COPPE/UFRJ

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS QUASE-MÉTRICOS E APLICAÇÃO ÀS FUNÇÕES UTILIDADE EM TEORIA DA DECISÃO.

Francisco Ismael Pinillos Nieto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Rio de Janeiro

Dezembro de 2008

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS QUASE-MÉTRICOS E APLICAÇÃO ÀS FUNÇÕES UTILIDADES EM TEORIA DA DECISÃO.

Francisco Ismael Pinillos Nieto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr.Ing.

Prof. Ernesto Prado Lopes, Ph.D.

Prof. Dinamérico Pereira Pombo Júnior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO – RJ, BRASIL

DEZEMBRO DE 2008

Pinillos Nieto, Francisco Ismael

Introdução aos Espaços Quase-Métricos e Aplicação às Funções Utilidade em Teoria da Decisão./Francisco Ismael Pinillos Nieto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2008.

IX, 70 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2008.

Referências Bibliográficas: p. 68 – 70.

1. Quase Métrica. 2. Funçaõ Semilipschitz. 3. Função utilidade. I. Oliveira, Paulo Roberto. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Aos meus pais, Ana e Francisco

pelo amparo ao longo desses anos.

A minha esposa Yanina e meus

filhos Paco e Yemo, suporte de

afeito e estímulo constante.

A minha avó Irma pelo carinho.

*A meu avô Tito (*in memoriam*).*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero agradecer a Deus por ter me dado as forças necessárias para concluir este trabalho.

Ao professor Paulo Roberto por ter me aceitado como seu orientando e me dando o suporte necessário para que essa dissertação pudesse chegar até ao fim.

À professora Susana pela ajuda brindada.

Aos professores Dinamérico e Ernesto por aceitarem participar da banca de avaliação desta dissertação.

Aos meus pais Francisco e Ana que sempre acreditaram em mim e que mesmo distante sempre estiveram de meu lado.

Muito obrigado por tudo, a minha esposa Yanina e meus filhos que são o sustento das minhas forças.

Aos meus amigos Alberto, Jurair, Jesus, Tiago e Michael que sempre me ajudaram.

Agradeço à COPPETEC pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

INTRODUÇÃO AOS ESPAÇOS QUASE-MÉTRICOS E APLICAÇÃO ÀS FUNÇÕES UTILIDADE EM TEORIA DA DECISÃO.

Francisco Ismael Pinillos Nieto

Dezembro/2008

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Apresentamos uma introdução aos espaços quase-métricos e os conceitos necessários para o estabelecimento de problemas de otimização. Caracteriza-se os pontos de extremos, assim como funções utilidades definidas em espaços quase-métricos, mostrando a aplicabilibadade de trabalhar neste tipo de estrutura.

Damos como contribução uma extensão de algums conceitos dos espaços métricos, assim como algumas proposições que caracterizam os pontos q-aderentes e funções semicontínuas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INTRODUCTION TO QUASI-METRIC SPACES AND APPLICATION TO FUNCTIONS UTILITY IN DECISION THEORY

Francisco Ismael Pinillos Nieto

December/2008

Advisor: Paulo Roberto Oliveira

Department: Systems Engineering and Computer Science

We introduce quasi-metric spaces and concepts necessary for the establishment of optimization problems. We characterize the extreme points and utility function, showing the aplicability of such spaces.

We give a contribution with an extension of some concepts of metric spaces, as well as some propositions that characterize the q-adherent points and lower semicontinuous functions.

Sumário

Lista de Figuras **ix**

1 INTRODUÇÃO **1**

2 ESPAÇOS QUASE-MÉTRICOS **3**

2.1 Espaço Quase-Métrico 3

2.2 Extremo em um Espaço Quase-Métrico 14

2.3 Cone em um Espaço Linear Quase-Normado 23

3 PONTO FIXO **27**

3.1 Completitude Superior e Mapeamento Contrativo Superior 27

3.2 Teorema de Ponto Fixo 32

3.3 Um Problema de Otimização no Espaço Quase-Métrico 34

4 FUNÇÃO SEMILIPSCHITZ **38**

4.1 Função Semilipschitz 38

4.2 Melhor Aproximação em um Espaço Quase-Métrico 42

5 FUNÇÃO UTILIDADE **45**

5.1 Função Utilidade Semilipschitz 45

5.2 Um Modelo em Teoria da Decisão 60

5.2.1 Um Modelo de Otimização com Aprendizagem 62

6 CONCLUSÕES **64**

Referências Bibliográficas **68**

Lista de Figuras

2.1 Bola aberta superior $B^+((\overline{x},\overline{x}))$. 8

2.2 Bola aberta inferior $B^-((\overline{x},\overline{x}))$. 8

2.3 $B^+(0,\epsilon) \not\subset A$ 10

2.4 Função semicontínua inferior em $a = 1$ 13

2.5 Conjunto $K_{\overline{q}}((\overline{x},\overline{y}),(x,y))$ sobre $(\mathbb{R}^2,\overline{q})$. 16

2.6 O ponto $\min A$. 18

2.7 Pontos mínimos e máximos do conjunto A sobre o espaço quase-métrico $(\mathbb{R}^2,\overline{q})$. 20

2.8 Pontos mínimos e máximos do conjunto A sobre o espaço quase-métrico $(\mathbb{R}^2,q)$. 21

2.9 $K_{\overline{q}}(A) \cap K^*_{\overline{q}}(A) \not\subset A$. 22

5.1 Gráfico do mapeamento ponto a conjunto $R^+(x)$ 47

5.2 Gráfico do mapeamento ponto a conjunto $R^-(x)$ 47

5.3 Interpretação gráfica de um mapeamento R semicontínuo superior 52

5.4 Interpretação gráfica de um mapeamento R semicontínuo inferior 58

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como principais objetivos estudar as propriedades dos espaços quase-métricos e estabelecer os conceitos necessários para o estabelecimento de problemas de otimização. Além disso, caracteriza-se função utilidade sobre espaços quase-métricos e aplica-se a mesma em teoria da decisão.

Uma quase-métrica é uma função que se diferencia da distância usual por não verificar a simetria. O conceito de quase-métrica foi introduzido por Wilson [1] na década de 30 com motivações topológicas e são também objeto de estudo no contexto da teoria da ciência da computação. Fletcher and Lindgren [2], em 1982, através dos chamados espaços quase-uniformes, desenvolveram conceitos sobre quase-métricas. Romaguera e Schellenkens [3] aplicaram essa teoria à análise de complexidade de algoritmos.

O capítulo 1 é baseado em [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Nele são introduzidos conceitos básicos de espaços quase-métricos. Além disso, são caracterizados pontos extremos em um subconjunto de espaços quase-métricos e, finalmente, é apresentado o conceito de um cone em um espaço linear quase-normado.

O capítulo 2 é baseado em [4, 5, 12, 9]. Nele se introduz um conceito de limite adequado a espaços quase-métricos, se apresentam condições necessárias e suficientes de completude superior e inferior. Propõe-se os conceitos de pontos fixos direitos e esquerdo e os de contração superior e inferior. Finalmente é proposto um problema de otimização.

O capítulo 3 é baseado em [13, 10, 14]. Definimos funções semilipschitz em espaços quase-métricos, mostramos que o subconjunto destas funções que se anulam em um ponto fixo pode ser dotado de uma determinada estrutura de espaço quase-métrico. Em seguida, caracterizamos pontos de melhor aproximação.

O capítulo 4 é baseado em [15, 16, 17, 7, 18]. Tratamos dos conceitos de preferência e de função utilidade, que constituem uma importante ferramenta, particularmente na teoria da ciência da computação e da decisão. Veja, por exemplo, nas teorias do domínio e da complexidade [19, 11, 3]. Caracteriza-se preferência que admite funções utilidades semilipschitz quando tal preferência é definida em um espaço quase-métrico subseparável. Este resultado estende Levi em [16] para o caso não simétrico.

Na ultima seção apresenta-se um modelo em teoria da decisão sobre um espaço quase-métrico baseado em [20, 21, 22].

Capítulo 2

ESPAÇOS QUASE-MÉTRICOS

Neste capítulo, introduzimos diversas definições, lemas e proposições. As mesmas foram obtidas dos trabalhos [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] e são referenciadas a medida que faz-se necessário. No entanto diversas definições, lemas e proposições não foram encontradas na literatura. Dessa forma as mesmas, não referenciadas, são aportes da tese em questão. Vale ressaltar que tais contribuções advêm das idéias apresentadas nos espaços métricos e topológicos em [9, 23]. Na seção 2, também caracterizamos pontos extremos de um subconjunto. Na seção final tratamos de cones em espaços lineares quase-normados.

2.1 Espaço Quase-Métrico

Nesta seção se introduz o conceito de quase-métrica e espaço quase-métrico. Propõem-se os conceitos de subconjunto limitado superiormente, q-ponto interior, conjunto q-aberto, q-fronteira de um conjunto, q-ponto aderente, o q-fecho de um conjunto, q-ponto de acumulação, o conjunto q-derivado. São uma extensão dos conceitos de espaços métricos levados aos espaços quase-métricos.

Mostra-se também a relação que existe entre os novos conceitos propostos neste trabalho e os respectivos sobre espaços métricos. Além disso propõe-se as definições de funções semicontínuas inferior e superior sobre os espaços quase-métricos, mostrando a relação com os espaços métricos. Todos estes conceitos estão baseados nas definições de espaços métricos dadas em [9]

Definição 2.1.1. *[7] Uma função $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ é chamada uma quase-métrica sobre o conjunto X se,*

(i) $\forall x, y \in X, \;\; q(x,y) = q(y,x) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

(ii) $\forall x, y, z \in X, \;\; q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y).$

Um espaço quase-métrico é um par (X, q), onde X é um conjunto e q é uma quase-métrica em X. Na maioria das vezas, salvo quando houver possibilidade de dúvida, diremos simplesmente "o espaço (X, q)" deixando subentendida qual é a quase-métrica que está sendo considerada.

Uma quase-métrica q em X induz outra quase-métrica q^*, definida por $q^*(x,y) = q(y,x), \;\; \forall x, y \in X$, conhecida como a *conjugada* de q.

Temos, além disto, que a função $q^s : X \times X \to \mathbb{R}_+$, definida por $q^s(x,y) = \max\{q(x,y), q^*(x,y)\}$ é uma métrica em X. Neste caso o par (X, q^s) é um espaço métrico.

Definição 2.1.2. *[7] Seja (X, q) um espaço quase-métrico. A ordem $\leq_q$ definida em X por*

$$x \leq_q y \Leftrightarrow q(x,y) = 0. \tag{2.1}$$

é chamada a ***ordem especializada ou a ordem parcial*** *em X.*

A ordem parcial $\leq_q$ permite definir a **ordem parcial estrita** $<_q$ em X por

$$x <_q y \Leftrightarrow x \leq_q y \;\; e \;\; x \neq y. \tag{2.2}$$

Definição 2.1.3. *[7] Um espaço quase-métrico (X, q) é dito subseparável se (X, q^s) é um espaço métrico separável.*

Definição 2.1.4. *[4] Definem-se as bolas básicas do espaço quase-métrico como:*

$B^+(x,\epsilon) = \{y \in X : \; q(y,x) < \epsilon\}$ *(bola aberta superior).*

$B^-(x,\epsilon) = \{y \in X : \; q(x,y) < \epsilon\}$ *(bola aberta inferior).*

$B^+[x,\epsilon] = \{y \in X : \; q(y,x) \leq \epsilon\}$ *(bola fechada superior).*

$B^-[x,\epsilon] = \{y \in X : \; q(x,y) \leq \epsilon\}$ *(bola fechada inferior).*

O seguinte lema 2.1.1 mostra a relação que existe entre as bolas abertas definidas no espaço (X, q) e o espaço (X, q^s).

Lema 2.1.1. *Seja $B^s(x,\epsilon)$ uma bola aberta no espaço métrico (X, q^s) definida como $B^s(x,\epsilon) = \{y \in X : \ q^s(y,x) < \epsilon\}$. Então $B^s(x,\epsilon) = B^+(x,\epsilon) \cap B^-(x,\epsilon)$.*

Prova. Seja $y \in B^s(x,\epsilon)$ então $q^s(x,y) < \epsilon$. Como $q^s(x,y) = \max\{q(x,y), q(y,x)\} < \epsilon$ temos que $q(x,y) < \epsilon$ e $q(y,x) < \epsilon$. Assim $y \in B^-(x,\epsilon)$ e $y \in B^+(x,\epsilon)$. Portanto $y \in B^-(x,\epsilon) \cap B^+(x,\epsilon)$.

A prova da recíproca é semelhante. ■

A seguir mostramos alguns exemplos de função quase-métrica, bem como o tipo de bola que está gera.

Exemplo 2.1.1. *[11] A função $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, definida por $q(x,y) = \max\{x-y, 0\}$ é uma quase-métrica em $\mathbb{R}$. Note que $q(x,y) = 0$ se, e somente se, $x \leq y$.*

A seguir mostramos as bolas geradas por esta quase-métrica no espaço $(\mathbb{R}, q)$:

$$\begin{aligned} B^+(x,\epsilon) &= \{y \in \mathbb{R} : q(y,x) < \epsilon\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : max\{y-x, 0\} < \epsilon\} \\ &= (-\infty, x+\epsilon)\,, \end{aligned}$$

que geram a topologia superior do espaço $(\mathbb{R}, q)$ (ver a definição 2.1.5, a seguir) e

$$\begin{aligned} B^-(x,\epsilon) &= \{y \in \mathbb{R} : q(x,y) < \epsilon\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : max\{x-y, 0\} < \epsilon\} \\ &= (x-\epsilon, +\infty)\,, \end{aligned}$$

gerando a topologia inferior do espaço $(\mathbb{R}, q)$.

Além disso, vê-se que $(\mathbb{R}, q)$ é um espaço quase-métrico subseparável, dado que o espaço métrico $(\mathbb{R}, q^s)$ é separável.

Exemplo 2.1.2. *[24] Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função injetiva e $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ a função definida por $q(x,y) := \max\{f(x) - f(y), 0\}$. Então q é uma quase-métrica em X. Mostramos, a seguir, esta propriedade:*

(i) Sejam $x, y \in X$ tais que $q(x,y) = q(y,x) = 0$. Temos então

$$f(x) - f(y) \leq 0 \text{ e } f(y) - f(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

por ser f injetiva.

(ii) Sejam $x, y, z \in X$ então

$$\begin{aligned} q(x,z) &= \max\{f(x) - f(z), 0\} \\ &= \max\{f(x) - f(y) - f(z) + f(y), 0\} \\ &\leq max\{f(x) - f(y), 0\} + max\{f(y) - f(z), 0\} \\ &= q(x,y) + q(y,z). \end{aligned}$$

Vejamos, a título de exemplo, as bolas que geram a topologia superior no espaço (X, q):

$$\begin{aligned} B^+(x,\epsilon) &= \{y \in X : q(y,x) < \epsilon\} \\ &= \{y \in X : \max\{f(y) - f(x), 0\} < \epsilon\} \\ &= \{y \in X : f(y) < f(x) + \epsilon\}. \end{aligned}$$

Observação 2.1.1. *Considere, agora, o problema de otimização no espaço quase-métrico (X, q) do exemplo anterior, definido por* $\{\min f(x), \text{s. a } x \in X\}$*, suposto ter uma solução x^*. Dado o que acabamos de obter, temos que as soluções locais são dadas através das bolas $B^+[x^*, \epsilon]$. Além disto, $B^+(x^*, \epsilon)$ representam as soluções locais estritas.*

O exemplo 2.1.3 foi formulado utilizando a idéia central do exemplo 2.2 apresentada em [25].

Exemplo 2.1.3. *Tomando a quase-métrica do exemplo* 2.1.1*, definimos a seguinte função $\overline{q} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, como*

$$\overline{q}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \sqrt{q(x_1, x_2)^2 + q(y_1, y_2)^2}.$$

Mostramos, a seguir, que $\overline{q}$ é uma quase-métrica em $\mathbb{R}^2$.

(i) Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\overline{q}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \overline{q}\left((x_2, y_2), (x_1, y_1)\right) = 0$. Temos então

$$\sqrt{q(x_1, x_2)^2 + q(y_1, y_2)^2} = \sqrt{q(x_2, x_1)^2 + q(y_2, y_1)^2} = 0.$$

Mas

$$\sqrt{q(x_1, x_2)^2 + q(y_1, y_2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$$

e

$$\sqrt{q(x_2, x_1)^2 + q(y_2, y_1)^2} = 0 \Rightarrow x_2 \leq x_1 \wedge y_2 \leq y_1.$$

Portanto $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Reciprocamente, é claro que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Rightarrow \overline{q}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \overline{q}((x_2, y_2), (x_1, y_1))$.

(ii) Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$. *Então*

$$\begin{aligned}
\overline{q}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{q(x_1, x_2)^2 + q(y_1, y_2)^2} \\
&\leq \sqrt{(q(x_1, x_3) + q(y_1, y_3))^2 + (q(x_3, x_2) + q(y_3, y_2))^2} \\
&\leq \sqrt{q(x_1, x_3)^2 + q(y_1, y_3)^2} + \sqrt{q(x_3, x_2)^2 + q(y_3, y_2)^2} \\
&= \overline{q}((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + \overline{q}((x_3, y_3), (x_2, y_2))
\end{aligned}$$

Vejamos, a título de exemplo, as bolas que geram a topologia superior e a topologia inferior no espaço $(\mathbb{R}^2, \overline{q})$*:*

$$\begin{aligned}
B^+((\overline{x}, \overline{y}), \epsilon) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \overline{q}((x, y), (\overline{x}, \overline{y})) < \epsilon\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{q(x, \overline{x})^2 + q(y, \overline{y})^2} < \epsilon\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \overline{x})^2 + (y - \overline{y})^2 < \epsilon^2 \ ; \ x < \overline{x} + \epsilon \ ; \ y < \overline{y} + \epsilon\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^-((\overline{x}, \overline{y}), \epsilon) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \overline{q}((\overline{x}, \overline{y}), (x, y)) < \epsilon\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{q(\overline{x}, x)^2 + q(\overline{y}, y)^2} < \epsilon\right\} \\
&= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\overline{x} - x)^2 + (\overline{y} - y)^2 < \epsilon^2 \ ; \ x > \overline{x} - \epsilon \ ; \ y > \overline{y} - \epsilon\right\}
\end{aligned}$$

Nas figuras 2.2 *e* 2.1 *mostra-se as bolas obtidas. Observe-se que sua interseção gera uma bola métrica como foi mostrado no lema* 2.1.1.

Definição 2.1.5. *Seja* (X, q) *um espaço quase-métrico. Diremos que um subconjunto* A *de* X *é* q*-aberto em* (X, q) *se para cada* $x \in A$ *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $B^+(x, \epsilon) \subset A$.

Proposição 2.1.1. *Seja* (X, q) *um espaço quase-métrico. Então toda bola aberta superior* $B^+(x, \epsilon)$ *é um conjunto* q*-aberto em* (X, q)

Prova. Seja $a \in B^+(x, \epsilon)$ então $q(a, x) < \epsilon$ e portanto $s = \epsilon - q(a, x) > 0$. Afirmamos que $B^+(a, s) \subset B^+(x, \epsilon)$. De fato, se $y \in B^+(a, s)$ então $q(y, a) < s$, logo $q(y, x) \leq q(y, a) + q(a, x) < s + q(a, x) = \epsilon$. Assim se tem que $y \in B^+(x, \epsilon)$. Portanto $B^+(x, \epsilon)$ é um conjunto q-aberto em (X, q). ■

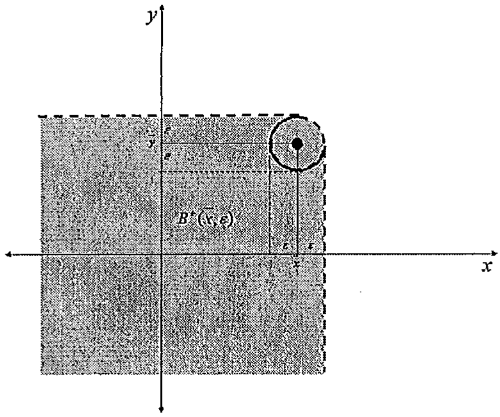

Figura 2.1: Bola aberta superior $B^+((\overline{x},\overline{x}))$.

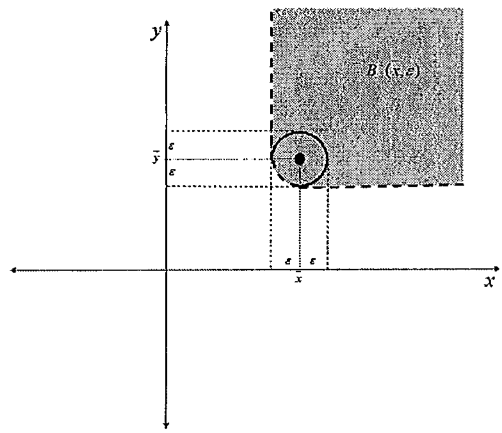

Figura 2.2: Bola aberta inferior $B^-((\overline{x},\overline{x}))$.

