



CONEXÃO DE TERMINAIS COM LIMITAÇÃO DE ROTEADORES: COMPLEXIDADE E RELAÇÃO COM FLUXOS E CAMINHOS DISJUNTOS

Alexsander Andrade de Melo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Uéverton dos Santos Souza

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2017

CONEXÃO DE TERMINAIS COM LIMITAÇÃO DE ROTEADORES:
COMPLEXIDADE E RELAÇÃO COM FLUXOS E CAMINHOS DISJUNTOS

Alexsander Andrade de Melo

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Uéverton dos Santos Souza, D.Sc.

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

Prof. Rodolfo Alves de Oliveira, D.Sc.

Prof. Vinícius Fernandes dos Santos, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2017

Melo, Alexsander Andrade de

Conexão de terminais com limitação de roteadores: complexidade e relação com fluxos e caminhos disjuntos/Alexsander Andrade de Melo. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XI, 116 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Uéverton dos Santos Souza

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 113 – 116.

1. Conexão de terminais. 2. Árvore de conexão. 3. Limitação de roteadores. 4. Caminhos disjuntos. 5. Árvore de Steiner. 6. Fluxo em redes. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Ao grandioso, amoroso e
soberano Deus.*

Soli Deo Gloria.

Agradecimentos

Primeiramente e sobretudo, agradeço ao bondoso Deus por sempre me abençoar com seu imensurável amor e sua infindável misericórdia!

Agradeço aos meus pais, Samuel e Wânia, e aos meus irmãos, Priscila e Lucas, por todo apoio e ensinamento fundamentais que me concederam ao longo da vida. Agradeço aos meus avós por me ajudarem e se preocuparem comigo, procurando me agradar em tudo. Agradeço também aos meus demais familiares, aos meus amigos e aos meus irmãos em Cristo por desejarem o meu sucesso e me incentivarem.

Agradeço muito à profa. Celina Figueiredo e ao prof. Uéverton Souza por terem me aceitado como seu orientando e por, muito além disso, todos os ensinamentos transmitidos e toda paciência concedida a mim durante a execução deste trabalho. Deus me agraciou ao tê-los como meus orientadores.

Agradeço também aos demais professores que compuseram a banca examinadora deste trabalho, prof. Luerbio Faria, prof. Rodolfo Oliveira e prof. Vinícius Santos. Muito obrigado por disponibilizarem os vossos tempos e pelos comentários valiosos!

Agradeço a todos os professores da UFRJ com os quais tive a honra de ter aula. Assim como, agradeço aos demais funcionários da UFRJ pela atenção e prontidão.

Agradeço a todos os meus amigos do Laboratório de Algoritmos e Combinatória. Em especial, ao Luís Felipe por ter me apresentado à profa. Celina e por prontamente me ajudar sempre que preciso; à Lucila Bento por seu grande e valioso incentivo para que eu trabalhasse com o prof. Uéverton; à Paloma Lima por ter me ajudado muito durante a fase de créditos; ao Rodrigo Zhou por ter revisado o texto desta dissertação e pelas dicas de \LaTeX ; e ao Alexandre Santiago por me contagiar com o seu ânimo.

Agradeço a todos os demais amigos que a UFRJ me concedeu, com muitos dos quais tive o prazer de realizar disciplinas. Agradeço também aos meus mui queridos amigos da UFRRJ, o que inclui muitos professores, que tive a honra de conviver junto durante a minha graduação. Destaco, em especial, as professoras Paula Takatsuka e Adria Lyra por todo apoio que me deram para que eu realizasse meu mestrado!

Agradeço de forma muito singular ao meu amigo Ygor Canalli, que muito além de ser um amigo acadêmico, é um amigo que eu posso contar em todos os momentos da minha vida. Assim como, agradeço ao meu amigo Allan Costa.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro concedido ao longo do meu mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONEXÃO DE TERMINAIS COM LIMITAÇÃO DE ROTEADORES:
COMPLEXIDADE E RELAÇÃO COM FLUXOS E CAMINHOS DISJUNTOS

Alexsander Andrade de Melo

Fevereiro/2017

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Uéverton dos Santos Souza

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma *árvore de conexão* de um grafo G para um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$ é um subgrafo T de G tal que T é uma árvore, $W \subseteq V(T)$ e todas as folhas de T pertencem a W . Os vértices em W são chamados de *terminais*, os vértices em $V(T) \setminus W$ com grau exatamente 2 em T são chamados de *elos* e os vértices em $V(T) \setminus W$ com grau ao menos 3 em T são chamados de *roteadores*.

Em 2012, Dourado et al. propuseram o PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS (TCP), o qual consiste na seguinte questão: “*dado um grafo conexo G , um conjunto de terminais W e dois inteiros não negativos ℓ e r ; G admite uma árvore de conexão para W que contenha no máximo ℓ elos e no máximo r roteadores?*”. O TCP foi provado ser NP-completo mesmo quando ou ℓ ou r é limitado por uma constante; por outro lado, o problema foi provado ser solucionável em tempo polinomial se ℓ e r são ambos limitados por constantes. Posteriormente, em 2014, Dourado et al. propuseram a variante estrita do TCP na qual exige-se adicionalmente que todos os terminais sejam folhas de T , denotada por S-TCP. De igual modo ao TCP, o S-TCP foi provado ser NP-completo se ℓ é limitado por uma constante e ser solucionável em tempo polinomial se ℓ e r são ambos limitados por constantes; contudo, o caso em que apenas r é limitado por uma constante não havia sido considerado até então.

Assim, estudamos o S-TCP restrito ao caso em que r é limitado por uma constante. Mais especificamente, propomos um algoritmo de tempo polinomial para o S-TCP quando $r \in \{0, 1\}$ e provamos resultados parciais para quando $r \geq 2$, exibindo relações com problemas de fluxo em redes e caminhos disjuntos. Ademais, determinamos a complexidade de algumas variantes do S-TCP. Por fim, estudamos o S-TCP e o TCP quando o grau máximo do grafo G é limitado.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TERMINAL CONNECTION WITH LIMITATION OF ROUTERS:
COMPLEXITY AND RELATION WITH FLOWS AND DISJOINT PATHS

Alexsander Andrade de Melo

February/2017

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Uéverton dos Santos Souza

Department: Systems Engineering and Computer Science

A *connection tree* of a graph G for a non-empty subset $W \subseteq V(G)$ is a tree subgraph of G such that $W \subseteq V(T)$ and every leaf of T belongs to W . The vertices in W are called *terminals*, the vertices in $V(T) \setminus W$ with degree 2 in T are called *linkers* and the vertices in $V(T) \setminus W$ with degree at least 3 in T are called *routers*.

In 2012, Dourado et al. proposed the TERMINAL CONNECTION PROBLEM (TCP), which consists in the following question: “*given a connected graph G , a terminal set W and two non-negative integers ℓ and r ; does G admit a connection tree for W such that it has at most ℓ linkers and at most r routers?*”. The TCP was proved to be NP-complete even when either ℓ or r is bounded by a constant; conversely, the problem was proved to be polynomial-time solvable if ℓ and r are both bounded by constants. Later, in 2014, Dourado et al. proposed the strict variant of the TCP which further requires that every terminal must be a leaf of T , and it is denoted by S-TCP. As the TCP, the S-TCP was proved to be NP-complete if ℓ is bounded by a constant and be polynomial-time solvable if ℓ and r are both bounded by constants; however, the case in which just r is bounded by a constant was not considered.

Thus, we study in this dissertation the S-TCP restricted to the case in which r is bounded by a constant. More specifically, we provide a polynomial-time algorithm for the S-TCP when $r \in \{0, 1\}$ and we prove partial results for the case $r \geq 2$, exposing relations with network flows and disjoint paths. Moreover, we determine the complexity of some variants of the S-TCP. Lastly, we study the S-TCP and the TCP when the maximum degree of the graph G is bounded.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Organização do trabalho	3
1.2 Teoria dos grafos	4
1.3 Complexidade computacional	6
2 Conexão de Terminais	11
2.1 Árvore de conexão e o problema de conexão de terminais	11
2.2 Relação com problemas clássicos	22
2.3 Versão estrita do TCP	25
3 Problema Estrito com Limitação de Roteadores	30
3.1 Número limitado de roteadores	30
3.1.1 Caso com no máximo um roteador	31
3.1.2 Resultados parciais para o caso $r \geq 2$	35
3.2 Restrições adicionais	43
3.2.1 Subgrafo de roteadores conexo	43
3.2.2 Conjunto de terminais particionado	51
3.2.3 Conexão entre roteadores semiestruturada	57
3.3 Complexidade parametrizada	63
4 Fluxo Integral de Dois <i>Commodities</i> e $k + 1$ Caminhos Disjuntos	68
5 Grau Máximo Limitado	82
5.1 Problema não estrito	84
5.2 Problema estrito	94
6 Conclusão	109
Referências Bibliográficas	113

Lista de Figuras

1.1	Caminhos disjuntos em vértices.	6
1.2	(a) Circuito booleano de decisão com entrelaçamento 1 e profundidade 3. (b) Circuito booleano de decisão com entrelaçamento 2 e profundidade 2.	10
2.1	Árvore de conexão de G para W	12
2.2	Partição $V(T) = W \cup L(T) \cup R(T)$	12
2.3	Diferentes árvores de conexão de G para W	13
2.4	<i>Gadgets</i> da redução do 3-SAT para o TCP(ℓ).	15
2.5	Grafo G e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.	16
2.6	Árvore de conexão de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	17
2.7	Redução do CAMINHO HAMILTONIANO para o TCP(r).	19
2.8	Árvore de conexão T para W obtida a partir de um caminho P	20
2.9	<i>Gadget</i> G_I da instância $f(I)$ do TCP(r).	21
2.10	Árvore de conexão estrita de G para $W \setminus \{w\}$	26
2.11	Árvore de conexão (não estrita) de G para W' com menos do que seis vértices não terminais.	27
2.12	Árvore de conexão estrita de G para W com menos vértices não terminais do que qualquer árvore de conexão não estrita de G para W	27
3.1	Grafo G' da instância $f(I, \rho)$ do MIN-SUM <i>st</i> -DP.	33
3.2	Relação do S-TCP($r = 1$) com o MIN-SUM <i>st</i> -DP.	34
3.3	Interpretação do S-TCP(R) como uma conjunção de dois problemas.	37
3.4	Redução polinomial do problema (ii) para o S-TCP($r = R $).	37
3.5	Redução do S-TCP($r = c$) para o S-TCP($r = c + 1$)	42
3.6	Estratégia de contração de arestas.	45
3.7	Construção da instância $f(I, T_R)$ do MIN-SUM <i>st</i> -DP.	47
3.8	Árvores de conexão estrita, dado que $G[R]$ é conexo.	50
3.9	Árvores de conexão estrita, dado que $G[R']$ é conexo, onde $R' \subseteq R$	51

3.10	Partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$	51
3.11	<i>Gadget</i> G_{x_i} referente à variável $x_i \in X$	53
3.12	Grafo G , conjunto de terminais W e partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.	53
3.13	Caminhos referentes à atribuição de valor verdade $\alpha(x_i)$	54
3.14	Árvore de conexão estrita de G para $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$, referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	55
3.15	Topologia de conexão T_R e árvore de conexão estrita que adota T_R	57
3.16	Adaptação da instância $f(I)$ para obtenção de uma instância equiva- lente do problema SEMIESTRUTURADO S-TCP(r).	58
3.17	Topologia de conexão T_R	60
3.18	Grafo G , conjunto de terminais W e conjunto R , obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.	60
3.19	Árvore de conexão estrita de G para W com topologia de conexão T_R , referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	62
3.20	Construção parcial do grafo G	64
3.21	Grafo G e o conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma dada instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ de COBERTURA POR CONJUNTOS.	65
3.22	Árvore de conexão estrita de G para W , referente a uma solução \mathcal{F}' para a instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ de COBERTURA POR CONJUNTOS.	66
4.1	Redução polinomial do S-TCP(R) com $ R = 2$ para o problema MIN- SUM $k + 1$ DP.	70
4.2	<i>Gadget</i> G_{x_i} referente à variável $x_i \in X$	71
4.3	Vértices $s_2, t_2, v_{c_i}, \nu_{c_i}, v_{t_j}^t$ e $\nu_{t_j}^t$ e suas adjacências.	71
4.4	Vértices u_1^t, u_2^t, z_1^t e z_2^t e suas adjacências.	72
4.5	Grafo G e pares de vértices $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$ da instância $g(I)$ do U2CIF, obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.	73
4.6	Arestas necessariamente utilizadas pelo fluxo do segundo <i>commodity</i> e obstrução do fluxo de um dos <i>commodities</i> caso o fluxo de s_1 para t_1 utilize arestas cujos extremos não pertencem aos <i>gadgets</i> G_{x_i} , para $x_i \in X$	74
4.7	Definição do fluxo do primeiro <i>commodity</i>	76
4.8	Fluxos do primeiro e do segundo <i>commodity</i> correspondentes a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	77
4.9	Grafo G e os pares de vértices $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.	80

4.10	$k + 1$ caminhos disjuntos em vértices referentes a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	81
5.1	<i>Gadgets</i> da redução do 3-SAT(3) para o TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 3$	85
5.2	Grafo G , com $\Delta(G) = 3$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3).	86
5.3	Árvore de conexão de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	87
5.4	Vizinhança dos vértices $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2$ e f_{x_i} em T	88
5.5	Subdivisão da aresta e	89
5.6	Adição dos vértices s e t e das arestas sv e ut	90
5.7	<i>Gadget</i> G'_I	90
5.8	<i>Gadget</i> G_v	91
5.9	Grafo G' , com $\Delta(G') = 3$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (G, s, t)$ do st -CAMINHO HAMILTONIANO.	92
5.10	Construção de T : casos possíveis para a subsequência $\langle u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \rangle$	93
5.11	Árvore de conexão T para W obtida a partir de um caminho hamiltoniano P	93
5.12	Possíveis subgrafos de G_v em T' , para $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$	94
5.13	<i>Gadget</i> G_{x_i} da redução do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3) para o S-TCP com $\Delta(G) = 3$	96
5.14	Grafo G , com $\Delta(G) = 3$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3).	97
5.15	Subgrafos H_{x_i} e \bar{H}_{x_i} do <i>gadget</i> G_{x_i}	98
5.16	Árvore de conexão estrita de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	99
5.17	<i>Gadget</i> G_{x_i} com mais do que dois elos na árvore T , como consequência de f_{x_i} e $t_{x_i}^1$ (ou $t_{x_i}^2$) simultaneamente pertencerem a T	100
5.18	<i>Gadgets</i> da redução do 3-SAT(3) para o S-TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 4$	101
5.19	Grafo G , com $\Delta(G) = 4$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3).	102
5.20	Padrões para conexão dos vértices do <i>gadget</i> G_{C_i} a T	103
5.21	Árvore de conexão estrita de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X	104
5.22	Operações para construção do conjunto de grafos \mathcal{G}_L , para $L \in \mathcal{L}$	107

Capítulo 1

Introdução

Problemas concernentes a projeto de redes e conexão de terminais são usualmente questões combinatórias de grande interesse prático e teórico devido ao fato de se relacionarem de forma muito próxima a diversas aplicações reais, como por exemplo: aplicações em telecomunicações, roteamento *multicast*, rede de transportes e segurança da informação [5, 11, 20, 41, 42]; além de serem, de forma geral, problemas desafiadores, no sentido de até os dias atuais não se conhecer algoritmos eficientes para solucioná-los ou provas matemáticas para a inexistência de tais algoritmos. Como exemplo, citamos o famoso problema CAMINHO HAMILTONIANO, que essencialmente consiste na pergunta: “*dado um grafo G , existe um caminho em G que contenha todos os seus vértices?*”. Tal problema é sabidamente NP-completo [23] e possui notável importância tanto do ponto de vista de algoritmos, mais relacionado à aplicações práticas, quanto do ponto de vista de teoria dos grafos [20], onde deseja-se determinar propriedades estruturais mantidas pelos grafos que respondem positivamente a pergunta referente ao problema.

O interesse por estes problemas de projeto de redes e conexão de terminais data quase meio século, sendo inclusive proposto por Fermat (1601-1655) um dos primeiros destes, o qual é formulado como segue: dados três pontos A , B e C no plano Euclidiano, objetiva-se encontrar um ponto P cujo somatório das distâncias de P para um cada desses três pontos A , B e C seja mínima [5, 41]. Embora possua uma formulação simples, tal problema provê considerações básicas referentes ao tratamento de diversos outros problemas de projetos de redes encontrados na literatura [41], além de ter sido o propulsor de generalizações ou variantes cujas formulações são mais elaboradas. Dentre tais, destacamos o problema ÁRVORE DE STEINER, cuja finalidade é conectar um dado conjunto de pontos no plano Euclidiano, no entanto permitindo-se utilizar pontos adicionais, de forma que o custo total da conexão entre esses pontos seja mínimo. Assim como CAMINHO HAMILTONIANO, ÁRVORE DE STEINER é um problema desafiador — provado ser NP-completo [23] — de grande importância teórica e prática.

Ao longo do último século, diversas variantes do problema da árvore de Steiner surgiram, inclusive a variante que o formula sob a perspectiva de grafos, em vez de no plano euclidiano. Recentemente, motivados por aplicações em redes ópticas, Watel et al. propuseram uma variante da ÁRVORE DE STEINER (em grafos), denominada ÁRVORE DE STEINER COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES, onde limita-se o número de vértices com grau maior ou igual a 3 na árvore, sendo tais vértices chamados de *ramificações* [42]. Aproximadamente na mesma época, Dourado et al. propuseram de forma independente um problema semelhante (porém não igual) a essa variante, denominado PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS (TCP — do inglês: *Terminal connection problem*) [10], o qual é formulado como segue: dado um grafo conexo G , um subconjunto não vazio W do conjunto de vértices de G , cujos elementos são denominados *terminais*, e dois inteiros não negativos ℓ e r ; deseja-se saber se G admite como subgrafo uma árvore T tal que todos os vértices em W estão contidos em T , todas as folhas de T pertencem a W e há no máximo ℓ vértices não terminais com grau 2 e r vértices não terminais com grau maior ou igual a 3 em T . Os vértices não terminais de T com grau 2 são chamados de *elos* e os vértices não terminais de T com grau maior ou igual a 3 são chamados de *roteadores*. Dourado et al. provaram que este problema é NP-completo mesmo se um dos parâmetros ou ℓ ou r é limitado por uma constante; e, por outro lado, provaram que o problema é solucionável em tempo polinomial se ℓ e r são ambos limitados por constantes [10].

Posteriormente, os mesmos autores propuseram uma variante do PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS, na qual exige-se que todos os vértices terminais sejam folhas da árvore T [11]. Esta variante surgiu sob a motivação de que alguns aplicações requerem que todos os terminais sejam folhas nas *árvores de conexão* [11, 29], e foi denominada PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS (S-TCP — do inglês: *Strict terminal connection problem*). De igual modo ao TCP, o S-TCP foi provado ser NP-completo quando ℓ é limitado por uma constante e também foi provado ser solucionável em tempo polinomial quando ℓ e r são ambos limitados por constantes; porém, o caso em que apenas o parâmetro r é limitado por uma constante não havia sido considerado até então.

Dessa forma, o objetivo central desta dissertação é estudar o S-TCP restrito ao caso em que r , ou seja, o número máximo de roteadores, é limitado por uma constante. Embora não tenhamos determinado a complexidade do referido problema para todos os valores constantes que possam ser assumidos por r (na verdade, determinamos a complexidade apenas dos casos em que $r \in \{0, 1\}$, os quais provamos ser solucionáveis em tempo polinomial), obtivemos alguns resultados parciais, que fornecem informações úteis quanto à complexidade dos casos que deixamos em aberto. Além disso, também estudamos algumas variantes do S-TCP nas quais requer-se que a árvore T satisfaça algumas propriedades adicionais. Para tais variantes pro-

podemos algoritmos de tempo polinomial ou provas de intratabilidade computacional, dependendo da restrição complementar considerada. Através deste estudo, pudemos constatar que o S-TCP se relaciona de forma bem próxima a problemas de caminhos disjuntos e de fluxo em redes, inclusive muitos de nossos resultados se remetem ou fazem uso de algoritmos para tais problemas. Desse modo, um outro objetivo deste trabalho é expor essa relação. Ademais, estudamos a complexidade do S-TCP e do TCP quando o grau máximo do grafo de entrada é limitado por uma constante.

1.1 Organização do trabalho

Esta dissertação está dividida em 6 capítulos, os quais são organizados conforme descrevemos a seguir. Primeiramente, nas Seções 1.2 e 1.3, apresentamos a maioria das definições e notação básicas de teoria dos grafos e de complexidade computacional utilizadas ao longo do presente texto. No entanto, para qualquer conceito ou notação não definidos, solicitamos que o leitor consulte os livros [2, 3, 7, 13, 19].

No Capítulo 2, introduzimos de maneira formal o PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS, juntamente com os resultados presentes na literatura para o mesmo. Além disso, apontamos sua relação com problemas clássicos de teoria dos grafos, como por exemplo o problema da árvore de Steiner. Ademais, definimos o nosso problema alvo, o PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS, e apresentamos os resultados existentes na literatura para o mesmo.

No Capítulo 3, discorremos sobre uma das principais contribuições desta dissertação, que consiste na análise da complexidade do S-TCP e de algumas de suas variantes restritos ao caso em que r , o número máximo de roteadores, é limitado por uma constante. Parte dos resultados deste capítulo foram apresentados no *VII Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, sob o título “*The strict terminal connection problem with a bounded number of routers*” [30].

No Capítulo 4, analisamos a complexidade do problema de determinar se um grafo admite $k + 1$ caminhos disjuntos, onde k destes caminhos são entre um dado par de vértices e um caminho é entre um segundo dado par de vértices. A motivação por estudar tal problema deve-se ao fato de que o S-TCP com $r = 2$ pode ser transformado neste problema de caminhos disjuntos, quando requer-se que o somatório dos comprimentos dos caminhos seja limitado. Adicionalmente, analisamos a complexidade de um caso particular do problema de fluxo integral de dois *commodities* em grafos não direcionados, que corresponde ao problema de determinar se um grafo admite $k + 1$ caminhos disjuntos em arestas.

No Capítulo 5, analisamos a complexidade do S-TCP e também do TCP quando o grau máximo do grafo de entrada é limitado por uma constante.

Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões deste trabalho e descre-

vemos possíveis direções para pesquisas futuras.

1.2 Teoria dos grafos

Nesta seção, descrevemos a maioria dos conceitos de teoria dos grafos que são utilizados ao longo do presente texto. A terminologia que adotamos é essencialmente a mesma do que a utilizada por Bondy e Murty nos seus livros [2, 3].

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, tal que $V(G)$ é um conjunto não vazio e finito de elementos denominados *vértices* e $E(G)$ é um conjunto (possivelmente vazio) de pares não ordenados de vértices distintos, denominados *arestas*. Por simplicidade de notação, denotamos a aresta $\{u, v\} \in E(G)$ por uv . Dizemos que dois vértices $u, v \in V(G)$ são *adjacentes* ou *vizinhos* se $uv \in E(G)$. Neste caso, também dizemos que a aresta uv é *incidente* aos vértices u e v e que estes são os seus vértices *extremos*. Denotamos o *conjunto de vizinhos* ou a *vizinhança* de um vértice $v \in V(G)$ por $N_G(v)$. Dizemos que dois vértices distintos $u, v \in V(G)$ são *gêmeos* se $N_G(u) = N_G(v)$. O *grau* de um vértice $v \in V(G)$, denotado por $d_G(v)$, é definido como sendo a cardinalidade de sua vizinhança, ou seja, $d_G(v) = |N_G(v)|$. Um vértice $v \in V(G)$ é denominado *folha* se $d_G(v) = 1$. Definimos o grau máximo de G por $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \{d_G(v)\}$.

Por simplicidade de notação, quando o grafo G estiver subentendido e não houver ambiguidade, omitimos ao longo do texto a letra G dos símbolos descritos acima e denotamos, por exemplo, os conjuntos $V(G)$ e $E(G)$ simplesmente por V e E , respectivamente. Além disso, utilizamos nestes casos as letras n e m para denotarem, respectivamente, o número de vértices e o número de arestas de G .

Um grafo H é um *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Neste caso, dizemos que G *contém* H . Um subgrafo H de G é dito *gerador* se $V(H) = V(G)$. Dado um conjunto não vazio $V' \subseteq V(G)$, o subgrafo de G *induzido* pelo conjunto de vértices V' , denotado por $G[V']$, é o subgrafo H de G tal que $V(H) = V'$ e, para todo $u, v \in V'$, $uv \in E(G)$ implica $uv \in E(H)$. Se V' é um subconjunto próprio de $V(G)$, então denotamos por $G - V'$ o subgrafo de G induzido por $V(G) \setminus V'$, ou seja, o subgrafo de G obtido pela remoção dos vértices em V' . Em particular, se $V' = \{v\}$, então denotamos o grafo $G - V'$ simplesmente por $G - v$.

De modo análogo, podemos definir o conceito de subgrafo *induzido por arestas*. Dado um conjunto não vazio $E' \subseteq E(G)$, o subgrafo de G cujo conjunto de vértices é formado pelos extremos das arestas em E' e cujo conjunto de arestas é E' é chamado de subgrafo de G *induzido por E'* e é denotado por $G[E']$, ou seja, $G[E']$ é o subgrafo H de G tal que $V(H) = \{u, v \mid uv \in E'\}$ e $E(H) = E'$.

Um grafo G é dito *completo* se, para quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, $uv \in E(G)$. Dado um conjunto não vazio $K \subseteq V(G)$, dizemos que K é uma *clique* de G

se $G[K]$ é um grafo completo. Por outro lado, dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto independente* de G se $G[S]$ não possui arestas.

Dados dois grafos G_1 e G_2 , o grafo $G_1 \cup G_2$, a *união* de G_1 com G_2 , é o grafo H tal que $V(H) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(H) = E(G_1) \cup E(G_2)$.

Dado um grafo G e uma aresta $e = uv \in E(G)$, o grafo obtido por $p \geq 1$ *subdivisões* de e é o grafo H tal que $V(H) = V(G) \cup \{v_e^1, \dots, v_e^p\}$ e $E(H) = E(G) \setminus \{e\} \cup \{uv_e^1, v_e^1v_e^2, \dots, v_e^{p-1}v_e^p, v_e^pv\}$, e o grafo obtido pela *contração* de e é o grafo H tal que $V(H) = V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{v_e\}$ e $E(H) = E(G) \setminus \{xu \mid x \in N_G(u)\} \setminus \{xv \mid x \in N_G(v)\} \cup \{xv_e \mid x \in N_G(u) \cup N_G(v)\}$.

Um *caminho* $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_q \rangle$ num grafo G é uma sequência de vértices distintos de G tal que $q \geq 1$ e $v_i v_{i+1} \in E(G)$, para todo i com $1 \leq i \leq q - 1$. O *comprimento* ou *tamanho* de P é definido como $q - 1$, ou seja, o número de arestas em P . Os vértices v_1 e v_q são denominados vértices *extremos* de P , e os demais vértices são denominados vértices *internos* de P . Denotamos por $V(P)$ e $E(P)$, respectivamente, os conjuntos formados pelos vértices e pelas arestas de P , isto é, $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ e $E(P) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq q - 1\}$. Ao longo do texto, nos referimos também a um caminho P como sendo o grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são, respectivamente, da mesma forma como definimos $V(P)$ e $E(P)$, onde os vértices v_i são distintos e há uma aresta entre v_i e v_j se, e somente se, $j = i + 1$. Dados $s, t \in V(G)$, dizemos que um caminho P é um *st-caminho* se os seus vértices extremos são s e t . Neste caso, também dizemos que P é um *caminho entre s e t* . Se $v \in V(P)$, então dizemos que P *passa* por v ou que P *contém* v . Analogamente, se $v_i v_{i+1} \in E(P)$, então dizemos que P *passa* por $v_i v_{i+1}$ ou que P *contém* $v_i v_{i+1}$. Um caminho é dito *hamiltoniano* se este contém todos os vértices do grafo G .

Um *ciclo* $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_q, v_1 \rangle$ num grafo G é uma sequência de vértices de G tal que $q \geq 3$, $\langle v_1, v_2, \dots, v_q \rangle$ é um caminho em G e $v_q v_1 \in E(G)$. Se $\langle v_1, v_2, \dots, v_q \rangle$ é um caminho hamiltoniano, então dizemos que C é um *ciclo hamiltoniano* e que G é um *grafo hamiltoniano*. O *comprimento* ou *tamanho* de C é definido como o número de arestas em C , o que coincide com o número de vértices distintos em C . Um grafo G é dito *acíclico* se G não contém como subgrafo um *grafo ciclo* C_q , onde $V(C_q) = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ e $E(C_q) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq q - 1\} \cup \{v_1 v_q\}$, para $q \geq 3$.

Um grafo G é dito *conexo* se existe um caminho entre quaisquer dois vértices de G . Caso contrário, dizemos que G é *desconexo*. Um *componente conexo* de G é um subgrafo conexo maximal de G . Dizemos que dois vértices de G *pertencem a um mesmo componente conexo* se existe um caminho entre eles em G .

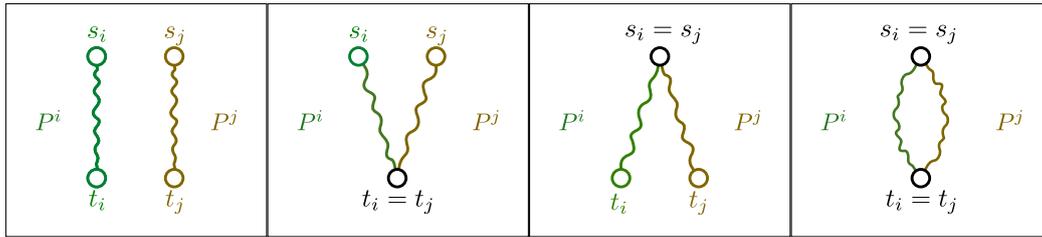
Uma *floresta* é um grafo acíclico e uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo.

A *distância* entre dois vértices $u, v \in V(G)$ num grafo G , denotada por $\text{dist}_G(u, v)$, é definida como sendo o menor dentre os comprimentos dos caminhos em G cujos extremos são u e v . No entanto, caso u e v pertençam a componen-

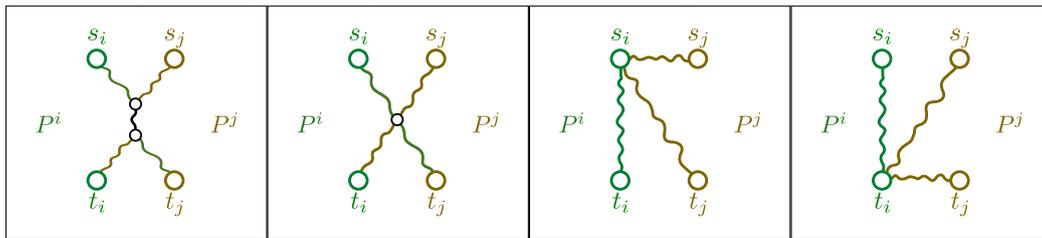
tes conexos distintos, definimos $\text{dist}_G(u, v) = \infty$. Um caminho entre u e v é dito *caminho mínimo* ou *caminho mais curto* se o seu comprimento é igual a $\text{dist}_G(u, v)$.

Seja G um grafo. Dados $k \geq 2$ pares de vértices $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \dots, \{s_k, t_k\}$ e k caminhos P^1, P^2, \dots, P^k em G tais que os extremos de P^i são s_i e t_i , dizemos que P^1, P^2, \dots, P^k são *internamente disjuntos em vértices* ou, simplesmente, *disjuntos em vértices* se, para quaisquer dois caminhos P^i e P^j , onde $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $V(P^i) \setminus \{s_i, t_i\} \cap V(P^j) \setminus \{s_j, t_j\} = \emptyset$ e nenhum dos vértices s_i, t_i, s_j e t_j são vértices internos de P^i ou P^j , ou seja, P^i e P^j não compartilham vértices internos (embora, possivelmente, compartilhem extremos). Figura 1.1 ilustra as situações nas quais os caminhos são disjuntos ou não em vértices.

De modo análogo, dizemos que os caminhos P^1, P^2, \dots, P^k são *disjuntos em arestas* se, para quaisquer dois caminhos P^i e P^j , onde $i \neq j$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $E(P^i) \cap E(P^j) = \emptyset$, ou seja, P^i e P^j não compartilham arestas. Observe que, todo caminho disjunto em vértice é, por definição, disjunto em aresta, no entanto a recíproca desta afirmação não é verdadeira. Por exemplo, embora os caminhos P^i e P^j não sejam disjuntos em vértices nos três últimos casos (da esquerda para a direita) da Figura 1.1b, estes todos são disjuntos em arestas.



(a) Situações nas quais os caminhos são disjuntos em vértices



(b) Situações nas quais os caminhos não são disjuntos em vértices

Figura 1.1: Caminhos disjuntos em vértices.

1.3 Complexidade computacional

Apresentamos agora a maior parte, senão toda, da terminologia de complexidade computacional que utilizamos ao longo desta dissertação. Para fins de simplificação, as definições que apresentamos nesta seção não são dadas de modo rigorosamente formal, sendo descritas de modo muito semelhante ao realizado em [35, 37]. Para descrições mais formais e detalhadas, indicamos a leitura dos livros [7, 13, 19].

Um *problema computacional* Π é uma questão a ser respondida que usualmente contém diversas variáveis cujos valores são não especificados. A formulação de Π é então dada por: (1) uma descrição geral de suas variáveis; e (2) um enunciado de quais propriedades uma resposta, ou *solução*, para Π devem satisfazer. Uma *instância* de Π é uma especificação de valores particulares para as suas variáveis. Denotamos o conjunto de todas as possíveis instâncias de Π por D_Π .

Um problema Π é denominado *problema de decisão* se as possíveis respostas para Π são ou SIM ou NÃO. De forma abstrata, temos que se Π é um problema de decisão, então Π consiste simplesmente em um conjunto D_Π de *instâncias* e um conjunto $Y_\Pi \subseteq D_\Pi$ de *instâncias* SIM. As instâncias de Π pertencentes a $D_\Pi \setminus Y_\Pi$ são denominadas *instâncias* NÃO. A formulação de um problema de decisão Π é então dada por: (1) uma descrição geral de suas variáveis; e (2) uma questão do tipo *sim* ou *não* declarada em função de suas variáveis.

Um problema Π é denominado *problema de otimização* se Π é ou um *problema de minimização* ou um *problema de maximização* e consiste num conjunto de *instâncias* D_Π , uma função objetivo g_Π e um conjunto S_Π tais que, para cada $I \in D_\Pi$, existe um conjunto finito $S_\Pi(I) \subseteq S_\Pi$ de *soluções candidatas* para I . A formulação de um problema de otimização Π é então dada por: (1) uma descrição geral de suas variáveis; (2) uma função objetivo g_Π ; e (3) as propriedades que devem ser satisfeitas por qualquer solução candidata de uma dada instância de Π . Se Π é um problema de minimização (maximização), então uma *solução ótima* para uma instância $I \in D_\Pi$ é uma solução candidata $\sigma^* \in S_\Pi(I)$ tal que, para todo $\sigma \in S_\Pi(I)$, $g_\Pi(\sigma^*) \leq g_\Pi(\sigma)$ (respectivamente, $g_\Pi(\sigma^*) \geq g_\Pi(\sigma)$).

Informalmente, um *algoritmo* A para um problema Π é uma sequência finita de instruções (ou passos) com a finalidade de *solucionar* Π . Dizemos que A *soluciona* Π se garantidamente a execução de A para qualquer instância $I \in D_\Pi$ sempre produz uma solução para I . Dizemos ainda que A é um *algoritmo determinístico* para Π se toda execução de A , para uma instância qualquer $I \in D_\Pi$, realiza sempre a mesma sequência de passos e produz a mesma solução para I .

A *função de complexidade de tempo* ou, simplesmente, *complexidade de tempo* de um algoritmo A para um problema Π é definida como sendo a função que expressa, para cada inteiro não negativo n (os quais representam os possíveis tamanhos de entrada de Π), o tempo máximo que A demanda para obter uma solução para qualquer instância $I \in D_\Pi$ cujo tamanho é n .

Dizemos que uma função $f(n)$ é $\mathcal{O}(g(n))$ (leia-se $f(n)$ é da ordem de $g(n)$) se existem constantes $c > 0$ e $n_0 \geq 0$ tais que, para todo $n \geq n_0$, $0 \leq f(n) \leq cg(n)$.

Um algoritmo A para um problema Π possui *complexidade de tempo polinomial* se a sua função de complexidade de tempo é $\mathcal{O}(p(n))$, para algum polinômio p , onde n denota o tamanho da entrada de Π .

Um problema Π pertence à *classe de problemas solucionáveis em tempo polinomial*, denotada por P , se, e somente se, existe um algoritmo determinístico com complexidade de tempo polinomial que soluciona Π . Neste caso, dizemos que Π é *eficientemente solucionável*.

Um problema de decisão Π pertence à *classe de problemas NP* se, e somente se, existe um algoritmo determinístico com complexidade de tempo polinomial que verifica a validade de um certificado polinomial para o SIM de I .

Uma *redução polinomial* de um problema de decisão Π para um outro problema de decisão Π' é uma função $f: D_{\Pi} \rightarrow D_{\Pi'}$ que satisfaz as seguintes condições: (1) existe um algoritmo determinístico com complexidade de tempo polinomial que computa f ; e (2) para todo $I \in D_{\Pi}$, I é uma instância SIM de Π se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM de Π' , ou seja, $I \in Y_{\Pi}$ se, e somente se, $f(I) \in Y_{\Pi'}$. Neste caso, dizemos ainda que Π se *reduz polinomialmente* para Π' , e denotamos essa relação por $\Pi \propto \Pi'$. Uma consequência imediata da existência de uma redução polinomial de Π para Π' é que, se $\Pi' \in P$, então $\Pi \in P$.

Um problema Π pertence à *classe de problemas NP-difícil* se, e somente se, para todo problema $\Pi' \in NP$, $\Pi' \propto \Pi$. Dizemos ainda que Π *pertence à classe de problemas NP-completo* se, e somente se, além de $\Pi \in NP$ -difícil, $\Pi \in NP$.

Os dois resultados a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em [19], são ferramentas muito úteis para se provar que um dado problema de decisão pertence à classe de problemas NP-completo.

Lema 1.1. *Se $\Pi_1 \propto \Pi_2$ e $\Pi_2 \propto \Pi_3$, então $\Pi_1 \propto \Pi_3$.*

Corolário 1.2. *Se $\Pi_1, \Pi_2 \in NP$, $\Pi_1 \in NP$ -completo e $\Pi_1 \propto \Pi_2$, então $\Pi_2 \in NP$ -completo.*

Uma *redução de Turing* de um problema Π para um outro problema Π' é um algoritmo A que soluciona Π através de um número polinomial de aplicações de uma subrotina hipotética S para solucionar Π' tal que, se S for um algoritmo de tempo polinomial para Π' , então A será também um algoritmo de tempo polinomial para Π . Neste caso, dizemos ainda que Π *Turing reduz-se* a Π' , e denotamos essa relação por $\Pi \propto_T \Pi'$. Uma consequência imediata da existência de uma redução de Turing de Π para Π' é a de que, se $\Pi \in NP$ -difícil, então $\Pi' \notin P$, a menos que $P = NP$.

Complexidade parametrizada

Um *parâmetro* k de um problema Π é um valor numérico que consiste num aspecto (ou num conjunto de aspectos encapsulados) de Π , o qual pode depender de maneira arbitrária do tamanho da entrada de Π . Referimo-nos a *aspecto* como sendo qualquer estrutura das variáveis de Π expressas através de um número.

Um problema de decisão Π *parametrizado por um parâmetro k* , denotado por $\Pi(k)$, consiste na seguinte formulação: (1) uma descrição geral de suas variáveis; (2) um parâmetro k de Π ; e (3) uma questão do tipo *sim* ou *não* declarada em função de suas variáveis.

Um problema parametrizado $\Pi(k)$ pertence à *classe de problemas XP* se, e somente se, existe um algoritmo determinístico para $\Pi(k)$ cuja complexidade de tempo é $\mathcal{O}(f(k)n^{g(k)})$, onde f e g são funções computáveis quaisquer e n denota o tamanho da entrada de $\Pi(k)$.

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [35, 37], descreve uma característica interessante quanto à pertinência de um problema na classe XP.

Lema 1.3. *Seja $\Pi(k)$ um problema parametrizado. Se $\Pi \in NP$ -difícil mesmo quando k é limitado por uma constante, então $\Pi(k) \notin XP$, a menos que $P = NP$.*

Um problema parametrizado $\Pi(k)$ pertence à *classe de problemas FPT* se, e somente se, existe um algoritmo determinístico A para $\Pi(k)$ cuja complexidade de tempo é $\mathcal{O}(f(k)n^c)$, onde f é uma função computável qualquer, c é uma constante não negativa e n denota o tamanho da entrada de $\Pi(k)$. Neste caso dizemos ainda, que $\Pi(k)$ é *tratável por parâmetro fixo* e, por abuso de linguagem, dizemos que A é um algoritmo FPT para $\Pi(k)$.

Seja $\Pi(k)$ um problema de decisão parametrizado e $\Pi'(k')$ um outro problema de decisão parametrizado. Uma *redução FPT* ou *redução parametrizada* de $\Pi(k)$ para $\Pi'(k')$ é uma função $\alpha: D_\Pi \rightarrow D_{\Pi'}$ que satisfaz as seguintes condições: (1) existe um algoritmo determinístico que computa α em tempo $\mathcal{O}(f(k)n^c)$, onde f é uma função computável qualquer, c é uma constante não negativa e n denota o tamanho da entrada de Π ; (2) $k' \leq g(k)$, para alguma função computável g ; e (3) para todo $I \in D_\Pi$, I é uma instância SIM de Π se, e somente se, $\alpha(I)$ é uma instância SIM de Π' , ou seja, $I \in Y_\Pi$ se, e somente se, $\alpha(I) \in Y_{\Pi'}$. Neste caso, dizemos ainda que $\Pi(k)$ *se reduz parametricamente* para $\Pi'(k')$.

Assim como as reduções polinomiais, reduções FPT são relações transitivas, conforme enunciado no lema a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em [7].

Lema 1.4. *Sejam $\Pi_1(k_1)$, $\Pi_2(k_2)$ e $\Pi_3(k_2)$ problemas de decisão parametrizados. Se $\Pi_1(k_1)$ se reduz parametricamente para $\Pi_2(k_2)$ e $\Pi_2(k_2)$ se reduz parametricamente para $\Pi_3(k_3)$, então $\Pi_1(k_1)$ se reduz parametricamente para $\Pi_3(k_3)$.*

Seja C um *circuito booleano de decisão* (para ver a definição, solicitamos que o leitor consulte [7, 13]) com variáveis de entrada x_1, x_2, \dots, x_n . Uma porta lógica de C é dita *larga* se o seu número de entradas excede algum limite constante, usualmente 2. O *entrelaçamento* de C é o número máximo de portas lógicas largas em qualquer caminho a partir das variáveis de entrada até a linha de saída de C . A *profundidade* de C é o comprimento do maior caminho de uma variável de entrada até a linha de

saída de C . Figura 1.2 exemplifica os conceitos de entrelaçamento e profundidade, onde as portas lógicas largas são denotadas pelas portas com contorno duplo (em azul). O *peso* de uma atribuição de valor verdade para as variáveis de C é o número

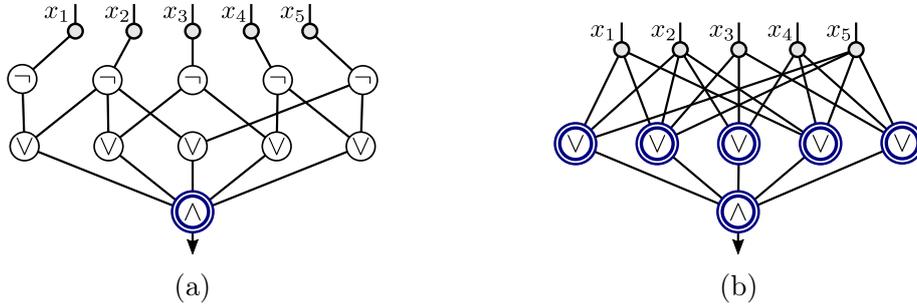


Figura 1.2: (a) Circuito booleano de decisão com entrelaçamento 1 e profundidade 3. (b) Circuito booleano de decisão com entrelaçamento 2 e profundidade 2.

de variáveis definidas com valor *verdadeiro* nesta atribuição. A seguir, definimos o problema SATISFATIBILIDADE PONDERADA EM CIRCUITOS, que fornece a base para a definição de uma das principais classes de problemas parametrizados, a classe $W[t]$.

SATISFATIBILIDADE PONDERADA EM CIRCUITOS ($WCS[t, h]$)

Entrada: Um circuito de decisão C com entrelaçamento t e profundidade h e um inteiro não negativo p .

Parâmetro: O inteiro p .

Questão: Existe uma atribuição de valor verdade para as variáveis de C que satisfaça o circuito C e que possua peso p ?

Para $t \geq 1$, dizemos que um problema parametrizado $\Pi(k)$ *pertence à classe de problemas $W[t]$* se, e somente se, existe uma redução parametrizada de $\Pi(k)$ para $WCS[t, h]$, para alguma constante $h \geq 1$.

Um problema parametrizado $\Pi(k)$ *pertence à classe de problemas $W[t]$ -difícil* se, e somente se, para todo problema $\Pi'(k') \in W[t]$, $\Pi'(k')$ se reduz parametricamente para $\Pi(k)$. Dizemos ainda que $\Pi(k)$ *pertence à classe de problemas $W[t]$ -completo* se, e somente se, além de $\Pi(k) \in W[t]$ -difícil, $\Pi(k) \in W[t]$.

O corolário a seguir, que é uma consequência do Lema 1.4, é uma ferramenta muito útil para se provar a $W[t]$ -dificuldade de um dado problema.

Corolário 1.5. *Seja $\Pi'(k') \in W[t]$ -difícil. Se $\Pi'(k')$ se reduz parametricamente para $\Pi(k)$, então $\Pi(k) \in W[t]$ -difícil.*

A união das classes $W[t]$ juntamente com as classes $W[P]$ e XP é chamada de *W-hierarquia*, onde $W[P]$ denota a classe obtida ao não se considerar qualquer restrição sobre profundidade. Assim, a W -hierarquia é dada pelas inclusões

$$FPT \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \dots \subseteq W[P] \subseteq XP.$$

Downey e Fellows conjecturaram que cada uma dessas inclusões de classes da W -hierarquia é própria [12, 13].

