto talvez para o vértice rotulado com v_1 e v_3 .*

De fato, $v_p \in K_i$, com $p \geq 4$, tem um não-vizinho $v_r \in K_{3-i}$, com $r < p$ pelo algoritmo.

Afirmamos então que:

(A6) *Todo vértice de K_1 é adjacente ao vértice v_0 e não-adjacente ao vértice x do grafo D , e todo vértice de K_2 é não-adjacente aos vértices v_0 e x .*

Prova: Provaremos esta afirmação por absurdo. Para isso, seja v_k o menor rótulo de um vértice em $K_1 \cup K_2$ que viole (A6). Necessariamente $k \geq 5$. Observe que negando (A6), temos quatro possibilidades para o vértice v_k :

(A6.1): Suponha que v_k está em K_1 e é não-adjacente ao vértice v_0 . Observe que o vértice v_k tem um não-vizinho v_j em K_2 com $j < k$. Por sua vez, v_j tem um vizinho v_r em K_1 com $r < j$. Pela minimalidade de k , v_0 não é adjacente a v_j e é adjacente a v_r . Mas agora $v_r v_0 v_j v_k$ é uma garra (Figura 3.4), contradição.

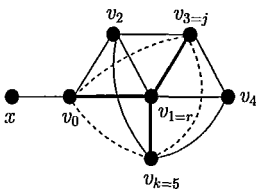


Figura 3.4: Grafos que buscam exemplificar a garra $v_r v_0 v_j v_k$ gerada em G , com $r = 1$, $j = 3$ e $k = 5$.

(A6.2): Suponha que v_k está em K_1 e é adjacente a x . Por (A6.1), v_k é adjacente a v_0 . Seja v_r algum vizinho de v_k em K_2 com $r < k$. Se v_r tem um não-vizinho v_j em K_1 com $j < k$ então $v_k x v_r v_j$ é uma garra (Figura 3.5), contradição.

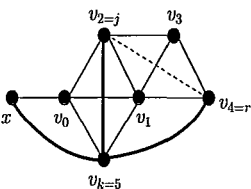
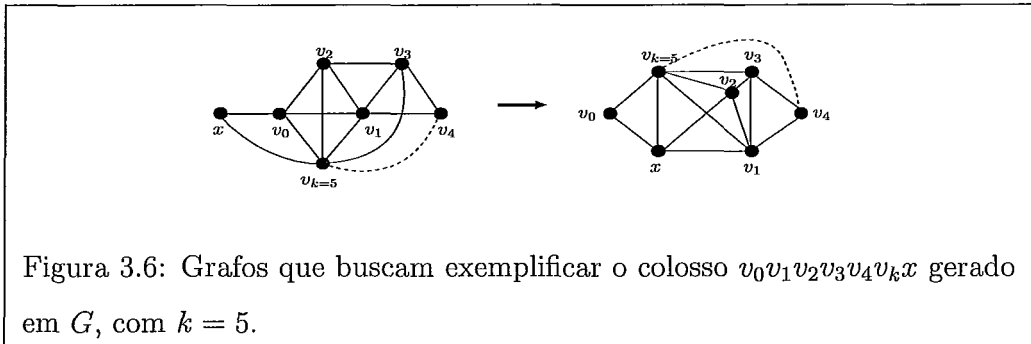
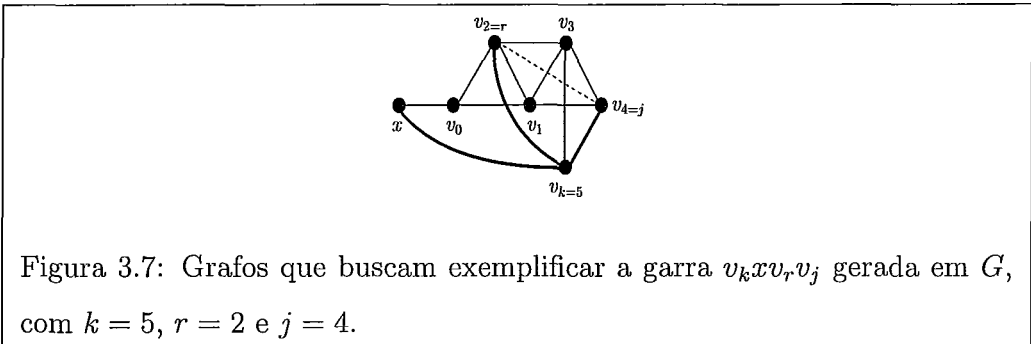


Figura 3.5: Grafos que buscam exemplificar a garra $v_k x v_r v_j$ gerada em G , com $r = 4$, $j = 2$ e $k = 5$.

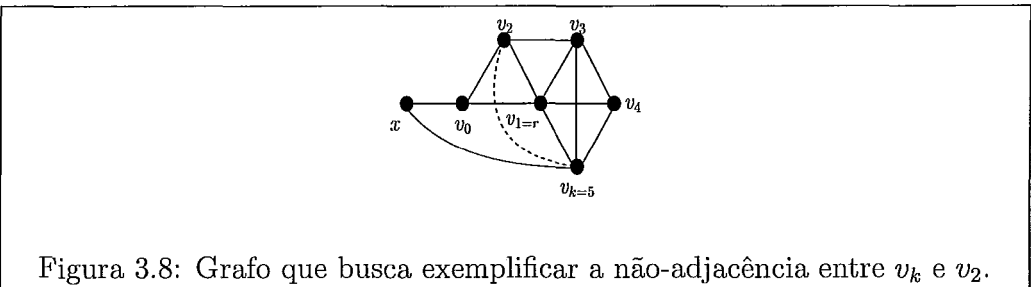
Então devemos ter $r = 3$ e v_k não-adjacente ao vértice v_4 . Mas, agora $v_0v_1v_2v_3v_4v_kv_x$ induz um colosso (Figura 3.6).



(A6.3): Suponha que v_k está em K_2 e é adjacente a x . Seja v_r um vizinho de v_k em K_1 com $r < k$. Se v_r tem um não-vizinho v_j em K_2 com $j < k$ então $v_kv_xv_rv_j$ é uma garra (Figura 3.7), contradição.



Então $r = 1$ e v_k é não-adjacente a v_2 , pois por definição v_k não pode ser adjacente a v_1 e v_2 (Figura 3.8).



Agora, se v_k é não-adjacente a v_0 então $v_kv_xv_0v_2v_3$ induz um buraco de comprimento cinco (Figura 3.9).

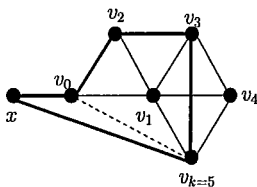


Figura 3.9: Grafos que buscam exemplificar o buraco $v_k x v_0 v_2 v_3$ gerado em G , com $k = 5$.

Mas se v_k é adjacente a v_0 então $v_0 v_1 v_k v_2 v_4 x$ induz uma pirâmide (Figura 3.10). Então (A6.3) não pode acontecer.

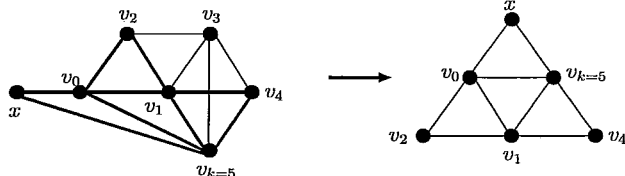


Figura 3.10: Grafos que buscam exemplificar a pirâmide $v_0 v_1 v_k v_2 v_4 x$ gerada em G , com $k = 5$.

(A6.4) Suponha que v_k está em K_2 e é adjacente a v_0 . Por (A6.3), v_k é não-adjacente a x . Seja v_j um não-vizinho de v_k em K_1 com $j < k$. Mas, agora, $v_0 x v_k v_j$ é uma garra (Figura 3.11). E assim, por absurdo, (A6) está provado. ■

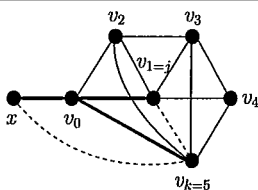


Figura 3.11: Grafos que buscam exemplificar a garra $v_0 x v_k v_j$ gerada em G , com $k = 5$.

A Afirmação (A3.1) implica que v_0 e x nunca serão colocados em K_1 ou K_2 . Logo, podemos apresentar:

(A7) No fim do Algoritmo 3.1, todo vértice de $(G - K_1 - K_2)$ ou é adjacente a todos os vértices de K_1 ou é não-adjacente a todos os vértices de K_1 ; e, ou é adjacente a todos os vértices de K_2 ou é não-adjacentes a todos os vértices de K_2 .

Prova: Vamos provar (A7) também, por absurdo. Para isso, seja z um vértice que não satisfaz (A7), ou seja, z deve ser não-adjacente a alguns vértices em K_1 e em K_2 e deve ser adjacente a pelo menos algum vértice em K_1 e em K_2 , caso contrário ou z é adicionado a uma das cliques e não paramos (pelo algoritmo), ou z satisfaz (A7). Seja v_m o elemento de menor rótulo em $(K_1 \cup K_2)$ tal que z é não-adjacente aos vértices que pertencem aos conjuntos $K_1 \cap \{v_1, \dots, v_m\}$ e $K_2 \cap \{v_1, \dots, v_m\}$ e é adjacente a algum vértice em $\{v_1, \dots, v_m\}$. Seja i tal que $v_m \in K_i$. Observe que $z \neq x$ e $z \neq v_0$. Podemos separar a prova da Afirmação (A7) em três casos: O Caso 1 diz que $m \leq 4$; o Caso 2 supõem que $m \geq 5$ e z é adjacente ao vértice v_m ; e o Caso 3 diz que $m \geq 5$ e z é não-adjacente ao vértice v_m .

Caso 1: $m \leq 4$. Esta hipótese significa que z é não-adjacente a pelo menos um dos vértices v_1 e v_2 , e pelo menos um dos vértices v_3 e v_4 , mas ele não pode ser não-adjacente aos quatro vértices. Se z é adjacente a v_1 , então z é não-adjacente a v_2 e é adjacente a v_4 ; pois caso contrário, $v_1v_2v_4z$ é uma garra (Figura 3.12).

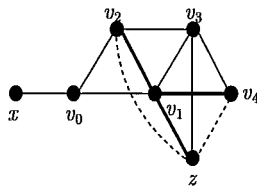


Figura 3.12: Grafo que busca exemplificar a garra $v_1v_2v_4z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_4 .

Logo z não é adjacente a v_3 . Se z não for adjacente a v_0 temos então que $v_1v_0v_3z$ é uma garra (Figura 3.13 (a)). Logo z deve ser adjacente a v_0 . Mas

neste caso temos que $v_0v_2v_3v_4z$ é um buraco de comprimento cinco (Figura 3.13 (b)).

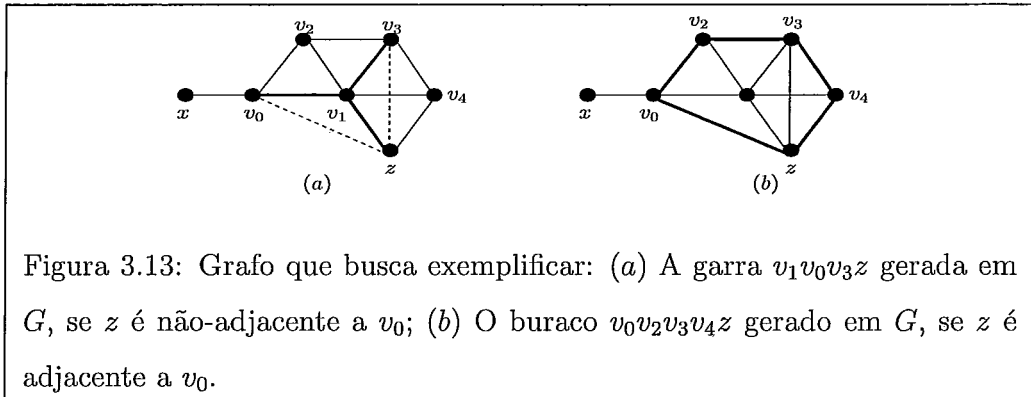


Figura 3.13: Grafo que busca exemplificar: (a) A garra $v_1v_0v_3z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_0 ; (b) O buraco $v_0v_2v_3v_4z$ gerado em G , se z é adjacente a v_0 .

Então z não pode ser adjacente ao vértice v_1 . Se z é adjacente a v_3 , então ele é não-adjacente a v_4 e z é adjacente a v_2 , pois caso contrário, $v_3v_2v_4z$ é uma garra (Figura 3.14).

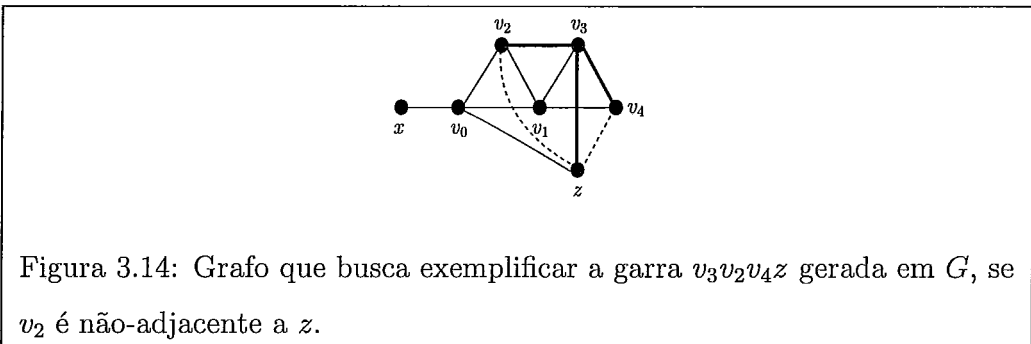


Figura 3.14: Grafo que busca exemplificar a garra $v_3v_2v_4z$ gerada em G , se v_2 é não-adjacente a z .

Logo, z é adjacente a v_0 , pois caso contrário, $v_0v_1v_2v_3v_4z$ é uma pirâmide (Figura 3.15).

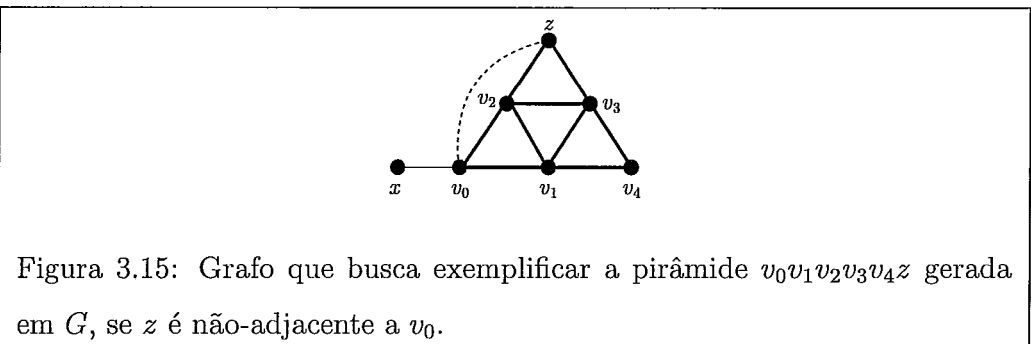


Figura 3.15: Grafo que busca exemplificar a pirâmide $v_0v_1v_2v_3v_4z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_0 .

E z é adjacente ao vértice x , pois caso contrário, v_0v_1xz é uma garra (Figura 3.16).

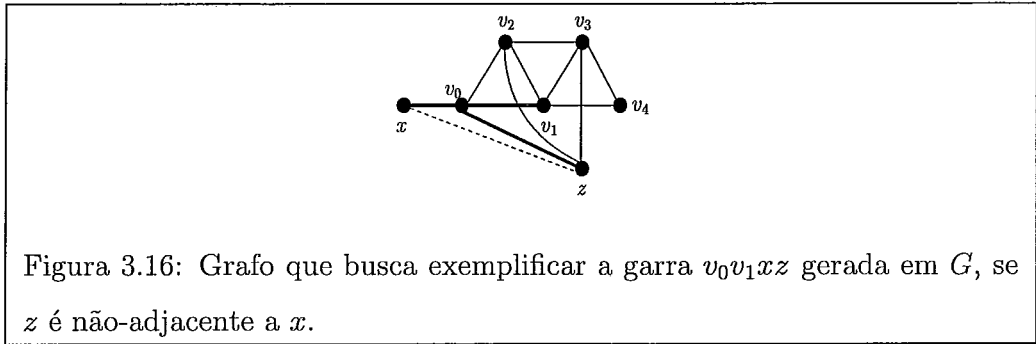


Figura 3.16: Grafo que busca exemplificar a garra v_0v_1xz gerada em G , se z é não-adjacente a x .

Mas então $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ é um jardim (Figura 3.17).