Proposição 2.1.2. *O conjunto $\mathcal{U}$ formado pelos conjuntos q-abertos em (X,q) é uma topologia sobre X, isto é, valem as seguintes propriedades:*

(1) $X \in \mathcal{U}$ *e* $\emptyset \in \mathcal{U}$;

(2) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{U}$ *então* $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{U}$;

(3) Se $A_\lambda \in \mathcal{U}$, $\forall \lambda \in L$ *então* $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \mathcal{U}$.

Prova.

(1) É claro que X e $\emptyset$ são q-abertos.

(2) Seja $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$. Como estes conjuntos são q-abertos, existem $r_1 > 0, r_2 > 0, \ldots, r_n > 0$ tais que $B^+(a, r_1) \subset A_1, B^+(a, r_2) \subset A_2, \ldots, B^+(a, r_n) \subset A_n$.

Seja $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, então $B^+(a, r) \subset B^+(a, r_i) \subset A_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim $B^+(a, r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. Portanto $\bigcap_{i=1}^n A_i$ é q-aberto em (X, q).

(3) Seja $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ então existe um índice $\lambda \in L$ tal que $a \in A_\lambda$. Como este conjunto é q-aberto, há uma bola $B^+(a, r) \subset A_\lambda$. Isto mostra que $B^+(a, r) \subset A$. Portanto A é q-aberto em (X, q). ∎

Definição 2.1.6. *A topologia, acima mencionada, é dita a topologia superior no espaço quase-métrico (X, q).*

Analogamente, considerando as bolas $B^-(x, \epsilon)$ em lugar das bolas $B^+(x, \epsilon)$ na definiçaõ 2.1.5, obtém-se uma topologia sobre X, dita a topologia inferior no espaço quase-métrico

(X, q). Como já supracitado, nesse capítulo introduzimos as definições a respeito do espaço quase-métrico. Outrossim, se faz necessário apresentar também as relações com o espaço métrico advindas dessas definições. Dessa forma, a seguir são apresentados diversos lemas com o objetivo precípuo de expor tais relações.

Definição 2.1.7. *Seja A um subconjunto do espaço (X, q). Diz-se que o subconjunto A é* ***limitado superiormente*** *(inferiormente), se existem $\overline{x} \in X$ e um $\epsilon > 0$ tais que*

$$A \subset B^{+}[\overline{x}, \epsilon] \quad (A \subset B^{-}[\overline{x}, \epsilon])$$

O seguinte lema mostra a relação que existe entre um subconjunto limitado superiormente e inferiormente no espaço (X, q) e um subconjunto limitado no espaço (X, q^{s}).

Lema 2.1.2. *Seja A um subconjunto de X. A é limitado superiormente em (X, q) e limitado inferiormente em (X, q^{*}) se, e somente se, A é limitado no espaço métrico (X, q^{s}).*

Prova. Se A é limitado superiormente e inferiormente, então existem $x_1, x_2 \in X$ e $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que $A \subset B^{+}[x_1, \epsilon_1]$ e $A \subset B^{-}[x_2, \epsilon_2]$. Decorre que $A \subset B^{+}[x_1, \epsilon_1] \cap B^{-}[x_2, \epsilon_2]$. Portanto $A \subset B^{s}[x_1, \max\{\epsilon_1, q(x_1, x_2) + \epsilon_2\}]$, mostrando que A é limitado.

Agora mostramos a recíproca. Se A é limitado existem um $x \in X$ e $\epsilon > 0$ tais que $A \subset B^{s}[x, \epsilon]$; logo, pelo lema 2.1.1, temos que $A \subset B^{+}[x, \epsilon]$ e $A \subset B^{-}[x, \epsilon]$. Portanto A é limitado superiormente e limitado inferiormente. ■

Proposição 2.1.3. *Um ponto $a \in A$ é um ponto* ***q-interior*** *(isto é, um ponto interior na topologia superior de (X, q)) se, e somente se, existe $r > 0$ tal que $B^{+}(a, r) \subset A$.*

Prova. Imediata. ■

Chama-se o **q-interior** de A em X ao conjunto $int_q A$ formado pelos pontos q-interiores de A, ou seja

$$int_q A = \{a \in X : B^{+}(a, r) \subset A \text{ , } para\ algum\ r > 0\}.$$

Evidentemente, $int_q A \subset A$.

A seguir mostra-se a relação entre um q-ponto interior no espaço (X, q) e um ponto interior no espaço (X, q^{s}).

Lema 2.1.3. *Seja A um subconjunto de X. Se a é q-ponto interior de A em (X, q) e q^{*}-ponto interior de A em (X, q^{*}) então a é um q^{s}-ponto interior de A em (X, q^{s}).*

Prova. Como a é um q-ponto interior de A, pela definição 2.1.3 existe $r_1 > 0$ tal que $B^+(a, r_1) \subset A$ e como a também é q^*-ponto interior de A, existe $r_2 > 0$ tal que $B^-(a, r_2) \subset A$. Tomando $r = \min\{r_1, r_2\}$ segue que $B^+(a, r) \subset B^+(a, r_1) \subset A$ e $B^-(a, r) \subset B^-(a, r_2) \subset A$. Logo, pelo lema 2.1.1 temos que $B^s(a, r) \subset A$. Portanto, a é um q^s-ponto interior de A em (X, q^s). ■

A recíproca em geral não é verdadeira, como é mostrado no seguinte exemplo.

Exemplo 2.1.4. *Considere as bolas obtidas no exemplo* 2.1.1, $B^+(x, \epsilon) = (-\infty, x + \epsilon)$ *e* $B^-(x, \epsilon) = (x - \epsilon, +\infty)$. *Sejam* $A = (-1, 1)$ *e* $x = 0$ *um* q^s*-ponto interior de* A *em* $(\mathbb{R}, q^s)$. *Pode-se observar na figura* 2.3 *que a bola* $B^+(0, \epsilon)$ *não está contida no conjunto* A *para qualquer valor positivo de* ϵ. *Portanto o ponto* $x = 0$ *não é um* q*-ponto interior de* A *em* $(\mathbb{R}, q)$.

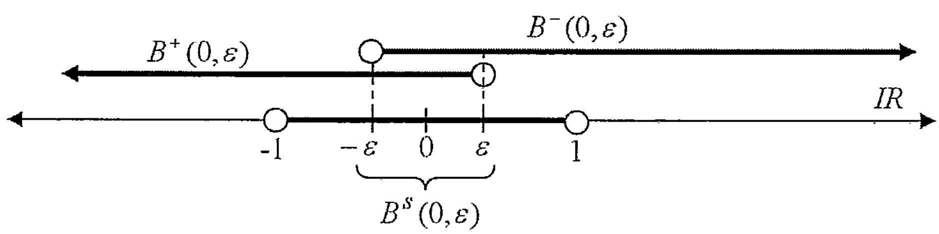

Figura 2.3: $B^+(0, \epsilon) \not\subset A$

Proposição 2.1.4. *Um subconjunto* A *do espaço* (X, q) *é* ***q*-aberto** *(iso é, um conjunto aberto na topologia superior de* (X, q)*) se, e somente se, todos seus pontos são* q*-interiores.*

Agora vejamos a relação entre um conjunto q-aberto no espaço (X, q) e um conjunto aberto no espaço (X, q^s).

Lema 2.1.4. *Se o conjunto* $A \subset X$ *é* q*-aberto em* (X, q) *e* q^**-aberto em* (X, q^*) *então* A *é* q^s*-aberto em* (X, q^s).

Prova. Seja $x \in A$. Por hipótese, x é um q-ponto interior de A e um q^*-ponto interior de A. Pelo lema 2.1.3 conclui-se que x é um q^s-ponto interior de A. Portanto, A é q^s-aberto em (X, q^s). ■

Definição 2.1.8. *O conjunto* $\partial_q A$ *é* ***q*-fronteira** *do conjunto* $A \subset X$ *se, e somente se, toda bola aberta superior de centro em* $b \in X$ *contém pelo menos um ponto de* A *e um ponto do complementar* $X \setminus A$.

Proposição 2.1.5. *Um ponto $a \in X$ é um ponto q-**aderente** ao conjunto A (isto é, um ponto aderente na topologia superior de (X, q)) se, e somente se,* $q(A, a) = \inf\{q(x, a); x \in A\} = 0$.

Isto que dizer que, para cada $\epsilon > 0$, pode-se encontrar um $x \in A$ tal que $q(x, a) < \epsilon$.

No seguinte lema é mostrada a relação entre um q-ponto aderente no espaço (X, q) e um q^s-ponto aderente no espaço (X, q^s)

Lema 2.1.5. *Seja $A \subset X$. Um ponto $a \in X$ é q-ponto aderente a A em (X, q) e q^*-ponto aderente a A em (X, q^*) se, e somente se, a é q^s-ponto aderente a A em (X, q^s).*

Prova. Seja a um q-ponto aderente e q^*-ponto aderente, então $\forall \epsilon > 0$, tem-se que $B^+(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, e $B^-(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Assim pelo lema 2.1.1 tem-se que $B^s(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Portanto a é q^s-ponto aderente a A em (X, q^s).

Mostramos a recíproca. Seja a um q^s-ponto aderente a A em (X, q^s) então $\forall \epsilon > 0$ tem-se $B^s(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Pelo lema 2.1.1 temos $B^+(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ e $B^-(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Portanto a é um q-ponto aderente a A em (X, q) e um q^*-ponto aderente a A em (X, q^*). ■

Definição 2.1.9. *O conjunto $cl_q A$ é o **q-fecho** do conjunto $A \subset X$ se, e somente se, todos seus elementos são aderentes a A. Isto é*

$$cl_q A = \{a \in X : q(A, a) = 0\}.$$

*O conjunto A diz-se **q-fechado** se $A = cl_q A$.*

A seguir mostra-se como está relacionado um conjunto q-fechado no espaço (X, q) e um conjunto q^s-fechado no espaço (X, q^s)

Lema 2.1.6. *Um subconjunto A de X é q^s-fechado em (X, q^s) se, e somente se, A é q-fechado em (X, q) e q^*-fechado em (X, q^*).*

Prova. Veja lema 2.1.5. ■

Proposição 2.1.6. *Um ponto $a \in X$ é um ponto q-**acumulação** de A (isto é, um ponto de acumulação na topologia superior de (X, q)) se, e somente se, toda bola aberta superior com centro em a contém algum ponto de A, diferente de a.*

Chama-se o q-**derivado** de A em X ao conjunto A'_q formado pelos pontos de q-acumulação de A, ou seja

$$A'_q = \{a \in X : (B^+(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset \text{ para todo } r > 0\}$$

O lema a seguir apresenta uma relação entre q-ponto de acumulação no espaço (X, q) e q^s-ponto de acumulação no espaço (X, q^s).

Lema 2.1.7. *Seja $A \subset X$, $a \in X$ é um q^s-ponto de acumulação de A em (X, q^s) se, e somente se, a é um q-ponto de acumulação de A em (X, q) e um q^*-ponto de acumulação de A em (X, q^*).*

Prova. Seja $a \in X$ um q^s-ponto de acumulação de A em (X, q^s) e $r > 0$ arbitrário. Então $(B^s(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$, (pela definição 2.1.6) e pelo lema 2.1.1 temos que $B^s(a, r) \subset B^+(a, r)$ e $B^s(a, r) \subset B^-(a, r)$. Portanto $(B^+(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$ e $(B^-(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$. Assim a é um q-ponto de acumulação de A em (X, q) e um q^*-ponto de acumulação de A em (X, q^*).

De maneira semelhante prova-se a recíproca. ∎

Definição 2.1.10. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida em X é **semicontínua inferior** (sci) no ponto $a \in X$ se $\forall \epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $q(x, a) < \delta$ implica $f(a) - f(x) < \epsilon$.*

Definição 2.1.11. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico, uma função $f : X \to \mathbb{R}$ definida em X é **semicontínua superior** (scs) no ponto $a \in X$ se $\forall \epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $q(x, a) < \delta$ implica $f(x) - f(a) < \epsilon$.*

O seguinte lema mostra que continuidade em (X, q^s) equivale à semicontinuidade inferior e superior em (X, q).

Lema 2.1.8. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em (X, q^s) se, e somente se, f é sci em (X, q) e scs em (X, q^*).*

Prova. Seja f contínua em (X, q^s) e $a \in X$, então $\forall \epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $q^s(x, a) < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como $q^s(x, a) = \max\{q(x, a), q^*(x, a)\}$ tem-se que $q(x, a) < \delta$ implica $f(a) - f(x) < \epsilon$ e $q^*(x, a) = q(a, x) < \delta$ implica $f(x) - f(a) < \epsilon$. Portanto f é *sci* em (X, q) e *scs* em (X, q^*).

Mostremos agora a recíproca. Suponha f *sci* em (X, q) e *scs* em (X, q^*) e seja $a \in X$. Então $\forall \epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que $q(x, a) < \delta_1$ implica $f(a) - f(x) < \epsilon$ e $q(a, x) < \delta_2$ implica $f(x) - f(a) < \epsilon$. Assim, $q^s(x, a) < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ implica $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Portanto f é contínua em (X, q^s). ∎

Exemplo 2.1.5. *Seja $f : (\mathbb{R}, q) \to \mathbb{R}$, uma função definida como $f(x) = e^{-x}$. Sejam $a = 1$ e $q(x,y) = \max\{x - y, 0\}$ a quase-métrica do exemplo 2.1.1. Para $r > 0$ arbitrário, consideremos a bola $B^+(1,r) = (-\infty, 1 + r)$. Seja $x = -10 \in B^+(1,r)$. Pode-se ver que $f(-10) - f(1) = e^{10} - e^{-1} \geq \epsilon$, para um $\epsilon > 0$ dado. Portanto f não é scs em $a = 1$, em (X, q).*

Por outro lado, seja $\epsilon > 0$ arbitrário e seja $r > 0$ tal $e^{-1}(1 - e^{-r}) = \epsilon$. Para todo $x \in B^+(1,r)$, temos que $f(1) - f(-x) = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1}(1 - e^{-r}) = \epsilon$. Portanto f é sci em $a = 1$.(ver figura 2.4)

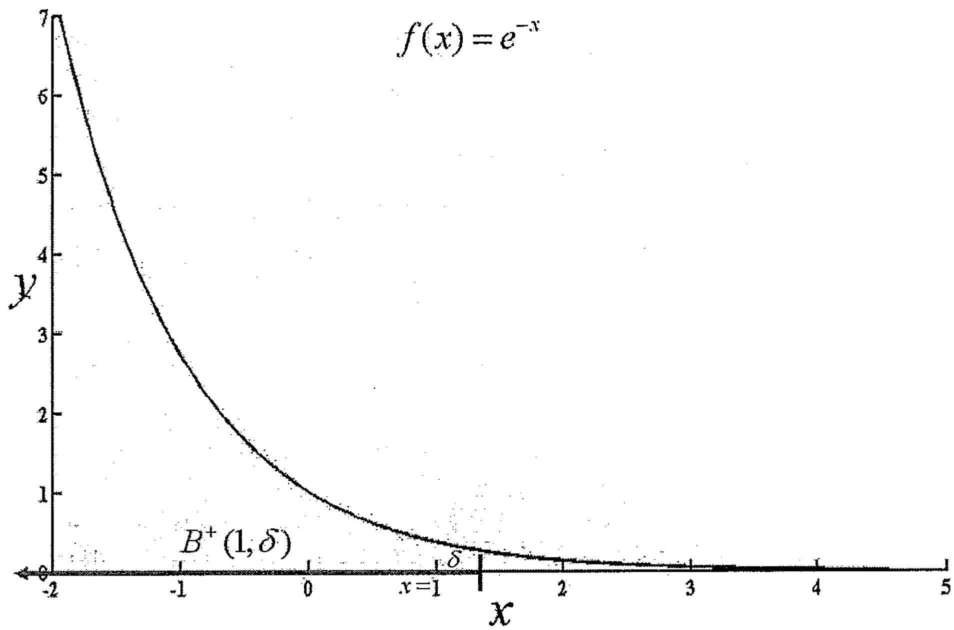

Figura 2.4: Função semicontínua inferior em $a = 1$

Definição 2.1.12. *[10, 8] Um cone (ou espaço semilinear) sobre $\mathbb{R}_+$ é uma tripla $(X, +, \cdot)$ onde $(X, +)$ é um semigrupo abeliano com elemento neutro $0 \in X$ e $\cdot$ é uma função $\cdot : \mathbb{R}_{++} \times X \to X$, tais que, $\forall x, y \in X$ e $a, b \in \mathbb{R}_{++}$ as seguintes relações são satisfeitas:*

(i) $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$;

(ii) $(a + b) \cdot x = (a \cdot x) + (b \cdot x)$;

(iii) $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$;

(iv) $1 \cdot x = x$.

Quando um elemento $x \in X$ admite uma inversa, ela é denotada por $-x$.

Definição 2.1.13. *[6] Uma quase-norma sobre um cone (ou espaço semilinear) $(X, +, \cdot)$ em $\mathbb{R}_+$ é uma função $P_q : X \to \mathbb{R}_+$ tal que $\forall x, y \in X$ e $a \in \mathbb{R}_{++}$:*

(i) $x = 0 \Leftrightarrow -x \in X$ *e* $P_q(x) = P_q(-x) = 0$;

(ii) $P_q(a \cdot x) = a \cdot P_q(x)$;

(iii) $P_q(x + y) \leq P_q(x) + P_q(y)$.

O par (X, P_q) é chamado espaço semilinear quase-normado.

Definição 2.1.14. *[14] Uma norma no cone $(X, +, \cdot)$ é uma função $P_q : X \to \mathbb{R}_+$ tal que*

(i) $x = 0 \Leftrightarrow P_q(x) = 0$; *e além disso os items (ii)-(iii) da definição* 2.1.13 *são satisfeitos.*

Segundo [14], um cone quase-normado é o par (X, P_q) tal que X é um cone e P_q é uma quase-norma em X.

Se $(X, +, \cdot)$ é um espaço linear e P_q é uma quase-norma em X então o par (X, P_q) é chamado espaço linear quase-normado.

Se P_q é uma quase-norma em um espaço linear X, então a função $P_q^* : X \to \mathbb{R}_+$ definida como $P_q^*(x) = P_q(-x)$, $\forall x \in X$ é também uma quase-norma em X, e a função $P_q^s(x) = \max\{P_q(x), P_q(-x)\}$, $\forall x \in X$ é uma norma em X.

Além disso, cada quase-norma P_q em um espaço linear X induz uma quase-métrica q em X definida por:

$$q(x, y) = P_q(x - y)\ ,\ \forall x, y \in X.$$

2.2 Extremo em um Espaço Quase-Métrico

Nesta seção apresenta-se os conceitos de pontos máximos e mínimos de um subconjunto A do espaço quase-métrico (X, q) assim como uma caracterização para esses pontos.

Definição 2.2.1. *[5] Seja (X, q) um espaço quase-métrico, define-se, para cada $y \in X$, o seguinte conjunto*

$$K_q(y) = \{x \in X : q(x, y) = 0\}. \tag{2.3}$$

Denota-se, também, por $\mathring{K}_q(y)$ o conjunto interior de $K_q(y)$ no espaço quase-métrico (X, q) e $\mathring{K}_s(y)$ representa o interior de $K_{q^s}(y)$ no espaço métrico (X, q^s).

Exemplo 2.2.1. *Considere a quase-métrica do exemplo* 2.1.1, $q(x, y) = \max\{x - y, 0\}$. *Obtemos:*

$$\begin{aligned} K_q(y) &= \{x \in \mathbb{R} : \max\{x - y, 0\} = 0\} \\ &= (-\infty, y] \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2. *Seja* $q(x, y)$ *a quase-métrica do exemplo* 2.1.2, $q(x, y) = \max\{f(x) - f(y), 0\}$. *Temos*

$$\begin{aligned} K_q(y) &= \{x \in X : \max\{f(x) - f(y), 0\} = 0\} \\ &= \{x \in X : f(x) \le f(y)\} \end{aligned}$$

Observação 2.2.1. *Da mesma forma que na Observação 2.1.1, consideramos o problema com solução* x^*, $\{\min f(x), \text{s. a } x \in X\}$. *É então evidente que se* $x^* \in K_q(y)$, *para todo* $y \in X$, *então* x^* *é uma solução global para o problema de otimização.*

Exemplo 2.2.3. *Seja* $\overline{q}\,((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ *a quase-métrica do exemplo* 2.1.3,

$$\overline{q}\,((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{q(x_1, x_2)^2 + q(y_1, y_2)^2}.$$

Temos

$$\begin{aligned} K_{\overline{q}}\,((\overline{x}, \overline{y}), (x, y)) &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{q(x, \overline{x})^2 + q(y, \overline{y})^2} = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \overline{x} \le 0 \wedge y - \overline{y} \le 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le \overline{x} \wedge y \le \overline{y}\right\} \end{aligned}$$

Na figura 2.5 é apresentado o conjunto $K_{\overline{q}}\,((\overline{x}, \overline{y}), (x, y))$.