Capítulo 2

Conexão de Terminais

Neste capítulo, introduzimos o conceito de *árvore de conexão* para um conjunto de *terminais* e, baseado neste conceito, definimos o PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS. Além disso, apresentamos os principais resultados de complexidade computacional conhecidos na literatura para o referido problema. Posteriormente, mostramos de forma sucinta a relação do problema em questão com problemas clássicos de teoria dos grafos. Por fim, introduzimos o PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS, cuja análise da complexidade de algumas de suas variantes é uma das principais contribuições desta dissertação.

2.1 Árvore de conexão e o problema de conexão de terminais

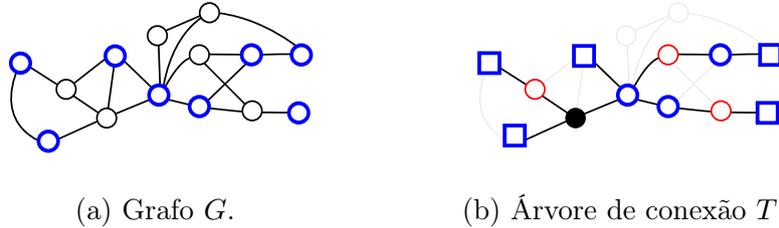
Dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto não vazio $W \subseteq V(G)$, dizemos que um subgrafo T de G é uma *árvore de conexão para W* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. T é uma árvore,
2. $W \subseteq V(T)$ e
3. $\text{folhas}(T) \subseteq W$,

onde $\text{folhas}(T)$ denota o conjunto formado pelos vértices folha de T .

Numa árvore de conexão T para W , os vértices em W são chamados de *terminais* e os vértices em $V(T) \setminus W$ são chamados de *não terminais*, os quais são classificados em duas categorias, de acordo com os seus respectivos graus em T , a saber: os vértices em $V(T) \setminus W$ com grau exatamente 2 em T são denominados *elos* e os vértices em $V(T) \setminus W$ com grau ao menos 3 em T são denominados *roteadores*. O conceito de árvore de conexão de um grafo G para um conjunto de terminais $W \subseteq V(G)$

é exemplificado na Figura 2.1, onde os vértices destacados (em azul) representam os terminais, os vértices com forma quadrada representam as folhas de T , o vértice com preenchimento preto representa um roteador de T (que, especificamente neste exemplo, é único) e os demais vértices (em vermelho) representam os elos de T .



(a) Grafo G . (b) Árvore de conexão T .

Figura 2.1: Árvore de conexão de G para W .

Dessa forma, existe uma partição $V(T) = W \cup L(T) \cup R(T)$ do conjunto de vértices de uma árvore de conexão T para W em terminais, elos e roteadores, onde $L(T)$ denota o conjunto de elos de T e $R(T)$ denota o conjunto de roteadores de T . Figura 2.2 ilustra essa partição.

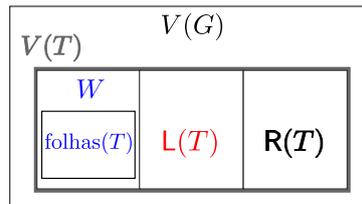


Figura 2.2: Partição $V(T) = W \cup L(T) \cup R(T)$.

Com base no conceito de árvore de conexão, podemos enfim definir o PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS (TCP), o qual foi proposto por Dourado et al. [10] sob motivação de sua potencial aplicabilidade em projeto de redes, inerente à sua própria definição. Informalmente, o TCP objetiva conectar um dado conjunto de terminais através de uma árvore de conexão que utilize uma quantidade limitada de elos e de roteadores. Segue abaixo uma definição formal para o problema.

PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS (TCP)

Entrada: Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$ e dois inteiros não negativos ℓ e r .

Questão: O grafo G admite uma árvore de conexão para W com $|L(T)| \leq \ell$ e $|R(T)| \leq r$?

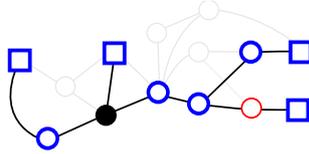
Assim como descrevemos na definição do TCP, podemos assumir, sem perda de generalidade, que o grafo de entrada G é sempre conexo, visto que, se G admite uma árvore de conexão para W , então todos os terminais em W necessariamente pertencem

cem a um mesmo componente conexo de G , e dessa forma podemos nos concentrar apenas neste componente, caso este seja o caso.

Com o intuito de se obter um pouco mais de intuição sobre o problema, considere as árvores de conexão ilustradas na Figura 2.3, onde o grafo G , que contém tais árvores, é o ilustrado na Figura 2.1a e o conjunto de terminais W , para o qual tais são definidas, é o constituído pelos vértices destacados (em azul).



(a) Árvore de conexão T_1 com $|\mathbf{R}(T_1)| = 0$. (b) Árvore de conexão T_2 com $|\mathbf{L}(T_2)| = 0$.



(c) Árvore de conexão T_3 com $|\mathbf{L}(T_3)| = 1$ e $|\mathbf{R}(T)| = 1$.

Figura 2.3: Diferentes árvores de conexão de G para W .

Notamos aqui que um grafo G pode conter para um mesmo conjunto de terminais W diferentes árvores de conexão, cada qual utilizando (possivelmente) uma quantidade distinta de elos ou de roteadores. Por exemplo, a árvore de conexão T_1 , ilustrada na Figura 2.3a, possui dois elos e não possui roteadores, enquanto que a árvore de conexão T_2 , ilustrada na Figura 2.3b, não possui por sua vez elos mas possui três roteadores. Um outro exemplo é a árvore de conexão T_3 , ilustrada na Figura 2.3c, a qual possui apenas um elo e apenas um roteador.

Dessa forma, para o grafo G e o conjunto de terminais W da Figura 2.1a, podemos concluir que $I = (G, W, \ell, r)$ é uma instância SIM do TCP quando $\ell \geq 1$ e $r \geq 1$ ou quando $\ell \geq 2$ ou $r \geq 3$. Repare que, além desses valores (assumidos por ℓ e r) serem suficientes para que I seja uma instância SIM do TCP, esses também são necessários. De fato, pode-se verificar que um grafo G admite uma árvore de conexão para W que não utilize quaisquer elos ou roteadores se, e somente se, $G[W]$ for conexo. Porém, note que este não é o caso do grafo G e do conjunto de terminais W que estamos considerando. De modo análogo, temos que G admite uma árvore de conexão para W com (exatamente) um vértice não terminal se, e somente se, $G[W \cup \{v\}]$ for conexo, para algum $v \in V(G) \setminus W$. No entanto, este novamente não é o caso de G e W do exemplo acima. Assim, toda árvore de conexão de G para W deve possuir ao menos dois vértices não terminais. Por fim, através de uma análise

exaustiva, podemos verificar sem muita dificuldade que toda árvore de conexão de G para W que não contenha elos deve possuir, neste caso, ao menos três roteadores.

Uma estratégia comum para atacar problemas de decisão, especialmente problemas combinatórios, é a de buscar padrões ou propriedades locais em suas instâncias que, de certo modo, permitam classificá-las ou em instâncias SIM ou em instâncias NÃO. Contudo, a existência desses padrões ou propriedades não é, de modo geral, muito intuitiva em alguns problemas, como é o caso do TCP. Com efeito, Dourado et al. provaram que o TCP é NP-completo, mesmo quando um dos parâmetros ou ℓ ou r é limitado por uma constante [10]. Mais adiante, nos Teoremas 2.1 e 2.2, apresentamos tais demonstrações de NP-completude. No entanto, considere antes disso a seguinte digressão notacional.

Denotamos as variantes do TCP em que os parâmetros ℓ , r e ℓ e r são limitados por constantes, respectivamente, por $\text{TCP}(\ell)$, $\text{TCP}(r)$ e $\text{TCP}(\ell, r)$, ou seja:

- $\text{TCP}(\ell)$ se refere à variante do TCP onde ℓ é limitado por uma constante;
- $\text{TCP}(r)$ se refere à variante do TCP onde r é limitado por uma constante; e
- $\text{TCP}(\ell, r)$ se refere à variante do TCP onde ℓ e r são ambos limitados por constantes.

Adicionalmente, quando desejamos fazer menção explícita dos valores constantes assumidos pelos parâmetros ℓ ou r , os denotamos, respectivamente, por $\ell = c$ ou $r = c'$, onde c e c' são as constantes consideradas. Por exemplo, $\text{TCP}(r = 1)$ corresponde à versão do $\text{TCP}(r)$ onde permite-se utilizar no máximo um roteador.

Apresentamos agora a demonstração de NP-completude proposta por Dourado et al. [10] para o $\text{TCP}(\ell)$, que essencialmente consiste numa redução polinomial a partir do problema 3-SAT, o qual é sabidamente NP-completo *cf.* [19] e é definido conforme descrito a seguir.

3-SATISFATIBILIDADE (3-SAT)

Entrada: Um conjunto de variáveis booleanas X e um conjunto \mathcal{C} de cláusulas sobre X tal que cada cláusula $C \in \mathcal{C}$ possui exatamente três literais, ou seja, $|C| = 3$.

Questão: Existe uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X que satisfaça todas as cláusulas em \mathcal{C} ?

Teorema 2.1 (Dourado et al. [10]). *O $\text{TCP}(\ell)$ é NP-completo.*

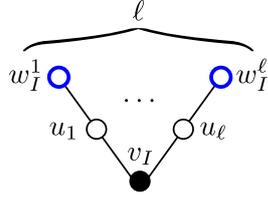
Demonstração. Primeiramente, observe que o TCP, e em particular o $\text{TCP}(\ell)$, pertencem à classe de problemas NP. Um certificado polinomial para o SIM para ambos

problemas consiste num subgrafo de G . É fácil constatar que, dado um subgrafo T de G como certificado, podemos verificar em tempo polinomial se T é uma árvore de conexão para W com no máximo ℓ elos e com no máximo r roteadores. Assim, é suficiente mostrarmos que 3-SAT se reduz polinomialmente ao TCP(ℓ) para então obtermos a NP-completude do TCP(ℓ).

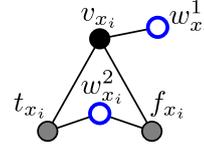
Seja $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do 3-SAT, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ é o conjunto de cláusulas. Construímos a partir de I uma instância $f(I) = (G, W, r)$ do TCP(ℓ) conforme segue:

- primeiramente, criamos o *gadget* G_I , ilustrado na Figura 2.4a, tal que
 - $V(G_I) = \{v_I\} \cup \{w_I^k \mid 1 \leq k \leq \ell\} \cup \{u_k \mid 1 \leq k \leq \ell\}$ e
 - $E(G_I) = \{v_I u_k \mid 1 \leq k \leq \ell\} \cup \{u_k w_I^k \mid 1 \leq k \leq \ell\}$;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos o *gadget* G_{x_i} , ilustrado na Figura 2.4b, tal que
 - $V(G_{x_i}) = \{v_{x_i}, t_{x_i}, f_{x_i}, w_{x_i}^1, w_{x_i}^2\}$ e
 - $E(G_{x_i}) = \{w_{x_i}^1 v_{x_i}, v_{x_i} t_{x_i}, t_{x_i} w_{x_i}^2, w_{x_i}^2 f_{x_i}, f_{x_i} v_{x_i}\}$,

e adicionamos a aresta $v_I v_{x_i}$;



(a) *Gadget* G_I .



(b) *Gadget* G_{x_i} .

Figura 2.4: *Gadgets* da redução do 3-SAT para o TCP(ℓ).

- para cada cláusula $C_j \in \mathcal{C}$, criamos três vértices $w_{C_j}^1, w_{C_j}^2$ e $w_{C_j}^3$;
- se a cláusula C_j possui uma ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$, então adicionamos as arestas $t_{x_i} w_{C_j}^1, t_{x_i} w_{C_j}^2$ e $t_{x_i} w_{C_j}^3$; por outro lado, se C_j possui uma ocorrência do literal negativo de x_i , então adicionamos as arestas $f_{x_i} w_{C_j}^1, f_{x_i} w_{C_j}^2$ e $f_{x_i} w_{C_j}^3$;
- por fim, definimos $W = \{w_I^k \mid 1 \leq k \leq \ell\} \cup \{w_{x_i}^1, w_{x_i}^2 \mid x_i \in X\} \cup \{w_{C_j}^1, w_{C_j}^2, w_{C_j}^3 \mid C_j \in \mathcal{C}\}$ e $r = 2n + 1$.

Figura 2.5 exemplifica o grafo G e o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul), obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT, que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, x_3\}\}$.

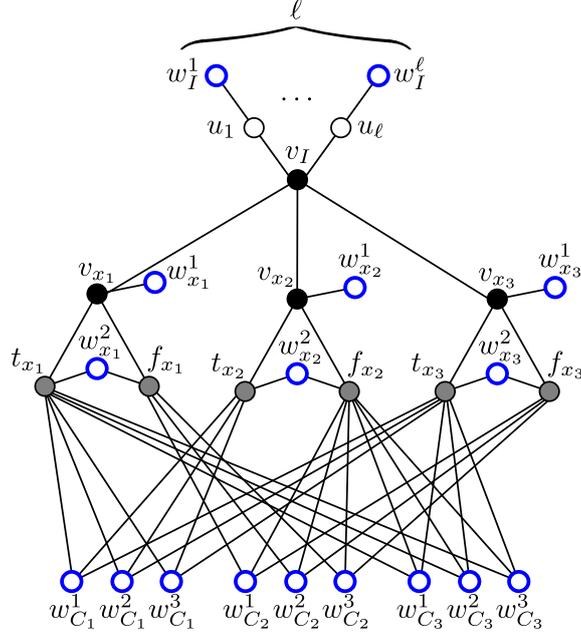


Figura 2.5: Grafo G e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.

Mostramos agora que I é uma instância SIM do 3-SAT se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do TCP(ℓ).

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfatível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ para as variáveis em X que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Observe que, sem perda de generalidade, podemos supor que cada variável $x_i \in X$ possui, em função de α , ao menos um literal verdadeiro ocorrendo nas cláusulas em \mathcal{C} (ou seja, existe ao menos uma cláusula em \mathcal{C} que possui um literal verdadeiro da variável x_i , em função de α), pois caso contrário bastaria invertermos os valores verdades atribuídos a essas variáveis cujas ocorrências de seus literais são todas falsas, em função de α , que, assim, ainda teríamos uma atribuição de valor verdade que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} e que torne ao menos um literal de cada variável, ocorrendo nas cláusulas em \mathcal{C} , verdadeiro. Com base em α , construímos uma árvore de conexão T de G para W conforme segue:

- adicionamos o *gadget* G_I a T ;
- para cada variável $x_i \in X$, adicionamos os vértices v_{x_i} , $w_{x_i}^1$ e $w_{x_i}^2$ e as arestas $v_I v_{x_i}$ e $w_{x_i}^1 v_{x_i}$ a T ;
- ademais, se $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$, então adicionamos o vértice t_{x_i} e as arestas $v_{x_i} t_{x_i}$ e $t_{x_i} w_{x_i}^2$ a T ; caso contrário, adicionamos o vértice f_{x_i} e as arestas $v_{x_i} f_{x_i}$ e $f_{x_i} w_{x_i}^2$ a T ;
- para cada cláusula C_j , adicionamos os vértices $w_{C_j}^1$, $w_{C_j}^2$ e $w_{C_j}^3$ a T ;

- para cada vértice $t_{x_i} \in V(T)$, selecionamos (de modo arbitrário) um vértice $w_{C_j}^k$ tal que $w_{C_j}^k \in N_G(t_{x_i})$ e cujo grau em T é até então nulo, e adicionamos a aresta $t_{x_i}w_{C_j}^k$ a T , para $k \in \{1, 2, 3\}$;
- analogamente, para cada vértice $f_{x_i} \in V(T)$, selecionamos (de modo arbitrário) um vértice $w_{C_j}^k$ tal que $w_{C_j}^k \in N_G(f_{x_i})$ e cujo grau em T é até então nulo, e adicionamos a aresta $f_{x_i}w_{C_j}^k$ a T , para $k \in \{1, 2, 3\}$;

Observe que, para cada um dos vértices t_{x_i} e f_{x_i} pertencentes a $V(T)$, sempre existe um vértice $w_{C_j}^k$ conforme descrito, visto que supomos que α torna ao menos um literal de cada variável $x_i \in X$, ocorrendo nas cláusulas em \mathcal{C} , verdadeiro. Dessa forma, para $x_i \in X$, todos os vértices t_{x_i} e f_{x_i} que pertencem a $V(T)$ possuem, neste momento, grau exatamente 3 em T .

- Por fim, para cada vértice $w_{C_j}^k$ cujo grau ainda é nulo em T , selecionamos (de modo arbitrário) um vértice t_{x_i} ou f_{x_i} pertencente a $V(T)$ que seja vizinho de $w_{C_j}^k$ em G , e adicionamos a respectiva aresta ou $t_{x_i}w_{C_j}^k$ ou $f_{x_i}w_{C_j}^k$ a T , para $x_i \in X$, $k \in \{1, 2, 3\}$ e $C_j \in \mathcal{C}$.

Figura 2.6 exemplifica uma árvore de conexão T para W concernente à instância $f(I)$ da Figura 2.5, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \text{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \text{falso}$ e $\alpha(x_3) = \text{falso}$. Neste exemplo, $|L(T)| = \ell$ e $|R(T)| = 7$.

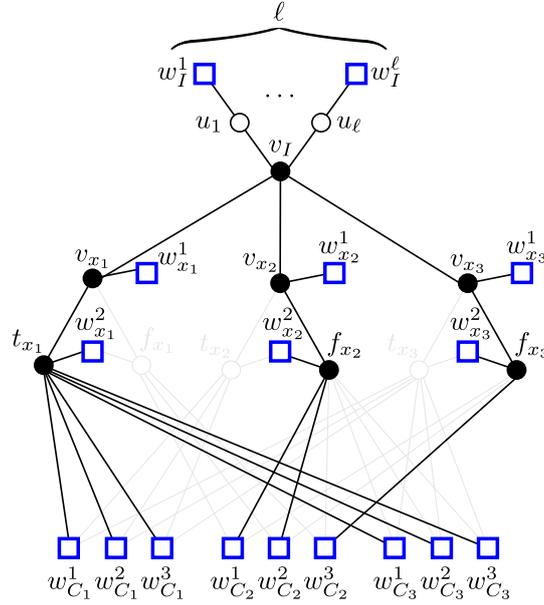


Figura 2.6: Árvore de conexão de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

Por construção, temos que T é uma árvore de conexão de G para W , cujo conjunto de elos é $L(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$ e cujo conjunto de roteadores é $R(T) = \{v_I\} \cup \{v_{x_i} \mid x_i \in X\} \cup \{t_{x_i} \mid \alpha(x_i) = \text{verdadeiro}, x_i \in X\} \cup \{f_{x_i} \mid \alpha(x_i) = \text{falso}, x_i \in X\}$.

Logo, $|\mathbf{L}(T)| = \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| = 2n + 1$, e assim podemos concluir que $f(I)$ é de fato uma instância SIM do TCP(ℓ).

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM do TCP(ℓ). Logo, G admite uma árvore de conexão T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r = 2n + 1$. Note que, o *gadget* G_I necessariamente está contido em T . Assim, todos os vértices u_1, u_2, \dots, u_ℓ são elos de T , tendo em vista que estes possuem grau exatamente 2 no próprio grafo G . Logo, nenhum outro vértice de T pode ser um elo, pois caso contrário $|\mathbf{L}(T)| > \ell$, o que seria um absurdo. Dessa forma, os demais vértices de T são ou terminais ou roteadores. Consequentemente, para todo $x_i \in X$, temos que v_{x_i} é um roteador de T , tendo em vista que $v_{x_i} \notin W$ e que v_{x_i} necessariamente pertence a $V(T)$, já que este é o único vizinho do terminal $w_{x_i}^1$ em G . De modo similar, temos que ou o vértice t_{x_i} ou o vértice f_{x_i} é roteador de T , visto que $t_{x_i}, f_{x_i} \notin W$ e que estes são os únicos vizinhos do terminal $w_{x_i}^2$ em G . Contudo, note que t_{x_i} e f_{x_i} não pertencem simultaneamente a $V(T)$, pois caso contrário $|\mathbf{R}(T)| > r = 2n + 1$, o que seria um absurdo.

Definimos então uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ para as variáveis em X como segue: $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$ se, e somente se, $t_{x_i} \in V(T)$. Como por hipótese $\{w_{C_j}^k \mid k \in \{1, 2, 3\} \text{ e } C_j \in \mathcal{C}\} \subset W \subset V(T)$ e, assim, todo vértice $w_{C_j}^k$ é adjacente a pelo menos um vértice ou t_{x_i} ou f_{x_i} , para algum $x_i \in X$, temos que α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Portanto, I é de fato uma instância SIM do 3-SAT.

Uma observação adicional interessante é a de que, nesta redução, todo terminal em W é uma folha de T . Os terminais $w_I^1, w_I^2, \dots, w_I^\ell$ e $w_{x_1}^1, w_{x_2}^1, \dots, w_{x_n}^1$ são trivialmente folhas, já que cada um destes, inclusive no grafo G , possuem um único vizinho. Por outro lado, segue do que foi argumentado anteriormente que, para $x_i \in X$, os terminais $w_{x_i}^2$ são também folhas de T , visto que estes são vizinhos ou de t_{x_i} ou de f_{x_i} , nunca de ambos. Por fim, como todos os vértices v_{x_i} são roteadores de T , estes são adjacentes ao vértice v_I e a um dos vértices t_{x_i} ou f_{x_i} , pois caso contrário possuiriam grau inferior a 3 em T ; logo, para $k \in \{1, 2, 3\}$ e $C_j \in \mathcal{C}$, os terminais $w_{C_j}^k$ são também folhas, visto que se fossem adjacentes a mais de um vértice em T , então T não seria acíclico, o que seria um absurdo. \square

Apresentamos agora a prova de NP-completude proposta por Dourado et al. [10] para o TCP(r), realizada através de uma redução polinomial a partir do problema CAMINHO HAMILTONIANO, o qual é também sabidamente NP-completo *cf.* [19] e é definido conforme descrevemos a seguir.

Entrada: Um grafo G .

Questão: O grafo G contém um caminho hamiltoniano?

Teorema 2.2 (Dourado et al. [10]). *O $TCP(r)$ é NP-completo.*

Demonstração. De modo análogo ao $TCP(\ell)$, é fácil ver que o $TCP(r)$ pertence à classe de problemas NP. Assim, é suficiente mostrarmos que CAMINHO HAMILTONIANO se reduz polinomialmente ao $TCP(r)$.

Seja $I = (G)$ uma instância do CAMINHO HAMILTONIANO, onde G é um grafo. Definimos a partir de I uma instância $f(I) = (H, W, \ell)$ do $TCP(r)$ conforme segue:

- para cada vértice $v \in V(G)$, adicionamos v ao grafo H , criamos dois novos vértices v' e v'' e criamos duas novas arestas vv' e vv'' ;
- para cada aresta $uv \in E(G)$, adicionamos as arestas $u'v'$, $u'v''$, $u''v'$ e $u''v''$ a H , conforme ilustrado na Figura 2.7;
- por fim, definimos $W = \{v \mid v \in V(G)\}$ e $\ell = 2n - 2$.



(a) Aresta $uv \in E(G)$.

(b) Subgrafo de H resultante da aresta uv .

Figura 2.7: Redução do CAMINHO HAMILTONIANO para o $TCP(r)$.

Inicialmente, consideramos apenas o caso $r = 0$. Mostramos agora que I é uma instância SIM do CAMINHO HAMILTONIANO se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do $TCP(r = 0)$.

(\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM do CAMINHO HAMILTONIANO. Logo, G admite um caminho hamiltoniano $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, onde $n = |V(G)|$. Com base em P , construímos uma árvore de conexão T para W conforme segue:

- $V(T) = \{v_1, v_1''\} \cup \{v_i', v_i, v_i'' \mid 2 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_n', v_n\}$
- $E(T) = \{v_1 v_1''\} \cup \{v_{i-1}'' v_i', v_i' v_i, v_i v_i'' \mid 2 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_{n-1}'' v_n', v_n' v_n\}$.

Figura 2.8 exemplifica a árvore de conexão T para W obtida a partir do caminho $P = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$. Neste exemplo, $|\mathbf{L}(T)| = 6$ e $|\mathbf{R}(T)| = 0$.

Por construção, temos que T é uma árvore de conexão de H para W , cujo conjunto de elos é $\mathbf{L}(T) = \{v_1''\} \cup \{v_i', v_i'' \mid 2 \leq i \leq n - 1\} \cup \{v_i'\}$ e cujo conjunto de roteadores é vazio, ou seja, $\mathbf{R}(T) = \emptyset$. Logo, $|\mathbf{L}(T)| = 2n - 2$ e $|\mathbf{R}(T)| = 0$, e assim podemos concluir que $f(I)$ é de fato uma instância SIM do $TCP(r = 0)$.

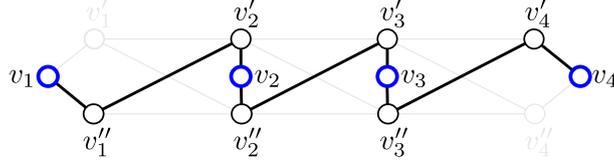


Figura 2.8: Árvore de conexão T para W obtida a partir de um caminho P .

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM do TCP($r = 0$). Logo, H admite uma árvore de conexão T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell = 2n - 2$ e $|\mathbf{R}(T)| = 0$. Observe que, como $|\mathbf{R}(T)| = 0$, todos os vértices em $V(T) \setminus W$ são elos. Além disso, segue da construção de $f(I)$ que todos terminais $w \in W$ possuem grau no máximo 2 em T , ou seja, $d_T(w) \leq 2$. Dessa forma, T consiste num caminho que contém todos os vértices em $W = V(G)$. Considere então a sequência de vértices $S = \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$, formada pelos terminais em W , os quais são ordenados de acordo com as suas respectivas ordens de aparição no caminho T , ou seja, $u = w_i$ e $v = w_{i+1}$ se, e somente se, o caminho $P_{u,v}$ em T entre u e v é tal que $V(P_{u,v}) \cap W \setminus \{u, v\} = \emptyset$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Como, por construção, a distância entre quaisquer dois vértices pertencentes a W é ao menos 3 em H , todo caminho $P_{u,v}$ em T , onde $u = w_i$ e $v = w_{i+1}$, corresponde a uma das alternativas: (1) $P_{u,v} = \langle u, u', v', v \rangle$, (2) $P_{u,v} = \langle u, u', v'', v \rangle$, (3) $P_{u,v} = \langle u, u'', v', v \rangle$, ou (4) $P_{u,v} = \langle u, u'', v'', v \rangle$, pois caso contrário $|\mathbf{L}(T)| > \ell = 2n - 2$, o que seria um absurdo. Dessa forma, existe um mapeamento entre os caminhos em T , cujos extremos são vértices imediatamente consecutivos em S , e as arestas de G , no sentido de que se o caminho $P_{u,v}$ existe em T , então $uv \in E(G)$. Logo, S é um caminho hamiltoniano de G , e portanto I é de fato uma instância SIM do CAMINHO HAMILTONIANO.

Neste ponto, provamos que I é uma instância SIM do CAMINHO HAMILTONIANO se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do TCP($r = 0$). Resta-nos então provar que o TCP(r) prossegue sendo NP-completo para todos os demais valores constantes que possam ser assumidos por r . Para tanto, construímos uma instância $f(I) = (H, W, \ell)$ do TCP(r) do mesmo modo que definimos para o caso $r = 0$, contudo realizamos agora as seguintes operações adicionais:

- selecionamos um vértice $v \in V(G)$ arbitrário, e, a partir de v , criamos o *gadget* G_I , conforme ilustrado na Figura 2.9, tal que
 - $V(G_I) = \{v\} \cup \{\rho_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{w_1^i, w_2^i \mid 1 \leq i \leq r\}$ e
 - $E(G_I) = \{v\rho_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{\rho_i w_1^i, \rho_i w_2^i \mid 1 \leq i \leq r\}$;
- por fim, definimos $W = \{v \mid v \in V(G)\} \cup \{w_1^i, w_2^i \mid 1 \leq i \leq r\}$.

Observe que, os vértices ρ_i , para $1 \leq i \leq r$, são necessariamente roteadores de toda árvore de conexão de H para W , tendo em vista que o único vizinho dos

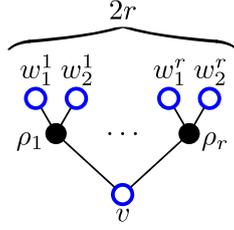


Figura 2.9: *Gadget* G_I da instância $f(I)$ do $TCP(r)$.

terminais w_1^i e w_2^i em H é ρ_i . Dessa forma, todos os demais vértices de qualquer árvore de conexão T para W devem ser ou elos ou terminais, nunca roteadores, pois caso contrário $|\mathbf{R}(T)| > r$. Por conseguinte, a argumentação de I ser uma instância SIM do CAMINHO HAMILTONIANO se, e somente, se $f(I)$ é uma instância SIM do $TCP(r)$ segue de modo análogo ao que realizamos para o caso $r = 0$. \square

Embora o $TCP(\ell)$ e o $TCP(r)$ sejam ambos NP-completos, Dourado et al. provaram que o $TCP(\ell, r)$ é solucionável em tempo polinomial [10]. O algoritmo proposto por eles consiste numa busca exaustiva por uma árvore de conexão para o conjunto de terminais dado na entrada do problema. Para tanto, são avaliados todos conjuntos possíveis de candidatos a elo e todos os conjuntos possíveis de candidatos a roteador, juntamente com as vizinhanças de tais vértices que os tornam, respectivamente, ou elos ou roteadores. Algoritmo 2.1 descreve essa busca exaustiva.

Como, essencialmente, são exploradas todas as possibilidades de existência de uma árvore de conexão para o conjunto de terminais dado, permitindo-se utilizar no máximo ℓ elos e r roteadores, a correteza do algoritmo é obtida. Quanto à sua complexidade, observe que, nas linhas 1 e 2, são considerados $\mathcal{O}(n^\ell n^r)$ pares de subconjuntos L e R de candidatos a elo e de candidatos a roteador, respectivamente, onde $n = |V(G')|$. Note também que o conjunto de florestas \mathcal{F} , descrita na linha 4, pode ser determinado da seguinte forma:

- (1) para cada vértice $v \in L$, consideramos duas arestas de G' incidentes a v (de modo que a propriedade de todos os vértices em L possuírem grau 2 em T seja sempre respeitada) em T ;
- (2) para cada vértice $v \in R$, consideramos três arestas de G' incidentes a v em T ;

onde, a cada adição de arestas a T , verificamos se o grafo resultante é acíclico; e, se esse não for o caso, desconsideramos a aresta tomada inicialmente e adicionamos uma nova aresta (que não forme ciclo). Dessa forma, o conjunto \mathcal{F} pode ser obtida em tempo $\mathcal{O}(n^{2\ell} n^{3r} n)$, onde $\mathcal{O}(n)$ corresponde ao custo de verificar se T é acíclico e $\mathcal{O}(n^{2\ell} n^{3r})$ corresponde à cardinalidade de \mathcal{F} . Conseqüentemente, o laço da linha 5 executa $|\mathcal{F}| = \mathcal{O}(n^{2\ell} n^{3r})$ iterações. Por fim, observe que, podemos verificar em tempo $\mathcal{O}(n + m)$ se a floresta T é conexa, onde $m = |E(G')|$. Logo, o custo total das

Algoritmo 2.1: (Dourado et al. [10]) Algoritmo polinomial para o $\text{TCP}(\ell, r)$

Entrada: Um grafo conexo G , um conjunto de terminais $W \subseteq V(G)$ e dois inteiros não negativos ℓ e r .

Saída: Se G admite uma árvore de conexão estrita para W com no máximo ℓ elos e com no máximo r roteadores, SIM; caso contrário, NÃO.

```

1 para todo  $L \subseteq V(G) \setminus W$  tal que  $|L| \leq \ell$  faça
2   para todo  $R \subseteq V(G) \setminus (L \cup W)$  tal que  $|R| \leq r$  faça
3     Seja  $G' := G[W \cup L \cup R]$ 
4     Seja  $\mathcal{F}$  o conjunto de florestas geradoras  $T$  de  $G'$ , tais que os vértices em  $L$ 
      possuem grau exatamente 2 em  $T$  e os vértices em  $R$  possuem grau ao
      menos 3 em  $T$ 
5     para todo floresta  $T \in \mathcal{F}$  faça
6       se  $T$  é conexo então retorna SIM
7       senão
8         Seja  $E' := E(G') \setminus (E(T) \cup E_L)$ , onde  $E_L := \{uv \in E(G') \mid u \in L\}$ 
9         enquanto  $T$  for desconexo e  $E' \neq \emptyset$  faça
10          Selecione arbitrariamente uma aresta  $e \in E'$  e a remova de  $E'$ 
11          /*  $T + e$  é o grafo resultante da adição da aresta  $e$  em  $T$  */
12          se  $T + e$  é acíclico então
13            Adicione  $e$  a  $T$ 
14          se  $T$  é conexo então retorna SIM
15 retorna NÃO

```

operações descritas nas linhas 6 a 14 é de $\mathcal{O}(n^2 + nm)$, tendo em vista que $|E'| < n$. Portanto, a complexidade do algoritmo é $\mathcal{O}(n^{3\ell+4r+2}m)$.

2.2 Relação com problemas clássicos

Uma observação relevante a se fazer é a de que o TCP se relaciona de forma bem próxima a alguns problemas clássicos de teoria dos grafos, dentre os quais destacamos dois problemas de otimização, a saber: ÁRVORE GERADORA MÍNIMA e ÁRVORE DE STEINER. Consideramos então, neste momento, grafos ponderados, onde cada aresta do grafo possui um peso associado. Descrevemos a seguir uma definição formal para ambos problemas.

ÁRVORE GERADORA MÍNIMA

Entrada: Um grafo conexo G e uma função de peso $g : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$.

Objetivo: Encontrar um subgrafo gerador T de G tal que T é uma árvore e $\sum_{e \in E(T)} g(e)$ é mínimo.

ÁRVORE DE STEINER

<i>Entrada:</i>	Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$ e uma função de peso $g : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$.
<i>Objetivo:</i>	Encontrar um subgrafo T de G , denominado <i>árvore de Steiner</i> , tal que T é uma árvore, $W \subseteq V(T)$ e $\sum_{e \in E(T)} g(e)$ é mínimo.

Embora o TCP consista originalmente num problema de decisão, se considerarmos a sua versão de otimização em grafos ponderados, na qual requer-se uma árvore de conexão para o conjunto de terminais dado com peso total mínimo e que respeite as restrições do número máximo de elos e do número máximo de roteadores, o mesmo pode ser visto como uma generalização desses dois problemas clássicos, conforme descrevemos abaixo:

- para $W = V(G)$, a versão de minimização do TCP equivale ao problema da ÁRVORE GERADORA MÍNIMA, independentemente dos valores assumidos por ℓ e r (visto que neste caso todos os vértices do grafo G são terminais);
- para $\ell = r \geq |V(G) \setminus W|$, a versão de minimização do TCP equivale ao problema da ÁRVORE DE STEINER para o conjunto de terminais W .

Vale mencionar que o problema de encontrar uma árvore geradora mínima é um dos mais famosos problemas de teoria dos grafos solucionável em tempo polinomial, sendo o mesmo utilizado em muitos textos didáticos de algoritmo como exemplo de problema combinatório que admite algoritmo guloso ótimo (no sentido de sempre retornar soluções de custo mínimo) de tempo polinomial [6, 8, 26]. Os algoritmos de Kruskal [28] e de Prim [33] são exemplos de tais algoritmos polinomiais para ÁRVORE GERADORA MÍNIMA. Em contrapartida, o problema de encontrar uma árvore de Steiner de custo mínimo para um conjunto de terminais é um dos 21 notáveis problemas de Karp, os quais foram provados ser NP-difíceis [23]. Inclusive, ÁRVORE DE STEINER permanece NP-difícil mesmo para grafos não ponderados.

Além das relações descritas, para ambos problemas existem variantes que, de forma semelhante ao TCP, limitam a quantidade máxima de vértices com grau maior ou igual a 3 na árvore buscada. Os problemas correspondentes a essas variantes são denominados ÁRVORE GERADORA COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES e ÁRVORE DE STEINER COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES.

O primeiro desses problemas, isto é, o que se refere à árvore geradora, foi proposto por Gargano et al. [20], sob motivação de aplicações em redes ópticas, onde deseja-se minimizar o número de *switches* do tipo WDM (do inglês, *Wavelength Division Multiplexing*), devido ao alto custo de implementação destes [1, 20]. A modelagem em grafos correspondente a esse problema consiste justamente em buscar

uma árvore geradora tal que o número de vértices com grau maior ou igual a 3, denominados *ramificações*, é mínimo [1, 20]. Um caso notável da versão de decisão desse problema é o de quando não permite-se utilizar ramificações, o qual coincide precisamente com CAMINHO HAMILTONIANO. Por conseguinte, e em contraste com a complexidade polinomial do problema ÁRVORE GERADORA MÍNIMA original, obtém-se, por restrição, que ÁRVORE GERADORA COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES pertence à classe de problemas NP-difíceis.

Por outro lado, ÁRVORE DE STEINER COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES é por definição, conforme descrevemos a seguir, uma generalização de seu problema de origem, ÁRVORE DE STEINER, que propriamente já pertence à classe de problemas NP-difíceis. Assim, obtemos a sua NP-dificuldade de forma imediata. Apresentamos abaixo uma definição formal para o referido problema, contudo consideramo-lo em sua versão de decisão. De modo análogo ao definido para ÁRVORE GERADORA COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES, um vértice é dito *ramificação* de uma árvore de Steiner T se o seu grau em T é maior ou igual a 3 [42].

ÁRVORE DE STEINER COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES

<i>Entrada:</i>	Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$, uma função de peso $g : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$ e dois inteiros não negativos k e r .
<i>Questão:</i>	O grafo G contém como subgrafo uma árvore T com no máximo r ramificações tal que $W \subseteq V(T)$ e $\sum_{e \in E(T)} g(e) \leq k$?

Como pode-se observar, o problema em questão é muito semelhante ao TCP, entretanto eles não são equivalentes. Uma das principais diferenças entre os dois consiste na distinção dos conceitos de vértice *ramificação* e de vértice *roteador*. Por definição, todo roteador é uma ramificação, porém não é verdade que toda ramificação é um roteador: com efeito, se um terminal $w \in W$ é tal que $d_T(w) \geq 3$, onde T é uma árvore de conexão (ou uma árvore de Steiner) para W , então o mesmo é tido como uma ramificação de T , embora não o seja um roteador de T .

Em [42], foi estudada a complexidade de alguns casos particulares do problema ÁRVORE DE STEINER COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES. Mais especificamente, foram considerados os casos em que $|W|$ ou r são limitados por constantes. Além disso, também foi estudada a complexidade do problema para grafos com *treewidth* limitado e para grafos *planares*. Para grafos com *treewidth* limitado foi provado que o problema admite algoritmo de tempo polinomial se $|W|$ e r são também limitados por constantes. Contudo, se ao menos um desses parâmetros $|W|$ ou r não for limitado, então desconhece-se a qual classe de complexidade o problema pertence, isto é, se o mesmo é NP-completo ou se é solucionável em tempo polinomial. Uma consequência interessante desse resultado polinomial para grafos com

treewidth limitado, é a de que podemos estendê-lo para o nosso problema, o TCP. Assim sendo, embora de modo breve, retomaremos este assunto na Seção 3.1.2. Por outro lado, para grafos planares, o problema foi provado ser NP-completo mesmo quando r é limitado. E, se $|W|$ e r são ambos limitados por constantes, então novamente desconhece-se a qual classe de complexidade o problema pertence. Para grafos gerais, foi mostrado que o problema admite algoritmo de tempo polinomial caso seja considerada sua versão relaxada na qual não se há restrição para o peso total da árvore de Steiner e se, além disso, $|W|$ e r são limitados por constantes. Entretanto, desconhece-se a complexidade do problema quando são consideradas todas as suas restrições originais e $|W|$ e r são limitados por constantes. Além destes resultados listados, foram propostas também em [42] demonstrações de inaproximabilidade, como também foi estudada a complexidade do problema para grafos direcionados.

2.3 Versão estrita do TCP

Por definição, todas as folhas de uma árvore de conexão T pertencem ao conjunto de terminais W , para o qual T está definido. No entanto, note que não necessariamente todos os vértices em W são folhas de T . E, nestes casos, tais terminais cujos graus são maiores do que 1 em T simulam, conseqüentemente, a função de um elo ou de um roteador, apesar de não onerarem a contagem do número de elos e de roteadores em T , o que pode ser indesejado em algumas aplicações [11]. Além disso, existem também aplicações nas quais, independentemente do número de elos e de roteadores, exige-se que todos os terminais sejam folhas da árvore de conexão [11, 29].

Dessa forma, se faz necessário distinguir as árvores de conexão cujos terminais são necessariamente folhas, dentre aquelas nas quais os terminais podem ter grau arbitrário (maior ou igual a 1). Dizemos que uma árvore de conexão T para um conjunto de terminais W é uma *árvore de conexão estrita para W* se $\text{folhas}(T) = W$. Neste caso, os vértices em W são chamados de *vértices estritamente terminais* ou, alternativamente, *nós estritamente terminais*. Por outro lado, se T é uma árvore de conexão para W mas não é uma árvore de conexão estrita para W , então dizemos que T é uma *árvore de conexão não estrita para W* . Com base neste conceito de árvore de conexão estrita, Dourado et al. propuseram posteriormente em [11] o PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS (S-TCP).

PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS (S-TCP)

Entrada: Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$ e dois inteiros não negativos ℓ e r .

Questão: O grafo G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r$?

Observe que, não necessariamente todo grafo que admite uma árvore de conexão para um dado conjunto de terminais também admitirá uma árvore de conexão estrita para este mesmo conjunto de terminais. Temos, por exemplo, o grafo G e o conjunto de terminais W ilustrados na Figura 2.1a. Embora G admita uma árvore de conexão para W , conforme exemplificado nas Figuras 2.1b e 2.3, o mesmo não admite uma árvore de conexão estrita para W , visto que existe um terminal $w \in W$ tal que $G - w$ possui dois componentes conexos distintos, digamos G_1 e G_2 , cada qual possuindo alguns terminais de W , ou seja, $V(G_1) \cap W \neq \emptyset$ e $V(G_2) \cap W \neq \emptyset$. Assim, w necessariamente possui grau maior ou igual a 2 em toda árvore de conexão de G para W : ao menos uma aresta incidente a w é utilizada para conectar os terminais em $V(G_1) \cap W$ e ao menos uma outra aresta incidente a w é utilizada para conectar os terminais em $V(G_2) \cap W$. Figura 2.10a ilustra o grafo $G - w$ e os componentes conexos G_1 e G_2 . Todavia, note que o grafo G admite uma árvore de conexão estrita para $W \setminus \{w\}$, conforme exemplificado nas Figuras 2.10b, 2.10c e 2.10d.

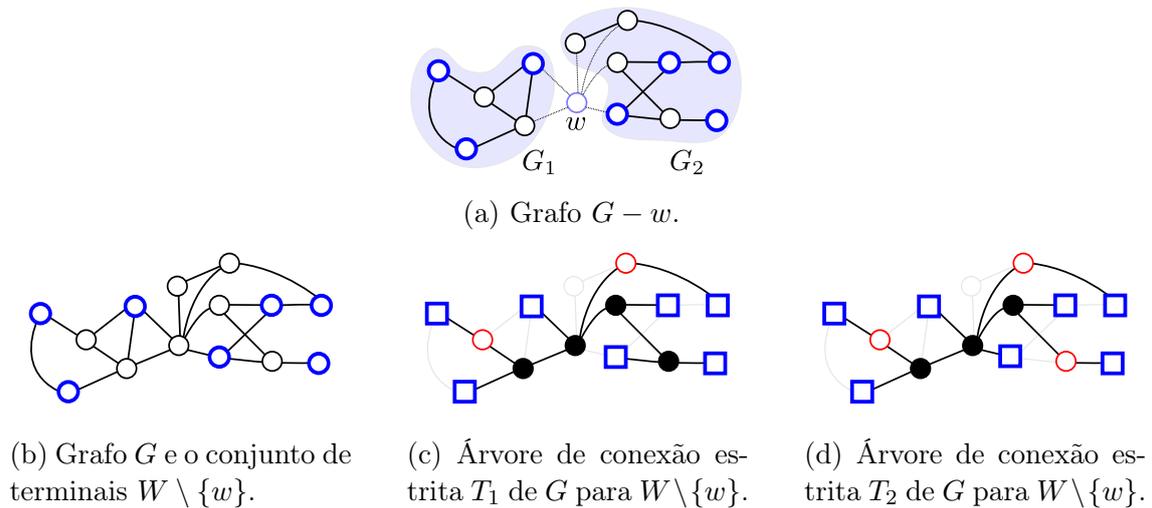


Figura 2.10: Árvore de conexão estrita de G para $W \setminus \{w\}$.

Uma outra possibilidade é a de G possuir uma árvore de conexão não estrita para W que utilize menos elos ou menos roteadores do que quaisquer uma de suas árvores de conexão estrita para W . Por exemplo, não é difícil ver que toda árvore de conexão estrita do grafo G para o conjunto de terminais $W' = W \setminus \{w\}$, ilustrados na Figura 2.10b, possui ao menos seis vértices não terminais. Conseqüentemente, toda instância $I = (G, W', \ell, r)$ é uma instância NÃO do S-TCP se $\ell + r < 6$. No entanto, conforme exemplificado na Figura 2.11, G admite árvore de conexão (não estrita) para W' com menos do que seis vértices não terminais.

Por outro lado, não é verdade que sempre existirá uma árvore de conexão não estrita de um grafo G para um conjunto de terminais W que utilize menos (ou até mesmo a mesma quantidade) de elos ou roteadores do que uma árvore de conexão

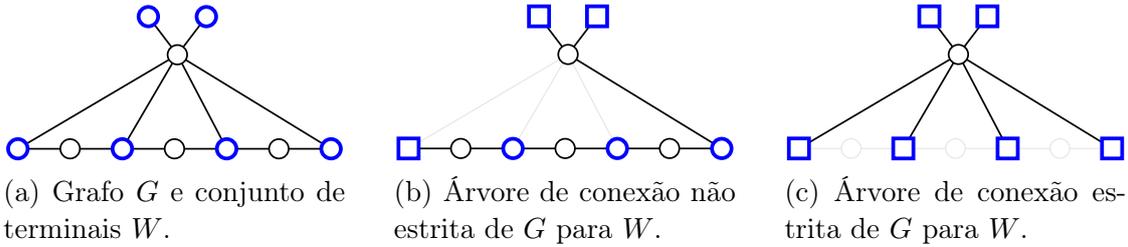


(a) Árvore de conexão para W' com dois elos e um roteador.