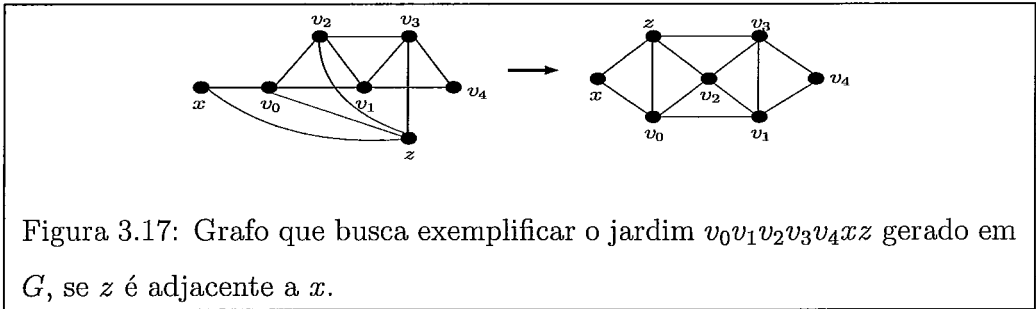


Figura 3.17: Grafo que busca exemplificar o jardim $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ gerado em G , se z é adjacente a x .

Portanto, z deve ser não-adjacente a v_3 .

Se z é adjacente a v_2 , então z é adjacente a v_0 , pois caso contrário $v_2v_0v_3z$ é uma garra (Figura 3.18 (a)). E z é adjacente a x , pois caso contrário v_0v_1xz é uma garra (Figura 3.18 (b)).

Então z é não-adjacente a v_4 ; pois caso contrário, zv_2v_4x é uma garra (Figura 3.19).

Logo $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ é um farol (Figura 3.20).

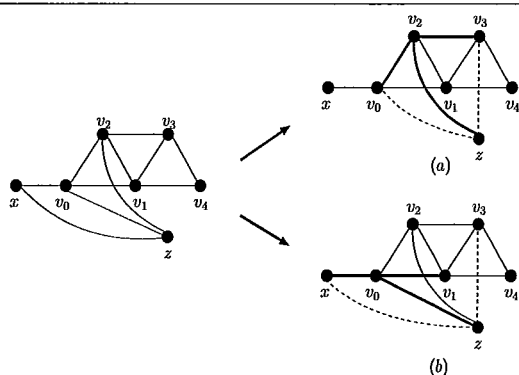


Figura 3.18: Grafos que buscam exemplificar: (a) A garra $v_2v_0v_3z$ gerada em G , se z é não-adjacente a v_0 ; (b) A garra v_0v_1xz gerada em G , se z é não-adjacente a x .

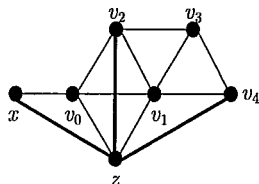


Figura 3.19: Grafo que busca exemplificar a garra zv_2v_4x gerada em G , se z é adjacente a v_4 .

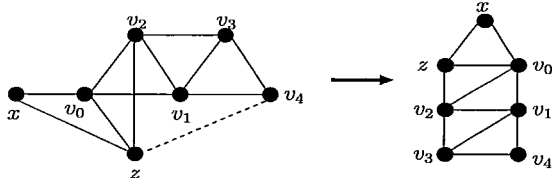


Figura 3.20: Grafo que busca exemplificar o farol $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ gerado em G .

Portanto, z é não-adjacente a v_2 . Mas agora, pela hipótese, z é adjacente a v_4 . Logo z é não-adjacente a v_0 ; pois caso contrário $v_0v_2v_3v_4z$ é um buraco de comprimento cinco (Figura 3.21 (a)). E z é não-adjacente a x , pois caso contrário $xv_0v_1v_4z$ é um buraco de comprimento cinco (Figura 3.21 (b)).

Mas agora, $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ é um mausoleo (Figura 3.22).

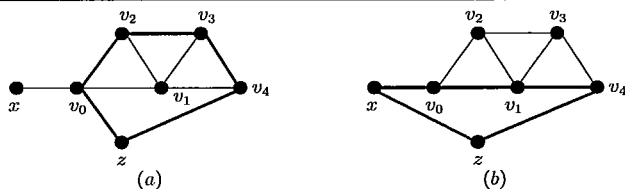


Figura 3.21: Grafos que buscam exemplificar: (a) O buraco $v_0v_2v_3v_4z$ gerado em G , se z é adjacente a v_0 ; (b) O buraco $xv_0v_1v_4z$ gerado em G , se z é adjacente a x .

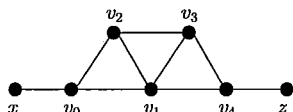


Figura 3.22: Grafo que busca exemplificar o mausoleo $v_0v_1v_2v_3v_4xz$ gerado em G .

Temos então que o Caso 1 não pode ocorrer. Da mesma maneira, os outros dois casos (em que $m \geq 5$ e z é adjacente ao vértice v_m ; e $m \geq 5$ e z é não-adjacente ao vértice v_m) não podem ocorrer. Visto que a prova é feita usando técnicas semelhantes as usadas no Caso 1, preferimos omiti-las. E assim, por absurdo, (A7) é provado. ■

Prova do Teorema 3.1:

(ii) \Rightarrow (iii): Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo Berge e sem garras tal que G não contém nenhuma das cinco maravilhas.

Se G não contém D como subgrafo induzido, então pelo Teorema 1.5, G ou é um grafo linha de um multigrafo bipartido ou G é um grafo cobipartido. Se G é um grafo linha de um multigrafo bipartido, está feito. Por outro lado, é fácil ver que todo grafo cobipartido pode ser visto como um grafo linha de um multigrafo bipartido.

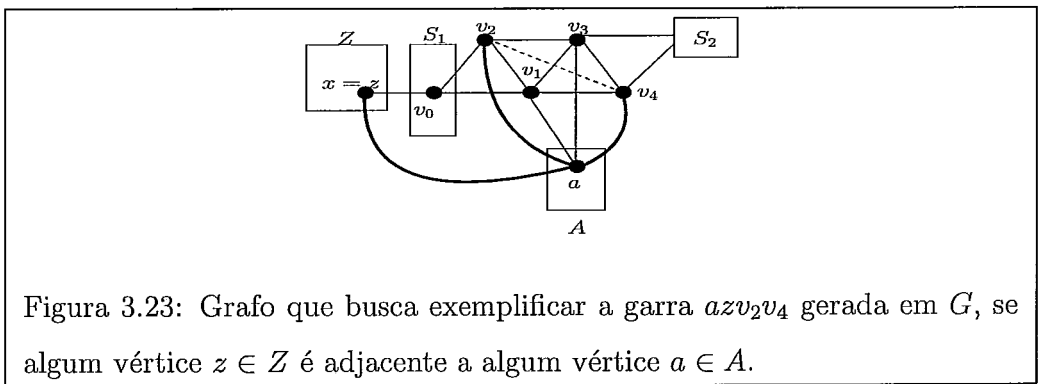
Suponha, agora, que G contém um D como subgrafo induzido e rotulado como na Figura 3.2. Mostraremos que então existe um par homogêneo forte

$\{K_1, K_2\}$ com $\{v_1, v_2\} \in K_1$ e $\{v_3, v_4\} \in K_2$, e assim é possível fazer a compressão desse grafo e verificar, por indução, que o grafo comprimido é um grafo linha de um multigrafo bipartido. Observe que (A6) e (A7) garantem que podemos aplicar em G , o Algoritmo 3.1, para obter um par de cliques $\{K_1, K_2\}$ e uma partição de G em quatro conjuntos, que definimos da seguinte maneira: S_1, S_2, A e Z ; onde os vértices de A são adjacentes a todos os vértices de $K_1 \cup K_2$, os vértices de Z são não-adjacentes a todos os vértices de $K_1 \cup K_2$, e os vértices de S_i são adjacentes a todos os vértices de K_i e não-adjacentes a todos os vértices de K_{3-i} , com $i = 1, 2$.

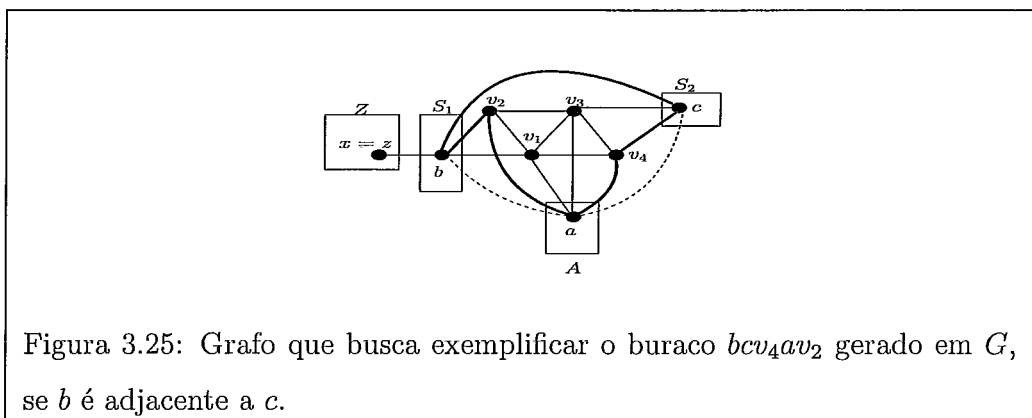
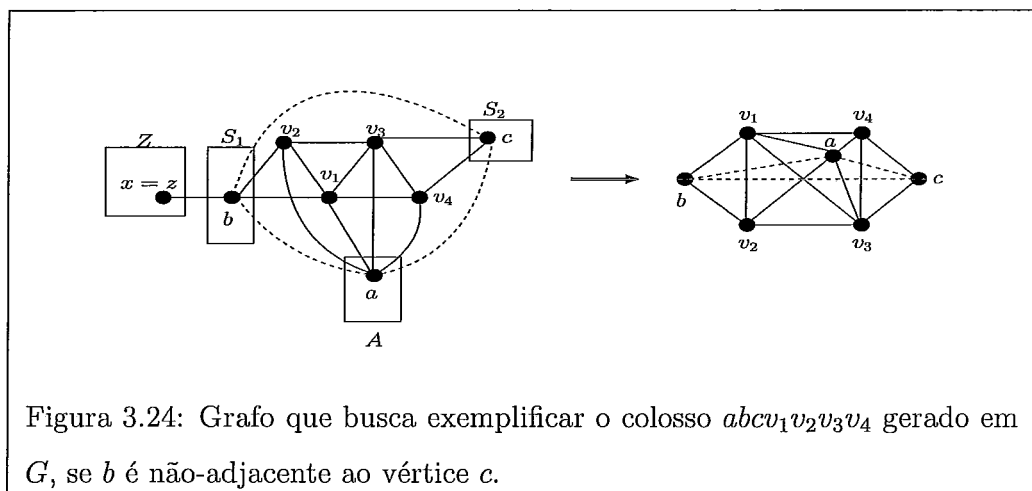
Afirmamos que S_1 e S_2 são cliques. De fato, suponha que S_1 não é uma clique; note que algum vértice de K_1 é adjacente a algum vértice de K_2 e tomando dois vértices não-adjacentes em S_1 , temos assim uma garra. Então S_1 é uma clique e analogamente S_2 também é.

Se A é vazio, então $\{K_1, K_2\}$ é um par homogêneo forte, como queríamos provar. De fato, existe pelo menos uma aresta entre K_1 e K_2 (por exemplo v_2v_3) e todo vértice em $G - \{K_1, K_2\}$ ou está em S_1 ou em S_2 ou em Z , satisfazendo a definição de par homogêneo forte.

Por outro lado, se A não é vazio, é preciso modificar K_1 e K_2 para obter um par homogêneo forte. Para começar, vale mencionar que por (A6), $v_0 \in S_1$ e $x \in Z$. Observe, também, que nenhum vértice $z \in Z$ (em particular $x = z$) pode ser adjacente a algum vértice $a \in A$, pois caso contrário, azv_2v_4 é uma garra (Figura 3.23).



Agora, observe que não existe vértice em A que seja não-adjacente a um vértice b em S_1 e a um vértice c em S_2 ; pois caso contrário se b é não-adjacente ao vértice c , temos $abcv_1v_2v_3v_4$ sendo um colosso (Figura 3.24), enquanto que se b é adjacente a c então bcv_4av_2 é um buraco de comprimento cinco (Figura 3.25).



Portanto, nós podemos particionar A em dois conjuntos A_1 e A_2 , onde A_1 contém os vértices de A que são adjacentes a todos os vértices de S_1 (e possivelmente, adjacente a todos os vértices de S_2) e A_2 contém os vértices de A que são não-adjacentes a alguns dos vértices de S_1 e portanto são adjacentes a todos os vértices de S_2 .

Observe que A_1 é uma clique, pois caso contrário, existiriam dois vértices $w, u \in A_1$ não-adjacentes, então v_0wux seria uma garra (Figura 3.26).

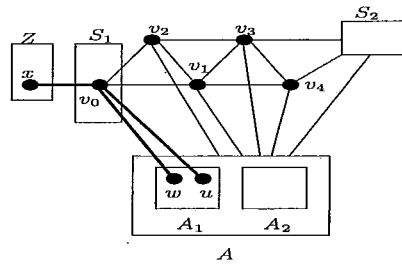


Figura 3.26: Grafo que busca exemplificar a garra v_0wux gerada em G , se A_1 não é uma clique.

Logo $K_1 \cup S_1 \cup A_1$ é uma clique. Analogamente, afirmamos que A_2 é uma clique, pois caso contrário, se existisse dois vértices não-adjacentes w e u , sendo ambos não-adjacentes a v_0 , teríamos a garra v_1v_0wu (Figura 3.27). E se ambos fossem adjacentes a v_0 , então v_0wux também seria uma garra (Figura 3.28).

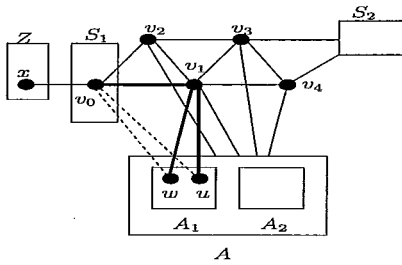


Figura 3.27: Grafo que busca exemplificar a garra v_1v_0wu gerada em G , se w e u são não-adjacentes.

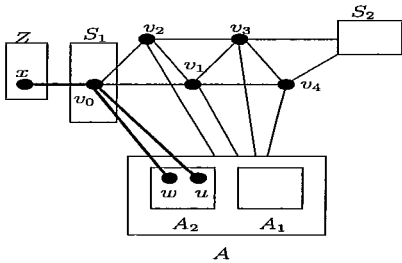
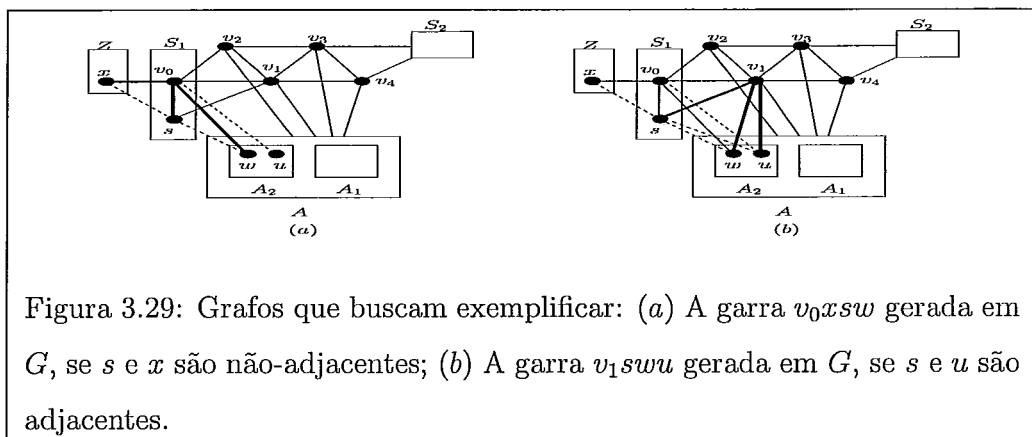


Figura 3.28: Grafo que busca exemplificar a garra v_0wux gerada em G , se w e u são adjacentes.

Então, podemos concluir que v_0 é adjacente a w e não-adjacente a u . Pela definição de A_2 , o vértice $w \in A_2$ é não-adjacente a algum vértice $s \in S_1$. Então s é adjacente a x , pois caso contrário v_0xsw é uma garra (Figura 3.29 (a)), e s é adjacente a u , pois caso contrário v_1swu é uma garra (Figura 3.29 (b)). Assim A_2 é uma clique; e conseqüentemente $K_2 \cup S_2 \cup A_2$ também é uma clique.



Agora seja H um grafo bipartido cujas partes são $S_1 \cup A_1$ e $S_2 \cup A_2$; e cujas arestas são as arestas de G que estão entre esses dois conjuntos. Seja A -componente qualquer componente conexo de H que contém um vértice de A . Defina K'_1 e K'_2 com o seguinte procedimento:

- Inclua K_1 em K'_1 e K_2 em K'_2 ;
- Para cada A -componente B de H , inclua os vértices de $B \cap (S_i \cup A_i)$ em K'_i , para $i = 1, 2$.

Como vimos anteriormente (sabendo que $A \neq \emptyset$) o par $\{K_1, K_2\}$ foi modificado obtendo assim um novo par $\{K'_1, K'_2\}$. Logo, supondo que A não é vazio, para concluirmos a prova da implicação $(ii) \Rightarrow (iii)$ é preciso provar que $\{K'_1, K'_2\}$ é uma par homogêneo forte. Para isso, Maffray e Reed [31] partem do fato que, para $i = 1, 2$, K'_i é uma clique (pois $K_i \subseteq K'_i$ então $K'_i \subseteq K_i \cup S_i \cup A_i$ que por sua vez é uma clique); supõem por absurdo que $\{K'_1, K'_2\}$ não é um par homogêneo forte e analisam as possíveis adjacências entre os vértices dentro e fora do par $\{K'_1, K'_2\}$. Eles provam que se tal par não é homogêneo forte então

existem vários grafos proibidos como subgrafo induzido de G .

