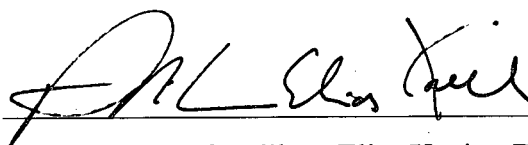


RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO UTILIZANDO
SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Alexander Feldmann

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

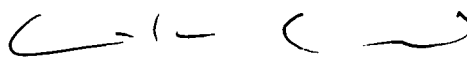
Aprovada por:



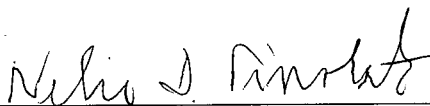
Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.



Prof. Cláudio Thomaz Bornstein, Dr.Rer.Nat.



Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho, Dr.Inf.



Prof. Nelio Domingues Pizzolato, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2005

FELDMANN, ALEXANDER

Resolução de problemas de empacotamento utilizando suavização hiperbólica. [Rio de Janeiro] 2005

IX, 51 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2005)

Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Empacotamento
2. Suavização Hiperbólica
3. Minimax

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Dedicatória

Aos meus pais, Israel e Sara, veículos através dos quais foi permitida e propiciada a minha presente existência carnal e de cujos belíssimos conselhos, ensinamentos e exemplos de vida ainda tenho o raro privilégio de privar.

À minha querida esposa, Lúcia Faride, e aos meus filhos, Victor e Márcio, com agradecimentos pelo apoio e pela compreensão das muitas horas de convivência familiar que lhes roubei para dedicar aos estudos.

Agradecimentos

- A Deus, causa primária de todas as coisas, que me deu alento e suporte para chegar ao fim desta tarefa e me permitiu almejar além.
- Ao Prof. Adilson Elias Xavier, sempre sábio, paciente, amigo e disposto a ajudar generosamente.
- Ao Prof. João Carlos de Oliveira Aires, grande amigo e incentivador de todas as horas.
- Ao Prof. Marcelo Rocha Neves, grande amigo em todos os sentidos.
- Ao colega e amigo Celso Luiz Moreira Pieroni, pela amizade e pelas contribuições.
- A todos os demais familiares, amigos e colaboradores que, por falha de memória ou insuficiência de espaço para listá-los (são tantos!), não figuraram nesta página, mas, certamente, ajudaram a aumentar o valor deste trabalho por suas contribuições tempestivas e desinteressadas.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EMPACOTAMENTO UTILIZANDO SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Alexander Feldmann

Agosto/2005

Orientador: Adilson Elias Xavier

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho traz uma revisão bibliográfica sobre os problemas de empacotamento e congêneres, além de um experimento com suavização hiperbólica para utilização na solução dos problemas min-max de empacotamento.

O experimento apresentado consiste no empacotamento de círculos congruentes dentro do quadrado unitário, utilizando a técnica da suavização hiperbólica para transformar um problema max-min de otimização não-linear, não-diferenciável, em um problema da classe C^∞ para eliminar os mínimos locais e agilizar a obtenção de melhores aproximações do otimizador global.

Uma comparação dos resultados obtidos com os melhores resultados putativos já publicados na literatura é realizada, para verificação das vantagens, da robustez e da precisão obtidas. Saliente-se que muito poucas publicações em língua portuguesa foram feitas a respeito deste assunto.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SOLVING THE PACKING PROBLEM VIA HYPERBOLIC SMOOTHING

Alexander Feldmann

August/2005

Advisor: Adilson Elias Xavier

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work we make a thorough literature review over the packing problems, as well as the development of numeric experiments with hyperbolic smoothing, for solving the min-max problem of packing.

The experiments are focused on the packing of identical circles inside the unit square, using hyperbolic smoothing in order to transform the min-max, non-linear and non-differentiable problem of packing into a problem of the C^∞ class, for avoiding the local minimum points and make it easier to find the global optimizer.

The results obtained are compared to the best putative results of already published methods, for verification of advantages, performance and precision. It should be noted that very few publications in the Portuguese language have been publicized about this specific subject.

Índice do texto

Ficha Catalográfica.....	ii
Dedicatória.....	iii
Agradecimentos.....	iv
Resumo.....	v
Abstract.....	vi
Índice do texto.....	vii
Índice de figuras.....	viii
Índice de tabelas.....	ix
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 - Introdução.....	1
1.2 – Breve histórico.....	3
1.3 – Organização do trabalho.....	6
Capítulo 2 – Problemas Correlatos.....	7
2.1 – Empacotamento de círculos em círculos.....	7
2.2 – Empacotamento de círculos em triângulos.....	8
2.3 – Empacotamento de círculos em regiões planas regulares.....	9
2.4 – Empacotamento de bolas em espaços n-dimensionais.....	10
2.5 – Número de Toques ou Entrechoques (“Kissing Number”).....	14
2.6 – Problemas de recobrimentos.....	15
2.6.1 – Recobrimentos no espaço de 2 dimensões.....	18
2.6.2 – Recobrimentos no espaço de 3 dimensões.....	19
2.7 – Problemas de empacotamento de círculos em quadrados.....	21
Capítulo 3 – Descrição do Problema e Metodologia de Resolução.....	23
3.1 – Descrição do Problema.....	23
3.2 – Aproximação do Problema utilizando a Suavização Hiperbólica.....	29
3.3 – A Técnica da Penalização Hiperbólica.....	31
3.4 – Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica.....	33
3.5 – Algoritmo Simplificado.....	34
Capítulo 4 – Resultados Computacionais.....	36
Capítulo 5 – Conclusões.....	43
Capítulo 6 – Bibliografia.....	44
6.1 – Bibliografia Referenciada.....	44
6.2 – Bibliografia Consultada.....	48
6.3 – Sítios na Internet Consultados.....	51

Índice de figuras

Figura 1 - Contentores padronizados com formato de paralelepípedo.....	2
Figura 2 - Arruelas, juntas e gaxetas.	2
Figura 3 - A conjectura de Kepler.	4
Figura 4 - Alguns empacotamentos de círculos no círculo de raio unitário.....	8
Figura 5 - Alguns empacotamentos de círculos no triângulo equilátero unitário.....	9
Figura 6 - Alguns empacotamentos de círculos em polígonos regulares.	9
Figura 7 - Empacotamento regular hexagonal, ou "colmeia", em R^2	10
Figura 8 - Arranjo regular cúbico de face centrada em R^3	11
Figura 9 - Kissing number em R^3	15
Figura 10 - Esquema simplificado da operação de um sistema de telefonia celular.	18
Figura 11 - Arranjo regular cúbico de corpo centrado.	19
Figura 12 - Dodecaedro rômbo.	19
Figura 13 - Arranjo regular cúbico de corpo centrado e sua célula de Voronoi.....	20
Figura 14 - Octaedro truncado.....	20
Figura 15 - Alguns empacotamentos de círculos no quadrado.....	21
Figura 16 - Gráfico da densidade do empacotamento, de 1 a 300 círculos.....	27

Índice de tabelas

Tabela 1 – Freqüências de ocorrências de resultados segundo os cinco critérios de escolha dos pontos iniciais, para o problema de empacotamento de 10 círculos.	37
Tabela 2 – Resultados obtidos com Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica para um único ponto inicial, confrontados com os melhores resultados putativos relatados na literatura para $q = 2$ até $q = 100$	38
Tabela 3 – Resultados obtidos com Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica para até 50 pontos iniciais – exceto em $q = 32$ e $q = 37$ – confrontados com os melhores resultados putativos relatados na literatura para $q = 2$ até $q = 40$	41

Capítulo 1 - Introdução

1.1 - Introdução

Na presente dissertação, procurar-se-á estabelecer a formulação de um modelo matemático que permita empacotar um número inteiro positivo de círculos congruentes dentro de um quadrado cujo lado meça uma unidade. Ou seja, encontrar o máximo diâmetro de n círculos idênticos, não sobrepostos, contidos em um quadrado unitário, o que é equivalente a maximizar a mínima distância entre pares de n pontos dentro de um quadrado unitário.

Tal problema encontra diversas aplicações na indústria e no comércio, onde o aumento de unidades empacotadas em um contentor se traduz em transporte e ou armazenamento de maior quantidade de produtos pelo mesmo custo. Com isso, otimiza-se o custo unitário de transporte e armazenamento.

A escolha do empacotamento de círculos em um quadrado tem justificativa pelo fato de esse ser um problema bidimensional análogo ao do empacotamento de círculos em um retângulo. Ademais, é análogo ao problema tridimensional do empacotamento de cilindros idênticos em um paralelepípedo retângulo. A solução de um é a mesma do outro, pois o primeiro é a projeção do segundo num dos planos de base do paralelepípedo retângulo.

Esse problema é muito comum na indústria, onde se tem uma grande quantidade de formas cilíndricas em fabricação:

- tubos metálicos ou plásticos,
- bobinas de papel ou de tecido,
- rebolos de esmeril,
- cartolinas e acartonados bobinados,
- tubos de fios para tecelagem,
- bobinas de fios e cabos elétricos,
- pacotes de mídia (CD ou DVD) para informática.

Tudo isso, para ser transportado com danos mínimos, deve ser acondicionado em contentores adequados, alguns padronizados, na esmagadora maioria em formato de paralelepípedo, conforme ilustrado na Figura 1. Na verdade, é um problema que vem sendo estudado por milhares de pesquisadores no mundo todo, de diferentes maneiras.

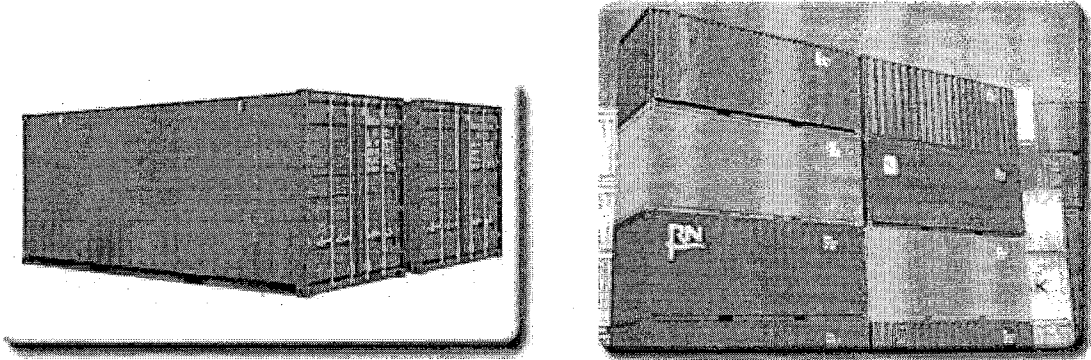


Figura 1 - Contentores padronizados com formato de paralelepípedo.

Acrescente-se à lista anterior a otimização do recorte de peças circulares em chapas retangulares na confecção de arruelas, juntas ou gaxetas, como mostrado na Figura 2, entre outras indústrias similares, e ter-se-á uma visão bem abrangente da importância econômica dessa classe de problemas.

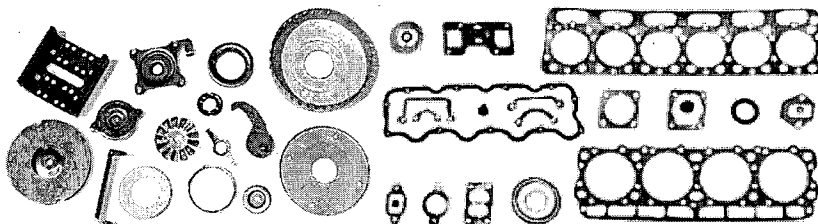


Figura 2 - Arruelas, juntas e gaxetas.

De forma geral, os problemas de empacotamento tem uma natureza não-linear, não-diferenciável, não convexa e, essencialmente, possuem uma miríade de mínimos locais.

Qualquer metodologia para a resolução desse tipo de problema vai enfrentar esse quadro de dificuldades teóricas e computacionais extremamente adversas. Destarte, não é razoável esperar que, qualquer que seja a metodologia, essa possa produzir um ponto de mínimo global para todas as instâncias desse problema.

1.2 – Breve histórico

Nas últimas duas décadas foi feito um grande investimento na área de otimização combinatória. Muitos dos problemas desta área são ditos intratáveis, por pertencerem à classe dos problemas *NP-completos*. Daí a justificativa do aumento de interesse pelo uso de métodos heurísticos, métodos esses que formam uma importante área de pesquisa e aplicação. A existência de uma solução ótima não é o principal foco de atenção dos pesquisadores da área. O esforço computacional necessário para encontrar o ótimo é que passa a exercer um papel central no projeto de algoritmos para essa classe de problemas.

Como registram YAN e WENQI (2002): "O empacotamento de círculos é um problema *NP-completo*. A resolução de problemas *NP-completos* é um gargalo para as técnicas computacionais e para a Ciência da Computação. Pesquisas realizadas desde os anos 1970, entretanto, mostram que para os problemas de empacotamento de círculos não existe um algoritmo que seja completo, rigoroso e eficiente. Ou seja, não se deve pensar em utilizar métodos matemáticos profusamente axiomáticos e formalistas. O que se busca obter é um algoritmo aproximativo para a resolução de problemas *NP-completos* que não seja absolutamente completo, porém, que tenha altas velocidade, confiabilidade e eficiência."

Vários autores estudaram o problema de empacotar círculos de diâmetros congruentes dentro de um retângulo, com base em métodos heurísticos. ISERMANN (1991) envereda por uma série de heurísticas para empacotar círculos homogêneos em geral. FRASER e GEORGE (1994) vêem esse problema dentro do contexto de empacotar rolos de papel, discutindo o empacotamento de círculos do mesmo tamanho em um contentor de dimensões fixas. DOWSLAND (1991) aborda o problema de decidir o tamanho ótimo de um contentor onde irá empacotar objetos cilíndricos. Para os casos mais simples desses problemas, é possível especificar e gerar configurações ótimas baseadas em estruturas regulares¹. Para os casos mais complexos, heurísticas rápidas permitem a geração de diversas configurações de empacotamento.