(b) Árvore de conexão para W' com um elo e três roteadores.

Figura 2.11: Árvore de conexão (não estrita) de G para W' com menos do que seis vértices não terminais.

estrita de G para W . Considere como exemplo o grafo G e o conjunto de terminais W ilustrados na Figura 2.12a. Não é difícil ver que toda árvore de conexão T de G para W possui ao menos um roteador, e que se T for não estrita, então ao menos um elo é utilizado, conforme exemplificado na Figura 2.12b; caso contrário (isto é, se T for estrita), então nenhum elo é utilizado, conforme exemplificado na Figura 2.12c.



(a) Grafo G e conjunto de terminais W .

(b) Árvore de conexão não estrita de G para W .

(c) Árvore de conexão estrita de G para W .

Figura 2.12: Árvore de conexão estrita de G para W com menos vértices não terminais do que qualquer árvore de conexão não estrita de G para W .

Embora, aparentemente, não exista uma relação muito clara entre um grafo admitir uma árvore de conexão (não estrita) para um conjunto de terminais W com no máximo ℓ elos e com no máximo r roteadores e o grafo admitir uma árvore de conexão estrita para W com também no máximo ℓ elos e r roteadores, ou vice-versa, Dourado et al. provaram que o $TCP(\ell)$ se reduz polinomialmente ao $S-TCP(\ell)$ [11].

Proposição 2.3 (Dourado et al. [11]). $TCP(\ell) \propto S-TCP(\ell)$.

Demonstração. Seja $I = (G, W, r)$ uma instância do TCP. Construimos a partir de I uma instância $f(I) = (G', W', r')$ do S-TCP(ℓ) conforme segue:

- para cada terminal $w_i \in W$, criamos dois vértices w_i^1 e w_i^2 , e adicionamos as arestas $w_i w_i^1$ e $w_i w_i^2$;
- por fim, definimos $W' = \{w_i^1, w_i^2 \mid w_i \in W\}$ e $r' = |W| + r$.

Mostramos agora que I é uma instância SIM do TCP(ℓ) se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do S-TCP(ℓ).

(\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM do TCP(ℓ). Logo, G contém uma árvore de conexão T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r$. Definimos então a partir de T o subgrafo T' de G' conforme segue: $V(T') = V(T) \cup W'$ e $E(T') = E(T) \cup \{w_i w_i^1, w_i w_i^2 \mid w_i \in W\}$. Como o grau dos vértices $w_i^1, w_i^2 \in W'$ é 1 até mesmo no grafo G' , é fácil ver que T' é uma árvore de conexão estrita para W' tal que $\mathbf{L}(T') = \mathbf{L}(T)$ e $\mathbf{R}(T') = \mathbf{R}(T) \cup W$. Logo, T' possui no máximo ℓ elos e $r' = r + |W|$ roteadores.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância do S-TCP(ℓ). Logo, G' admite uma árvore de conexão T' para W' tal que $|\mathbf{L}(T')| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T')| \leq r'$. Como o único vizinho dos terminais w_i^1 e w_i^2 em G' é o vértice $w_i \in W$, w_i necessariamente pertence a $V(T')$ e, além disso, o é um roteador de T' . Portanto, o subgrafo T de G , definido da forma $V(T) = V(T') \setminus W'$ e $E(T) = E(T') \setminus \{w_i w_i^1, w_i w_i^2 \mid w_i \in W\}$, é uma árvore de conexão de G para W tal que $\mathbf{L}(T) = \mathbf{L}(T')$ e $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(T') \setminus W$. Logo, T possui no máximo ℓ elos e $r = r' - |W|$ roteadores. \square

Uma consequência imediata desta proposição é a de que, assim como o TCP(ℓ), o S-TCP(ℓ) é um problema NP-difícil. O teorema a seguir formaliza esse resultado.

Teorema 2.4 (Dourado et al. [11]). *O S-TCP(ℓ) é NP-completo.*

Demonstração. De modo análogo ao TCP(ℓ), é fácil ver que o S-TCP(ℓ) pertence à classe de problemas NP. Ademais, segue da Proposição 2.3 que o S-TCP(ℓ) é NP-difícil. Portanto, o S-TCP(ℓ) é NP-completo.

Uma prova alternativa para a NP-dificuldade do S-TCP(ℓ) segue diretamente da redução polinomial do 3-SAT para o TCP(ℓ) descrita no Teorema 2.1, pois, conforme comentamos no final de sua demonstração, todos os terminais nesta redução são necessariamente folhas das árvores de conexão referentes à instância SIM do 3-SAT. Consequentemente, o Teorema 2.1 estabelece uma redução polinomial a partir do 3-SAT não somente para o TCP(ℓ) como também para o S-TCP(ℓ). \square

Por outro lado, Dourado et al. [11] provaram que, assim como o TCP(ℓ, r), o S-TCP(ℓ, r) é solucionável em tempo polinomial. O algoritmo proposto por eles consiste basicamente na mesma estratégia adotada no Algoritmo 2.1 para o TCP(ℓ, r), contendo apenas pequenas modificações justamente para contemplar o fato de que buscamos agora uma árvore de conexão estrita, em vez de simplesmente uma árvore de conexão. O teorema a seguir descreve essas modificações em um pouco mais de detalhes.

Teorema 2.5. *O S-TCP(ℓ, r) é solucionável em tempo polinomial.*

Demonstração. Este resultado segue do Algoritmo 2.1 para o TCP(ℓ, r), visto que podemos facilmente adaptá-lo de modo que sejam consideradas apenas árvores de

conexão **estrita** como possíveis soluções (ou, mais formalmente, certificados para o SIM) para as instâncias fornecidas em sua entrada. Considere então $I = (G, W)$ uma instância do S-TCP(ℓ, r). A primeira modificação que realizamos no Algoritmo 2.1 é a de realizar, antes de qualquer um dos seus passos, um pré-processamento que remova todas as arestas do grafo G tais que seus dois extremos são vértices em W , isto é, implementamos a seguinte operação $E(G) := E(G) \setminus \{w_i w_j \mid w_i, w_j \in W\}$. Observe que, o grafo resultante dessa operação admitirá uma árvore de conexão estrita para W com no máximo ℓ elos e com no máximo r roteadores se, e somente se, o grafo original G também o admitir, e que o mesmo pode ser obtido em tempo $\mathcal{O}(m)$, onde m é o número de arestas do grafo original G . Por fim, a cada adição de aresta às florestas $T \in \mathcal{F}$, procedemos com a verificação adicional de ratificar que o grau dos vértices pertencentes a W não excede a 1 em T . Observe que, podemos executar essa verificação em tempo $\mathcal{O}(n)$, onde $n = |V(G)|$. As demais operações para computação da instância I do S-TCP(ℓ, r) são todas definidas de modo idêntico aos seus respectivos passos descritos — em suas formas originais para resolução do TCP(ℓ, r) — no Algoritmo 2.1. É fácil constatar que o presente algoritmo para o S-TCP(ℓ, r), obtido dessas modificações do Algoritmo 2.1, avalia em tempo polinomial essencialmente todas as possibilidades de existência de uma árvore de conexão estrita de G para W e que, assim, o mesmo retorna SIM para uma dada entrada I se, e somente se, I for de fato uma instância SIM do S-TCP(ℓ, r). \square

Neste ponto, sabemos que: assim como o TCP(ℓ), o S-TCP(ℓ) é NP-completo; e que, assim como o TCP(ℓ, r), o S-TCP(ℓ, r) é solucionável em tempo polinomial. Entretanto, desconhecemos a qual classe de complexidade o S-TCP(r) pertence.

Embora saibamos que o TCP(r) é NP-completo, não é claro que podemos adaptar a redução polinomial utilizada para mostrar a sua NP-completude, descrita no Teorema 2.2, para também provar que o S-TCP(r) é NP-completo. Além disso, note que a redução do TCP(ℓ) para o S-TCP(ℓ), descrita na Proposição 2.3, não preserva a propriedade de r ser limitado por uma constante, logo não podemos utilizá-la, ao menos de forma direta, para determinar a complexidade do S-TCP(r).

Mais do que isso, até onde pudemos investigar, o S-TCP com número máximo de roteadores limitado por uma constante não havia sido até então abordado na literatura. Dessa forma, determinar a qual classe de complexidade o S-TCP(r) pertence tornou-se uma questão interessante e desafiadora. Com o intuito de preencher essa lacuna, apresentamos no próximo capítulo desta dissertação uma análise da complexidade do S-TCP(r) e de algumas de suas variantes, apesar de ainda não sabermos a complexidade do S-TCP(r) para todos os valores constantes de r .

Capítulo 3

Problema Estrito com Limitação de Roteadores

Neste capítulo, apresentamos uma das principais contribuições desta dissertação, que consiste na análise da complexidade computacional do S-TCP e de algumas de suas variantes restritos ao caso em que o número máximo de roteadores é limitado por uma constante. Na Seção 3.1, provamos que, para $r \in \{0, 1\}$, o S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial, o que contrasta com a complexidade do TCP(r), que é NP-completo para todo valor constante $r \geq 0$. Além disso, apresentamos ainda nesta seção observações e resultados parciais que obtivemos, os quais fornecem informações úteis a respeito da complexidade do S-TCP(r) para $r \geq 2$ constante. Na Seção 3.2, consideramos algumas variantes do S-TCP(r), para as quais propomos algoritmos de tempo polinomial ou provas de NP-completude. Por fim, na Seção 3.3, descrevemos os resultados de complexidade parametrizada conhecidos na literatura para o S-TCP e provamos que o S-TCP(ℓ) é W[2]-difícil quando parametrizado por r , o número máximo de roteadores. Parte dos resultados descritos neste capítulo foram apresentados no *VII Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, sob o título “*The strict terminal connection problem with a bounded number of routers*” [30].

3.1 Número limitado de roteadores

Nesta seção, concentramo-nos particularmente no PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS com número máximo de roteadores limitado por uma constante, isto é, o S-TCP(r). Analisamos, primeiramente, sua complexidade para $r \in \{0, 1\}$. Em seguida, apresentamos algumas observações e resultados parciais que obtivemos para quando $r \geq 2$. Por exemplo, relacionamos casos particulares do S-TCP($r \geq 2$) com problemas de caminhos disjuntos, inclusive com problemas cuja complexidade ainda não foi determinada. Um outro exemplo de resultado parcial

obtido é o de que se o S-TCP($r = c$) for NP-completo, para alguma constante $c \geq 1$, então o S-TCP($r = c + 1$) também será NP-completo.

3.1.1 Caso com no máximo um roteador

Primeiramente, note que, se $|W| = 1$, então o problema é solucionável facilmente: (podemos assumir que) o grafo trivial T tal que $V(T) = W$ e $E(T) = \emptyset$ é uma árvore de conexão estrita para W (apesar de $w \in W$ não ser uma folha de T neste caso). Dessa forma, supomos ao longo desta dissertação que $|W| \geq 2$. O lema a seguir nos fornece uma condição necessária e suficiente para que uma instância $I = (G, W, \ell)$ do S-TCP seja uma instância SIM quando $|W| = 2$.

Lema 3.1. *Seja $I = (G, W, \ell, r)$ uma instância do S-TCP tal que $|W| = 2$. Temos que I é uma instância SIM se, e somente se, a distância em G entre os dois vértices pertencentes a W é no máximo $\ell + 1$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM do S-TCP. Logo, G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r$. Como T é uma árvore, entre quaisquer dois de seus vértices existe exatamente um caminho. Seja então P o caminho em T entre os dois vértices que compõem W . Como $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$, o comprimento de P é menor ou igual a $\ell + 1$. Portanto, a distância em G entre os dois vértices pertencentes a W não é maior do que $\ell + 1$.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que a distância em G entre os dois vértices pertencentes a W seja no máximo $\ell + 1$. Logo, G contém um caminho P entre os dois vértices em W tal que o seu comprimento é no máximo $\ell + 1$. Portanto, I é uma instância SIM do S-TCP, visto que o grafo associado a P é uma árvore de conexão estrita para W com no máximo ℓ elos e que não possui roteador. \square

Lema 3.2. *Seja T uma árvore. Se $|\text{folhas}(T)| \geq 3$, então $\Delta(T) \geq 3$.*

Demonstração. Suponha que $\Delta(T) \leq 2$. Como T é uma árvore, e assim o é conexo e acíclico, ou $|V(T)| = 1$ ou T consiste num caminho contendo ao menos dois vértices. Se $|V(T)| = 1$, então por definição $|\text{folhas}(T)| = 0$. Por outro lado, se T consiste num caminho contendo ao menos dois vértices, então $|\text{folhas}(T)| = 2$. Portanto, por contrapositiva, temos que se $|\text{folhas}(T)| \geq 3$, então $\Delta(T) \geq 3$. \square

Corolário 3.3. *O S-TCP($r = 0$) é solucionável em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja $I = (G, W, \ell)$ uma instância do S-TCP($r = 0$). Se $|W| = 2$, então obtemos pelo Lema 3.1 que o S-TCP($r = 0$) pode ser solucionado em tempo polinomial através de um algoritmo para o problema de encontrar um caminho mínimo entre os dois terminais pertencentes a W . O algoritmo de Dijkstra [9] é

um exemplo de algoritmo polinomial para resolver este caso. Por outro lado, se $|W| \geq 3$, então obtemos pelo Lema 3.2 que toda árvore de conexão estrita para W deve conter ao menos um vértice com grau maior ou igual a 3, ou seja, deve conter um roteador. Portanto, I é neste caso uma instância NÃO do S-TCP($r = 0$). \square

Analizamos agora a complexidade do S-TCP($r = 1$), o qual mostramos pertencer à classe de problemas solucionáveis em tempo polinomial. Para tanto, propomos uma redução de Turing do S-TCP($r = 1$) para o problema MIN-SUM *st*-CAMINHOS DISJUNTOS (MIN-SUM *st*-DP), que é definido conforme segue.

MIN-SUM *st*-CAMINHOS DISJUNTOS (MIN-SUM *st*-DP)

Entrada: Um grafo G , dois vértices distintos $s, t \in V(G)$ e dois inteiros não-negativos k e x .

Questão: Existem k caminhos disjuntos em vértices entre s e t no grafo G tais que a soma de seus comprimentos é no máximo x ?

O MIN-SUM *st*-DP é um problema clássico de caminhos disjuntos, o qual foi mostrado ser solucionável em tempo polinomial em 1974 por Suurballe [38]. O teorema a seguir é um enunciado desse resultado.

Teorema 3.4 (Suurballe [38]). *MIN-SUM *st*-DP é solucionável em tempo polinomial.*

O algoritmo proposto por Suurballe para o referido problema consiste, a grosso modo, na estratégia de encontrar indutivamente k caminhos disjuntos em vértices, onde o k -ésimo desses caminho é obtido a partir dos $k - 1$ primeiros caminhos disjuntos ótimos (isto é, os caminhos cuja soma de seus comprimentos é mínima), aplicando-se a cada um desses k passos um algoritmo para o problema de caminho mínimo, como o algoritmo de Dijkstra [38, 39]. Observe que, o MIN-SUM *st*-DP também pode ser interpretado como o problema de fluxo de custo mínimo, onde a capacidade e o custo de cada aresta são iguais a 1, cada vértice $v \notin \{s, t\}$ possui capacidade $c(v) = 1$ e a demanda de fluxo entre s e t é igual a k [27, 38, 39].

Antes de apresentarmos a redução de Turing do S-TCP($r = 1$) para o MIN-SUM *st*-DP, observe que, como S-TCP($r = 0$) admite um algoritmo de tempo polinomial, podemos assumir sem perda de generalidade que uma instância I do S-TCP($r = 1$) é uma instância NÃO do S-TCP($r = 0$), visto que uma primeira estratégia de resolução do S-TCP($r = 1$) seria verificar (em tempo polinomial) se a instância de entrada admite uma árvore de conexão estrita que não contenha roteadores e que respeite o número máximo de elos permitidos. Além disso, note ainda que se $|W| \leq 2$ e I é uma instância SIM do S-TCP($r = 1$), então necessariamente I é uma instância SIM do S-TCP($r = 0$). Desse modo, suponha também que $|W| \geq 3$.

Dada uma instância $I = (G, W, \ell)$ do S-TCP($r = 1$) e um vértice $\rho \in V(G) \setminus W$ tal que $d_G(\rho) \geq |W|$, definimos uma instância $f(I, \rho) = (G', s, t, k, x)$ do MIN-SUM st -DP conforme segue:

- $V(G') = V(G) \cup \{t\}$, onde t é um vértice novo;
- $E(G') = E(G) \cup \{wt \mid w \in W\}$;
- $s = \rho$, $k = |W|$ e $x = \ell + 2k$.

Figura 3.1 ilustra o grafo G' obtido pela construção f .

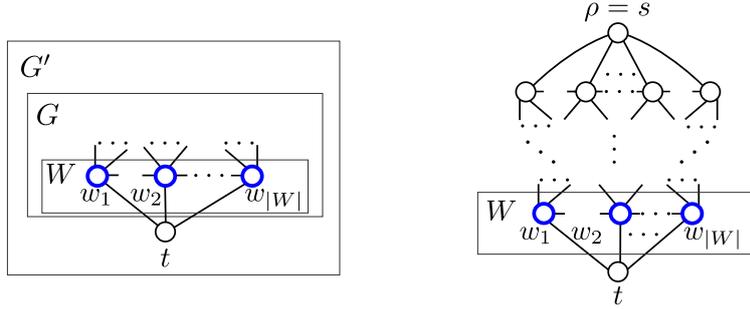


Figura 3.1: Grafo G' da instância $f(I, \rho)$ do MIN-SUM st -DP.

Lema 3.5. *Uma instância $I = (G, W, \ell)$ é uma instância SIM do S-TCP($r = 1$) se, e somente se, existe vértice $\rho \in V(G) \setminus W$, com $d_G(\rho) \geq |W|$, tal que $f(I, \rho)$ é uma instância SIM do MIN-SUM st -DP.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM do S-TCP($r = 1$). Logo, G contém uma árvore de conexão estrita T para W com no máximo ℓ elos e com exatamente um roteador, visto que estamos supondo que I é uma instância NÃO do S-TCP($r = 0$). Seja então $\rho \in V(G) \setminus W$ o roteador de T . Como T é uma árvore, para cada terminal $w \in W$, existe um único caminho entre ρ e w em T . Além disso, segue do fato de que os vértices em $V(T) \setminus \{\rho\}$ possuem grau no máximo 2 em T , que esses caminhos entre ρ e cada um dos terminais $w \in W$ são disjuntos em vértices. Logo, podemos construir uma solução (ou mais formalmente, um certificado para o SIM) \mathcal{P} para a instância $f(I, \rho)$ do MIN-SUM st -DP através da união de tais caminhos, juntamente com a adição das arestas $wt \in E(G')$, para todo $w \in W$. Note que, \mathcal{P} consiste em $|W|$ caminhos disjuntos em vértices entre ρ e t no grafo G' tais que a soma de seus comprimentos é no máximo $\ell + 2k$. Portanto, $f(I, \rho) = (G', s = \rho, t, k = |W|, x = \ell + 2k)$ é uma instância SIM do MIN-SUM st -DP.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que exista um vértice $\rho \in V(G) \setminus W$, com $d_G(\rho) \geq |W|$, tal que $f(I, \rho)$ seja uma instância SIM do MIN-SUM st -DP. Logo, existem $k = |W|$ caminhos disjuntos em vértices P^1, P^2, \dots, P^k entre $\rho = s$ e t no grafo G'

tais que $\sum_{1 \leq i \leq k} |E(P^i)| \leq x = \ell + 2k$. Dessa forma, considere o subgrafo T de G' induzido pelo conjunto de arestas $E' = (\bigcup_{1 \leq i \leq k} E(P^i - t))$. É imediato, por sua própria definição, que T é um subgrafo de G e que, além disso, também o é uma árvore. Observe ainda que, para $1 \leq i \leq k = |W|$, os extremos dos caminhos $P^i - t$ formam exatamente o conjunto $W \cup \{s\}$. Logo, obtemos que $\text{folhas}(T) = W$ e que s é o único vértice de T com grau maior do que 2 (segue da suposição que $|W| \geq 3$ e do Lema 3.2). Por fim, como $\sum_{1 \leq i \leq k} |E(P^i)| \leq \ell + 2k$, T contém no máximo ℓ vértices com grau 2. Portanto, T é uma árvore de conexão estrita de G para W com no máximo ℓ elos e com exatamente um roteador, e assim temos que $I = (G, W, \ell)$ é de fato uma instância SIM do S-TCP($r = 1$). \square

Figura 3.2 ilustra a ideia central utilizada na demonstração do Lema 3.5.

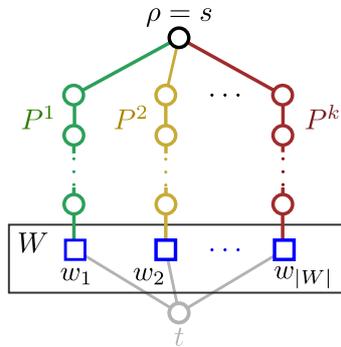


Figura 3.2: Relação do S-TCP($r = 1$) com o MIN-SUM st -DP.

Corolário 3.6. *O S-TCP($r = 1$) é solucionável em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja $I = (G, W, \ell)$ uma instância do S-TCP($r = 1$). Para todo vértice $\rho \in V(G) \setminus W$ tal que $d_G(\rho) \geq |W|$, construímos uma instância $f(I, \rho)$ do MIN-SUM st -DP, conforme definimos anteriormente, e verificamos em tempo polinomial, com base no Teorema 3.4, se $f(I, \rho)$ é uma instância SIM do MIN-SUM st -DP. Caso a resposta seja positiva para algum ρ , retornamos que I é uma instância SIM do S-TCP($r = 1$); caso contrário (isto é, se para todo $\rho \in V(G) \setminus W$ com $d_G(\rho) \geq |W|$, $f(I, \rho)$ é uma instância NÃO do MIN-SUM st -DP), retornamos que I é uma instância NÃO do S-TCP($r = 1$). A corretude desse algoritmo segue do Lema 3.5. Temos, portanto, que o S-TCP($r = 1$) é solucionável em tempo polinomial. \square

O Algoritmo 3.1 consiste num pseudocódigo da redução de Turing que propomos do S-TCP($r = 1$) para o MIN-SUM st -DP. Neste pseudocódigo, incluímos algumas passos adicionais para que o caso onde não permite-se utilizar roteadores, isto é, o S-TCP($r = 0$), fosse também contemplado.

Algoritmo 3.1: Algoritmo polinomial para o S-TCP($r \leq 1$)

Entrada: Um grafo conexo G , um conjunto de terminais $W \subseteq V(G)$, $r \in \{0, 1\}$ e um inteiro não negativo ℓ .

Saída: Se G admite uma árvore de conexão estrita para W com no máximo ℓ elos e com no máximo r roteadores, SIM; caso contrário, NÃO.

```
1 se  $W = \{w_1, w_2\}$  e  $\text{dist}_G(w_1, w_2) \leq \ell + 1$  então
2   └─ retorna SIM
3 senão se  $|W| \geq 3$  e  $r = 1$  então
4   ┌─ Seja  $G'$  o grafo definido conforme segue:  $V(G') := V(G) \cup \{t\}$  e
       $E(G') := E(G) \cup \{wt \mid w \in W\}$ , onde  $t$  é um vértice novo
5   └─ para todo  $\rho \in V(G) \setminus W$  com  $d_G(\rho) \geq |W|$  faça
6     ┌─ se existem  $|W|$  caminhos disjuntos em vértices entre  $\rho$  e  $t$  em  $G'$  cuja soma
          de seus comprimentos é no máximo  $\ell + 2k$  então
7     └─ ┌─ retorna SIM
          └─
8 retorna NÃO
```

3.1.2 Resultados parciais para o caso $r \geq 2$

Neste ponto, sabemos que, para $r \in \{0, 1\}$, o S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial. Contudo, desconhecemos a sua complexidade quando r assume valores constantes maiores ou iguais a 2, e na verdade este é um dos principais, senão o principal, problemas que deixamos em aberto nesta dissertação.

Problema em aberto 3.7. Para $r \geq 2$ constante, o S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial?

Dessa forma, visando ganhar um pouco mais de intuição sobre a complexidade do S-TCP(r), para $r \geq 2$ constante, analisamos agora a sua relação com outros problemas. Considere então, primeiramente, a variante do S-TCP(r) em que o conjunto dos r roteadores a serem utilizados pela árvore de conexão já é dado na entrada do problema, a qual definimos formalmente a seguir.

S-TCP(R)

Entrada: Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$, um subconjunto não vazio $R \subseteq V(G) \setminus W$ e um inteiro não negativo ℓ .

Questão: O grafo G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $\mathbf{R}(T) = R$?

Proposição 3.8. Para $r = |R|$ constante, S-TCP(r) \propto_T S-TCP(R).

Demonstração. Seja $I = (G, W, \ell)$ uma instância do S-TCP(r). Primeiramente note que, I é uma instância SIM do S-TCP(r) se, e somente se, existe um subconjunto de

roteadores $R \subseteq V(G) \setminus W$ tal que (G, W, R, ℓ) é uma instância SIM do S-TCP(R). Além disso, como r é limitado por uma constante, podemos enumerar todos os possíveis r' -subconjuntos de $V(G) \setminus W$ em tempo polinomial com relação ao tamanho de I , para $r' \leq r$. Mais especificamente, podemos realizar essa enumeração em tempo $\sum_{i=0}^r \binom{n}{i} = \mathcal{O}(n^r)$, onde $n = |V(G)|$. \square

Com base na Proposição 3.8, podemos concluir que se o S-TCP(r) for NP-difícil, para algum valor constante $r \geq 2$, então, para $|R| = r$, o S-TCP(R) não admitirá algoritmo de tempo polinomial, a menos que $P = NP$. Analogamente temos que, se o S-TCP(R) for solucionável em tempo polinomial, então o S-TCP(r) será também solucionável em tempo polinomial. Dessa forma, uma potencial estratégia para se atacar o S-TCP(r) consiste em realizar, a partir dele, uma redução de Turing para o S-TCP(R), aplicando-se de forma conjunta a essa redução um algoritmo de tempo polinomial para o S-TCP(R). Repare que, no Lema 3.5 adotamos justamente essa estratégia para solucionarmos o S-TCP($r = 1$). Entretanto, desconhecemos a complexidade do S-TCP(R) quando consideramos $|R| \geq 2$.

Problema em aberto 3.9. *Para $|R| \geq 2$, o S-TCP(R) é solucionável em tempo polinomial?*

Uma justificativa para esse desconhecimento, em contraste a sabermos solucionar eficientemente o S-TCP(R) quando $|R| = 1$, pode ser dada pelo fato de que o S-TCP(R) muda substancialmente seu comportamento quando $|R| \geq 2$ se comparado ao caso em que $|R| = 1$. Com efeito, observe que, para $|R| = 1$, o S-TCP(R) consiste unicamente no problema de conectar os terminais em W ao vértice em R através de caminhos disjuntos (em vértices), de modo que seja utilizado um número limitado de elos. Por outro lado, para $|R| \geq 2$, o S-TCP(R) pode ser interpretado como uma conjunção de dois problemas, a saber:

- (i) similar ao caso $|R| = 1$, o problema de conectar os terminais em W aos vértices em R através de caminhos disjuntos (em vértices), de modo que seja utilizado um número limitado de elos, conforme ilustrado na Figura 3.3a; e
- (ii) o problema de conectar os vértices pertencentes a R uns aos outros através de caminhos disjuntos (em vértices), de modo que seja também utilizado um número limitado de elos, conforme ilustrado na Figura 3.3b.

Observe que, a relação de conjunção desses dois problemas para com o S-TCP(R) equivale a garantir que a união de uma solução para (i) com uma solução para (ii) resultará numa árvore tal que o seu conjunto de roteadores é igual a R , ou seja, todos os vértices em R devem, e tão somente eles podem, possuir grau maior ou igual a 3 na árvore obtida. Dessa forma, não necessariamente saber solucionar

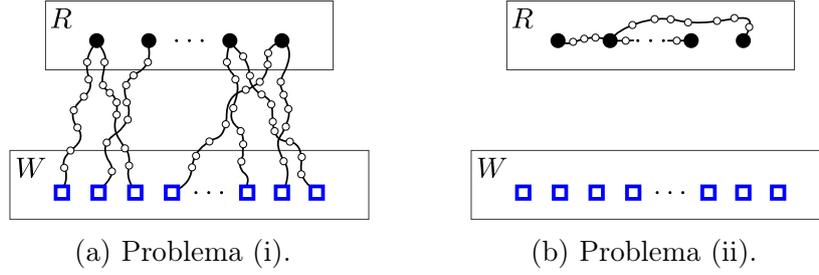


Figura 3.3: Interpretação do S-TCP(R) como uma conjunção de dois problemas.

eficientemente os problemas (i) e (ii) implica em saber solucionar eficientemente o S-TCP(R). Por outro lado, se ao menos um desses for NP-difícil, então obtemos, por restrição, que o S-TCP(R) associado será também NP-difícil. Uma observação interessante é a de que a NP-dificuldade dos problemas (i) ou (ii) também implica na NP-dificuldade do nosso problema original, o S-TCP(r). Por exemplo, podemos realizar uma redução polinomial a partir de (ii) para o S-TCP($r = |R|$) conforme ilustramos, informalmente, na Figura 3.4.

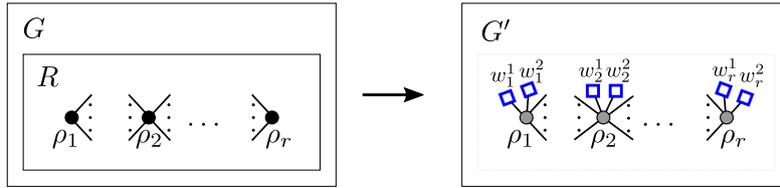


Figura 3.4: Redução polinomial do problema (ii) para o S-TCP($r = |R|$).

Todavia, o problema (i) se reduz polinomialmente ao MIN-SUM *st*-DP (conforme mostramos em detalhes na Seção 3.2.1), e portanto o é solucionável em tempo polinomial, independentemente da cardinalidade de R . Quanto ao problema (ii), sabemos solucioná-lo em tempo polinomial para qualquer conjunto R tal que $|R| \leq 3$, com efeito: para $|R| = 1$, o problema é trivial; para $|R| = 2$, o problema equivale a encontrar um caminho mais curto entre os dois vértices em R ; e para $|R| = 3$, podemos aplicar novamente um algoritmo para o MIN-SUM *st*-DP, adotando uma estratégia muito similar à que utilizamos para solucionar o S-TCP($r = 1$). Contudo, para $|R| \geq 4$, já não sabemos mais a qual classe de complexidade o problema (ii) pertence. E de modo ainda mais restrito, desconhecemos a complexidade do problema de encontrar um caminho que contenha todos os vértices pertencentes a R e que utilize uma quantidade limitada de elos, mesmo quando $|R| = 4$. A referência mais próxima que encontramos na literatura sobre este caso restrito de (ii) remete-se ao problema de encontrar um *caminho de Steiner*, ou seja, uma árvore de Steiner para um dado conjunto de terminais que seja um caminho [31]. Contudo, os autores restringiram a sua proposta apenas para grafos que são *árvores binárias*, para as quais obtiveram um algoritmo de tempo linear [31]. Além deste artigo, não encontramos

quaisquer outras informações a respeito deste assunto, e assim, por mais simples que sua formulação seja, acreditamos que se trate de um problema em aberto para grafos gerais.

Problema em aberto 3.10. *Dado um grafo G , um subconjunto $R \subseteq V(G)$ e um inteiro não negativo ℓ , o problema de encontrar um caminho P em G tal que $R \subseteq V(P)$ e $|V(P) \setminus R| \leq \ell$ é solucionável em tempo polinomial quando $|R|$ é limitado por uma constante? E se $|R| = 4$?*

Analisando de volta o caso geral do problema (ii), com $|R|$ limitado por uma constante, observamos que o mesmo equivale aos seguintes problemas:

- o TCP($r = 0$) onde R é o conjunto de terminais; e
- a variante (da versão de decisão) da ÁRVORE DE STEINER onde R é o conjunto de terminais e exige-se que todos os *vértices de Steiner* (ou seja, os vértices não terminais da árvore) possuam grau exatamente 2.

Embora ÁRVORE DE STEINER tenha sido amplamente estudado, não encontramos qualquer referência na literatura relativa a essa sua variante em que os vértices de Steiner devem ter grau exatamente 2 e a quantidade de terminais é limitado por uma constante. Uma possível razão para isso, deve-se ao fato de que, em vez de em grafos, o problema da ÁRVORE DE STEINER foi originalmente definido como um problema de geometria *cf.* [14] (onde deseja-se conectar um dado conjunto de pontos no plano Euclidiano através de segmentos de retas cuja soma de seus comprimentos seja mínima, permitindo-se, para tanto, utilizar pontos adicionais, denominados *pontos de Steiner*) e de que, para esta versão original do problema, existem propriedades bem conhecidas que as soluções ótimas (ou seja, as árvores de Steiner de custo mínimo) satisfazem, dentre as quais destacamos especialmente uma que diz que todo vértice de Steiner (ou melhor, ponto de Steiner) possui grau exatamente 3 [17, 21]. Dessa forma, é possível que essa variante da ÁRVORE DE STEINER de fato não tenha sido abordada anteriormente, tendo em vista que a mesma impõe uma restrição que justamente segue a direção oposta de uma famosa propriedade de seu problema original. Logo, acreditamos que se trate de um problema em aberto.

Problema em aberto 3.11. *A variante da ÁRVORE DE STEINER em que todos os vértices de Steiner devem possuir grau exatamente 2 é solucionável em tempo polinomial se o número de terminais é limitado por uma constante?*

Por outro lado, sabemos solucionar em tempo polinomial a versão relaxada dessa variante da ÁRVORE DE STEINER na qual o custo total da árvore não é limitado. Mais do que isso, podemos solucionar em tempo polinomial a variante do S-TCP(r) na qual o número máximo de elos não é limitado, caso a cardinalidade do conjunto

de terminais seja limitada por uma constante. Para tanto, realizamos uma redução de Turing para k -CAMINHOS DISJUNTOS (k -DP), que é definido conforme segue.

k -CAMINHOS DISJUNTOS (k -DP)

Entrada: Um grafo G e k pares não ordenados $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \dots, \{s_k, t_k\}$ de vértices de G .

Questão: O grafo G contém k caminhos disjuntos em vértices P^1, P^2, \dots, P^k tais que os extremos de P^i são s_i e t_i ?

O k -DP é um problema combinatório clássico, que foi provado por Karp em [24] ser NP-completo se k faz parte de sua entrada *cf.* [15, 25, 27]. Em contrapartida, Robertson e Seymour provaram em seu trabalho seminal que se k é tido como parâmetro fixo, então o k -DP pertence à classe de problemas solucionáveis em tempo polinomial, mais especificamente à classe FPT [34]. Em adição ao algoritmo de Robertson e Seymour, outros algoritmos FPT com melhores complexidades de tempo foram posteriormente obtidos, um exemplo é o algoritmo de Kawarabayashi et al. [25].

Proposição 3.12. *A versão relaxada do S-TCP(r) na qual não se limita a quantidade de elos nas árvores de conexão é solucionável em tempo polinomial se o número de terminais é tido como parâmetro fixo.*

Demonstração. O Algoritmo 3.2 é um pseudocódigo da redução de Turing que propomos da versão relaxada do S-TCP(r) para o k -DP. A sua corretude segue do fato de que são analisadas todas as possíveis topologias $T \in \mathcal{T}$ de árvores de conexão estrita do grafo G para o conjunto de terminais W (no que se refere à estrutura de conexão dos roteadores uns para com os outros e à estrutura de conexão entre roteadores e terminais), e de que I é uma instância SIM do S-TCP(r) se, e somente, existir uma topologia T tal que $f(I, T)$ é uma instância SIM do k -DP. Uma observação adicional interessante é a de que, se $f(I, T)$ é uma instância SIM do k -DP para uma dada topologia $T \in \mathcal{T}$, então o grafo G admite uma árvore de conexão estrita para W cujo conjunto de roteadores é $R = V(T) \setminus W$.

Quanto à complexidade do Algoritmo 3.2, temos que o laço da linha 2 executa $\mathcal{O}(n^r)$ iterações. Ademais, sabemos pela fórmula Cayley [4] que um grafo completo com q vértices possui q^{q-2} árvores geradoras, e assim obtemos que o laço da linha 3 executa no total $|\mathcal{T}| = q^{q-2}$ iterações, onde $q = |W| + |R|$ neste caso. Observe ainda, que a condição da linha 4 pode ser facilmente verificada em tempo $\mathcal{O}(n)$. Portanto, as operações descritas nas linhas 2 a 5 podem ser executadas em tempo $\mathcal{O}(n^{r+1}(|W|+r)^{|W|+r-2})$. Por fim, como $k = |E(T)| \leq |W|+r$ e o k -DP é solucionável em tempo polinomial quando k é tido como parâmetro fixo, obtemos que o algoritmo em questão possui complexidade de tempo polinomial. \square

Algoritmo 3.2: Redução de Turing para o k -DP

Entrada: Um grafo G , um conjunto não vazio de terminais $W \subseteq V(G)$ tal que $|W|$ é limitado por uma constante e uma constante não negativa r .

Saída: Se G admite uma árvore de conexão estrita para W com no máximo r roteadores, SIM; caso contrário, NÃO.

- 1 Seja $\mathcal{T} := \emptyset$
- 2 **para cada** subconjunto $R \subseteq V(G) \setminus W$ tal que $|R| \leq r$ **faça**
- 3 **para cada** árvore geradora T do grafo completo H tal que $V(H) = W \cup R$ **faça**
- 4 **se** $\forall w \in W, d_T(w) = 1$ e $\forall \rho \in R, d_T(\rho) \geq 3$ **então**
- 5 $\mathcal{T} := \mathcal{T} \cup \{T\}$
- 6 **para cada** árvore $T \in \mathcal{T}$ **faça**
- 7 Seja $f(I, T) := (G', \{s_1, s_2\}, \dots, \{s_k, t_k\})$ uma instância do k -DP tal que $G' := G$ e $\{s_i, t_i\} := e_i$, onde $e_i \in E(T)$ e $1 \leq i \leq k = |E(T)|$
- 8 **se** $f(I, T)$ é uma instância SIM do k -DP **então**
- 9 **retorna** SIM
- 10 **retorna** NÃO

A princípio, poderíamos aplicar uma estratégia similar à utilizada na Proposição 3.12 para provar que o S-TCP(r) (agora com limitação de elos) é também solucionável em tempo polinomial quando $|W|$ é limitado por uma constante. No entanto, desconhecemos a complexidade do problema equivalente ao k -DP em que o comprimento total dos caminhos é limitado, o MIN-SUM k -DP. Na verdade, desconhece-se a qual classe de complexidade o MIN-SUM k -DP pertence mesmo quando $k = 2$, o que permanece em aberto por mais de vinte anos [15, 18, 27]. Descrevemos a seguir uma definição formal para o referido problema.

MIN-SUM k -CAMINHOS DISJUNTOS (MIN-SUM k -DP)

Entrada: Um grafo G , k pares não ordenados $\{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, \dots, \{s_k, t_k\}$ de vértices de G e um inteiro não negativo x .

Questão: O grafo G contém k caminhos disjuntos em vértices P^1, P^2, \dots, P^k tais que os extremos de P^i são s_i e t_i e $\sum_{i=1}^k |E(P^i)| \leq x$?

Apesar de não se conhecer a complexidade do MIN-SUM k -DP para grafos gerais, sabe-se que se restringi-lo para grafos com *treewidth* limitado, então o mesmo pode ser solucionado em tempo linear, independentemente de k ser tido como parâmetro fixo [36]. Baseado neste resultado, podemos aplicar uma estratégia idêntica à descrita na Proposição 3.12, e assim obtermos um algoritmo de tempo polinomial para o S-TCP(r) quando restrito para grafos com *treewidth* limitado e o número de terminais é limitado por uma constante (visto que enumeramos todas as topologias de árvores de conexão estrita), conforme mostramos na proposição a seguir.

Proposição 3.13. *O S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial se restrito aos grafos com treewidth limitado e se, além disso, o número de terminais é limitado por uma constante.*

Demonstração. Para provarmos este resultado aplicamos uma estratégia idêntica a descrita na Proposição 3.12, sendo a única exceção a condição descrita na linha 8 do Algoritmo 3.2, que agora em vez de verificarmos se $f(I, k)$ é uma instância SIM do k -DP, verificamos se $f(I, k)$ é uma instância SIM do MIN-SUM k -DP. \square

Uma observação interessante é que os resultados propostos nas Proposições 3.12 e 3.13 também são válidos para o TCP. A única modificação em suas demonstrações que devemos realizar é a de remover a condição descrita na linha 4 do Algoritmo 3.2 que garante que todos os vértices terminais possuam grau 1.

Em [14], Dreyfus e Wagner propuseram um algoritmo FPT de programação dinâmica para ÁRVORE DE STEINER, tendo como parâmetro fixo o número de terminais. Apesar deste resultado e do S-TCP se relacionar de forma bem próxima a ÁRVORE DE STEINER, não é muito claro que possamos adaptar esse algoritmo com o objetivo de solucionar o S-TCP. A maior dificuldade, para se obter essa adaptação, consiste em incorporar no algoritmo algum mecanismo que garanta que a restrição quanto ao número máximo de roteadores seja respeitada, de modo que a quantidade de elos utilizados (ou, alternativamente, o custo da árvore) ainda seja minimizada. Dessa forma, de modo um pouco mais geral do que os demais problemas analisados nesta subseção, enunciamos como um problema em aberto o de determinar a qual classe de complexidade o S-TCP (ou até mesmo o TCP) pertence quando o número de terminais é fixo, para grafos quaisquer.

Problema em aberto 3.14. *O S-TCP (ou o TCP) é solucionável em tempo polinomial, mais especificamente em tempo FPT, quando o número de terminais é tido como parâmetro fixo? E se ℓ ou r são também tidos como parâmetros fixos?*

Para finalizarmos essa subseção, considere a seguinte proposição, a qual nos fornece uma certa relação de monotonicidade quanto à complexidade do S-TCP(r).

Proposição 3.15. *Para $c \geq 0$, $S\text{-TCP}(r = c) \propto S\text{-TCP}(r = c + 1)$.*

Demonstração. Seja $I = (G, W, \ell)$ uma instância do S-TCP($r = c$), e seja $w \in W$. Construamos a partir de I e do terminal w uma instância $f(I, w) = (G', W', \ell')$ do S-TCP($r = c + 1$) conforme segue:

- criamos dois vértices w^1 e w^2 e adicionamos as arestas w^1w e w^2w ;
- para cada aresta $e = vw \in E(G)$ incidente a w , efetuamos ℓ subdivisões de e , obtendo assim o grafo G' tal que

- $V(G') = V(G) \cup \{w^1, w^2\} \cup \{u_e^1, u_e^2, \dots, u_e^{\ell+1} \mid e = vw \in E(G)\}$ e
- $E(G') = E(G) \setminus \{vw \mid v \in N_G(w)\} \cup \{w^1w, w^2w\} \cup \{vu_e^1, u_e^1u_e^2, \dots, u_e^\ell u_e^{\ell+1}, u_e^{\ell+1}w \mid e = vw \in E(G)\}$;
- por fim, definimos $W' = W \setminus \{w\} \cup \{w^1, w^2\}$ e $\ell' = 2\ell + 1$.

Figura 3.5 ilustra a construção da instância $f(I, w)$.

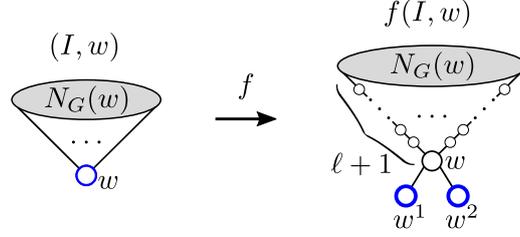


Figura 3.5: Redução do S-TCP($r = c$) para o S-TCP($r = c + 1$)

Mostramos agora que I é uma instância SIM do S-TCP($r = c$) se, e somente se, $f(I, w)$ é uma instância SIM do S-TCP($r = c + 1$), para qualquer $w \in W$.

(\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM do S-TCP($r = c$). Logo, G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq c$. Como, por hipótese, $\text{folhas}(T) = W$, existe uma única aresta incidente a w em T , digamos que tal seja a aresta $e = vw \in E(T)$. Considere então o subgrafo T' de G' obtido a partir de T e e da seguinte forma: $V(T') = V(T) \cup \{w^1, w^2\} \cup \{u_e^1, u_e^2, \dots, u_e^{\ell+1}\}$ e $E(T') = E(T) \setminus \{e\} \cup \{w^1w, w^2w\} \cup \{vu_e^1, u_e^1u_e^2, \dots, u_e^\ell u_e^{\ell+1}, u_e^{\ell+1}w\}$. Por construção, T' é uma árvore de conexão estrita de G' para W' tal que $\mathbf{L}(T') = \mathbf{L}(T) \cup \{u_e^1, u_e^2, \dots, u_e^{\ell+1}\}$ e $\mathbf{R}(T') = \mathbf{R}(T) \cup \{w\}$. Assim, $|\mathbf{L}(T')| \leq 2\ell + 1$ e $|\mathbf{R}(T')| \leq c + 1$, e portanto $f(I, w)$ é uma instância SIM do S-TCP($r = c + 1$).

(\Leftarrow) Suponha agora que $f(I, w)$ seja uma instância SIM do S-TCP($r = c + 1$). Logo, G' admite uma árvore de conexão estrita para W' tal que $|\mathbf{L}(T')| \leq \ell' = 2\ell + 1$ e $|\mathbf{R}(T')| \leq c + 1$. Como o único vizinho dos terminais $w^1, w^2 \in W'$ em G' é o vértice w , o mesmo necessariamente pertence a $V(T')$ e, além disso, o é um roteador de T' . Note ainda que, além dos vértices w^1 e w^2 , w possui um único vizinho em T' , pois caso contrário $|\mathbf{L}(T')| > 2\ell + 1$, o que seria um absurdo. Seja então $u_e^{\ell+1}$ este vizinho de w , onde $e = vw$ para algum $v \in N_G(w)$. Considere o subgrafo T de G obtido a partir de T' e e da seguinte forma: $V(T) = V(T') \setminus (\{w^1, w^2\} \cup \{u_e^1, u_e^2, \dots, u_e^{\ell+1}\})$ e $E(T) = E(T') \setminus (\{w^1w, w^2w\} \cup \{vu_e^1, u_e^1u_e^2, \dots, u_e^\ell u_e^{\ell+1}, u_e^{\ell+1}w\})$. Novamente por construção, temos que T é uma árvore de conexão estrita de G para W tal que $\mathbf{L}(T) = \mathbf{L}(T') \setminus \{u_e^1, u_e^2, \dots, u_e^{\ell+1}\}$ e $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(T') \setminus \{w\}$. Assim, $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq c$, e portanto I é uma instância SIM do S-TCP($r = c$). \square

Uma consequência imediata da Proposição 3.15 é a de que se, para algum $c \geq 2$, o S-TCP($r = c$) for NP-difícil, então o S-TCP($r = c'$) será também NP-difícil, para

todo $c' \geq c$. Em contrapartida, observe que saber que o S-TCP($r = c$) é solucionável em tempo polinomial para algum $c \geq 1$ não necessariamente implica em ser fato que o S-TCP($r = c + 1$) será também solucionável em tempo polinomial. Por exemplo, sabemos que o S-TCP($r = 1$) admite algoritmo de tempo polinomial, mas com base apenas nessa informação não conseguimos construir, ao menos de forma imediata, um algoritmo polinomial para o S-TCP($r = 2$).

