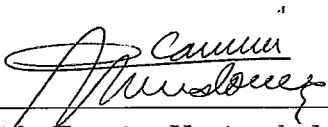


Alguns Resultados em Espessura de Grafos

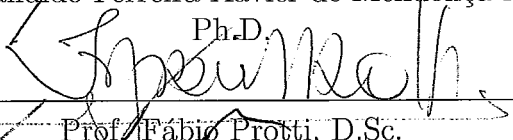
Tania Frossard de Amorim Leite

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

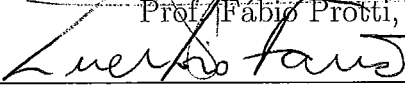
Aprovada por:



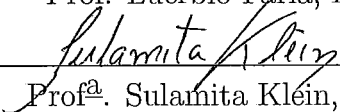
Prof. Candido Ferreira Xavier de Mendonça Neto,
Ph.D.



Prof. Fábio Prottil, D.Sc.



Prof. Luerbio Faria, D.Sc.



Prof^a. Sulamita Kléin, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2005

LEITE, TANIA FROSSARD DE AMORIM
Alguns Resultados em Espessura de Grafos
[Rio de Janeiro] 2005
IX, 288 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação,
2005)
Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE
1 - Espessura de Grafos
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Deus é o que me cinge de força e
aperfeiçoa o meu caminho.

Agradecimentos

À Deus, por mais esta benção, entre muitas que me tem concedido.

Tudo começa no seio familiar, portanto tudo que sou e conquisto devo e agradeço aos meus queridos pais, Jonas Amorim e Luzia Frossard, por terem me orientado na escola mais importante de todas: a vida. Agradeço pelo apoio incondicional, e por acreditar na realização de mais este sonho.

Ao Daniel, por ter sido muito mais que um esposo. Agradeço pela confiança, paciência e carinho. Pessoas como ele, que acredita no desenvolvimento científico e tecnológico deste país, são importantes para transformar sonhos em realidade.

Às minhas filhinhas, Katyslaine e Lenyslaine, pelo simples fato de existirem, recheando a minha vida de muitas alegrias.

Aos meus orientadores, Luérbio Faria e Sulamita Klein, pelo incentivo e paciência que têm tido, em cada encontro, me trazendo até aqui.

Aos professores e funcionários da COPPE/UFRJ, pelo apoio e atenção concedida.

Registro também, neste momento tão especial, o meu carinho pela Tia Edna, que me ajudou a escrever minhas primeiras letrinhas, e a todos os demais professores, que deram continuação nesta tarefa tão espinhosa e tão espetacular.

Finalizo registrando minha enorme gratidão à todos os meus amigos, que me ajudaram nos momentos difíceis. Cada um deles é responsável por uma parte deste trabalho, e a todos eles dedico esta minha vitória.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

Alguns Resultados em Espessura de Grafos

Tania Frossard de Amorim Leite

Abril/2005

Orientadores: Sulamita Klein

Luérbio Faria

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho descreve dois conceitos importantes relativos à espessura de um grafo. A espessura de um grafo $G = (V, E)$ é o número mínimo de subgrafos planares necessários para decompor o grafo G . O primeiro conceito mostra uma fórmula para a espessura de um grafo completo K_n em função do número n de vértices, exibindo os passos da decomposição deste grafo. O segundo conceito apresenta uma prova da NP-completude do problema de decisão de espessura, mesmo considerando $k = 2$, onde k é o tamanho da espessura de um grafo G .

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

Some Results About Thickness of Graphs

Tania Frossard de Amorim Leite

April/2005

Advisors: Sulamita Klein

Luérbio Faria

Department : Computing and Systems Engineering

This work describes two important signification about thickness of graphs. The thickness of a graph $G = (V, E)$ is the minimum number of planar subgraphs needed to decompose the graph G . The first shows a formula for thickness of a complete graph K_n , showing the steps of decomposition this graph. The second shows a proof of the NP completeness of the decision problem THICKNESS, even regarding $k = 2$, where k is the size of thickness of the graph G .

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivação	1
1.2	Definições Básicas da Teoria dos Grafos	3
1.3	Espessura de Grafos	8
2	A espessura do grafo completo	10
2.1	Modificação Fundamental	26
3	1º caso: $n = 6p + 4$, p ímpar e $p \geq 3$	29
3.1	Subcaso $p = 3$: Decomposição do K_{22}	29
3.2	Subcaso p ímpar com $p \geq 5$	34
3.2.1	Um exemplo do caso p ímpar, com $p \geq 5$: A decom- posição de K_{34}	38
4	2º caso: $n = 6p + 4$ e $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$	53
4.1	1º Subcaso: $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$, desde que $p \neq 3 * 2^q$ ou $q < 3$	53
4.1.1	Exemplo do caso $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$, desde que $p \neq 3 * 2^q$ ou $q < 3$: Decomposição do K_{40}	57
4.2	2º Subcaso: $p = 3 * (2^q)$, com $q \geq 3$	62
4.2.1	Exemplo do caso $p = 3 * 2^q$ e $q \geq 3$: Decomposição do K_{148}	67

5	3º caso: $n = 6p + 4$ e $p = 2^q$, com $q \geq 4$	93
5.1	1º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 2$	93
5.2	2º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 4$	97
5.3	3º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 8$	107
5.4	4º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 2^q$, $q \geq 4$	116
5.4.1	Exemplo do caso $p = 2^q$ com $q \geq 4$: Decomposição do K_{100}	120
6	A Complexidade da Espessura	138
6.1	O grafo H_1	141
6.2	O grafo H_2	142
6.3	O grafo H_3	144
6.4	O grafo H_4	146
6.5	O grafo H_5	150
6.6	O grafo H_6	152
6.7	Uma instância especial H de ESPESSURA	155
6.8	ESPESSURA é NP-completo	158
7	Conclusão	162
A	Anexo 1	163
A.1	Grafos intermediários da decomposição do K_{40}	163
A.1.1	Desenhos $C_{r,1}, C_{r,2}, C_{r,3}, C_{r,4}, C_{r,5}, C_{r,6}$	164
A.1.2	Grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6	167
A.1.3	Grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6 após a Modificação Fundamental	170
A.1.4	Grafo suplementar G_7	175

A Anexo 2	178
A.1 Grafos intermediários da decomposição do K_{148}	178
A.1.1 Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 1, \dots, 24$	181
A.1.2 Grafos G_1, \dots, G_{24}	185
A.1.3 Grafos G_1, \dots, G_{24} , após a Modificação Fundamental . .	209
A.1.4 Grafo suplementar G_{25}	235
A.1.5 Modificação adicional efetuada em G_4 , G_{22} e G_{19} . . .	238
A.1.6 Distribuição das arestas restantes em G_r , com $r =$ $1, \dots, 24$	241
A Anexo 3	242
A.1 Grafos intermediários da decomposição do K_{100}	242
A.1.1 Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 1, \dots, 16$	244
A.1.2 Grafos G_r , com $r = 1, \dots, 16$	247
A.1.3 Grafos G_r , com $r = 1, \dots, 16$, após a Modificação Fun- damental	263
A.1.4 Grafo suplementar G_{17}	281
A.1.5 Modificação adicional efetuada nos grafos G_4 e G_{16} . .	284
A.1.6 Distribuição das arestas restantes em G_r , com $r =$ $1, \dots, 16$	286

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Nos circuitos VLSI, um chip consiste de diversas camadas, cada uma com um mesmo conjunto de pontos alinhados verticalmente. Nos desenhos deste tipo de circuito, costuma-se representar o chip por um grafo, onde os vértices representam os componentes do circuito, e as arestas ligam os pares de componentes adjacentes. Naqueles circuitos, cujo grafo de representação possui cruzamentos indesejados, utiliza-se na prática, mais de uma camada em seu desenho, onde em cada camada é desenhado um subgrafo planar do grafo de origem, e a aresta que causava o cruzamento em uma camada é colocada em uma camada adicional.

O problema de conhecer o número mínimo de camadas necessárias à confecção de um circuito, de modo que em cada uma delas não exista cruzamento de arestas, resume-se no problema de encontrar o valor da *espessura* do grafo de representação do circuito, de cujo assunto tratamos.

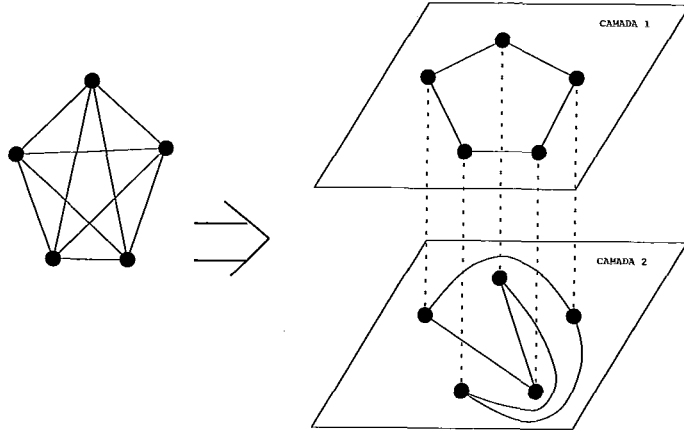


Figura 1.1: Representação gráfica de um circuito integrado com duas camadas, cujo grafo de representação é o K_5 .

A espessura de um grafo G é o número mínimo de subgrafos planares necessários para decompor o grafo G .

O valor da espessura já foi determinado, anteriormente, para algumas classes de grafos conhecidas.

Para o grafo bipartido completo K_{n_1, n_2} , temos por [5] que $t(K_{n_1, n_2}) = \lceil \frac{n_1 \cdot n_2}{2(n_1 + n_2 - 2)} \rceil$, exceto possivelmente quando n_1 e n_2 são ambos ímpares, assumindo $n_1 \leq n_2$, e existe um inteiro k tal que $n_2 = \lfloor \frac{2k(n_1 - 2)}{n_1 - 2k} \rfloor$. A espessura do hipercubo de dimensão n é $t(Q_n) = \lceil \frac{n+1}{4} \rceil$, como mostra [7].

Nesta dissertação, nós mostramos a prova da determinação do valor da espessura do grafo completo K_n , dada por $t(K_n) = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$, para $n \neq 9$ e $n \neq 10$; além disso $t(K_9) = t(K_{10}) = 3$. Mostramos ainda, que o problema da determinação do valor da espessura de um dado grafo G é NP-completo.

No capítulo 2 mostramos a estrutura da decomposição do grafo completo K_n , onde $n = 6p + 4$, em $p + 1$ subgrafos planares. Este problema é dividido

em 3 casos. O primeiro destes casos é quando p é ímpar, com $p \geq 3$. Este caso é discutido no capítulo 3. O segundo caso trata de $p = 2^q(2r+1)$, com $r \geq 1$, que discutimos no capítulo 4. O terceiro e último caso da decomposição de K_n é quando $p = 2^q$, e este é tratado no capítulo 5.

No capítulo 6 mostramos que o problema da Espessura é NP-completo.

A escolha do tema desta dissertação foi realizada em função do interesse prático da matéria e da importância e dificuldade dos artigos estudados. A história da determinação da *espessura* do K_n dependeu da sobreposição de quatro [2], [3], [4], [1] artigos, e o estabelecimento da NP-completude da *espessura* mínima [10] de um grafo consistiu de um resultado forte, onde a dificuldade é encontrada mesmo em decidir se a *espessura* de um grafo é menor ou igual a 2.

Localmente, esta dissertação é importante em descortinar para um grupo brasileiro de pesquisadores em planaridade, um assunto de reconhecida importância estratégica dentro da arquitetura de circuitos integrados.

1.2 Definições Básicas da Teoria dos Grafos

Um *grafo* G é um par $G = (V, E)$ de conjuntos, onde V é um conjunto não vazio e finito e E é um conjunto de pares não ordenados e distintos dos elementos de V . Aos elementos de V chamamos *vértices*, e aos elementos de E chamamos *arestas*. Normalmente, chamamos n o número de vértices e m o número de arestas do grafo G .

Denomina-se *complemento* de um grafo $G = (V, E)$ ao grafo \overline{G} , o qual possui o mesmo conjunto de vértices de G e tal que para todo par de vértices

distintos $v, w \in V$, tem-se que (v, w) é aresta de \overline{G} se e somente se não o for de G .

Se $(u, v) \in E(G)$, dizemos que u é *adjacente* a v , e que v é adjacente a u , e ainda que (u, v) é *incidente* a u e a v .

Dado v um vértice de G , chamamos de *vizinhança* de v o conjunto $viz(v) = \{u \in V(G) / (v, u) \in E(G)\}$. O *grau* $d(v)$ é a cardinalidade do conjunto $viz(v)$.

Um *laço* é uma aresta associada a um par de vértices idênticos. Dizemos que um grafo G admite *arestas múltiplas* se G possui duas arestas associadas com o mesmo par de vértices. Um grafo é dito ser *simples* se ele não tem arestas múltiplas nem laços.

Dizemos que H é um *subgrafo* do grafo G se H é um grafo e $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

Dados dois grafos H_1 e H_2 , dizemos que a *união* dos grafos H_1 e H_2 é o grafo G tal que $V(G) = \{u / u \in V(H_1) \vee u \in V(H_2)\}$ e $E(G) = \{(v, w) / (v, w) \in E(H_1) \vee (v, w) \in E(H_2)\}$. Por outro lado, uma *decomposição* de um grafo G em dois subgrafos H_1 e H_2 é tal que $V(H_1) = V(H_2) = V(G)$ e se $(u, v) \in E(G)$ então ou $(u, v) \in E(H_1)$ ou $(u, v) \in E(H_2)$, nunca em ambos.

Se n é um inteiro positivo, o grafo *completo* n , denotado por K_n , é o grafo simples com n vértices tal que se u e v são vértices de K_n , então $(u, v) \in E(K_n)$.

Dado G um grafo, chamamos um *desenho* $D(G)$ a uma representação

geométrica de G em uma superfície. Em nosso estudo, consideraremos a superfície como sendo o plano.

Dado um desenho $D(G)$, uma *face* f é um subconjunto do plano delimitado por uma curva contendo vértices e arestas do grafo G . Chamamos $d(f)$, o *grau da face* f , ao número de arestas da curva que define a face f .

Um *cruzamento* é o ponto em comum entre duas arestas, desde que este ponto não seja um vértice. Um *desenho simples* de um grafo G é um desenho de G no plano tal que nenhuma aresta possui cruzamento consigo própria, arestas incidentes ao mesmo vértice não possuem cruzamentos em comum, um par de arestas pode compartilhar somente um cruzamento, arestas não interceptam vértices e não mais que duas arestas compartilham um cruzamento. Um *desenho ótimo* de um grafo G é um desenho de G com o número mínimo de cruzamentos.

Um grafo G é dito *planar* se o número de cruzamentos em um desenho ótimo de G é zero, caso contrário dizemos que G é *não planar*.

Dado um grafo planar G , nós definimos o grafo *dual* de G , denotado por G^* , da seguinte forma: cada face f de G corresponde a um vértice f^* de G^* , e dois vértices f^* e g^* são unidos por uma aresta e^* em G^* se e somente se as faces f e g são separadas por uma aresta e em G .

Lema 1.1 *Seja $G = (V, E)$ um grafo com $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, e m arestas. Então $\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$.*

Prova: Basta observar que cada aresta $(v_k, v_j) \in E(G)$, com $k, j \in \{1, \dots, n\}$, caso ela exista, será incidente ao vértice k e ao vértice j , e portanto

será contada uma vez em $d(k)$ e uma vez em $d(j)$. Isto nos dá que:

$$\frac{\sum_{i=1}^n d(v_i)}{2} = m, \text{ e portanto } \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m. \quad \square$$

Lema 1.2 *Se $G = (V, E)$ é um grafo com n vértices, m arestas e f faces, então $\sum d(f) = 2m$.*

Prova: Seja G^* o grafo dual de G . Então:

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) = 2 |E(G^*)|.$$

Como cada aresta de G corresponde a uma aresta de G^* , temos:

$$|E(G^*)| = |E(G)| = m, \text{ e portanto, } \sum_{f \in F(G)} d(f) = 2m. \quad \square$$

Teorema 1.3 (Teorema de Euler) *Se $G = (V, E)$ é planar e conexo, com F o conjunto de faces de G , então $|F| + |V| = |E| + 2$.*

Prova: A prova deste teorema será feita por indução em E .

Se $|E| = 0$, então como G é conexo, então $|V| = 1$ e $|F| = 1$, e portanto, $|F| + |V| = 1 + 1 = 2 = 0 + 2 = |E| + 2$.

Se $|E| \geq 1$, distinguiamos dois casos: caso 1) G não possui ciclos; caso 2) G possui ciclos.

No caso 1, como G não possui ciclos, então $|V| = |E| + 1$ e $|F| = 1$. Logo, $|F| + |V| = |E| + 1 + 1 = |E| + 2$.

No caso 2, como G possui ciclos, considere e uma aresta deste ciclo. Vamos retirar a aresta e de G , e seja $G' = G - e$. Sejam V' , M' e F' o conjunto de vértices, arestas e faces de G' , respectivamente. Daí, $|V'| = |V|$, $|E'| = |E| - 1$ e $|F'| = |F| - 1$, e podemos aplicar a hipótese de indução em G' . Então:

$$\begin{aligned}
|V'| + |F'| &= |E'| + 2 \\
|V| + |F| - 1 &= |E| - 1 + 2 \\
|V| + |F| &= |E| + 2. \square
\end{aligned}$$

Corolário 1.4 *Se $G = (V, E)$ é um grafo planar com n vértices e m arestas, então $m \leq 3(n - 2)$, se $n \geq 3$.*

Prova: Suponha inicialmente que G seja conexo. Neste caso, é claro que como $n \geq 3$, então para cada face f de $F(G)$ temos $d(f) \geq 3$. Daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{f \in F(G)} d(f) &\geq 3 |F(G)| \\
2m &\geq 3 |F(G)| \\
\frac{2m}{3} &\geq |F(G)|
\end{aligned}$$

Como o grafo G é planar, pela Fórmula de Euler 1.3, vale

$$n - m + |F(G)| = 2$$

e portanto

$$\begin{aligned}
n - m + \frac{2m}{3} &\geq 2 \\
3n - 3m + 2m &\geq 6 \\
3n - m &\geq 6 \\
m &\leq 3n - 6 \\
m &\leq 3(n - 2).
\end{aligned}$$

Se G não for conexo, consideremos as componentes conexas C_1, \dots, C_k de G que possuam número de vértices $n_i \geq 3$, onde n_i é o número de vértices da componente C_i , com $i = 1, \dots, k$. Logo, sabemos que em cada componente C_i , com $i = 1, \dots, k$ temos $m_i \leq 3(n_i - 2)$, e portanto:

$$\sum_{i=1}^k m_i \leq 3\left(\sum_{i=1}^k n_i - 2\right)$$

Considerando j o número de componentes conexas de G com menos de 3 vértices, temos que:

$$m \leq \sum_{i=1}^k m_i + j \leq 3\left(\sum_{i=1}^k n_i - 2\right) + j \leq 3(n - 2). \quad \square$$

Corolário 1.5 K_5 é não-planar.

Prova: Suponha, por absurdo, que o grafo K_5 seja planar. Sendo assim, pelo corolário 1.4 temos que $m \leq 3(n - 2)$, onde m e n são, respectivamente, o número de arestas e o número de vértices do grafo K_5 . Mas sabemos que em K_5 tem-se $n = 5$ e $m = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, e $10 > 9$, o que contradiz a hipótese de K_5 ser planar. Portanto, K_5 é não-planar. \square

1.3 Espessura de Grafos

A *espessura* de um grafo G é o número mínimo de subgrafos planares cuja união é G . Denotamos a espessura de G por $t(G)$.

Nesta dissertação vamos mostrar o resultado já conhecido na literatura da determinação da espessura do K_n . O teorema a seguir define um limite inferior para a espessura de um grafo.

Teorema 1.6 *Se $G = (V, E)$ é um grafo com n vértices e m arestas, então*

$$t(G) \geq \frac{m}{3n-6}.$$

Prova: Pelo Corolário 1.4, sabemos que em qualquer subgrafo planar H_i de G , tem-se $|E(H_i)| \leq 3n - 6$. Logo, numa decomposição do grafo G em $t(G)$ subgrafos planares, teremos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t(G)} |E(H_i)| &\leq (3n - 6)t(G) \\ m &\leq (3n - 6)t(G) \\ t(G) &\geq \frac{m}{3n-6}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 1.7 *Um grafo $G = (V, E)$ é planar se e somente se $t(G) = 1$.*

Prova: (\Rightarrow) Seja $G = (V, E)$ um grafo planar. Então existe um desenho plano de G , o que nos dá $t(G) \leq 1$. Como a espessura de um grafo é sempre um número inteiro positivo, temos $t(G) = 1$.

(\Leftarrow) Considere um grafo G tal que $t(G) = 1$. Logo, existe um desenho plano do grafo G , e conseqüentemente, G é planar. \square

Teorema 1.8 *Se H é um subgrafo de G , então $t(G) \geq t(H)$.*

Prova: Seja G um grafo e H um subgrafo de G . Por definição $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Suponha $t(G) = k$. Então existe uma decomposição do grafo G em k subgrafos planares, ou seja, $E(G)$ e $V(G)$ estão todos distribuídos nos k subgrafos planares que decompõem G . Como $E(H) \subseteq E(G)$ e $V(H) \subseteq V(G)$, segue que $E(H)$ e $V(H)$ também estão todos presentes na decomposição de G em k subgrafos planares. Retirando-se, portanto, desta decomposição os vértices e arestas de G que não estão presentes em H , teremos uma decomposição de H em k subgrafos planares, o que nos dá $t(H) \leq k$. Logo $t(H) \leq k = t(G)$, ou seja, $t(G) \geq t(H)$. \square

Capítulo 2

A espessura do grafo completo

Neste capítulo, mostraremos uma decomposição de um grafo completo qualquer, em subgrafos planares, mostrando uma fórmula que nos dá a espessura do grafo K_n , a qual é dada por $t(K_n) = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$, exceto para $n = 9$ e $n = 10$ para os quais $t(K_n) = 3$.

$K_n \times t(K_n)$					
n	$t(K_n)$	n	$t(K_n)$	n	$t(K_n)$
1	1	20	4	39	7
2	1	21	4	40	7
3	1	22	4	41	8
4	1	23	5	42	8
5	2	24	5	43	8
6	2	25	5	44	8
7	2	26	5	45	8
8	2	27	5	46	8
9	3	28	5	47	9
10	3	29	6	48	9
11	3	30	6	49	9
12	3	31	6	50	9
13	3	32	6	51	9
14	3	33	6	52	9
15	3	34	6	53	10
16	3	35	7	54	10
17	4	36	7	55	10
18	4	37	7
19	4	38	7	$6p + m, m = -1, 0, 1, 2, 3, 4$	$p + 1$

TAB 1. Valores da espessura $t(K_n)$ para $n := 1, 2, 3, \dots, 6p + m$.

Teorema 2.1 *Se $n \leq 4$ então $t(K_n) = 1$.*

Prova: A figura 2.1 mostra um desenho simples do grafo K_4 sem cruzamento de arestas. Logo K_4 é planar, o que implica em $t(K_4) = 1$, pelo teorema 1.7. Combinando este resultado com o teorema 1.8 concluímos a prova. \square

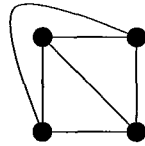


Figura 2.1: Desenho plano do grafo K_4 .

Teorema 2.2 *Se $n = 5, 6, 7, \text{ ou } 8$, então $t(K_n) = 2$.*

Prova: Pela decomposição de K_8 em dois subgrafos planares, como mostra a figura 2.2, temos $t(K_8) \leq 2$. Pelo corolário 1.5 e teoremas 1.7 e 1.8 temos o resultado. \square

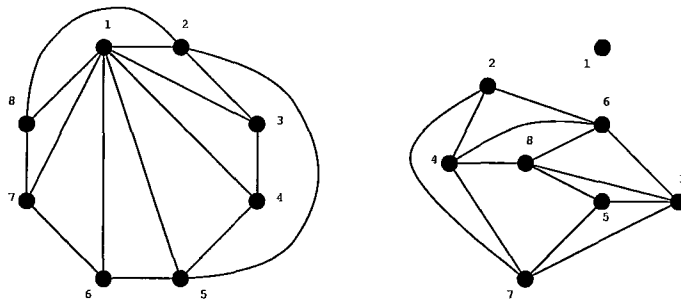


Figura 2.2: Decomposição do K_8 em 2 subgrafos planares.

O lema 2.3, a seguir, possui uma prova muito difícil e foi anteriormente estudada por dois autores [2] e [12], um dos quais foi W. T. Tutte [12] que escreveu em 1963 um artigo contendo 12 páginas sobre o tema.

Lema 2.3 Se $G = (V, E)$ é um grafo planar, e $|V| \geq 9$, então o grafo que representa o complemento de G é não-planar.

Prova: \square

Teorema 2.4 Se $n \geq 9$ então $t(K_n) \geq 3$.

Prova: Decorre do lema 2.3, que não é possível a decomposição do grafo K_n , com $n \geq 9$, em 2 subgrafos planares. Daí, $t(K_n) \geq 3$. \square

Teorema 2.5 Se $n = 9$ ou $n = 10$, então $t(K_n) = 3$.

Prova: Pela figura 2.3 e o teorema 1.8, temos $t(K_n) \leq 3$ para $n = 9$ ou $n = 10$. Combinando este resultado com o teorema 2.4, nós concluímos a prova. \square

Teorema 2.6 $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$.

Prova: Qualquer grafo planar com n vértices, $n \geq 3$, e m arestas satisfaz $m \leq 3(n - 2)$, pelo Corolário 1.4.

Sejam $H_1, H_2, \dots, H_{t(G)}$ os $t(G)$ subgrafos geradores de G que definem $t(G)$. Então para cada i temos $m_i \leq 3n - 2$. Como $\sum_{i=1}^{t(G)} m_i = m$ temos que $m \leq (3n - 2)t(G)$.

Em particular, no grafo K_n temos $m = \frac{n(n-1)}{2}$ arestas, e portanto:

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} &\leq 3(n-2)t(K_n) \\ \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} &\leq t(K_n) \end{aligned}$$

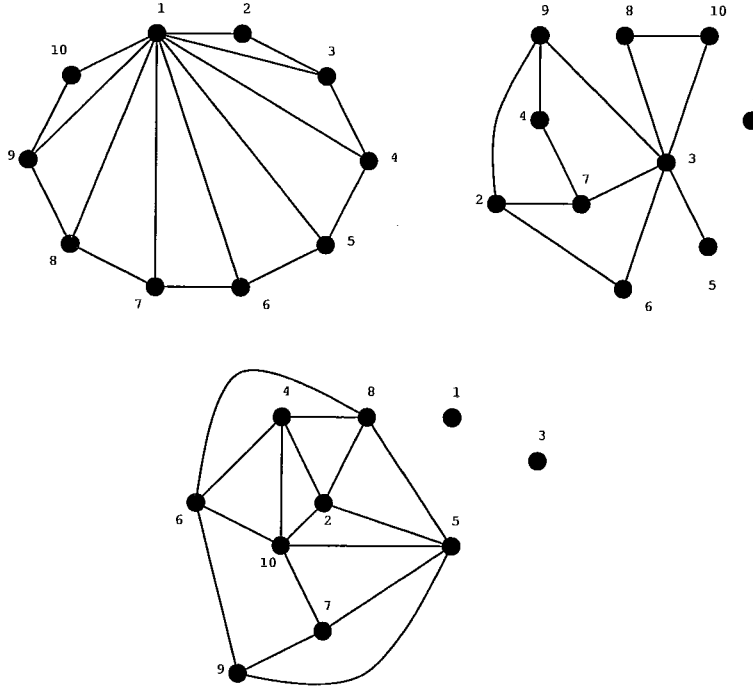


Figura 2.3: Decomposição do K_{10} em 3 subgrafos planares.

Note que, como $n \geq 3$, temos $0 < \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} < 1$. Consideremos os dois seguintes casos: o caso em que $\frac{n(n-1)}{3(n-2)}$ é um número inteiro e o caso em que $\frac{n(n-1)}{3(n-2)}$ não é um número inteiro.

Se $\frac{n(n-1)}{3(n-2)}$ for um número inteiro, então:

$$\frac{n(n-1)}{3(n-2)} < \frac{n(n-1)}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} < \frac{n(n-1)}{3(n-2)} + 1$$

e portanto,

$$\frac{n(n-1)}{3(n-2)} = \lfloor \frac{n(n-1)}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \rfloor$$

Como $t(K_n) \geq \frac{n(n-1)}{3(n-2)}$ temos

$$t(K_n) \geq \lfloor \frac{n(n-1)}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \rfloor.$$

Se $\frac{n(n-1)}{3(n-2)}$ não for um número inteiro, então: podem acontecer duas situações:

Primeira situação:

$$\lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \rceil < \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} < \lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \rceil + 1$$

Assim $\lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \rceil = \lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \rfloor$ e como $t(K_n)$ é inteiro, então

$$t(K_n) \geq \lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \rceil = \lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \rfloor.$$

Segunda situação:

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \leq \lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \rceil$$

Neste caso, como $t(K_n)$ é inteiro, temos que:

$$t(K_n) \geq \lceil \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} \rceil \geq \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \geq \lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{3(n-2)} + \frac{3(n-2)-1}{3(n-2)} \rfloor.$$

Portanto, em todos os casos temos:

$$\begin{aligned} t(K_n) &\geq \lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2} + 3(n-2) - 1}{3(n-2)} \rfloor = \lfloor \frac{n(n-1) + 6(n-2) - 2}{6(n-2)} \rfloor = \lfloor \frac{n^2 - n + 6n - 12 - 2}{6(n-2)} \rfloor = \\ &\lfloor \frac{n^2 + 5n - 14}{6(n-2)} \rfloor = \lfloor \frac{(n+7)(n-2)}{6(n-2)} \rfloor = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor. \quad \square \end{aligned}$$

No que segue, vamos mostrar que se $n \geq 11$, então este limite é justo, ou seja:

$$\text{Se } n \geq 11, \text{ então } t(K_n) = \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor.$$

Para isso, vamos provar um teorema muito difícil, que é válido para K_{6p+4} . O caso geral K_{6p+m} , com $m = 0, 1, 2, 3, 5$ decorrerá deste caso.

Teorema 2.7 $t(K_{6p+4}) = \lfloor \frac{6p+4+7}{6} \rfloor = p + 1$, para todo $p \geq 2$.

Prova: Nossa prova baseia-se na construção do grafo K_{6p+4} utilizando $p + 1$ subgrafos geradores planares de K_{6p+4} , cujos conjuntos de arestas particionam as arestas de $E(K_{6p+4})$.

A base desta construção é uma matriz $A_{p \times p}$, de números inteiros. A matriz $A_{p \times p}$ é usada para definir os desenhos dos subgrafos planares. O elemento $a_{i,j}$ da matriz A se define:

$$a_{i,j} \equiv j + (-1)^i \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pmod{p}, \quad i, j = 1, \dots, p$$

A matriz A também pode ser escrita da seguinte forma: Na primeira linha de A estão $1, 2, \dots, p$. As próximas linhas de A são permutações circulares da primeira linha, correspondentes a soma de uma constante aos elementos da primeira linha. A fim de obtermos a segunda linha da matriz A , basta adicionarmos aos elementos da primeira linha a constante $+1$. Para a terceira linha, adicionamos -1 aos elementos da primeira linha. Para a quarta linha usamos a constante $+2$, para a quinta usamos -2 , e assim sucessivamente. Logo, para a última linha da matriz A adicionamos o número $\frac{p}{2}$ aos elementos da primeira linha se p for par, e $-\frac{p-1}{2}$ se p for ímpar.

Usando a matriz A descrita acima, nós agora construiremos uma segunda matriz: a matriz A' marcando com ($'$) certos elementos de A , como segue: o elemento $a_{i,j}$ da j -ésima coluna de A é marcado em A' se e somente se $a_{i,j} > j$.

Vejam os abaixo a matriz A' obtida por esta construção, para os casos $p = 4$ e $p = 5$:

$$A'_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2' & 3' & 4' & 1 \\ 4' & 1 & 2 & 3 \\ 3' & 4' & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2' & 3' & 4' & 5' & 1 \\ 5' & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3' & 4' & 5' & 1 & 2 \\ 4' & 5' & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Lema 2.8 *A matriz A' admite as seguintes três propriedades:*

1) *Os elementos $1, \dots, p$ aparecem em cada linha e em cada coluna de A' uma única vez;*

2) *O elemento $a_{i,j}$ da j -ésima coluna da matriz A' ($a_{i,j} \neq j$) aparece com a marcação ($'$) se e somente se o elemento j da $a_{i,j}$ -ésima coluna de A' é não-marcado;*

3) *Dois elementos distintos r e s são adjacentes em exatamente duas colunas de A . Em A' esses elementos aparecerão da seguinte forma: somente um dos elementos r ou s é marcado em uma dessas colunas; na outra coluna os elementos r e s são ambos marcados ou ambos não-marcados.*

Prova: Propriedade 1) Seja i uma linha qualquer de A . Pela definição do termo geral $a_{i,j} \equiv j + (-1)^i \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pmod{p}$, vemos que os valores $a_{i,j}$ em uma linha fixada i são todos iguais a $a_{i,j} = j + k$, onde $k = (-1)^i \lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ é uma constante. Como estes valores são definidos por uma classe de equivalência $(\text{mod } p)$, segue que em uma linha fixada i todas as entradas $a_{i,j}$ são distintas, e recebem os valores de todas as classes residuais $(\text{mod } p)$. Por este mesmo motivo, em A' os elementos de uma linha fixada i não se repetem e assumem os valores $1, \dots, p$, já que A' recebe os mesmos elementos de A , podendo assumir somente marcações ($'$) diferenciadas.

Consideremos agora, j como uma coluna arbitrária de A . Sabemos que os elementos desta mesma coluna j nas demais linhas serão obtidos por somar uma constante ao elemento $a_{1,j}$, ou seja:

$$a_{2,j} = a_{1,j} + 1, a_{3,j} = a_{1,j} - 1, \dots, a_{p,j} = a_{1,j} + \frac{p}{2}, \text{ se } p \text{ for par}$$

ou

$$a_{2,j} = a_{1,j} + 1, a_{3,j} = a_{1,j} - 1, \dots, a_{p,j} = a_{1,j} - \frac{p-1}{2}, \text{ se } p \text{ for ímpar.}$$

Como todos os elementos são classes residuais mod p , temos que todos os elementos de uma mesma coluna serão distintos em A , e portanto, distintos também em A' .

Propriedade 2) Pela regra de marcação (') dos elementos $a_{i,j}$ da matriz A' , o elemento $a_{i,j}$ da j -ésima coluna será marcado se e somente se $a_{i,j} > j$. Logo temos $j < a_{i,j}$, o que nos dá que o elemento j da $a_{i,j}$ -ésima coluna de A' não será marcado. Portanto, se na coluna j o elemento $a_{i,j}$ aparecer marcado, então na coluna $a_{i,j}$ o elemento j estará não-marcado.

Propriedade 3) Inicialmente, consideremos p par, os elementos r e s possuindo a mesma paridade e, digamos $r > s$. Neste caso, os elementos r e s serão consecutivos na coluna $\frac{r+s}{2}$, ocorrendo nas linhas $r-s$ e $r-s+1$, e também na coluna $\frac{p+r+s}{2}$, ocorrendo nas linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$, já que:

Coluna $\frac{r+s}{2}$, linhas $r-s$ e $r-s+1$:

$$a_{(r-s, \frac{r+s}{2})} \equiv \frac{r+s}{2} + (-1)^{r-s} \left\lfloor \frac{r-s}{2} \right\rfloor = \frac{r+s+r-s}{2} = r;$$

$$a_{(r-s+1, \frac{r+s}{2})} \equiv \frac{r+s}{2} + (-1)^{r-s+1} \left\lfloor \frac{r-s+1}{2} \right\rfloor$$

$$= \frac{r+s}{2} - \frac{r-s}{2} = \frac{r+s-r+s}{2} = s.$$

Coluna $\frac{p+r+s}{2}$, linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$:

$$\begin{aligned}
a_{(p+r-s, \frac{p+r+s}{2})} &\equiv \frac{p+r+s}{2} + (-1)^{p+r-s} \left\lfloor \frac{p+r-s}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{p+r+s}{2} + \frac{p+r-s}{2} = \frac{2p+2r}{2} = p+r \equiv r \pmod{p};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(p+r-s+1, \frac{p+r+s}{2})} &\equiv \frac{p+r+s}{2} + (-1)^{p+r-s+1} \left\lfloor \frac{p+r-s+1}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{p+r+s}{2} - \frac{p+r-s}{2} = \frac{2s}{2} = s.
\end{aligned}$$

Ainda considerando p par, se r e s não tem a mesma paridade temos que os elementos r e s serão consecutivos na coluna $\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $r-s$ e $r-s+1$, e também na coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$, pois:

Coluna $\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$, linhas $r-s$ e $r-s+1$:

$$\begin{aligned}
a_{(r-s, \lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor)} &\equiv \left\lfloor \frac{r+s}{2} \right\rfloor + (-1)^{r-s} \left\lfloor \frac{r-s}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{r+s-1}{2} - \frac{r-s-1}{2} = \frac{r+s-1-r+s+1}{2} = s;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(r-s+1, \lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor)} &\equiv \left\lfloor \frac{r+s}{2} \right\rfloor + (-1)^{r-s+1} \left\lfloor \frac{r-s+1}{2} \right\rfloor \\
&= \frac{r+s-1}{2} + \frac{r-s+1}{2} = \frac{r+s-1+r-s+1}{2} = r.
\end{aligned}$$

Coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$:

$$\begin{aligned}
a_{(p+r-s, \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor)} &\equiv \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor + (-1)^{p+r-s} \lfloor \frac{p+r-s}{2} \rfloor \\
&= \frac{p+r+s-1}{2} - \frac{p+r-s-1}{2} = \frac{p+r+s-1-p-r+s+1}{2} = s;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{(p+r-s+1, \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor)} &\equiv \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor + (-1)^{p+r-s+1} \lfloor \frac{p+r-s+1}{2} \rfloor \\
&= \frac{p+r+s-1}{2} + \frac{p+r-s+1}{2} = \frac{p+r+s-1+p+r-s+1}{2}
\end{aligned}$$

$$= p+r \equiv r \pmod{p}.$$

Considerando agora p ímpar e os elementos r e s com a mesma paridade, e digamos $r > s$, r e s serão consecutivos na coluna $\frac{r+s}{2}$, ocorrendo nas linhas $r-s$ e $r-s+1$, e também na coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$, pois:

Coluna $\frac{r+s}{2}$, linhas $r-s$ e $r-s+1$:

A prova da ocorrência dos elementos r e s consecutivos na coluna $\frac{r+s}{2}$, nas linhas $r-s$ e $r-s+1$ é análoga à prova feita para o caso p par e r e s possuindo a mesma paridade, já que esta coluna e estas linhas não são escritas em função de p , e portanto, independem da paridade de p ;

Coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$:

$$a_{(p+r-s, \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor)} \equiv \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor + (-1)^{p+r-s} \lfloor \frac{p+r-s}{2} \rfloor$$

$$= \frac{p+r+s-1}{2} - \frac{p+r-s-1}{2} = \frac{p+r+s-1-p-r+s+1}{2} = s;$$

$$a_{(p+r-s+1, \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor)} \equiv \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor + (-1)^{p+r-s+1} \lfloor \frac{p+r-s+1}{2} \rfloor$$

$$= \frac{p+r+s-1}{2} + \frac{p+r-s+1}{2} = \frac{p+r+s-1+p+r-s+1}{2}$$

$$= p+r \equiv r \pmod{p}.$$

Por último, consideremos o caso p ímpar, os elementos r e s de diferentes paridades, e $r > s$. Neste caso r e s serão consecutivos na coluna $\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $r-s$ e $r-s+1$, e também na coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$, pois temos que:

Coluna $\frac{r+s}{2}$, linhas $r-s$ e $r-s+1$:

A ocorrência dos elementos r e s consecutivos na coluna $\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$, nas linhas $r-s$ e $r-s+1$ é provada de forma análoga à do caso p par e r e s de paridades diferente, já que a coluna e as linhas não são escritas em função de p , e portanto, independem da paridade de p ;

Coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$:

$$a_{(p+r-s, \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor)} \equiv \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor + (-1)^{p+r-s} \lfloor \frac{p+r-s}{2} \rfloor$$

$$= \frac{p+r+s}{2} + \frac{p+r-s}{2} = \frac{p+r+s+p+r-s}{2}$$

$$= p + r \equiv r \pmod{p};$$

$$\begin{aligned} a_{(p+r-s+1, \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor)} &\equiv \lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor + (-1)^{p+r-s+1} \lfloor \frac{p+r-s+1}{2} \rfloor \\ &= \frac{p+r+s}{2} - \frac{p+r-s}{2} = \frac{p+r+s - p - r + s}{2} = s. \end{aligned}$$

Portanto, em todos os casos, os elementos r e s serão consecutivos na coluna $\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $r-s$ e $r-s+1$, e também na coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, ocorrendo nas linhas $p+r-s$ e $p+r-s+1$.

Como $r > s$, temos $s < \lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor < r$, e então, pela regra de marcação dos elementos da matriz A' , temos que na coluna $\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$ o elemento r será marcado e o elemento s será não-marcado.

Já na coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$, os elementos r e s receberão marcação de uma das seguintes maneiras:

1) Se $\frac{r+s}{2} \leq \frac{p}{2}$ então

$$\begin{aligned} \frac{r+s}{2} &\leq \frac{p}{2} \\ \frac{r+s}{2} + \frac{p}{2} &\leq \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p \\ \frac{r+s+p}{2} &\leq p \end{aligned}$$

e portanto, temos:

$$\begin{aligned} r &< p < p + s \\ r &< p + s \\ 2r &< r + p + s \\ r &< \frac{r+p+s}{2} \end{aligned}$$

o que nos dá $s < r < \frac{p+r+s}{2}$, onde pela regra de marcação dos elementos da matriz A' temos que ambos os elementos r e s serão não marcados na coluna $\lfloor \frac{p+r+s}{2} \rfloor$.

2) Se $\frac{r+s}{2} > \frac{p}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{r+s+p}{2} &> \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \\ \frac{r+s+p}{2} &> p\end{aligned}$$

isto nos dá que

$$\begin{aligned}\frac{r+s+p}{2} &\equiv \frac{r+s+p}{2} - p \pmod{p} \\ \frac{r+s+p}{2} &\equiv \frac{r+s-p}{2} \pmod{p}.\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}s &< r < p \\ r &< p \\ r &< p + s \\ r + s - p &< 2s \\ \frac{r+s-p}{2} &< s.\end{aligned}$$

Isto mostra que $\frac{r+s-p}{2} < s < r$, e pela regra de marcação dos elementos da matriz A' , temos que os elementos r e s serão ambos marcados na coluna $\frac{p+r+s}{2}$. \square

Vamos construir p grafos planares G_1, \dots, G_p , contendo cada um desses grafos $6p$ vértices $u_i, u'_i, v_i, v'_i, w_i, w'_i$, ($i = 1, \dots, p$). Para a construção de cada grafo G_r usamos somente a coluna r da matriz A' , e construímos 6 desenhos $C_{r,1}, \dots, C_{r,6}$ com p vértices cada. Denotamos os vértices de $C_{r,1}$ pelo símbolo u e sub-índices iguais aos elementos da r -ésima coluna de A' , na mesma ordem e obedecendo a mesma marcação. Os vértices de $C_{r,2}$ e $C_{r,3}$ são obtidos

a partir de $C_{r,1}$ por substituição do símbolo u por v e w respectivamente. Já os desenhos de $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$ são obtidos de $C_{r,1}$, $C_{r,2}$ e $C_{r,3}$, respectivamente, pela marcação dos vértices não marcados e desmarcação dos que já se encontravam marcados nos desenhos de origem.

Observe que inicialmente ficarão faltando 4 vértices em cada um dos subgrafos geradores planares, os quais serão chamados de x , u , v e w . Estes vértices serão tratados posteriormente.

Um grafo adicional G_{p+1} , cuja estrutura não é similar aos demais, será construído ao final.

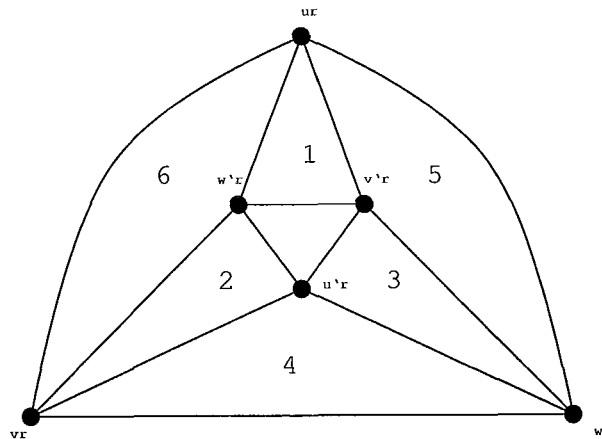


Figura 2.4: Suporte do grafo G_r .

Para a construção do desenho plano de G_r , utilizamos como suporte o desenho 2.4, posicionando sobre o triângulo numerado 1 o desenho $C_{r,1}$, partindo do vértice u_r e ligando todos os vértices deste desenho aos vértices w'_r e v'_r . De forma similar, os desenhos $C_{r,2}, \dots, C_{r,6}$ são colocados nos triângulos 2,3,4,5 e 6, saindo dos vértices v_r , w_r , u'_r , v'_r e w'_r , respectivamente.

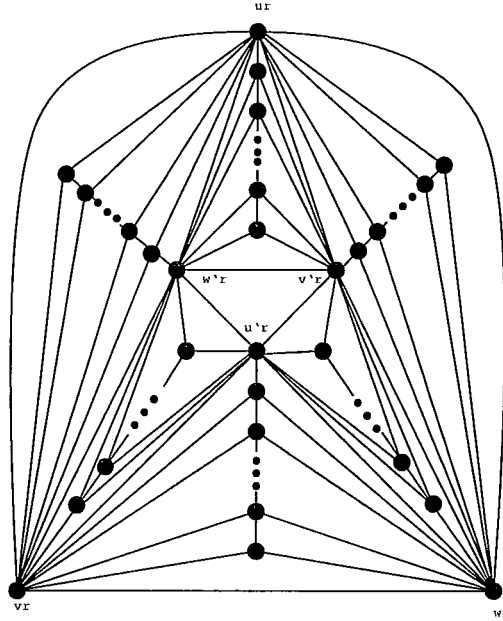


Figura 2.5: Posicionamento dos desenhos $C_{r,1}$ a $C_{r,6}$ no grafo G_r .

Teorema 2.9 A união dos p grafos G_r é um grafo com $6p$ vértices $u_i, u'_i, v_i, v'_i, w_i, w'_i$, ($i = 1, \dots, p$), no qual faltam apenas $3p$ arestas (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) , ($i = 1, \dots, p$).

Prova: Observemos que cada grafo G_r possui os mesmos $6p$ vértices $u_i, u'_i, v_i, v'_i, w_i, w'_i$, ($i = 1, \dots, p$), e portanto, estes serão os vértices presentes em $V(G_1 \cup \dots \cup G_p)$.

Além disso, a propriedade 3 do lema 2.8 nos garante que, dados dois elementos quaisquer distintos r e s de A' , eles serão adjacentes em duas colunas de A' , e em uma destas colunas somente um destes elementos r ou s será marcado, enquanto na outra coluna ou os dois elementos r e s serão marcados, ou ambos serão não-marcados.

Sem perda de generalidade, consideremos uma ocorrência de r adjacente a s na coluna k , $1 \leq k \leq p$, onde r aparece marcado e s aparece não-marcado. Portanto, pelas regras de construção do grafo G_k , a aresta (u'_r, u_s) estará

presente no desenho $C_{k,1}$, a aresta (v'_r, v'_s) estará presente no desenho $C_{k,2}$ e a aresta (w'_r, w'_s) estará presente no desenho $C_{k,3}$.

Pelas mesma regras de construção a aresta (u_r, u'_s) estará presente no desenho $C_{k,4}$, bem como as arestas (v_r, v'_s) e (w_r, w'_s) estarão presentes nos desenhos $C_{k,5}$ e $C_{k,6}$, respectivamente.

Consideremos agora a ocorrência dos elementos r e s adjacentes em uma outra coluna q , $1 \leq q \leq p$. Neste coluna, acontece um dos seguintes casos: 1) os elementos r e s são ambos marcados na coluna q ; 2) os elementos r e s são ambos não-marcados na coluna q .

Se r e s forem ambos marcados na coluna q de A' , então as arestas (u'_r, u'_s) , (v'_r, v'_s) e (w'_r, w'_s) estarão presentes, respectivamente, nos desenhos $C_{q,1}$, $C_{q,2}$ e $C_{q,3}$, e as arestas (u_r, u_s) , (v_r, v_s) e (w_r, w_s) estarão presentes, respectivamente, nos desenhos $C_{q,4}$, $C_{q,5}$ e $C_{q,6}$. Portanto, as arestas (u'_r, u'_s) , (u_r, u_s) , (v'_r, v'_s) , (v_r, v_s) , (w'_r, w'_s) e (w_r, w_s) estarão todas presentes no grafo G_q , e portanto, todas presentes em $G_1 \cup \dots \cup G_p$.

Já se os elementos r e s forem ambos não-marcados na coluna q de A' , então as arestas (u_r, u_s) , (v_r, v_s) e (w_r, w_s) estarão presentes, respectivamente, nos desenhos $C_{q,1}$, $C_{q,2}$ e $C_{q,3}$, enquanto que as arestas (u'_r, u'_s) , (v'_r, v'_s) e (w'_r, w'_s) estarão presentes, respectivamente, nos desenhos $C_{q,4}$, $C_{q,5}$ e $C_{q,6}$, pela regra de construção do grafo G_q . Logo as arestas (u_r, u_s) , (v_r, v_s) , (w_r, w_s) , (u'_r, u'_s) , (v'_r, v'_s) e (w'_r, w'_s) estarão em $G_1 \cup \dots \cup G_p$.

Portanto, em qualquer caso, as arestas (u'_r, u'_s) , (u_r, u'_s) , (u_r, u_s) , (u'_r, u'_s) , (v'_r, v_s) , (v_r, v'_s) , (v_r, v_s) , (v'_r, v'_s) , (w'_r, w_s) , (w_r, w'_s) , (w_r, w_s) , (w'_r, w'_s) estarão em $G_1 \cup \dots \cup G_p$, para todo r e s elementos distintos de A' .

Isto nos dá que em $G_1 \cup \dots \cup G_p$ faltam apenas as $3p$ arestas da forma (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) , $i = 1, \dots, p$. \square

2.1 Modificação Fundamental

Necessitamos alterar os grafos G_r , de tal maneira que seja possível a inserção de um novo vértice x . Para isso, algumas arestas serão removidas, e um trecho do desenho resultante será invertido. O novo vértice x é então conectado aos 6 vértices da face exterior do grafo transformado. A transformação é ilustrada na figura 2.6.

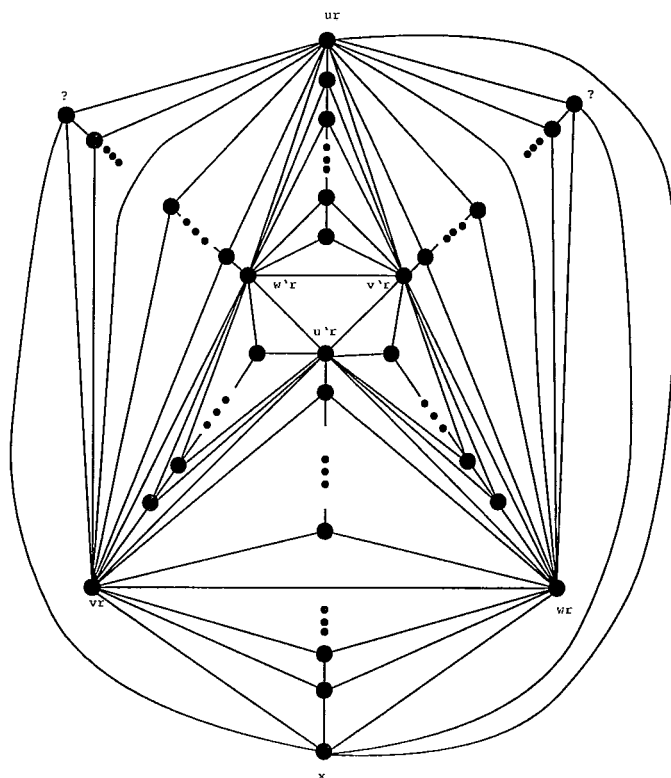


Figura 2.6: Modificação fundamental aplicada no grafo G_r : remoção da aresta que liga os k -ésimo e $(k + 1)$ -ésimo vértices dos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$, e inversão do trecho resultante de modo que o $(k + 1)$ -ésimo vértice destes desenhos seja levado para a fronteira exterior do grafo G_r .

O valor de k , que define o conjunto das arestas que serão removidas, assim como a definição da parte do desenho que receberá a transformação, depende exclusivamente do valor de p , sendo $n = 6p + 4$. Assim, devemos analisar os

três seguintes casos, e seus subcasos, esgotando as possibilidades para p :

- 1) p ímpar e $p \geq 3$;
 - 1.1) $p = 3$;
 - 1.2) $p \geq 5$;
- 2) $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$
 - 2.1) $p \neq 3 * 2^q$ ou $q < 3$;
 - 2.2) $p = 3 * 2^q$, com $q \geq 3$;
- 3) $p = 2^q$;
 - 3.1) $p = 2$;
 - 3.2) $p = 4$;
 - 3.3) $p = 8$;
 - 3.4) $p = 2^q$, com $q \geq 4$.

Em todos os casos, mostraremos a transformação para o grafo K_n , com $n = 6p + 4$, já que todo valor de n pode ser escrito da forma $n = 6p + m$, onde $m = -1, 0, 1, 2, 3, 4$, e para $m = -1, 0, 1, 2, 3$ os mesmos grafos construídos para $m = 4$ podem ser tomados como base para demonstrar o resultado, bastando apenas a remoção de alguns vértices, juntamente com as arestas incidentes a estes.

Observemos que se $m = -1, 0, 1, 2, 3, 4$, como vamos considerar a decomposição feita para o grafo completo com $n = 6p + 4$ vértices em $p + 1$ subgrafos planares, removendo alguns vértices destes $p + 1$ subgrafos, então existe uma decomposição do grafo com $n = 6p + m$, $m = -1, 0, 1, 2, 3, 4$ vértices em $p + 1$ subgrafos planares, o que nos dá que $t(K_n) \leq p + 1$, para $n = 6p + m$ com

$m = -1, 0, 1, 2, 3, 4$. Como, pelo teorema 2.6 vimos que $t(K_n) \geq \lfloor \frac{n+7}{6} \rfloor$ então $t(K_{6p+m}) \geq \lfloor \frac{6p-1+7}{6} \rfloor = p + 1$, e portanto, temos $t(K_n) = p + 1$.

O valor de $m = -1$ pode ser visto como $m = 5$ na classe residual (mod 6), e portanto, o resultado é válido para todo valor de n , com exceção de $n = 9$ e $n = 10$.

Capítulo 3

1º caso: $n = 6p + 4$, p ímpar e $p \geq 3$

Vamos agora exibir os passos da decomposição do grafo K_n , $n = 6p + 4$, em $p + 1$ subgrafos, para o caso onde p é ímpar e $p \geq 3$.

Dividiremos este caso em dois subcasos: No primeiro subcaso, vamos considerar $p = 3$. No segundo subcaso, faremos p ímpar e $p \geq 5$.

3.1 Subcaso $p = 3$: Decomposição do K_{22}

Este subcaso é resolvido por exaustão.

Se $p = 3$, então $n = 6 * 3 + 4 = 22$. Daí devemos mostrar uma decomposição do grafo K_{22} em $3 + 1 = 4$ subgrafos planares.

Consideremos os grafos representados nas figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 como uma decomposição do grafo K_{22} . Isto nos dá que $t(K_{22}) \leq 4 = p + 1$.

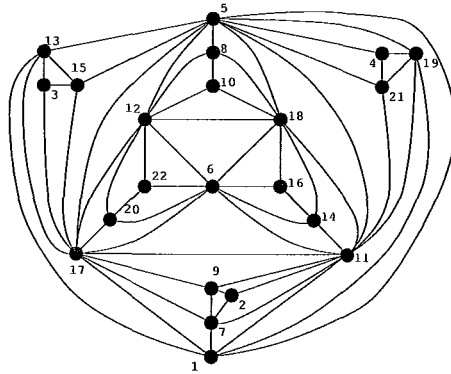


Figura 3.1: Grafo G_1 - Decomposição do K_{22} .

Tabela de Adjacência do subgrafo G_1 :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	5, 7, 11, 13, 17, 19	6
2	7, 9, 11	3
3	13, 15, 17	3
4	5, 19, 21	3
5	1, 4, 8, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 21	11
6	11, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 22	8
7	1, 2, 9, 11, 17	5
8	5, 10, 12, 18	4
9	2, 7, 11, 17	4
10	8, 12, 18	3
11	1, 2, 5, 6, 7, 9, 14, 17, 18, 19, 21	11
12	5, 6, 8, 10, 17, 18, 20, 22	8
13	1, 3, 5, 15, 17	5
14	6, 11, 16, 18	4
15	3, 5, 13, 17	4
16	6, 14, 18	3
17	1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 20	11
18	5, 6, 8, 10, 11, 12, 14, 16	8
19	1, 4, 5, 11, 21	5
20	6, 12, 17, 22	4
21	4, 5, 11, 19	4
22	6, 12, 20	3

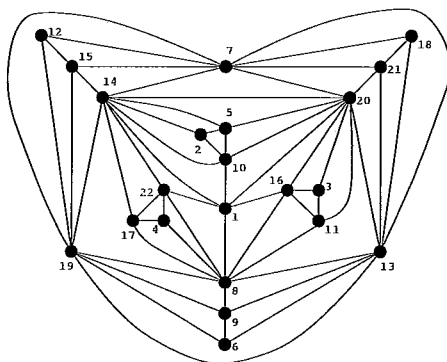


Figura 3.2: Grafo G_2 - Decomposição do K_{22} .

Tabela de Adjacência do subgrafo G_2 :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	8, 10, 14, 16, 20, 22	6
2	5, 10, 14	3
3	11, 16, 20	3
4	8, 17, 22	3
5	2, 10, 14, 20	4
6	9, 13, 19	3
7	12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21	8
8	1, 4, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 22	9
9	6, 8, 13, 19	4
10	1, 2, 5, 14, 20	5
11	3, 8, 16, 20	4
12	7, 15, 19	3
13	6, 7, 8, 9, 18, 19, 20, 21	8
14	1, 2, 5, 7, 10, 15, 17, 19, 20, 22	10
15	7, 12, 14, 19	4
16	1, 3, 8, 11, 20	5
17	4, 8, 14, 22	4
18	7, 13, 21	3
19	6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15	8
20	1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 16, 21	10
21	7, 13, 18, 20	4
22	1, 4, 8, 14, 17	5

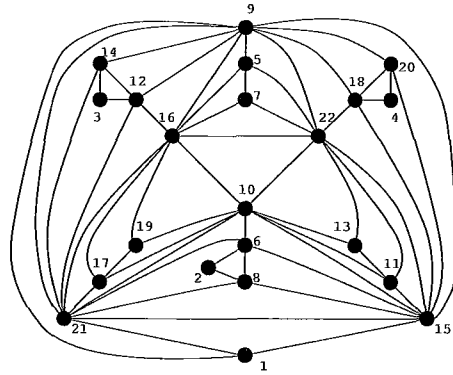


Figura 3.3: Grafo G_3 - Decomposição do K_{22} .

Tabela de Adjacência do subgrafo G_3 :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	9, 15, 21	3
2	6, 8	2
3	12, 14	2
4	18, 20	2
5	7, 9, 16, 22	4
6	2, 8, 10, 21	4
7	5, 16, 22	3
8	2, 6, 15, 21	4
9	1, 5, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22	10
10	6, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 22	9
11	10, 13, 15, 22	4
12	3, 9, 14, 16, 21	5
13	10, 11, 22	3
14	3, 9, 12, 21	4
15	1, 6, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22	10
16	5, 7, 9, 10, 12, 17, 19, 21, 22	9
17	10, 16, 19, 21	4
18	4, 9, 15, 20, 22	5
19	10, 16, 17	3
20	4, 9, 15, 18	4
21	1, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17	10
22	5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 18	9

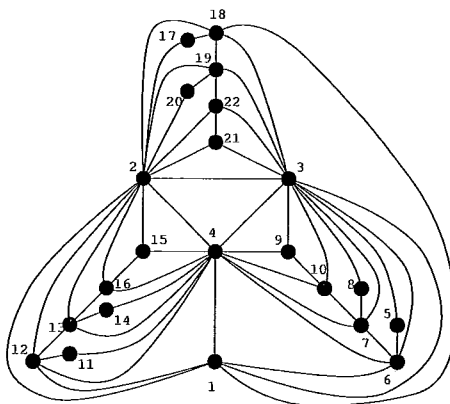


Figura 3.4: Grafo G_4 - Decomposição do K_{22} .

Tabela de Adjacência do subgrafo G_4 :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	2, 3, 4, 6, 12, 18	6
2	1, 3, 4, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22	13
3	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18, 19, 21, 22	13
4	1, 2, 3, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16	13
5	3, 6	2
6	1, 3, 4, 5, 7	5
7	3, 4, 6, 8, 10	5
8	3, 7	2
9	3, 4, 10	3
10	3, 4, 7, 9	4
11	4, 12	2
12	1, 2, 4, 11, 13	5
13	2, 4, 12, 14, 16	5
14	4, 13	2
15	2, 4, 16	3
16	2, 4, 13, 15	4
17	2, 18	2
18	1, 2, 3, 17, 19	5
19	2, 3, 18, 20, 22	5
20	2, 19	2
21	2, 3, 22	3
22	2, 3, 19, 21	4

3.2 Subcaso p ímpar com $p \geq 5$

Se p é ímpar e $p \geq 5$, então construiremos os subgrafos geradores planares, obedecendo os passos descritos anteriormente, e o valor de k que é citado na modificação fundamental será fixado $k = 2$. Portanto, as arestas a serem removidas são as que ligam os segundo e terceiro vértices dos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$, nos grafos G_r , com $r = 2, \dots, p$. Estes vértices correspondem aos vértices das segunda e terceira linhas da matriz A , e estarão marcados ($'$) se e somente se os elementos correspondentes em A' não estiverem, pela regra de construção destes desenhos.

No grafo G_1 não fazemos remoção de arestas, mas somente nos grafos G_2, \dots, G_p .

Após a remoção, a parte resultante dos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$ será invertida e um novo vértice x será inserido na face ilimitada dos grafos G_r , com $r = 1, \dots, p$. Este novo vértice será conectado aos demais vértices desta face ilimitada.

Como resultado desta transformação, temos que o vértice x será conectado a todos os vértices da forma u_i , v_i e w_i , com $i = 1, \dots, p$, já que estes pertencem à face ilimitada de cada grafo G_i , e também será conectado a todo vértice da forma u'_i , v'_i e w'_i , com $i = 1, \dots, p - 1$, já que estes foram transferidos para a fronteira de algum G_i , pela modificação fundamental.

Os únicos vértices que, até o momento, não foram conectados ao vértice x são os da forma u'_p , v'_p e w'_p , já que:

- a) Na construção da matriz A , o primeiro elemento da terceira linha é obtido por adicionar a constante -1 ao primeiro elemento

da primeira linha, que é 1. Portanto, o primeiro elemento da terceira linha será p , já que $0 = p(\text{mod } p)$;

b) Este elemento aparecerá com a marcação ($'$) em A' , já que $p > 1$;

c) Como a terceira linha da matriz A' é a que define o conjunto de vértices que serão transferidos para a fronteira de algum grafo G_i , e sabemos que esta transformação não foi feita em G_1 , temos que o primeiro elemento desta linha, que é p' não foi transferido para a fronteira de nenhum G_i , o que nos dá que os vértices u , v e w que recebem este subscrito não estão, até o momento, conectados ao vértice x .

Resta, portanto, conectar x aos vértices u'_p , v'_p e w'_p e, é claro, aos três vértices u , v e w que serão incluídos posteriormente.

Além disso, para detectar as arestas que foram retiradas dos grafos G_i , basta copiar as segunda e terceira linhas de A , excluindo-se os elementos da primeira coluna, e fazer marcação oposta à que aparece nos elementos correspondentes em A' . Os pares resultantes indicam as arestas que foram removidas durante a modificação fundamental, e portanto, devem ser incluídas no grafo suplementar G_{p+1} :

3	4	...	n	$1'$
$1'$	$2'$...	$n - 2'$	$n - 1'$

Tendo definidas as arestas que devem ser colocadas no grafo suplementar G_{p+1} , podemos então construir os desenhos C_u , C_v , e C_w , que servirão como base para a construção de G_{p+1} .

O primeiro vértice do desenho C_u será u'_p . Os demais vértices obedecem à necessidade já estabelecida pelos pares da tabela acima, lembrando que, após cada par, o próximo vértice será o correspondente ao anterior, com marcação oposta a este. A regra é estendida a todo vértice, exceto u'_1 , já que este aparece duas vezes na tabela anterior, e além disso, precisa ser conectado com o vértice u_1 . Neste caso, o vértice u'_1 terá grau 3 no desenho C_u .

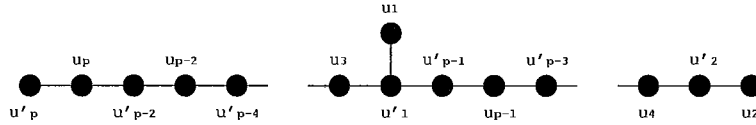


Figura 3.5: Esboço do desenho C_u .

Os desenhos C_v e C_w são construídos de forma análoga.

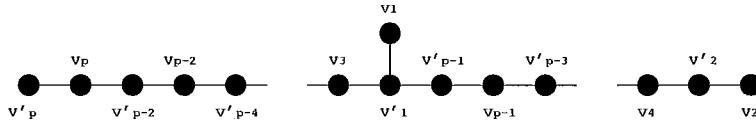


Figura 3.6: Esboço do desenho C_v .

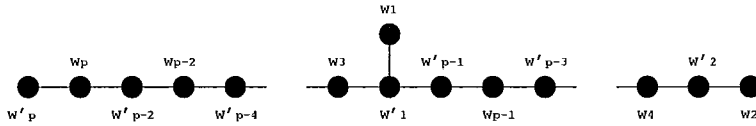


Figura 3.7: Esboço do desenho C_w .

Resta agora a construção do grafo suplementar G_{p+1} . Para isto, posicionamos os desenhos C_u , C_v e C_w sobre o plano, como na figura 3.8, de modo que os vértices u'_p , v'_p e w'_p fiquem na fronteira exterior de G_{p+1} , e os novos três vértices u , v e w estejam entre os desenhos que não recebem seu símbolo. A conexão do novo vértice u com os vértices do desenho C_u será

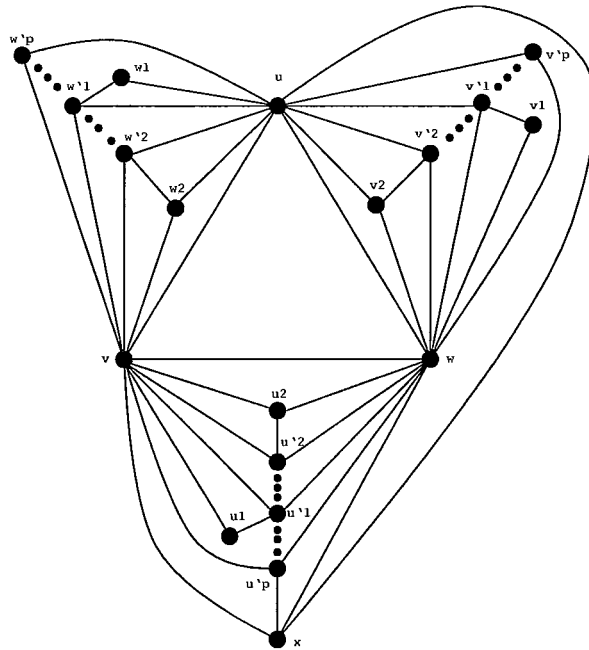


Figura 3.8: Esboço do grafo suplementar - caso p ímpar.

feita nos grafos G_r , $r = 1, \dots, p$, assim como a do vértice v aos do desenho C_v , e a do vértice w aos do desenho C_w .

Restam ainda, distribuir as arestas (u, u_i) , (u, u'_i) , (v, v_i) , (v, v'_i) , (w, w_i) , (w, w'_i) , $i = 1, \dots, p$, além de (u, v_1) , (v, w_1) e (w, u_1) .

Estas arestas serão inseridas entre o 4º e 5º vértices, nos desenhos C_1 ou C_4 no caso do vértice u , C_2 ou C_5 para o vértice v , e C_3 ou C_6 para o vértice w , nos grafos G_r , $r = 1, \dots, p$, contados a partir de u_r ou u'_r , v_r ou v'_r , w_r ou w'_r , respectivamente. Para tanto, copiemos as quarta e quinta linhas da matriz A , e marquemos os elementos obedecendo as três seguintes regras:

- a) Cada par de elementos recebe marcação idêntica a do par correspondente em A' ou marcação oposta a esta;

b) O elemento superior de cada par subsequente é igual ao elemento inferior do par precedente. No entanto, dentre eles, somente um elemento deve receber marcação;

c) A seqüência inicia-se com o par $(3, p - 1)$ e termina com o par $(7, 3)$ com alguma seqüência de marcação.

<i>constante</i>	$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$...	$r = p$
+2	3	$p - 1'$	$p - 5'$...	7
-2	$p - 1$	$p - 5$	$p - 9$...	3

Logo, o vértice u deve ser inserido no grafo G_r , no desenho $C_{r,1}$ ou $C_{r,4}$, exatamente entre os vértices que recebem subscritos e marcações idênticas à da tabela construída pelas regras acima. Da mesma forma, o vértice v será inserido no desenho $C_{r,2}$ ou $C_{r,5}$, e o vértice w no desenho $C_{r,3}$ ou $C_{r,6}$.

A garantia de que todas as arestas restantes são inseridas, se deve às propriedades da matriz A' , que garantem a existência de todos os subscritos $i = 1, \dots, p$ nas duas linhas e, além disso, que eles aparecerão marcados em uma linha se e somente se não estiverem marcados na outra. Além disso, será sempre possível a inserção da aresta (u, v_1) , no grafo G_1 , no desenho $C_{1,4}$, visto que o primeiro par de vértices da tabela acima aparece não marcado e, como em G_1 não houve remoção de aresta, necessariamente estes vértices são adjacentes e encontram-se conectados ao vértice v_1 , por construção.

3.2.1 Um exemplo do caso p ímpar, com $p \geq 5$: A decomposição de K_{34}

Como exemplo do caso p ímpar, com $p \geq 5$, vamos agora mostrar a decomposição do grafo $K_{34} = K_{6p+4}$ em $6 = p + 1$ subgrafos planares,

Inicialmente, construiremos a matriz A

$$a_{i,j} \equiv j + (-1)^i \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pmod{5}, \quad i, j = 1, \dots, 5$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é construir a matriz A' , como segue:

Na coluna j o elemento $a_{i,j}$ aparece marcado ($'$) se e somente se $a_{i,j} > j$

$$A'_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2' & 3' & 4' & 5' & 1 \\ 5' & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3' & 4' & 5' & 1 & 2 \\ 4' & 5' & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Construímos nas figuras 3.9,3.10,3.11,3.12 e 3.13, os desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$, $C_{r,3}$, $C_{r,4}$, $C_{r,5}$, $C_{r,6}$, com $r = 1, 2, 3, 4, 5$:

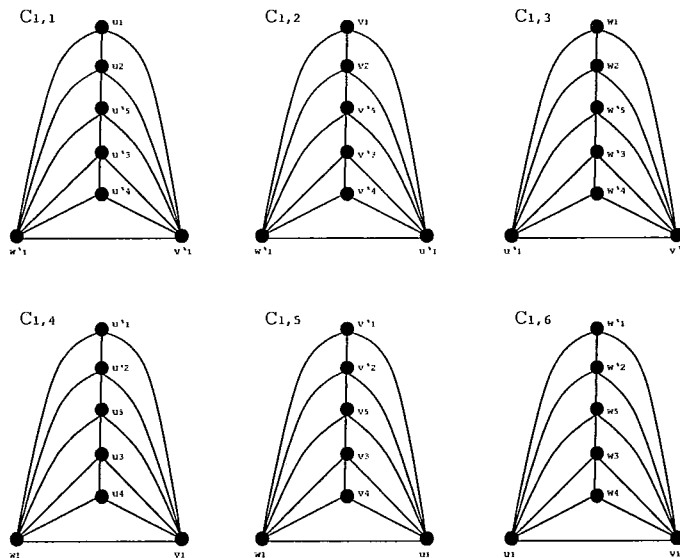


Figura 3.9: Desenhos $C_{1,1}$ a $C_{1,6}$.

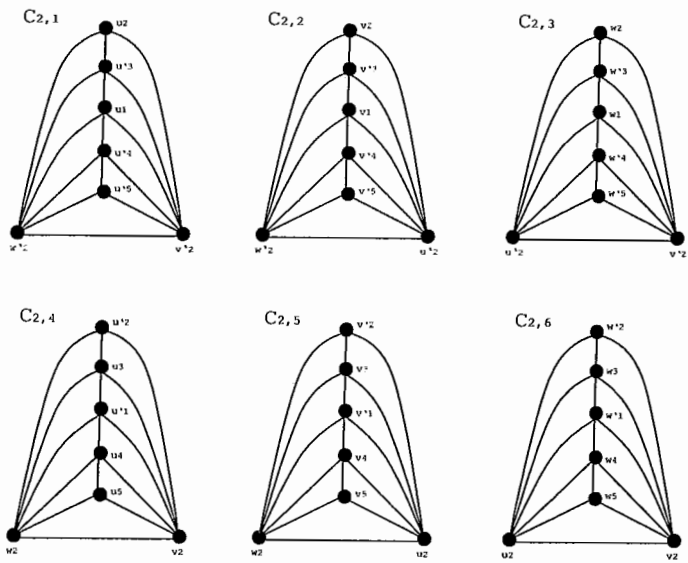


Figura 3.10: Desenhos $C_{2,1}$ a $C_{2,6}$.

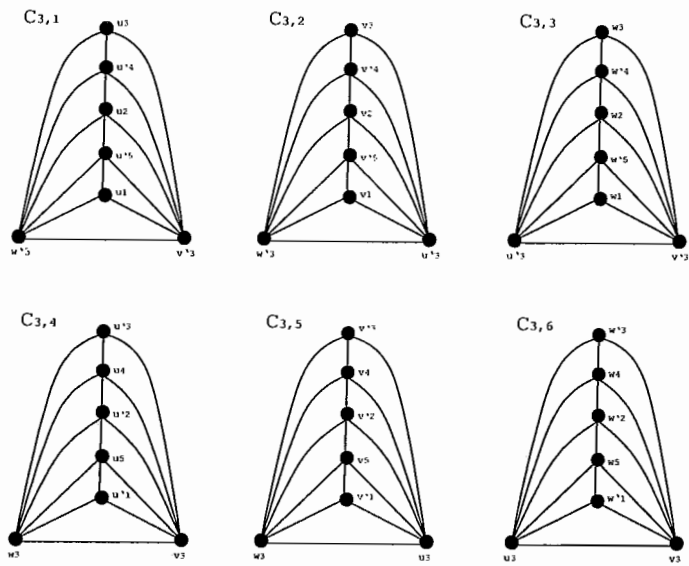


Figura 3.11: Desenhos $C_{3,1}$ a $C_{3,6}$.

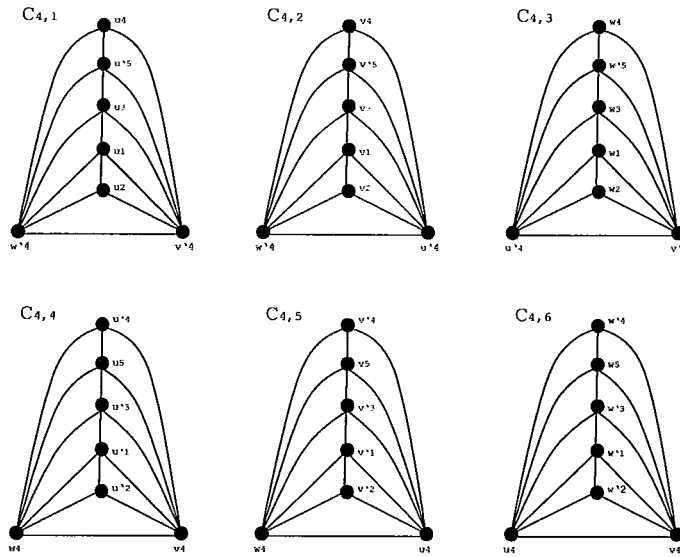


Figura 3.12: Desenhos $C_{4,1}$ a $C_{4,6}$.

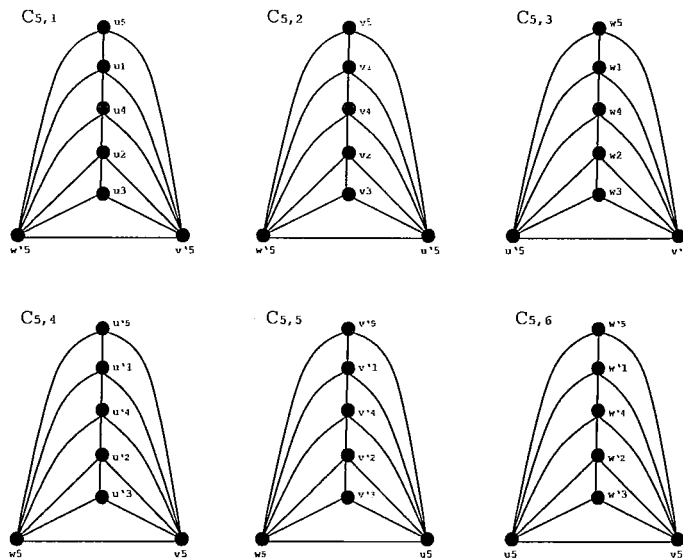


Figura 3.13: Desenhos $C_{5,1}$ a $C_{5,6}$.

Segue agora, nas figuras 3.14,3.15,3.16,3.17 e 3.18 a construção dos grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 sem nenhuma modificação.

Posteriormente faremos a modificação fundamental sugerida no texto.

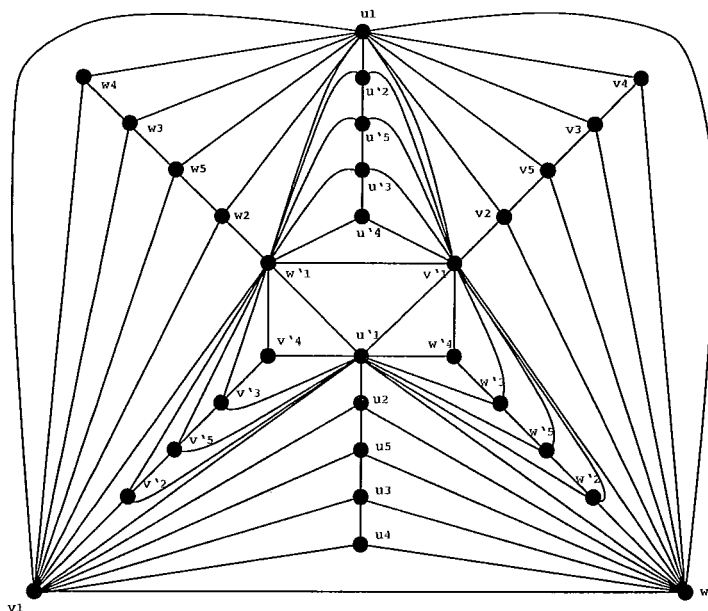


Figura 3.14: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_1 - Decomposição do grafo K_{34} .

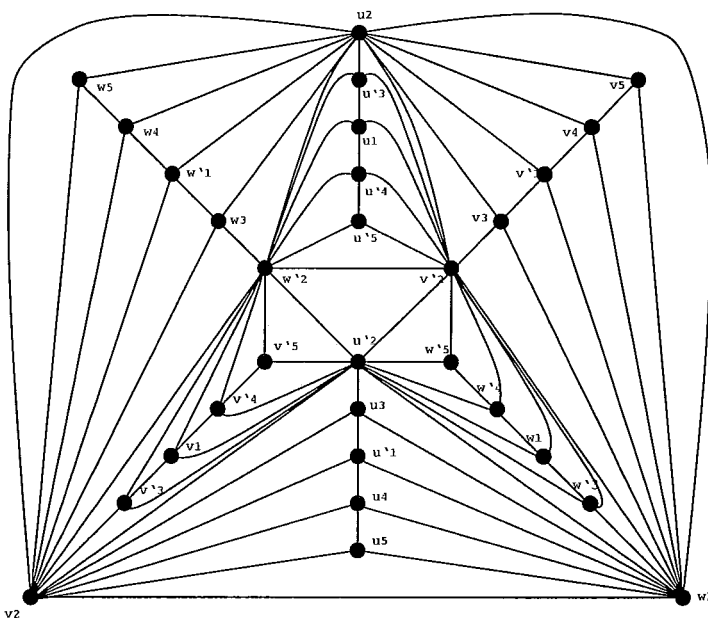


Figura 3.15: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_2 - Decomposição do grafo K_{34} .

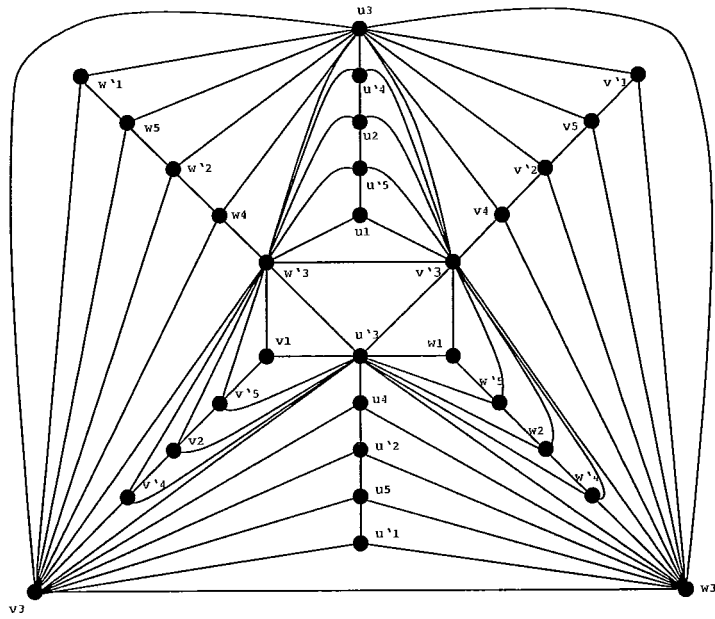


Figura 3.16: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_3 - Decomposição do grafo K_{34} .

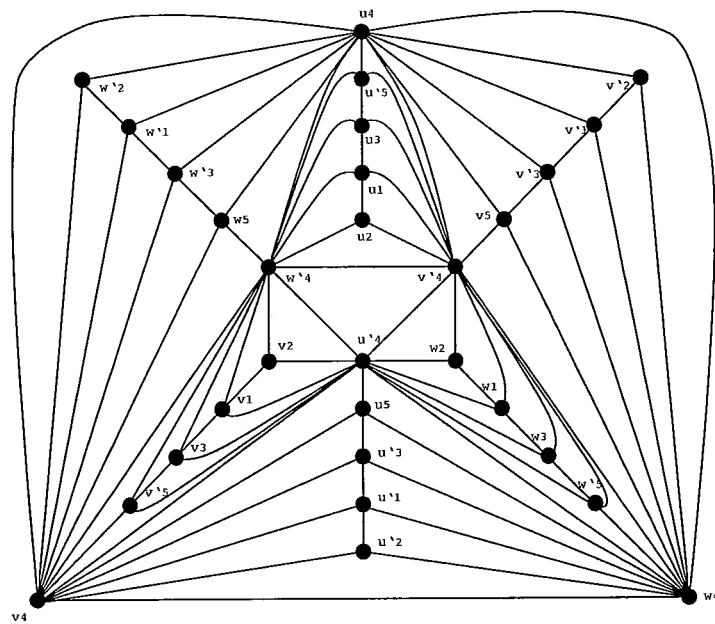


Figura 3.17: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_4 - Decomposição do grafo K_{34} .

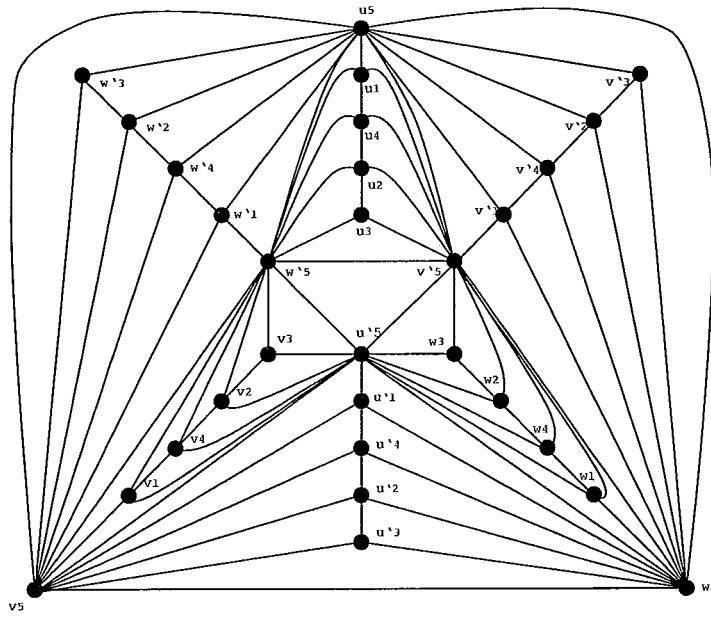


Figura 3.18: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_5 - Decomposição do grafo K_{34} .

Vamos proceder agora a modificação fundamental.

Como neste caso a modificação que atinge o grafo G_1 se resume à inserção de um novo vértice x , conectado aos vértices u_1, v_1 e w_1 , este ficará como representado na figura 3.19.

Quanto aos grafos G_2, G_3, G_4 e G_5 , estes sofrerão a remoção da aresta que está entre o segundo e terceiro vértices dos desenhos C_4, C_5 e C_6 , a reflexão do desenho resultante e a inserção do vértice x , como mostram, respectivamente, as figuras 3.20, 3.21, 3.22, 3.23:

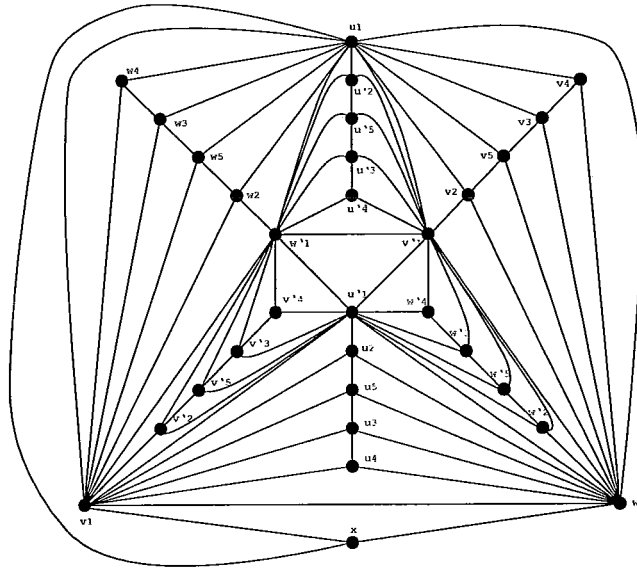


Figura 3.19: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_1 modificado - Decomposição do K_{34} .

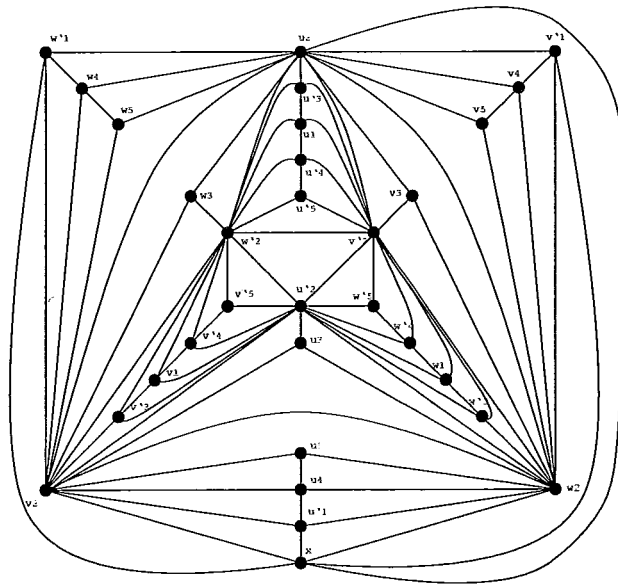


Figura 3.20: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_2 modificado - Decomposição do K_{34} .

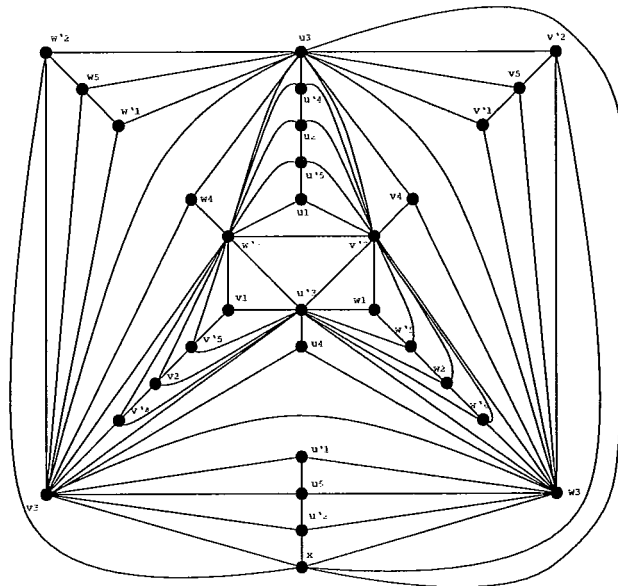


Figura 3.21: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_3 modificado - Decomposição do K_{34} .

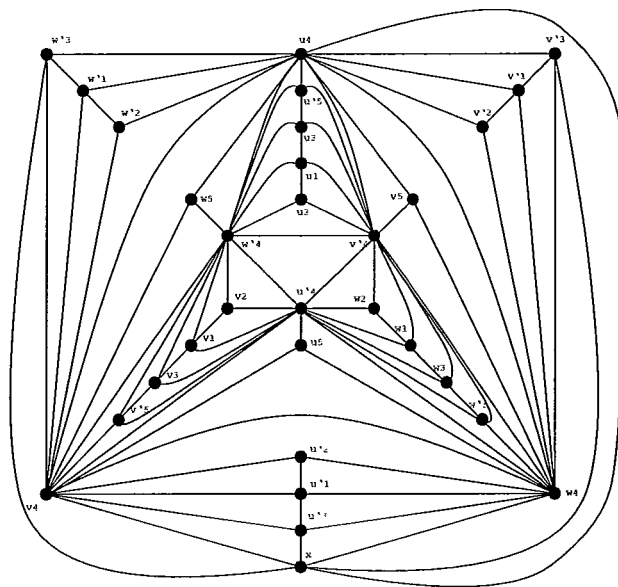


Figura 3.22: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_4 modificado - Decomposição do K_{34} .

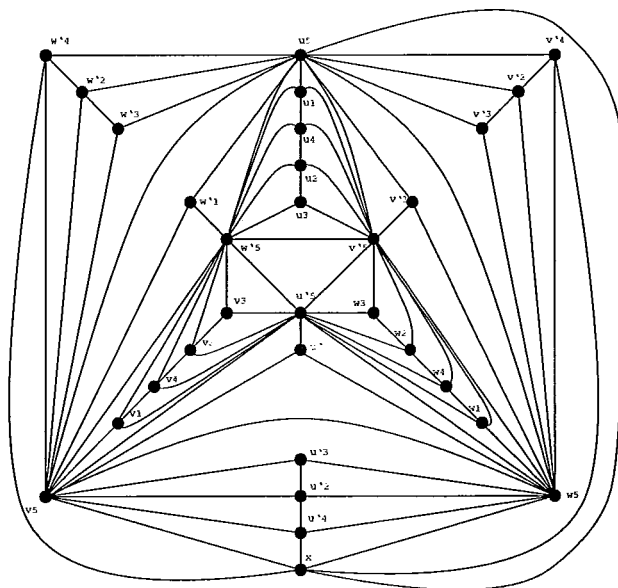


Figura 3.23: Exemplo do caso p ímpar - Grafo G_5 modificado - Decomposição do K_{34} .

Consideremos agora os elementos que pertencem à segunda ou terceira linhas da matriz A , excluindo-se a primeira coluna, marcando os elementos se e somente se os correspondentes na matriz A' não estiverem marcados. Assim temos a seguinte correspondência, que indica as arestas retiradas dos grafos G_2, G_3, G_4 e G_5 :

3	4	5	1 \
1 \	2 \	3 \	4 \

$$A \setminus_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 \setminus & 3 \setminus & 4 \setminus & 5 \setminus & 1 \\ 5 \setminus & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 \setminus & 4 \setminus & 5 \setminus & 1 & 2 \\ 4 \setminus & 5 \setminus & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Figura 3.24: Arestas removidas - Matriz A'

Logo os desenhos C_u , C_v e C_w que devem aparecer no grafo suplementar G_6 são os definidos nas figuras 3.25, 3.26, e 3.27, respectivamente:

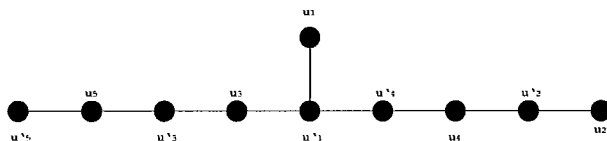


Figura 3.25: Desenho C_u - Decomposição do K_{34} .

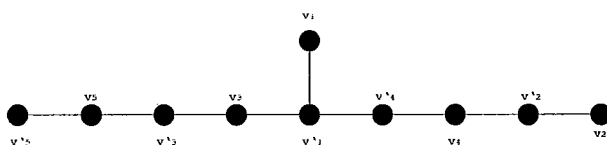


Figura 3.26: Desenho C_v - Decomposição do K_{34} .

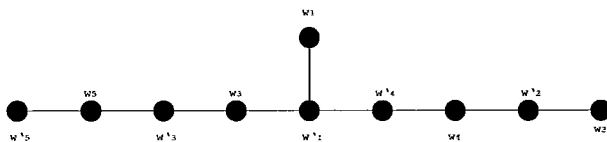


Figura 3.27: Desenho C_w - Decomposição do K_{34} .