(iii) \Rightarrow (i): Seja G uma aumentoção de H , sendo H , um grafo linha de um multigrafo bipartido sensato B , lembrando que um grafo *sensato* é um grafo em que todos os seus vértices têm no máximo um vizinho pendente. Dividiremos essa prova em dois casos: $G = H$ e $G \neq H$, nesses dois casos procuramos sempre colorir as arestas de H e através de um caminho que estabeleceremos em cada caso, estender essa coloração para as arestas de G .

Caso 1: $G = H$.

Primeiramente devemos obter uma coloração ótima para os vértices de B e a partir dessa coloração obter uma coloração elementar para H . Como B é um multigrafo bipartido, podemos colorir os vértices de B com apenas duas cores (sem perda de generalidade, suponha vermelha e verde), de maneira que os conjuntos induzidos pelas duas cores sejam conjuntos independentes. Como uma aresta atômica de H não está em um P_3 , então sua cor é irrelevante. Se uma aresta xy está em H e não é atômica então ela tem que estar entre dois átomos, isso significa que em B as arestas x e y têm um extremo em comum. Então colorimos xy em H com a cor do vértice em comum às arestas x e y em B . Observe que os três vértices dos P_3 s em H , são três arestas em B cujos extremos induzem um C_4 ou um P_4 em B . Logo segue que cada P_3 de H tem uma aresta vermelha e uma aresta verde. Então nós temos uma coloração elementar de H . E também podemos notar que todas as arestas entre dois átomos adjacentes tem a mesma cor.

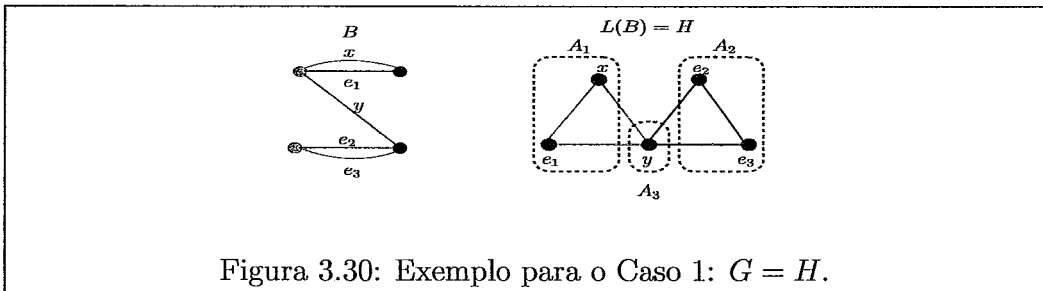


Figura 3.30: Exemplo para o Caso 1: $G = H$.

Caso 2: $G \neq H$.

Neste caso vamos estender a coloração de H para G . Seja x_1y_1 uma aresta rasa em H . Seja F_1 o conjunto de arestas que estão entre as cliques X_1 e Y_1 do grafo cobipartido utilizado para aumentar o grafo H ao longo da aresta x_1y_1 . Assuma sem perda de generalidade que x_1y_1 é vermelha. Portanto, para uma coloração elementar, todas as arestas entre x_1 e $N(x_1) - y_1$ e todas as arestas entre y_1 e $N(y_1) - x_1$ devem ser verdes.

Em G , vamos colorir de vermelho todas as arestas de F_1 , e colorimos de verde todas as arestas entre X_1 e $N(x_1) - y_1$, todas as arestas entre Y_1 e $N(y_1) - x_1$ e todas as arestas dentro de X_1 e dentro de Y_1 .

Observe que os únicos P_3 's envolvidos neste aumento são do tipo: uu_1v_1 ou u_1v_1v ou $u_1u_1'v_1$ ou $u_1v_1v_1'$, onde: u é algum vértice em $N(x_1) - y_1$; v é algum vértice em $N(y_1) - x_1$; u_1, u_1' são vértices em X_1 ; e v_1, v_1' são vértices em Y_1 . Observe que as arestas desses P_3 's são 2-coloríveis. Note também que a definição de aumentação implica que os átomos diferentes vindos de $\{x_i\}$ e $\{y_i\}$ permanecem átomos depois dessa aumentação. Portanto as arestas atômicas não estão situadas em nenhum P_3 . Nós repetimos esse procedimento de coloração para cada aumento de cada aresta rasa x_iy_i ($i = 1, \dots, k$). E assim obtemos uma coloração elementar do grafo G .

Para melhor visualizar o que foi descrito no Caso 2, apresentamos o seguinte exemplo: Seja B um multigrafo bipartido, $J = (X, Y; E)$ um grafo cobipartido e G o grafo aumentado ao longo de x_1y_1 .

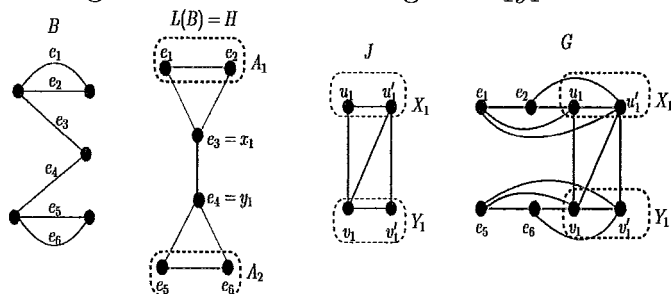


Figura 3.31: Exemplo para o Caso 2: $G \neq H$.

(i) \Rightarrow (ii): Seja G um grafo elementar. Já provamos na Observação 2.1 que a garra, o buraco ímpar e o anti-buraco ímpar não são grafos elementares. Assim, basta provar aqui, que as cinco maravilhas também não são elementares. Para isso, mostraremos que o grafo Gallai de cada grafo que compõem as cinco maravilhas não é bipartido, logo pela Proposição 2.1, não é elementar. Isso pode ser visualizado nas Figuras (3.32, 3.33, 3.34, 3.35, 3.36).

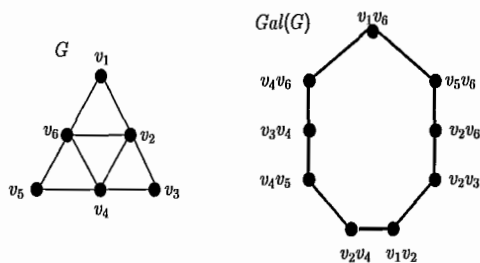


Figura 3.32: A pirâmide G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$.

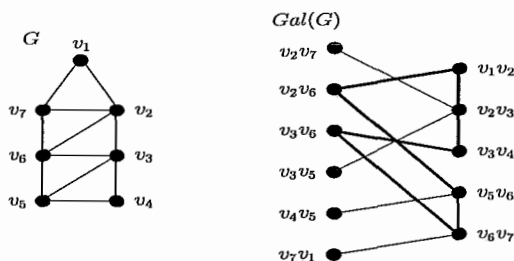


Figura 3.33: O farol G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$.

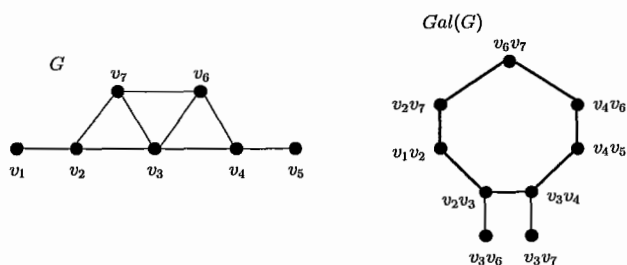


Figura 3.34: O mausoleo G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$.

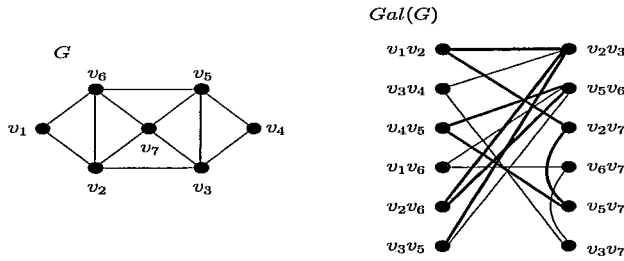


Figura 3.35: O jardim G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$.

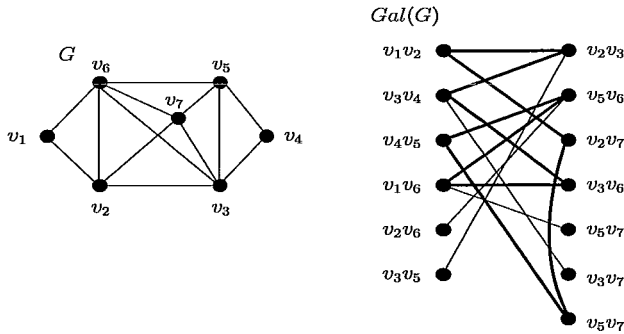


Figura 3.36: O colosso G e seu grafo Gallai, $Gal(G)$.

Observe que o grafo Gallai da pirâmide e do colosso possui, como subgrafo induzido, um C_9 e o grafo Gallai do farol, mausoleo e jardim possui, como subgrafo induzido, um C_7 , ou seja, o grafo Gallai de cada um deles não é um grafo bipartido, logo pela Proposição 2.1, nenhum desses grafos é elementar. ■

Vale ressaltar, que o Teorema 3.1 nos fornece implicitamente um algoritmo polinomial que dado um grafo G ou ele determina se G é o grafo linha de um grafo bipartido; ou encontra um par homogêneo forte em G e neste caso é possível fazer a compressão desse grafo e verificar que o grafo comprimido é um grafo linha de um multigrafo bipartido; ou produz um subgrafo proibido induzido de G , o qual certifica que G não é elementar.

3.3 Coloração elementar

Com o objetivo de completar os estudos sobre a estrutura dos grafos elementares, nesta seção, iremos apresentar a descrição de uma coloração elementar para um grafo G . Assim, analisamos essa coloração para dois tipos de grafos: grafos não-cobipartidos e grafos cobipartidos. A coloração elementar desses grafos é conseqüência do Teorema 3.1, já que todo estudo será feito através da estrutura de um grafo linha de um multigrafo bipartido e dos aumentos feitos nele. Cabe ressaltar que as informações aqui apresentadas surgem da tentativa de desenvolver um algoritmo para encontrar uma decomposição canônica de um grafo elementar G . Mas para isso é preciso entender o que é um esqueleto de um grafo G e a relação do primeiro com o segundo, pois toda essa seção é baseada nesta definição.

Seja H um grafo linha de um multigrafo bipartido e G um grafo elementar tal que G é aumentado ao longo de alguns pares de arestas rasas não-adjacentes x_1y_1, \dots, x_hy_h , de H com os aumentos $(X_1, Y_1; E_1), \dots, (X_h, Y_h; E_h)$. Escolha um subgrafo induzido, H , de G tal que $|E(G)| - |E(H)|$ e h sejam minimizados. Nesses moldes H é chamado *esqueleto* de G . Seja B a raiz linha sensata de H e o conjunto $A = \{x_1, \dots, x_h, y_1, \dots, y_h\}$.

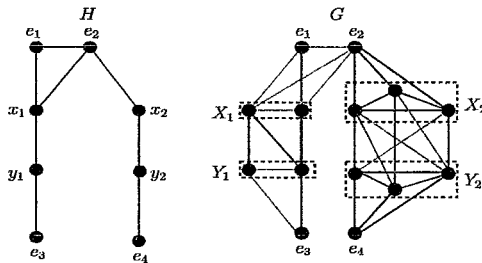


Figura 3.37: Um grafo elementar G e seu esqueleto H .

Para subconjuntos disjuntos de vértices X e Y , chamamos de **XY -aresta** as aresta que tem um de seus extremos em X e o outro em Y . Seja F_i o conjunto de todas as X_iY_i -arestas e $G \oplus i$ o grafo obtido após a i -ésima aumentação.

Com isso, podemos apresentar três afirmações ((A8), (A9) e (A10)) que serviram de base para o estudo do algoritmo de decomposição dos grafos elementares, que veremos mais adiante.

(A8) Para todo $i = 1, \dots, h$, existe um par de vértices não-adjacentes x'_i, y'_i em X_i, Y_i , respectivamente.

Prova: De fato, suponha por absurdo que existe um i tal que todo vértice de X_i é adjacente a todo vértice de Y_i . Como H é um grafo linha de um multigrafo bipartido, $G \oplus i$ também o é, pois a i -ésima aumentação é equivalente a multiplicação dos vértices x_i e y_i de H (Figura 3.38). Logo é fácil ver que $|E(G \oplus i)| \geq |E(H)|$. Portanto, considerando G o grafo resultante de outras $(h - 1)$ aumentações em $G \oplus i$, temos que $|E(G)| - |E(G \oplus i)| \leq |E(G)| - |E(H)|$, o que é um absurdo, pois contraria a escolha de H . ■

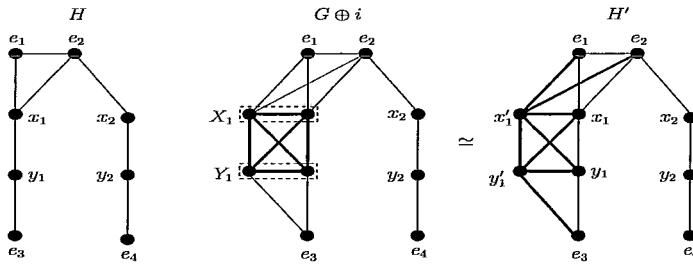


Figura 3.38: Grafos que buscam exemplificar que se o par $X_i Y_i$ é completo, a i -ésima aumentação de um grafo é equivalente a multiplicação dos vértices x_i e y_i de H . Em particular $i = 1$ e H' o grafo obtido de H multiplicando os vértices x_1 e y_1 .

(A9) Para todo i , todo vértice de X_i tem um vizinho em Y_i e vice-versa.

Prova: Suponha por absurdo que existe um vértice $x''_i \in X_i$ que é não-adjacente a todos os vértices de Y_i . Então claramente $N_G(x''_i) = X_i \cup N_G(X_i) - Y_i$ e com isso $N(x''_i) \cap H = Q$ (por um abuso de notação identificamos x_i com x'_i onde $x'_i \in X_i$), onde Q é a clique pseudo-maximal de H contendo x_i e não y_i .

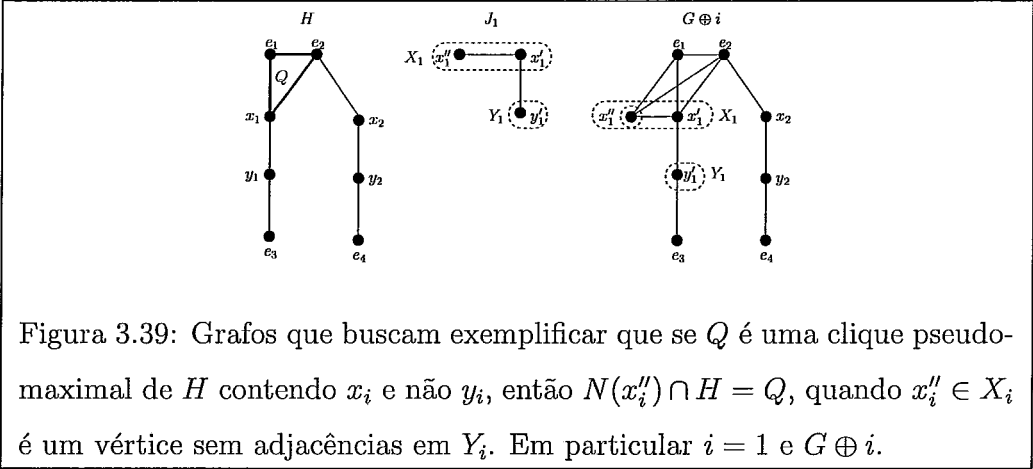


Figura 3.39: Grafos que buscam exemplificar que se Q é uma clique pseudo-maximal de H contendo x_i e não y_i , então $N(x_i'') \cap H = Q$, quando $x_i'' \in X_i$ é um vértice sem adjacências em Y_i . Em particular $i = 1$ e $G \oplus i$.

Então podemos adicionar uma nova aresta pendente (correspondente ao vértice x_i'') em B , tal que essa aresta seja incidente a um vértice que corresponde a Q em H (vértice de B onde todas as arestas, correspondentes aos vértices de Q em H incidem nele). É fácil ver que $H + x_i''$ é o grafo linha desse novo grafo bipartido.