Através do conjunto $K_q(y)$ podemos definir as seguintes relações binárias:

Definição 2.2.2. *Relações binarias* K_q*-dependentes.*

(i) $x \le_q y \Leftrightarrow x \in K_q(y)$;

(ii) $x <_q y \Leftrightarrow x \in K_q(y)$ *e* $x \neq y$;

(iii) $x \ll_q y \Leftrightarrow x \in \mathring{K}_q(y)$;

(iv) $x \ll_s y \Leftrightarrow x \in \mathring{K}_s(y)$.

A seguir apresenta-se algumas propriedades, deduzidas destas relações segundo [5].

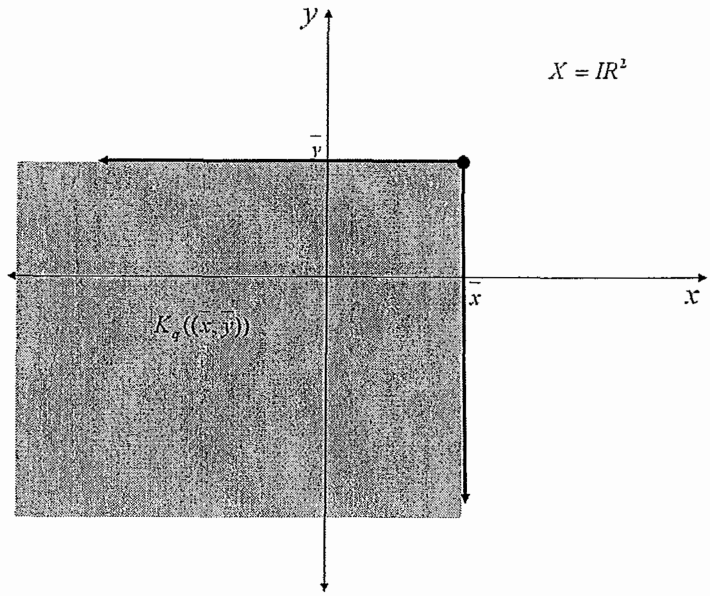

Figura 2.5: Conjunto $K_{\overline{q}}((\overline{x},\overline{y}),(x,y))$ sobre $(\mathbb{R}^2,\overline{q})$.

Lema 2.2.1. *Se $x \ll_q y$, então $x \leq_q y$.*

Prova. Evidente, porque $\overset{\circ}{K}_q(y) \subset K_q(y)$. ■

Lema 2.2.2. *Se $x \ll_q y$ e $y \leq_q z$ então $x \ll_q z$.*

Prova. Seja $x \ll_q y$, isto é, $x \in \overset{\circ}{K}_q(y)$; existe portanto uma bola $B^+(x,\delta)$ tal que $B^+(x,\delta) \subset K_q(y)$.

Por outro lado

$$q(x',z) \leq q(x',y) + q(y,z)\ ,\ \forall x' \in B^+(x,\delta).$$

Com isso, tem-se que $q(x',z) = 0$, $\forall x' \in B^+(x,\delta)$, isto é $B^+(x,\delta) \subset K_q(z)$. Conseqüentemente $x \in \overset{\circ}{K}_q(z)$, significando, por definição, que $x \ll_q z$. ■

Teorema 2.2.1. *A relação binária " $\ll_q$ " é assimétrica e transitiva.*

Prova.

1. Assimetria: se $y \ll_q x$ e $x \ll_q y$, então $q(x,y) = q(y,x) = 0$, ou seja $x = y$.

2. Transitividade: se $x \ll_q y$ e $y \ll_q z$, temos do lema 2.2.1 $y \leq_q z$; em seguida, aplicando o lema 2.2.2, se conclui que $x \ll_q z$. ■

Exemplo 2.2.4. *Sejam $y \ll_q x$ e $x \ll_q y$ então $y \in \overset{\circ}{K}_q(x)$ e $x \in \overset{\circ}{K}_q(y)$. Considere agora a quase-métrica do exemplo* 2.1.2*: temos, simultaneamente, para $\epsilon > 0$ suficientemente* *pequeno, $f(y) < f(x) + \epsilon$ e $f(x) < f(y) + \epsilon$, logo $f(x) = f(y)$. Confirmamos assim a assimetria da relação " $\ll_q$ ".*

Lema 2.2.3. *Se $x \ll_s y$ então $x \leq_q y$.*

Prova. Se $x \ll_s y$, (iv), da Definição 2.2.2, implica em $x \in \mathring{K}_s(y) \subset K_q(y)$, utilizando (i) da Definição 2.2.2, conclui-se que $x \leq_q y$. ∎

Lema 2.2.4. *Se $x \ll_q y$ então $x \ll_s y$.*

Prova. Seja $x \ll_q y$, por (iii), da Definição 2.2.2, tem-se que $x \in \mathring{K}_q(y)$, então existe $B^+(x,\delta) \subset K_q(y)$. Por outro lado, $B_s(x,\delta) = B^+(x,\delta) \cap B^-(x,\delta) \subset K_s(y)$. Conseqüentemente, $x \in \mathring{K}_s(y)$ e por (iv) conclui-se que $x \ll_s y$. ∎

Lema 2.2.5. *Se $x \ll_s y$ e $y \leq_q z$ então $x \ll_s z$.*

Teorema 2.2.2. *A relação binária " $\ll_s$ " é assimétrica e transitiva.*

Definição 2.2.3. *[5] Seja A um subconjunto do espaço (X, q)*

$$\min A = \left\{\overline{x} \in A : A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}\right\} \tag{2.4}$$

$$w \min A = \left\{\overline{x} \in A : A \cap \mathring{K}_q(\overline{x}) = \emptyset\right\} \tag{2.5}$$

$$p \min A = \left\{\overline{x} \in A : cl_q\left(\bigcup_{x \in A} K_q(x)\right) \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}\right\} \tag{2.6}$$

Os pontos de $\min A$, $w \min A$ e $p \min A$ são chamados pontos mínimos, mínimos fracos e mínimos puros respectivamente. Na expressão deste último, o fecho é determinado pela quase-métrica q, segundo a definição 2.1.9.

Exemplo 2.2.5. *Considerando a quase-métrica do exemplo 2.1.1, seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo em $\mathbb{R}$. Assim, $\min I = \left\{\overline{x} \in [a, b] : [a, b] \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}\right\}$, onde*

$$\begin{aligned} K_q(\overline{x}) &= \{y \in \mathbb{R} : q(y, \overline{x}) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : \max\{y - \overline{x}, 0\} = 0\} \\ &= (-\infty, \overline{x}]. \end{aligned}$$

Portanto $I \cap K_q(\overline{x}) = [a, b] \cap (-\infty, \overline{x}] = [a, \overline{x}]$, $\forall \overline{x} \in [a, b]$, e $[a, b] \cap (-\infty, \overline{x}] = \{\overline{x}\}$ se $\overline{x} = a$.

Exemplo 2.2.6. *Seja $q(x,y)$ a quase-métrica do exemplo* 2.1.2, $A = [1,2]\times[1,2]$, $X = \mathbb{R}^2$ *e $f(x,y) = x - y$. Com estes dados, obtemos*

$$\min A = \left\{(\overline{x},\overline{y}) \in A : A \cap K_q(\overline{x},\overline{y}) = \{(\overline{x},\overline{y})\}\right\},$$

onde

$$\begin{aligned} K_q(\overline{x},\overline{y}) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{f(x,y) - f(\overline{x},\overline{y}), 0\} = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq f(\overline{x},\overline{y})\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq \overline{x} - \overline{y}\right\}. \end{aligned}$$

É fácil ver que $A \cap K_q(\overline{x},\overline{y})$ equivale à desigualdade em $\mathbb{R}^2$, $x \leq y + (\overline{x} - \overline{y})$, que determina a única interseção $\overline{x} = 1$ e $\overline{y} = 2$, como mostra a figura 2.6.

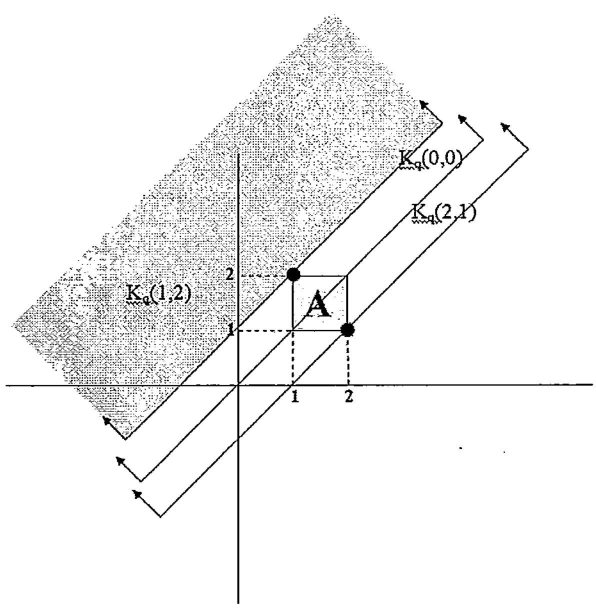

Figura 2.6: O ponto $\min A$.

Os 3 lemas a seguir caracterizam os pontos $\min A$, $w\min A$ e $p\min A$ do conjunto $A \subset X$. Suas demonstrações são similares, por isto apresentaremos apenas a do primeiro.

Lema 2.2.6. *[5] Seja A um subconjunto do espaço (X,q). Então $\overline{x} \in \min A$ se e somente se*

(i) $\overline{x} \in A$;

(ii) $y \in A,\ y \leq_q \overline{x} \Rightarrow y = \overline{x}$.

Prova. Seja $\overline{x} \in \min A$, da definição, em (2.4), tem-se que $A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. Em adição, $y \in A$, $y \leq_q \overline{x}$, conseqüentemente $y \in A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. Portanto $y = \overline{x}$.

Agora, $y \in A$ e $y \leq_q \overline{x}$. Temos $y \in A \cap K_q(\overline{x})$. Vale ainda $y = \overline{x}$, $\forall y \in A$, de que se conclui que $\overline{x} \in A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. ∎

Lema 2.2.7. *[5] Seja A um subconjunto do espaço (X, q). Então $\overline{x} \in w\min A$ se e somente se*

(i) $\overline{x} \in A$;

(ii) $y \in A$, $y \leq_q \overline{x} \Rightarrow y \nless_q \overline{x}$.

Lema 2.2.8. *[5] Seja A um subconjunto do espaço (X, q). Então $\overline{x} \in p\min A$ se e somente se*

(i) $\overline{x} \in A$;

(ii) $y \in cl_q\left(\bigcup_{x \in A} K_q(x)\right), y \leq_q \overline{x} \Rightarrow y = \overline{x}$.

Analogamente aos conceitos apresentados de mínimo de subconjuntos, define-se também, no espaço quase-métrico conjugado, o máximo de subconjuntos.

Definição 2.2.4. *[5] Seja (X, q) um espaço quase-métrico, (X, q^*) o espaço quase-métrico conjugado e $A \subset X$. Definimos*

$$\max A = \left\{\overline{x} \in A : A \cap K_q^*(\overline{x}) = \{\overline{x}\}\right\} \tag{2.7}$$

$$w\max A = \left\{\overline{x} \in A : A \cap \mathring{K}_q^*(\overline{x}) = \emptyset\right\} \tag{2.8}$$

$$p\max A = \left\{\overline{x} \in A : cl_{q^*}\left(\bigcup_{x \in A} K_q^*(x)\right) \cap K_q^*(\overline{x}) = \{\overline{x}\}\right\}, \tag{2.9}$$

onde o conjunto $K_q^*(y)$ é dado por

$$K_q^*(y) = \{x \in X : q(y, x) = 0\}. \tag{2.10}$$

Os pontos de $\max A$, $w\max A$ e $p\max A$ são chamados pontos máximos, máximos fracos e máximos puro, respectivamente.

Exemplo 2.2.7. *Seja* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *e tomando a quase-métrica do exemplo* 2.1.3, *então* $\min A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, y \leq 0\}$. *Os pontos mínimos estão na fronteira do terceiro quadrante. Reciprocamente os pontos de máximo* $\max A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ *se encontram na fronteira do quadrante positivo como é mostrado na figura* 2.7.

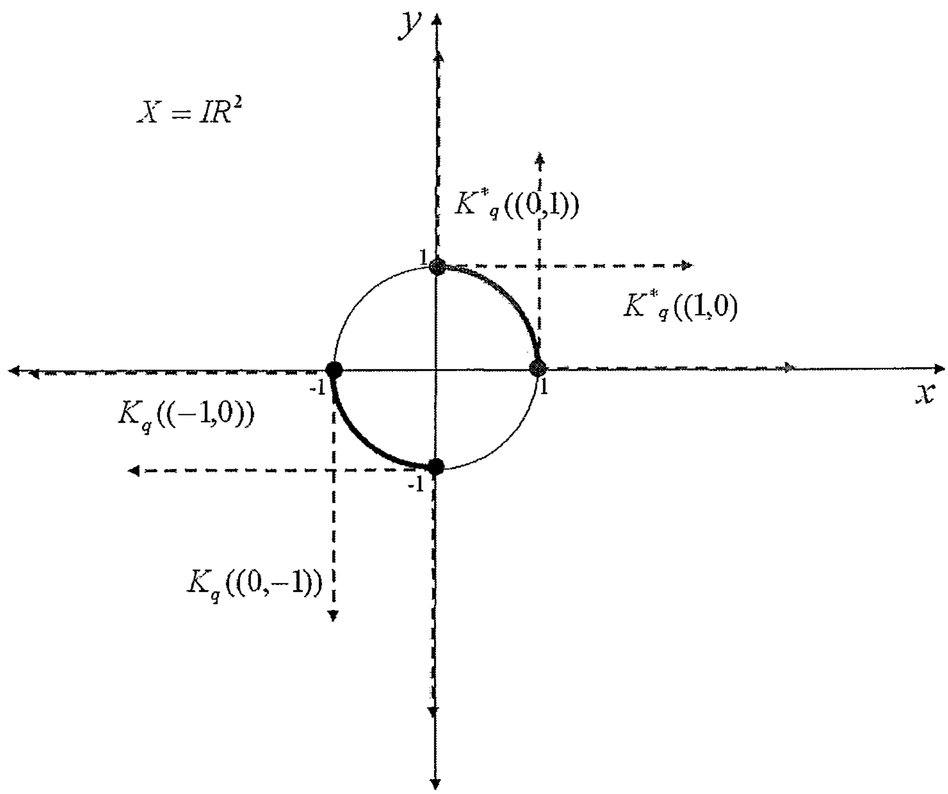

Figura 2.7: Pontos mínimos e máximos do conjunto A sobre o espaço quase-métrico $(\mathbb{R}^2, \overline{q})$.

Exemplo 2.2.8. *Seja A o conjunto mostrado na figura* 2.8. *Considere a quase-métrica do exemplo* 2.1.3. *Apresentamos no gráfico os pontos mínimos fracos e máximos fracos. A linha pontilhada do conjunto A representa os pontos mínimo fracos e a linha cheia os pontos de máximo fracos.*

A seguir apresentamos os conceitos de ínfimo, determinados pela topologia superior do espaço (X, q).

Definição 2.2.5. *[5] Seja A um subconjunto do espaço* (X, q).

(i) $\inf A := \min cl_q A$ *(o ínfimo de A);*

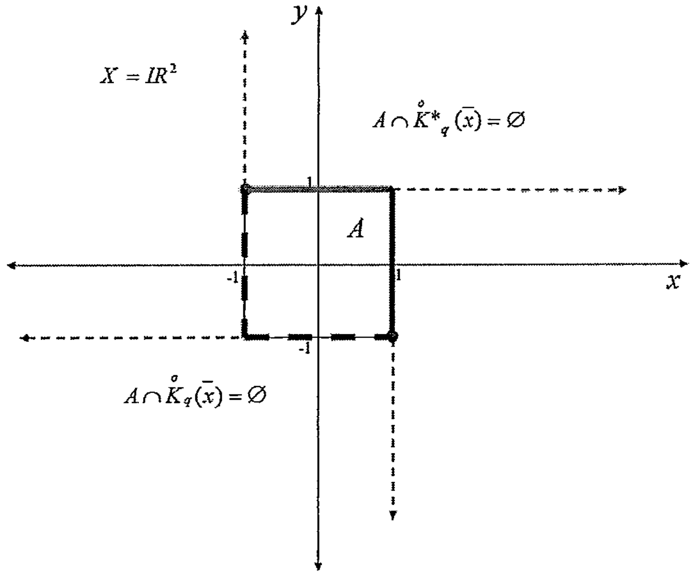

Figura 2.8: Pontos mínimos e máximos do conjunto A sobre o espaço quase-métrico $(\mathbb{R}^2, q)$.

(ii) $w \inf A := w \min cl_q A$ *(o ínfimo fraco de A);*

(iii) $\sup A := \max cl_{q^*} A$ *(o supremo de A);*

(iv) $w \sup A := w \max cl_{q^*} A$ *(o supremo fraco de A).*

A seguir denotam-se os seguintes conjuntos:

(i) $K_q(A) := \bigcup_{x \in A} K_q(x)$;

(ii) $K_q^*(A) := \bigcup_{x \in A} K_q^*(x)$.

Lema 2.2.9. *[5]* $K_q(y) \cap K_q^*(y) = \{y\}$.

Prova. Seja $x \in K_q(y) \cap K_q^*(y)$, segue que $q(x,y) = q(y,x) = 0$, então $x = y \in \{y\}$. Portanto $x \in \{y\}$. Por outro lado, seja $x \in \{y\}$, segue que $x = y$, então $x \in K_q(y) \cap K_q^*(y)$. ∎

O lema 2.2.10 apresentado por Shao-Bai et al. em [5], considera verdadeira a seguinte relação $K_q(A) \cap K_q^*(A) = A$. Entretanto, a referida relação não é verdadeira em geral, como mostra o exemplo abaixo. Ainda assim o teorema 2.2.3, também apresentado em [5], continua válido, como provamos a seguir.

Lema 2.2.10. $K_q(A) \cap K_q^*(A) \supset A$.

Prova. Dado A, pela definição de $K_q(A)$, pode-se afirmar que $A \subset K_q(A)$. Do mesmo modo $A \subset K_q^*(A)$, então $A \subset K_q(A) \cap K_q^*(A)$. ■

A recíproca não é necessariamente verdadeira. De fato, de $y \in K_q(A) \cap K_q^*(A)$ não se pode afirmar em geral que existe $x \in A$ tal que $y \in K_q(x)$ e $y \in K_q^*(x)$, como é mostrado na figura 2.9. Utilizando a quase-métrica $\overline{q}(x, y)$ do exemplo 2.1.3, seja $y = (0.9, -0.9) \in K_{\overline{q}}(A) \cap K_{\overline{q}}^*(A)$. Vemos que existe $x = (1, 0) \in A$ tal que $\overline{q}(y, x) = 0$ e também existe um $z = (0, -1) \in A$ tal que $\overline{q}(z, y) = 0$. Portanto $y \in K_{\overline{q}}(x) \cap K_{\overline{q}}^*(z) \subset K_{\overline{q}}(A) \cap K_{\overline{q}}^*(A)$ no entanto $y \notin A$.

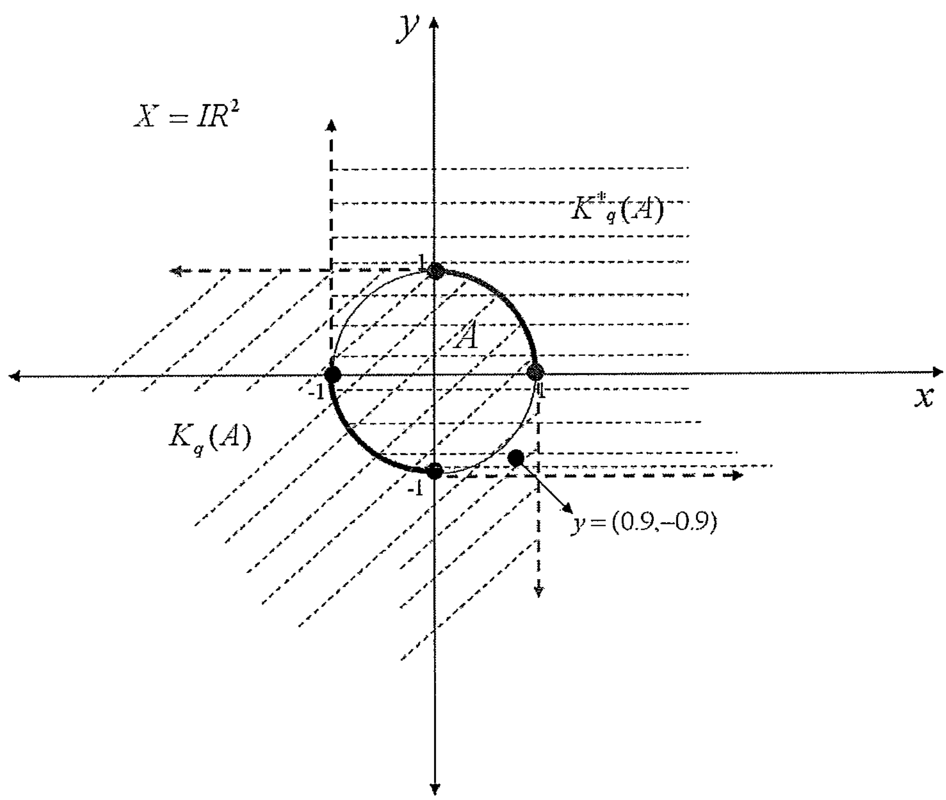

Figura 2.9: $K_{\overline{q}}(A) \cap K_{\overline{q}}^*(A) \not\subset A$.