Os vértices u , v e w devem ser inseridos nos grafos G_1, G_2, G_3, G_4 e G_5 , entre os vértices:

3	4'	5	1	2'
4	5'	1'	2	3'

Nas figuras 3.28, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32 e 3.33, vemos os 6 subgrafos planares do grafo K_{34} :

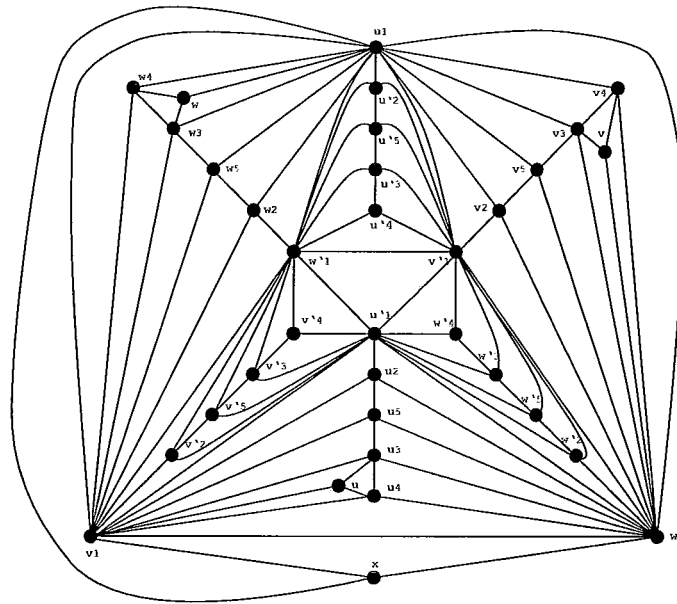


Figura 3.28: Grafo G_1 final - Decomposição do K_{34} .

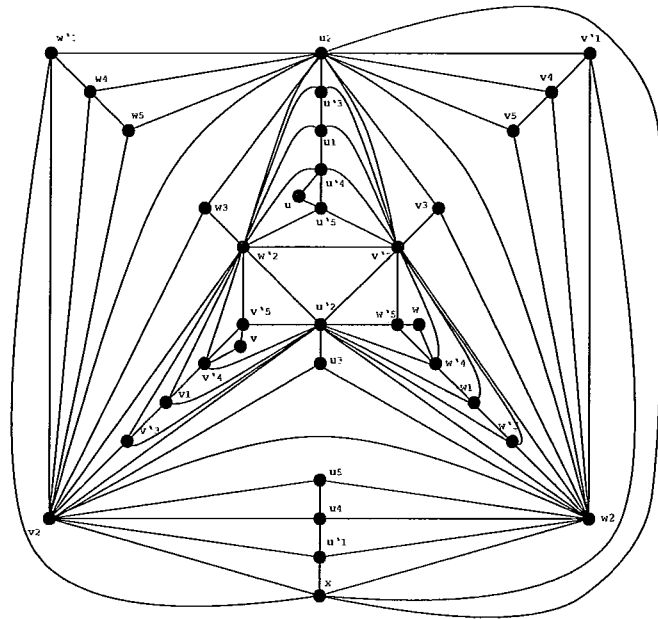


Figura 3.29: Grafo G_2 final - Decomposição do K_{34} .

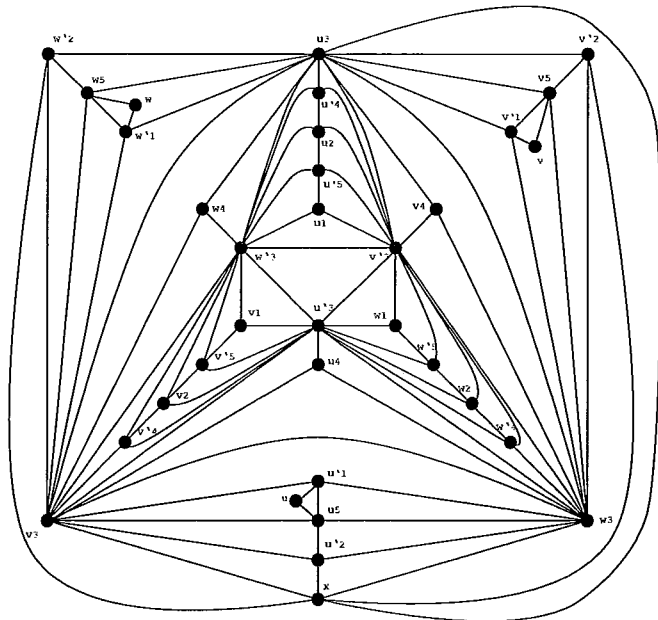


Figura 3.30: Grafo G_3 final - Decomposição do K_{34} .

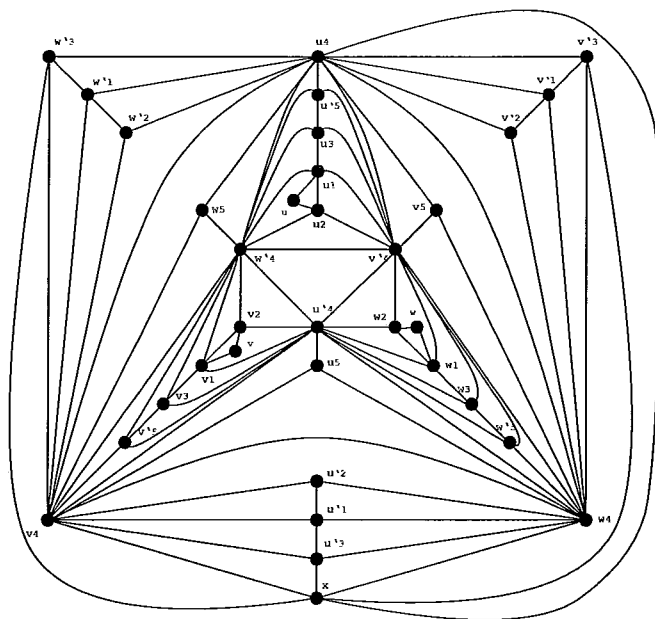


Figura 3.31: Grafo G_4 final - Decomposição do K_{34} .

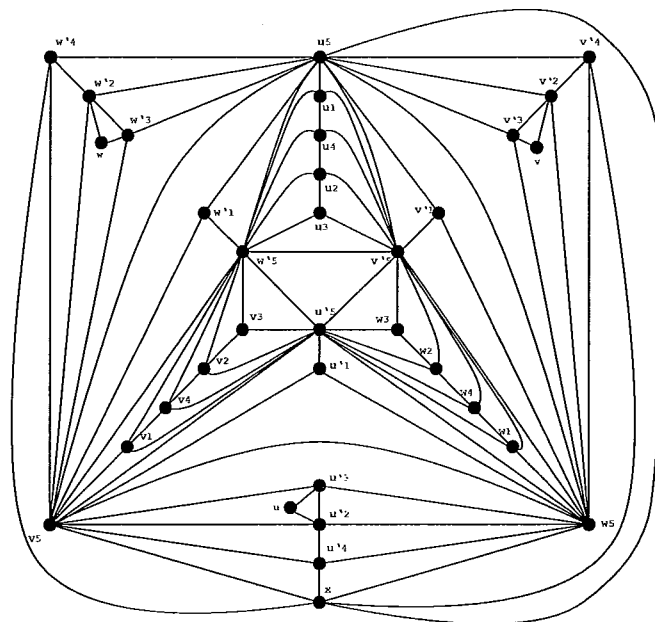


Figura 3.32: Grafo G_5 final - Decomposição do K_{34} .

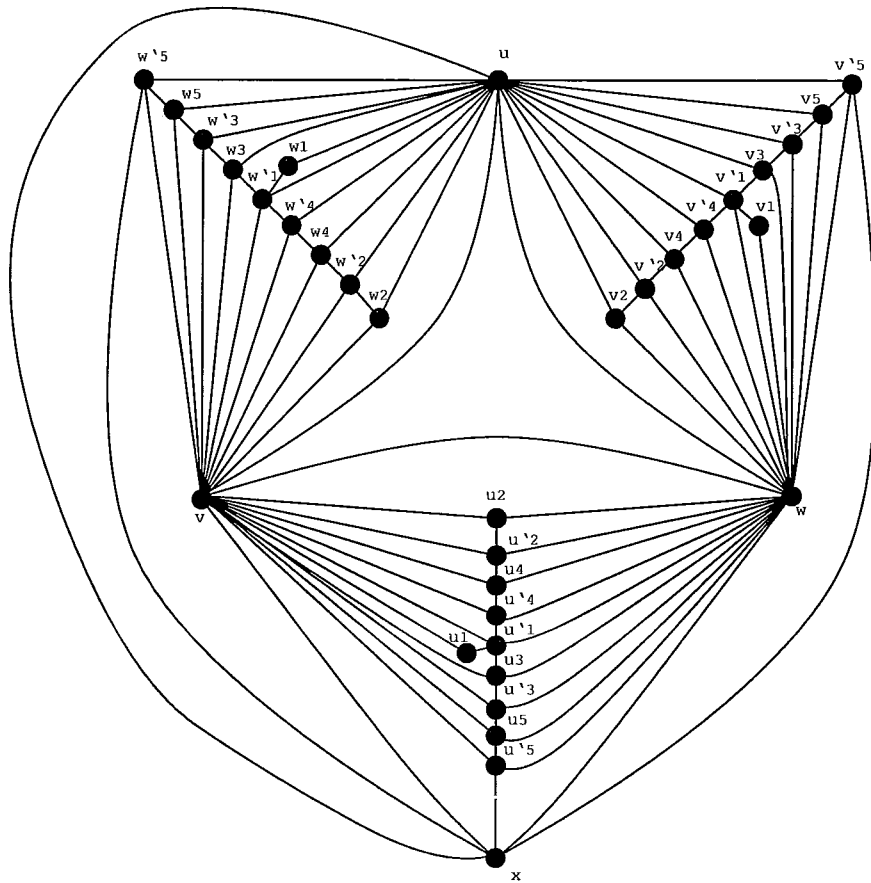


Figura 3.33: Grafo Suplementar G_6 final - Decomposição do K_{34} .

Capítulo 4

**2º caso: $n = 6p + 4$ e
 $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$**

Ainda falando sobre a decomposição do grafo K_n , onde $n = 6p + 4$, trataremos agora do caso onde $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$.

Dividiremos este caso em dois subcasos: no primeiro subcaso trataremos o assunto da espessura para o grafo completo com $n = 6p + 4$ vértices onde $p = 2^q(2r + 1)$ e $r \geq 1$, desde que p não possa ser escrito da forma $p = 3 \cdot 2^q$, ou $q < 3$; no segundo caso, trataremos dos grafos da excessão do 1º subcaso, ou seja, falaremos do assunto da espessura de grafos completos com $n = 6p + 4$ vértices e $p = 3 \cdot 2^q$, com $q \geq 3$.

4.1 1º Subcaso: $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$, desde que $p \neq 3 \cdot 2^q$ ou $q < 3$

Suponha $p = 2^q(2r + 1)$ com $r \geq 1$, e $p \neq 3 \cdot 2^q$ ou $q < 3$, e seja $i = 2^q s$, onde $i < \frac{p}{2}$. Neste caso, as arestas que serão removidas na modificação fundamental são as que ligam os $(2i - 1)$ -ésimo e $(2i)$ -ésimo vértices dos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$ ou dos desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$ e $C_{r,3}$, contados a partir de u'_r , v'_r e w'_r . Para definirmos quais desenhos receberão a modificação,

procedemos da seguinte forma:

Primeiramente, vamos escrever os elementos das primeira e $(2i)$ -ésima linhas da matriz A :

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	...	<i>colunap</i>
<i>linha1</i>	0	1	2	...	p
<i>linha2i</i>	$+i$	$1+i$	$2+i$...	$p+i$

Esta seqüência pode ser arrumada em ciclos, de forma que o elemento inferior de cada par precedente coincida com o elemento superior do par subsequente, como segue:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna1 + i</i>	...	<i>coluna1 - i</i>
<i>linha1</i>	0	1	$1+i$...	$-i+1$
<i>linha2i</i>	$+i$	$1+i$	$1+2i$...	1

Este ciclo pode não ser único. Neste caso, recomeça-se a seqüência em um elemento ainda não citado e um novo ciclo é iniciado.

Vamos agora, marcar estes elementos obedecendo às seguintes regras:

- a) O primeiro elemento de cada ciclo aparece não-marcado (esta escolha é arbitrária);
- b) Cada par de elementos deve diferir do par correspondente em A' em apenas uma marcação;
- c) O elemento inferior de cada par precedente deve ter marcação oposta ao do elemento superior de cada par subsequente.

Associaremos à seqüência já marcada, os elementos da $(2i+1)$ -ésima linha de A . Em seguida, marcaremos estes elementos de forma que os que correspondem às linhas $2i$ e $2i+1$ recebam a mesma marcação presente no par correspondente em A' ou marcação oposta àquela.

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna1 + i</i>	...	<i>coluna1 - i</i>
<i>linha1</i>	0	1	$(1 + i)^?$...	$(-i + 1)^?$
<i>linha2i</i>	$+i$	$(1 + i)^?$	$(1 + 2i)^?$...	$1'$
<i>linha2i + 1</i>	$-i$	$(1 - i)^?$	$(2 - i)^?$...	$(1 - 2i)^?$

Assim sendo, se na linha superior desta seqüência o elemento r não aparecer marcado, a modificação fundamental será efetuada nos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$, no grafo G_r . Caso contrário, ou seja, se na primeira linha desta seqüência o elemento r aparecer marcado, a modificação fundamental no grafo G_r será feita nos desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$ e $C_{r,3}$.

Analisaremos agora os desenhos C_u , C_v e C_w , que servirão como base para a construção do grafo suplementar G_{p+1} . Para tanto, copiaremos os elementos das $(2i - 1)$ -ésima e $(2i)$ -ésima linhas de A . Estas linhas correspondem às constantes $-(i - 1)$ e $+i$:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	...	<i>colunap</i>
<i>linha2i - 1</i>	$-(i - 1)$	$2 - i$	$3 - i$...	$p - i + 1$
<i>linha2i</i>	$+i$	$1 + i$	$2 + i$...	$p + i$

Nesta seqüência, efetuaremos a marcação obedecendo à seguinte regra:

- a) Cada par de elementos da coluna r deve receber marcação oposta ao par correspondente em A' se a modificação fundamental do grafo G_r tiver sido efetuada nos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$;
- b) O par de elementos da coluna r deve receber marcação idêntica à que aparece no par correspondente em A' se no grafo G_r a modificação fundamental tiver atingido os desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$ e $C_{r,6}$.

Para a construção do grafo suplementar G_{p+1} , devemos considerar todas as arestas removidas durante a modificação fundamental, além das arestas (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) não incluídas em G_1, \dots, G_p .

Observamos que alguns elementos se repetem na seqüência acima. Assim sendo, para a construção do desenho C_u , se os elementos de mesmo valor aparecerem com marcações opostas, estes definirão uma aresta (u_i, u'_i) , mas se os elementos de mesmo valor aparecerem com a mesma marcação, uniremos estes, conforme os pares descritos acima, e ainda com as arestas (u_i, u'_i) . De forma análoga são construídos os desenhos C_v e C_w :

Observe que nos limites dos ciclos presentes nos desenhos estão os vértices cujos subscritos e marcações são iguais aos elementos da primeira linha da combinação anterior.

Podemos alterar a modificação fundamental do grafo G_1 de tal forma que as arestas (u_{n-i+2}, u_{i+1}) , (v_{n-i+2}, v_{i+1}) e (w_{n-i+2}, w_{i+1}) não sejam removidas. Em contrapartida, deveremos conectar no grafo suplementar G_{p+1} o vértice x aos vértices u_{i+1} , v_{i+1} e w_{i+1} que serão desconectados no grafo G_1 .

No grafo suplementar G_{p+1} , x é colocado na fronteira exterior e conectado aos vértices u , v , w , além de u_{i+2} , v_{i+2} e w_{i+2} .

Podemos então observar que, neste estágio, o vértice x encontra-se conectado a todos os vértices u_i , u'_i , v_i , v'_i , w_i e w'_i , com $i = 1, \dots, p$.

Observamos, também, que o vértice u encontra-se conectado a todos os vértices w_i e w'_i , com $i = 1, \dots, p$, além dos vértices v_i ou v'_i , onde o índice e marcação é igual ao que aparece na primeira linha da seqüência estudada anteriormente. Resta, portanto, conectar u a todos os vértices u_i e u'_i , com $i = 1, \dots, p$ e a alguns vértices v_i e v'_i .

Da mesma forma o vértice v encontra-se conectado a todos os vértices u_i

e u'_i , com $i = 1, \dots, p$, além dos vértices w_i ou w'_i , onde o índice e marcação é igual ao que aparece na primeira linha da seqüência estudada anteriormente, e o vértice w encontra-se conectado a todos os vértices v_i e v'_i , com $i = 1, \dots, p$, além dos vértices u_i ou u'_i , onde o índice e marcação é igual ao que aparece na primeira linha da seqüência. Resta, portanto, conectar v a todos os vértices v_i e v'_i , com $i = 1, \dots, p$ e a alguns vértices w_i e w'_i , e w a todos os vértices w_i e w'_i , com $i = 1, \dots, p$ e a alguns vértices u_i e u'_i .

Observando a seqüência, distribuiremos as arestas restantes, no grafo G_r , com $r = 1, \dots, p$, colocando o vértice u no triângulo que contém a aresta (u_{r+i}, u_{r-i}) , v no triângulo que contém a aresta (v_{r+i}, v_{r-i}) e w no triângulo que contém a aresta (w_{r+i}, w_{r-i}) , com a mesma marcação que aparece na seqüência estudada e escolhendo o triângulo cujo terceiro vértice é v_r , w_r e u_r , respectivamente:

Desta forma, garantimos a conexão de todos os pares de vértices.

4.1.1 Exemplo do caso $p = 2^q(2r + 1)$, com $r \geq 1$, desde que $p \neq 3 * 2^q$ ou $q < 3$: Decomposição do K_{40}

Como exemplo do caso $p = 2^q(2r + 1)$, mostraremos a decomposição do grafo completo com 40 vértices, K_{40} , em 7 subgrafos planares.

Os 7 subgrafos planares do grafo K_{40} são os das figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7.

Os grafos intermediários desta construção aparecem no anexo 1.

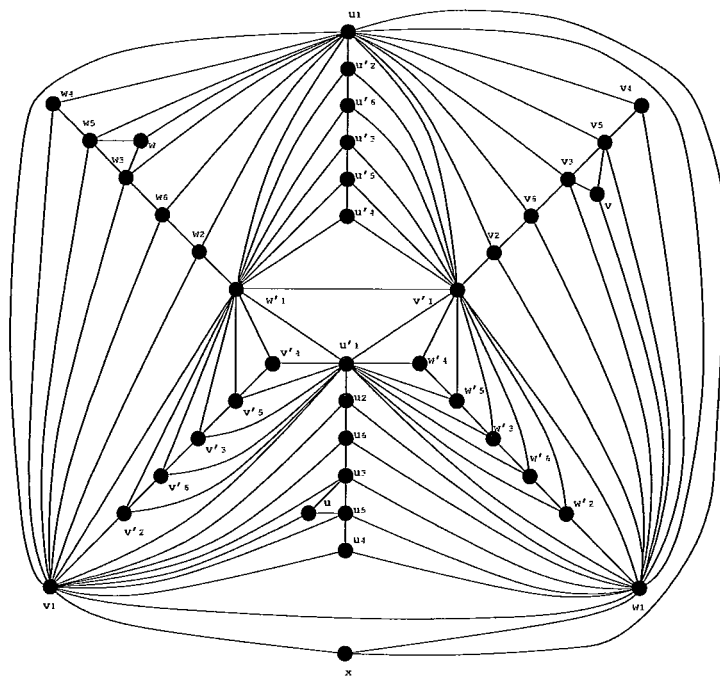


Figura 4.1: Grafo G_1 final - decomposição do K_{40}

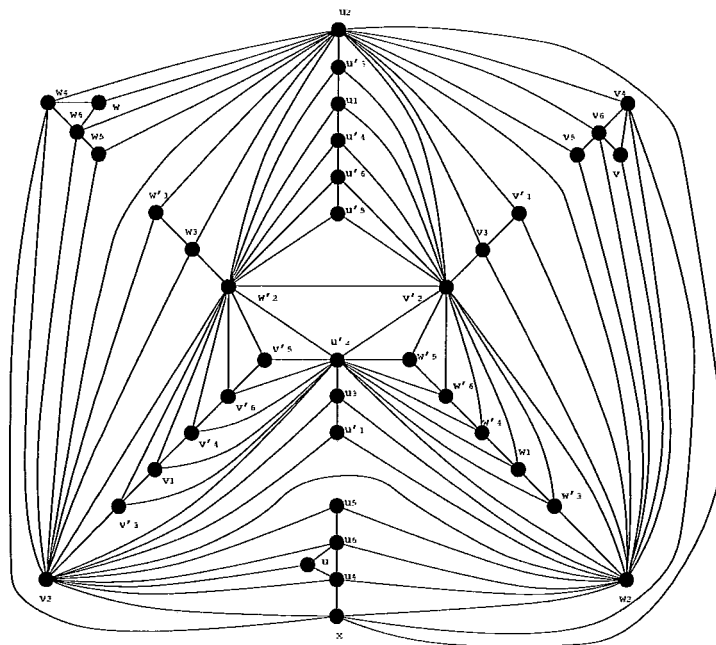


Figura 4.2: Grafo G_2 final - decomposição do K_{40}

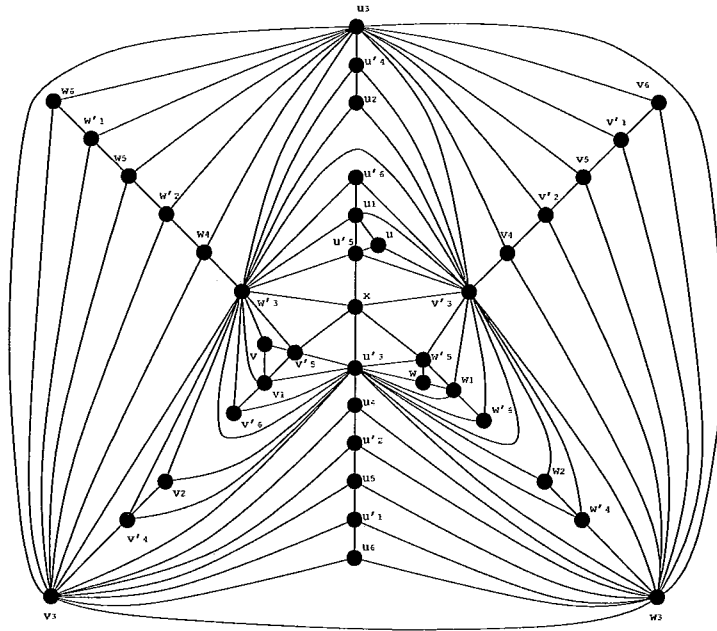


Figura 4.3: Grafo G_3 final - decomposição do K_{40}

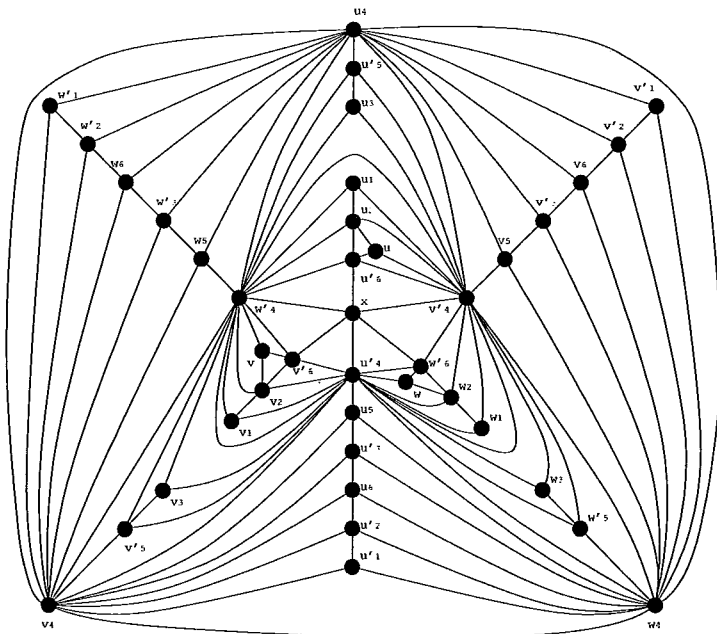


Figura 4.4: Grafo G_4 final - decomposição do K_{40}

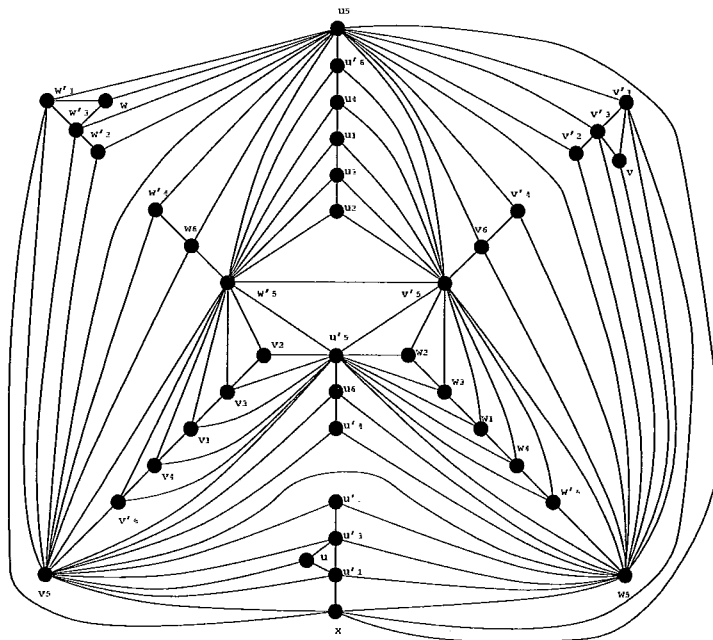


Figura 4.5: Grafo G_5 final - decomposição do K_{40}

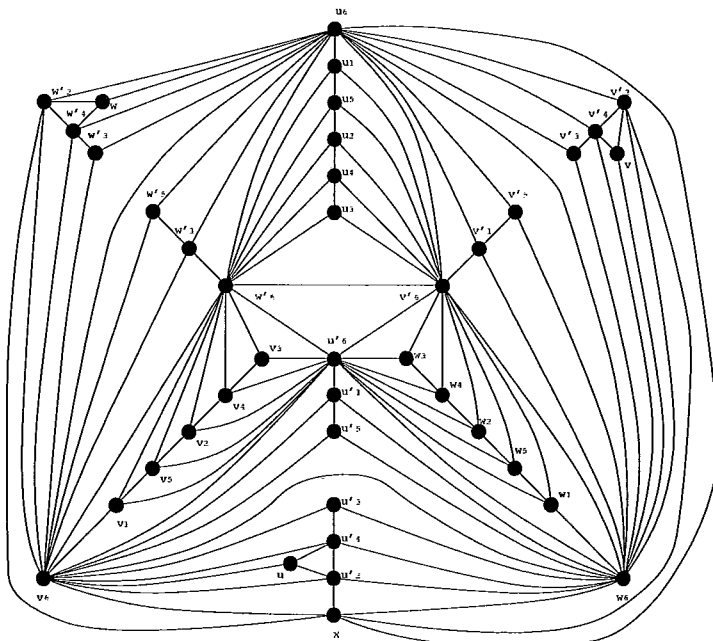


Figura 4.6: Grafo G_6 final - decomposição do K_{40}

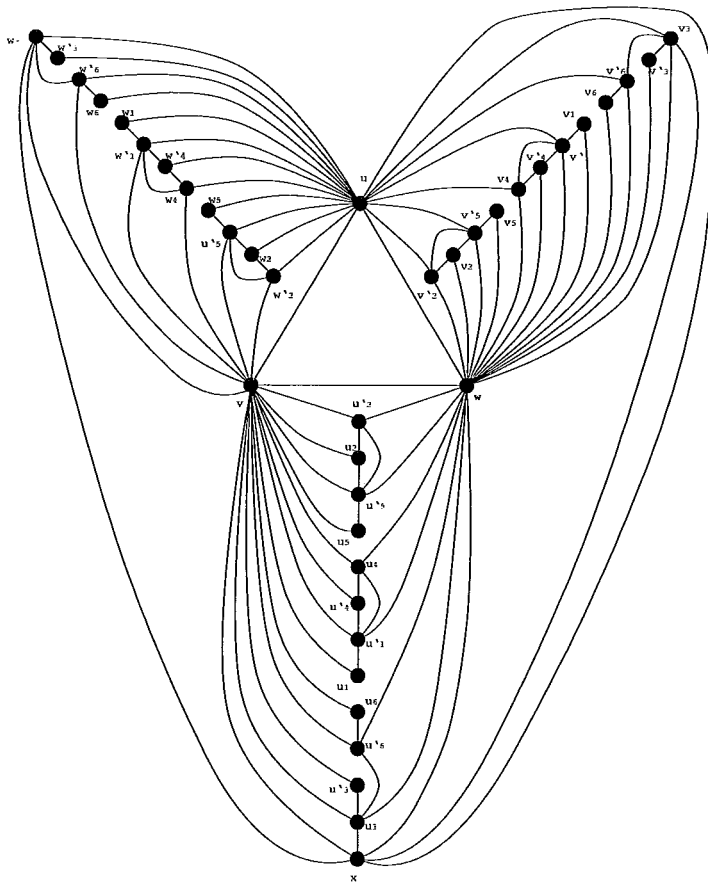


Figura 4.7: Grafo suplementar G_7 final - decomposição do K_{40}

4.2 2º Subcaso: $p = 3 * (2^q)$, com $q \geq 3$

Neste caso, a modificação fundamental será feita retirando-se as arestas que estão entre os $(p - 2)$ -ésimo e $(p - 1)$ -ésimo vértices dos desenhos C_1 , C_2 e C_3 , ou nos desenhos C_4 , C_5 e C_6 . Para definirmos qual grupo de desenhos receberá a modificação, procedemos da seguinte forma:

- 1) Copiamos as linhas 1, $(p - 2)$ e $(p - 1)$ da matriz A . Estas linhas correspondem às constantes 0 , $+(\frac{p}{2} - 1)$ e $-(\frac{p}{2} - 1)$;
- 2) Arrumamos a seqüência de forma que o elemento inferior de cada par precedente seja igual ao elemento superior do par subsequente;
- 3) Marcamos as linhas 1 e $(p - 1)$ obedecendo as seguintes regras:
 - a) O elemento inferior de cada par precedente e o elemento superior do par subsequente devem possuir, em conjunto, somente uma marcação;
 - b) Cada par deve diferir do par correspondente em A' em exatamente 1 marcação;
 - c) A seqüência se inicia com o par correspondente à coluna p , onde o elemento p aparece não marcado.

- 4) Tomando por base as linhas $(p - 2)$ e $(p - 1)$, marcamos a linha $(p - 2)$ obedecendo a seguinte regra:

- a) Cada par de elementos deve receber marcação igual a do par correspondente em A' , ou marcação oposta a esta.

<i>Constante</i>								
0	p	$\frac{p}{2} + 1$	2	$\frac{p}{2} + 3'$	4'	$\frac{p}{2} + 5$	6	...
$+(\frac{p}{2} - 1)$	$\frac{p}{2} - 1'$	p	$\frac{p}{2} + 1$	2	$\frac{p}{2} + 3'$	4'	$\frac{p}{2} + 5$...
$-(\frac{p}{2} - 1)$	$\frac{p}{2} + 1'$	2'	$\frac{p}{2} + 3$	4	$\frac{p}{2} + 5'$	6'	$\frac{p}{2} + 7$...
...	$p - 1'$	$\frac{p'}{2}$	1'	$\frac{p}{2} + 2$	3	$\frac{p}{2} + 4'$	5'	...
...	$\frac{p}{2} - 2$	$p - 1'$	$\frac{p'}{2}$	1'	$\frac{p}{2} + 2$	3	$\frac{p}{2} + 4'$...
...	$\frac{p}{2}$	1	$\frac{p}{2} + 2'$	3'	$\frac{p}{2} + 4$	5	$\frac{p}{2} + 6'$...
...	$\frac{p}{2} - 3'$	$p - 2$	$\frac{p}{2} - 1$					
...	$p - 4'$	$\frac{p}{2} - 3'$	$p - 2$					
...	$p - 2'$	$\frac{p}{2} - 1'$	p					

Assim, a modificação fundamental será feita nos desenhos C_4 , C_5 e C_6 , e o vértice x será inserido na região externa, se na seqüência estudada acima o índice da primeira linha aparecer não marcado. Por outro lado, temos que a modificação será feita nos desenhos C_1 , C_2 e C_3 , e o vértice x será inserido na região interna do grafo, caso na seqüência acima o elemento da primeira linha aparecer marcado.

Nós não realizamos a modificação fundamental no grafo $G'_{\frac{p}{2}-1}$, porém só colocamos o vértice x na região externa do grafo e conectamos este aos vértices $u_{\frac{p}{2}-1}$, $v_{\frac{p}{2}-1}$ e $w_{\frac{p}{2}-1}$.

Após a modificação fundamental, x estará conectado aos vértices cujos subscritos e marcações são iguais aos elementos das primeira e terceira linhas da seqüência estudada anteriormente (referentes às constantes 0 e $-(\frac{p}{2} - 1)$), ou seja, a todo vértice exceto u'_p , v'_p e w'_p , já que no grafo $G'_{\frac{p}{2}-1}$ não houve remoção de arestas.

Os vértices das segunda e terceira linhas da seqüência acima, que referem-se às constantes $+(\frac{p}{2} - 1)$ e $-(\frac{p}{2} - 1)$, indicam as arestas que foram removidas durante a modificação fundamental. Portanto, estas devem ser consideradas,

juntamente com as arestas (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) , $i = 1, \dots, p$ para formar o desenho:



Figura 4.8: Arestas removidas no caso $p = 3 * 2^k$, juntamente com arestas (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) , $i = 1, \dots, p$.

e o ciclo

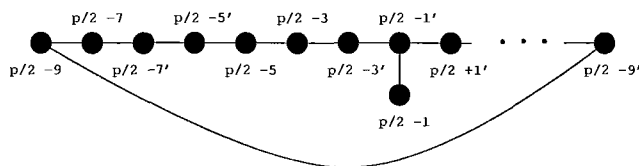


Figura 4.9: Ciclo genérico do caso $p = 3 * 2^k$

Precisamos desconectar o ciclo acima. Para tanto, vamos colocar no ciclo a aresta $(\frac{p}{2} - 9, \frac{p}{2} - 7')$ e retirá-la de algum grafo G_s . Neste grafo, uma inversão deve ser feita para que uma nova aresta possa ser colocada, e assim sucessivamente, como mostra a figura a seguir:

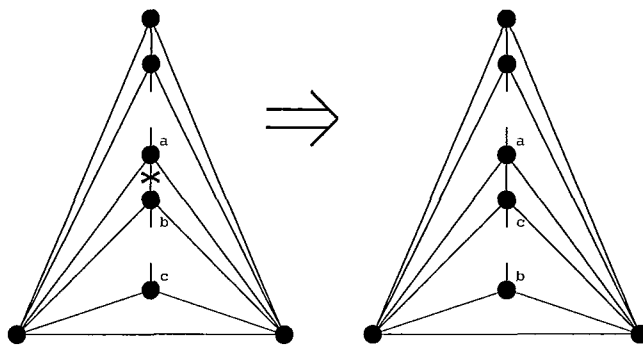


Figura 4.10: Diagrama de inversão da grade para inserção de nova aresta

Tabela 4.1: Análise das arestas removidas.

Aresta retirada	Aresta inserida	Grafo	Constante das linhas	Desenho alt
$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} - 9)$	$(\frac{p}{2} - 7', p - 9)$	$G_{\frac{p}{2}-8}$	+1, -1	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 7', p - 9)$	$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + \frac{p}{4} - 9')$	$G_{\frac{p}{4}-8}$	$+\frac{p}{2} - \frac{p}{4} + 1, -\frac{p}{2} - \frac{p}{4} + 1$	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + \frac{p}{4} - 9')$	$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + \frac{p}{8} - 9')$	$G_{\frac{p}{8}-8}$	$+\frac{p}{2} - \frac{p}{8} + 1, -\frac{p}{2} - \frac{p}{8} + 1$	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + \frac{p}{2^s} - 9')$	$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + \frac{p}{2^{s+1}} - 9')$	$G_{\frac{p}{2^{s+1}}-8}$	$+\frac{p}{2} - \frac{p}{2^{s+1}} + 1, -\frac{p}{2} - \frac{p}{2^{s+1}} + 1$	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + 24 - 9')$	$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + 3')$	$G_{12-8=4}$	$+\frac{p}{2} - 11, -\frac{p}{2} - 11$	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} + 3')$	$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} - 3')$	$G_{p-2'}$	$+\frac{p}{2} - 5, -\frac{p}{2} - 5$	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} - 3')$	$(\frac{p}{2} - 7', \frac{p}{2} - 5')$	$G_{p-5'}$	$+\frac{p}{2} - 2, -\frac{p}{2} - 2$	<i>naoalt</i>

Assim, o ciclo é desconectado e nós obtemos o grafo:

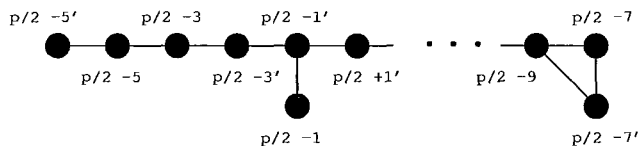


Figura 4.11: Ciclo genérico do caso $p = 3 * 2^k$ alterado

O grafo G_{p+1} é construído como nos casos anteriores, onde o desenho das arestas removidas e o ciclo (referente aos vértices u , v e w), juntamente com u , v e w são distribuídos no plano, com os vértices u'_p , v'_p e w'_p localizados na parte externa do grafo, e o vértice u conectado a todo vértice v_i , v'_i , w_i e w'_i , exceto $v_{\frac{p}{2}+1}$ e $v'_{\frac{p}{2}-7}$. De maneira similar, são conectados os vértices v e w .

Faltam, portanto, colocar as arestas (u, u_i) , (u, u'_i) , $(u, v_{\frac{p}{2}-1})$ e $u, v'_{\frac{p}{2}-7}$, e arestas similares dos vértices v e w .

Os vértices u , v e w são colocados nos grafos G_1, \dots, G_p entre as linhas cujas constantes são $+2^k$ e -2^k , da seguinte forma:

Suponha $j \leq 2^q = \frac{p}{3}$.

Em G_j , $G_{j+\frac{p}{3}}$ e $G_{j+\frac{2p}{3}}$ nós conectamos o vértice u com os vértices citados abaixo, considerando todo possível j , com $l \leq j \leq \frac{p}{3}$:

$+\frac{p}{3}$	$j + \frac{p}{3}$	$j - \frac{p'}{3}$	j'
$-\frac{p}{3}$	$j - \frac{p}{3}$	j	$j + \frac{p'}{3}$

Assim, nós concluímos que o vértice u está conectado a todo vértice u_i e u'_i , bem como v está conectado a todo vértice v_i e v'_i e w está conectado a todo vértice v_i e v'_i , $i = 1, \dots, p$.

Alterando, se necessário, todas as marcações do ciclo onde $j = \frac{p}{2} - 1 - \frac{p}{3}$, nós podemos conectar u ao vértice $v_{\frac{p}{2}-1}$, e alterando também, se necessário, todas as marcações de algum outro ciclo, nós podemos conectar u com $v'_{\frac{p}{2}-7}$. De forma similar nós distribuimos os vértice v e w e as arestas incidentes a estes, e desta forma, finalizamos a distribuição de todas as arestas do grafo K_n , com $n = 6p + 4$ e $p = 3 * 2^q$, $q \geq 3$.

4.2.1 Exemplo do caso $p = 3 * 2^q$ e $q \geq 3$: Decomposição do K_{148}

Como exemplo deste caso, vamos mostrar nas figuras 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35 e 4.36, a decomposição do grafo K_{148} em 25 subgrafos planares.

Os grafos intermediários desta construção encontram-se no anexo 2.