¹ *lattices*

Baseados em métodos heurísticos, aleatórios e algoritmos genéticos, GEORGE *et al.* (1995) apresentam algoritmos que têm sido largamente utilizados no empacotamento de discos com tamanhos diferentes em um contentor retangular. A base do estudo é o problema de uma fábrica que despacha uma variedade de canos plásticos com diferentes diâmetros em contentores de transporte.

Dentro desse referencial, a perspectiva deste trabalho, unicamente, pode cingir-se a apresentar uma alternativa metodológica para abordar essa classe de problemas, oferecendo resultados eficientes com tempos computacionais aceitáveis e de precisão compatível aos melhores registrados na literatura.

Essa classe de problemas vem sendo estudada desde o século XVII, quando KEPLER (1661) publicou um ensaio sobre a constituição da matéria. Nesse trabalho, que foi o primeiro passo registrado em direção a uma teoria matemática da gênese das formas orgânicas e inorgânicas, foi descrito o empacotamento de esferas por meio do arranjo regular cúbico de face centrada, conforme ilustrado na Figura 3 e esquematizado na Figura 8. A assertiva era de que tal empacotamento seria o mais denso possível, de forma que em nenhum outro tipo de contentor seria possível empacotar-se maior quantidade de esferas idênticas por unidade de volume. Tal assertiva é, até hoje, conhecida como a *Conjectura de Kepler* que, recentemente, se tornou um teorema cuja complexa prova por HALES (1998) ainda está em processo de comprovação. HILBERT (1900) a mencionara em sua lista de problemas em aberto para o século entrante.

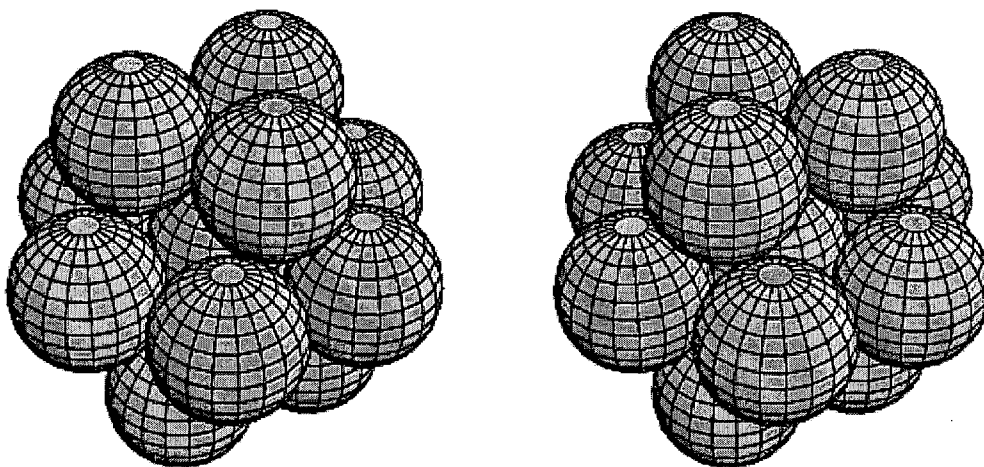


Figura 3 - A conjectura de Kepler.

Em muitas das publicações pesquisadas foi possível observar o uso de métodos cujas construções contornavam as descontinuidades das hessianas através de regularização, além de métodos valendo-se de derivadas exatas e outros que se valem de heurísticas² embasadas na Computação Evolucionária. Na grande maioria das vezes com custos computacionais muito elevados, inclusive fazendo uso de workstations sofisticadas e ou supercomputadores para viabilizar a obtenção de seus resultados em tempo finito.

Essa abordagem está baseada num modelo, de certa forma clássico, cujo desenvolvimento produz um problema min-max. Esse problema, por possuir dois níveis e por ser não-linear, não-diferenciável e normalmente de grande porte, é extremamente difícil.

A sua resolução neste presente trabalho será efetuada através da utilização, em conjunto, das técnicas de suavização utilizadas em CHAVES e XAVIER (1998) e CHAVES (1987), e da técnica de penalização hiperbólica utilizada em XAVIER (1982).

Deve ser destacado que, além da própria estrutura intrinsecamente não-diferenciável do problema min-max, a função objetivo utilizada nesse problema é a função distância euclidiana, que possui notadamente pontos de não-diferenciabilidade, conforme SANTOS (1997).

Para um melhor entendimento do aspecto de não-diferenciabilidade associado à modelagem min-max e da teoria aplicada à solução deste problema, faz-se uma rápida apresentação sobre os conceitos da técnica de suavização proposta nos trabalhos de CHAVES e XAVIER (1998) e CHAVES (1987), técnica essa que foi aplicada para a solução do problema min-max.

A suavização hiperbólica tem sido usada para a resolução de diversos problemas de programação matemática não-diferenciável, como a calibração automática de modelos hidrológicos apresentada em XAVIER *et al.* (1990) e DIB (1994), os problemas de controle elétrico apresentados em MOTA *et al.* (1992), a minimização de funções

² *Simulated Annealing, Hill Climbing, etc.*

definidas por mais de uma cláusula apresentada em XAVIER (1993) e a resolução do problema min-max apresentada em CHAVES (1997). Uma síntese dessas aplicações é apresentada em SANTOS (1997). Mais recentemente, essa técnica tem sido utilizada na resolução de problemas de recobrimento, simples e múltiplo, de uma região plana por círculos, conforme apresentado em XAVIER (2000), XAVIER e OLIVEIRA (2002), XAVIER e OLIVEIRA (2003) e BRITO (2004). Aplicação recente na resolução de problemas de agrupamento foi publicada em XAVIER (2005).

Na técnica de suavização hiperbólica, a solução é obtida através da resolução de uma seqüência infinita de problemas continuamente diferenciáveis, classe C^∞ , que gradativamente se aproximam do problema original. Registra-se que o desempenho computacional dessa técnica, frente a todos esses problemas, foi plenamente exitoso.

1.3 – Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada segundo a seguinte seqüência. No Capítulo 2 serão apresentados, sucintamente, problemas correlatos ao tema central desta tese: empacotamento de círculos em outras regiões planares, empacotamento de esferas no espaço Euclidiano tridimensional, empacotamento de hiper-esferas em hiper-espaços (dimensão igual ou maior que 4), número de toques ou entrechoques³ e recobrimentos em diversas dimensões. No Capítulo 3 será feita uma descrição formal do problema matemático associado ao empacotamento, de suas características e da metodologia proposta para sua resolução. No Capítulo 4 serão apresentados resultados computacionais obtidos pela aplicação da metodologia proposta. Finalmente, no Capítulo 5 serão apresentadas as conclusões.

³ *kissing number*

Capítulo 2 – Problemas Correlatos

Neste capítulo, primeiramente, será sumarizado um conjunto de problemas de empacotamento de círculos em regiões planares. A seguir, será apresentada, de forma sucinta, a classe geral de problemas que deu origem à presente dissertação de mestrado.

2.1 – Empacotamento de círculos em círculos

Dado um valor inteiro q , deseja-se colocar q círculos congruentes com raio r_q ($0 < r_q < 1$), sem sobreposições, dentro de outro círculo que, sem perda da generalidade, é tomado com raio unitário. Isso deve ser feito de tal maneira que o raio comum dos círculos empacotados seja o maior possível. O arranjo correspondente é denominado *empacotamento ótimo*.

Ao invés de se fixar o raio do círculo contentor e procurar o raio máximo dos círculos empacotados, pode-se proceder de outra forma equivalente: tentar minimizar a razão entre o raio do círculo contentor e o raio comum dos círculos empacotados, sem fixar nenhum dos dois. Esse mínimo é denotado por $D_q = 1/r_q$.

Um parâmetro adicional que pode ser otimizado é a densidade de um empacotamento, que é calculada pelo somatório da área dos círculos empacotados dividida pela área do círculo contentor.

Esse empacotamento de círculos tem outra formulação equivalente, onde q pontos (ao invés de círculos) são colocados dentro de um círculo com raio unitário. A meta é maximizar a mínima distância entre os pontos, dois a dois. Se d_q denota essa distância máxima, deriva-se as seguintes relações:

$$d_q = \frac{2r_q}{1-r_q} \quad (1)$$

$$D_q = 1 + \frac{2}{d_q} \quad (2)$$

A Figura 4 ilustra alguns empacotamentos de círculos no círculo de raio unitário.

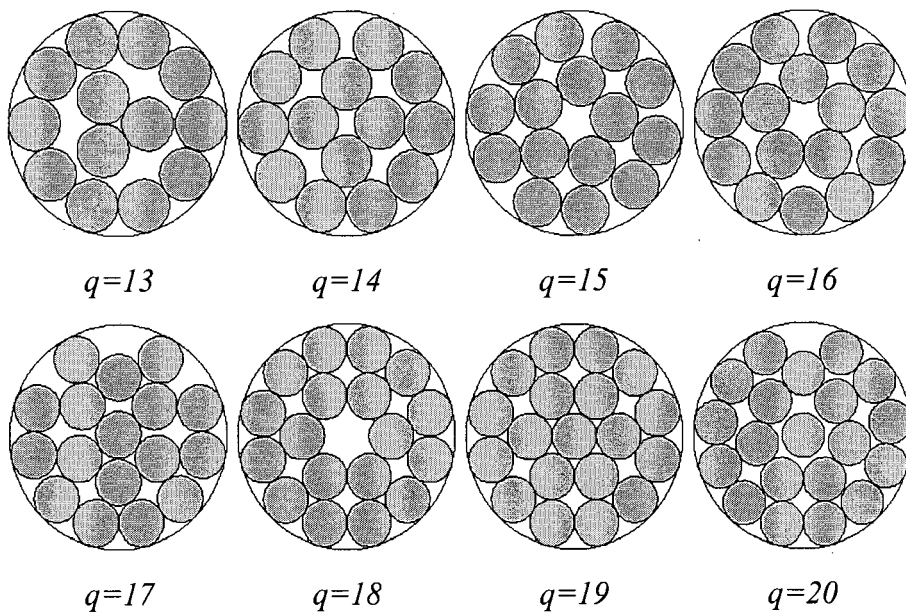


Figura 4 - Alguns empacotamentos de círculos no círculo de raio unitário.

2.2 – Empacotamento de círculos em triângulos

Dado um valor inteiro q , deseja-se colocar q círculos congruentes, sem sobreposições, dentro de um triângulo equilátero unitário. Isso deve ser feito de tal maneira que o raio comum dos círculos empacotados seja o maior possível.

Segundo LUBACHEVSKY e GRAHAM (1995), o empacotamento de círculos em triângulos equiláteros difere bastante do empacotamento de círculos no quadrado. A diferença está no fato de que, em triângulos, existe uma quantidade infinita de valores de q para os quais o valor exato de d_q é conhecido, quando q é da forma $\Delta(k) := k(k+1)/2$. Conjectura-se que $d_{q-1} = d_q$ nesses casos, denominados de *classes infinitas*.

As formulações matemáticas são essencialmente as mesmas do empacotamento de círculos no quadrado, mudando-se as restrições de borda. Permanecem as dificuldades inerentes ao fato de serem problemas *NP-completos*, agravadas pela existência das *classes infinitas*.

A Figura 5 ilustra alguns empacotamentos de círculos no triângulo equilátero unitário.

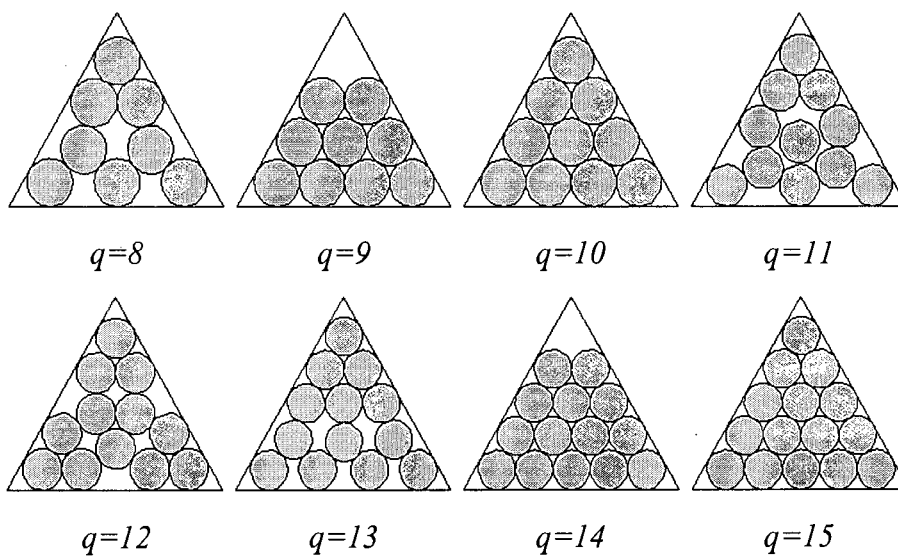


Figura 5 - Alguns empacotamentos de círculos no triângulo equilátero unitário.

2.3 – Empacotamento de círculos em regiões planas regulares

Esses problemas de empacotamento podem ser definidos da seguinte forma geral: determinar o máximo raio de q círculos não interceptantes que estejam confinados em um contentor regular. A Figura 6 ilustra dois exemplos de empacotamentos de círculos em contentores poligonais regulares.

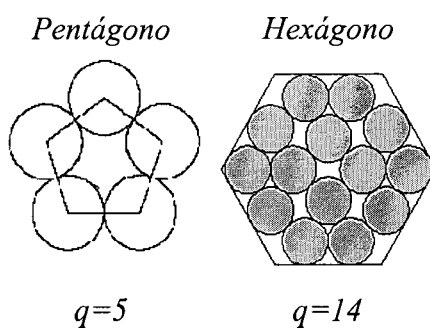


Figura 6 - Alguns empacotamentos de círculos em polígonos regulares.