3.2 Restrições adicionais

Ainda com o objetivo de obtermos mais intuição sobre o S-TCP(r), especialmente quando r assume valores constantes maiores ou iguais a 2, realizamos neste momento uma análise da complexidade de algumas variantes do S-TCP(r), que contêm restrições adicionais às restrições já presentes no problema original. Observamos que, embora possa aparentar que tais restrições se remetam a requerimentos muito peculiares, com base nelas podemos inferir algumas características das instâncias difíceis, caso existam, do S-TCP(r).

3.2.1 Subgrafo de roteadores conexo

A primeira destas variantes do S-TCP(r) que consideramos é a de quando exige-se que o conjunto de roteadores de uma árvore de conexão estrita T induza um subgrafo conexo de T , ou seja, para quaisquer dois vértices $\rho, \rho' \in R(T)$, os vértices pertencentes ao caminho em T entre ρ e ρ' devem todos pertencer a $R(T)$. Descrevemos a seguir uma definição formal para o referido problema, contudo enunciaremos o seu caso mais geral no qual não necessariamente r é limitado por uma constante.

SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP

Entrada: Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$, um inteiro não negativo ℓ e um inteiro positivo r .

Questão: O grafo G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|L(T)| \leq \ell$, $|R(T)| \leq r$ e $R(T)$ induz um subgrafo conexo de T ?

Teorema 3.16 (Dourado et al. [10]). SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(ℓ) é NP-completo.

Demonstração. Este resultado segue imediatamente da prova de NP-completude proposta por Dourado et al. para o TCP(ℓ) [10], que é descrita no Teorema 2.1. Note que, na redução polinomial desta prova, todos os possíveis conjuntos de roteadores das árvores de conexão T referentes às instância SIM do 3-SAT necessariamente induzem um subgrafo conexo de T . Além disso, conforme comentamos na própria demonstração do Teorema 2.1, todas estas árvores de conexão T são estritas. Logo, o

Teorema 2.1 estabelece uma redução polinomial a partir do 3-SAT não somente para o $\text{TCP}(\ell)$ como também para $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(\ell)$ (e para $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO TCP}(\ell)$). Portanto, $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(\ell)$ é NP-completo, tendo em vista que o mesmo pertence à classe NP. \square

Em contraste ao teorema anterior, provamos a seguir que, para todo valor constante $r \geq 1$, $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(r)$ é solucionável em tempo polinomial. Para tanto, realizamos uma redução de Turing para o MIN-SUM st-DP semelhante à que propomos no Lema 3.5 para solucionar o $\text{S-TCP}(r = 1)$. No entanto, antes de propriamente apresentarmos a referida redução, descrevemos algumas observações quanto ao problema $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(r)$.

Primeiramente, note que, a Proposição 3.8 é também aplicável ao problema $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(r)$, no sentido de que existe uma redução de Turing de $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(r)$ para $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(R)$. Dessa forma, como o nosso objetivo é propor um algoritmo de tempo polinomial, podemos supor sem perda de generalidade que os conjuntos de roteadores das árvores de conexão são previamente conhecidos na entrada do problema.

Seja $I = (G, W, R', \ell)$ uma instância arbitrária de $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(R = R')$. Como o $\text{S-TCP}(R = R^*)$ é solucionável em tempo polinomial quando $|R^*| = 1$, uma estratégia natural que poderia-se tentar aplicar ao $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(R = R')$ com o intuito de solucioná-lo seria: para cada árvore geradora $T_{R'}$ de $G[R']$, obter a partir de G o grafo $H_{T_{R'}}$ resultante da contração de todas as arestas pertencentes a $E(T_{R'})$, tal que $V(H_{T_{R'}}) = V(G) \setminus R' \cup \{\rho^*\}$ e $E(H_{T_{R'}}) = E(G) \setminus E(T_{R'}) \cup \{v\rho^* \mid v \in N_G(R')\}$, onde $N_G(R') = \bigcup_{u \in R'} N_G(u) \setminus R'$; e após essa operação aplicar um algoritmo de tempo polinomial para o $\text{S-TCP}(R = R^*)$ sobre a instância $f(I, T_{R'}) = (H_{T_{R'}}, W, R^* = \{\rho^*\}, \ell)$. Se para alguma árvore geradora $T_{R'}$, $f(I, T_{R'})$ fosse uma instância SIM do $\text{S-TCP}(R = R^*)$, então retornaríamos que I que é uma instância SIM do $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(R = R')$; caso contrário, retornaríamos que I é uma instância NÃO.

Contudo, esta estratégia nem sempre funciona, pois possivelmente, para alguma árvore geradora $T_{R'}$ de $G[R']$, $f(I, T_{R'})$ é uma instância SIM do $\text{S-TCP}(R = R^*)$, enquanto que I é uma instância NÃO de $\text{SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP}(R = R')$. Com efeito, suponha que $G[R']$ contenha uma única árvore geradora, digamos $T_{R'}$. Além disso, suponha ainda que exista uma única árvore de conexão estrita que certifique o SIM de $f(I, T_{R'})$, digamos T_R^* . Note que, é possível que algum vértice pertencente a R' se torne, inevitavelmente, um elo em todas as

configurações de árvores de conexão estrita obtidas a partir de T_R^* pelo processo inverso de contração das arestas em $E(T_{R'})$. Assim, se $|L(T_R^*)| = \ell$, então qualquer árvore de conexão estrita correspondente a I utilizará mais do que ℓ elos, e portanto I será neste caso uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP($R = R'$). Para concretizar essa situação hipotética, considere o exemplo ilustrado na Figura 3.6, e assumamos que $R' = \{\rho_1, \rho_2\}$ e o número máximo de elos permitidos seja $\ell = 2$. Embora I seja uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP($R = R'$) — visto que, em todas as suas configurações de árvores de conexão estrita são utilizados três elos —, $f(I, T_{R'})$ é uma instância SIM do S-TCP($R = R^*$) numa das configurações ilustradas. Note ainda que, mais do que I , neste exemplo, ser uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP($R = R'$), temos que, para qualquer $r \geq 0$, $(G, W, \ell = 2)$ é uma instância NÃO do S-TCP(r). Assim, esta estratégia de contração de arestas não funciona mesmo quando não é requerido que o conjunto de roteadores seja precisamente R' , ou até mesmo quando o número máximo de roteadores não é limitado.

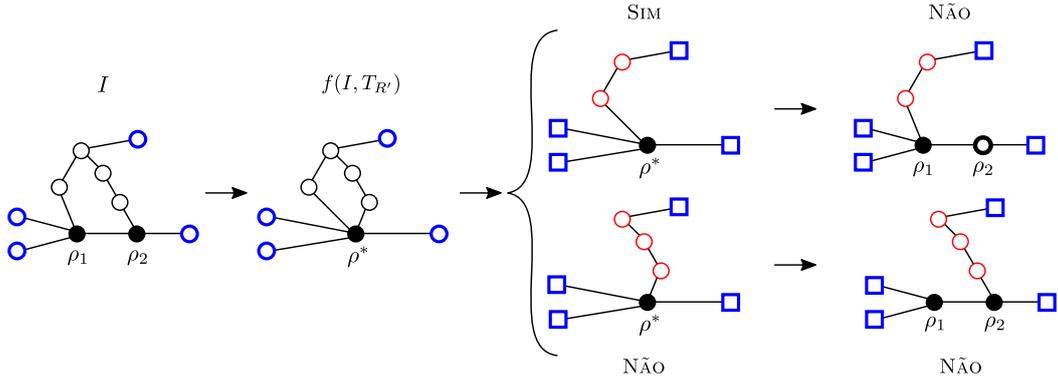


Figura 3.6: Estratégia de contração de arestas.

Dessa forma, a prova de que SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TC(R) é solucionável em tempo polinomial não segue de forma tão imediata do fato que o S-TCP($r = 1$) pode ser solucionado em tempo polinomial. Descrevemos agora a redução de Turing que propomos do MIN-SUM *st*-DP para SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TC(R).

Seja $I = (G, W, R, \ell)$ uma instância de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TC(R) e seja T_R uma árvore geradora de $G[R]$. Objetivamos encontrar uma árvore de conexão estrita T que certifique o SIM de I , de modo que $T[R] = T_R$. Suponha então que

$$\sum_{\rho \in R} (d_G(\rho) - d_{T_R}(\rho)) \geq |W|, \text{ e que} \quad (3.1)$$

$$\sum_{\rho \in R} \beta(3 - d_{T_R}(\rho)) \leq |W|, \text{ onde } \beta(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Equação (3.1) é uma condição necessária para que, para cada terminal $w \in W$, exista

um caminho em T entre w e algum roteador $\rho \in R$. Por outro lado, Equação (3.2) é uma condição necessária para que todos os vértices pertencentes a R de fato possuam grau maior ou igual a 3 em T . Logo, se ao menos uma dessas condições não for satisfeita, então certamente G não admitirá uma árvore de conexão estrita T para W tal que $R(T) = R$ e $T[R] = T_R$. Suponha ainda, sem perda de generalidade, que os vértices em R não sejam adjacentes aos terminais em W . (Caso exista algum vértice em R que seja adjacente a um terminal, basta subdividirmos a aresta entre eles e definirmos $\ell := \ell + 1$. Esta última suposição possui o intuito de tão somente simplificar a demonstração do próximo lema.)

Construímos a partir de I e T_R uma instância $f(I, T_R) = (G', s, t, k, x)$ do MIN-SUM st -DP conforme segue:

- criamos dois vértices s e t , e os adicionamos a G' ;
- adicionamos todos os vértices em $V(G) \setminus R$ a G' , juntamente com as arestas em $E(G) \setminus \{\rho v \mid \rho \in R \text{ e } v \in N_G(\rho)\}$;
- para cada vértice $\rho_i \in R$ tal que $d_{T_R}(\rho_i) = 1$, criamos dois vértices ρ_i^1 e ρ_i^2 e os adicionamos a G' , juntamente com as arestas $\rho_i^1 v, \rho_i^2 v$, para todo $v \in N_G(\rho_i) \setminus R$;
- para cada vértice $\rho_i \in R$ tal que $d_{T_R}(\rho_i) = 2$, criamos um vértice ρ_i^1 e o adicionamos a G' , juntamente com as arestas $\rho_i^1 v$, para todo $v \in N_G(\rho_i) \setminus R$;
- adicionamos ainda os vértices $\rho_*^1, \rho_*^2, \dots, \rho_*^{q_{T_R}}$ a G' , juntamente com as arestas $\rho_*^1 v, \rho_*^2 v, \dots, \rho_*^{q_{T_R}} v$, para todo $v \in \bigcup_{\rho \in R} N_G(\rho) \setminus R$, onde $q_{T_R} = |W| - (2q_1 + q_2)$, $q_1 = |\{\rho_i \mid \rho_i \in R \text{ e } d_{T_R}(\rho_i) = 1\}|$ e $q_2 = |\{\rho_i \mid \rho_i \in R \text{ e } d_{T_R}(\rho_i) = 2\}|$ (segue da Equação (3.2) que $q_{T_R} \geq 0$);
- para cada $\rho_i \in R^1 \cup R^2 \cup R^*$, adicionamos a aresta $s\rho_i$ a G' , sendo os conjuntos $R^1 = \{\rho_i^1, \rho_i^2 \mid \rho_i \in R \text{ e } d_{T_R}(\rho_i) = 1\}$, $R^2 = \{\rho_i^1 \mid \rho_i \in R \text{ e } d_{T_R}(\rho_i) = 2\}$ e $R^* = \{\rho_*^j \mid 1 \leq j \leq q_{T_R}\}$;
- para cada terminal $w \in W$, adicionamos a aresta wt a G' ;
- por fim, definimos $k = |W|$ e $x = \ell + 3k$.

Figura 3.7 ilustra a construção da instância $f(I, T_R)$. Nesta ilustração, consideramos o caso particular em que $|R| = 2$, para o qual T_R é necessariamente um caminho entre os dois vértices em R e $q = q_{T_R} = |W| - 4$.

Um conceito que nos será útil na demonstração do lema a seguir, e de resultados posteriores descritos nesta dissertação, é o de um roteador conectar um terminal numa árvore de conexão estrita. Dada uma árvore de conexão estrita T para um

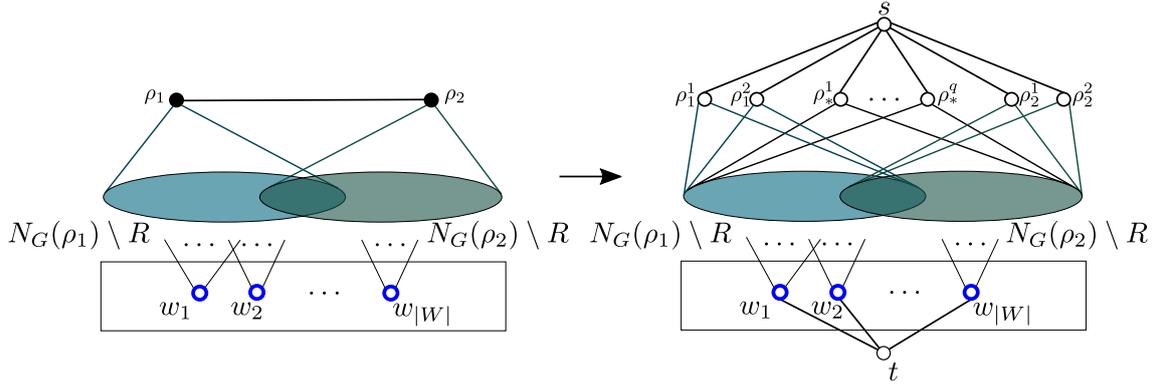


Figura 3.7: Construção da instância $f(I, T_R)$ do MIN-SUM st -DP.

conjunto de terminais W , dizemos que o roteador $\rho \in R(T)$ conecta o terminal $w \in W$ a T se, para todo $\rho' \in R(T) \setminus \{\rho\}$, $\text{dist}_T(\rho, w) < \text{dist}_T(\rho', w)$. Neste caso, dizemos ainda que w é conectado a T através de ρ . Observe que, cada terminal de uma árvore de conexão estrita T é conectado a T através de exatamente um roteador.

Lema 3.17. *Uma instância $I = (G, W, R, \ell)$ de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R) é uma instância SIM se, e somente se, existe uma árvore geradora T_R de $G[R]$ tal que $f(I, T_R)$ é uma instância SIM do MIN-SUM st -DP.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). Logo, G contém uma árvore de conexão estrita T para W com no máximo ℓ elos tal que o seu conjunto de roteadores é R , o qual induz um subgrafo conexo de T . Seja então T_R esse subgrafo de T induzido por $R(T)$, que necessariamente é uma árvore, já que T é acíclico. Construimos a partir de T , e de T_R , uma solução \mathcal{P} (ou mais formalmente, um certificado para o SIM) para a instância $f(I, T_R)$ do MIN-SUM st -DP conforme descrevemos a seguir.

Como todos os vértices $\rho_i \in R(T)$ possuem grau maior ou igual a 3 em T , se $d_{T_R}(\rho_i) = 1$, então há ao menos dois terminais em W que são conectados a T por ρ_i . Dessa forma, considere $P_{\rho_i, w_a} = \langle \rho_i, v_a, \dots, w_a \rangle$ e $P_{\rho_i, w_b} = \langle \rho_i, v_b, \dots, w_b \rangle$, dois caminhos em T com origem em ρ_i , tais que um destes possui como destino o terminal $w_a \in W$ e o outro possui como destino o terminal $w_b \in W$, onde w_a e w_b são conectados a T através de ρ_i e $w_a \neq w_b$. Definimos a partir de P_{ρ_i, w_a} e P_{ρ_i, w_b} os caminhos $P'_{\rho_i, w_a} = \langle s, \rho_i^1, v_a, \dots, w_a, t \rangle$ e $P'_{\rho_i, w_b} = \langle s, \rho_i^2, v_a, \dots, w_b, t \rangle$, e os adicionamos a \mathcal{P} . De modo análogo, se $d_{T_R}(\rho_i) = 2$, então há ao menos um terminal em W que é conectado a T por ρ_i . Considere, então, o caminho $P_{\rho_i, w_a} = \langle \rho_i, v_a, \dots, w_a \rangle$ em T , tal que $w_a \in W$ é conectado a T através de ρ_i . Definimos a partir de P_{ρ_i, w_a} o caminho $P'_{\rho_i, w_b} = \langle s, \rho_i^1, v_a, \dots, w_a, t \rangle$, e o adicionamos a \mathcal{P} . Seja W' o conjunto formado pelos terminais que estão presentes nos caminhos que adicionamos a \mathcal{P} até o momento, e seja $W^* = W \setminus W'$. Observe que, por construção, $|R^*| = |W^*|$. Logo, existe uma

correspondência biunívoca entre R^* e W^* . Seja então $\alpha: W^* \rightarrow R^*$ uma bijeção qualquer entre tais conjuntos. Para cada terminal $w^* \in W^*$, considere o caminho $P_{\rho, w^*} = \langle \rho, v, \dots, w^* \rangle$, onde $\rho \in R(T)$ é o roteador que conecta w^* a T . Definimos a partir de P_{ρ, w^*} o caminho $P'_{\rho, w^*} = \langle s, \alpha(w^*), v, \dots, w^*, t \rangle$, e o adicionamos a \mathcal{P} .

Observe que, por construção, todos os caminhos em \mathcal{P} estão necessariamente contidos em G' e que, além disso, \mathcal{P} consiste em $|W|$ caminhos disjuntos em vértices entre s e t no grafo G' . A disjunção desses caminhos segue do fato de que todos os vértices internos dos caminhos em T entre os terminais pertencentes a W e os roteadores que os conectam a T são elos. Por fim, como $|L(T)| \leq \ell$, o somatório dos comprimentos dos caminhos em \mathcal{P} é no máximo $\ell + 3k$. Portanto, $f(I, T_R) = (G', s, t, k = |W|, x = \ell + 3k)$ é uma instância SIM do MIN-SUM st -DP.

(\Leftarrow) Suponha agora que exista uma árvore geradora T_R de $G[R]$ tal que $f(I, T_R)$ seja uma instância SIM do MIN-SUM st -DP. Logo, existem $k = |W|$ caminhos disjuntos em vértices entre s e t no grafo G' tais que o somatório de seus comprimentos é no máximo $x = \ell + 3k$.

Seja \mathcal{P} o conjunto formado por esses caminhos e seja \mathcal{S} um conjunto inicialmente vazio. Para cada $P' \in \mathcal{P}$ tal que $P' = \langle s, \rho_i^1, v, \dots, w, t \rangle$ ou $P' = \langle s, \rho_i^2, v, \dots, w, t \rangle$, definimos o caminho $P = \langle \rho_i, v, \dots, w \rangle$ e o adicionamos a \mathcal{S} , onde $\rho_i \in R$. Por outro lado, se $P' \in \mathcal{P}$ é tal que $P' = \langle s, \rho_*^j, v, \dots, w, t \rangle$, para algum j com $1 \leq j \leq q_{T_R}$, então definimos o caminho $P = \langle \rho, v, \dots, w \rangle$ e o adicionamos a \mathcal{S} , onde ρ é um vértice em $R \cap N_G(v)$ arbitrário. Como os caminhos em \mathcal{P} seguem um desses três formatos, obtemos que $|\mathcal{S}| = |\mathcal{P}| = |W|$. Ademais, note que cada vértice em W pertence a não mais do que um caminho em \mathcal{S} , visto que os caminhos em \mathcal{P} são disjuntos em vértices e que os vértices em W são todos vértices internos desses caminhos. Logo, existe uma bijeção entre \mathcal{S} e W . Note ainda que, por construção, todos os caminhos em \mathcal{S} estão necessariamente contidos em G .

Dessa forma, considere o grafo T obtido a partir de T_R e de \mathcal{S} da seguinte forma: $V(T) = R \cup \bigcup_{P \in \mathcal{S}} V(P)$ e $E(T) = E(T_R) \cup \bigcup_{P \in \mathcal{S}} E(P)$. É imediato, por sua própria definição e das observações que fizemos no parágrafo anterior, que T é um subgrafo de G e que, além disso, também o é uma árvore. Observe ainda que, os extremos dos caminhos $P \in \mathcal{S}$ formam exatamente o conjunto $W \cup R$. Logo, obtemos que $\text{folhas}(T) \supseteq W$. Ademais, como $|R^1 \cup R^2 \cup R^*| = k = |\mathcal{P}|$, para cada vértice $\rho' \in R^1 \cup R^2 \cup R^*$, há um caminho $P' \in \mathcal{P}$ tal que $\rho' \in V(P')$. Consequentemente, todos os vértices pertencentes a R possuem grau maior ou igual a 3 em T . Dessa forma, temos que $R(T) \supseteq R$ e, assim, $\text{folhas}(T) = W$. Contudo, como os caminhos em \mathcal{S} são disjuntos em vértices (já que os caminhos em \mathcal{P} são disjuntos em vértices), todos os vértices em $V(T) \setminus R$ possuem grau no máximo 2 em T . Logo, $R(T) \subseteq R$ e, assim, obtemos que $R(T) = R$. Adicionalmente, obtemos também que $L(T) = V(T) \setminus (W \cup R)$. Por fim, decorre do fato de que

$\sum_{P' \in \mathcal{P}} |E(P')| \leq \ell + 3k = \ell + 3|W|$ que $|L(T)| \leq \ell$. Portanto, I é uma instância SIM de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). \square

Corolário 3.18. SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R) é solucionável em tempo polinomial se $|R|$ é limitado por uma constante.

Demonstração. Seja $I = (G, W, R, \ell)$ uma instância de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). Para toda árvore geradora T_R de $G[R]$, construímos uma instância $f(I, T_R)$ do MIN-SUM *st*-DP, conforme definimos anteriormente, e verificamos em tempo polinomial, com base no Teorema 3.4, se $f(I, T_R)$ é uma instância SIM do MIN-SUM *st*-DP. Caso a resposta seja positiva para alguma árvore geradora T_R de $G[R]$, retornamos que I é uma instância SIM de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R); caso contrário (isto é, se para toda árvore geradora T_R de $G[R]$, $f(I, T_R)$ é uma instância NÃO do MIN-SUM *st*-DP), retornamos que I é uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). A corretude desse algoritmo segue do Lema 3.17. Note que, com base na fórmula de Cayley [4], podemos enumerar todas as possíveis árvores geradoras de $G[R]$ em tempo $\mathcal{O}(|R|^{|R|-2})$. Portanto, obtemos que o problema SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R) é solucionável em tempo polinomial se $|R|$ é limitado por uma constante. \square

Corolário 3.19. Para todo $r \geq 1$ constante, SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial.

Demonstração. Segue imediatamente do Corolário 3.18 e do fato de que existe uma redução de Turing de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(r) para SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). \square

Uma observação interessante quanto ao problema SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R) é a de que, particularmente para o caso em que $|R| = 2$, não há perda de generalidade ao se relaxar a exigência do conjunto R induzir um subgrafo conexo das árvores de conexão para a restrição na qual exige-se que apenas $G[R]$ seja conexo, no sentido de que uma instância I será uma instância SIM do problema original se, e somente se, I também for uma instância SIM dessa versão relaxada do problema. O lema a seguir formaliza essa observação.

Lema 3.20. Para $|R| = 2$, uma instância $I = (G, W, R, \ell)$ é uma instância SIM de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R) se, e somente se, $G[R]$ é conexo e I é uma instância SIM do S-TCP(R).

Demonstração. (\Rightarrow) Se I é uma instância SIM de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R), então claramente $G[R]$ é conexo e I é uma instância SIM do S-TCP(R).

(\Leftarrow) Suponha agora que $G[R]$ seja conexo e que G admita uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $\mathbf{R}(T) = R$. Seja P o caminho em T entre os dois roteadores de T , e seja e a aresta em G entre eles. Considere o grafo T' definido do seguinte modo: $V(T') = V(T) \setminus (V(P) \setminus R)$ e $E(T') = E(T) \cup \{e\} \setminus E(P)$. Claramente, T' é um árvore de conexão estrita de G para W tal que $|\mathbf{L}(T')| \leq \ell$, $\mathbf{R}(T') = R$ e $T'[R]$ é conexo. Portanto, I é uma instância SIM de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). \square

No entanto, note que o resultado estabelecido pelo lema anterior não é generalizável para $|R| > 2$, o que é exemplificado na Figura 3.8. Apesar do grafo G ilustrado na figura admitir uma árvore de conexão estrita para W (vértices destacados em azul) com conjunto de roteadores R (vértices com preenchimento preto) e que utilize apenas um elo, toda árvore de conexão estrita T de G para W , tal que $T[R]$ é conexo, possui ao menos dois elos. Logo, $G[R]$ é conexo e G admite uma árvore de conexão estrita para W tal que $|\mathbf{L}(T)| = \ell = 1$ e $\mathbf{R}(T) = R$, porém $(G, W, R, \ell = 1)$ é uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). Figura 3.9 consiste num outro exemplo, no qual $I = (G, W, R, \ell = 1)$ é uma instância SIM do S-TCP(R), porém, mesmo sendo $G[R]$ conexo, I é uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R). Repare ainda que, neste último exemplo, I é uma instância NÃO de SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(R) mesmo quando tomamos como conjunto de roteadores qualquer subconjunto próprio R' de R . Logo, o exemplo anterior não consiste num caso particular, em que I é uma instância NÃO pois requer-se utilizar uma quantidade de roteadores além do necessário.

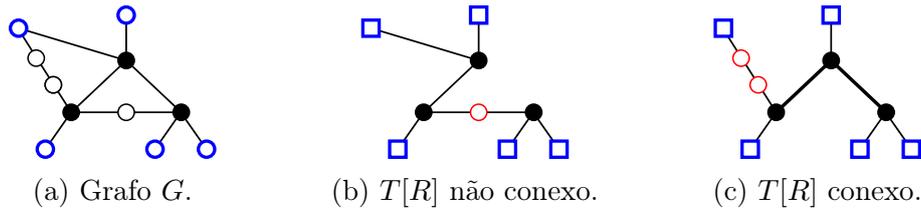


Figura 3.8: Árvores de conexão estrita, dado que $G[R]$ é conexo.

Dessa forma, nos questionamos sobre o quanto possuir a informação prévia de que $G[R]$ é conexo interfere na complexidade do S-TCP(R). Para $|R| = 2$, sabemos que o problema admite algoritmo de tempo polinomial, contudo, para $|R| \geq 3$, sabemos solucioná-lo em tempo polinomial somente quando requer-se que R induza um subgrafo conexo das próprias árvores de conexão estrita. Deixamos, então, este questionamento como um problema em aberto, conforme descrevemos a seguir.

Problema em aberto 3.21. Para $|R| \geq 3$, o S-TCP(R) é solucionável em tempo polinomial se $G[R]$ é conexo?

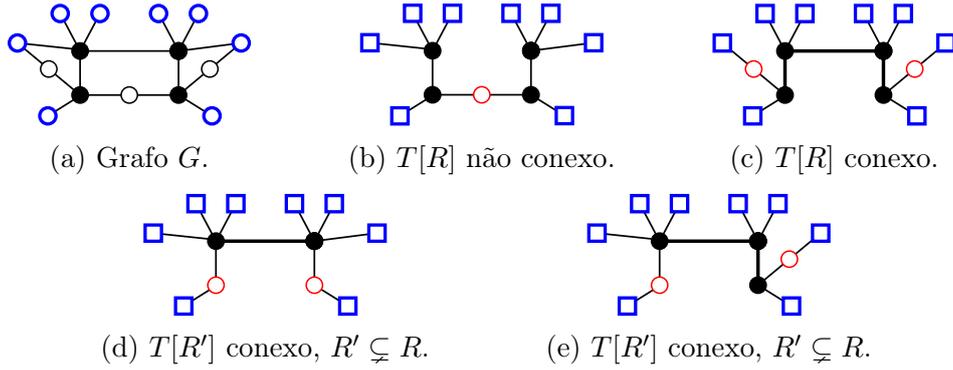


Figura 3.9: Árvore de conexão estrita, dado que $G[R']$ é conexo, onde $R' \subseteq R$.

3.2.2 Conjunto de terminais particionado

Naturalmente em toda árvore de conexão estrita T para W , com conjunto de roteadores $R(T) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$, existe uma partição do conjunto de terminais W em $r' \leq r$ partes: $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{r'}$ tal que todos os terminais $w \in W_i$ são conectados a T através do roteador ρ_i , para $1 \leq i \leq r'$. Figura 3.10 ilustra essa partição do conjunto de terminais.

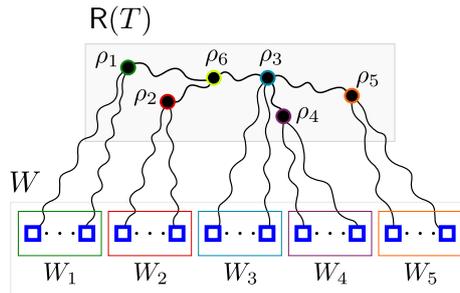


Figura 3.10: Partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{r'}$.

Dessa forma, é coerente questionar como o S-TCP(r) se comporta, no que concerne à sua complexidade, quando é fornecido em sua entrada, além do conjunto de terminais W , uma partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{r'}$ e é exigido que todos os vértices pertencentes a uma mesma parte W_i sejam conectados à árvore de conexão por um mesmo roteador, para $1 \leq i \leq r' \leq r$. Descrevemos a seguir uma definição formal para o referido problema, contudo novamente enunciamos o seu caso mais geral em que r não necessariamente é limitado por uma constante.

CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP

Entrada: Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$, uma partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{r'}$, um inteiro não negativo ℓ e um inteiro positivo r tal que $r' \leq r$.

Questão: O grafo G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|L(T)| \leq \ell$, $|R(T)| \leq r$ e todo terminal pertencente a W_i é conectado a T por um mesmo roteador $\rho_i \in R(T)$, para $1 \leq i \leq r'$?

Observe que, o problema CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP apenas faz sentido quando $r \geq 1$ e que, para $r = 1$, o mesmo coincide precisamente com o S-TCP($r = 1$), o qual provamos pertencer à classe de problemas solucionáveis em tempo polinomial. Por outro lado, diferenciando-se do problema SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(r), analisado na subseção anterior, provamos que, para todo valor constante $r \geq 2$, CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) é NP-completo. Para tanto, realizamos uma redução polinomial a partir do problema 3-SAT, a qual é descrita no teorema a seguir.

Teorema 3.22. CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) é NP-completo, para todo $r \geq 2$.

Demonstração. De modo análogo, ao TCP(ℓ), é fácil ver que CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) pertence à classe de problemas NP. Assim, é suficiente mostrarmos que 3-SAT se reduz polinomialmente para CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r).

Seja $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do 3-SAT, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ é um conjunto de cláusulas. Construimos a partir de I uma instância $f(I) = (G, W, W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r, \ell)$ de CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) conforme segue:

- primeiramente, criamos r vértices $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$;
- para cada vértice ρ_i , criamos os vértices w_1^i e w_2^i e adicionamos as arestas $w_1^i \rho_i$ e $w_2^i \rho_i$, onde $1 \leq i \leq r$;
- conectamos os vértices ρ_i uns aos outros em série, ou seja, adicionamos as arestas $\rho_i \rho_{i+1}$, para $1 \leq i \leq r - 1$;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos o *gadget* G_{x_i} , conforme ilustrado na Figura 3.11, tal que

$$\begin{aligned} - V(G_{x_i}) &= \{v_{s_i}, v_{t_i}\} \cup \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq p_i\} \cup \{\bar{v}_j^i \mid 1 \leq j \leq q_i\} \\ - E(G_{x_i}) &= \{v_j^i v_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq p_i - 1\} \cup \{\bar{v}_j^i \bar{v}_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq q_i - 1\} \\ &\quad \cup \{v_s^i v_1^i, v_s^i \bar{v}_1^i, v_t^i v_{p_i}^i, v_t^i \bar{v}_{q_i}^i\}, \end{aligned}$$

onde p_i e q_i denotam, respectivamente, o número de ocorrências do literal positivo e o número de ocorrências do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} ;

- conectamos os *gadgets* G_{x_i} uns aos outros em série, ou seja, para $1 \leq i \leq n - 1$, adicionamos as arestas $v_t^i v_s^{i+1}$, e adicionamos também a aresta $\rho_2 v_{s_1}$;
- criamos o vértice w^* e adicionamos a aresta $v_t^n w^*$;

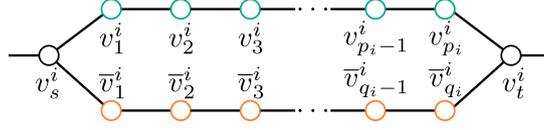


Figura 3.11: *Gadget* G_{x_i} referente à variável $x_i \in X$.

- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, criamos dois vértices u_{C_i} e w_{C_i} e adicionamos a aresta $\rho_1 u_{C_i}$;
- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, se a j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} é dada em C_i , para $1 \leq j \leq p_i$, então adicionamos as arestas $u_{C_i} v_j^i$ e $w_{C_i} v_j^i$;
- por outro lado, se a j -ésima ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} é dada em C_i , para $1 \leq j \leq q_i$, então adicionamos as arestas $u_{C_i} \bar{v}_j^i$ e $w_{C_i} \bar{v}_j^i$;
- por fim, definimos $W = \{w_1^i, w_2^i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{w^*\} \cup \{w_{C_i} \mid C_i \in \mathcal{C}\}$, onde $W_1 = \{w_1^1, w_2^1\} \cup \{w_{C_i} \mid C_i \in \mathcal{C}\}$, $W_2 = \{w_1^2, w_2^2, w_3^2\}$, $W_i = \{w_1^i, w_2^i\}$ (para $3 \leq i \leq r' = r$) e $\ell = |V(G) \setminus W| - r$;

Figura 3.12 exemplifica o grafo G , o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul) e a partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT, que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$.

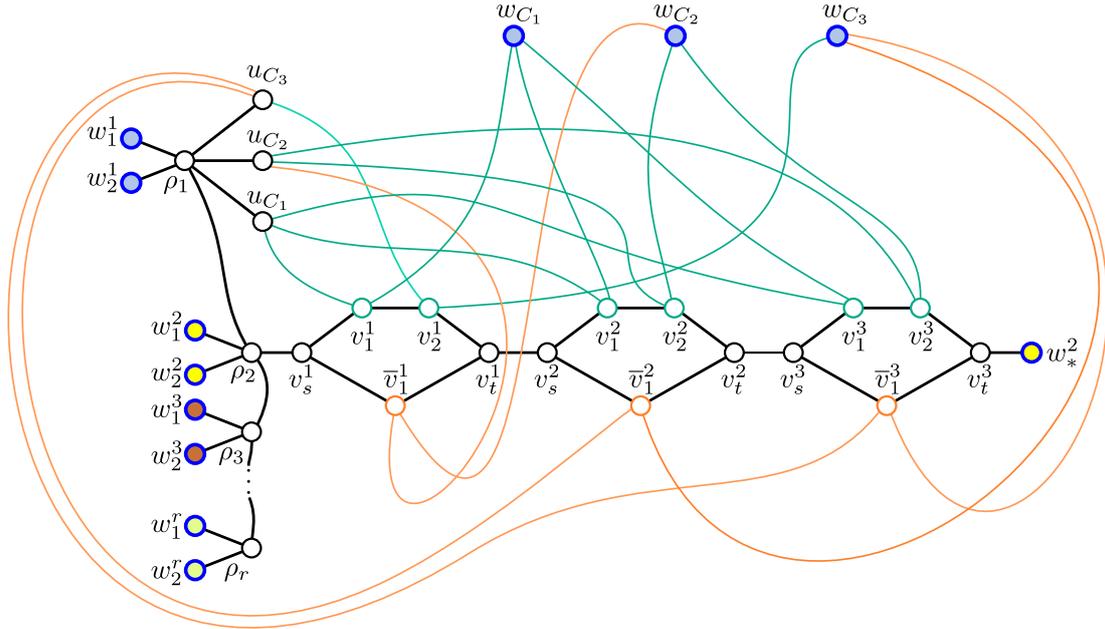


Figura 3.12: Grafo G , conjunto de terminais W e partição $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.

Mostramos agora que I é uma instância SIM do 3-SAT se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM de CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r).

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfazível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ para as variáveis em X que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Com base em α , construímos uma árvore de conexão estrita T de G para W conforme segue:

- para $1 \leq i \leq r$, adicionamos os vértices ρ_i a T , juntamente com os vértices w_1^i, w_2^i e as arestas $\rho_i w_1^i, \rho_i w_2^i$;
- ademais, para $1 \leq i \leq r - 1$, adicionamos as arestas $\rho_i \rho_{i+1}$ a T ;
- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, adicionamos os vértices w_{C_i} e u_{C_i} a T , juntamente com as arestas $\rho_1 u_{C_i}$;
- para cada variável $x_i \in X$, se $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$, então adicionamos o subgrafo correspondente ao caminho $\bar{P}_{x_i} = \langle v_s^i, \bar{v}_1^i, \bar{v}_2^i, \dots, \bar{v}_{q_i}^i, v_t^i \rangle$ a T , o qual é ilustrado na Figura 3.13a;
- por outro lado, se $\alpha(x_i) = \textit{falso}$, então adicionamos o subgrafo correspondente ao caminho $P_{x_i} = \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{p_i}^i, v_t^i \rangle$ a T , o qual é ilustrado na Figura 3.13b;

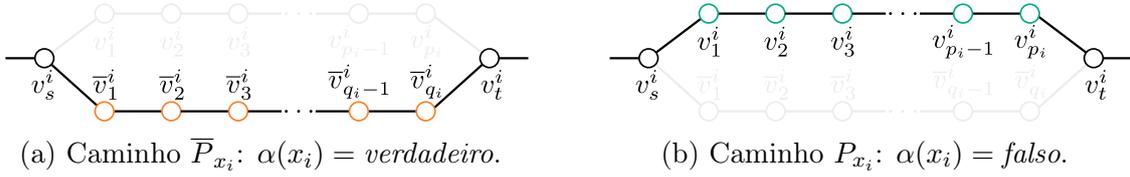


Figura 3.13: Caminhos referentes à atribuição de valor verdade $\alpha(x_i)$.

- para $1 \leq i \leq n - 1$, adicionamos as arestas $v_t^i v_s^{i+1}$ a T ;
- adicionamos também o vértice w_*^2 e as arestas $\rho_2 v_s^1$ e $v_t^n w_*^2$ a T ;

Como por hipótese α é uma atribuição de valor verdade que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$ possui ao menos um literal verdadeiro. Seja então $S = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ um conjunto formado ao se tomar arbitrariamente, para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, (exatamente) um literal verdadeiro y_i pertencente a C_i .

- para cada $y_i \in S$, se y_i corresponde à j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$, então adicionamos as arestas $u_{C_i} v_j^i$ e $v_j^i w_{C_i}$ a T ;
- por outro lado, se $y_i \in S$ corresponde à j -ésima ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$, então adicionamos as arestas $u_{C_i} \bar{v}_j^i$ e $\bar{v}_j^i w_{C_i}$ a T ;

Figura 3.14 exemplifica uma árvore de conexão estrita T para o conjunto de terminais $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$ concernente à instância $f(I)$ da Figura 3.12, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \text{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \text{verdadeiro}$ e $\alpha(x_3) = \text{falso}$. Neste exemplo, $R(T) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$ e os terminais em W_i são todos conectados a T através de ρ_i , para $1 \leq i \leq r$. Além disso, formamos o conjunto $S = \{y_1, y_2, y_3\}$, de literais verdadeiros das cláusulas em \mathcal{C} , tomando os literais $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ e $y_3 = \bar{x}_3$.

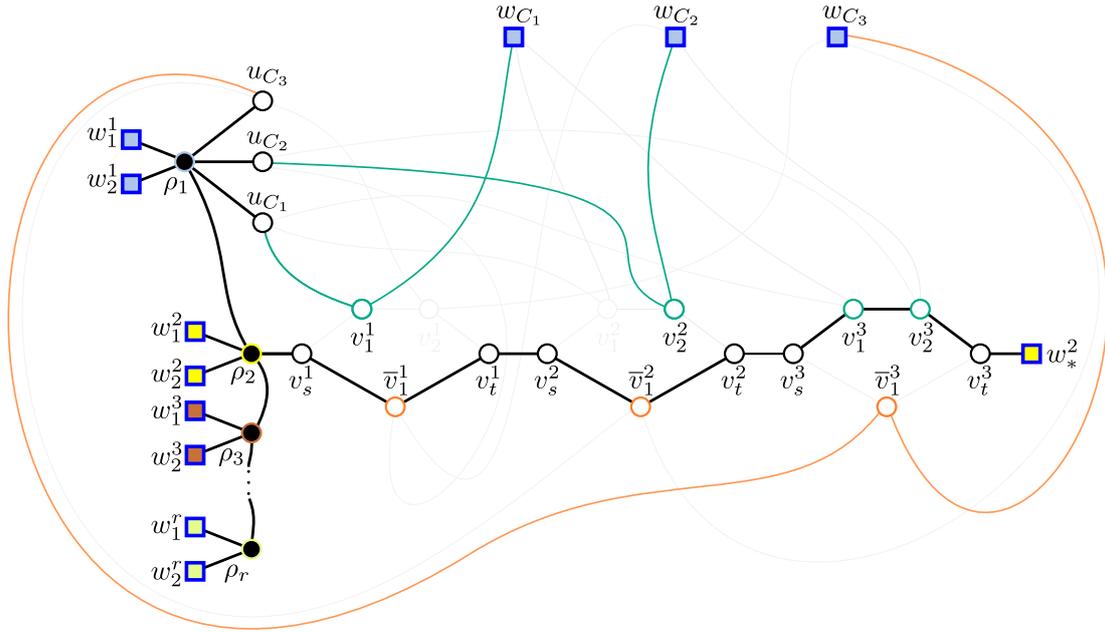


Figura 3.14: Árvore de conexão estrita de G para $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$, referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

Por construção, temos que T é uma árvore de conexão estrita de G para W . Note ainda que, para $1 \leq i \leq n$, os vértices ρ_i são todos roteadores de T , visto que estes são adjacentes aos terminais w_1^i e w_2^i e são interconectados pelo caminho $\langle \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r \rangle$. Logo, como $r \geq 2$, cada vértice ρ_i possui grau maior ou igual a três em T . Além disso, é fácil verificar que todos os vértices em $V(T) \setminus (W \cup \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\})$ são elos de T . Com efeito, é evidente que, para $C_i \in \mathcal{C}$, todos os vértices u_{C_i} são elos, visto que estes são adjacentes a somente dois vértices em T : ao vértice ρ_1 e a um vértice do *gadget* G_{x_i} , para algum $x_i \in X$. Ademais, os vértices em $V(G_{x_i}) \cap V(T)$ são também elos, pois (por construção) T contém ou o caminho P_{x_i} ou o caminho \bar{P}_{x_i} , e se T contém o caminho P_{x_i} , então sabemos que $\alpha(x_i) = \text{falso}$ e, assim, os vértices u_{C_i} e w_{C_i} não são adjacentes em T a qualquer vértice pertencente a $V(P_{x_i})$; de modo análogo, se T contém o caminho \bar{P}_{x_i} , então sabemos que $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$ e, assim, os vértices u_{C_i} e w_{C_i} não são adjacentes em T a qualquer vértice pertencente a $V(\bar{P}_{x_i})$. Dessa forma, temos que $R(T) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$ e, por conseguinte, temos também que $|L(T)| \leq \ell = |V(G) \setminus W| - r$. Por fim, note que todo terminal pertencente a uma

mesma parte W_i é conectado a T através do roteador $\rho_i \in R(T)$. Portanto, $f(I)$ é de fato uma instância SIM de CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r).

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM de CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r). Logo, G admite uma árvore de conexão estrita para $W = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_r$ tal que $|L(T)| \leq \ell = |V(G) \setminus W| - r$, $|R(T)| \leq r$ e todos os vértices pertencentes a uma mesma parte W_i são conectados a T através de um mesmo roteador. Como, para todo i com $1 \leq i \leq r$, os terminais w_1^i e w_2^i são adjacentes somente ao vértice ρ_i , inclusive no grafo G , temos que o conjunto de roteadores de T é dado por $R(T) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\}$. Ademais, note que os terminais em $W_C = \{w_{C_l} \mid C_l \in \mathcal{C}\} \subset W$ são todos conectados a T através do roteador ρ_1 , tendo em vista que w_1^1 e w_2^1 são necessariamente conectados a T através de ρ_1 e que pertencem a mesma parte de W na qual W_C está contido, a saber a parte W_1 . Logo, o caminho em T entre ρ_1 e o terminal w_{C_l} necessariamente contém os vértices u_{C_l} , para todo $C_l \in \mathcal{C}$. Analogamente, temos que o terminal $w_*^2 \in W_2$ é conectado a T através do roteador ρ_2 , e assim o caminho em T entre ρ_2 e w_*^2 necessariamente contém todos os vértices v_s^i e v_t^i , para $1 \leq i \leq n$, pois caso contrário algum terminal em W_C não seria conectado a T através de ρ_1 ou T não seria acíclico, o que seria um absurdo. Conseqüentemente, para todo $x_i \in X$, o caminho em T entre ρ_2 e w_*^2 contém como subcaminho ou o caminho $\bar{P}_{x_i} = \langle v_s^i, \bar{v}_1^i, \bar{v}_2^i, \dots, \bar{v}_{q_i}^i, v_t^i \rangle$ (ilustrado na Figura 3.13a) ou o caminho $P_{x_i} = \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{p_i}^i, v_t^i \rangle$ (ilustrado na Figura 3.13b). Dessa forma, definimos uma atribuição de valor verdade $\alpha: X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis $x_i \in X$ conforme segue:

- se T contém \bar{P}_{x_i} , então definimos $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$;
- caso contrário, definimos $\alpha(x_i) = \text{falso}$.