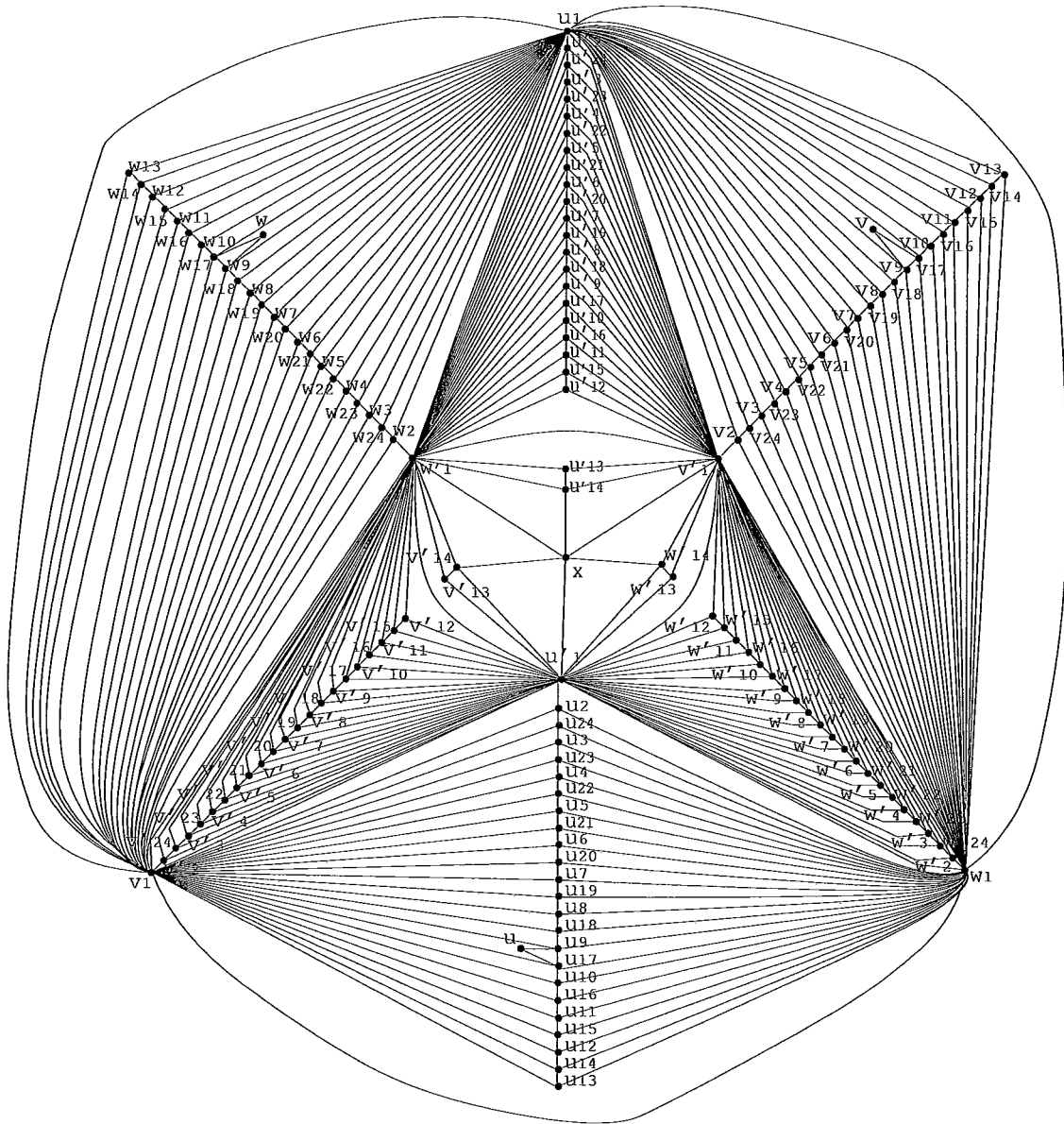


Figura 4.12: Grafo G_1 final - decomposição do K_{148}

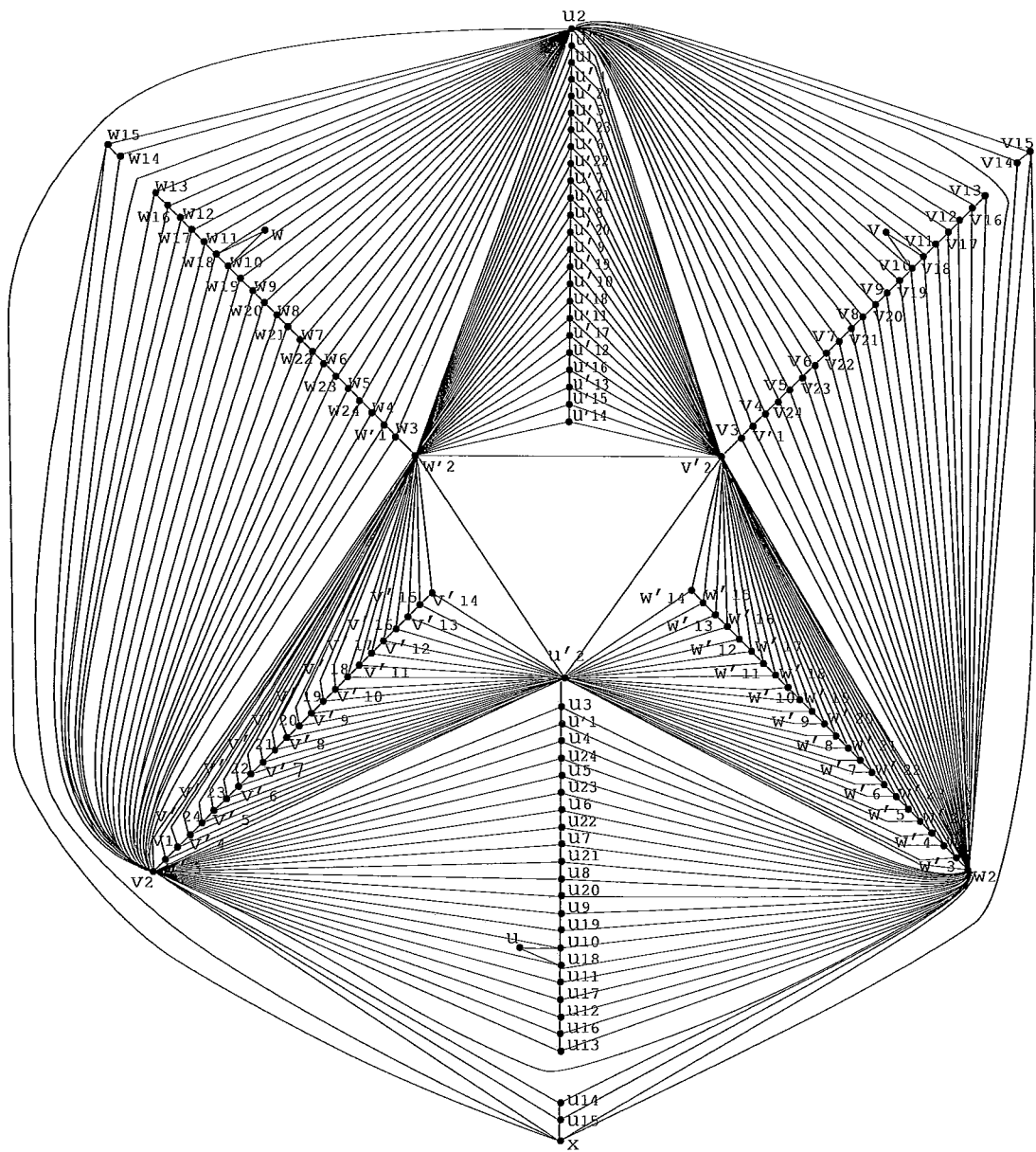


Figura 4.13: Grafo G_2 final - decomposição do K_{148}

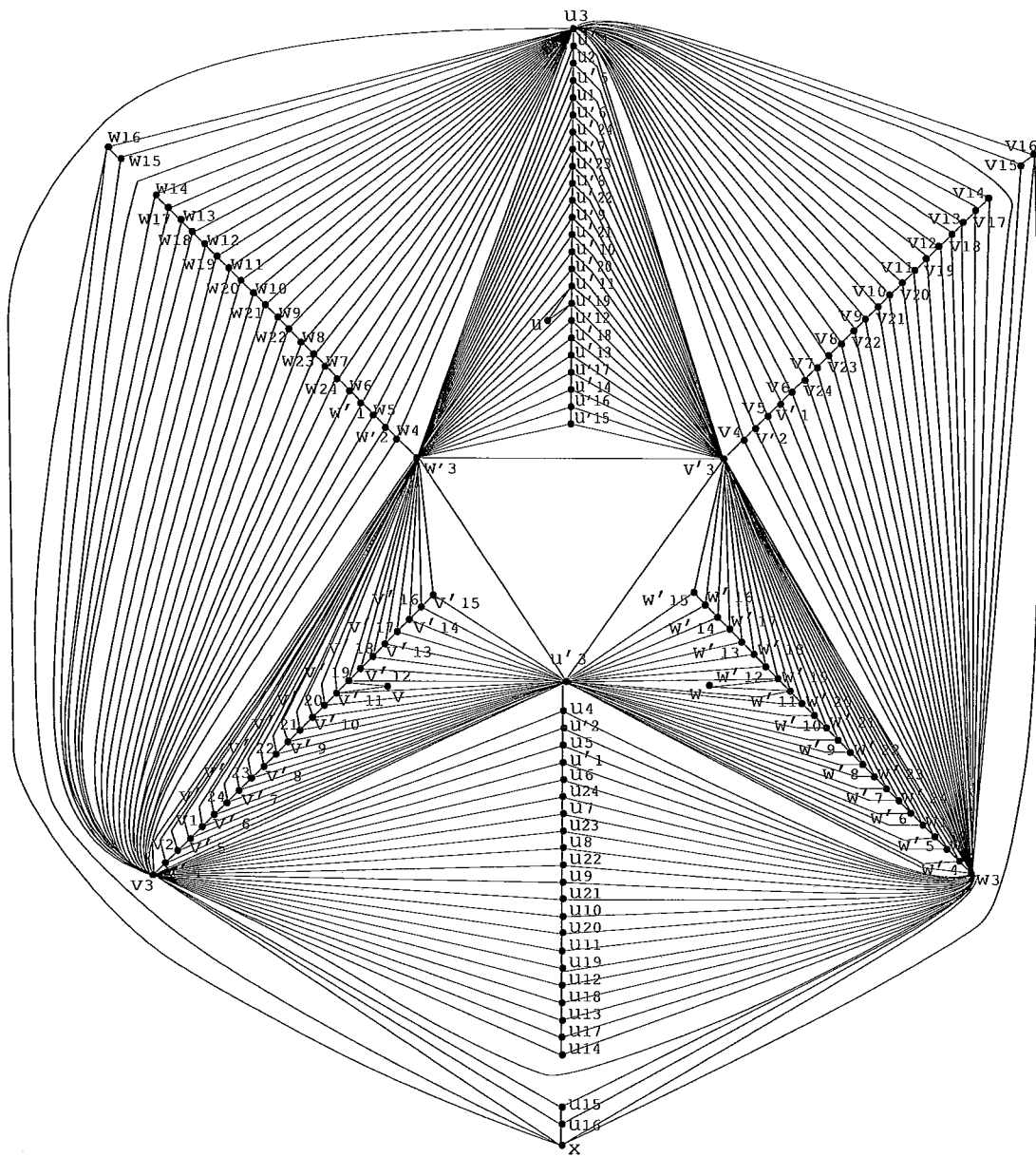


Figura 4.14: Grafo G_3 final - decomposição do K_{148}

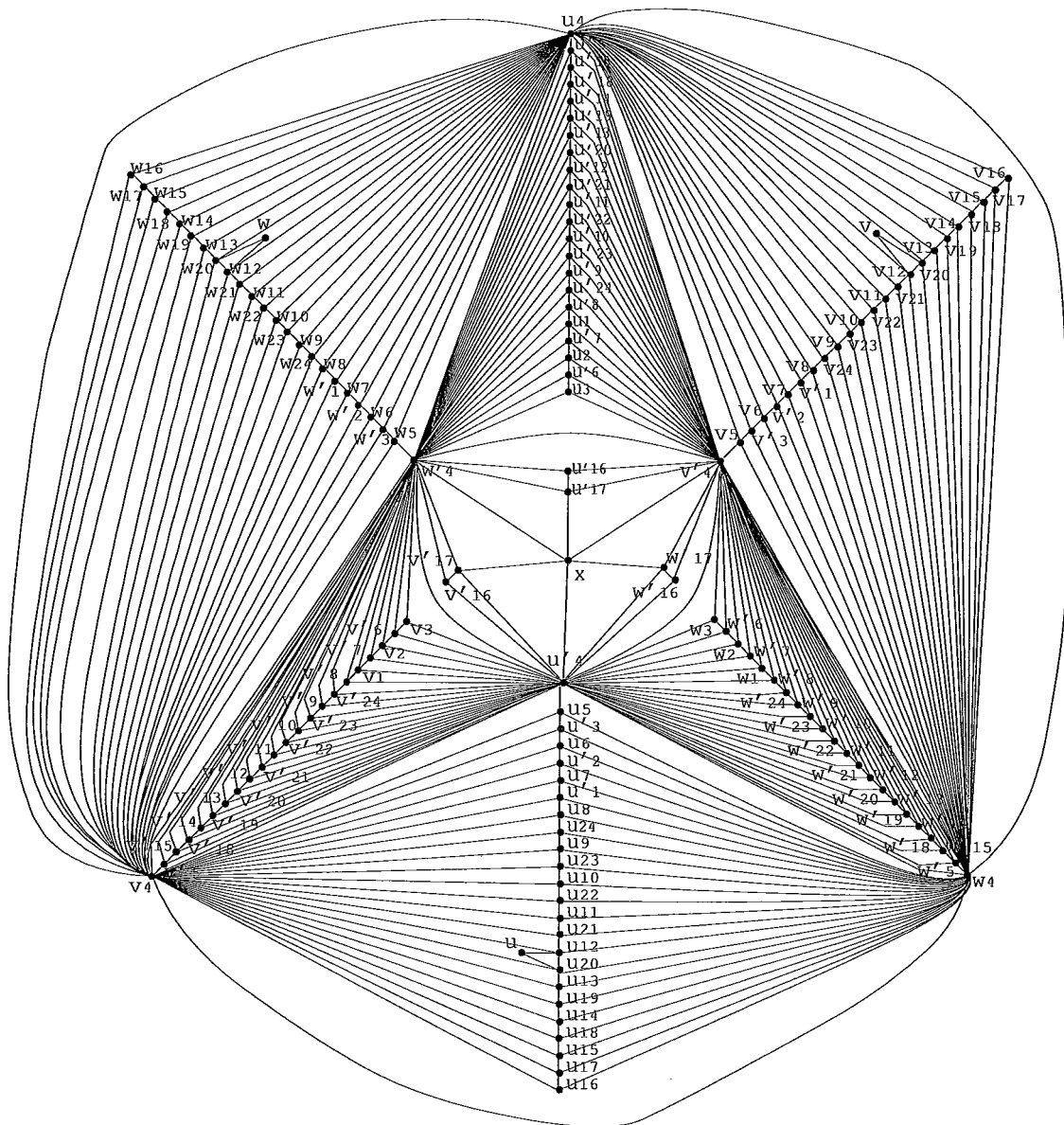


Figura 4.15: Grafo G_4 final - decomposição do K_{148}

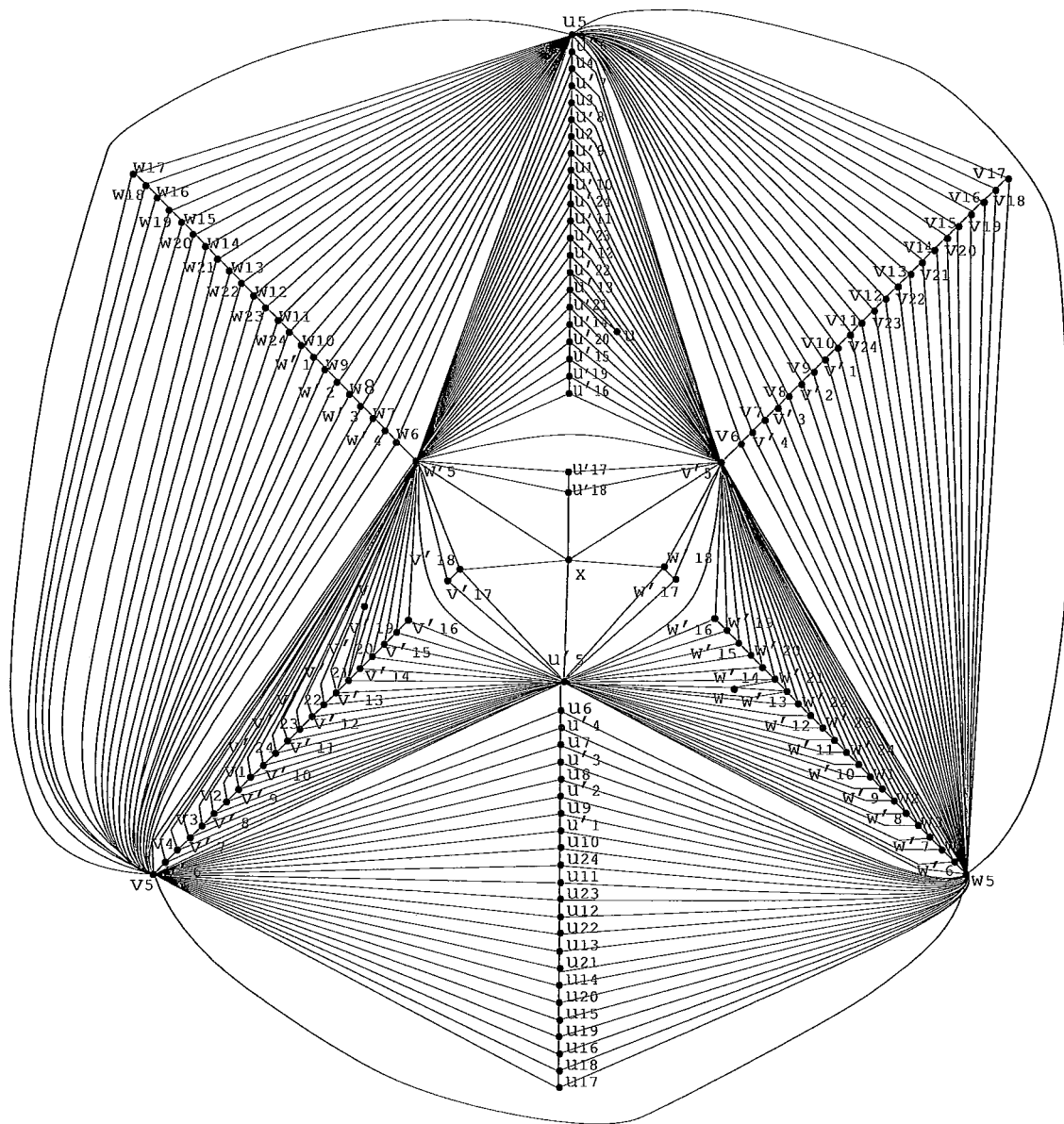


Figura 4.16: Grafo G_5 final - decomposição do K_{148}

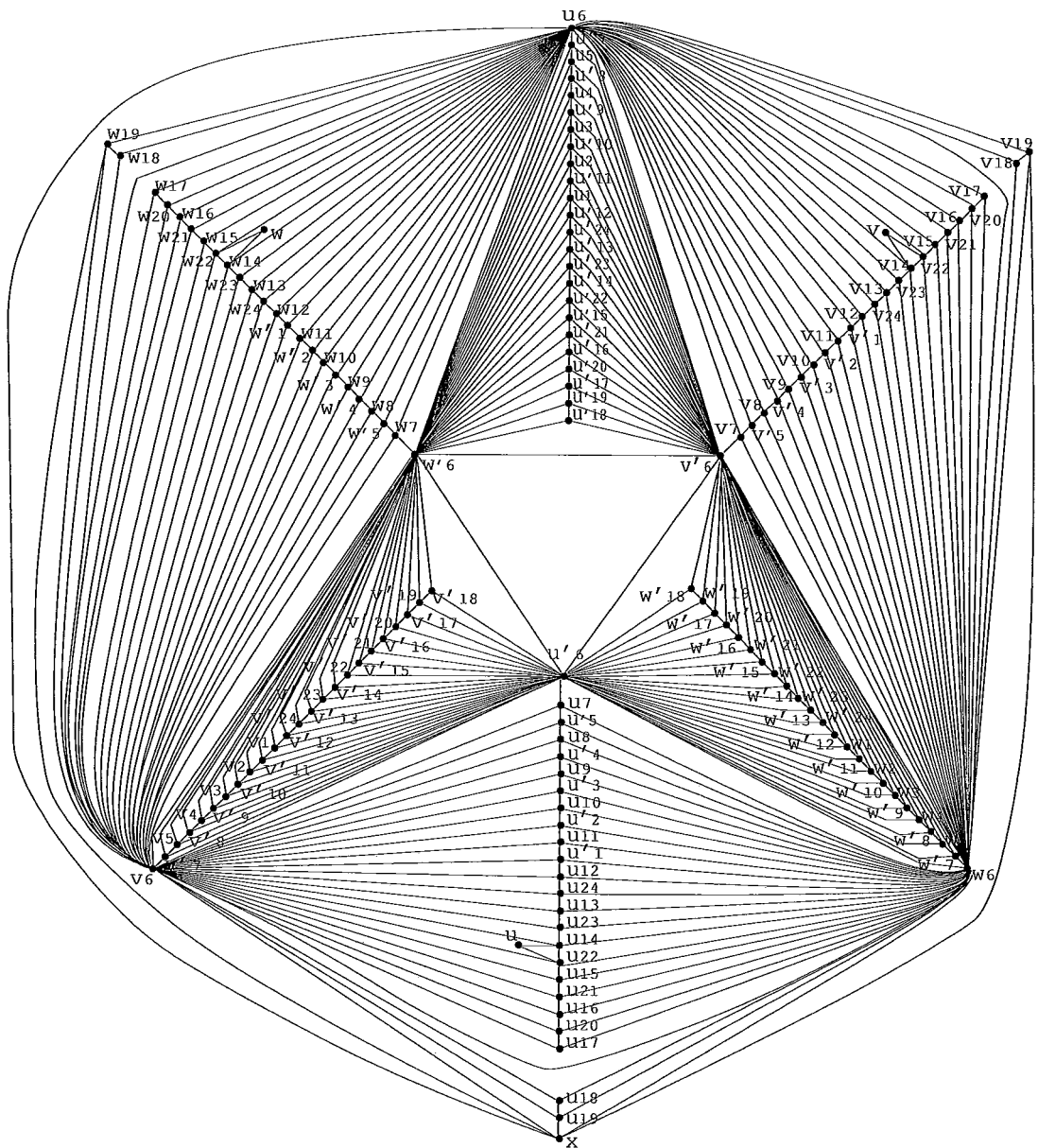


Figura 4.17: Grafo G_6 final - decomposição do K_{148}

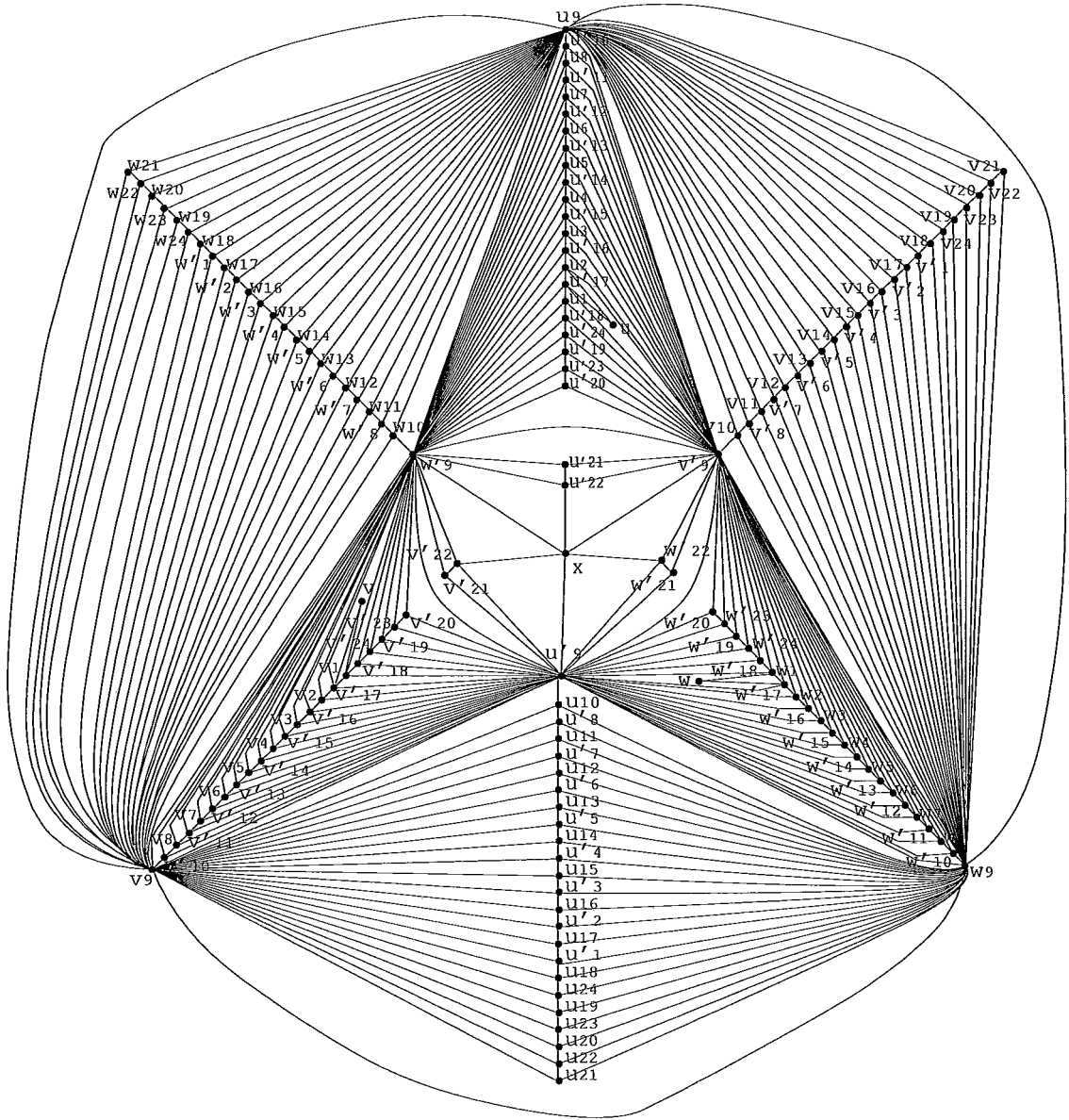


Figura 4.20: Grafo G_9 final - decomposição do K_{148}

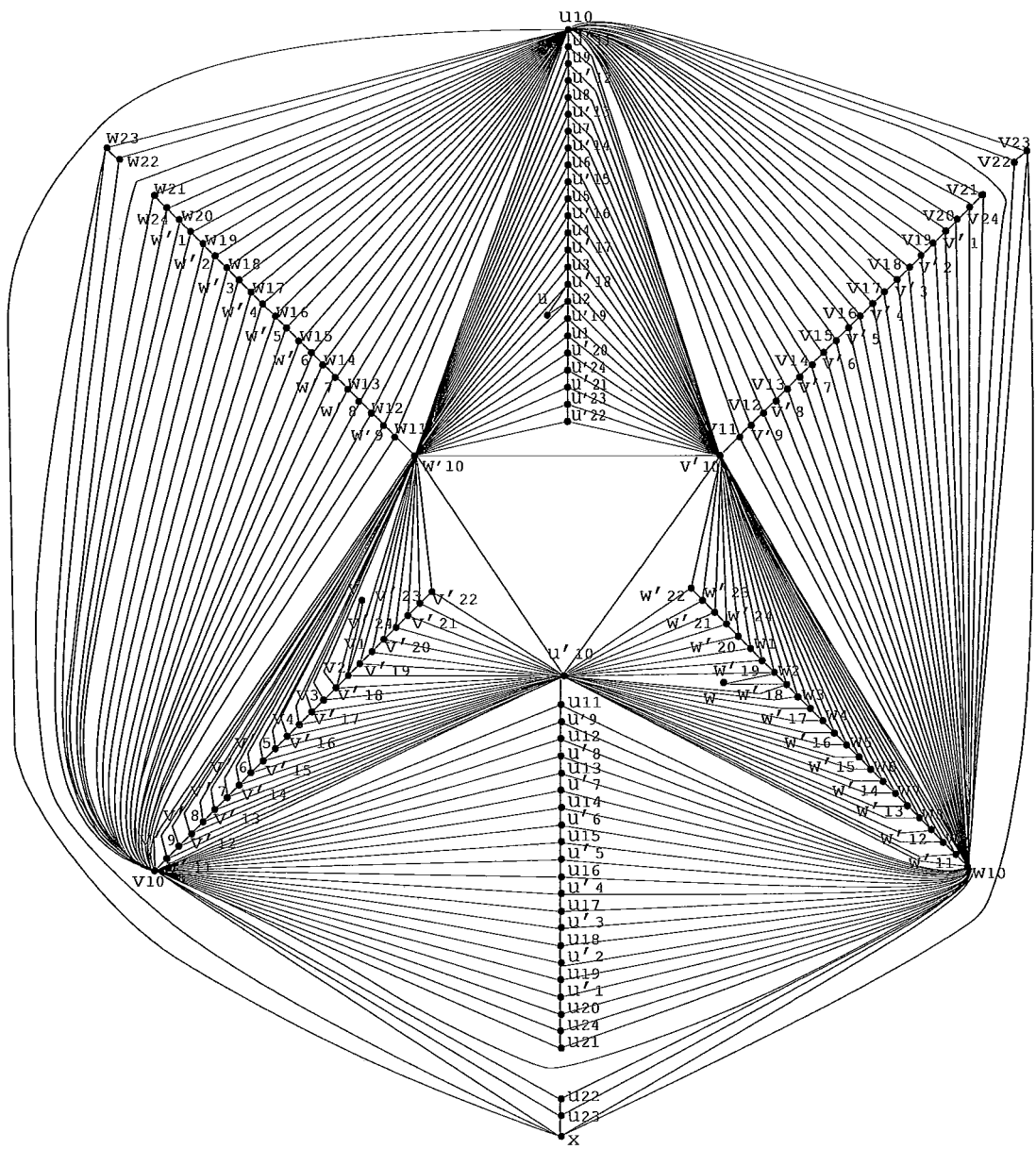


Figura 4.21: Grafo G_{10} final - decomposição do K_{148}

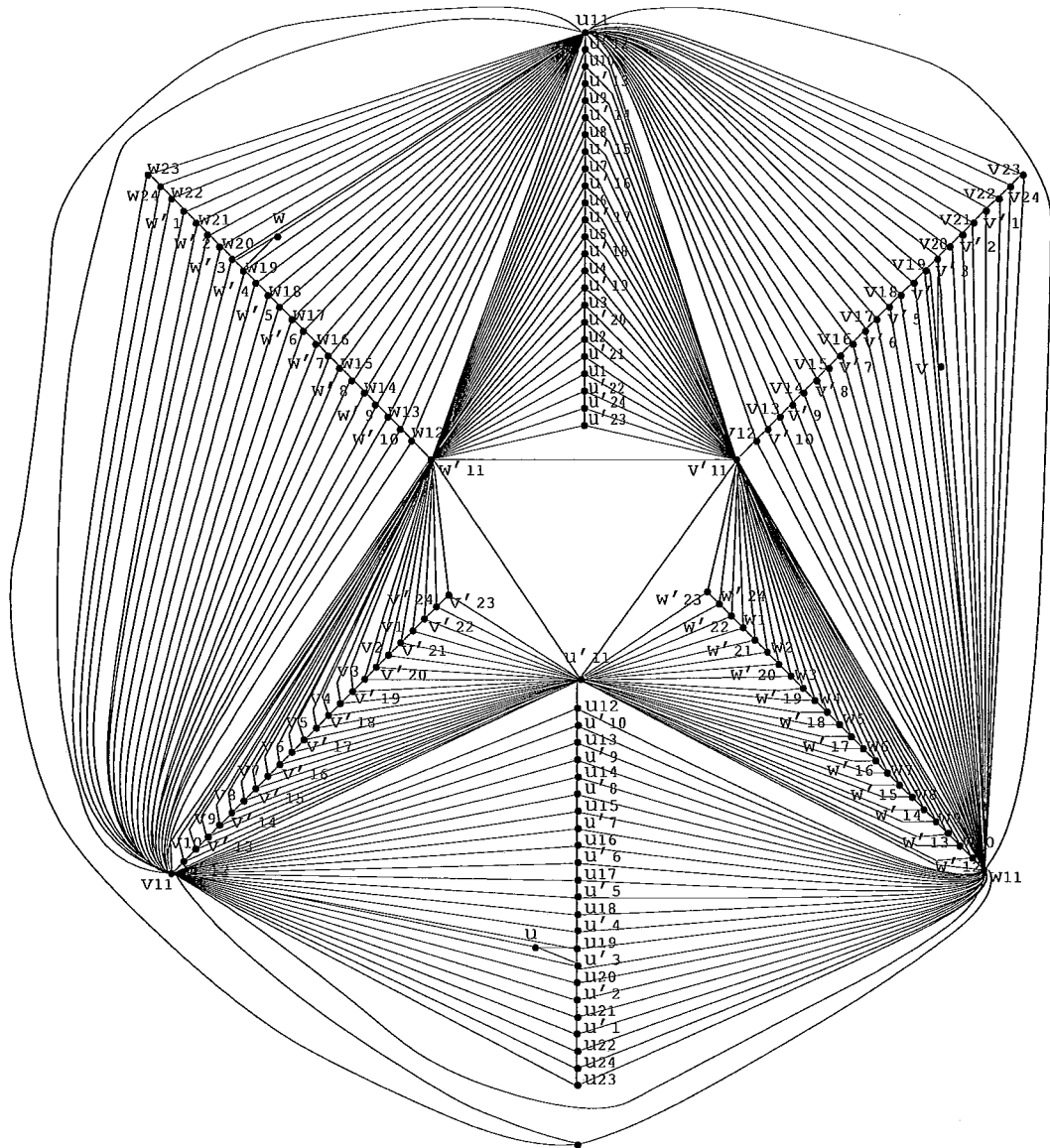


Figura 4.22: Grafo G_{11} final - decomposição do K_{148}

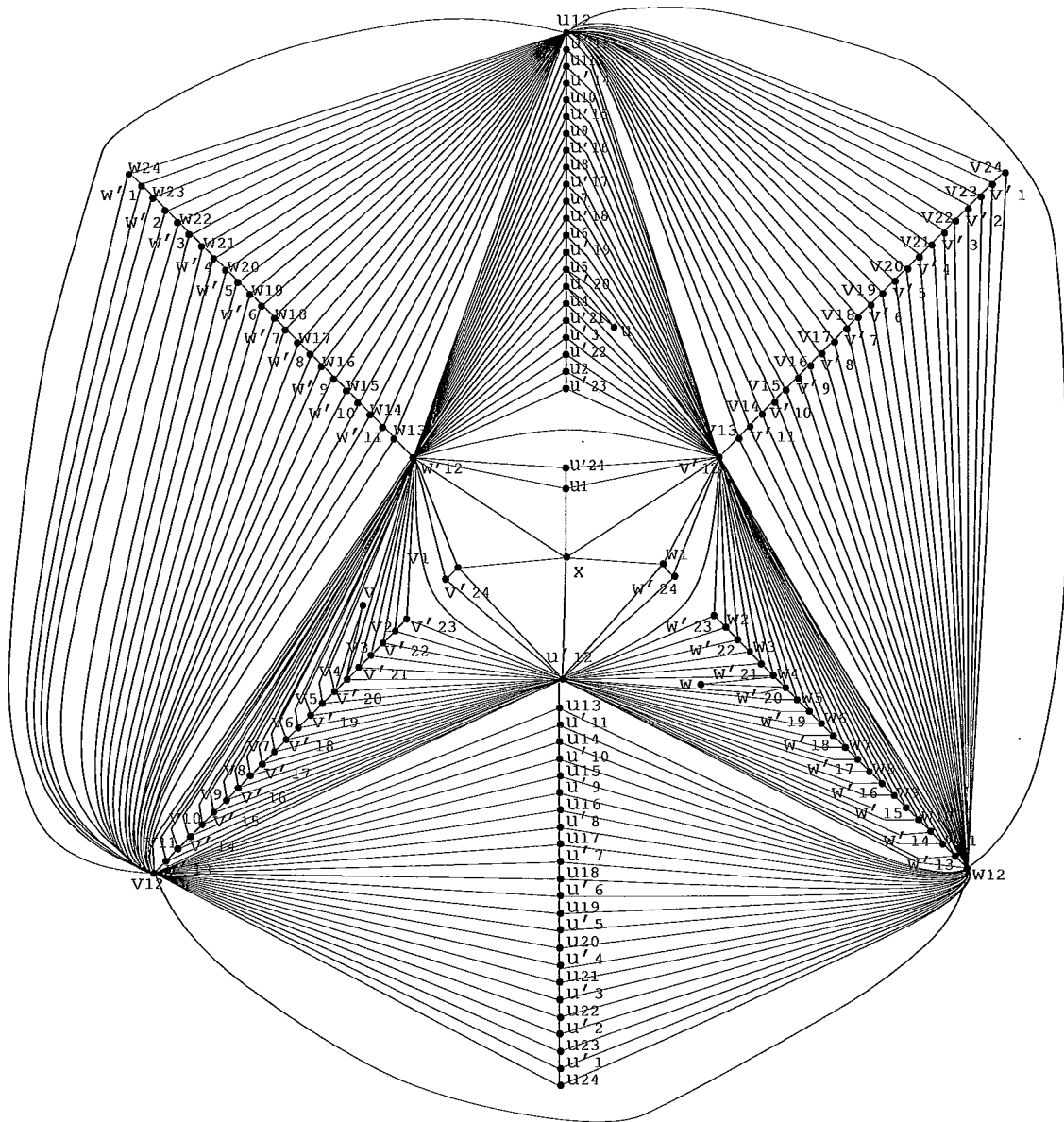


Figura 4.23: Grafo G_{12} final - decomposição do K_{148}

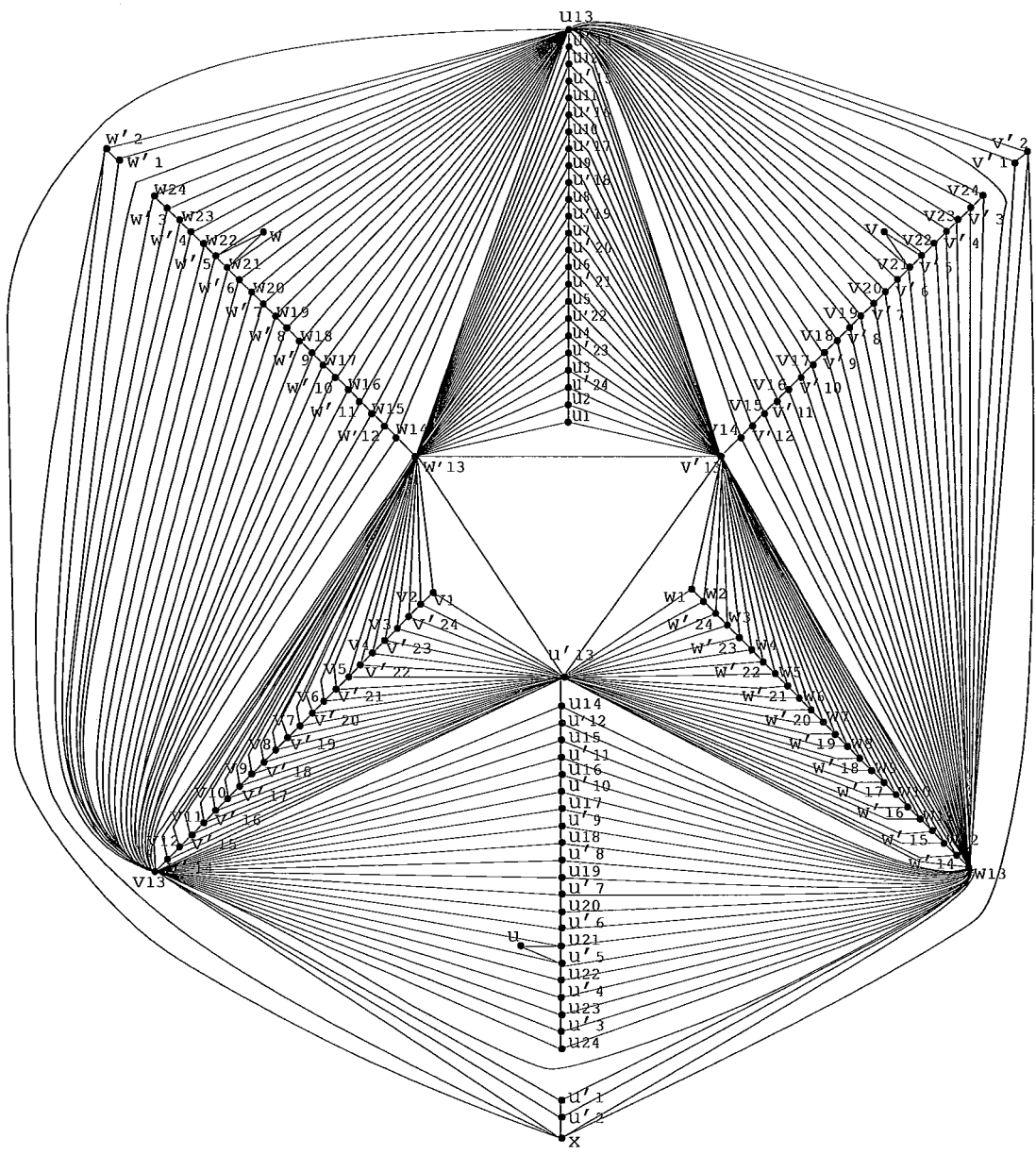


Figura 4.24: Grafo G_{13} final - decomposição do K_{148}

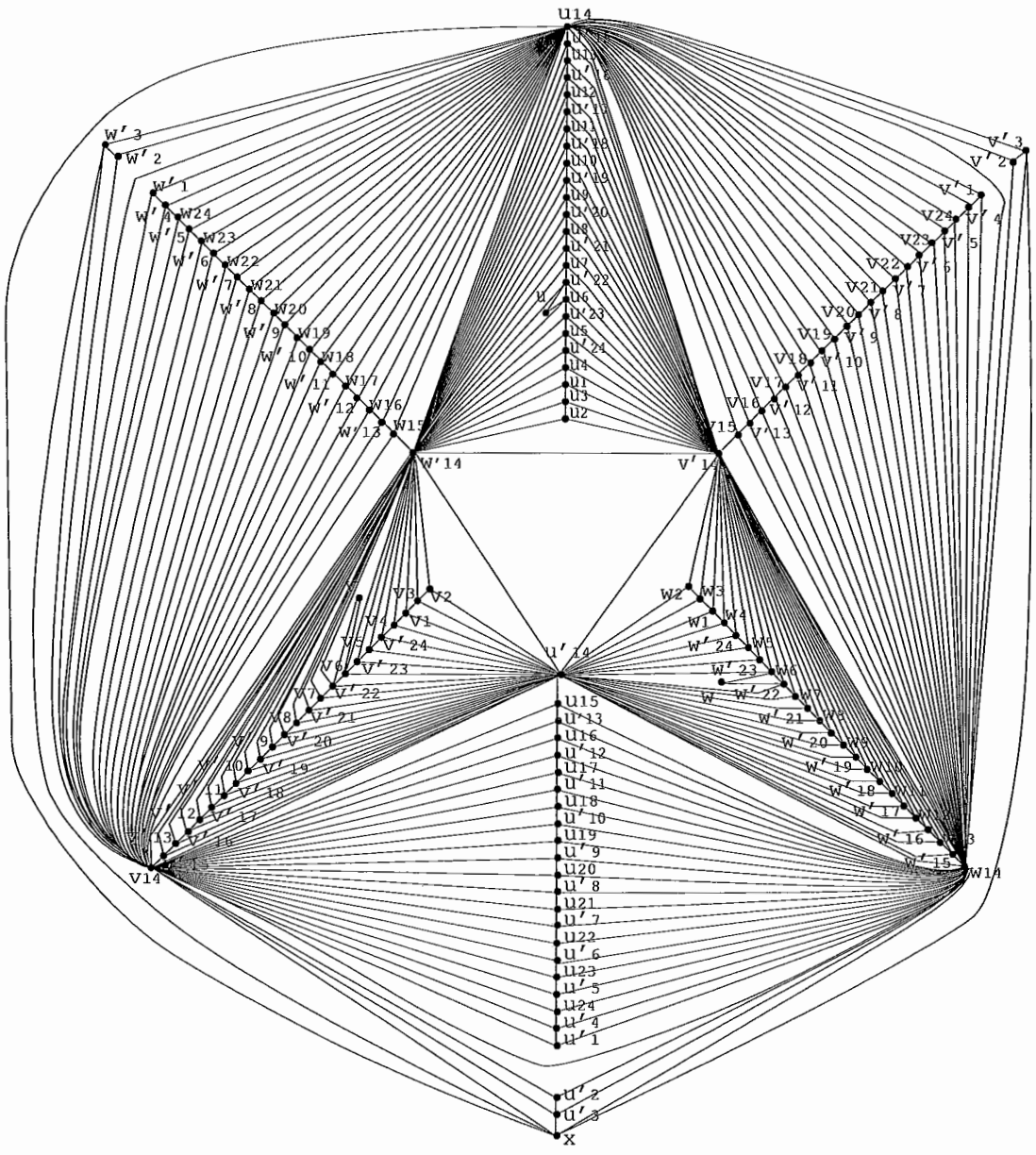


Figura 4.25: Grafo G_{14} final - decomposição do K_{148}

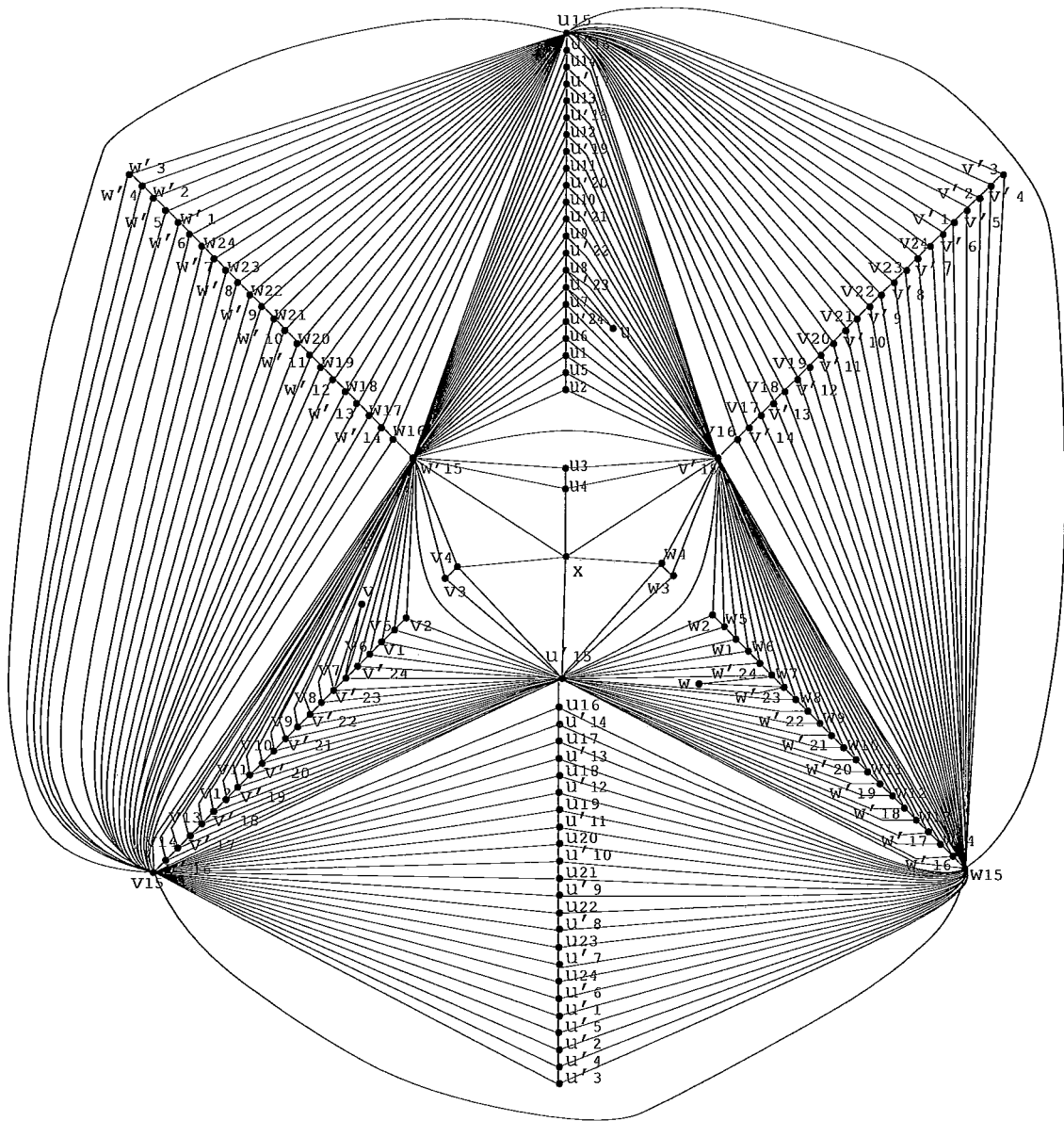


Figura 4.26: Grafo G_{15} final - decomposição do K_{148}

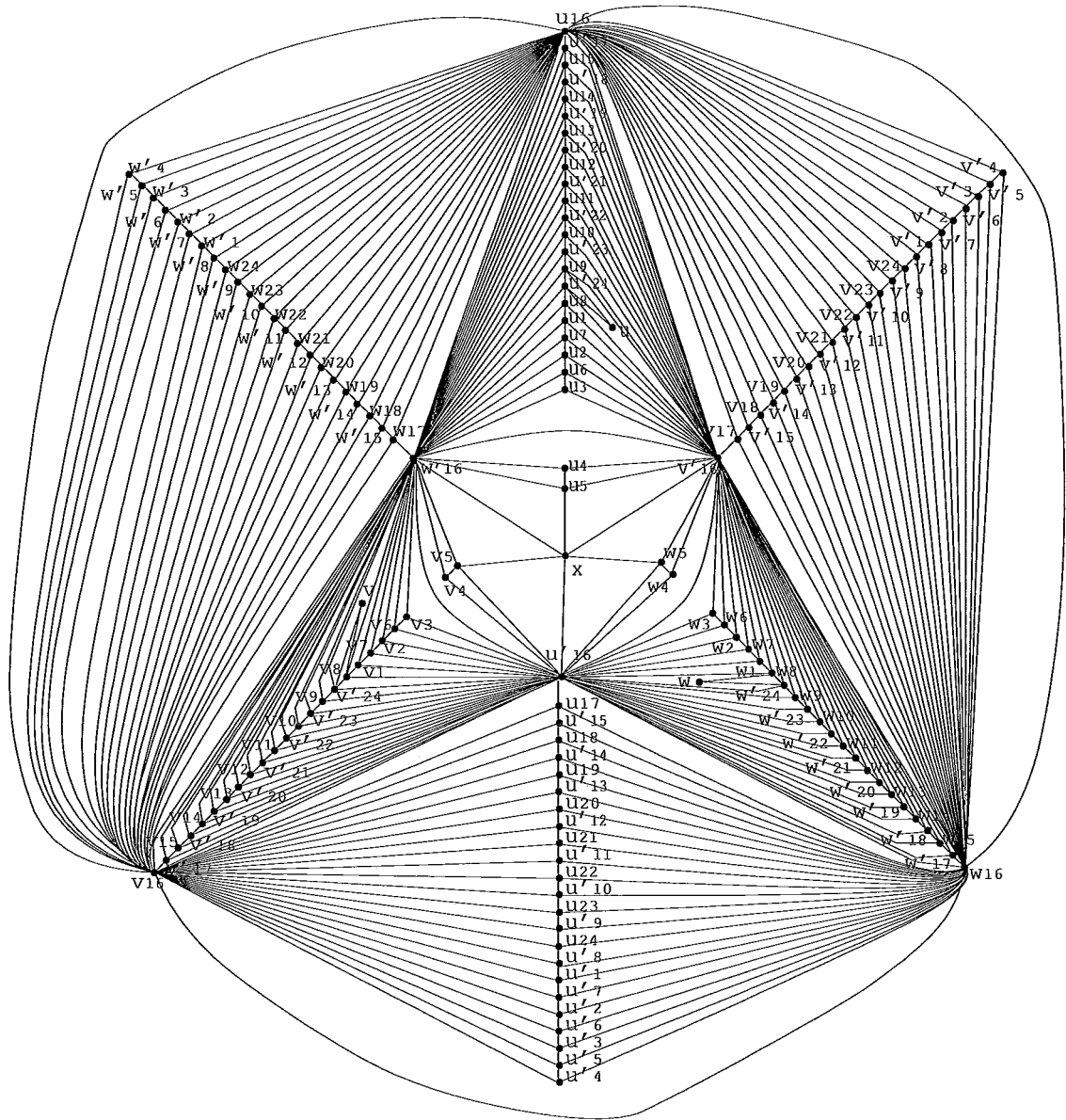


Figura 4.27: Grafo G_{16} final - decomposição do K_{148}

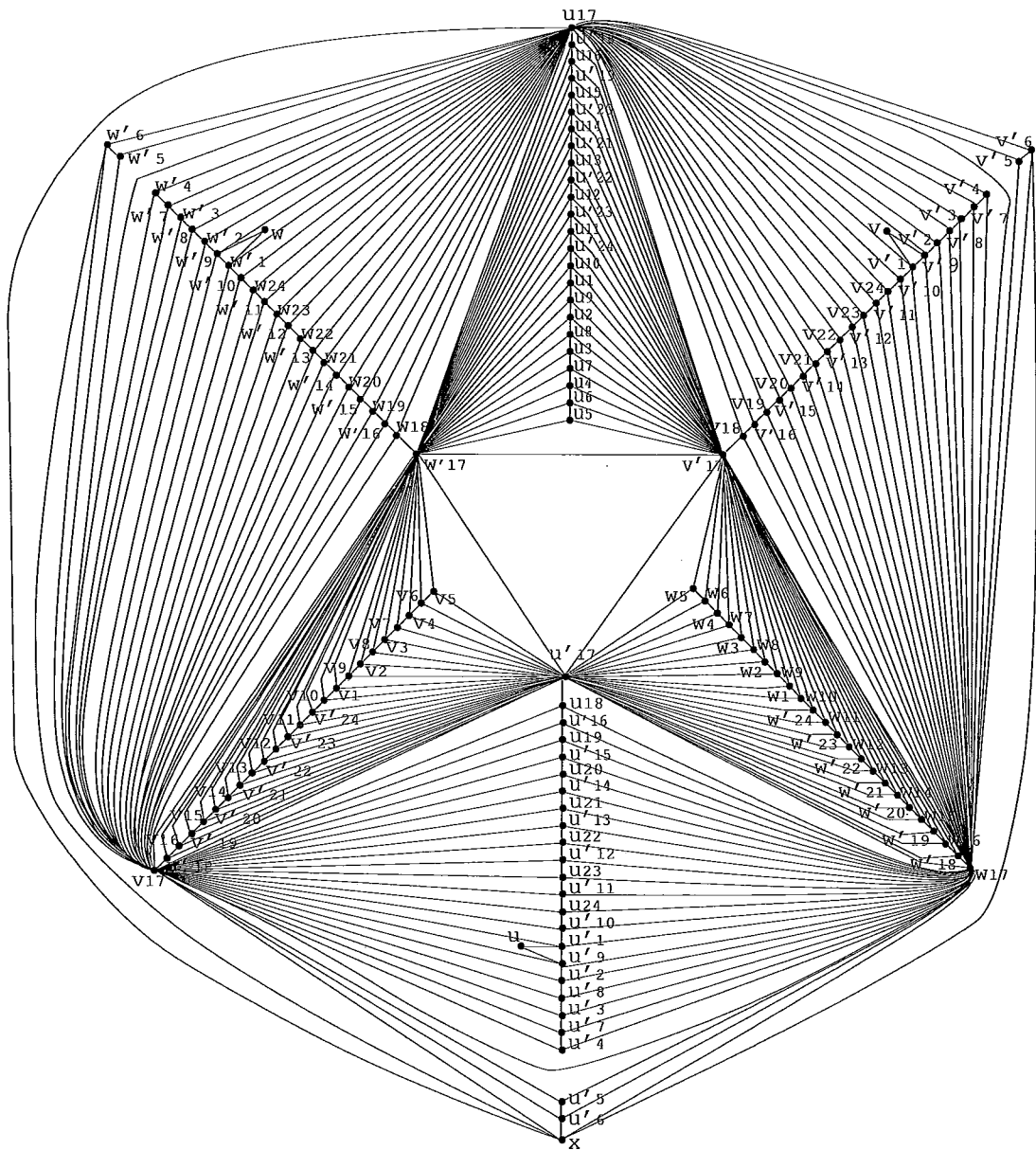


Figura 4.28: Grafo G_{17} final - decomposição do K_{148}

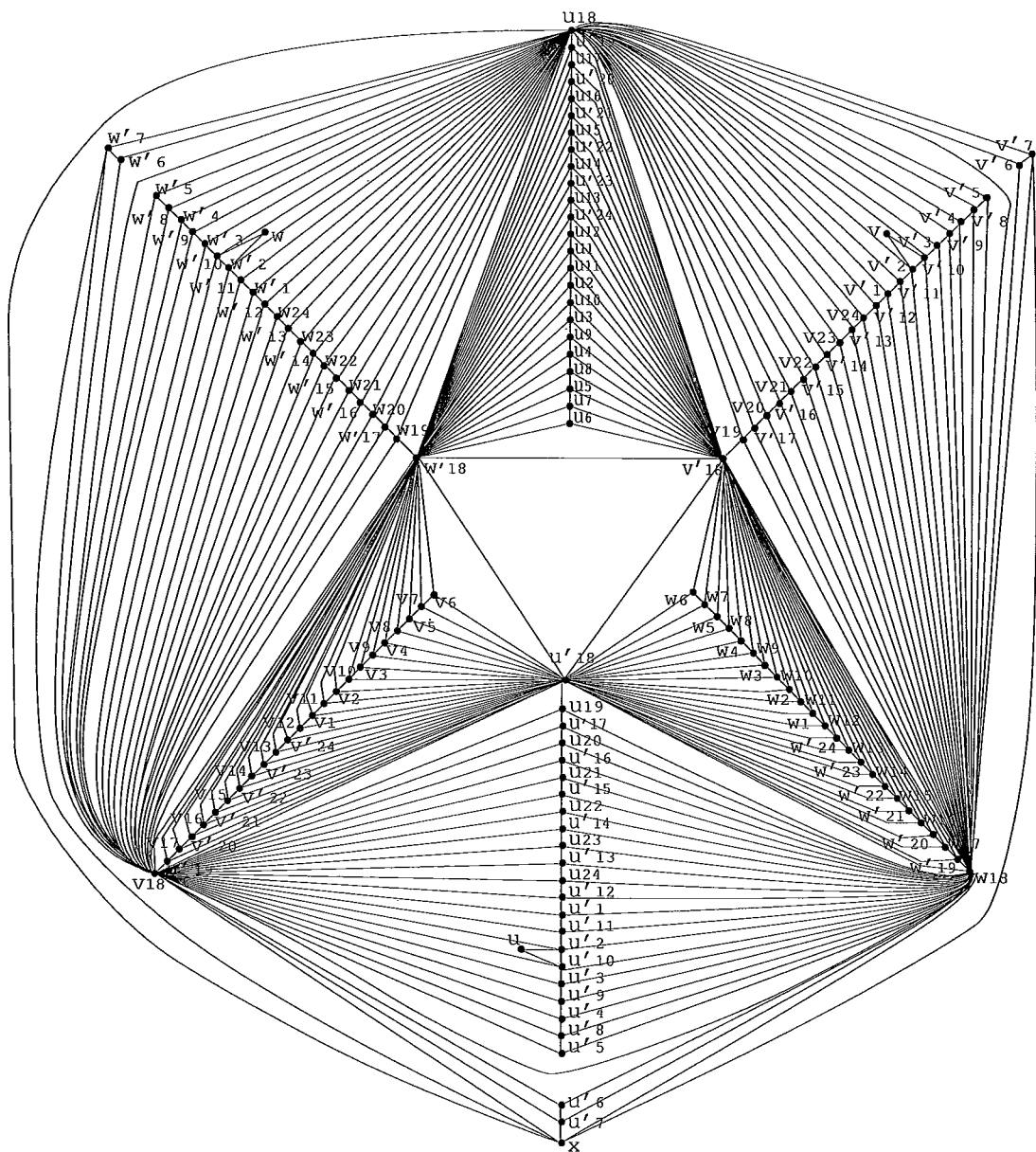


Figura 4.29: Grafo G_{18} final - decomposição do K_{148}

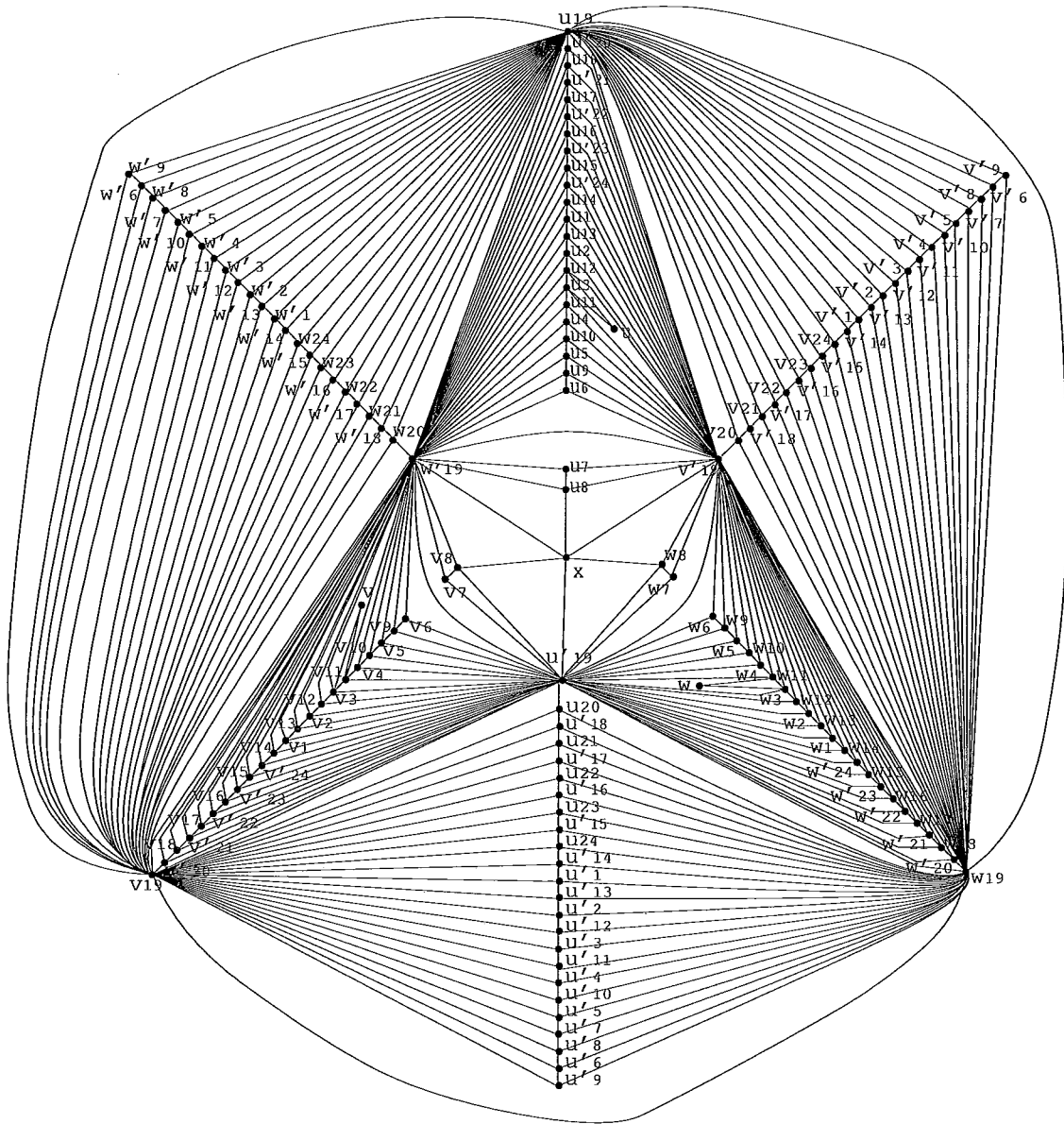


Figura 4.30: Grafo G_{19} final - decomposição do K_{148}

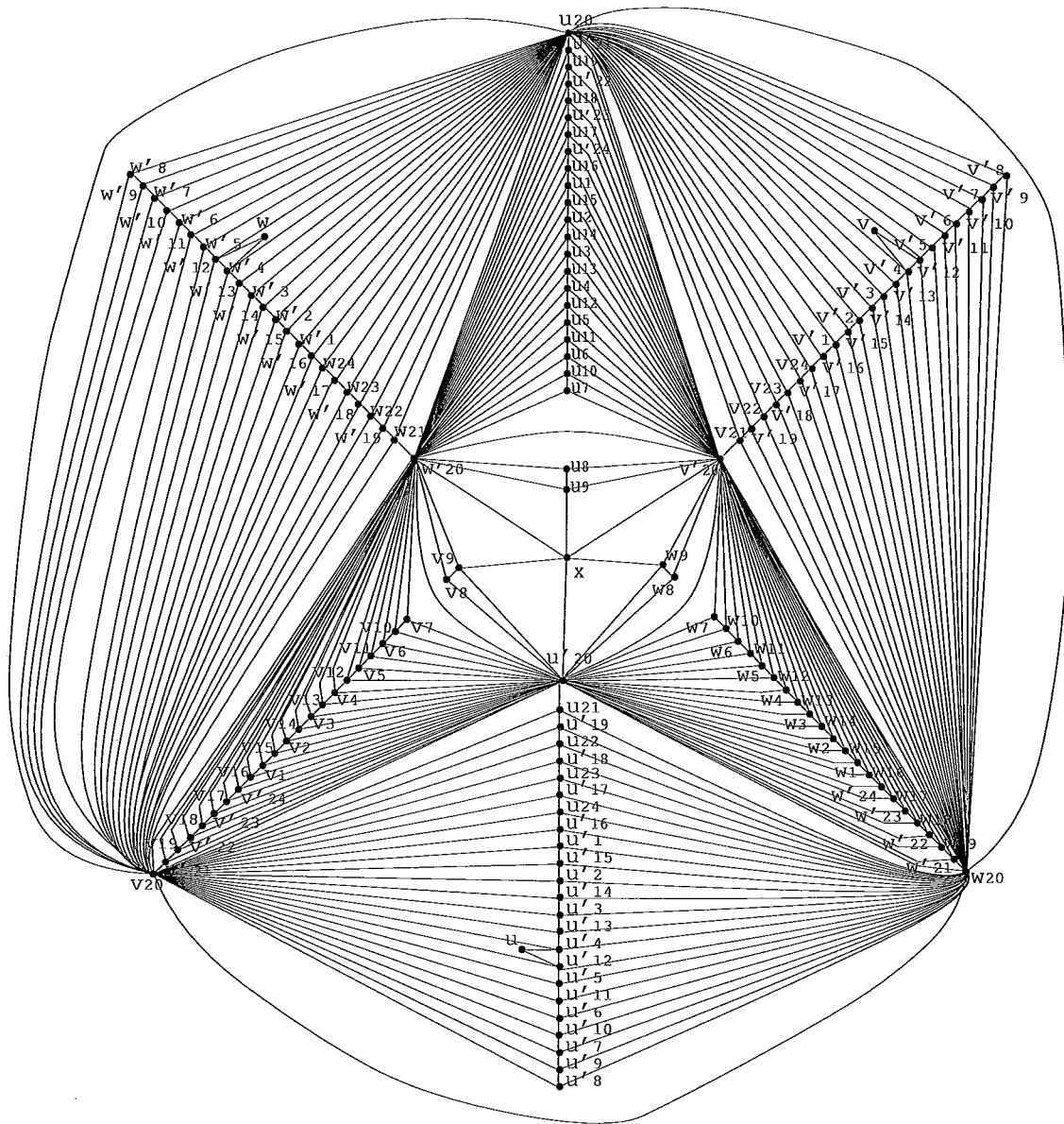


Figura 4.31: Grafo G_{20} final - decomposição do K_{148}

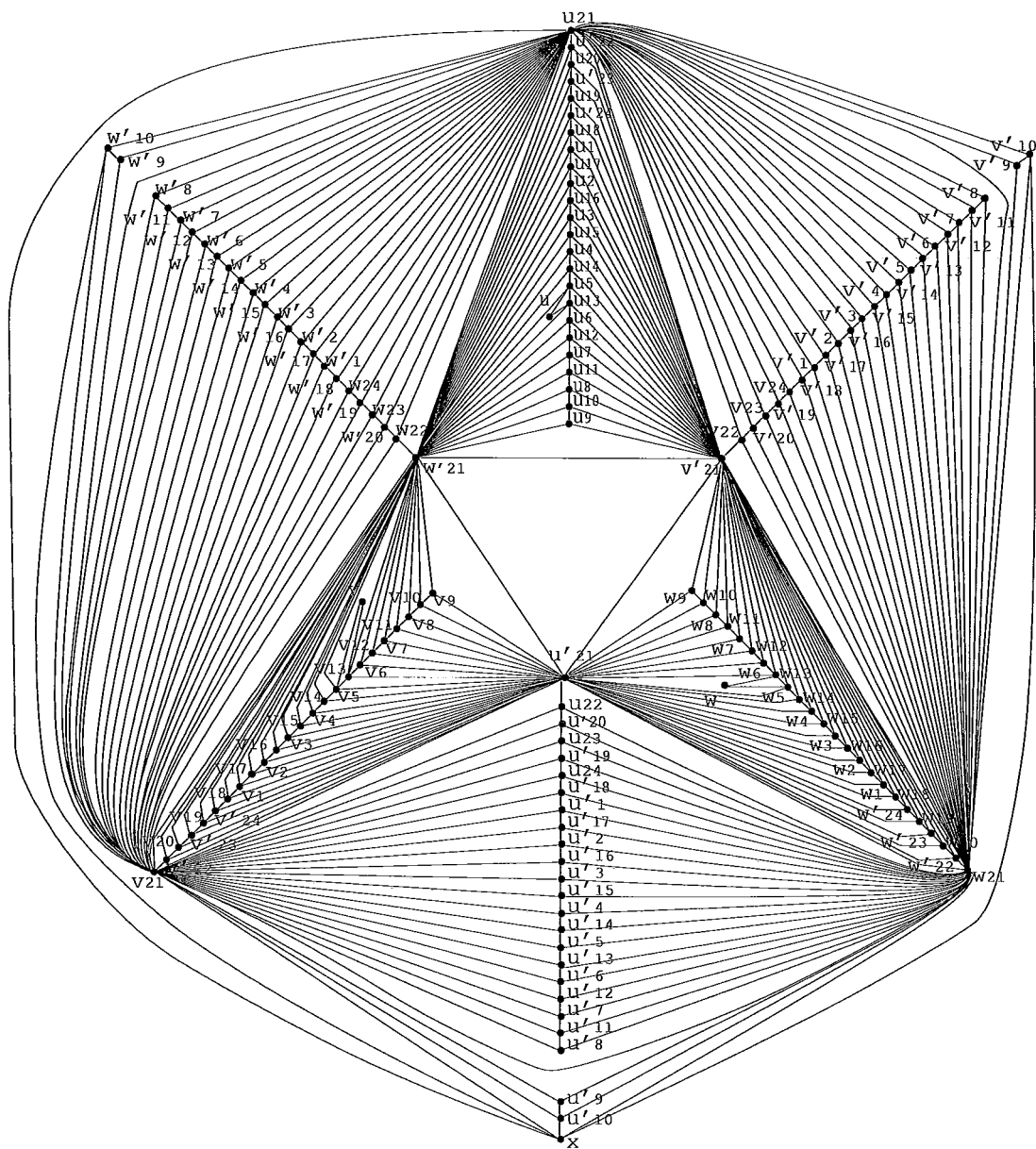


Figura 4.32: Grafo G_{21} final - decomposição do K_{148}

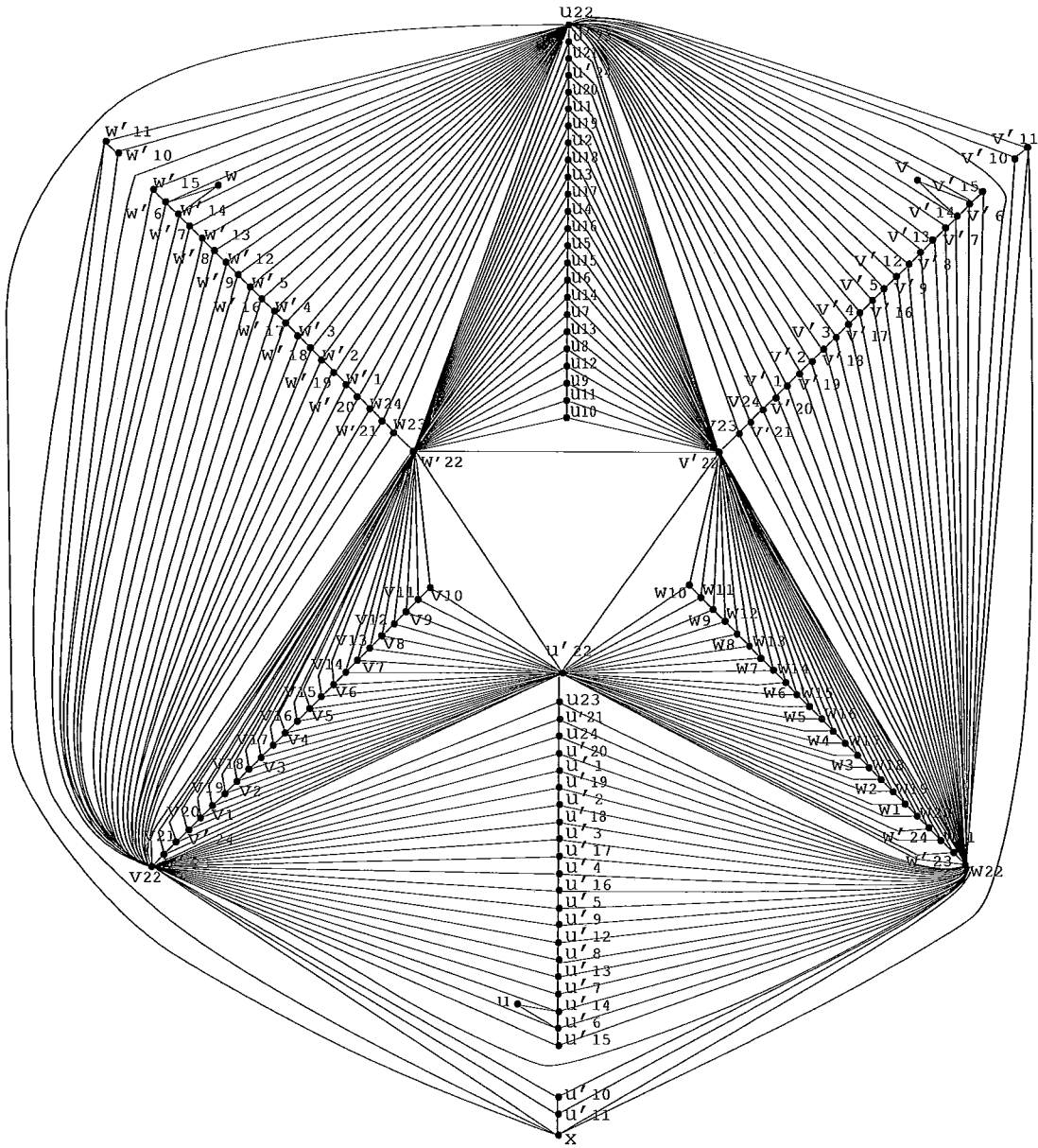


Figura 4.33: Grafo G_{22} final - decomposição do K_{148}

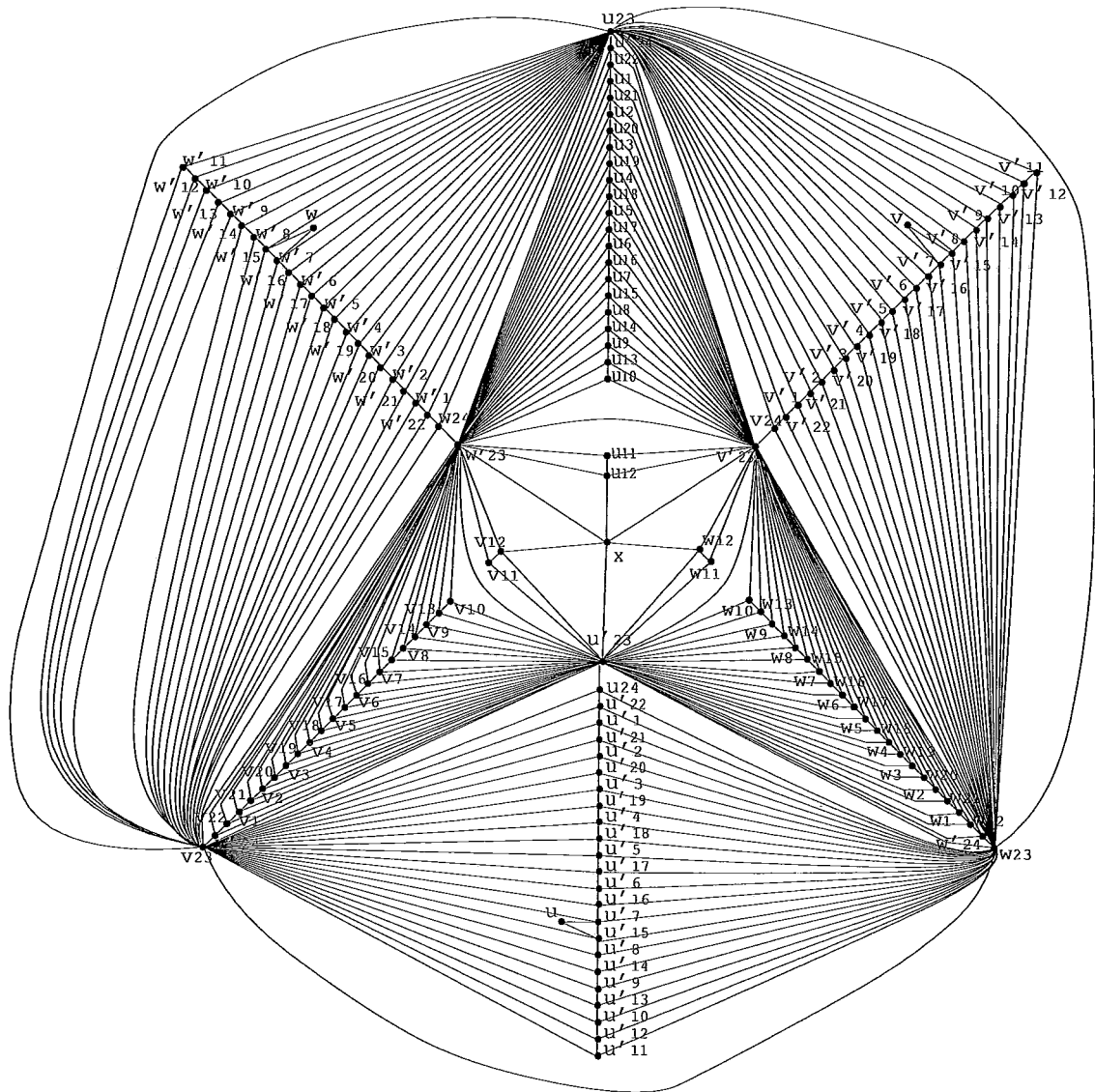


Figura 4.34: Grafo G_{23} final - decomposição do K_{148}

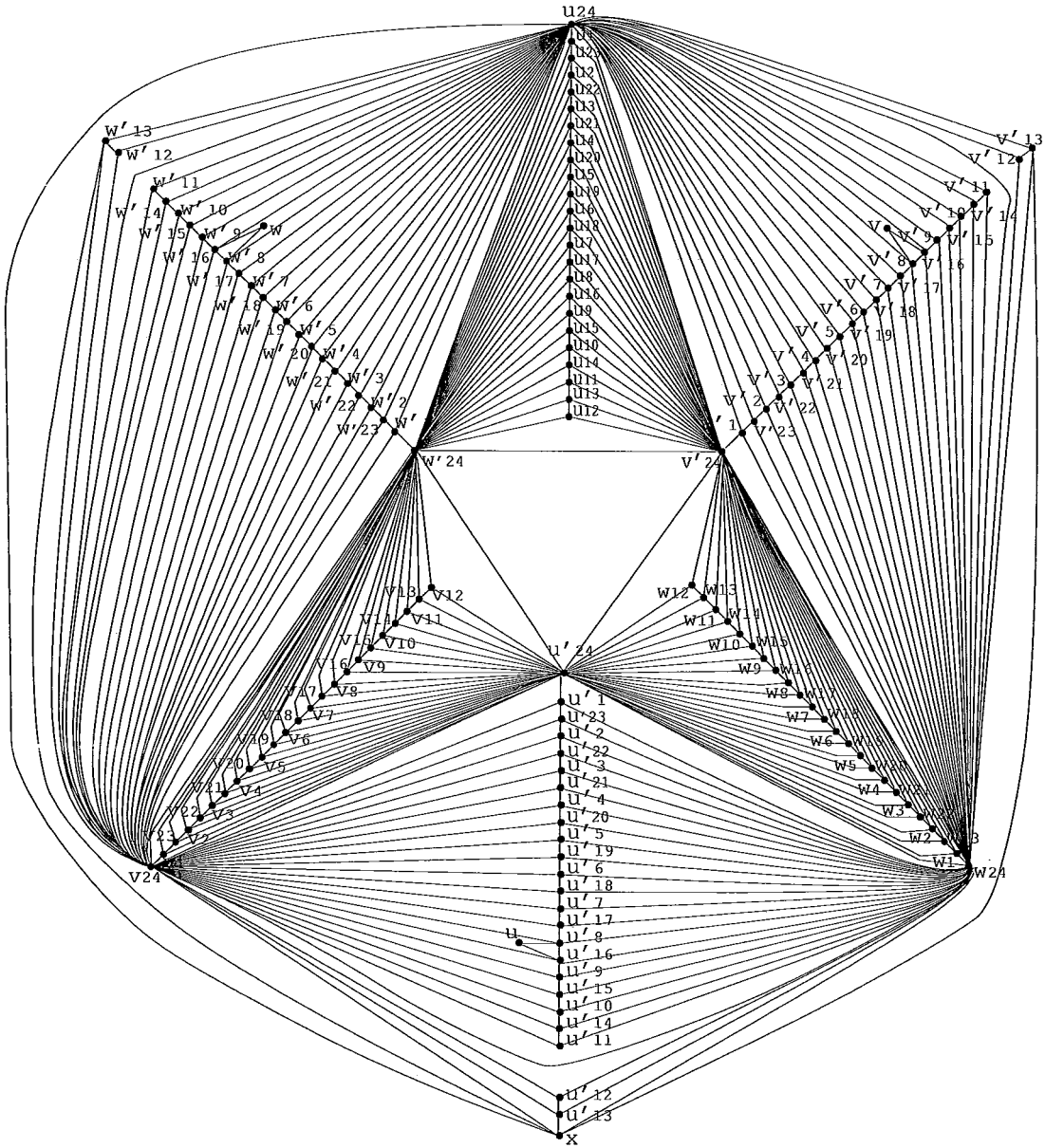


Figura 4.35: Grafo G_{24} - decomposição do K_{148}



Figura 4.36: Grafo suplementar G_{25} final - decomposição do K_{148}

Capítulo 5

3º caso: $n = 6p + 4$ e $p = 2^q$, com $q \geq 4$

Trataremos agora do último caso da decomposição do grafo K_n , onde $n = 6p + 4$, que considera $p = 2^q$, com $q \geq 4$.

Este caso será dividido em 4 subcasos: nos três primeiros subcasos trataremos da espessura do grafo completo com $n = 6p + 4$ vértices, onde $p = 2$, $p = 4$ e $p = 8$, respectivamente; já no quarto caso, estudaremos a espessura do grafo completo com $n = 6p + 4$ vértices e $p = 2^q$, com $q \geq 4$

5.1 1º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 2$

Este caso foi estudado em [11].

Se $p = 2$ então $n = 6p + 4 = 6 * 2 + 4 = 16$, e portanto, deveremos mostrar uma decomposição do grafo completo com 16 vértices em 3 subgrafos planares.

Nas figuras 5.1, 5.2, 5.3 vemos os 3 subgrafos planares que decompõem o K_{16} . Assim, $t(K_{16}) = 3 = p + 1$.

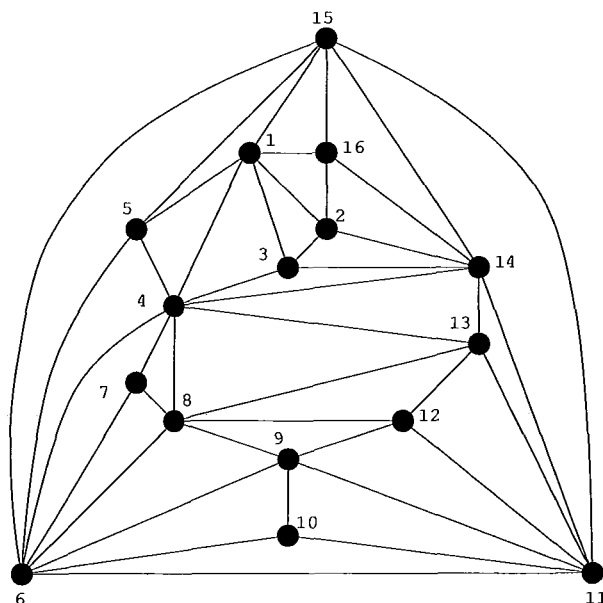


Figura 5.1: 1º subgrafo da decomposição do K_{16} .

Tabela de Adjacência do 1º subgrafo da decomposição do K_{16} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	2, 3, 4, 5, 15, 16	6
2	1, 3, 14, 16	4
3	1, 2, 4, 14	4
4	1, 3, 5, 6, 7, 8, 13, 14	8
5	1, 4, 6, 15	4
6	4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 15	8
7	4, 6, 8	3
8	4, 6, 7, 9, 12, 13	6
9	6, 8, 10, 11, 12	5
10	6, 9, 11	3
11	6, 9, 10, 12, 13, 14, 15	7
12	8, 9, 11, 13	4
13	4, 8, 11, 12, 14	5
14	2, 3, 4, 11, 13, 15, 16	7
15	1, 5, 6, 11, 14, 16	6
16	1, 2, 14, 15	4

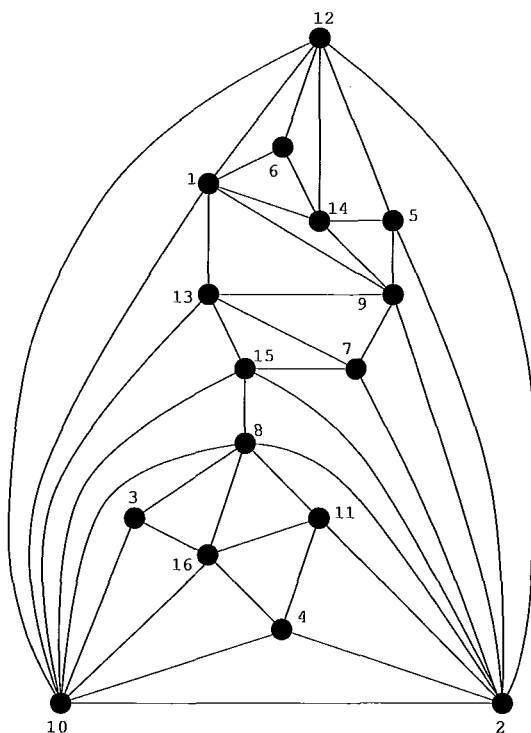


Figura 5.2: 2º subgrafo da decomposição do K_{16} .

Tabela de Adjacência do 2º subgrafo da decomposição do K_{16} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	6, 9, 10, 12, 13, 14	6
2	4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15	9
3	8, 10, 16	3
4	2, 10, 11, 16	4
5	2, 9, 12, 14	4
6	1, 12, 14	3
7	2, 9, 13, 15	4
8	2, 3, 10, 11, 15, 16	6
9	1, 2, 5, 7, 13, 14	6
10	1, 2, 3, 4, 8, 12, 13, 15, 16	9
11	2, 4, 8, 16	4
12	1, 2, 5, 6, 10, 14	6
13	1, 7, 9, 10, 15	5
14	1, 5, 6, 9, 12	5
15	2, 7, 8, 10, 13	5
16	3, 4, 8, 10, 11	5

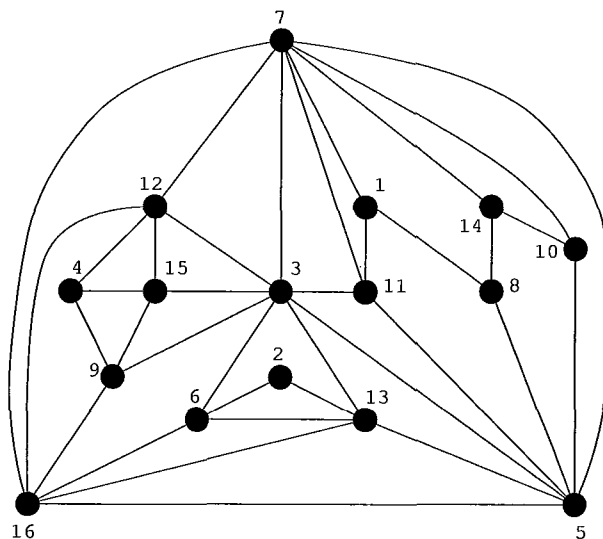


Figura 5.3: 3º subgrafo da decomposição do K_{16} .

Tabela de Adjacência do 3º subgrafo da decomposição do K_{16} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	7, 8, 11	3
2	6, 13	2
3	5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15	8
4	9, 12, 15	3
5	3, 7, 8, 10, 11, 13, 16	7
6	2, 3, 13, 16	4
7	1, 3, 5, 10, 11, 12, 14, 16	8
8	1, 5, 14	3
9	3, 4, 15, 16	4
10	5, 7, 14	3
11	1, 3, 5, 7	4
12	3, 4, 7, 15, 16	5
13	2, 3, 5, 6, 16	5
14	7, 8, 10	3
15	3, 4, 9, 12	4
16	5, 6, 7, 9, 12, 13	6

5.2 2º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 4$

Este subcaso também é resolvido por exaustão. O autor [1] não mostra esta decomposição, mas somente diz ser possível encontrar uma construção especial para decompor o grafo K_{28} em 5 subgrafos planares. Nós mostramos aqui esta construção.

Se $p = 4$ então $n = 6p + 4 = 6 * 4 + 4 = 28$. Logo, devemos mostrar uma decomposição do grafo completo com 28 vértices em 5 subgrafos planares.

Nas figuras 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 vemos os 5 subgrafos planares que decompõem o K_{28} . Portanto, $t(K_{28}) = 5 = p + 1$.

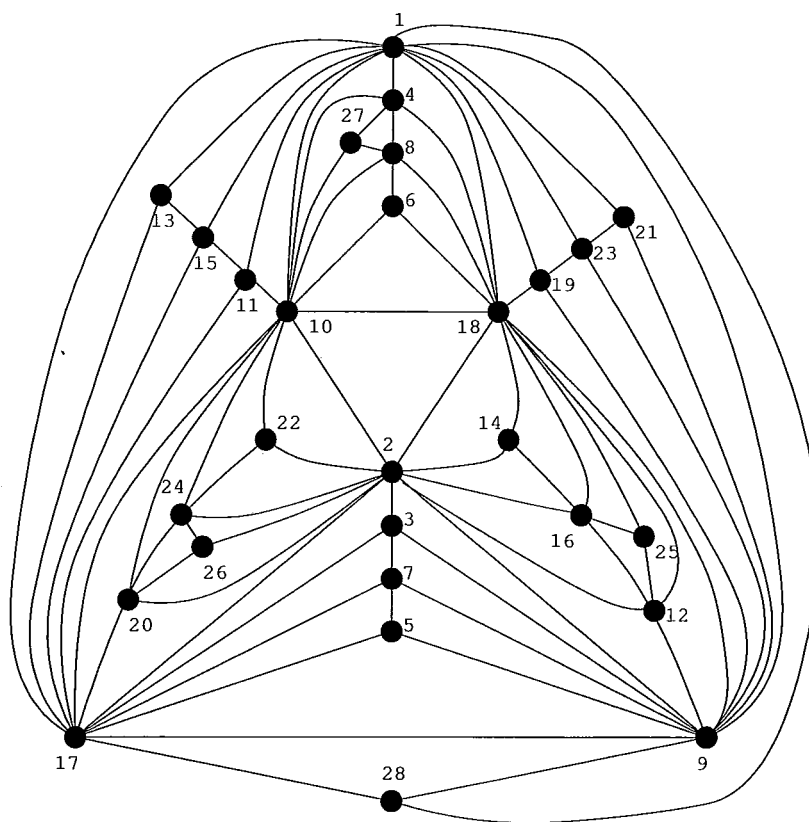


Figura 5.4: 1º subgrafo da decomposição do K_{28} .

Tabela de Adjacência do 1º subgrafo da decomposição do K_{28} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	4, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 28	12
2	3, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 26	12
3	2, 7, 9, 17	4
4	1, 8, 10, 18, 27	5
5	7, 9, 17	3
6	8, 10, 18	3
7	3, 5, 9, 17	4
8	4, 6, 10, 18, 27	5
9	1, 2, 3, 5, 7, 12, 17, 18, 19, 21, 23, 28	12
10	1, 2, 4, 6, 8, 11, 17, 18, 20, 22, 24, 27	12
11	1, 10, 15, 17	4
12	2, 9, 16, 18, 25	5
13	1, 15, 17	3
14	2, 16, 18	3
15	1, 11, 13, 17	4
16	2, 12, 14, 18, 25	5
17	1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 20, 28	12
18	1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 19, 25	12
19	1, 9, 18, 23	4
20	2, 10, 17, 24, 26	5
21	1, 9, 23	3
22	2, 10, 24	3
23	1, 9, 19, 21	4
24	2, 10, 20, 22, 26	5
25	12, 16, 18	3
26	2, 20, 24	3
27	4, 8, 10	3
28	1, 9, 17	3

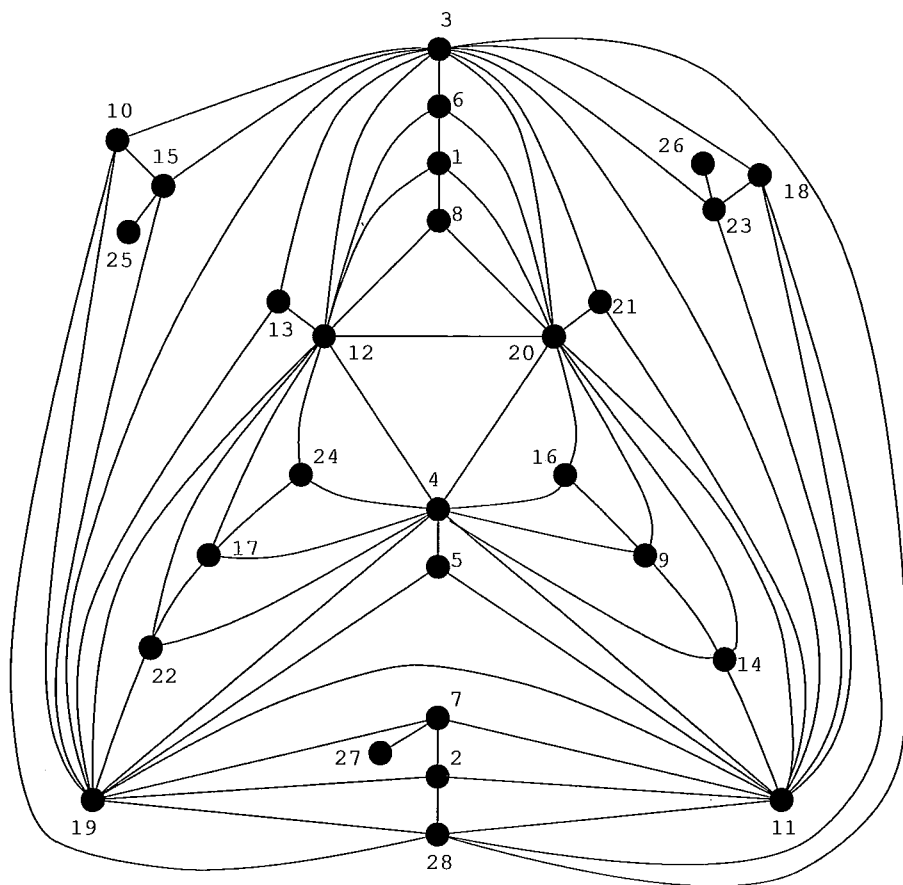


Figura 5.5: 2º subgrafo da decomposição do K_{28} .

Tabela de Adjacência do 2º subgrafo da decomposição do K_{28} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	6, 8, 12, 20	4
2	7, 11, 19, 28	4
3	1, 6, 11, 12, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 23, 28	12
4	5, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 24	11
5	4, 11, 19	3
6	1, 3, 12, 20	4
7	2, 11, 19, 27	4
8	1, 12, 20	3
9	4, 14, 16, 20	4
10	3, 15, 19, 28	4
11	2, 3, 4, 5, 7, 14, 18, 19, 20, 21, 23, 28	12
12	1, 3, 4, 6, 8, 13, 17, 19, 20, 22, 24	11
13	3, 12, 19	3
14	4, 9, 11, 20	4
15	3, 10, 19, 25	4
16	4, 9, 20	3
17	4, 12, 22, 24	4
18	3, 11, 23, 28	4
19	2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 22, 28	12
20	1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 21	11
21	3, 11, 20	3
22	4, 12, 17, 19	4
23	3, 11, 18, 26	4
24	4, 12, 17	3
25	15	1
26	23	1
27	7	1
28	2, 3, 10, 11, 18, 19	6

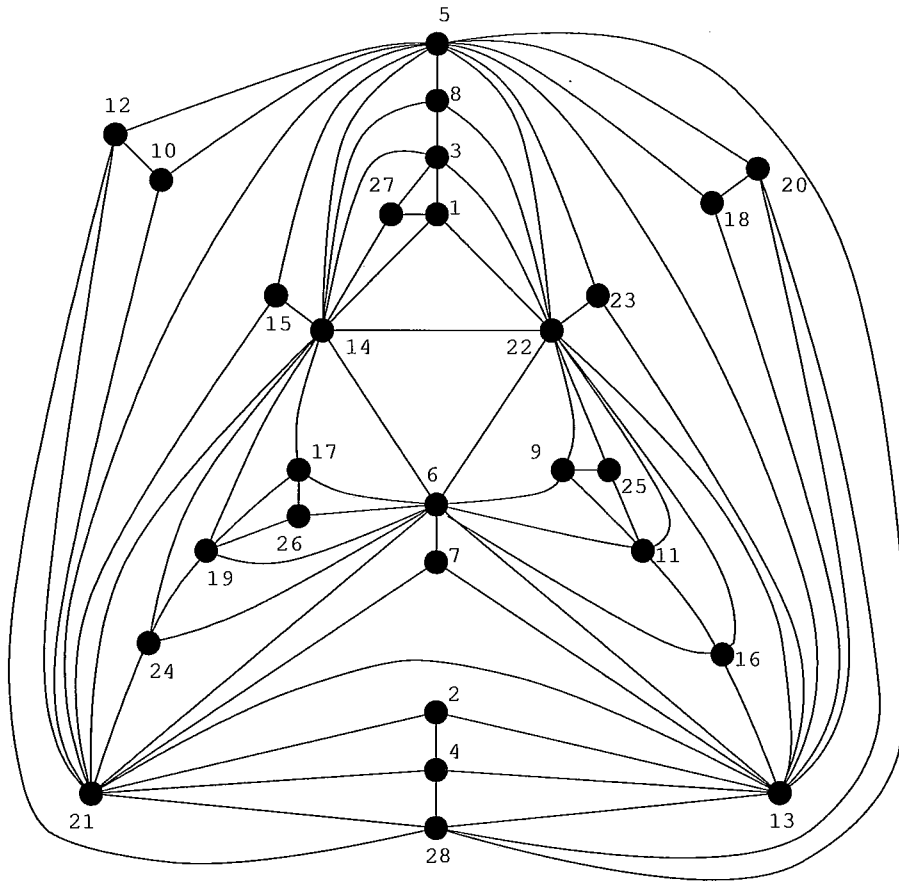


Figura 5.6: 3º subgrafo da decomposição do K_{28} .

Tabela de Adjacência do 3º subgrafo da decomposição do K_{28} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	3, 14, 22, 27	4
2	4, 13, 21	3
3	1, 8, 14, 22, 27	5
4	2, 13, 21, 28	4
5	8, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 23, 28	12
6	7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 26	12
7	6, 13, 21	3
8	3, 5, 14, 22	4
9	6, 11, 22, 25	4
10	5, 12, 21	3
11	6, 9, 16, 22, 25	5
12	5, 10, 21, 28	4
13	2, 4, 5, 6, 7, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 28	12
14	1, 3, 5, 6, 8, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 27	12
15	5, 14, 21	3
16	6, 11, 13, 22	4
17	6, 14, 19, 26	4
18	5, 13, 20	3
19	6, 14, 17, 24, 26	5
20	5, 13, 18, 28	4
21	2, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 24, 28	12
22	1, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 23, 25	12
23	5, 13, 22	3
24	6, 14, 19, 21	4
25	9, 11, 22	3
26	6, 17, 19	3
27	1, 3, 14	3
28	4, 5, 12, 13, 20, 21	6

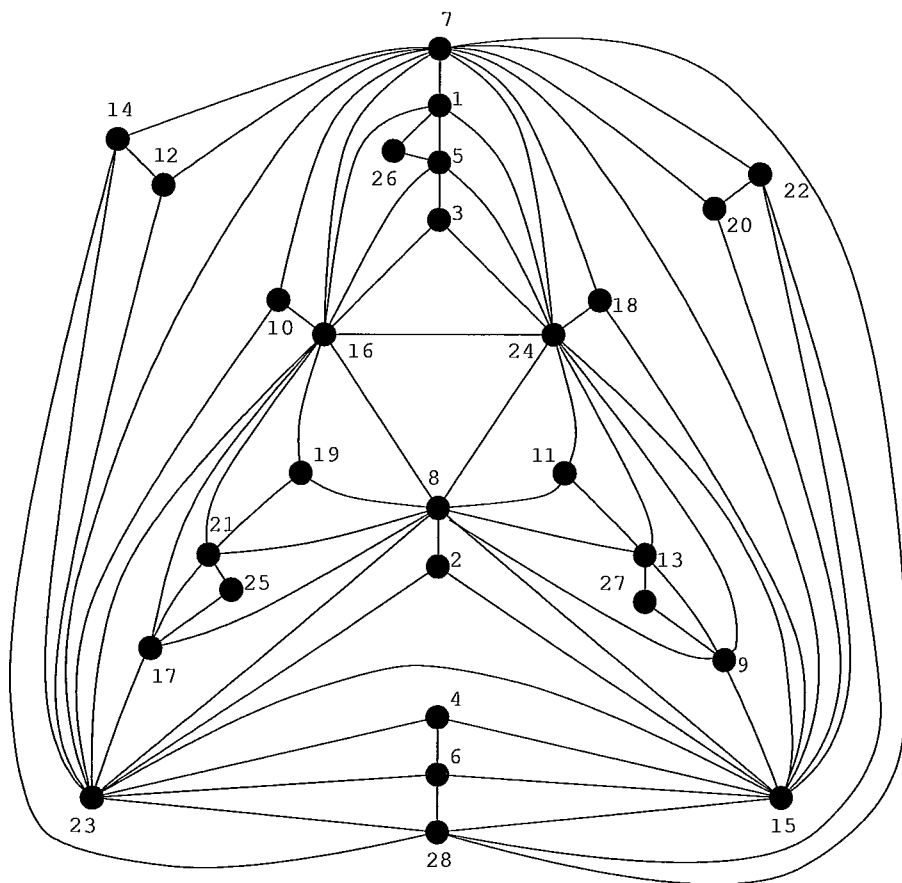


Figura 5.7: 4º subgrafo da decomposição do K_{28} .

Tabela de Adjacência do 4º subgrafo da decomposição do K_{28} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	5, 7, 16, 24, 26	5
2	8, 15, 23	3
3	5, 16, 24	3
4	6, 15, 23	3
5	1, 3, 16, 24, 26	5
6	4, 15, 23, 28	4
7	1, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 28	12
8	2, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 24	11
9	8, 13, 15, 24, 27	5
10	7, 16, 23	3
11	8, 13, 24	3
12	7, 14, 23	3
13	8, 9, 11, 24, 27	5
14	7, 12, 23, 28	4
15	2, 4, 6, 7, 8, 9, 18, 20, 22, 23, 24, 28	12
16	1, 3, 5, 7, 8, 10, 17, 19, 21, 23, 24	11
17	8, 16, 21, 23, 25	5
18	7, 15, 24	3
19	8, 16, 21	3
20	7, 15, 22	3
21	8, 16, 17, 19, 25	5
22	7, 15, 20, 28	4
23	2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 28	12
24	1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 18	11
25	17, 21	2
26	1, 5	2
27	9, 13	2
28	6, 7, 14, 15, 22, 23	6

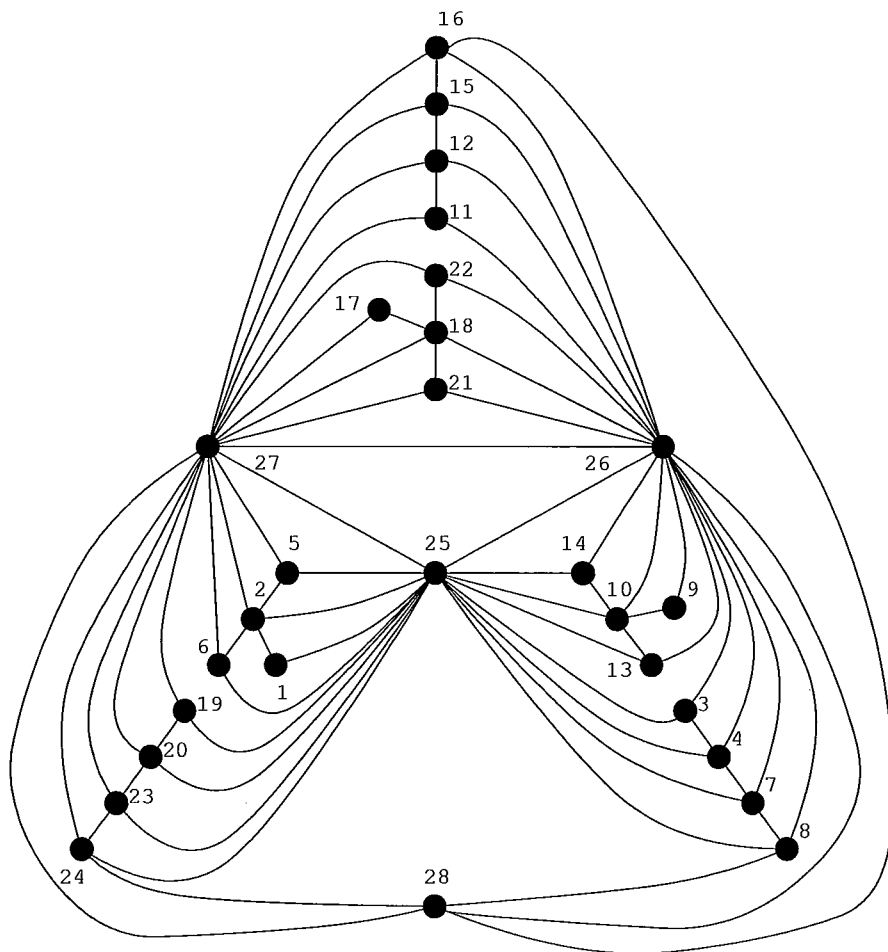


Figura 5.8: 5º subgrafo da decomposição do K_{28} .

Tabela de Adjacência do 5º subgrafo da decomposição do K_{28} :		
Vértice	Adjacência	Grau
1	2, 25	2
2	1, 5, 6, 25, 27	5
3	4, 25, 26	3
4	3, 7, 25, 26	4
5	2, 25, 27	3
6	2, 25, 27	3
7	4, 8, 25, 26	4
8	7, 25, 26, 28	4
9	10, 26	2
10	9, 13, 14, 25, 26	5
11	12, 26, 27	3
12	11, 15, 26, 27	4
13	10, 25, 26	3
14	10, 25, 26	3
15	12, 16, 26, 27	4
16	15, 26, 27, 28	4
17	18, 27	2
18	17, 21, 22, 26, 27	5
19	20, 25, 27	3
20	19, 23, 25, 27	4
21	18, 26, 27	3
22	18, 26, 27	3
23	20, 24, 25, 27	4
24	23, 25, 27, 28	4
25	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 19, 20, 23, 24, 26, 27, 28	18
26	3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 21, 22, 25, 27, 28	18
27	2, 5, 6, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28	18
28	8, 16, 24, 25, 26, 27	6

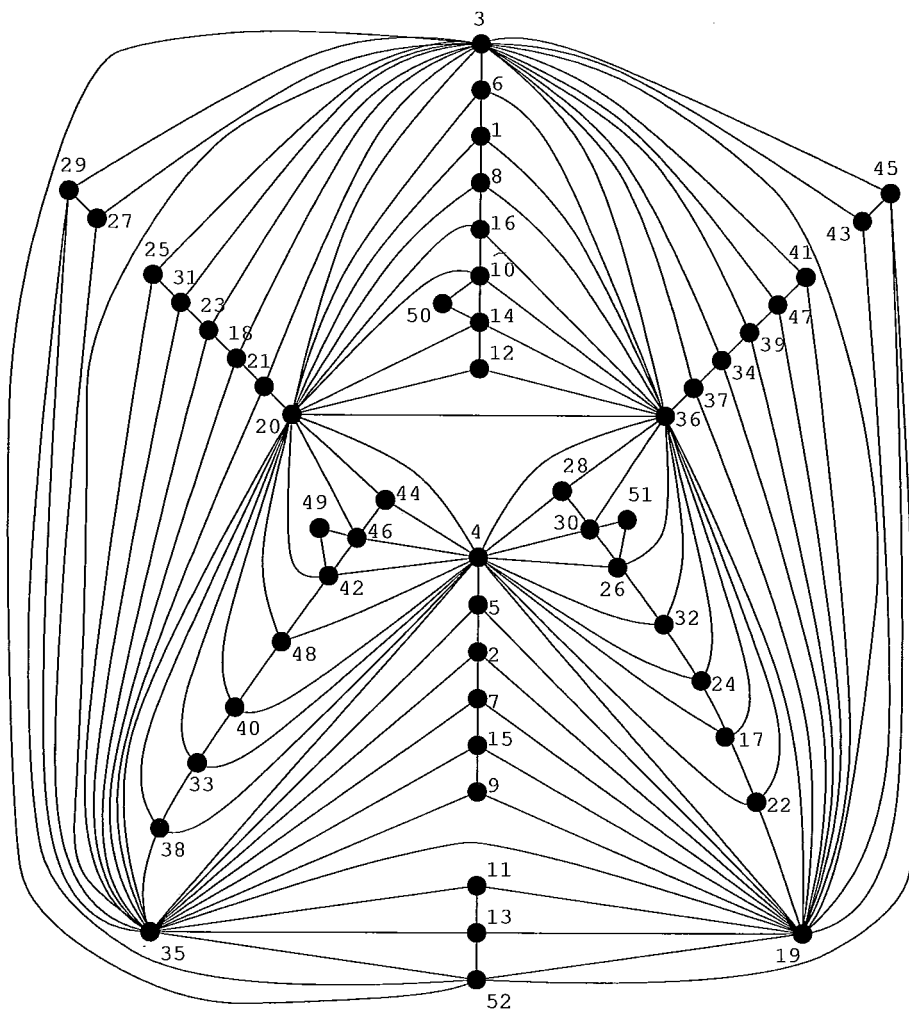


Figura 5.10: 2º subgrafo da decomposição do K_{52} .

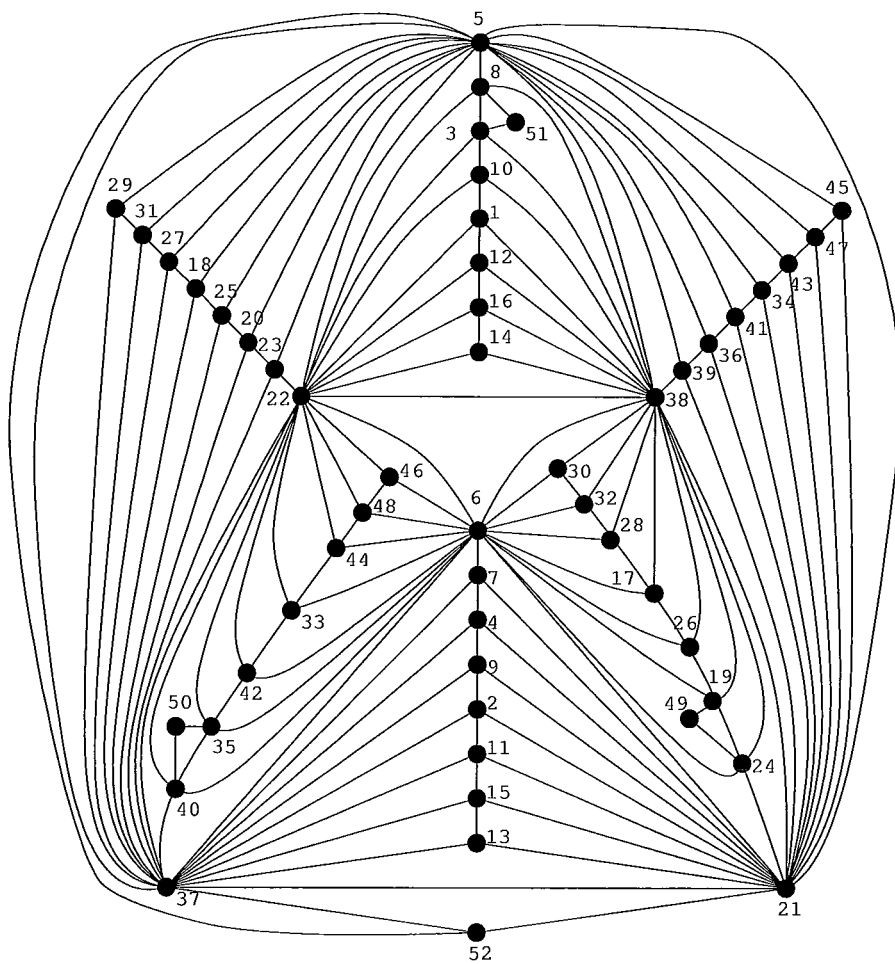


Figura 5.11: 3º subgrafo da decomposição do K_{52} .

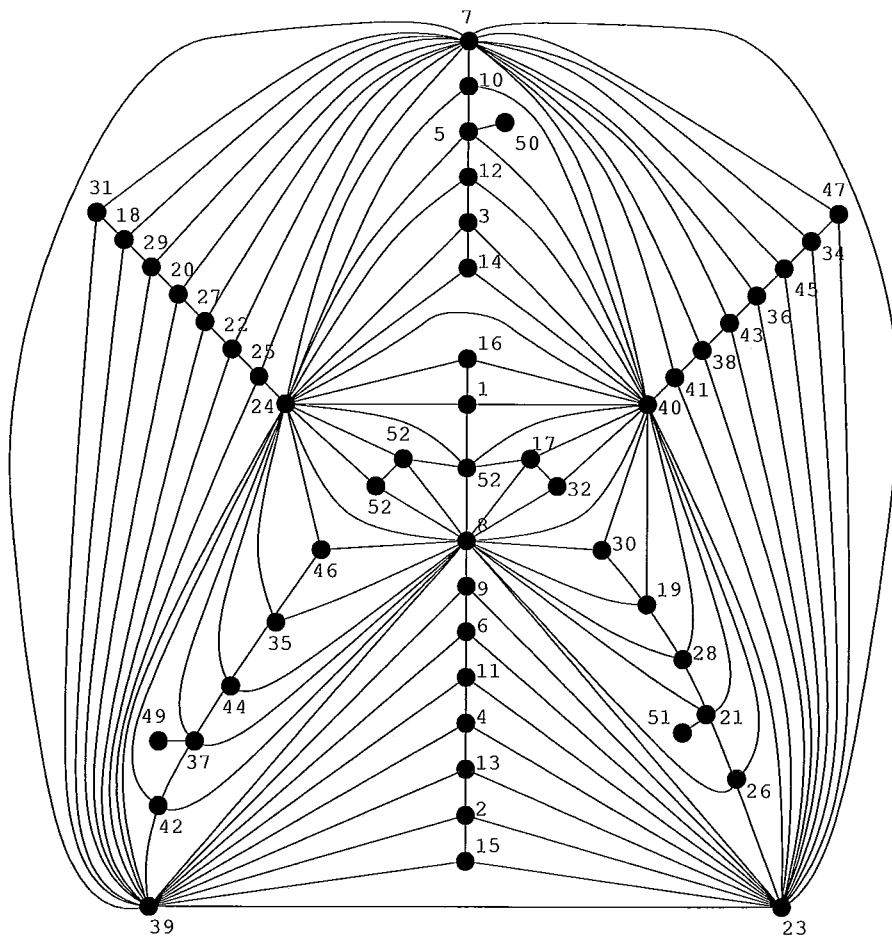


Figura 5.12: 4º subgrafo da decomposição do K_{52} .

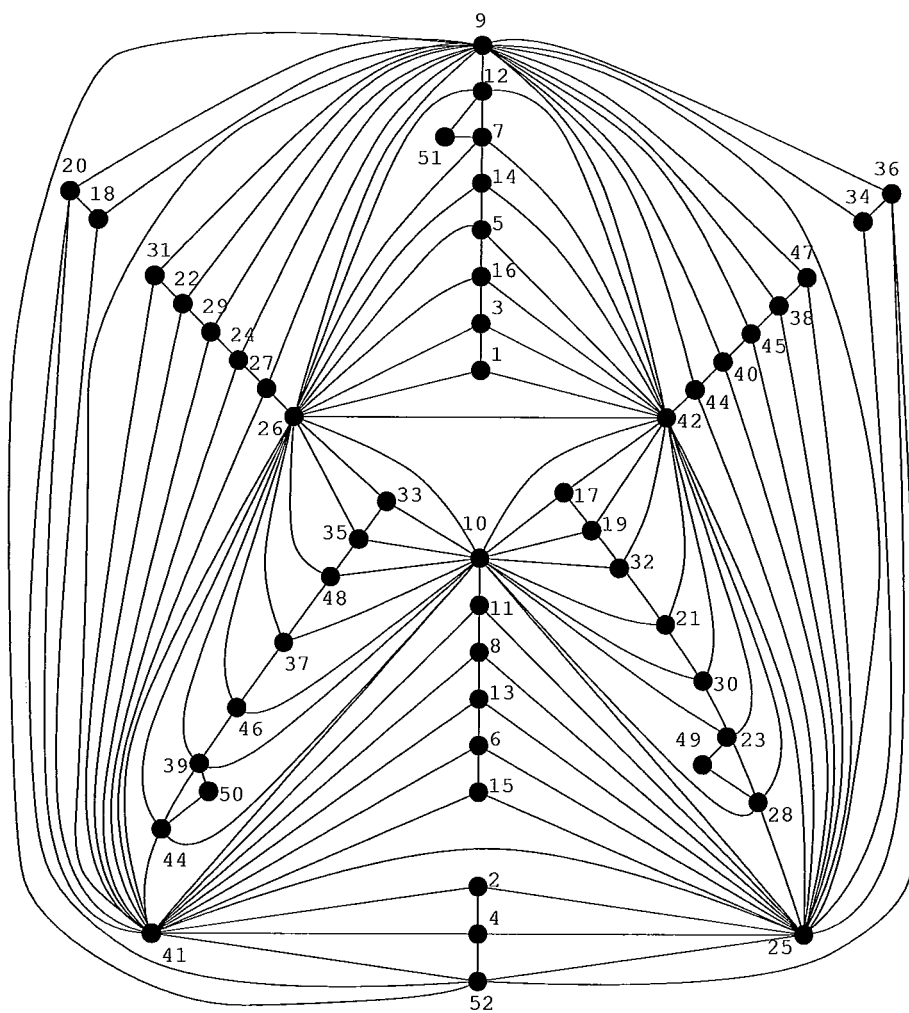


Figura 5.13: 5º subgrafo da decomposição do K_{52} .

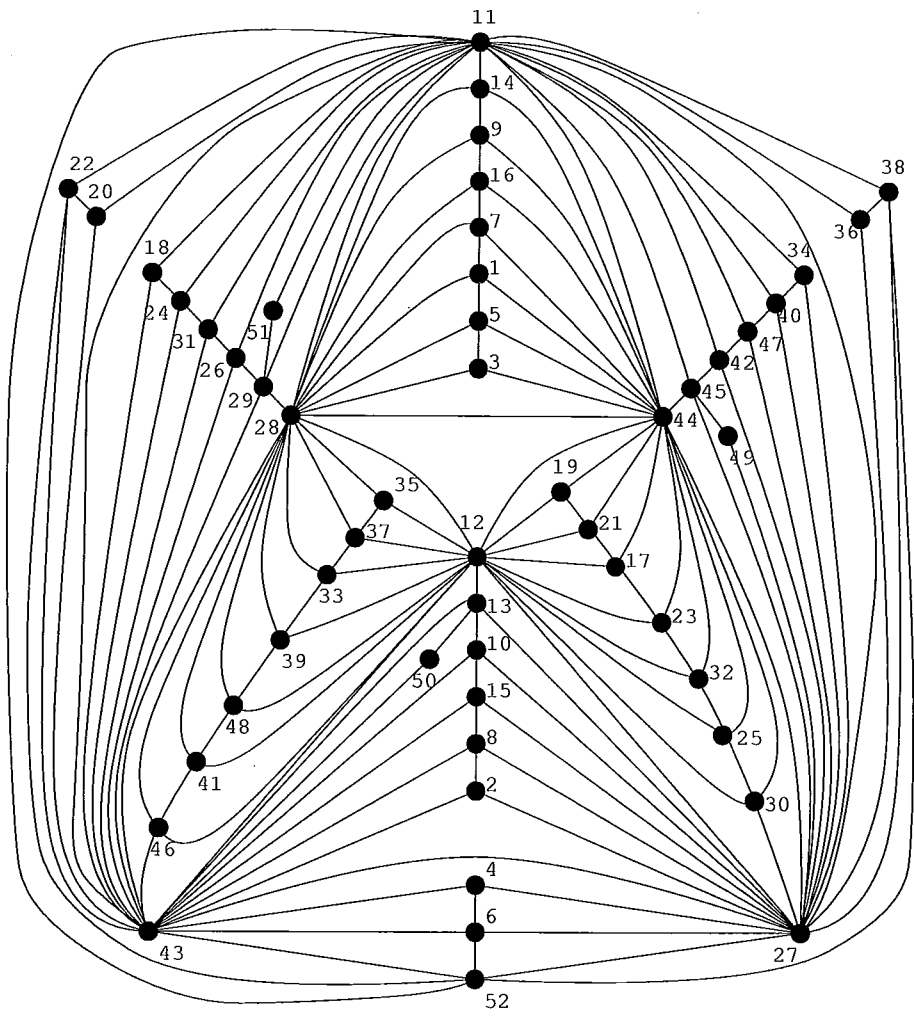


Figura 5.14: 6º subgrafo da decomposição do K_{52} .

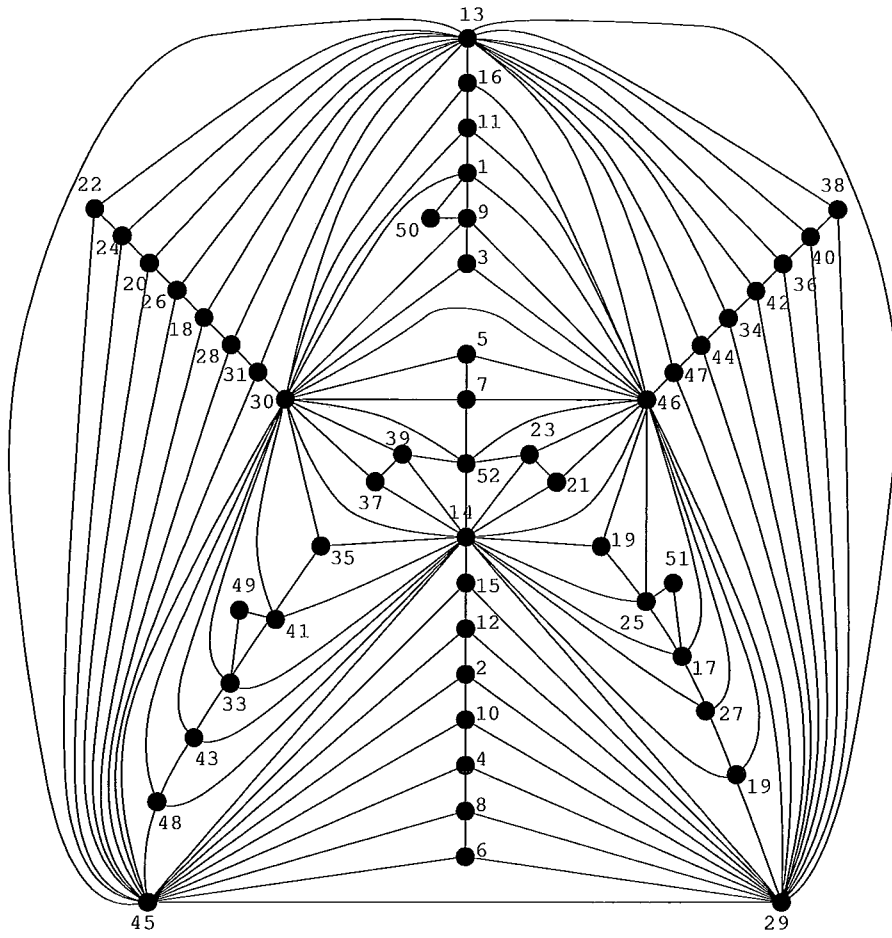


Figura 5.15: 7º subgrafo da decomposição do K_{52} .

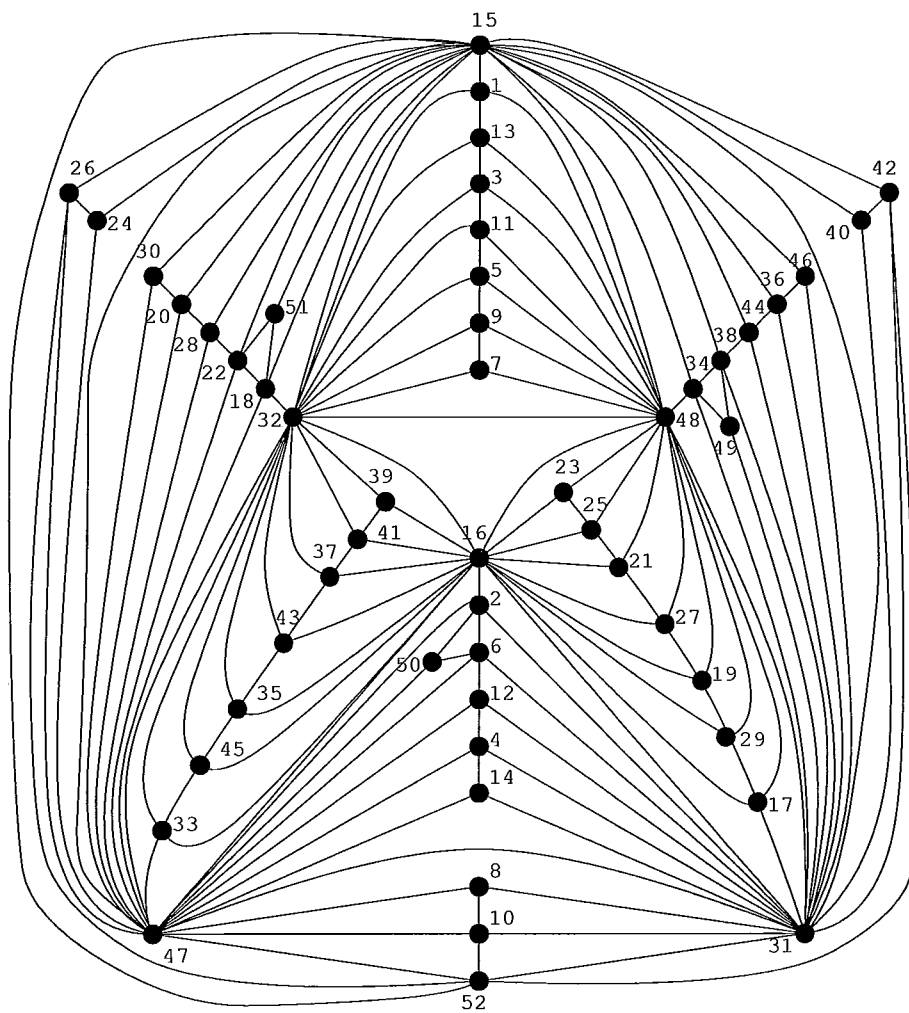


Figura 5.16: 8º subgrafo da decomposição do K_{52} .

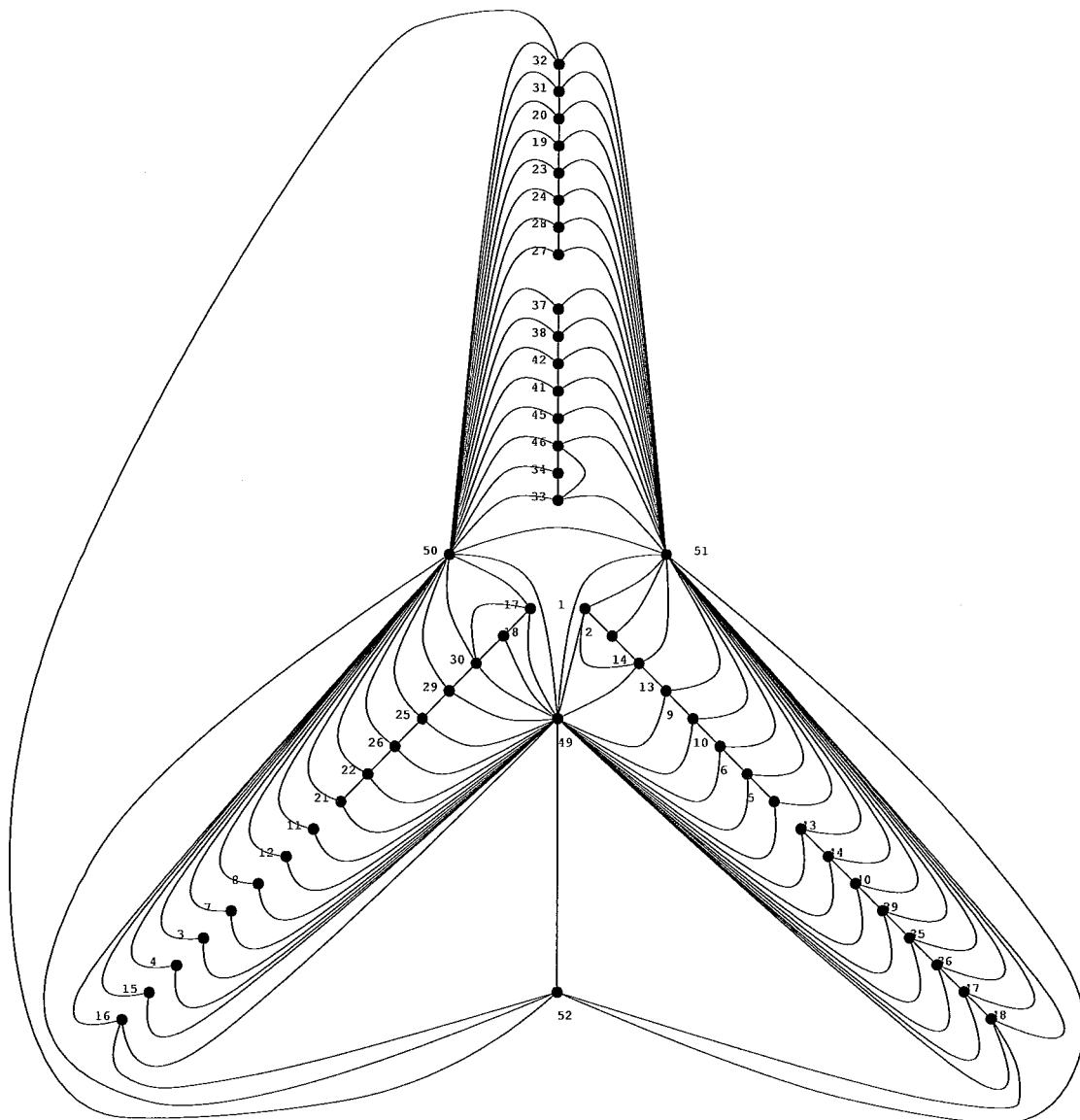


Figura 5.17: 9º subgrafo da decomposição do K_{52} .

5.4 4º subcaso: $n = 6p + 4$, com $p = 2^q$, $q \geq 4$

Se G é um grafo com $6p + 4$ vértices, onde $p = 2^q$ e $q \geq 4$, então a modificação fundamental será feita retirando-se a aresta que está entre os $(p-2)$ -ésimo e $(p-1)$ -ésimo vértices dos desenhos C_1, C_2 e C_3 , ou nos desenhos C_4, C_5 e C_6 . Esses vértices correspondem às constantes $+(\frac{p}{2} - 1)$ e $-(\frac{p}{2} - 1)$. A modificação então, será feita da seguinte forma:

Primeiro copiamos os elementos da primeira e das $(p-2)$ -ésima e $(p-1)$ -ésima linhas da matriz A . Em seguida, arrumamos a seqüência de modo que a primeira coluna inicie com o elemento p e o último elemento de cada coluna coincida com o primeiro elemento da próxima coluna. O próximo passo, então, é marcar os elementos obedecendo as seguintes regras:

- 1) Os elementos da primeira e da $(p-1)$ -ésima linhas serão marcados de modo que cada par fique diferente do par correspondente em A' em um único lugar, e de modo que o último elemento de cada par precedente e o primeiro elemento do par subsequente possuam entre si somente uma marcação. A seqüência inicia-se com o elemento p não-marcado;
- 2) A linha $(p-2)$ será marcada de modo que entre ela e a linha $(p-1)$ cada par seja marcado de modo semelhante ao que aparece em A' ou de forma oposta a esta.

Após efetuarmos estas marcações, se o elemento da primeira linha aparecer marcado, então a modificação fundamental será feita nos desenhos C_1, C_2 e C_3 . Caso contrário, os desenhos que receberão a modificação serão C_4, C_5 e C_6 .

No grafo $G_{\frac{p}{2}-1}$ não retiramos nenhuma aresta, mas somente colocamos o vértice x na fronteira exterior e conectamos este aos vértices $u_{\frac{p}{2}-1}$, $v_{\frac{p}{2}-1}$ e $w_{\frac{p}{2}-1}$.

Como resultado, o vértice x não será conectado somente aos vértices u'_p , v'_p e w'_p .

Vale observar que, nos estudo feito sobre as primeira, $(p - 2)$ -ésima e $(p - 1)$ -ésima linhas, após as devidas marcações, temos que as linhas 1 e $(p - 1)$ indicam os vértices que serão conectados ao vértice x . Já as linhas $(p - 2)$ e $(p - 1)$ indicam as arestas removidas pela modificação fundamental, que deverão ser colocadas no grafo suplementar, juntamente com as arestas da forma (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) , $i = 1, \dots, p$.

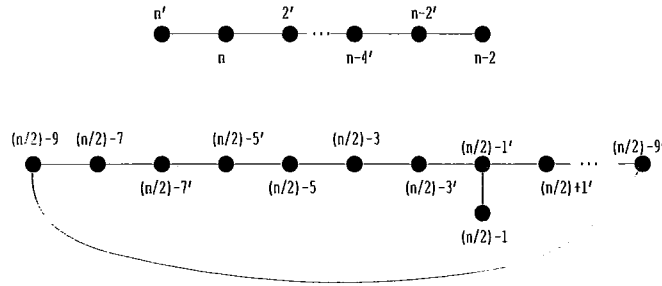


Figura 5.18: Arestas removidas, juntamente com arestas da forma (u_i, u'_i) , (v_i, v'_i) e (w_i, w'_i) , $i = 1, \dots, p$ caso $p = 2^k$

Adicione ao ciclo da figura 5.18 a aresta $(\frac{p}{2} - 5, \frac{p}{2} - 3')$ e retire esta aresta de algum grafo G_r , $r = 1, \dots, p$, e modifique a grade resultante de modo que outra aresta possa ser inserida, de forma análoga à estudada no caso anterior.

A seguir, estudamos a retirada e inserção das arestas:

Aresta retirada	Aresta inserida	Grafo	Constante das linhas		Cadeia alt
$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} - 5)$	$(\frac{p}{2} - 3', p - 5')$	$G_{\frac{p}{2}-4}$	$+1, -1$		<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 3', p - 5')$	$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} + \frac{p}{4} - 5')$	$G_{\frac{p}{4}-4}$	$+\frac{p}{4} + 1, -\frac{p}{4} + 1$		<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} + \frac{p}{2^s} - 5')$	$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} + \frac{p}{2^{s+1}} - 5')$	$G_{\frac{p}{2^{s+1}}-4}$	$+\frac{p}{2} - \frac{p}{2^{s+1}} + 1, -\frac{p}{2} - \frac{p}{2^{s+1}} + 1$	$\frac{p}{2^{s+1}} \geq 8$	<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} + 16 - 5')$	$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} + 3')$	$G_{8-4=4}$	$+\frac{p}{2} - 7, -\frac{p}{2} - 7$		<i>alt</i>
$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} + 3')$	$(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} - 1')$	$G_{p'}$	$+\frac{p}{2} - 3, -\frac{p}{2} - 3$		<i>alt</i>

Como resultado, obtemos a aresta $(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} - 1')$ que pode ser retirada do ciclo anterior, obtendo:

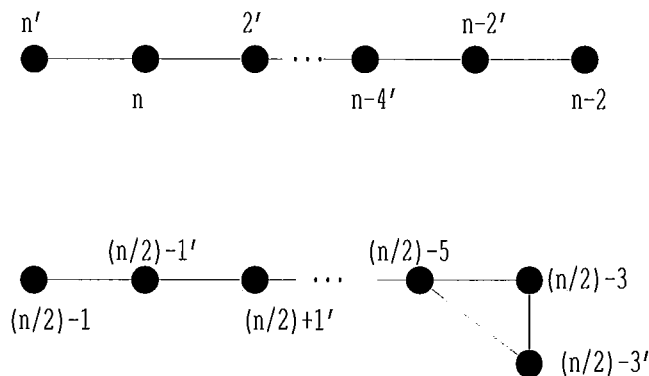


Figura 5.19: Ciclo genérico modificado - caso $p = 2^k$

Após a construção do grafo suplementar, onde os desenhos C_v (representando os vértices pares) e C_w (representando os vértices ímpares) serão colocadas do lado oposto ao vértice u , e de forma similar para os vértices v e w , podemos concluir que resta conectar u aos vértices v_i, v'_i (para i par), w_i, w'_i (para i ímpar) e $u_{\frac{p}{2}-3}$ (igualmente para v e w).

Colocaremos u , nos grafos G_1, \dots, G_p entre as segunda e terceira linhas (constantes $+1$ e -1), de forma que em G_p, G_{p-2}, \dots, G_2 , u seja conectado nos desenhos com símbolo w , possuindo os seguintes subscritos e marcações:

+1	1'	n-1	p-3	...	5	3
-1	p-1'	p-3'	p-5'	...	3'	

Em G_p nós conectamos u a v_p e em G_{p-2} nós conectamos u a v_{p-2} .

Observemos que a aresta $(\frac{p}{2} - 3', \frac{p}{2} - 5)$, removida de $G_{\frac{p}{2}-4}$ não aparece na tabela anterior.

Nos grafos $G_{p-3}, G_{p-5}, \dots, G_1$, nós conectamos u nos desenhos com símbolo v e os seguintes índices e marcações:

+1	p-2'	p-4'	...	4'	2'
-1	p-4	p-6	...	2	p'

Em $G_{\frac{p}{2}-3}$ nós conectamos u a $u'_{\frac{p}{2}-3}$, e em G_{p-1} nós conectamos u a w_1 .

Como resultado u é conectado a todo vértice, e de modo similar, distribuímos os vértices v e w e arestas incidentes a estes.

5.4.1 Exemplo do caso $p = 2^q$ com $q \geq 4$: Decomposição do K_{100}

Como exemplo do caso $n = 6p + 4$ e $p = 2^q$, $q \geq 4$, vamos mostrar a decomposição do grafo K_{100} em 17 subgrafos planares, nas figuras 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34, 5.35 e 5.36.

Os grafos intermediários desta construção aparecem no anexo 3.