2.4 – Empacotamento de bolas em espaços n-dimensionais

O problema consiste em encontrar o empacotamento mais denso possível, regular ou não regular, de bolas (ou hiper-esferas) no espaço n-dimensional. Em uma dimensão isso é trivial, pois uma bola unidimensional é um segmento de reta e pode-se obter uma densidade igual a 1 centrando esses segmentos em pontos inteiros de uma reta.

A resposta também é conhecida para duas dimensões. A maior densidade que pode ser obtida é igual a $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9069\dots$, correspondendo ao empacotamento regular hexagonal, também chamado de “colmeia”, mostrado na Figura 7. Esse resultado tem uma longa história, especialmente vista em THUE (1910) e TÓTH (1940). Uma prova concisa e elegante pode ser lida nas páginas 58 a 61 de TÓTH (1972).

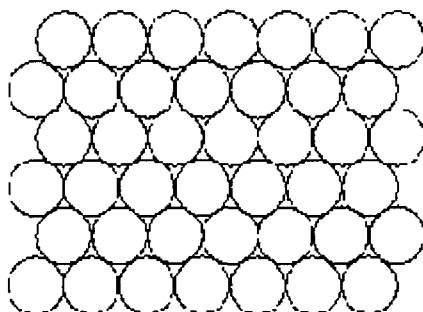


Figura 7 - Empacotamento regular hexagonal, ou "colmeia", em \mathbb{R}^2 .

Em três dimensões a resposta é, ainda, desconhecida. Mas, se forem considerados somente empacotamentos *regulares*, nesse caso a resposta é conhecida. GAUSS (1831) mostrou que o *arranjo regular*⁴ cúbico de face centrada, esquematizado na Figura 8, é o mais denso *empacotamento regular* em três dimensões. As provas desse resultado podem ser encontradas em CASSELS (1971), CONNELLY e SLOANE (1988), COXETER (1961), DEMPSTER (1957) ou MORDELL (1948).

⁴ Em um arranjo regular, há uma periodicidade na disposição dos planos de esferas. Para visualizar o arranjo regular cúbico de face centrada, imagine-se um cubo e coloque-se uma esfera em cada vértice desse cubo. Depois, coloque-se uma esfera no centro de cada face do cubo. Todas as esferas devem ter o mesmo raio.

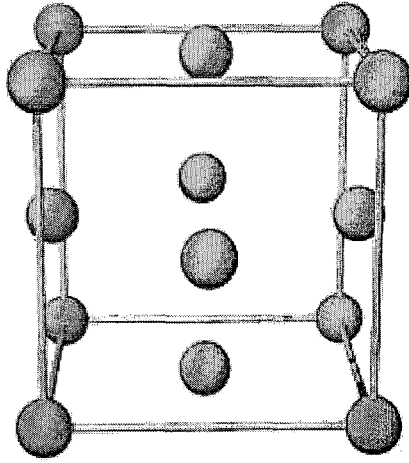


Figura 8 - Arranjo regular cúbico de face centrada em \mathbb{R}^3 .

Em quatro dimensões, o mais denso empacotamento conhecido é o arranjo regular conhecido por “*tabuleiro de damas*”⁵ D_4 , no qual os centros das bolas estão todos nos pontos (u_1, u_2, u_3, u_4) onde os u_i são inteiros cuja soma é um número par. Assim sendo, $(0,0,0,0)$ é permitido, bem como $(1,1,0,0)$, mas não $(1,0,0,0)$. A bola centrada em $(0,0,0,0)$ tem outras 24 bolas ao seu redor, centradas nos pontos cujas coordenadas tenham qualquer combinação de ordem e sinal dos valores $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$. Há 6 opções de posicionamento para os zeros e, daí, 4 outras opções para os 1 e seus sinais, num total de 24 possibilidades. Quaisquer dois centros distintos devem diferir por no mínimo 1 em duas coordenadas, ou por no mínimo 2 em uma coordenada, de forma que a distância mínima entre centros é $\sqrt{2} \approx 1,414\dots$. Se as bolas forem tomadas com raio igual à metade dessa distância, não haverá sobreposição e cada bola tangenciará outras 24.

Fica claro, da definição, que D_4 contém os centros $(2,0,0,0)$, $(0,2,0,0)$, ..., $(0,0,0,2)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, ..., $(0,0,1,1)$ e, inversamente, que cada centro em D_4 é uma combinação inteira desses vetores. Na verdade, basta usar $(2,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ e $(1,0,0,1)$ para definir a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

A matriz M é a matriz geradora para D_4 . Ou seja, todos os elementos em D_4 podem ser obtidos por meio de todas as possíveis combinações lineares das linhas de M . Em decorrência da definição em (3), D_4 tem determinante $\det D_4 = (\det M)^2 = 4$.

Para calcular a densidade de D_4 , é necessário conhecer o volume de uma bola n -dimensional de raio ρ , $V_n \rho^n$, onde V_n é o volume de uma bola n -dimensional de raio unitário dado por (4) ou (5)

$$V_n = \frac{\sqrt{\pi^n}}{(n/2)!} \quad (4)$$

$$V_n = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} ((n-1)/2)!}{n!} \quad (5)$$

(a equação (5) é utilizada para valores ímpares de n , evitando o uso de $(n/2)!$).

Também temos que

$$\log_x V_n = -\frac{n}{2} \log_2 \left(\frac{n}{2\pi e} \right) - \frac{1}{2} \log_2 (n\pi) - \varepsilon \quad (6)$$

$$\text{onde } 0 < \varepsilon < \frac{\log_2 e}{6n}.$$

A área da superfície da bola de raio ρ é dada por $n \cdot V_n \rho^{n-1}$ e a densidade do arranjo regular Λ é expressa por

$$\Delta = \frac{V_n \rho^n}{\sqrt{\det \Lambda}} \quad (7)$$

Quando se toma o valor de ρ igual à metade da menor distância entre dois pontos do arranjo, ρ passa a chamar-se raio de empacotamento de Λ . Para o arranjo regular D_4 , temos que $V_4 = \pi^2/2$, $\rho = 1/\sqrt{2}$, de forma que a densidade é $\Delta = \pi^2/16 = 0,6169\dots$. Esta é

⁵ checkerboard

a maior densidade conhecida em quatro dimensões. KORKINE e ZOLOTAREFF (1872) já provaram que esta é a maior densidade possível para um empacotamento em arranjo regular para quatro dimensões.

D_4 pode ser generalizado, de forma óbvia, para um empacotamento em arranjo regular de n dimensões D_n : basta tomar n coordenadas inteiras com somatório par.

Se um arranjo regular puder ser obtido de algum outro por rotação, reflexão e mudança de escala, diz-se que são *equivalentes* ou *similares*, denotando-se por \cong . Duas matrizes geradoras, M e M' , definem arranjos regulares equivalentes se e somente se são relacionadas por $M' = c U M B$, onde c é uma constante não nula, U é uma matriz com elementos inteiros e determinante ± 1 , e B é uma matriz ortogonal real (com $B \cdot B^t = I$). As matrizes de Gram correspondentes se relacionam por $A' = c^2 U A U^t$.

Se $\det U = \pm 1$ e $c = 1$, então M e M' são *arranjos regulares congruentes* (são *diretamente congruentes* se $\det U = +1$). Por exemplo, o arranjo regular cúbico de face centrada ocorre em ambas as seqüências A_n e D_n , visto que $A_3 \cong D_3$.

Por que tanta pesquisa para achar empacotamentos densos de bolas n -dimensionais? Existem várias razões:

- i. Este é um problema interessante de geometria pura. HILBERT (1900) o mencionou em sua lista de problemas em aberto para o século entrante⁶. Além disso, segundo comentam CONWAY e SLOANE (1993), os melhores empacotamentos mostram conexões, por vezes inesperadas, com outros ramos da matemática.
- ii. Existem aplicações diretas dos empacotamentos com arranjos regulares na teoria dos números.
- iii. Há aplicações diretas dos empacotamentos com arranjos regulares de bolas para problemas oriundos das comunicações digitais. Um exemplo disso é uma

⁶ Problema n° 18 - Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes? Qual a maneira mais densa de se empacotarem esferas?

pergunta típica de projeto de comunicações por rádio móvel em *spread-spectrum* (telefonia celular sendo uma das aplicações): *quantas esferas de raio 0,25 podem ser empacotadas em uma esfera de raio 1, num espaço de 100 dimensões?*

- iv. Empacotamentos em duas e em três dimensões tem várias aplicações. Por exemplo, os círculos em um empacotamento bidimensional dentro de outro círculo podem representar fibras óticas, vistas em um corte transversal de um cabo. Empacotamentos tridimensionais tem aplicações em química, física, biologia, projeto de antenas, tomografia por raios-X e na análise estatística em esferas.
- v. Empacotamentos n -dimensionais podem ser utilizados nos cálculos numéricos de integrais, seja na superfície de uma bola em \mathfrak{R}^n ou no seu interior. Uma aplicação relacionada, ainda não muito utilizada, é a utilização de tais empacotamentos para a resolução de problemas n -dimensionais de busca ou aproximação.
- vi. Recentes desenvolvimentos no campo da física envolveram os arranjos regulares E_8 e A_{24} e os arranjos de Lorentz correlatos nas dimensões 10 e 26.

Segundo registram CONWAY e SLOANE (1993), os melhores empacotamentos conhecidos são: Z , A_2 , A_3 , D_4 , D_5 , E_6 , E_7 , E_8 , K_{12} , A_{16} e A_{24} . Desses, somente os três primeiros são, comprovadamente, os mais densos possíveis nas respectivas dimensões, com a observação de que A_3 é o *arranjo regular* mais denso possível. Em sendo confirmada a prova de HALES (1998), esse arranjo regular passará a ser, comprovadamente, o mais denso empacotamento possível em três dimensões conforme previsto por KEPLER (1661).

2.5 – Número de Toques ou Entrechoques (“Kissing Number”)

O problema em título é descrito pela seguinte pergunta: deseja-se saber quantas bolas de raio unitário podem tocar, simultaneamente, uma bola de raio unitário e centrada na origem, sem interceptarem umas às outras, em espaços de quaisquer dimensões. Na Figura 9 pode-se ver uma representação para o caso de três dimensões.

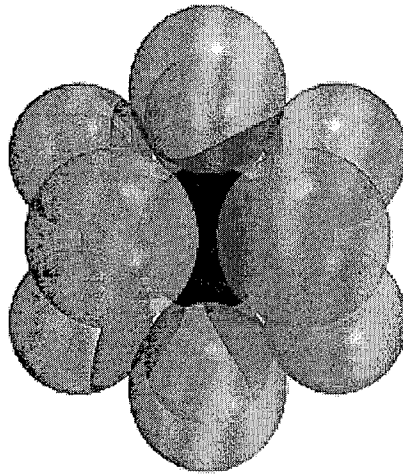


Figura 9 - Kissing number em \mathbb{R}^3 .

Uma forma mais geral desse problema faz a mesma pergunta, fixando o raio da bola centrada na origem no valor unitário e permitindo que as demais bolas circundantes tenham raio qualquer, em espaços de n dimensões. Isso corresponde ao problema de construir uma classe especial de códigos para correção de erros, chamados de “códigos esféricos”. De acordo com DE GROOT *et al.* (1991), um código esférico é um conjunto de vetores reais na superfície de uma bola de raio unitário, num espaço Euclidiano de n dimensões. Nesse caso, procura-se por um arranjo tal que o menor ângulo de separação entre os vetores seja o maior possível.

2.6 – Problemas de recobrimentos

Qual a maneira *menos densa* de recobrir um espaço n -dimensional com bolas iguais e sobrepostas? Esse problema é considerado um dual do problema de empacotamento de bolas em espaços n -dimensionais, consistindo em que cada ponto do espaço deve pertencer, pelo menos, a uma bola. E não deverá haver pontos do espaço que não pertençam a nenhuma bola.

Trata-se de encontrar a disposição mais econômica de bolas congruentes que cubra um espaço Euclidiano n -dimensional, com sobreposição. Quanto menos sobreposição houver, tanto mais econômico será o recobrimento.

Para melhorar a precisão, define-se a *espessura* Θ de um recobrimento da mesma maneira como se define a densidade de um empacotamento. Seja um arranjo de bolas com raio R que cubra o \mathfrak{R}^n . Se os centros formarem um arranjo regular Λ , então a espessura desse recobrimento é definida por

$$\Theta = \text{número médio de esferas que contém um ponto do espaço} =$$

$$= \frac{\text{volume de uma esfera}}{\sqrt{(\det \Lambda)}} = \frac{V_n R^n}{\sqrt{(\det \Lambda)}} \quad (8)$$

Θ também é conhecido por *densidade da esparsidade do recobrimento*. Esse é o valor que, minimizado, propicia um recobrimento mais econômico.

Consideremos uma coleção qualquer de pontos $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ em \mathfrak{R}^n . O menor limite superior para a distância de qualquer ponto de \mathfrak{R}^n ao ponto p_i mais próximo é chamado de raio de recobrimento para P , usualmente denotado por R . Daí, temos que

$$R = \sup_{x \in \mathfrak{R}^n} \inf_{p \in P} \|x, p\| \quad (9)$$

Se o limite superior não existir, $R = \infty$. Como consequência da definição, um conjunto de bolas com raio R centradas nos pontos de P cobrirá \mathfrak{R}^n e nenhum outro conjunto de bolas com raio menor, centradas nos mesmos pontos, o conseguirá.

Ao redor de cada ponto $p_i \in \mathfrak{R}^n$ existe sua célula de Voronoi, $V(p_i)$, consistindo em todos os pontos de \mathfrak{R}^n que estejam ao menos tão perto de p_i quanto qualquer outro p_j . Da definição, temos que

$$V(p_i) = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x, p_i\| \leq \|x, p_j\| \forall j\} \quad (10)$$

Outros nomes para as células de Voronoi são: *regiões vizinhas mais próximas*, *regiões de Dirichlet*, *zonas de Brillouin* e *células de Wigner-Seitz*. As duas últimas nomenclaturas são termos utilizados por físicos teóricos.