Como $W_C \subset W \subset V(T)$, cada terminal $w_{C_l} \in W_C$ é adjacente a (exatamente) um vértice em T , sendo este ou v_j^i , para algum j tal que $1 \leq j \leq p_i$, ou \bar{v}_k^i , para algum k tal que $1 \leq k \leq q_i$. Se $w_{C_l} v_j^i \in E(T)$, então T contém o caminho \bar{P}_{x_i} (em vez de P_{x_i}), pois caso contrário o vértice v_j^i possuiria grau maior ou igual a 3 em T , tendo em vista que, neste caso, v_j^i pertence ao caminho entre ρ_1 e w_{C_l} . Por conseguinte, obtemos que a cláusula $C_l \in \mathcal{C}$ é satisfeita pela atribuição α , já que (por construção) contém uma ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$, e definimos $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$. Analogamente, se $w_{C_l} \bar{v}_k^i \in E(T)$, então T contém o caminho P_{x_i} (em vez de \bar{P}_{x_i}), e assim a cláusula $C_l \in \mathcal{C}$ é satisfeita pela atribuição α , já que (por construção) contém uma ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$, e definimos $\alpha(x_i) = \text{falso}$. Portanto, α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , e assim obtemos que I é de fato uma instância SIM do 3-SAT. \square

Note que a NP-completude do problema CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) não depende da restrição referente à limitação do número máximo

de elos. De fato, na redução descrita no Teorema 3.22, definimos o limite do número máximo de elos tão grande quanto se possa, a saber: $\ell = |V(G) \setminus W| - r$. Portanto, temos que CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) é NP-completo mesmo se considerarmos a sua versão relaxada na qual não existe um limite para o número de elos nas árvores de conexão estrita.

3.2.3 Conexão entre roteadores semiestruturada

Motivados pela estratégia adotada no Algoritmo 3.2 de fixar uma topologia de conexão entre os roteadores, analisamos neste momento a complexidade de uma outra variante do S-TCP(r), a qual denominamos SEMIESTRUTURADO S-TCP. Nesta variante, é fornecido adicionalmente, na entrada do problema, um conjunto R de candidatos a roteador — porém, permitindo-se que outros vértices que não pertencem a R sejam também roteadores — e uma *topologia de conexão* para os vértices em R (ou seja, um árvore geradora do grafo completo composto pelos vértices em R), a qual deve ser adotada pelas árvores de conexão estrita que certificam o SIM das instâncias SIM do problema. Figura 3.15 exemplifica uma topologia de conexão T_R para os vértices de um dado conjunto R de candidatos a roteador, que neste caso corresponde ao conjunto $R = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$, como também exemplifica uma árvore de conexão estrita T que adota T_R . Note que, o caminho em T entre dois roteadores $\rho_i, \rho_j \in V(T_R)$ tais que $\rho_i \rho_j \in E(T_R)$ possivelmente contém elos, contudo não contém (e, na verdade, não pode conter) qualquer outro roteador.

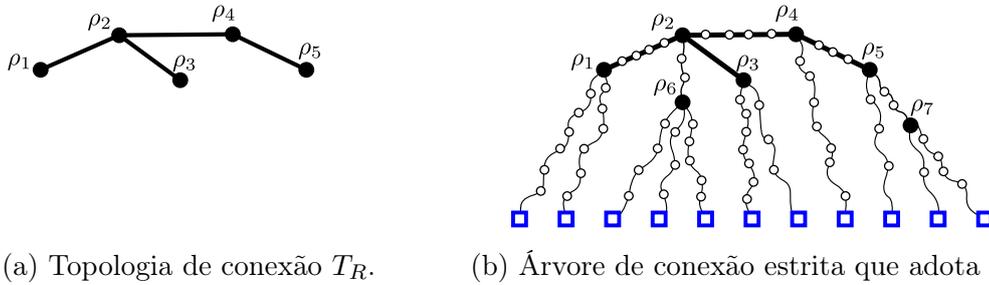


Figura 3.15: Topologia de conexão T_R e árvore de conexão estrita que adota T_R .

Descrevemos a seguir uma definição formal para SEMIESTRUTURADO S-TCP.

SEMIESTRUTURADO S-TCP

Entrada: Um grafo conexo G , um subconjunto não vazio $W \subseteq V(G)$, um subconjunto $R \subseteq V(G) \setminus W$, uma topologia de conexão T_R para os vértices em R , um inteiro não negativo ℓ e um inteiro $r \geq |R|$.

Questão: O grafo G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|L(T)| \leq \ell$, $|R(T)| \leq r$, $R(T) \supseteq R$ e $\rho_i \rho_j \in E(T_R)$ implica no caminho em T entre ρ_i e ρ_j não conter qualquer outro roteador?

Observe que se $R = \emptyset$, então SEMIESTRUTURADO S-TCP equivale ao problema S-TCP original. Dessa forma, com base Teoremas 2.1 e 2.4, sabemos que se $R = \emptyset$ e r é arbitrário, então o problema é NP-completo. Note que, temos ainda como consequência do Teorema 2.1 que SEMIESTRUTURADO S-TCP permanece NP-completo quando $R \neq \emptyset$, embora neste caso o problema não equivalha mais ao S-TCP. O teorema a seguir formaliza esta última observação.

Teorema 3.23. SEMIESTRUTURADO S-TCP(ℓ) é NP-completo mesmo se $R \neq \emptyset$.

Demonstração. Este resultado segue da prova de NP-completude proposta por Dourado et al. para o TCP(ℓ) [10], que é descrita no Teorema 2.1. Para adaptá-la para SEMIESTRUTURADO S-TCP(ℓ), basta definirmos $R = \{v_I\} \cup \{v_{x_i} \mid x_i \in X\}$ e a topologia de conexão T_R como sendo: $V(T_R) = R$ e $E(T_R) = \{v_I v_{x_i} \mid x_i \in X\}$. Observe que, na redução polinomial da prova do Teorema 2.1, todas as árvores de conexão T , referentes às instâncias SIM do 3-SAT, contém os vértices pertencentes a R como roteadores e adotam a topologia de conexão T_R . Além disso, conforme já comentamos anteriormente, todas estas árvores de conexão T são estritas. Portanto, obtemos que SEMIESTRUTURADO S-TCP(ℓ) é NP-completo, mesmo se $R \neq \emptyset$. \square

Por outro lado, observe que se $|R| \in \{1, 2\}$ e $r = |R|$, então SEMIESTRUTURADO S-TCP equivale ao S-TCP(R). Assim, se $|R| = r = 1$, então o problema é solucionável em tempo polinomial (vide Corolário 3.6); e se $|R| = r = 2$, temos o nosso problema central em aberto, o S-TCP($r = 2$). Provamos agora que SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) é NP-completo para todo $|R| \geq 2$ e $r \geq 3$, tais que $r \geq |R|$. Para tanto, propomos uma redução polinomial a partir do 3-SAT muito similar à que realizamos para provar que CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) é NP-completo. A grosso modo, basta substituírmos o terminal w_*^2 pelos vértices ρ_* , w_1^* e w_2^* e pelas arestas $\rho_* w_1^*$, $\rho_* w_2^*$ e $v_t^n \rho_*$, conforme ilustramos na Figura 3.16. Não é difícil verificar que através desta adaptação (descrita sem grande rigor) pode-se provar que 3-SAT se reduz polinomialmente para SEMIESTRUTURADO S-TCP(r). De toda forma, descrevemos no teorema a seguir essa redução de forma mais detalhada.

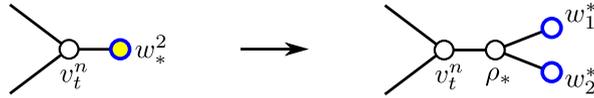


Figura 3.16: Adaptação da instância $f(I)$ para obtenção de uma instância equivalente do problema SEMIESTRUTURADO S-TCP(r).

Teorema 3.24. SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) é NP-completo, para todo $|R| \geq 2$ e $r \geq 3$, tais que $r \geq |R|$.

Demonstração. De modo análogo ao TCP(ℓ) e aos problemas de conexão de terminais anteriores, é fácil ver que SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) pertence à classe de

problemas NP. Assim, é suficiente mostrarmos que 3-SAT se reduz polinomialmente para SEMIESTRUTURADO S-TCP(r).

Seja $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do 3-SAT, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ é um conjunto de cláusulas. Construimos a partir de I uma instância $f(I) = (G, W, R, T_R, \ell)$ de SEMIESTRUTURADO S-TCP(r), com $r' = |R| \geq 2$, conforme segue:

- primeiramente, criamos $r - 1$ vértices $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r-1}$ e criamos um vértice ρ_* ;
- para cada vértice ρ_i , criamos os vértices w_1^i e w_2^i e adicionamos as arestas $w_1^i \rho_i$ e $w_2^i \rho_i$, onde $1 \leq i \leq r - 1$; analogamente, criamos os vértices w_1^* e w_2^* e adicionamos as arestas $w_1^i \rho_*$ e $w_2^i \rho_*$;
- conectamos os vértices ρ_i uns aos outros em série, ou seja, adicionamos as arestas $\rho_i \rho_{i+1}$, para $1 \leq i \leq r - 2$;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos o *gadget* G_{x_i} (igual ao ilustrado na Figura 3.11) tal que

$$\begin{aligned} - V(G_{x_i}) &= \{v_{s_i}, v_{t_i}\} \cup \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq p_i\} \cup \{\bar{v}_j^i \mid 1 \leq j \leq q_i\} \\ - E(G_{x_i}) &= \{v_j^i v_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq p_i - 1\} \cup \{\bar{v}_j^i \bar{v}_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq q_i - 1\} \\ &\quad \cup \{v_s^i v_1^i, v_s^i \bar{v}_1^i, v_t^i v_{p_i}^i, v_t^i \bar{v}_{q_i}^i\}, \end{aligned}$$

onde p_i e q_i denotam, respectivamente, o número de ocorrências do literal positivo e o número de ocorrências do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} ;

- conectamos os *gadgets* G_{x_i} uns aos outros em série, ou seja, para $1 \leq i \leq n - 1$, adicionamos as arestas $v_t^i v_s^{i+1}$, e adicionamos também as arestas $\rho_2 v_{s_1}$ e $v_t^n \rho_*$;
- para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, criamos dois vértices u_{C_l} e w_{C_l} e adicionamos a aresta $\rho_1 u_{C_l}$;
- para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, se a j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} é dada em C_l , para $1 \leq j \leq p_i$, então adicionamos as arestas $u_{C_l} v_j^i$ e $w_{C_l} v_j^i$;
- por outro lado, se a j -ésima ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} é dada em C_l , para $1 \leq j \leq q_i$, então adicionamos as arestas $u_{C_l} \bar{v}_j^i$ e $w_{C_l} \bar{v}_j^i$;
- definimos $W = \{w_1^i, w_2^i \mid 1 \leq i \leq r - 1\} \cup \{w_1^*, w_2^*\} \cup \{w_{C_l} \mid C_l \in \mathcal{C}\}$;
- se $r' = 2$, então definimos $R = \{\rho_2, \rho^*\}$; porém se $r' \geq 3$, então definimos $R = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r'-1}, \rho^*\}$;

- se $r' = 2$, então definimos a topologia de conexão T_R como sendo: $V(T_R) = \{\rho_2, \rho_*\}$ e $E(T_R) = \{\rho_2\rho_*\}$ (veja Figura 3.17a); porém se $r' \geq 3$, então definimos $V(T_R) = R$ e $E(T_R) = \{\rho_i\rho_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r' - 1\} \cup \{\rho_2\rho_*\}$ (veja Figura 3.17b);

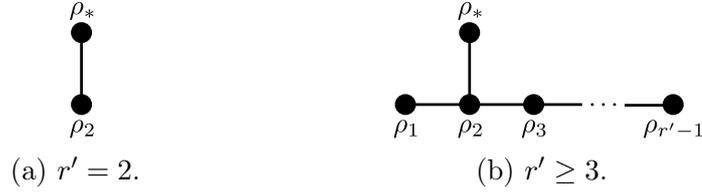


Figura 3.17: Topologia de conexão T_R .

- por fim, definimos $\ell = |V(G) \setminus W| - r$;

Figura 3.18 exemplifica o grafo G , o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul) e o subconjunto de roteadores $R = \{\rho_2, \rho_*\}$ (neste exemplo consideramos $r' = 2$), obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT, que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$.

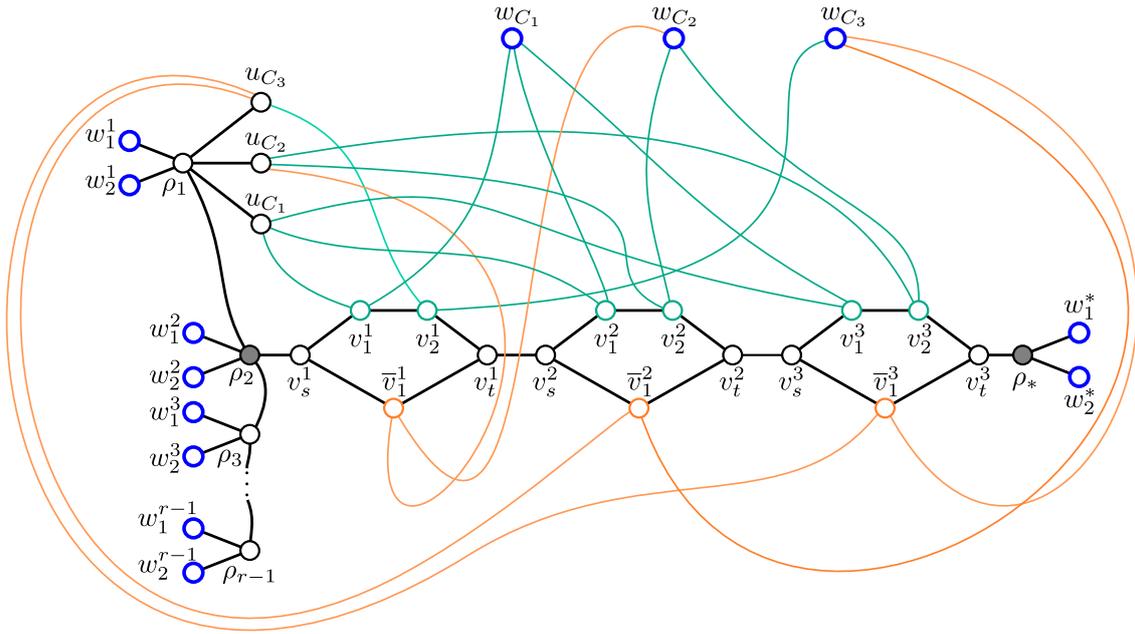


Figura 3.18: Grafo G , conjunto de terminais W e conjunto R , obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.

Mostramos agora que I é uma instância SIM do 3-SAT se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM de SEMIESTRUTURADO S-TCP(r). Entretanto, não nos atamos aos pormenores já descritos na demonstração do Teorema 3.22.

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfazível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis em X que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Com base em α , construímos uma árvore de conexão estrita T de G para W conforme segue:

- para $1 \leq i \leq r-1$, adicionamos os vértices ρ_i a T , juntamente com os vértices w_1^i, w_2^i e as arestas $\rho_i w_1^i, \rho_i w_2^i$;
- ademais, para $1 \leq i \leq r-2$, adicionamos as arestas $\rho_i \rho_{i+1}$ a T ;
- adicionamos o vértice ρ_* e as arestas $\rho_* w_*^1$ e $\rho_* w_*^2$ a T ;
- para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, adicionamos os vértices w_{C_l} e u_{C_l} a T , juntamente com as arestas $\rho_l u_{C_l}$;
- para cada variável $x_i \in X$, se $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$, então adicionamos o subgrafo correspondente ao caminho $\bar{P}_{x_i} = \langle v_s^i, \bar{v}_1^i, \bar{v}_2^i, \dots, \bar{v}_{q_i}^i, v_t^i \rangle$ a T (igual ao ilustrado na Figura 3.13a);
- por outro lado, se $\alpha(x_i) = \textit{falso}$, então adicionamos o subgrafo correspondente ao caminho $P_{x_i} = \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{p_i}^i, v_t^i \rangle$ a T (igual ao ilustrado na Figura 3.13b);
- para $1 \leq i \leq n-1$, adicionamos as arestas $v_t^i v_s^{i+1}$ a T ;
- adicionamos também as arestas $\rho_2 v_s^1$ e $v_t^n \rho_*$ a T ;

Como por hipótese α é uma atribuição de valor verdade que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$ possui ao menos um literal verdadeiro. Seja então $S = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ um conjunto formado ao se tomar arbitrariamente, para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, (exatamente) um literal verdadeiro y_l pertencente a C_l .

- para cada $y_l \in S$, se y_l corresponde à j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$, então adicionamos as arestas $u_{C_l} v_j^i$ e $v_j^i w_{C_l}$ a T ;
- por outro lado, se $y_l \in S$ corresponde à j -ésima ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$, então adicionamos as arestas $u_{C_l} \bar{v}_j^i$ e $\bar{v}_j^i w_{C_l}$ a T ;

Figura 3.19 exemplifica uma árvore de conexão estrita T para W concernente à instância $f(I)$ da Figura 3.18, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \textit{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \textit{verdadeiro}$ e $\alpha(x_3) = \textit{falso}$. Neste exemplo, formamos o conjunto $S = \{y_1, y_2, y_3\}$, de literais verdadeiros das cláusulas em \mathcal{C} , tomando os literais $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ e $y_3 = \bar{x}_3$.

Por motivos análogos aos descritos no Teorema 3.22, obtemos que T é uma árvore de conexão estrita de G para W tal que $R(T) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r-1}, \rho_*\}$ e, por conseguinte, $|L(T)| \leq |V(G) \setminus W| - r$. Ademais, segue da própria definição do subconjunto R que $R(T) \supseteq \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r-1}, \rho_*\} \supseteq R$. Por fim, temos pela construção do grafo T que, para todo i com $1 \leq i \leq r-2$, se $P_{\rho_i, \rho_{i+1}}$ é o caminho entre ρ_i e ρ_{i+1} em T , então $V(P_{\rho_i, \rho_{i+1}}) \cap R(T) \setminus \{\rho_i, \rho_{i+1}\} = \emptyset$. De igual modo, temos que se

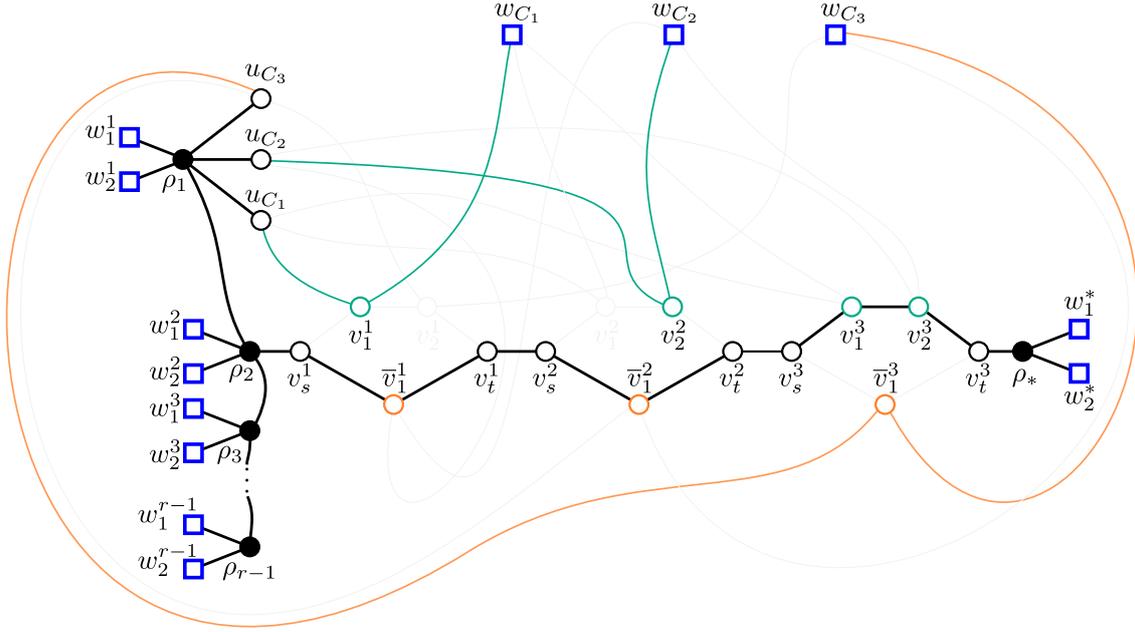


Figura 3.19: Árvore de conexão estrita de G para W com topologia de conexão T_R , referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

P_{ρ_2, ρ_*} é o caminho entre ρ_2 e ρ_* em T , então $V(P_{\rho_2, \rho_*}) \cap R(T) \setminus \{\rho_2, \rho_*\} = \emptyset$. Logo, a topologia de conexão T_R para os vértices em R é adotada por T , independentemente de r' ser definido como igual a 2 ou como maior ou igual a 3. Portanto, $f(I)$ é de fato uma instância SIM de SEMIESTRUTURADO S-TCP(r).

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM de CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r). Logo, G admite uma árvore de conexão estrita para W tal que $|L(T)| \leq \ell = |V(G) \setminus W| - r$, $|R(T)| \leq r$, $R(T) \supseteq R$ e que adote a topologia de conexão T_R . Dessa forma, temos que, se P_{ρ_2, ρ_*} é o caminho entre ρ_2 e ρ_* em T , então $V(P_{\rho_2, \rho_*}) \cap R(T) \setminus \{\rho_2, \rho_*\} = \emptyset$. Como, para todo i com $1 \leq i \leq r$, os terminais w_1^i e w_2^i são adjacentes somente ao vértice ρ_i , inclusive no grafo G , assim como os terminais w_1^* e w_2^* são adjacentes somente ao vértice ρ_* , temos que o conjunto de roteadores de T necessariamente é dado por $R(T) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{r-1}, \rho_*\}$. Consequentemente, o caminho entre ρ_2 e ρ_* em T contém os vértices v_s^1 e v_t^r , visto que estes são os únicos vizinhos não terminais de ρ_2 e de ρ_* que não são roteadores. Dessa forma, temos que os terminais $w_l \in W$, para $C_l \in \mathcal{C}$, são todos conectados a T através do roteador ρ_1 , pois as outras (únicas duas) possibilidades seriam que estes terminais fossem conectados a T através de ρ_2 ou de ρ_* , no entanto isso implicaria em algum dos vértices dos *gadgets* G_{x_i} , para $x_i \in X$, ser um roteador, o que seria um absurdo. Portanto, de forma análoga à demonstração do Teorema 3.22 (no que concerne ao caminho entre ρ_2 e o terminal w_2^*), temos que, para todo $x_i \in X$, o caminho em T entre ρ_2 e ρ_* contém necessariamente como subcaminho ou o caminho $\bar{P}_{x_i} = \langle v_s^i, \bar{v}_1^i, \bar{v}_2^i, \dots, \bar{v}_{q_i}^i, v_t^i \rangle$ (igual ao ilustrado na Figura 3.13a) ou o caminho $P_{x_i} = \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{p_i}^i, v_t^i \rangle$ (igual ao ilustrado na Figura 3.13b). Assim, definimos

uma atribuição de valor verdade $\alpha: X \rightarrow \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ para as variáveis $x_i \in X$ seguindo a mesma regra que descrevemos para a atribuição α do Teorema 3.22, a saber:

- se T contém \overline{P}_{x_i} , então definimos $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$;
- caso contrário, definimos $\alpha(x_i) = \textit{falso}$.

Assim, através de uma argumentação idêntica à realizada no referido teorema, obtemos que α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , e portanto I é de fato uma instância SIM do 3-SAT. \square

De igual modo para CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r), note que a prova de NP-completude que propomos para SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) não depende da restrição referente à limitação do número máximo de elos. Portanto, temos que SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) é NP-completo, para todo $|R| \geq 2$ e $r \geq 3$, tais que $r \geq |R|$, mesmo se considerarmos a sua versão relaxada na qual não existe um limite para o número de elos nas árvores de conexão estrita.

Por outro lado, desconhecemos a complexidade do problema SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) quando $|R| \leq 2$ e $r = 2$ ou, ainda, quando $|R| \leq 1$ e $r \geq 2$. Note que estes casos se assemelham muito ao nosso problema central em aberto, o S-TCP($r \geq 2$).

Problema em aberto 3.25. *Para $|R| \leq 2$ e $r = 2$, SEMIESTRUTURADO S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial? E se $|R| \leq 1$ e $r \geq 2$?*

3.3 Complexidade parametrizada

Em [11], Dourado et al. estudaram a complexidade do S-TCP quando considera-se Δ , ℓ e r como parâmetros fixos, onde Δ corresponde ao grau máximo do grafo de entrada G . Mais especificamente, eles provaram que, com relação a esses parâmetros, o S-TCP pertence à classe de problemas tratáveis por parâmetro fixo, isto é, a classe FPT. Para tanto, embasados na técnica denominada *árvore de busca de altura limitada*, propuseram um algoritmo com complexidade de tempo $\mathcal{O}((2^{\Delta-1})^{r+\ell+1}m)$, onde m é o número de arestas de G .

Por outro lado, e em contraste ao resultado de Dourado et al. [11], provamos nesta seção que se Δ não é tido como parâmetro fixo, então o S-TCP, quando parametrizado apenas por ℓ e r , pertence à classe de problemas W[2]-difíceis, o que implica em sua não pertinência na classe de problemas FPT, a menos que a conjectura de que $\text{FPT} \neq \text{W}[2]$ não se verifique [13]. Na verdade, de maneira ainda mais restritiva, provamos que o S-TCP(ℓ) é W[2]-difícil quando parametrizado por

r , o número máximo de roteadores. Consequentemente, obtemos que, muito provavelmente, o S-TCP não admite algoritmo com complexidade de tempo $\mathcal{O}(n^{\ell+c}g(r))$, onde n denota o número de vértices de G , g é função computável qualquer e c é uma constante não negativa. Para provarmos o referido resultado, propomos uma redução FPT a partir do problema COBERTURA POR CONJUNTOS, que é um problema W[2]-completo clássico *c.f.* [7, 13], cuja definição é dada conforme segue.

COBERTURA POR CONJUNTOS

Entrada: Um conjunto universo U , uma coleção $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_q\}$ de conjuntos não vazios sobre U e um inteiro positivo k .

Parâmetro: O inteiro k .

Questão: Existe uma subcoleção $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, com $|\mathcal{F}'| \leq k$, tal que a união de todos os elementos pertencentes aos conjuntos $S' \in \mathcal{F}'$ é igual a U ?

Dado $I = (U, \mathcal{F}, k)$, uma instância do problema COBERTURA POR CONJUNTOS, definimos uma instância $f(I) = (G, W, r)$ do S-TCP(ℓ) conforme segue:

- primeiramente, construímos o *gadget* G_ρ tal que
 - $V(G_\rho) = \{\rho\} \cup \{u_i \mid 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{w_a, w_b, w_c\}$,
 - $E(G_\rho) = \{\rho u_\ell, \rho w_b, \rho w_c\} \cup \{u_i u_{i+1} \mid 1 \leq i \leq \ell - 1\} \cup \{w_a u_1\}$;
- criamos k vértices $w_{S'_1}, w_{S'_2}, \dots, w_{S'_k}$;
- para cada conjunto $S_i \in \mathcal{F}$, criamos um vértice v_{S_i} juntamente com a aresta ρv_{S_i} e as arestas $w_{S'_j} v_{S_i}$, para todo j com $1 \leq j \leq k$;

Figura 3.20 ilustra a construção do grafo G até esta última etapa.

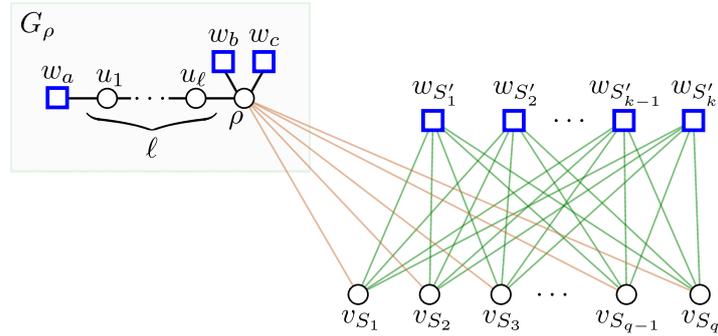


Figura 3.20: Construção parcial do grafo G .

- para cada elemento $x_i \in U$, criamos um vértice w_i ;
- para cada conjunto $S_i \in \mathcal{F}$ e para cada elemento $x_i \in U$, criamos a aresta $v_{S_i} w_i$ se $x_i \in S_i$;

- por fim, definimos $W = \{w_a, w_b, w_c\} \cup \{w_{S'_j} \mid 1 \leq j \leq k\} \cup \{w_i \mid x_i \in U\}$ e $r = k + 1$;

Figura 3.18 exemplifica o grafo G e o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul), obtidos a partir de uma dada instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ de COBERTURA POR CONJUNTOS, que neste caso corresponde ao conjunto universo $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, à coleção $\mathcal{F} = \{S_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, S_2 = \{x_2, x_4\}, S_3 = \{x_3, x_4\}, S_4 = \{x_4, x_5\}\}$ e ao inteiro $k = 2$.

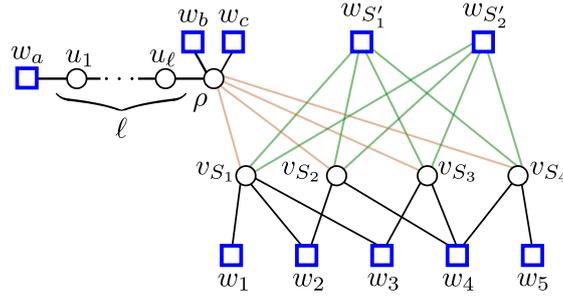


Figura 3.21: Grafo G e o conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma dada instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ de COBERTURA POR CONJUNTOS.

Lema 3.26. $I = (U, \mathcal{F}, k)$ é uma instância SIM de COBERTURA POR CONJUNTOS se, e somente se, $f(I) = (G, W, r)$ é uma instância SIM do S -TCP(ℓ).

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM de COBERTURA POR CONJUNTOS. Logo \mathcal{F} contém um subconjunto $\mathcal{F}' = \{S'_1, S'_2, \dots, S'_p\}$, com $p \leq k$, tal que $\bigcup_{S' \in \mathcal{F}'} \{x \mid x \in S'\} = U$. Suponha, sem perda de generalidade, que \mathcal{F}' é minimal com relação à propriedade de cobrir todos elementos de U , ou seja, para qualquer $S' \in \mathcal{F}'$, $\mathcal{F}' \setminus \{S'\}$ não cobre todos elementos de U . Com base em \mathcal{F}' , construímos uma árvore de conexão estrita T de G para W conforme segue:

- adicionamos o *gadget* G_ρ a T ;
- adicionamos os vértices $w_{S'_1}, w_{S'_2}, \dots, w_{S'_k}$ a T ;
- para cada conjunto $S'_j \in \mathcal{F}'$, adicionamos o vértice $v_{S'_j}$ a T , juntamente com as arestas $\rho v_{S'_j}$ e $v_{S'_j} w_{S'_j}$;
- ademais, para cada j com $p + 1 \leq j \leq k$, adicionamos a aresta $v_{S'_p} w_{S'_j}$ a T ;
- por fim, para cada elemento $x_i \in U$, adicionamos o vértice w_i a T , juntamente com a aresta $v_{S'_j} w_i$ a T , onde $j = \min\{1, \dots, p\}$ tal que $x_i \in S'_j$ e $S'_j \in \mathcal{F}'$.

Figura 3.22 exemplifica uma árvore de conexão estrita T para W concernente à instância $f(I)$ da Figura 3.21, obtida a partir da coleção $\mathcal{F}' = \{S'_1, S'_2\} = \{S_1, S_4\}$.

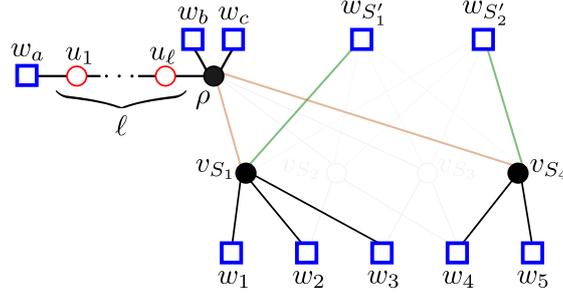


Figura 3.22: Árvore de conexão estrita de G para W , referente a uma solução \mathcal{F}' para a instância $I = (U, \mathcal{F}, k)$ de COBERTURA POR CONJUNTOS.

Por construção, T é um subgrafo de G , é uma árvore e contém todos os terminais em W . Além disso, como cada um dos terminais pertencentes a W são adjacentes em T a somente um vértice, obtemos que T é uma árvore de conexão estrita para W . Resta-nos então provar que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e que $|\mathbf{R}(T)| \leq r = k + 1$. Segue imediatamente da definição de T que todos os ℓ vértices u_1, u_2, \dots, u_ℓ possuem grau exatamente 2 em T . Logo, $\mathbf{L}(T) \supseteq \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$. Por outro lado, obtemos da minimalidade de \mathcal{F}' que, para todo $S'_j \in \mathcal{F}'$, o vértice $v_{S'_j}$ é adjacente a pelo menos um vértice $w_i \in W$ em T , visto que S'_j cobre algum elemento $x_i \in U$ não coberto por qualquer outro conjunto em \mathcal{F}' . Além disso, como $p \leq k$, cada vértice $v_{S'_j}$ é adjacente a pelo menos um vértice $w_{S'_j} \in T$. Note ainda que, todos estes vértices $v_{S'_j}$, correspondentes aos conjuntos $S'_j \in \mathcal{F}'$, são adjacentes a ρ em T , logo possuem grau maior ou igual a 3 em T , e assim são roteadores. Por fim, observe que ρ é necessariamente um roteador de T , tendo em vista que (ao menos) o é adjacente aos terminais w_b e w_c e ao elo u_ℓ em T . Dessa forma, temos que $\mathbf{L}(T) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$ e $\mathbf{R}(T) = \{\rho\} \cup \{v_{S'_j} \mid S'_j \in \mathcal{F}'\}$, o que implica em $|\mathbf{L}(T)| = \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| = p + 1 \leq k + 1$. Portanto, $f(I)$ é de fato uma instância SIM do S-TCP(ℓ).

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que G admita uma árvore de conexão T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r = k + 1$. Segue do fato que os vértices u_1, u_2, \dots, u_ℓ necessariamente pertencem ao caminho entre os terminais w_a e $w \in \{w_b^{\rho_1}, w_c^{\rho_1}\}$, que $\mathbf{L}(T) = \{u_i \mid 1 \leq i \leq \ell\}$. Logo, todos os demais vértices não terminais de T devem ter grau diferente de 2 em T , ou seja, não podem ser elos, pois caso contrário $|\mathbf{L}(T)| > \ell$. Além disso, como $\{w_i \mid x_i \in U\}$ é um conjunto independente de G e todos os vértices em $W \supset \{w_i \mid x_i \in U\}$ estão contidos na árvore T , temos que, para todo $x_i \in U$, $N_T(w_i) \supseteq \{v_{S_i}\}$, para algum $S_i \in \mathcal{F}$. Logo, como tais vértices v_{S_i} não pertencem ao conjunto de terminais W , os mesmos devem ter grau ao menos 3 em T , ou seja, devem ser roteadores. Dessa forma, temos que $|\{v_{S_i} \mid v_{S_i} \in V(T)\}| \leq k$, visto que $|\mathbf{R}(T)| \leq k + 1$ e $\mathbf{R}(T) \supseteq \{\rho\}$. Segue então da construção do grafo G , mais especificamente da definição das vizinhanças dos vértices v_{S_i} , para $S_i \in \mathcal{F}$, que $\mathcal{F}' = \{S_i \mid v_{S_i} \in V(T)\}$ é um subconjunto de \mathcal{F} , com $|\mathcal{F}'| \leq k$, que cobre todos os elementos pertencentes a U , ou seja, $\bigcup_{S'_i \in \mathcal{F}'} \{x \mid x \in S'_i\} = U$. Portanto, I é de fato

uma instância SIM de COBERTURA POR CONJUNTOS. \square

Com consequência deste lema, obtemos que o S-TCP(ℓ) é um problema intratável por parâmetro fixo, quando parametrizado por r , o número máximo de roteadores, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 3.27. *O S-TCP(ℓ) é W[2]-difícil quando parametrizado por r .*

Demonstração. Segue do Lema 3.26 e do fato que a construção f pode ser realizada em tempo FPT com relação a k . Mais especificamente, note que, dada uma instância arbitrária $I = (U, \mathcal{F}, k)$ do problema COBERTURA POR CONJUNTOS, podemos construir a instância $f(I)$ do S-TCP(ℓ) em tempo $\mathcal{O}(|\mathcal{F}|k + |\mathcal{F}||U|)$. \square

Uma observação adicional interessante é a de que, pela própria construção do grafo G , todos os possíveis conjuntos de roteadores de uma árvore de conexão estrita T para o conjunto de terminais W induzem um subgrafo conexo de T . Por conseguinte, obtemos que, além do S-TCP(ℓ), o problema SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(ℓ) é também W[2]-difícil quando parametrizado por r .

Corolário 3.28. *SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(ℓ) é W[2]-difícil quando parametrizado por r .*

Por fim, uma outra observação interessante é a de que a construção f e o Lema 3.26 também se mantêm válidos para a versão não estrita do problema, ou seja, o TCP(ℓ). Como pode-se notar, em nenhum momento fizemos uso da hipótese de que os terminais precisam ser ou são folhas das árvores de conexão. Obtemos, então, que o TCP(ℓ) é também W[2]-difícil quando parametrizado por r , assim como o problema SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO TCP(ℓ).

Corolário 3.29. *O TCP(ℓ) é W[2]-difícil quando parametrizado por r .*

Corolário 3.30. *SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO TCP(ℓ) é W[2]-difícil quando parametrizado por r .*

Capítulo 4

Fluxo Integral de Dois *Commodities* e $k + 1$ Caminhos Disjuntos

Conforme já mencionamos, uma das principais questões em aberto consideradas neste trabalho corresponde a determinar a complexidade do S-TCP(r), para $r = 2$. Entretanto, com base no que desenvolvemos nos capítulos anteriores, pode-se verificar que o S-TCP($r = 2$) é redutível ao problema denominado $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES — cujo objetivo é responder se um grafo admite $k + 1$ caminhos disjuntos em vértices tais que k desses caminhos são entre um dado par de vértices e o $(k + 1)$ -ésimo caminho é entre um outro dado par de vértices — quando requer-se que o somatório dos comprimentos dos caminhos seja limitado. (Mais adiante, expomos a ideia dessa redução.)

Um problema relacionado ao $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES é o $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM ARESTAS, versão onde busca-se caminhos que sejam disjuntos em arestas (mas que podem compartilhar vértices). Este segundo problema pode ser facilmente interpretado como o problema FLUXO INTEGRAL DE DOIS COMMODITIES EM GRAFOS NÃO DIRECIONADOS, onde k itens devem ser transportados entre um par de vértices e um outro item deve ser transportado entre um segundo par de vértices e a capacidade das arestas é unitária. Assim, com a finalidade de obtermos um ferramental maior para proceder com a análise da complexidade do S-TCP($r = 2$), devido à proximidade para com o nosso problema alvo, revisitamos ao longo do desenvolvimento desta dissertação a complexidade desses problemas.

Curiosamente, até onde investigamos, a complexidade do $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES e do FLUXO INTEGRAL DE DOIS COMMODITIES EM GRAFOS NÃO DIRECIONADOS encontrava-se desconhecida para grafos não direcionados. Contudo, com base no conhecimento que adquirimos tentando solucionar o S-TCP($r = 2$), conseguimos provar que esses dois problemas de caminhos disjuntos são NP-completos. O restante desse capítulo se concentra nesses resultados. A definição formal dos problemas é dada a seguir, onde adotamos a notação padrão de

FLUXO INTEGRAL DE DOIS COMMODITIES EM GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

Entrada: Um grafo G , dois *commodities* $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$, onde s_1, t_1, s_2 e t_2 são vértices de G , e duas *demandas* $D_1, D_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Questão: Existem duas funções de fluxo $f_1, f_2: \{\vec{uv}, \vec{vu} \mid uv \in E(G)\} \rightarrow \mathbb{Z}_0^+$ tais que:

(a) para todo $uv \in E(G)$ e $i \in \{1, 2\}$, $f_i(\vec{uv}) = 0$ ou $f_i(\vec{vu}) = 0$;

(b) para todo $uv \in E(G)$, o fluxo total passando pela aresta uv não excede a sua *capacidade* unitária, ou seja,

$$\max \{f_1(\vec{uv}), f_1(\vec{vu})\} + \max \{f_2(\vec{uv}), f_2(\vec{vu})\} \leq 1;$$

(c) para todo $i \in \{1, 2\}$ e $v \in V \setminus \{s_i, t_i\}$, a função de fluxo f_i é *conservada* em v , ou seja,

$$\sum_{x \in N_G(v)} f_i(\vec{xv}) = \sum_{y \in N_G(v)} f_i(\vec{vy}); \text{ e}$$

(d) para todo $i \in \{1, 2\}$, o fluxo F_i emanando de s_i para t_i (com relação a função de fluxo f_i) é ao menos D_i , ou seja,

$$F_i = \sum_{v \in N_G(t_i)} f_i(\vec{vt}_i) \geq D_i?$$

Para fins de simplificação, denotamos FLUXO INTEGRAL DE DOIS COMMODITIES EM GRAFOS NÃO DIRECIONADOS simplesmente por U2CIF. Note que, o caso que coincide com o $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM ARESTAS, sobre o qual comentamos anteriormente, é o de quando define-se $D_1 = 1$ e $D_2 = k$.

$k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES ($k + 1$ VDP)

Entrada: Um grafo G , dois pares não ordenados $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$ de vértices de G e um inteiro não negativo k .

Questão: O grafo G contém $k + 1$ caminhos disjuntos em vértices tais que k caminhos são entre s_1 e t_1 e um caminho é entre s_2 e t_2 ?

O S-TCP($r = 2$) se reduz à variante do $k + 1$ VDP onde requer-se, adicionalmente, que o somatório dos comprimentos dos caminhos seja inferior a um dado inteiro não negativo, versão a qual denotamos por MIN-SUM $k + 1$ VDP. Através de uma estratégia similar à que utilizamos para provar que SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial, pode-se provar também que há uma redução de Turing do S-TCP($r = 2$) para o problema MIN-

SUM $k + 1$ VDP, que na verdade consiste numa redução de Turing para o S-TCP(R) com $|R| = 2$, aplicando-se conjuntamente uma redução polinomial para o MIN-SUM $k + 1$ VDP. Figura 4.1 ilustra informalmente a ideia dessa redução polinomial, onde $N_{G'}(\rho_1^i) = N_G(\rho_1)$, $N_{G'}(\rho_2^i) = N_G(\rho_2)$, $N_{G'}(\rho_*^j) = N_G(\rho_1) \cup N_G(\rho_2)$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq q$, $q = |W| - 2$ e G é o grafo de entrada do S-TCP($r = 2$).

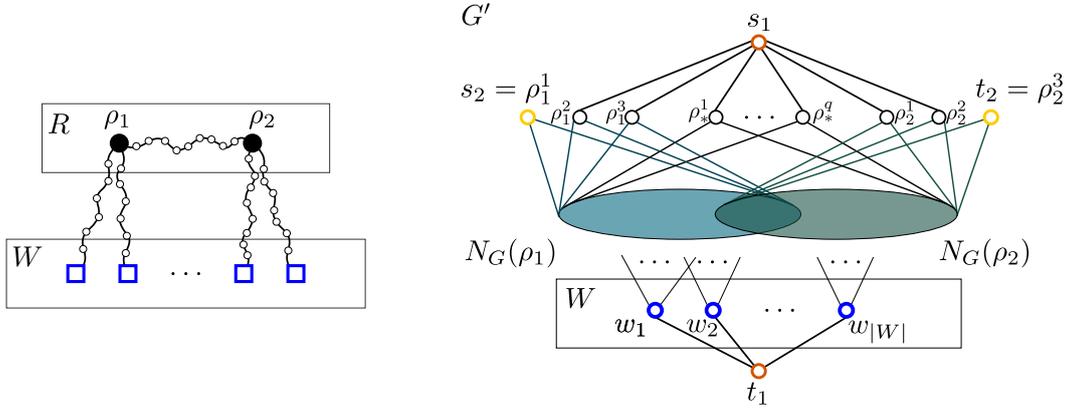


Figura 4.1: Redução polinomial do S-TCP(R) com $|R| = 2$ para o problema MIN-SUM $k + 1$ DP.

Quanto aos resultados conhecidos na literatura sobre o $k + 1$ VDP e o U2CIF, Even et al. provaram que ambos problemas são NP-completos para grafos direcionados, mesmo quando $D_1 = 1$ e $D_2 = k$ [16]. Complementarmente, eles também analisaram a complexidade do problema U2CIF para grafos não direcionados, propondo inclusive uma prova de NP-completude. Contudo, a instância difícil do U2CIF construída por eles não satisfaz a condição de que uma das demandas seja uma constante [16]. Assim, nossa contribuição consiste em provar que os problemas $k + 1$ VDP e U2CIF são NP-completos para grafos não direcionados mesmo quando a demanda de um dos *commodities* (ou a quantidade de caminhos entre um par de vértices) é unitária. Por outro lado, observe que, se ambas demandas forem constantes, então tanto o $k + 1$ VDP quanto o U2CIF são solucionáveis em tempo polinomial. Um exemplo de algoritmo polinomial para tais problemas neste caso é o algoritmo de Robertson e Seymour para o k -DP [34], sobre o qual comentamos na Seção 3.1.2. Note ainda, que embora o S-TCP($r = 2$) esteja mais relacionado ao MIN-SUM $k + 1$ VDP do que ao $k + 1$ VDP, não há perda de generalidade (para k arbitrário) ao nos concentrarmos no $k + 1$ VDP, visto que a NP-completude deste caso particular implica na NP-completude do MIN-SUM $k + 1$ VDP.

Teorema 4.1. *O U2CIF é NP-completo mesmo quando a demanda de um dos commodities é unitária.*

Demonstração. Realizamos a prova através de uma redução polinomial a partir do problema 3-SAT. Seja $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do 3-SAT, onde $X =$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ é o conjunto de cláusulas. Definimos a partir de I uma instância $g(I) = (G, \{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, D_1, D_2)$ do U2CIF conforme segue.