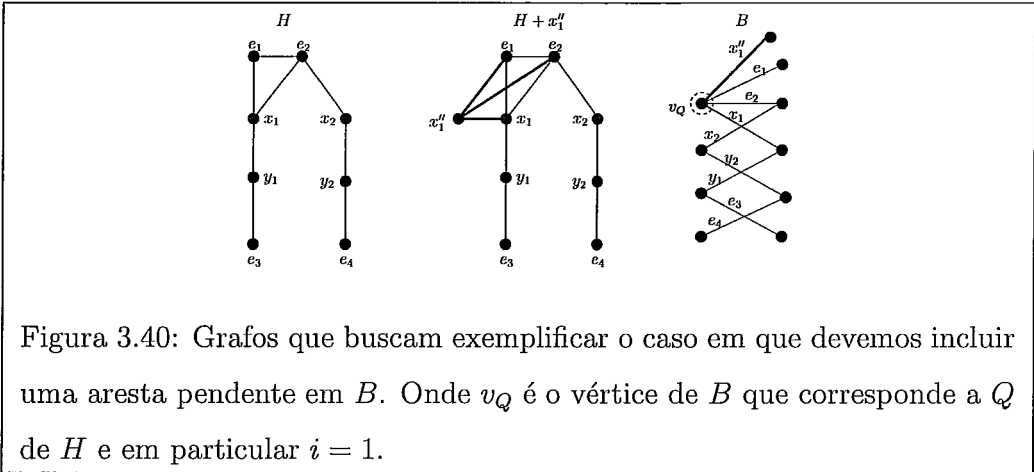


Figura 3.40: Grafos que buscam exemplificar o caso em que devemos incluir uma aresta pendente em B . Onde v_Q é o vértice de B que corresponde a Q de H e em particular $i = 1$.

Note que para conseguir o grafo G através de H é preciso aumentar as arestas rasas não-adjacentes de H , então podemos enxergar $H + x_i''$ como sendo igual a $G \oplus i$ (tomando o devido cuidado na escolha dos aumentos, J_i 's), assim podemos aumentar as arestas de $H + x_i''$ até conseguirmos o grafo G (Figura 3.41); e como $|E(H) + x_i''| \geq |E(H)|$, então $|E(G)| - |E(H + x_i'')| \leq |E(G)| - |E(H)|$,

contrariando a escolha de H . Logo (A9) é verdade. ■

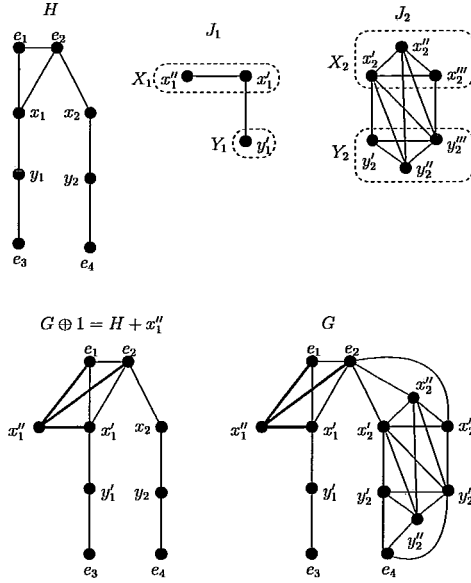


Figura 3.41: Grafos que buscam exemplificar os aumentos feitos no grafo H até conseguir o grafo G . Em particular $i = 1$.

Agora, seja um novo subgrafo H^- de G , obtido de H , trocando cada par $x_i y_i$ por um par $x'_i y'_i$ dado em (A8). Ou seja, H^- é isomorfo ao grafo obtido de H removendo as h arestas rasas $x_1 y_1, \dots, x_h y_h$.

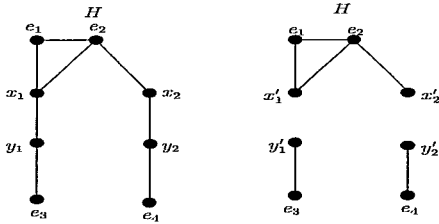


Figura 3.42: O grafo H com seu H^- .

Observe que ao remover arestas rasas de um grafo não criamos nem garras, nem 4-rodas, nem gema e nem buraco ímpar, logo pelo Teorema 1.5, temos:

(A10) H^- é um grafo linha de um multigrafo bipartido.

Seja Q uma clique pseudo-maximal de H , então podemos definir os seguintes conjuntos de índices: $I_Q = \{i \mid x_i \in Q\}$ e $J_Q = \{j \mid y_j \in Q\}$. Dizemos que Q é *normal* se não contém ambos os vértices x_i e y_i , isto é, $I_Q \cap J_Q = \emptyset$. Podemos também definir Q em relação a H^- , ou seja, Q é normal se é uma clique pseudo-maximal de H^- .

Lembrando que $A = \{x_1, \dots, x_h, y_1, \dots, y_h\}$, vamos definir para uma clique normal Q de H o seguinte conjunto:

$$\tilde{Q} = (Q - A) \cup X_i \cup Y_j,$$

onde $i \in I_Q$ e $j \in J_Q$.

Claramente, pela definição de aumentação, \tilde{Q} é uma clique maximal de G para cada clique Q de H . Podemos ver um exemplo na Figura 3.43, onde consideramos Q, R, S e T cliques normais em H , então em G temos as seguintes cliques maximais:

$$\tilde{Q} = (Q - A) \cup X_i \cup Y_j; \text{ onde } I_Q = \{1\} \text{ e } J_Q = \emptyset \Rightarrow \tilde{Q} = (e_1, e_2) \cup X_1;$$

$$\tilde{R} = (R - A) \cup X_i \cup Y_j; \text{ onde } I_R = \emptyset \text{ e } J_R = \{1\} \Rightarrow \tilde{R} = (e_3) \cup Y_1;$$

$$\tilde{S} = (S - A) \cup X_i \cup Y_j; \text{ onde } I_S = \emptyset \text{ e } J_S = \{2\} \Rightarrow \tilde{S} = (e_4) \cup Y_2;$$

$$\tilde{T} = (T - A) \cup X_i \cup Y_j; \text{ onde } I_T = \{2\} \text{ e } J_T = \emptyset \Rightarrow \tilde{T} = (e_2) \cup X_2;$$

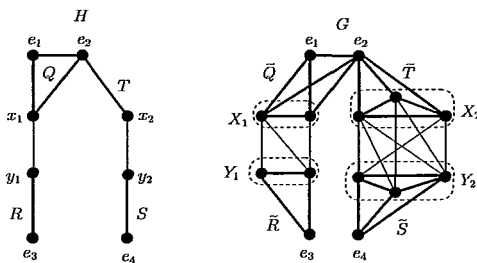


Figura 3.43: Grafos que buscam exemplificar as cliques maximais de G .

Dizemos que uma clique maximal K de G é uma *clique normal* se não possui vértices de ambos os conjuntos X_i e Y_i , para algum i . Ou seja, uma clique normal de $G = (V, E)$ é uma clique maximal no grafo $(V, E - F_i \cup \dots \cup F_h)$, que pode ser obtido através de H^- multiplicando cada x_i $|X_i|$ vezes e cada y_i $|Y_i|$

vezes. Podemos ver um exemplo disso na Figura 3.44, onde $|X_1| = |Y_1| = 2$ e $|X_2| = |Y_2| = 3$ e K_i , com $i = 1, 2, 3, 4$, são cliques normais de G .

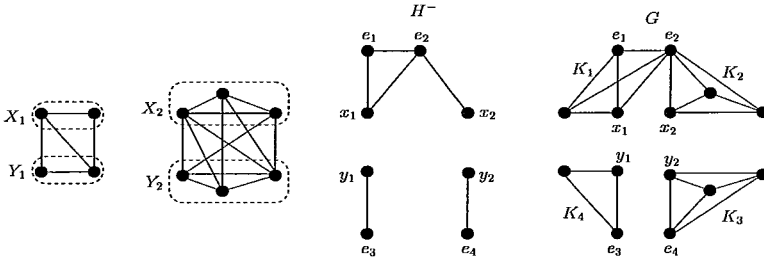


Figura 3.44: Grafos que buscam exemplificar como encontrar as cliques normais de um grafo G .

Portanto K é uma clique normal de G se e somente se existe uma clique normal, Q , de H tal que $K = \tilde{Q}$.

Lema 3.1 [31] *Para cada $i = 1, \dots, h$, o grafo bipartido $(X_i, Y_i; F_i)$ é conexo.*

Prova: Suponha por absurdo que exista um grafo bipartido $(X_i, Y_i; F_i)$ desconexo e sem perda de generalidade seja $(X_1, Y_1; F_1)$ esse grafo. Logo, por (A9), existe algum inteiro $r \geq 2$ tal que X_1, Y_1 e F_1 podem ser particionado em r subconjuntos não vazios $X_1^1, \dots, X_1^r, Y_1^1, \dots, Y_1^r$ e F_1^1, \dots, F_1^r onde cada $(X_1^j, Y_1^j; F_1^j)$ é um componente conexo de $(X_1, Y_1; F_1)$.

Construa um novo grafo H' , obtido de H , da seguinte maneira:

- Troque x_1 por uma clique $\{x_1^1, \dots, x_1^r\}$ e faça todos os vértices desta clique serem adjacentes a todos os vértices de $N_H(x_1) - \{y_1\}$;
- Troque y_1 por uma clique $\{y_1^1, \dots, y_1^r\}$ e faça todos os vértices desta clique serem adjacentes a todos os vértices de $N_H(y_1) - \{x_1\}$;
- Adicione r arestas rasas $x_1^1 y_1^1, \dots, x_1^r y_1^r$.

É fácil ver que H' é o grafo linha de um grafo bipartido B' e este pode ser obtido através de B da seguinte maneira: Se β_1 é um vértice de grau dois em B correspondente à clique maximal $x_1 y_1$ de H , então substitua β_1 por r vértices $\beta_1^1, \dots, \beta_1^r$.

Como H' é um grafo linha de um grafo bipartido, G pode ser obtido aumentando H' ao longo das arestas rasas $x_1^1 y_1^1, \dots, x_1^r y_1^r, x_2 y_2, \dots, x_h y_h$ com os aumentos $(X_1^1, Y_1^1; E_1^1), \dots, (X_1^r, Y_1^r; E_1^r), (X_2, Y_2; E_2), \dots, (X_h, Y_h; E_h)$, onde E_1^j é formado por F_1^j mas todos os pares de vértices de X_1^j e todos os pares de vértices de Y_1^j .

Observe que H' tem pelo menos $(r - 1)$ arestas a mais que H então como $|E(H')| > |E(H)|$, temos que $|E(G)| - |E(H')| < |E(G)| - |E(H)|$, o que contraria a escolha de H , então $(X_i, Y_i; F_i)$ é conexo. ■

Definimos como **átomos planos** todos os átomos de H , exceto os átomos $\{x_1\}$ e $\{y_i\}$, com $i = 1, \dots, h$.

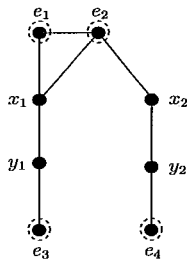


Figura 3.45: Grafo que busca exemplificar os átomos planos de H . Neste exemplo os átomos planos de H são triviais.

Lema 3.2 [31] *Todo átomo plano U de H é um átomo de G . A vizinhança de U em G é ou uma clique ou duas cliques disjuntas e não-adjacentes.*

Prova: Seja U um átomo plano de H , é fácil ver que U é uma clique em G . Inicialmente provamos a segunda parte deste lema, e para isso precisamos analisar dois casos:

Caso 1: Suponha que U não é um átomo simplicial em H , isto é, a vizinhança de U não é uma clique. Sejam Q e R duas clique maximais de H contendo U . Como as arestas $x_i y_i$ de H são rasas, os quatro conjuntos I_Q, J_Q, I_R e J_R são dois a dois disjuntos. Pela definição de aumento em G , temos:

— A vizinhança de U em G é $N_G(U) = \tilde{Q} \cup \tilde{R} - U$;

- Cada vértice de U é adjacente a cada vértice de $N_G(U)$;
- Não existem arestas entre $\tilde{Q} - U$ e $\tilde{R} - U$.

Então a vizinhança de U em G são duas cliques disjuntas e não adjacentes.

Neste exemplo, suponha: $Q = \{e_1, x_1, u_1, u_2\}$, $R = \{x_2, u_1, u_2\}$ e $U = \{u_1, u_2\}$. Então: $\tilde{Q} = \{x'_1, x''_1, u_1, u_2, e_1\}$, $\tilde{R} = \{x'_2, x''_2, x'''_2, u_1, u_2\}$, $N_G(U) = \tilde{Q} \cup \tilde{R} - U = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'''_2, e_1\}$, $\tilde{Q} - U = \{x'_1, x''_1, e_1\}$ e $\tilde{R} - U = \{x'_2, x''_2, x'''_2\}$.

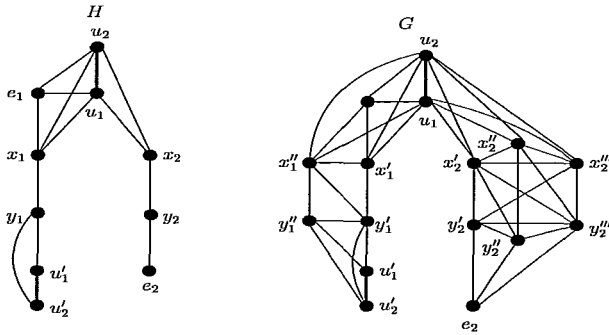


Figura 3.46: Grafos que buscam exemplificar que a vizinhança de U em G são duas cliques disjuntas e não adjacentes, quando U é um átomo simplicial em H .

Caso 2: Agora suponha que U é um átomo simplicial em H , então U pertence a alguma clique maximal Q de H , $N_G(U) = \tilde{Q} - U$, e todo vértice de U é adjacente a todos os vértices de $N_G(U)$, então a vizinhança de U em G é uma clique.

Com base na Figura 3.46, suponha $U = \{u'_1, u'_2\}$, $Q = \{y_1, u'_1, u'_2\}$ e $R = \emptyset$. Então $\tilde{Q} = \{y'_1, y''_1, u'_1, u'_2\}$ e $N_G(U) = \{y'_1, y''_1\}$

Observe que nos dois casos acima U é um átomo em H , assim, pela definição é também uma clique homogênea em G .

Queremos provar agora a primeira parte deste lema, isto é, vamos provar que todo átomo plano de H é um átomo de G . Para isso, seja U um átomo plano de H e suponha, por absurdo, que U não é um átomo de G . Então $U \cup \{v\}$ é uma clique homogênea, para algum $v \in N_G(U)$. Logo, $U \cup \{v\}$ é uma clique

homogênea de H , com:

$v' = v$, se $v \in Q \cup R - A$;

$v' = x_i$, se $v \in X_i$ com $i \in (I_Q \cup I_R)$; e

$v' = y_i$, se $v \in Y_j$ com $j \in (J_Q \cup J_R)$.

Portanto, U de H é uma clique que induz um conjunto homogêneo, porém não é maximal em relação a essa propriedade, isto é, U não é uma átomo de H , contradição. ■

Lema 3.3 [31] *Para cada i , $N_G(X_i)$ é a clique Y_i , ou as duas cliques disjuntas e não-adjacentes Y_i e $\tilde{Q}_i - X_i$, onde Q_i é alguma clique normal de H . No segundo caso cada vértice de X_i é adjacente a todos os vértices de $\tilde{Q}_i - X_i$.*

Prova: Podemos separar esta prova em dois casos:

Caso 1: Se x_i é um vértice pendente de H , então $N_H(x_i) = \{y_i\}$, já que $x_i y_i$ é uma aresta rasa em H . Como, para todo i , todo vértice de X_i em G tem um vizinho em Y_i (e vice-versa), temos que $N_G(X_i) = Y_i$.

Caso 2: Se x_i não é um vértice pendente de H , então seja Q_i a clique maximal de H que contém x_i e não contém y_i . Pela definição de aumentação, temos que: $N_G(X_i) = (\tilde{Q} - X_i) \cup Y_i$, não existem arestas entre $\tilde{Q} - X_i$ e Y_i , e cada vértice de X_i é adjacente a todos os vértices de $\tilde{Q}_i - X_i$, então $N_G(X_i)$ é formada pelas duas cliques disjuntas e não-adjacentes Y_i e $\tilde{Q}_i - X_i$, onde Q_i é alguma clique normal de H . ■

Algumas conseqüências do que já provamos até agora, são as seguintes:

- Um átomo de G não pode ter um vértice em X_i e outro em Y_i , pois caso contrário, como um átomo também é um conjunto homogêneo teríamos uma clique $X_i \cup Y_i$, o que contraria (A8);
- Pelo Lema 3.2, todo átomo de G ou é um átomo plano de H ou está em X_i ou em Y_i , para algum i ;
- Pelas afirmações (A8) e (A9), cada X_i e Y_i são formados por pelo menos dois átomos.

Um *átomo plano de G* é um átomo de G que também é um átomo plano de H .

Uma *molécula* de G em relação a H é algum subconjunto de vértices de G que é um átomo plano ou um X_i ou um Y_i . Observe que podemos particionar $V(G)$ em várias moléculas; e uma molécula contém pelo menos dois átomos se e somente se ela é um X_i ou um Y_i . Para toda molécula M , seja:

$\widehat{M} = M$, se M é um átomo plano;

$\widehat{M} = \{x_i\}$, se $M = X_i$;

$\widehat{M} = \{y_i\}$, se $M = Y_i$; e

$\{\widehat{M}\}_M$ é a coleção de todos os átomos de H , quando M é a coleção de todas as moléculas de G .

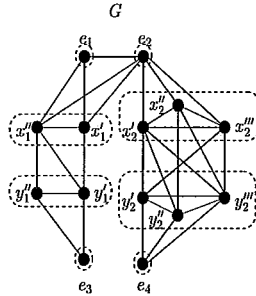


Figura 3.47: Exemplo das moléculas de um grafo G .