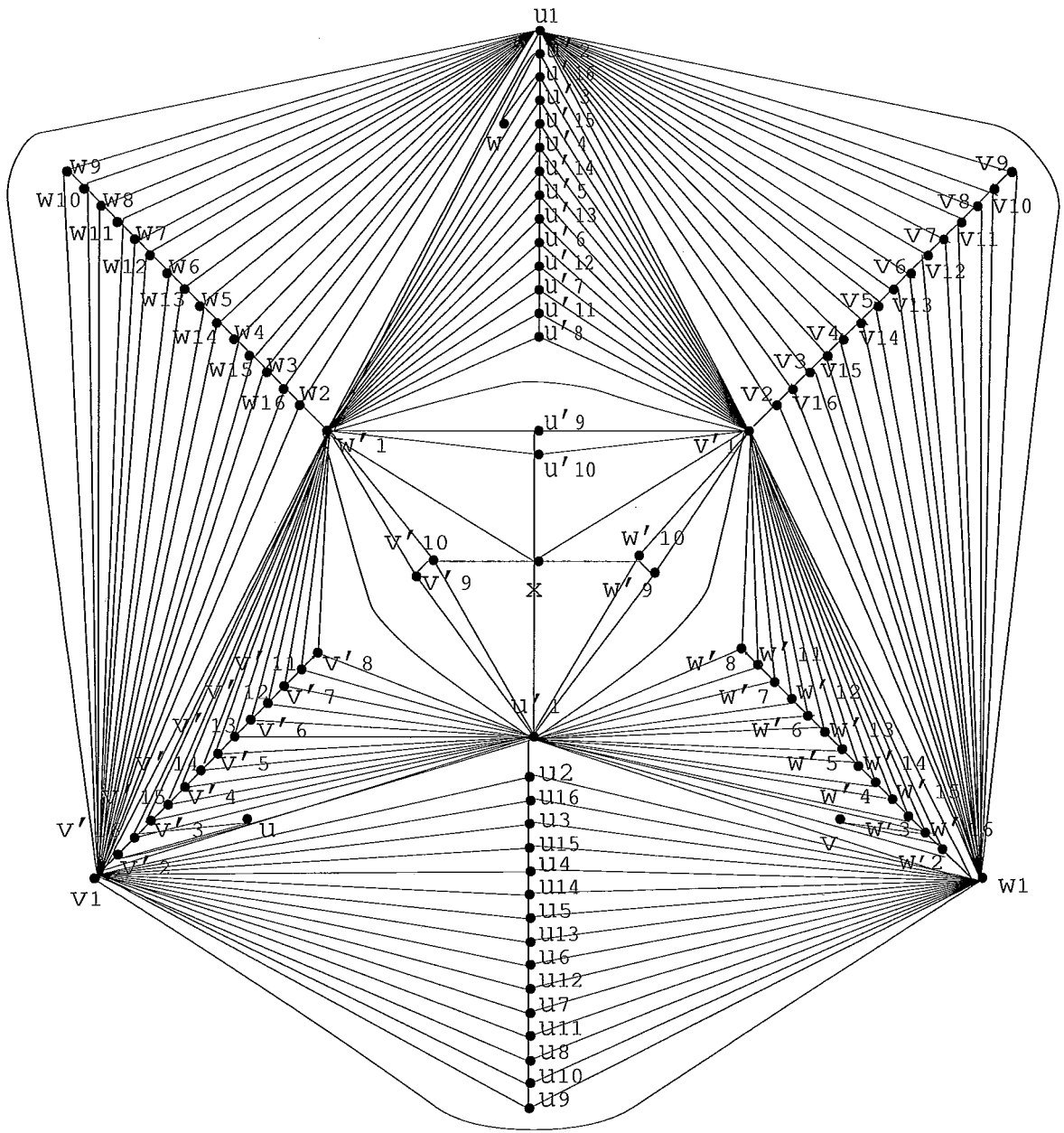


Figura 5.20: Grafo G_1 final - decomposição do K_{100}

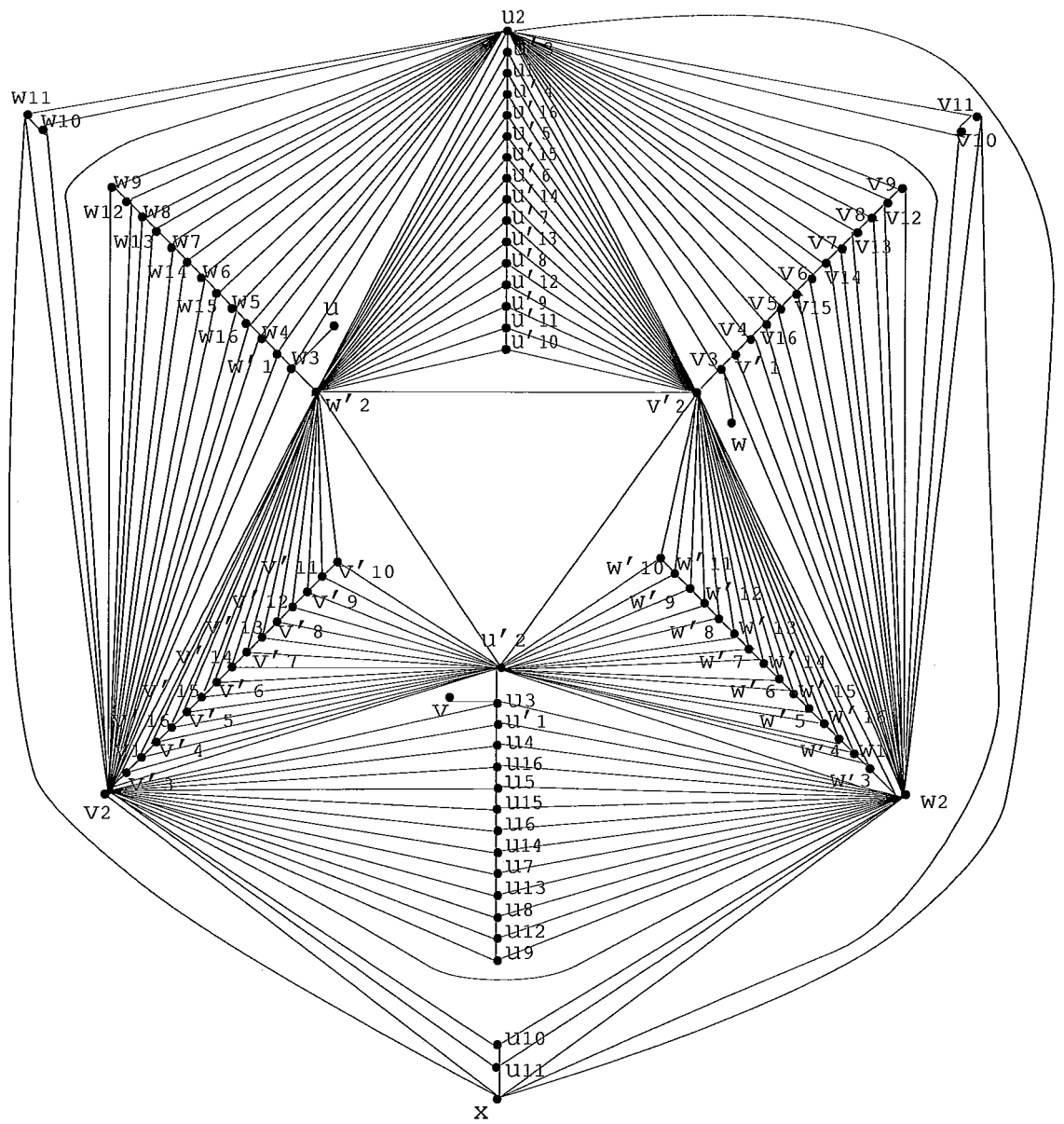


Figura 5.21: Grafo G_2 final - decomposição do K_{100}

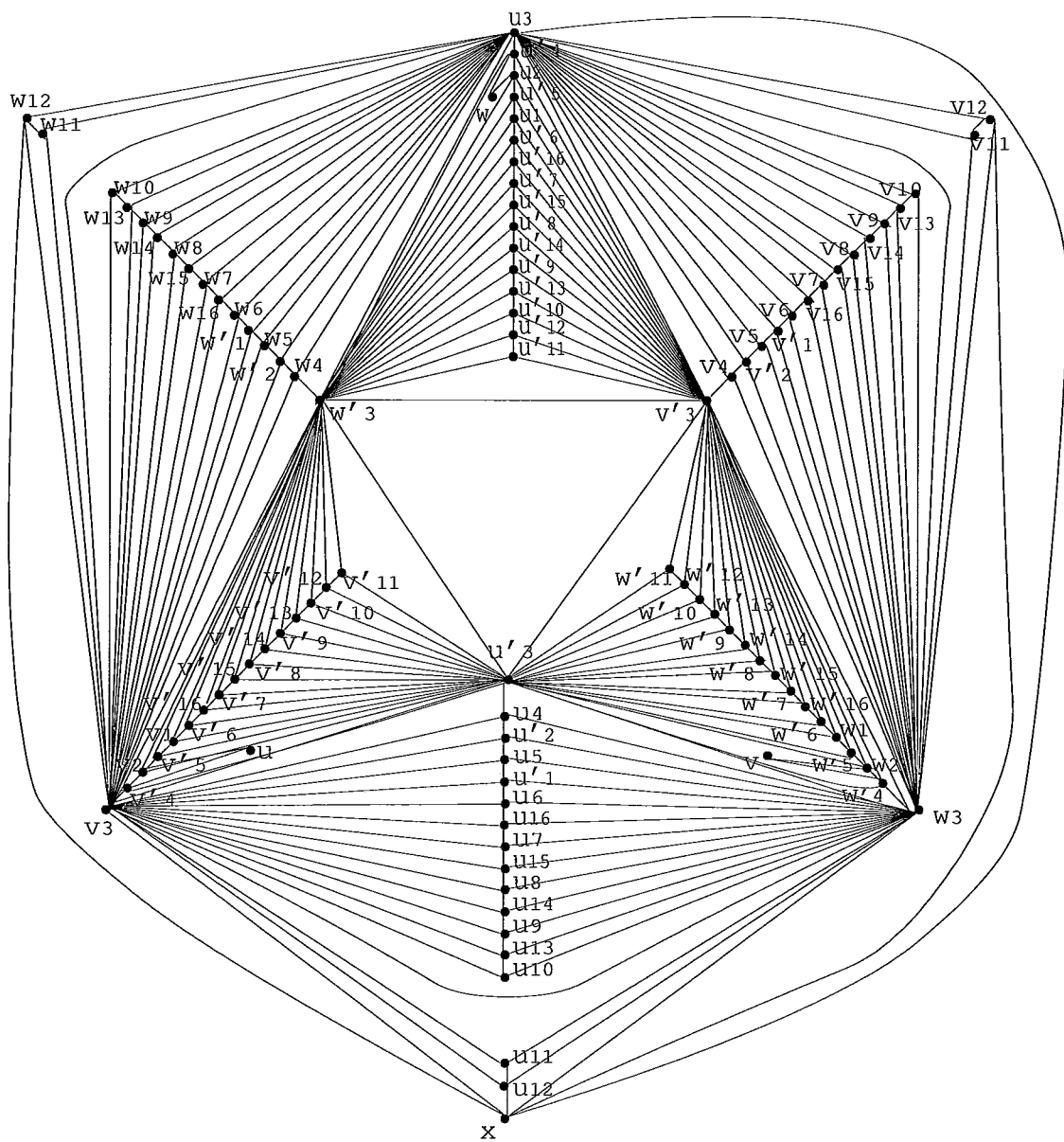


Figura 5.22: Grafo G_3 final - decomposição do K_{100}

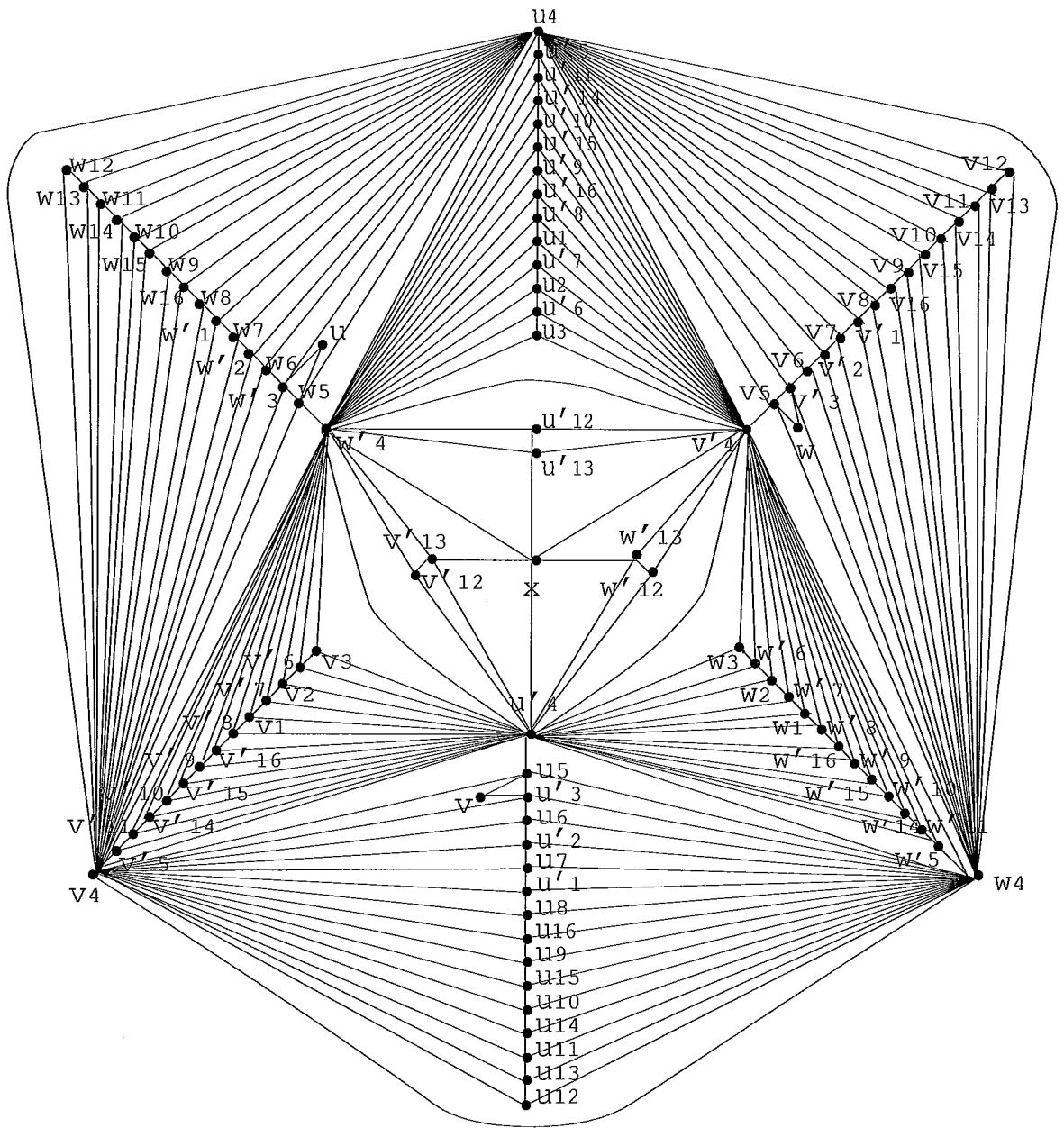


Figura 5.23: Grafo G_4 final - decomposição do K_{100}

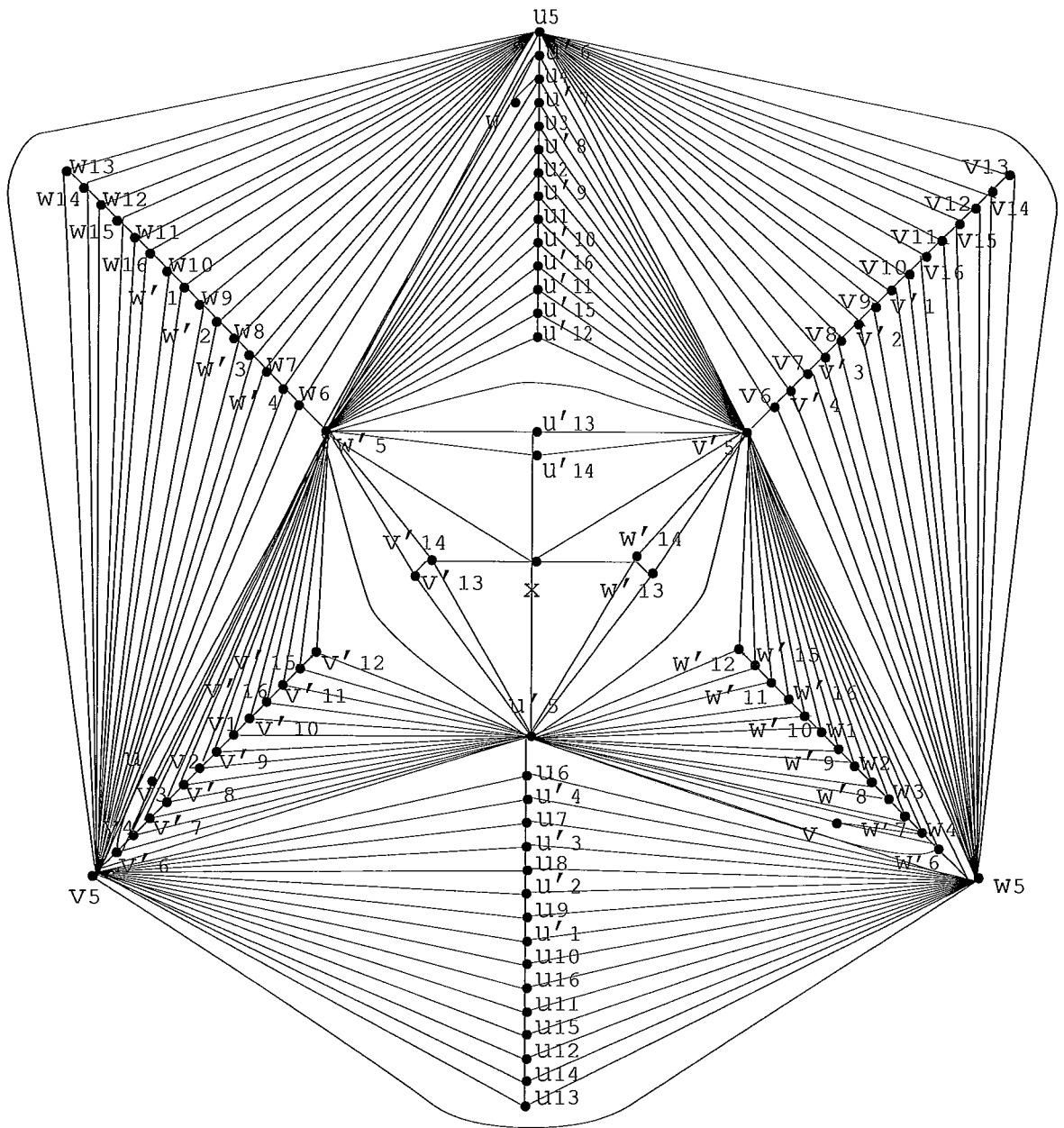


Figura 5.24: Grafo G_5 final - decomposição do K_{100}

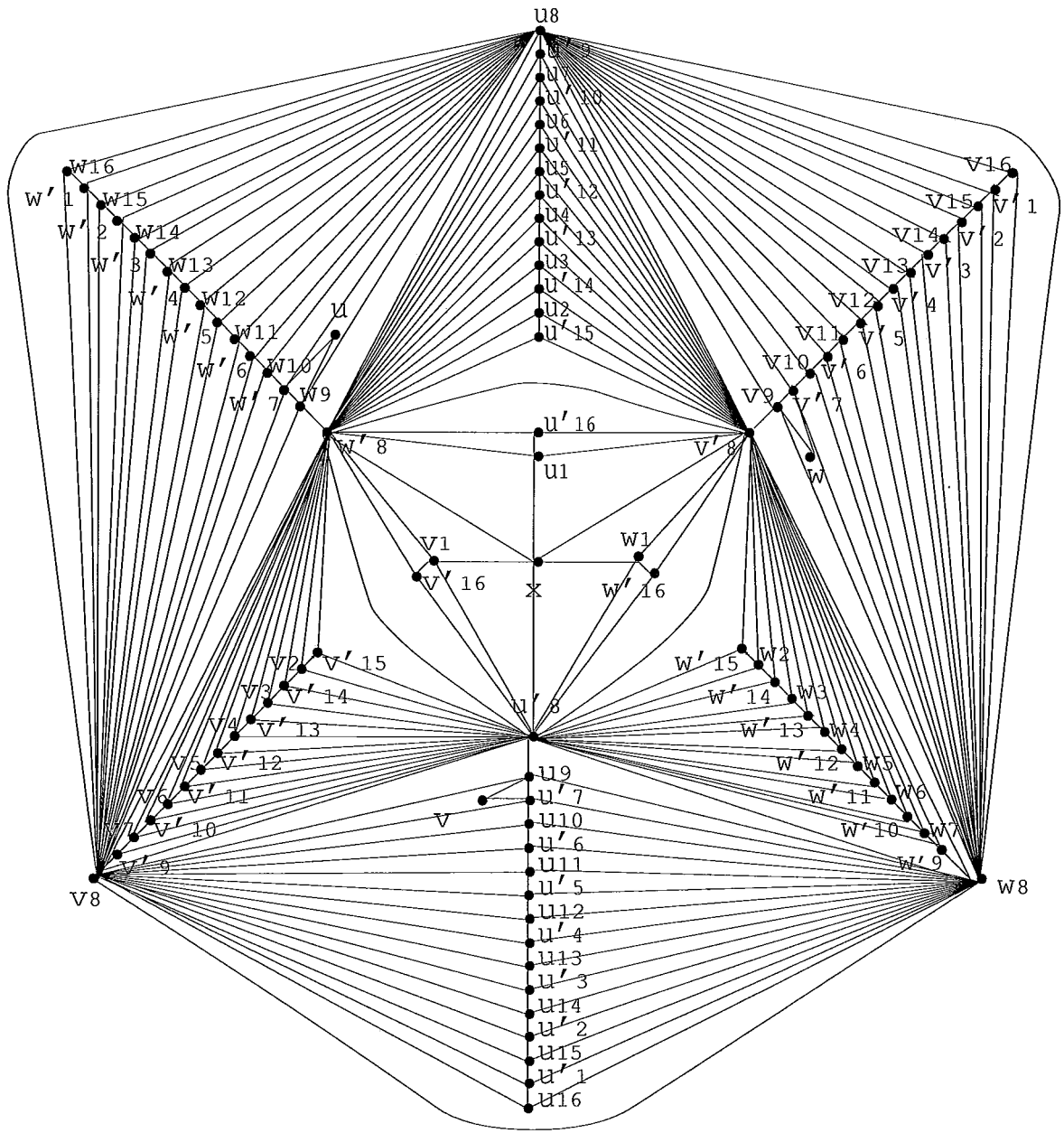


Figura 5.27: Grafo G_8 final - decomposição do K_{100}

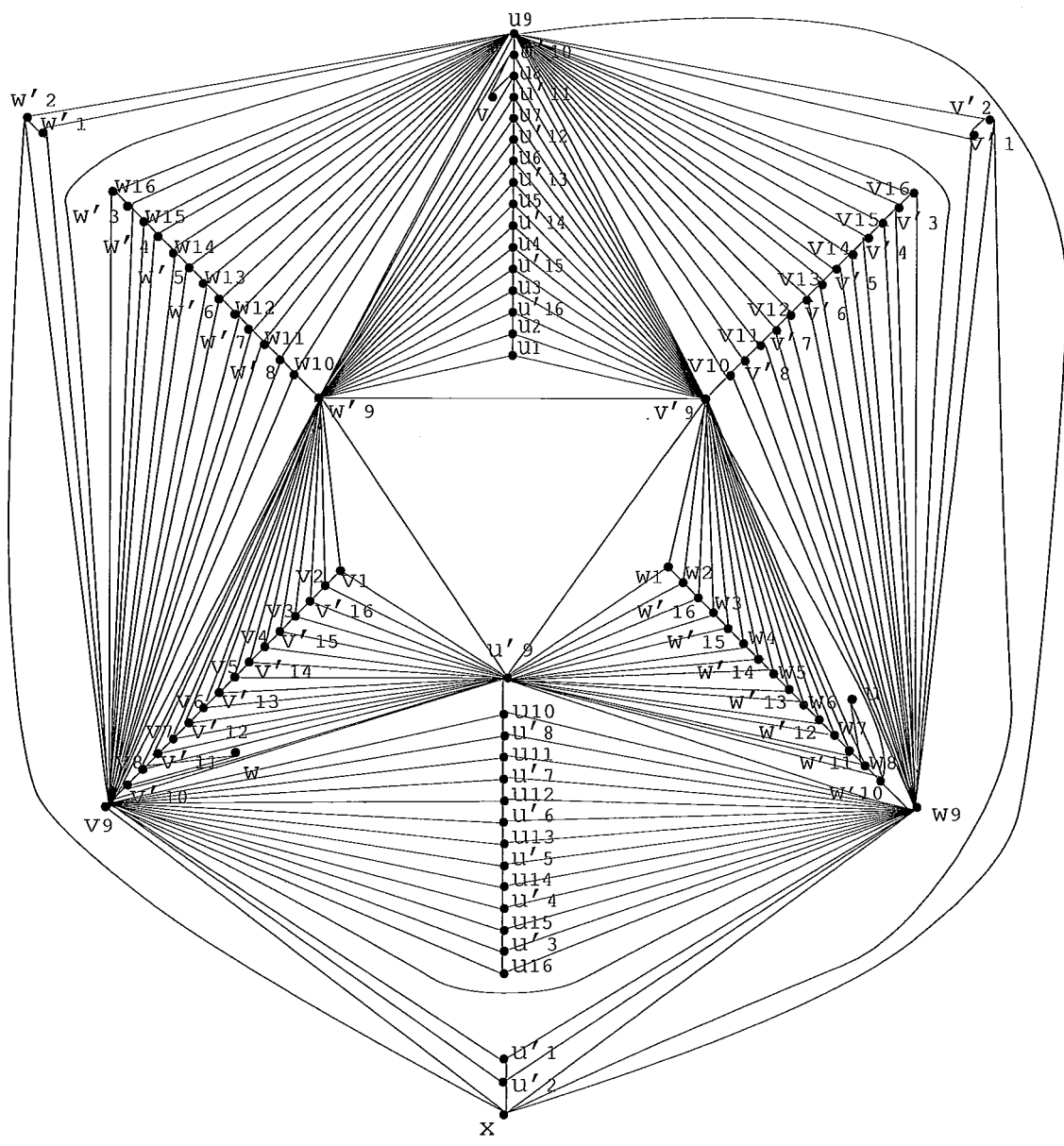


Figura 5.28: Grafo G_9 final - decomposição do K_{100}

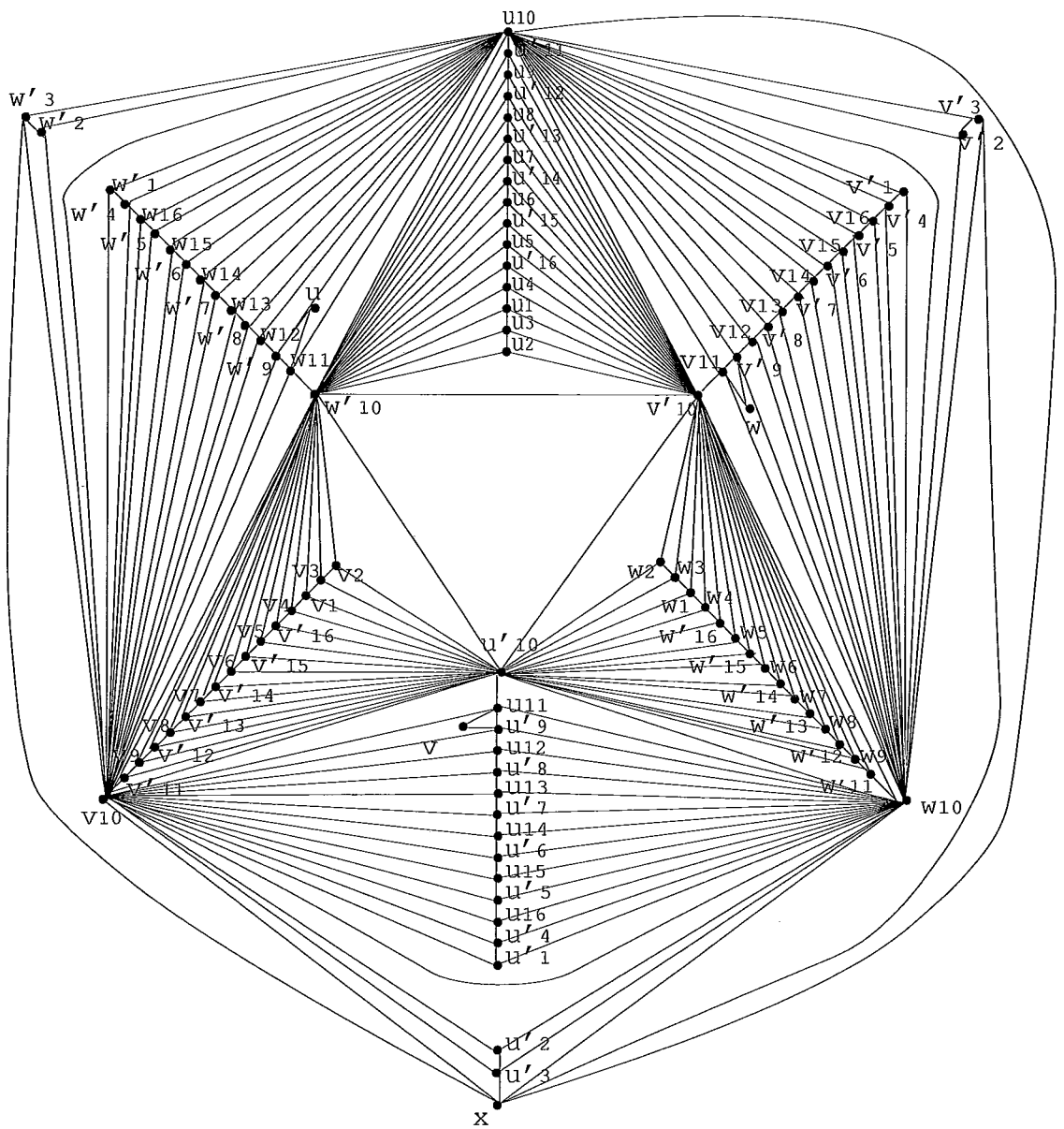


Figura 5.29: Grafo G_{10} final - decomposição do K_{100}

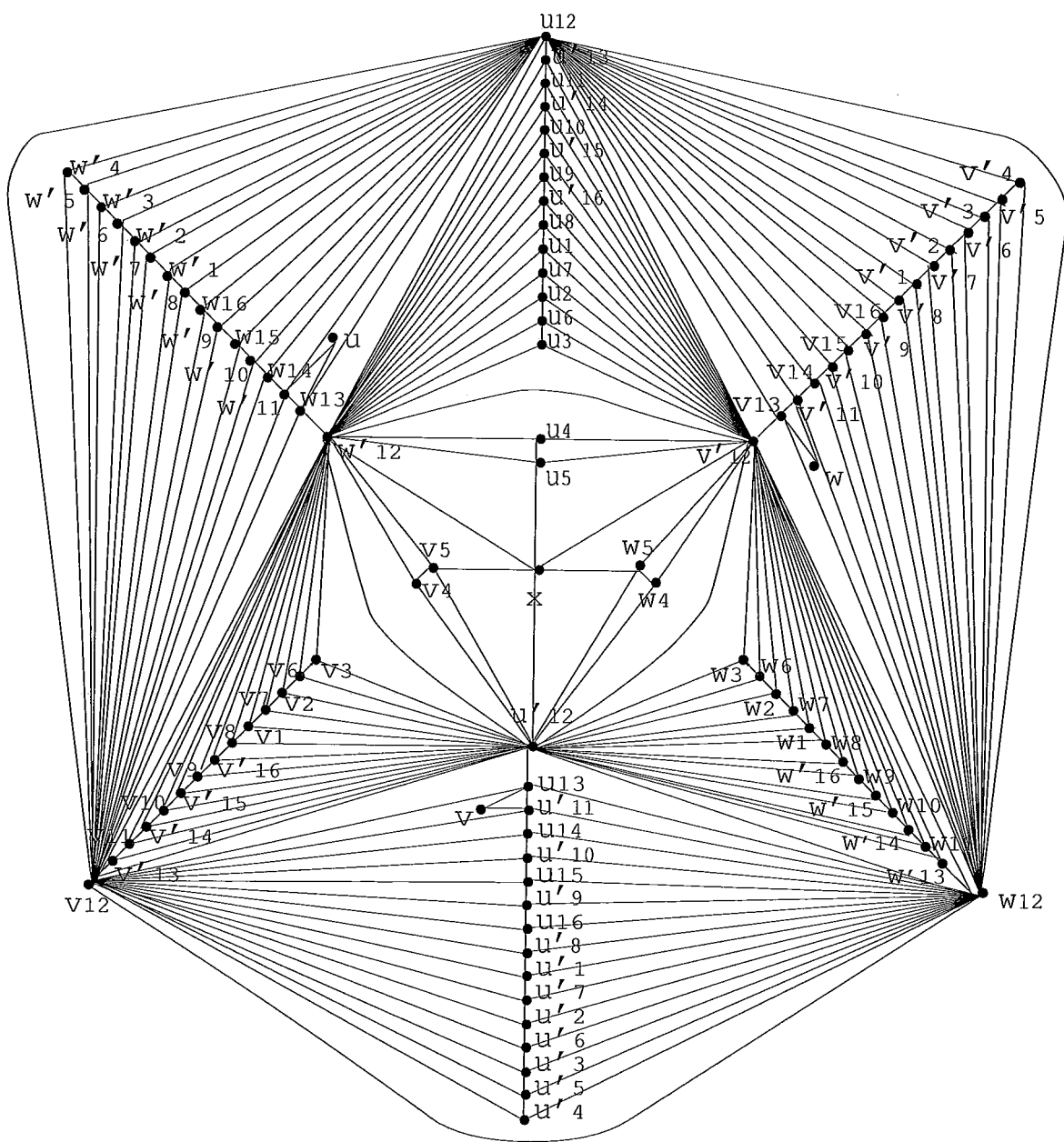


Figura 5.31: Grafo G_{12} final - decomposição do K_{100}

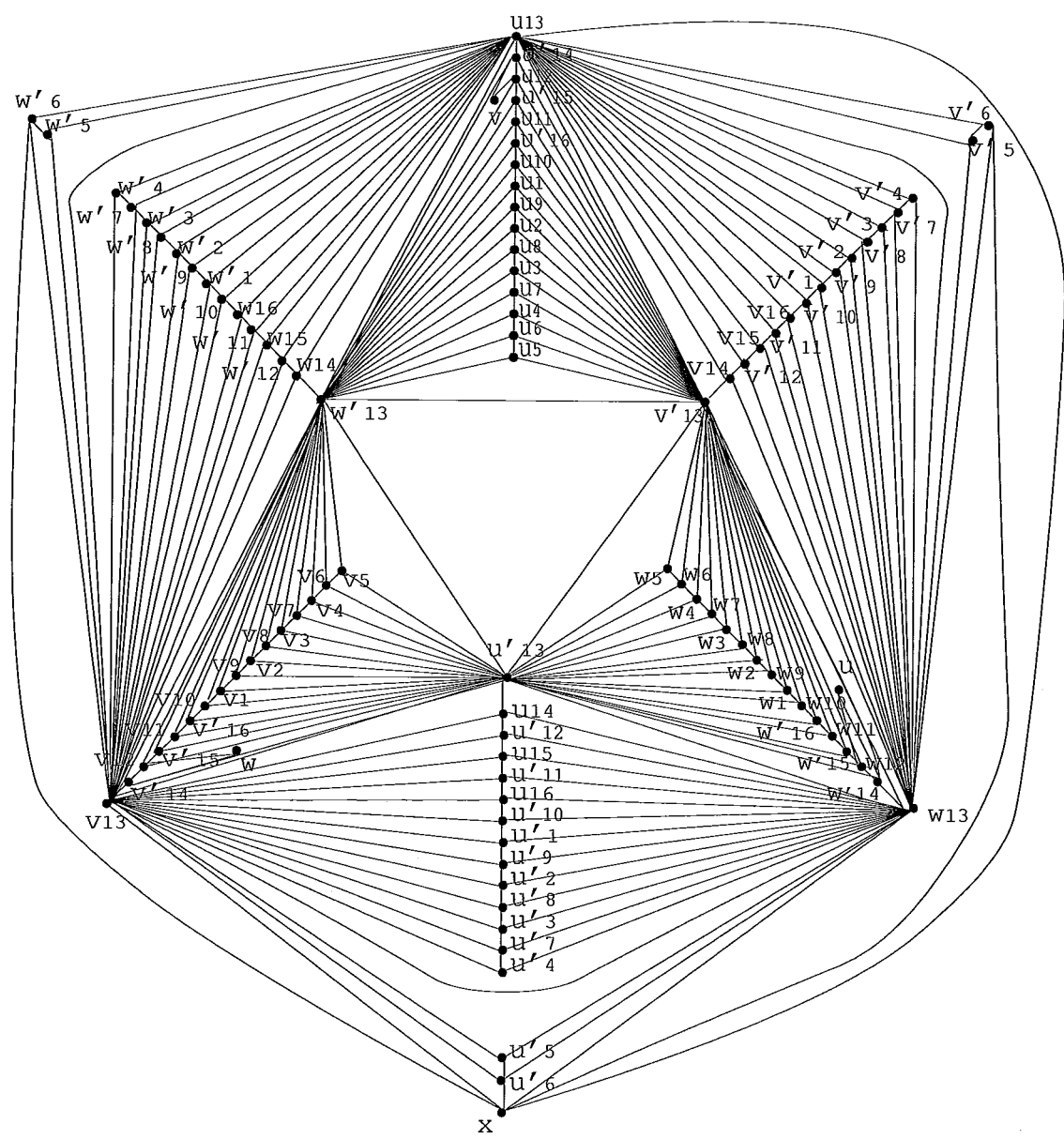


Figura 5.32: Grafo G_{13} final - decomposição do K_{100}

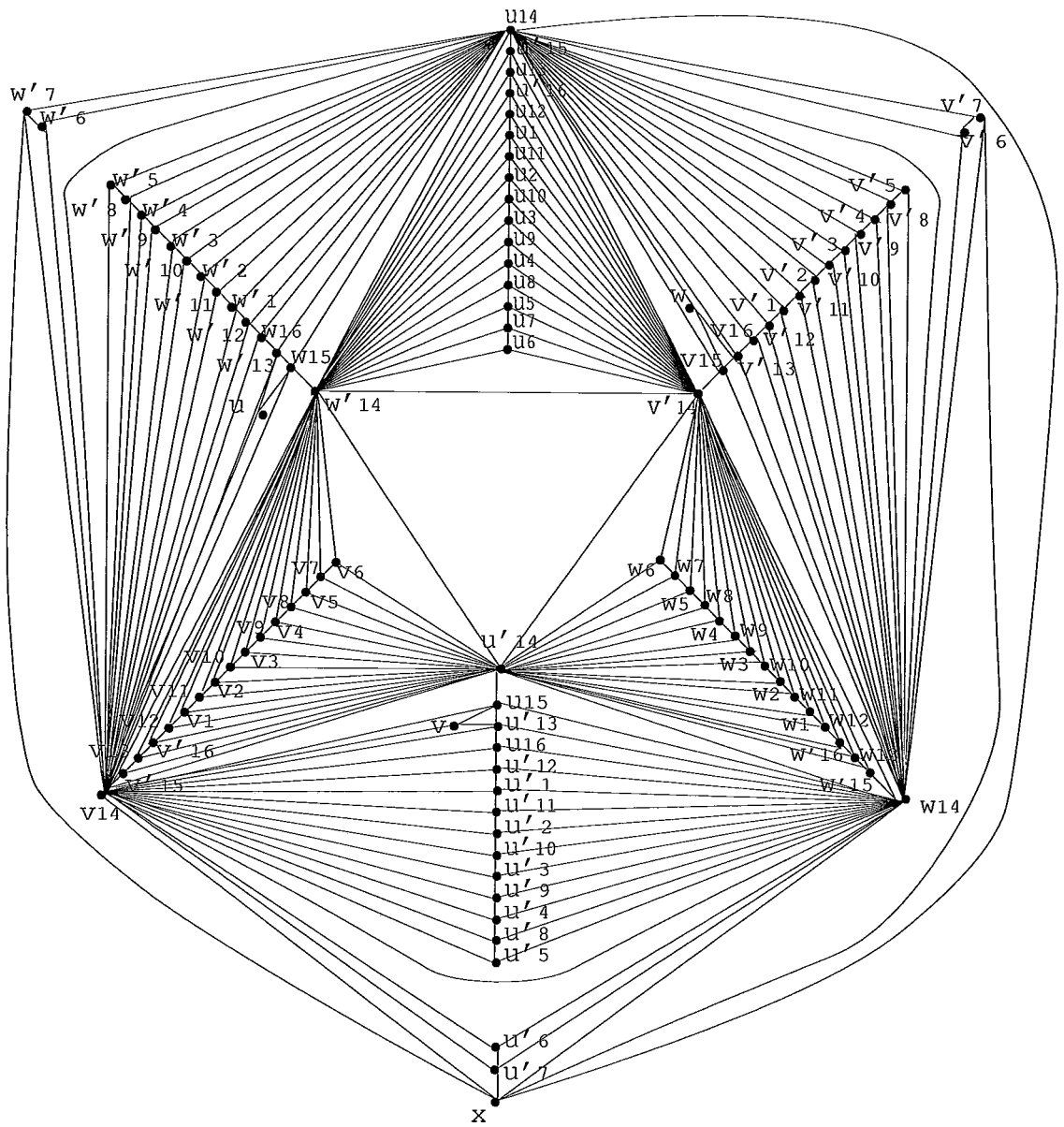


Figura 5.33: Grafo G_{14} final - decomposição do K_{100}

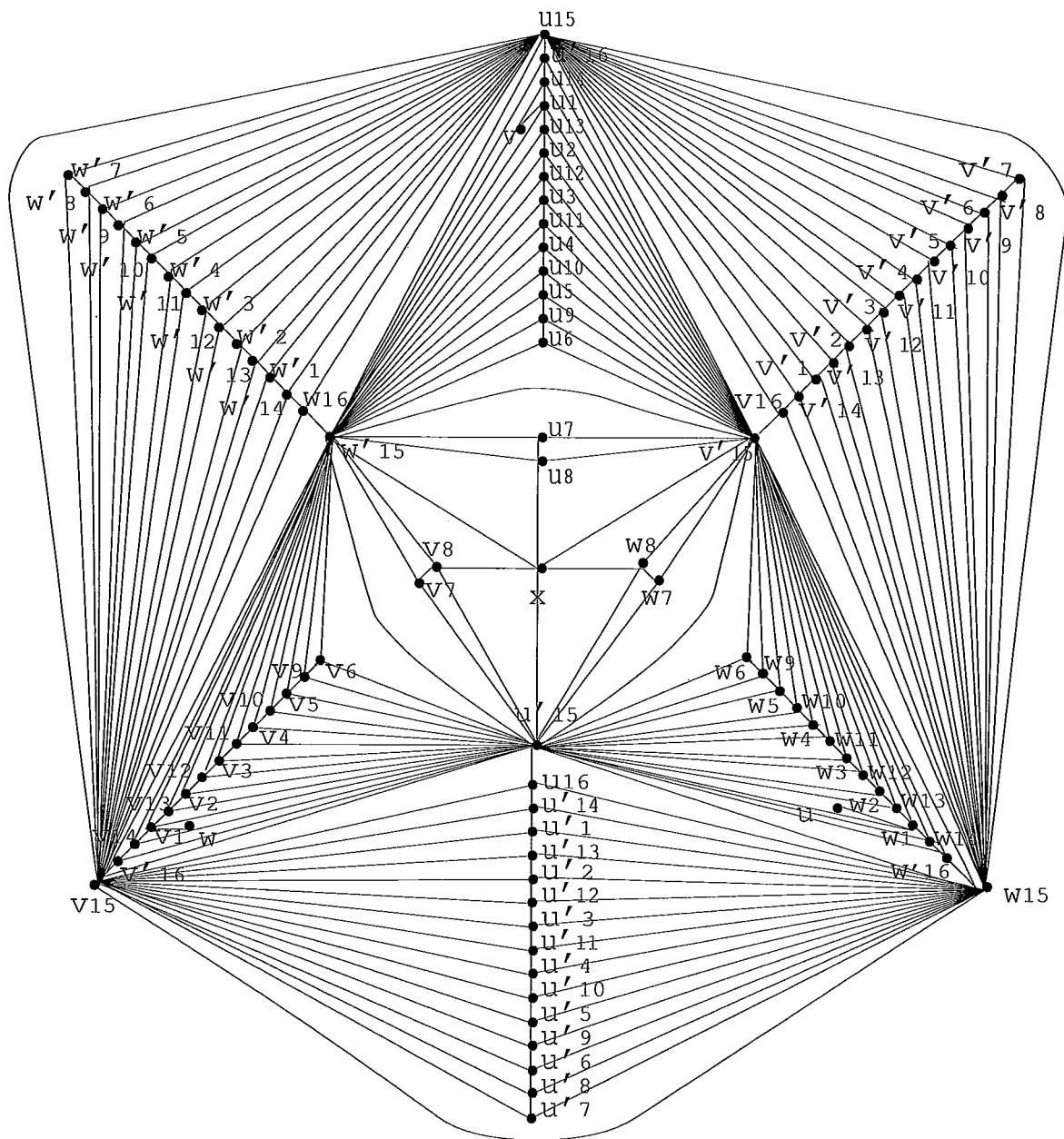


Figura 5.34: Grafo G_{15} final - decomposição do K_{100}

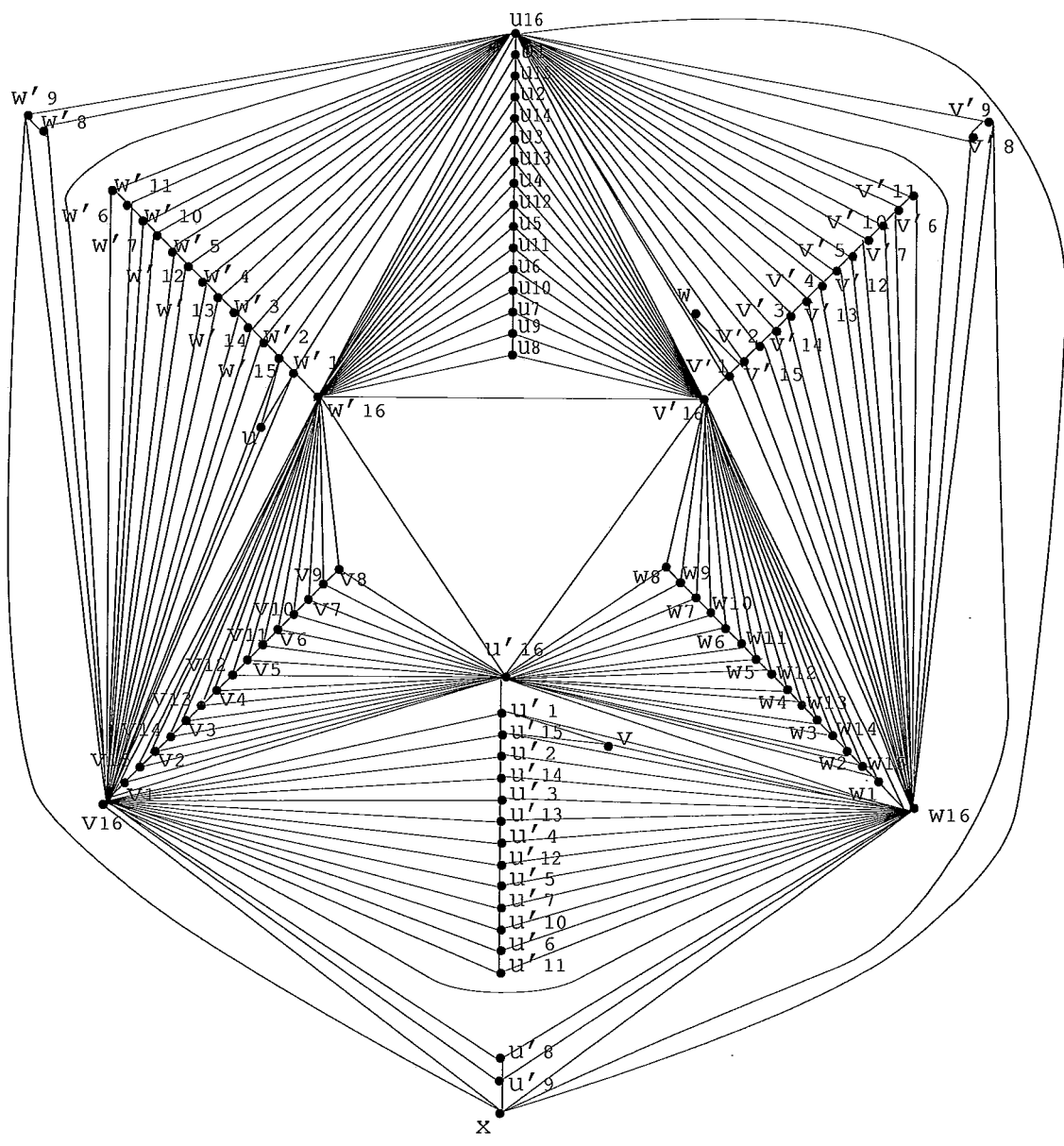


Figura 5.35: Grafo G_{16} final - decomposição do K_{100}

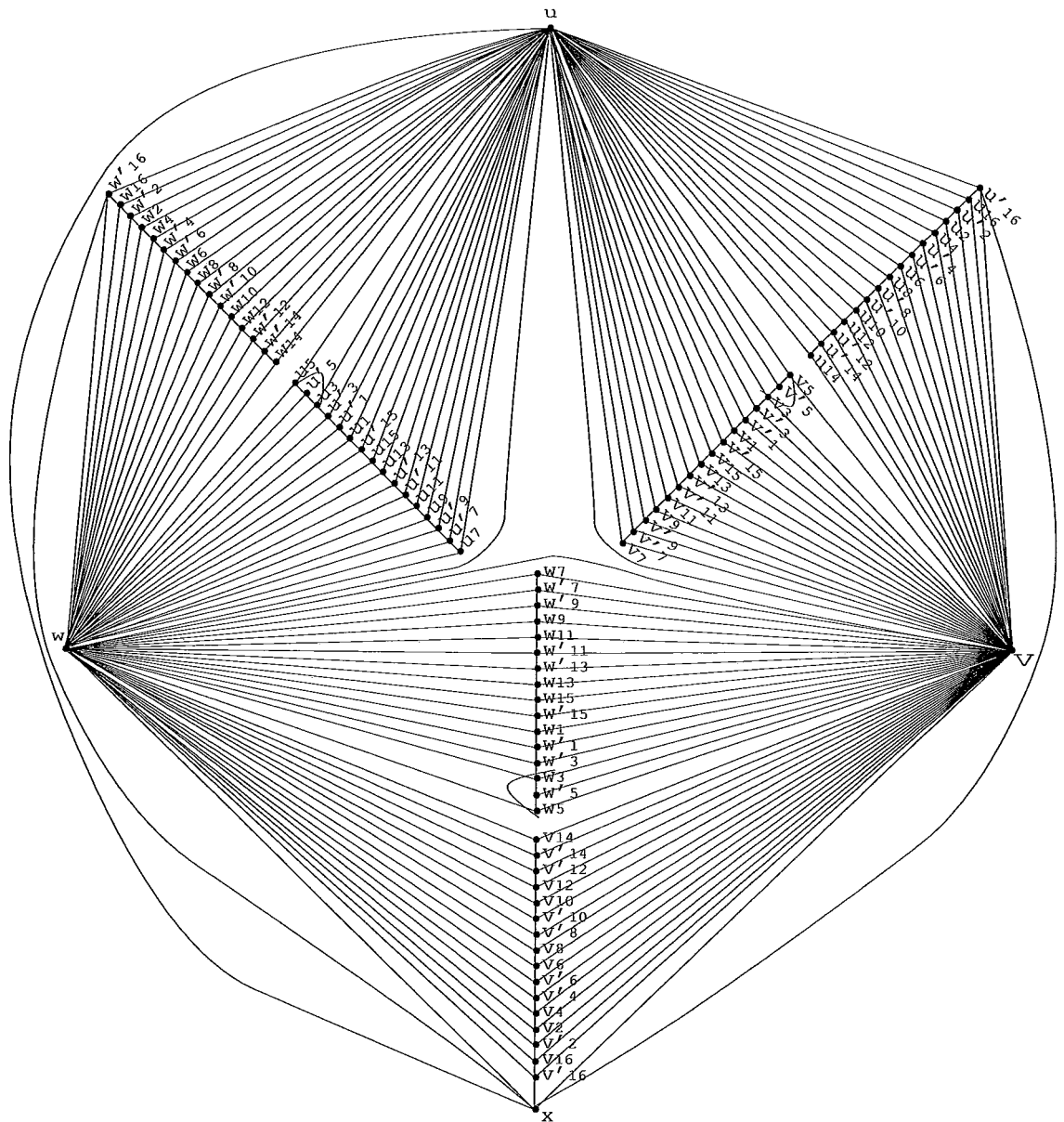


Figura 5.36: Grafo G_{17} final - decomposição do K_{100}

Capítulo 6

A Complexidade da Espessura

Neste capítulo, vamos mostrar que o problema de decidir o valor da espessura de um grafo é NP-completo, conforme mostrado por MANSFIELD [10]. O problema Espessura é definido como a seguir:

ESPESSURA:

Instância: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k .

Questão: $t(G) \leq k$?

Note que se $k = 1$, então o problema se resume em determinar se o grafo G dado é planar, e existem algoritmos que decidem se um grafo é planar em tempo polinomial, por exemplo o algoritmo de Tarjan [6]. Na verdade, iremos mostrar que o problema se torna NP-completo já para o valor de $k = 2$.

Notemos que ESPESSURA é certamente um problema em NP, pois dada uma partição do conjunto E de arestas de G em k conjuntos E_1, E_2, \dots, E_k , pode-se checar em cada subgrafo $G_i = (V, E_i)$, usando um teste de planaridade em tempo polinomial, se G_i é planar.

Para mostrar a NP-completude, nós reduzimos o problema de PLANAR

3-SAT (que Lichtenstein [8] já provou ser NP-completo), ao problema de ESPESSURA.

O problema PLANAR 3-SAT é definido da seguinte forma:

PLANAR 3-SAT:

Instância: $I = (U, C)$, onde U é um conjunto de variáveis lógicas e C uma coleção de cláusulas sob U , tal que:

- a) o grafo bipartido $G = (U \cup C, E)$ é planar, onde E é o conjunto de arestas (u, c) tal que u ou \bar{u} é um literal de C ;
- b) $|c| \leq 3$, para cada cláusula c de C .

Questão: Existe uma atribuição de verdade para as variáveis de U tal que cada cláusula $c \in C$ tenha pelo menos um literal verdadeiro?

Na figura 6.1 mostramos uma instância de PLANAR 3-SAT, e do grafo bipartido correspondente:

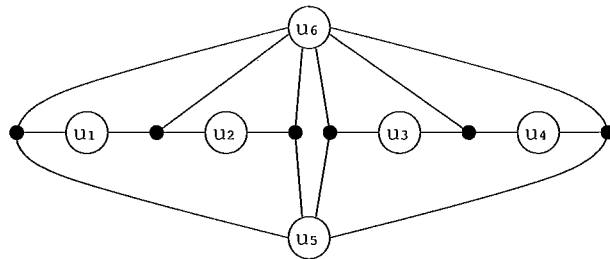


Figura 6.1: Grafo $G = (U \cup C, E)$ correspondente à instância de $I = (U, C)$ onde $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ e $C = \{(u_1, u_2, \bar{u}_6), (\bar{u}_1, u_5, \bar{u}_6), (\bar{u}_2, u_5, \bar{u}_6), (u_3, u_4, \bar{u}_6), (\bar{u}_3, \bar{u}_5, \bar{u}_6), (\bar{u}_4, \bar{u}_5, \bar{u}_6)\}$.

Lema 6.1 *PLANAR 3-SAT permanece NP-completo mesmo quando restrito aos casos em que qualquer cláusula contém exatamente 3 literais*

Prova: Considere uma instância $I = (U, C)$, de PLANAR 3-SAT, cujo conjunto U de variáveis é $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e C uma coleção de cláusulas sob U tal que se $c \in C$, $|c| \leq 3$.

Nós construímos uma instância $I' = (U', C')$ para PLANAR 3-SAT, onde cada cláusula tem tamanho exatamente 3 fazendo $U = U'$ e inicializando C' com C .

Se existir alguma cláusula $c \in C$ com $|c| < 3$, usaremos a seguinte transformação: 1) Se $|c| = 2$, digamos $c = (u_1, u_2)$, removemos c de C' e acrescentamos (u_1, u_2, u_1) para C' ; 2) Se $|c| = 1$, digamos $c = (u_1)$, removemos c de C' e acrescentamos (u_1, u_1, u_1) para C' .

Note que I é satisfatível se e somente se I' é satisfatível, e note que é imediato que o grafo bipartido correspondente a I' é planar porque nós substituímos uma cláusula nas mesmas variáveis.

Repetindo este procedimento em toda cláusula de tamanho menor que 3, nós conseguimos, em tempo polinomial, uma expressão booleana em que todas as cláusulas possuam exatamente três literais. \square

De agora em diante, consideramos que todas as instâncias de PLANAR 3-SAT possuem somente cláusulas com tamanho exatamente 3.

A transformação do problema PLANAR 3-SAT em ESPESSURA se baseia no seguinte: Dada uma instância de PLANAR 3-SAT com um grafo correspondente $G = (U \cup C, E)$, nós iremos construir um grafo H , uma instância de ESPESSURA, onde cada literal u de U corresponde a um “Truth Setting Components” H_u de H , e cada vértice c de C corresponde a um “Satisfaction Testing” H_c de H . A constante k correspondente será fixada $k = 2$. Se $H = P \cup Q$, com P e Q grafos planares, então as arestas de E em P representarão literais verdadeiros, enquanto as arestas de E em Q representarão literais falsos.

A seguir, descreveremos a construção de 6 grafos auxiliares $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ que servirão como base para estruturar toda a decomposição do grafo H em dois subgrafos P e Q .

6.1 O grafo H_1

O primeiro grafo auxiliar a ser definido é o grafo bipartido completo $K_{6,8} = H_1$, da figura 6.2.

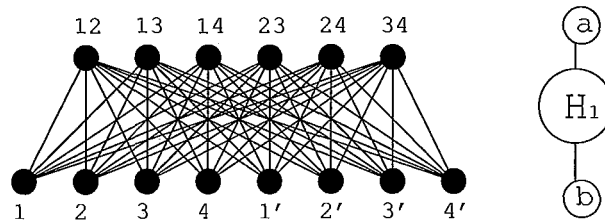


Figura 6.2: Grafo bipartido completo $K_{6,8}$.

Lema 6.2 *Sejam a e b dois vértices distintos de grau 6 deste grafo. Se $H_1 = K_{6,8}$ é um subgrafo de $P \cup Q$ onde P e Q são grafos planares, então existe um caminho ligando o vértice a até o vértice b em $P \cap H_1$ e em $Q \cap H_1$.*

Prova: Como o grafo H_1 é um bipartido, então ele é livre de triângulos, e como P e Q são planares, então $P \cap H_1$ e $Q \cap H_1$ são planares, livre de triângulos e possuem 14 vértices. É uma consequência do Teorema de Euler 1.3 que todo grafo simples planar e livre de triângulos, com número de vértices $n \geq 3$, possui no máximo $2n - 4$ arestas. Portanto, $P \cap H_1$ e $Q \cap H_1$ possuem no máximo $14 * 2 - 4 = 24$ arestas se conexos. Se estes não forem conexos, então devem possuir no máximo 23 arestas. Como H_1 possui $6 * 8 = 48$ arestas, então $P \cap H_1$ e $Q \cap H_1$ são obrigatoriamente ambos conexos, o que nos dá que existe um caminho ligando quaisquer par de vértices em $P \cap H_1$ e em $Q \cap H_1$. \square

Uma partição de H_1 .

H_1 pode ser particionado em 2 grafos planares P_1 e Q_1 , onde a e b aparecem na mesma face, como mostra a figura 6.3.

$$V(H_1) = \{1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4', 12, 13, 14, 23, 24, 34\} \text{ e } a = 1, b = 2'.$$

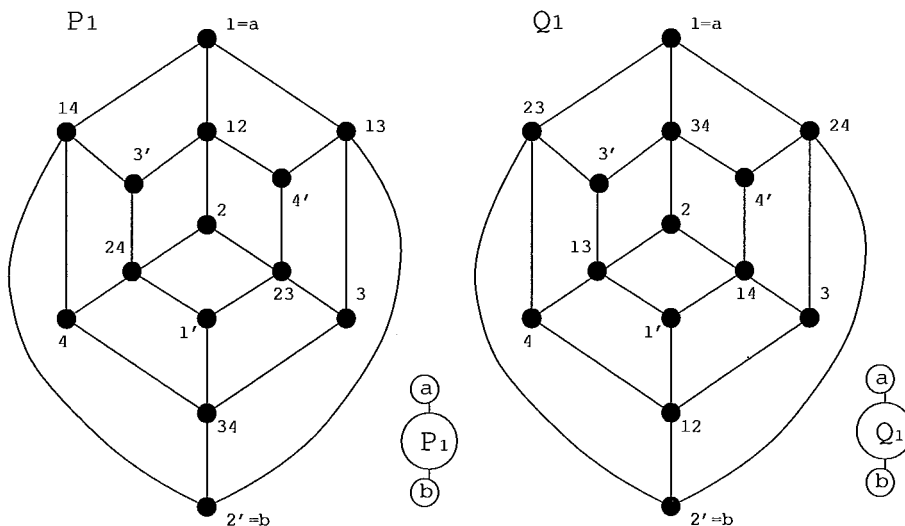


Figura 6.3: Partição de H_1 em dois subgrafos planares P_1 e Q_1 , onde os vértices a e b são colocados na face exterior de P_1 e Q_1 .

6.2 O grafo H_2

H_2 é o grafo representado na figura 6.4.

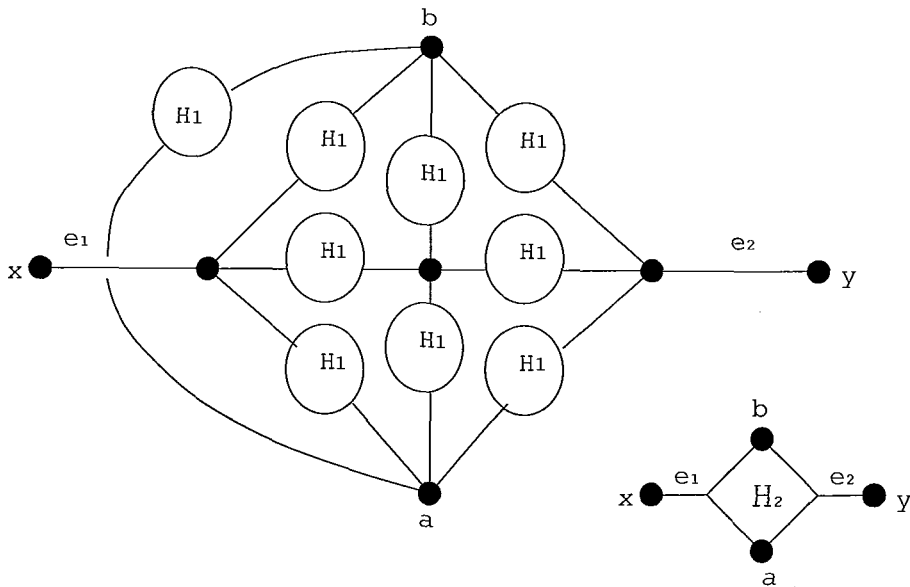


Figura 6.4: O grafo H_2 e sua representação simplificada.

Lema 6.3 H_2 é um subgrafo de $P \cup Q$ onde P e Q são subgrafos planares, e x e y estão na mesma componente conexa de $P \setminus H_2$ e de $Q \setminus H_2$. Então e_1 é uma aresta de P e e_2 é uma aresta de Q ou vice-versa.

Prova: Suponha, por absurdo, que e_1 e e_2 sejam ambas arestas digamos de P . Pela propriedade de H_1 , P contém um subgrafo homeomorfo a K_5 , ferindo a hipótese de P ser planar. Assim, e_1 e e_2 não podem estar ambas na mesma partição. \square

Uma partição de H_2 .

$H_2 = P_2 \cup Q_2$, onde P_2 e Q_2 são os grafos planares da figura 6.5.

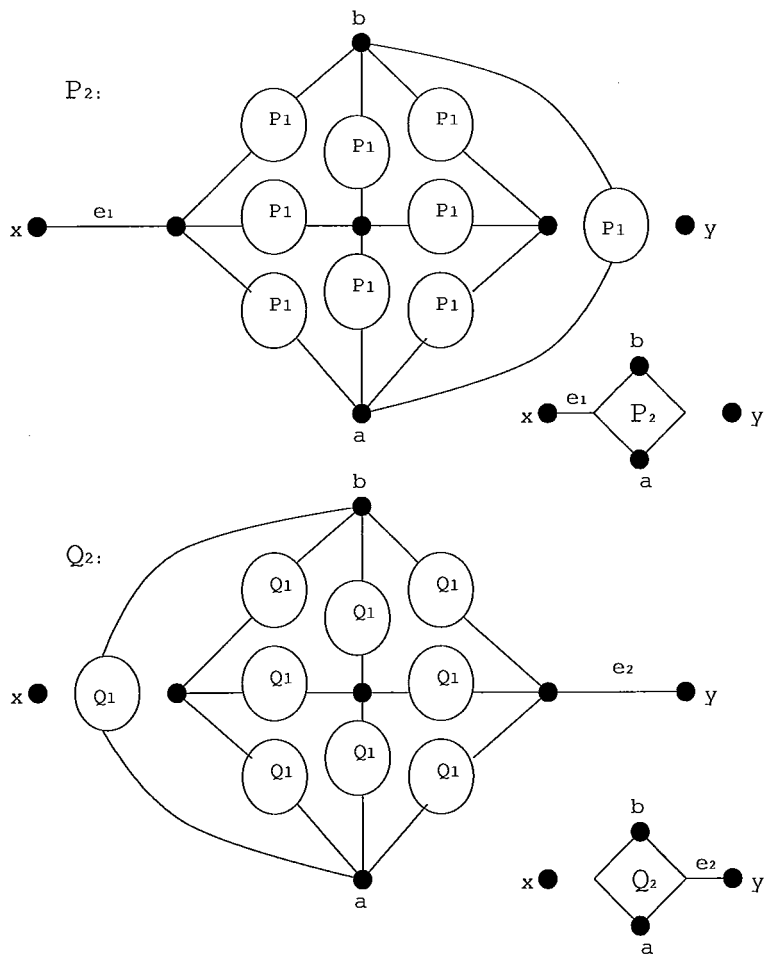


Figura 6.5: Grafos planares P_2 e Q_2 onde $H_2 = P_2 \cup Q_2$, com suas representações simplificadas.

6.3 O grafo H_3

H_3 é om grafo da figura 6.6.

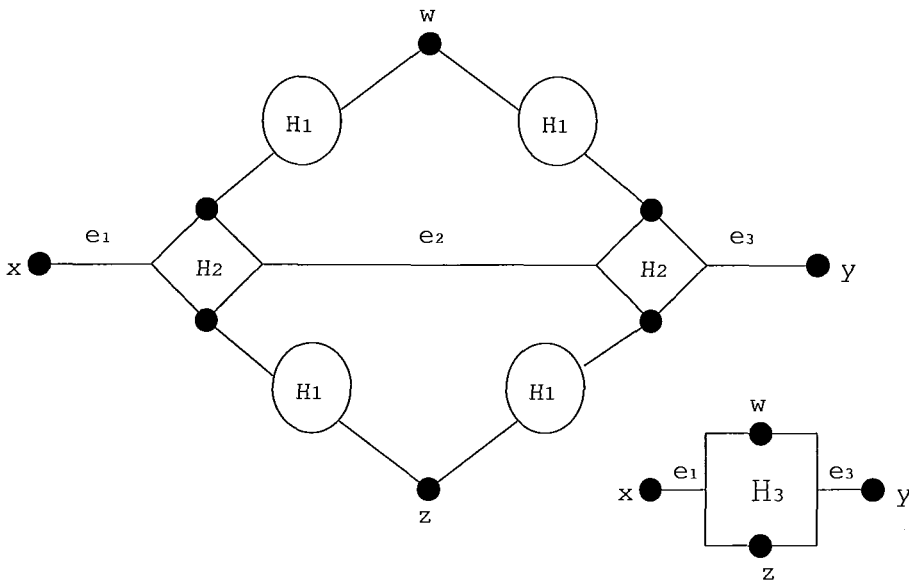


Figura 6.6: Grafo H_3 e sua representação simplificada.

Lema 6.4 Se H_3 é um subgrafo de $P \cup Q$, onde P e Q são grafos planares, e x, y e z estão na mesma componente conexa de $P \setminus H_3$ e em $Q \setminus H_3$, então as arestas e_1 e e_3 de H_3 estão ambas em P ou ambas em Q .

Prova: Suponha que e_1 seja uma aresta de P . Pela propriedade de H_2 , porque z está na mesma componente conexa de x , e_2 é uma aresta de Q e, pelo mesmo argumento, e_3 é uma aresta de P . Por raciocínio análogo, se considerarmos e_1 uma aresta de Q teremos e_3 também em Q . \square

Uma partição de H_3 .

$H_3 = P_3 \cup Q_3$, onde P_3 e Q_3 são os grafos planares da figura 6.7.

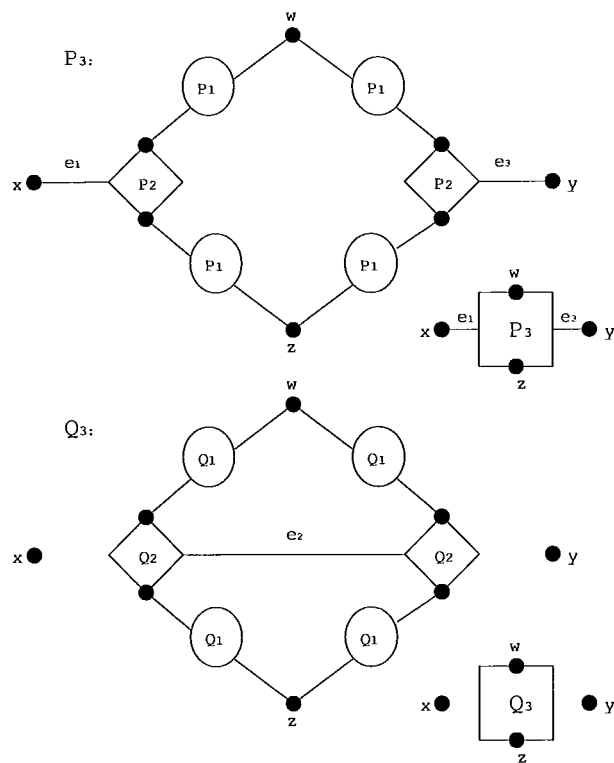


Figura 6.7: Grafos planares P_3 e Q_3 onde $H_3 = P_3 \cup Q_3$ e suas representações simplificadas.

6.4 O grafo H_4

H_4 é o grafo da figura 6.8, onde existem no mínimo 2 vértices rotulados u ou c .

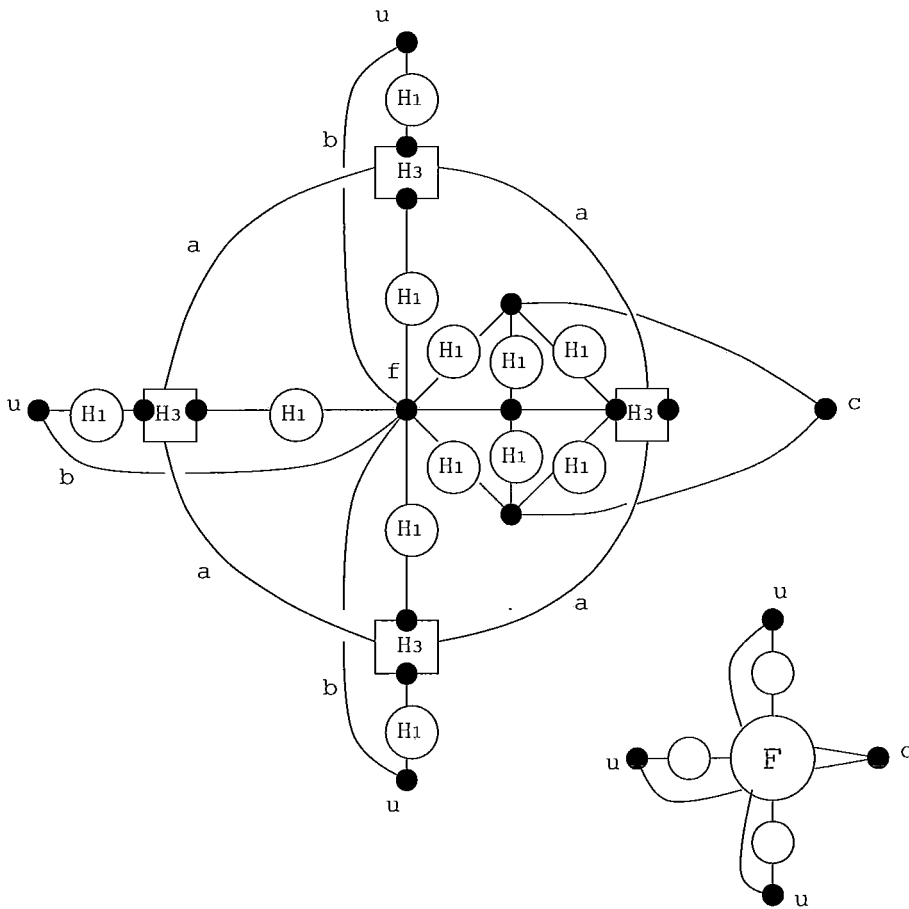


Figura 6.8: H_4 e sua representação simplificada.

Lema 6.5 *Sejam A um conjunto de arestas com o rótulo a e B o conjunto de arestas com o rótulo b . Suponha que H_4 seja um subgrafo de $P \cup Q$ onde P e Q são subgrafos planares. Então:*

1. *ou $A \subset E(P)$ e $B \subset E(Q)$ ou vice-versa;*
2. *no mínimo uma das arestas incidentes ao vértice rotulado c está no mesmo conjunto que as arestas do conjunto B .*

Prova: 1) Pela propriedade de H_3 , ou $A \subset E(P)$ ou $A \subset E(Q)$. Sem perda de generalidade, assumiremos que $A \subset E(P)$. Se (u, f) é uma aresta

de B em P , então P contém um subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$, como mostra a figura 6.9. Isto é uma contradição, já que P é planar.

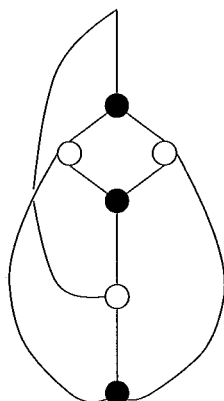


Figura 6.9: Subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$.

Logo, $B \subset E(Q)$;

2) Suponha agora que, num vértice rotulado c , todas as arestas estejam em $E(P)$. Então P contém um subgrafo homeomorfo a K_5 , como mostra a figura 6.10, o que contradiz a hipótese de P ser planar.

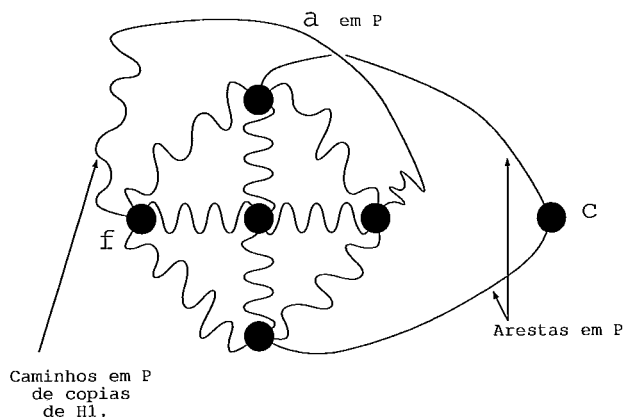


Figura 6.10: Subgrafo homeomorfo a K_5 .

Assim, no mínimo uma das arestas incidentes a c está em $E(Q)$. \square

Uma partição de H_4 .

$H_4 = P_4 \cup Q_4$ onde P_4 e Q_4 são os grafos planares das figuras 6.11 e 6.12, respectivamente.

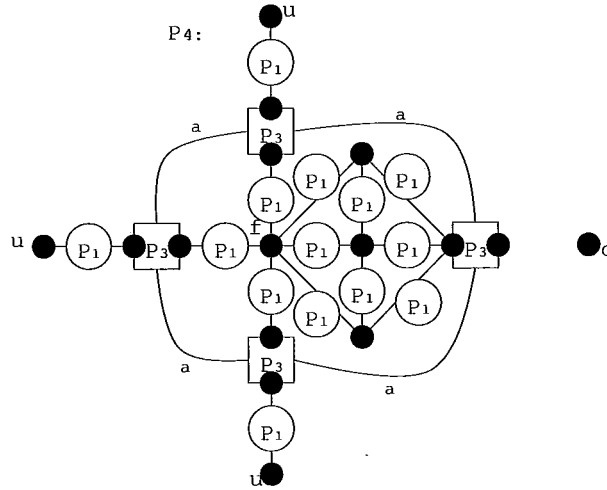


Figura 6.11: Grafo P_4 , onde $H_4 = P_4 \cup Q_4$.

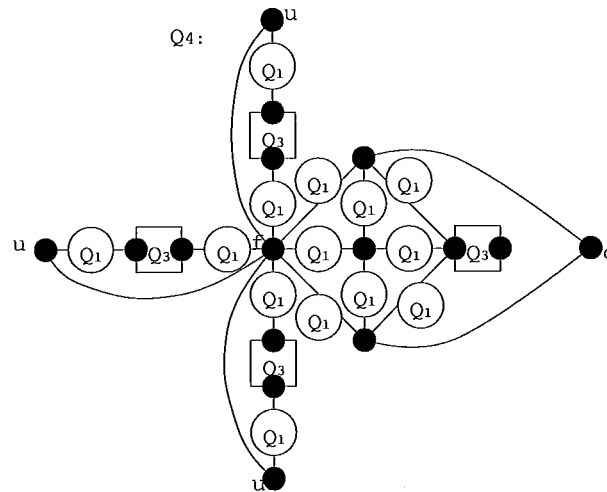


Figura 6.12: Grafo Q_4 , onde $H_4 = P_4 \cup Q_4$.

6.5 O grafo H_5

H_5 é o grafo da figura 6.13.

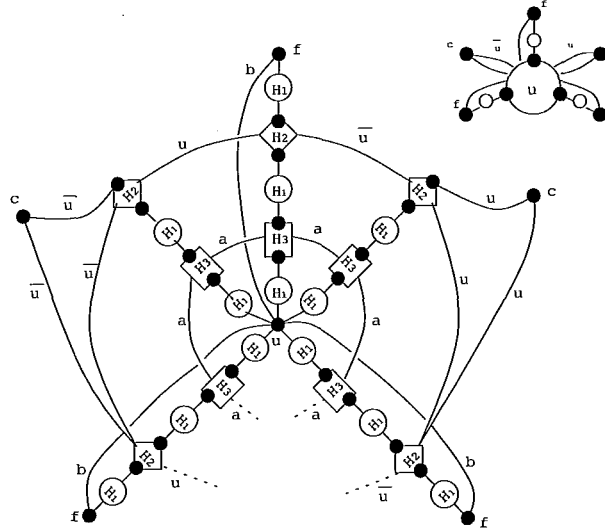


Figura 6.13: H_5 e sua representação simplificada.

Lema 6.6 *Seja A o conjunto de arestas rotuladas a , B o conjunto de arestas rotuladas b , e D o conjunto de arestas rotuladas u ou \bar{u} conectando um conjunto de subgrafos H_2 . Se H_5 é um subgrafo de $P \cup Q$ e P e Q são subgrafos planares, então:*

- 1) *ou $A \subset E(P)$ e $B \subset E(Q)$ ou vice-versa;*
- 2) *ou toda aresta em D rotulada u está em $E(P)$ e toda aresta em D rotulada \bar{u} está em $E(Q)$ ou vice-versa;*
- 3) *se duas arestas rotuladas u ou \bar{u} são incidentes a um vértice c , então no mínimo uma destas arestas está no mesmo conjunto $E(P)$ ou $E(Q)$ onde se encontra as arestas de D rotuladas u ou \bar{u} .*

Prova: 1) A prova de propriedade 1) de H_4 também serve para H_5 ;

2) Pela propriedade de H_2 , as arestas em D alternam-se em $E(P)$ e $E(Q)$, o que mostra que as arestas com rótulo u estão em $E(P)$ e as arestas com rótulo \bar{u} estão em $E(Q)$, ou vice-versa;

3) Para provar esta propriedade, suponha inicialmente que as arestas de D com rótulo u estejam em $E(P)$ e as arestas de D com rótulo \bar{u} estejam em $E(Q)$. Suponha, por contradição, que duas arestas com rótulo u , incidentes até um vértice c estejam ambas em $E(Q)$. Então, considerando o subgrafo de H_5 mostrado na figura 6.14, nós vemos que Q não pode ser planar, o que nos dá a contradição desejada. \square

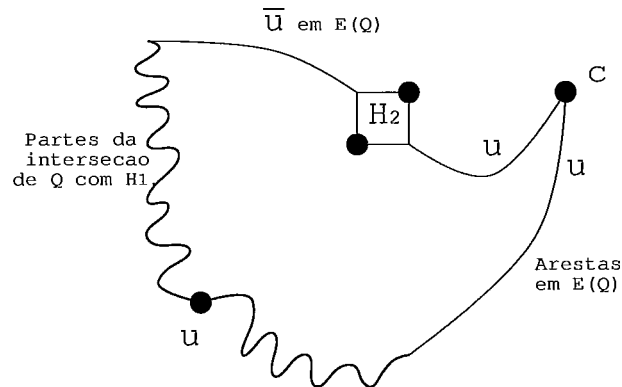


Figura 6.14: Contradição encontrada por inserir as arestas com rótulo u conectando c em um subgrafo diferente daquele em que se encontram as arestas de D com rótulo u .

Uma partição de H_5 .

H_5 pode ser particionado em dois grafos planares P_5 e Q_5 de duas maneiras diferentes. Na figura 6.15 mostramos uma partição em que toda aresta rotulada u está em $E(P_5)$, e toda aresta rotulada \bar{u} está $E(Q_5)$.

Esta partição é similar a que toda aresta rotulada u aparece em $E(Q_5)$ e toda aresta rotulada \bar{u} aparece em $E(P_5)$.

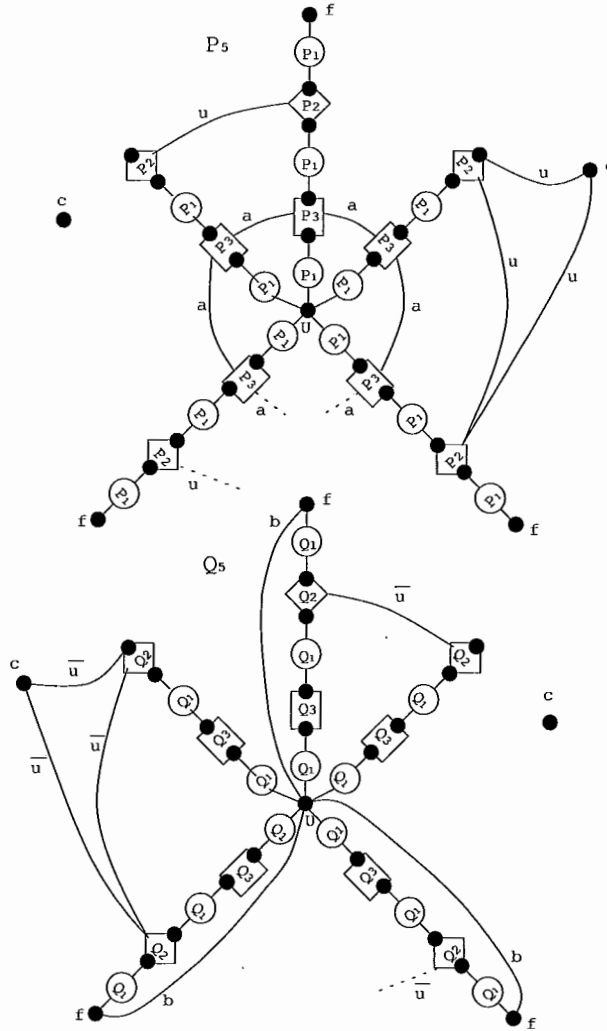


Figura 6.15: Grafos planares P_5 e Q_5 onde $H_5 = P_5 \cup Q_5$. Arestas com rótulo u estão em $E(P_5)$ e \bar{u} em $E(Q_5)$.

O grafo H_5 é usado como o “truth setting components” em nossa redução. As arestas rotuladas u estarão em $E(P_5)$ quando verdadeiras, e em $E(Q_5)$ quando falsas.

6.6 O grafo H_6

H_6 é definido pela figura 6.16.

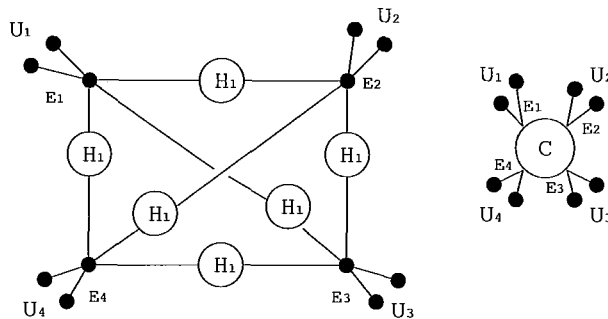


Figura 6.16: H_6 e sua representação simplificada.

Lema 6.7 *Se H_6 é um subgrafo de $P \cup Q$, onde P e Q são subgrafos planares, e se os vértices de U_1, U_2, U_3 e U_4 pertencem a uma mesma componente conexa de $P \setminus H_6$ e de $Q \setminus H_6$, então um dos conjuntos E_1, E_2, E_3 ou E_4 está contido em $E(P)$ e outro em $E(Q)$.*

Prova: Suponha, por contradição, que nenhum dos conjuntos E_1, E_2, E_3, E_4 estejam em, digamos $E(P)$. Logo, eles estão em $E(Q)$, e como todos os conjuntos U_1, U_2, U_3, U_4 estão em uma mesma componente conexa de $Q \setminus H_6$, temos em Q um subgrafo contratível a K_5 , como mostra a figura 6.17, o que contradiz a planaridade de Q .

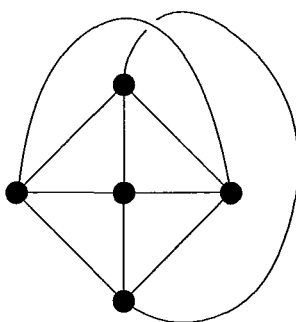


Figura 6.17: Subgrafo de Q_6 contratível a K_5 .

Uma partição de H_6 .

H_6 pode ser particionado em dois subgrafos planares P_6 e Q_6 onde cada aresta de $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$ pode estar em $E(P_6)$ ou em $E(Q_6)$, observando que E_i está contido em $E(P_6)$ e os demais estão contidos em $E(Q_6)$.

Proof: Temos somente dois casos a considerar. Os demais casos podem ser obtidos por simetria ou por inversão de P_6 e Q_6 :

- 1) $E_1 \subset E(P_6)$ e $E_4 \subset E(Q_6)$;
- 2) $E_2 \subset E(P_6)$ e $E_4 \subset E(Q_6)$.

Nesses dois casos, os grafos P_6 e Q_6 são mostrados nas figuras 6.18 e 6.19 respectivamente.

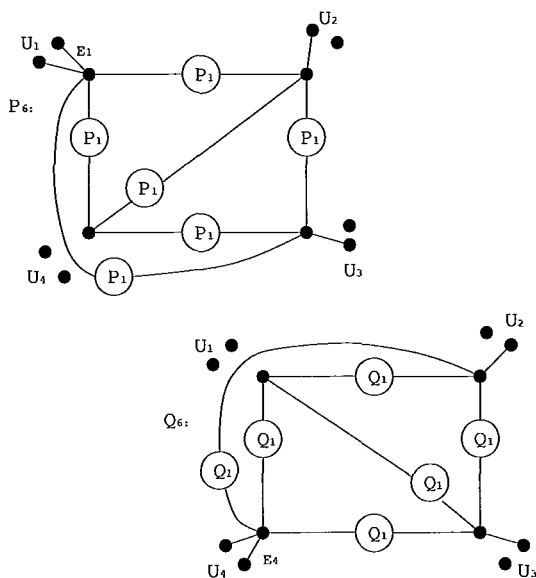


Figura 6.18: Grafos P_6 e Q_6 onde $H_6 = P_6 \cup Q_6$; $E_1 \subset E(P_6)$ e $E_4 \subset E(Q_6)$.

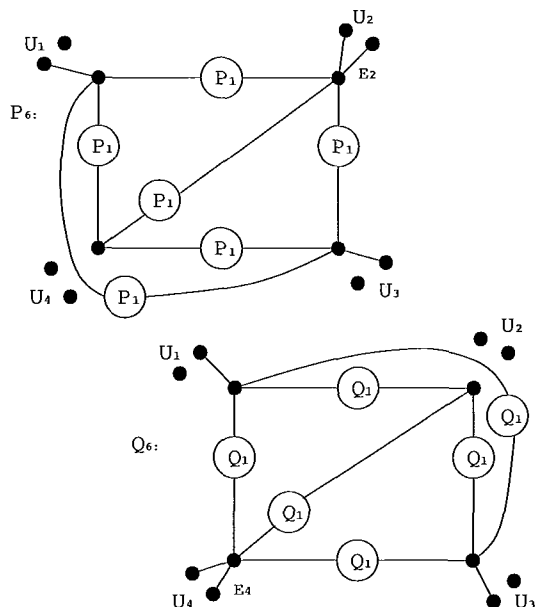


Figura 6.19: Grafos P_6 e Q_6 onde $H_6 = P_6 \cup Q_6$; $E_2 \subset E(P_6)$ e $E_4 \subset E(Q_6)$.

O grafo H_6 é o “Satisfiability Testing Component” de nossa redução. Se um dos pares de arestas, digamos E_4 , juntamente com o grafo H_6 está todo contido em $E(Q)$, então o outro par está em $E(P)$ e representa um literal verdadeiro.

6.7 Uma instância especial H de ESPESSURA

Nós descrevemos aqui uma redução em tempo polinomial do problema PLANAR 3-SAT para o problema ESPESSURA.

Para tanto, considere $I = (U, C)$ uma instância arbitrária de PLANAR 3-SAT, onde U é um conjunto de variáveis lógicas e C é uma coleção de cláusulas sob U . Seja $G = (U \cup C, E)$ o grafo correspondente à instância I . Nós consideraremos que cada cláusula c de C contém exatamente 3 literais, e portanto, no grafo $G = (U \cup C, E)$ cada vértice representando uma cláusula terá grau 3. Existe um algoritmo para determinar, em tempo polinomial, se

o grafo G é planar, por exemplo, o algoritmo de Tarjan [6]. Nós usaremos o grafo planar obtido por Lichtenstein [8], transformando uma instância de 3-SAT em PLANAR 3-SAT. Considere $F = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ o conjunto de faces deste desenho plano de G .

Nós podemos obter um grafo G' a partir de G adicionando F ao conjunto de vértices de $G' = (U \cup C \cup F, E \cup E_1 \cup E_2)$, a partir de G , adicionando o conjunto F ao conjunto de vértices e os conjuntos E_1 e E_2 ao conjunto de arestas, onde $E_1 = \{(u, f) / \forall u \in U, \forall f_i \in F \text{ tal que } u \in f_i\}$ e $E_2 = \{(c, f) / \forall c \in C, \text{ onde } f_j \in F \text{ é uma única face arbitrária de } G \text{ que contém } c\}$. O grafo G' construído desta forma é planar, já que os novos vértices f_r foram inseridos nos locais onde existiam faces de G e conectados até vértices pertencentes a estas faces. Nós agora construiremos o grafo H substituindo, em G' , os vértices de F por H_4 , os de U por H_5 e os de C por H_6 , conforme mostra a figura 6.20.

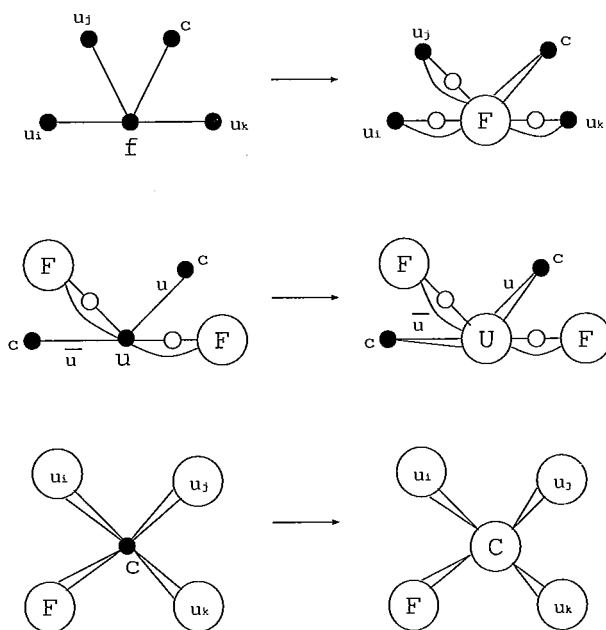


Figura 6.20: Transformação dos vértices f , u e c .

Esta transformação pode ser obtida em tempo polinomial ao tamanho da entrada. Como exemplo desta transformação, exibimos a figura 6.21, obtida a partir da instância $I = (U, C)$ de PLANAR 3-SAT onde $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e $C = \{(u_1, \bar{u}_2, u_3), (\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, u_2, u_4)\}$.

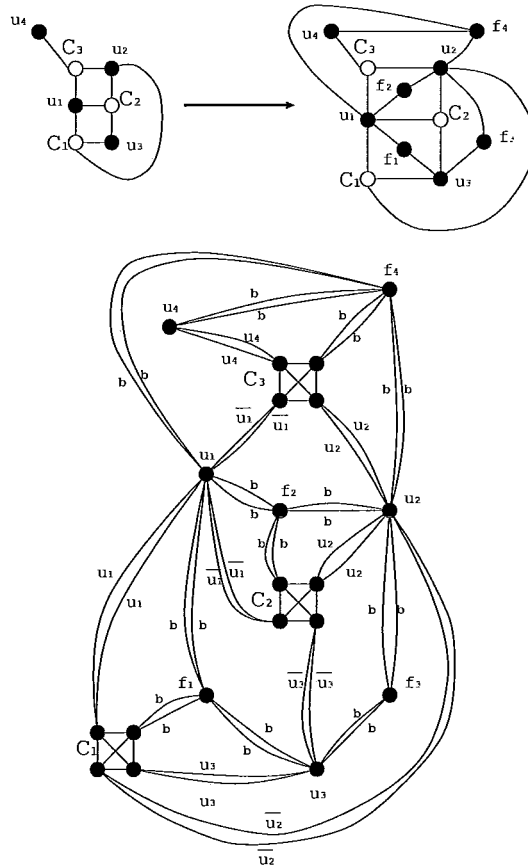


Figura 6.21: Grafo H obtido a partir da instância $I = (U, C)$, de PLANAR 3-SAT, onde $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ e $C = \{(u_1, \bar{u}_2, u_3), (\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, u_2, u_4)\}$.

6.8 ESPESSURA é NP-completo

Nós já vimos que ESPESSURA é certamente um membro de NP, e já descrevemos uma transformação, em tempo polinomial, de uma instância $I = (U, C)$ de PLANAR 3-SAT em um grafo H , que é uma instância de ESPESSURA com k fixado $k = 2$. Nós agora iremos mostrar que H possui espessura 2 se e somente se I é satisfatível.

Lema 6.8 *A instância $I = (U, C)$ possui uma atribuição de valores lógicos tal que cada cláusula $c \in C$ possua no mínimo um literal verdadeiro se e somente se $t(H) = 2$.*

Prova: (\Rightarrow) Seja $I = (U, C)$ uma instância de PLANAR 3-SAT tal que I possui uma atribuição de valores lógicos sobre U tal que toda cláusula $c \in C$ possui pelo menos um literal verdadeiro. Iremos contruir o grafo $H = P \cup Q$ da seguinte forma: Coloque as arestas rotuladas b de H_4 e de H_5 em Q , as arestas rotuladas a de H_4 e H_5 em P , as arestas rotuladas c de H_4 em Q , e as arestas rotuladas c de H_5 obedecendo a seguinte regra: 1) Seja $u_i \in c_j$ uma variável de valor lógico “verdadeiro”: se u_i aparecer não barrada em c_j , então coloque a aresta (u_i, c_j) em P ; caso contrário, coloque a aresta (u_i, c_j) em Q ; 2) Seja $u_i \in c_j$ uma variável de valor lógico “falso”: se u_i aparecer não barrada em c_j , então coloque a aresta (u_i, c_j) em Q ; caso contrário, coloque a aresta (u_i, c_j) em P . Como toda cláusula possui um literal verdadeiro, então no mínimo um dos conjuntos E_1, E_2, E_3, E_4 está em P , permitindo assim que a conexão de algum vértice $f_r \in F$ seja estabelecida com $H_6 = c_j$ sem provocar cruzamentos. Observando a partição dos grafos $H_i = P_i \cup Q_i$ já descritas nas seções 6.2, 6.4, 6.6, 6.8, 6.13, 6.16, onde P_i e Q_i são planares, nós então teremos construído um grafo $H = P \cup Q$ onde P e Q são planares, o que nos dá $t(H) = 2$.

\Leftarrow Seja $H = (U \cup C, E)$ um grafo tal que $t(H) = 2$. Então H pode ser particionado em 2 subgrafos planares P e Q tais que $H = P \cup Q$. Pelas propriedades de H_4 e H_5 , as arestas com rótulo b estão todas em P ou todas em Q , e ainda, se $E(B) \subset P$ então $E(A) \subset Q$ ou vice-versa. Sem perda de generalidade, consideremos que $E(B) \subset Q$. Nós então iremos definir que se $(u_i, c_j) \in P$, onde $u_i \in U$ e $c_j \in C$, então a variável u_i receberá valor lógico “verdadeiro” se o literal u_i aparecer não barrado em c_j , caso contrário, a variável u_i receberá o valor lógico “falso”. Fazendo desta forma, garantimos que se existir alguma aresta (u_i, c_j) em P , ligando algum vértice u_i de U até algum vértice c_j de C , então a cláusula $c_j \in C$ possui um literal verdadeiro. Pelas propriedades de H_6 , sabemos que pelo menos um dos conjuntos E_1, E_2, E_3, E_4 , que estabelecem a conexão dos vértices de C com os vértices de U estão em P , e da mesma forma pelo menos um destes conjuntos está em Q , e portanto, podemos garantir que toda cláusula $c \in C$ possui um literal verdadeiro. \square

Estes fatos completam a prova de que ESPESSURA é um problema NP-completo.

Para a conveniência do leitor, nós exibimos nas figuras 6.22 e 6.23 a correspondente decomposição do grafo H , da figura 6.21, nos grafos P e Q .

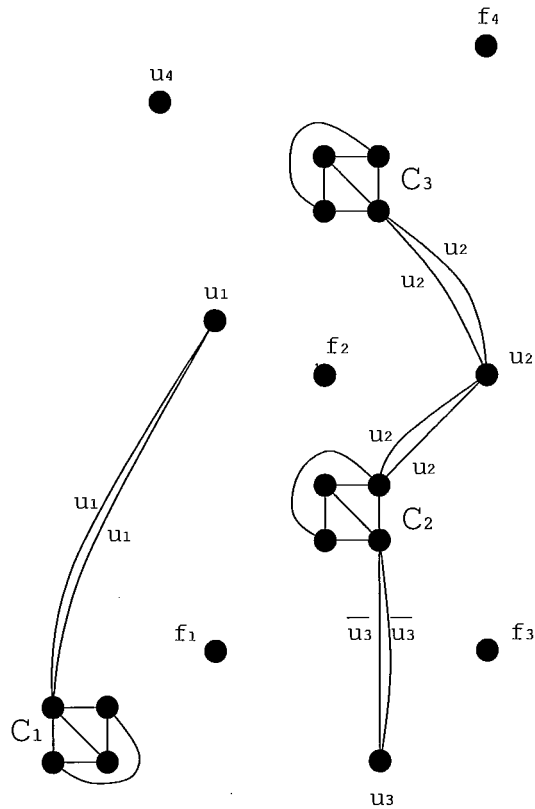


Figura 6.22: Partição planar P para o grafo H obtido a partir da instância $I = (U, C)$ de PLANAR 3-SAT, onde $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $C = \{(u_1, \bar{u}_2, u_3), (\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, u_2, u_4)\}$ e $u_1 = u_2 = V$ e $u_3 = u_4 = F$.

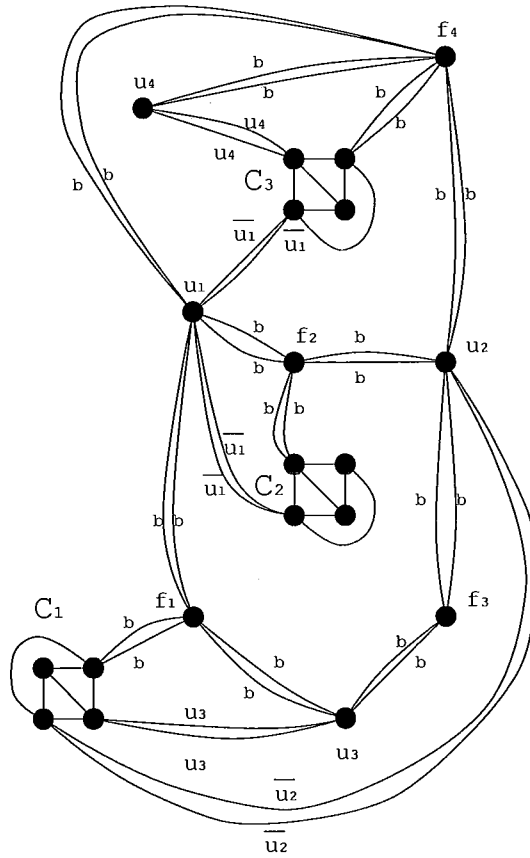


Figura 6.23: Partição planar Q para o grafo H obtido a partir da instância $I = (U, C)$ de PLANAR 3-SAT, onde $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, $C = \{(u_1, \bar{u}_2, u_3), (\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, u_2, u_4)\}$ e $u_1 = u_2 = V$ e $u_3 = u_4 = F$.

Capítulo 7

Conclusão

A principal contribuição desta dissertação consistiu em reunir em um texto em português os resultados da literatura [[2], [3], [4], [1]] que determinaram o valor da espessura do grafo K_n , e a demonstração [10] da NP-completude do problema de decisão do valor da espessura.

Possíveis trabalhos futuros consistem na pesquisa de valores exatos ou aproximados para classes de grafos como grafos produto, estabelecimento da NP-completude da espessura em classes particulares como grafos k -regulares, e obviamente, algoritmos aproximativos para a determinação da espessura.

Apêndice A

Anexo 1

A.1 Grafos intermediários da decomposição do K_{40}

No grafo K_{40} , temos que $40 = 6 * 6 + 4$, logo $p = 6 = 2^1(2 * 1 + 1)$, o que nos dá $q = 1$ e $r = 1$.

Como $i = 2^q s$ e $i < \frac{p}{2}$, então $i = 2s$, portanto par, e $i < \frac{6}{2} = 3$. Isto nos dá que $i = 2$.

Assim, as matrizes A e A' serão:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$a_{i,j}$ elemento, j coluna.