Os teoremas a seguir mostram as relações que existem entre os pontos extremos de um conjunto $A \subset X$ e seu conjunto $K_q(A)$.

Teorema 2.2.3. *[5] Seja A um subconjunto do espaço* (X, q). *Então* $\min A = \min K_q^*(A)$.

Prova.

(i) $\min A \subset \min K_q^*(A)$:

Seja $\overline{x} \in \min A$, da definição, em (2.4), tem-se $\overline{x} \in A$, $A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$ e pelo lema 2.2.10 tem-se que $\overline{x} \in A \subset K_q^*(A)$, então $\overline{x} \in K_q^*(A) \cap K_q(\overline{x})$.

Agora deve-se provar que $\overline{x}$ é o único elemento de $K_q^*(A) \cap K_q(\overline{x})$. Seja $u \in K_q^*(A) \cap K_q(\overline{x})$, então existe $c \in A$, tal que $u \in K_q^*(c)$ e $u \in K_q(\overline{x})$, assim tem-se que $q(c,u) = 0 \ \wedge \ q(u,\overline{x}) = 0$.

Por outro lado, $q(c,\overline{x}) \leq q(c,u) + q(u,\overline{x}) = 0$, o que implica $q(c,\overline{x}) = 0$, isto é, $c \in K_q(\overline{x})$. Daí, $c \in A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\} \Rightarrow c = \overline{x} \Rightarrow u = \overline{x}$. Isto implica que $K_q^*(A) \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. Portanto $\overline{x} \in \min K_q^*(A)$.

(ii) $\min K_q^*(A) \subset \min A$:

Se $\overline{x} \in \min K_q^*(A)$, então $\overline{x} \in K_q^*(A)$, $K_q^*(A) \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. Como $\overline{x} \in K_q^*(A)$, então existe $c \in A \subset K_q^*(A)$ tal que $\overline{x} \in K_q^*(c)$, $c \leq_q \overline{x}$. Assim $c \in K_q^*(A) \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. Portanto $\overline{x} \in A$ e $A \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$. ∎

Analogamente se tem o seguinte teorema.

Teorema 2.2.4. *[5] Seja A um subconjunto do espaço (X,q). Então* $\max A = \max K_q(A)$.

Lema 2.2.11. *[5] Seja q a quase-métrica do espaço linear X, com a seguinte propriedade de invariança, $q(x+z,y+z) = q(x,y)$, $\forall x,y,z \in X$. Então $x+K_q(y) = K_q(x+y)$, $\forall x,y \in X$.*

Prova. Para qualquer $u \in x + K_q(y)$, tem-se que $u \leq_q x + y$. Com isso temos $u \in K_q(x+y)$. Agora, para qualquer $u \in K_q(x+y)$, temos $u \leq_q x+y$, o que prova que $u \in x + K_q(y)$. ∎

2.3 Cone em um Espaço Linear Quase-Normado

O cone é um conceito matemático importante, usado na análise não linear, otimização e teoria de controle.

Definição 2.3.1. *[5] Um cone K em um espaço linear quase-normado X é um subconjunto não vazio de X tal que:*

(i) K é convexo e fechado;

(ii) Se $x \in K$ e $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in K$;

(iii) Se $x \in K$ e $-x \in K$, então $x = 0$.

Um cone $K \subset X$ induz uma ordem parcial $\leq_K$ em X da seguinte maneira:

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Por outro lado, seja (X, P_q) um espaço quase-normado, a ordem parcial $\leq_P$ em X induzida por P_q é definida como:

$$x \leq_P y \Leftrightarrow P_q(x - y) = 0.$$

A seguir, demonstra-se a relação que se tem entre uma quase-norma e um cone.

Teorema 2.3.1. *[5] Sejam (X, P_q) um espaço quase-normado e $K = \{x \in X : P_q(x) = 0\}$ um cone, então*

(i) K é não vazio, convexo e P_q-fechado;

(ii) Se $x \in K$ e $\lambda \geq 0$, então $\lambda \cdot x \in K$;

(iii) Se $x \in K$ e $-x \in K$, então $x = 0$,

onde K é P_q-fechado, o que significa que, se $x_n \in K$, $x \in X$ e $P_q(x - x_n) \to 0 \;\Rightarrow\; x \in K$.

Prova.

(i) Como $P_q(0) = 0$, então K é um conjunto não vazio. Se $x, y \in K$ e $\lambda \in [0, 1]$, então $P_q(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot P_q(x) + (1 - \lambda) \cdot P_q(y) = 0$ e $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in K$. Portanto K é um conjunto convexo não vazio.
Seja $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em K e seja $x \in X$ tal que $P_q(x - x_n) \to 0$, então $x - x_n \in K$. Logo, como $P_q(x) \leq P_q(x_n) + P_q(x - x_n) = P_q(x - x_n)$, então $P_q(x) = 0$. Portanto $x \in K$. Isto prova que K é P_q-fechado;

(ii) Seja $x \in K$ e $\lambda \geq 0$, tem-se $P_q(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot P_q(x) = 0$, concluindo que $\lambda \cdot x \in K$;

(iii) Se $x \in K$ e $-x \in K$, isto é $P_q(x) = P_q(-x) = 0 \Rightarrow x = 0$. ■

Pode-se ver que as relações de ordem induzidas pela quase-norma e o cone são equivalentes.

$$x \leq_P y \Leftrightarrow P_q(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y \in K \Leftrightarrow x \leq_K y$$

Lema 2.3.1. *[5] Seja (X, P_q) um espaço quase-normado, então qualquer intervalo ordenado*

$$[a, b] = \left\{x \in X : a \leq_p x \leq_p b\right\}$$

é limitado em (X, P^s).

Prova. Se $x \in [a, b]$, é claro que $P_q(a - x) = 0$ e $P_q(x - b) = 0$. Logo

$$P_q(x) \leq P_q(x - b) + P_q(b) = P_q(b) \text{ e}$$

$$P_q(-x) \leq P_q(a - x) + P_q(-a) = P_q(-a).$$

Assim

$$P^s(x) = \max\{P_q(x), P_q(-x)\} \leq \max\{P_q(b), P_q(-a)\}$$

Isto implica que o intervalo $[a, b]$ é limitado em (X, P_s). ■

Proposição 2.3.1. *[5] Seja (X, P_q) um espaço quase-normado. Se $x_n \leq_p z_n \leq_p y_n$, $P_q(x - x_n) \to 0$ e $P_q(y_n - x) \to 0$ então $P^s(z_n - x) \to 0$.*

Prova. Dadas as desigualdades $x_n \leq_p z_n \leq_p y_n$ tem-se que $P_q(x_n - z_n) = 0$ e $P_q(z_n - y_n) = 0$.

Assim

$$P_q(x - z_n) \;\leq\; P_q(x - x_n) + P_q(x_n - z_n) = P_q(x - x_n).$$

Como $P_q(x - x_n) \to 0$, então $P_q(x - z_n) \to 0$. Analogamente,

$$P_q(z_n - x) \;\leq\; P_q(z_n, y_n) + P_q(y_n - x) = P_q(y_n, x)$$

Como $P_q(y_n - x) \to 0$, vem $P_q(z_n - x) \to 0$. Consequentemente, $P^s(z_n - x) \to 0$.

Corolário 2.3.1. *[5] Se $x_n \leq_p z_n \leq_p y_n$, $P^s(x_n - x) \to 0$ e $P^s(y_n - x) \to 0$, então $P^s(z_n - x) \to 0$.*

Teorema 2.3.2. *[5] Seja (X, P_q) um espaço quase-normado. Então*

(i) $x \leq_p y \Rightarrow P_q(x) \leq P_q(y)$;

(ii) $0 \leq_p x \leq_p y \Rightarrow P^s(x) \leq P^s(y)$.

Prova.

(i) Se $x \leq_p y$, isto é, $P_q(x-y) = 0 \Rightarrow P_q(x) \leq P_q(x-y) + P_q(y) = P_q(y)$. Portanto $P_q(x) \leq P_q(y)$;

(ii) Se $0 \leq_p x \leq_p y$, então $P_q(x-y) = 0 \wedge P_q(0-x) = 0$. Além disso $P_q(x) \leq P_q(x-y) + P_q(y) \leq P^s(y)$ e $P_q(-x) \leq P_q(0-x) + P_q(0) \leq P^s(y)$, de onde se conclui que $P^s(x) \leq P^s(y)$. ■

Capítulo 3

PONTO FIXO

Neste capítulo introduzimos um conceito de limite. Baseado neste conceito de limite, damos um aporte caracterizando os conceitos propostos no Capítulo 1 mediante limite de seqüências. Ademais estabelecemos condições necessárias e suficientes de completitude superior e inferior em espaços quase-métricos e apresentamos conceitos de pontos fixos direito e esquerdo de um mapeamento contração superior e inferior. Finalmente apresentamos um problema de otimização definido em espaços quase-métricos.

3.1 Completitude Superior e Mapeamento Contrativo Superior

Dado que um espaço quase-métrico é um espaço topológico T_0, o limite de uma seqüência não é em geral único. Devido a isto, visando obter uma estrutura mais regular, Shaobai et al. em [12] apresentam um conceito de limite com unicidade.

Definição 3.1.1. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico. Uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no espaço (X, q) é* ***convergente superior*** *a um ponto $\overline{x} \in X$ se:*

(i) $\lim_{n\to\infty} q(x_n, \overline{x}) = 0$*;*

(ii) dado $y \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} q(x_n, y) = 0$, então $q(\overline{x}, y) = 0$.

O ponto $\overline{x}$ é chamado **limite superior** da seqüência, denotado por:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{x}.$$

Analogamente, temos:

Definição 3.1.2. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico. Uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **convergente inferior** a um ponto $\overline{x} \in X$ se:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} q(\overline{x}, x_n) = 0$;

(ii) $y \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} q(y, x_n) = 0$ *então* $q(y, \overline{x}) = 0$.

O ponto $\overline{x}$ é chamado **limite inferior** da seqüência, denotado por:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

Definição 3.1.3. *A seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **biconvergente** se existe um ponto $\overline{x} \in X$ tal que:*

$$\lim_{n\to\infty} q(x_n, \overline{x}) = \lim_{n\to\infty} q(\overline{x}, x_n).$$

*O ponto $\overline{x}$ é chamado **bilimite** da seqüência denotada por:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}.$$

Exemplo 3.1.1. *Seja $(x_n) = (1/n)$ a seqüência de pontos no espaço quase-métrico $(\mathbb{R}, q)$, considerando a quase-métrica do exemplo* 2.1.1, $q(x, y) = \max\{x - y, 0\}$.

Temos $q(0, 1/n) = \max\{0-1/n, 0\} \to 0$, $(n \to \infty)$. *Para $y \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$ tem-se que* $q(y, 1/n) = \max\{y - 1/n, 0\} \to 0$, $(n \to \infty)$. *Além disso* $q(y, 0) = 0$. *Portanto* $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

Por outro lado $q(1/n, 0) = \max\{1/n - 0, 0\} \to 0$, $(n \to \infty)$. *Para $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$ tem-se que* $q(1/n, y) = \max\{1/n - y, 0\} \to 0$, $(n \to \infty)$. *Além disso,* $q(0, y) = 0$. *Portanto* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

Exemplo 3.1.2. *Seja $(x_n) = (n)$ a seqüência de pontos no espaço quase-métrico $(\mathbb{R}, q)$, considerando a quase-métrica do exemplo* 2.1.1, $q(x, y) = \max\{x - y, 0\}$.

Temos $q(0, n) = \max\{0 - n, 0\} \to 0$, $(n \to \infty)$. *Para $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$ tem-se que* $q(y, n) = \max\{y - n, 0\} \to 0$, $(n \to \infty)$. *Além disso,* $q(0, y) = 0$. *Portanto,* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

Por outro lado $q(n, 0) = \max\{n-0, 0\} \to \infty$, $(n \to \infty)$. *Portanto (x_n) não é convergente superior.*

A proposição 3.1.1 caracteriza uma função semicontínua inferior segundo a definição 2.1.10 mediante o limite de seqüências superiores no espaço (X, q).

Proposição 3.1.1. *Seja $f : (X, q) \to \mathbb{R}$. f é sci em $a \in X$ se, e somente se, para toda seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ e para todo $\epsilon > 0$ tem-se $f(a) - f(x_n) < \epsilon$ para n suficientemente grande.*

Prova. Sejam f uma função *sci* em $a \in X$ e (x_n) uma seqüência tal que $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$. Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $q(x, a) < \delta$ implica $f(a) - f(x) < \epsilon$. E existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(x_n, a) < \delta$ para $n \geq n_0$. Portanto, $f(a) - f(x_n) < \epsilon$ para $n \geq n_0$.

Provamos agora a recíproca. Suponha que f não é *sci* em a, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ pode-se obter $x_n \in X$ com $q(x_n, a) < 1/n$ e $f(a) - f(x_n) \geq \epsilon$. Isto nos dá uma seqüência (x_n) em X com $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = a$ sem que $f(a) - f(x_n) < \epsilon$. Portanto, f tem que ser *sci* em $a \in X$. ■

Devido à assimetria do espaço, há duas categorias de seqüências de Cauchy.

Definição 3.1.4. *[4] A seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de **Cauchy superior**, se*

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente;

(ii) para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(x_n, x_m) < \epsilon$, $\forall m \geq n \geq n_0$.

Definição 3.1.5. *[4] A seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de **Cauchy inferior**, se*

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente;

(ii) para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(x_m, x_n) < \epsilon$, $\forall m \geq n \geq n_0$.

A seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em (X, q^s) se e somente se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma seqüência de Cauchy superior e inferior em (X, q).

Exemplo 3.1.3. *Seja (x_n) a seqüência dada no exemplo* 3.1.1. *Vemos que a seqüência é limitada superiormente e limitada inferiormente. Seja $\epsilon > 0$. Então $q(x_n, x_m) = \max\{x_n - x_m, 0\} = \max\{1/n - 1/m, 0\} < \epsilon$, para m, n suficientemente grandes. Assim (x_n) é uma seqüência de Cauchy superior. Por outro lado, $q(x_m, x_n) = \max\{x_m - x_n, 0\} = \max\{1/m - 1/n, 0\} = 0 < \epsilon$ para $m \geq n$ arbitrários. Portanto (x_n) é uma seqüência de Cauchy inferior.*

Exemplo 3.1.4. *Seja (x_n) a seqüência dada no exemplo* 3.1.2. *Vemos que é limitada inferiormente. Então $q(x_m, x_n) = \max\{x_m - x_n, 0\} = \max\{m - n, 0\} > 1/2$, para $m > n$ suficientemente grandes. Assim (x_n) não é uma seqüência de Cauchy inferior.*

Definição 3.1.6. *[4] Um espaço quase-métrico (X, q) é **completo superior (inferior)** se qualquer seqüência de Cauchy superior (inferior) em X é convergente superior (inferior).*

Definição 3.1.7. *[4] Um espaço quase-métrico (X, q) é chamado* ***espaço bicompleto*** *se é completo superior e completo inferior.*

Diz-se que o espaço quase-métrico (X, q) é bicompleto, se o espaço métrico (X, q^s) é completo.

Os teoremas a seguir são uma extensão para espaços quase-métricos do teorema 18 proposto em Lages [9], $pag.$189 sobre completitude de um espaço métrico. Em nosso contexto, trata-se de espaço quase-métrico completo superior e completo inferior.

Teorema 3.1.1. *[4] Um espaço quase-métrico (X, q) é completo superior se, e somente se, para qualquer seqüência decrescente $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \overline{B_3} \supset \ldots \supset \overline{B_n} \supset \ldots$ de bolas fechadas e não vazias no espaço, existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$ tal que $x \leq_q y$, $\forall y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$, onde $\overline{B_n} = \{y \in X : q(x_n, y) \leq r_n\}$ e $r_n \to 0$ $(n \to +\infty)$.*

Prova.

$\Rightarrow$) Suponha que (X, q) é um espaço quase-métrico completo superior. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência gerada pelos centros da família de bolas fechadas decrescentes $\{\overline{B_n} : n \in \mathbb{N}\}$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente.

Dado $x_m \in \overline{B_m} \subset \overline{B_n}$, para $m \geq n$, tem-se que $q(x_n, x_m) < r_n$ e $r_n \to 0$, $(n \to \infty)$, isto mostra que a seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy superior. Portanto existe $x \in X$ tal que $q(x_n, x) \to 0$, $(n \to \infty)$.

Como

$$q(x_n, x) \leq q(x_n, x_m) + q(x_m, x) \leq r_n + q(x_m, x) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

fazendo $m \to \infty$, tem-se que

$$q(x_n, x) \leq r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (*)$$

isto é, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$. Além disso, $\forall y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$, tem-se

$$q(x_n, y) \leq r_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (**)$$

De $(**)$, tem-se $\lim_{n\to+\infty} q(x_n, y) = 0$ e como a seqüência é convergente superior, temos que $q(x, y) = 0$ o que equivale a $x \leq_q y$, $\forall y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$.

$\Leftarrow$) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy superior arbitrária no espaço. Afirmamos que existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(x_n)_{n\ in\mathbb{N}}$ tal que $q(x_{n_k}, x_m) < 1/2^k$ para todo $m \geq n_k$ $(k \geq 1)$. Constrói-se a seqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ por indução da seguinte forma:

(i) para $\epsilon_1 = 1/2$, obtém-se $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $q(x_{n_1}, x_m) < 1/2,\ m \geq n_1$;

(ii) assuma que $x(_{n_1}), x(_{n_2}), \ldots, x(_{n_k})$ tenham sido construídos.

Logo, para $\epsilon_{k+1} = 1/2^{k+1}$, obtém-se $n'_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $q(x_{n'_{k+1}}, x_m) < 1/2^{k+1}$ para $m \geq n'_{k+1}$. Escolhendo um subíndice n_{k+1} tal que $n_{k+1} \geq n_k,\ n'_{k+1}$, tem-se $q(x_{n_{k+1}}, x_m) < 1/2^{k+1}$, para $m \geq n_{k+1}$, como desejamos.

Assim, acabamos de justificar a existência de $(x_{n_k})_{k\geq 1}$. Definamos $\overline{B}_{k+1} = \{x \in X; q(x_{n_{k+1}}, x) \leq 1/2^k\}$ para $k \geq 1$.

Além disso, $\forall y \in \overline{B}_{k+1}$, tem-se que $q(x_{n_{k+1}}, y) \leq 1/2^k$. Usando a desigualdade triangular e a propriedade (ii), obtém-se

$$q(x_{n_k}, y) \leq q(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + q(x_{n_{k+1}}, y) \leq 1/2^{k-1}.$$

Isto implica que $y \in \overline{B}_k$.

Portanto $\left\{\overline{B}_{k+1}; k \geq 1\right\}$ é uma seqüência decrescente de bolas fechadas cujos raios tendem para 0. Por hipótese, existe $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_{k+1}}$ tal que $x \leq_q y$, $\forall y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_{k+1}}$.

Agora, deve-se provar que x é um limite superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Com efeito, dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy superior, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(x_n, x_m) < \epsilon/2$, $m \geq n \geq n_0$. Logo, tomando $k_0 \geq 1$ com $n_{k_0} > n_0$, tem-se

$$q(x_n, x) \leq q(x_n, x_{n_k}) + q(x_{n_k}, x) \leq \epsilon/2 + 1/2^{k-1}\ ,\ para\ k \geq k_0. \tag{3.1}$$

Fazendo $k \longrightarrow +\infty$, pela desigualdade (3.1), tem-se $q(x_n, x) < \epsilon$ isto é $\lim_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$.

Por outro lado, se existir $y \in X$, tal que $\lim_{n\to\infty} q(x_n, y) = 0$, tem-se

$$q(x_{n_k}, y) \leq q(x_{n_k}, x_m) + q(x_m, y) \leq 1/2^k + q(x_m, y)\ ,\ m \geq n_k\ ,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Fazendo $m \longrightarrow +\infty$, pela desigualdade (3.2), obtém-se $q(x_{n_k}, y) < 2^{k-1}$. Isto mostra que $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_k}$. Por hipótese, tem-se que $x \leq_q y \Leftrightarrow q(x, y) = 0$. Portanto, x é um limite superior da seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Teorema 3.1.2. *[4] Um espaço quase-métrico (X, q) é completo inferior se, e somente se, para qualquer seqüência decrescente $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \overline{B_3} \supset \ldots \supset \overline{B_n} \supset \ldots$ de bolas fechadas e não vazias no espaço, existe $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$ tal que $y \leq_q x$, $\forall y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}$, onde $\overline{B_n} = \{y \in X : q(y, x_n) \leq r_n\}$, $r_n \to 0$ quando $n \to \infty$.*

As definições a seguir são uma extensão a espaços quase-métricos do conceito de mapemaento contractivo sobre um espaço métrico. No contexto de espaço quase-métrico, em [4] se propõe as definições de mapeamento contrativo superior e mapeamento contrativo inferior.