Lema 3.4 [31] *Toda clique normal de G é uma união de moléculas.*

Prova: É fácil ver que uma clique maximal de G ou contém todos ou nenhum vértice de um átomo. E pela definição, toda clique normal contém todos ou nenhum vértice de X_i ou Y_i . ■

Para as subseções 3.3.1 e 3.3.2, considere uma coloração elementar arbitrária das arestas de G com as cores verde e vermelha. Se uma aresta de G não está em um P_3 (equivalentemente, se essa aresta é atômica) então diremos que ela é *irrelevante*. Chamamos de *grafo vermelho* (grafo verde e grafo irrelevante) o grafo com o conjunto de vértices em $V(G)$ e com seu conjunto de

arestas formado pelas arestas de G que são vermelhas (respectivamente verde e irrelevantes). Duas colorações elementares que resultam nos mesmos grafos vermelho/verde/irrelevante são consideradas idênticas. Vale ressaltar que nessas subseções, continuamos com as notações dadas no início desta seção, e uma delas é que G é um grafo elementar e H é o esqueleto de G .

3.3.1 Coloração elementar para os grafos não-cobipartidos

Teorema 3.2 [31] *Se G é um grafo elementar e não é um grafo cobipartido, então:*

- (i) *Todas as arestas entre duas moléculas adjacentes têm a mesma cor;*
- (ii) *Todas as aresta coloridas em uma clique normal têm a mesma cor;*
- (iii) *Todas as arestas coloridas em X_i e em Y_i têm a mesma cor, que é diferente da cor das X_iY_i -arestas, para algum i ;*
- (iv) *Cada componente conexo de um grafo vermelho (respectivamente verde) é ou um grafo multipartido completo ou bipartido incompleto;*
- (v) *Para cada $i = 1, \dots, h$, $(X_i, Y_i; F_i)$ é um componente bipartido incompleto de um grafo vermelho ou de um grafo verde, e todos os componentes bipartidos incompletos são deste tipo;*
- (vi) *Os componentes dos grafos irrelevantes são as cliques que são átomos em G .*

Prova: Seja G um grafo elementar e não-cobipartido e H o esqueleto de G . Considere duas moléculas adjacentes X e Y de G , então os dois átomos \hat{X} e \hat{Y} são adjacentes em H . Seja Q a clique maximal de H contendo $\hat{X} \cup \hat{Y}$.

Suponha que um desses átomos é simplicial em H , sem perda de generalidade, seja \hat{X} tal átomo. Então \hat{Y} não pode ser simplicial, pois caso contrário $\hat{X} \cup \hat{Y}$ seria um átomo simplicial ao invés de \hat{X} , contrariando assim a hipótese. Logo existe um átomo \hat{U} de H que é adjacente a \hat{Y} e não-adjacente a todos os vértices de $Q - \hat{Y}$. Vamos então provar a propriedade (i).

Caso 1: \hat{U} não é um átomo simplicial em H .

Então existe um átomo \hat{W} que é adjacente a \hat{U} e não-adjacente a \hat{Y} , se U ou W for um átomo plano então pelo Lema 3.2 existem todas as arestas entre eles, e se $\{U, W\} = \{X_i, Y_i\}$ pela afirmação (A9) todo vértice de U tem um vizinho em W e vice-versa. O mesmo vale para os pares $\{X, Y\}$ e $\{Y, U\}$.

Vimos no início desta seção que o grafo G é aumentado ao longo de pares de arestas rasas de H duas a duas não-adjacentes de H , então temos três possibilidades (que chamaremos de (i.1), (i.2) e (i.3)): ou nenhum dos pares $\{X, Y\}$, $\{Y, U\}$ e $\{U, W\}$ é um aumento; ou somente um deles é um aumento; ou $\{X, Y\}$ e $\{U, W\}$ são ambos aumentos. Sejam x, y, w e u vértices em X, Y, W e U respectivamente. Para analisar a coloração das arestas entre duas moléculas adjacentes, tendo em vista as três possibilidades citadas, suponha sem perda de generalidade que alguma UW -aresta arbitrária de G é vermelha.

(i.1): Se nenhum dos pares $\{X, Y\}$, $\{Y, U\}$ e $\{U, W\}$ é um aumento em G , então X, Y, U e W são átomos planos de G e assim pelo Lema 3.2 existem todas as arestas entre X e Y , entre Y e U e entre U e W , logo existe pelo menos um caminho entre W e X formado pelas arestas wu, yu, xy . Como a aresta wu é vermelha então para obter uma coloração elementar, yu e xy devem ser verdes e vermelhas respectivamente. Repetindo esse argumento para cada aresta, todas as UW, YU e XY -arestas são vermelhas, verdes e vermelhas, respectivamente.

(i.2): Se somente um dos pares ($\{X, Y\}$, $\{Y, U\}$ e $\{U, W\}$) é um aumento, suponha sem perda da generalidade que $Y = Y_i$ e $U = X_i$. Seja u_0w_0 uma UW -aresta vermelha. Pelo Lema 3.1 existe um caminho em F_i^z entre u_0 e y , com os vértices $y_1, u_1, \dots, u_{p-1}, u_p$ alternadamente em Y e U . Como u_0w_0 é vermelha então para conseguirmos uma coloração elementar, o caminho formado pelas arestas $u_0y_1, y_1x, y_1u_1, u_1w_0, u_1y_2$, etc., deve ser colorido alternadamente com as cores verde e vermelha. Logo xy é uma aresta vermelha. Repetindo esse argumento para cada XY -aresta, vimos que todas elas são vermelhas.

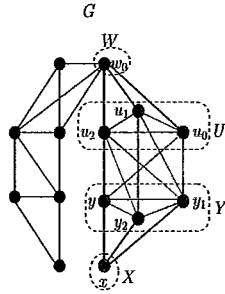


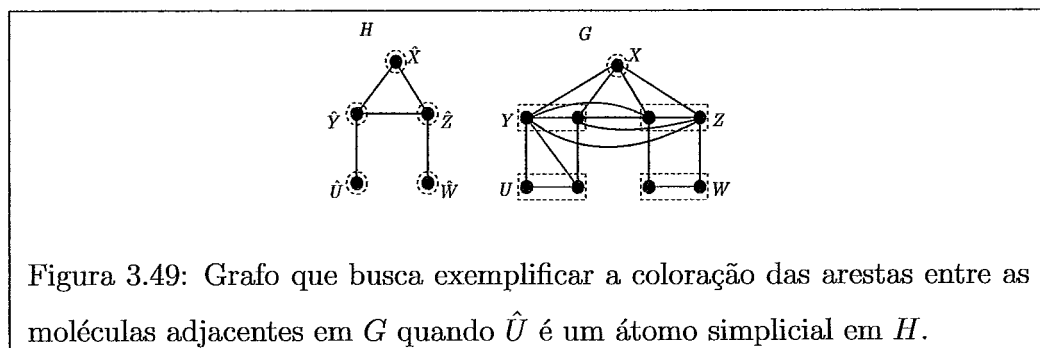
Figura 3.48: Grafo que busca exemplificar a coloração das arestas entre duas moléculas adjacentes, quando somente um dos pares $\{X, Y\}$, $\{Y, U\}$ e $\{U, W\}$ é um aumento.

(i.3): Se apenas os pares $\{X, Y\}$ e $\{U, W\}$ são os aumentos em G , então pelo Lema 3.3 existem todas as arestas entre o par $\{Y, U\}$. Segue de (i.2) que existe um caminho em F_i entre quaisquer vértice u e w e da mesma maneira entre y e x . Então, existe pelo menos um caminho entre W e X formado pelas aresta uw, yu e xy . Segue de (i.1) que todas as UW, YU e XY -arestas são vermelhas, verdes e vermelhas, respectivamente.

Caso 2: \hat{U} é um átomo simplicial em H .

Então sua vizinhança é uma clique e podemos assumir que não há outro átomo na clique maximal contendo $Y \cup U$, pois caso contrário, ele poderia ser um átomo ao invés de U , contrariando assim a hipótese. Então suponha que \hat{U} é pendente. Além de \hat{X} e \hat{Y} também deve existir um outro átomo \hat{Z} de H em Q , pois caso contrário teríamos $H = \hat{X} \cup \hat{Y} \cup \hat{U}$ e $G = X \cup Y \cup U$; assim, visto que pelo menos um dos pares $\{X, Y\}$ ou $\{Y, U\}$ é um aumento, G seria um grafo cobipartido, o que é um absurdo. Como \hat{U} é simplicial então \hat{Z} não pode ser simplicial, pois caso contrário G seria um grafo cobipartido (onde $(X \cup Y \cup Z)$ e U seriam as duas cliques desse grafo), então existe em H um átomo \hat{W} que é adjacente a \hat{Z} e não-adjacente a todos os vértices de $Q - \hat{Z}$. Logo, podemos notar que $\hat{X}\hat{Y}, \hat{X}\hat{Z}, \hat{Y}\hat{Z}$ são arestas rasas. Como X é um átomo plano então pelo Lema 3.2 existem todas as arestas entre X e Y e entre X e Z ; como \hat{U} é pendente então YU é um aumento; como $\hat{Y}\hat{Z}$ não é uma aresta rasa existem todas as

arestas entre Y e Z . Como YU é um aumento, pelo Lema 3.1 e pela Afirmação (A9) existe pelo menos um caminho entre U e W formado pelas arestas yu, yz e zw (se ZW também for um aumento usamos o Lema 3.1 e a Afirmação (A9) para as arestas entre esses átomos, chegando assim na mesma conclusão). Seja $z \in Z$ e suponha, sem perda de generalidade, que a aresta yu é verde, logo para conseguirmos uma coloração elementar devemos ter yz e zw , respectivamente, vermelha e verde. Repetindo esse argumento teremos todas as YU, YZ e ZW -arestas, respectivamente, verdes, vermelhas e verdes. Com isso é fácil ver que todas as YX e XZ -arestas são vermelhas.



Suponha agora que \hat{X} e \hat{Y} não são átomos simpliciais em H . Então existe um átomo \hat{U} que é adjacente a \hat{X} e não-adjacente a todos os vértices de $Q - \hat{X}$; e existe um átomo \hat{W} que é adjacente a \hat{Y} e não-adjacente a todos os vértices de $Q - \hat{Y}$. É fácil ver que $\{X, Y\}$ é um aumento em G , então \hat{U} e \hat{W} são átomos planos e assim pelo Lema 3.3 existem todas as arestas entre U e X e todas as arestas entre Y e W . Logo (usando o Lema 3.1 e (A9) para as arestas entre X e Y) existe pelo menos um caminho entre U e W formado pelas arestas ux, xy e yw . Suponha sem perda de generalidade que alguma XY -aresta de G seja vermelha, logo, para uma coloração elementar, devemos ter ux e yw verdes. Repetindo esse argumento, teremos todas as UX, XY e YW -arestas, respectivamente, verdes, vermelhas e verdes.

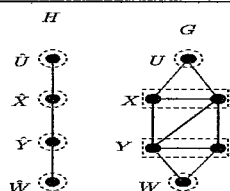


Figura 3.50: Grafos que buscam exemplificar a coloração das arestas entre as moléculas adjacentes em G quando \hat{X} e \hat{Y} são átomos não-simpliciais em H .

Para provar a Propriedade (ii), considere uma clique normal K de G , isto é, $K = \tilde{Q}$ para alguma clique normal Q de H . Como K é uma clique normal então, pelo Lema 3.4, K é uma união de moléculas. Suponha por absurdo que as arestas de K não são da mesma cor. Observe que pela Propriedade (i) devem existir três moléculas em K , digamos U_1, U_2 e U_3 tal que todas as U_1U_2 -arestas e todas as U_1U_3 -arestas sejam da mesma cor, então suponha que elas sejam vermelhas, logo todas as U_2U_3 -arestas devem ser de outra cor, digamos verde. Em H um dos átomos \hat{U}_2 ou \hat{U}_3 não é simplicial, então suponha que \hat{U}_2 é este átomo; logo existe um átomo \hat{W} de H que é adjacente a \hat{U}_2 e não-adjacente a todos os vértices de $Q - \hat{U}_2$. Sejam w e u_2 vértices em W e U_2 , respectivamente. Se U_2 ou W é um átomo plano, então pelo Lema 3.2 u e w são adjacentes; se nem U_2 e nem W são átomos planos então $\{U_2, W\} = \{X_i, Y_i\}$ para algum i , e por (A9) é possível escolher u_2 e w tal que eles sejam adjacentes. Como os átomos \hat{U}_1, \hat{U}_2 e \hat{U}_3 são dois a dois adjacentes então $\hat{U}_1\hat{U}_2, \hat{U}_1\hat{U}_3$ e $\hat{U}_2\hat{U}_3$ não são arestas rasas de H , assim em G , u_2 é adjacente a u_1 e a u_3 , com $u_i \in U_i$ para $i = 2, 3$. Logo wu_2u_1 e wu_2u_3 são dois P'_3 s, e mais, em relação a aresta u_2u_3 que é verde a aresta u_2w deve ser vermelha e em relação a aresta u_1u_2 que é vermelha a aresta u_2w deve ser verde, que é um absurdo. Logo todas as arestas dentro de uma clique normal devem ser da mesma cor.

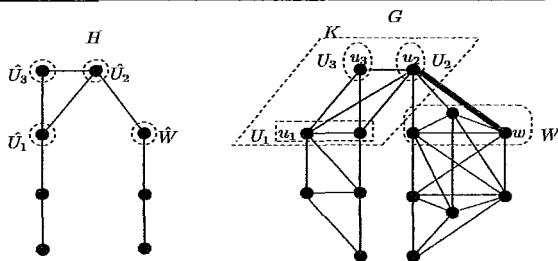


Figura 3.51: Grafos que buscam exemplificar que se as arestas dentro de uma clique normal não têm a mesma cor, não é possível encontrar uma coloração elementar para um grafo G .

Para provar a Propriedade (iii), considere um par X_i, Y_i em G . Por (i) todas as $X_i Y_i$ -arestas são da mesma cor, digamos vermelha. Seja xx' uma aresta colorida em X_i . Por (A8) podemos considerar dois vértices x e x' em dois átomos diferentes, respectivamente, X e X' dentro de X_i . Logo existe um $y \in Y_i$ que é adjacente a todos os vértices de X e não-adjacentes a todos os vértices de X' . Com isso, existe o P_3, yxx' , e como a aresta yx é vermelha, a aresta xx' deve ser verde. Usando o mesmo argumento para todas as arestas de X_i podemos notar que todas as arestas são verdes. O mesmo poderia ser feito para alguma aresta colorida de Y_i . Assim todas as arestas em X_i e em Y_i são verdes e a Propriedade (iii) está provada.

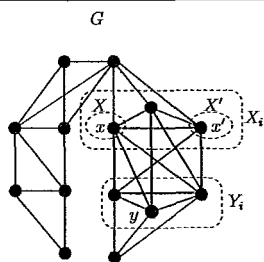


Figura 3.52: Grafos que buscam exemplificar que as arestas coloridas em X_i e Y_i têm a mesma cor, que é diferente da cor das $X_i Y_i$ -arestas.

Para provar as Propriedades (iv) e (v), considere um componente conexo K^* em algum dos dois grafos coloridos. Sem perda de generalidade, suponha que

K^* está num grafo vermelho. Vamos separar a prova destas propriedades em dois casos:

Caso 1: Suponha que em K^* contém uma $X_i Y_i$ -aresta, para algum i . Seja xy uma aresta em K^* com $x \in X_i$ e $y \in Y_i$. Por (i) todas as $X_i Y_i$ -arestas são vermelhas e pelo Lema 3.1 $(X_i, Y_i; F_i)$ é conexo, então $(X_i, Y_i; F_i) \subseteq K^*$. Por (iii) todas as arestas de X_i e Y_i são verdes; e por (ii) todas as arestas entre X_i e $N(X_i) - Y_i$ e todas as arestas entre Y_i e $N(Y_i) - X_i$ são verdes. Portanto, $K^* = (X_i, Y_i; F_i)$ e como pela Afirmação (A8), $(X_i, Y_i; F_i)$ é bipartido incompleto, K^* também o é.

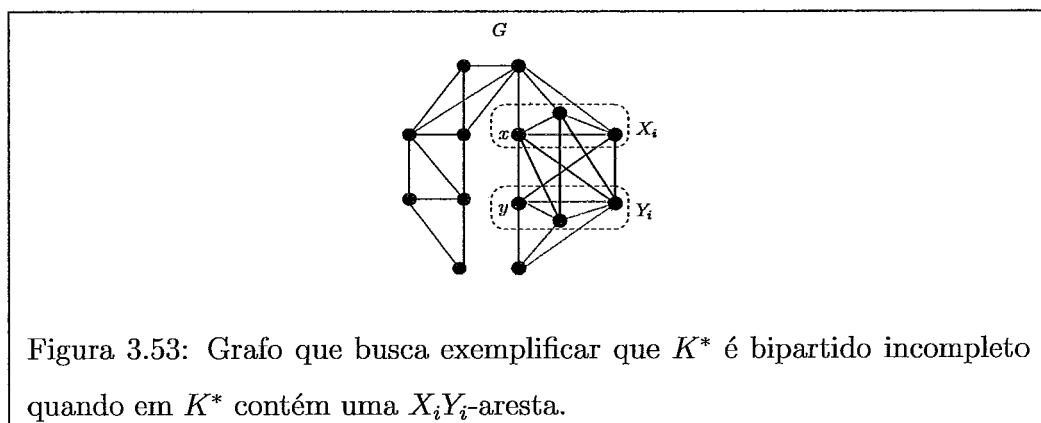


Figura 3.53: Grafo que busca exemplificar que K^* é bipartido incompleto quando em K^* contém uma $X_i Y_i$ -aresta.