$a_{i,j}$ é marcado se e somente se $a_{i,j} > j$:

$$A'_6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 1 \\ 6' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3' & 4' & 5' & 6' & 1 & 2 \\ 5' & 6' & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4' & 5' & 6' & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

A.1.1 Desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$, $C_{r,3}$, $C_{r,4}$, $C_{r,5}$, $C_{r,6}$

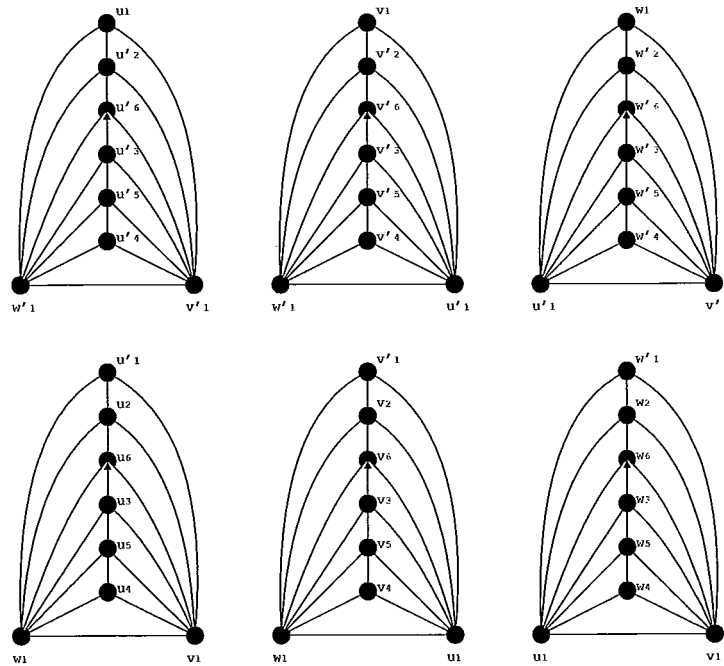


Figura A.1: Desenhos $C_{1,1}$ a $C_{1,6}$ - decomposição do K_{40}

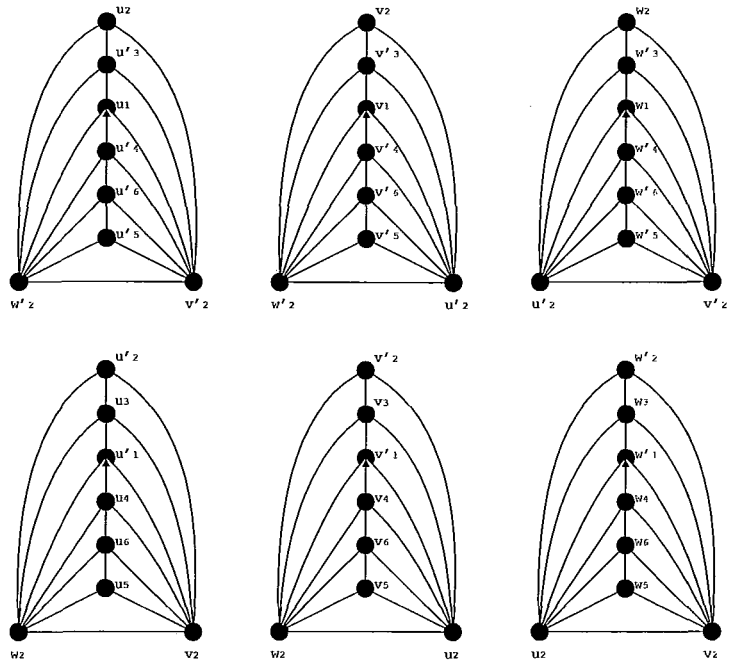


Figura A.2: Desenhos $C_{2,1}$ a $C_{2,6}$ - decomposição do K_{40}

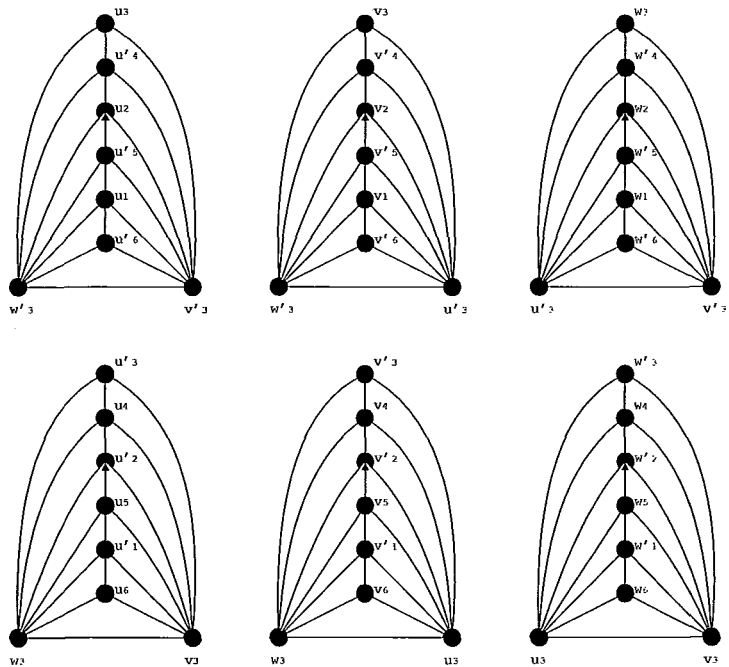


Figura A.3: Desenhos $C_{3,1}$ a $C_{3,6}$ - decomposição do K_{40}

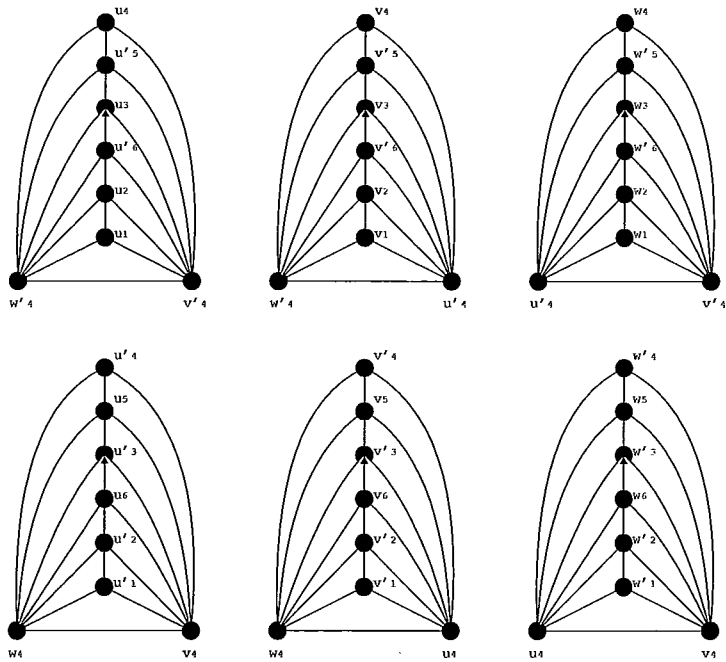


Figura A.4: Desenhos $C_{4,1}$ a $C_{4,6}$ - decomposição do K_{40}

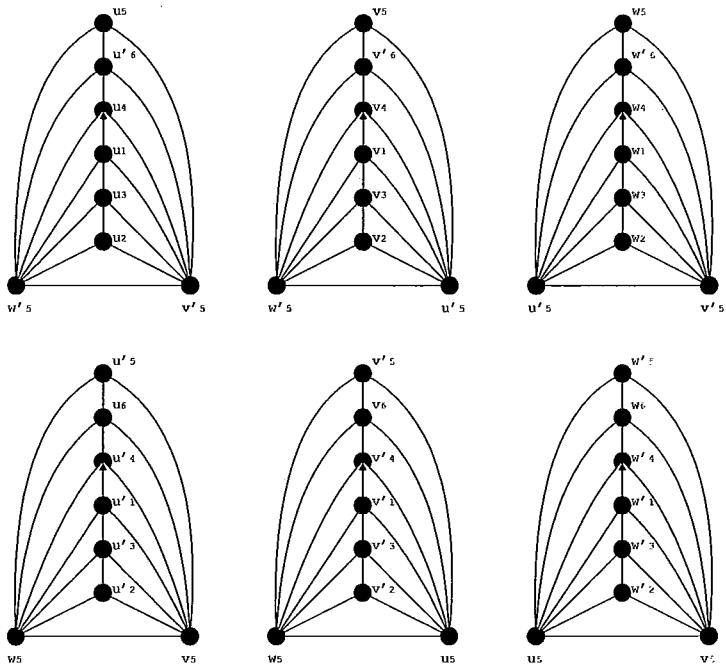


Figura A.5: Desenhos $C_{5,1}$ a $C_{5,6}$ - decomposição do K_{40}

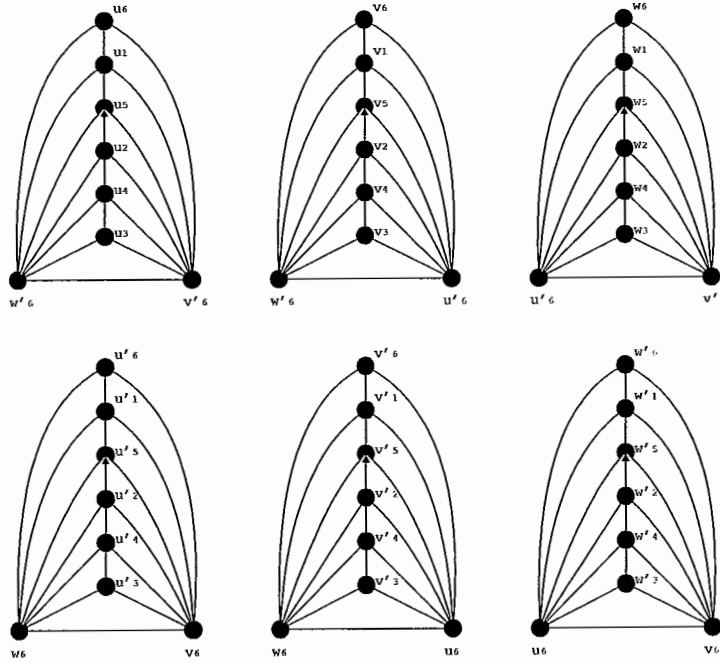


Figura A.6: Desenhos $C_{6,1}$ a $C_{6,6}$ - decomposição do K_{40}

A.1.2 Grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6

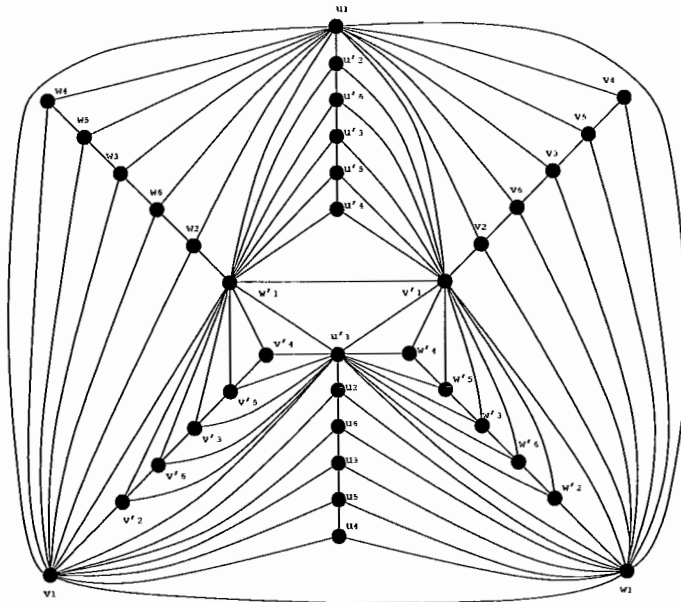


Figura A.7: Grafo G_1 - decomposição do K_{40}

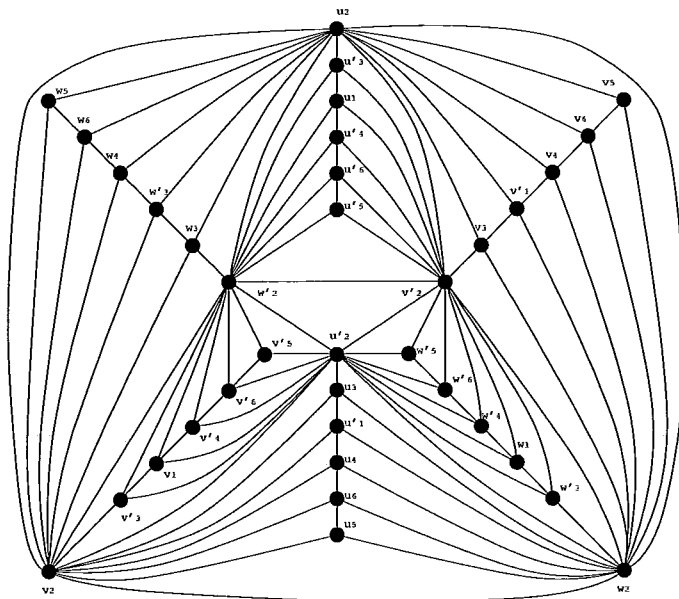


Figura A.8: Grafo G_2 - decomposição do K_{40}

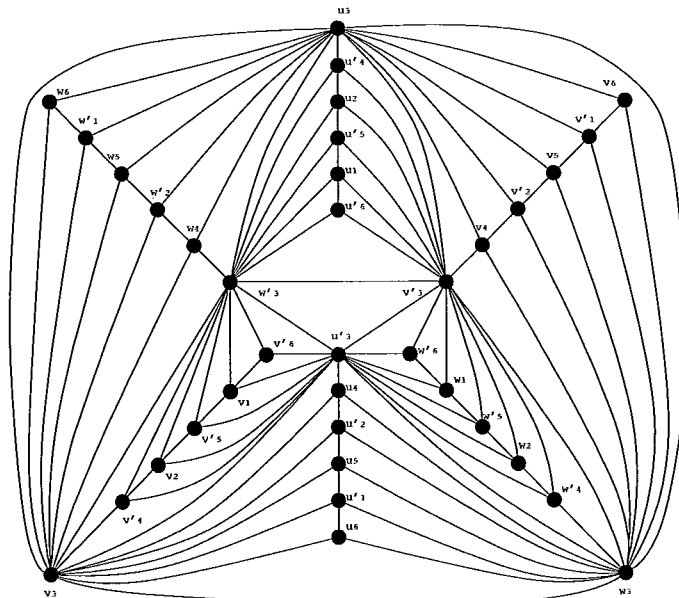


Figura A.9: Grafo G_3 - decomposição do K_{40}

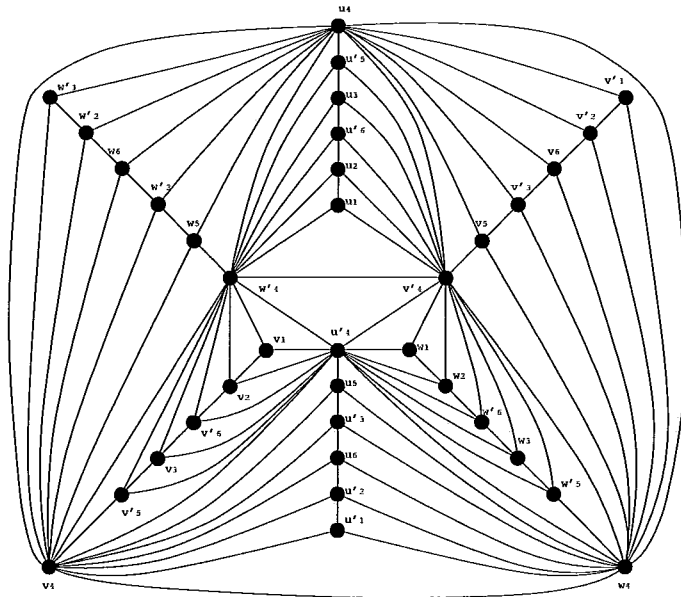


Figura A.10: Grafo G_4 - decomposição do K_{40}

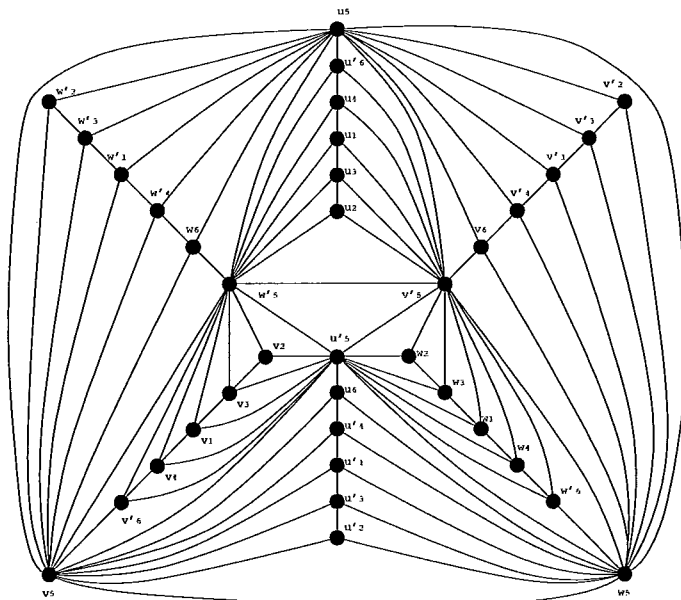


Figura A.11: Grafo G_5 - decomposição do K_{40}

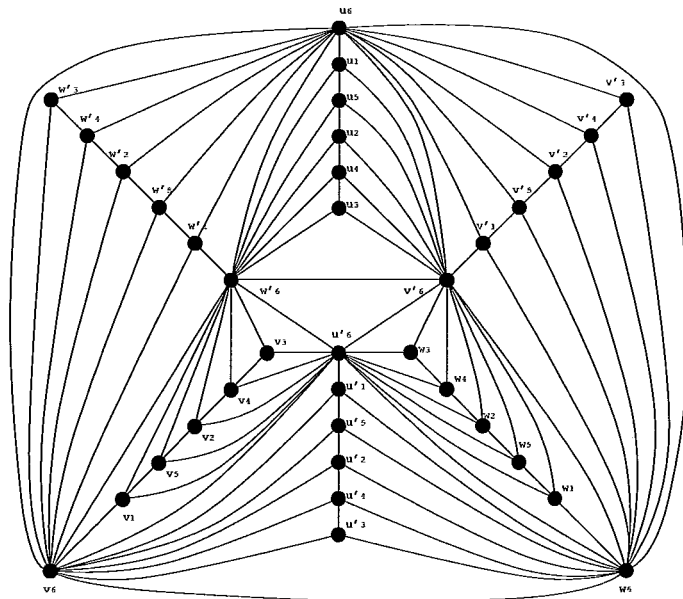


Figura A.12: Grafo G_6 - decomposição do K_{40}

A.1.3 Grafos G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 e G_6 após a Modificação Fundamental

Como na modificação fundamental do caso $p = 2^k(2r + 1)$ as arestas removidas são as que estão entre os $(2i - 1)$ -ésimo e $(2i)$ -ésimo vértices, nos grafos G_1 a G_6 da decomposição do K_{40} removeremos as arestas que estão entre os terceiro e quarto vértices de alguns desenhos. Para definirmos quais desenhos receberão a remoção de arestas, copiamos as primeira e quarta linhas da matriz A :

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha1</i>	0	1	2	3	4	5	6
<i>linha4</i>	+2	3	4	5	6	1	2

Dispondo a seqüência em ciclos, temos:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha1</i>	0	1	3	5	2	4	6
<i>linha4</i>	+2	3	5	1	4	6	2

Pelas regras de marcação:

- a) O primeiro elemento de cada ciclo aparece não-marcado;
- b) Cada par de elementos deve diferir do par correspondente em A' em apenas uma marcação;
- c) O elemento inferior de cada par precedente deve ter marcação oposta ao do elemento superior de cada par subsequente.

Temos:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha1</i>	0	1	3'	5	2	4'	6
<i>linha4</i>	+2	3	5'	1'	4	6'	2'

Adicionando nesta seqüência os elementos da $(2i + 1)$ -ésima linha, ou seja, quinta linha, teremos:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha1</i>	0	1	2	3'	4'	5	6
<i>linha4</i>	+2	3	4	5'	6'	1'	2'
<i>linha5</i>	-2	5	6	1	2	3	4

Para marcarmos a última linha desta seqüência, obedecemos a regra : cada par de elementos deve ser marcado como em A' ou de forma oposta a esta marcação. Logo teremos:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha1</i>	0	1	2	3'	4'	5	6
<i>linha4</i>	+2	3	4	5'	6'	1'	2'
<i>linha5</i>	-2	5	6	1	2	3'	4'

Vamos modificar os grafos G_1 a G_6 removendo as arestas que estão entre os terceiro e quarto vértices dos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$, contados a partir de u'_r , v'_r e w'_r , respectivamente, e colocando x na fronteira exterior do

grafo G_r , caso o primeiro elemento da coluna r na seqüência acima aparecer não marcado, ou removendo as arestas que estão entre os terceiro e quarto vértices dos desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$ e $C_{r,3}$, contados a partir de u_r , v_r e w_r , respectivamente, e colocando x na fronteira interior do grafo G_r , caso o primeiro elemento da coluna r na seqüência acima aparecer marcado.

Segue a modificação fundamental efetuada no nosso grafo exemplo:

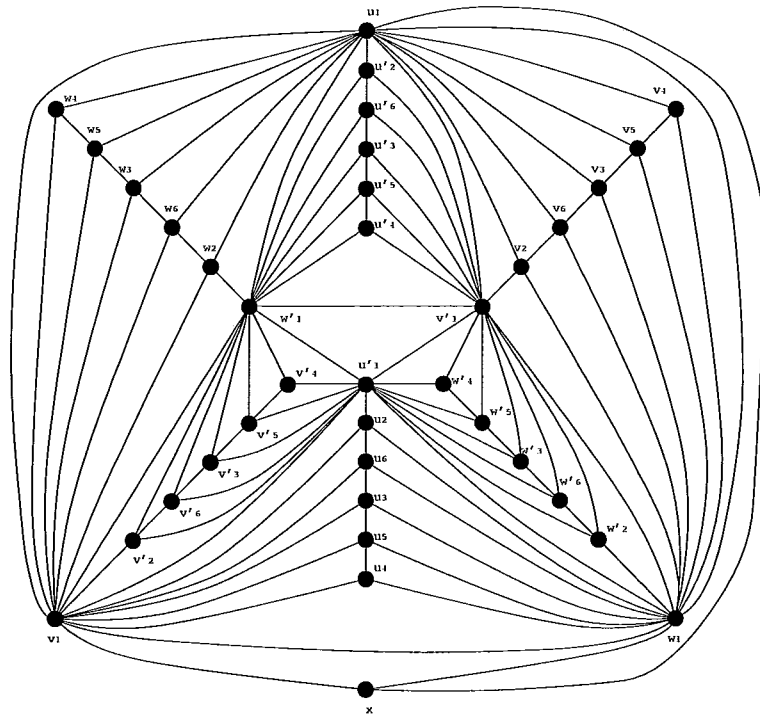


Figura A.13: Grafo G_1 modificado - decomposição de K_{40}

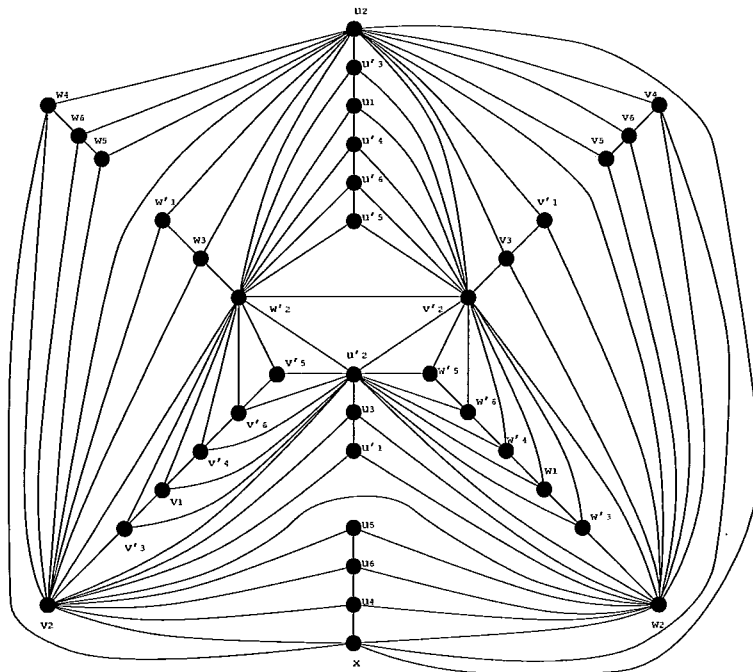


Figura A.14: Grafo G_2 modificado - decomposição do K_{40}

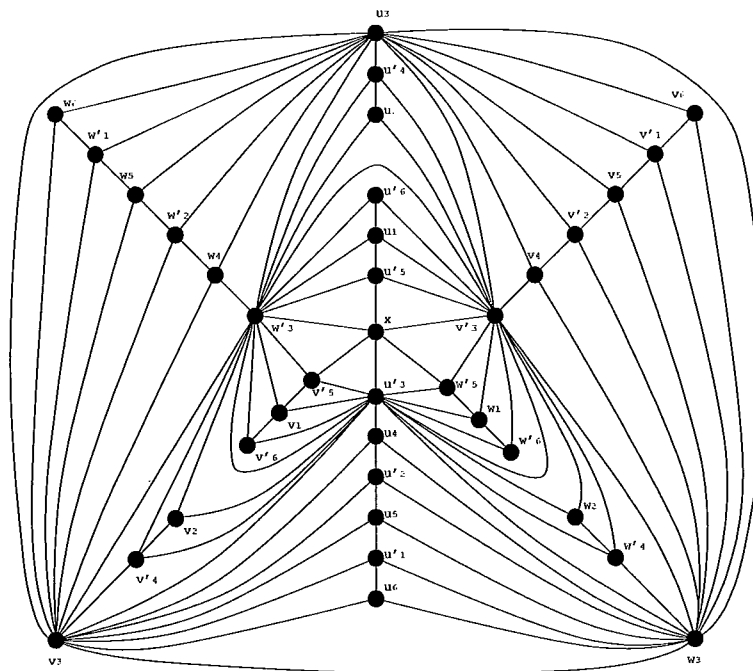


Figura A.15: Grafo G_3 modificado - decomposição do K_{40}

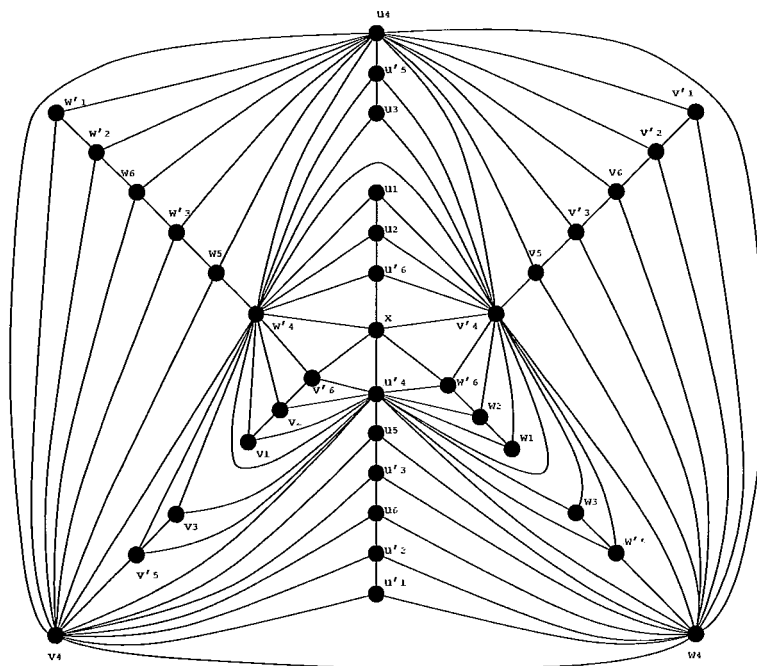


Figura A.16: Grafo G_4 modificado - decomposição do K_{40}

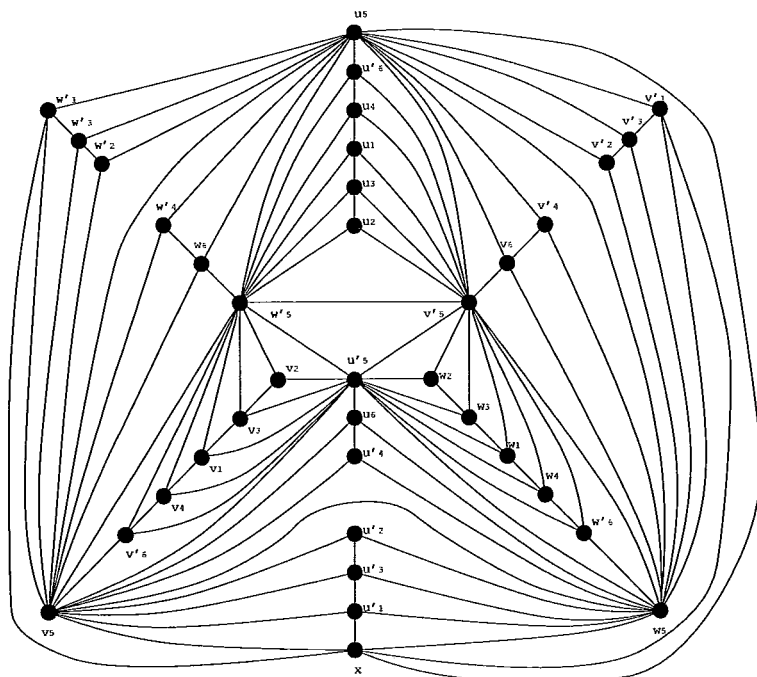


Figura A.17: Grafo G_5 modificado - decomposição do K_{40}

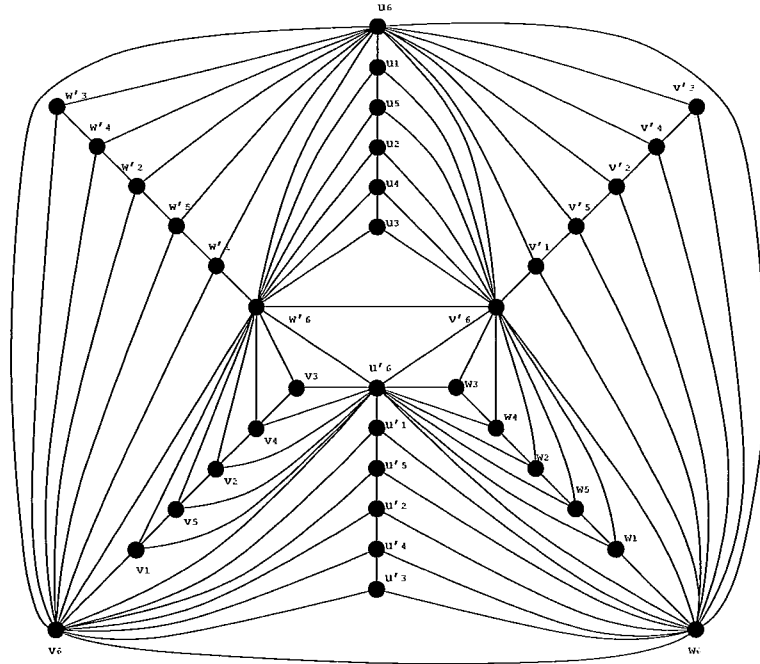


Figura A.18: Grafo G_6 modificado - decomposição do K_{40}

A.1.4 Grafo suplementar G_7

Para a construção dos desenhos C_u , C_v e C_w , vamos copiar os elementos das terceira e quarta linhas, ou seja, $(2i - 1)$ -ésima e $(2i)$ -ésima linhas de A . Estas linhas correspondem às constantes -1 e $+2$, ou seja, $-(i - 1)$ e $+i$:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha3</i>	-1	6	1	2	3	4	5
<i>linha4</i>	+2	3	4	5	6	1	2

Lembrando as regras para marcação:

- a) Cada par de elementos da coluna r deve receber marcação oposta ao par correspondente em A' se a modificação fundamental do grafo G_r tiver sido efetuada nos desenhos $C_{r,4}$, $C_{r,5}$ e $C_{r,6}$;

b) O par de elementos da coluna r deve receber marcação idêntica à que aparece no par correspondente em A' se no grafo G_r a modificação fundamental tiver atingido os desenhos $C_{r,1}$, $C_{r,2}$ e $C_{r,6}$.

Logo, teremos marcações iguais às de A' em G_3 e G_4 e marcação oposta em G_1 , G_2 , G_5 e G_6 . Assim:

	<i>constante</i>	<i>coluna1</i>	<i>coluna2</i>	<i>coluna3</i>	<i>coluna4</i>	<i>coluna5</i>	<i>coluna6</i>
<i>linha3</i>	-1	6	1'	2	3	4'	5'
<i>linha4</i>	+2	3	4	5'	6'	1'	2'

Para construirmos o desenho C_u , obedecemos a seqüência acima, que mostra as arestas removidas durante a modificação fundamental, além das arestas (u_i, u'_i) . Portanto:

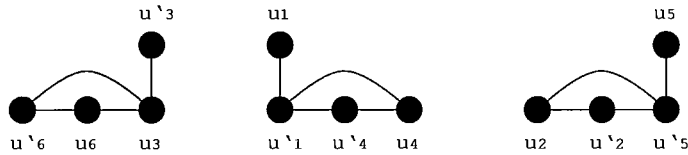


Figura A.19: Desenho C_u - decomposição do K_{40}

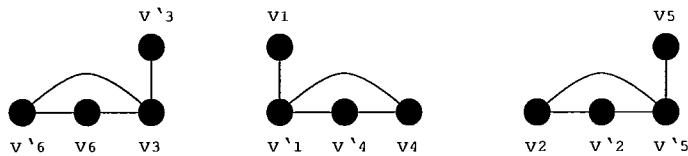


Figura A.20: Desenho C_v - decomposição do K_{40}

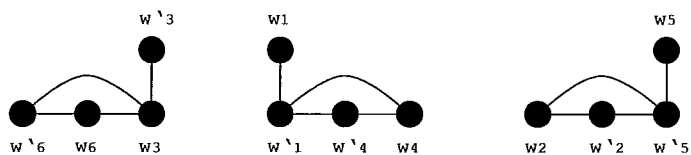


Figura A.21: Desenho C_w - decomposição do K_{40}

Logo o grafo suplementar G_7 será o seguinte:

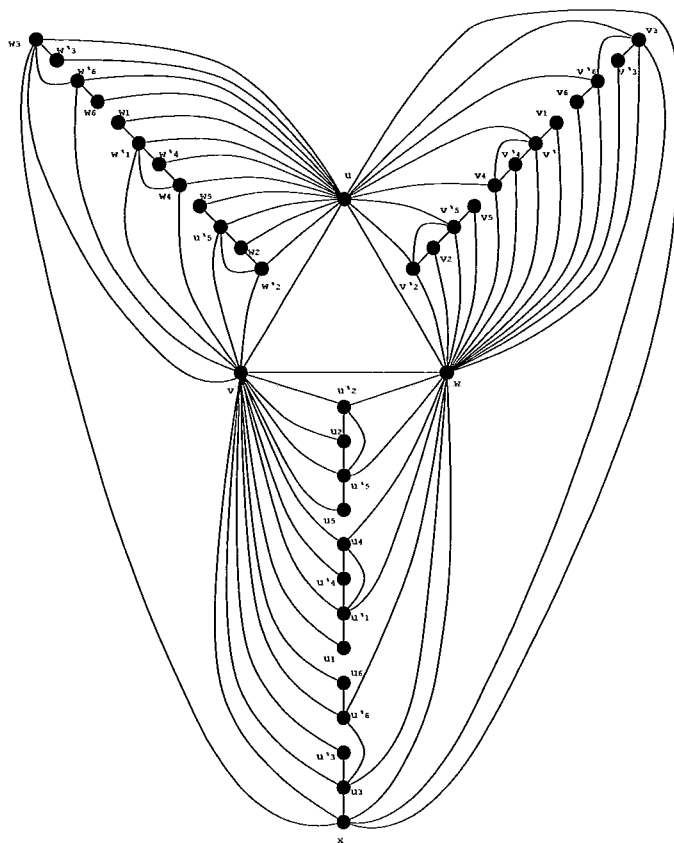


Figura A.22: Grafo suplementar G_7 - decomposição do K_{40}

Apêndice A

Anexo 2

A.1 Grafos intermediários da decomposição do K_{148}

$$n = 148$$

$$148 = 6 * 24 + 4, \text{ logo } p = 24$$

$$p = 3 * 2^3, \text{ o que nos dá } q = 3.$$

Construiremos a matriz A , onde

$$a_{ij} \equiv j + (-1)^i \lfloor \frac{i}{2} \rfloor \pmod{24}, \quad i, j = 1, \dots, 24$$

$a_{i,j}$ elemento, j coluna. $a_{i,j}$ é marcado se e somente se $a_{i,j} > j$:

$A_{24} =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1
24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2
23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3
22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4
21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5
20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6
19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7
18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8
17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

A.1.1 Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 1, \dots, 24$

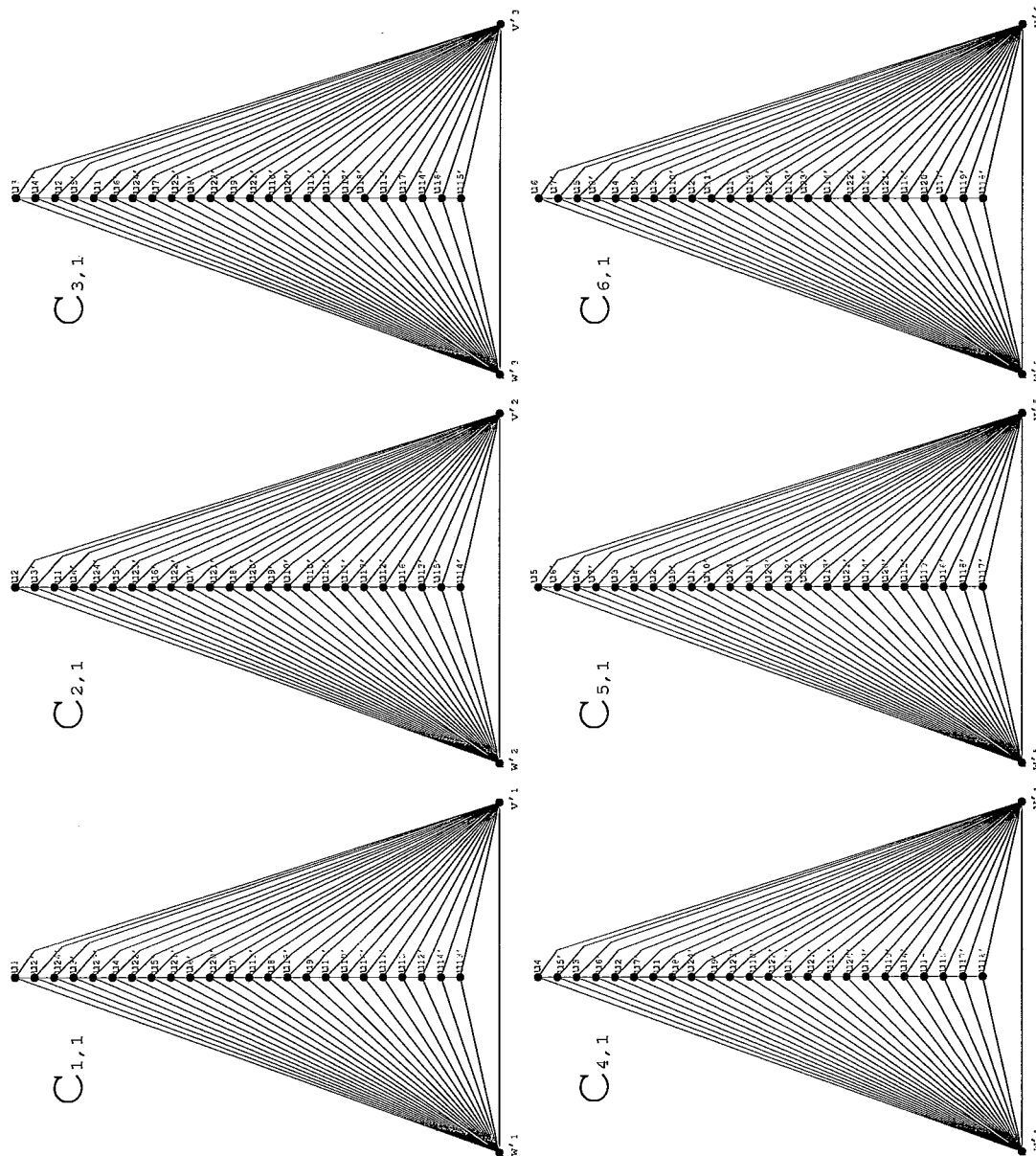


Figura A.1: Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ - decomposição do K_{148} .

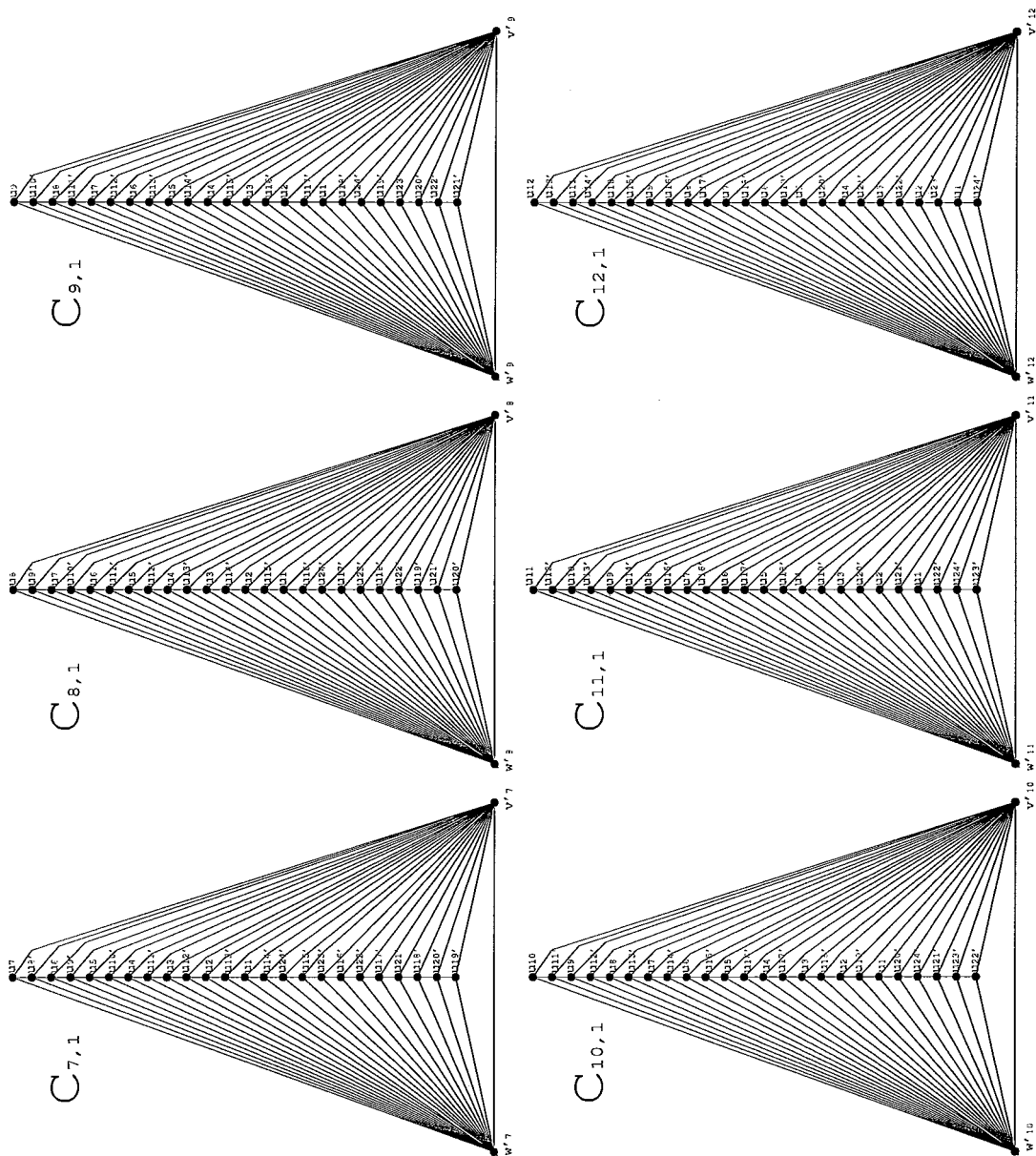


Figura A.2: Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 7, 8, 9, 10, 11, 12$ - decomposição do K_{148} .

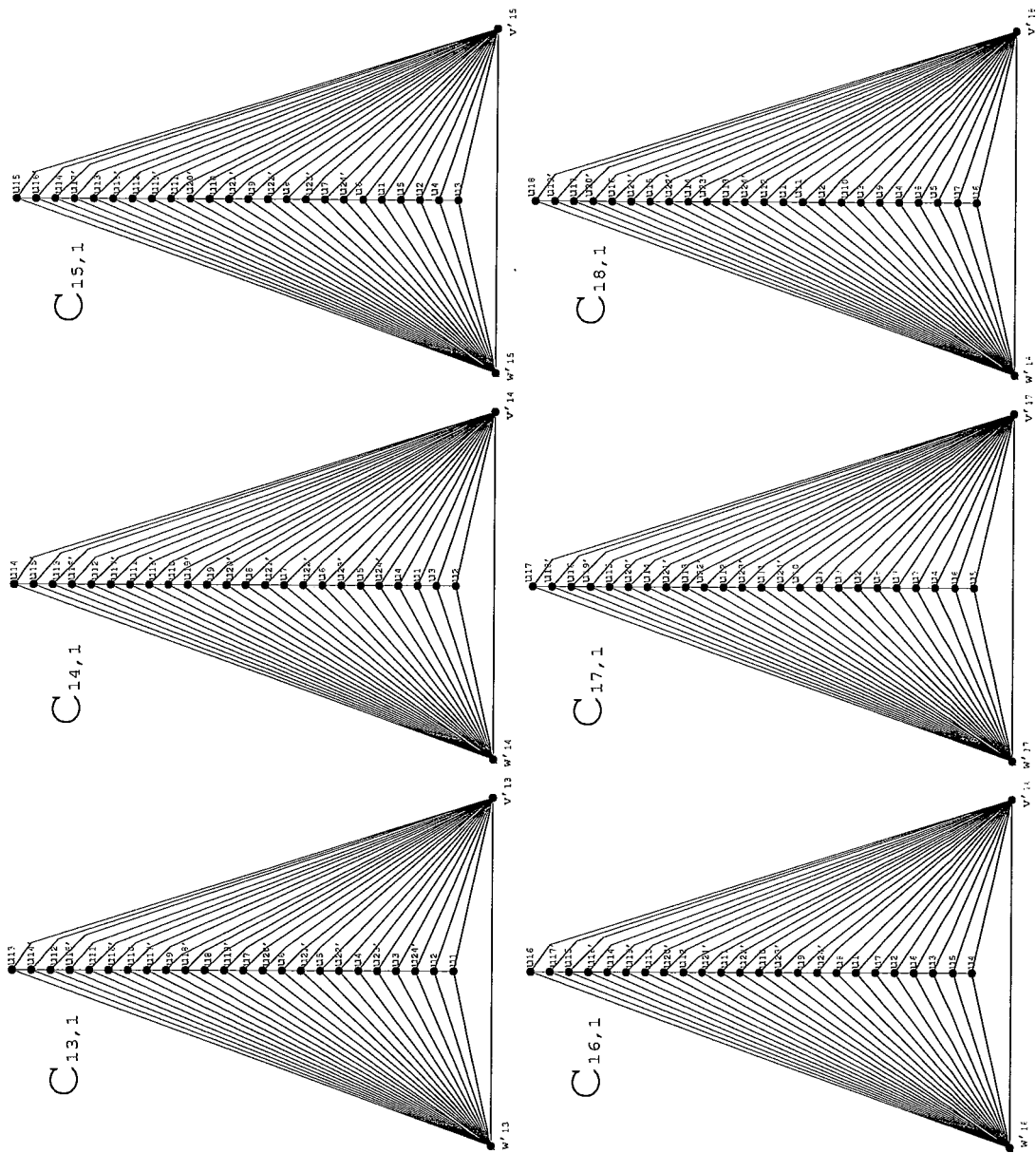


Figura A.3: Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 13, 14, 15, 16, 17, 18$ - decomposição do K_{148}

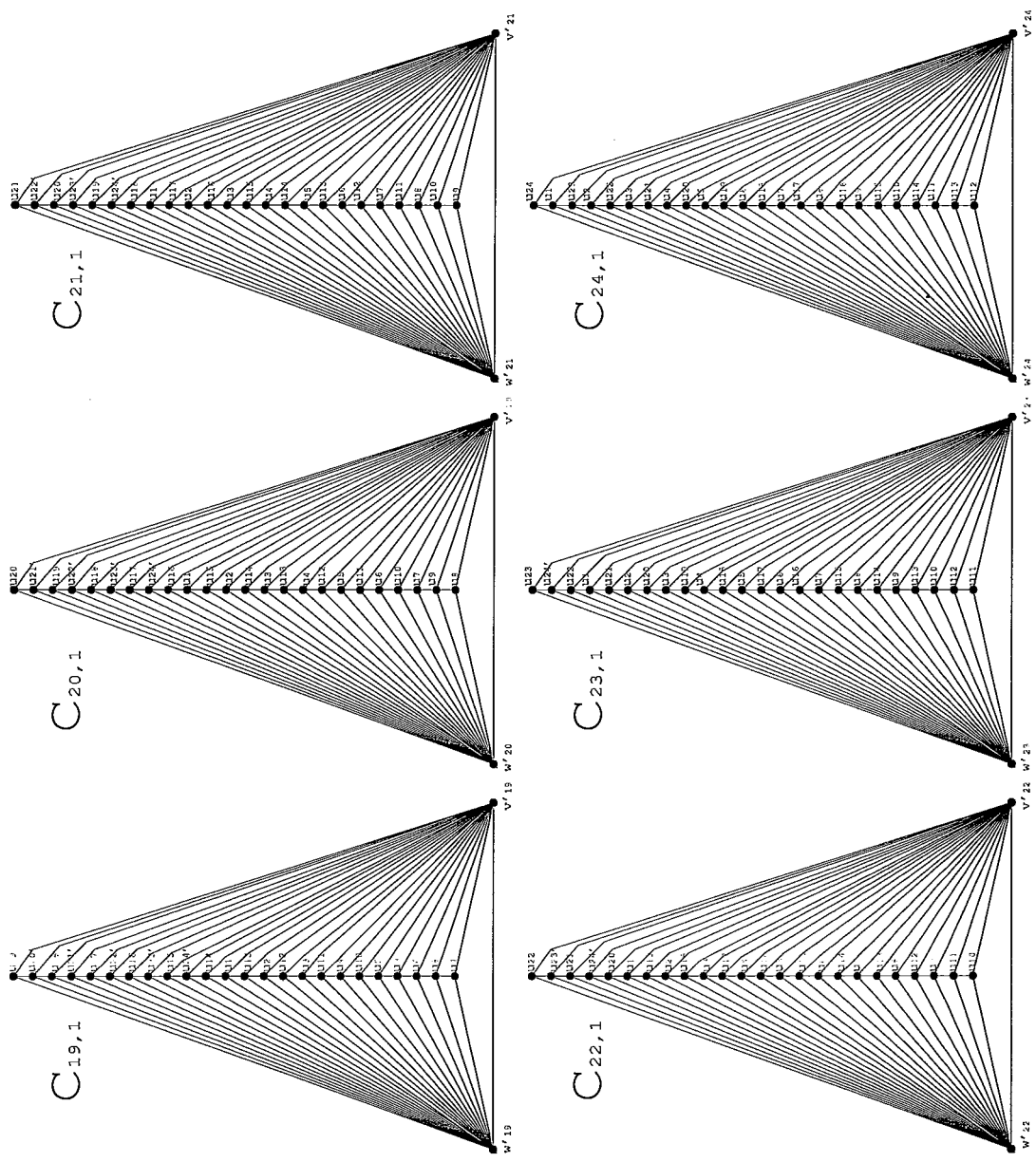


Figura A.4: Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 19, 20, 21, 22, 23, 24$ - decomposição do K_{148}