Definição 3.1.8. *Sejam (X, q) e (Y, q') dois espaços quase-métricos. Um mapeamento $f : X \longrightarrow Y$ é chamado contrativo superior, se $\forall \epsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e um ponto $z \in X$ tal que:*

$$q(x, z) < \delta \ , \ q(z, y) < \epsilon \Rightarrow q'(f(x), f(y)) < \epsilon$$

Analogamente, definimos

Definição 3.1.9. *Sejam (X, q) e (Y, q') dois espaços quase-métricos. Um mapeamento $f : X \longrightarrow Y$ é chamado contrativo inferior, se $\forall \epsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e um ponto $z \in X$ tal que:*

$$q(z, x) < \delta \ , \ q(y, z) < \epsilon \Rightarrow q'(f(y), f(x)) < \epsilon$$

Observação 3.1.1. *Se $f : X \to X$ é contrativo superior e inferior em (X, q) então f é contrativo no espaço (X, q^s).*

3.2 Teorema de Ponto Fixo

Devido à assimetria da quase-métrica, torna-se necessário conceituar pontos fixos esquerdo e direito.

Definição 3.2.1. *[4] Sejam (X, q) um espaço quase-métrico e $f : X \longrightarrow X$. Um ponto $x^* \in X$ é chamado ponto fixo esquerdo (direito) de f, se*

$$q(x^*, f(x^*)) = 0 \quad (q(f(x^*), x^*) = 0).$$

Observação 3.2.1. *Se (X, q) é um espaço quase-métrico T_1, um ponto fixo direito de f é um ponto fixo esquerdo; e vice-versa. De fato, seja x^* um ponto fixo direito de f então $q(f(x^*), x^*) = 0$ e como (X, q) é um espaço quase-métrico T_1 tem-se que $f(x^*) = x^*$ e pela propriedade da quase-métrica T_1 tem-se que $q(x^*, f(x^*)) = 0$. Portanto, x^* é um ponto fixo esquerdo de f.*

Elon Lages em [9], apresenta um teorema de Banach sobre pontos fixos de contrações em espaços métricos, o seguinte teorema é a extensão aos espaços quase-métricos.

Teorema 3.2.1. *[4] Seja (X, q) um espaço completo superior e $f : X \longrightarrow X$. Se f é um mapeamento contrativo superior e existe $x_0 \in X$ tal que:*

(i) $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente;

(ii) para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n = n(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que $q(f_n(x_0), f_{n+1}(x_0)) < \epsilon$.

Então f tem um ponto fixo esquerdo.

Prova. Pela definição 3.1.8, tem-se que $\forall \epsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e um ponto $z \in X$ tais que:

$$q(x, z) < \delta \ , \ q(z, y) < \epsilon \Rightarrow q(f(x), f(y)) < \epsilon. \tag{3.3}$$

(a) $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência Cauchy superior.

Com efeito, sejam $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ como em (3.3). Então existe $n = n(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que

$$q(f_n(x_0), f_{n+1}(x_0)) < \delta. \tag{3.4}$$

Prova-se por indução que $q(f_{n+1}(x_0), f_{n+k+1}(x_0)) < \epsilon \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Realmente, tem-se

$$q(f_{n+1}(x_0), f_{n+1}(x_0)) = 0 < \epsilon.$$

Agora suponha que

$$q(f_{n+1}(x_0), f_{n+k+1}(x_0)) < \epsilon. \tag{3.5}$$

Logo por (3.4), (3.5) e dado que f é contrativo superior tem-se que $q(f_{n+1}(x_0), f_{n+k+1+1}(x_0)) < \epsilon$. Provaremos que

$$q(f_{n+s}(x_0), f_{n+k+s}(x_0)) < \epsilon \ , \ \forall s \geq 1 \ , \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por (3.5) tem-se

$$q(f_{n+1}(x_0), f_{n+k+1}(x_0)) < \epsilon \text{ , } \forall k \in \mathbb{N}.$$

Suponha que

$$q(f_{n+s}(x_0), f_{n+k+s}(x_0)) < \epsilon. \tag{3.6}$$

Dado que $q(f_{n+s}(x_0), f_{n+s}(x_0)) = 0 < \delta$ e (3.6), tem-se

$$q(f_{n+s+1}(x_0), f_{n+k+s+1}(x_0)) < \epsilon.$$

Portanto, a seqüência $(f_n(x_0))$ é Cauchy superior.

(b) f tem ponto fixo esquerdo.

Com efeito, sejam $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ ainda como em (3.3). Pela completitude superior de X, existe $x^* \in X$ tal que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x_0) = x^*.$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(f_n(x_0), x^*) < \epsilon$, $n \geq n_0$ por (i) da Definição 3.1.1. Além disso, $q(f_n(x_0), f_n(x_0)) < \delta$, e usando o fato de f ser contrativo superior, tem-se $q(f_{n+1}(x_0), f(x^*)) < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Assim a seqüência $(f_n(x_0))$ é convergente superior a $f(x^*)$, então pela parte (ii) da definição 3.1.1 segue que $q(x^*, f(x^*)) = 0$. Portanto, x^* é um ponto fixo esquerdo de f. ■

Similarmente, podemos mostrar que:

Teorema 3.2.2. *[4] Seja (X, q) um espaço quase-métrico completo inferior, $f : X \longrightarrow X$. Se f é um mapeamento contrativo inferior e existe $x_0 \in X$ tal que:*

(i) $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente;

(ii) Para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n = n(\epsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que $q(f_{n+1}(x_0), f_n(x_0)) < \epsilon$.

Então f tem um ponto fixo direito.

3.3 Um Problema de Otimização no Espaço Quase-Métrico

Em [5], Chen et al. apresenta um problema de otimização sobre um espaço quase-métrico (X, q). Seja $f : Z \to X$ uma função definida em um espaço linear Z com valores em um espaço quase-métrico X. Define-se o seguinte problema de otimização

$$Min \ f(z)$$
$$z \in M \subset Z. \tag{3.7}$$

A seguir propõem-se os conceitos de função semicontínua inferior e superior $f : M \rightarrow X$ definida em um espaço métrico M com valores em um espaço quase-métrico X. Devemos evidenciar ainda que, as definições 3.3.1 e 3.3.2 são apresentadas a maneira de aporte dado que não foi encontrado na literatura, assim como lema 3.3.1, que mostra a relação entre as definições acima citadas e a definição de função contínua em espaços métricos.

Definição 3.3.1. *Sejam (M, d) um espaço métrico e (X, q) um espaço quase-métrico, a função $f : M \rightarrow X$ é semicontínua inferior em $a \in M$ se $\forall \epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d(z, a) < \delta$ implica $q(f(a), f(z)) < \epsilon$.*

Definição 3.3.2. *Sejam (M, d) um espaço métrico e (X, q) um espaço quase-métrico, a função $f : M \rightarrow X$ é semicontínua superior em $a \in M$ se $\forall \epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d(z, a) < \delta$ implica $q(f(z), f(a)) < \epsilon$.*

Lema 3.3.1. *$f : M \rightarrow X$ é contínua em $a \in M$ sobre o espaço métrico (X, q^s) se, e somente se, f é scs e sci em $a \in M$.*

Prova. Seja f contínua em $a \in M$, então $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(a, z) < \delta$ implica $q^s(f(a), f(z)) < \epsilon$. Assim como $q^s(f(a), f(z)) = \max\{q(f(a), f(z)), q(f(z), f(a))\}$ então $q(f(a), f(z)) < \epsilon$ e $q(f(z), f(a)) < \epsilon$. Portanto f é *sci* e *scs* em $a \in M$.

Mostremos agora a recíproca. Com efeito, seja $\epsilon > 0$. Como f é *sci* em $a \in M$, então existe um $\delta_1 > 0$ tal que $d(z, a) < \delta_1$ implica $q(f(a), f(z)) < \epsilon$. Além disso, como f é *scs* em $a \in M$ existe um $\delta_2 > 0$ tal que $d(z, a) < \delta_2$ implica $q(f(z), f(a)) < \epsilon$. Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então $d(z, a) < \delta$ implica $q^s(f(a), f(z)) < \epsilon$. Portanto f é contínua em $a \in M$. ■

Apresentamos a seguir um teorema de existência de solução para o problema de otimização (3.7).

Teorema 3.3.1. *[4] Seja Z um espaço métrico, $A \subset Z$ um conjunto compacto, (X, q) um espaço quase-métrico e $f : A \rightarrow X$ um mapeamento semicontínuo inferior, então o* $\inf f$ *é atingido.*

Mostramos primeiro algumas proposições que serão usadas na demonstração do teorema (3.3.1). A seguinte proposição caracteriza um q-ponto aderente por seqüências convergentes superiores.

Proposição 3.3.1. *Seja A um subconjunto do espaço (X, q). Um ponto $a \in cl_qA$ em X se, e somente se, a é limite superior de uma seqüência de pontos $x_n \in A$.*

Prova:

$\Rightarrow$) Se $a \in cl_qA$ então $\forall n \geq 1$ pode-se obter um ponto $x_n \in B^+(a, 1/n) \cap A$. Isto gera uma seqüência de pontos $x_n \in A$ com $q(x_n, a) < 1/n$, então $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, a) = 0$.

Seja $y \in A$, com $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, y) = 0$ então $x_n \in B^+(y, \epsilon)$. Como $a \neq x_n$ para todo $n \geq 1$, da definição de quase-métrica temos que $q(a, x_n) = 0$ e $q(x_n, a) \neq 0$. Aplicando a desigualdade triangular $q(a, y) \leq q(a, x_n) + q(x_n, y)$. Daí que, $q(a, y) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, isto implica $q(a, y) = 0$.

$\Leftarrow$) Se $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a$, com $x_n \in A$, então $\forall \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q(a, x_n) < \epsilon$ para $n > n_0$. Portanto $a \in cl_qA$. ■

A seguinte proposição caracteriza um q-ponto de acumulação por seqüências convergentes superiores.

Proposição 3.3.2. *Seja A um subconjunto do espaço (X, q). Um ponto $a \in A'_q$ em X se, e somente se, a é limite superior de uma seqüência de pontos distintos $x_n \in A$.*

A seguinte proposição caracteriza uma função semicontínua inferior por seqüências convergentes inferiores.

Proposição 3.3.3. *Seja $f : M \to X$ é semicontínua inferior em $a \in M$ se, e somente se, $z_n \to a$ em M implica $q(f(a), f(z_n)) \to 0$.*

Prova:

$\Rightarrow$) Seja f *sci* em $a \in M$. Suponha que $z_n \to a$ e seja $\epsilon > 0$. Como f é *sci* em a, existe $\delta > 0$ tal que $d(z, a) < \delta$ implica $q(f(a), f(z)) < \epsilon$.

A partir de δ obtem-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(z_n, a) < \delta \Rightarrow q(f(a), f(z_n)) < \epsilon$ para $n > n_0$. Isto implica que $q(f(a), f(z_n)) \to 0, (n \to \infty)$.

$\Leftarrow$) Suponha-se que f não é *sci* em a, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \geq 1$, pode-se obter $z_n \in M$ com $d(z_n, a) < 1/n$ e $q(f(a), f(z_n)) \geq \epsilon$. Isto nos dá uma seqüência (z_n) em M, com $z_n \to a$ sem que $f(z_n)$ convirja para $f(a)$. ■

Prova do teorema (3.3.1). Seja $\overline{x} \in \min cl_q f(A)$, da definição, em (2.4), tem-se $\overline{x} \in cl_q f(A)$ e $cl_q f(A) \cap K_q(\overline{x}) = \{\overline{x}\}$, como $\overline{x} \in cl_q f(A)$, pela proposição (3.3.1) existe uma seqüência (z_n) de pontos de A tal que

$$q(f(z_n), \overline{x}) \to 0 \quad (n \to +\infty).$$

Logo como A é um conjunto compacto, existe uma subseqüência (z_{n_i}) de (z_n) tal que $z_{n_i} \to z \in A$, $(i \to +\infty)$. Assim como f é semicontínua inferior, pela proposição (3.3.3) temos que

$$q(f(z), f(z_{n_i})) \to 0, \quad (i \to +\infty).$$

Por outro lado, como $q(f(z), \overline{x}) \leq q(f(z), f(z_{n_i})) + q(f(z_{n_i}), \overline{x})$ então $q(f(z), \overline{x}) = 0$. Isto mostra que $f(z) \in K_q(\overline{x})$. Portanto $f(z) = \overline{x}$. ■

Capítulo 4

FUNÇÃO SEMILIPSCHITZ

Neste capítulo se dota de uma estrutura de espaço quase-métrico bicompleto ao conjunto das funções semilipschitz definidas sobre um espaço quase-métrico, que se anulam em um ponto fixo. Fornece-se também uma caracterização para os pontos de melhor aproximação sobre espaços quase-métricos. Isto generaliza aos conceitos propostos em [13], que caracteriza os pontos de melhor aproximação em espaços métricos lineares.

4.1 Função Semilipschitz

Definição 4.1.1. *[10] A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida no espaço quase-métrico (X, q) é chamada semilipschitz, se existe $k \geq 0$ tal que $f(x) - f(y) \leq k \cdot q(x, y)$, $\forall x, y \in X$.*

O seguinte lema mostra que toda função semilipschitz satisfaz a definição 2.1.10 de semicontinuidade inferior.

Lema 4.1.1. *[14] Toda função semilipschitz é semicontínua inferior.*

Prova. Seja f semilipschitz então $f(x) - f(y) \leq k \cdot q(x, y)$, $\forall x, y \in X$ para algum $k \geq 0$. Se $\epsilon > 0$ e $q(x, y) < \epsilon/k$ tem-se $f(x) - f(y) < \epsilon$, $\forall x, y \in X$. Segundo a definição 2.1.10 concluí-se que f é semicontínua inferior em X. ∎

Definição 4.1.2. *[10] A função $f : X \to \mathbb{R}$ definida no espaço quase-métrico (X, q) é chamada $\leq_q$-crescente se $f(x) \leq f(y)$ sempre que $q(x, y) = 0$.*

O lema a seguir mostra que toda função semilipschitz satisfaz a definição 4.1.2.

Lema 4.1.2. *[14] Cada função semilipschitz em (X, q) é $\leq_q$-crescente e vice-versa.*

Prova. Seja f semilipschitz, isto é, $f(x) - f(y) \leq k \cdot q(x,y)$, $\forall x,y \in X$. Logo $f(x) \leq f(y)$, $\forall x, y \in X$ tal que $q(x,y) = 0$. Portanto f é $\leq_q$-crescente.

Agora provamos a recíproca. Se f é $\leq_q$-crescente então $f(x) \leq f(y)$, $\forall x,y \in X$ tal que $q(x,y) = 0$. Conseqüentemente $f(x) - f(y) \leq q(x,y)$, $\forall x,y \in X$. ■

A seguir mostra-se que toda função semilipschitz definida em (X,q) é lipschitz no espaço (X,q^s).

Lema 4.1.3. *Se f é semilipschitz no espaço quase-métrico (X,q), então f é Lipschitz no espaço métrico (X,q^s).*

Prova. Se f é semilipschitz então $f(x)-f(y) \leq k \cdot q(x,y)$, $\forall x,y \in X$. Como $q^s(x,y) = \max\{q(x,y), q(y,x)\}$ tem-se $f(x) - f(y) \leq k \cdot q^s(x,y)$, $\forall x,y \in X$. Portanto, f é Lipschitz em (X,q^s). ■

Denotemos por $R^X_{\leq_q}$ o conjunto de todas as funções $\leq_q$ crescentes:

$$R^X_{\leq_q} = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é } \leq_q -crescente\} \tag{4.1}$$

Corolário 4.1.1. *[14] Se para cada $f, g \in R^X_{\leq_q}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ define-se $f+g$ e $\lambda \cdot f$ da maneira usual então $(R^X_{\leq_q}, +, \cdot)$ é um cone.*

Prova.

(i) Seja $f \in R^X_{\leq_q}$ então $f(x) \leq f(y)$, $\forall x,y \in X$ tais que $q(x,y) = 0$. Assim, para $\lambda > 0$, $\lambda \cdot f(x) \leq \lambda \cdot f(y)$, $\forall x,y \in X$ tais que $q(x,y) = 0$. Portanto $\lambda \cdot f \in R^X_{\leq_q}$;

(ii) Sejam f, $g \in R^X_{\leq_q}$, significa que $f(x) \leq f(y)$ e $g(x) \leq g(y)$, $\forall x,y \in X$ tais que $q(x,y) = 0$. Daí temos que $f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y)$, $\forall x,y \in X$ tais que $q(x,y) = 0$. Portanto $f + g \in R^X_{\leq_q}$. ■

Dado um espaço quase-métrico (X,q) e um ponto fixo $x_0 \in X$, segundo [14], define-se o conjunto:

$$\mathcal{SL}_0(q) = \left\{ f \in R^X_{\leq_q} : \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x,y)} < \infty \, , \, f(x_0) = 0 \right\}. \tag{4.2}$$

O conjunto $\mathcal{SL}_0(q)$ é exatamente o conjunto de todas as funcões semilipschitz que se anulam no ponto x_0.

Corolário 4.1.2. *[14] $(\mathcal{SL}_0(q), +, \cdot)$ é um subcone de $(R^X_{\leq_q}, +, \cdot)$.*

Prova.

(i) Sejam $f \in \mathcal{SL}_0(q)$ e $\lambda > 0$. Temos então $f \in R^X_{\leq_q}$, $\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(f(x)-f(y))\vee 0}{q(x,y)} < \infty$ e $f(x_0) = 0$, logo pela proposição 4.1.1 é fato que $\lambda \cdot f \in R^X_{\leq_q}$, e pode-se observar que: $\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{\lambda(f(x)-f(y))\vee 0}{q(x,y)} < \infty$ e $(\lambda \cdot f)(x_0) = 0$. Portanto $\lambda \cdot f \in \mathcal{SL}_0(q)$.

(ii) Sejam $f, g \in \mathcal{SL}_0(q)$. Da proposição 4.1.1 tem-se que $f + g \in R^X_{\leq_q}$, logo

$$\begin{aligned}
\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{((f+g)(x) - (f+g)(y)) \vee 0}{q(x,y)} &= \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{((f(x) - f(y)) - (g(x) - g(y))) \vee 0}{q(x,y)} \\
&\leq \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x,y)} \\
&\quad + \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(g(x) - g(y)) \vee 0}{q(x,y)} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$, obtendo $(f + g)(x_0) = 0$. Portanto $f + g \in \mathcal{SL}_0(q)$.

Conseqüentemente $(\mathcal{SL}_0(q), +, \cdot)$ é um subcone de $(R^X_{\leq_q}, +, \cdot)$. ∎

Agora, seja $P_q : \mathcal{SL}_0(q) \times \mathcal{SL}_0(q) \to \mathbb{R}^+$ definido por

$$P_q(f, g) = \sup_{q(x,y)\neq 0} \left\{ \frac{((f-g)(x) - (f-g)(y)) \vee 0}{q(x,y)} \right\}. \tag{4.3}$$

Lema 4.1.4. *[10] P_q é uma quase-métrica em $\mathcal{SL}_0(q)$.*

Prova.

$$\begin{aligned}
(i)\ P_q(f,g) = P_q(g,f) = 0 \ &\Rightarrow\ (f-g)(x) - (f-g)(y) \leq 0 \ \wedge \\
&\quad\ \ (g-f)(x) - (g-f)(y) \leq 0 \\
&\Rightarrow\ (f-g)(x) - (f-g)(y) = 0\ ,\ \forall x, y \in X, q(x,y) \neq 0 \\
&\Rightarrow\ f(x) + g(y) = g(x) + f(y) \\
&\Rightarrow\ se\ x = x_0,\ g(y) = f(y)\ ,\ \forall y \in X \\
&\Rightarrow\ se\ y = x_0,\ g(x) = f(x)\ ,\ \forall x \in X
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(ii) \qquad P_q(f,g) &= \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{((f-g)(x)-(f-g)(y)) \vee 0}{q(x,y)} \\
&= \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{((f-h+h-g)(x)-(f-h+h-g)(y)) \vee 0}{q(x,y)} \\
&\leq \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{((f-h)(x)-(f-h)(y)) \vee 0}{q(x,y)} \\
&+ \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{((h-g)(x)-(h-g)(y)) \vee 0}{q(x,y)} \\
&= P_q(f,h) + P_q(h,g)
\end{aligned}
$$

O próximo exemplo mostra que o semigrupo abeliano $(\mathcal{SL}_0(q), +)$ que tem um elemento neutro não é em geral um grupo. Portanto, P_q não é necessariamente uma quase-métrica.