- Primeiramente, criamos quatro vértices s_1, t_1, s_2 e t_2 .
- Para cada variável $x_i \in X$, construímos um *gadget* G_{x_i} definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} - V(G_{x_i}) &= \{v_s^i, v_t^i\} \cup \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq 2p_i\} \cup \{\bar{v}_j^i \mid 1 \leq j \leq 2q_i\}; \text{ e} \\ - E(G_{x_i}) &= \{v_s^i v_1^i, v_s^i \bar{v}_1^i, v_{2p_i}^i v_t^i, \bar{v}_{2q_i}^i v_t^i\} \\ &\quad \cup \{v_j^i v_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq 2p_i - 1\} \cup \{\bar{v}_j^i \bar{v}_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq 2q_i - 1\}, \end{aligned}$$

onde p_i e q_i denotam, respectivamente, o número de ocorrências do literal positivo e o número de ocorrências do literal negativo da variável x_i nas cláusulas em \mathcal{C} . Figura 4.2 ilustra a construção de G_{x_i} .

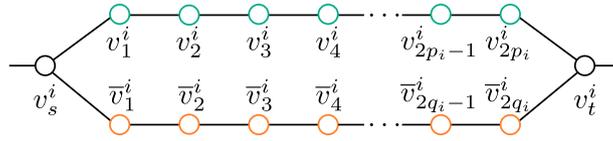


Figura 4.2: *Gadget* G_{x_i} referente à variável $x_i \in X$.

- Conectamos os *gadgets* G_{x_i} uns aos outros em série, ou seja: adicionamos as arestas $v_t^i v_s^{i+1}$ para todo i com $1 \leq i \leq n - 1$. Adicionamos também as arestas $s_1 v_s^1$ e $v_t^n t_1$.
- Para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, criamos os vértices v_{c_l} e ν_{c_l} e adicionamos cinco *arestas paralelas* (ou seja, arestas cujos extremos coincidem) entre s_2 e v_{c_l} e cinco arestas paralelas entre ν_{c_l} e t_2 . Adicionamos também seis novos vértices: $v_{l_1}^t, v_{l_2}^t, v_{l_3}^t, \nu_{l_1}^t, \nu_{l_2}^t$ e $\nu_{l_3}^t$, tais que $v_{l_1}^t, v_{l_2}^t$ e $v_{l_3}^t$ são conectados a v_{c_l} e $\nu_{l_1}^t, \nu_{l_2}^t$ e $\nu_{l_3}^t$ são conectados a ν_{c_l} . A interpretação dos vértices v_{c_l} e ν_{c_l} é a de que eles representam a cláusula C_l , e a interpretação dos vértices $v_{l_\kappa}^t$ e $\nu_{l_\kappa}^t$ é a de que eles representam um dos três literais presentes em C_l , digamos o κ -ésimo literal em C_l , para $\kappa \in \{1, 2, 3\}$. Figura 4.3 ilustra os vértices e as arestas criados nesta etapa da construção do grafo G da instância $g(I)$.

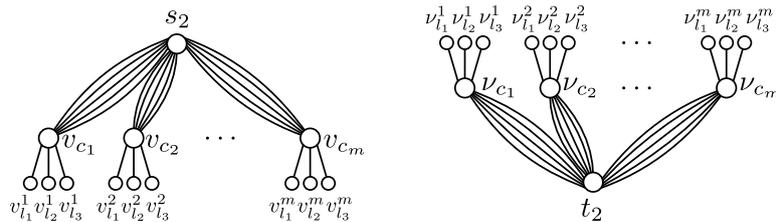


Figura 4.3: Vértices $s_2, t_2, v_{c_l}, \nu_{c_l}, v_{l_j}^t$ e $\nu_{l_j}^t$ e suas adjacências.

- Para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, adicionamos quatro novos vértices u_1^l, u_2^l, z_1^l e z_2^l e adicionamos também as arestas $u_1^l v_{l_1}^l, u_1^l v_{l_2}^l, u_1^l v_{c_l}, u_2^l v_{l_2}^l, u_2^l v_{l_3}^l, u_2^l v_{c_l}, z_1^l v_{l_1}^l, z_1^l v_{l_2}^l, z_1^l v_{c_l}, z_2^l v_{l_2}^l, z_2^l v_{l_3}^l$ e $z_2^l v_{c_l}$. Esses vértices, com suas adjacências, serão utilizados para manter um certo controle dos possíveis percursos a serem seguidos pelo fluxo de cada um dos *commodities*. Figura 4.4 ilustra os vértices e as arestas criados nesta etapa da construção de G .

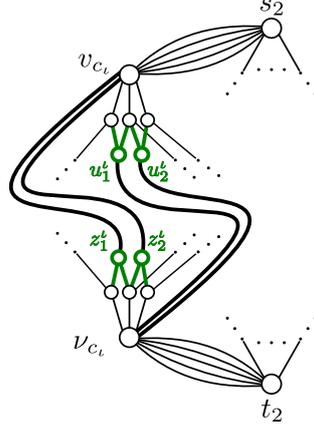


Figura 4.4: Vértices u_1^l, u_2^l, z_1^l e z_2^l e suas adjacências.

- Para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, adicionamos as arestas $v_{l_\kappa}^l v_{2j-1}^l$ e $v_{2j}^l v_{l_\kappa}^l$ se o κ -ésimo literal em C_l corresponde à j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ e $1 \leq j \leq p_i$. Por outro lado, adicionamos as arestas $v_{l_\kappa}^l \bar{v}_{2j-1}^l$ e $\bar{v}_{2j}^l v_{l_\kappa}^l$ se o κ -ésimo literal em C_l corresponde à j -ésima ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ e $1 \leq j \leq q_i$. As arestas adicionadas nesta etapa da construção mapeiam as ocorrências dos literais das variáveis em X nas cláusulas em \mathcal{C} .
- Por fim, definimos $D_1 = 1$ e $D_2 = 5m$, onde $m = |\mathcal{C}|$.

Figura 4.5 exemplifica a construção do grafo G e os pares de vértices $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT, que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$. Para fins de simplificação, omitimos o rótulo de alguns vértices na figura.

Mostramos agora que a instância $g(I)$ do U2CIF é uma instância SIM se, e somente se, I é uma instância SIM do 3-SAT.

(\Rightarrow) Suponha que existam funções de fluxo f_1 e f_2 que satisfaçam as demandas $D_1 = 1$ e $D_2 = 5m$, respectivamente. Como, por construção, $d_G(s_2) = d_G(t_2) = D_2 = 5m$, todas as arestas incidentes a s_2 e todas as arestas incidentes a t_2 são utilizadas pelo fluxo do segundo *commodity*, ou seja: para todo $a \in N_G(s_2)$, $f_2(\overrightarrow{s_2 a}) = 1$ e,

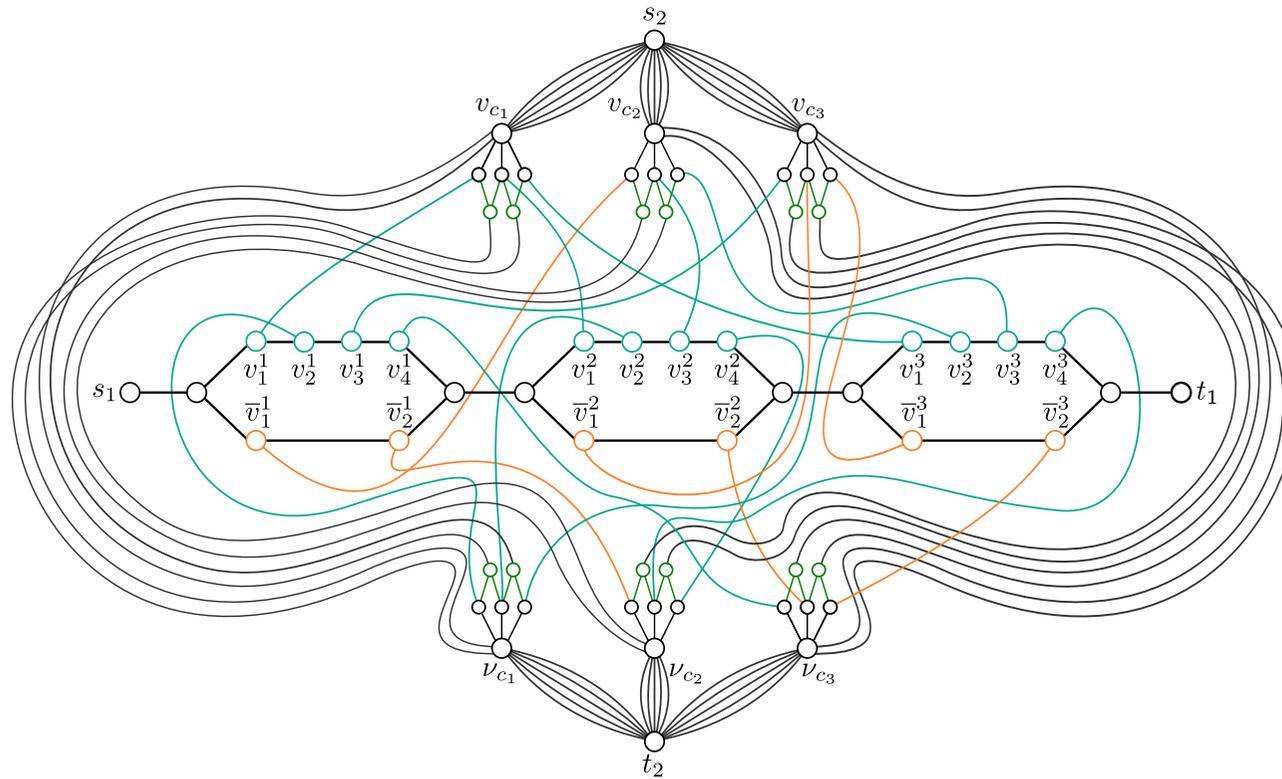
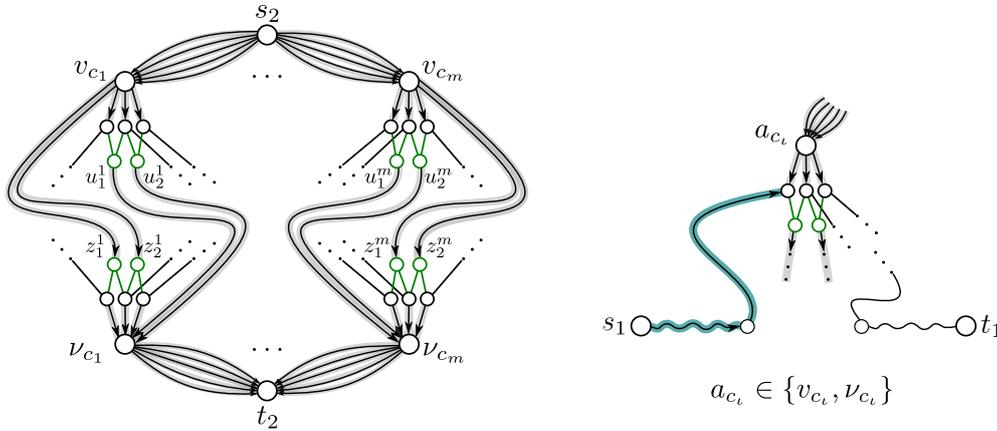


Figura 4.5: Grafo G e pares de vértices $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$ da instância $g(I)$ do U2CIF, obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.

para todo $b \in N_G(t_2)$, $f_2(\overrightarrow{bt_2}) = 1$. Além disso, observe que $N_G(s_2) = \{v_{c_i} \mid C_i \in \mathcal{C}\}$ e $N_G(t_2) = \{\nu_{c_i} \mid C_i \in \mathcal{C}\}$. Dessa forma, como $d_G(v_{c_i}) = 10$ e $d_G(\nu_{c_i}) = 10$ para toda cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, obtemos que todas as arestas incidentes ao vértice v_{c_i} e todas as arestas incidentes ao vértice ν_{c_i} são necessariamente utilizadas pelo fluxo do segundo *commodity*. Mais especificamente, temos que: para toda cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, $f_2(\overrightarrow{s_2v_{c_i}}) = 1$ e $f_2(\overrightarrow{v_{c_i}y}) = 1$ para todo $y \in N_G(v_{c_i}) \setminus \{s_2\}$; assim como, $f_2(\overrightarrow{\nu_{c_i}t_2}) = 1$ e $f_2(\overrightarrow{y'\nu_{c_i}}) = 1$ para todo $y' \in N_G(\nu_{c_i}) \setminus \{t_2\}$. Figura 4.6a ilustra o uso de tais arestas no fluxo do segundo *commodity*.

Por conseguinte, o fluxo do primeiro *commodity*, emanando de s_1 para t_1 , utiliza apenas arestas cujos extremos pertencem aos *gadgets* G_{x_i} , para $x_i \in X$. Para verificar a validade desta última afirmação, observe que se o fluxo de s_1 para t_1 utiliza outros tipos de arestas, então o mesmo, obrigatoriamente, utiliza arestas correspondentes ao mapeamento das ocorrências dos literais das variáveis em X nas cláusulas em \mathcal{C} , tendo em vista a definição das adjacências dos vértices s_1 e t_1 e dos vértices v_j^i e \bar{v}_j^i . Entretanto, conforme pode-se observar na Figura 4.6b, esta situação acarretaria na obstrução do fluxo de um dos *commodities*, o que implicaria na não conservação de fluxo em um dos vértices de G ou no não respeitar a capacidade unitária de alguma aresta de G . Logo, o fluxo de s_1 para t_1 de fato utiliza apenas arestas cujos extremos pertencem aos *gadgets* G_{x_i} , para $1 \leq i \leq n$.



(a) Arestas utilizadas pelo fluxo de s_2 para t_2 . (b) Obstrução do fluxo.

Figura 4.6: Arestas necessariamente utilizadas pelo fluxo do segundo *commodity* e obstrução do fluxo de um dos *commodities* caso o fluxo de s_1 para t_1 utilize arestas cujos extremos não pertencem aos *gadgets* G_{x_i} , para $x_i \in X$.

Dessa forma, podemos definir uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ conforme descrevemos a seguir:

- se o fluxo do primeiro *commodity*, emanando de s_1 para t_1 , utiliza as arestas $v_j^i v_{j+1}^i$, para todo j com $1 \leq j \leq 2p_i - 1$, ao passar pelo *gadget* G_{x_i} , então

definimos o valor verdade de x_i como *falso*, ou seja: $\alpha(x_i) = \textit{falso}$;

- por outro lado, se o fluxo do primeiro *commodity*, emanando de s_1 para t_1 , utiliza as arestas $\bar{v}_{j'}^i, \bar{v}_{j'-1}^i$, para todo j' com $1 \leq j' \leq 2q_i - 1$, ao passar pelo *gadget* G_{x_i} , então definimos o valor verdade de x_i como *verdadeiro*, ou seja: $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$.

Como existe justamente uma aresta incidente a s_1 em G , o fluxo emanando de s_1 para t_1 (ao passar pelo *gadget* G_{x_i}) ou utiliza as arestas v_j^i, v_{j+1}^i , para todo j com $1 \leq j \leq 2p_i - 1$, ou utiliza as arestas $\bar{v}_{j'}^i, \bar{v}_{j'-1}^i$, para todo j' com $1 \leq j' \leq 2q_i - 1$, nunca utiliza simultaneamente ambos tipos de arestas de G_{x_i} . Logo, a atribuição de valor verdade α para as variáveis em X é consistente, ou seja, nunca é atribuído simultaneamente os valores *verdadeiro* e *falso* para uma mesma variável.

Além disso, note que α satisfaz todas as cláusulas em C . Esta última afirmação decorre do fato de que, para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, o fluxo do segundo *commodity* utiliza (exatamente) duas arestas correspondentes ao mapeamento das ocorrências dos literais das variáveis em X na cláusula C_i , sendo uma destas do tipo $v_{i_\kappa}^i a^i$ e a outra do tipo $b^{i'} \nu_{i_\kappa}^i$, onde $\kappa \in \{1, 2, 3\}$, $a^i \in \{v_{2j-1}^i, \bar{v}_{2j'-1}^i \mid 1 \leq j \leq p_i \text{ e } 1 \leq j' \leq q_i\}$, $b^{i'} \in \{v_{2j}^{i'}, \bar{v}_{2j'}^{i'} \mid 1 \leq j \leq p_{i'} \text{ e } 1 \leq j' \leq q_{i'}\}$ e $x_i, x_{i'} \in X$, pois caso contrário a demanda $D_2 = 5m$ não seria alcançada. Dessa forma, com relação à cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, se a aresta $v_{i_\kappa}^i v_j^i$ (ou a aresta $v_j^i \nu_{i_\kappa}^i$) é utilizada pelo fluxo do segundo *commodity*, para algum $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ e algum j com $1 \leq j \leq 2p_i$, então obtemos das restrições de conservação de fluxo e de capacidade unitária das arestas de G que o fluxo do primeiro *commodity*, ao passar pelo *gadget* G_{x_i} , não poderá utilizar quaisquer vértices $v_{j'}^i$, para $1 \leq j' \leq 2p_i$, visto que $d_G(v_{j'}^i) = 3$. Logo, serão utilizados (pelo fluxo do primeiro *commodity*) os vértices $\bar{v}_{j'}^i$, para todo $1 \leq j' \leq 2q_i$. Assim, a atribuição $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$ satisfaz a cláusula C_i neste caso. Por outro lado, segue de modo análogo que, se a aresta $v_{i_\kappa}^i \bar{v}_j^i$ (ou a aresta $\bar{v}_j^i \nu_{i_\kappa}^i$) é utilizada pelo fluxo do segundo *commodity*, para algum $\kappa \in \{1, 2, 3\}$ e algum j com $1 \leq j \leq 2q_i$, então o fluxo do primeiro *commodity*, ao passar pelo *gadget* G_{x_i} , não poderá utilizar quaisquer vértices $\bar{v}_{j'}^i$, para $1 \leq j' \leq 2q_i$, visto que $d_G(\bar{v}_{j'}^i) = 3$. Logo, serão utilizados (pelo fluxo do primeiro *commodity*) os vértices $v_{j'}^i$, para todo $1 \leq j' \leq 2p_i$. Assim, a atribuição $\alpha(x_i) = \textit{falso}$ satisfaz a cláusula C_i neste caso.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que a instância I seja satisfatível. Seja então $\alpha : X \rightarrow \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X que satisfaça todas as cláusulas em \mathcal{C} . Definimos uma função de fluxo f_1 para o primeiro *commodity*, emanando de s_1 para t_1 , da seguinte forma:

- para $x_i \in X$, se $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$, então o fluxo passará pelo *gadget* G_{x_i} percorrendo o caminho $\bar{P}^i = \langle v_s^i, \bar{v}_1^i, \bar{v}_2^i, \dots, \bar{v}_{2q_i-1}^i, \bar{v}_{2q_i}^i, v_t^i \rangle$, conforme ilustrado

na Figura 4.7a; ou seja, $f_1(\overrightarrow{v_s^i v_1^i}) = 1$, $f_1(\overrightarrow{v_1^i v_2^i}) = 1$, \dots , $f_1(\overrightarrow{v_{2q_i-1}^i v_{2q_i}^i}) = 1$ e $f_1(\overrightarrow{v_{2q_i}^i v_t^i}) = 1$;

- por outro lado, se $\alpha(x_i) = \text{falso}$, então o fluxo passará pelo *gadget* G_{x_i} percorrendo o caminho $P^i = \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{2p_i-1}^i, v_{2p_i}^i, v_t^i \rangle$, conforme ilustrado na Figura 4.7b; ou seja, $f_1(\overrightarrow{v_s^i v_1^i}) = 1$, $f_1(\overrightarrow{v_1^i v_2^i}) = 1$, \dots , $f_1(\overrightarrow{v_{2p_i-1}^i v_{2p_i}^i}) = 1$ e $f_1(\overrightarrow{v_{2p_i}^i v_t^i}) = 1$;

- por fim, o fluxo também percorrerá as arestas $s_1 v_s^1, v_t^1 v_s^2, \dots, v_t^{n-1} v_s^n$ e $v_t^n t_1$.

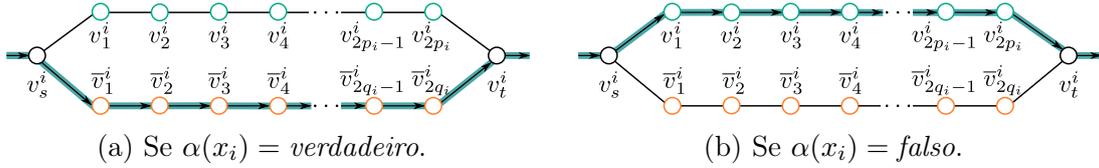


Figura 4.7: Definição do fluxo do primeiro *commodity*.

Como por hipótese α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$ possui ao menos um literal verdadeiro (em função de α). Seja então γ_l um destes literais. Definimos, a partir desses literais verdadeiros γ_l , uma função de fluxo f_2 para o segundo *commodity*, emanando de s_2 para t_2 , conforme segue:

- se γ_l corresponde ao κ -ésimo literal em C_l e à j -ésima ocorrência do literal *positivo* da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $1 \leq j \leq p_i$ e $\kappa \in \{1, 2, 3\}$, então uma unidade do fluxo percorrerá o caminho $\langle s_2, v_{c_l}, v_{l_{\kappa}^i}, v_{2j-1}^i, v_{2j}^i, v_{c_l}, t_2 \rangle$;
- por outro lado, se γ_l corresponde ao κ -ésimo literal em C_l e à j -ésima ocorrência do literal *negativo* da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $1 \leq j \leq q_i$ e $\kappa \in \{1, 2, 3\}$, então uma unidade do fluxo percorrerá o caminho $\langle s_2, v_{c_l}, v_{l_{\kappa}^i}, \bar{v}_{2j-1}^i, \bar{v}_{2j}^i, v_{c_l}, t_2 \rangle$.

Observe que, até o momento, foram transmitidas $m = |\mathcal{C}|$ unidades de fluxo de s_2 para t_2 . As demais $4m$ unidades são transmitidas percorrendo-se, para cada cláusula $C_l \in \mathcal{C}$, os caminhos: $\langle s_2, v_{c_l}, v_{l_{\kappa_1}^l}, u_1^l, v_{c_l}, t_2 \rangle$, $\langle s_2, v_{c_l}, v_{l_{\kappa_2}^l}, u_2^l, v_{c_l}, t_2 \rangle$, $\langle s_2, v_{c_l}, z_1^l, v_{l_{\kappa_1}^l}, v_{c_l}, t_2 \rangle$ e $\langle s_2, v_{c_l}, z_2^l, v_{l_{\kappa_2}^l}, v_{c_l}, t_2 \rangle$, onde $\kappa_1^l, \kappa_2^l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\kappa\}$, $\kappa_1^l < \kappa_2^l$ e o κ -ésimo literal em C_l é γ_l .

Figura 4.8 exemplifica a definição das funções de fluxo f_1 e f_2 concernente à instância I da Figura 4.5, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \text{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \text{verdadeiro}$ e $\alpha(x_3) = \text{falso}$. Neste exemplo, tomamos $\gamma_1 = x_1$ como literal verdadeiro da cláusula $C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\gamma_2 = x_2$ como literal verdadeiro da cláusula $C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}$ e $\gamma_3 = \bar{x}_3$ como literal verdadeiro da cláusula $C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$.

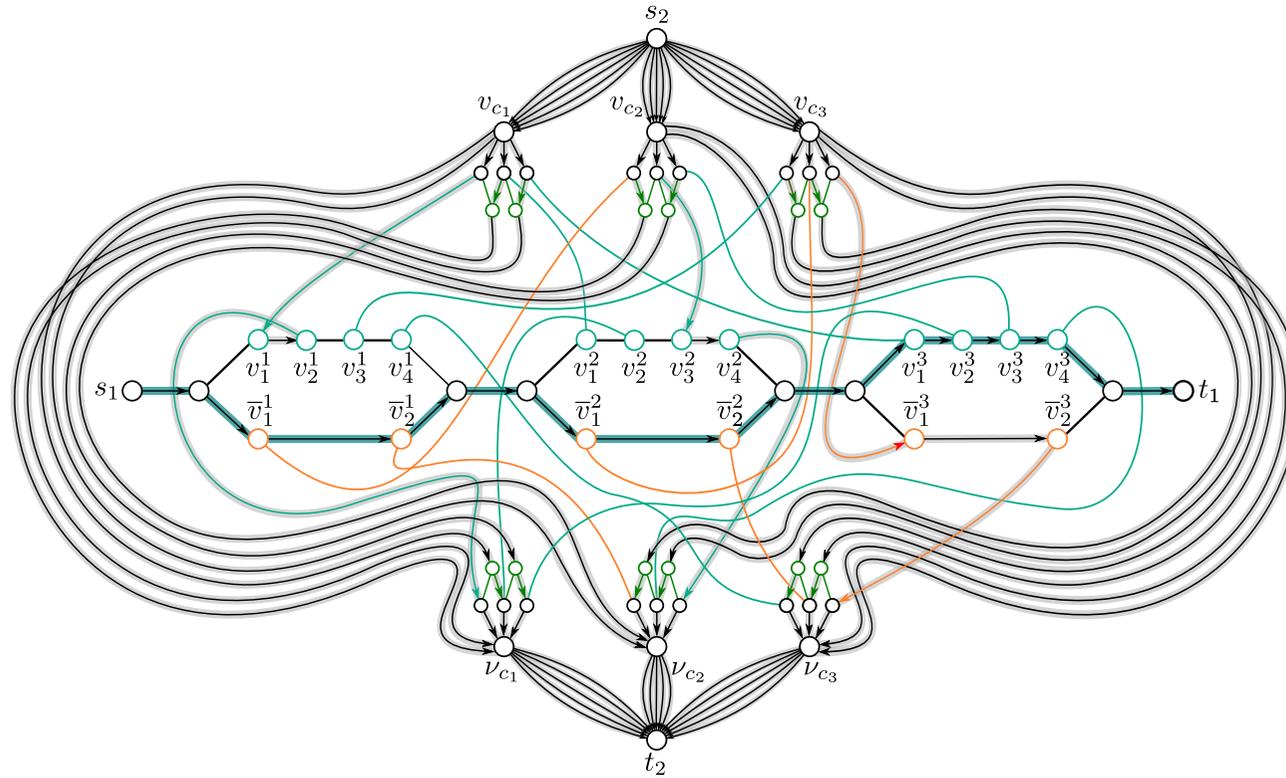


Figura 4.8: Fluxos do primeiro e do segundo *commodity* correspondentes a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

Obtemos, dessa forma, que as demandas $D_1 = 1$ e $D_2 = 5m$ são alcançadas pelas funções de fluxo f_1 e f_2 . Além disso, segue imediatamente da definição da função f_i , que a restrição de conservação de fluxo é respeitada por todo vértice $v \in V(G) \setminus \{s_i, t_i\}$, para $i \in \{1, 2\}$. Por fim, observe que a capacidade unitária de todas as arestas de G são também respeitadas, visto que, por construção, se o fluxo do primeiro *commodity* passa pelo *gadget* G_{x_i} através do caminho \overline{P}^i (caminho P^i), então o fluxo do segundo *commodity* não utilizará quaisquer arestas desse caminho: ou utilizará arestas do *gadget* G_{x_i} que pertencem ao caminho P^i (caminho \overline{P}^i , respectivamente), ou não utilizará quaisquer vértices ou arestas de G_{x_i} .

Portanto, como U2CIF pertence a NP e podemos realizar esta redução em tempo polinomial no tamanho de I , obtemos que U2CIF é NP-completo. \square

Observamos que, o conceito de *arestas paralelas* foi utilizado na demonstração do Teorema 4.1 tendo como único propósito simplificar a argumentação desta demonstração, visto que a subdivisão de tais arestas resultaria num grafo sem arestas paralelas, e ainda assim teríamos a relação de que I é uma instância SIM do 3-SAT se, e somente se, $g(I)$ é uma instância SIM do U2CIF.

Corolário 4.2. *O problema $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM ARESTAS é NP-completo.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 4.1. \square

Provamos agora que o problema $k + 1$ VDP é NP-completo. Da mesma forma que para SEMIESTRUTURADO S-TCP(r), apresentado na Seção 3.2.3, a prova de NP-completude que propomos para o $k + 1$ VDP consiste numa redução polinomial, a partir do 3-SAT, muito similar à que realizamos para provar que CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) é NP-completo, descrita no Teorema 3.22. Dessa forma, não nos atamos aos pormenores já descritos no referido teorema.

Teorema 4.3. *O $k + 1$ VDP é NP-completo.*

Demonstração. Pode-se verificar facilmente que $k + 1$ VDP pertence à classe de problemas NP. Assim, é suficiente mostrarmos que 3-SAT se reduz polinomialmente para CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r).

Seja $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do 3-SAT, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ é o conjunto de cláusulas. Construímos a partir de I uma instância $f(I) = (G, \{s_1, t_1\}, \{s_2, t_2\}, k)$ do $k + 1$ VDP conforme segue:

- primeiramente, criamos quatro vértices s_1, t_1, s_2 e t_2 ;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos o *gadget* G_{x_i} (igual ao ilustrado na Figura 3.11) tal que

$$\begin{aligned}
- V(G_{x_i}) &= \{v_{s_i}, v_{t_i}\} \cup \{v_j^i \mid 1 \leq j \leq p_i\} \cup \{\bar{v}_j^i \mid 1 \leq j \leq q_i\} \\
- E(G_{x_i}) &= \{v_j^i v_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq p_i - 1\} \cup \{\bar{v}_j^i \bar{v}_{j+1}^i \mid 1 \leq j \leq q_i - 1\} \\
&\quad \cup \{v_s^i v_1^i, v_s^i \bar{v}_1^i, v_t^i v_{p_i}^i, v_t^i \bar{v}_{q_i}^i\},
\end{aligned}$$

onde p_i e q_i denotam, respectivamente, o número de ocorrências do literal positivo e o número de ocorrências do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} ;

- conectamos os *gadgets* G_{x_i} uns aos outros em série, ou seja, para $1 \leq i \leq n-1$, adicionamos as arestas $v_t^i v_s^{i+1}$, e adicionamos também as arestas $s_1 v_{s_1}$ e $v_t^n t_1$;
- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, criamos dois vértices u_{C_i} e u'_{C_i} e adicionamos as arestas $s_2 u_{C_i}$ e $u'_{C_i} t_2$;
- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, se a j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} é dada em C_i , para $1 \leq j \leq p_i$, então adicionamos as arestas $u_{C_i} v_j^i$ e $v_j^i u'_{C_i}$;
- por outro lado, se a j -ésima ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} é dada em C_i , para $1 \leq j \leq q_i$, então adicionamos as arestas $u_{C_i} \bar{v}_j^i$ e $\bar{v}_j^i u'_{C_i}$;
- por fim, definimos $k = m$, onde $m = |\mathcal{C}|$.

Figura 4.9 exemplifica o grafo G e os pares de vértices $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT, que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$.

Mostramos agora que I é uma instância SIM do 3-SAT se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do $k+1$ VDP.

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfatível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha: X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis em X que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Seja então $S = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ um conjunto formado ao se tomar arbitrariamente, para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, (exatamente) um literal verdadeiro y_i pertencente a C_i . Com base em α e S , construímos uma solução \mathcal{P} para I (ou mais formalmente, um certificado para o SIM de I) conforme segue:

- para cada $y_i \in S$, se y_i corresponde à j -ésima ocorrência do literal positivo de $x_i \in X$, então adicionamos o caminho $P_{C_i} = \langle s_2, u_{C_i}, v_j^i, u'_{C_i}, t_2 \rangle$ a \mathcal{P} ;
- por outro lado, se $y_i \in S$ corresponde à j -ésima ocorrência do literal negativo de $x_i \in X$, então adicionamos o caminho $P_{C_i} = \langle s_2, u_{C_i}, \bar{v}_j^i, u'_{C_i}, t_2 \rangle$ a \mathcal{P} ;

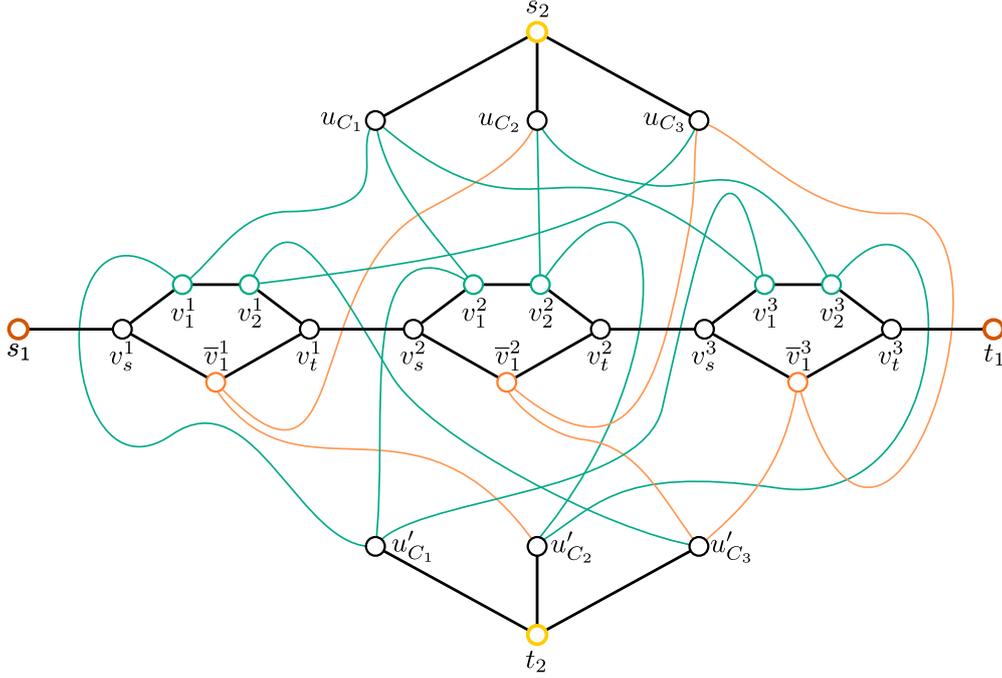


Figura 4.9: Grafo G e os pares de vértices $\{s_1, t_1\}$ e $\{s_2, t_2\}$, obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT.

- para cada variável $x_i \in X$, definimos o subcaminho $P_{x_i}^*$ como sendo

$$P_{x_i}^* = \begin{cases} \langle v_s^i, \bar{v}_1^i, \bar{v}_2^i, \dots, \bar{v}_{q_i}^i, v_t^i \rangle & \text{se } \alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}, \\ \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{p_i}^i, v_t^i \rangle & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

- por fim, definimos P_{s_1, t_1} como sendo o caminho obtido pela união dos subcaminhos $P_{x_1}^*, P_{x_2}^*, \dots, P_{x_n}^*$, e o adicionamos a \mathcal{P} .

Figura 4.10 exemplifica $k + 1$ caminhos disjuntos em vértices no grafo G concernente à instância $f(I)$ da Figura 4.9 (tais que $k = m = 3$ desses caminhos são entre s_2 e t_2 e um caminho é entre s_1 e t_1), obtidos a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \textit{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \textit{verdadeiro}$ e $\alpha(x_3) = \textit{falso}$. Neste exemplo, formamos o conjunto $S = \{y_1, y_2, y_3\}$, de literais verdadeiros das cláusulas em \mathcal{C} , tomando os literais $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ e $y_3 = \bar{x}_3$.

Por construção, temos que \mathcal{P} consiste em $k + 1$ caminhos disjuntos em vértices, tais que $P_{C_1}, P_{C_2}, \dots, P_{C_m}$ são $k = m$ caminhos entre s_2 e t_2 , e P_{s_1, t_1} é um caminho entre s_1 e t_1 . Portanto, $f(I)$ é de fato uma instância SIM do $k + 1$ VDP.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM do $k + 1$ VDP. Seja então \mathcal{P} um certificado para o SIM de $f(I)$, isto é, \mathcal{P} constitui-se de $k + 1$ caminhos disjuntos em vértices no grafo G , tais que k destes caminhos são entre s_2 e t_2 e um destes é entre s_1 e t_1 . Observe que, como $d_G(s_2) = d_G(t_2) = k$, todos os vizinhos de s_2 e todos os vizinhos de t_2 no grafo G devem necessariamente estar contidos nos caminhos entre s_2 e t_2 em \mathcal{P} e, assim, nenhum destes pode pertencer

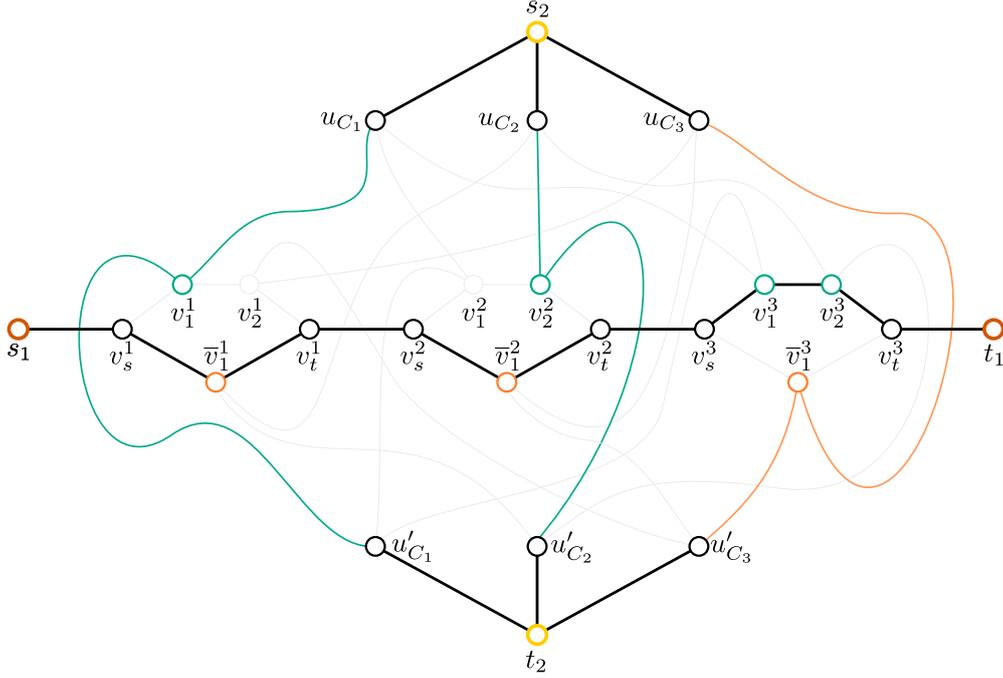


Figura 4.10: $k + 1$ caminhos disjuntos em vértices referentes a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

ao caminho entre s_1 e t_1 que está presente em \mathcal{P} , pois caso contrário \mathcal{P} não certificaria o SIM de $f(I)$, o que seria um absurdo. Logo, para todo $x_i \in X$, temos que o caminho entre s_1 e t_1 em \mathcal{P} deve necessariamente conter como subcaminho ou o caminho $\overline{P}_{x_i} = \langle v_s^i, \overline{v}_1^i, \overline{v}_2^i, \dots, \overline{v}_{q_i}^i, v_t^i \rangle$ (igual ao ilustrado na Figura 3.13a) ou o caminho $P_{x_i} = \langle v_s^i, v_1^i, v_2^i, \dots, v_{p_i}^i, v_t^i \rangle$ (igual ao ilustrado na Figura 3.13b). Dessa forma, definimos uma atribuição de valor verdade $\alpha: X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis $x_i \in X$ seguindo uma regra semelhante à que descrevemos para a atribuição α do Teorema 3.22, a saber:

- se o caminho entre s_1 e t_1 em \mathcal{P} contém \overline{P}_{x_i} como subcaminho, então definimos $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$;
- caso contrário, definimos $\alpha(x_i) = \text{falso}$.

Assim, como os vértices u_{C_i} e u'_{C_i} , para $C_i \in \mathcal{C}$, estão todos contidos nos caminhos entre s_2 e t_2 que pertencem a \mathcal{P} , obtemos pela definição de suas adjacências que todas as cláusulas em \mathcal{C} são satisfeitas por α . Portanto, temos que I é uma instância SIM do 3-SAT. \square

Capítulo 5

Grau Máximo Limitado

Diferenciando-se dos demais capítulos desta dissertação, este capítulo não possui como foco principal o S-TCP ou suas variantes restritos aos casos em que são impostas limitações aos roteadores. Analisamos neste momento a complexidade tanto do S-TCP quanto do TCP quando o grau máximo do grafo de entrada G é limitado por uma constante. Observamos que Dourado et al. [10] na demonstração do Teorema 2.1, onde são estabelecidas as NP-completudes dos problemas $\text{TCP}(\ell)$ e $\text{S-TCP}(\ell)$, constroem um grafo cujo grau máximo não é constante. No entanto, posteriormente, os mesmos autores provaram que o $\text{TCP}(\ell)$ e o $\text{S-TCP}(\ell)$ são ambos NP-completos mesmo quando restritos aos grafos com grau máximo constante [11], o que nos motivou a proceder com a análise da complexidade destes dois problemas em função do grau máximo de G . Nossa principal contribuição neste capítulo consiste em provar os seguintes resultados:

- o $\text{TCP}(\ell)$, o $\text{TCP}(r)$ e o S-TCP são NP-completos mesmo quando $\Delta(G) = 3$;
- o $\text{S-TCP}(\ell)$ é NP-completo mesmo quando $\Delta(G) = 4$;
- o $\text{S-TCP}(\ell)$ é solucionável em tempo polinomial se $\Delta(G) = 3$.

Observe que o TCP e o S-TCP são claramente solucionáveis em tempo polinomial quando $\Delta(G) = 2$, visto que (com base no Lema 3.2) toda instância SIM para ambos problemas possui no máximo 2 terminais, e assim podemos solucioná-los através da aplicação de um algoritmo polinomial para o problema de encontrar um caminho mais curto entre os (no máximo dois) vértices terminais. Dessa forma, os resultados por nós propostos estabelecem uma dicotomia quanto à complexidade do TCP e do S-TCP no que concerne ao grau máximo do grafo de entrada.

É importante mencionar que a maior parte das demonstrações que apresentamos neste capítulo são inspiradas nas demonstrações devidas a Dourado et al. [11]. Ademais, embora não declarado em [10, 11], um resultado obtido diretamente da prova

de NP-completude do $\text{TCP}(r)$, descrita no Teorema 2.2, é o de que o $\text{TCP}(r)$ permanece NP-completo mesmo quando restrito aos grafos com grau máximo 7, tendo em vista que CAMINHO HAMILTONIANO é NP-completo para grafos *cúbicos* (isto é, grafos cujos vértices possuem grau exatamente 3) *cf.* [19].

A seguir, apresentamos as nossas principais contribuições deste capítulo: na Seção 5.1 provamos os resultados referentes ao TCP e na Seção 5.2 provamos os resultados referentes ao S-TCP. Entretanto, apresentamos antes disso algumas proposições mais gerais, relacionando a quantidade de roteadores em uma árvore de conexão com o grau máximo e o número de terminais, que nos serão úteis, por exemplo, para provar que o S-TCP(ℓ) é solucionável em tempo polinomial quando $\Delta(G) = 3$, além de possivelmente serem ferramentas úteis para a obtenção de resultados futuros.

Dada uma árvore de conexão T para W , denotamos por $\mathbf{R}_W(T)$ o conjunto formado pelos vértices pertencentes a W com grau maior ou igual a 3 em T e denotamos por $\mathbf{L}_W(T)$ o conjunto formado pelos vértices pertencentes a W com grau exatamente 2 em T . Definimos ainda $\mathbf{R}^*(T) = \mathbf{R}(T) \cup \mathbf{R}_W(T)$ e denotamos por $\mathbf{L}'(T)$ o subconjunto de $\mathbf{L}(T) \cup \mathbf{L}_W(T)$ formado pelos vértices, com grau 2 em T , que pertencem a um caminho em T cujos (dois) extremos pertencem a $\mathbf{R}^*(T)$.

Proposição 5.1. *Seja G um grafo e $W \subseteq V(G)$ um conjunto de terminais. Se T é uma árvore de conexão de G para W , então $|\mathbf{R}(T)| \leq |W| - 2$.*

Demonstração. Suponha que $|\mathbf{R}(T)| > |W| - 2$. Seja T^* o subgrafo de T induzido por $\mathbf{L}'(T) \cup \mathbf{R}^*(T)$. Por definição, T^* é uma árvore. Ademais, pode-se verificar facilmente que

$$|\text{folhas}(T)| = \sum_{v \in \mathbf{R}^*(T)} (d_T(v) - d_{T^*}(v)). \quad (5.1)$$

Observe ainda que,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbf{R}^*(T)} d_{T^*}(v) &= \sum_{v \in V(T^*) \setminus \mathbf{L}'(T)} d_{T^*}(v) = \sum_{v \in V(T^*)} d_{T^*}(v) - 2|\mathbf{L}'(T)| \\ &= 2|E(T^*)| - 2|\mathbf{L}'(T)| \\ &= 2(|\mathbf{L}'(T)| + |\mathbf{R}^*(T)| - 1) - 2|\mathbf{L}'(T)| \\ &= 2|\mathbf{R}^*(T)| - 2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dessa forma, substituindo a Equação (5.2) na Equação (5.1) obtemos

$$\begin{aligned} |\text{folhas}(T)| &= \sum_{v \in \mathbf{R}^*(T)} (d_T(v) - 2|\mathbf{R}^*(T)| + 2) \\ &\geq 3|\mathbf{R}^*(T)| - 2|\mathbf{R}^*(T)| + 2 = |\mathbf{R}^*(T)| + 2 \\ &= |\mathbf{R}(T)| + |\mathbf{R}_W(T)| + 2 \\ &> |W| + |\mathbf{R}_W(T)| \quad (\text{por hipótese } |\mathbf{R}(T)| > |W| - 2). \end{aligned}$$

Entretanto, isso é um absurdo, pois como T é uma árvore de conexão para W , $\text{folhas}(T) \subseteq W$, e assim $|\text{folhas}(T)| \leq |W|$. Portanto, $|\mathbf{R}(T)| \leq |W| - 2$. \square

Corolário 5.2. *Se T é uma árvore de conexão de G para W , então $|\mathbf{R}(T)| + |\mathbf{R}_W(T)| \leq |\text{folhas}(T)| - 2 \leq |W| - 2$.*

Demonstração. Segue imediatamente da demonstração da Proposição 5.1. \square

Proposição 5.3. *Se T é uma árvore de conexão estrita de G para W e $\Delta(G) \geq 3$, então $|\mathbf{R}(T)| \geq \lceil \frac{|W|-2}{\Delta(G)-2} \rceil$.*

Demonstração. De modo similar à demonstração da Proposição 5.1, temos que

$$|W| = |\text{folhas}(T)| = \sum_{v \in \mathbf{R}^*(T)} (d_T(v) - d_{T^*}(v)) \quad (\text{visto que } T \text{ é estrita}),$$

onde T^* é novamente o subgrafo de T induzido por $\mathbf{L}'(T) \cup \mathbf{R}^*(T)$. Além disso, como $\mathbf{R}_W(T) = \emptyset$, obtemos pela Equação (5.2) que

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbf{R}^*(T)} d_{T^*}(v) &= 2|\mathbf{R}^*(T)| - 2 = 2|\mathbf{R}(T)| - 2 \\ \Rightarrow |W| &= \sum_{v \in \mathbf{R}(T)} (d_T(v) - 2|\mathbf{R}(T)| + 2) \\ &\leq \Delta(G)|\mathbf{R}(T)| - 2|\mathbf{R}(T)| + 2 \\ &= (\Delta(G) - 2)|\mathbf{R}(T)| + 2. \end{aligned}$$

Portanto, como $|\mathbf{R}(T)|$ é inteiro, $|\mathbf{R}(T)| \geq \lceil \frac{|W|-2}{\Delta(G)-2} \rceil$. \square

Corolário 5.4. *Se T é uma árvore de conexão estrita de G para W e $\Delta(G) \geq 3$, então $\lceil \frac{|W|-2}{\Delta(G)-2} \rceil \leq |\mathbf{R}(T)| \leq |W| - 2$.*

Demonstração. Segue imediatamente das Proposições 5.1 e 5.3. \square

5.1 Problema não estrito

Primeiramente, provamos que o $\text{TCP}(\ell)$ é NP-completo mesmo quando restrito aos grafos com grau máximo 3. Para tanto, propomos uma redução polinomial a partir da variante do 3-SAT em que todas as cláusulas possuem dois ou três literais e cada variável aparece exatamente duas vezes de forma positiva e uma vez de forma negativa. Esta variante se trata de um problema NP-completo *cf.* [32], que definimos formalmente conforme segue.