Caso 2: Suponha que em K^* não contém nenhuma $X_i Y_i$ -aresta, para algum i . Seja X e Y dois átomos diferentes tal que xy seja alguma aresta em K^* , com $x \in X$ e $y \in Y$. Como xy não é uma $X_i Y_i$ -aresta, para algum i , xy pertence a uma clique normal K de G . Pela Propriedade (ii) todas as arestas de K têm a mesma cor, suponha que sejam vermelhas. Seja M uma molécula em K . Se M é um átomo plano então ainda não sabemos as cores de suas arestas internas e pelo Lema 3.2 todas as arestas entre M e $N_G(M) - K$ são verdes, já que todas as arestas de K são vermelhas.

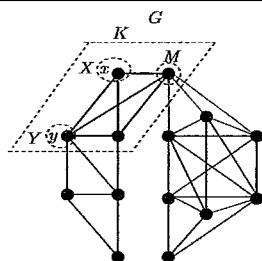


Figura 3.54: Grafo que busca exemplificar a coloração das arestas entre M e $N_G(M) - K$.

Se $M = X_i$ então por (iii) todas as arestas entre M e Y_i são da mesma cor, digamos verde e todas as arestas entre M e Y_i são de outra cor, vermelha (analogamente para $M = Y_i$). Então as arestas incidentes em K mas não dentro de K são verdes.

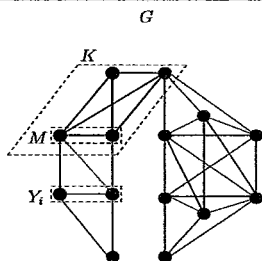


Figura 3.55: Grafo que busca exemplificar que as arestas incidentes em K , mas não dentro de K , são verdes.

Observe que pelo Caso 2 podemos concluir que K^* é igual ao conjunto de todas as arestas com extremos em dois átomos diferentes de K , então K^* é um grafo k -bipartido completo onde k é o número de átomos de K .

Portanto pelos Casos 1 e 2 as Propriedades (iv) e (v) estão provadas.

Agora para provar a Propriedade (vi) basta notar que as cliques que são átomos de G são formados por pares de vértices gêmeos de G e como entre eles não existem P_3 's dizemos que as cores de suas arestas são irrelevantes, logo os

componentes de um grafo irrelevante. ■

No Teorema 3.2, as moléculas de G são derivadas de alguns subgrafos de H escolhidos no início desta seção e a coloração elementar das arestas de G foi arbitrária. Porém, pelas Propriedades (iv) e (v), existe uma correspondência um a um entre os aumentos de G (tendo como base as arestas rasas de H) e os componentes bipartidos incompletos em um grafo colorido. Assim temos o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Se G é um grafo elementar não-cobipartido, então sua coloração elementar é única e o esqueleto também é único.*

O Teorema 3.2 também mostra como determinar a estrutura atômica, a estrutura molecular e o esqueleto de um grafo G não-cobipartido e elementar (Figura 3.56), e isso é feito através do seguinte algoritmo:

Algoritmo 3.2

- Passo 1: Encontre uma coloração elementar para o grafo G ;
- Passo 2: Cada componente irrelevante de G é um átomo;
- Passo 3: Encontre os componentes bipartidos incompletos dos dois grafos coloridos (do grafo vermelho e do grafo verde);
- Passo 4: Se não há componentes bipartidos incompletos então G é um grafo linha de um multigrafo bipartido;
- Passo 5: Senão, para cada componente bipartido incompleto, seja X_i a parte de cima e Y_i a parte de baixo; esses são os aumentos e as moléculas que não são átomos planos de G ;
- Passo 6: Para cada i , remova de G todos os vértices de X_i (respectivamente de Y_i) exceto um que chamaremos de x_i (respectivamente y_i); e adicione uma aresta $x_i y_i$ (isso nos dá o esqueleto de H).

A complexidade do Algoritmo 3.2 é a complexidade de achar uma coloração elementar das arestas de G que é da ordem de $O(|E|^2)$.

No exemplo da Figura 3.56, temos a coloração elementar para um grafo G , observe que nele há duas arestas que não estão coloridas, isto por que elas são arestas atômicas e por isso suas cores são irrelevantes; apresentamos também os dois componentes bipartidos incompletos dos dois grafos coloridos de G ; em seguida temos o grafo G indicando suas moléculas e seu esqueleto H .

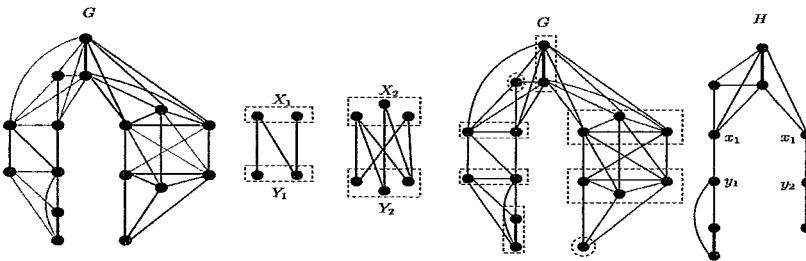


Figura 3.56: Grafos que buscam exemplificar : Um grafo G elementar; as moléculas de G e seu esqueleto H .

Agora, considere um novo grafo H^+ obtido de G adicionando todas as arestas entre vértices não-adjacentes de X_i e Y_i , para cada $i = 1, \dots, h$. Observe que H^+ pode ser obtido de H , multiplicando cada x_i $|X_i|$ vezes e cada y_i $|Y_i|$ vezes, então H^+ é um grafo linha de multigrafo bipartido. E note que as moléculas de G são os átomos de H^+ .

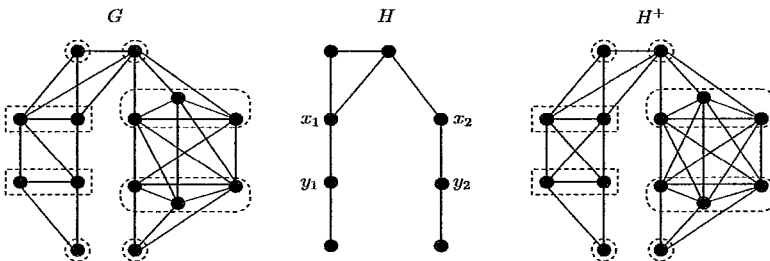


Figura 3.57: Grafos que buscam exemplificar como construir o grafo H^+ através de G ou de H .

Os resultados descritos até agora, podem ser reformulados da seguinte maneira:

Teorema 3.3 [31] *Um grafo não-cobipartido é elementar se e somente se ele pode ser obtido de um grafo linha de um multigrafo bipartido H^+ escolhendo h pares de superarestas rasas não-adjacentes X_1Y_1, \dots, X_hY_h e para cada $i = 1, \dots, h$ removendo arbitrariamente arestas com um extremo em X_i e o outro em Y_i .*

3.3.2 Coloração elementar para os grafos cobipartidos

Vimos na Seção 2.2 que obter uma coloração elementar para um grafo G cobipartido é fácil, pois como G é formado por duas cliques e algumas arestas entre elas, podemos então colorir as arestas das duas cliques de uma mesma cor e as outras arestas (que ligam as duas cliques) de outra cor; um exemplo deste fato pode ser visto na Figura 3.58. Porém, podem existir muitas colorações elementares que não são isomorfas (podemos observar isso comparando as Figuras 3.58 e 3.59), então baseado neste fato, Maffray e Reed [31] enunciaram o Teorema 3.4. Mas antes de apresentarmos este teorema, precisamos fazer algumas considerações: sejam G_1, \dots, G_h subgrafos de G onde o complementar de cada G_i (com $i = 1, \dots, h$) é um componente conexo não-trivial do complementar de G , e seja u_1, \dots, u_r vértices isolados no complementar de G . Para cada $i = 1, \dots, h$, seja E_i o conjunto de todas as arestas não-atômicas de G_i . Para cada par $i, j \leq h$, seja $F_{i,j}$ o conjunto das arestas entre G_i e G_j . Para todo $i \leq h$ e $j \leq r$, seja $F_{i,j}'$ o conjunto de todas as arestas entre G_i e u_j .

Teorema 3.4 [31] *Os conjuntos E_i ($i = 1, \dots, h$), $F_{i,j}$ ($i, j = 1, \dots, h, i \neq j$) e $F_{i,j}'$ ($i = 1, \dots, h, j = 1, \dots, r$) formam os componentes conexos não-triviais de $\text{Gal}(G)$. Cada um desses componentes é um grafo bipartido conexo. Uma coloração elementar de G pode ser obtida escolhendo arbitrariamente uma 2-coloração para cada um desses componentes.*

Prova: De fato, seja G um grafo elementar e cobipartido. Observe que $E_i \cup F_{i,j} \cup F_{i,j}'$ é o conjunto de todas as arestas de G menos suas arestas atômicas, como arestas atômicas em G equivalem a vértices isolados em $Gal(G)$, é fácil ver que os conjuntos $E_i \cup F_{i,j} \cup F_{i,j}'$ formam os componentes conexos não-triviais de $Gal(G)$, $Gal(G_i)$. Como G é elementar então cada subgrafo induzido de G , G_i , é elementar. Logo pela Proposição 2.1 cada $Gal(G_i)$ é bipartido conexo. Assim, para conseguir uma coloração elementar para G , basta escolher uma 2-coloração para os vértices de cada $Gal(G_i)$ e assim a cor de cada vértice de $Gal(G_i)$ será dada à sua aresta correspondente em G_i . ■

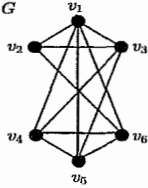


Figura 3.58: Grafo que busca exemplificar uma coloração elementar para um grafo cobipartido G .

Os grafos abaixo buscam exemplificar nos moldes do Teorema 3.4 como obter uma coloração elementar para as arestas de um grafo G , cobipartido. Para isso sejam G_1 e G_2 subgrafos induzidos de G .

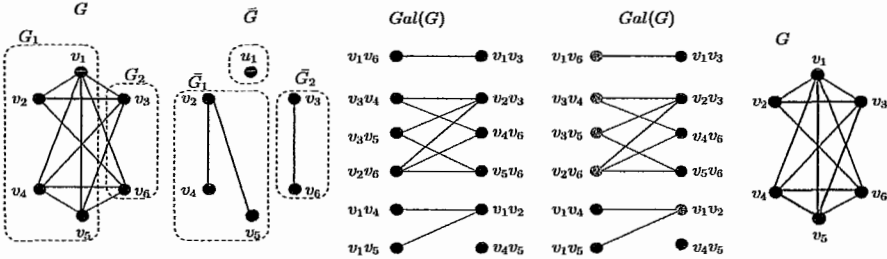


Figura 3.59: Grafos que buscam exemplificar uma coloração elementar, nos moldes do Teorema 3.4, para um grafo cobipartido G .

No exemplo da Figura 3.59, a aresta u_4u_5 de G é atômica então sua cor é irrelevante, por esse motivo não a colorimos.

Capítulo 4

Grafos sem garras

Este capítulo tem como objetivo descrever em linhas gerais uma parte dos estudos de Chudnovsky e Seymour [15, 9, 10, 11, 12, 13] sobre grafos sem garras. Trata-se dos estudos mais recentes sobre o tema. Em uma série de artigos, eles procuram descrever esses tipos de grafos de uma maneira geral, e para isso apresentam algumas classes básicas de grafos sem garras usando como ponto de partida os estudos feitos por Chvátal e Sbihi [16] e Maffray e Reed [31] sobre grafos Berge e sem garras.

Para isso, eles escreveram uma série de artigos (que podem ser encontrados na página de Chudnovsky na internet (<http://www.columbia.edu/mc2775>)), buscando fazer um estudo completo sobre esses tipos de grafos. Tais estudos partem do princípio que todos os grafos sem garras podem ser construídos a partir de suas classes básicas (que podem ser construídas explicitamente), unindo-as através de algumas operações. Então já que existe um teorema de decomposição, é natural pensar que se percorremos o caminho inverso deste teorema é possível construir um teorema de composição, descrevendo assim todos os grafos sem garras de uma maneira geral. Mas, infelizmente, não é muito simples fazer isso e, em [13], alguns resultados a respeito são apresentados. Cabe ressaltar que alguns artigos dessa série, inclusive o último, ainda não foram publicados.

Quando os autores começaram a desenvolver um teorema de decomposição para a classe dos grafos sem garras, verificou-se que o melhor caminho a seguir era restringir seus estudos à uma subclasse desses tipos de grafos, a classe dos grafos *quasi-linha*, já que a classe dos grafos sem garras é muito extensa. Com isso, obtiveram vários resultados sobre a classe dos grafos *quasi-linha*, que depois foram estendidos para a classe dos grafos sem garras de uma maneira geral. Note que um grafo *quasi-linha* não tem garras. De fato, um grafo $G = (V, E)$ é um grafo *quasi-linha* se para todo vértice v de G , a vizinhança de v pode ser escrita como a união de duas clique, isto é, $N_G(v) = K_1 \cup K_2$, onde K_1 e K_2 são cliques de G e $v \in V(G)$. Observe que não é exigido que dois vizinhos de v sejam adjacentes. Essa exigência só é feita, obviamente, para vértices que pertençam a mesma clique; e, além disso, pode haver arestas entre vizinhos de v que não pertencem a mesma clique. Se G é um grafo *quasi-linha*, então $N_G(v)$ não pode ser escrita como a união de três cliques, logo G não tem garras. Assim essa classe de grafos é um subconjunto próprio dos grafos sem garras e um superconjunto próprio dos grafos *linha*. Tais grafos podem ser construídos explicitamente ou através de algumas composições que têm como base os grafos de intervalo circular e os grafos de intervalo linear (que serão definidos mais adiante).

Inicialmente, em [15], foram apresentados os primeiros resultados sobre o estudo da estrutura geral dos grafos sem garras e foi todo baseado nos resultados obtidos para grafos *quasi-linha*. Neste mesmo artigo, Chudnovsky e Seymour baseiam-se no fato de que a estrutura dos grafos sem garras depende do tamanho do conjunto independente máximo de G , $\alpha(G)$. Assim, observou-se que quando $\alpha(G) \geq 4$ então ou G era um tipo de generalização de grafo *linha*, ou um grafo de intervalo circular. Quando $\alpha(G) = 3$, existiam várias possibilidades adicionais; por exemplo, ou G é um subgrafo de um icosaedro, ou G é expresso como um 6-join, ou G é *antiprismatic*. Já em [12], os resultados foram adaptados para o caso em que $\alpha(G) \leq 3$.

Através desse estudo foi possível identificar oito classes básicas de grafos sem garras que servem como base para construir o Teorema de decomposição já citado anteriormente.

4.1 Classes básicas de grafos sem garras

Há várias famílias de grafos que já estão bem definidas e fazem parte da família dos grafos sem garras. Algumas dessas famílias podem ser encontradas em [31] de 1995 onde há resultados que também já foram mencionados em [15, 14]. Resultados mais recentes (a partir de 2006) apresentados por Chudnovsky e Seymour [15, 9, 10, 11, 12, 13] descrevem outras famílias de grafos sem garras, que aqui chamaremos de classes básicas de grafos sem garras, isso por que esses grafos servirão de base para os resultados que descrevem todos esses grafos de uma maneira geral. São elas, sete classes S_0, \dots, S_6 e a classe dos grafos antiprismatic, que definiremos mais adiante.

4.1.1 Grafos linha - S_0

Como visto em capítulos anteriores, se G é um grafo, então o *grafo linha* de G , denotado por $L(G)$, é obtido associando um vértice a cada aresta de G ; e dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes são adjacentes em G .

Dizemos que $G \in S_0$ se G é isomorfo a um grafo linha.

4.1.2 Icosaedro - S_1

O *icosaedro* é o único grafo planar com doze vértices todos de grau cinco. Para $0 \leq k \leq 2$, *icosa*($-k$) denota o grafo obtido do icosaedro deletando k vértices dois a dois adjacentes.

Dizemos que $G \in S_1$ se G é isomorfo ao *icosa*(0), *icosa*(-1) ou *icosa*(-2).

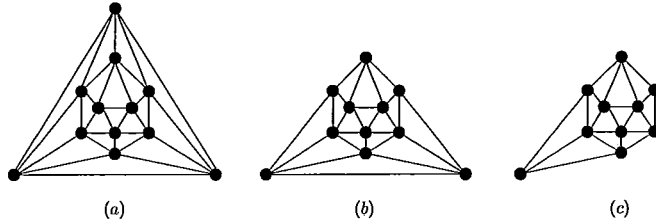


Figura 4.1: Grafos: (a) icosa(0), (b) icosa(-1) ou (c) icosa(-2).