Os interiores das células de Voronoi são disjuntos, embora elas tenham faces em comum. Cada face fica no hiperplano a meio caminho entre dois pontos p_i vizinhos. As células de Voronoi são polítopos convexos, cuja união é todo o espaço \mathfrak{R}^n . Se P é um arranjo regular Λ , então todas as células de Voronoi são congruentes e tem volume igual a $(\det \Lambda)^{1/2}$.

Os vértices das células de Voronoi são especialmente interessantes. Eles incluem os pontos de \mathfrak{R}^n cuja distância a P é um máximo local. Estes são conhecidos como os *buracos em P*. Se houver um ponto cuja distância a P seja um máximo absoluto, este é chamado de *buraco profundo* e sua distância a P é o raio de recobrimento R .

Para um arranjo regular Λ , com células de Voronoi congruentes a um polítopo V , o raio de empacotamento ρ é o *raio inscrito de V* (*raio inscrito* é definido como o raio da maior bola inscrita no polítopo), enquanto o raio de recobrimento R é o *raio circunscrito de V* (*raio circunscrito* é definido como o raio da menor bola circunscrita ao polítopo).

Agora pode-se entender a diferença entre empacotamento e recobrimento. Para um bom empacotamento, tenta-se maximizar ρ , isto é, deseja-se escolher os centros das bolas de tal maneira que o raio inscrito das células de Voronoi seja o maior possível. Por outro lado, um bom recobrimento ocorre quando se consegue minimizar R , isto é, quando se escolhe os centros das bolas de tal maneira que o raio circunscrito das células de Voronoi seja o menor possível.

Se os pontos p_1, p_2, \dots representarem sedes de zonas eleitorais, por exemplo, as suas células de Voronoi correspondem aos distritos sob a jurisdição de cada uma. Um eleitor que esteja localizado em um buraco profundo é aquele que tem de caminhar a maior distância até a sede de sua zona eleitoral. E o raio de recobrimento R corresponde à maior distância da zona eleitoral que um eleitor pode estar domiciliado, mantendo-se sob sua jurisdição.

No caso da telefonia celular, os pontos p_1, p_2, \dots representarão as localizações das Estações Rádio-Base (ERB). Os telefones celulares se comunicam com os demais por intermédio das ERB. Cada ERB tem seu correspondente recobrimento geográfico, havendo sobreposições, conforme o esquema na Figura 10. Um telefone celular em movimento pode atingir o limite de recobrimento de uma determinada ERB (a fronteira de sua célula de Voronoi). Caso não houvesse sinal de outra ERB próxima, a comunicação se encerraria por extinção do sinal de rádio. A sobreposição permite que o telefone celular mude o relacionamento para a ERB que lhe apresente o melhor sinal de rádio, correspondendo à menor atenuação até sua antena (ele passa a pertencer à célula de Voronoi da outra ERB), sem que a comunicação tenha solução de continuidade.

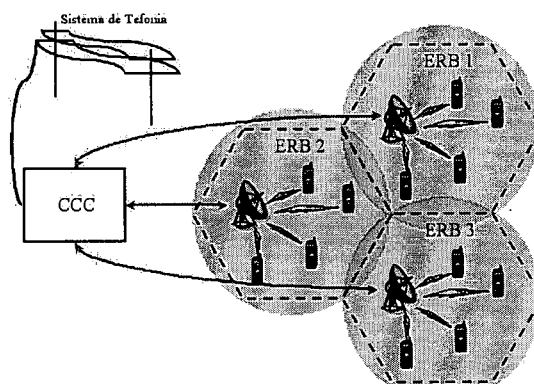


Figura 10 - Esquema simplificado da operação de um sistema de telefonia celular.

2.6.1 – Recobrimentos no espaço de 2 dimensões

Os problemas inerentes ao recobrimento de regiões do \mathbb{R}^2 por círculos também tem sido objeto de pesquisas por várias décadas. O recobrimento de regiões do plano por um conjunto de elipses foi estudado por GALIYEV (1995). KERSHNER (1939) mostrou que nenhum arranjo de círculos consegue recobrir o plano mais eficientemente que o arranjo regular hexagonal, cuja *espessura* é 1,21 aproximadamente.

Esses problemas aparecem em um grande número de aplicações práticas, tais como: resolução de alguns modelos de cristalografia, alocação de centros de atendimento ou locação e dimensionamento de centrais de telecomunicações. XAVIER e OLIVEIRA (2005) estudam a otimização do recobrimento de regiões planas por círculos, com a utilização da técnica de suavização hiperbólica.

2.6.2 – Recobrimentos no espaço de 3 dimensões

Em espaços tridimensionais, o melhor recobrimento conhecido é o arranjo regular cúbico de corpo centrado, esquematizado na Figura 11. Conforme demonstrado por BAMBAH (1954), esse arranjo regular é um recobrimento ótimo em três dimensões. Isto pode parecer, à primeira vista, surpreendente, uma vez que o melhor *empacotamento* em três dimensões é um arranjo regular diferente: o arranjo regular cúbico de face centrada, esquematizado na Figura 8. Mas, na realidade, um arranjo é o dual do outro, corroborando o fato de que recobrimentos são duais dos empacotamentos e vice-versa.

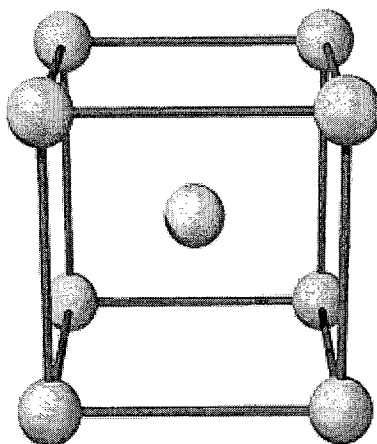


Figura 11 - Arranjo regular cúbico de corpo centrado.

A célula de Voronoi para o arranjo regular cúbico de face centrada é o dodecaedro rômbo, um poliedro semi-regular mostrado na Figura 12.

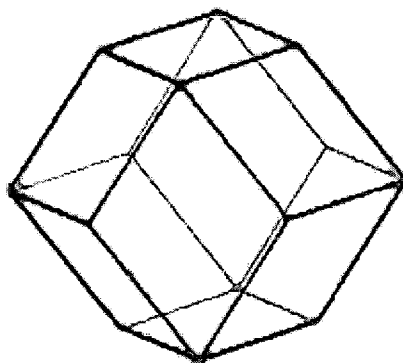


Figura 12 - Dodecaedro rômbo.

A Figura 13 representa o arranjo regular da Figura 11, com sua célula de Voronoi da Figura 12 sobreposta, para melhorar a visão do conjunto.

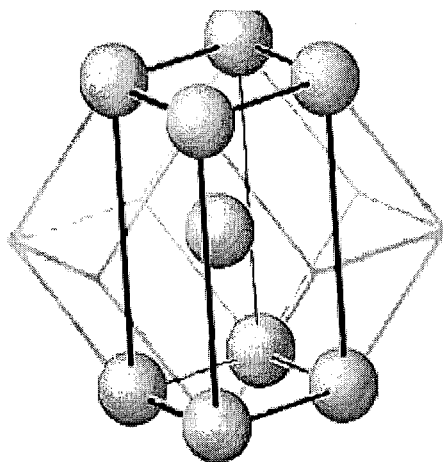


Figura 13 - Arranjo regular cúbico de corpo centrado e sua célula de Voronoi

Por outro lado, a célula de Voronoi para o arranjo regular cúbico de corpo centrado é o octaedro truncado, um dos poliedros de Arquimedes, mostrado na Figura 14.

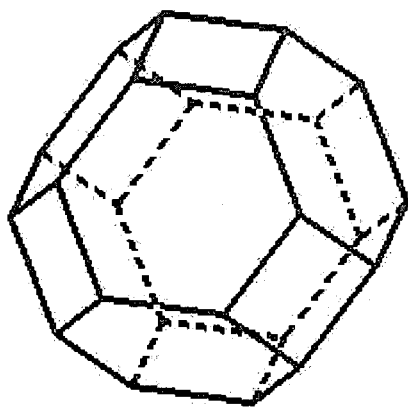


Figura 14 - Octaedro truncado.

Se for escolhida a escala de tal maneira que ambos os arranjos regulares tenham determinante unitário, ver-se-á que o primeiro é o melhor empacotamento e o segundo é o melhor recobrimento, através do estudo dos valores de seus respectivos raios inscritos e raios circunscritos. O raio inscrito é o raio de empacotamento, enquanto o raio circunscrito é o raio de recobrimento. Como já visto no início da Seção 2.6, para um melhor empacotamento o raio inscrito tem que ser o maior possível e, para um melhor

recobrimento, o raio circunscrito tem que ser o menor possível. É justamente o que acontece nos casos citados: o arranjo regular cúbico de face centrada tem o maior dos raios inscritos, enquanto o arranjo regular cúbico de corpo centrado tem o menor dos raios circunscritos, respectivamente 0,5612... e 0,7937... conforme CONWAY e SLOANE (1993).

2.7 – Problemas de empacotamento de círculos em quadrados

Dado um valor inteiro q , deseja-se colocar q círculos congruentes com raio r_q , sem sobreposições, dentro de um quadrado que, sem perda da generalidade, é tomado com lado unitário ($l = 1$). Isso deve ser feito de tal maneira que o raio comum dos círculos empacotados seja o maior possível, conforme ilustrado na Figura 15. O arranjo correspondente é denominado *empacotamento ótimo*.

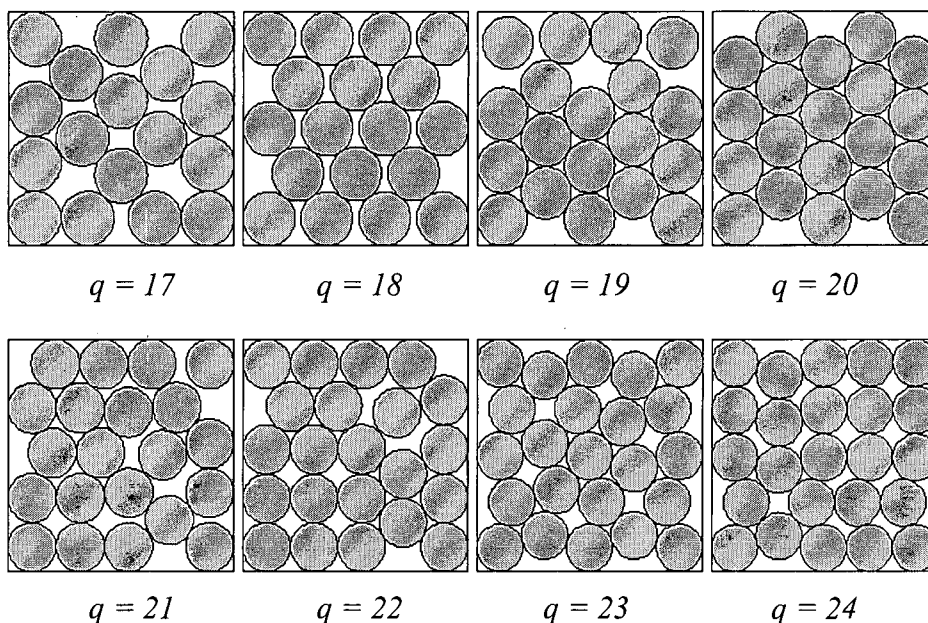


Figura 15 – Alguns empacotamentos de círculos no quadrado.

Através do empacotamento de círculos no quadrado, tenta-se resolver problemas oriundos da indústria e dos transportes, bem como problemas provenientes de sistemas de armazenagem. Essa classe de problemas é o objeto desta presente dissertação. O seu detalhamento é tratado no próximo capítulo.

Capítulo 3 – Descrição do Problema e Metodologia de Resolução

3.1 – Descrição do Problema

O problema de empacotamento de círculos no quadrado unitário pode ser formulado como um problema de otimização max-min, para se maximizar a mínima distância entre pares de q pontos contidos no quadrado unitário:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\max}_{x_i, y_i} \min_{(i, j) \in P} s_{ij} \\ & \text{sujeito a} \\ & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = s_{ij}, \forall (i, j) \in P \quad (\text{P1}) \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, q \\ & 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

O conjunto P é definido como $P = \{(i, j) \text{ tais que } i < j\}$; x_i, y_i são as coordenadas cartesianas do i -ésimo ponto e s_{ij} é o quadrado da distância Euclidiana entre os pontos i e j . O problema de otimização max-min (P1) é equivalente ao seguinte problema de programação não-linear:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\max}_{x_i, y_i} t \\ & \text{sujeito a} \\ & (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq t, \forall (i, j) \in P \quad (\text{P2}) \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, q \\ & 0 \leq y_i \leq 1, i = 1, \dots, q \end{aligned}$$

Nessa formulação, t é a mínima das distâncias Euclidianas s_{ij} . A formulação (P2) contém uma função objetivo linear sujeita a restrições, compostas por um conjunto de inequações quadráticas côncavas e duas restrições de caixa nas variáveis x_i e y_i .

Uma forma alternativa de se formular um problema, muito parecido com os anteriores, é como um problema de decisão, conforme BIRGIN *et al.* (2002): dados q círculos de raio r , é possível, ou não, colocá-los dentro de um quadrado de lado unitário,

sem superposição? Para responder essa pergunta, introduz-se um modelo de programação não-linear onde, dados q e r_q , o objetivo é determinar os pontos $p^1, \dots, p^q \in [r_q, 1-r_q] \times [r_q, 1-r_q]$:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \neq j} \max(0, (2r_q)^2 - \|p^i - p^j\|_2^2)^2 \\ \text{sujeito a} \quad & \\ r_q \leq p_1^i \leq 1 - r_q, \quad & i = 1, \dots, q \\ r_q \leq p_2^i \leq 1 - r_q, \quad & i = 1, \dots, q \end{aligned} \tag{P3}$$

Os pontos p^1, \dots, p^q são os centros dos círculos desejados, que terão o raio r . O que se busca é o minimizador global de (P3). Se a função objetivo for anulada pelo minimizador global de (P3), a resposta ao problema de decisão é SIM. Caso contrário, a resposta é NÃO. Observar que (P3) é um problema de otimização contínuo onde a função objetivo tem primeiras derivadas contínuas, mas cujas segundas derivadas não são contínuas.