Exemplo 4.1.1. *[10] Considere o espaço quase-métrico* $(\mathbb{R}, q)$,*onde* $q(x,y) = x-y$ *se* $x \geq y$ *e* 1 *se* $x < y$. *Definindo* $x_0 = 0$, *e denotando a função identidade sobre* $\mathbb{R}$ *como id, então* $id \in \mathcal{SL}_0(q)$ *porque* $\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(x-y)\vee 0}{q(x,y)} = 1$, *porém* $-id \notin \mathcal{SL}_0(q)$ *porque* $\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(y-x)\vee 0}{q(x,y)} = \infty$.

Desta forma $P_q(0, id) = \infty$, *onde* 0 *é a função nula.*

Proposição 4.1.1. *[14] Sejam* $f, g, h \in \mathcal{SL}_0(q)$ *e* $a > 0$. *Valem as seguintes igualdades:*

(i) $P_q(f+h, g+h) = P_q(f,g)$;

(ii) $P_q(a\cdot f, a\cdot g) = a \cdot P_q(f,g)$.

Isto mostra que P_q *é uma quase-métrica invariante.*

Do lema 4.1.4 vemos que $P_q(f,0) = 0$ se, e só se, $f = 0$, onde 0 representa a função nula. Conseqüentemente a função $\|\cdot\|_q : \mathcal{SL}_0(q) \to \mathbb{R}_{++}$ definida por

$$\|f\|_q = P_q(f,0),$$

é uma norma em $\mathcal{SL}_0(q)$. Portanto $(\mathcal{SL}_0(q), \|\cdot\|_q)$ é um cone normado.

Teorema 4.1.1. *[10]* P_q *é uma quase-métrica estendida bicompleta em* $\mathcal{SL}_0(q)$.

Prova. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $(\mathcal{SL}_0(q), P_{q^s})$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_q(f_n, f_m) < \epsilon$ e $P_q(f_m, f_n) < \epsilon$, para $m, n \geq n_0$.

Portanto

$$\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{q(x,y)} < \epsilon \,,\ \forall m, n \geq n_0. \tag{4.4}$$

Daí, com $y = x_0$, segue-se que :

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \cdot q(x, x_0)\ , \ \forall x \in X\ , \ \forall m, n \geq n_0.$$

Em particular, para cada $x \in X$, $(f_n(x))$ é uma seqüência de Cauchy com respeito à métrica usual em $\mathbb{R}$, e logo converge para $f(x) \in \mathbb{R}$. Demosntramos a seguir que a aplicação $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida pertence a $\mathcal{SL}_0(q)$ e que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f com respeito à topologia $T(P_{q^s})$. Note que f é $\leq_q$-crescente como limite pontual de uma seqüência de funções $\leq_q$-crescentes. É claro que $f(x_0) = 0$.

Vejamos que $\sup\limits_{q(x,y)\neq 0} \dfrac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x, y)} < \infty$. Realmente, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{|(f - f_m)(x) - (f - f_m)(y)|}{q(x, y)} \leq 1 \ \ \forall m, n \geq l,$$

o que implica

$$\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{|(f - f_l)(x) - (f - f_l)(y)|}{q(x, y)} \leq 1,$$

o que implica

$$\frac{f(x) - f(y)}{q(x, y)} - \frac{f_l(x) - f_l(y)}{q(x, y)} \leq 1$$

sempre que $f(x, y) \neq (0, 0)$. Logo, $\sup\limits_{q(x,y)\neq 0} \dfrac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x, y)} \leq 1 + P_q(f_l)$. Assim, $f \in \mathcal{SL}_0(q)$.

Finalmente, raciocinando como acima concluímos que $(f_n) \longrightarrow f$ em $(\mathcal{SL}_0(q), P_{q^s})$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} P_{q^s}(f, f_n) = 0$, o que conclui a demosntração.■

4.2 Melhor Aproximação em um Espaço Quase-Métrico

Nesta seção apresentamos o elemento de melhor aproximação em espaços quase-métricos. Com este fim usamos a definição do conjunto $K_q(y)$ dada em (2.3). Assim como $q(p, Y) = \inf\{q(p, y) : y \in Y\}$, para cada $p \in X$.

A seguir definimos o elemento de melhor aproximação sobre o espaço (X, q).

Definição 4.2.1. *[10] Seja (X, q) um espaço quase-métrico. São dados $Y \subset X$ e $p \in X$. Um elemento $y_0 \in Y$ tal que $q(p, Y) = q(p, y_0)$ é chamado o elemento de melhor aproximação a p pelos elementos de Y.*

Note que, se $q(p, y_0) = 0$ para algum $y_0 \in Y$, então y_0 é obviamente um elemento trivial de melhor aproximação a p pelos elementos de Y. Portanto o interesse está nos pontos $p \notin \bigcup \left\{K_q(y) : y \in Y\right\}$.

A seguinte proposição é uma caracterização de ponto de melhor aproximação sobre um espaço quase-métrico. Ela é uma extensão da melhor aproximação em espaços métricos lineares como pode-se ver em [13].

Proposição 4.2.1. *[10] Seja (X,q) um espaço quase-métrico. São dados $Y \subset X$, $x_0 \in Y$ e $p \notin \bigcup\left\{K_q(y) : y \in Y\right\}$. Então $y_0 \in Y$ um elemento de melhor aproximação a p pelos elementos de Y se, e somente se, existe $f \in \mathcal{SL}_0(q)$ tal que:*

(i) $\|f\|_q = 1$;

(ii) $f_{|Y} = 0$;

(iii) $q(p,y_0) = f(p) - f(y_0)$.

Prova.

$\Rightarrow$) Seja $p \notin \bigcup\left\{K_q(y) : y \in Y\right\}$ e $y_0 \in Y$ um elemento de melhor aproximação a p pelos elementos de Y. Define-se $f : X \to \mathbb{R}$ como $f(x) = q(x,Y)$. Assim, $f_{|Y} = 0$. Além disso, sejam $x, z \in X$ tal que $x \leq_q z$, ou seja, $q(x,z) = 0$, então $q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y) = q(z,y)$ para cada $y \in Y$, o que implica $q(x,Y) \leq q(z,Y)$. Dessa forma, f é $\leq_q$-crescente e $f(x_0) = 0$. Por outro lado

$$\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x,y)} = \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(q(x,Y) - q(y,Y)) \vee 0}{q(x,y)} \leq \sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{q(x,y)}{q(x,y)} = 1.$$

É portanto verdadeiro que

$$\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x,y)} \leq 1, \tag{4.5}$$

que determina, por definição, que $f \in \mathcal{SL}_0(q)$. Usando agora o item (*iii*) obtém-se a igualdade $f(p) - f(y_0) = q(p,Y) = q(p,y_0) > 0$, e

$$\frac{(f(p) - f(y_0)) \vee 0}{q(p,y_0)} = \frac{q(p,Y)}{q(p,y_0)} = 1,$$

$$\sup_{q(x,y)\neq 0} \frac{(f(p) - f(y)) \vee 0}{q(p,y)} = \frac{q(p,Y)}{q(p,y_0)} \geq 1 \tag{4.6}$$

Concluímos então a partir de (4.5) e (4.6), que $\|f\|_q = 1$.

$\Leftarrow$) Para cada $y \in Y$

$$q(p,y) = \|f\|_q \cdot q(p,y) \geq \frac{(f(p) - f(y)) \vee 0}{q(p,y)} . q(p,y)$$

ou ainda

$$q(p,y) \geq f(p) - f(y) = f(p) - f(y_0) = q(p,y_0)$$

$$q(p,y) \geq q(p,y_0)$$

Provamos deste modo que y_0 é um elemento de melhor aproximação a p pelos elementos de Y.■

Lema 4.2.1. *[10] Seja (X,q) um espaço quase-métrico, $Y \subset X$ e $x_0 \in Y$. Define-se*

$$Y_0 = \{f : X \to \mathbb{R} : f \in \mathcal{SL}_0(q) \ \ e \ \ f|_Y = 0\}$$

e para cada $x, y \in X$ tal que $q(x,y) \neq 0$

$$q_{Y_0}(x,y) = \sup_{q(x,y)\neq 0} \left\{ \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{\|f\|_q} : f \in Y_0 \ \ e \ \ \|f\|_q \neq 0 \right\}.$$

Dessa forma $q_{Y_0}(x,y) \leq q(x,y)$.

Prova. Seja $f \in \mathcal{SL}_0(q)$, com $\|f\|_q \neq 0$. Então

$$\frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{q(x,y)} \leq \|f\|_q$$

sempre que $q(x,y) \neq 0$. Assim, $\dfrac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{\|f\|_q} \leq q(x,y)$. Com isso

$$q_{Y_0}(x,y) = \sup_{q(x,y)\neq 0} \left\{ \frac{(f(x) - f(y)) \vee 0}{\|f\|_q} : f \in Y_0 \ \text{e} \ \|f\|_q \neq 0 \right\} \leq q(x,y),$$

como queríamos demonstrar.■

A proposição a seguir tem sua prova baseada na Proposição 3.2.1.

Proposição 4.2.2. *[10] Seja (X,q) um espaço quase-métrico. $Y \subset X$, $x_0 \in Y$ e $p \notin \bigcup \left\{K_q(y) : y \in Y\right\}$. Então $y_0 \in Y$ é um elemento de melhor aproximação a p pelos elementos de Y se, e somente se, $q_{Y_0}(p,y_0) = q(p,y_0)$.*

Capítulo 5

FUNÇÃO UTILIDADE

Cabe observar que os conceitos de preferência e função utilidade desempenham um papel crucial em questão de escolha do consumidor, um tema fundamental em microeconomia.

Em particular, o chamado mapa de indiferença descreve as preferências de um consumidor, a função utilidade manifesta como a satisfação de um consumidor varia com o consumo padrão; para mais informação ver [15].

Motivado em parte por alguns problemas de matemática econômica, Levi caracteriza em [16] preferência em um espaço métrico separável que admite funções utilidade Lipschitz.

Neste capítulo apresentamos uma preferência em um espaço quase-métrico sub-separável que admite funções utilidade semilipschitz. Tal preferência é definida como um mapeamento ponto a conjunto, segundo [26]. Estendemos alguns resultados de mapeamentos ponto a conjunto em espaços métricos a nosso espaço de estudo.

5.1 Função Utilidade Semilipschitz

Definição 5.1.1. *[16] Uma preferência em um conjunto X é um mapeamento ponto a conjunto*

$$R : X \to 2^X,$$

onde 2^X denota a família de todos os subconjuntos não vazios de X.

Definição 5.1.2. *[26] Seja X um conjunto não vazio. Um mapeamento ponto a conjunto $R : X \to 2^X$ é caracterizado por seu gráfico $Graf(R)$, o subconjunto de $X \times X$ definido* *por*

$$Graf(R) = \{(x, y) \in X \times X : y \in R(x)\}$$

onde $R(x)$ é o subconjunto de X associado a x.

Para cada par $x, y \in X$, se diz que y **é preferido a** x, sempre que $y \in R(x)$.

O mapeamento ponto a conjunto R é dito ser não trivial se o seu gráfico é não vazio. O gráfico de R é vazio se todo $x \in X$ está associado ao subconjunto $\emptyset \subset X$. Sendo assim, R é não trivial se existe $x \in X$ tal que $R(x) \neq \emptyset$.

O mapeamento ponto a conjunto R é chamada **estrito** se para todo $x \in X$, o conjunto associado $R(x)$ é não vazio.

Dada uma preferência R em X, pode-se associar uma **preferência estrita** P, como segue:

$$y \in P(x) \Leftrightarrow y \in R(x) \;\; e \;\; x \notin R(y).$$

Definição 5.1.3. *[26] Definimos o domínio e a imagem do mapeamento ponto a conjunto $R : X \to 2^X$ por:*

$$Dom(R) = \{x \in X : R(x) \neq \emptyset\} ;$$

$$Im(R) = \bigcup_{x \in X} R(x)$$

Exemplo 5.1.1. *Seja $R : \mathbb{Z}^2 \to 2^{\mathbb{Z}^2}$ o mapeamento ponto a conjunto definido por $R(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) < 1\}$, utilizando a quase-métrica $q(x, y)$ do exemplo* 2.1.3.

Neste caso, $Dom(R) = \mathbb{Z}^2$ e $Im(R) = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^2} R(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^2} \left\{y \in \mathbb{R}^2 : q(x, y) < 1\right\}$.

Exemplo 5.1.2. *[26] Sejam os mapeamentos ponto a conjunto $R^+ : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ e $R^- : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ definidos por*

$$R^+(x) = \begin{cases} \{0\}, & se \;\; x \neq 0 \\ [-1, 1], & se \;\; x = 0 \end{cases}$$

$$R^-(x) = \begin{cases} [-1, 1], & se \;\; x \neq 0 \\ \{0\}, & se \;\; x = 0 \end{cases},$$

representadas na figura 5.1 *e* 5.2 *respectivamente.*

Definição 5.1.4. *Uma função $\mu : X \to \mathbb{R}$ é chamada* ***R-crescente****, se $\mu(x) \leq \mu(y)$, sempre que $x \in X$ e $y \in R(x)$.*

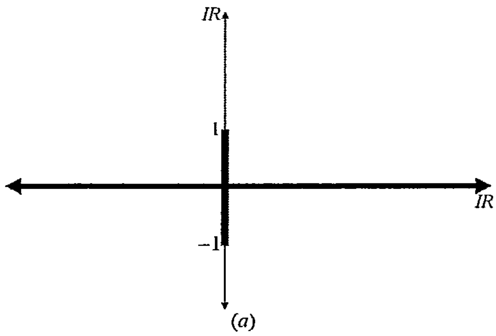

Figura 5.1: Gráfico do mapeamento ponto a conjunto $R^+(x)$

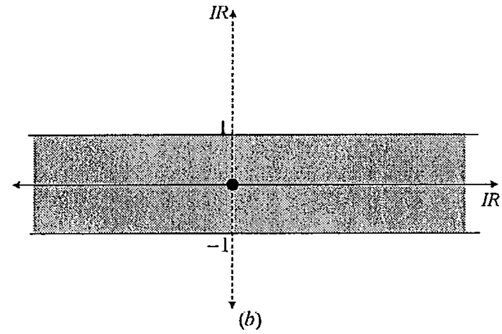

Figura 5.2: Gráfico do mapeamento ponto a conjunto $R^-(x)$

Definição 5.1.5. *[7, 17] Uma **função utilidade** para R é uma função μ R − crescente tal que $\mu(x) < \mu(y)$, sempre que $x \in X$ e $y \in P(x)$.*

Seja (X, q) um espaço quase-métrico, uma cadeia em X é uma seqüência finita $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de pontos em X. E seja $T(x, y)$ o conjunto de todas as cadeias que unem x a y, isto é:

$$T(x, y) = \{\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : n \in \mathbb{Z}_+, x = x_0, y = x_n\}.$$

Definição 5.1.6. *[7] Seja R uma preferência em (X, q). Define-se para cada cadeia $\tau \in T(x, y)$ a **q-avaliação** de τ com respeito a R por:*

$$S_{q,R}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} C(z_{k-1}, z_k),$$

onde a função C é definida por:

$$C(z, z') = \begin{cases} 0, & se \;\; z' \in R(z) \\ q(z, z'), & se \;\; z' \notin R(z) \end{cases}$$

Definição 5.1.7. *A função utilidade μ para R definida no espaço quase-métrico (X, q) é chamada **semilipschitz** se:*

$$\mu(x) - \mu(y) \leq q(x, y), \;\; \forall x, y \in X$$

Teorema 5.1.1. *[7] Se R é uma preferência no espaco-quase métrico (X, q) subseparável, então existe uma função utilidade para R semilipschitz se, e somente se, $\inf\limits_{\tau \in T(x,y)} S_{q,R}(\tau) > 0$.*

Prova.

$\Rightarrow$) Seja μ uma função utilidade para R semilipschitz. Para todo $z, z' \in X$, tem-se:

$\mu(z) \leq \mu(z')$, se $z' \in R(z)$;

$\mu(z) - \mu(z') \leq q(z, z'), \forall z, z' \in X$.

Em particular $\mu(z) - \mu(z') \leq q(z, z')$ para $z' \notin R(z)$. Assim usando a definição da função C, obtém-se

$$\mu(z) - \mu(z') \leq C(z, z'), \quad \forall z, z' \in X.$$

Sejam agora $x, y \in X$, com $y \in P(x)$, e uma cadeia τ que une x a y, isto é: $\tau = \{z_0, z_1, z_2, \ldots z_n\} \in T(x, y)$ tal que $y = z_0$ e $x = z_n$. Segue-se que

$$S_{q,R}(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c(z_{k-1} - z_k) \geq \sum_{k=1}^{n} (\mu(z_{k-1}) - \mu(z_k)) = \mu(y) - \mu(x).$$

Como $y \in P(x)$, então $\mu(y) - \mu(x) > 0$. Assim se conclui que:

$$\inf_{\tau \in T(x,y)} S_{q,R}(\tau) > 0.$$

$\Leftarrow$) Para cada $x, y \in X$, define-se a função C_*, como $C_*(x, y) = \inf_{\tau \in T(x,y)} S_{q,R}(\tau) > 0$. É portanto imediato que $C_*(x, y) \leq C_*(x, z) + C_*(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$. Seja agora $f : X \times X \to \mathbb{R}$, a função definida por $f(x, y) = \min\{C_*(x, y), 1\}$. É fácil ver que:

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y), \forall x, y, z \in X.$$

Por outro lado, como (X, q^s) é um espaço métrico separável, há um subconjunto enumerável $Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso em X. Isto permite definir a seguinte função real:

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x, y_n) < \infty \quad , \quad \forall x \in X. \tag{5.1}$$

Por (5.1) pode-se afirmar que:

(i) μ é uma função semilispchitz em (X, q).

Com efeito, sejam $z, z' \in X$ arbitrários, então

$$f(z, z') \leq C_*(z, z') \leq C(z, z') \leq q(z, z') \tag{5.2}$$

e

$$\mu(z) - \mu(z') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (f(z, y_n) - f(z', y_n))$$

$$\mu(z) - \mu(z') \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(z, z') = f(z, z')$$

$$\mu(z) - \mu(z') \leq q(z, z'), \forall z, z' \in X.$$

Isto mostra que μ é uma função semilispchitz em (X, q).

(ii) μ é uma função utilidade.

Com efeito, seja $y \in R(x)$. Sabemos que $C_*(x,y) = 0$ e $f(x,y) = 0$. Além disso, da desigualdade $f(x,y_n) \leq f(x,y) + f(y,y_n)$, se deduz que $f(x,y_n) \leq f(y,y_n), \forall n \in \mathbb{N}$. Isto prova que a função μ é R-crescente.

A seguir, consideramos $y \in P(x)$. Dada uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $q^s(x,y_{n_k}) \to 0$, tem-se:

$$f(y,y_{n_k}) - f(y,x) \leq f(x,y_{n_k}) \leq q(x,y_{n_k}),$$

$$f(y,x) - f(y,y_{n_k}) \leq f(y_{n_k},x) \leq q(y_{n_k},x),$$

Então

$$\left|f(y,y_{n_k}) - f(y,x)\right| \leq q^s(x,y_{n_k}).$$

Com isso $f(y,y_{n_k}) \to f(y,x)$, relativamente à métrica euclidiana em $\mathbb{R}$. Ademais, sabe-se que $0 \leq f(x,y_{n_k}) \leq q(x,y_{n_k})$ e como $q(x,y_{n_k}) \to 0$, segue-se que $f(x,y_{n_k}) \to 0$, conseqüentemente, $f(y,y_{n_k}) - f(x,y_{n_k}) \to f(y,x)$, ambos ralativamente à métrica euclidiana em $\mathbb{R}$.

Por definição $f(y,x) > 0$, então $f(y,y_{n_k}) > f(x,y_{n_k})$, para k suficientemente grande. Com isso:

$$f(y,y_n) > f(x,y_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto μ é uma função utilidade em $\mathbb{R}$. ■

Em diversos exemplos de espaços quase-métricos, que aparecem na ciência da computação, a ordem especializada fornece uma ferramenta adequada para explicar o fato que em uma coleção X de elementos (cadeias de informação, alfabeto de palavras em certos modelos de computação paralela) o elemento y contém todas as informações prestadas pelo elemento x. Serve também para explicar o fato de que em uma coleção de programas de uma linguagem de programação, o programa P é mais eficiente em todas as entradas que o programa Q (análise de complexidade de programas).

É uma questão natural e interessante tentar a descrição dos fatos mencionados em termos da função utilidade semilipchitz. Para este fim vamos considerar a ordem especializada definida em um espaço quase-métrico (X,q) como uma preferência e vamos estudar o problema de obtenção de funções utilidades semilipchitz μ para cada preferência.