A.1.2 Grafos G_1, \dots, G_{24}

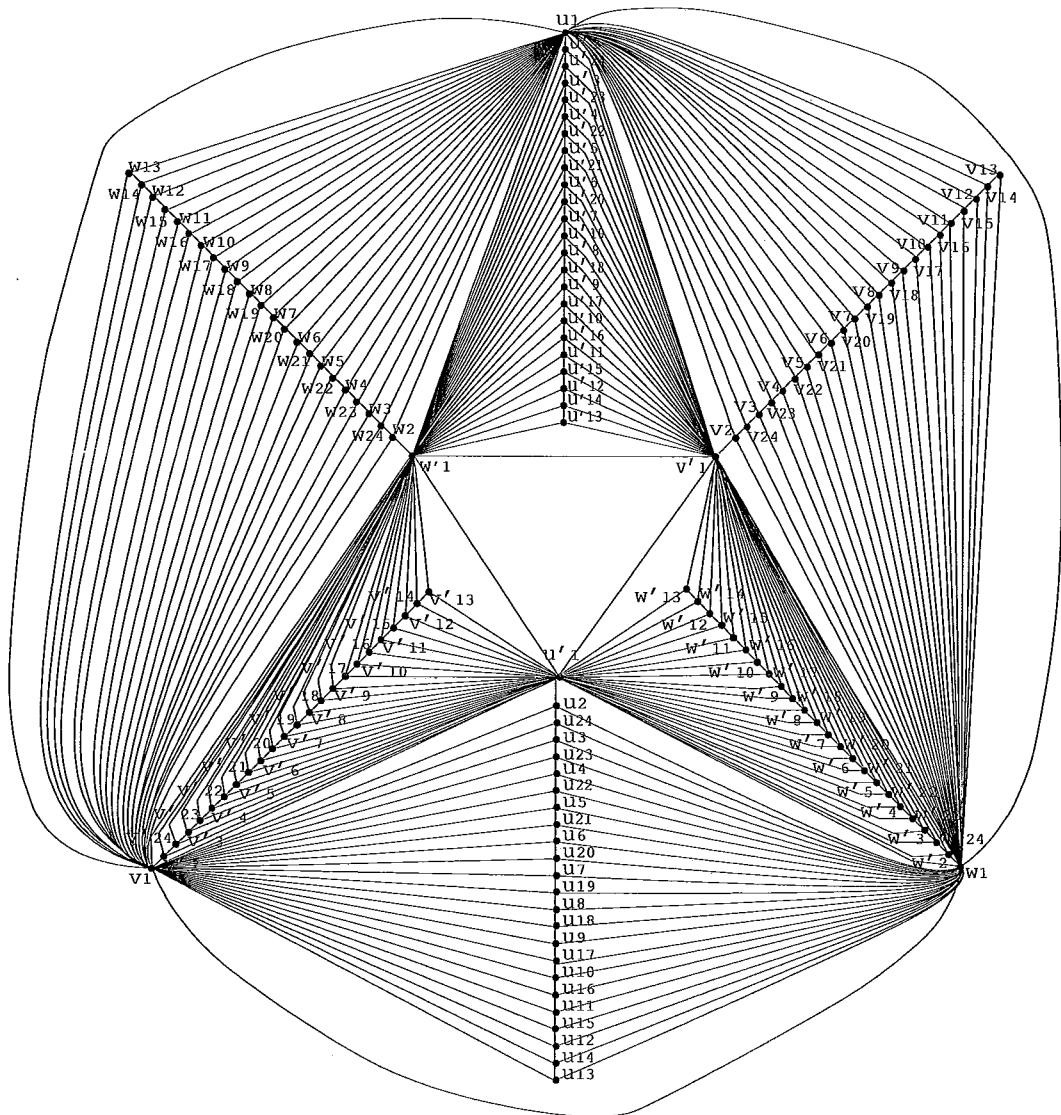


Figura A.5: Grafo G_1 - decomposição do K_{148}

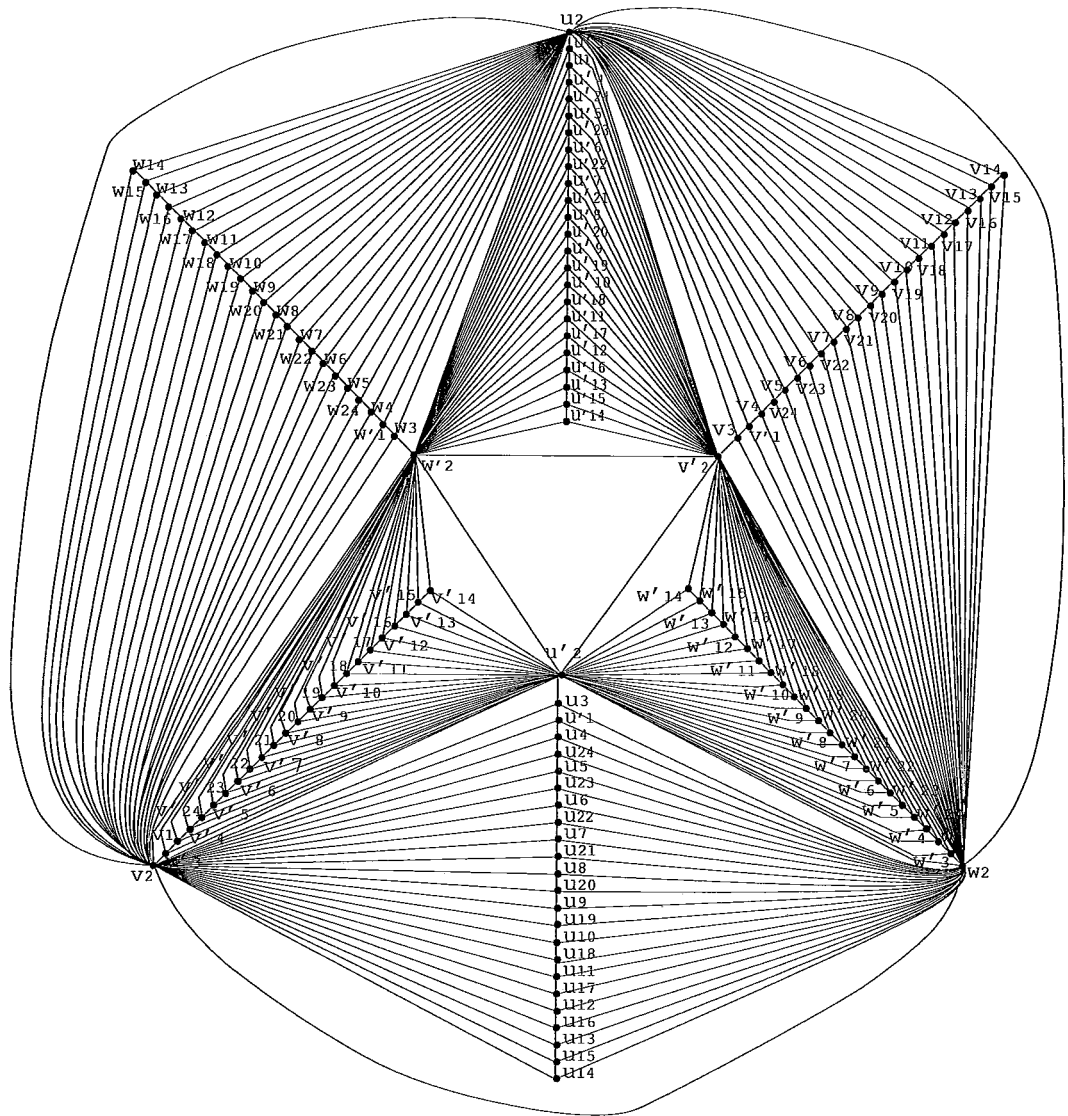


Figura A.6: Grafo G_2 - decomposição do K_{148}

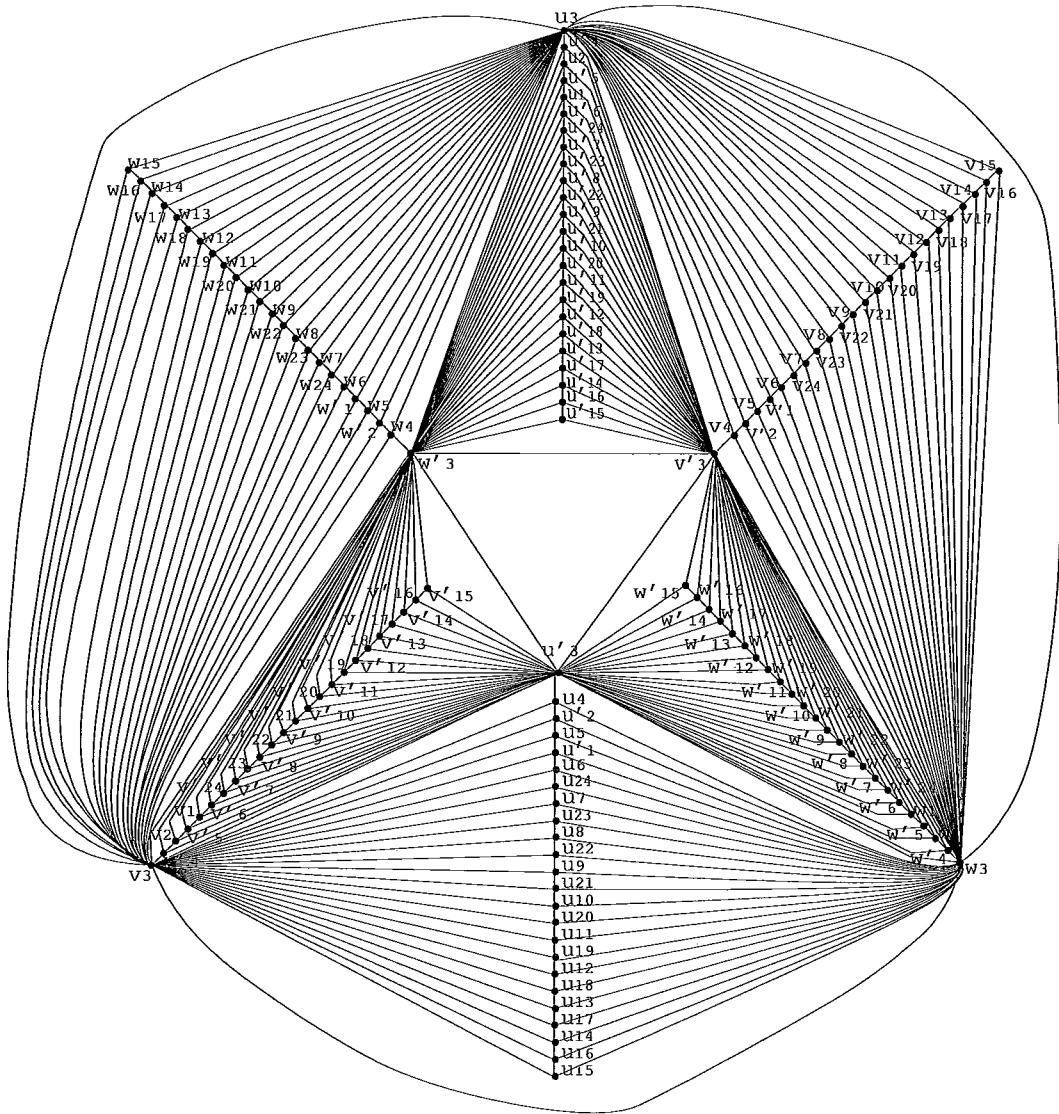


Figura A.7: Grafo G_3 - decomposição do K_{148}

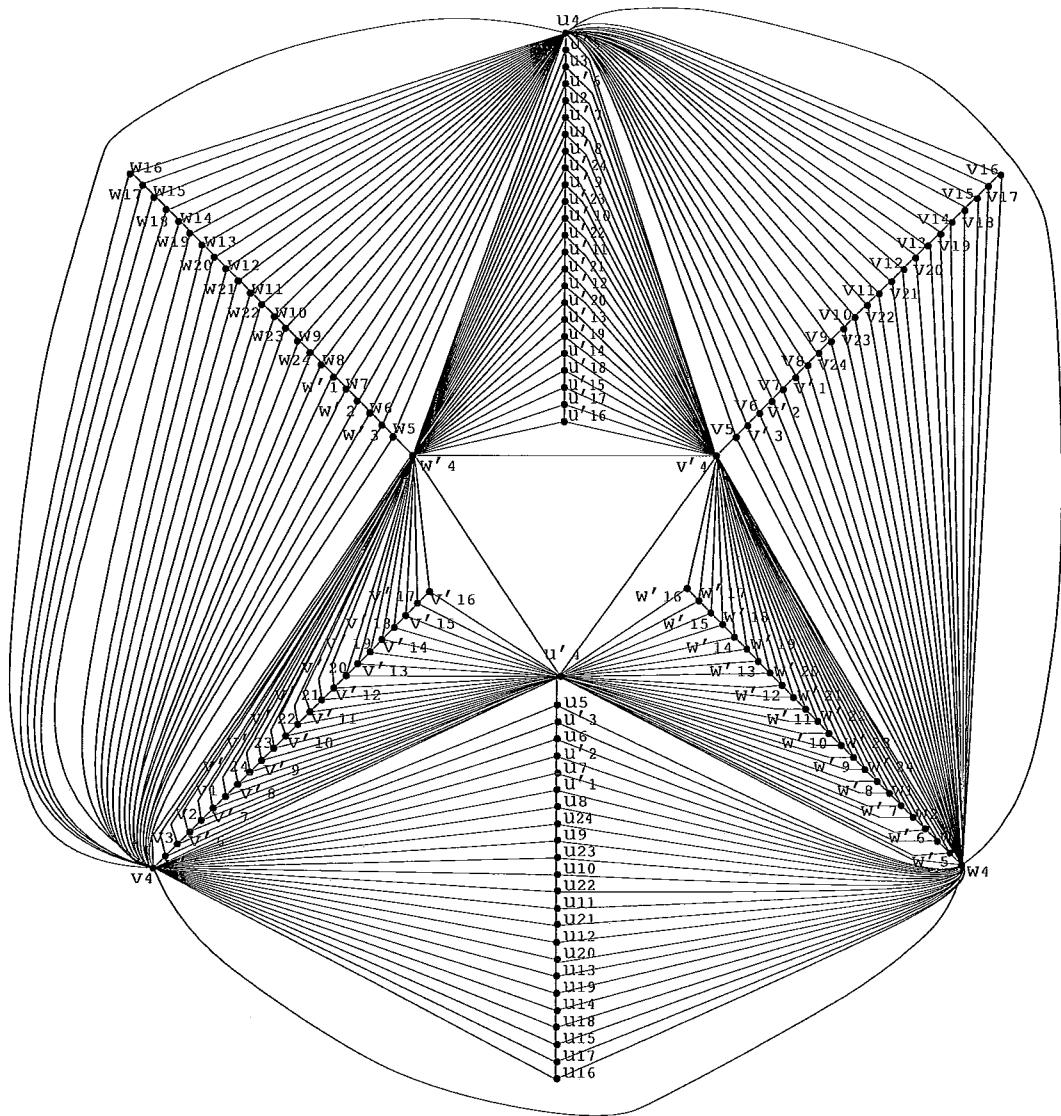


Figura A.8: Grafo G_4 - decomposição do K_{148}

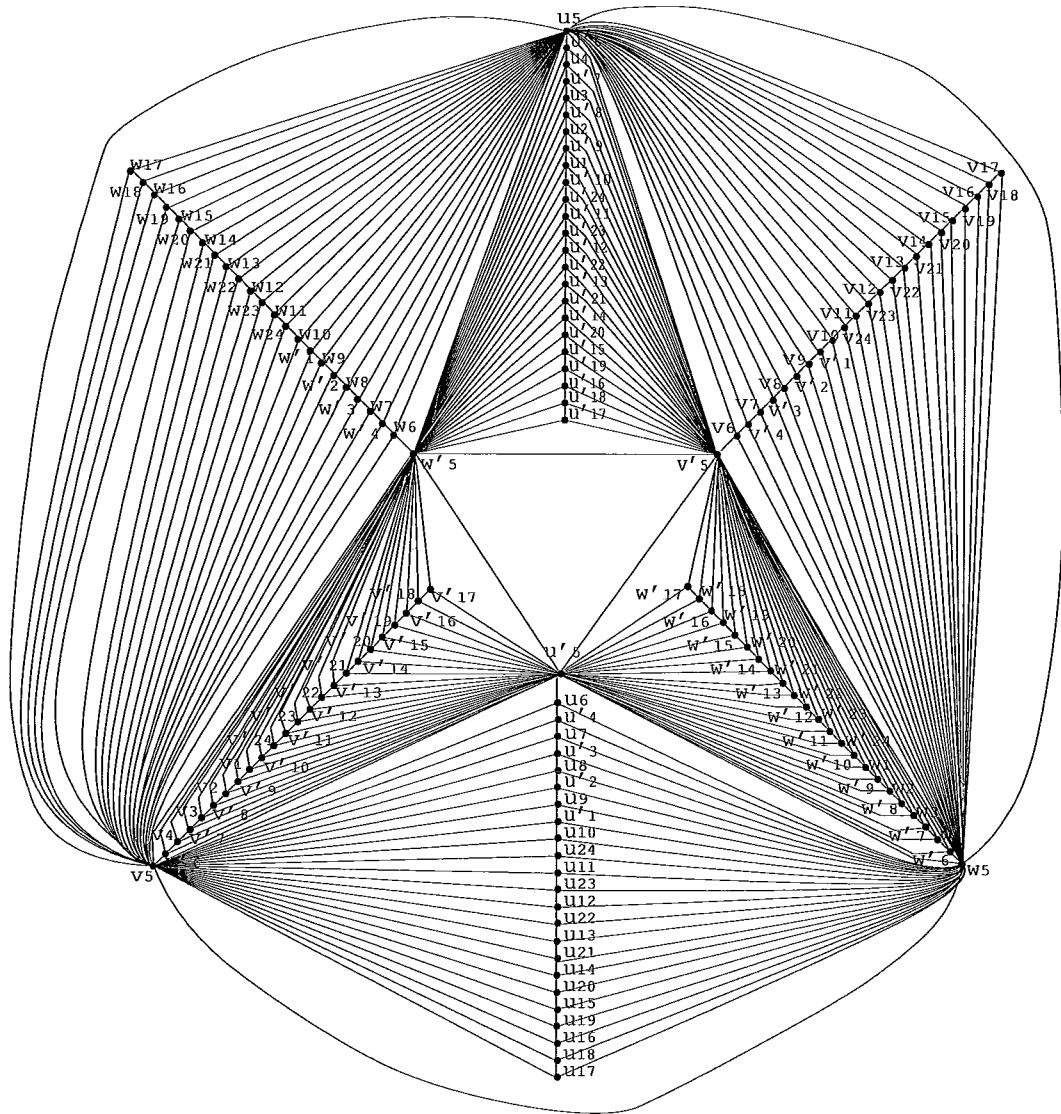


Figura A.9: Grafo G_5 - decomposição do K_{148}

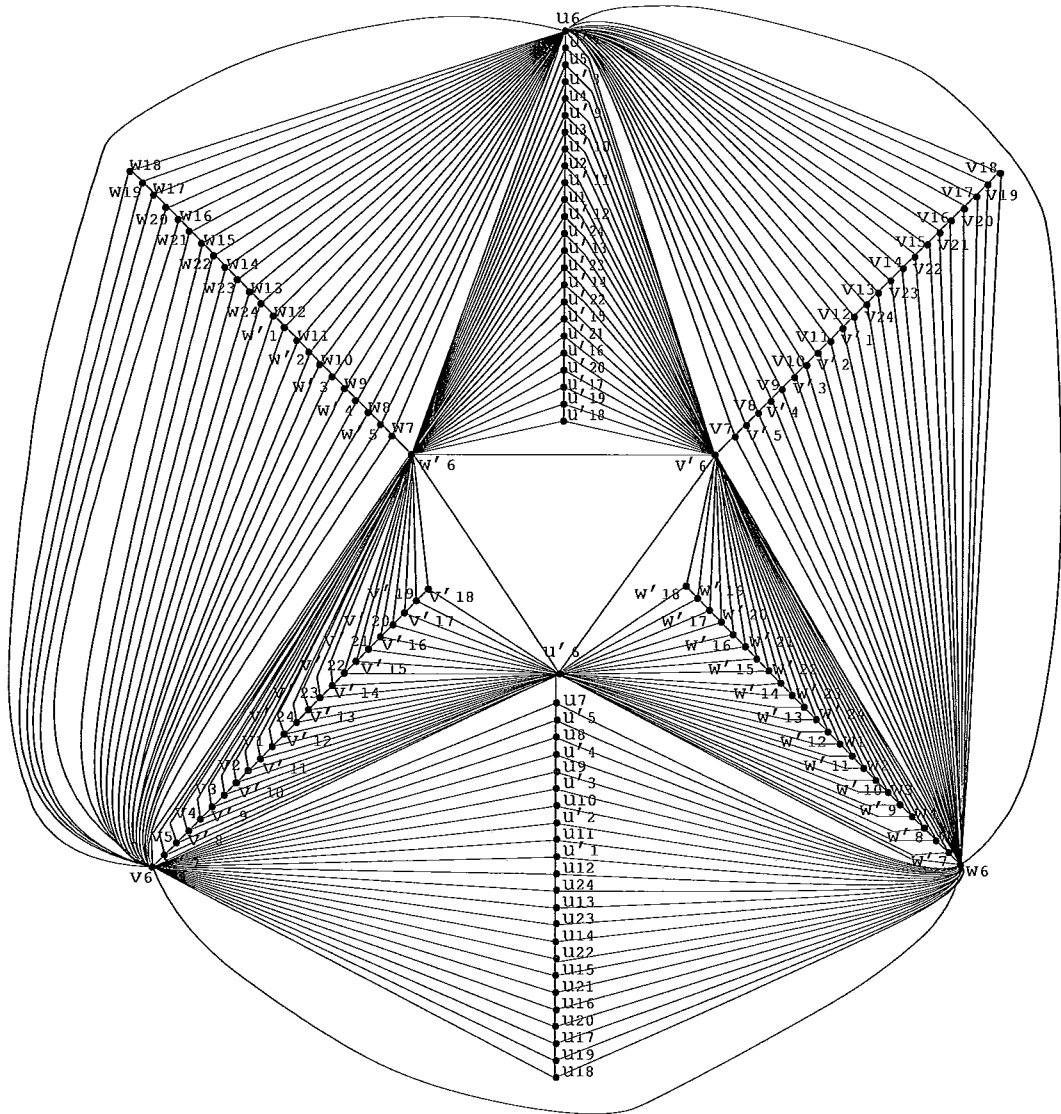


Figura A.10: Grafo G_6 - decomposição do K_{148}

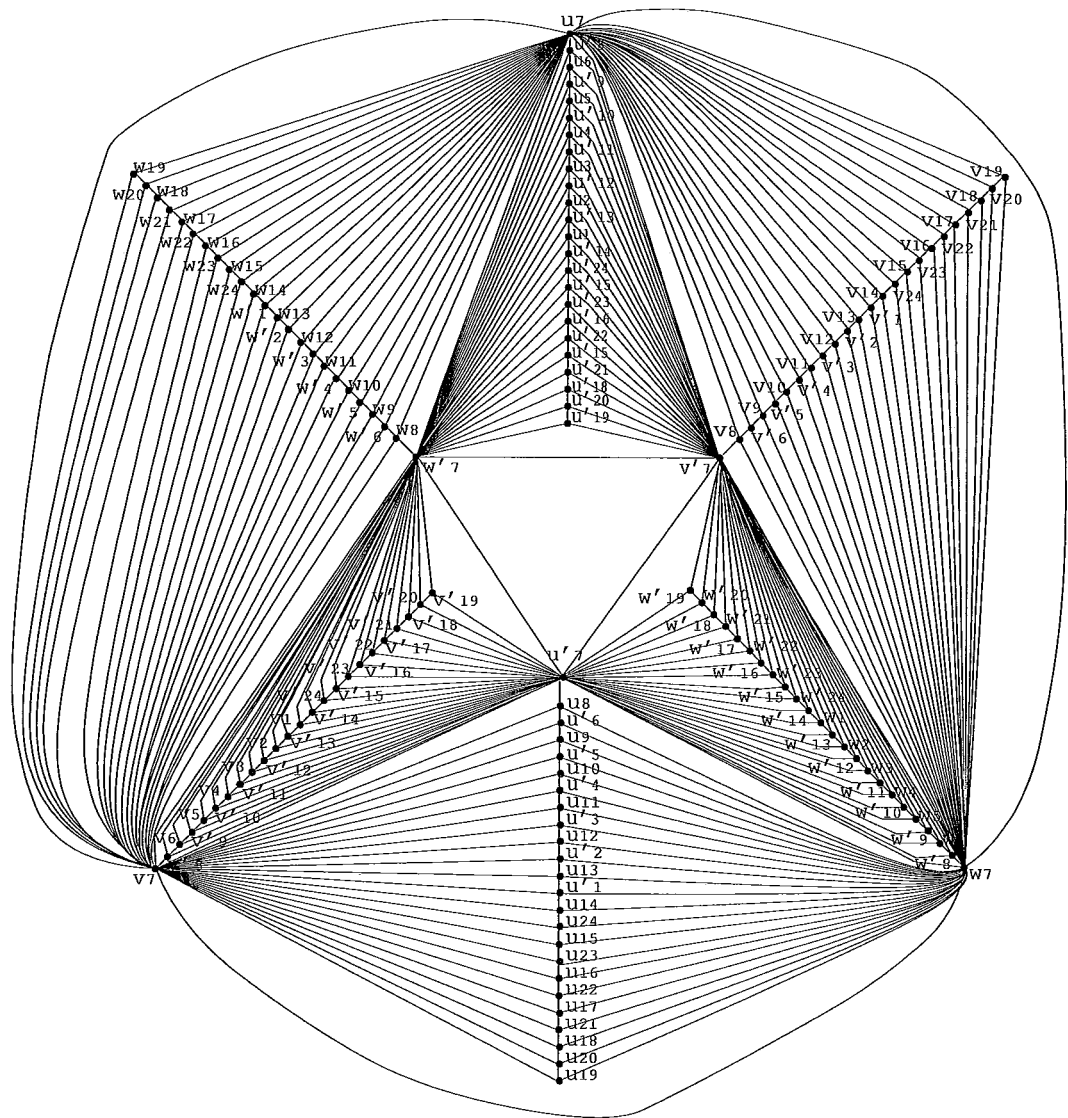


Figura A.11: Grafo G_7 - decomposição do K_{148}

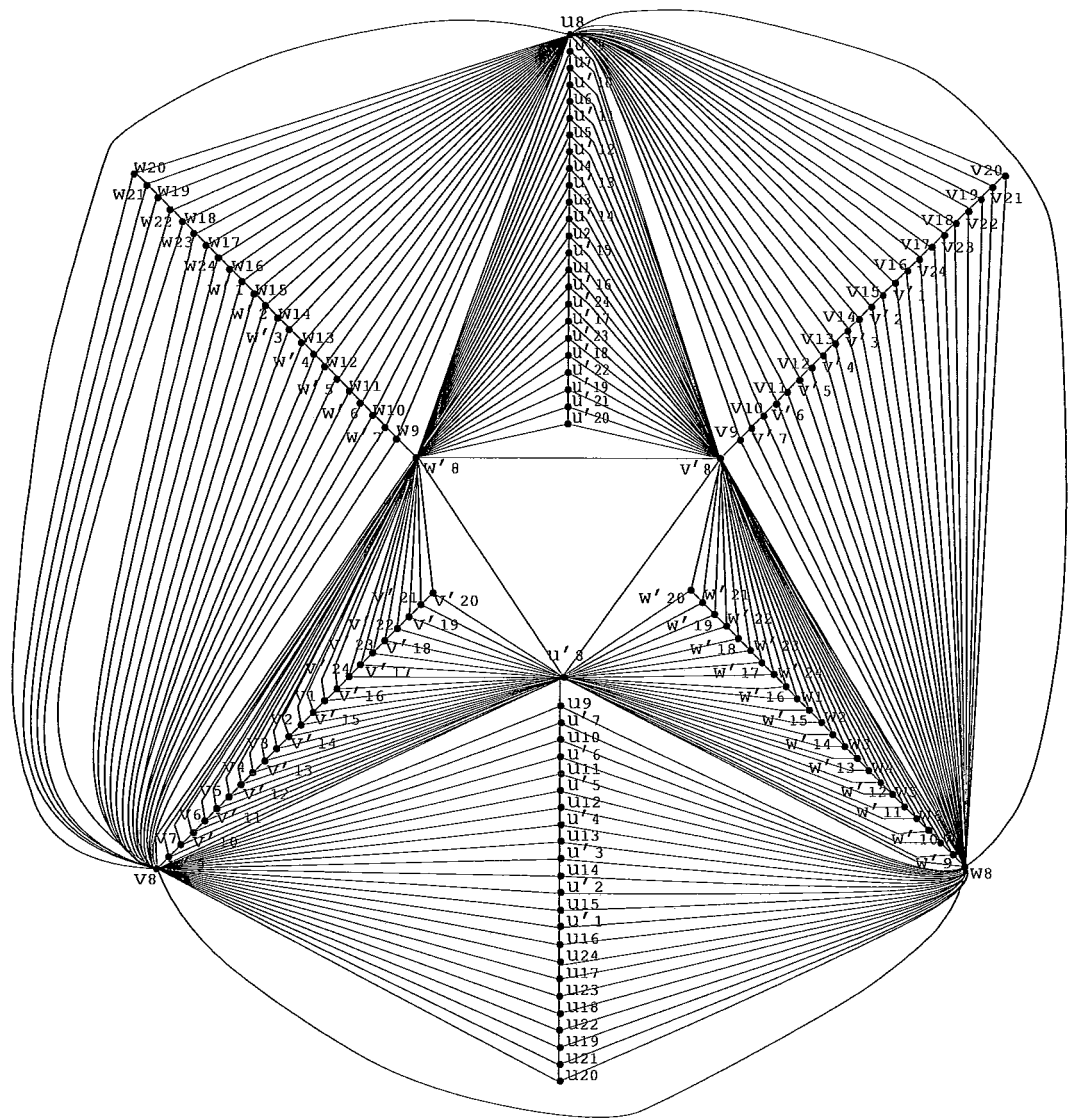


Figura A.12: Grafo G_8 - decomposição do K_{148}

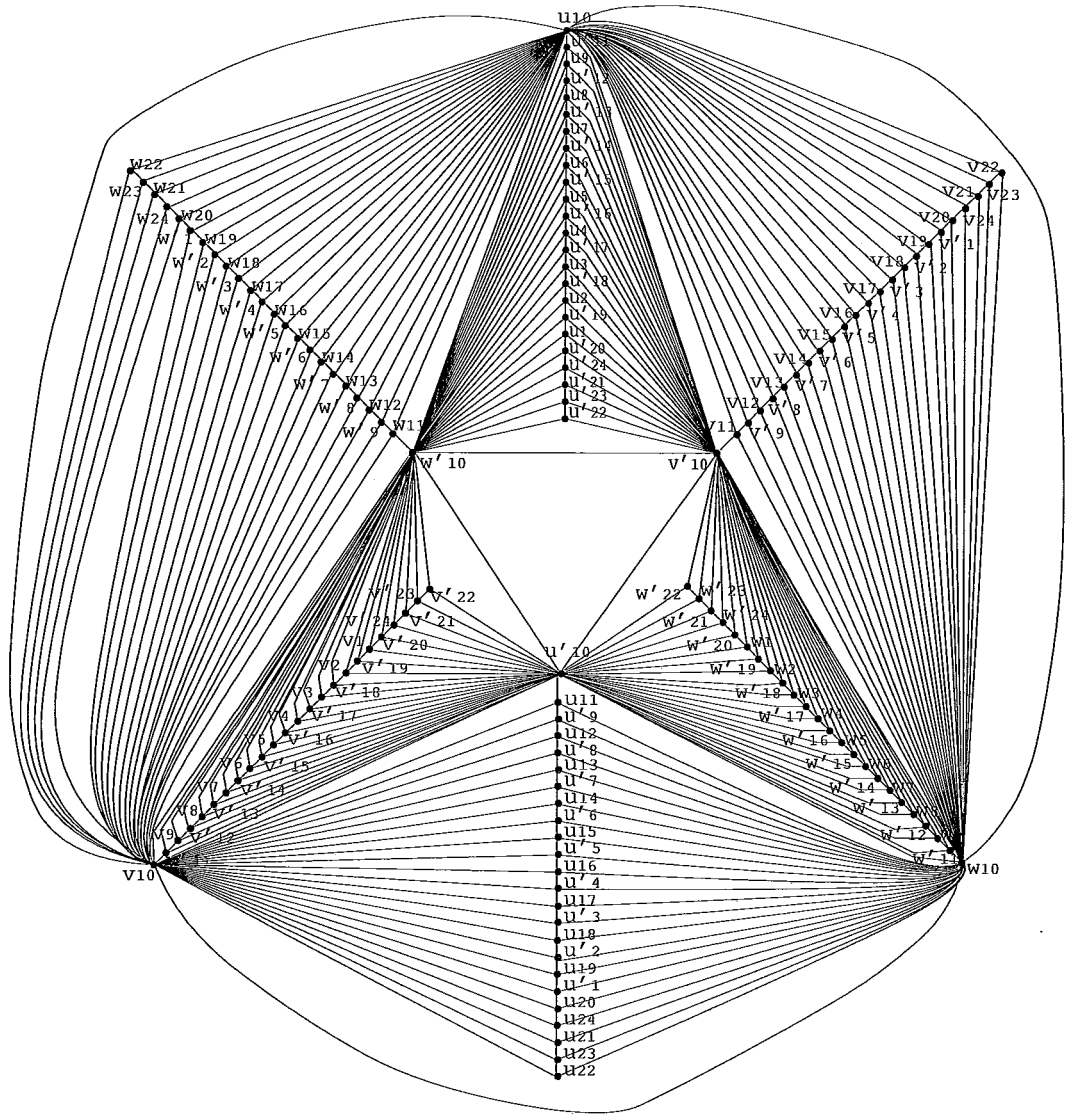


Figura A.14: Grafo G_{10} - decomposição do K_{148}

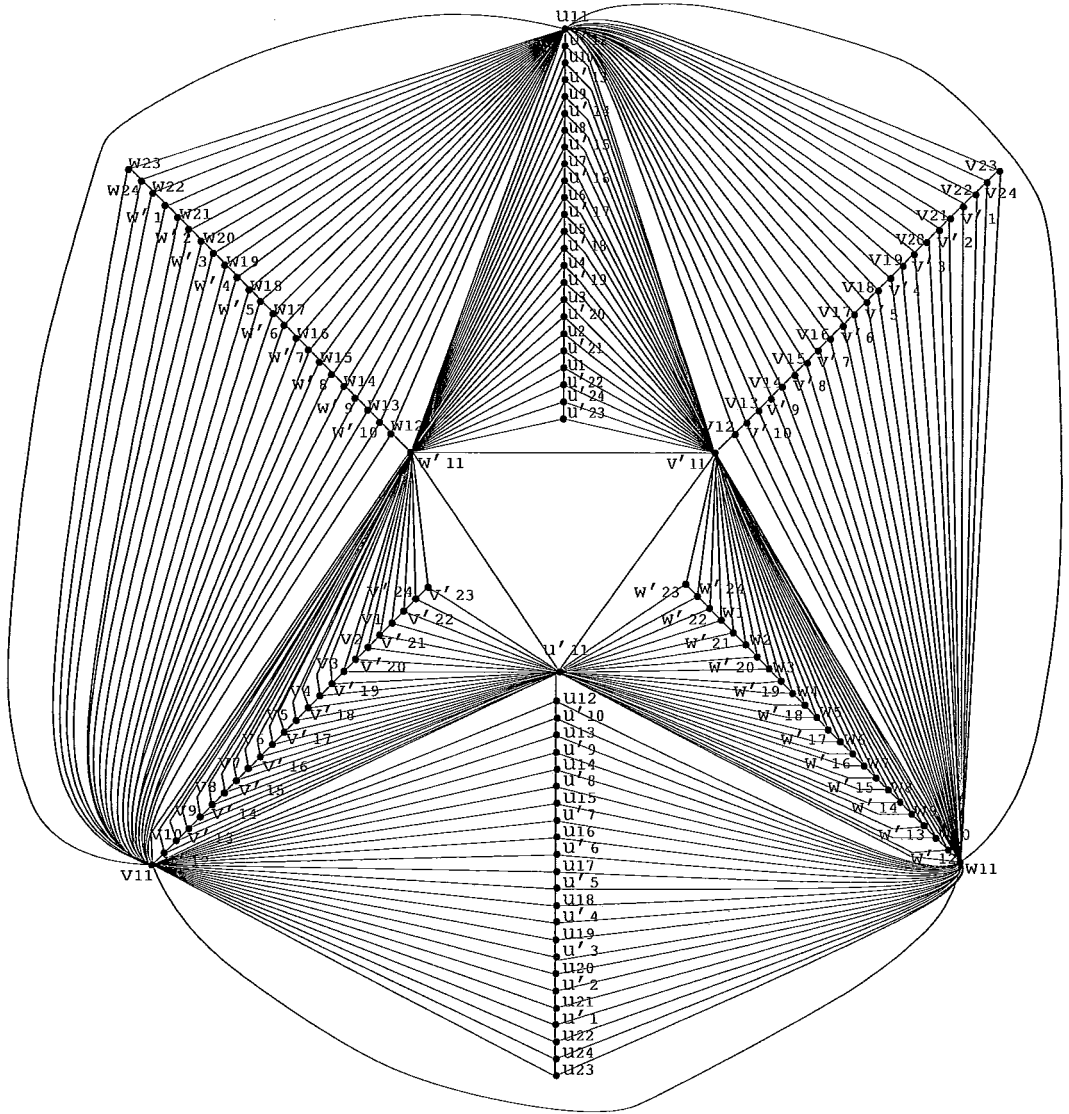


Figura A.15: Grafo G_{11} - decomposição do K_{148}

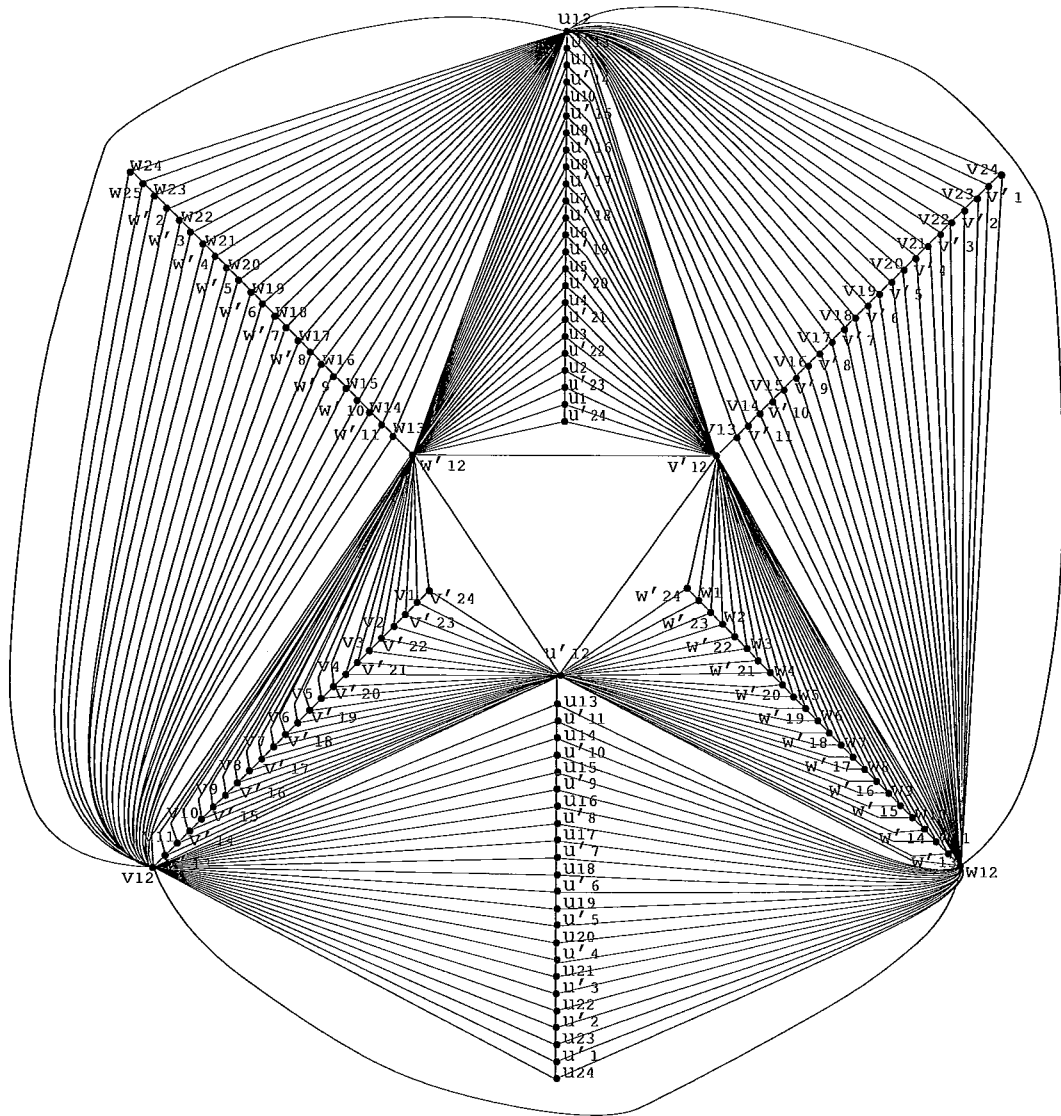


Figura A.16: Grafo G_{12} - decomposição do K_{148}

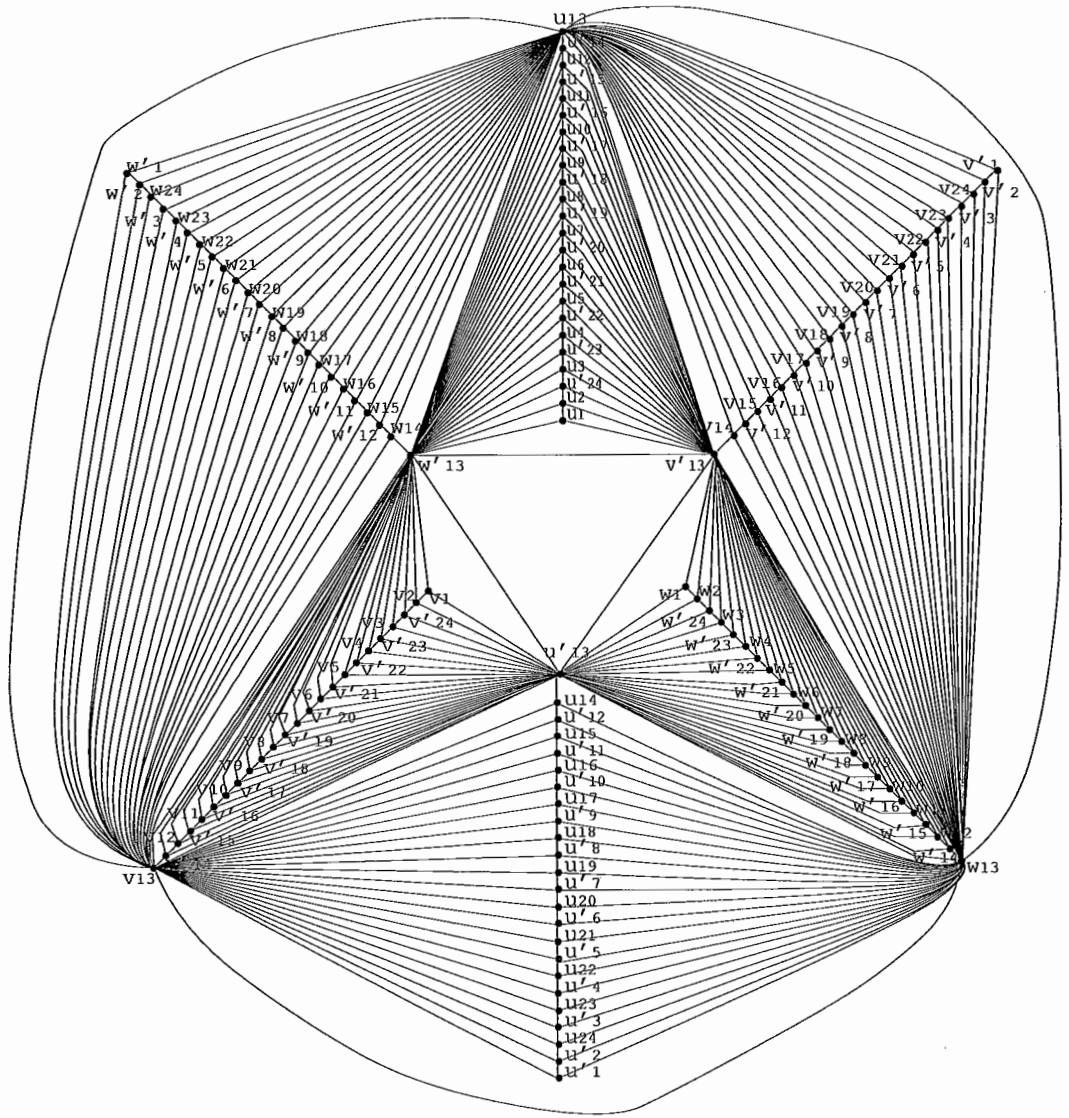


Figura A.17: Grafo G_{13} - decomposição do K_{148}

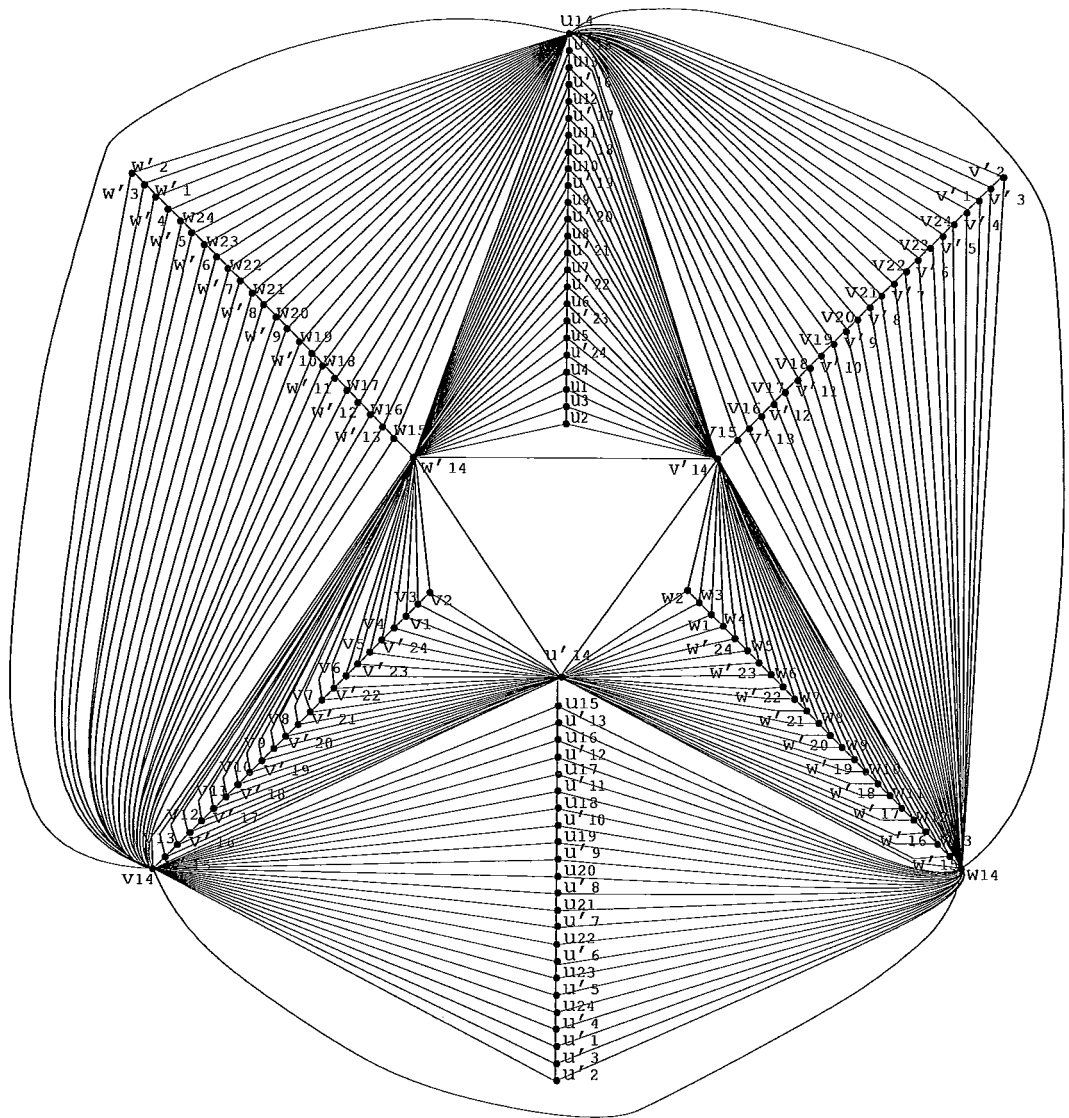


Figura A.18: Grafo G_{14} - decomposição do K_{148}

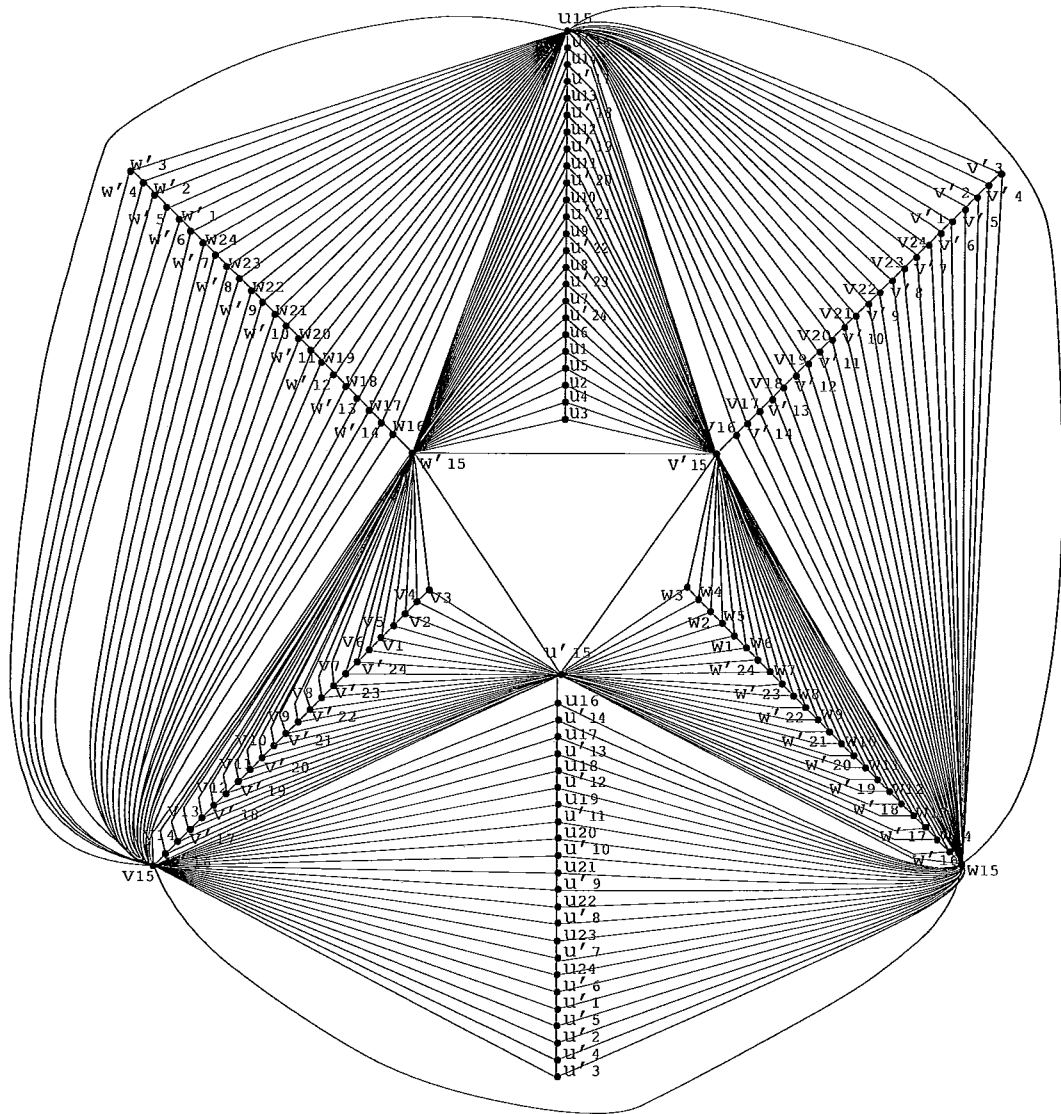


Figura A.19: Grafo G_{15} - decomposição do K_{148}

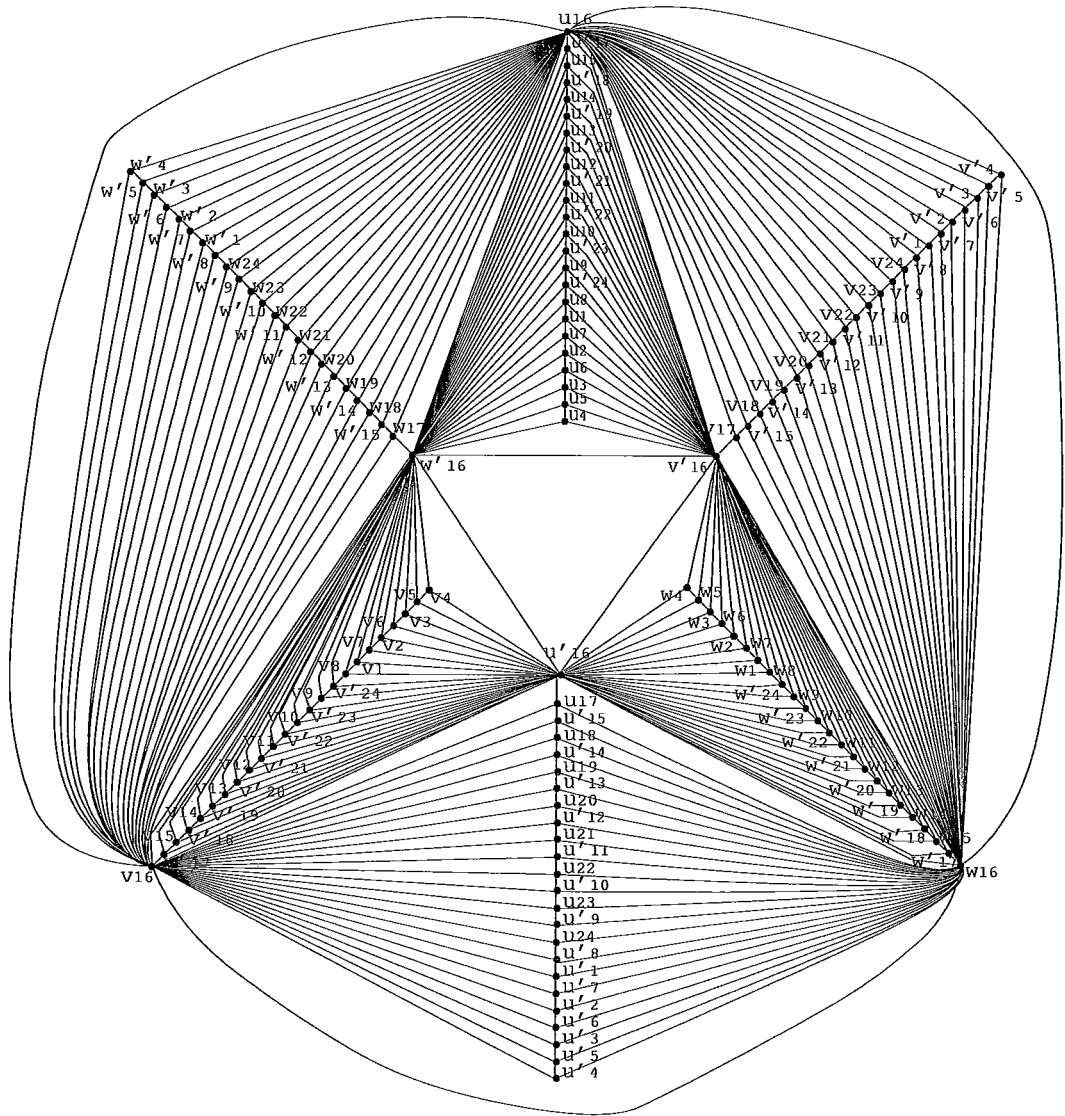


Figura A.20: Grafo G_{16} - decomposição do K_{148}

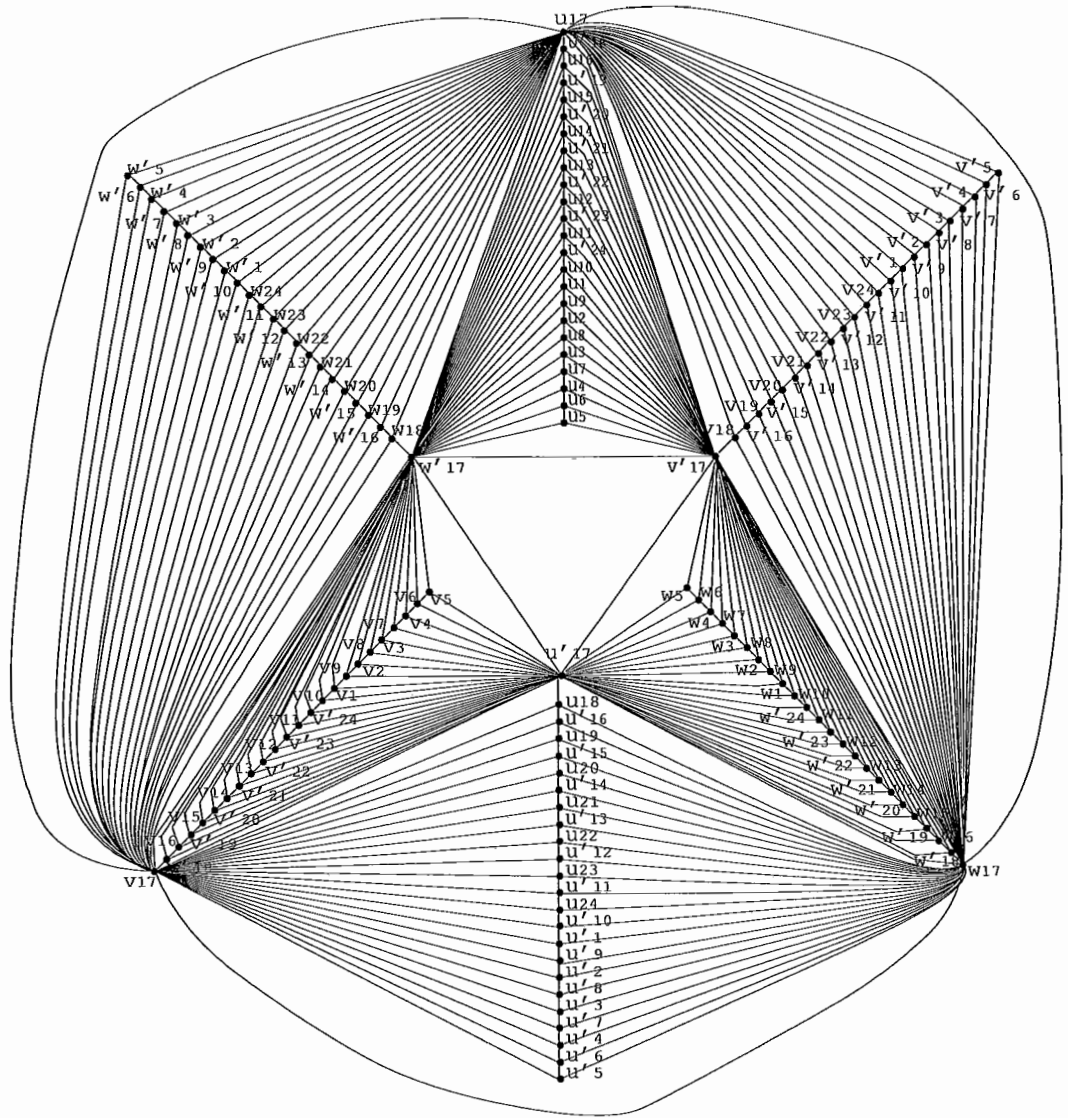


Figura A.21: Grafo G_{17} - decomposição do K_{148}

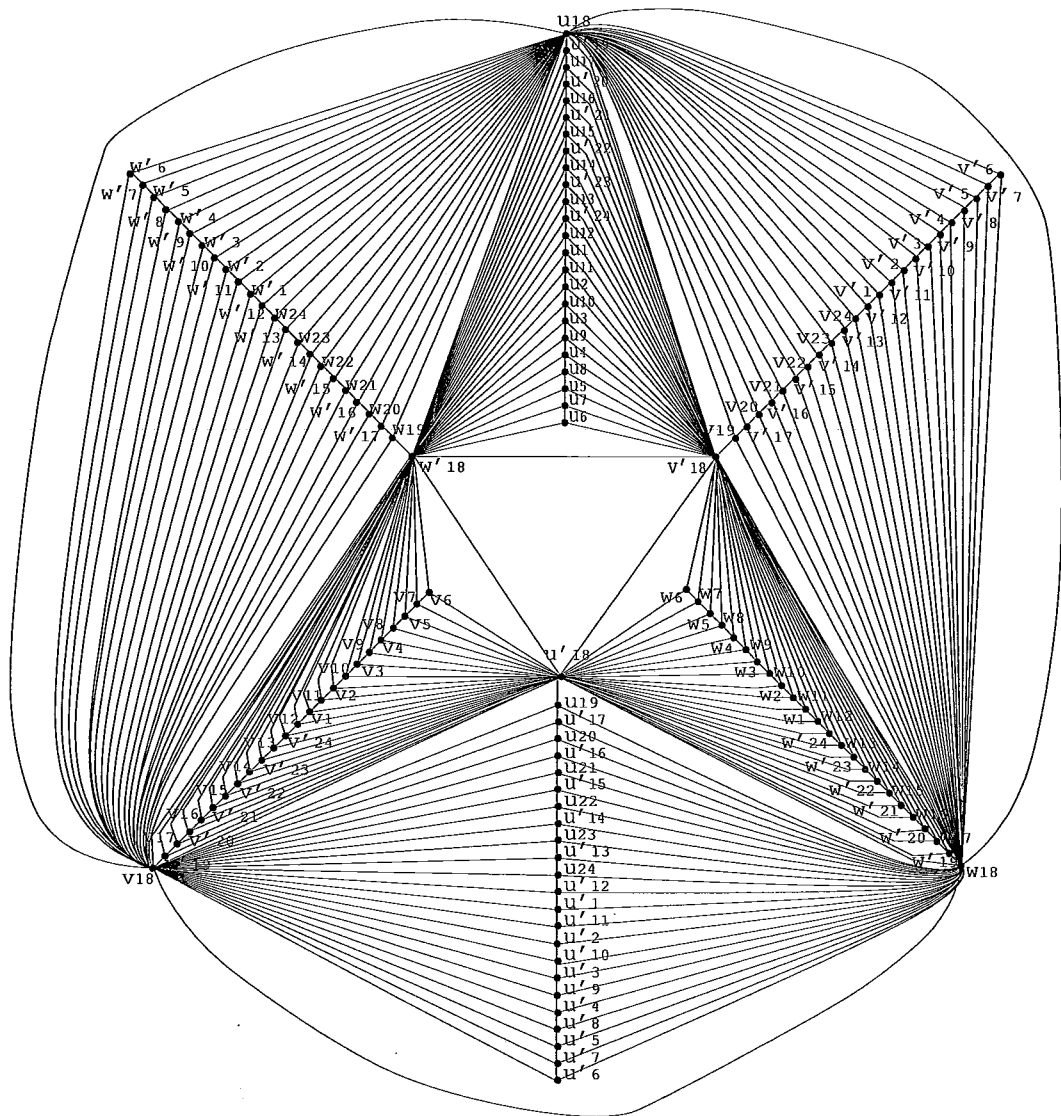


Figura A.22: Grafo G_{18} - decomposição do K_{148}

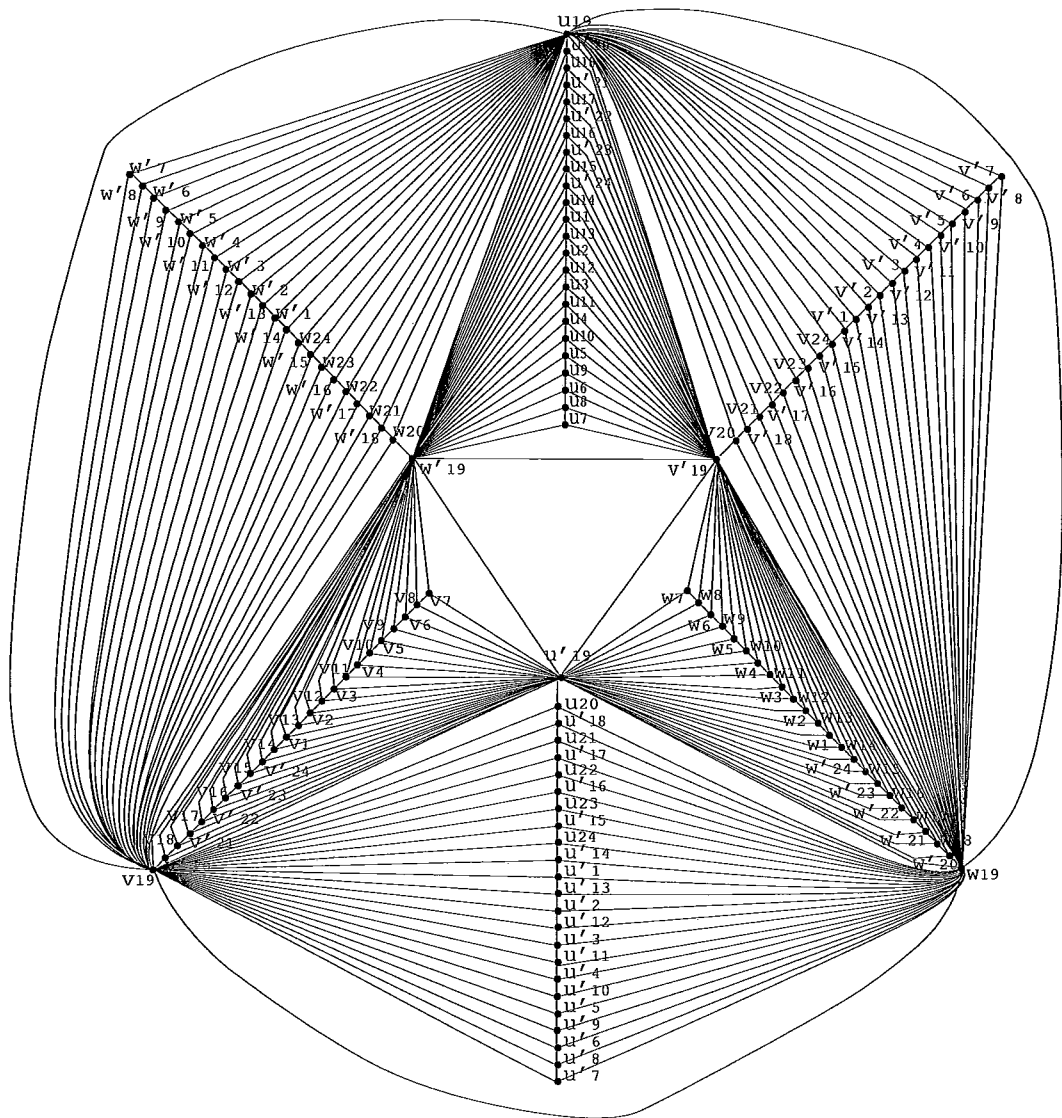


Figura A.23: Grafo G_{19} - decomposição do K_{148}

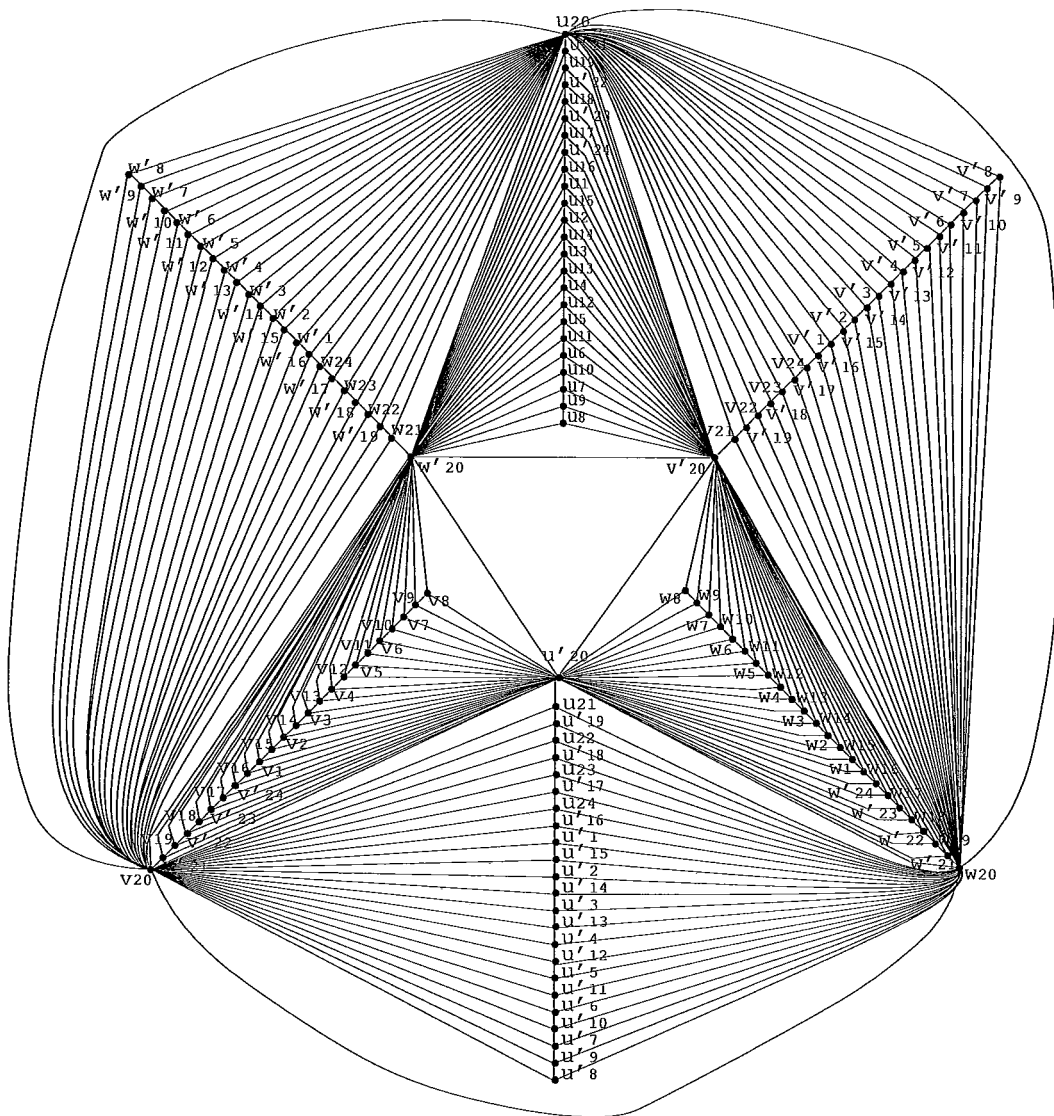


Figura A.24: Grafo G_{20} - decomposição do K_{148}

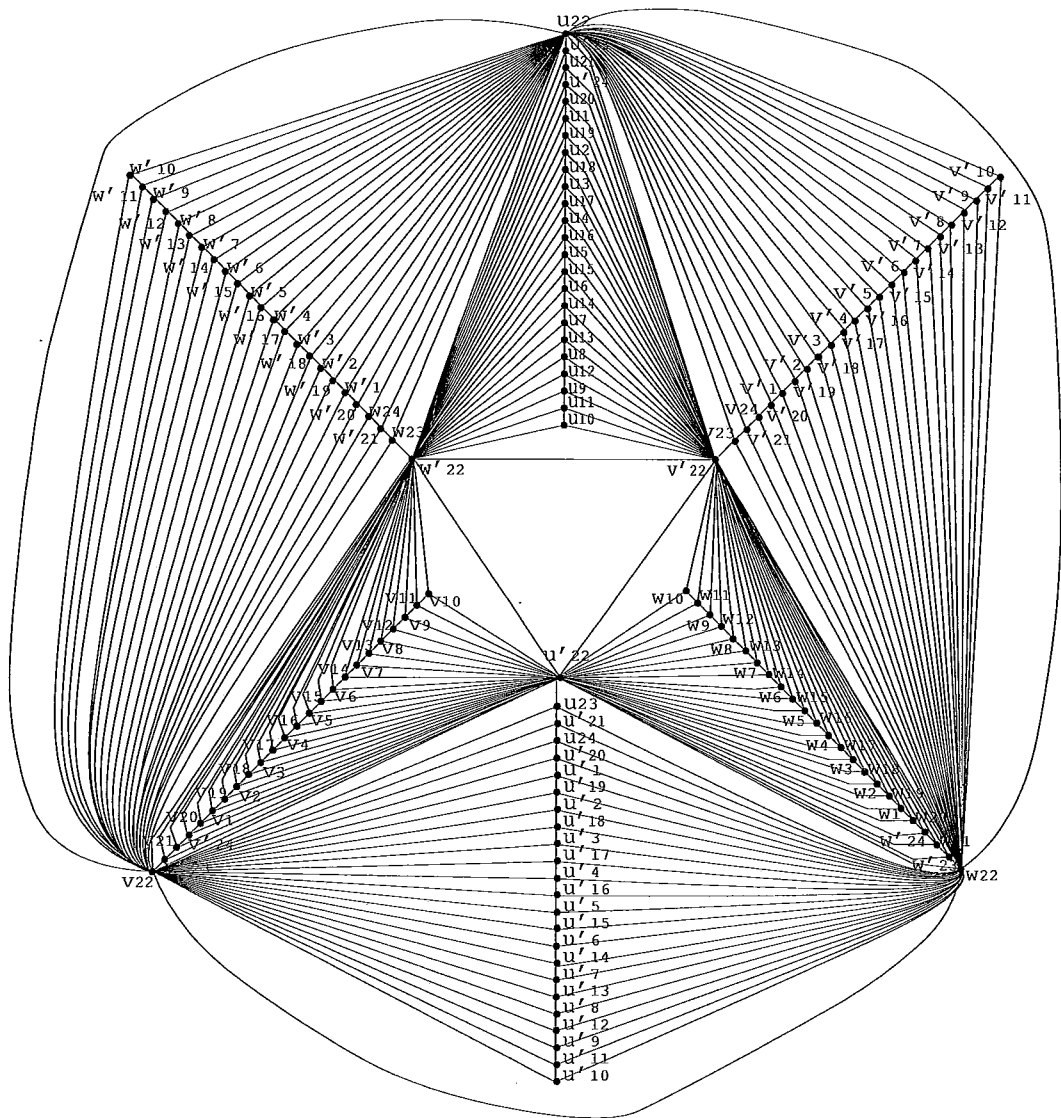


Figura A.26: Grafo G_{22} - decomposição do K_{148}

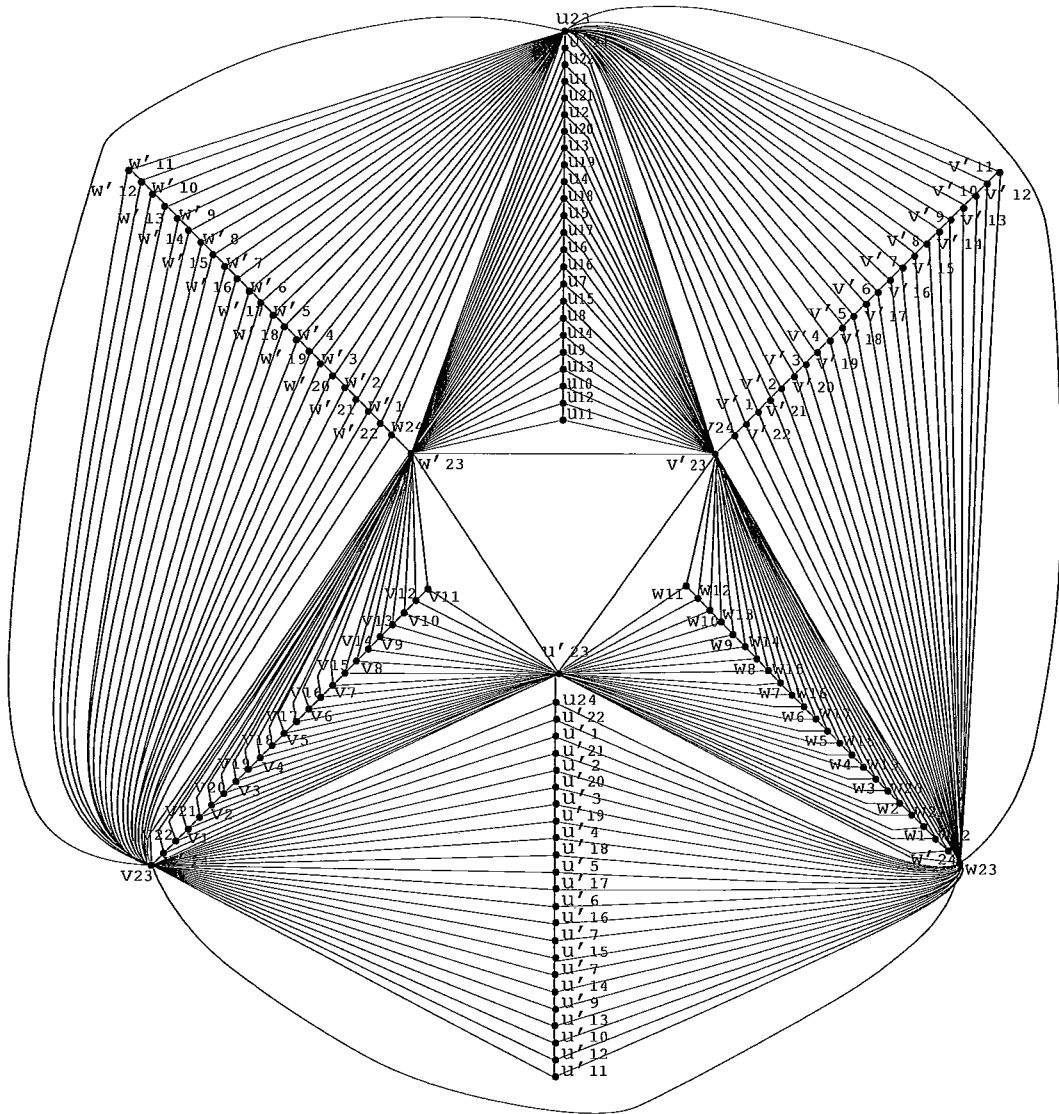


Figura A.27: Grafo G_{23} - decomposição do K_{148}

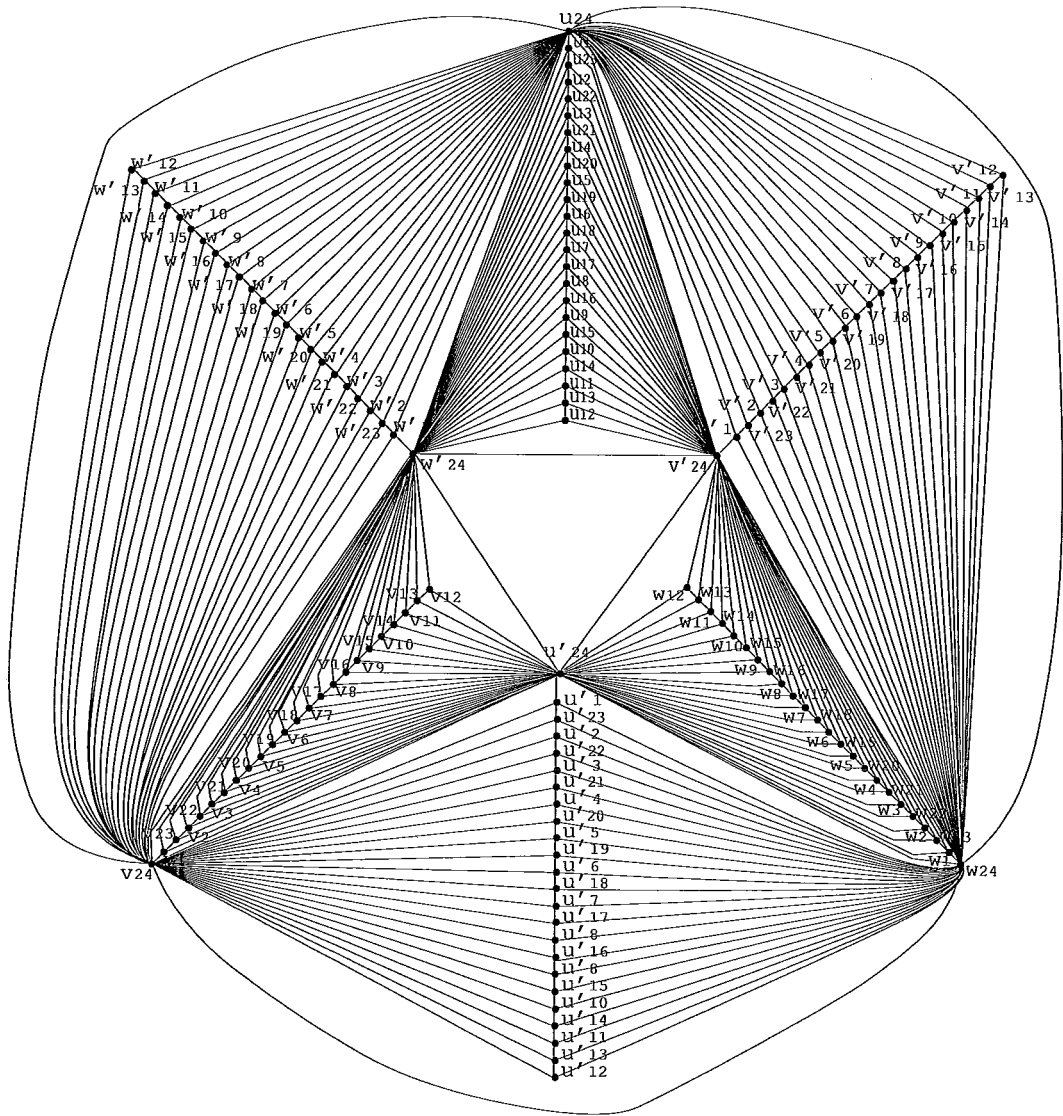


Figura A.28: Grafo G_{24} - decomposição do K_{148}

A.1.3 Grafos G_1, \dots, G_{24} , após a Modificação Fundamental

Na modificação fundamental, removemos as arestas que estão entre os $(p - 2)$ -ésimo e $(p - 1)$ -ésimo vértices, logo 22º e 23º vértice, dos desenhos C_1, C_2 e C_3 se x for inserido na região interna do grafo, ou C_4, C_5 e C_6 se x for colocado na região externa.

Para sabermos se o vértice x será inserido na região interna ou externa do grafo, vamos copiar as linhas 1, 22 e 23 da matriz A . Essas linhas correspondem às constantes $+11$ e -11 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
-11	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1

0	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
+11	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-11	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Vamos agora arrumar esta seqüência de tal forma que o elemento inferior da coluna precedente seja igual ao elemento superior da coluna subsequente, e depois marcar as linhas 1ª e 23ª, referente às constantes 0 e -11 , obedecendo às seguintes regras:

- a) O elemento inferior de cada par precedente e o elemento superior do par subsequente devem possuir, em conjunto, somente uma marcação;
- b) Cada par deve diferir do par correspondente em A' em exatamente 1 marcação;

c) A seqüência se inicia com o par correspondente à coluna p , onde o elemento p aparece não marcado.

0	24	13	2	15'	4'	17	6	19'	8'	21	10	23'
+11	11	24	13	2	15	4	17	6	19	8	21	10
-11	13'	2'	15	4	17'	6'	19	8	21'	10'	23	12

0	12'	1'	14	3	16'	5'	18	7	20'	9'	22	11
+11	23	12	1	14	3	16	5	18	7	20	9	22
-11	1	14'	3'	16	5	18'	7'	20	9	22'	11'	24

Vamos marcar agora a 22^a linha, tomando por base a linha 23 já marcada e obedecendo a seguinte regra:

a) Cada par de elementos deve receber marcação igual a do par correspondente em A' , ou marcação oposta a esta.

0	24	13	2	15'	4'	17	6	19'	8'	21	10	23'
+11	11'	24	13	2	15'	4'	17	6	19'	8'	21	10
-11	13'	2'	15	4	17'	6'	19	8	21'	10'	23	12

0	12'	1'	14	3	16'	5'	18	7	20'	9'	22	11
+11	23'	12'	1'	14	3	16'	5'	18	7	20'	9'	22
-11	1	14'	3'	16	5	18'	7'	20	9	22'	11'	24

A modificação fundamental deve ser efetuada nos desenhos C_4 , C_5 e C_6 , onde x é colocado na região externa do grafo, caso na seqüência acima o índice referente à 1^a linha aparecer não marcado, ou nos desenhos C_1 , C_2 e C_3 , onde

x é colocado na região interna, caso o elemento da 1ª linha aparecer marcado. Nós não realizamos a modificação fundamental no grafo $G_{\frac{p}{2}-1}$, porém só colocamos o vértice x na região externa e conectamos ele aos vértices u_{11} , v_{11} e w_{11} .