Uma forma para solucionar o problema de decisão é através da solução de (P3), porém, impondo um limite superior e um limite inferior ao número de círculos com raio r_q , da seguinte maneira:

- i. Para o limite superior, calcula-se a área do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio r_q , por ser o arranjo hexagonal o mais denso no plano. Depois, divide-se a área da superfície regular onde se quer empacotar os círculos de raio r_q pela área do hexágono. O valor encontrado, arredondado ao inteiro imediatamente inferior, é o limite superior para o número de círculos a serem empacotados, \bar{E} .
- ii. Para o limite inferior, calcula-se a área do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio r_q , por ser esse o arranjo onde a densidade é a pior. Depois, divide-se a área da superfície regular onde se quer empacotar os círculos de raio r_q pela área do triângulo. O valor encontrado, arredondado ao inteiro imediatamente inferior, é o limite inferior para o número de círculos a serem empacotados, \underline{E} .

iii. De posse desses dois valores, faz-se uma busca binária no intervalo $[\underline{E}, \bar{E}]$, partindo-se do limite superior. Se não for possível empacotar \bar{E} círculos na região, faz-se uma biseccção no intervalo e tenta-se empacotar uma quantidade equivalente à mediana. Se for possível, esse valor passa a ser o limite inferior e faz-se nova biseccção, repetindo-se o processo. Se não for possível, esse valor passa a ser o limite superior e faz-se nova biseccção, repetindo-se o processo. O critério de parada é quando o valor do limite superior for igual ou, no máximo, uma unidade maior que o limite inferior. Dessa forma, pode-se chegar a uma solução em tempos muito baixos.

Existe, ainda, uma forma de se empacotar círculos no quadrado unitário que é equivalente às anteriores. A diferença é que, ao invés de se inscrever os círculos no quadrado unitário, inscreve-se os centros dos círculos no quadrado unitário e permite-se que os círculos ultrapassem esse quadrado, desde que os seus centros não o façam. Assim, o quadrado que contém os círculos empacotados passa a ter lado medindo $(1+d_q)$, onde d_q é o diâmetro de cada um dos q círculos empacotados. É fácil ver que, sendo r_q o raio do empacotamento de q círculos no quadrado unitário, a relação entre d_q e r_q é descrita por:

$$r_q = \frac{d_q}{2(1+d_q)} \quad (11)$$

Nesta presente tese será considerado, em particular, o seguinte problema de empacotamento:

$$\begin{aligned} & \max d_q \\ & \text{sujeito a} \\ & \|x_i - x_j\|_2 \geq d_q, \forall (i, j) \in P \\ & 0 \leq x_i^k \leq 1; \quad k = 1, 2; \quad i = 1, \dots, q \end{aligned} \quad (P4)$$

onde os $x_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, q$, são os centros dos círculos.

Alternativamente, esse problema (P4) pode ser colocado sob a forma

$$\begin{aligned}
& \max 2r_q \\
& \text{sujeito a} \\
& \|x_i - x_j\|_2 \geq 2r_q, \forall (i, j) \in P \\
& r_q \leq x_i^k \leq 1 - r_q; k = 1, 2; i = 1, \dots, q
\end{aligned} \tag{P5}$$

Quando se toma o valor de r_q igual à metade da menor distância entre dois pontos do arranjo, r_q passa a chamar-se raio de empacotamento do arranjo. As soluções dos problemas (P4) e (P5) observam, igualmente, a relação (11).

Essa formulação apresenta a característica de não-diferenciabilidade, devida à presença do termo norma euclidiana. Ademais, a função objetivo é não-convexa, tendo, em geral, inúmeros mínimos locais. A obtenção do mínimo global para esse problema é uma tarefa de grande dificuldade, como registrado nas referências consultadas. Para atingir esse propósito, diversos esquemas especiais foram desenvolvidos, cujas aplicações, entretanto, têm produzido resultados de qualidade limitada quer sob o ponto de vista de robustez quer de eficiência.

Esse problema foi resolvido, de forma exata, somente para q (número de círculos empacotados) igual a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 25 e 36. Para $q = 1$ a solução é trivial. Para $2 \leq q \leq 5$, o problema pode ser resolvido utilizando-se simples geometria plana. De acordo com CROFT *et al.* (1991), Graham deduziu os resultados para $q = 6$. SCHAER e MEIR (1965) foram os primeiros a relatar as soluções para $q = 8$ e $q = 9$. O caso para $q = 10$ foi sucessivamente melhorado por GOLDBERG (1970) e SCHAER (1971); entretanto, a melhor solução ora conhecida foi primeiramente relatada por SCHLÜTER (1979). Em seguida, MILANO (1987) e VALETTE (1989) relataram soluções menos densas e, finalmente, uma melhor configuração que as duas anteriores foi sugerida por MOLLARD e PAYAN (1990). Recentemente, DE GROOT *et al.* (1990), utilizando um algoritmo de eliminação, provaram que a solução primeiramente dada por SCHLÜTER (1979) era, de fato, a exata.

Um trabalho mais abrangente sobre esse problema foi publicado por GOLDBERG (1970), no qual conjecturas de arranjos ótimos foram dadas para $q \leq 27$ e para alguns $q > 27$. Para $q = 11$ e $q = 13$, MOLLARD e PAYAN (1990) publicaram soluções

melhores. Para $q = 14$, primeiramente WENGERODT (1987) e depois MOLLARD e PAYAN (1990) publicaram soluções melhoradas idênticas. Para $q = 16$, $q = 25$ e $q = 36$, WENGERODT e KIRCHNER (1983, 1987) igualaram as soluções de GOLDBERG (1970). MARANAS *et al* (1995) apresentam uma abordagem da otimização max-min que leva a soluções melhores para $q = 15$, novas configurações para $q = 28$ e $q = 29$, e resultado idêntico às melhores configurações já relatadas para os demais valores de q até 30.

Até o presente momento, a mais atualizada reunião dos melhores resultados putativos de empacotamentos de círculos no quadrado de lado unitário ($l = 1$) foi compilada e publicada na Internet por SPECHT (2004). Os valores putativos publicados de r_q , d_q e densidade de empacotamento abrangem desde $q = 1$ até $q = 300$ círculos empacotados, bem como alguns valores isolados de q (304, 340, 378, 407, 418, 437, 449, 559, 621, 658 e 986 círculos empacotados).

Com os valores ótimos putativos de $q = 1$ até $q = 300$ foi elaborado o gráfico da Figura 16, das densidades dos empacotamentos em função do número de círculos empacotados. Escusado é dizer que a densidade cresce com o aumento da quantidade de círculos empacotados. Pode-se observar que o crescimento é quase assintótico, tendendo para o valor-limite demonstrado $\pi/\sqrt{12} \cong 0,9069$ – ou 90,69%.

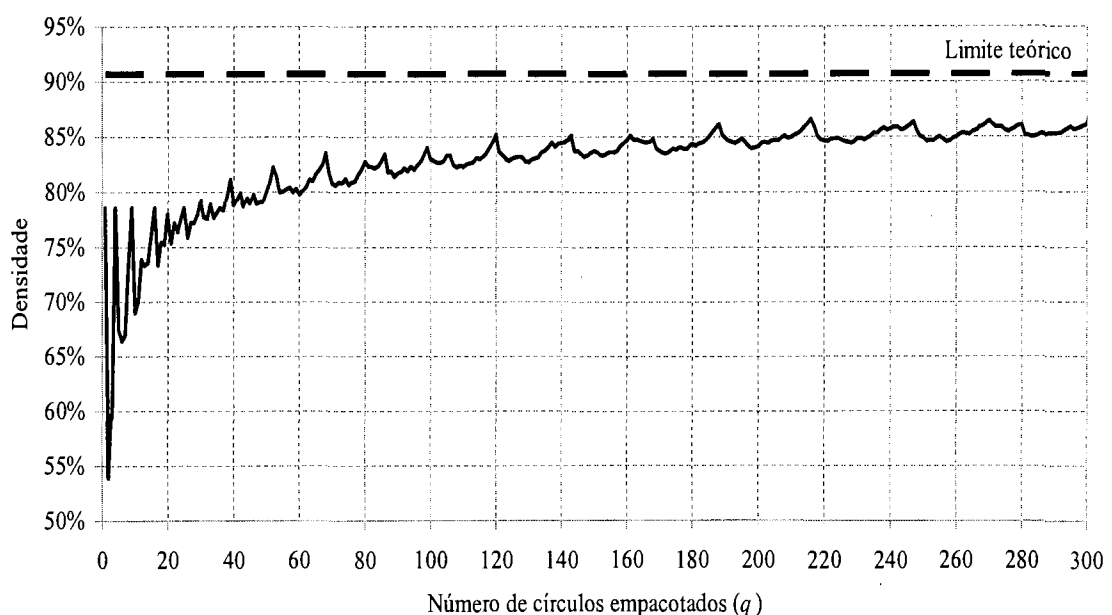


Figura 16 - Gráfico da densidade do empacotamento, de 1 a 300 círculos.

Em nenhuma das publicações pesquisadas foi relatado o uso de suavização hiperbólica, para remover as descontinuidades e afastar os mínimos locais. Os métodos e ou heurísticas empregados variaram de métodos de suavização não hiperbólica combinados com métodos de gradiente aproximado, cujas heurísticas contornavam as descontinuidades das hessianas, a métodos valendo-se de derivadas exatas. Na grande maioria das vezes com custos computacionais muito elevados, inclusive fazendo uso de supercomputadores para viabilizar a obtenção de seus resultados em tempo finito.

Dentro desse referencial, a perspectiva deste trabalho, unicamente, pode cingir-se a apresentar uma alternativa metodológica para abordar essa classe de problemas, oferecendo resultados eficientes com tempos computacionais aceitáveis e de precisão compatível aos melhores registrados na literatura. Essa classe de problemas vem sendo estudada há centenas de anos, certamente por milhares de pesquisadores, por se tratar de um problema conexo com a indústria de transportes e de armazenamento.

A suavização hiperbólica é uma técnica elegante, eficiente e extremamente simples que permite transformar um problema de natureza fortemente não-diferenciável em uma alternativa diferenciável. Nessa alternativa, a estratégia consiste na resolução de uma seqüência infinita de problemas completamente diferenciáveis e sem restrições, classe C^∞ , que gradativamente se aproximam do problema original. Esses novos problemas são criados através da inclusão da suavização hiperbólica diretamente na função objetivo original. Isso faz a inclusão das restrições, antes não continuamente diferenciáveis e, agora, transformadas pela função suavizadora hiperbólica na nova função objetivo sem restrições. A seqüência de resolução é feita com a modulação dos parâmetros da suavização (τ^k e ε^k), fazendo que a nova função objetivo se aproxime cada vez mais da original, respeitando todas as restrições, com uma tolerância de aproximação predeterminada.

A racionalidade dessa substituição está na viabilização do uso de métodos de otimização consagradamente mais robustos, que se fundamentam nas informações do gradiente e da hessiana (LAGES (1993)), tais como, o método de Newton, Quase-Newton ou Gradientes Conjugados, como pode ser visto, por exemplo, em MARTINEZ e SANTOS (1995) e SIMMONS (1975).

Esta técnica é um desdobramento do método de penalização hiperbólica originalmente apresentado por XAVIER (1982), constituindo-se, de certa forma, em uma extensão dos processos apresentados em SANTOS (1997), para problemas não diferenciáveis em geral, e em CHAVES (1997), para problemas min-max em particular.

3.2 – Aproximação do Problema utilizando a Suavização Hiperbólica

Para a resolução do problema (P4), a técnica de suavização hiperbólica o aproxima por uma particular formulação completamente diferenciável, classe C^∞ . Destarte, torna-se possível a utilização de métodos de minimização irrestrita reconhecidamente mais robustos e mais eficientes, conforme sobejamente registrado na literatura de otimização, em particular, aqueles que se utilizam das informações de derivadas de segunda ordem. Vide, por exemplo, LUENBERGER (1984) ou MINOUX (1986).

Em essência, a função *não-diferenciável* distância entre dois nós quaisquer,

$$z_{ij}(x) = \|x_i - x_j\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_i^k - x_j^k)^2} \quad (12)$$

será aproximada pela função hiperbólica:

$$\phi_{ij}(x, \tau) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_i^k - x_j^k)^2 + \tau^2} \quad (13)$$

A função Φ tem as seguintes propriedades:

- a) $\Phi_{ij}(x, \tau) > z_{ij}(x), \quad \forall \tau > 0;$
- b) $\Phi_{ij}(x, \tau)$ é uma função estritamente crescente em τ , para $\tau > 0;$
- c) $\lim_{\tau \rightarrow 0} \phi_{ij}(x, \tau) = z_{ij}(x);$
- d) Φ_{ij} é uma função da classe C^∞ .