Observação 5.1.1. *A relação de ordem parcial estrita $<_q$, permite definir a seguinte relação:*

$$\mu(x) < \mu(y) \Leftrightarrow x <_q y.$$

Esta relação pode ser interpretada computacionalmente como: " Se o elemento y contém mais informação que o elemento x, então y é mais útil que x e vice-versa". Ou em um contexto de análise de complexidade "Se existir um decréscimo na complexidade por substituir o programa x pelo programa y, então y é mais util que x e vice-versa".

Definição 5.1.8. *[7] Seja (X, q) um espaço quase-métrico. Denota-se por $R_{\leq_q}$ à preferência definida em X por*

$$y \in R\leq_q(x), \quad se \quad x \leq_q y,$$

e denota-se por $R_{<_q}$ à preferência estrita, associada com $R_{\leq_q}$, por

$$y \in R<_q(x) \quad se \quad x <_q y.$$

Teorema 5.1.2. *[7] Seja (X, q) um espaço quase-métrico. Então $\inf\limits_{\tau\in T(x,y)} S_{q,R_{\leq_q}}(\tau) = q(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*

Prova. Seja C a função definida em 5.1.6. Pode-se afirmar que a função $C(x, y)$ coincide com a quase-métrica $q(x, y)$, dado que:

(i) $C(x, y) = 0$, se $y \in R(x) \Leftrightarrow q(x, y) = 0$, se $y \in R_{\leq_q}(x)$;

(ii) $C(x, y) = q(x, y)$, caso contrário.

Pela desigualdade triangular para cada $x, y \in X$ e para cada $\tau \in T(x, y)$, tem-se que:

$$S_{q,R_{\leq_q}}(\tau) \geq q(x, y).$$

Por outro lado, da desigualdade (5.2) tem-se que

$$q(x, y) \geq \inf_{\tau\in T(x,y)} S_{q,R_{\leq_q}}(\tau) \quad \forall x, y \in X.$$

Portanto $\inf\limits_{\tau\in T(x,y)} S_{q,R_{\leq_q}}(\tau) = q(x, y)$. ■

Proposição 5.1.1. *[7] Seja (X, q) um espaço quase-métrico subseparável. Então existe uma função utilidade semilipschitz para $R_{\leq_q}$.*

Prova. Segue-se da prova do teorema 5.1.1.

Em [18] Rubinov considera os chamados Sistemas Dinâmicos Discretos Dispersos (sistema-D^3) definidos em espaços métricos compactos, que fornecem modelos abstratos de economia dinâmica. Levin investigou em [16] um caso geral e obteve interessantes resultados para espaços métricos não compactos. Romaguera e Schellekens em [7] estendem a teoria de Rubinov-Levin a sistema-D^3 em espaços quase-métricos. Em particular definem e caracterizam um tipo de atrator global de sistema-D^3.

Definição 5.1.9. *[18] Um sistema-D^3 no espaço quase-métrico (X, q) é um mapeamento ponto a conjunto*

$$R : X \twoheadrightarrow 2^X$$

tal que, para cada $x \in X$, $R(x)$ é um subconjunto compacto não vazio do espaço métrico (X, q^s).

Para um R sistema-D^3 em um espaço quase-métrico (X, q), o conjunto $H(R)$ denota a família de todas as funções $\mu \in R^X_{\leq_q}$ que são semicontínuas inferiores em (X, q) e semicontínuas superiores em (X, q^*).

Similarmente a [16, 18] considere-se os seguintes conjuntos :

$$W_\mu = \left\{ x \in X; \mu(x) = \min_{y \in R(x)} \mu(y) \right\};$$

$$W = \bigcap_{\mu \in H(R)} W_\mu.$$

Dado um conjunto $A \subset X$, denota-se o conjunto $R(A)$ como:

$$R(A) := \bigcup_{x \in A} R(x)$$

Observe-se que W_μ está bem definido porque μ é contínua no espaço métrico (X, q^s) e por suposição $R(x)$ é compacto em (X, q^s).

Baseados na definição de mapeamento semicontínuo superior sobre espaços métricos dada em [26], Romaguera e Sanchis propõem em [7] a seguinte definição de mapeamento semicontínuo superior.

Definição 5.1.10. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico, o mapeamento ponto a conjunto*

$$R : X \twoheadrightarrow 2^X$$

é chamado semicontínuo superior (scs), se para cada $x \in X$ e cada q-aberto $G \supset R(x)$, existe uma vizinhança q-aberta V de x, tal que $R(V) \subset G$.

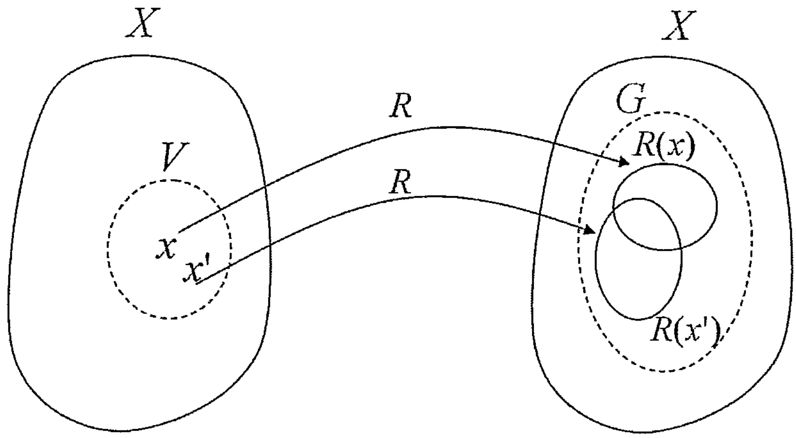

Figura 5.3: Interpretação gráfica de um mapeamento R semicontínuo superior

Exemplo 5.1.3. *Consideremos os mapeamentos ponto a conjunto $R^+ : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ e $R^- : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ definidos no exemplo* 5.1.2. *Considere-se também a quase-métrica do exemplo* 2.1.1, $q(x,y) = \max\{x-y, 0\}$.

Seja $x_0 < 0$ e seja G um q-aberto qualquer tal que $G \supset R(x_0) = \{0\}$. Tomemos um $\epsilon > 0$ tal que $x_0 + \epsilon < 0$ então a q-vizinhança $V(x_0) = \langle -\infty, x_0 + \epsilon\rangle$ é tal que $R^+(V(x_0)) = \{0\} \subset G$. Por outro lado, tomando $x_0 \geq 0$ e para qualquer q-vizinhança $V(R^+(V(x_0))) = V([-1,1])$, $\mathbb{R}$ é uma vizinhança de $x_0 \geq 0$ tal que $R^+(\mathbb{R}) = [-1,1] \subset V(R^+(x_0))$. Concluímos assim que R^+ é semicontínua superior em $(\mathbb{R}, q)$.

Mostraremos agora que R^- não é semicontínua superior em $x_0 = 0$. Seja $\langle -\infty, 1/2\rangle$ a q-vizinhança de $R^-(0) = \{0\}$, logo como qualquer q-vizinhança V de $x_0 = 0$ contém um elemento diferente de zero, segue-se que $R^-(V) = [-1,1] \not\subset \langle -\infty, 1/2\rangle$. Portanto R^- não é semicontínua inferior em $x_0 = 0$.

A seguir propõe-se uma caracterização de mapeamento ponto a conjunto semicontínuo superior. Tal caracterização utiliza as idéias centrais da proposição 1.12 e o corolário 1.13, mostradas em [27].

Proposição 5.1.2. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico, o mapeamento ponto a conjunto $R : X \to 2^X$ é semicontínuo superior (scs) se, e somente se, dado um q-aberto arbitrário V em X, o conjunto $\{x \in X : R(x) \subset V\}$ é q-aberto em X.*

Prova.

$\Rightarrow$) Seja um conjunto q-aberto $V \subset X$, consideremos o conjunto $U = \{x \in X : R(x) \subset V\}$. Mostramos que U é q-aberto em X.

Seja $x_0 \in U$, como R é *scs* e V é um q-aberto contendo $R(x_0)$, então existe um q-aberto $V(x_0)$ em X contendo x_0, tal que $R(V(x_0)) \subset V$. Assim $V(x_0) \subset U$. Portanto U é q-aberto em X.

$\Leftarrow$) Dado $x_0 \in X$ e um q-aberto $V(R(x_0))$ em X contendo $R(x_0)$, pela hipotése o conjunto $U = \{x \in X : R(x) \subset V(R(x_0))\}$ é q-aberto em X com $x_0 \in U$.

Assim $R(U) \subset V(R(x_0))$ e R é *scs* em x_0. Como x_0 é arbitrário em X concluímos que R é *scs*. ■

Corolário 5.1.1. *Seja (X, q) um espaço quase-métrico, o mapeamento ponto a conjunto $R : X \longrightarrow 2^X$ é semicontínuo superior (scs) se, e somente se, para cada conjunto q-fechado V em X, o conjunto $\{x \in X : R(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é q-fechado em X.*

Prova. Seja R *scs* e dado que V é q-fechado, pela proposição (5.1.2) o conjunto $\{x \in X : R(x) \subset X \setminus V\}$ é q-aberto em X. Logo

$$\begin{aligned} X \setminus \{x \in X : R(x) \subset X \setminus V\} &= \{x \in X : R(x) \not\subseteq X \setminus V\} \\ &= \{x \in X : R(x) \cap V \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Então o conjunto $\{x \in X : R(x) \cap V \neq \emptyset\}$ é q-fechado.

De maneira semelhante prova-se a recíproca. ■

Proposição 5.1.3. *[7] Seja R um sistema-D^3 no espaço (X, q). As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) R é semicontínua superior (scs) em (X, q);

(ii) Para quaisquer seqüências em X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tais que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente superior a um ponto $x \in X$ e para cada n, $y_n \in R(x_n)$, existem uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um ponto $y \in R(x)$ tais que $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente superior a y.

Prova.

$(i) \rightarrow (ii)$ Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas seqüências, tais que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente superior a um ponto $x \in X$ e para cada n, $y_n \in R(x_n)$. Suponha que a seqüência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem q^s-ponto de acumulação em $R(x)$. Como $R(x)$ é compacto no espaço métrico (X, q^s), tem-se que existe um número finito de pontos $z_1, z_2 \dots z_m$ em $R(x)$ e existem $r_1, r_2, \dots, r_m$ números reais positivos tais que:

$$R(x) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B^+(z_j, r_j),$$

e da suposição da seqüência não ter ponto de acumulação, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j = 1, 2, \ldots, m$, vale $q(y_n, z_j) > r_j$ sempre que $n > p$.

Dado que $R(x)$ é scs em (X, q), existe então uma bola $B^+(x, \epsilon)$ tal que

$$R(B^+(x, \epsilon)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B^+(z_j, r_j).$$

Seja $n_0 > p$, tal que $x_n \in B^+(x, \epsilon)$, sempre que $n \geq n_0$. Além disso, como $y_n \in R(x_n)$, é verdadeiro que

$$y_n \in \bigcup_{j=1}^{m} B^+(z_j, r_j),$$

para cada $n \geq n_0$. Isto gera uma contradição com o fato de y não ser ponto de acumulação. Portanto existe $y \in R(x)$ que é um q^s-ponto de acumulação de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$(ii) \rightarrow (i)$ Fixemos $x \in X$ e seja G um subconjunto q-aberto de X tal que $R(x) \subseteq G$. Pelo corolário 5.1.1 é suficiente provar que o conjunto $F = \{z \in X / \, R(z) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset\}$ é q-fechado.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em F que é convergente superior ao ponto $x' \in X$, para cada n, seja $y_n \in R(x_n) \cap (X \setminus G)$. Pelo item (ii) e da definição de F, tem-se uma subseqüência $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e um ponto $y \in R(x')$ tal que $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente superior a y. Logo, como $X \setminus G$ é q-fechado e pela proposição 3.3.1 tem-se que $y \in X \setminus G$. Temos que $y \in R(x') \cap (X \setminus G)$, isto mostra que $x' \in F$. Portanto, F é q-fechado. ■

Uma seqüência $\chi := (\chi(t))_{t \in \mathbb{Z}_+}$ em um espaço quase-métrico (X, q) é chamada trajetória do R sistema-D^3 se

$$\chi(t) \in R\left(\chi(t-1)\right), \quad sempre \ \ que \ \ t \geq 1.$$

Pode-se dizer que χ começa no ponto x se $\chi(0) = x$

Definição 5.1.11. *[7] Seja R um sistema-D^3 em um espaço quase-métrico (X, q). A trajetória χ de R é atraída por W se para cada conjunto q^s-aberto G contendo W, χ está contido em G.*

Se toda trajetória χ de R é atraída por W, pode-se dizer que W é um atrator global ou simplesmente um atrator para R.

Definição 5.1.12. *[7] Seja (X, q) um espaço quase-métrico. Uma trajetória $\chi := (\chi(t))_{t \in \mathbb{Z}_+}$ do R sistema-D^3 é **semilimitada**, se χ tem uma subseqüência $(\chi(t_n))_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tal que $\{\chi(t_n) / n \in \mathbb{Z}_+\}$ é um subconjunto limitado do espaço métrico (X, q^s).*

Teorema 5.1.3. *[7] Seja R scs e sistema-D^3 no espaço (X,q). Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) W é um q^s-subconjunto fechado de X;

(ii) Todo q^s-ponto de acumulação de cada trajetória pertence a W;

(iii) Qualquer trajetória semilimitada é atraída por W.

Prova.

(i) Como $W = \bigcap \left\{W_\mu / \mu \in H(R)\right\}$, é suficiente mostrar que para cada $\mu \in H(R)$, W_u é q^s-fechado.

Sejam $\mu \in H(R)$ e $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subseqüência em W_u que é biconvergente ao ponto $x \in X$. Pelo lema 2.1.8, μ é contínua em (X,q^s) e para cada n, $R(x_n)$ é compacto em (X,q^s), então existe $y_n \in R(x_n)$ tal que $\mu(x_n) = \mu(y_n)$. Assim, pela proposição 5.1.3, tem-se uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um ponto $y \in R(x)$ tal que $q(y_{n_k}, y) \to 0$. Então, para um $\epsilon > 0$ arbitrário, há k_ϵ tal que para cada $k > k_\epsilon$

$$\left|\mu(x_{n_k}) - \mu(x)\right| < \epsilon/2 \quad e \quad \mu(y) - \mu(y_{n_k}) < \epsilon/2$$

Logo $\mu(y) - \mu(x) < \epsilon$, isto implica que $\mu(y) \leq \mu(x)$. Além disso como μ é R-crescente e $y \in R(x)$, se deduz que $\mu(x) = \mu(y)$. Isto mostra que $x \in W_\mu$. Portanto W_μ é q^s-fechado para cada μ, e W é q^s-fechado.

(ii) Seja $\chi := (\chi(t))_{t\in\mathbb{Z}_+}$ uma trajetória de R, tendo um q^s-ponto de acumulação x_0. Há então uma subseqüência $(\chi(t_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de $(\chi(t))_{t\in\mathbb{Z}_+}$ com $q^s(x_0, \chi(t_n)) \to 0$. Seja agora $\mu \in H(R)$, defina-se a função Φ_μ em X por

$$\Phi_\mu(x) = \min\left\{\mu(y) : y \in R(x)\right\}.$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, existe $y_n \in R(\chi(t_n))$ tal que $\Phi_\mu(\chi(t_n)) = \mu(y_n)$. Pela proposição 5.1.3, se tem uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}_+}$ e um ponto $y \in R(x_0)$ tal que $q(y_{n_k}, y) \to 0$. Deste modo,

$$\mu(y_{n_k}) = \Phi_\mu(\chi(t_{n_k})) \leq \mu(\chi(t_{n_k}+1)) \leq \mu(\chi(t_{n_{k+1}})) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Adicionalmente, μ é semicontínua inferior em (X, q) e semicontínua superior em (X, q^*), significando que para um $\epsilon > 0$ arbitrário tem-se:

$$\mu(y) - \mu(y_{n_k}) < \epsilon/2,$$

$$\mu(y_{n_k}) - \mu(x_0) \leq \mu(\chi(t_{n_{k+1}})) - \mu(x_0) < \epsilon/2.$$

Obtém-se, $\mu(y) - \mu(x_0) < \epsilon$, ou ainda $\mu(y) \leq \mu(x_0)$. Consequentemente

$$\Phi_\mu(x_0) \leq \mu(x_0).$$

Por outro lado, $\mu(x_0) \leq \Phi_\mu(x_0)$ porque μ é R-crescente, e assim

$$\mu(x_0) = \Phi_\mu(x_0) \quad \forall \mu \in H(R).$$

Portanto, $x_0 \in W$.

(iii) Seja χ uma trajetória semilimitada em R; pela afirmação (ii) há uma subseqüência de χ que tem um q^s-ponto de acumulação, que pertence a W. Portanto χ é atraído por W. ■

Proposição 5.1.4. *[7] Seja R um sistema-D^3 no espaço (X, q). Se $x_0 \in W$, então existe $y_0 \in R(x_0)$ tal que $\mu(x_0) = \mu(y_0) \quad \forall \mu \in H(R)$.*

Prova. Para cada $\mu \in H(R)$, defina-se o conjunto

$$F_\mu = \{y \in R(x_0) : \mu(y) = \mu(x_0)\}$$

Por suposição $x_0 \in W_\mu$, então $F_\mu \neq \emptyset$, $\forall \mu \in H(R)$. Além disso, $R(x_0)$ é q^s-compacto, μ é contínua em (X, q^s) e cada conjunto F_μ é q^s-compacto. Também se deduz que, dados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in H(R)$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \in H(R);$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{u_i} = F_{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}.$$

Consequentemente $\{F_\mu : \mu \in H(R)\}$ é uma coleção de q^s-subconjuntos compactos de X não vazios, satisfazendo a propriedade de interseção finita.
Assim, há $y_0 \in \bigcap_{\mu \in H(R)} F_\mu$. Portanto, $y_0 \in R(x_0)$ e $\mu(x_0) = \mu(y_0) \quad \forall \mu \in H(R)$. ■

Lema 5.1.1. *[7] Seja R scs e sistema-D^3 no espaço (X, q), $\mu \in H(R)$ fixo, então a função $\Phi_\mu : X \to \mathbb{R}$, definida por*

$$\Phi_\mu(x) = \min \{\mu(y) : y \in R(x)\}$$

para todo $x \in X$, é R-crescente e semicontínua inferior em (X, q).

Prova.

(i) Φ_μ é R-crescente.

Com efeito, sejam $x \in X$ e $z \in R(x)$, logo $\Phi_\mu(x) \leq \mu(z)$. Além disso, $\mu(z) \leq \mu(y) \quad \forall y \in R(z)$, segue que

$$\mu(z) \leq \Phi_\mu(z) \Rightarrow \Phi_\mu(x) \leq \Phi_\mu(z).$$

Portanto, Φ_μ é R-crescente.

(ii) Φ_μ é semicontínua inferior em (X, q).

Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X que é convergente superior ao ponto $x \in X$. Há para cada n, um $y_n \in R(x_n)$ tal que $\Phi_\mu(x_n) = \mu(y_n)$. Pela proposição 5.1.3, tem-se uma subseqüência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e um ponto $y \in R(x)$ tal que $q(y_{n_k}, y) \to 0$. Assim, como $\Phi_\mu(x) \leq \Phi_\mu(y)$, vale

$$\Phi_\mu(x) - \Phi_\mu(x_{n_k}) \leq \mu(y) - \mu(y_{n_k}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Finalmente a semicontinuidade inferior de Φ_μ, resulta da semicontinuidade inferior de μ. ∎

Agora apresentamos uma extensão do conceito de mapeamento semicontínuo inferior a espaços quase-métricos.

Definição 5.1.13. *[7] Seja (X, q) um espaço quase-métrico. O mapeamento ponto a conjunto*

$$R : X \to 2^X$$

é chamado semicontínuo inferior (sci), se dada uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente inferior ao ponto $x \in X$ e dado $y \in R(x)$, então para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in R(x_n)$ tal que a seqüência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente inferior a y.

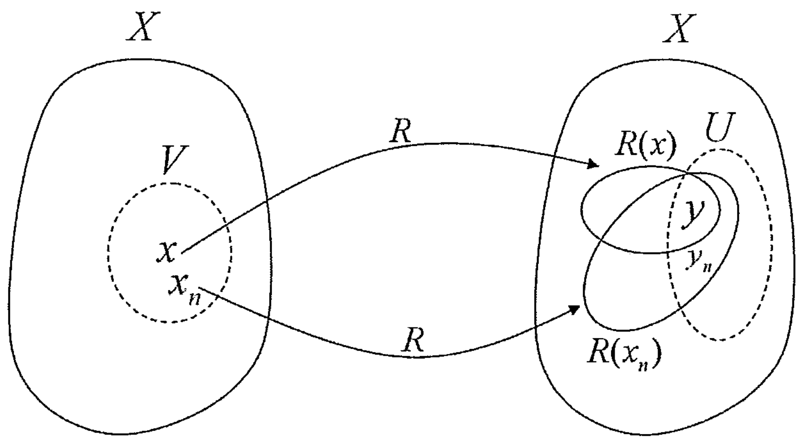

Figura 5.4: Interpretação gráfica de um mapeamento R semicontínuo inferior

Exemplo 5.1.4. *Consideremos os mapeamentos ponto a conjunto* $R^+ : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *e* $R^- : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ *definidas no exemplo* 5.1.2. *Considere-se também a quase-métrica do exemplo* 2.1.1, $q(x, y) = \max\{x - y, 0\}$.