3-SAT(3)

Entrada: Um conjunto de variáveis booleanas X e um conjunto \mathcal{C} de cláusulas sobre X tal que: (1) toda cláusula em \mathcal{C} possui dois ou três literais; e (2) para cada variável $x \in X$, existem exatamente duas cláusulas em \mathcal{C} que contêm o literal positivo de x e exatamente uma cláusula em \mathcal{C} que contêm o literal negativo de x .

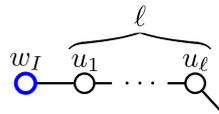
Questão: Existe uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X que satisfaça todas as cláusulas em \mathcal{C} ?

Teorema 5.5. *O $TCP(\ell)$ é NP-completo mesmo quando $\Delta(G) = 3$.*

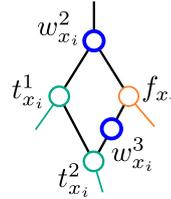
Demonstração. Dada uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3), com conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, construímos uma instância $f(I) = (G, W, r)$ do $TCP(\ell)$, tal que $\Delta(G) = 3$, conforme segue:

- primeiramente, criamos ℓ vértices u_1, u_2, \dots, u_ℓ , juntamente com as arestas $u_i u_{i+1}$, para $1 \leq i \leq \ell - 1$; ademais, criamos o vértice w_I e a aresta $w_I u_1$, formando então o caminho $P_I = \langle w_I, u_1, u_2, \dots, u_\ell \rangle$, que é ilustrado na Figura 5.18a;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos os vértices $w_{x_i}^1$ e v_{x_i} , adicionamos a aresta $w_{x_i}^1 v_{x_i}$ e criamos o *gadget* G_{x_i} , ilustrado na Figura 5.1b, tal que

- $V(G_{x_i}) = \{w_{x_i}^2, w_{x_i}^3\} \cup \{t_{x_i}^1, t_{x_i}^2, f_{x_i}\}$ e
- $E(G_{x_i}) = \{w_{x_i}^2 t_{x_i}^1, t_{x_i}^1 t_{x_i}^2, t_{x_i}^2 w_{x_i}^3, w_{x_i}^3 f_{x_i}, f_{x_i} w_{x_i}^2\}$;



(a) Caminho P_I .



(b) *Gadget* G_{x_i} .

Figura 5.1: *Gadgets* da redução do 3-SAT(3) para o $TCP(\ell)$ com $\Delta(G) = 3$.

- criamos uma *árvore binária completa* T_I enraizada num vértice v_I , tal que as folhas de T_I correspondem aos vértices recém criados $v_{x_1}, v_{x_2}, \dots, v_{x_n}$ (para definição de *árvore binária completa enraizada*, solicitamos que o leitor consulte [40]); além disso, adicionamos a aresta $u_\ell v_I$;
- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, criamos três vértices $w_{C_i}^1, w_{C_i}^2$ e $w_{C_i}^3$ e adicionamos as arestas $w_{C_i}^1 w_{C_i}^2, w_{C_i}^1 w_{C_i}^3$ e $w_{C_i}^2 w_{C_i}^3$ se C_i contém três literais; caso contrário, criamos dois vértices $w_{C_i}^1, w_{C_i}^2$ e adicionamos a aresta $w_{C_i}^1 w_{C_i}^2$;

- para cada cláusula $C_\iota \in \mathcal{C}$, adicionamos a aresta $t_{x_i}^j w_{C_\iota}^\kappa$ se o κ -ésimo literal em C_ι corresponde à j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $1 \leq j \leq 2$ e $1 \leq \kappa \leq |C_\iota|$;
- por outro lado, adicionamos a aresta $f_{x_i} w_{C_\iota}^\kappa$ se o κ -ésimo literal em C_ι corresponde à (única) ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $1 \leq \kappa \leq |C_\iota|$;
- por fim, definimos $W = \{w_I\} \cup \{w_{x_i}^1, w_{x_i}^2, w_{x_i}^3 \mid x_i \in X\} \cup \{w_{C_\iota}^\kappa \mid 1 \leq \kappa \leq |C_\iota|, C_\iota \in \mathcal{C}\}$ e $r = |V(G) \setminus W| - \ell$.

Figura 5.2 exemplifica o grafo G e o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul), obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3), que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$.

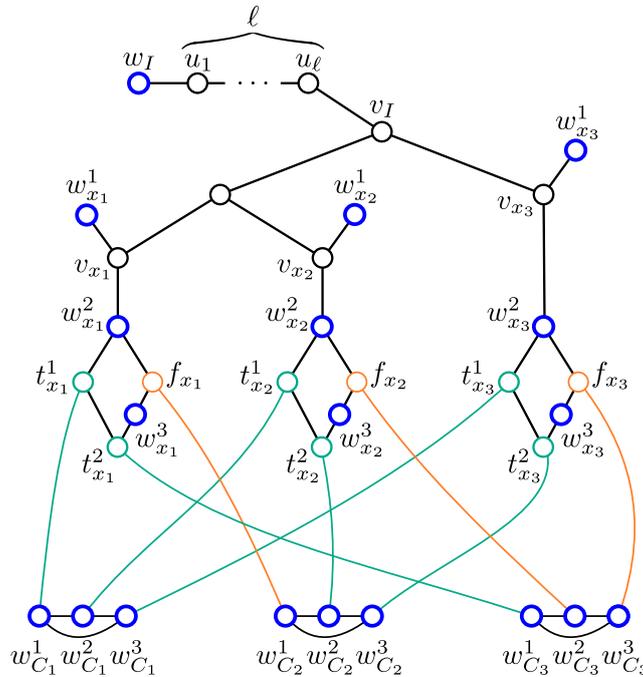


Figura 5.2: Grafo G , com $\Delta(G) = 3$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3).

Não é difícil verificar que o grau máximo de G é 3. Mostramos agora que I é uma instância SIM do 3-SAT(3) se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do TCP(ℓ).

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfatível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis em X que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Com base em α , construímos uma árvore de conexão T de G para W conforme segue:

- adicionamos o caminho P_I a T ;

- adicionamos a árvore binária completa T_I a T , juntamente com os vértices $w_{x_i}^1$ e as arestas $w_{x_i}^1 v_{x_i}$, para todo $x_i \in X$; adicionamos também a aresta $u_\ell v_I$;
- para cada variável $x_i \in X$, adicionamos os vértices $w_{x_i}^2$ e $w_{x_i}^3$ e a aresta $v_{x_i} w_{x_i}^2$ a T ;
- se $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$, então adicionamos os vértices $t_{x_i}^1$ e $t_{x_i}^2$ a T , juntamente com todos os seus vizinhos e as arestas que os incidem em G ;
- por outro lado, se $\alpha(x_i) = \textit{falso}$, então adicionamos o vértice f_{x_i} a T , juntamente com todos os seus vizinhos e as arestas que o incide em G ;

Como por hipótese α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , temos que, para cada $C_i \in \mathcal{C}$, existe ao menos um vértice $t_{x_i}^j$ ou f_{x_i} que conecte um dos vértice $w_{C_i}^1$, $w_{C_i}^2$ (ou $w_{C_i}^3$, se $|C_i| = 3$) a T , para algum $j \in \{1, 2\}$. Seja então $w_{C_i}^{\kappa}$ um vértice correspondente à cláusula $C_i \in \mathcal{C}$ que foi adicionado a T através de um dos dois últimos passos. Se existir algum vértice $w_{C_i}^{\kappa'}$ que ainda não pertence a T , para $1 \leq \kappa' \leq |C_i|$, então podemos conectá-lo a T através da adição da aresta $w_{C_i}^{\kappa'} w_{C_i}^{\kappa}$. Finalizamos assim a construção do grafo T .

Figura 5.3 exemplifica uma árvore de conexão T para W concernente à instância $f(I)$ da Figura 5.2, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \textit{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \textit{verdadeiro}$ e $\alpha(x_3) = \textit{falso}$. Neste exemplo, $|\mathbf{L}(T)| = \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| = 10$.

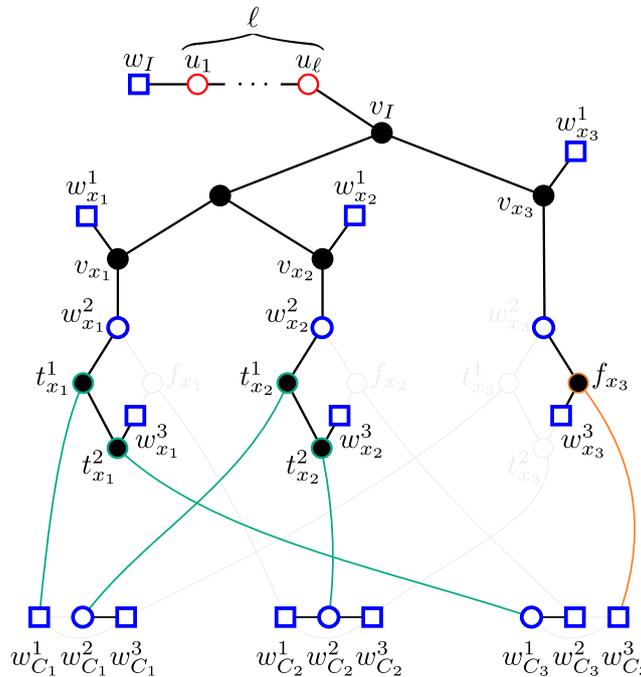


Figura 5.3: Árvore de conexão de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

Por construção, temos que T é uma árvore de conexão de G para W , cujo conjunto de elos é $\mathbf{L}(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$ e cujo conjunto de roteadores é $\mathbf{R}(T) =$

$V(T_I) \cup \{t_{x_i}^1, t_{x_i}^2 \mid \alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}, x_i \in X\} \cup \{f_{x_i} \mid \alpha(x_i) = \textit{falso}, x_i \in X\}$. Logo, $|\mathbf{L}(T)| = \ell$ e, claramente, $|\mathbf{R}(T)| \leq |V(G) \setminus W| - \ell$. Dessa forma, podemos concluir que $f(I)$ é de fato uma instância SIM do $\text{TCP}(\ell)$.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM do $\text{TCP}(\ell)$. Logo, G admite uma árvore de conexão T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r = |V(G) \setminus W| - \ell$. Note que, o caminho P_I necessariamente está contido em T , já que todo caminho em G entre o terminal w_I e qualquer outro terminal pertencente a $W \setminus \{w_I\}$ contém todos os vértices de P_I . Dessa forma, como os vértices u_1, u_2, \dots, u_ℓ possuem grau 2 no próprio grafo G , estes são elos de T . Conseqüentemente, nenhum outro vértice de T pode ser um elo, pois caso contrário $|\mathbf{L}(T)| > \ell$, o que seria um absurdo. Assim, os demais vértices de T são ou terminais ou roteadores. No entanto, como $\Delta(G) = 3$, se $\rho \in \mathbf{R}(T)$, então $N_T(\rho) = N_G(\rho)$. Logo, se $t_{x_i}^1 \in V(T)$, então $w_{x_i}^2, t_{x_i}^2 \in N_T(t_{x_i}^1)$ e, por conseguinte, $w_{x_i}^3 \in N_T(t_{x_i}^2)$. Analogamente, se $t_{x_i}^2 \in V(T)$, então $w_{x_i}^3, t_{x_i}^1 \in N_T(t_{x_i}^2)$ e, por conseguinte, $w_{x_i}^2 \in N_T(t_{x_i}^1)$. Por outro lado, se $f_{x_i} \in V(T)$, então $w_{x_i}^2, w_{x_i}^3 \in N_T(f_{x_i})$. Dessa forma, como T é acíclico, se $t_{x_i}^1$ ou $t_{x_i}^2$ pertencem a $V(T)$, então $f_{x_i} \notin V(T)$; reciprocamente, se $f_{x_i} \in V(T)$, então $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2 \notin V(T)$.

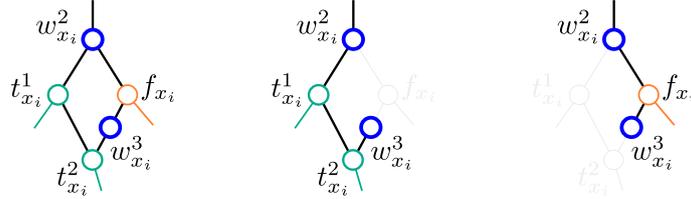


Figura 5.4: Vizinhança dos vértices $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2$ e f_{x_i} em T .

Definimos então uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\textit{verdadeiro}, \textit{falso}\}$ para as variáveis em X como segue: $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$ se, e somente se, $f_{x_i} \notin V(T)$.

Seja $W_{C_i} = \{w_{C_i}^\kappa \mid 1 \leq \kappa \leq |C_i|\}$, onde $C_i \in \mathcal{C}$. Como por hipótese $W_{C_i} \subset W \subset V(T)$ e todo caminho em G entre $w_{C_i} \in W_{C_i}$ e um outro terminal $w \in W \setminus W_{C_i}$ contém um dos vértices $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2$ ou f_{x_i} , para algum $x_i \in X$, todas as cláusulas em \mathcal{C} são satisfeitas por α . Com efeito, sabemos que, para toda cláusula $C_i \in \mathcal{C}$ existe um vértice $w_{C_i}^* \in \{w_{C_i}^1, \dots, w_{C_i}^{|C_i|}\}$ tal que $w_{C_i}^*$ é adjacente em T a $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2$ ou f_{x_i} , para algum $x_i \in X$. Se $w_{C_i}^* t_{x_i}^1$ ou $w_{C_i}^* t_{x_i}^2$ pertencem a $E(T)$, então f_{x_i} não pertence a $V(T)$, e assim (por construção) a atribuição $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$ satisfaz C_i . Semelhantemente, se $w_{C_i}^* f_{x_i} \in E(T)$, então obviamente $f_{x_i} \in V(T)$, e assim (por construção) a atribuição $\alpha(x_i) = \textit{falso}$ satisfaz C_i . Portanto, I é de fato uma instância SIM do $3\text{-SAT}(3)$. \square

Uma consequência complementar ao enunciado no Teorema 5.5 é a de que a NP-completude do $\text{TCP}(\ell)$ não depende da restrição quanto à limitação do número máximo de roteadores. Conforme pode-se notar, na demonstração do referido teorema definimos o limite para o número máximo de roteadores tão grande quanto se

possa, a saber: $r = |V(G) \setminus W| - \ell$, além disso não utilizamos em qualquer momento o fato de existir tal limitação. Portanto, temos que o $\text{TCP}(\ell)$ com $\Delta(G) = 3$ é NP-completo mesmo se considerarmos a sua versão relaxada na qual não existe um limite para o número de roteadores nas árvores de conexão.

O problema que consideramos neste momento é o $\text{TCP}(r)$ restrito aos grafos com grau máximo 3, para o qual propomos uma prova de NP-completude. A demonstração que realizamos consiste numa redução polinomial a partir de uma variante do CAMINHO HAMILTONIANO, que também mostramos pertencer à classe de problemas NP-completo, conforme segue.

CICLO HAMILTONIANO

Entrada: Um grafo G .

Questão: O grafo G é hamiltoniano?

Lema 5.6. *O problema CICLO HAMILTONIANO é NP-completo mesmo quando restrito aos grafos com grau máximo 3 que contêm ao menos dois vértices de grau 2 adjacentes.*

Demonstração. Itai et al. provaram que CICLO HAMILTONIANO é NP-completo mesmo em grafos com grau máximo 3 [22]. Com base na demonstração proposta por estes autores (Lema 2.1 de [22]), podemos supor sem perda de generalidade que o grafo de entrada G contém ao menos um vértice de grau 2, digamos o vértice $v \in V(G)$. Seja $e = uv \in E(G)$ uma aresta incidente a v arbitrária. Ao subdividirmos a aresta e , conforme ilustramos na Figura 5.5, obtemos um grafo G' com grau máximo 3 que contém dois vértices de grau 2 adjacentes. Note ainda que, G é hamiltoniano se, e somente se, G' é hamiltoniano. É fácil verificar a validade desta última afirmação, pois: se C é um ciclo hamiltoniano de G , então necessariamente C contém como subcaminho o caminho $\langle v, u \rangle$, assim basta substituímos $\langle v, u \rangle$ em C por $\langle v, v_e, u \rangle$, que então teremos um ciclo hamiltoniano de G' ; por outro lado, se C' é um ciclo hamiltoniano de G' , então necessariamente C' contém como subcaminho o caminho $\langle v, v_e, u \rangle$, assim basta — de maneira inversa ao caso anterior — substituir $\langle v, v_e, u \rangle$ em C' por $\langle v, u \rangle$, que então teremos um ciclo hamiltoniano de G . \square



Figura 5.5: Subdivisão da aresta e .

st -CAMINHO HAMILTONIANO

Entrada: Um grafo G e dois vértices distintos $s, t \in V(G)$.

Questão: O grafo G admite um caminho hamiltoniano entre s e t ?

Lema 5.7. *O problema st -CAMINHO HAMILTONIANO é NP-completo mesmo quando restrito aos grafos com grau máximo 3 nos quais s e t possuem grau 1.*

Demonstração. Para provarmos este resultado realizamos uma redução polinomial a partir do problema descrito no lema anterior, o CICLO HAMILTONIANO restrito aos grafos com grau máximo 3 que contêm dois vértices de grau 2 adjacentes. Seja então G um grafo com grau máximo 3 e sejam $u, v \in V(G)$ tais que $uv \in E(G)$ e $d_G(u) = d_G(v) = 2$. A partir de G e de u e v , criamos um grafo G' simplesmente através da adição dos vértices s e t e das arestas sv e ut , conforme ilustramos na Figura 5.6. É fácil verificar que G admite um ciclo hamiltoniano se, e somente se, G' admite um st -caminho hamiltoniano. \square

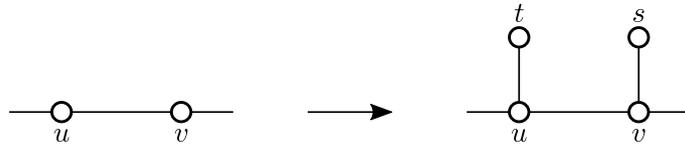


Figura 5.6: Adição dos vértices s e t e das arestas sv e ut .

Teorema 5.8. *O $TCP(r)$ é NP-completo mesmo quando $\Delta(G) = 3$.*

Demonstração. Seja $I = (G, s, t)$ uma instância do st -CAMINHO HAMILTONIANO, onde G é um grafo com grau máximo 3 e $d_G(s) = d_G(t) = 1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que todos os vértices em $V(G) \setminus \{s, t\}$ possuem grau ao menos 2 em G , pois caso contrário I seria obviamente uma instância NÃO do st -CAMINHO HAMILTONIANO. Definimos a partir de I uma instância $f(I) = (G', W, \ell)$ do $TCP(r)$ conforme segue:

- primeiramente, criamos um *gadget* G'_I , conforme ilustrado na Figura 5.7, tal que

- $V(G'_I) = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r\} \cup \{w_{\rho_1}^1, w_{\rho_1}^2\} \cup \{w_{\rho_i} \mid 2 \leq i \leq r\}$ e
- $E(G'_I) = \{\rho_i \rho_{i+1} \mid 1 \leq i \leq r-1\} \cup \{w_{\rho_1}^1 \rho_1, w_{\rho_1}^2 \rho_1\} \cup \{\rho_i w_{\rho_i} \mid 2 \leq i \leq r\}$;

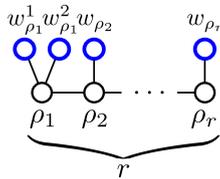


Figura 5.7: *Gadget* G'_I .

- adicionamos os vértices s e t a G' , juntamente com a aresta $\rho_r s$;
- para cada vértice $v \in V(G)$, adicionamos v a G' ;
- se $d_G(v) = 3$, então criamos um *gadget* G'_v , conforme ilustrado na Figura 5.8a, tal que

- $V(G_v) = \{v, v_1^1, v_1^2, v_2, v_3^1, v_3^2\}$ e
- $E(G_u) = \{vv_1^1, vv_3^1, v_1^1v_2, v_3^1v_2, v_1^1v_1^2, v_3^1v_3^2\}$;
- por outro lado, se $d_G(v) = 2$, então criamos um *gadget* G_v , conforme ilustrado na Figura 5.8b, tal que
 - $V(G_v) = \{v, v_1^1, v_1^2, v_2^1, v_2^2\}$ e
 - $E(G_u) = \{vv_1^1, vv_2^1, v_1^1v_1^2, v_2^1v_2^2\}$;

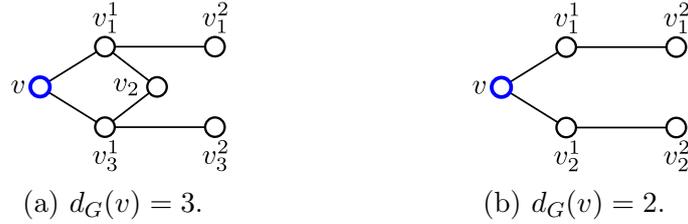


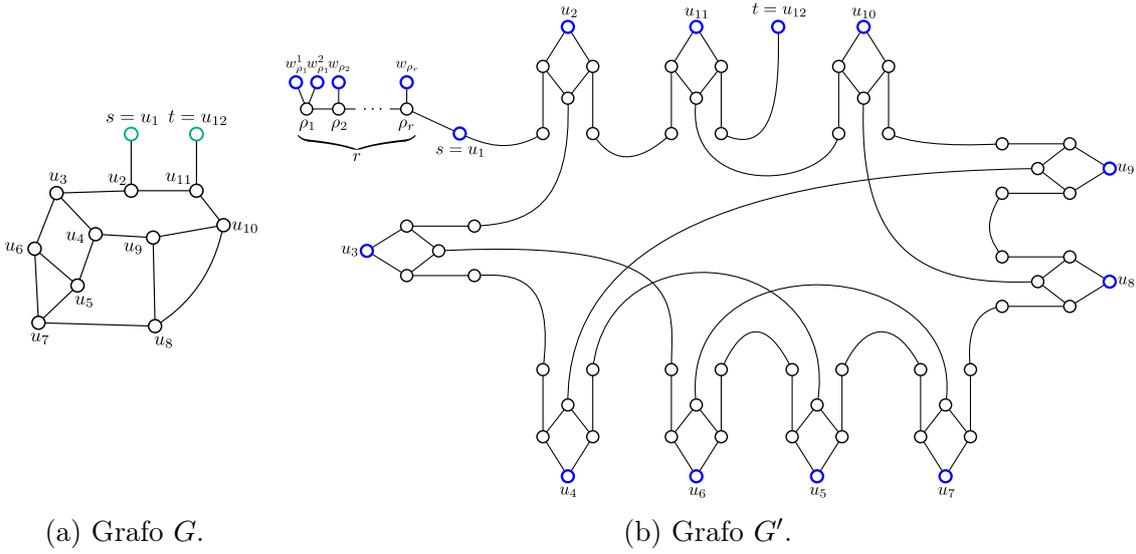
Figura 5.8: *Gadget* G_v .

- se $uv \in E(G)$, $d_G(u) \geq 2$ e $d_G(v) \geq 2$, então selecionamos um vértice $u^* \in \{u_1^2, u_2, u_3^2\}$ (ou $u^* \in \{u_1^2, u_2^2\}$ se $d_G(u) = 2$) tal que até então não o é adjacente em G' a qualquer vértice que não pertença a $V(G_u)$ e, da mesma forma, selecionamos um vértice $v^* \in \{v_1^2, v_2, v_3^2\}$ (ou $v^* \in \{v_1^2, v_2^2\}$ se $d_G(v) = 2$) tal que até então não o é adjacente em G' a qualquer vértice que não pertença a $V(G_v)$; realizadas essas seleções, adicionamos a aresta u^*v^* a G' ;
- se $uv \in E(G)$ mas u (ou v) possui grau 1 em G , então definimos o vértice u^* (ou v^* , respectivamente), do passo anterior, como sendo o próprio vértice u (ou v , respectivamente);
- para facilitar a argumentação a seguir, definimos um mapeamento $\alpha: E(G) \rightarrow E(G')$ conforme descrevemos nestes dois últimos passos, ou seja, $\alpha(uv) = u^*v^*$;
- por fim, definimos $W = \{v \mid v \in V(G)\} \cup \{w_1^1, w_1^2\} \cup \{w_i \mid 2 \leq i \leq r\}$ e $\ell = 4(n - 2)$, onde $n = |V(G)|$.

Figura 5.9b exemplifica o grafo G' e o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul), obtidos a partir de uma dada instância $I = (G, s, t)$ do st -CAMINHO HAMILTONIANO, que neste caso corresponde ao grafo G e aos vértices s e t ilustrados na Figura 5.9a.

Não é difícil verificar que o grau máximo de G' é 3. Mostramos agora que I é uma instância SIM do st -CAMINHO HAMILTONIANO se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do TCP(r).

(\Rightarrow) Suponha que I seja uma instância SIM do st -CAMINHO HAMILTONIANO. Logo, G admite um caminho hamiltoniano $P = \langle s = u_1, u_2, \dots, u_n = t \rangle$, onde



(a) Grafo G .

(b) Grafo G' .

Figura 5.9: Grafo G' , com $\Delta(G') = 3$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (G, s, t)$ do st -CAMINHO HAMILTONIANO.

$n = |V(G)|$. Com base em P , construímos uma árvore de conexão T para W conforme segue:

- primeiramente, adicionamos o *gadget* G'_I a T ;
- adicionamos o vértice $s = u_1$ e as arestas $\rho_r s$ e $\alpha(su_2)$ a T ;
- analogamente, adicionamos o vértice $t = u_n$ e a aresta $\alpha(tu_{n-1})$ a T ;
- para cada subsequência $\langle u_{i-1}, u_i, u_{i+1} \rangle$ de P , adicionamos os vértices x_i^* e y_i^* a T , onde $\alpha(u_{i-1}u_i) = u_{i-1}^* x_i^*$ e $\alpha(u_i u_{i+1}) = y_i^* u_{i+1}^*$; ademais,
 - se $d_G(u_i) = 2$, então simplesmente adicionamos o *gadget* G_{u_i} a T , o qual ilustramos na Figura 5.10a;
 - por outro lado, se $d_G(u_i) = 3$, então (a menos de simetria) adicionamos a T um dos dois subgrafos de G_{u_i} ilustrados na Figura 5.10b, dependendo de quais vértices de G_{u_i} os vértices x_i^* e y_i^* representam;

Figura 5.11b exemplifica a árvore de conexão T de G' para W obtida a partir do caminho hamiltoniano $P = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12} \rangle$ concernente à instância $f(I)$ da Figura 5.9, que é ilustrado na Figura 5.11a. Neste exemplo, temos que $|L(T)| = 4(12 - 2) = 40$ e $|R(T)| = r$.

Por construção, temos que T é uma árvore de conexão de G' para W , cujo conjunto de elos é formado por precisamente quatro vértices de cada *gadget* G_u (correspondentes às arestas incidentes a u que estão presentes no caminho hamiltoniano P), para $u \in V(G) \setminus \{s, t\}$, e cujo conjunto de roteadores é dado por

T e em T' , pois caso contrário T seria desconexo ou $W' \not\subseteq V(T')$. Dessa forma, os únicos vértices de T' que possuem grau 1 são s e t e, assim, a árvore T' consiste num caminho cujos extremos são s e t e cujo conjunto de vértices internos contém $W' \setminus \{s, t\} = V(G) \setminus \{s, t\}$. Consequentemente, para todo $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$, T' deve conter um dos subgrafos do *gadget* G_v ilustrados na Figura 5.12a, pois caso contrário: $v \notin V(T')$, ou existiria um vértice diferente de s e de t com grau 1 em T' , ou T' conteria um roteador, conforme ilustramos na Figura 5.12b.

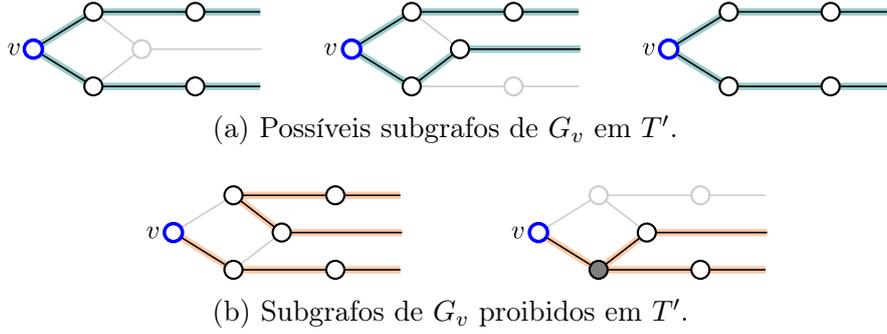


Figura 5.12: Possíveis subgrafos de G_v em T' , para $v \in V(G) \setminus \{s, t\}$.

Considere então a sequência $S = \langle s = w'_1, w'_2, \dots, w'_n = t \rangle$, formada pelos terminais em W' , ordenados de acordo com as suas respectivas ordens de aparição no caminho T' , no sentido de que, $u = w'_i$ e $v = w'_{i+1}$ se, e somente se, o caminho $P_{u,v}$ em T' entre u e v é tal que $V(P_{u,v}) \cap W' \setminus \{u, v\} = \emptyset$, para $1 \leq i \leq n - 1$. Com base no que argumentamos no parágrafo anterior e na construção de $f(I)$, pode-se verificar sem muita dificuldade que S é um caminho hamiltoniano entre s e t no grafo G . Portanto, I é uma instância SIM do st -CAMINHO HAMILTONIANO. \square

De forma similar a NP-completude dos problemas CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP(r) e SEMIESTRUTURADO S-TCP(r), a NP-completude do S-TCP(r) com $\Delta(G) = 3$ não depende da restrição quanto ao número máximo de elos permitidos nas árvores de conexão. Conforme pode-se observar, não utilizamos em qualquer momento na demonstração do Teorema 5.8 o fato de existir um limite superior para o número de elos.

5.2 Problema estrito

Provamos agora que o S-TCP é NP-completo mesmo quando restrito aos grafos com grau máximo 3. A demonstração que realizamos consiste numa redução polinomial a partir de uma versão restrita do problema UM-EM-TRÊS 3-SAT (do inglês, *one-in-three 3-SAT*). A seguir, descrevemos uma definição formal para o referido problema e, logo em seguida, definimos a sua variante que utilizamos para provar que o S-TCP com $\Delta(G) = 3$ é NP-completo.

UM-EM-TRÊS 3-SAT

Entrada: Um conjunto de variáveis booleanas X e um conjunto \mathcal{C} de cláusulas sobre X tal que cada cláusula $C \in \mathcal{C}$ possui exatamente três literais, ou seja, $|C| = 3$.

Questão: Existe uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X tal que toda cláusula $C \in \mathcal{C}$ possui precisamente um literal verdadeiro?

O problema UM-EM-TRÊS 3-SAT é NP-completo mesmo quando restrito ao caso em que toda cláusula $C \in \mathcal{C}$ possui apenas literais positivos *cf.* [19], sendo denominado neste caso MONÓTOMO UM-EM-TRÊS 3-SAT.

UM-EM-TRÊS 3-SAT(3)

Entrada: Um conjunto de variáveis booleanas X e um conjunto \mathcal{C} de cláusulas sobre X tal que: (1) toda cláusula em \mathcal{C} possui dois ou três literais; e (2) para cada variável $x \in X$, existem exatamente duas cláusulas em \mathcal{C} que contêm o literal positivo de x e exatamente uma cláusula em \mathcal{C} que contêm o literal negativo de x .

Questão: Existe uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X tal que toda cláusula $C \in \mathcal{C}$ possui precisamente um literal verdadeiro?

Proposição 5.9. *O problema UM-EM-TRÊS 3-SAT(3) é NP-completo.*

Demonstração. Provamos este resultado através de uma redução polinomial a partir do problema MONÓTOMO UM-EM-TRÊS 3-SAT. Seja então $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do referido problema, onde $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é o conjunto de variáveis e $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ é o conjunto de cláusulas. Construimos a partir de I uma instância $f(I) = (X', \mathcal{C}')$ do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3), conforme segue:

- definimos $X' = X \cup \{y_i^j \mid 2 \leq j \leq p_i\}$, onde p_i denota o número de ocorrências do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} ;
- para cada variável $x_i \in X$ tal que $p_i \geq 2$, seja $S_i = \langle C_1^i, C_2^i, \dots, C_{p_i}^i \rangle$ uma ordenação arbitrária das cláusulas em \mathcal{C} que contêm o literal positivo de x_i ;
- para todo j com $2 \leq j \leq p_i$, substituímos o literal $x_i \in C_j^i$ pelo literal y_i^j ;
- após realizar a operação descrita no passo anterior para toda variável $x_i \in X$, com $p_i \geq 2$, adicionamos todas as cláusulas resultantes dessa operação a \mathcal{C}' ;
- para cada variável $x_i \in X$ tal que $p_i \geq 2$, adicionamos as cláusulas $\{x_i, \bar{y}_i^1\}, \{y_i^1, \bar{y}_i^2\}, \dots, \{y_i^{p_i-1}, \bar{y}_i^{p_i}\}, \{y_i^{p_i}, \bar{x}_i\}$ a \mathcal{C}' ;

- por fim, para cada variável $x_i \in X$ tal que $p_i = 1$, adicionamos a cláusula $\{x_i, \bar{x}_i\}$ a \mathcal{C}' .

Como por hipótese toda cláusula $C \in \mathcal{C}$ possui apenas literais positivos, obtemos que $f(I)$ é de fato uma instância do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3), isto é, para toda variável $x_i \in X'$, existem exatamente duas cláusulas em \mathcal{C}' que contêm o literal positivo de x_i e exatamente uma cláusula em \mathcal{C} que contêm o literal negativo de x_i . Além disso, pode-se verificar sem muita dificuldade que, $\alpha: X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ é uma atribuição de valor verdade que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} se, e somente se, a atribuição $\alpha': X' \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$, definida da forma:

$$\begin{cases} \alpha'(x_i) = \alpha(x_i), \\ \alpha'(y_i^j) = \alpha(x_i), \text{ para todo } j \text{ com } 2 \leq j \leq p_i, \end{cases}$$

satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C}' . Portanto, temos que I é uma instância SIM do MONÓTOMO UM-EM-TRÊS 3-SAT se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3). \square

Teorema 5.10. *O S-TCP é NP-completo mesmo quando $\Delta(G) = 3$.*

Demonstração. Dada uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3), com conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e com conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$, construímos uma instância $f(I) = (G, W, \ell, r)$ do S-TCP, tal que $\Delta(G) = 3$, conforme segue:

- primeiramente, criamos os vértices v_I e w_I , juntamente com a aresta $v_I w_I$;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos os vértices w'_{x_i} e $v^1_{x_i}$, adicionamos as arestas $w'_{x_i} v^1_{x_i}$ e criamos o *gadget* G_{x_i} , ilustrado na Figura 5.13, tal que

- $V(G_{x_i}) = \{v^2_{x_i}, u^1_{x_i}, u^2_{x_i}\} \cup \{t^1_{x_i}, t^2_{x_i}, f_{x_i}\} \cup \{w_{x_i}\}$ e
- $E(G_{x_i}) = \{v^2_{x_i} u^1_{x_i}, u^1_{x_i} t^1_{x_i}, t^1_{x_i} t^2_{x_i}, t^2_{x_i} w_{x_i}, w_{x_i} f_{x_i}, f_{x_i} u^2_{x_i}, u^2_{x_i} v^2_{x_i}\};$

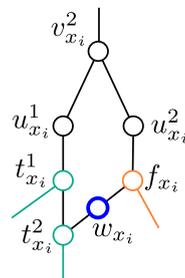


Figura 5.13: *Gadget* G_{x_i} da redução do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3) para o S-TCP com $\Delta(G) = 3$.

- criamos uma árvore binária completa T_I enraizada no vértice v_I , tal que as folhas de T_I correspondem aos vértices recém criados $v^1_{x_1}, v^1_{x_2}, \dots, v^1_{x_n}$;

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfatível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis em X que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Com base em α , construímos uma árvore de conexão estrita T de G para W conforme segue:

- adicionamos a árvore binária completa T_I a T , juntamente com os vértices w'_{x_i} e as arestas $w'_{x_i} v_{x_i}^1$, para todo $x_i \in X$; adicionamos também o vértice w_I e a aresta $w_I v_I$;
- para cada variável $x_i \in X$, se $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$, então adicionamos o subgrafo H_{x_i} de G_{x_i} a T tal que

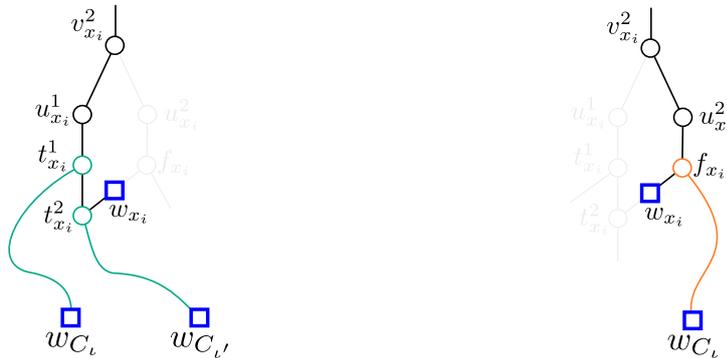
- $V(H_{x_i}) = \{v_{x_i}^2, u_{x_i}^1, t_{x_i}^1, t_{x_i}^2, w_{x_i}\}$ e
- $E(H_{x_i}) = \{v_{x_i}^2 u_{x_i}^1, u_{x_i}^1 t_{x_i}^1, t_{x_i}^1 t_{x_i}^2, t_{x_i}^1 w_{x_i}\}$;

além disso, adicionamos também a T os vértices $w_{C_i}, w_{C_{i'}} \in V(G)$ e as arestas $t_{x_i}^1 w_{C_i}, t_{x_i}^2 w_{C_{i'}} \in E(G)$, conforme ilustrado na Figura 5.15a, onde C_i e $C_{i'}$ são as duas (únicas) cláusulas em \mathcal{C} que contêm o literal positivo de x_i ;

- por outro lado, se $\alpha(x_i) = \text{falso}$, então adicionamos o subgrafo \overline{H}_{x_i} de G_{x_i} a T tal que

- $V(\overline{H}_{x_i}) = \{v_{x_i}^2, u_{x_i}^2, f_{x_i}, w_{x_i}\}$ e
- $E(\overline{H}_{x_i}) = \{v_{x_i}^2 u_{x_i}^2, u_{x_i}^2 f_{x_i}, f_{x_i} w_{x_i}\}$;

além disso, adicionamos também a T o vértice $w_{C_i} \in V(G)$ e a aresta $f_{x_i} w_{C_i} \in E(G)$, conforme ilustrado na Figura 5.15b, onde C_i é a (única) cláusula em \mathcal{C} que contém o literal negativo de x_i ;



(a) Subgrafo H_{x_i} com as arestas $t_{x_i}^1 w_{C_i}$ e $t_{x_i}^2 w_{C_{i'}}$. (b) Subgrafo \overline{H}_{x_i} com a aresta $f_{x_i} w_{C_i}$.

Figura 5.15: Subgrafos H_{x_i} e \overline{H}_{x_i} do gadget G_{x_i} .

Figura 5.16 exemplifica uma árvore de conexão T para W concernente à instância $f(I)$ da Figura 5.14, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \text{falso}$,

$\alpha(x_2) = \text{falso}$, $\alpha(x_3) = \text{verdadeiro}$, $\alpha(x_4) = \text{falso}$, $\alpha(x_5) = \text{falso}$, $\alpha(x_6) = \text{falso}$,
 $\alpha(x_7) = \text{verdadeiro}$, $\alpha(x_8) = \text{verdadeiro}$ e $\alpha(x_9) = \text{falso}$. Neste exemplo, $|\mathbf{L}(T)| = 18$
e $|\mathbf{R}(T)| = 29$.

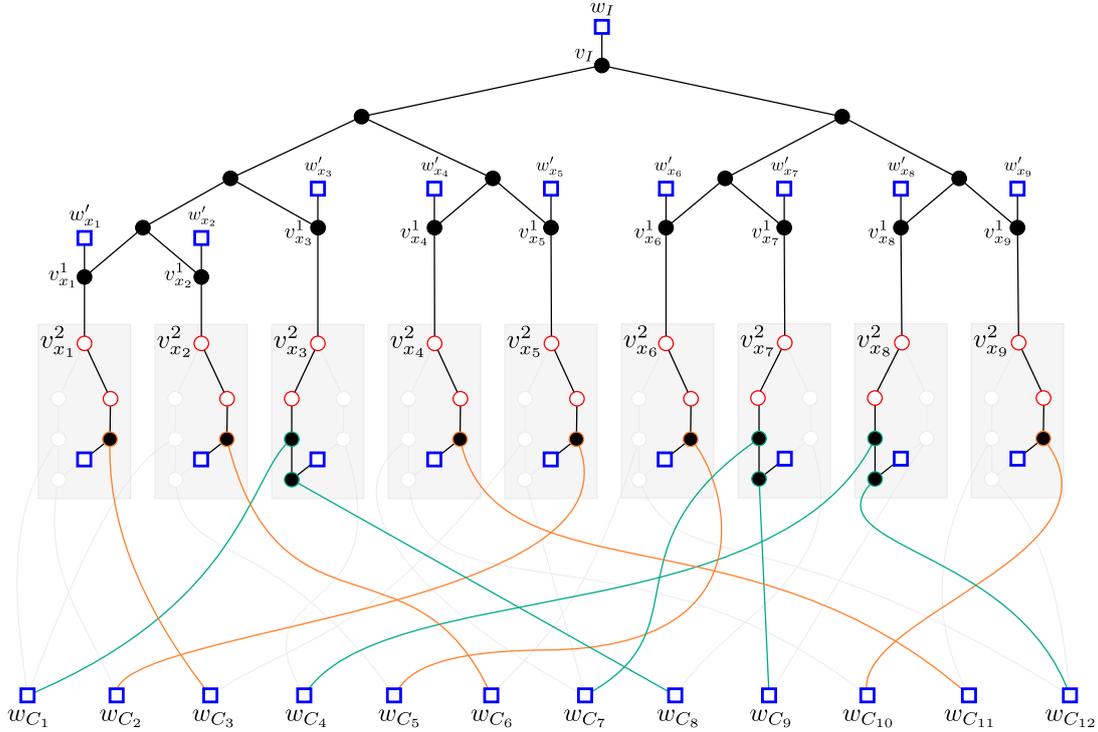


Figura 5.16: Árvore de conexão estrita de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

Como por hipótese α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , temos que todos os terminais $w_{C_i} \in W$ estão presentes em T , para $C_i \in \mathcal{C}$. Ademais, temos que tais terminais são necessariamente folhas de T , visto que cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$ possui apenas um literal verdadeiro, em função de α . Dessa forma, obtemos por construção que T é uma árvore de conexão estrita de G para W . Note ainda que, $\mathbf{R}(T) = V(T_I) \cup \{t_{x_i}^1, t_{x_i}^2 \mid \alpha(x_i) = \text{verdadeiro}, x_i \in X\} \cup \{f_{x_i} \mid \alpha(x_i) = \text{falso}, x_i \in X\}$ e $\mathbf{L}(T) = \{v_{x_i}^2 \mid x_i \in X\} \cup \{u_{x_i}^1 \mid \alpha(x_i) = \text{verdadeiro}, x_i \in X\} \cup \{u_{x_i}^2 \mid \alpha(x_i) = \text{falso}, x_i \in X\}$. Logo, $|\mathbf{L}(T)| = \ell = 2n$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r = 2n + V(T_I)$. Portanto, $f(I)$ é de fato uma instância SIM do S-TCP.

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM do S-TCP. Logo, G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell = 2n$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r = 2n + |V(T_I)|$. Note que, o caminho em T entre os terminais w_{x_i} e w'_{x_i} necessariamente consiste numa das possibilidades $P_{x_i} = \langle w_{x_i}, t_{x_i}^2, t_{x_i}^1, u_{x_i}^1, v_{x_i}^2, v_{x_i}^1, w'_{x_i} \rangle$ ou $\bar{P}_{x_i} = \langle w_{x_i}, f_{x_i}, u_{x_i}^2, v_{x_i}^2, v_{x_i}^1, w'_{x_i} \rangle$, para todo $x_i \in X$. Logo, para toda variável $x_i \in X$, a árvore T contém um dos subgrafos H_{x_i} ou \bar{H}_{x_i} de G_{x_i} . Conseqüentemente, obtemos que f_{x_i} pertence a $V(T)$ se, e somente se, $t_{x_i}^1$ e $t_{x_i}^2$ não pertencem a $V(T)$, pois caso contrário $|\mathbf{L}(T)| > \ell = 2n$ (veja Figura 5.17), o que seria um absurdo.

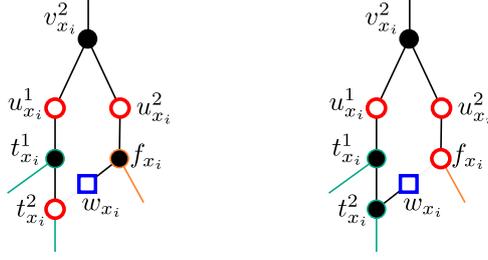


Figura 5.17: *Gadget* G_{x_i} com mais do que dois elos na árvore T , como consequência de f_{x_i} e $t_{x_i}^1$ (ou $t_{x_i}^2$) simultaneamente pertencerem a T .