Dessa forma, obtém-se um novo problema:

$$\begin{aligned}
 & \max d_q \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \phi_{ij}(x, \tau) \geq d_q, \forall (i, j) \in P \\
 & 0 \leq x_i^k \leq 1; k = 1, 2; i = 1, \dots, q
 \end{aligned} \tag{P6}$$

Deve ser observado que esse problema não é exatamente equivalente ao problema original. Trata-se de um problema de programação não-linear com restrições de desigualdade, onde as funções são da classe C^∞ . Para contornar essa dificuldade, resolve-se uma seqüência infinita de problemas suavizados, $l = 1, 2, \dots, +\infty$, parametrizados por uma seqüência estritamente decrescente de parâmetros τ^l tendendo a zero, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & \tau^{l+1} < \tau^l \\
 & \lim_{l \rightarrow +\infty} \tau^l = 0
 \end{aligned}$$

Através desse procedimento, força-se que a seqüência de problemas suavizados se aproxime gradativamente do problema original. É provado em SANTOS (1997), que para qualquer ponto de mínimo local do problema original e para qualquer vizinhança $\delta > 0$ especificada existe um valor limitante $\bar{\tau}$ tal que, para todo $\tau^l < \bar{\tau}$, existe um ponto de mínimo local do problema suavizado \bar{x}^l situado dentro dessa vizinhança δ desse ponto de mínimo local \bar{x} , ou seja:

$$\left\| \bar{x}^l - \bar{x} \right\| < \delta$$

para todo $\tau^l < \bar{\tau}$.

3.3 – A Técnica da Penalização Hiperbólica

Considere-se o problema geral de programação não-linear sujeito a restrições de desigualdade

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & \quad \quad \quad (P7) \\ g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

onde $f: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ e $g_i: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, i = 1, \dots, m$.

Para resolver o problema (P7), a técnica de Penalização Hiperbólica foi desenvolvida por XAVIER (1982). A idéia básica é substituir a solução do problema (P7) pela solução dos problemas irrestritos

$$\min f(x) + \sum_{i=1}^m \bar{P}(g_i(x)) \quad (P8)$$

onde o segundo termo é a penalidade, que assume o papel das restrições do problema (P7).

A técnica da Penalização Hiperbólica adota a função de penalidade hiperbólica

$$P(y, \alpha, \varepsilon) = -\left(\frac{1}{2} \tan \alpha\right)y + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \tan \alpha\right)^2 y^2 + \varepsilon^2} \quad (14)$$

onde $\alpha \in [0, \pi/2)$ e $\varepsilon \geq 0$.

Alternativamente, a função de penalidade hiperbólica pode ser escrita de uma forma mais conveniente:

$$P(y, \lambda, \varepsilon) = -\lambda y + \sqrt{\lambda^2 y^2 + \varepsilon^2} \quad (15)$$

Todas as propriedades da função (15) podem ser conferidas em XAVIER (2001), garantindo-se que é uma função da classe C^∞ .

Para resolver o problema (P7) pela técnica da penalização hiperbólica, devemos resolver uma seqüência infinita de subproblemas, $k = 1, 2, \dots$, definida pela minimização da função objetivo modificada

$$F(x, \lambda^k, \varepsilon^k) = f(x) + \sum_{i=1}^m P(g_i(x), \lambda^k, \varepsilon^k) \quad (16)$$

Uma forma possível é o algoritmo simplificado, a seguir.

Algoritmo Simplificado de Penalização Hiperbólica

Passo 1: Seja $k = 0$. Determinar valores iniciais $x^0, \lambda^1 > 0$ e $\varepsilon^1 > 0$.

Passo 2: Seja $k := k + 1$. Resolver o problema de minimização sem restrições

$$\min_x F(x, \lambda^k, \varepsilon^k)$$

a partir do ponto inicial x^{k-1} , obtendo um ponto ótimo intermediário x^k .

Passo 3: Teste de viabilidade:

Se x^k é um ponto *inviável*,
então vá ao Passo 4.

Caso contrário,
vá ao Passo 5.

Passo 4: Incrementar o parâmetro λ :

$$\lambda_i^{k+1} = r\lambda_i^k, \quad r > 1$$

Vá ao Passo 2

Passo 5: Decrementar o parâmetro ε :

$$\varepsilon_i^{k+1} = b\varepsilon_i^k, \quad 0 < b < 1$$

Vá ao Passo 2

A seqüência de subproblemas é obtida pela variação controlada dos dois parâmetros, λ e ε , em duas diferentes fases do algoritmo. Inicialmente, o parâmetro λ

aumenta, causando um aumento significativo na penalização fora da região viável e, ao mesmo tempo, uma redução significativa na penalização para os pontos dentro da região viável. Esse processo continua até que se obtenha um ponto viável. Daí em diante, λ permanece constante e o valor de ε diminui seqüencialmente. Dessa maneira, a penalização interna fica cada vez mais irrelevante, mantendo o mesmo nível de penalização proibitiva na região externa.

3.4 – Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica

Combinando-se as técnicas descritas de Suavização Hiperbólica e de Penalização Hiperbólica, desenvolveu-se um algoritmo para resolver o problema do empacotamento de círculos no quadrado de lado unitário ($l = 1$).

No procedimento de suavização, a resolução do problema de empacotamento original (P4) é obtida pela resolução de uma seqüência infinita de problemas de programação não-linear com restrições de desigualdade completamente diferenciáveis. Essa seqüência é gerada pelo decréscimo continuado do parâmetro τ até zero.

O uso do método de Penalização Hiperbólica implicaria na resolução de uma seqüência infinita de problemas penalizados irrestritos, conforme descrito na Seção 3.3, para cada um dos problemas suavizados. Esse processo é efetuado na segunda fase desse algoritmo, através do decréscimo continuado do parâmetro ε até zero.

Assim, a articulação ortodoxa dessas duas técnicas compreenderia a geração de duas seqüências infinitas intercaladas, de resolução de problemas suavizados penalizados. Evidentemente, uma estratégia muito pouco eficiente.

Dentro desse referencial, foi desenvolvida uma abordagem para tornar mais eficiente a utilização simultânea de ambos os métodos. O algoritmo, abaixo descrito, combina o uso das duas técnicas dentro de uma única seqüência infinita de resolução de problemas suavizados penalizados, através do acoplamento linear do parâmetro de suavização τ com o parâmetro de penalização ε , decrescendo ambos, simultaneamente, a zero.

3.5 – Algoritmo Simplificado

Inicialização:

Escolher valor de ρ : $0 < \rho < 1$;

Seja $k = 1$;

Escolher valores para x^0 , ε^1 e τ^1 .

Passo principal:

Repetir indefinidamente o laço:

1°. Resolver o problema completamente diferenciável (P6) com parâmetro de suavização $\tau = \tau^k$, usando o método de Penalização Hiperbólica com parâmetros de penalização $\lambda = 1$ e $\varepsilon = \varepsilon^k$; a partir do ponto inicial x^{k-1} , obtendo a solução x^k .

2°. Fazer

$$\tau^{k+1} = \rho \cdot \tau^k$$

$$\varepsilon^{k+1} = \rho \cdot \varepsilon^k$$

$$k := k + 1$$

Fim do laço.

Deve ser observado que o método de Penalização Hiperbólica contempla, em sua fase inicial, a manipulação do parâmetro λ , associado ao ângulo de inclinação da assíntota, até a obtenção de um ponto ótimo intermediário viável. Nesse algoritmo simplificado acima, o parâmetro λ é mantido constante no valor 1, por ser esse um valor suficientemente alto para garantir o atendimento a essa exigência de viabilidade.

Outrossim, na implementação do algoritmo acima descrito, os parâmetros τ e ε , respectivamente de suavização e de penalização, foram acoplados linearmente através

de uma constante positiva α adequada, na forma $\varepsilon = \alpha \tau$. Destarte, foi garantido o decréscimo simultâneo de ambos os parâmetros, tornando mais eficiente a aplicação combinada de ambos os métodos, conforme se poderá ver adiante.

Capítulo 4 – Resultados Computacionais

Afim de verificar a eficiência e a robustez da metodologia proposta, foi efetuada uma série de experimentos computacionais.

Primeiramente, no sentido de testar a estabilidade da metodologia proposta, contra as influências da escolha do ponto inicial, foi efetuada uma comparação entre cinco diferentes critérios de escolha desse ponto. Para essa análise, por sua decantada dificuldade, foi escolhido o problema de empacotamento de 10 círculos no quadrado unitário.

Foram adotados os seguintes critérios para escolha do ponto inicial:

Critério 1 – Pontos aleatoriamente dispostos no quadrado unitário, com distribuição uniforme nas duas direções.

Critério 2 – Pontos aleatoriamente dispostos num quadrado de lado muito pequeno ($l=0,001$), centrado no mesmo centro do quadrado unitário e com distribuição uniforme nas duas direções.

Critério 3 – Pontos aleatoriamente dispostos num quadrado de lado muito grande ($l=100$), centrado no mesmo centro do quadrado unitário e com distribuição uniforme nas duas direções.

Critério 4 – Pontos aleatoriamente dispostos em retângulos congruentes e igualmente espaçados, com dimensões $1/q$ de largura por 1 de altura, com distribuição uniforme nas duas direções dentro de cada retângulo.

Critério 5 – Pontos tomados da seguinte maneira: os primeiros $\lfloor \sqrt{q} \rfloor^2$ pontos dispostos aleatoriamente em quadrados menores, obtidos pelo particionamento do quadrado de lado unitário inicial, e os $q - \lfloor \sqrt{q} \rfloor^2$ pontos restantes dispostos aleatoriamente pelo quadrado de lado unitário inicial, com distribuição uniforme nas duas direções em todos os quadrados.

Para todos os critérios, e cada um deles, foram realizadas 500 experimentos de otimização. A Tabela 1 mostra, na primeira coluna o critério, na segunda coluna a frequência de casos em que foi obtido o valor ótimo putativo da distância máxima entre centros ($d=0,421279543967$) e, na última coluna, a frequência de casos em que foi obtido o segundo melhor valor da distância entre centros ($d=0,42014346085$).

Tabela 1 – Frequências de ocorrências de resultados segundo os cinco critérios de escolha dos pontos iniciais, para o problema de empacotamento de 10 círculos.

Critério	Melhor valor putativo ($d=0,421279543967$)	Segundo melhor valor ($d=0,42014346085$)
1	218	144
2	175	169
3	198	156
4	194	165
5	205	158

Os resultados constantes da Tabela 1 mostram, primeiramente, a estabilidade do método à definição do ponto inicial. Adicionalmente, mostram a alta taxa de obtenção do ponto ótimo global putativo, dentre um conjunto observado de 15 diferentes pontos de mínimo local para todos os critérios.

Como consequência dos resultados observados e que mostraram uma certa indiferença da escolha do ponto inicial, foi estabelecida a utilização do *Critério 1*, basicamente por ser esse o mais natural. Passou-se à otimização de todos os casos, variando o número de círculos de 2 a 100, utilizando-se as técnicas propostas da Suavização Hiperbólica e da Penalização Hiperbólica. Como já enfatizado sobejamente, a técnica de suavização engendra um problema de otimização da classe C^∞ , permitindo o uso de algoritmos de otimização mais robustos e eficientes. Nos presentes experimentos, foi utilizado o algoritmo Quase-Newton, com atualização da matriz hessiana dada pela forma BFGS, na implementação VA13C da Harwell Library, biblioteca obtida gratuitamente em CSE (2005).

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos com utilização de *um único ponto inicial*. A coluna f_{OPT} refere-se aos valores ótimos putativos de distância máxima entre centros

registrados na literatura. A coluna f_{SH} refere-se aos valores correspondentes obtidos nos experimentos. A coluna *Tempo* mostra o tempo de CPU, medido em segundos. A coluna E mostra o erro entre as observações f_{OPT} e f_{SH} , calculado pela fórmula

$$E = \frac{100(f_{SH} - f_{OPT})}{f_{OPT}} \quad (12)$$

Pode-se observar que os tempos de CPU são diminutos, sendo que o pior caso ($q = 94$) rodou em menos de 21 segundos. Além disso, os raios de círculos empacotados por Suavização Hiperbólica com um único ponto inicial são computacionalmente iguais, dada a precisão permitida pelos parâmetros finais τ e ε , aos valores ótimos putativos registrados na literatura, para os seguintes valores de q : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 29, 34, 36, 38, 54, 63 e 67. E, para esses casos, o pior tempo de CPU obtido foi inferior a 7 segundos ($q = 67$).

Escusado é dizer que os resultados ótimos putativos da literatura foram obtidos com toda sorte de metodologias, implementações e diversidade de pontos iniciais.