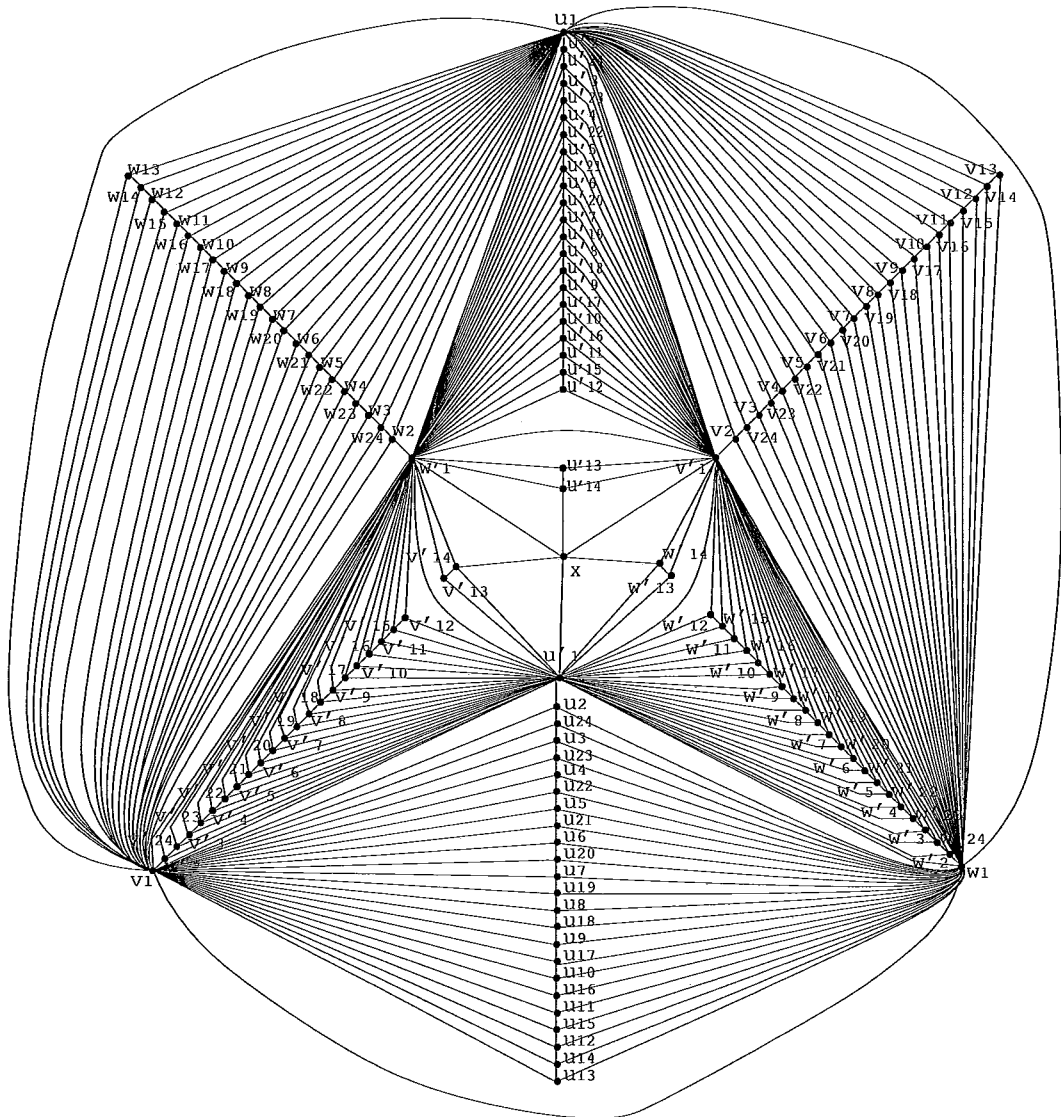


Figura A.29: Grafo G_1 modificado - decomposição do K_{148}

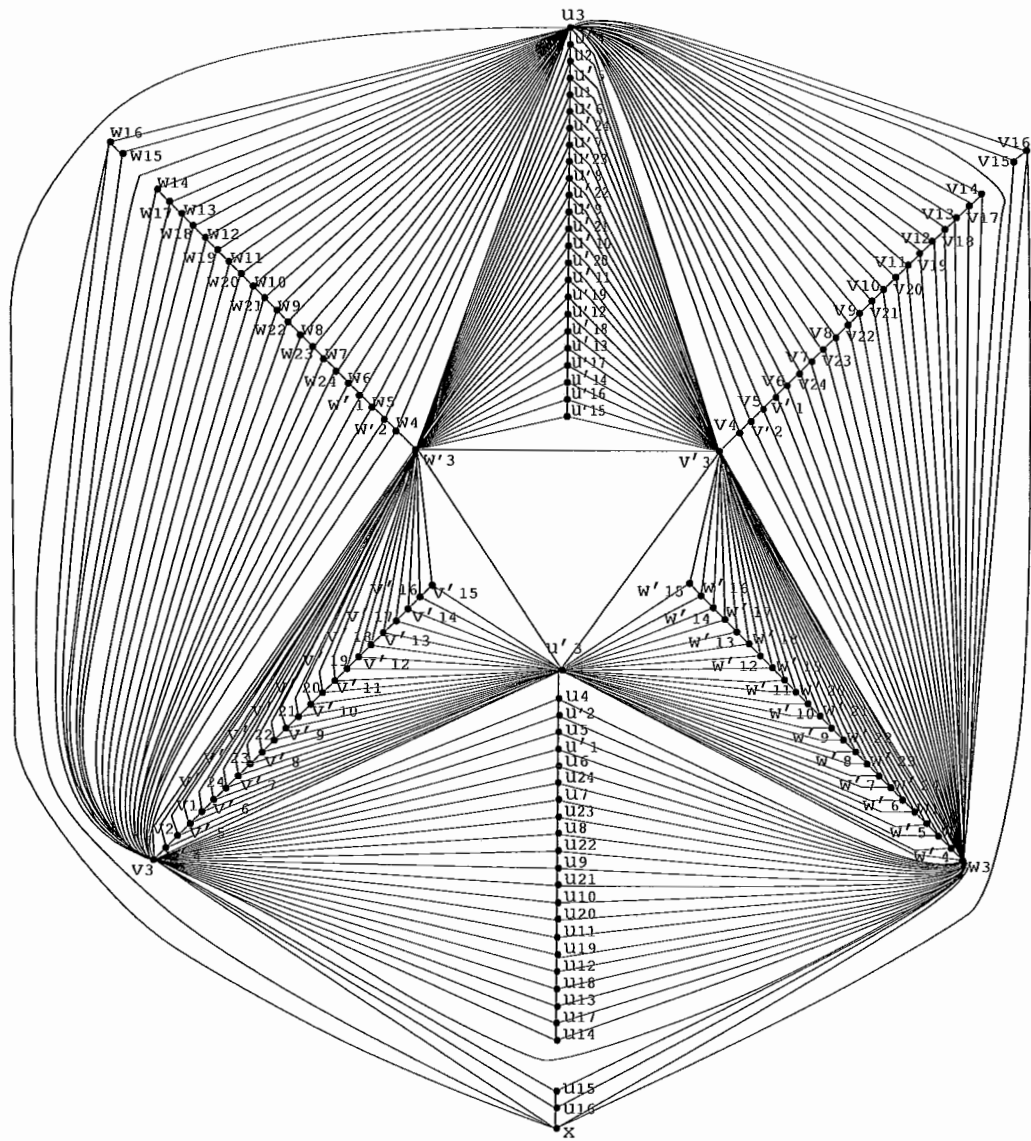


Figura A.31: Grafo G_3 modificado - decomposição do K_{148}

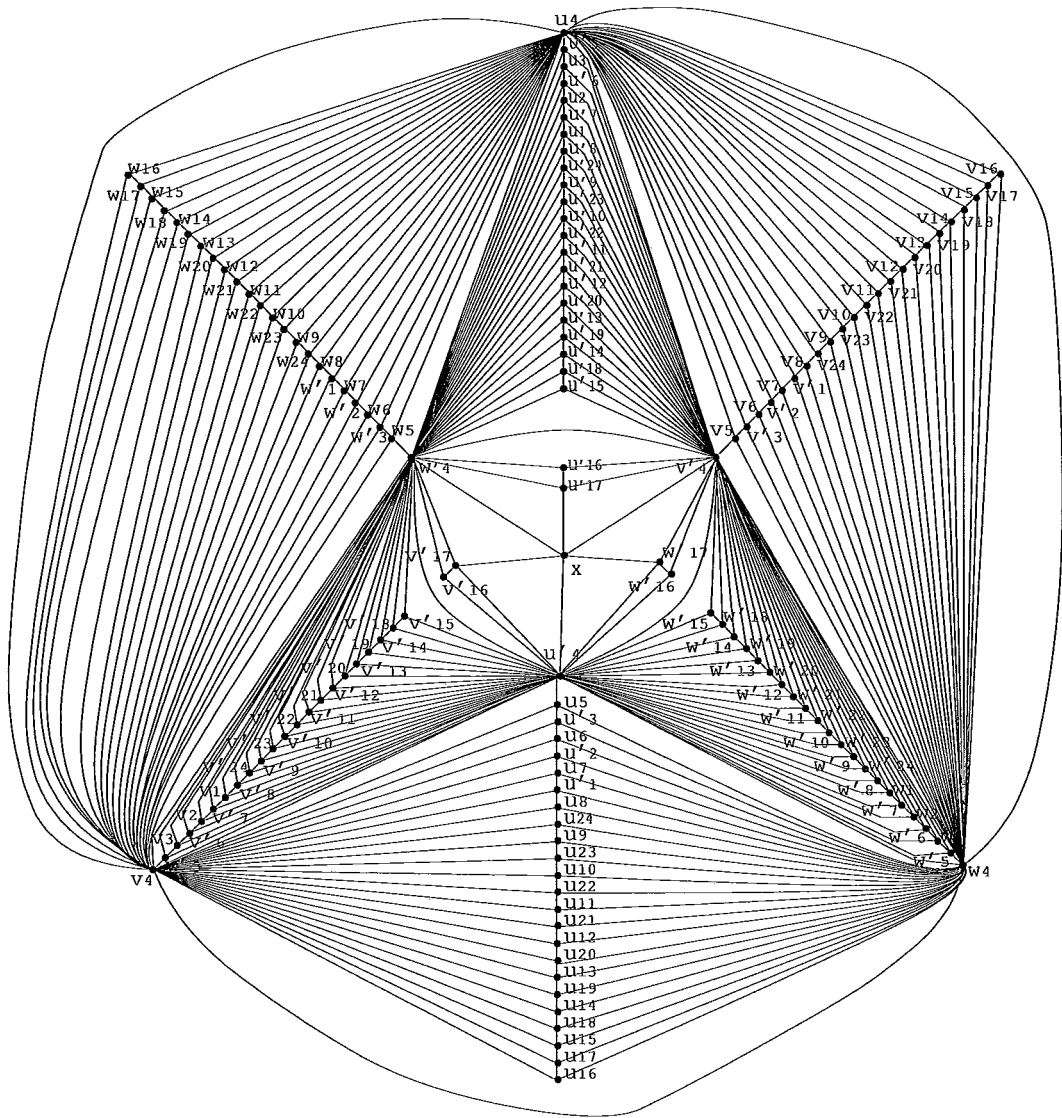


Figura A.32: Grafo G_4 modificado - decomposição do K_{148}

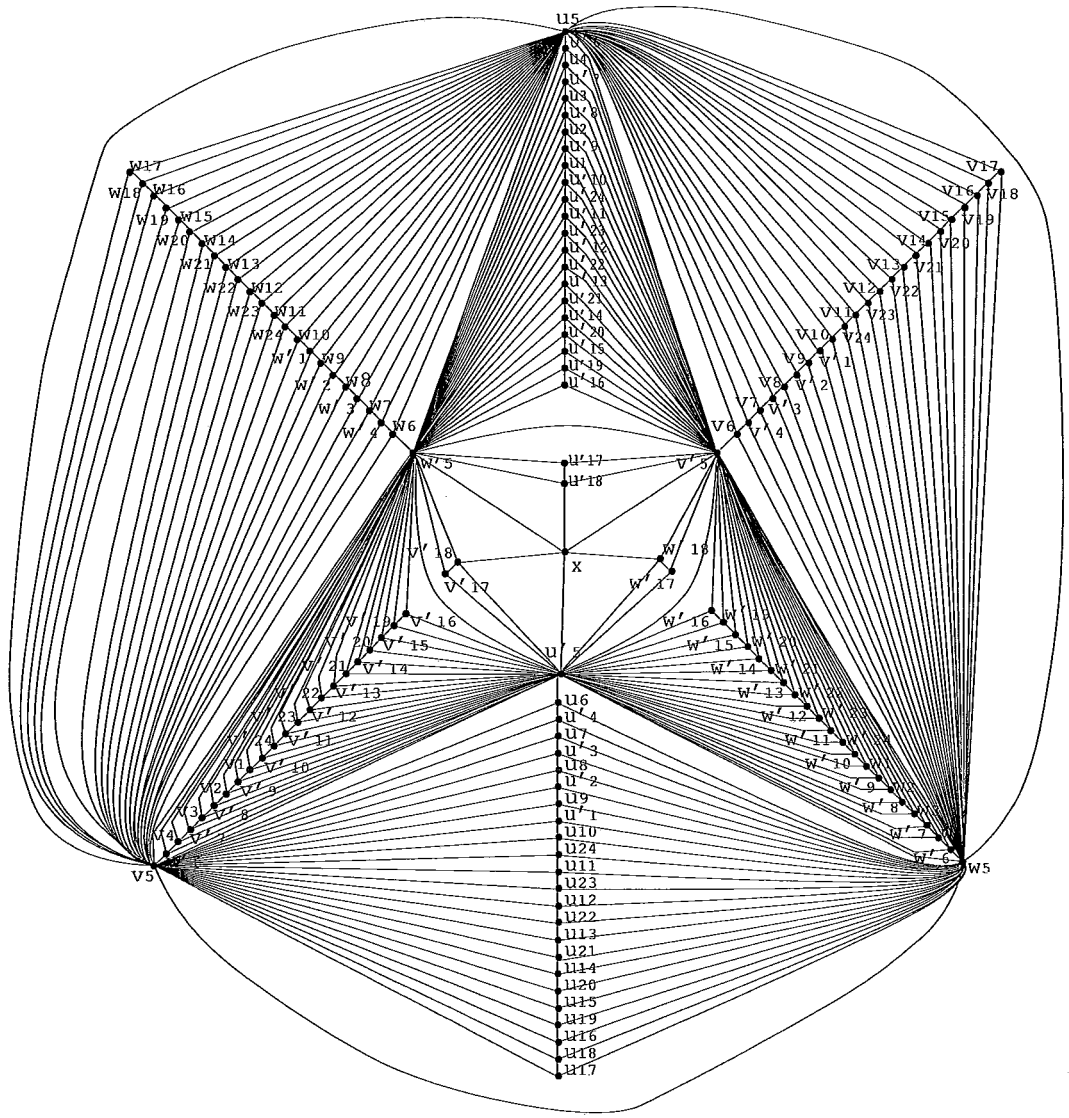


Figura A.33: Grafo G_5 modificado - decomposição do K_{148}

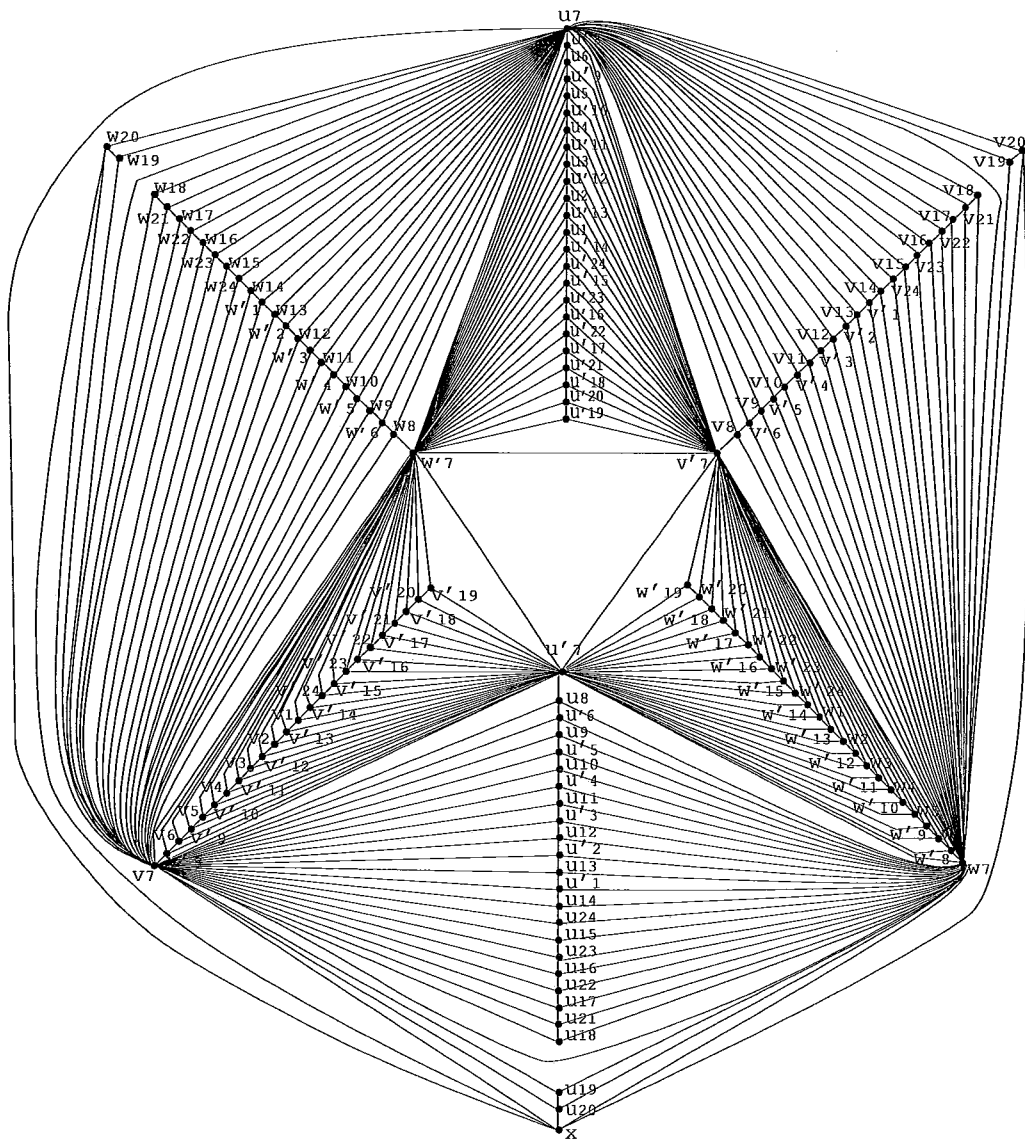


Figura A.35: Grafo G_7 modificado - decomposição do K_{148}

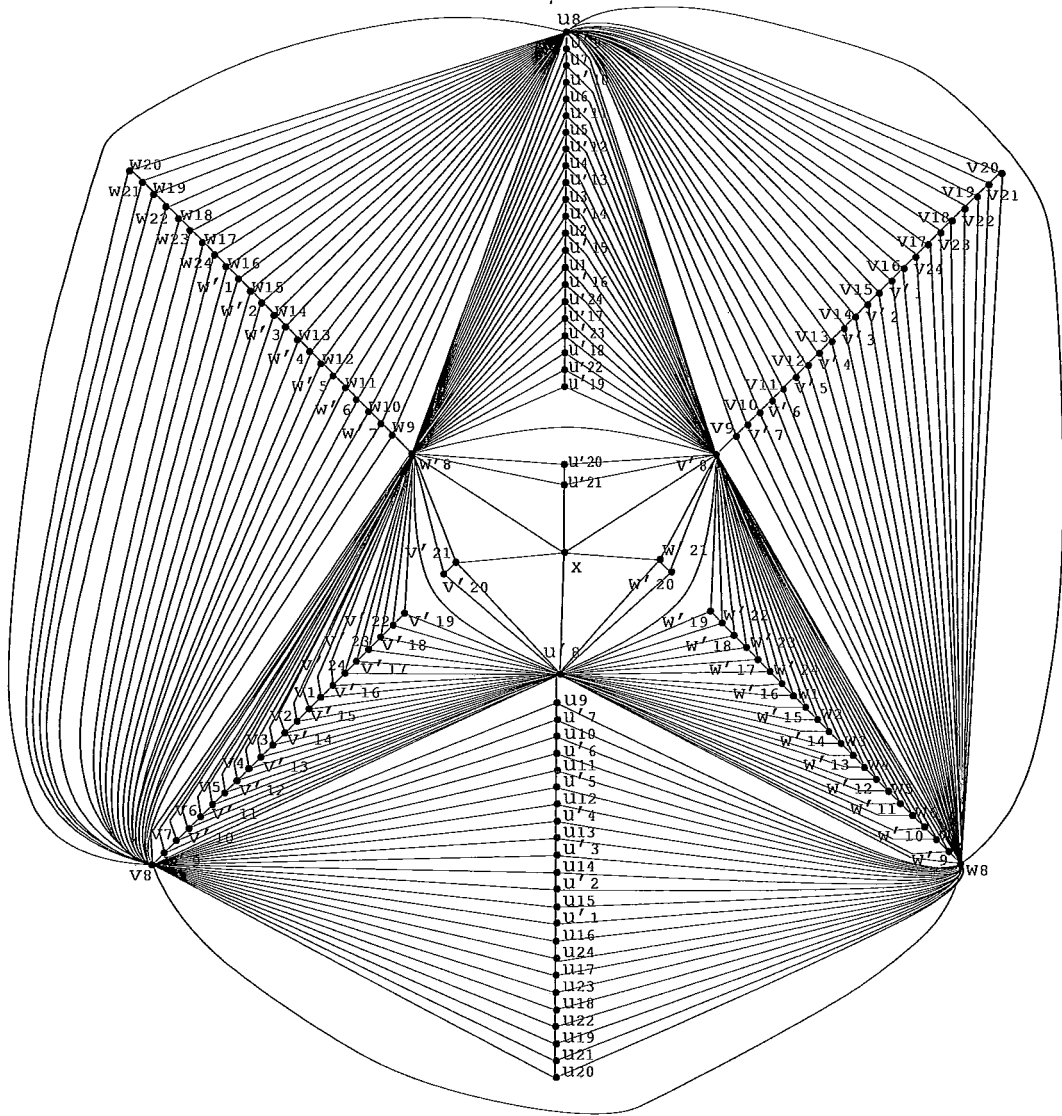


Figura A.36: Grafo G_8 modificado - decomposição do K_{148}

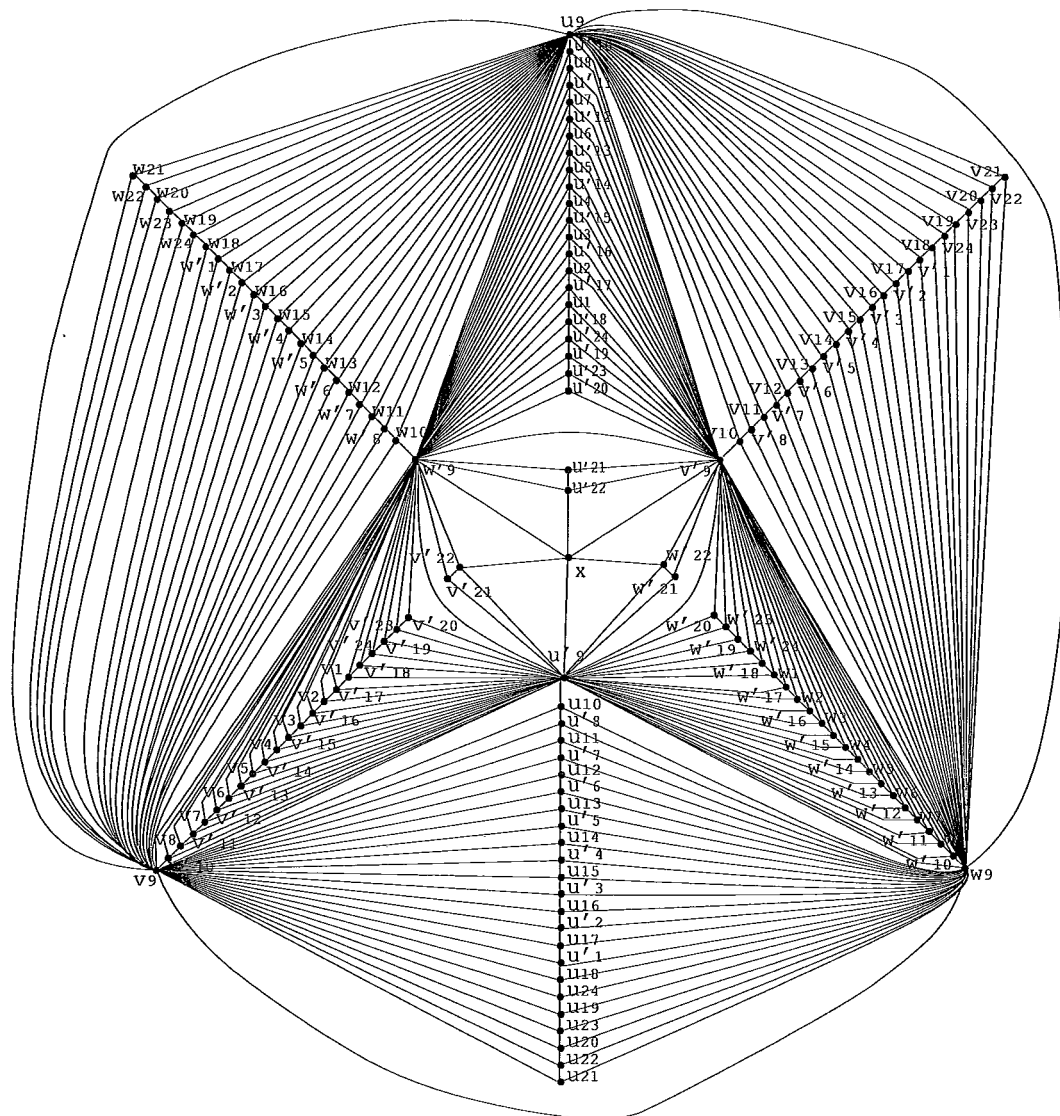


Figura A.37: Grafo G_9 modificado - decomposição do K_{148}

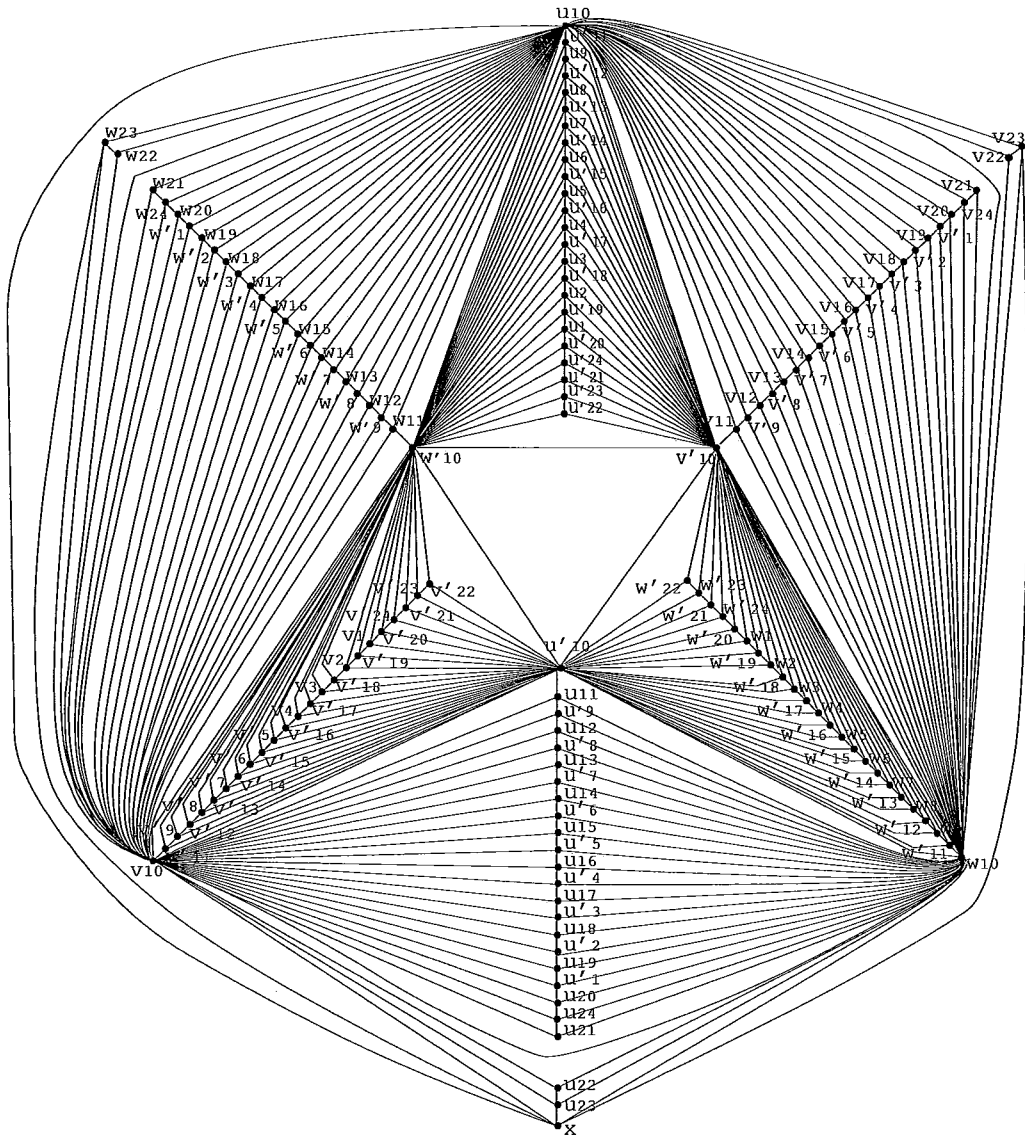


Figura A.38: Grafo G_{10} modificado - decomposição do K_{148}

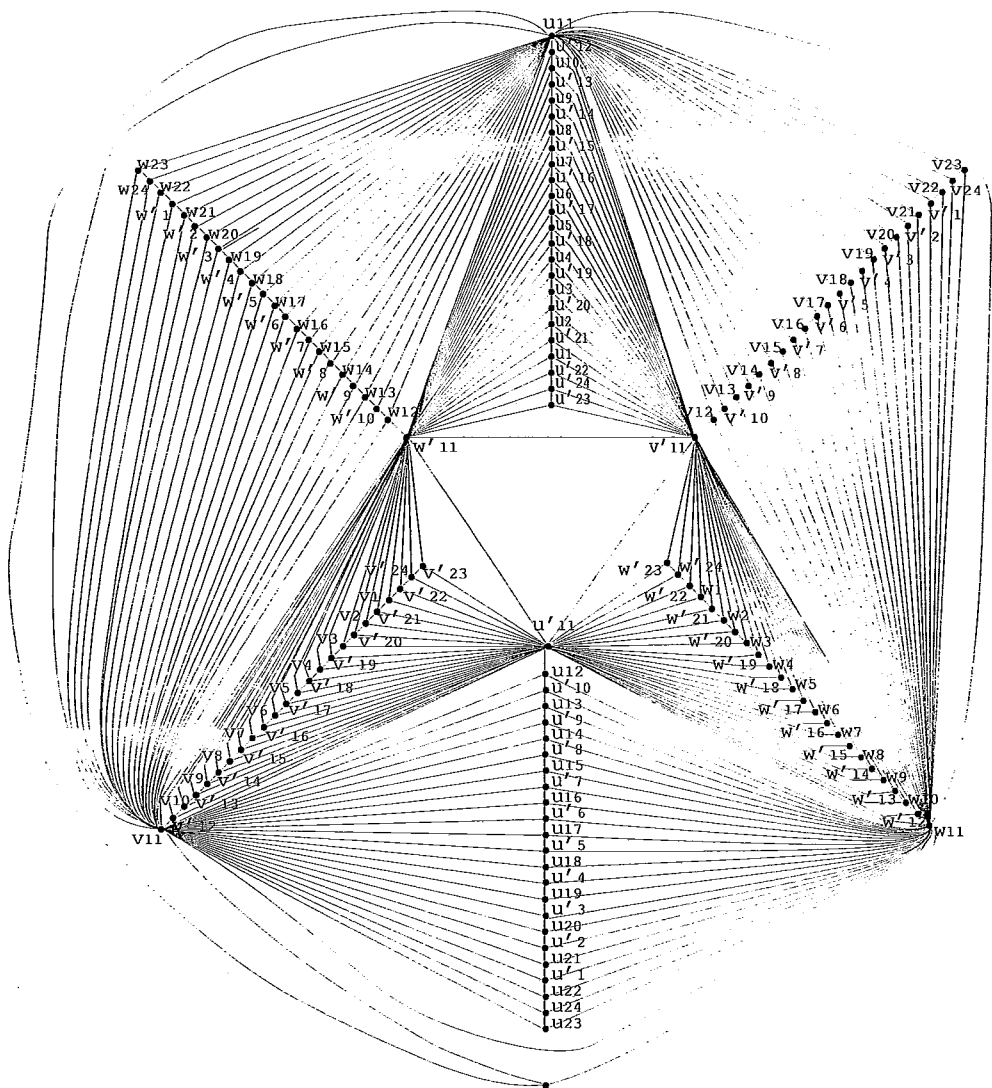


Figura A.39: Grafo G_{11} modificado - decomposição do K_{148}

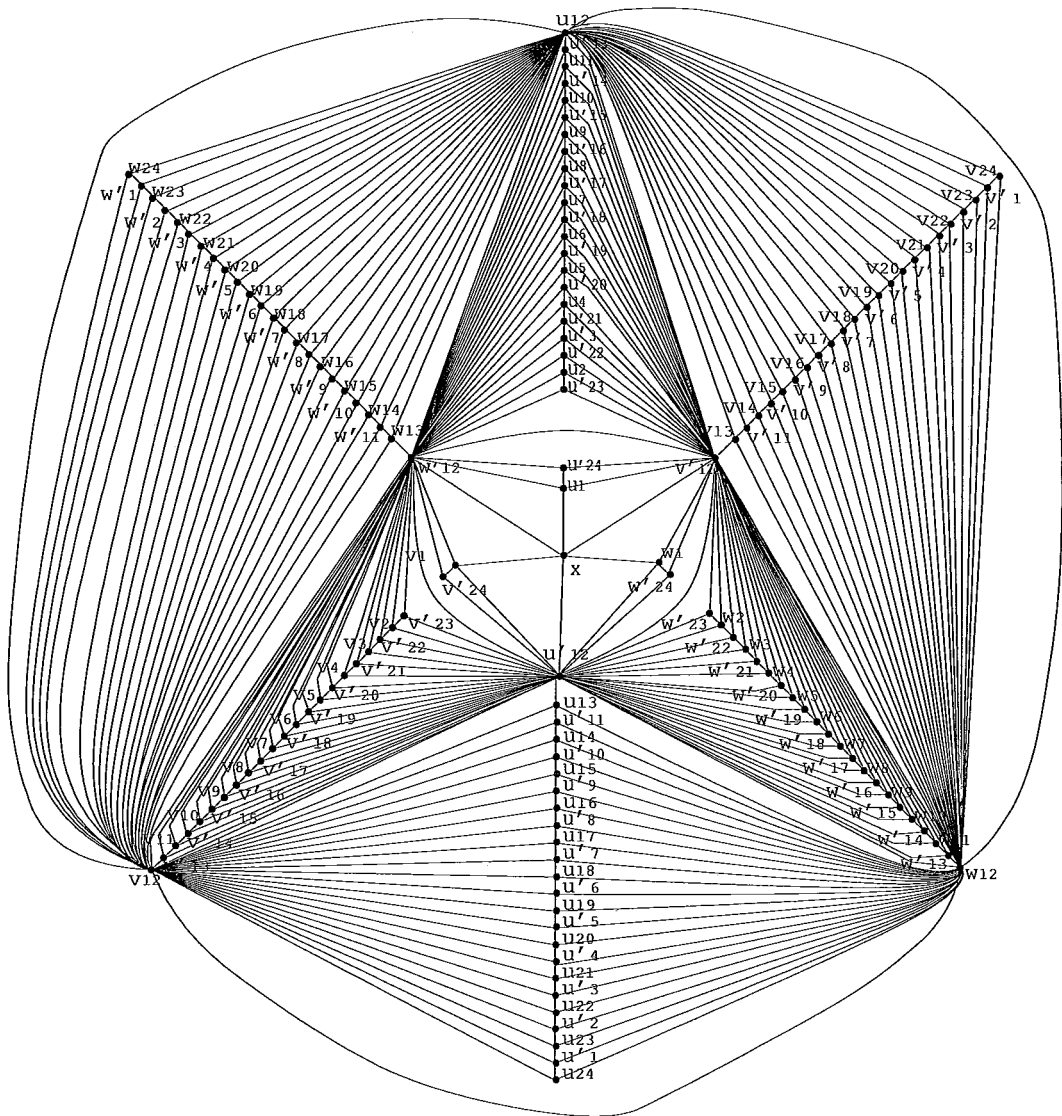


Figura A.40: Grafo G_{12} modificado - decomposição do K_{148}

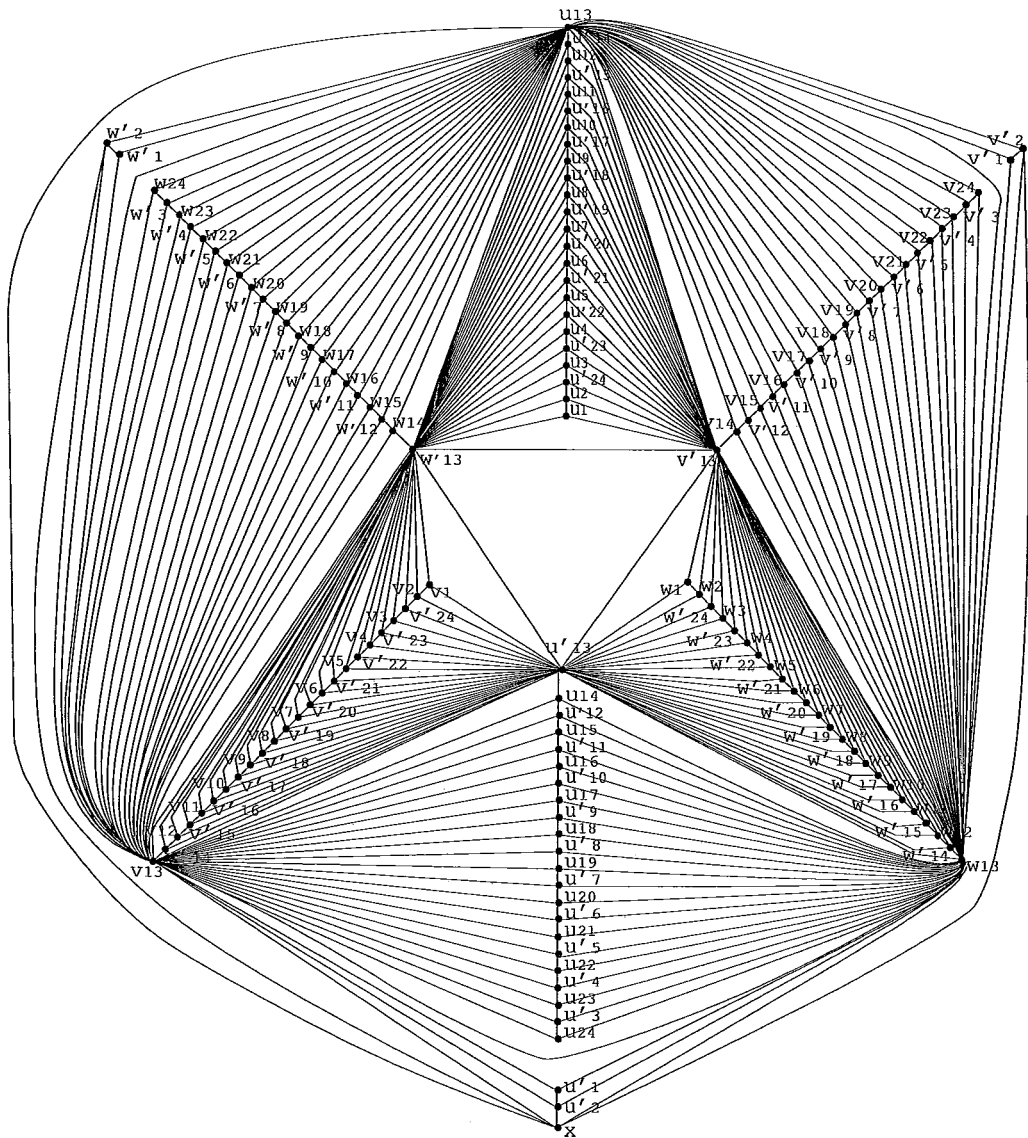


Figura A.41: Grafo G_{13} modificado - decomposição do K_{148}

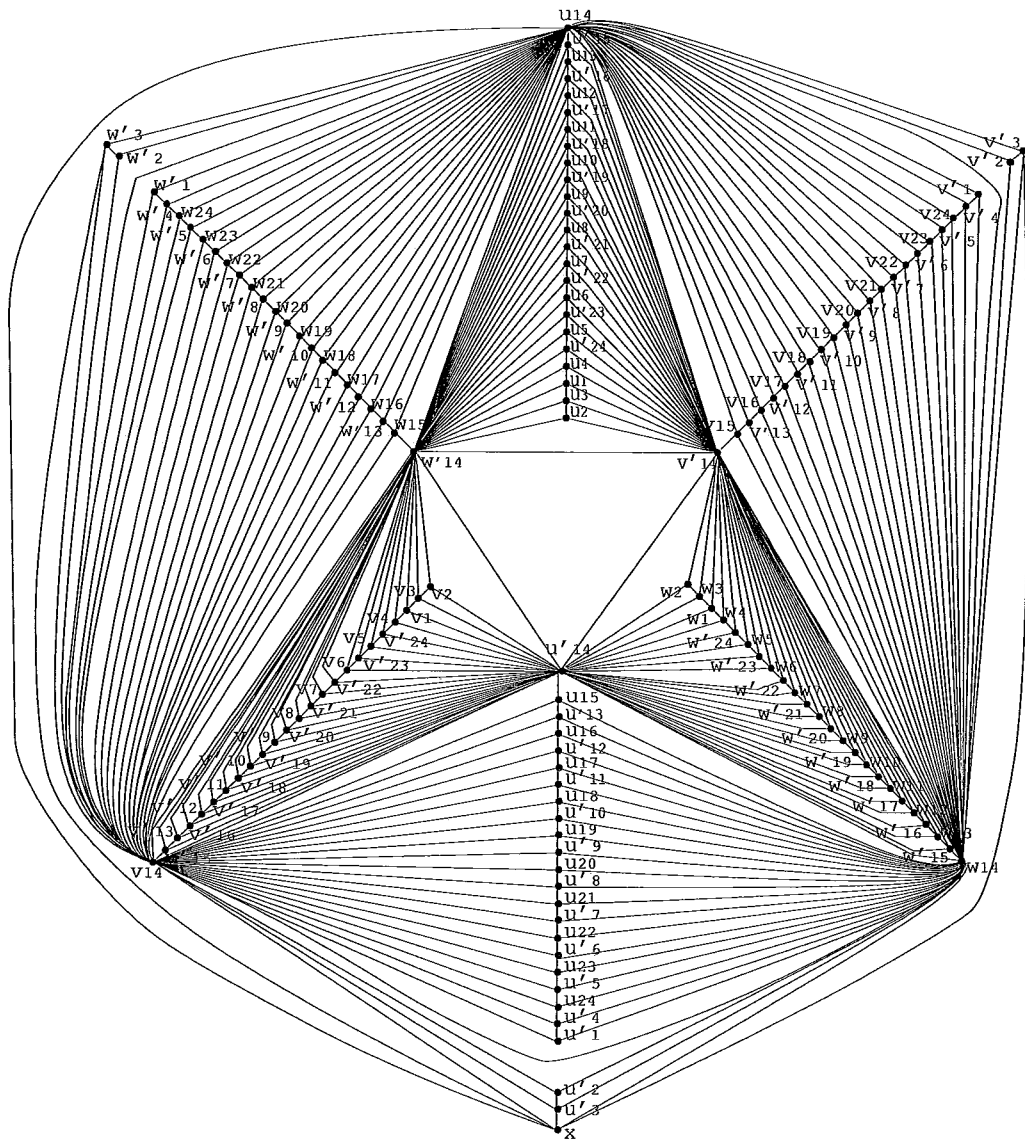


Figura A.42: Grafo G_{14} modificado - decomposição do K_{148}

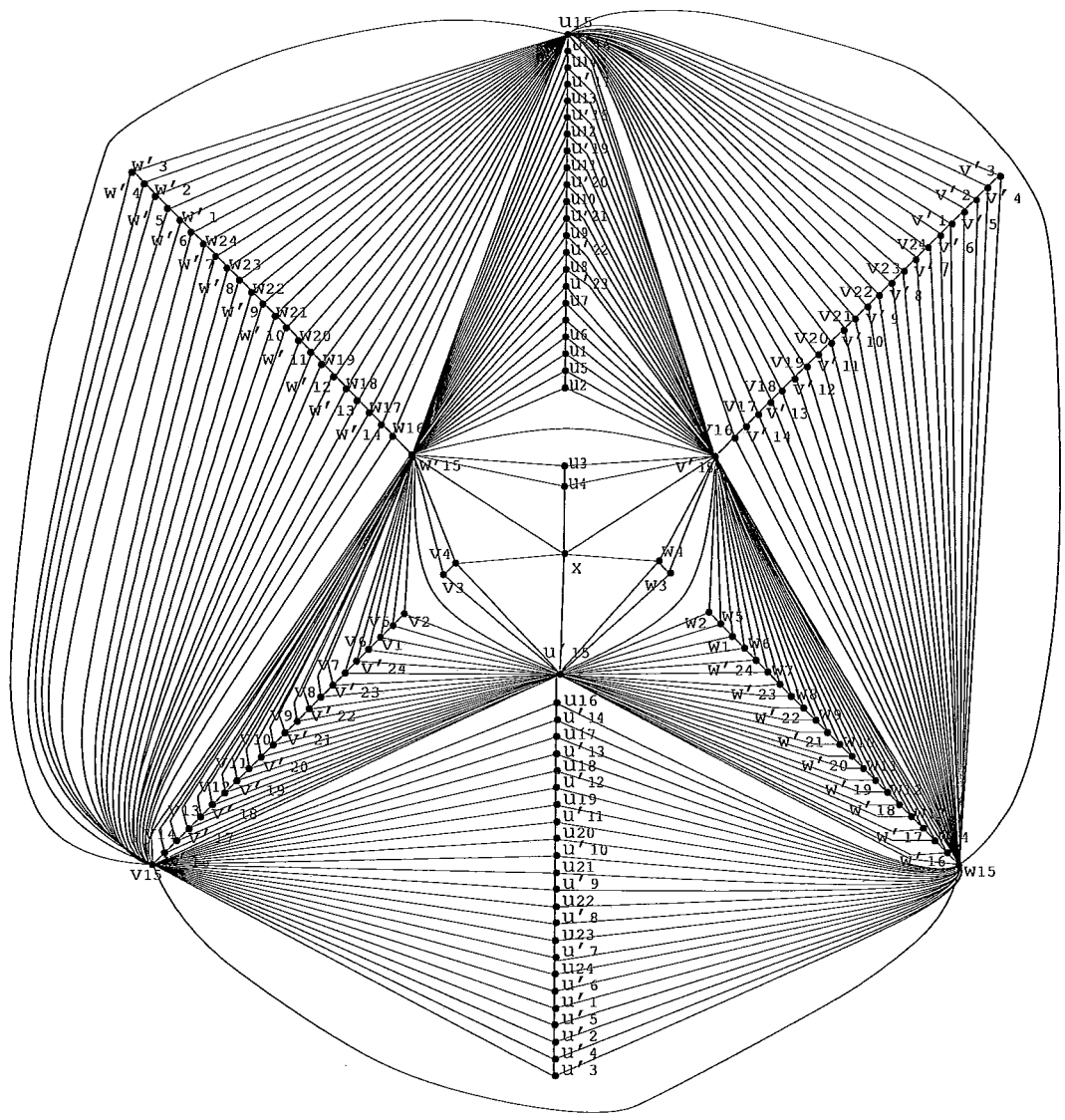


Figura A.43: Grafo G_{15} modificado - decomposição do K_{148}

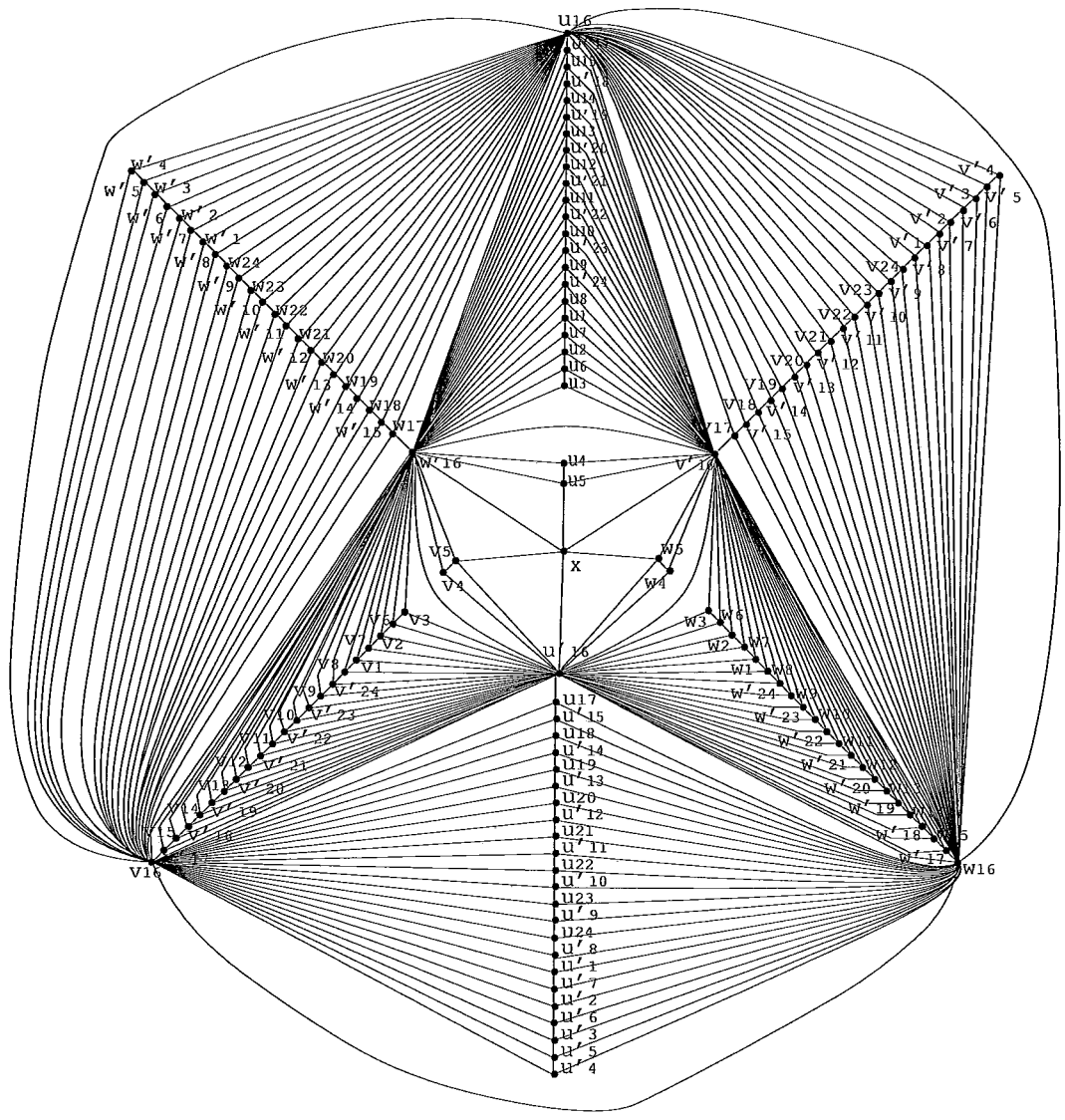


Figura A.44: Grafo G_{16} modificado - decomposição do K_{148}

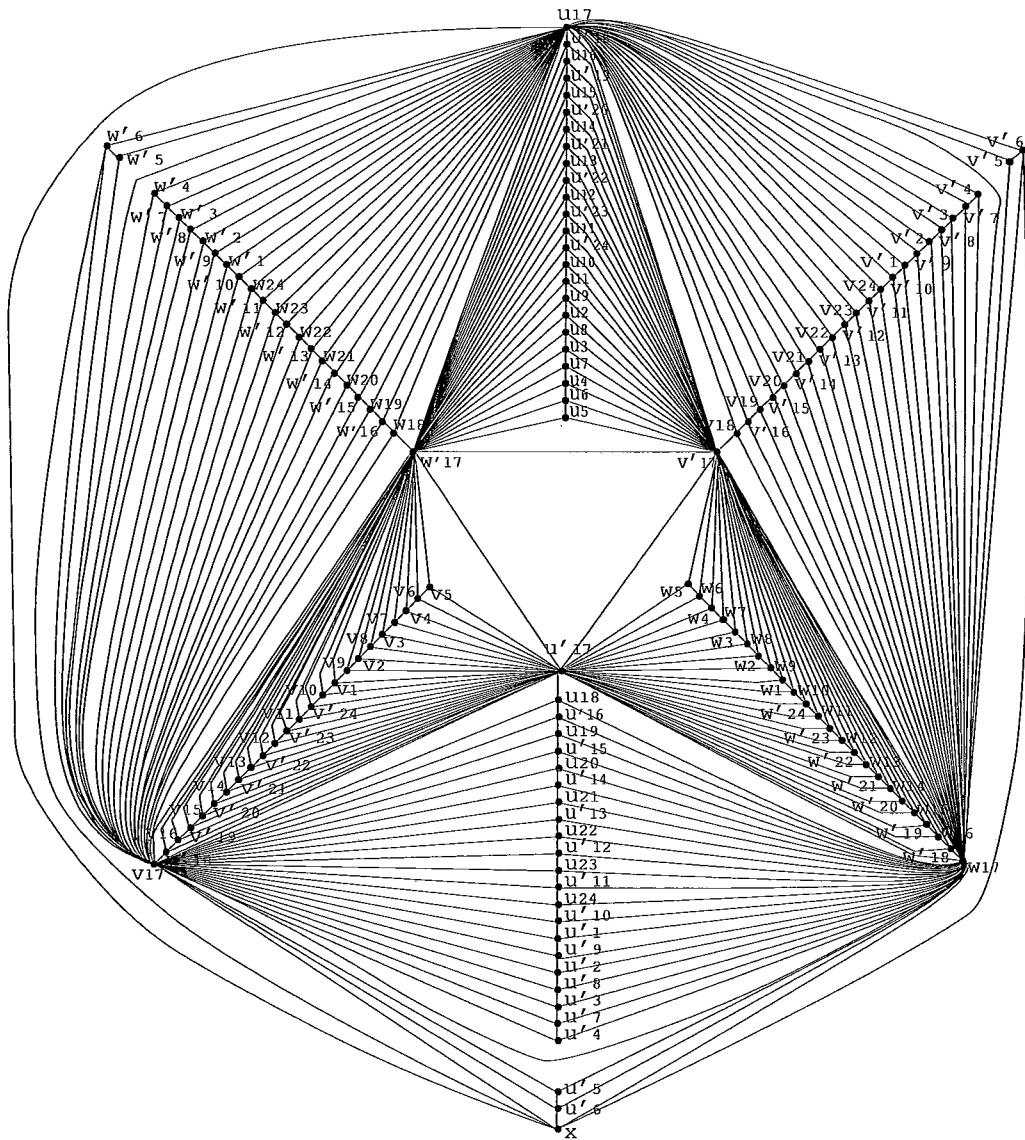


Figura A.45: Grafo G_{17} modificado - decomposição do K_{148}

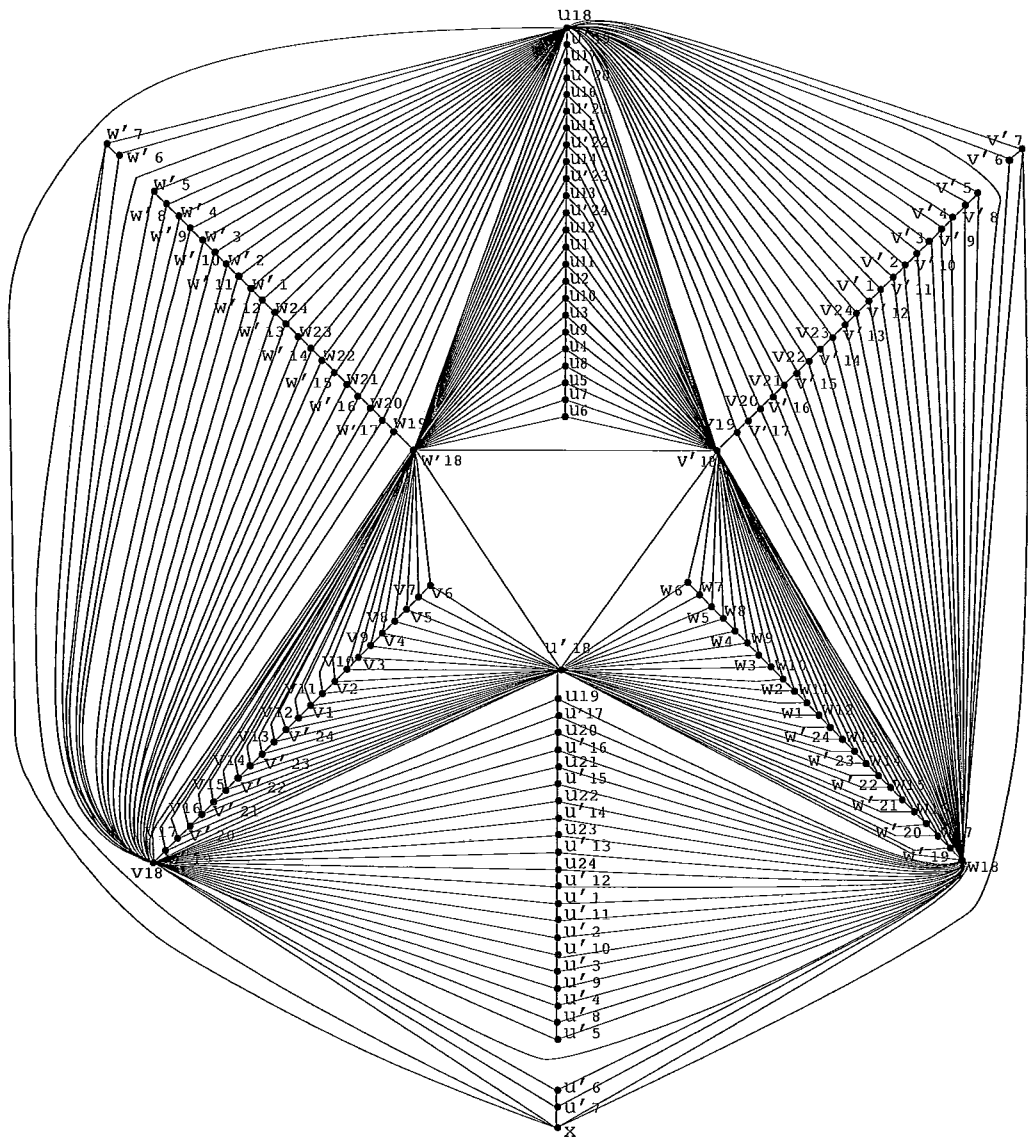


Figura A.46: Grafo G_{18} modificado - decomposição do K_{148}

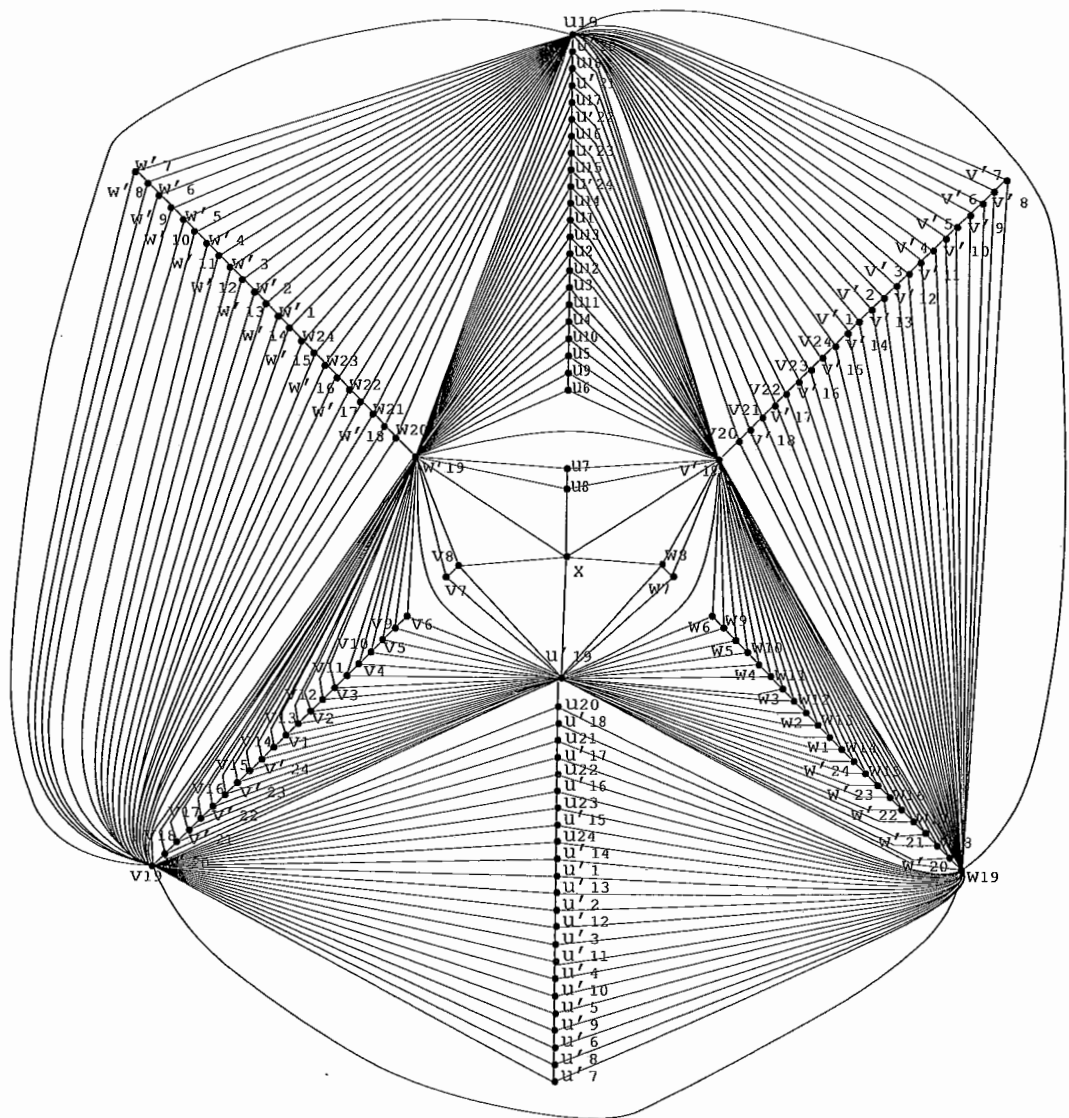


Figura A.47: Grafo G_{19} modificado - decomposição do K_{148}

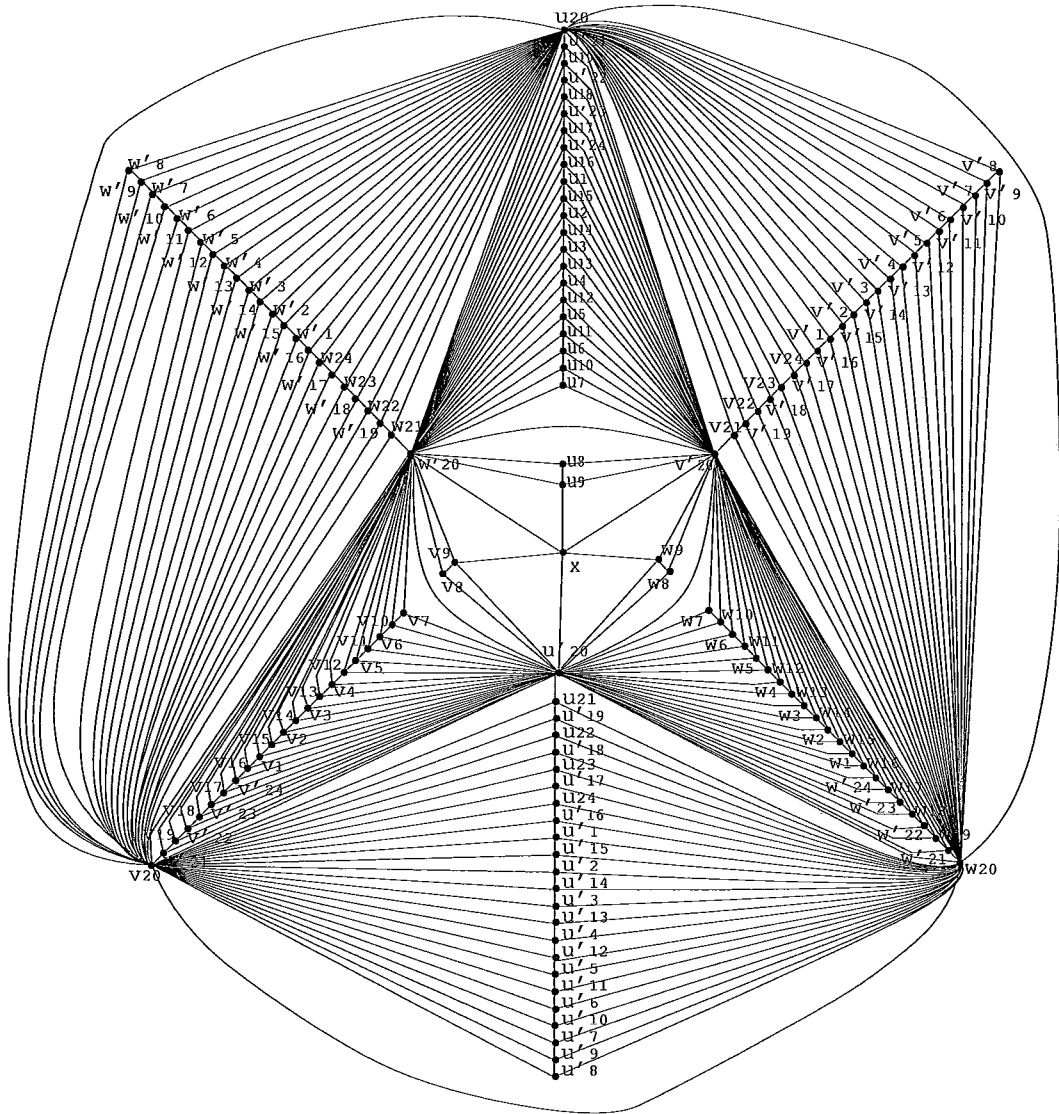


Figura A.48: Grafo G_{20} modificado - decomposição do K_{148}

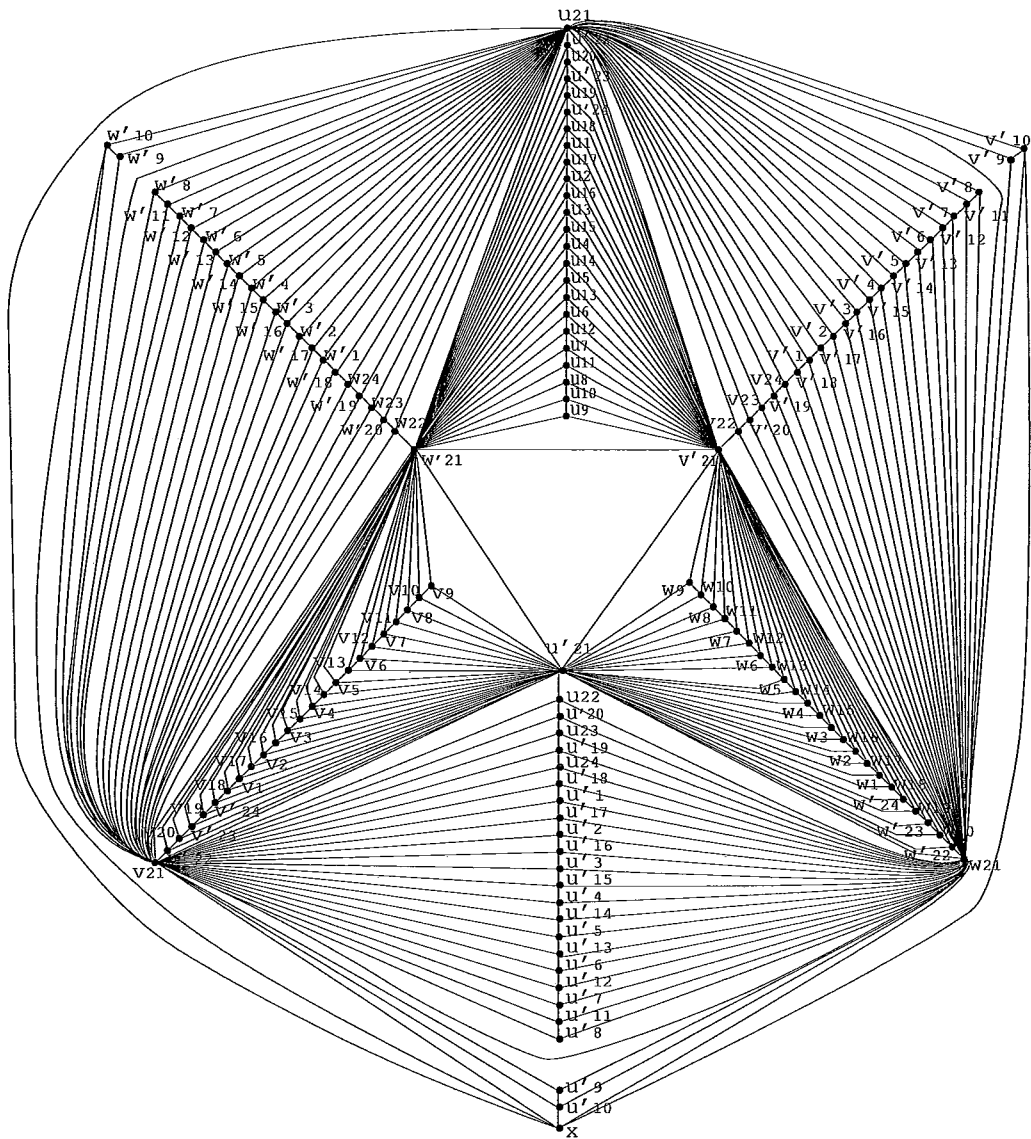


Figura A.49: Grafo G_{21} modificado - decomposição do K_{148}

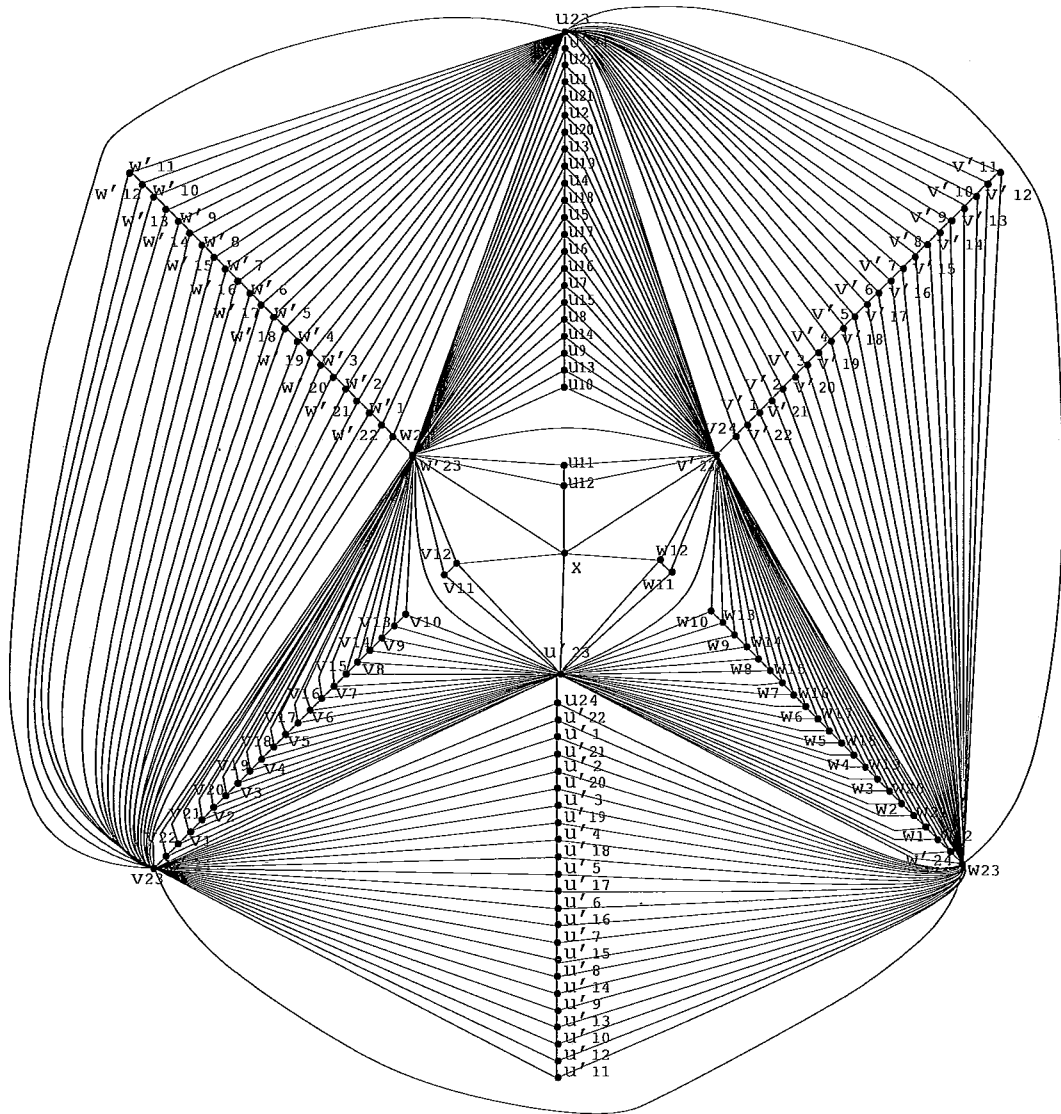


Figura A.51: Grafo G_{23} modificado - decomposição do K_{148}

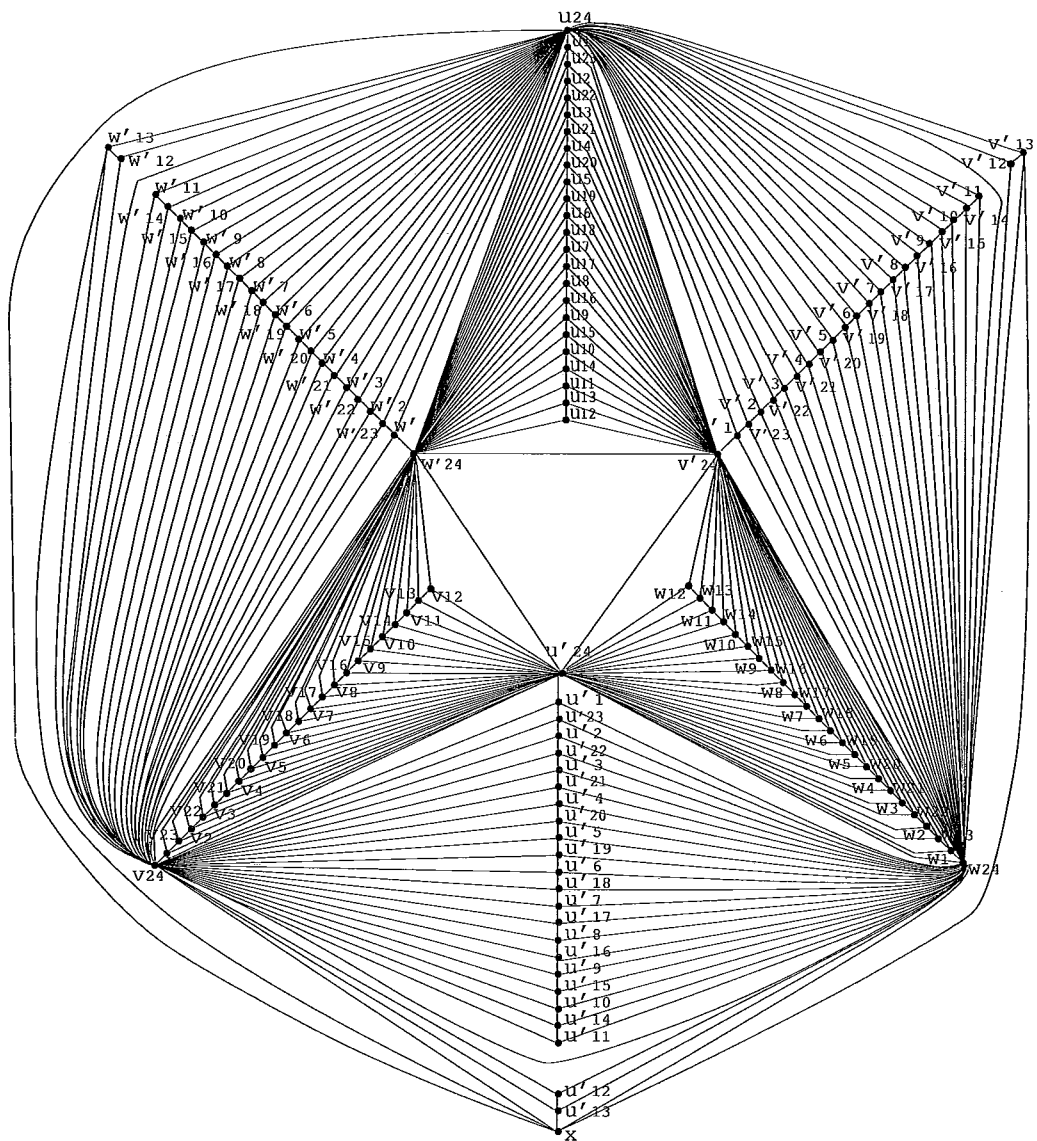


Figura A.52: Grafo G_{24} modificado - decomposição do K_{148}

A.1.4 Grafo suplementar G_{25}

Após a modificação fundamental, conseguimos conectar o vértice x a todo vértice $u_i, u'_i, v_i, v'_i, w_i$ e $w'_i, i = 1, \dots, 24$, com excessão de u_{24}, u_{24} e u_{24} , já que no grafo $G_{\frac{p}{2}-1}$ não retiramos nenhuma aresta, somente colocamos x na fronteira exterior do grafo.

Os pares de vértices abaixo, indicam as arestas removidas durante a modificação fundamental:

+11	11'	24	13	2	15'	4'	17	6	19'	8'	21	10
-11	13'	2'	15	4	17'	6'	19	8	21'	10'	23	12

+11	23'	12'	1'	14	3	16'	5'	18	7	20'	9'	22
-11	1	14'	3'	16	5	18'	7'	20	9	22'	11'	24

Nós devemos, então, considerar estas juntamente com as arestas $(u_i, u'_i), (v_i, v'_i)$ e $(w_i, w'_i), i = 1, \dots, 24$, e formar o desenho:

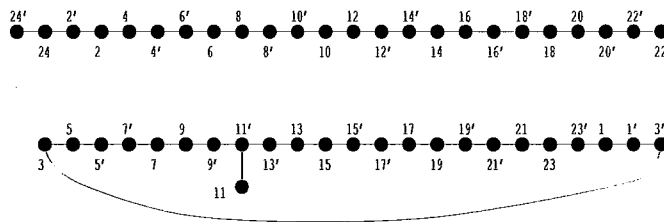


Figura A.53: Desenho formado por alguns vértices ausentes

Para desconectar o ciclo acima, vamos inserir a aresta $(\frac{p}{2} - 9, \frac{p}{2} - 7')$ e retirá-la de algum grafo G_s . Em tal grafo, uma alteração deve ser feita para que uma nova aresta possa ser colocada, e assim sucessivamente:

<i>Aresta retirada</i>	<i>Aresta inserida</i>	<i>Grafo</i>	<i>Constante</i>	<i>Desenho alt</i>
$(5', 3)$	$(5', 15')$	G_4	$+1, -1$	<i>alt</i>
$(5', 15')$	$(5', 9')$	G_{22}	$+7, -7$	<i>alt</i>
$(5', 9')$	$(5', 7')$	G_{19}	$+10, -10$	<i>naoalt</i>

Como um resultado, nós obtemos a aresta $(5, 7')$ que pode ser removida do ciclo acima. Assim, o ciclo é desconectado e nós obtemos o grafo.

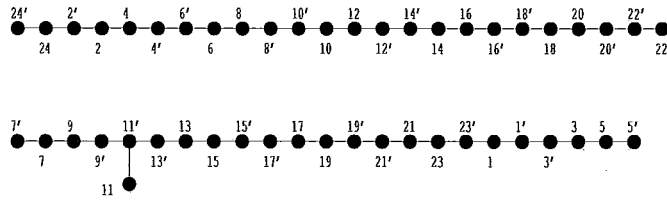


Figura A.54: Desenho modificado

E portanto o grafo suplementar G_{25} será o da figura A.55.

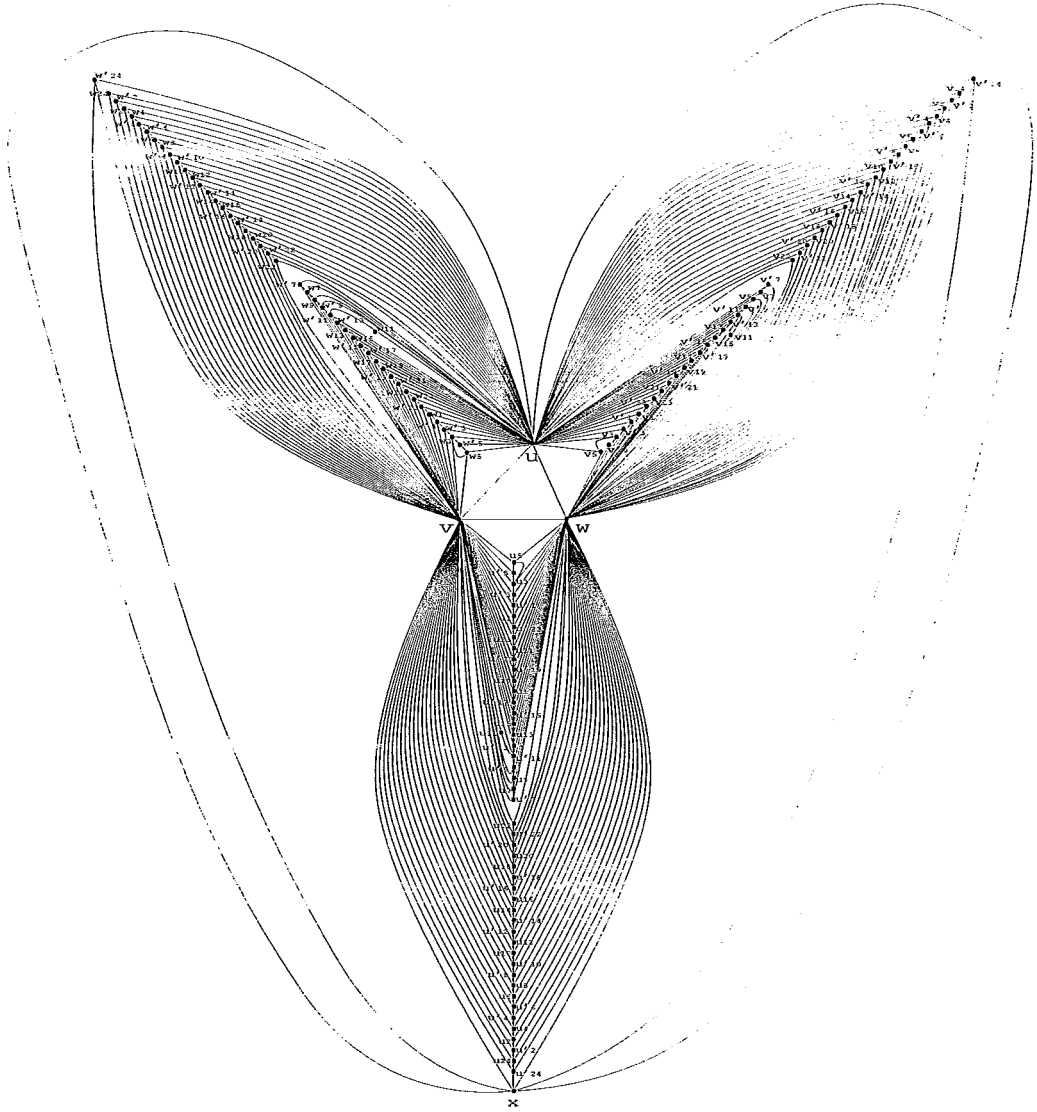


Figura A.55: Grafo G_{25} - decomposição do K_{148}

A.1.5 Modificação adicional efetuada em G_4 , G_{22} e G_{19}

As figuras A.56, A.57 e A.58 mostram os grafos G_4 , G_{22} e G_{19} , respectivamente, após a modificação adicional.

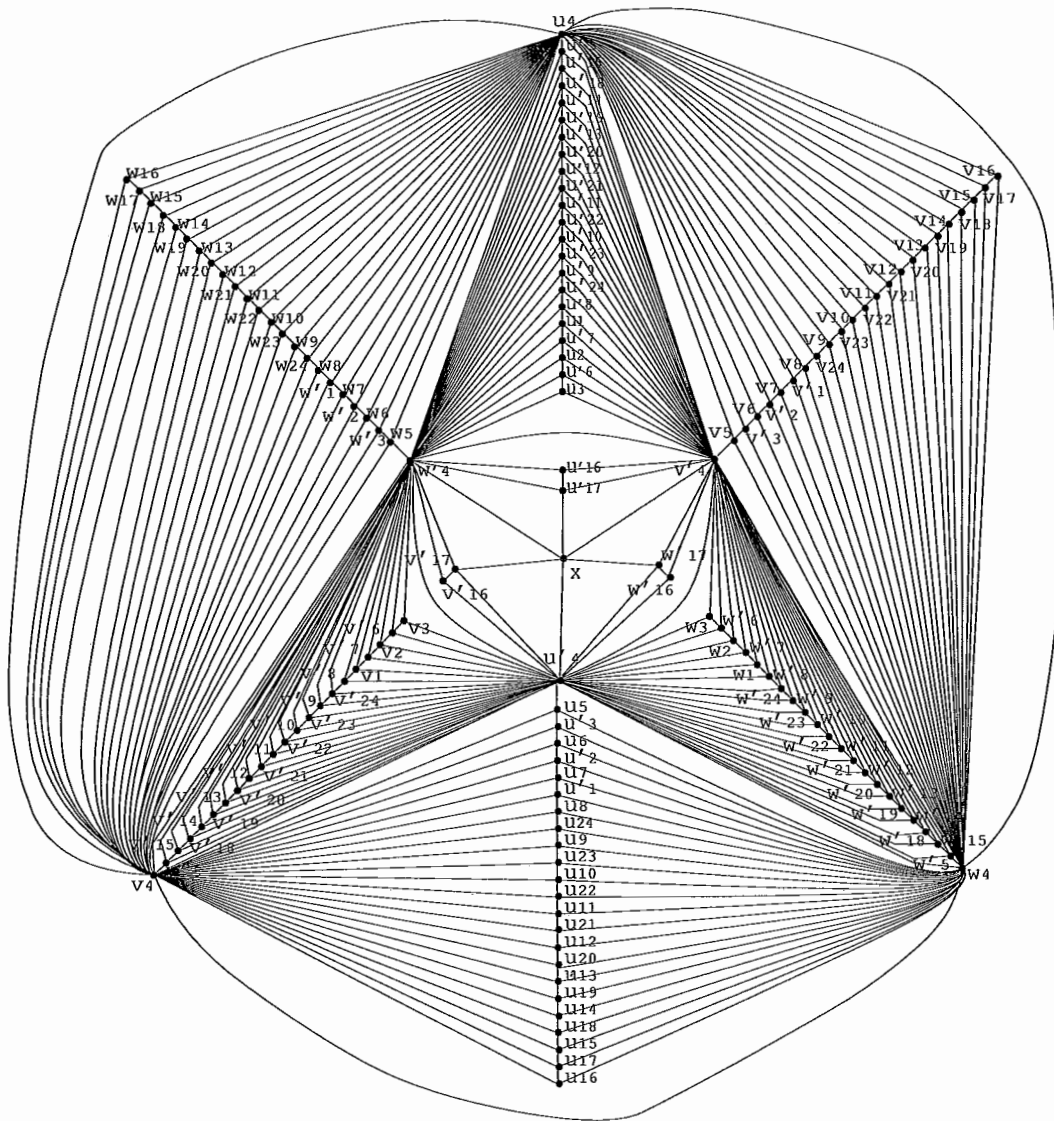


Figura A.56: Grafo G_4 modificado novamente - decomposição do K_{148}

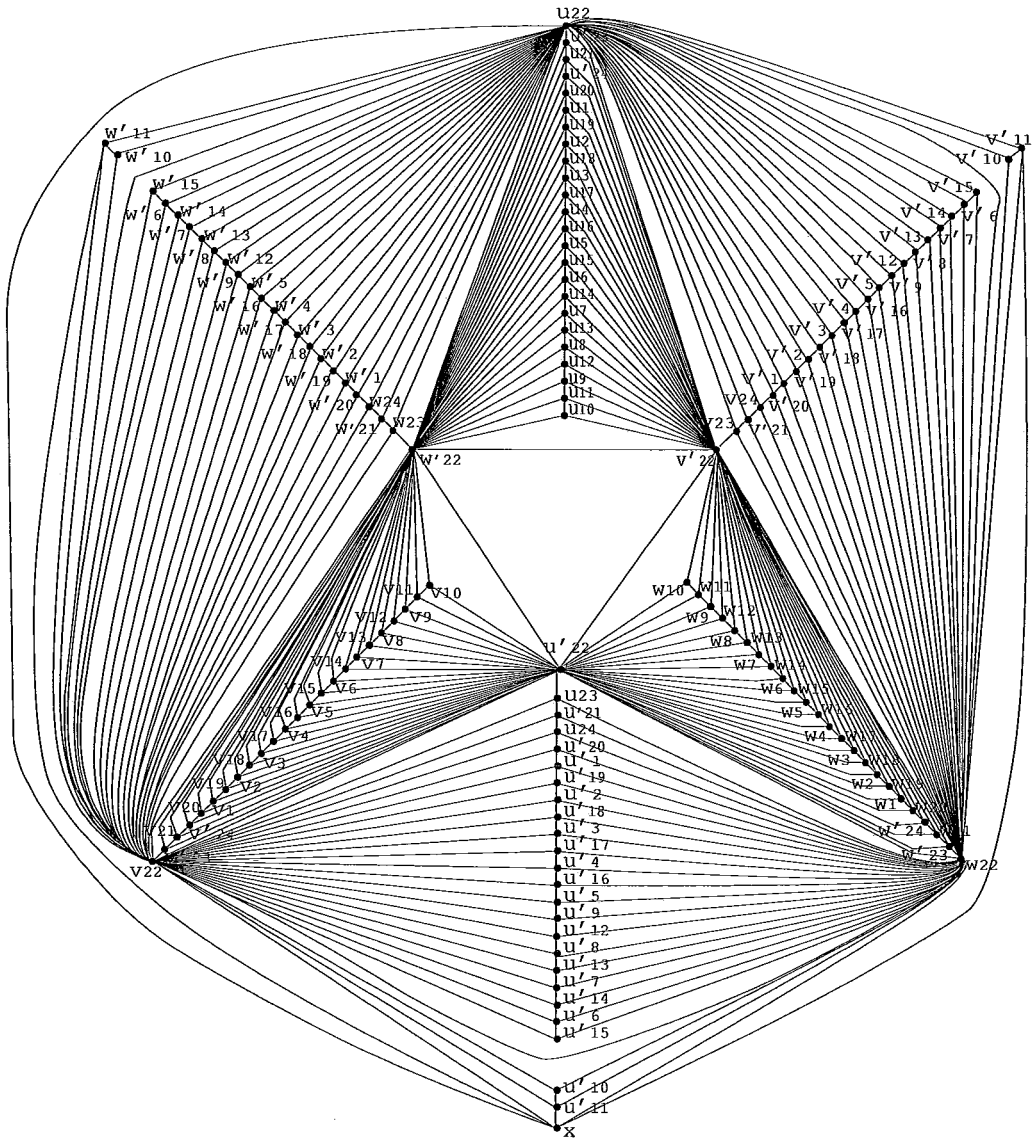


Figura A.57: Grafo G_{22} modificado novamente - decomposição do K_{148}

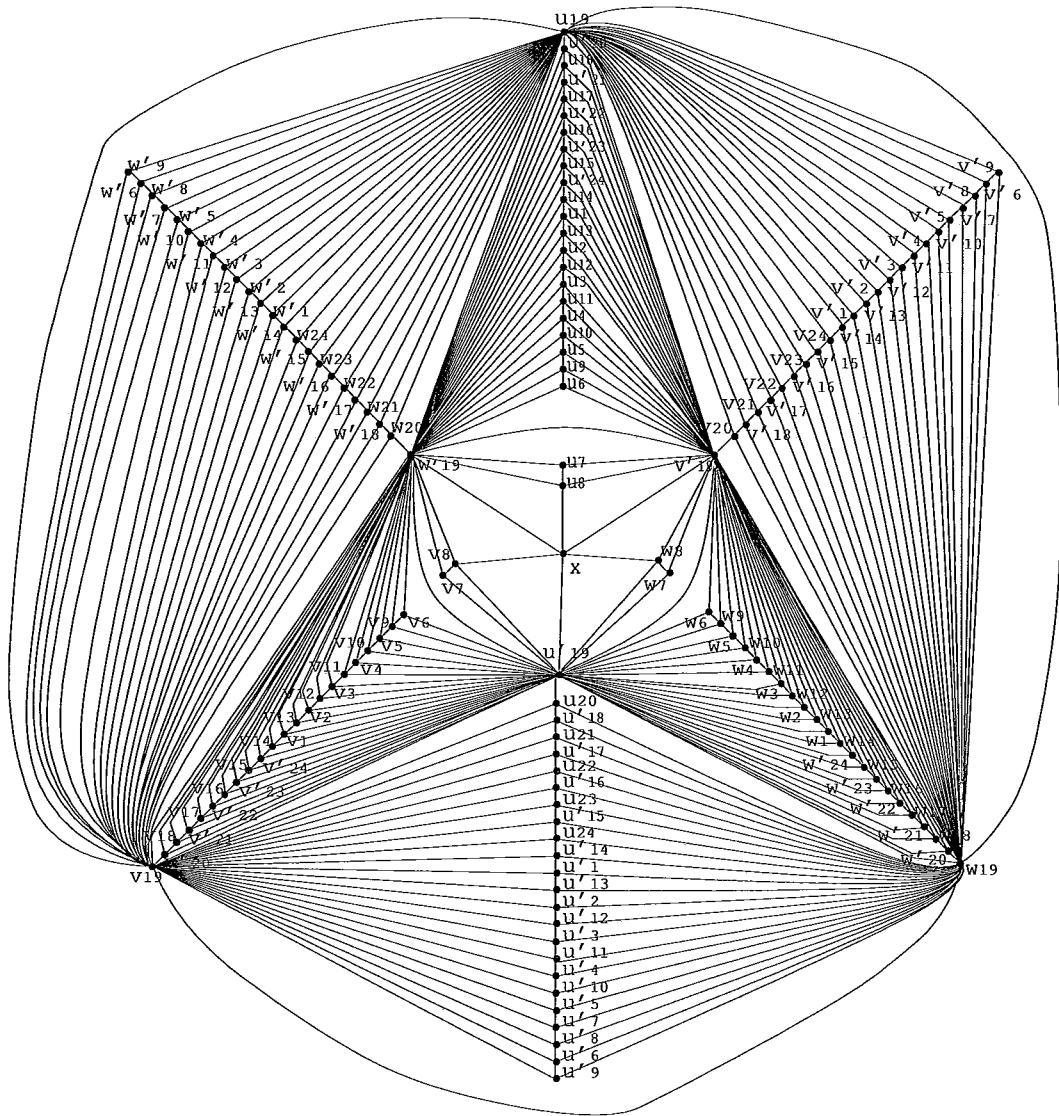


Figura A.58: Grafo G_{19} modificado novamente - decomposição do K_{148}

A.1.6 Distribuição das arestas restantes em G_r , com $r = 1, \dots, 24$

Resta colocar as arestas (u, u_i) , (u, u'_i) , $(u, v_{\frac{n}{2}-1})$ e $(u, v'_{\frac{n}{2}-7})$, $i = 1, \dots, 24$, e arestas similares dos vértices v e w .

Os vértices u , v e w são colocados nos grafos G_1, \dots, G_{24} entre as linhas referentes às constantes $+8$ e -8 . Suponha $j \leq 2^k = p/3 = 8$. Para todo $j \leq 8$, em G_j , G_{j+8} e G_{j+16} , nós conectamos u com as arestas:

+8	$j + 8$	$(j - 8)'$	j'
-8	$j - 8$	j	$(j + 8)'$

Assim:

<i>Constante</i>	G_1	G_9	G_{17}	G_2	G_{10}	G_{18}	G_3	G_{11}	G_{19}
+8	9	17'	1'	10	18'	2'	11	19'	3'
-8	17	1	9'	18	2	10'	19	3	11'
<i>Constante</i>	G_4	G_{12}	G_{20}	G_5	G_{13}	G_{21}	G_6	G_{14}	G_{22}
+8	12	20'	4'	13	21'	5'	14	22'	6'
-8	20	4	12'	21	5	13'	22	6	14'
<i>Constante</i>	G_7	G_{15}	G_{23}	G_8	G_{16}	G_{24}			
+8	15	23'	7'	16	24'	8'			
-8	23	7	15'	24	8	16'			

Mudando todas as marcações em G_j , G_{j+8} e G_{j+16} , onde $j = 3$ nós conseguimos conectar o vértice u a v_{11} , o vértice v a w_{11} e o vértice w a u_{11} . Fazendo o mesmo para $j = 5$, nós podemos conectar o vértice u a v'_5 , o vértice v a w'_5 e o vértice w a u'_5 , o que conclui a construção dos 25 subgrafos planares do grafo K_{148} .

Apêndice A

Anexo 3

A.1 Grafos intermediários da decomposição do K_{100}

$$p = 16$$

$$16 = 2^4, \text{ logo } q = 4.$$

Portanto, as matrizes A e A' serão as seguintes:

$$A_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 \\ 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 \\ 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 \\ 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 \\ 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 \\ 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 \\ 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 5' & 6' & 7' & 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6' & 7' & 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7' & 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8' & 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9' & 10' & 11' & 12' & 13' & 14' & 15' & 16' & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