4.1.3 O XX-strip - S_2 .

Seja H_1 um grafo com o conjunto de vértices igual a $\{v_1, \dots, v_{13}\}$, e tal que: $v_1v_2 \dots v_6v_1$ é um buraco em G de tamanho seis; v_7 é adjacente a v_1, v_2 ; v_8 é adjacente a v_4, v_5 e possivelmente adjacente a v_7 ; v_9 é adjacente a v_6, v_1, v_2, v_3 ; v_{10} é adjacente a v_3, v_4, v_5, v_6, v_9 ; v_{11} é adjacente a $v_3, v_4, v_6, v_1, v_9, v_{10}$; v_{12} é adjacente a $v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}$; e v_{13} é adjacente a $v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8$.

Um grafo $G \in S_2$ se G é isomorfo a $H_1 - X$, onde $X \subseteq \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$.

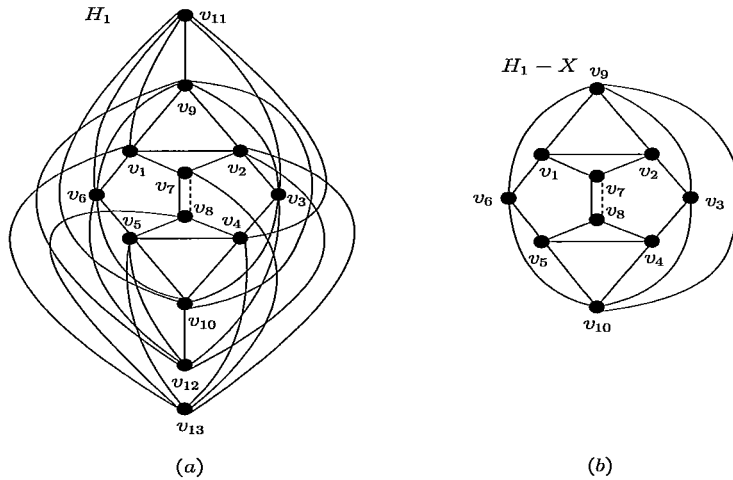


Figura 4.2: Grafos: (a) O grafo H_1 , (b) Um exemplo do grafo $H_1 - X$, em particular $X = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$.

4.1.4 Grafo de intervalo circular - S_3 .

Seja C um círculo e sejam F_1, \dots, F_k intervalos de C , cada um homeomorfo ao intervalo fechado $[0, 1]$. Seja V um subconjunto finito de C , e $G = (V, E)$ tal que dois vértices quaisquer $v, w \in V(G)$ são adjacentes em G se e somente se $v, w \in F_i$ para algum i . Os grafo construídos dessa maneira são chamados de **grafos de intervalo circular**. Se além disso, a união de três ou menos intervalos for diferente de C , então chamamos G de **grafo de intervalo circular longo**. Se $\bigcup_{i=1}^k F_i \neq C$, dizemos que G é um **grafo de intervalo linear**.

Dizemos que $G \in S_3$ se G é um grafo de intervalo circular.

Essa classe não deve ser confundida com a classe de grafos arco circulares; uma é uma subclasse própria da outra.

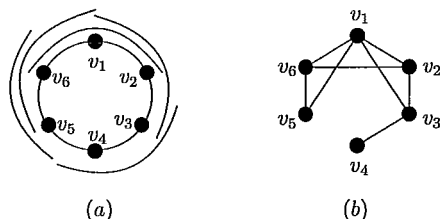


Figura 4.3: (a) Exemplo da representação de um grafo de intervalo circular e (b) o grafo de intervalo circular dessa representação.

Os grafos de intervalo circular longo, da mesma maneira que os grafos de intervalo circular, não tem garras e junto com os grafos linha formam as duas principais classes básicas de grafos sem garras.

4.1.5 Uma extensão de $L(K_6)$ - S_4 .

Seja H um grafo com sete vértices v_0, v_1, \dots, v_6 , onde v_1, v_2, \dots, v_6 são dois a dois adjacentes (isto é, v_1, \dots, v_6 formam um K_6) e v_0 é adjacente a v_1 . Seja G o grafo obtido do grafo linha de H (denotado por $L(H)$) adicionando um novo

vértice, adjacente aos vértices de $V(L(H)) = E(H)$ que não são incidentes em v_1 em H .

Dizemos que S_4 é a classe de todos os grafos isomorfos aos subgrafos induzidos de G .

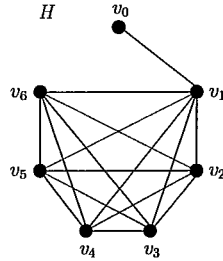


Figura 4.4: H : O grafo K_6 com um vértice v_0 adjacente ao vértice $v_1 \in V(K_6)$.

Seja e_{ij} , com $0 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 6$, a aresta (em H) que é incidente aos vértices v_i e v_j . Logo essas arestas serão os vértices em $L(H)$ e assim, $V(L(H)) = \{e_{01}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{45}, e_{46}, e_{56}\}$ e $v \in V(G)$ é o novo vértice adicionado em G que é adjacente aos membros de $V(L(H)) = V(G)$ que não são incidentes em $v_1 \in (H)$. Com isso, podemos construir o grafo G (Figura 4.5).

Comentários sobre a Figura 4.5: Observe em H , que as arestas não-incidentes em v_1 são: $e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{34}, e_{35}, e_{36}, e_{45}, e_{46}$ e e_{56} , então v em G , de acordo com a definição, deve ser adjacente aos vértices que correspondem essas arestas.

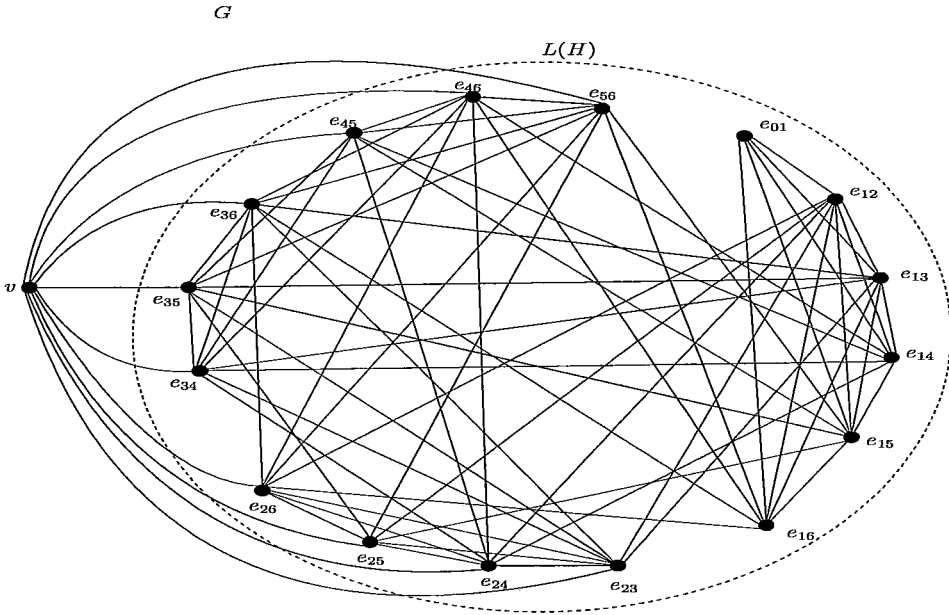


Figura 4.5: Uma extensão de $L(K_6)$.

4.1.6 2-simplicial do tipo anti-chapéu - S_5 .

Seja $n \geq 0$ e sejam $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_0, b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ três cliques duas a duas disjuntas. Para $0 \leq i, j \leq n$, sejam a_i, b_j adjacentes se e somente se $i = j > 0$, e para $1 \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq n$ seja c_i adjacente a a_j, b_j se e somente se $i \neq j \neq 0$. Seja H_5 o grafo assim construído.

Dizemos que $G \in S_5$ se (para algum n) G é isomorfo a $H_5 - X$ para algum $X \subseteq A \cup B \cup C$, e então G é dito ser *2-simplicial do tipo anti-chapéu*.

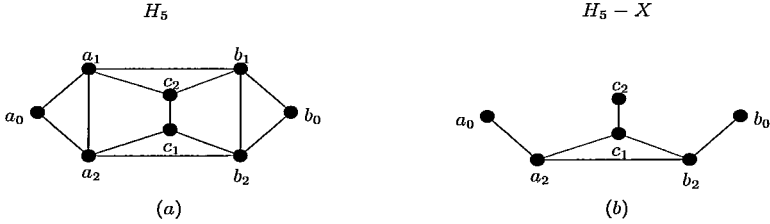


Figura 4.6: (a) O grafo H_5 para $n = 2$ e (b) O grafo $H_5 - X$, em particular $X = \{a_1, b_1\}$.

4.1.7 A classe S_6 .

Seja $n \geq 2$ e $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$, três cliques duas a duas disjuntas. Para $1 \leq i, j \leq n$, seja a_i, b_j adjacentes se e somente se $i = j$, e c_i adjacente a a_j, b_j se e somente se $i \neq j$. Sejam d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 mais cinco vértices, onde d_1 é adjacente a todos os vértices de $(A \cup B \cup C)$; d_2 é adjacente a todos os vértices de $A \cup B \cup \{d_1\}$; d_3 é adjacente a todos os vértices de $A \cup \{d_2\}$; d_4 é adjacente a todos os vértices de $B \cup \{d_2, d_3\}$; d_5 é adjacente a d_3 e d_4 . Seja H_6 o grafo assim construído.

Dizemos que $G \in S_6$ se (para algum n) G é isomorfo a $H_6 - X$ para algum $X \subseteq A \cup B \cup C$.

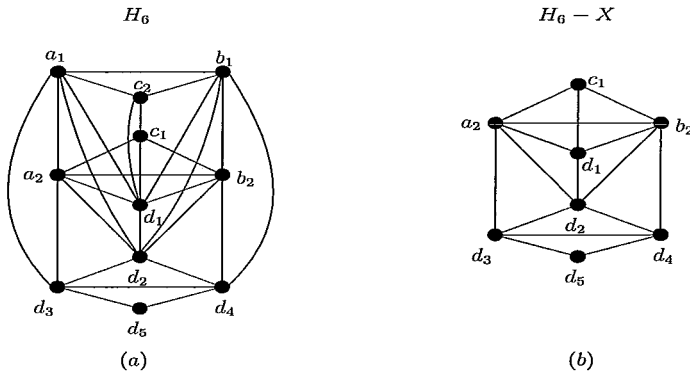


Figura 4.7: (a) Grafo H_4 para $n = 2$ e (b) O grafo $H_6 - X$, em particular $X = \{a_1, b_1, c_2\}$.

4.1.8 Grafos Antiprismatic.

Os grafos antiprismatic que definiremos a seguir são muito densos e por isso é conveniente trabalhar com seus grafos complementares que são os grafos prismatic.

Nós dizemos que um grafo G é *prismatic* se para todo triângulo T de G , todo vértice de G que não está em T tem exatamente um único vizinho em T (lembrando que um *triângulo* é uma clique de tamanho três).

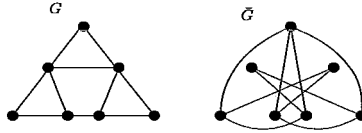


Figura 4.8: Exemplo de um grafo prismatic (G) e seu complementar (\bar{G}), um grafo antiprismatic.

Um grafo G é *antiprismatic* se seu complementar \bar{G} é prismatic.

Segundo Chudnovsky [15], o estudo de grafos prismatic se justifica pelo fato de que todo grafo antiprismatic não tem garras, de fato, observe que o complementar de uma garra é um triângulo e um vértice isolado, ou seja não é prismatic; e apesar de poderem ser completamente descritos, eles apresentam uma estrutura muito complexa. Esses grafos formam uma classe muito diferentes das outras, pois todos os métodos padrão para analisar grafos sem garras, fracassaram completamente quando foram estendidos para grafos antiprismatic.

Com o objetivo de fazer uma descrição completa de todos os grafos prismatic, essa classe de grafos foi dividida em duas subclasses: *Grafos prismatic orientáveis* e *Grafos prismatic não-orientáveis*. Essas duas classes são tratadas com detalhes por Chudnovsky e Seymour em [9] e [10]. Aqui nos propomos em apresentar somente um resultado para cada uma delas, já que não é nosso objetivo estudar com detalhes essas classes.

Grafos Prismatic Orientáveis: Seja G um grafo prismatic. Se S e T são triângulos em G com $S \cap T = \emptyset$, então como todo vértice de S tem um único vizinho em T e vice-versa, devem haver exatamente três arestas de G entre S e T , formando assim um emparelhamento. Uma **orientação** O de G é uma escolha de uma permutação cíclica $O(T)$ para todo triângulo T de G , tal que $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ e $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ são triângulos com $S \cap T = \emptyset$ e $s_i t_i$, com $1 \leq i \leq 3$, é uma aresta, então $O(T)$ é $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow s_1$ se e somente se $O(T)$ é $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow t_1$. Nós dizemos que G é **orientável** se ele admite uma orientação. Caso contrário G é não-orientável.

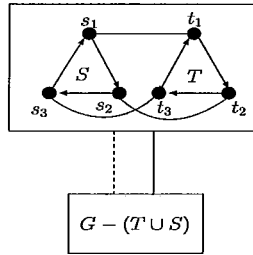


Figura 4.9: Exemplo de uma orientação cíclica para os triângulos S e T .

Uma **3-coloração** de um grafo G é uma tripla (A, B, C) tal que A, B e C são subconjuntos independentes de $V(G)$, disjuntos dois a dois, $V(G) = A \cup B \cup C$. Se G admite uma 3-coloração, dizemos que G é 3-colorível.

Um dos resultados importantes sobre esses tipos de grafos é o seguinte:

Teorema 4.1 [9] *Todo grafo prismatic 3-colorível é orientável.*

Grafos Prismatic Não-orientáveis: Vamos nos restringir aos grafos não-orientáveis minimais: P_1 e P_2 que também são chamados de **rodador** e **torcido**, respectivamente.

O **rodador** é um grafo com nove vértices $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ e com as seguintes adjacências: $\{c_1, c_2, c_3\}$ é um triângulo; para $1 \leq i, j \leq 3$, a_i é adjacente a b_j ; e para $1 \leq i \leq 3$, c_i é adjacente a a_i, b_i .

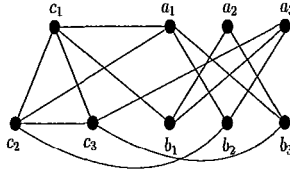


Figura 4.10: O grafo rodador, P_1 .

O *torcido* é um grafo com dez vértices x, y, a_1, \dots, a_8 , com as seguintes adjacências: para $1 \leq i \leq 8$, a_i é adjacente a a_{i-1}, a_{i+1} e a_{i+4} (lendo o índice módulo 8); x, y são adjacentes; x é adjacente a a_1, a_3, a_5, a_7 e y é adjacente a a_2, a_4, a_6, a_8 .

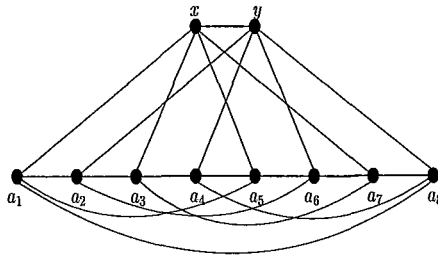


Figura 4.11: O grafo torcido, P_2 .

Assim podemos apresentar o seguinte resultado:

Teorema 4.2 [10] *Seja G um grafo prismatic. Então G é não-orientável se e somente se algum subgrafo induzido de G é isomorfo a um rodador ou a um torcido.*

4.2 Algumas Decomposições

Vamos definir agora algumas decomposições que serão utilizadas no principal resultado sobre grafos sem garras deste capítulo e o mais geral (em todos os estudos sobre estes tipos de grafos) até o momento.

Em todas as decomposições abaixo, consideramos o grafo $G = (V, E)$.

- **W-join:** Seja (K_1, K_2) um par homogêneo de G . Lembramos que o grafo $G \setminus (K_1 \cup K_2)$ pode ser particionado em quatro conjuntos A, S_1, S_2, Z onde os vértices de A são adjacentes a todos os vértices de $K_1 \cup K_2$, os vértices de Z são não-adjacentes a todos os vértices de $K_1 \cup K_2$, e os vértices de S_i , são adjacentes a todos os vértices de K_i e não-adjacentes a todos os vértices de K_{3-i} , com $i = 1, 2$.

Se K_1 e K_2 são cliques tais que alguns vértices de K_1 são adjacentes a alguns vértices de K_2 , mas não a todos, então o par (K_1, K_2) é chamado de **W-join**. Observamos que o W-join é exatamente o par-homogêneo forte definido por Mafray e Reed em [31]. O W-join (K_1, K_2) é dito **não-dominante** se $Z \neq \emptyset$. O W-join (K_1, K_2) é dito **coerente** se A é uma clique.

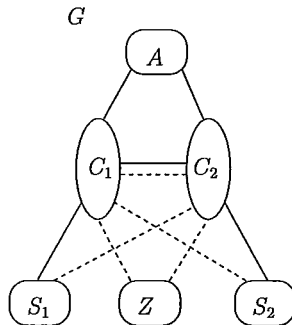


Figura 4.12: W-join, onde $A, Z, S_1, S_2, C_1, C_2 \subseteq V(G)$, sendo C_1 e C_2 cliques.

- **0-Join:** Suponha que V_1, V_2 é uma partição de $V(G)$ tal que V_1, V_2 não são vazios e não há arestas entre V_1 e V_2 . Dizemos então que o par (V_1, V_2) é um **0-join**. Assim, G admite um 0-join se e somente se ele é desconexo.