Tabela 2 – Resultados obtidos com Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica para um único ponto inicial, confrontados com os melhores resultados putativos relatados na literatura para $q = 2$ até $q = 100$.

q	f_{OPT}	f_{SH}	E	<i>Tempo</i>
2	1,414213562373	1,414213562360	-0,000000000940	0,0000
3	1,035276180410	1,035276180396	-0,000000001362	0,0000
4	1,000000000000	0,999999999981	-0,000000001880	0,0000
5	0,707106781187	0,707106781170	-0,000000002444	0,0150
6	0,600925212577	0,600925212561	-0,000000002709	0,0310
7	0,535898384862	0,535898384846	-0,000000003051	0,0320
8	0,517638090205	0,517638090185	-0,000000003806	0,0310
9	0,500000000000	0,499999999978	-0,000000004368	0,0310
10	0,421279543984	0,421279543967	-0,000000003971	0,0780
11	0,398207310237	0,398207310218	-0,000000004701	0,1410
12	0,388730126323	0,388730126302	-0,000000005346	0,1090
13	0,366096007696	0,366096007679	-0,000000004512	0,1400
14	0,348915260374	0,348915260351	-0,000000006529	0,1410
15	0,341081377402	0,336998425141	-1,197061033461	0,2030
16	0,333333333333	0,333333333308	-0,000000007632	0,2500
17	0,306153985300	0,301408008088	-1,550192857264	0,2650
18	0,300462606289	0,300462606264	-0,000000008241	0,3130
19	0,289541991995	0,289541991972	-0,000000008002	0,3600

q	f_{OPT}	f_{SH}	E	$Tempo$
20	0,286611652352	0,286611652326	-0,000000008946	0,3290
21	0,271812255359	0,267823675783	-1,467402406254	0,6100
22	0,267958401551	0,267949192402	-0,003436783052	0,4220
23	0,258819045103	0,257560525544	-0,486254618059	0,4520
24	0,254333095030	0,254333095001	-0,000000011225	0,6100
25	0,250000000000	0,249999999970	-0,000000011988	0,4680
26	0,238734757241	0,238609701750	-0,052382607612	0,5940
27	0,235849528301	0,235849528273	-0,000000011796	0,6880
28	0,230535493643	0,230203129942	-0,144170295033	0,9220
29	0,226882900744	0,226882900715	-0,000000012681	0,7500
30	0,224502964531	0,222764694996	-0,774274646685	0,8760
31	0,217547291619	0,215305409228	-1,030526454536	0,9370
32	0,213174562590	0,211769700977	-0,659019348294	1,0150
33	0,211328384143	0,207485121720	-1,818621023511	0,9220
34	0,205604646760	0,205604646727	-0,000000016245	0,9850
35	0,202763600863	0,199244377496	-1,735628757603	1,7820
36	0,200000000000	0,199999999966	-0,000000017135	0,9680
37	0,196429184630	0,193718807094	-1,379824256434	1,6560
38	0,195342304127	0,195342304097	-0,000000015445	1,3740
39	0,194365063162	0,189453818988	-2,526814281411	1,4530
40	0,188175522018	0,187790986764	-0,204349242705	1,4690
41	0,186099511848	0,186072667006	-0,014424993147	1,7810
42	0,184277072117	0,183342115939	-0,507364354995	1,7480
43	0,180191135457	0,180067023774	-0,068877796011	1,9210
44	0,178639245671	0,177322890306	-0,736879155628	2,0950
45	0,175716314176	0,175303519252	-0,234921228655	2,3900
46	0,174459360872	0,171568054282	-1,657295186196	2,0310
47	0,171270563823	0,170150555657	-0,653940841567	2,2190
48	0,169405429370	0,167856386974	-0,914399498169	2,2820
49	0,167386076868	0,165169842383	-1,324025585771	2,2500
50	0,166526577344	0,164246122960	-1,369423680449	2,6710
51	0,165618374312	0,164053983078	-0,944575890766	3,2820
52	0,165386237970	0,163029761379	-1,424832331864	2,6250
53	0,162648066300	0,159869578382	-1,708282171093	2,8110
54	0,159139516307	0,159139516272	-0,000000021824	2,8270
55	0,157555747530	0,156772422392	-0,497173318276	3,9220
56	0,156156500462	0,154754659016	-0,897715715671	3,5020
57	0,154747406944	0,153098282329	-1,065688044335	3,5780
58	0,152692531391	0,151938995490	-0,493498859208	4,5150
59	0,151561918317	0,150556897356	-0,663109158316	4,3920
60	0,149505654049	0,148774679829	-0,488927475466	4,3580
61	0,148544126695	0,147886564311	-0,442671412846	4,6860
62	0,147452679810	0,145592182082	-1,261759182849	5,1240
63	0,146819313688	0,146819313647	-0,000000027891	5,1270
64	0,145367754452	0,143158272928	-1,519925469503	5,2190
65	0,144699014781	0,144012732403	-0,474282688585	6,4070
66	0,143803966048	0,141230067147	-1,789866421744	5,8740
67	0,143085575883	0,143085575852	-0,000000021714	6,5160

q	f_{OPT}	f_{SH}	E	$Tempo$
68	0,142909477564	0,142884874738	-0,017215671164	6,3770
69	0,139948181881	0,138472230689	-1,054641204903	6,1410
70	0,137906776651	0,135784493963	-1,538925598189	6,9540
71	0,136612997248	0,135529226500	-0,793314523473	6,8620
72	0,135849927909	0,134358645815	-1,097742278214	6,7800
73	0,134709827696	0,133745774828	-0,715651474260	8,0620
74	0,133998672690	0,132199853201	-1,342415900762	7,4540
75	0,132488813742	0,131770880343	-0,541882275864	8,4070
76	0,131730037632	0,129808879153	-1,458405777205	8,3450
77	0,130841078054	0,129948507670	-0,682179020003	11,2510
78	0,130460772641	0,128411437259	-1,570844124815	10,7350
79	0,129965202741	0,129280384133	-0,526924587087	11,4670
80	0,129613385494	0,127942533151	-1,289104776302	10,7950
81	0,128336855974	0,126821054730	-1,181111406186	9,8750
82	0,127426911812	0,125863731689	-1,226726835432	10,4710
83	0,126454353161	0,126366022068	-0,069852157045	11,8450
84	0,125762702259	0,125414157546	-0,277144738718	12,7320
85	0,125311049576	0,125074149679	-0,189049487361	12,1400
86	0,125042534041	0,122393423233	-2,118567756298	11,9060
87	0,122826583176	0,121078269765	-1,423399858266	13,0130
88	0,122098354585	0,121249385408	-0,695315821499	13,2660
89	0,120943129628	0,119741970955	-0,993159906127	13,4870
90	0,120448049480	0,118882521447	-1,299753744564	13,8760
91	0,119812602204	0,118730601708	-0,903077369464	15,5800
92	0,119362266621	0,117452959705	-1,599590029521	14,3590
93	0,118384170617	0,117053490401	-1,124035594358	16,4840
94	0,118056384766	0,116719072726	-1,132774006565	20,2820
95	0,117119431272	0,115615265989	-1,284300364537	17,8910
96	0,116757999100	0,115028748847	-1,481055059533	16,2010
97	0,116357483969	0,114345026225	-1,729547318569	17,6430
98	0,116153513646	0,113802959793	-2,023661428008	16,6230
99	0,116018134843	0,113307743223	-2,336179273894	18,3430
100	0,114580194561	0,112926314823	-1,443425492439	17,6730

Como destacam MARANAS *et al* (1995), esses problemas de empacotamento tem uma natureza não-linear, não-diferenciável, não convexa e, essencialmente, possuem uma miríade de mínimos locais. Nenhuma metodologia pode garantir que o ótimo global possa ser atingido com uma única tentativa de ponto inicial. Por isso, MARANAS *et al* (1995) utilizaram, em seus experimentos para os casos $q = 2$ até $q = 30$, múltiplos pontos iniciais para atingir os resultados publicados. Dentro desse referencial, procedimento análogo foi adotado neste presente trabalho.

A adoção do esquema de múltiplos pontos iniciais permitiu a obtenção do ponto ótimo global putativo, utilizando-se até 50 tentativas de pontos iniciais, para a faixa $q = 2$ até $q = 40$, com exceção dos casos $q = 32$ e $q = 37$.

Para o caso $q = 32$, o ponto ótimo global putativo foi obtido com a utilização de 100 tentativas de pontos iniciais.

Para o caso $q = 37$, o ponto ótimo global putativo foi obtido com a utilização de 2.000 tentativas de pontos iniciais.

A Tabela 3 registra os resultados obtidos com a adoção do esquema de múltiplos pontos iniciais e das técnicas de Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica, confrontados com os respectivos valores ótimos putativos oriundos de SPECHT (2004), destacando em fundo cinza as exceções citadas. Vale lembrar que a Tabela 2 registra os resultados obtidos com apenas uma tentativa de ponto inicial. f_{OPT} , f_{SH} e E tem os mesmos significados das correspondentes colunas na Tabela 2:

Tabela 3 – Resultados obtidos com Suavização Hiperbólica e Penalização Hiperbólica para até 50 pontos iniciais – exceto em $q = 32$ e $q = 37$ – confrontados com os melhores resultados putativos relatados na literatura para $q = 2$ até $q = 40$.

q	f_{OPT}	f_{SH}	E
2	1,414213562373	1,414213562360	-0,000000000940
3	1,035276180410	1,035276180396	-0,000000001362
4	1,000000000000	0,999999999981	-0,000000001880
5	0,707106781187	0,707106781170	-0,000000002444
6	0,600925212577	0,600925212561	-0,000000002709
7	0,535898384862	0,535898384846	-0,000000003051
8	0,517638090205	0,517638090185	-0,000000003806
9	0,500000000000	0,499999999978	-0,000000004368
10	0,421279543984	0,421279543967	-0,000000003971
11	0,398207310237	0,398207310218	-0,000000004701
12	0,388730126323	0,388730126302	-0,000000005346
13	0,366096007696	0,366096007679	-0,000000004512
14	0,348915260374	0,348915260351	-0,000000006529
15	0,341081377402	0,341081377378	-0,000000007086
16	0,333333333333	0,333333333308	-0,000000007632
17	0,306153985300	0,306153985279	-0,000000006983
18	0,300462606289	0,300462606264	-0,000000008241
19	0,289541991995	0,289541991972	-0,000000007999
20	0,286611652352	0,286611652326	-0,000000008946

q	f_{OPT}	f_{SH}	E
21	0,271812255359	0,271812255337	-0,000000008234
22	0,267958401551	0,267958401529	-0,000000008315
23	0,258819045103	0,258819045074	-0,000000011112
24	0,254333095030	0,254333095001	-0,000000011225
25	0,250000000000	0,249999999970	-0,000000011988
26	0,238734757241	0,238734757214	-0,000000011268
27	0,235849528301	0,235849528273	-0,000000011796
28	0,230535493643	0,230535493636	-0,000000003223
29	0,226882900744	0,226882900715	-0,000000012681
30	0,224502964531	0,224502964522	-0,000000004085
31	0,217547291619	0,217547291611	-0,000000003581
32	0,213174562590	0,213174562562	-0,000000012975
33	0,211328384143	0,211328384117	-0,000000012242
34	0,205604646760	0,205604646727	-0,000000016245
35	0,202763600863	0,202763600853	-0,000000005040
36	0,200000000000	0,199999999966	-0,000000017135
37	0,196429184630	0,196429184601	-0,000000014621
38	0,195342304127	0,195342304097	-0,000000015445
39	0,194365063162	0,194365063151	-0,000000005634
40	0,188175522018	0,188175522008	-0,000000005059

É interessante registrar que os valores de erro encontrados, tanto na Tabela 2 quanto na Tabela 3, são devidos aos valores de τ e de ε utilizados nas otimizações, que não foram totalmente decrementados até zero. Acrescente-se a isso os erros muito pequenos – mas não nulos – da representação numérica em ponto flutuante e a propagação desses erros causada pelo número muito elevado de operações matemáticas em ponto flutuante nos laços internos do algoritmo, e tem-se a explicação para os valores desses erros diminutos apresentados nos resultados finais obtidos. Muito embora tenham sido tomadas providências para minimizar o efeito dos erros de representação e sua propagação, não foi possível eliminá-los de todo.

Após a apresentação dos resultados acima, são delineadas as conclusões sobre o trabalho realizado.

Capítulo 5 – Conclusões

Foi apresentada uma metodologia para resolver o problema do empacotamento de q círculos congruentes no quadrado unitário. Essa metodologia teve fulcro na técnica de Suavização Hiperbólica e contou com o concurso do método de Penalização Hiperbólica para a resolução do problema de otimização não-linear num espaço definido por um conjunto de restrições de desigualdade.

Ficou cabalmente comprovado que a robustez das técnicas utilizadas tornou a resolução do problema praticamente independente da forma de escolha dos pontos de partida. Foi escolhido o posicionamento aleatório dos pontos de partida, com distribuição uniforme nas duas direções dentro do quadrado unitário, como forma de geração do ponto inicial de cada caso. Os resultados foram tabulados e comparados com os melhores resultados putativos já publicados na vasta literatura disponível sobre o tema.

A obtenção de resultados com altíssimo grau de aproximação aos resultados ótimos putativos publicados na literatura consultada, sendo os erros diminutos explicados pelos valores finais de τ e ε , em tempos de processamento muito pequenos, demonstra o alto grau de precisão da técnica de Suavização Hiperbólica, bem como seu excelente desempenho.

Os programas utilizados foram elaborados em FORTRAN 77, tendo sido compilados e executados em um computador pessoal portátil (*notebook*) com processador Athlon XP 2600 MHz, dotado de 512 MBytes de memória RAM e 40 GBytes de disco rígido com interface EIDE. Os tempos de processamento obtidos foram o tópico especial nesta dissertação, pois surpreenderam pelo seu valor reduzido face aos tempos divulgados na literatura.

Em suma, por todos os resultados obtidos, pode-se afirmar que a abordagem metodológica foi plenamente exitosa, pois permitiu a obtenção do ótimo global putativo, dentro do nível de precisão dado pela máquina e pelos valores finais dos parâmetros τ e ε , em tempos de computação pequenos.

Capítulo 6 – Bibliografia

6.1 – Bibliografia Referenciada

BAMBAH, R.P., 1954, “On lattice covering by spheres”, *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, n. 20, pp. 25-52.

BIRGIN, E.G., MARTINEZ, J.M., RONCONI, D.P., 2002, “Optimizing the Packing of Cylinders into a Rectangular Container: A Nonlinear Approach”, *VI Oficina de Problemas de Corte e Empacotamento*, Campinas, SP, 9-10 Dez.

BRITO, J.A.M., 2004, *Suavização Hiperbólica aplicada no Problema de Localização de Estações de Rádio Base*, Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CASSELS, J.W.S., 1971, *An introduction to the geometry of numbers*, New York, Springer-Verlag.

CHAVES, A.M.V., 1987, *Resolução de Problemas Minimax Via Suavizações*, Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CHAVES, A.M.V., XAVIER, A.E., 1998, *Problemas Minimax: Uma Alternativa de Resolução Via Suavização*, Relatório Técnico, COPPE/UFRJ.

CONNELY, R., SLOANE, N.J.A., 1988, “Low dimensional lattices”, *PRS*, v. A, n. 418, pp. 17-41.

CONWAY, J.H., SLOANE, N.J.A., 1993, *Sphere packings, lattices and groups*, 2 ed. New York, Springer-Verlag.

COXETER, H.S.M., 1961, *Introduction to Geometry*, 1 ed. New York, J. Wiley & Sons.

CROFT, H.T., FALCONER, K.J., GUY, R.K., 1991, “Unsolved Problems in Geometry”, In: *Problem Books in Mathematics*, v. II, Berlin New York, Springer-Verlag.