Seja $x_0 = 0$ *e dados a seqüência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $x_n = 1/n$ *convergente inferior como foi mostrada no exemplo* 3.1.1 *e* $y_0 = 1/2 \in R^+(0)$, *não existe* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $y_n \in R^+(x_n) = \{0\}$ *tal que* $y_n \to y_0$. *O mesmo vale para qualquer* $y_0 \in R^+(0)$ *desde que* $y_0 \neq 0$. *Portanto* R^+ *não é sci em* $x_0 = 0$.

Entretanto, R^+ *é sci em* $x_0 \neq 0$. *Dados* $x_n \to x_0$ *e* $y_0 = 0 \in R^+(x_0) = \{0\}$, *existe uma seqüência convergente inferior constante* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $y_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *tal que* $y_n \in R^+(x_n)$ *e* $y_n \to 0$.

Mostraremos agora que R^- *é semicontínua inferior. Seja* $x_0 > 0$, *e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência convergente inferior,* $x_n \to x_0$ *e* $y_0 \in R^-(x_0)$. *Como* $x_0 \neq 0$, *existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $0 \notin B^-(x_0, \epsilon)$. *Pela convergência da seqüência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \in B^-(x_0, \epsilon)$ *para* $n \geq n_0$. *Como* $R^-(x) = [-1, 1]$ *para todo* $x \in B^-(x_0, \epsilon)$, *segue que a seqüência* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por*

$$y_n = \begin{cases} 0, & se\ n < n_0 \\ y_0, & se\ n \geq n_0 \end{cases}$$

é tal que $y_n \in R^-(x_n)$ *e* $y_n \to y_0$. *Sejam agora* $x_0 \leq 0$ *e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $x_n \to 0$ *e* $y_0 = 0 \in R^-(0)$. *Podemos considerar a seqüência constante* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *com* $y_n = 0 \in R^-(x_n)$, *para todo n. Assim,* $y_n \to y_0$. *Portanto* R^- *é sci em* $\mathbb{R}$

Proposição 5.1.5. *[7] Seja R um mapeamento ponto a conjunto scs, sci e sistema-*D^3 *no* *espaço* (X, q). *Sejam* $x_0 \in W$ *e* $y_0 \in R(x_0)$ *tais que* $\mu(x_0) = \mu(y_0) \quad \forall \mu \in H(R)$. *Então* $y_0 \in W$.

Prova. Seja $\mu \in H(R)$, segue-se que a funcão Φ_μ, definida no Lema 5.1.1 é R-crescente e *sci* em (X, q).

(i) Φ_μ é scs em (X, q^*) e assim Φ_μ será em $H(R)$.

Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em X que é convergente inferior ao ponto $x \in X$. Escolhendo $y \in R(x)$ tal que $\Phi_\mu(x) = \mu(y)$ e dado que R é *sci*, existe uma seqüência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \in R(x_n)$ para todo n e $q(y, y_n) \to 0$. Portanto,

$$\Phi_\mu(x_n) - \Phi_\mu(x) \leq \mu(y_n) - \mu(y) \quad \forall n.$$

Consequentemente Φ_μ é *scs* em (X, q^*) porque μ é *scs* em (X, q^*), assim $\Phi_\mu \in H(R)$, $\forall \mu \in H(R)$. Além disso, se $x_0 \in W$ e $y_0 \in R(x_0)$, tem-se a igualdade $\mu(x_0) = \mu(y_0)$, $\forall \mu \in H(R)$.

Em particular se deduz que:

$$\Phi_\mu(x_0) = \Phi_\mu(y_0), \quad \forall \mu \in H(R).$$

Pelo lema 5.1.1 e a definição do conjunto W_μ, é fato que

$$\Phi_\mu(x_0) = \mu(x_0), \quad \forall \mu \in H(R).$$

Portanto

$$\Phi_\mu(y_0) = \mu(y_0), \quad \forall \mu \in H(R).$$

Finalmente conclui-se que $y_0 \in W_\mu$, $\forall \mu \in H(R)$, isto é, $y_o \in W$. ■

Seja R um sistema-D^3 no espaço quase-métrico (X, q). Considera-se o seguinte conjunto segundo [16]

$$E = \{x \in X / \text{ existe uma trajetória } \chi \text{ iniciada em } x \text{ contida em } W\}$$

Teorema 5.1.4. *[7] Seja R scs, sci e sistema-*D^3 *no espaço* (X, q). *Então*

$$W = \left\{ \begin{array}{ll} x \in X / & \textit{existe uma trajetoria } \chi \textit{ iniciada em } x \textit{ e tem a propriedade que} \\ & \mu(\chi(t)) = \mu(x), \forall t \in \mathbb{N} \textit{ e } \forall \mu \in H(R) \end{array} \right\}.$$

Prova. Seja E o conjunto à direita da desigualdade acima. Obviamente $E \subseteq W$. Seja $x_0 \in W$, assim pela proposição 5.1.4 há um $x_1 \in R(x_0)$ tal que $\mu(x_0) = \mu(x_1)$, $\forall \mu \in H(R)$ e, pela proposição 5.1.5, $x_1 \in W$. De forma análoga obtemos uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ em X tal que $x_{n+1} \in R(x_n)$ e $\mu(x_0) = \mu(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ e $\forall \mu \in H(R)$.

Assim a trajetória χ, dada por $\chi(t) = x_t$, $\forall t \in \mathbb{Z}_+$, iniciada em x_0 claramente satisfaz a propriedade

$$\mu(\chi(t)) = \mu(x), \ \forall t \in \mathbb{Z}_+, \ \forall \mu \in H(R).$$

Finalmente, seja x um ponto em X, para o qual há uma trajetória χ de R iniciada em x e tendo a propriedade $\mu(\chi(t)) = \mu(x)$, $\forall t \in \mathbb{Z}_+$, $\forall \mu \in H(R)$.

Como $\chi(t+1) \in R(\chi(t))$ e $\mu(\chi(t+1)) = \mu(\chi(t))$, $\forall t \in \mathbb{Z}_+$, $\forall \mu \in H(R)$, deduz-se que $\chi(t) \in W_\mu$, $\forall t \in \mathbb{Z}_+$, $\forall \mu \in H(R)$, isto é $\chi(t) \in W$.

Assim $x \in E$. ■

5.2 Um Modelo em Teoria da Decisão

O modelo comportamental surgiu a partir da década de 1950 como uma nova visão da teoria administrativa, baseada no comportamento humano dentro das organizações. O comportamento é a maneira pela qual um indivíduo ou uma organização age ou reage em suas interações com o meio ambiente e em resposta aos estímulos que dele recebe.

Em 1947 Herbert A. Simon publica o livro **Comportamento Administrativo** que marca o início da Teoria Comportamental na Administração e a inauguração da Teoria das Decisões.

Segundo Souza et al. em [22], um estudo de modelo comportamental é considerar agentes que não só tentam melhorar ou otimizar, com a escolha das melhores ações, mas também tentar aprender a realizar novas ações, às quais se associam custos e têm implicações sobre o próprio processo de otimização.

Precisamos de um modelo que inclui não só "os custos para levar a cabo uma ação" e dos "benefício desta ação" (uma análise comportamental **"custo-benefício"**), mas também precisamos de modelos que correspondam aos "custos de aprendizagem", ou seja, "custo de saber como realizar uma ação".

Nesta seção apresentamos alguns aspectos de um modelo de decisão que motiva a utilização de função utilidade em espaços quase-métricos para otimizar as ações, mostrando que a função quase-métrica é uma das boas maneiras para modelar os custos de aprendizagem. Para descrever comportamentos humanos, ver [20], e para um modelo geral e para variantes simples de inércia, ver [21]. A seguir mostra-se um modelo tradicional de otimização

$$\max_{x \in X} \; g(x)$$

onde $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função "payoff" (resgate), ou

$$\min_{x \in X} \; f(x)$$

onde $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função custo.

Estas formulações não podem descrever adequadamente o comportamento da maior parte dos agentes, tais como consumidor e produtor, dado que as mesmas abdicam de uma parte da modelagem, a qual refere-se a aprendizagem destas atividades.

A função "payoff" $g(x) = r(x) - c(x)$ pode ser vista como a diferença entre a função receita $r(x)$ e a função custo $c(x)$, por uma unidade de tempo, onde $c(x)$ representa o custo "para realizar" uma nova ação $x \in X$ durante uma unidade de tempo. Ademais, logicamente, temos a propriedade $c(x) \geq 0$ que assegura a não negatividade relacionada à função custo.

Souza et al. em [22] apresentam as seguintes observações:

i) **Realizar** uma nova ação $y \in X$, não é o mesmo que **saber como fazê-la** (que é um processo de aprendizagem complexo). Assim, os custos $c(y)$ para **realizar** uma ação $y \in X$, não são o mesmos que o custo para **saber como fazê-la**. O custo $c(x) = c[R(x)]$ para **fazer** uma ação $x \in X$ é o custo de utilizar o subconjunto dos recursos $R(x) \subset R$, os quais estão disponíveis para seu uso e são necessários para **realizar** esta ação. A capacidade de recurso $R(x)$ necessários para **levar a cabo** uma ação $x \in X$ inclui ferramentas, máquinas, informação, conhecimento, habilidades e competências;

ii) **Saber como fazer** uma nova ação $y \in X$, depende pelo menos da ação anterior $x \in X$. O conjunto capacidade $R(y) \subset R$ necessário para **ser capaz de fazer** uma ação $y \in X$ pode ter uma interseção com a capacidade dos recursos estabelecidos $R(x) \subset R$, necessários para **ser capaz de fazer** a ação $x \in X$.

A interseção $R(x) \cap R(y) \subset K$ não pode ser vazia. O agente terá de deixar de usar os recursos anteriores $R(x) - R(y)$, para saber como começar a utilizar os novos recursos $R(y) - R(x)$ e para manter a capacidade de utilizar os recursos anteriores $R(x) \cap R(y)$. Então os custos para **saber como fazer** a nova ação $y \in X$, dado que o agente tinha anteriormente realizadas ações $x \in X$, é uma função

$$q(x, y) = c[R(x), R(y)]\ ,\ \forall x, y \in X.$$

O custo de capacidade $q(x, y) \geq 0$. Ou seja, os custos para **ser capaz de fazer** uma ação $y \in X$, a partir de fazer uma ação inicial $x \in X$, incluirão:

a. Custos de acessos incluem custos de deixar de usar recursos anteriores $R(x) - R(y)$ e aquisição de novos recursos $R(y) - R(x)$.

b. Os custos de capacidade são custos relacionados com a recolha, combinados com os recursos que devem ser utilizados para produzir uma ação, a partir de uma ação executada previamente.

5.2.1 Um Modelo de Otimização com Aprendizagem

Usualmente, na ciência da decisão ou em algoritmos de otimização, não há custo de aprender **como fazer** uma ação (ou mais geralmente custo para **ser capaz de fazer**). Portanto, o seguinte problema formulado é de maximizar o "payoff", o qual tem presente os custos de aprendizagem.

$$\begin{aligned} \max \quad & g_x(y) \\ s.a. \quad & y \in R(x), \end{aligned}$$

onde $g_x(y) = r(y) - c_x(y) = r(y) - q(x, y)$. Logo o problema é apresentado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \max \quad & r(y) - q(x, y) \\ s.a. \quad & y \in R(x) \subset X, \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde $r(y)$ é uma função receita e $q(x, y)$ representa o custo de realizar a ação y, dado que a ação x foi realizada.

Neste caso a função $q : X \times X \to \mathbb{R}_+$ que representa o custo de capacidade ou aprendizagem é definida por:

$$q(x,y) = \max\{\mu(y) - \mu(x), 0\},$$

sendo $\mu : X \to \mathbb{R}$ uma função utilidade sobre a preferência $R : X \to 2^X$. Neste caso $R(x)$ representa o conjunto de recursos disponíveis para realizar a ação x e $R(y)$ os recursos disponíveis para realizar a nova ação $y \in X$.

Pode-se afirmar que o custo de aprendizagem ou capacidade $q(x,y)$ é uma quase-métrica, i.e., satisfaz as seguinte propriedades:

(i) $\forall x, y,\ \ q(x,y) \geq 0$;

(ii) $\forall x, y \in X,\ \ q(x,y) = q(y,x) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(iii) $\forall x, y, z \in X,\ \ q(x,y) \leq q(x,z) + q(z,y)$.

Assim o problema de otimização com aprendizagem, formulado em (5.3), estará formulado sobre o espaço quase-métrico (X, q).

Capítulo 6

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi introduzido o conceito de espaço quase-métrico para a formulação de certos problemas de otimização. Primeiramente, foi introduzida uma caracterização para os pontos extremos de um subconjunto do espaço quase-métrico, assim como uma extensão de alguns conceitos de espaços métricos, tais como subconjunto limitado superiormente, q-ponto interior, conjunto q-aberto, q-fronteira de um conjunto, q-ponto aderente, o q-fecho de um conjunto, q-ponto de acumulação e o conjunto q-derivado. Todos estes são extensões dos conceitos de espaços métricos levados aos espaços quase-métricos.

Além disso, propõe-se as definições de funções semicontínuas inferior e superior sobre os espaços quase-métricos, mostrando a relação com os espaços métricos. Também foram caracterizados os pontos extremos em um subconjunto de espaços quase-métricos.

Introduzimos o conceito de limite através de uma extensão dos conceitos de espaços métricos, com o objetivo de ter ferramentas adequadas para fazer análise de convergência.

Foram apresentadas condições necessárias e suficientes de completeza superior e inferior, assim como os conceitos de pontos fixos direito e esquerdo e os de contração superior e inferior. Estes conceitos baseiam-se, fortemente, nos respectivos em espaços métricos.

Propusemos um problema de otimização. A partir da definição das funções semilipschitz, pode-se mostrar que o subconjunto destas funções, que se anulam em um ponto fixo, pode ser dotado de uma determinada estrutura de espaço quase-métrico. E, por fim, caracterizamos os pontos de melhor aproximação.

Tratou-se dos conceitos de preferência e de função utilidade, que constituem uma importante ferramenta, particularmente na teoria da decisão. Caracterizou-se uma preferência definida no espaço quase-métrico que admite funções utilidades semilipschitz, para o caso subseparável.

Finalmente se mostra que alguns problemas de otimização formulados em teoria de decisão, são formulados sobre espaços quase-métricos. Isto mostra a importância de ter ferramentas adequadas para o estabelecimeinto de problemas de otimização neste tipo de espaços.

De modo geral, este trabalho contribuiu com algumas definições que estendem os conceitos e proposições de espaços métricos a espaços quase-métricos, que servem como ferramenta para análise de convergência.

NOTAÇÕES

q	:	Quase-métrica em X.
q^*	:	Quase-métrica conjugada em X.
(X, q)	:	Espaço quase-métrico.
P_q	:	Quase-norma.
(X, P_q)	:	Espaço quase-normado.
$\|\| \cdot \|\|_q$	:	Norma definida pela quase-métrica q.
$\leq_q$	:	Ordem parcial ou ordem especializada em X.
$B^+(x, \epsilon)$	:	Bola aberta superior em X.
$B^+[x, \epsilon]$	:	Bola fechada superior em X.
T_0	:	Topologia T_0 .
T_1	:	Topologia T_1.
$K_q(\cdot)$	:	O conjunto $\{y \in X : q(y, \cdot) = 0\}$.
$\min A$	:	Minimos do subconjunto $A \subset X$.
$w \min A$	:	Minimos fracos do subconjunto $A \subset X$.
$p \min A$	:	Minimos puros do subconjunto $A \subset X$.
$\max A$	:	Maximos do subconjunto $A \subset X$.
$w \max A$	:	Maximos fracos do subconjunto $A \subset X$.
$p \max A$	:	Maximos puros do subconjunto $A \subset X$.
$cl_q A$	:	O q-fecho do subconjunto $A \subset X$.
$int_q A$	:	O q-interior do subconjunto $A \subset X$.
$\partial_q A$	:	A q-fronteira do subconjunto $A \subset X$.
$\mathscr{L}_0(q)$	:	Conjunto das funções semilipschitz definidas sobre X.
$R^X_{\leq_q}$	:	Conjunto das funções crescentes segundo a ordem parcial $\leq_q$ sobre X.

2^X	:	Conjunto das partes de X.
$R : X \to 2^X$	:	Mapeamento ponto a conjunto.
$\mathbb{R}_+$	:	Conjunto dos números reais não negativos.
$\mathbb{R}_{++}$	:	Conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{N}$	:	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z}_+$	:	Conjunto dos números inteiros não negativos.

Referências Bibliográficas

[1] WILSON, A. W., "On quasi-metric spaces", *Americam Journal of mathematics*, No.53(1931), pp.675-684.

[2] FLETCHER, P., LINDGREN, W. F., *Quasi-uniform spaces.* Dekker: New York, USA, 1982.

[3] SCHELLEKENS, M., "On upper weightable spaces", *in: Proc. 11th Summer Conference on General Topology and Applications.*, No.806(1996), pp.384-363.

[4] CHEN, S.-A., LI, W., ZOU, D., et al., "Fixed point theorems in quasi-metric spaces", *Sixth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, (2007), pp.2499-2504.

[5] CHEN, S.-B., TIAN, S. P., MAO, Z. Y., "On optimization problems in quasi-metric spaces", *Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, (2006), pp.865-870.

[6] FERRER, J., GREGORI, V., ALEGRE, C., "Quasi-uniform strucutures in linear lattices", *Rocky Mountain J. Math.*, Vol.23 No.3(1993), pp.877-884.

[7] ROMAGUERA, S., SANCHIS, M., "Applications of utility functions defined on quasi-metric spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, No.283(2003), pp.219-235.

[8] KOPPERMAN, R. D., "All topologies come from generalized metrics", *Amer. Math. Monthly*, No.95(1988), pp.89-97.

[9] LIMA, E. L., *Espaços métricos.* Coleção Projeto Euclides, IMPA: Brasil, 1977.

[10] ROMAGUERA, S., SANCHIS, M., "Semi-Lipschitz functions and best approximation in quasi-metric spaces", *Trans. Amer. math. Soc. 103*, (2000), pp.292-301.

[11] ROMAGUERA, S., SCHELLEKENS, M., "The quasi-metric of complexity convergence", *Quaestiones Math.*, No.23(2000), pp.359-374.

[12] CHEN, S., TAN, G., MAO, Z., "On convergence in the quasi-metrics spaces", *Journal of Wuhan University of Sci and Tech.*, Vol.28, No. 4, Dec.2005.

[13] MABIZELA, S., "Characterization of best approximations in metric linear spaces", *Analysis In Theory And Applications*, Vol.19, No.2(2003), pp.121-129.

[14] ROMAGUERA, S., SANCHIZ, "Properties of the normed cone of semilipschitz functions", *Acta Math. Hungar*, Vol. 108, No.12(2005), pp.55-70.

[15] LAIDLER, D., ESTRIN, S., *Introduction to microeconomics.* 3rd. ed.: Cambrige Univ. Press., 1989.

[16] LEVIN, V. L., "Some applications of set-valued mappings in the mathematical economics", *J. Math. Econom.*, No.20(1991), pp.69-87.

[17] PELEG, B., "Utility functions for partially ordered topological spaces", *The Econometric Society*, Vol. 38, No.1(1970), pp.93-96.

[18] RUBINOV, A. M., "Superlinear multivalued mappings and their applications to problems in economics and mathematics", *Nauka Leningrad*, 1980.

[19] ROMAGUERA, S., SCHELLEKENS, M., "Quasi-metric properties of complexity spaces", *Topology Appl 98*, (1999), pp.311-322.

[20] A., S., "Adaptative satisficing processes: How to take benefit of both negative and positive knowledge acquisition", *Working Paper*, 2007.

[21] A., S., B., S., *Variational rationality: a general theory of worthwhile changes with costs to change*, 2008.

[22] DA S. SOUZA, S., OLIVEIRA, P. R., DA CRUZ NETO, J. X., et al., "A proximal method with separable Bregman distances for quasiconvex minimization over the nonnegative orthant", *A ser publicado em European Journal of Operational Research*, 2009.

[23] NAGATA, J.-I., *Modern general topology.* North-Holland Publishing Company: Amsterdam, 1974.

[24] KÜNZIA, P., PAJOOHESHB, H., SCHELLEKENSC, M., "Partial quasi-metrics", *Theoretical Computer Science.*, 365(2006), pp.237-246.

[25] RAFFI, L. M. G., PÉREZ, E. A. S., "Asymetric norms and optimal distance points in linear spaces", *Topology And Its Applications*, No.155(2008), pp.1410-1419.

[26] AUBIN, J.-P., EKELAND, I., *Applied nonlinear analysis.* John Wiley and Sons: France, 1984.

[27] PICCOLI, B., "Funções ponto a conjunto", *Tese M.Sc. Universidade Estadual de Campinas*, 2005.