A.1.1 Desenhos $C_{r,1}$, com $r = 1, \dots, 16$

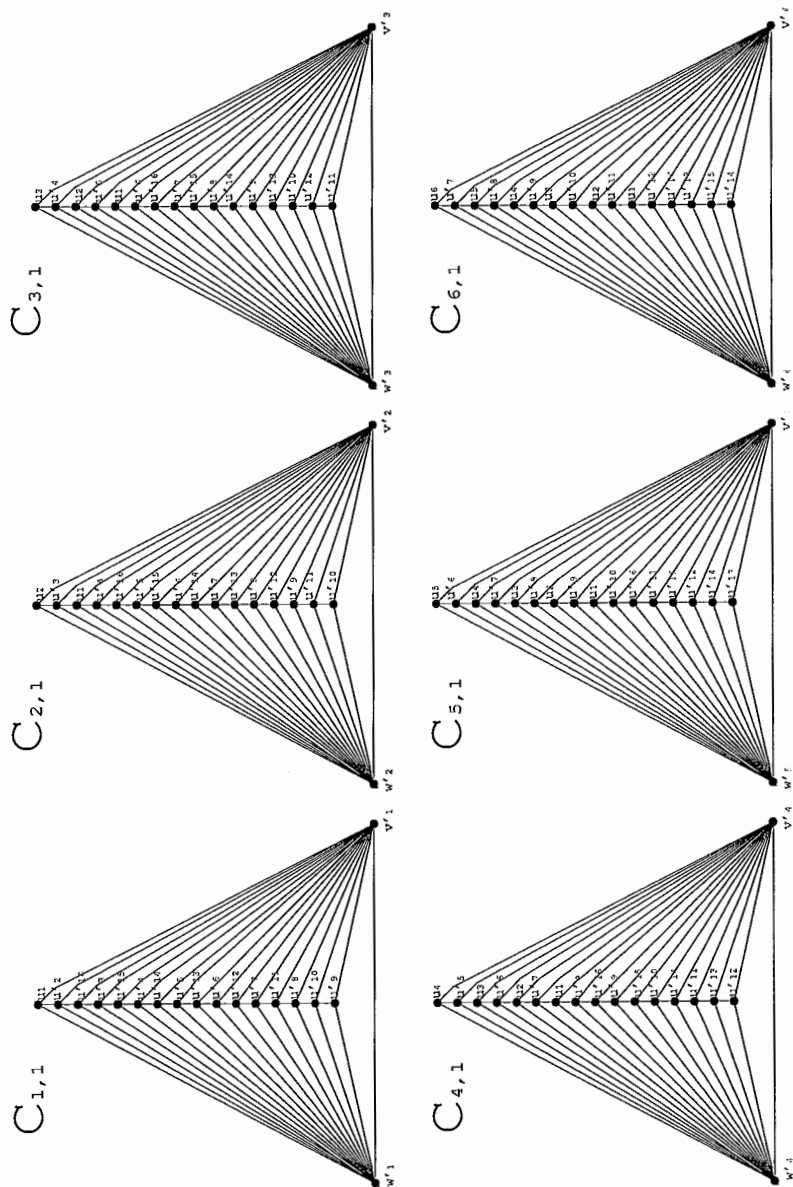


Figura A.1: Desenhos $C_{1,1}$ a $C_{6,1}$ - decomposição do K_{100}

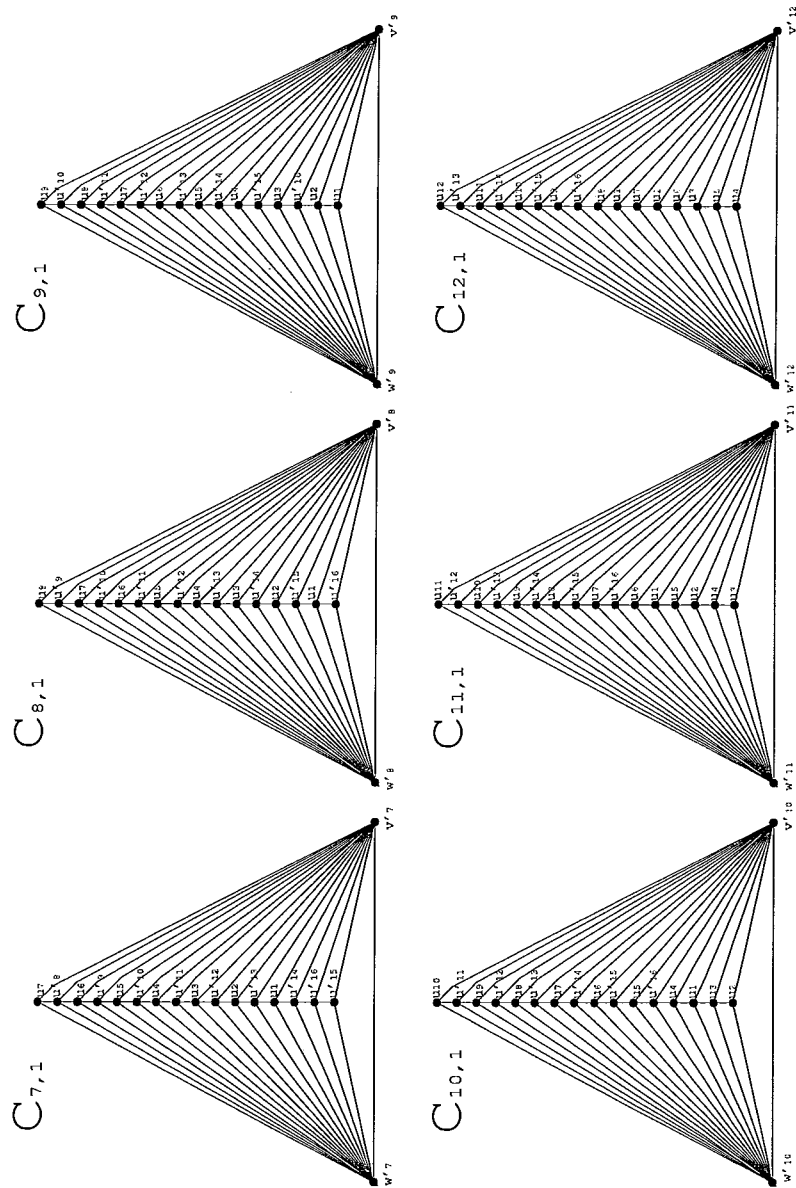


Figura A.2: Desenhos $C_{7,1}$ a $C_{12,1}$ - decomposição do K_{100}

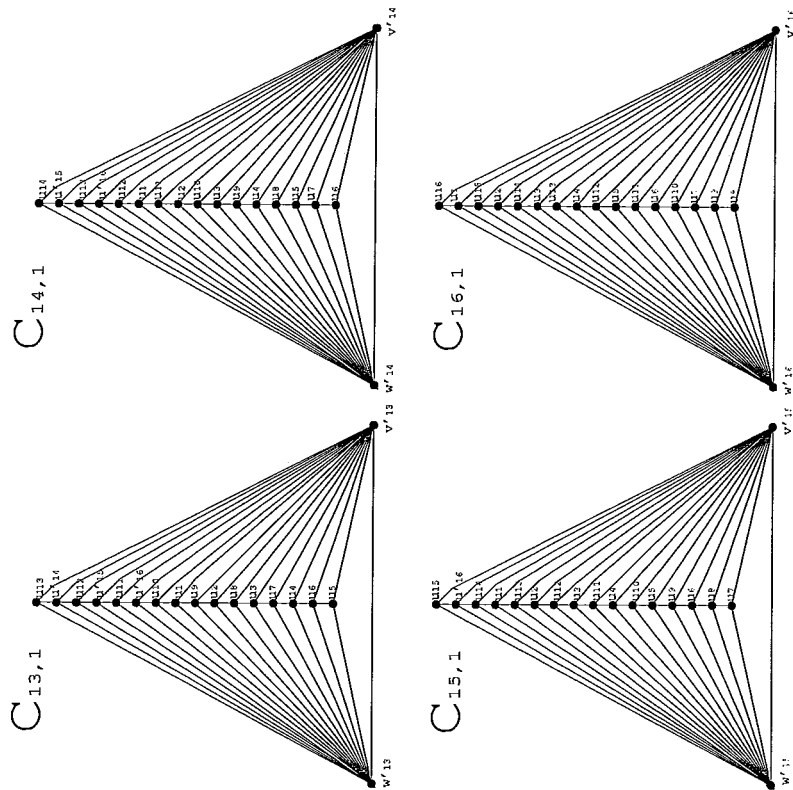


Figura A.3: Desenhos $C_{13,1}$ a $C_{16,1}$ - decomposição do K_{100}

A.1.2 Grafos G_r , com $r = 1, \dots, 16$

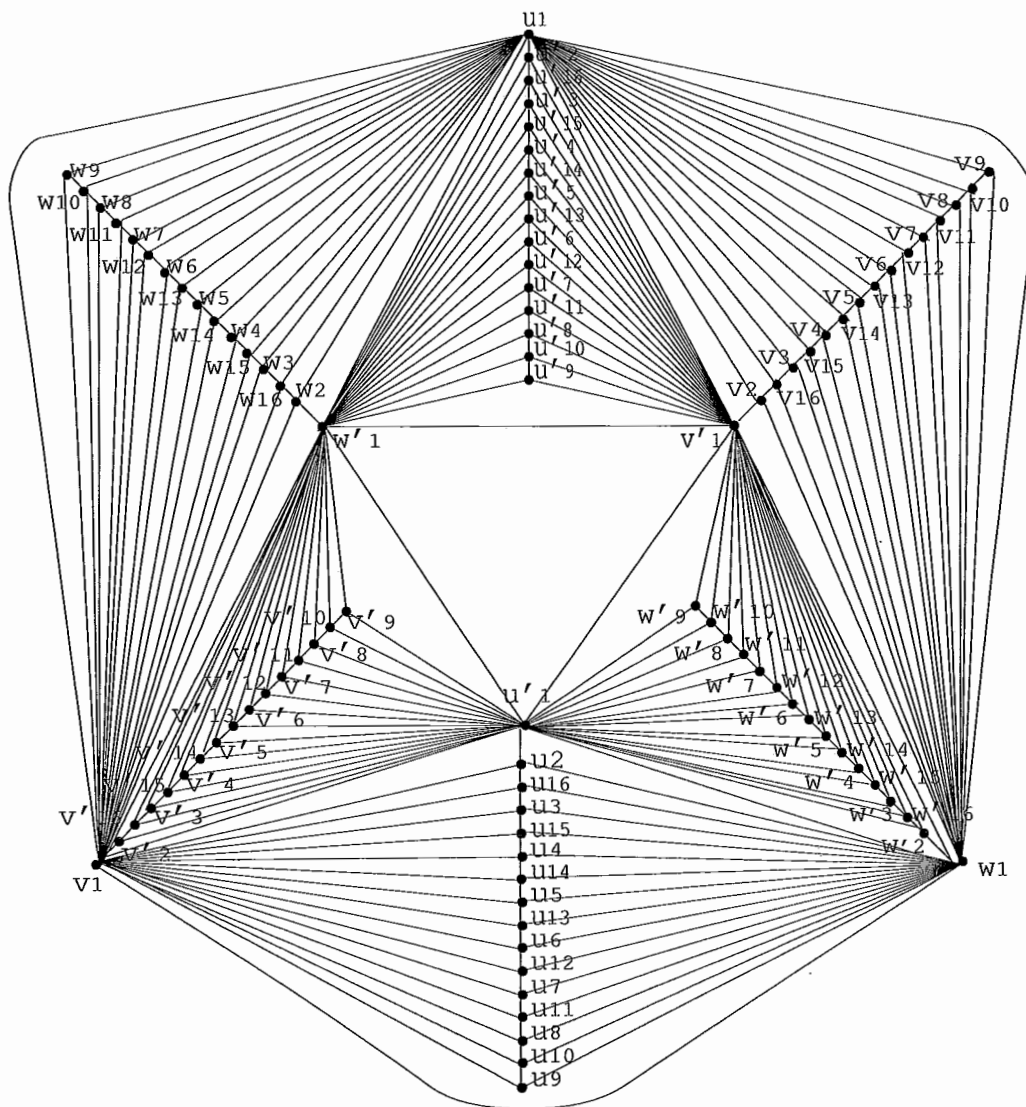


Figura A.4: Grafo G_1 - decomposição do K_{100}

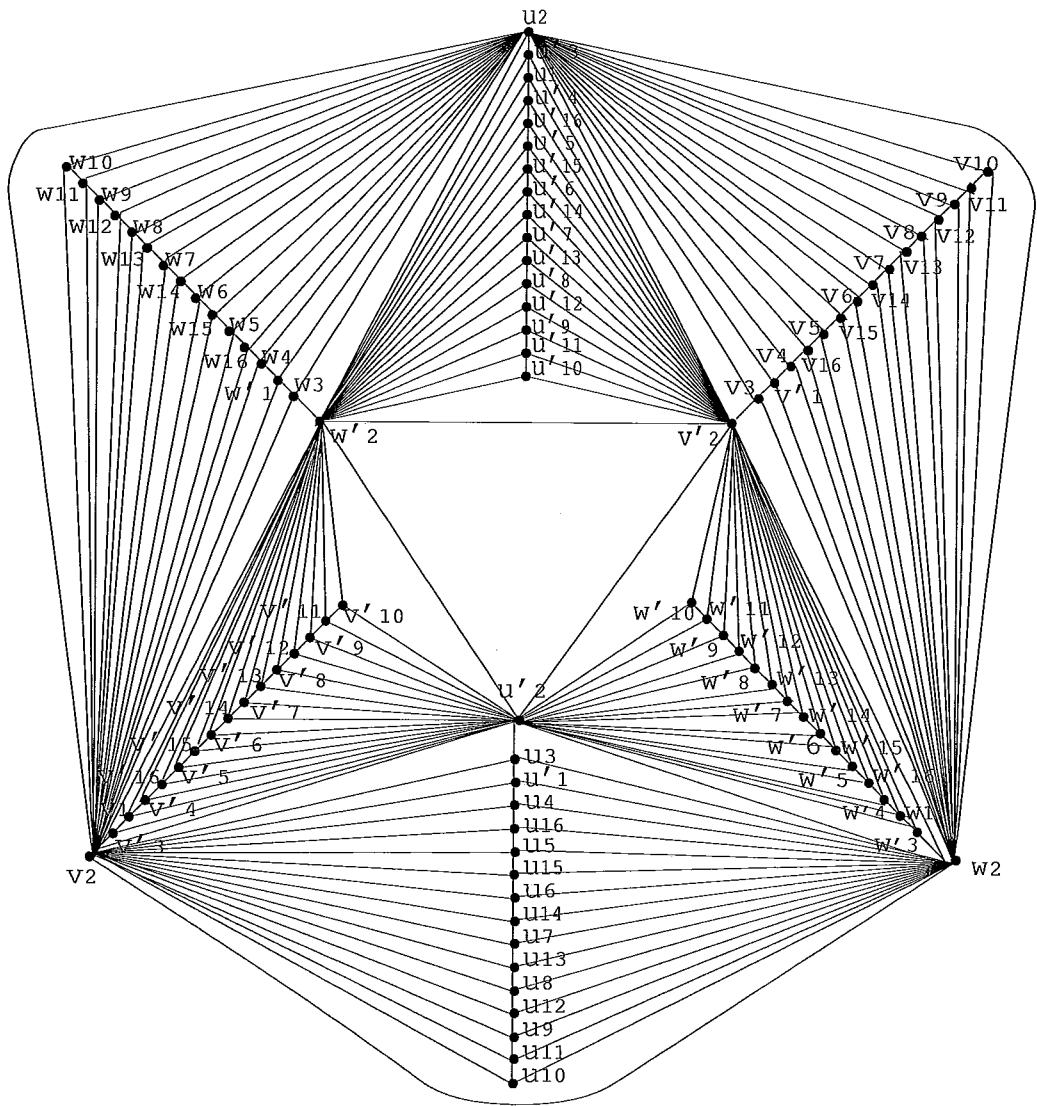


Figura A.5: Grafo G_2 - decomposição do K_{100}

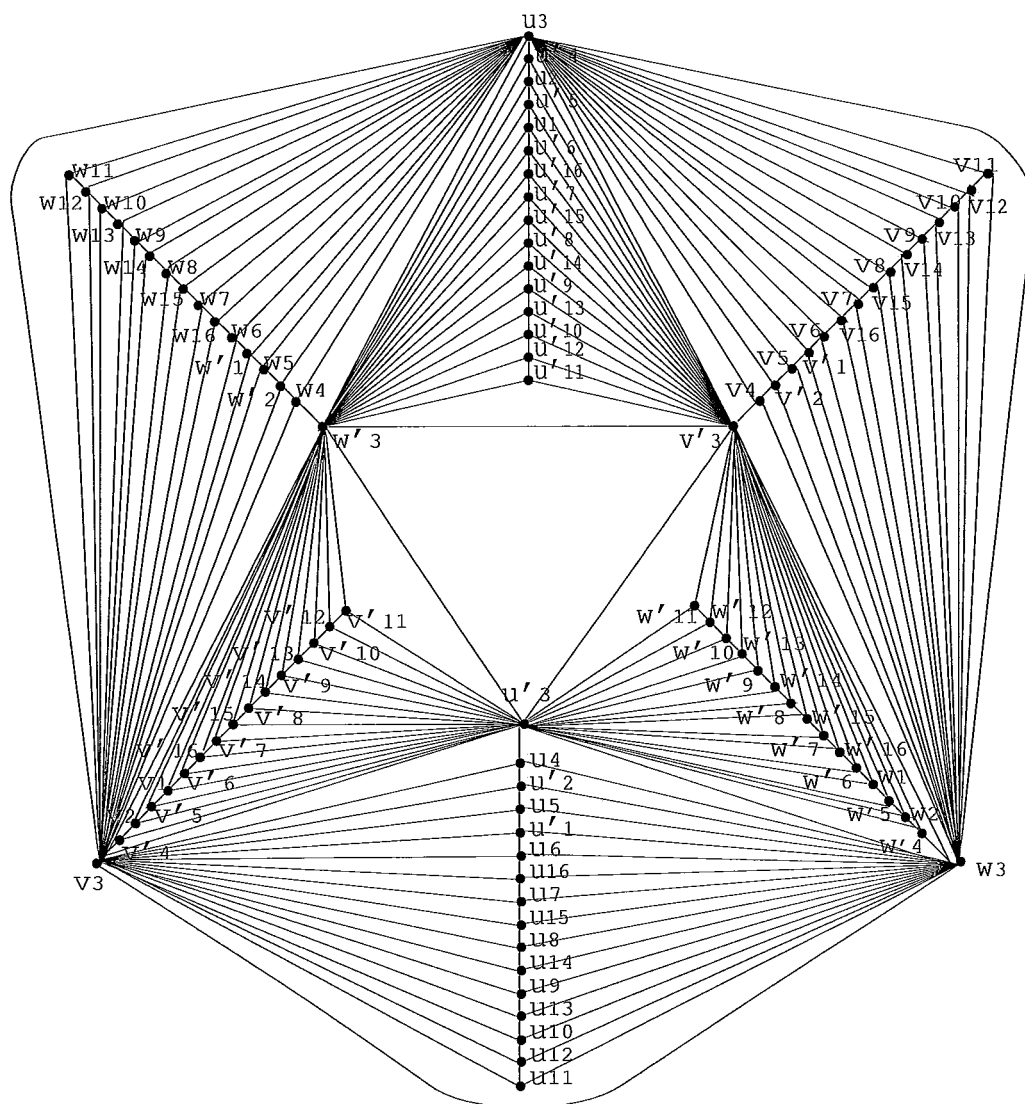


Figura A.6: Grafo G_3 - decomposição do K_{100}

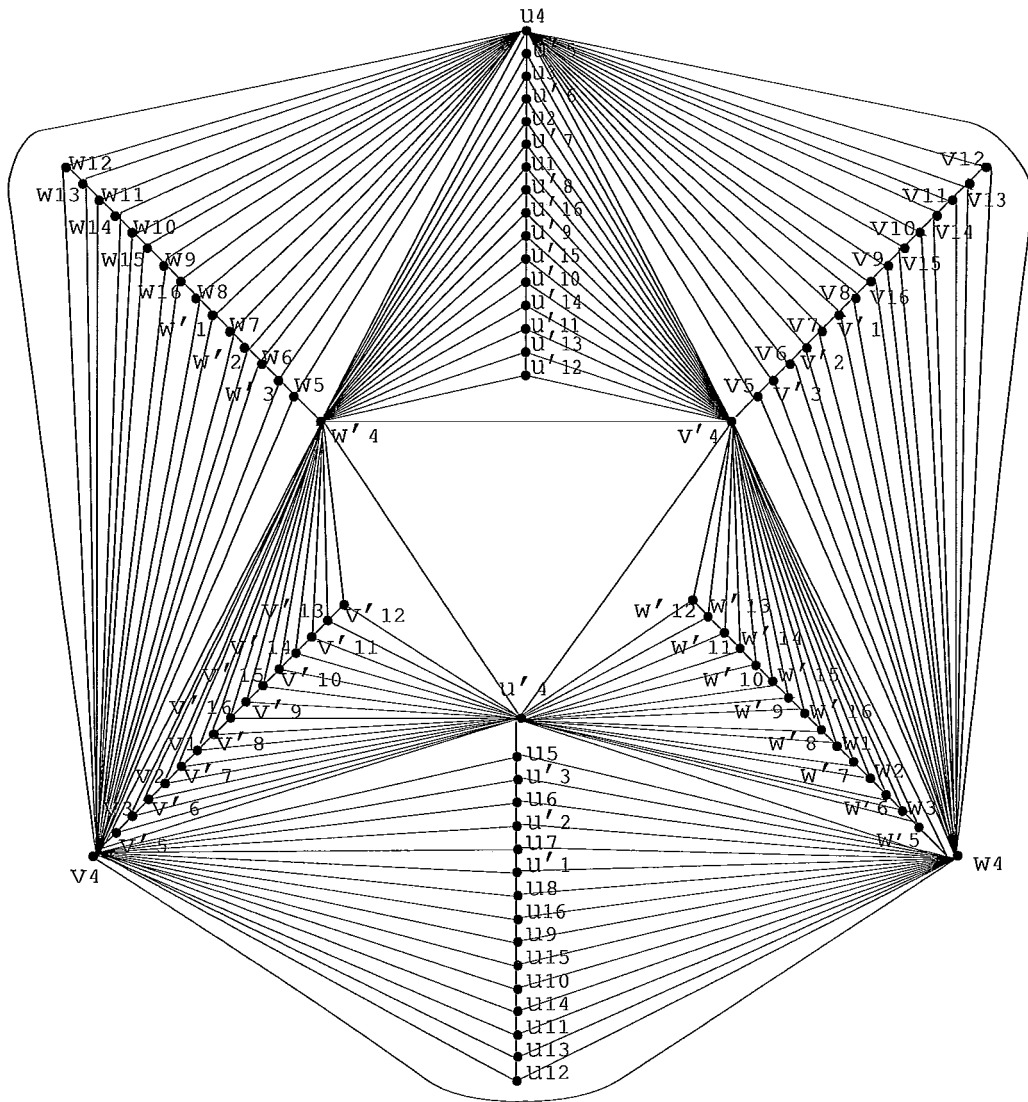


Figura A.7: Grafo G_4 - decomposição do K_{100}

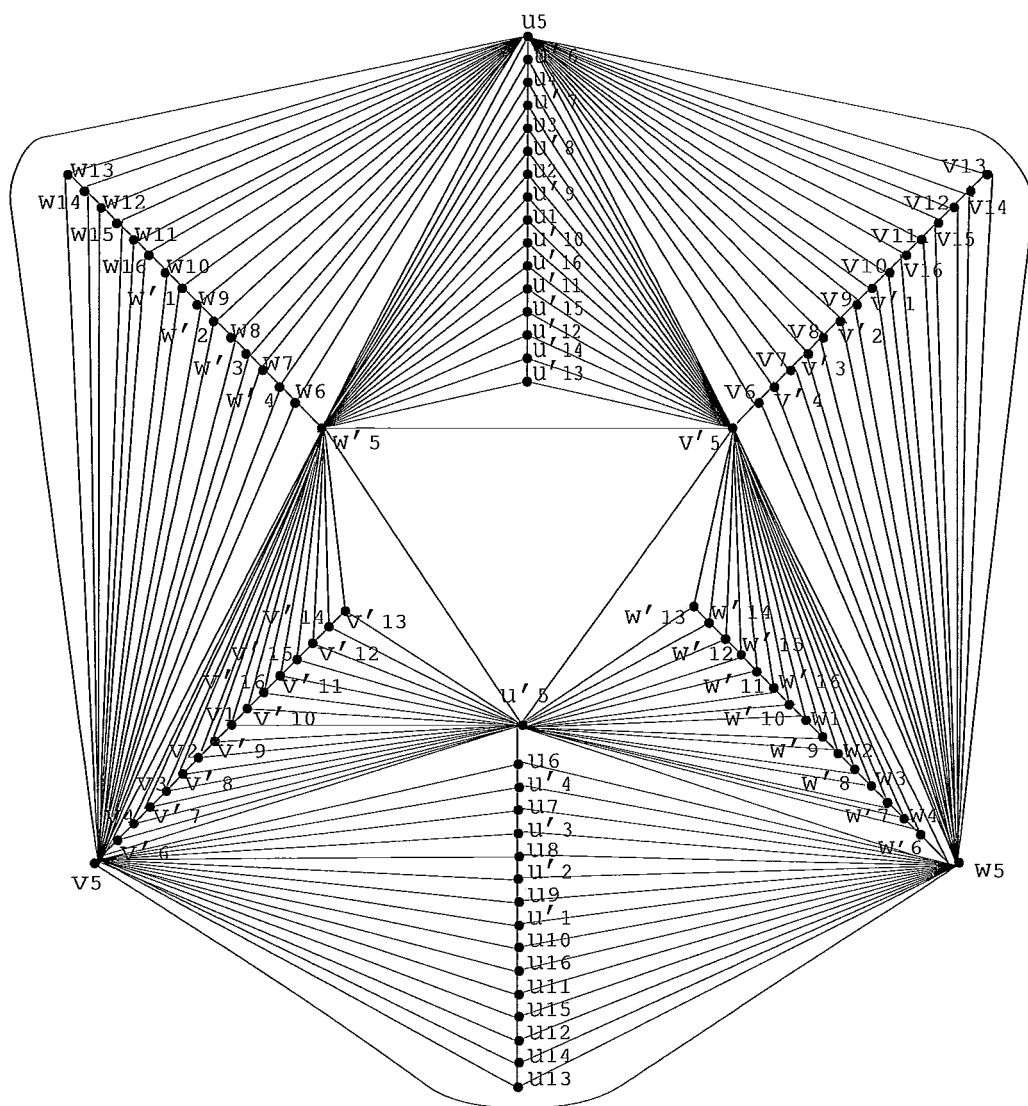


Figura A.8: Grafo G_5 - decomposição do K_{100}

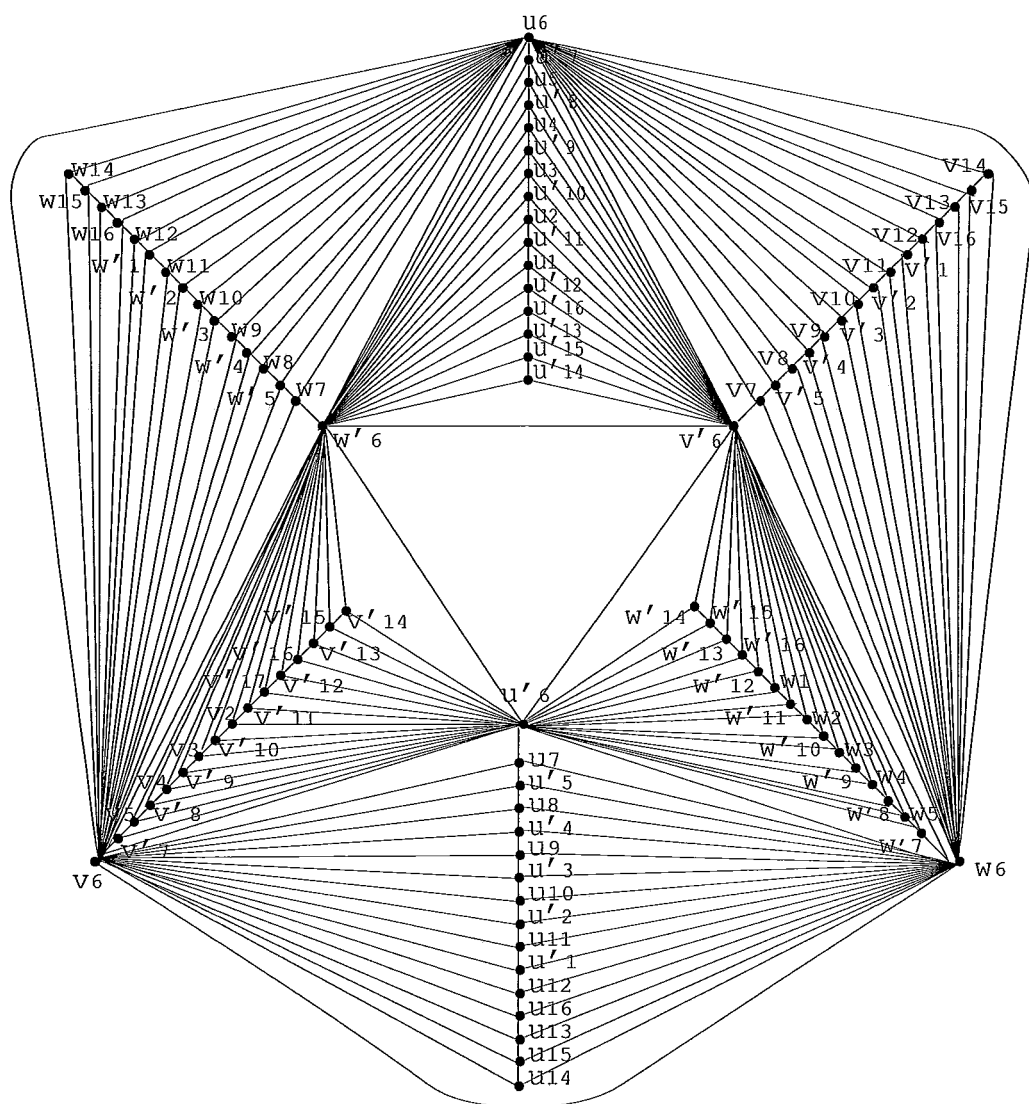


Figura A.9: Grafo G_6 - decomposição do K_{100}

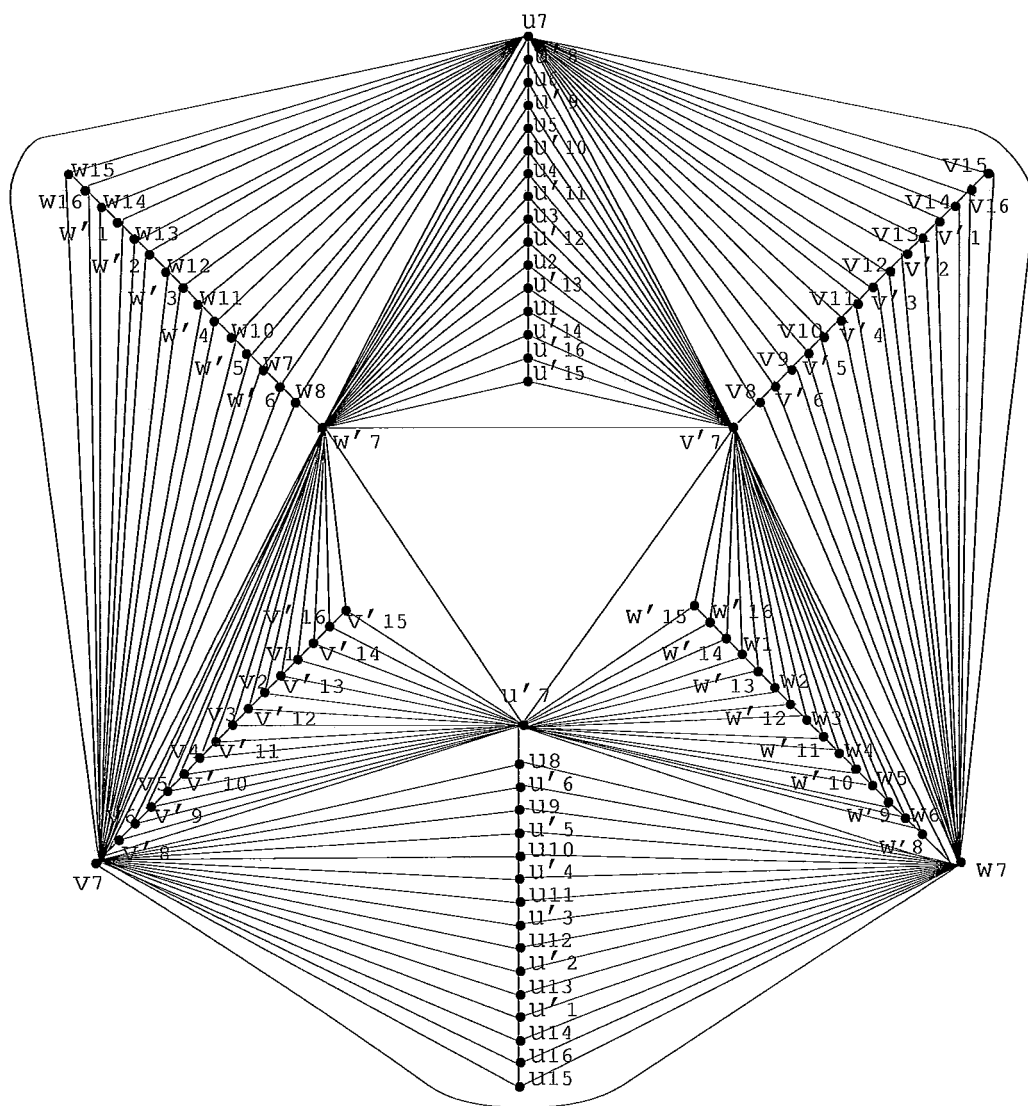


Figura A.10: Grafo G_7 - decomposição do K_{100}

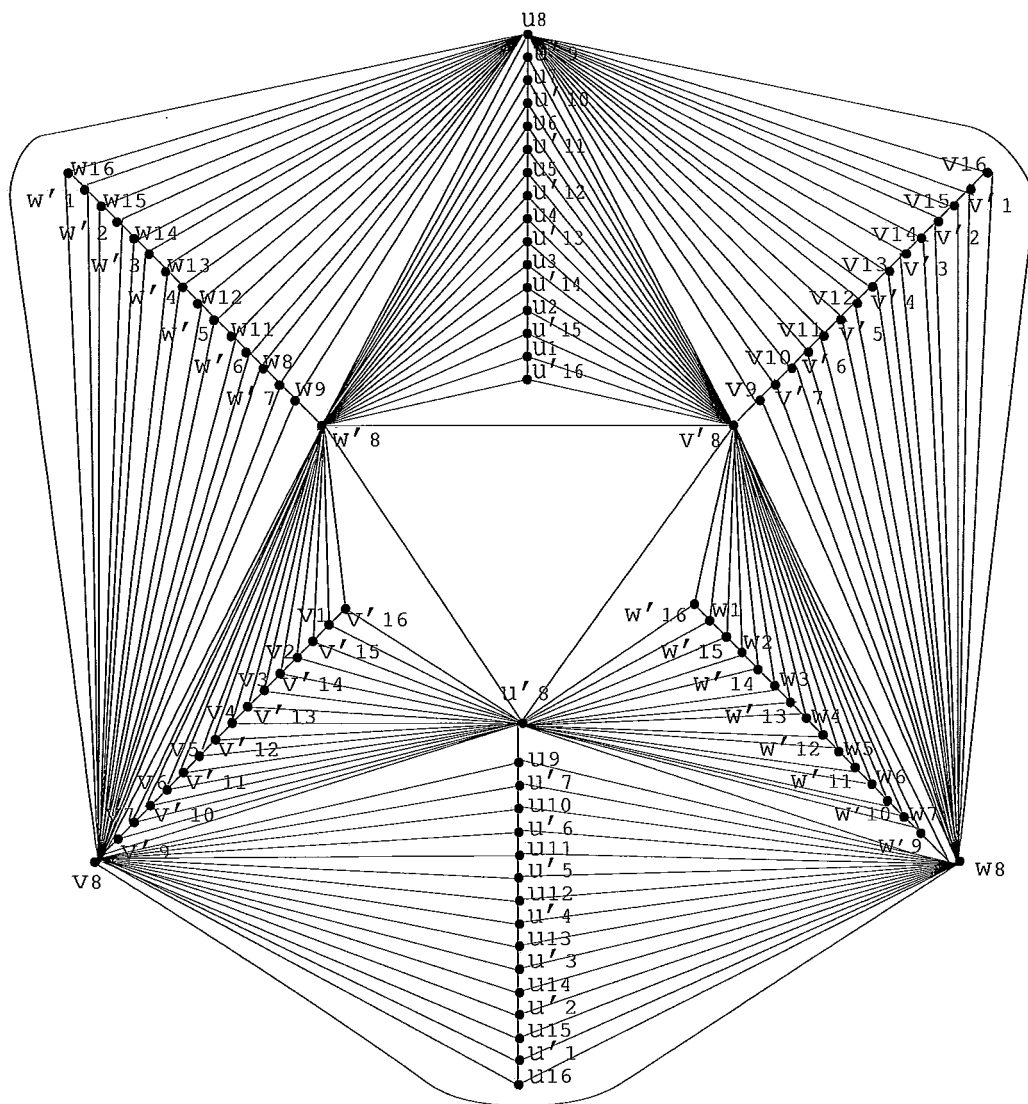


Figura A.11: Grafo G_8 - decomposição do K_{100}

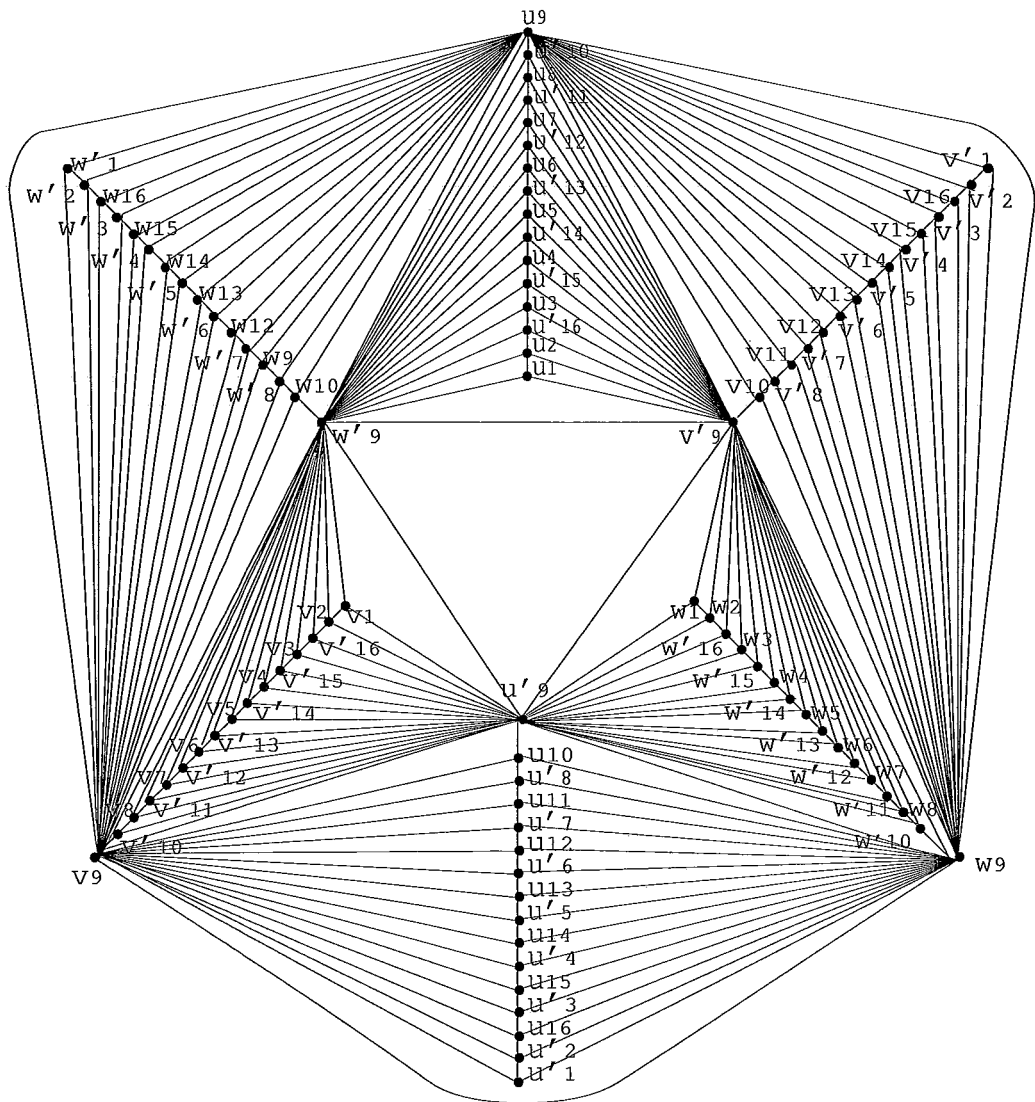


Figura A.12: Grafo G_9 - decomposição do K_{100}

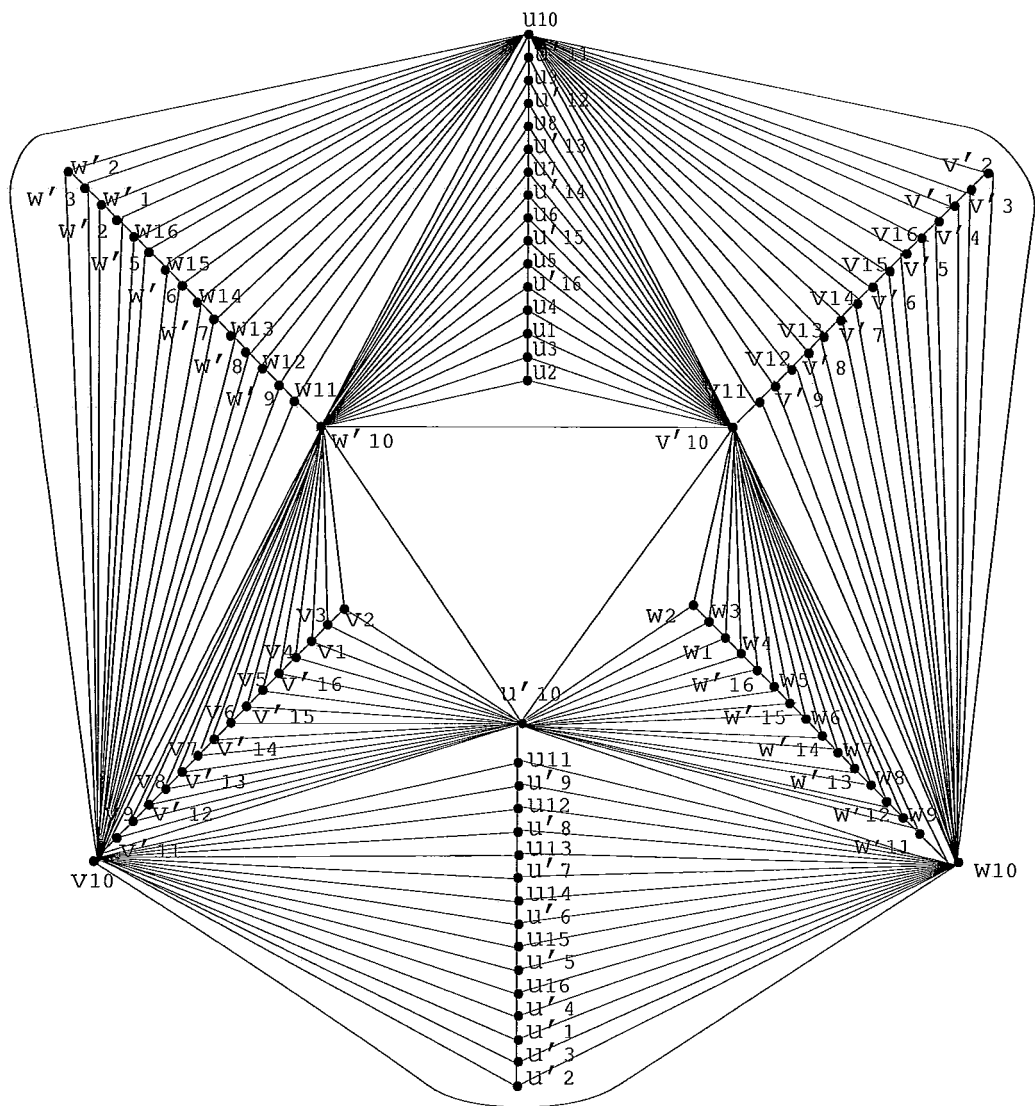


Figura A.13: Grafo G_{10} - decomposição do K_{100}

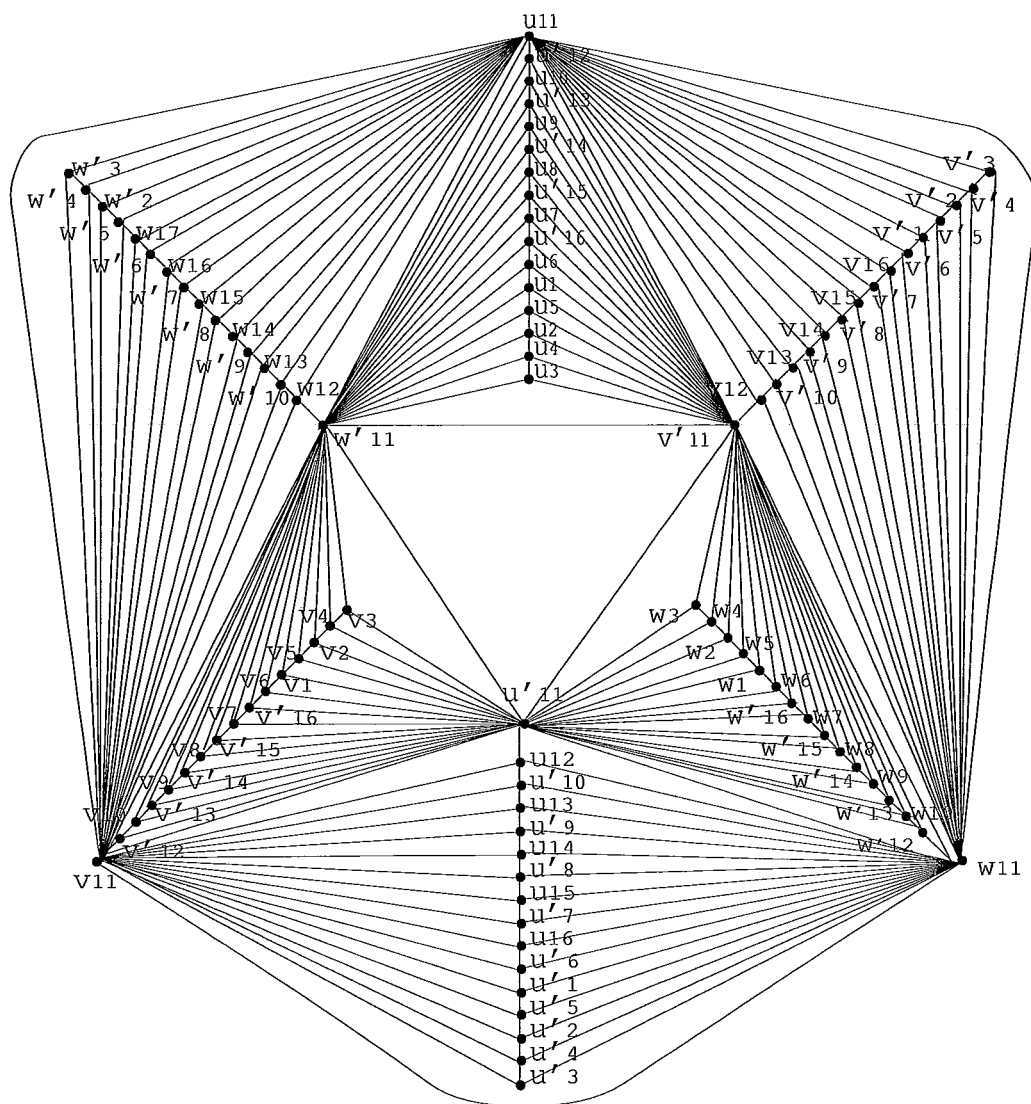


Figura A.14: Grafo G_{11} - decomposição do K_{100}

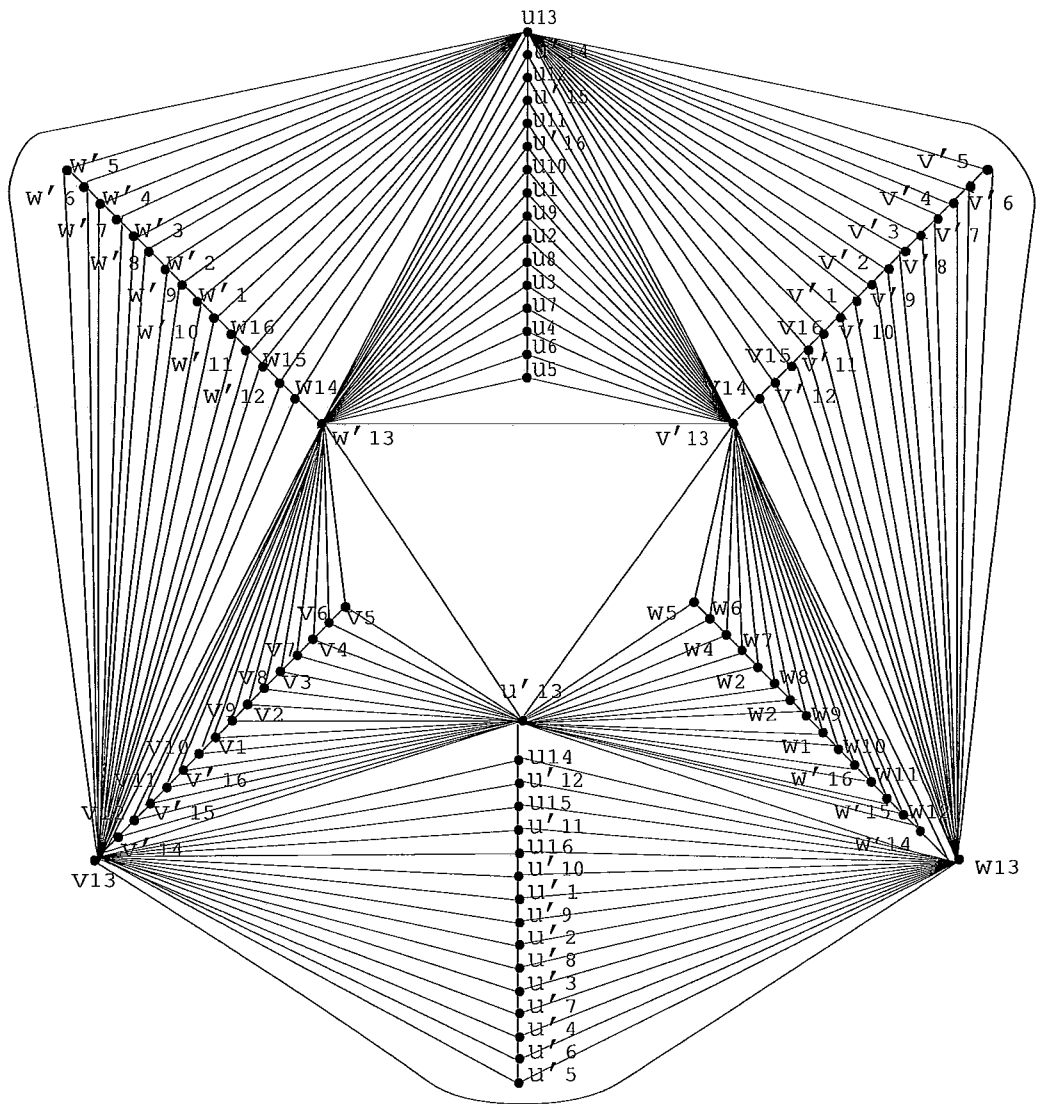


Figura A.16: Grafo G_{13} - decomposição do K_{100}

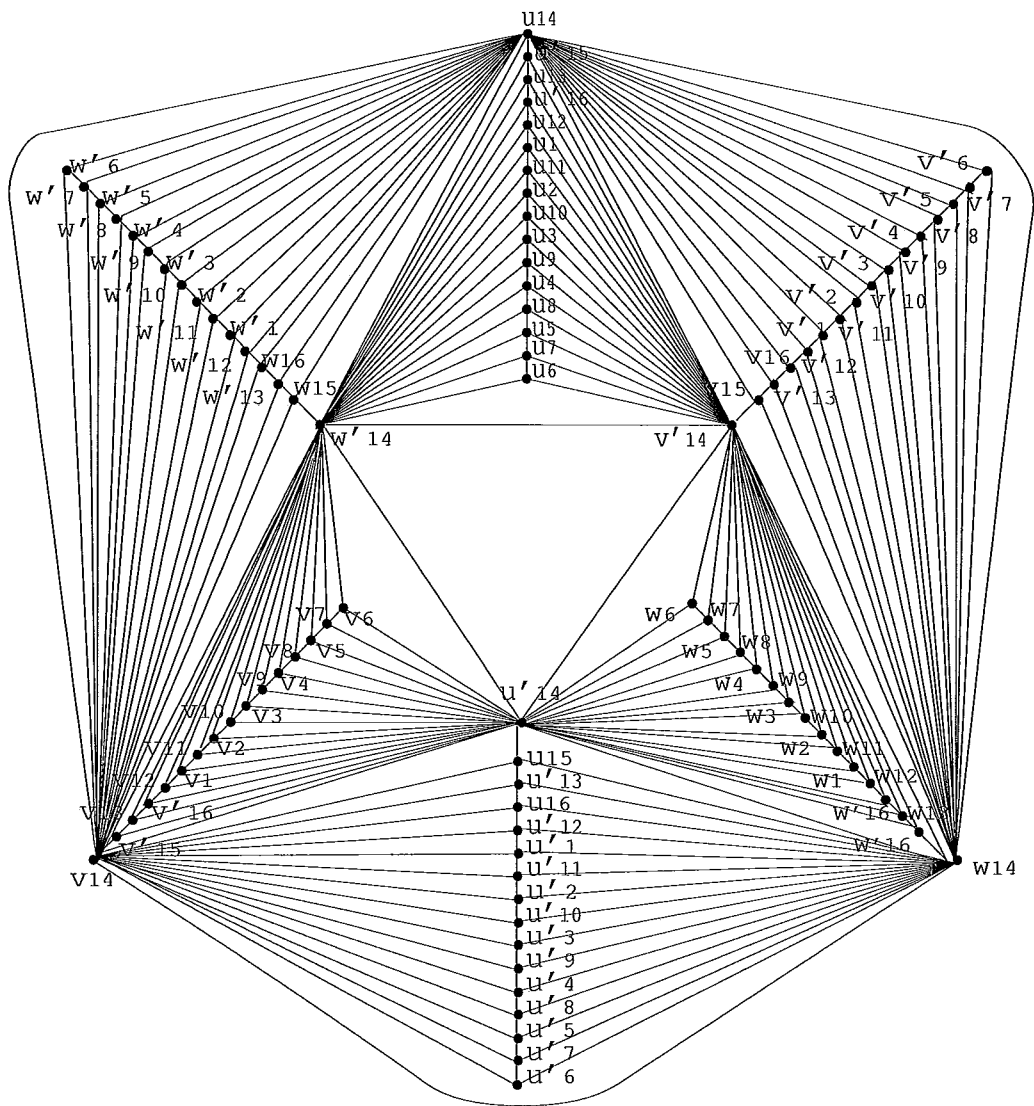


Figura A.17: Grafo G_{14} - decomposição do K_{100}

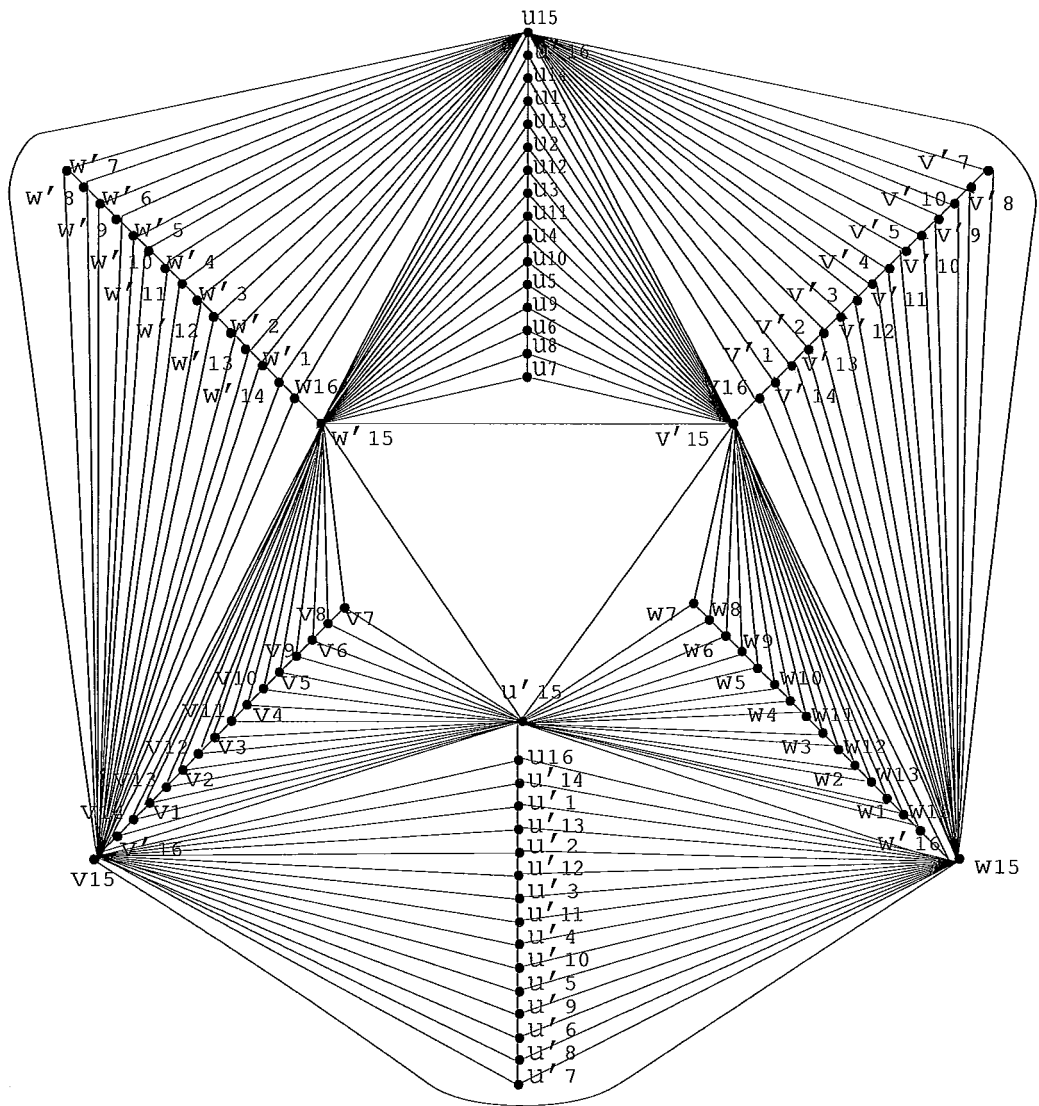


Figura A.18: Grafo G_{15} - decomposição do K_{100}

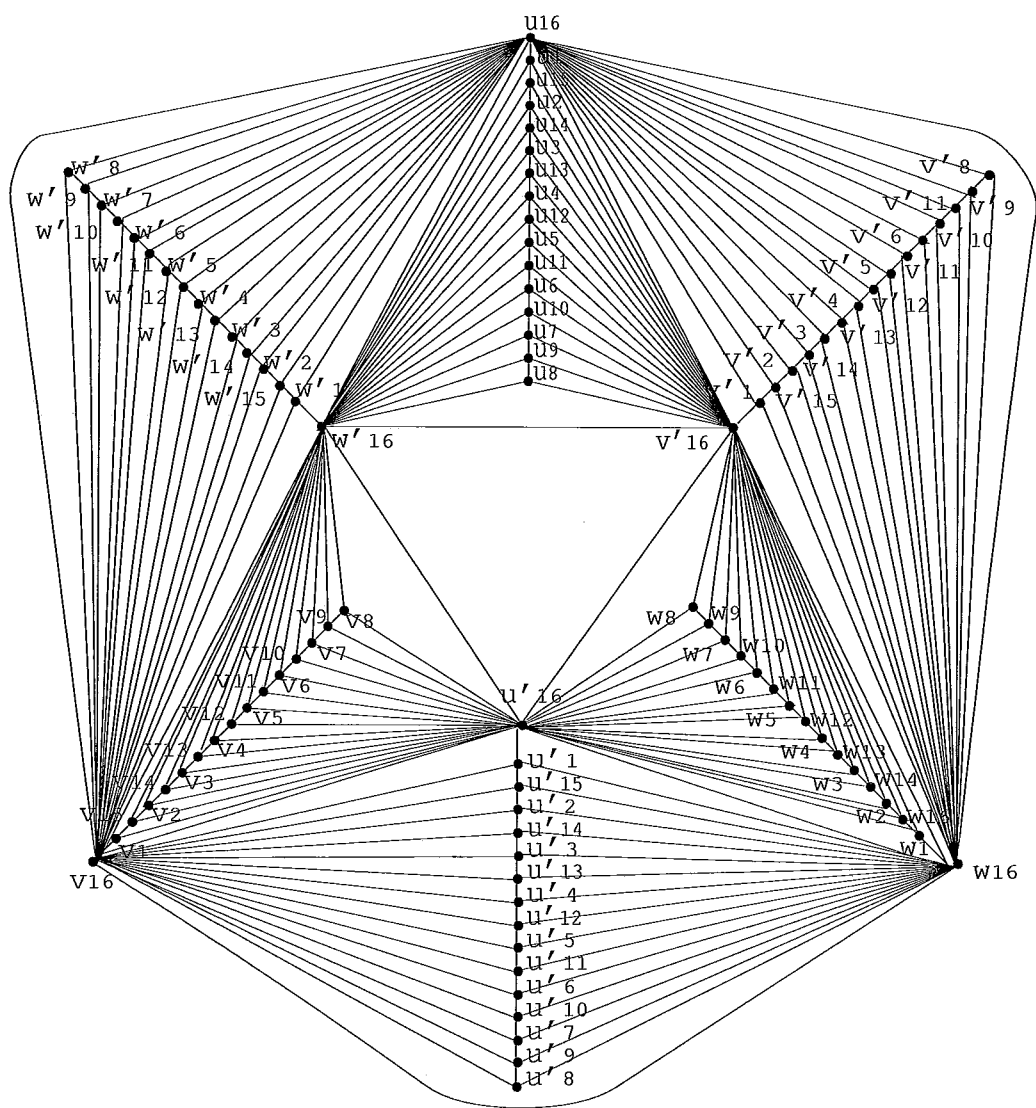


Figura A.19: Grafo G_{16} - decomposição do K_{100}

A.1.3 Grafos G_r , com $r = 1, \dots, 16$, após a Modificação Fundamental

Copiando os elementos das linhas 1, 14 e 15, da matriz A , temos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
+7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7
-7	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Arrume a seqüência de modo que a primeira coluna inicie com o elemento 16, e o último elemento de cada coluna coincida com o primeiro elemento da próxima coluna:

0	16	9	2	11	4	13	6	15	8	1	10	3	12	5	14	7
+7	7	16	9	2	11	4	13	6	15	8	1	10	3	12	5	14
-7	9	2	11	4	13	6	15	8	1	10	3	12	5	14	7	16

Vamos agora marcar os elementos obedecendo às seguintes regras, conforme já descrito anteriormente:

- 1) Os elementos da primeira e da terceira linhas da tabela acima, referentes às constantes 0 e -7 , serão marcados de modo que cada par fique diferente do par correspondente em A' em um único lugar, e de modo que o último elemento de cada par precedente e o primeiro elemento do par subsequente possuam entre si somente uma marcação. A seqüência inicia-se com o elemento p não-marcado;

2) A segunda linha, referente à constante $+7$, será marcada de modo que entre ela e a linha $(p - 1)$, referente à constante -7 , cada par tenha marcação semelhante ao que aparece em A' ou de forma oposta a esta.

const	G_{16}	G_9	G_2	G_{11}	G_4	G_{13}	G_6	G_{15}	G_8	G_1	G_{10}	G_3	G_{12}	G_5	G_{14}	G_7
0	16	9	2	11'	4'	13	6	15'	8'	1'	10	3	12'	5'	14	7
+7	7'	16	9	2	11'	4'	13	6	15'	8'	1'	10	3	12'	5'	14
-7	9'	2'	11	4	13'	6'	15	8	1	10'	3'	12	5	14'	7'	16

Assim sendo, no caso dos grafos onde o elemento referente à constante 0 aparecer marcado, então a modificação fundamental será feita nos desenhos C_1 , C_2 e C_3 . Caso contrário, os desenhos que receberão a modificação serão C_4 , C_5 e C_6 . No grafo G_7 não é retirada nenhuma aresta, somente inserimos o vértice x na fronteira exterior e conectamos este aos os vértices u_7 , v_7 e w_7 .

Logo os grafos G_1 a G_{16} modificados serão os seguintes:

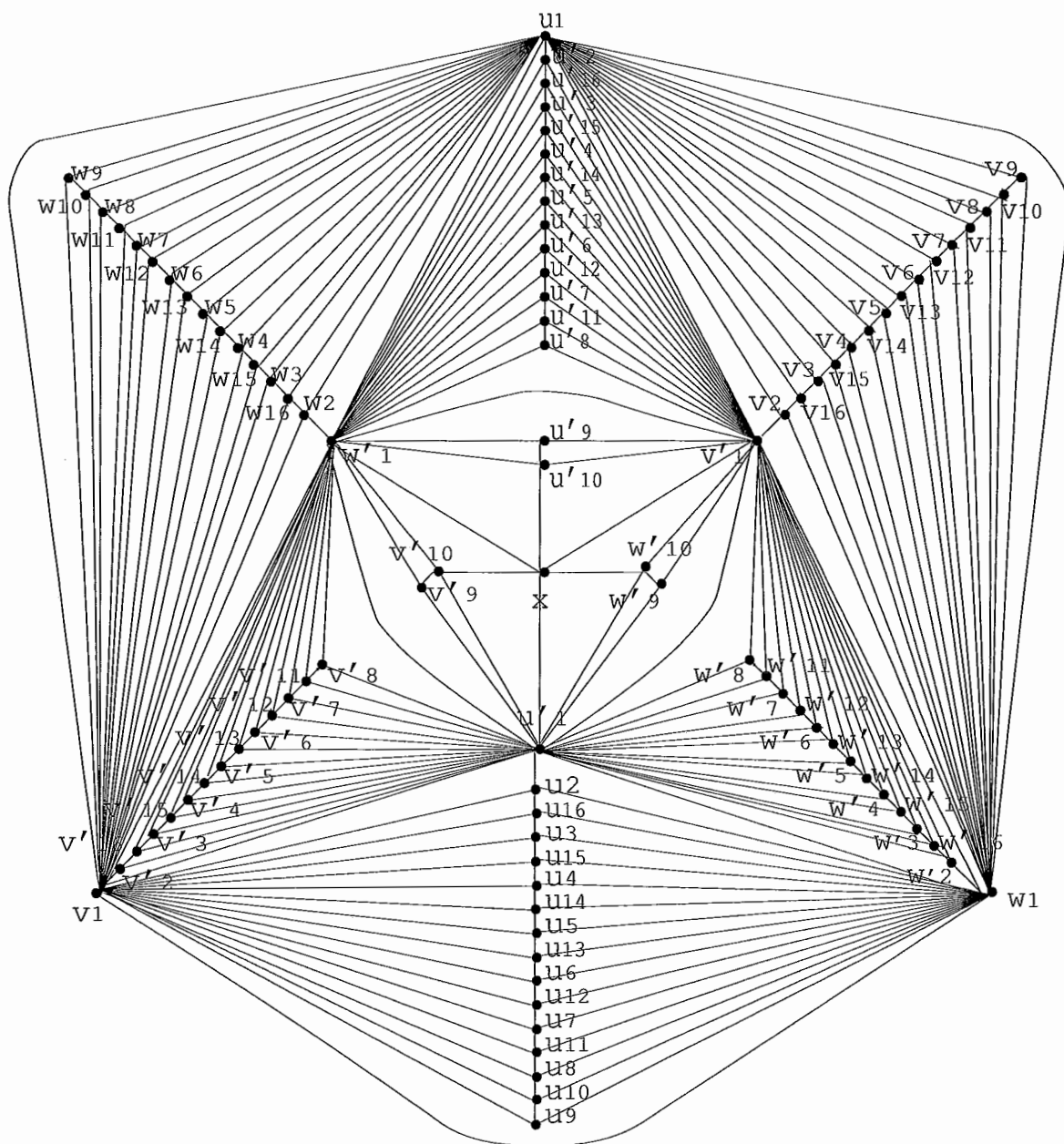


Figura A.20: Grafo G_1 modificado - decomposição do K_{100}

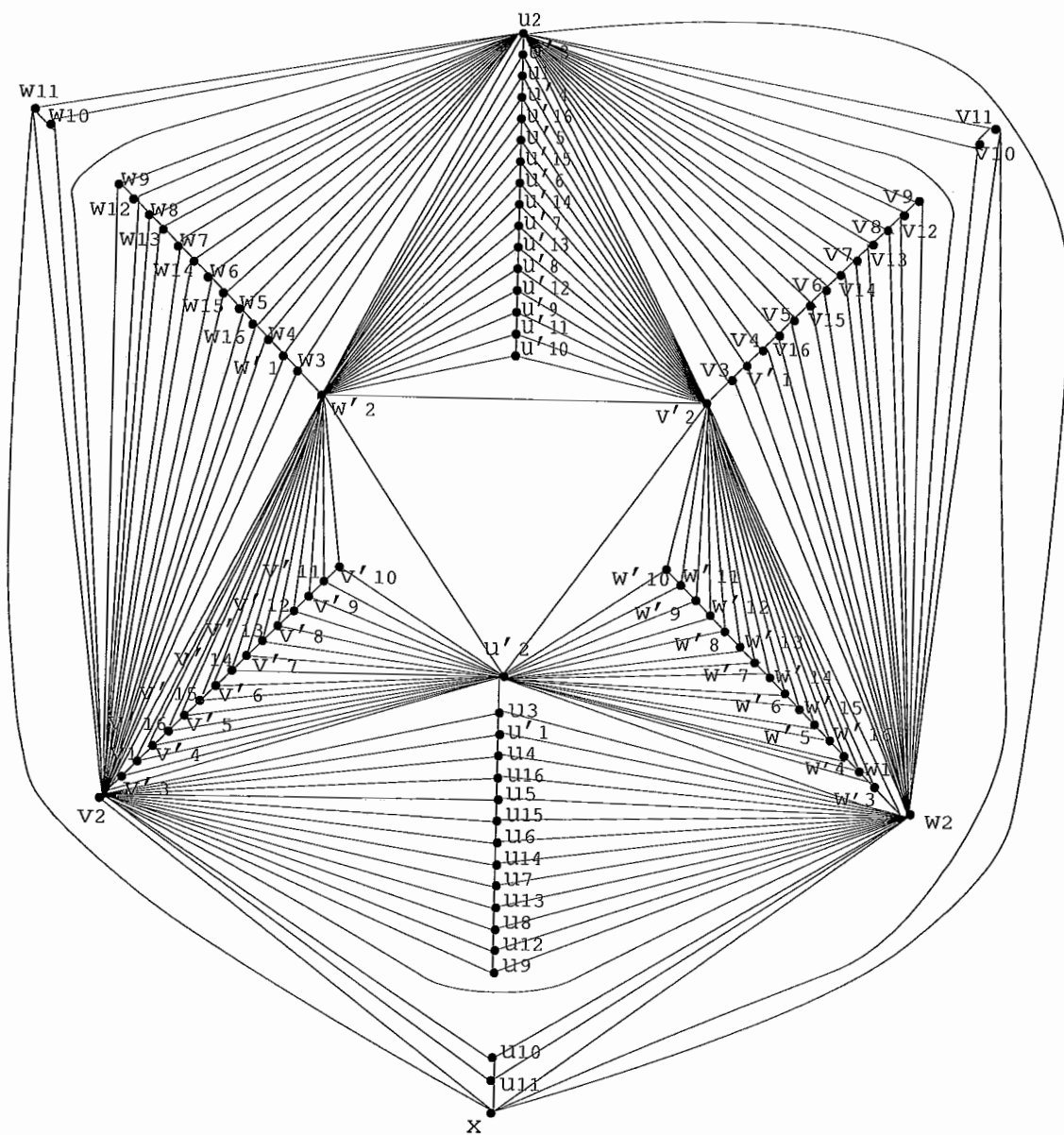


Figura A.21: Grafo G_2 modificado - decomposição do K_{100}

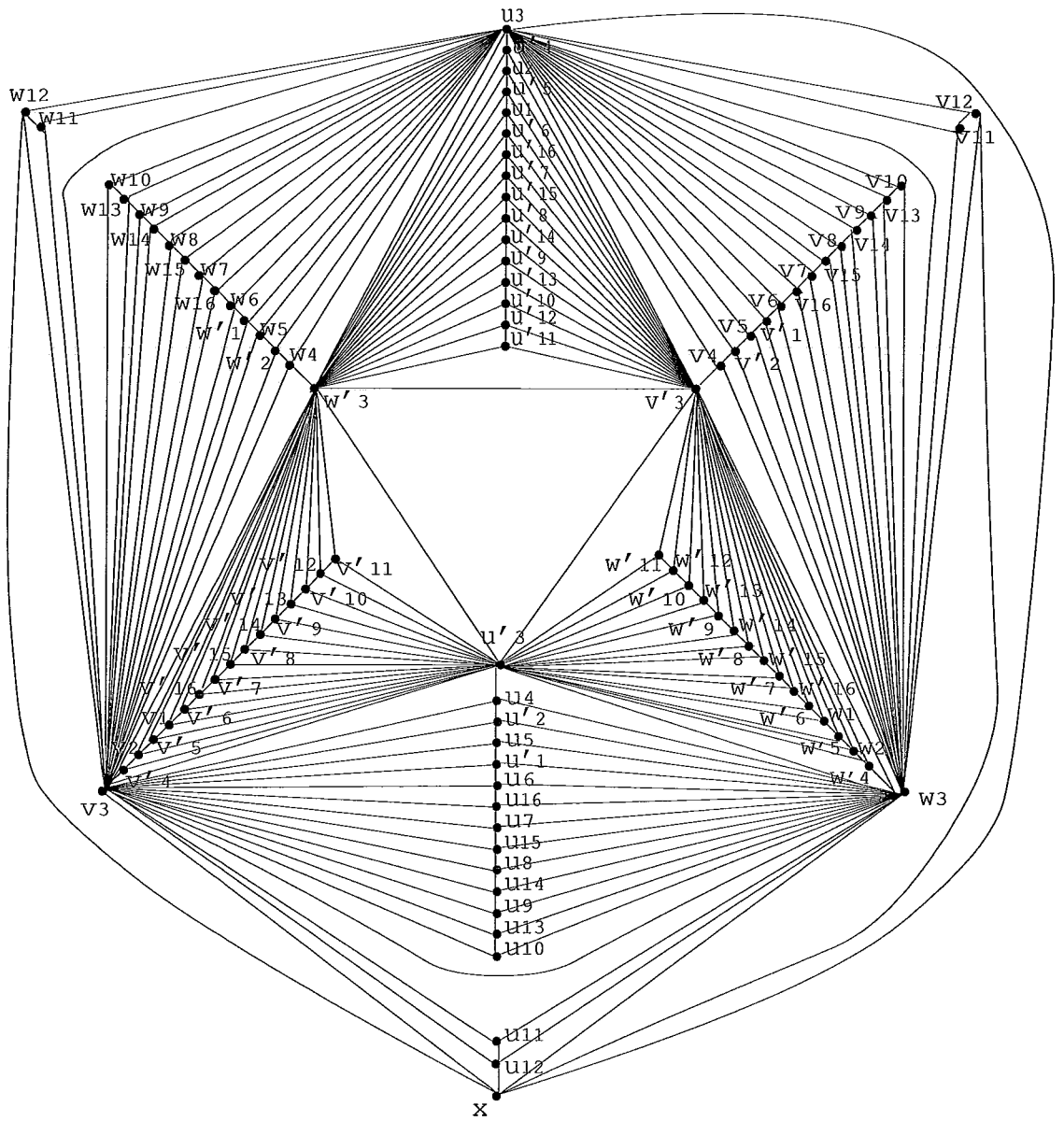


Figura A.22: Grafo G_3 modificado - decomposição do K_{100}

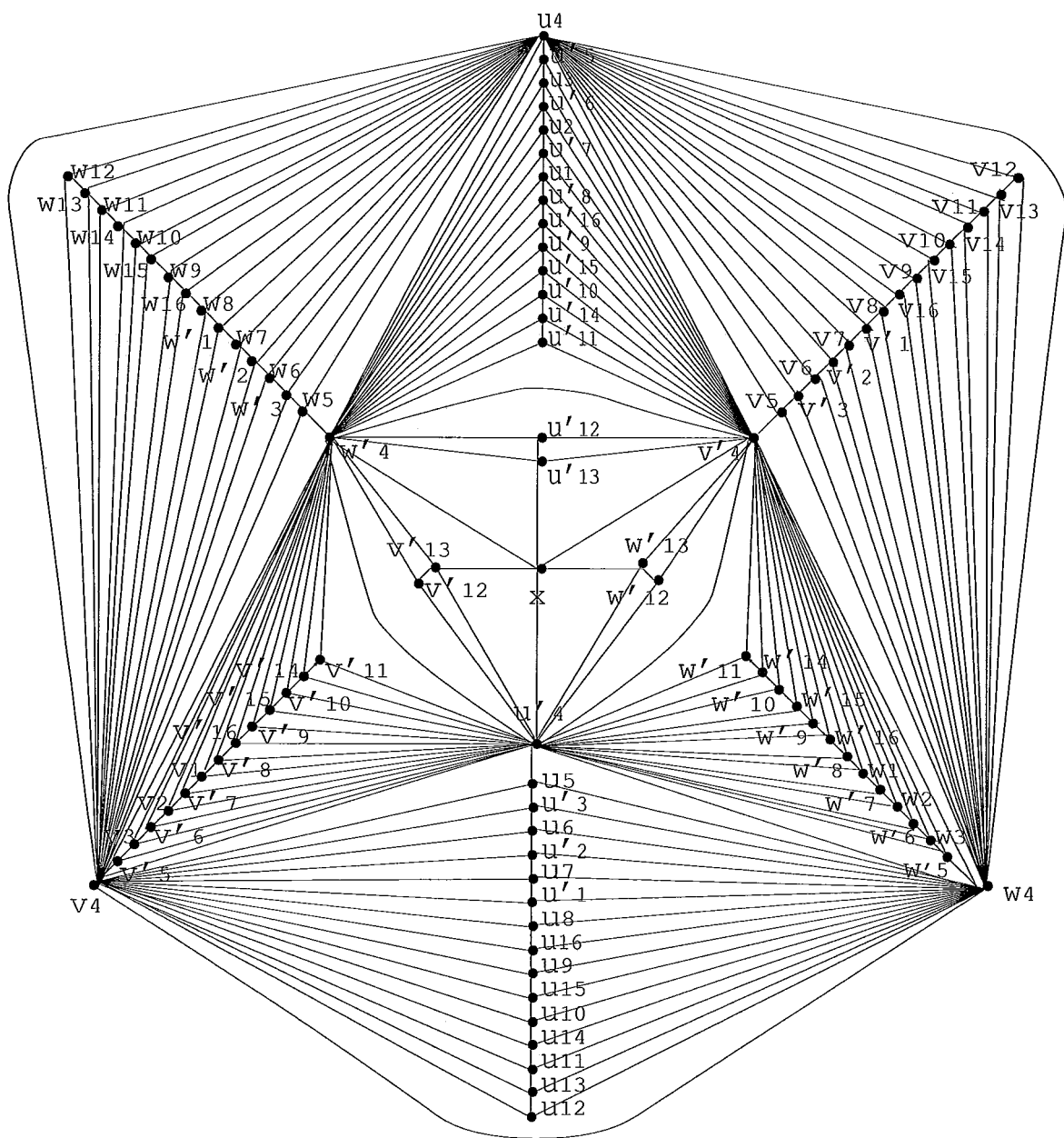


Figura A.23: Grafo G_4 modificado - decomposição do K_{100}

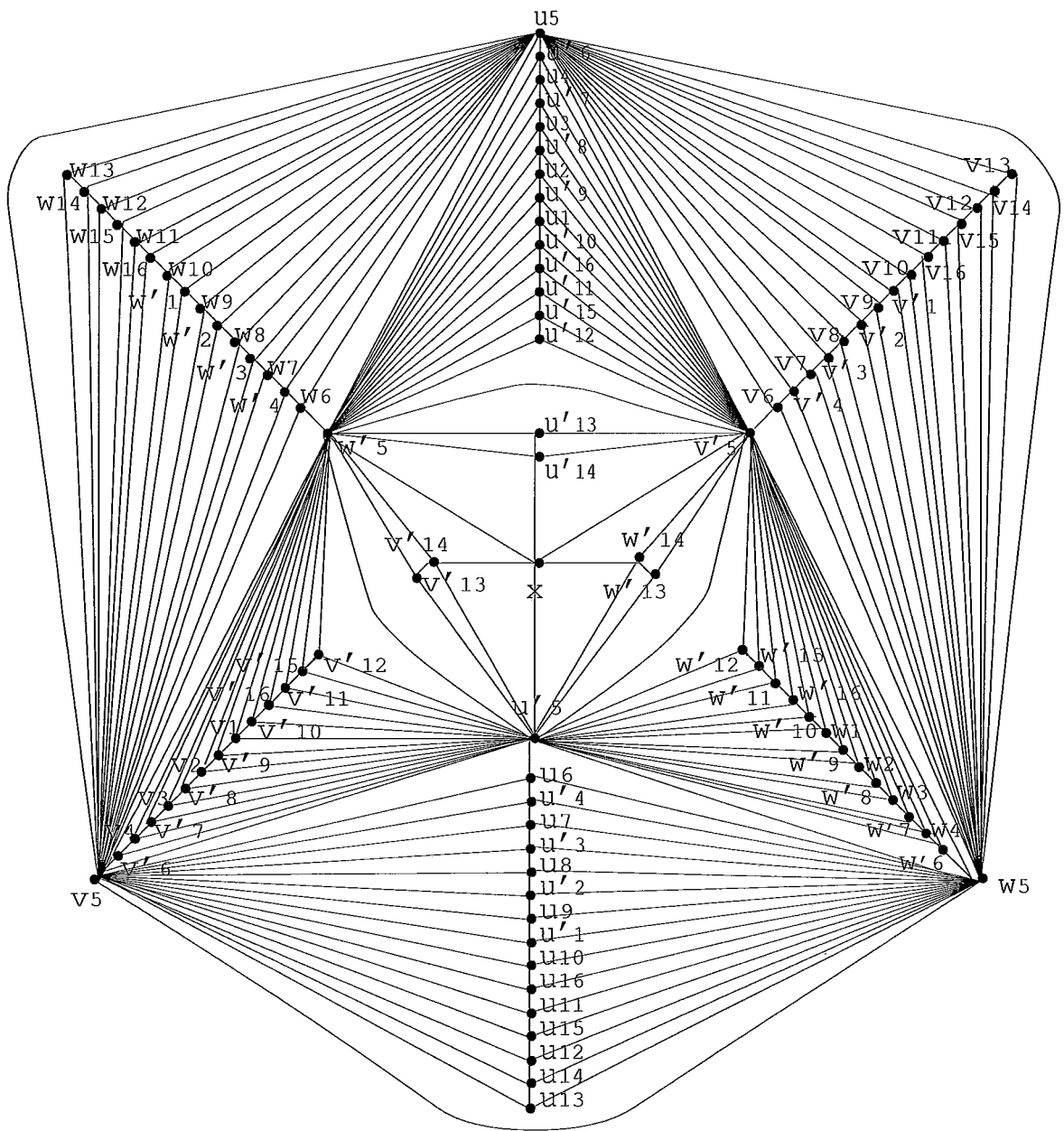


Figura A.24: Grafo G_5 modificado - decomposição do K_{100}

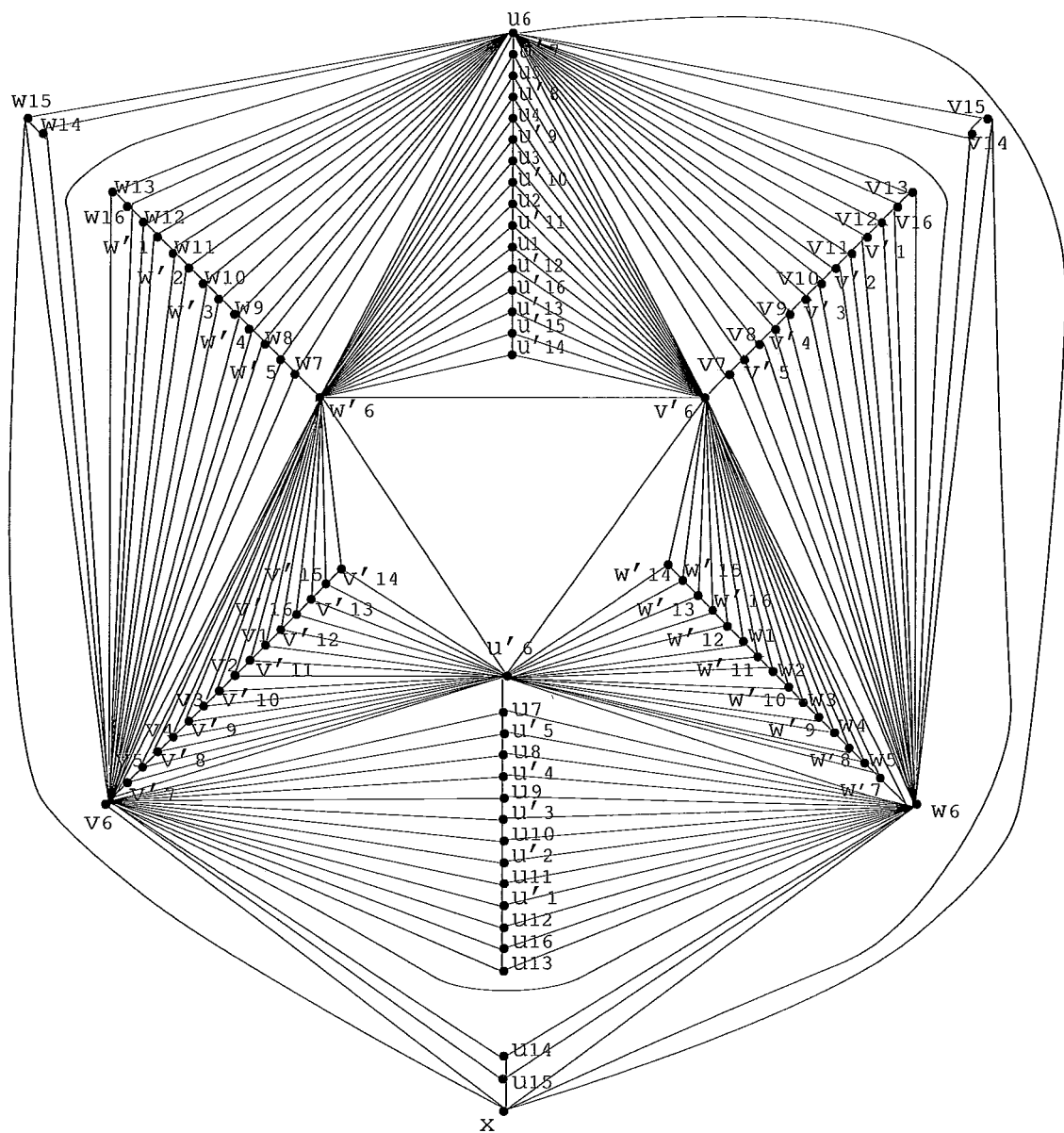


Figura A.25: Grafo G_6 modificado - decomposição do K_{100}

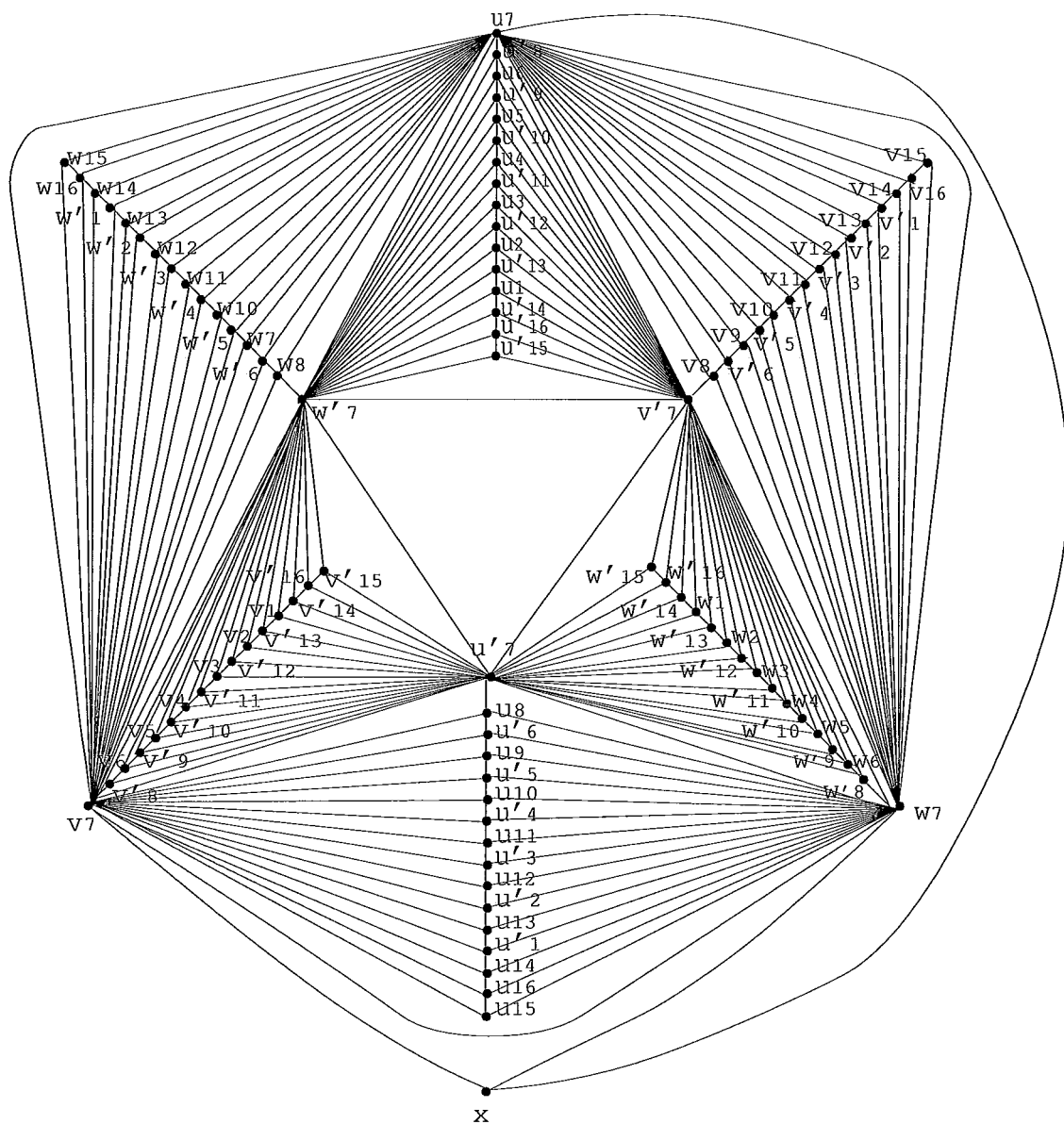


Figura A.26: Grafo G_7 modificado - decomposição do K_{100}

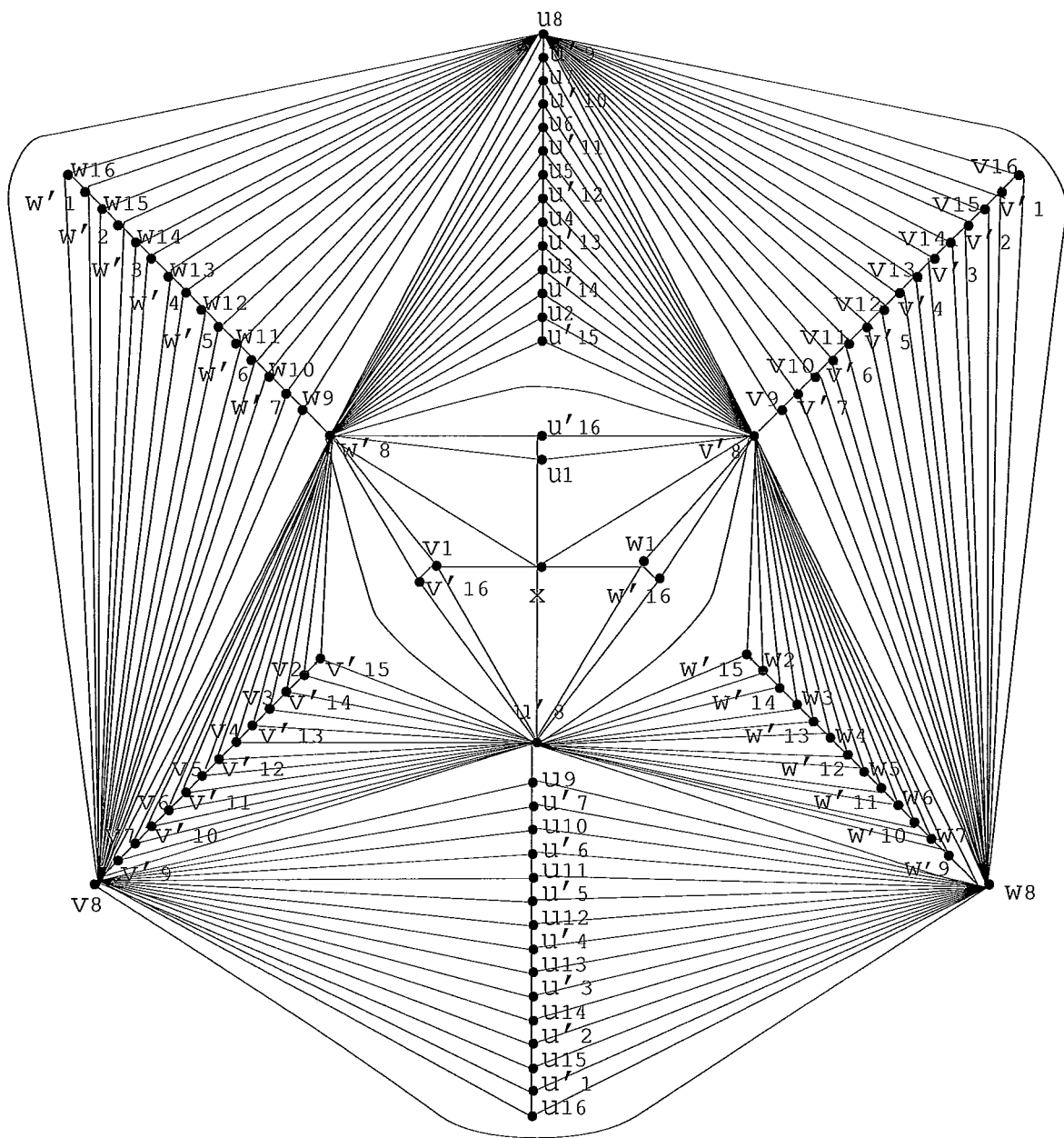


Figura A.27: Grafo G_8 modificado - decomposição do K_{100}

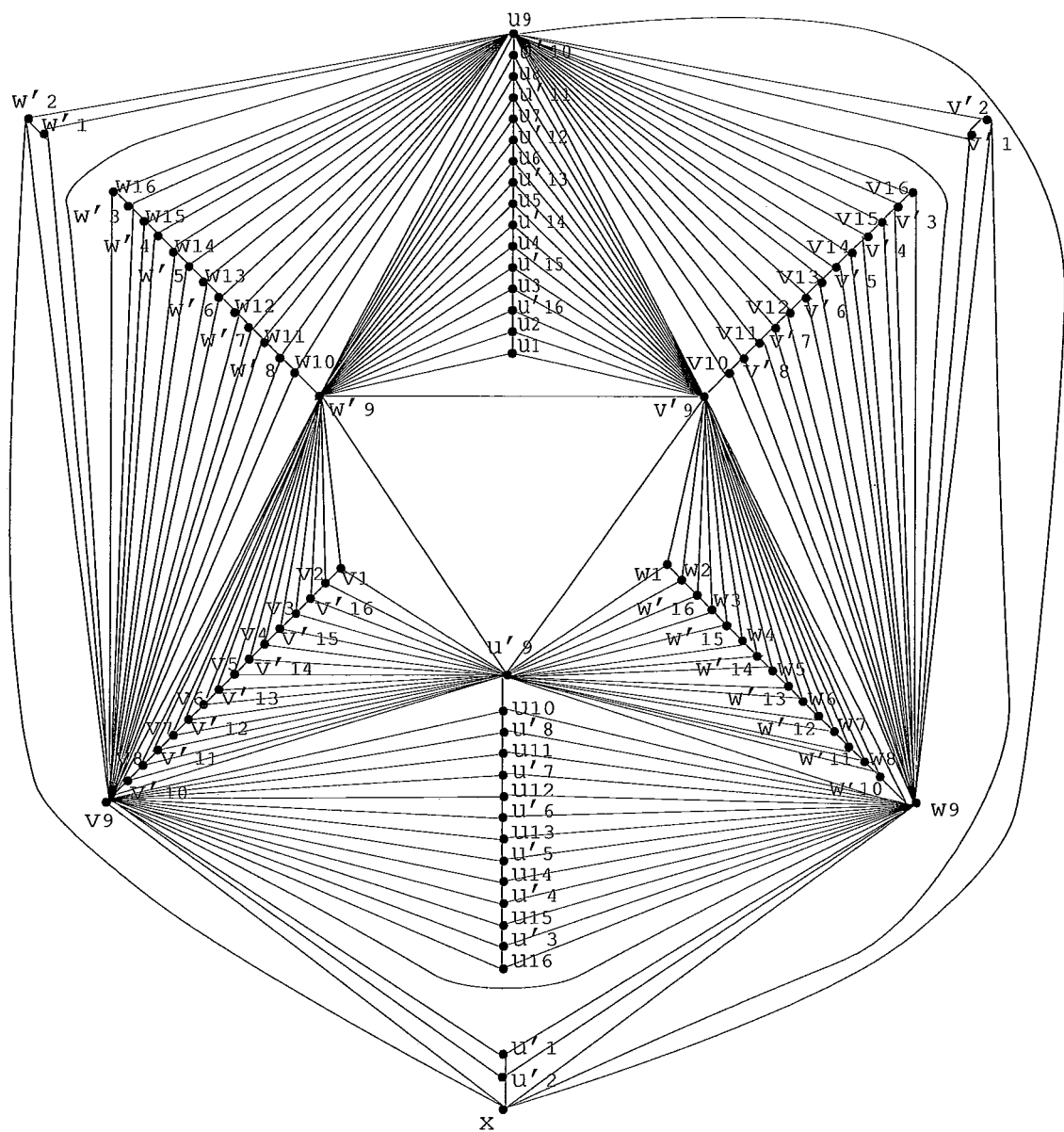


Figura A.28: Grafo G_9 modificado - decomposição do K_{100}

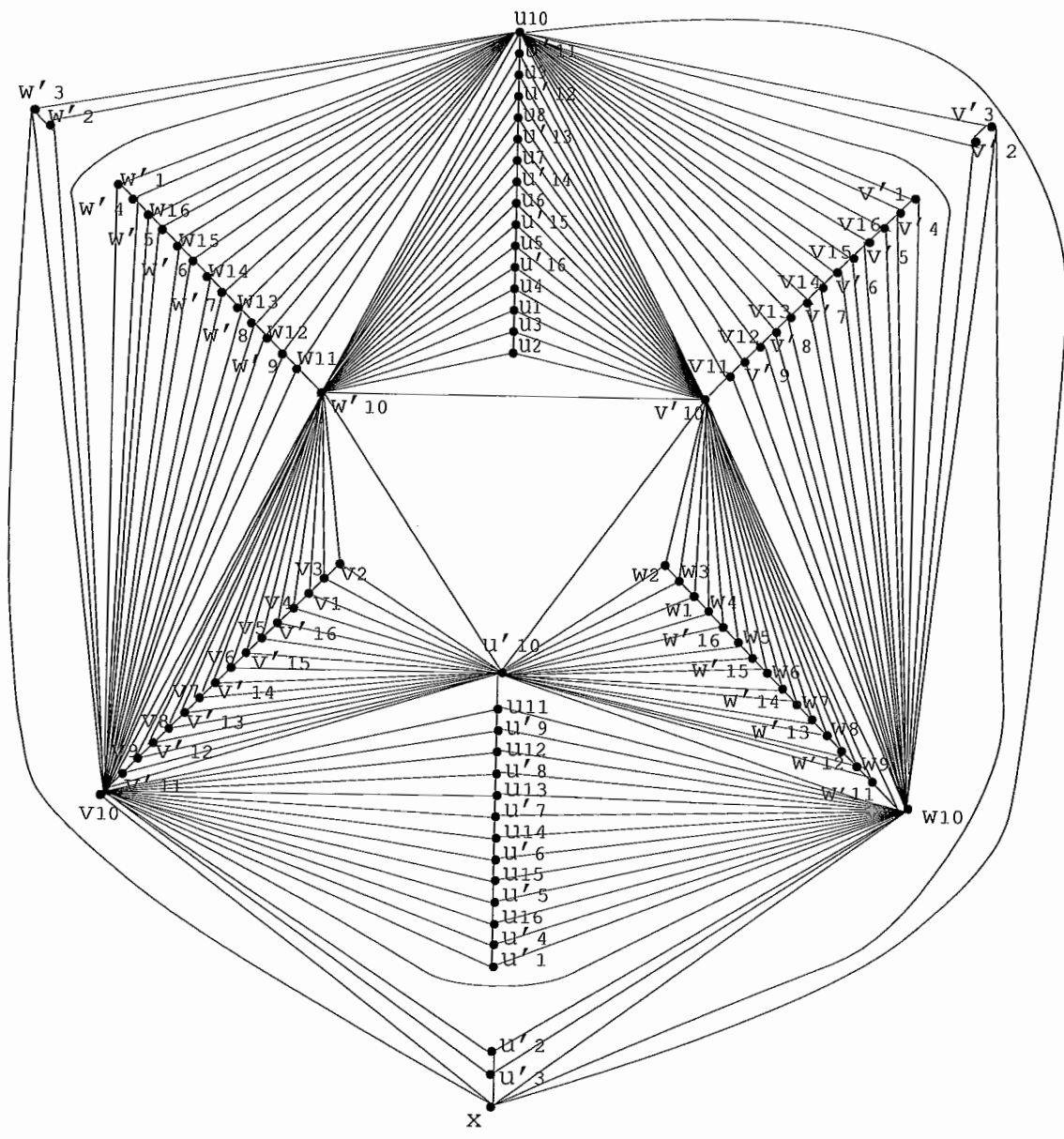
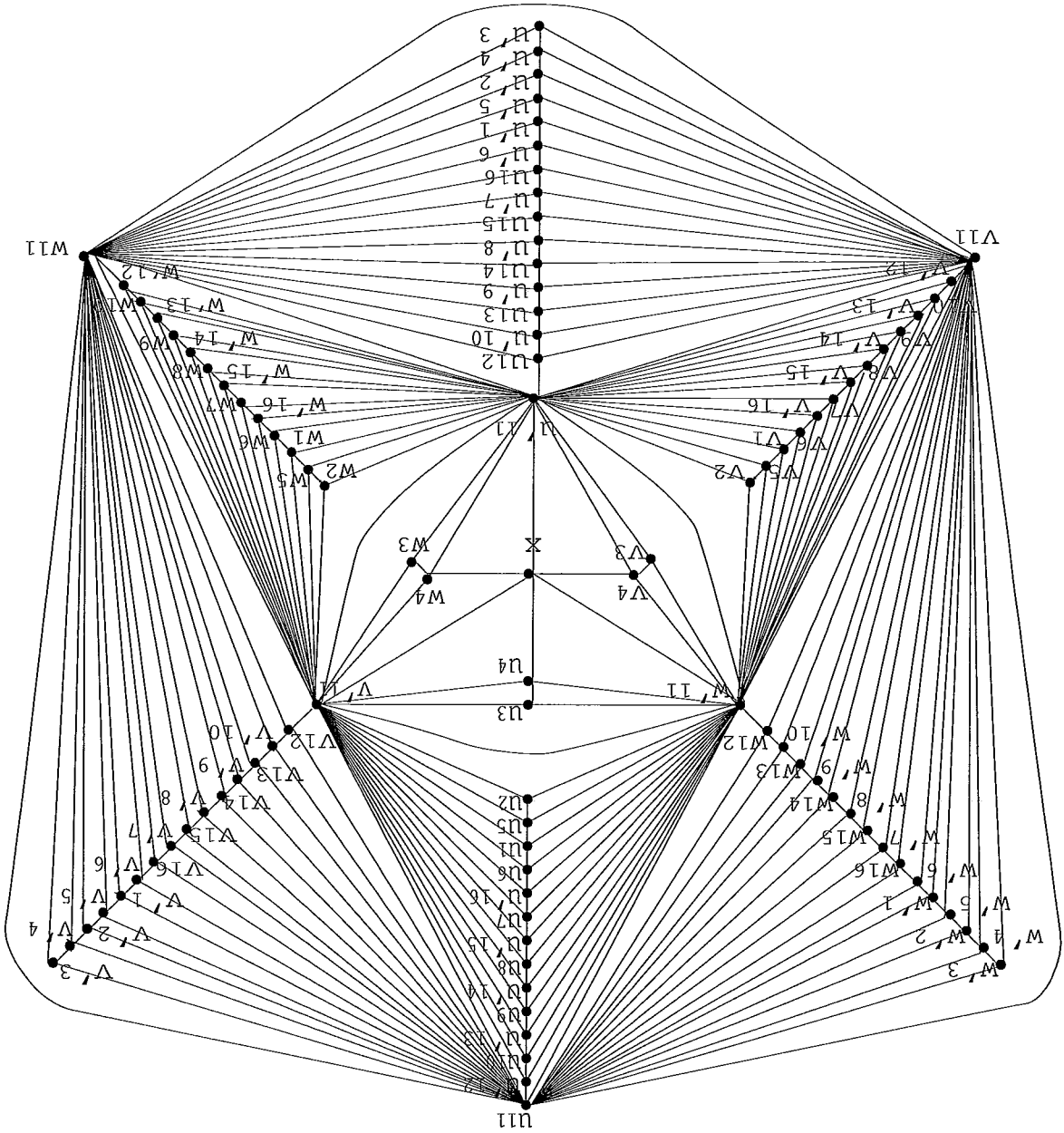


Figura A.29: Grafo G_{10} modificado - decomposição do K_{100}

Figura A.30: Grafo G_{11} modificado - decomposição de K_{100}



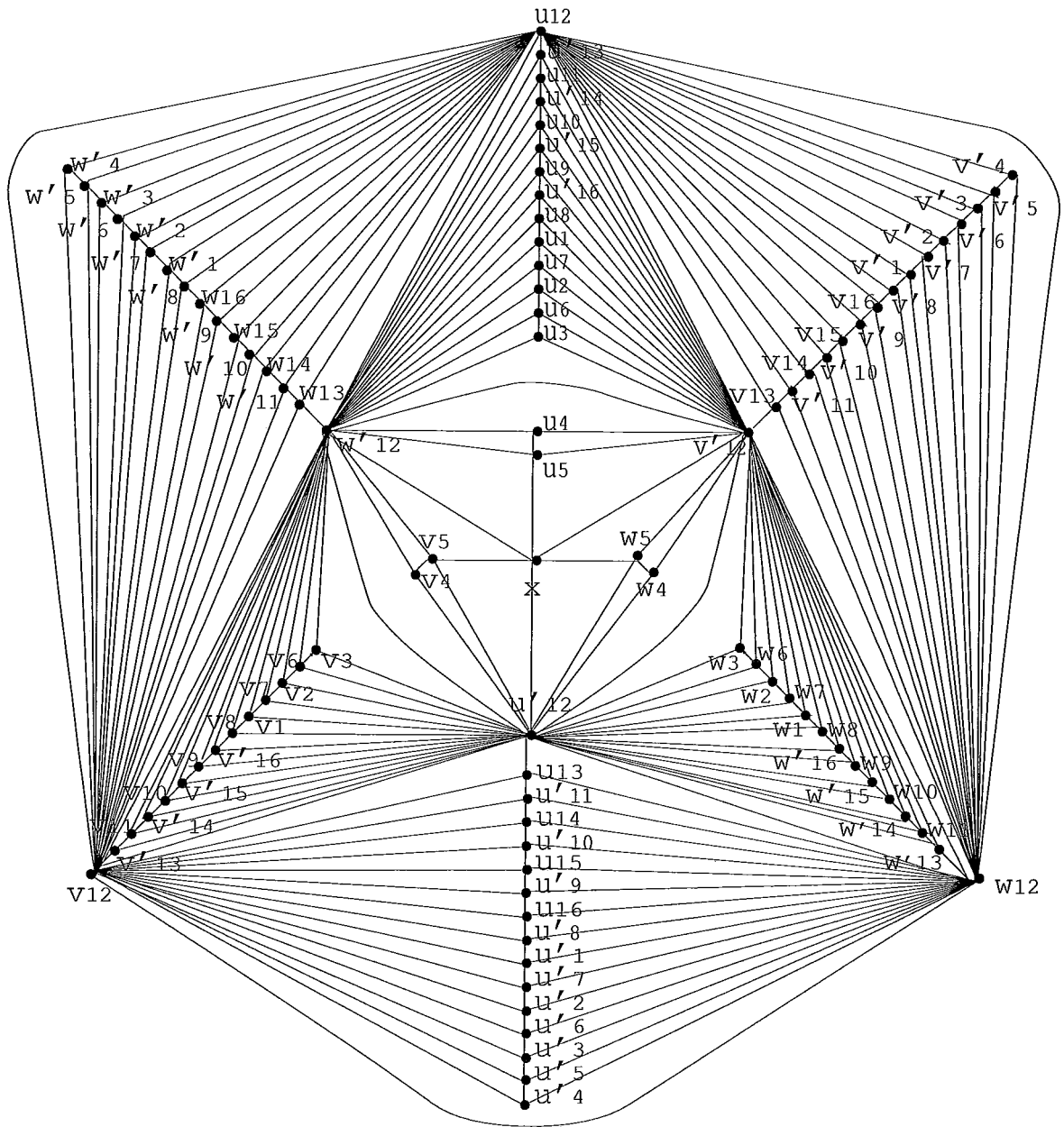


Figura A.31: Grafo G_{12} modificado - decomposição do K_{100}

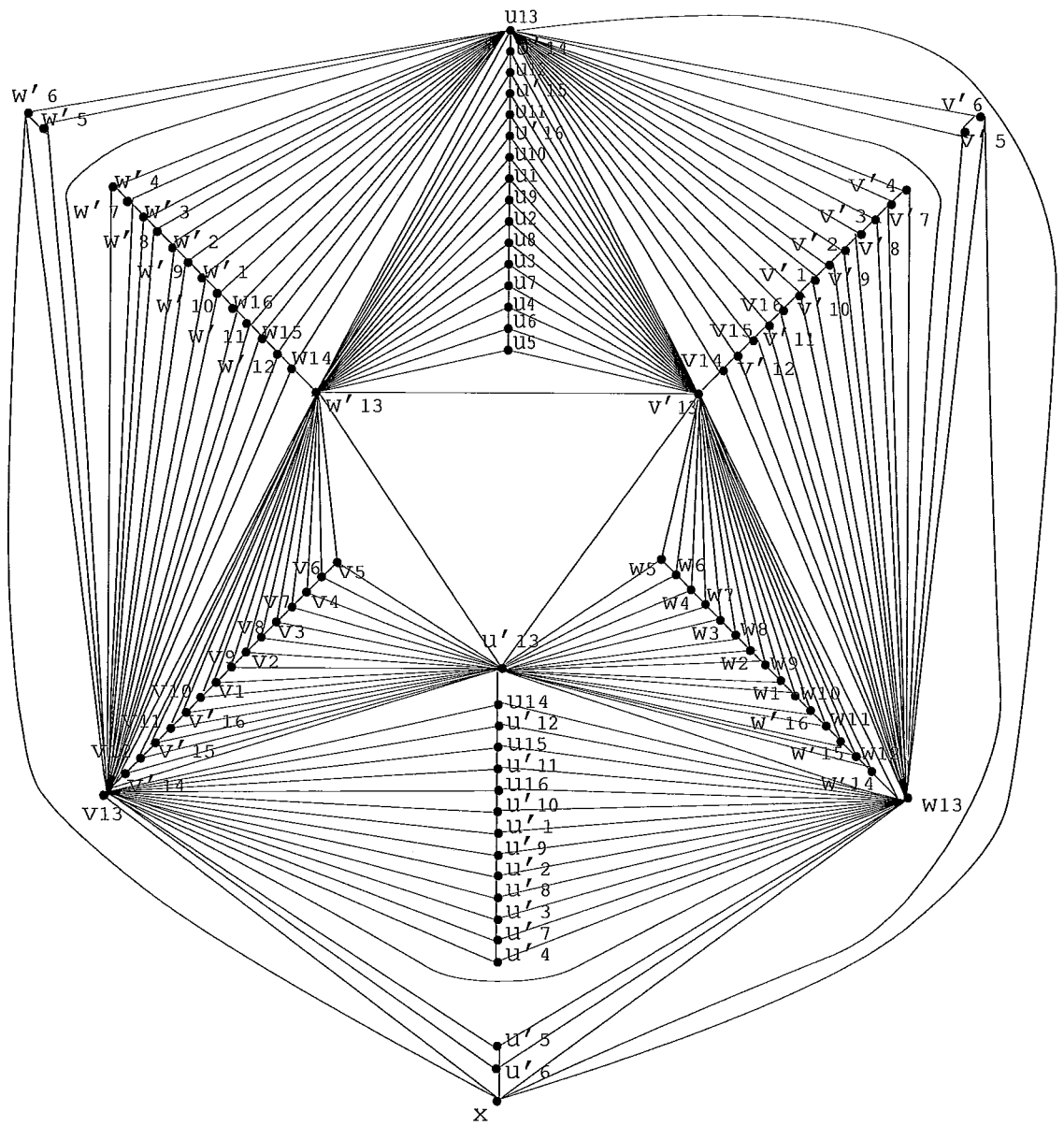


Figura A.32: Grafo G_{13} modificado - decomposição do K_{100}

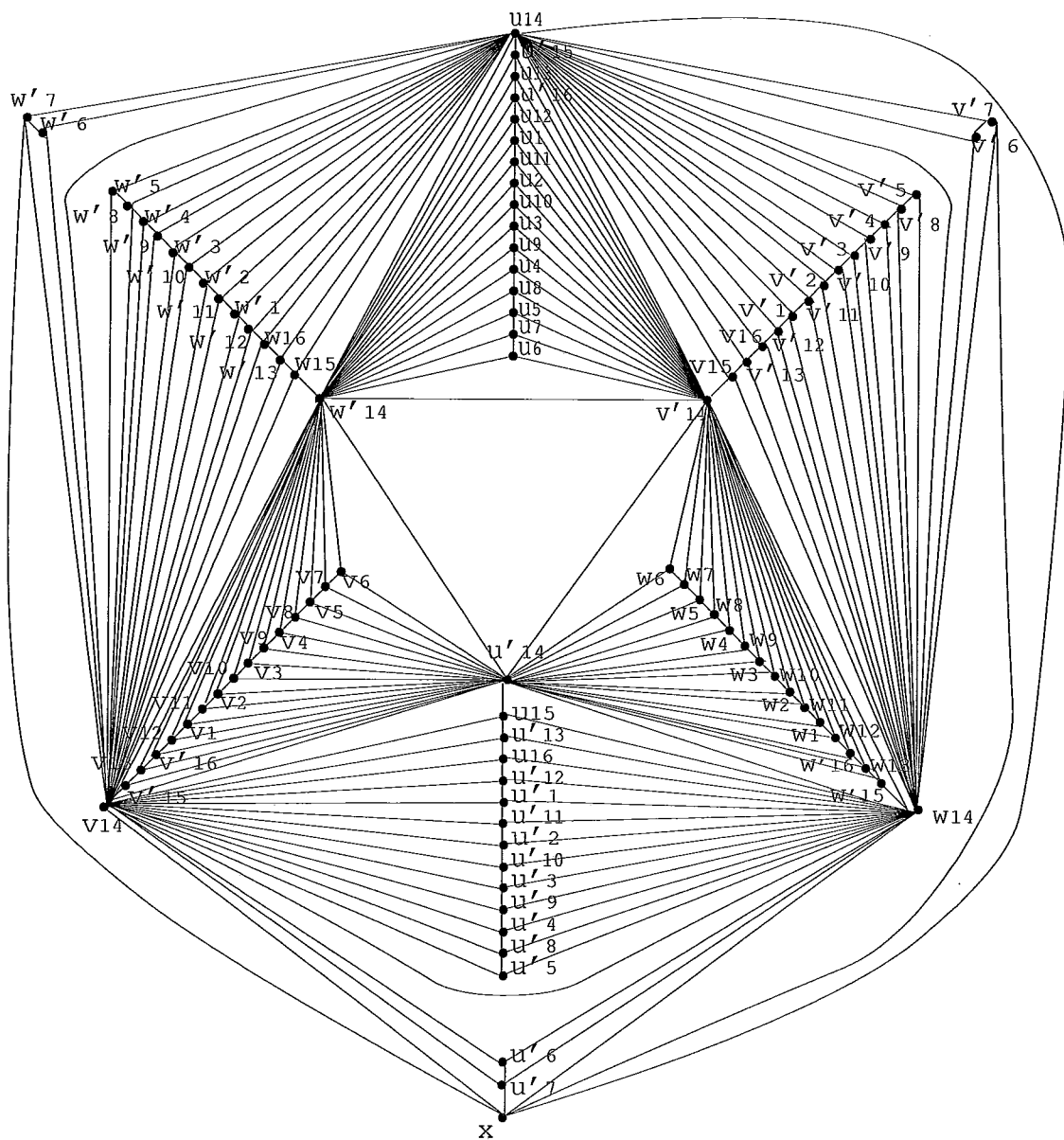


Figura A.33: Grafo G_{14} modificado - decomposição do K_{100}

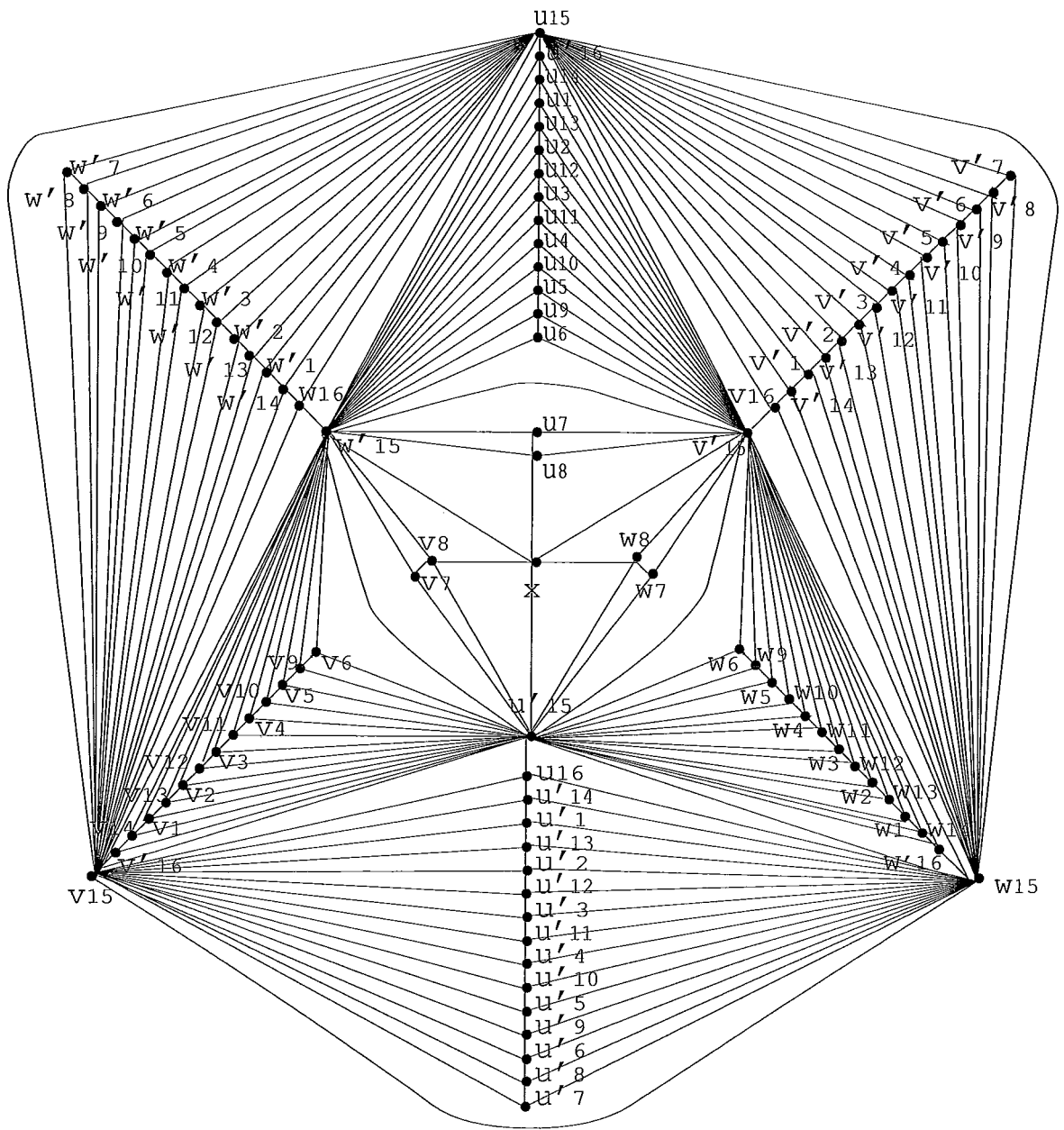


Figura A.34: Grafo G_{15} modificado - decomposição do K_{100}

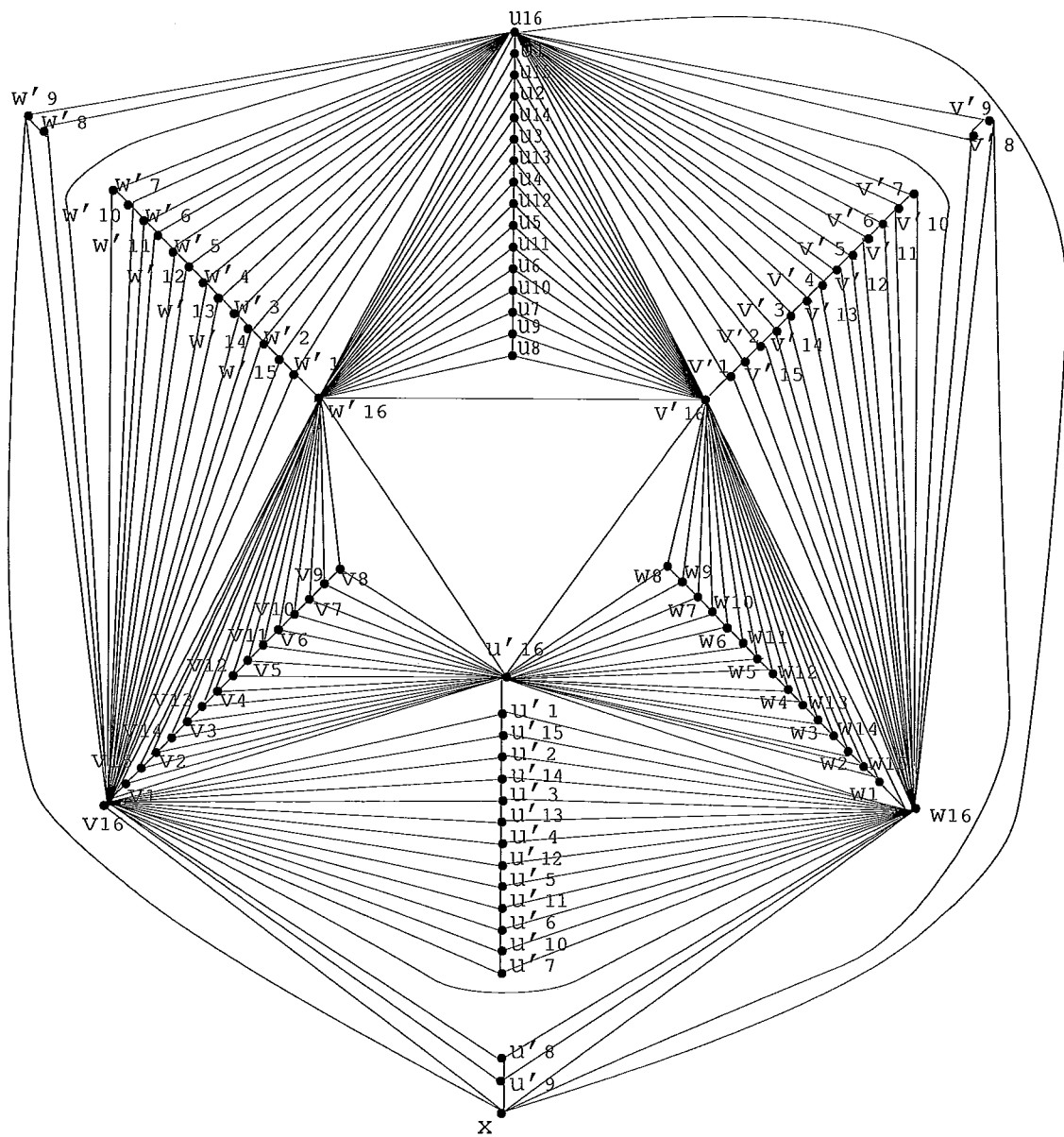


Figura A.35: Grafo G_{16} modificado - decomposição do K_{100}

A.1.4 Grafo suplementar G_{17}

Ainda na tabela anterior, sabemos que os elementos da segunda e terceira linhas (constantes $+7$ e -7) indicam as arestas removidas durante a modificação fundamental. Portanto, no grafo suplementar devem aparecer as seguintes arestas:

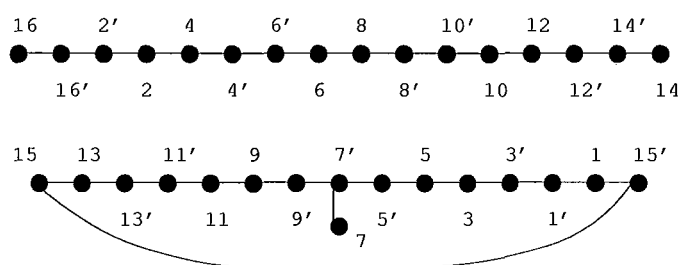


Figura A.36: Arestas restantes - decomposição do K_{100}

Para efetuarmos a modificação sugerida para este ciclo, precisamos inserir a aresta $(3, 5')$. Para isso, necessitamos alterar alguns grafos conforme mostra o estudo a seguir:

Aresta removida	Aresta inserida	Grafo	Constantes	Desenho alt ou não-alt
$(3, 5')$	$(5', 11')$	G_4	$+1, -1$	alt
$(5', 11')$	$(5', 7')$	G_{16}	$+5, -5$	alt

Assim, obtemos a aresta $(5', 7')$ que pode ser removida do ciclo anterior.
Logo ficamos com:

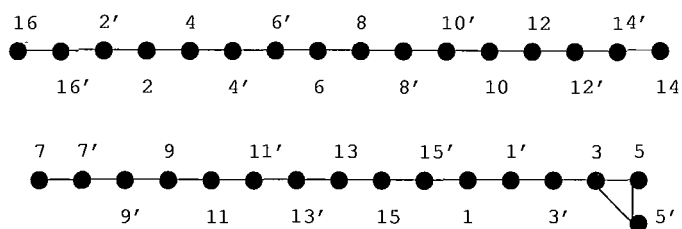
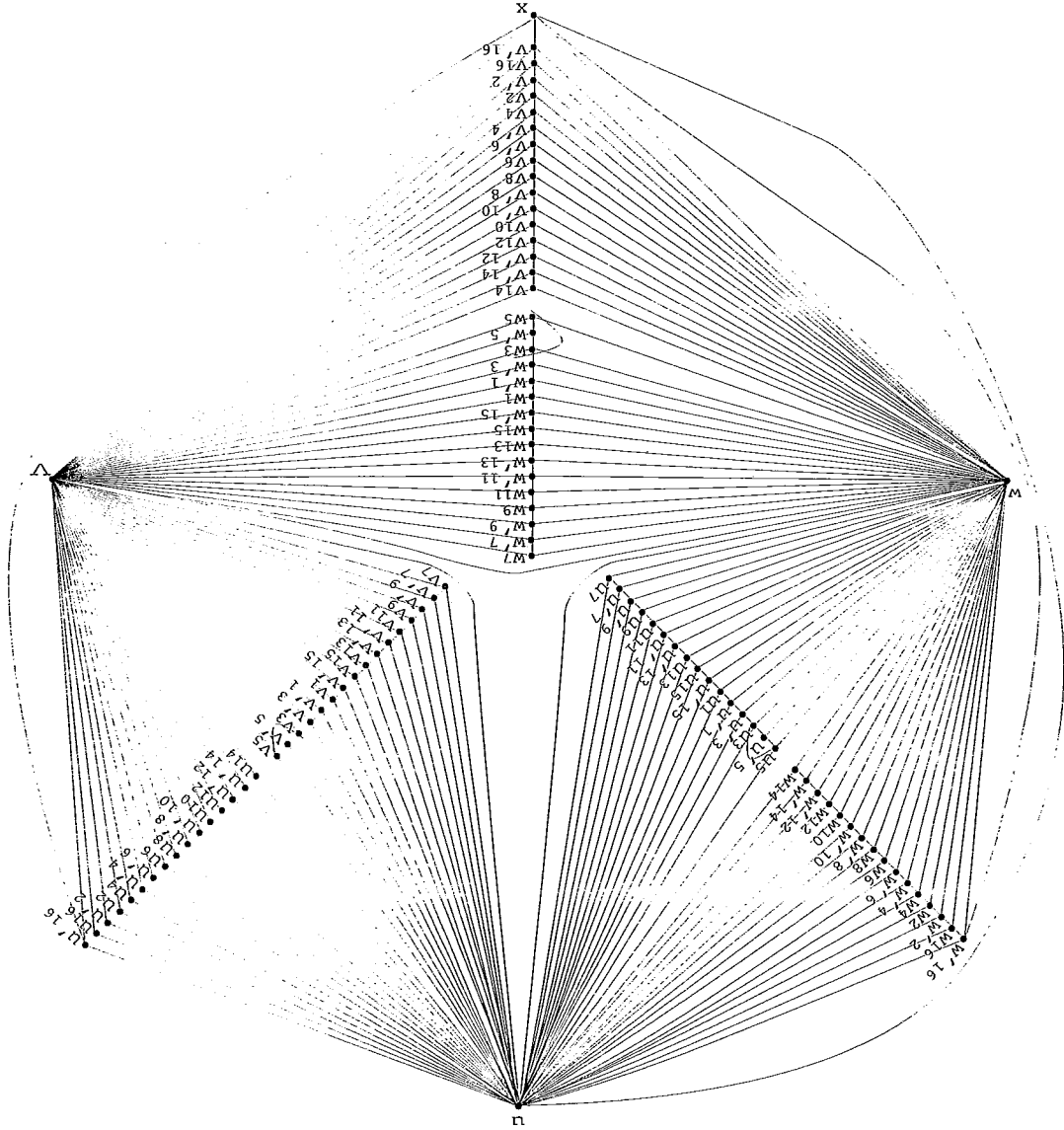


Figura A.37: Ciclo alterado - decomposição do K_{100}

Figura A.38: Grafo suplementar G_{17} - decomposição do K_{100}



E o grafo suplementar G_{17} será o seguinte:

A.1.5 Modificação adicional efetuada nos grafos G_4 e G_{16}

E os grafos G_4 e G_{16} alterados novamente, são os das figuras A.39 e A.40.

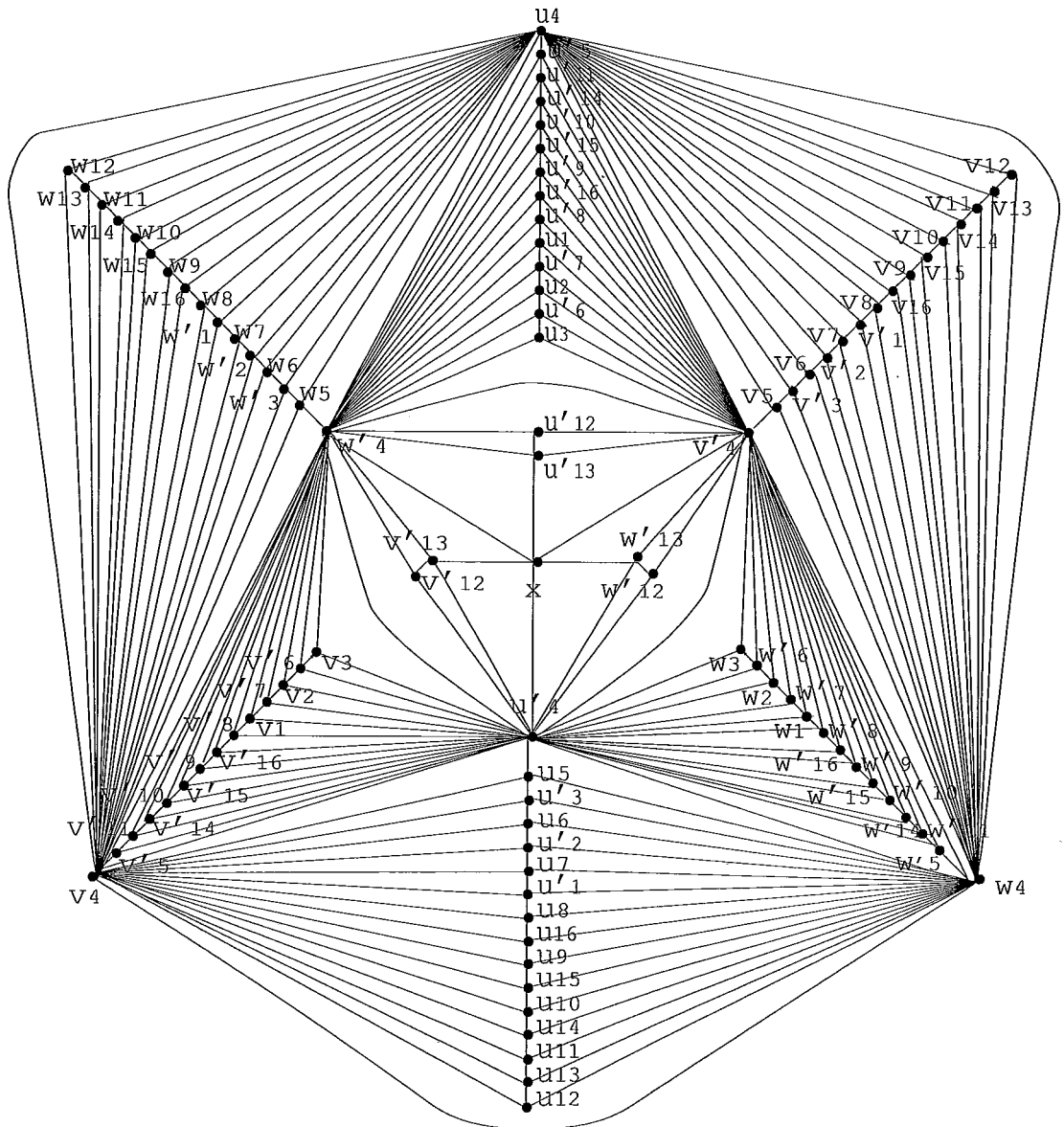


Figura A.39: Grafo G_4 modificado novamente - decomposição do K_{100}

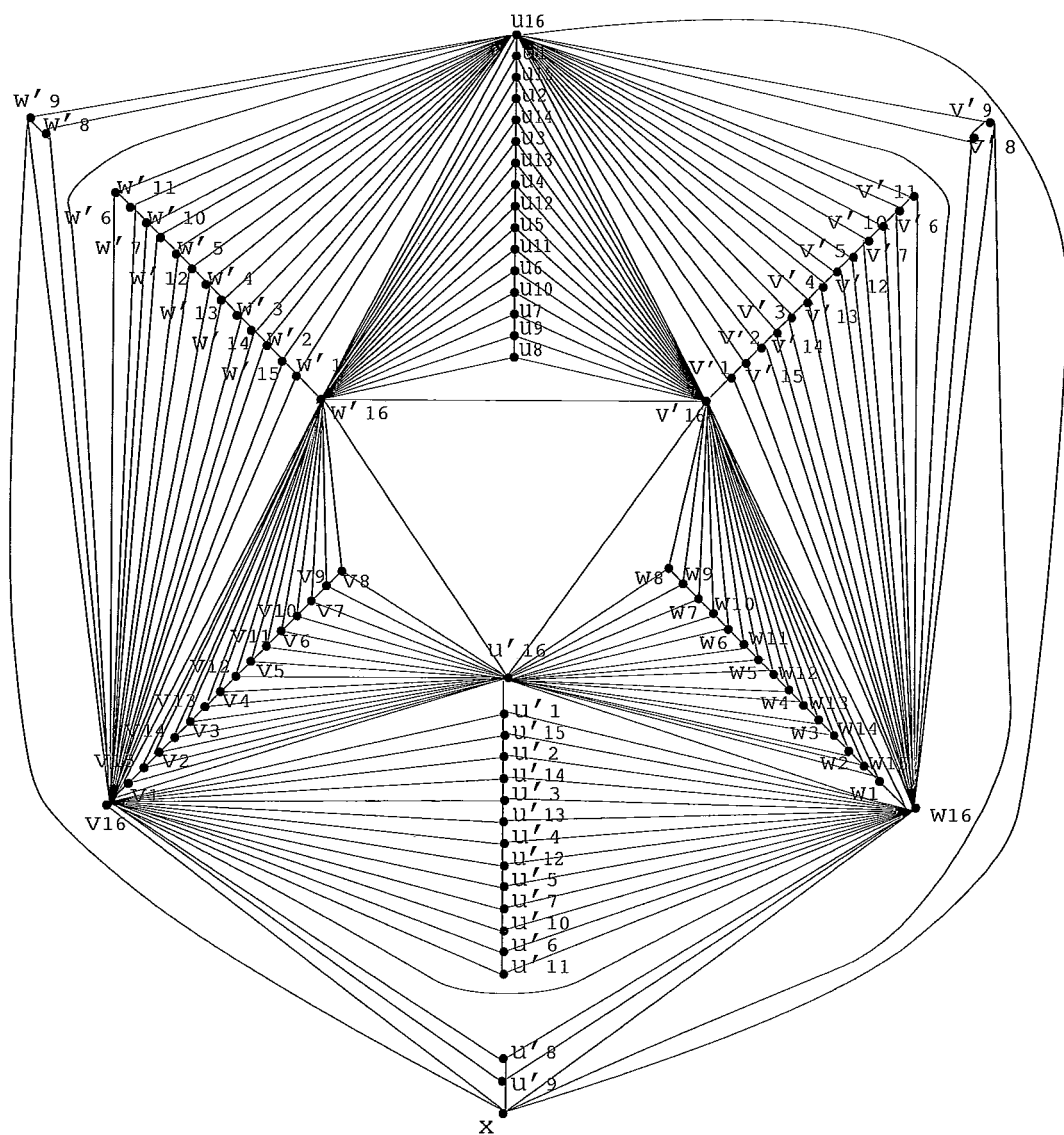


Figura A.40: Grafo G_{16} modificado novamente - decomposição do K_{100}

A.1.6 Distribuição das arestas restantes em G_r , com $r = 1, \dots, 16$

Distribuimos as arestas (u, v_i) , (u, v'_i) , para i par, (u, w_i) , (u, w'_i) , para i ímpar, (u, u_5) , (v, w_i) , (v, w'_i) , para i par, (v, u_i) , (v, u'_i) , para i ímpar, (v, v_5) , (w, u_i) , (w, u'_i) , para i par, (w, v_i) , (w, v'_i) , para i ímpar, e (w, w_5) nos grafos G_1 a G_{16} entre as arestas representadas abaixo:

const	G_{16}	G_{14}	G_{12}	G_{10}	G_8	G_6	G_4	G_2
+1	1'	15	13	11	9	7	5	3
-1	15'	13'	11'	9'	7'	5'	3'	

const	G_{13}	G_{11}	G_9	G_7	G_5	G_3	G_1
+1	14'	12'	10'	8'	6'	4'	2'
-1	12	10	8	6	4	2	16'

Em G_5 nós conectamos u a u'_5 . Em G_{15} nós conectamos u somente com w_1 . Os vértices v e w são distribuídos de forma similar.

Referências Bibliográficas

- [1] Alekseev, V. B. e Gončakov, V. S. *The thickness of an arbitrary complete graph*. Math. USSR Sbornik, 30 : 187 – 202, 1976.
- [2] Battle, Joseph ; Harary Frank e Kodama, Yukihiro. *Every planar graph with nine points has a nonplanar complement*. Bulletin of the American Mathematical Society, 68 : 569 – 571, 1962.
- [3] Beineke, Lowell W. e Harary, Frank. *On the thickness of the complete graph*. Bulletin of the American Mathematical Society, 70 : 618 – 620, 1964.
- [4] Beineke, Lowell W. e Harary, Frank. *The thickness of the complete graph*. Can. J. Math., 17 : 850 – 859, 1965.
- [5] Beineke, Lowell W.; Harary, Frank e Moon, John W. *On the thickness of the complete bipartite graph*. Proc. Camb. Phil. Soc., 60 : 1 – 5, 1964.
- [6] Hopcroft, J. E. e Tarjan, R.E. *Efficient planarity testing*. J. Ass. Comput. Mach., 21 : 549 – 568 , 1974.
- [7] Kleinert, Michael. *Die Dicke des n-dimensionalen Würfel-Graphen*. J. of Combinatorial Theory, 3 : 10 – 15 , 1967.
- [8] Lichtenstein, D. *Planar formulae and their uses*. SIAM J. COMPUT, 11 : 329 – 343, 1982.

- [9] Liebers, Annegret. *Planarizing Graphs - A Survey and Annotated Bibliography*. Journal of Graph Algorithms and Applications, 5 : 1 – 74, 2001.
- [10] Mansfield, Anthony. *Determining the thickness of graphs is NP-hard*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 93 : 9 – 23, 1983.
- [11] Mayer, J. *Décomposition de K_{16} en trois graphes planaires*. J. Combinatorial Theory, B : 13, 71, 1972.
- [12] Tutte, W. T. *The non-biplanar character of the complete 9-graph*. Canad. Math. Bull., 6 : 319 – 330, 1963.
- [13] Vasak, John M. *The thickness of the complete graph*. Notices of the American Mathematical Society, 23 : A – 479, 1976.