CSE (2005), <http://hsl.rl.ac.uk/archive/hslarchive.html> (visitado em 05/02/2005).

DE GROOT, C., HOFFMANN, K.H., WÜRTZ, D., *et al.*, 1991, “Concepts in optimizing simulated annealing schedules: An adaptive approach for parallel and vector machines.”. In: Grauer, M., Pressmar, D.B. (eds), *Parallel and Distributed Optimization*, Heidelberg, Springer-Verlag.

DE GROOT, C., PEIKERT, R., WÜRTZ, D., 1990, *The optimal packing of ten equal circles in a square*, IPS Research Report No. 90-12, ETH-Zentrum CH-8092, Zurich.

DEMPSTER, A.P., 1957, “The minimum of a definite ternary quadratic form”, *CJM* n. 9, pp. 232-234.

DIB, K.R., 1994, *Utilização de Função de Penalização Hiperbólica na Suavização e Otimização de um Modelo Chuva-Vazão: Modelo SWMS*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

DOWSLAND, K.A., 1991, “Palletisation of cylinders in cases”, *OR Spektrum*, n. 13, pp. 171–172.

FRASER, H.J., GEORGE, J.A., 1994, “Integrated container loading software for pulp and paper industry”, *European Journal of Operational Research*, v. 3, n. 77, pp. 466–474.

GALIYEV, 1995, “Computational algorithms for the optimum covering of plane domains by a prescribed number of ellipses”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, v. 5, n. 35, pp. 609-617.

GAUSS, C.F., 1831, “Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber”, *Göttingische gelehrte Anzeigen*, Juli 9 = Werke, v. II, pp. 188-196.

GEORGE, J., GEORGE, J., LAMAR, B., 1995, “Packing different-sized circles into a rectangular container”, *European Journal of Operational Research*, n. 84, pp. 693–712.

GOLDBERG, M., 1970, “The packing of equal circles in a square”, *Math. Mag.*, n. 43, pp. 24-30.

HALES, T.C. 1998, *An Overview of the Kepler's Conjecture*, <http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98>.

- HILBERT, D., 1900, “Mathematische Probleme”, In: *2nd International Congress of Mathematicians*, Paris, France.
- ISERMANN, H., 1991, “Heuristiken zur Lösung, des zweidimensionalen Packproblems für Rundgefäße”, *OR Spektrum*, n. 13, pp. 213–223.
- KEPLER, J., 1661, *Strena sue de nive sexangula*.
- KERSHNER, R., 1939, “The number of circles covering a set”, *AJM*, n. 61, pp. 665-671.
- KORKINE, A., ZOLOTAREFF, G., 1872, “Sur les formes quadratique positive quaternaires”, *Math. Ann.*, v. 5, pp. 581-583.
- LAGES, E.L., 1993, *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA – Livros Técnicos e Científicos.
- LUBACHEVSKY, B.D., GRAHAM, R.L., 1995, “Dense Packings of Equal Disks in an Equilateral Triangle: From 22 to 34 and Beyond”, *Electron. J. Combin.*, v. 2, #A1.
- LUENBERGER, D.G., 1984, *Linear and Nonlinear Programming*, 1 ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
- MARTINEZ, J.M., SANTOS, S.A., 1955, “Métodos Computacionais de Otimização”, *20º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil.
- MILANO, R., 1987, “Configurations optimales de disques dans un polygone regulier”, *Memoire de Licence*, Universite Libre de Bruxelles.
- MINOUX, M., 1986, “Mathematical programming”, *Theory and algorithms*, Wiley & Sons, Chichester.
- MOLLARD, M., PAYAN, C., 1990, “Some progress in the packing of equal circles in a square”, *Discrete Math.*, n. 84, pp. 303-307.
- MORDELL, L.J., 1948, “The minimum of a definite ternary quadratic form”, *JLMS* n. 23, pp. 175-178.
- MOTA, F.C., BHAYA, A., KASKUREWICZ, E., 1992, “Robust Stabilization of Time-Varying Discrete Interval Systems”, *Proceedings of Congress of Decision and Control (CDC-92)*, Tucson, Arizona.

- PARDALOS, P.M., MARANAS, C.D., FLOUDAS, C.A., 1995, "New results in the packing of equal circles in a square", *Discrete Mathematics*, n. 142, pp. 287-293.
- SANTOS, A.B.A., 1997, *Problemas de Programação Não-Diferenciável: Uma Metodologia de Suavização*, Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- SCHAER, J., 1965, "The densest packing of 9 circles in a square", *Canad. Math. Bull.*, n. 8, pp. 273-277.
- SCHAER, J., 1971, "On the packing of ten equal circles in a square", *Math. Mag.*, n. 44, pp. 139-140.
- SCHAER, J., MEIR, A., 1965, "On a geometric extremum problem", *Canad. Math. Bull.*, n. 8, pp. 21-27.
- SCHLÜTER, K. 1979, "Kreispackung in quadraten", *Elem. Math.*, n. 34, pp. 12-14.
- SIMMONS, D.M., 1975, *Non-Linear Programming for Operations Research*, Englewood, NJ, Prentice-Hall.
- SPECHT, E., 2004, <http://www.packomania.com> (visitado em 25/11/2004)
- THUE, A., 1910, "Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene", *Norske Vid. Selsk. Skr.*, n. 1, pp. 1-9.
- TÓTH, L.F., 1940, "Über einen geometrischen Satz", *Math. Z.*, n. 46, pp. 79-83.
- TÓTH, L.F., 1972, *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum*, 2 ed. Berlin New York, Springer-Verlag.
- VALETTE, G., 1989, "A better packing of ten equal circles in a square", *Discrete Math.*, n. 76, pp. 57-59.
- WENGERODT, 1987a, "Die dichteste Packung von 14 Kreisen in einem Quadrat", *Beitrage Algebra Geom.*, n. 25, pp. 25-46.
- WENGERODT, 1987b, "Die dichteste Packung von 25 Kreisen in einem Quadrat", In: *Ann. Univ. Sci. Budapest, E&V&Sect. Math.*, v. 30, pp. 3-15.
- WENGERODT, G., 1983, "Die dichteste Packung von 16 Kreisen in einem Quadrat", *Beitrage Algebra Geom.*, n. 16, pp. 173-190.

WENGERODT, G., KIRCHNER, K., 1987, “Die dichteste Packung von 36 Kreisen in einem Quadrat”, *Beitrage Algebra Geom.*, n. 25, pp.147-159.

XAVIER, A. E., CANEDO, M. P., SILVA, L. P., 1990, “Calibração Automática de Modelos Chuva-Vazão: Um Método Assintótico”, *Pesquisa Operacional*, v. 10, n. 1, pp. 1-18.

XAVIER, A.E., 1982, *Penalização Hiperbólica: Um Novo Método para Resolução de Problemas de Otimização*, Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

XAVIER, A.E., 1993, *Solução de Problemas de Programação Não-Diferenciáveis via Suavização*, Relatório Técnico ES-290/93, PESC/COPPE/UFRJ.

XAVIER, A.E., 2000, “Optimum Covering of Plane Domains by Circles”, *17th International Symposium on Mathematical Programming*, Atlanta, USA, 7-11 August.

XAVIER, A.E., 2001, “Hyperbolic Penalty: a new method for nonlinear programming with inequalities”, *Intl. Trans. in Op. Res.*, n. 8, pp. 659-671.

XAVIER, A.E., 2005, *The Hyperbolic Smoothing Clustering Method*, Relatório Técnico 674/05, PESC/COPPE/UFRJ.

XAVIER, A.E., OLIVEIRA, A.A.F., 2003, “Optimum Order p Covering of Plane Domains by Circles Via Hyperbolic Smoothing Method”, *International Symposium on Mathematical Programming*, Kopenhagen, August.

XAVIER, A.E., OLIVEIRA, A.A.F., 2005, “Optimum Covering of Plane Domains by Circles via Hyperbolic Smoothing Method”, *Journal of Global Optimization*, v. 31, n. 3, pp. 493-504, March.

YAN, K., WENQI, H., 2002, “A heuristic quasi-physical strategy for solving disks packing problem”, *Simulation Modelling Practice and Theory*, n. 10, pp. 195–207.

6.2 – Bibliografia Consultada

B.D. Lubachevsky, F.H. Stillinger, Geometric properties of random circle packings, *Journal of Statistical Physics* 60 (1990) 561–583.

- B.D. Lubachevsky, R.L. Graham, Curved hexagonal packing of equal circles in a circle, *Discrete & Computational Geometry* 18 (1997) 179–194.
- C.A. Floudas and V. Visweswaran, A global optimization algorithm for certain classes of nonconvex NLPs - I. Theory, *Comput. Chem. Engrg.* 14 (1990) 1397-1418.
- C.A. Floudas and V. Visweswaran, A primal-relaxed dual global optimization approach, *J. Optim. Theory Appl.* 78 (2) (1993).
- D.S. Hochbaum, W. Maass, Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI, *Journal of the Association for Computing Machinery* 23 (1) (1985) 130–136.
- D.W. Boll, J. Donovan, R.L. Graham, B.D. Lubachevsky, Improving dense packings of equal disks in a square, *The Electronic Journal of Combinatorics* 7 (2000) R46.
- E. Hopper, B.C.H. Turton, Application of genetic algorithms to packing problems—A review, in: *Proceedings of the 2nd On-line World Conference on Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing*, London, Great Britain, 1998, pp. 279–288.
- F. Fodor, The densest packing of 19 congruent circles in a circle, *Geometriae Dedicata* 74 (1999) 139–145.
- G. Fejes Tóth, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, Boca Raton, 1997.
- G.E. Reis, Dense packings of equal disks within a disk, *Mathematics Magazine* 48 (1975) 33–37.
- H. Melissen, Densest packing of six equal circles in a square, *Elemente der Mathematik* 49 (1994) 27–31.
- H. Wenqi, Quasi-physical and quasi-social method for tackling NP-hard problems, in: *Proceedings of the International Workshop on Discrete Mathematics and Algorithms*, Guangzhou, China, 1994, pp. 89-91.
- H. Wenqi, X. Ruchu, Two personification strategies for solving circles packing problem, *Science in China Series E* 29 (4) (1999) 347–353.
- H. Wenqi, Z. Shuhao, A quasi-physical method for solving packing problems, *Acta Mathematicae Applagatae Sinica* 2 (2) (1979) 176–180.

- J. Schaer, The densest packing of nine disks in a square, *Canadian Mathematical Bulletin* 8 (1965) 273-277.
- J.B.M. Melissen, Densest packing of eleven congruent disks in a disk, *Geometriae Dedicata* 50 (1994) 15-25.
- J.B.M. Melissen, Densest packings for congruent circles in an equilateral triangle, *American Mathematical Monthly* 100 (1993) 916–925.
- J.B.M. Melissen, Optimal packings of eleven equal circles in an equilateral triangle, *Acta Mathematica Hungarica* 65 (1994) 389–393.
- J.B.M. Melissen, P.C. Schuur, Packing 16, 17 or 18 circles in an equilateral triangle, *Discrete Mathematics* 145 (1995) 333–342.
- K.A. Dowsland, W.B. Dowsland, Optimal and heuristic solutions to packing problems—The state of the art, Working Paper EBMS/21, University of Wales, Swansea, 1990.
- K.A. Dowsland, W.B. Dowsland, Packing problems, *European Journal of Operational Research* 56 (1) (1992) 2–14.
- L.C. Galvão, Dimensionamento de Sistemas de Distribuição Através do Diagrama Multiplicativo de Voronoi com Pesos, Tese de D.Sc., UFSC (2003), Florianópolis, SC.
- L.C.F. Souza, Desempenho Computacional do Método de Agrupamento Via Suavização Hiperbólica, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ (2005), Rio de Janeiro, RJ.
- L.T. Wille, Closest packing in curved space by simulated annealing, *J. Physics. A.: Mathematics. General* 20 (1) (1987) 1211–1218.
- M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NPCompleteness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- N. Maculan e R.E. Campello, *Algoritmos e Heurísticas*, Ed. da Universidade Federal Fluminense, 1994.
- P.N. Mendonça, Otimização dos Feixes de Condutores de Linhas de Transmissão em Corrente Alternada, Tese M.Sc., COPPE/UFRJ (2002), Rio de Janeiro, RJ.
- R.L. Graham, B.D. Lubachevsky, Repeated patterns of dense packings of equal disks in a square, *The Electronic Journal of Combinatorics* 3 (1996) 1–16.

R.W. Haessler, P.E. Sweeney, Cutting stock problems and solution procedures, European journal of Operational Research 54 (1991) 141–150.

T. Croft, K.J. Falconer, R.K. Guy, Unsolved Problem in Geometry, Springer Verlag, New York, 1991.

6.3 – Sítios na Internet Consultados

<http://home.att.net/~donovanhse/Packing/> - J. Donovan, "Packing Circles in Squares and Circles Page."

<http://mathworld.wolfram.com/CirclePacking.html> - Circle Packing

<http://mathworld.wolfram.com/KissingNumber.html> - Eric Weisstein

<http://members.tripod.com/vismath5/lub/index.html> - "Spontaneous Patterns in Disk Packings"

<http://www.ams.org/new-in-math/cover/cass1.html> - Bill Casselman

<http://www.daveboll.com/packing.html> - "Optimal Packing Of Circles And Spheres"

<http://www.frii.com/~dboll/packing.html> - D. Boll, "Packing Results."

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/cover.html> - D. Eppstein, "Covering and Packing."

<http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/spherepack.html> - "Sphere Packing and Kissing Numbers"

http://www.inf.u-szeged.hu/~pszabo/Packing_circles.html - L.G. Casado and P.G. Szabó, "Equal Circle Packing in a Square."

<http://www.math.utk.edu/~kens/> - Ken Stephenson – "Professor of Mathematics"

<http://www.pmmms.cam.ac.uk/~gjm11/cpacking/info.html> - Gareth McCaughan

<http://www.stetson.edu/~efriedma/packing.html> - E. Friedman, "Erich's Packing Center"