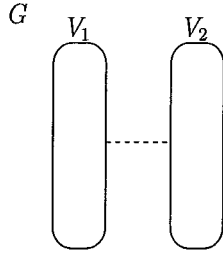


Figura 4.13: 0-join.

- **1-join:** Suponha que V_1, V_2 é uma partição de $V(G)$, e para $i = 1, 2$ há um subconjunto $A_i \subseteq V_i$ tal que:
 - Para $i = 1, 2$, A_i é uma clique e $A_i, V_i \setminus A_i$ são ambos não vazios;
 - Todos os vértices de A_1 são adjacentes a todos os vértices de A_2 ;
 - Todas as arestas entre V_1 e V_2 estão entre A_1 e A_2 .

Nessas circunstâncias, o par (V_1, V_2) é um **1-join**.

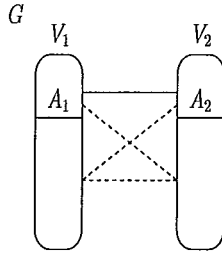


Figura 4.14: 1-join.

- **2-join generalizado e 2-join:** Suponha que V_0, V_1, V_2 são subconjuntos disjuntos tal que $(V_0 \cup V_1 \cup V_2 = V(G))$ e para $i = 1, 2$ há subconjuntos A_i, B_i de V_i satisfazendo o seguinte:
 - Para $i = 1, 2$, A_i, B_i são cliques, $A_i \cap B_i = \emptyset$, A_i, B_i e $V_i \setminus (A_i \cup B_i)$ são não-vazios;
 - Todos os vértices de A_1 são adjacentes a todos os vértices de A_2 , todos os vértices de B_1 são adjacentes a todos os vértices de B_2 e não há outras arestas entre V_1 e V_2 ;

— V_0 é uma clique e para $i = 1, 2$ todos os vértices de V_0 são adjacentes a todos os vértices de $A_i \cup B_i$ e não-adjacentes a todos os vértices de $V_i \setminus (A_i \cup B_i)$.

A tripla (V_0, V_1, V_2) é chamada de **2-join generalizado** e se $V_0 = \emptyset$ o par (V_1, V_2) é chamado de **2-join**.

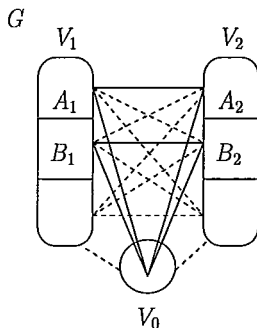


Figura 4.15: 2-join generalizado.

- **6-join**: Seja (V_1, V_2) uma partição de $V(G)$ tal que para $i = 1, 2$, $A_i, B_i, C_i \subseteq V_i$ são cliques que satisfazem as seguintes propriedades:
 - Para $i = 1, 2$, os conjuntos A_i, B_i, C_i são dois a dois disjuntos e $A_i \cup B_i \cup C_i \subseteq V_i$;
 - Todos os vértices de A_1 são adjacentes a todos os vértices de $B_2 \cup C_2$, todos os vértices de B_1 são adjacentes a todos os vértices de $A_2 \cup C_2$ e todos os vértices de C_1 são adjacentes a todos os vértices de $A_2 \cup B_2$;
 - V_1 e V_2 são não-vazios.

Dizemos então que G é um **6-join** de $G[V_1]$ e $G[V_2]$.

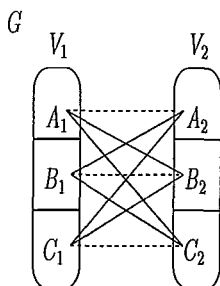


Figura 4.16: 6-join.

4.3 Teorema de decomposição

Assim podemos apresentar um resultado importante de Chudnovsky e Seymour sobre grafos sem garras, resultado este que exigiu o estudo de várias subclasses especiais desses grafos, produzindo assim uma série de artigos sobre este tema. O teorema de decomposição que busca fazer uma descrição completa de todos os grafos sem garras é o seguinte:

Teorema 4.3 [14] *Seja G um grafo sem garras. Então:*

- (i) $G \in S_0 \cup \dots \cup S_6$, ou
- (ii) G admite ou vértices gêmeos, ou um W -join não-dominante, ou um W -join coerente, ou um 0-join, ou um 1-join, ou um 2-join generalizado, ou um 6-join, ou
- (iii) G é antiprismatic.

O Teorema 4.3, como já foi dito, é um teorema de decomposição: Ele estabelece que um grafo sem garras ou pertence a uma das oito classes básicas que foram descritas explicitamente ou admite certas decomposições também já descritas. Além disso esse teorema pode ser convertido em um teorema de composição, ou seja um teorema que nos permite construir todos os grafos sem garra.

As operações de decomposição podem ser “revertidas” de maneira que tenhamos composições. Por exemplo, observe que todo grafo que admite vértices gêmeos pode ser obtido de um grafo menor adicionando a ele um novo vértice

que seja gêmeo a um já existente (o que chamamos de multiplicação de um vértice). Então dado um grafo sem garra, G , o grafo obtido através da multiplicação de vértices de G , também não tem garras. Neste caso específico de vértices gêmeos, percorrer o caminho inverso da decomposição é fácil, porém nas outras operações é bem mais complicado. Em [13], Chudnovsky e Seymour apresentam alguns resultados neste sentido, porém pela complexidade desse estudo foi preciso construir tais resultados através de uma definição mais geral, ou seja, não foi possível desenvolver esses estudos em termos de grafos, mas sim em termos de trigrafos, um conceito mais geral que o de grafo.

Em um grafo, todo par de vértices ou é adjacente ou é não adjacente, porém em trigrafos podemos ter pares de vértices indecidíveis.

Um *trigrafo* G consiste de um conjunto finito $V(G)$ de vértices e de uma função $\theta_G : V(G)^2 \rightarrow \{1, 0, -1\}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- Para todo $v \in V(G)$, $\theta_G(v, v) = 0$;
- Para todo $v, u \in G$ com $v \neq u$, $\theta_G(v, u) = \theta_G(u, v)$;
- Para $v, u, w \in G$ com $v \neq u \neq w$, no máximo um dos $\theta_G(v, u), \theta_G(u, w) = 0$.

Dizemos que θ_G é uma *função de adjacência* de G . Para vértices diferentes $u, v \in V(G)$, dizemos que u, v são *fortemente adjacentes* se $\theta_G(u, v) = 1$, *fortemente anti-adjacentes* se $\theta_G(u, v) = -1$, e *semi-adjacentes* se $\theta_G(u, v) = 0$. Dizemos também que u, v são *adjacentes* se eles são ou fortemente adjacentes ou semi-adjacentes, e são *anti-adjacentes* se são ou fortemente anti-adjacentes ou semi-adjacentes.

Denotamos por $F(G)$ o conjunto de todos os pares $\{u, v\}$ tais que $u, v \in V(G)$ onde u, v são distintos e semi-adjacentes. Temos então que um trigrafo G é um grafo se $F(G) = \emptyset$.

Por se tratar de um contexto totalmente novo, tendo em vista que estamos trabalhando somente com grafos e não com trigrafos, nosso estudo se encerra aqui.

Capítulo 5

Conclusão

O principal objetivo deste trabalho foi fazer um estudo detalhado dos grafos Berge e sem garras, assim como apresentar alguns resultados mais recentes sobre os grafos sem garras de uma maneira geral.

Vimos que Chavátal e Sbihi em 1985 [16] mostraram inicialmente que um grafo era Berge e sem garras se e somente se fosse elementar ou possuísse a propriedade de ter $\alpha(G) \geq 3$ e não conter buraco de comprimento maior ou igual a cinco como subgrafo induzido, aqui este resultado é apresentado no Teorema 2.1. Então baseados nisto e utilizando o algoritmo de Whitesides [35] eles provam que o reconhecimento de grafos Berge e sem garras pode ser feito em tempo polinomial. Em seguida, percebendo que poderiam reduzir estas duas últimas propriedades do Teorema 2.1 ($\alpha(G) \geq 3$ e não conter buraco de comprimento maior ou igual a cinco como subgrafo induzido) em um único conceito, definiram os grafos peculiares, fazendo assim o reconhecimento de grafos sem garras através dos grafos elementares e dos grafos peculiares. Então provaram que todo grafo Berge, sem garras e sem corte-clique ou é elementar ou é peculiar; aqui este resultado é apresentado no Teorema 2.2.

Os grafos peculiares podem ser totalmente descritos pela sua definição, ou seja, sua estrutura é bem definida. Mas podemos notar que o mesmo não acontece com os grafos elementares, estes grafos possuem uma estrutura mais com-

plexa e exige um estudo detalhado para descrevê-la de uma maneira geral. Então com este objetivo Chavátal e Sbihi [16] apresentaram uma primeira caracterização dos grafos elementares, dada pelos Lemas 2.2 e 2.3 e como consequência desses dois últimos resultados descrevem os passos de uma coloração elementar para os grafos que possuem as propriedades do Lema 2.2. Porém estes resultados não caracterizam completamente os grafos elementares, e era preciso obter um resultado mais geral para esses grafos. Então, em 1995 Maffray e Reed [31] caracterizaram completamente esses grafos.

Esta caracterização, dada por Maffray e Reed [31], foi feita através de subgrafos proibidos e utilizando a operação de aumento de um grafo linha de um multigrafo bipartido, este resultado pode ser visto no Teorema 3.1. Assim, já conhecendo completamente a estrutura de um grafo elementar, é natural pensar em um algoritmo que pudesse descrever os passos de uma coloração elementar para qualquer grafo que assim o fosse. E foi isso que os autores fizeram: desenvolveram um algoritmo de decomposição que descreve uma coloração elementar para todos os grafos elementares, separando-os em grafos não-cobipartidos e grafos cobipartidos. E com isso a estrutura dos grafos Berge e sem garras ficaram completas.

Porém, podemos pensar na seguinte questão: E para o caso geral, que tipo de estrutura os grafos sem garras possuem? Para responder esta pergunta Chudnovsky e Seymour [14, 15, 9, 10, 11, 12, 13] começaram a analisar a classe dos grafos sem garras buscando assim desenvolver um teorema de decomposição e então percorrendo o caminho inverso desse teorema obter um teorema de composição que descreva a estrutura geral dos grafos sem garras. Analisando esta classe de grafos eles observaram que, por se tratar de uma classe grande (contendo inclusive a classe dos grafos linha e a classe dos grafos de intervalo circular e linear, entre outras) o caminho mais viável a seguir era analisar cada uma das subclasses dos grafos sem garras. Decidiram então por trabalhar com a classe dos grafos quasi-linha, classe esta que é um subconjunto próprio dos grafos sem garras e um superconjunto próprio dos grafos linha. Então dentro desta classe

escolhida, eles definiram oito classes de grafos; e as chamaram de classes básicas de grafos sem garras e são representadas, exceto a classe dos grafos antiprismatic, por S_i com $i = 0, 2, \dots, 6$. São elas: Grafos linha - S_0 , grafo de Icosaedro - S_1 , XX-strip - S_2 , grafo de intervalo circular - S_3 , uma extensão de $L(K_6)$ - S_4 , 2-simplicial do tipo anti-chapéu - S_5 , a classe S_6 e os grafos antiprismatic. Os autores mostram que se G é um grafo sem garras, então ele pertence a uma de suas classes básicas ou admite certas decomposições, que aqui são descritas na Seção 4.2. Desenvolvendo assim o teorema de decomposição desejado (Teorema 4.3).

Referências Bibliográficas

- [1] BEINEKE, L. W., “Derived graphs and digraphs”, *Beiträge zur Graphentheorie*, teubner, Leipzig, 1968.
- [2] BEINEKE, L. W., “Characterizations of derived graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, v. 9, pp. 129-135, 1970.
- [3] BERGE. C., “Some classes of perfect graphs”, *Six Papers on Graphs Theory*, indian Statical Institute, Calcutta, pp. 1-21, 1963.
- [4] BERMOND, J. C, MEYER, J. C., “Graphe représentatif des arêtes d’un multigraphe”, *J. Math. Pures Appl.* v. 52, pp. 299-308, 1973.
- [5] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graphs theory with applications*. New York, North-Holland, 1976.
- [6] BONOMO, F., CHUDNOVSKY, M., AND DURÁN, G., “Partial characterization of clique-perfect graphs”, *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 19, pp. 95-101, 2005.
- [7] CHUDNOVSKY, M., CORNUÉJOLS, G., LIU, X., SEYMOUR, P., AND VŠKOVIĆ, K., “Recognizing Berge Graphs”, *Combinatorica*, v. 25, pp. 143-187, 2005.
- [8] CHUDNOVSKY, M., ROBERTSON, n., SEYMOUR, P., AND THOMAS, R., “The strong perfect graph theorem”, *Annals of Math*, v. 164, pp. 51-229, 2006.

- [9] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “Claw-free graphs. I. Orientable prismatic graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, v. 97, pp. 867-901, 2007.
- [10] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “Claw-free graphs. II. Non-orientable prismatic graphs”. Manuscript. To appear in *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 2007.
- [11] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “Claw-free graphs. III. Circular interval graphs”. Manuscript. To appear in *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 2007.
- [12] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “Claw-free graphs. IV. Decomposition theorem”. Manuscript. To appear in *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 2007.
- [13] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “Claw-free graphs. V. Global structure”. Manuscript. To appear in *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, 2007.
- [14] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “Excluding induced subgraphs”, *Surveys in Combinatorics*, *London Math Soc Lecture Note Series*, v. 346, pp. 99-119, 2007.
- [15] CHUDNOVSKY, M., AND SEYMOUR, P., “The structure of claw-free graphs”, *Surveys in Combinatorics*. *London Math Soc Lecture Note Series*, v. 327, pp. 153-171, 2005.
- [16] CHVÁTAL, V., AND SBIHI, N., “Recognizing claw-free perfect graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, v. 44, pp. 154-176, 1988.
- [17] DIRAC, G. A., “On rigid circuit graphs”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, v. 25, pp. 71-76, 1961.

- [18] EDMONDS, J., "Maximum matching and a polytope with 0,1-vertices", *J. Res.Nat.Bur.Standards* , v. 69, pp. 125-130, 1965.
- [19] EDMONDS, J., "Paths, trees and flowers", *Canad. J. Math.*, v. 17, pp. 449-467, 1965.
- [20] GAVRIL, F., "Algorithms on clique separable graphs", *Discrete Math*, v. 19, pp. 159-165, 1977.
- [21] GILES, R., TROTTER, L. E., AND TUCKER, A., "The strong perfect graph theorem for a class of partitionable graphs", In: *Topics on Perfect graphs (C. Berge and Chátal, Eds.)*, North. Holland, Amsterdam, pp. 161-167, 1984.
- [22] HARARY, F. AND HOLZMANN, C., "Line graphs of bipartite graphs", *Rev. Soc. Mat. Chile*, v. 1, pp. 19-22, 1974.
- [23] HAYWARD, R. B., "Weakly triangulated graphs", *Journal Combinatorial Theory*, Series B, v. 39, pp. 200-208, 1985.
- [24] HEMMINGER, R. L., "Characterization of the line graphs of a multi-graph", *Notices Amer. Soc.*, v. 18, pp. 934, 1971.
- [25] HSU, W. L., AND NEMHAUSER, G. L., "Algorithms for maximum weighted cliques, minimum weighted clique covers, and minimum colouring of claw-free perfect graphs", in *Topics on Perfect Graphs (C. Berge and V. Chátal, Eds.)*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [26] KRAUSZ, J., "Demonstration nouvelle d'une théorème de Whitney sur les reseaux". *Mat. Fiz. Lapok, Journals*, v. 50, pp. 75-89, 1943.
- [27] LEHOT, P. G. H., "An optimal algorithm to detect a line graph and output its root graph". *J. ACM*, v. 21, pp. 569-575, 1974.

- [28] LINHARES, S. C., AND MAFFRAY, F., “Even pairs in claw-free perfect graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, v. 74, pp. 169-191, 1998.
- [29] LOVÁSZ, L., “Normal hypergraphs and perfect graph conjecture”, *Discrete Math.*, v. 2, pp. 253-267, 1972.
- [30] LOVÁSZ, L., “Perfect Graphs”, *Academic Press Inc. London*, pp. 55-85, 1983.
- [31] MAFFRAY, F. AND REED, B., “A description of claw-free perfect graphs”, *J. Combinatorial Theory*, Series B, v. 75, pp. 134-156, 1999.
- [32] MINTY, G. J., “On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, v. 28, pp. 284-304, 1980.
- [33] PARTHASARATHY, K. R., AND RAVINDRA G., “The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$ - free graphs”, *Combin. Theory*, v. 21, pp. 212-223, 1976.
- [34] TARJAN, R., “Decomposition by clique separators”, *Discrete mathematics*, v. 55, pp. 221-232, 1985.
- [35] WHITESIDES, S. H., “A method for solving certain graph recognition and optimization problems, with application to perfect graphs”, in Topics on Perfect Graphs (Berge, C. and Chátal, V. Eds). *Ann. Discrete Math*, v. 21, pp. 281-297, 1984.
- [36] WHITESIDES, S. H., “An algorithm for finding clique cut-set”, *Inform. Process. Lett*, v. 12, pp. 31-32, 1981.