Definimos então uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis em X como segue: $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$ se, e somente se, $f_{x_i} \notin V(T)$.

Seja $W_{\mathcal{C}} = \{w_{C_l} \mid C_l \in \mathcal{C}\}$. Como por hipótese $W_{\mathcal{C}} \subset W \subset V(T)$ e todo caminho em G entre $w_{\mathcal{C}} \in W_{\mathcal{C}}$ e um outro terminal $w \in W \setminus W_{\mathcal{C}}$ contém um dos vértices $t_{x_i}^1$, $t_{x_i}^2$ ou f_{x_i} , para algum $x_i \in X$, todas as cláusulas em \mathcal{C} são satisfeitas por α . Com efeito, se $w_{C_l} t_{x_i}^1$ ou $w_{C_l} t_{x_i}^2$ pertencem a $E(T)$, então f_{x_i} não pertence a $V(T)$, e assim (por construção) a atribuição $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$ satisfaz C_l . Semelhantemente, se $w_{C_l} f_{x_i} \in E(T)$, então obviamente $f_{x_i} \in V(T)$, e assim (por construção) a atribuição $\alpha(x_i) = \text{falso}$ satisfaz C_l . Por fim, observe que, cada cláusula em \mathcal{C} possui apenas um literal verdadeiro, em função de α , visto que todos os terminais em $W \supset W_{\mathcal{C}}$ são folhas de T e que, para $\rho_{x_i} \in \{t_{x_i}^1, t_{x_i}^2, f_{x_i} \mid x_i \in X\} \cap V(T)$, $N_T(\rho_{x_i}) = N_G(\rho_{x_i})$, pois caso contrário $\rho_{x_i} \notin R(T)$ e, assim, $|L(T)| > \ell = 2n$ ou $\text{folhas}(T) \not\subseteq W$, o que seria um absurdo. Portanto, I é uma instância SIM do UM-EM-TRÊS 3-SAT(3). \square

Teorema 5.11. *O S-TCP(ℓ) é NP-completo mesmo quando $\Delta(G) = 4$.*

Demonstração. Provamos este resultado através de uma redução polinomial a partir do problema 3-SAT(3), muito similar à redução que realizamos no Teorema 5.5. Seja então $I = (X, \mathcal{C})$ uma instância do 3-SAT(3), com conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e com conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$. Construímos uma instância $f(I) = (G, W, r)$ do S-TCP(ℓ), tal que $\Delta(G) = 4$, conforme segue:

- primeiramente, criamos ℓ vértices $u_1, u_2, \dots, u_{\ell}$, juntamente com as arestas $u_i u_{i+1}$, para $1 \leq i \leq \ell - 1$; ademais, criamos o vértice w_I e a aresta $w_I u_1$, formando então o caminho $P_I = \langle w_I, u_1, u_2, \dots, u_{\ell} \rangle$, que é ilustrado na Figura 5.18a;
- para cada variável $x_i \in X$, criamos os vértices $w_{x_i}^1$ e $v_{x_i}^1$, adicionamos a aresta $w_{x_i}^1 v_{x_i}^1$ e criamos o *gadget* G_{x_i} , ilustrado na Figura 5.18b, tal que

- $V(G_{x_i}) = \{v_{x_i}^2\} \cup \{w_{x_i}^2, w_{x_i}^3\} \cup \{t_{x_i}^1, t_{x_i}^2, f_{x_i}\}$ e
- $E(G_{x_i}) = \{w_{x_i}^2 v_{x_i}^2\} \cup \{v_{x_i}^2 t_{x_i}^1, t_{x_i}^1 t_{x_i}^2, t_{x_i}^2 w_{x_i}^3, w_{x_i}^3 f_{x_i}, f_{x_i} v_{x_i}^2\}$;

- criamos uma árvore binária completa T_I enraizada num vértice v_I , tal que as folhas de T_I correspondem aos vértices recém criados $v_{x_1}^1, v_{x_2}^1, \dots, v_{x_n}^1$; além disso, adicionamos a aresta $u_\ell v_I$;

- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, com $|C_i| = 3$, criamos o *gadget* G_{C_i} , ilustrado na Figura 5.18c, tal que

$$\begin{aligned}
- V(G_{C_i}) &= \{v_{C_i}^\kappa, w_{C_i}^\kappa, w'_{C_i}^\kappa \mid \kappa \in \{1, 2, 3, 4, 6\}\} \cup \{v_{C_i}^5, w_{C_i}^5\} \\
- E(G_{C_i}) &= \{v_{C_i}^\kappa w_{C_i}^\kappa, v_{C_i}^\kappa w'_{C_i}^\kappa \mid \kappa \in \{1, 2, 3, 4, 6\}\} \cup \{v_{C_i}^5 w_{C_i}^5\} \\
&\quad \cup \{v_{C_i}^1 v_{C_i}^4, v_{C_i}^4 v_{C_i}^5, v_{C_i}^5 v_{C_i}^2, v_{C_i}^5 v_{C_i}^6, v_{C_i}^6 v_{C_i}^3\};
\end{aligned}$$

- por outro lado, se $|C_i| = 2$, então definimos o *gadget* G_{C_i} , ilustrado na Figura 5.18d, da forma

$$\begin{aligned}
- V(G_{C_i}) &= \{v_{C_i}^\kappa, w_{C_i}^\kappa, w'_{C_i}^\kappa \mid 1 \leq \kappa \leq 4\} \\
- E(G_{C_i}) &= \{v_{C_i}^\kappa w_{C_i}^\kappa, v_{C_i}^\kappa w'_{C_i}^\kappa \mid 1 \leq \kappa \leq 4\} \cup \{v_{C_i}^1 v_{C_i}^3, v_{C_i}^3 v_{C_i}^4, v_{C_i}^4 v_{C_i}^2\};
\end{aligned}$$

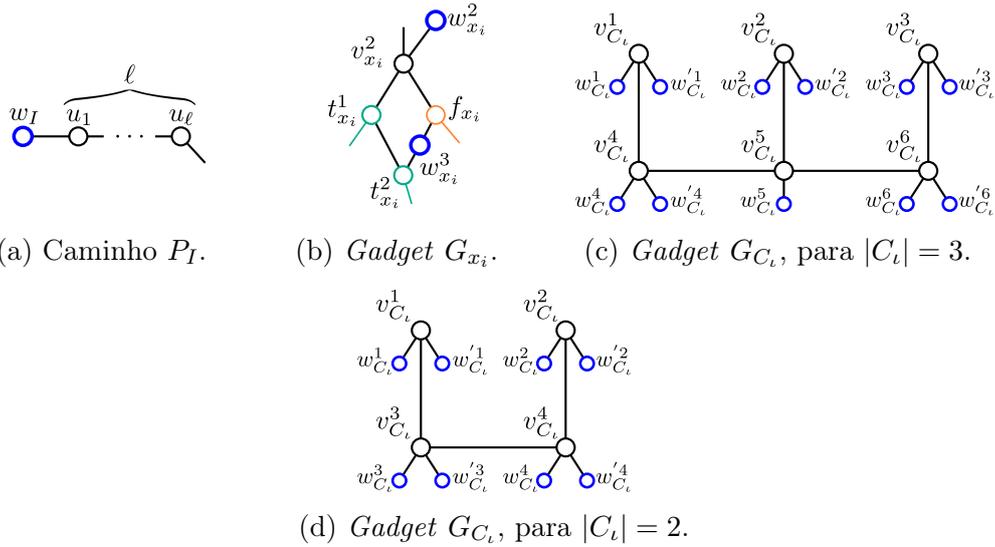


Figura 5.18: *Gadgets* da redução do 3-SAT(3) para o S-TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 4$.

- para cada cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, adicionamos a aresta $t_{x_i}^j v_{C_i}^\kappa$ se o κ -ésimo literal em C_i corresponde à j -ésima ocorrência do literal positivo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $1 \leq j \leq 2$ e $1 \leq \kappa \leq |C_i|$;
- por outro lado, adicionamos a aresta $f_{x_i} v_{C_i}^\kappa$ se o κ -ésimo literal em C_i corresponde à (única) ocorrência do literal negativo da variável $x_i \in X$ nas cláusulas em \mathcal{C} , para $1 \leq \kappa \leq |C_i|$;

- por fim, definimos $W = \{w_I\} \cup \{w_{x_i}^1, w_{x_i}^2, w_{x_i}^3 \mid x_i \in X\} \cup W_{\mathcal{C}}$, onde

$$W_{\mathcal{C}} = \bigcup_{C_i \in \mathcal{C}} \begin{cases} \{w_{C_i}^\kappa, w'_{C_i}^\kappa \mid \kappa \in \{1, 2, 3, 4, 6\}\} \cup \{w_{C_i}^5\} & \text{se } |C_i| = 3 \\ \{w_{C_i}^\kappa, w'_{C_i}^\kappa \mid \kappa \in 1 \leq \kappa \leq 4\} & \text{se } |C_i| = 2, \end{cases}$$

$$\text{e } r = |V(G) \setminus W| - \ell.$$

Figura 5.19 exemplifica o grafo G e o conjunto de terminais W (vértices destacados com contorno azul), obtidos a partir de uma dada instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3), que neste caso corresponde ao conjunto de variáveis $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e ao conjunto de cláusulas $\mathcal{C} = \{C_1 = \{x_1, x_2, x_3\}, C_2 = \{\bar{x}_1, x_2, x_3\}, C_3 = \{x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$.

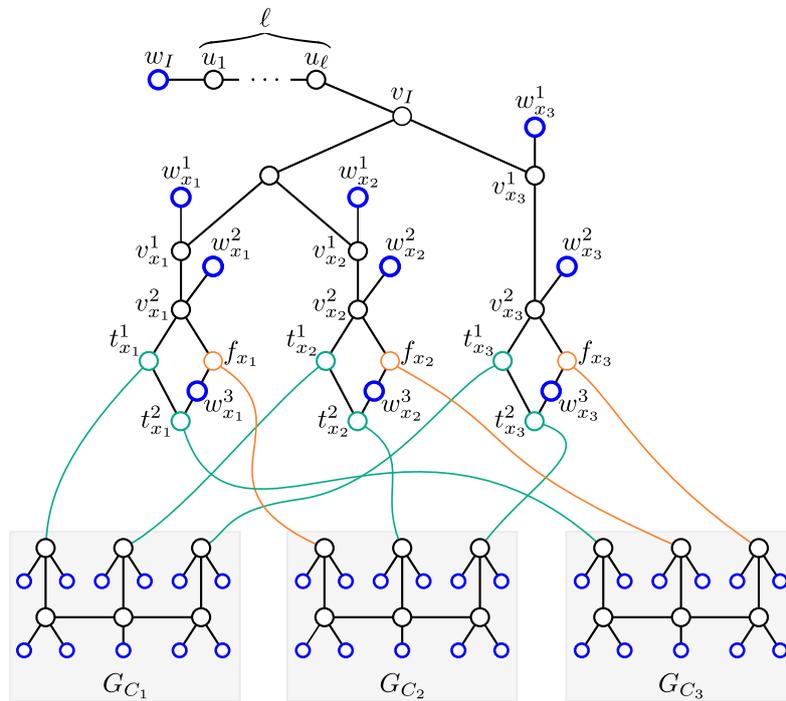


Figura 5.19: Grafo G , com $\Delta(G) = 4$, e conjunto de terminais W , obtidos a partir de uma instância $I = (X, \mathcal{C})$ do 3-SAT(3).

Não é difícil verificar que o grau máximo de G é 4. Mostramos agora que I é uma instância SIM do 3-SAT(3) se, e somente se, $f(I)$ é uma instância SIM do S-TCP(ℓ). Entretanto, podemos realizar uma argumentação praticamente idêntica à apresentada no Teorema 5.5 para provar que: se $f(I)$ é uma instância SIM do S-TCP(ℓ) (no caso do referido teorema, se $f(I)$ é uma instância SIM do TCP(ℓ)), então I é uma instância SIM do 3-SAT(3). Sendo assim, omitimos alguns detalhes dessa argumentação na presente demonstração.

(\Rightarrow) Suponha que I seja satisfatível. Logo, existe uma atribuição de valor verdade $\alpha : X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ que satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} . Com base em α , construímos uma árvore de conexão T de G para W conforme segue:

- adicionamos o caminho P_I a T ;
- adicionamos a árvore binária completa T_I a T , juntamente com os vértices $w_{x_i}^1$ e as arestas $w_{x_i}^1 v_{x_i}$, para todo $x_i \in X$; adicionamos também a aresta $u_\ell v_I$;
- para cada variável $x_i \in X$, adicionamos os vértices $w_{x_i}^2$ e $w_{x_i}^3$ e as arestas $v_{x_i}^1 v_{x_i}^2$ e $v_{x_i}^2 w_{x_i}^2$ a T ;
- se $\alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}$, então adicionamos os vértices $t_{x_i}^1$ e $t_{x_i}^2$ a T , juntamente com todos os seus vizinhos e as arestas que os incidem em G ;
- por outro lado, se $\alpha(x_i) = \textit{falso}$, então adicionamos o vértice f_{x_i} a T , juntamente com todos os seus vizinhos e as arestas que o incide em G ;

Por fim, como por hipótese α satisfaz todas as cláusulas em \mathcal{C} , temos que, para cada $C_i \in \mathcal{C}$, existe ao menos um vértice $t_{x_i}^j$ ou f_{x_i} que conecte um dos vértice $v_{C_i}^1, v_{C_i}^2$ (ou $v_{C_i}^3$, se $|C_i| = 3$) a T , para algum $j \in \{1, 2\}$. Dessa forma, conectamos os demais vértices do *gadget* G_{C_i} a T seguindo um dos padrões (ou os seus casos simétricos) ilustrados na Figura 5.20.

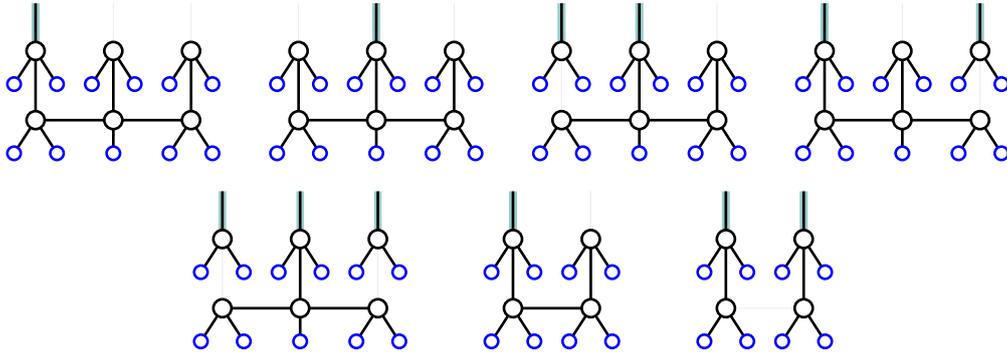


Figura 5.20: Padrões para conexão dos vértices do *gadget* G_{C_i} a T .

Figura 5.21 exemplifica uma árvore de conexão estrita T para W concernente à instância $f(I)$ da Figura 5.19, obtida a partir da atribuição de valor verdade $\alpha(x_1) = \textit{verdadeiro}$, $\alpha(x_2) = \textit{verdadeiro}$ e $\alpha(x_3) = \textit{falso}$. Neste exemplo, temos que $|\mathbf{L}(T)| = \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| = 31$.

Por construção, temos que T é uma árvore de conexão estrita de G para W , cujo conjunto de elos é $\mathbf{L}(T) = \{u_1, u_2, \dots, u_\ell\}$ e cujo conjunto de roteadores é $\mathbf{R}(T) = V(T_I) \cup V(G_{C_i}) \setminus W_{\mathcal{C}} \cup \{v_{x_i}^2 \mid x_i \in X\} \cup \{t_{x_i}^1, t_{x_i}^2 \mid \alpha(x_i) = \textit{verdadeiro}, x_i \in X\} \cup \{f_{x_i} \mid \alpha(x_i) = \textit{falso}, x_i \in X\}$. Logo, $|\mathbf{L}(T)| = \ell$ e, claramente, $|\mathbf{R}(T)| \leq |V(G) \setminus W| - \ell$. Dessa forma, podemos concluir que $f(I)$ é de fato uma instância SIM do S-TCP(ℓ).

(\Leftarrow) Por outro lado, suponha que $f(I)$ seja uma instância SIM do S-TCP(ℓ). Logo, G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $|\mathbf{L}(T)| \leq \ell$ e $|\mathbf{R}(T)| \leq r = |V(G) \setminus W| - \ell$. Como o caminho P_I necessariamente está contido

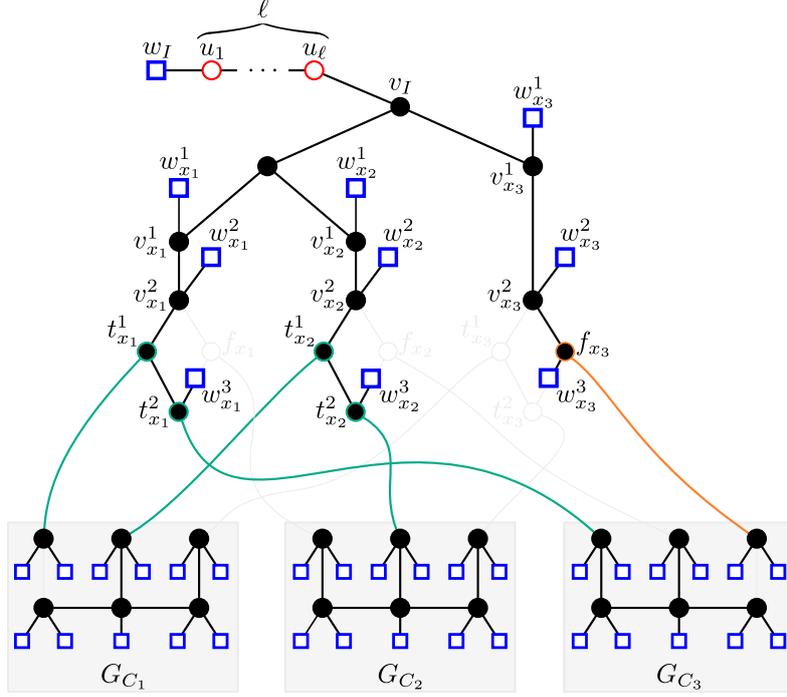


Figura 5.21: Árvore de conexão estrita de G para W referente a uma atribuição de valor verdade para as variáveis em X .

em T , os vértices pertencentes a $V(T) \setminus V(P_I)$ são ou terminais ou roteadores de T . Conseqüentemente, tendo em vista que $d_G(t_{x_i}^1) = d_G(t_{x_i}^2) = d_G(f_{x_i}) = 3$ e que por hipótese todos os terminais pertencentes a W são folhas de T , se $t_{x_i}^1$ ou $t_{x_i}^2$ pertencem a $V(T)$, então $f_{x_i} \notin V(T)$; reciprocamente, se $f_{x_i} \in V(T)$, então $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2 \notin V(T)$. Assim, podemos definir uma atribuição de valor verdade $\alpha: X \rightarrow \{\text{verdadeiro}, \text{falso}\}$ para as variáveis $x_i \in X$ como segue: $\alpha(x_i) = \text{verdadeiro}$ se, e somente se, $f_{x_i} \notin V(T)$. Como por hipótese, para toda cláusula $C_i \in \mathcal{C}$, $V(G_{C_i}) \cap W_C \subset W \subset V(T)$ e todo caminho em G entre $w_{C_i} \in V(G_{C_i}) \cap W_C$ e um outro terminal $w \in W \setminus (V(G_{C_i}) \cap W_C)$ contém um dos vértices $t_{x_i}^1, t_{x_i}^2$ ou f_{x_i} , para algum $x_i \in X$, temos que todas as cláusulas em \mathcal{C} são satisfeitas por α . Portanto, I é de fato uma instância SIM do 3-SAT(3). \square

De modo análogo ao TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 3$, a NP-completude do S-TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 4$ não depende da restrição quanto ao número máximo de roteadores permitidos nas árvores de conexão. Com efeito, observe que na demonstração do Teorema 5.11 não utilizamos em qualquer momento o fato de existir o limite superior (mesmo que frouxo) $r = |V(G) \setminus W| - \ell$ para o número de roteadores nas árvores de conexão.

Apresentamos agora o último resultado deste capítulo, que consiste na demonstração de que o S-TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 3$ é solucionável em tempo polinomial. Inicialmente, nos concentramos apenas no caso em que $\ell = 0$, contudo generalizamos posteriormente este resultado para todo $\ell \geq 0$ constante. O algoritmo que propo-

mos possui como base o uso de *algoritmos de busca em grafos*, como por exemplo o algoritmo de *busca em largura*. Dessa forma, caso o leitor não esteja familiarizado com esse assunto, solicitamos que consulte uma das referências [6, 8, 26].

Lema 5.12. *Se $I = (G, W, r)$ é uma instância SIM do S-TCP(ℓ) e $\Delta(G) = 3$, então $r = |W| - 2$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Corolário 5.4. □

Com base no lema anterior, assumimos doravante que $r = |W| - 2$ e, assim, omitimos o parâmetro r na descrição das instâncias do S-TCP(ℓ) com $\Delta(G) = 3$. Note ainda que, podemos também assumir sem perda de generalidade que G não contém arestas cujos extremos sejam ambos terminais. Pois, como buscamos uma árvore de conexão **estrita**, a remoção de tais arestas não influenciará na instância considerada ser uma instância SIM ou NÃO do S-TCP(ℓ). Além disso, note que, caso tais arestas existam em G , podemos removê-las em tempo $\mathcal{O}(m)$, onde $m = |E(G)|$.

Lema 5.13. *Um grafo G com $\Delta(G) = 3$ admite uma árvore de conexão estrita T para W com $L(T) = \emptyset$ se, e somente se, existe $V' \subseteq V(G)$ tal que $T' = G[V']$ é uma árvore de conexão estrita para W com $L(T') = \emptyset$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Como $L(T) = \emptyset$, todos os vértices em $V(T) \setminus W$ são roteadores. Dessa forma, se $\rho \in V(T) \setminus W$, então $N_T(\rho) = N_G(\rho)$, visto que $\Delta(G) = 3$. Por fim, segue da suposição de que G não contém arestas entre terminais que, $G[V'] = T$, onde $V' = V(T)$. Assim, obtemos que V' é um subconjunto de $V(G)$ tal que $T' = G[V'] = T$ é uma árvore de conexão estrita para W com $L(T') = L(T) = \emptyset$.

(\Leftarrow) É imediato. □

Seja $w \in W$ e $v \in N_G(w)$. Seja ainda H_v o componente conexo de $G - W$ tal que $v \in V(H_v)$. Definimos G_v como o subgrafo de G induzido por $V(H_v) \cup W$, ou seja, $V(G_v) = V(H_v) \cup W$ e $E(G_v) = E(H_v) \cup \{wu \mid wu \in E(G), u \in V(H_v), w \in W\}$.

Lema 5.14. *Seja G um grafo com $\Delta(G) = 3$. Existe $V' \subseteq V(G)$ tal que $T' = G[V']$ é uma árvore de conexão estrita para W com $L(T') = \emptyset$ se, e somente se, para algum terminal $w \in W$ e algum vértice $v \in N_G(w)$, o grafo G_v é uma árvore de conexão estrita para W com $L(G_v) = \emptyset$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $w' \in W$ um terminal arbitrário e seja $v' \in N_{T'}(w')$. Segue do fato de T' ser estrita que, o vértice v' está bem definido e $T' - W = G[V' \setminus W]$ é conexo. Consequentemente, todos os vértices $\rho \in V' \setminus W$, inclusive v' , pertencem a um mesmo componente conexo de $G - W$. Logo, $V' \setminus W \subseteq V(H_{v'})$. Além disso, como por hipótese $\Delta(G) = 3$ e, assim, $N_{T'}(\rho) = N_G(\rho)$ para todo $\rho \in V' \setminus W$,

obtemos que $V' \setminus W \supseteq V(H_{v'})$. Portanto, $G_{v'} = G[V(H_{v'}) \cup W] = G[V']$ é uma árvore de conexão estrita para W com $L(G_{v'}) = \emptyset$.

(\Leftarrow) Basta definirmos $V' = V(G_v)$. Como por definição $G_v = G[V(H_v) \cup W]$, temos que $T' = G[V']$ é uma árvore de conexão estrita para W com $L(T') = \emptyset$. \square

Teorema 5.15. *Se $\Delta(G) = 3$, então o S-TCP($\ell = 0$) é solucionável em tempo polinomial.*

Demonstração. Seja $I = (G, W)$ uma instância do S-TCP($\ell = 0$) tal que $\Delta(G) = 3$. Considere, então, a seguinte estratégia para solucionar I .

Selecione um terminal $w \in W$ arbitrário e, para cada vértice $v \in N_G(w)$, execute um algoritmo de busca — como por exemplo, busca em largura — sobre G e tendo como vértice *fonte* v , de modo que os vizinhos dos vértices terminais não sejam *explorados* quando o algoritmo *visitar* tais terminais, (ou seja, quando o algoritmo visitar um terminal $w' \in W$, o mesmo não deverá explorar os vizinhos de w').

Note que, para cada vértice $v \in N_G(w)$, o algoritmo retornará uma *árvore de busca* T_v , que é um subgrafo de G , tal que todos os terminais presentes em T_v possuem grau exatamente 1, isto é, $W \cap V(T_v) \subseteq \text{folhas}(T_v)$. Além disso, com base no funcionamento dos algoritmos de buscas em grafos, pode-se verificar facilmente que, a árvore de busca T_v é tal que $L(T_v) = \emptyset$ e $\text{folhas}(T_v) = W$ se, e somente, o grafo G_v (conforme definimos anteriormente) é uma árvore de conexão estrita para W com $L(G_v) = \emptyset$. Assim, obtemos pelos Lemas 5.13 e 5.14 que I é uma instância SIM do S-TCP(ℓ) se, e somente se, para algum $v \in N_G(w)$, a árvore de busca T_v é tal que $L(T_v) = \emptyset$ e $\text{folhas}(T_v) = W$, onde w é o terminal que selecionamos arbitrariamente.

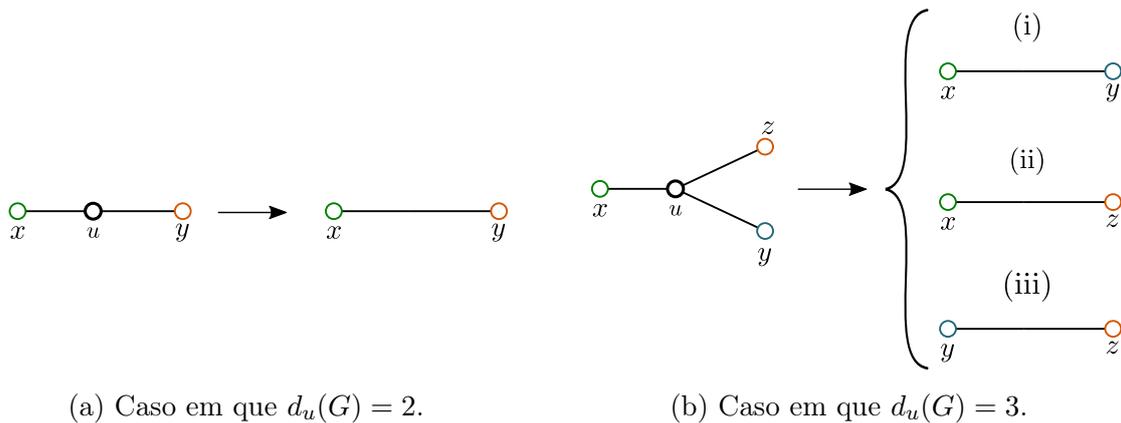
Portanto, como a estratégia descrita no segundo parágrafo pode ser executada em tempo $\mathcal{O}(n+m)$ e, por hipótese, $|N_G(w)| \leq \Delta(G) = 3$, obtemos que o S-TCP($\ell = 0$) é solucionável em tempo polinomial. \square

Proposição 5.16. *Se $\Delta(G) = 3$, então S-TCP($\ell = c$) \propto_T S-TCP($\ell = 0$), para toda constante $c \geq 0$.*

Demonstração. Seja $I = (G, W)$ uma instância do S-TCP($\ell = c$) tal que $\Delta(G) = 3$, e seja \mathcal{L} a coleção formada por todos os subconjuntos de $V(G) \setminus W$ com cardinalidade no máximo c . Para $L \in \mathcal{L}$, definimos G_L como sendo o grafo obtido a partir de G através de sucessivas remoções de todos os vértices $v \in V(G_L) \setminus (W \cup L)$ tais que $d_{G_L}(v) = 2$. Se, após essa operação, quaisquer dois terminais $w, w' \in W$ pertencerem a componentes conexos distintos de G_L , então desconsideramos o conjunto L e o removemos da coleção \mathcal{L} . Ademais, para cada vértice $u \in L$ tal que $d_{G_L}(u) = 2$, removemos u de G_L juntamente com as duas arestas que lhe incidem, digamos xu e yu , e adicionamos a aresta xy a G_L , conforme ilustrado na Figura 5.22a. Removemos também de G_L todos os vértices não terminais com grau 1. Assim, obtemos que G_L

é um grafo cujos vértices não terminais possuem grau exatamente 3. Observe que, para cada conjunto $L \in \mathcal{L}$, podemos obter G_L em tempo $\mathcal{O}(n^2)$, onde $n = |V(G)|$.

Para fins de simplificação, remova do conjunto L todos os vértices $u \in L$ tais que $d_G(u) = 2$. Além das operações descritas no parágrafo anterior, para cada $L \in \mathcal{L}$, criamos um conjunto \mathcal{G}_L formado por todas as combinações possíveis de grafos obtidos a partir de G_L ao se aplicar, para cada $v \in L$, uma das três operações ilustradas na Figura 5.22b. Mais especificamente, construímos a partir de G_L todos os possíveis grafos G'_L tais que, para todo vértice $u \in L$, removemos u de G'_L juntamente com as arestas que lhe incidem, digamos xu , yu e zu , e realizamos uma das três operações: (i) adicione a aresta xy a G'_L ; ou (ii) adicione a aresta xz a G'_L ; ou (iii) adicione a aresta yz a G'_L . Aplicada uma das três operações para todo vértice $u \in L$, adicionamos G'_L a \mathcal{G}_L . Todavia, se G'_L contém vértices não terminais com grau 2 ou se existem dois terminais $w, w' \in W$ tais que w e w' pertencem a componentes conexos distintos de G'_L , então descartamos este grafo, removendo-o de \mathcal{G}_L .



(a) Caso em que $d_u(G) = 2$.

(b) Caso em que $d_u(G) = 3$.

Figura 5.22: Operações para construção do conjunto de grafos \mathcal{G}_L , para $L \in \mathcal{L}$.

Por fim, para cada conjunto $L \in \mathcal{L}$ e para cada grafo $G'_L \in \mathcal{G}_L$, definimos a instância $I' = (G'_L, W)$ e aplicamos sobre esta um algoritmo de tempo polinomial para o S-TCP($\ell = 0$), conforme descrevemos no Teorema 5.15. Se o algoritmo retornar que I' é uma instância SIM do S-TCP($\ell = 0$), então retornamos que I é uma instância SIM do S-TCP($\ell = c$). Entretanto, se, para todo $L \in \mathcal{L}$ e todo $G'_L \in \mathcal{G}_L$, $I' = (G'_L, W)$ for uma instância NÃO do S-TCP($\ell = 0$), então retornamos que I é uma instância NÃO do S-TCP($\ell = c$).

A corretude desse algoritmo segue do fato de que, analisamos todos os possíveis conjuntos de elos de G e todos as possíveis ordens de conexão com relação aos candidatos a elos de tais conjuntos. Adicionalmente, repare que, se o algoritmo retornar que $I' = (G'_L, W)$ é uma instância SIM do S-TCP($\ell = 0$) para algum conjunto $L \in \mathcal{L}$ e algum grafo $G'_L \in \mathcal{G}_L$, então garantidamente, por construção, G admite uma árvore de conexão estrita T para W tal que $L(T) \subseteq L$. Como também,

pode-se verificar que, se G admite uma árvore de conexão estrita T para W , então existe um grafo $G'_L \in \mathcal{G}_L$, onde $L = \mathbf{L}(T)$, tal que $I' = (G'_L, W)$ é uma instância SIM do S-TCP($\ell = 0$).

Quanto à complexidade do algoritmo, temos que $|\mathcal{L}| = \sum_{1 \leq i \leq c} \binom{n}{i} = \mathcal{O}(n^c)$. Além disso, conforme já comentamos, cada grafo G_L pode ser construído em tempo $\mathcal{O}(n^2)$. Por fim, observe que $|\mathcal{G}_L| = \mathcal{O}(3^{|L|}) = \mathcal{O}(3^c)$ para todo $L \in \mathcal{L}$. Portanto, como a complexidade do algoritmo descrito no Teorema 5.15 para o S-TCP($\ell = 0$) é $\mathcal{O}(n + m)$, obtemos que a complexidade total do presente algoritmo para o S-TCP($\ell = c$) é $\mathcal{O}(n^{c+2} + 3^c n^{c+1} + 3^c n^c m)$. \square

Corolário 5.17. *Se $\Delta(G) = 3$, então o S-TCP($\ell = c$) é solucionável em tempo polinomial, para todo $c \geq 0$.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 5.15 e da Proposição 5.16. \square

Embora o algoritmo que propomos para o S-TCP(ℓ), restrito aos grafos com grau máximo 3, possua complexidade de tempo polinomial, o mesmo não é um algoritmo FPT ao se considerar ℓ como parâmetro fixo. Dessa forma, nos questionamos se o referido problema admite um algoritmo FPT quando parametrizado por ℓ . Sabemos que para $\Delta(G) \geq 4$ a resposta para essa pergunta é não (vide Lema 1.3 e Teorema 5.11), contudo para $\Delta(G) = 3$ desconhecemos a resposta.

Problema em aberto 5.18. *O S-TCP é tratável por parâmetro fixo quando parametrizado por ℓ se $\Delta(G) = 3$?*

Um outro questionamento natural se refere à complexidade do S-TCP(r), para $r \geq 2$, quando $\Delta(G) = 3$. Apesar de desconhecermos a complexidade deste problema para grafos gerais, possivelmente seria mais fácil determiná-la (se fosse o caso de obtenção de um algoritmo de tempo polinomial) ao restringirmos o problema aos grafos com grau máximo limitado. No entanto, ainda assim desconhecemos a complexidade do S-TCP(r), mesmo quando $\Delta(G) = 3$. Uma observação adicional interessante, é a de que neste caso, em que $\Delta(G)$ e r são ambos limitados por constantes, o número de terminais é também limitado por uma constante, vide Corolário 5.4.

Problema em aberto 5.19. *Para $r \geq 2$, o S-TCP(r) é solucionável em tempo polinomial se $\Delta(G) = 3$?*

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, consideramos o PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS (TCP), o qual fora proposto por Dourado et al. [10], tendo como motivação aplicações em segurança da informação, projetos de redes de transporte e políticas de roteamento para o tráfego *multicast* na internet. O nosso estudo neste trabalho se concentrou, sobretudo, na análise da complexidade computacional da variante estrita do TCP, denominada PROBLEMA DE CONEXÃO DE NÓS ESTRITAMENTE TERMINAIS (S-TCP). De modo ainda mais específico, focamos no caso em que o parâmetro r , ou seja, o número máximo de roteadores permitidos nas árvores de conexão, é limitado por uma constante. Com a finalidade de obtermos mais intuição sobre a complexidade deste caso particular do S-TCP, consideramos também a análise de algumas de suas variantes e a análise de problemas de caminhos disjuntos. A seguir resumimos o conteúdo de cada capítulo desta dissertação.

No Capítulo 2, apresentamos de maneira formal a definição do TCP, além de expormos detalhadamente os principais resultados conhecidos na literatura para este problema. Pontuamos sobre a relação do TCP com problemas clássicos de teoria dos grafos, tais como ÁRVORE GERADORA MÍNIMA, ÁRVORE DE STEINER e o problema ÁRVORE DE STEINER COM NÚMERO LIMITADO DE RAMIFICAÇÕES. Por fim, definimos formalmente o S-TCP e apresentamos os resultados conhecidos na literatura para esta versão estrita do problema.

No Capítulo 3, apresentamos algumas das principais contribuições desta dissertação. Provamos que, para $r \in \{0, 1\}$, o S-TCP é solucionável em tempo polinomial, o que destoa com a complexidade do TCP, que é NP-completo para todo $r \geq 0$. Para $r = 0$, mostramos que o S-TCP é equivalente ao problema de encontrar um caminho mais curto entre os vértices terminais; e, para $r = 1$, propomos uma redução de Turing para o problema MIN-SUM *st*-CAMINHOS DISJUNTOS. Além disso, na Seção 3.1.2, descrevemos resultados parciais que obtivemos para o caso em que $r \geq 2$. Na Seção 3.2, consideramos as seguintes variantes do S-TCP: SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP, CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-

TCP e SEMIESTRUTURADO S-TCP(R). Primeiramente, através de uma redução de Turing para o MIN-SUM st -CAMINHOS DISJUNTOS, provamos que SUBGRAFO DE ROTEADORES CONEXO S-TCP é solucionável em tempo polinomial para todo $r \geq 1$ constante. Por outro lado, através de reduções polinomiais a partir do problema 3-SAT, provamos que CONJUNTO DE TERMINAIS PARTICIONADO S-TCP é NP-completo para todo $r \geq 2$ e que SEMIESTRUTURADO S-TCP(R) é NP-completo para todo $|R| \geq 2$ e $r \geq 3$ com $r \geq |R|$. Por fim, na Seção 3.3, provamos que o S-TCP e o TCP, tendo r como parâmetro fixo, são problemas W[2]-difíceis, mesmo quando ℓ , o número máximo de elos, é limitado por uma constante.

No Capítulo 4, investigamos a complexidade do $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES e do caso particular do FLUXO INTEGRAL DE DOIS COMMODITIES EM GRAFOS NÃO DIRECIONADOS em que a demanda de um dos *commodities* é unitária, o qual coincide com o problema $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM ARESTAS. A motivação para proceder com essa análise surgiu do fato de existir uma redução de Turing do S-TCP com $r = 2$ para o MIN-SUM $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES, versão do $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES onde requer-se, adicionalmente, que o somatório dos comprimentos dos caminhos seja limitado. No entanto, a complexidade de tais problemas, curiosamente, não havia sido determinada até então. Assim, com base no conhecimento que adquirimos tentando solucionar o S-TCP com $r = 2$, conseguimos provar que estes problemas, o $k + 1$ CAMINHOS DISJUNTOS EM VÉRTICES e o FLUXO INTEGRAL DE DOIS COMMODITIES EM GRAFOS NÃO DIRECIONADOS com uma demanda unitária, são NP-completos.

Por fim, no Capítulo 5, analisamos a complexidade do TCP e do S-TCP quando restritos aos grafos com grau máximo constante. Mais especificamente, provamos que, mesmo quando $\Delta(G) = 3$, o TCP(ℓ), o TCP(r) e o S-TCP são NP-completos. Além disso, provamos que o S-TCP(ℓ) é solucionável em tempo polinomial se $\Delta(G) = 3$ e que, no entanto, o mesmo é NP-completo se $\Delta(G) = 4$. Desta forma, estabelecemos uma dicotomia quanto à complexidade do TCP e do S-TCP, no que concerne ao grau máximo do grafo de entrada G , visto que ambos problemas são facilmente solucionáveis em tempo polinomial quando $\Delta(G) = 2$.

Como possibilidade de trabalhos futuros, temos por objetivo abordar os problemas que deixamos em aberto ao longo desta dissertação, especialmente o questionamento sobre a complexidade do S-TCP(r) para $r \geq 2$ constante, que é a pergunta em aberto central deste trabalho. O nosso intuito é determinar a complexidade computacional do S-TCP(r) para todos os valores constantes $r \geq 2$. Além disso, objetivamos estudar as variantes do S-TCP propostas no Capítulo 3 quando $\Delta(G)$ ou $|W|$ são limitados por constantes, o que até então não foi considerado.

Uma outra possibilidade de abordagem tanto do S-TCP quanto do TCP é a de analisar a complexidade de tais problemas quando estes são restritos a certas classes

de grafos, como por exemplo a classe de grafos planares. Uma motivação para proceder com essa abordagem deve-se ao fato de que alguns problemas de caminhos disjuntos admitem solução de tempo polinomial quando restritos à subclasses de grafos planares, embora sejam NP-completos ou possuam complexidade ainda não determinada para grafos gerais [27].

Quanto à complexidade parametrizada, existem diversas questões a serem respondidas. Por exemplo, sabemos que o S-TCP admite um algoritmo FPT quando parametrizado por Δ , ℓ e r [11], o que implica na existência de um *núcleo*, contudo desconhecemos se este problema admite um *núcleo polinomial* (para saber mais sobre *núcleo* e *núcleo polinomial*, veja [7, 35]). Além disso, desconhecemos também a complexidade parametrizada do S-TCP quando apenas Δ e r (e, por conseguinte, $|W|$, vide Corolário 5.4) são tidos como parâmetros fixos. Observe que, exceto por este caso, garantidamente (a menos que $P = NP$ ou $FPT = W[2]$) qualquer composição própria dos parâmetros Δ, ℓ, r não acarretará no S-TCP ser tratável por parâmetro fixo. Isso deve-se aos resultados de NP-completude para o S-TCP restrito aos grafos com grau máximo constante e ao resultado de $W[2]$ -dificuldade que propomos na Seção 3.3. Já para o TCP, obtemos pelos mesmos motivos que este, “garantidamente”, não admite algoritmo FPT quando parametrizado por qualquer composição própria dos parâmetros Δ, ℓ e r , inclusive o caso Δ, r que é desconhecido para o S-TCP (vide Teorema 5.8). Finalmente, quando Δ, ℓ e r são todos tidos como parâmetro fixo, é possível que o TCP admita um algoritmo FPT, no entanto, não é claro que, com relação a estes parâmetros, exista uma adaptação do algoritmo FPT do S-TCP para o TCP. Dessa forma, consideramos como um possível trabalho futuro analisar a complexidade parametrizada do TCP com Δ, ℓ e r como parâmetros fixos.

Tabela 6.1 reúne de forma expositiva algumas das principais contribuições desta dissertação, bem como o estado da arte do PROBLEMA DE CONEXÃO DE TERMINAIS e de suas variantes que consideramos neste estudo.

Problema	Parâmetro limitado por constante														
	-	ℓ	r				ℓ, r	Δ					$ W , r$		
			$r = 0$	$r = 1$	$r = 2$	$r \geq 3$		-		ℓ		r	-	ℓ^*	$\text{tw}(G)$
								$\Delta = 2$	$\Delta = 3$	$\Delta = 3$	$\Delta = 4$	$\Delta = 3$			
TCP	NP-c Teo. 2.1	NP-c Teo. 2.1	NP-c Teo. 2.2	NP-c Teo. 2.2	NP-c Teo. 2.2	NP-c Teo. 2.2	P Alg. 2.1	P	NP-c Teo. 5.5	NP-c Teo. 5.5	NP-c Teo. 5.5	NP-c Teo. 5.8	?	P Prop. 3.12	P Prop. 3.13
S-TCP	NP-c Teo. 2.4	NP-c Teo. 2.4	P Cor. 3.3	P Cor. 3.6	?	?	P Teo. 2.5	P	NP-c Teo. 5.10	P Cor. 5.17	NP-c Teo. 5.11	?	?	P Prop. 3.12	P Prop. 3.13
$T[R(T)]$ CONEXO S-TCP	NP-c Teo. 3.16	NP-c Teo. 3.16	-	P Cor. 3.19	P Cor. 3.19	P Cor. 3.19	P Cor. 3.19	-	?	P análogo ao Cor. 5.17	NP-c Teo. 5.11	P Cor. 3.19	P Cor. 3.19	P Cor. 3.19	P Cor. 3.19
W PARTICIONADO S-TCP	NP-c Teo. 3.22	?	-	P Cor. 3.6	NP-c Teo. 3.22	NP-c Teo. 3.22	P análogo ao Teo. 2.5	-	?	P análogo ao Cor. 5.17	NP-c análogo ao Teo. 5.11	?	?	P análogo à Prop. 3.12	P análogo à Prop. 3.13
SEMIESTRUTURADO S-TCP com $ R \geq 2$	NP-c Teo. 3.23	NP-c Teo. 3.23	-	-	?	NP-c Teo. 3.24	P análogo ao Teo. 2.5	-	NP-c análogo ao Teo. 5.10	P análogo ao Cor. 5.17	NP-c análogo ao Teo. 5.11	?	?	P análogo à Prop. 3.12	P análogo à Prop. 3.13

Tabela 6.1: Estado da arte do TCP, do S-TCP e de algumas de suas variantes. Células sombreadas e em negrito representam contribuições desta dissertação, P denota que o problema é solucionável em tempo polinomial, NP-c denota que o problema é NP-completo, ‘?’ denota que a complexidade do problema é desconhecida, ℓ^* denota que a restrição quanto ao número máximo de elos não é considerada e $\text{tw}(G)$ denota o parâmetro *treewidth* do grafo G .

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, A. S., NOGUEIRA, L. T., E DE SÁ, V. G. P. Minimizando ramificações em árvores geradoras. In *Anais do XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (2014), pp. 2977–2985.
- [2] BONDY, A., E MURTY, U. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2011.
- [3] BONDY, J., E MURTY, U. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, 1978.
- [4] CAYLE, A. A theorem on trees. *The Quarterly Journal of Mathematics*, (1889), 376–378.
- [5] CHENG, X., LI, Y., DU, D.-Z., E NGO, H. Q. *Steiner Trees in Industry*. Springer US, Boston, MA, 2005, pp. 193–216.
- [6] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., E STEIN, C. *Introduction to Algorithms*, 3 ed. The MIT Press, 2009.
- [7] CYGAN, M., FOMIN, F. V., KOWALIK, L., LOKSHTANOV, D., MARX, D., PILIPCZUK, M., PILIPCZUK, M., E SAURABH, S. *Parameterized Algorithms*. Springer, 2015.
- [8] DASGUPTA, S., PAPADIMITRIOU, C. H., E VAZIRANI, U. *Algorithms*, 1 ed. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 2008.
- [9] DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik* 1, 1 (dez. 1959), 269–271.
- [10] DOURADO, M. C., OLIVEIRA, R. A., PROTTI, F., E SOUZA, U. S. Design of connection networks with bounded number of non-terminal vertices. In *Anais do V Latin-American Workshop on Cliques in Graphs, LAWClques 2012* (2014), vol. 42, *Matemática Contemporânea*, SBM, pp. 39–47.
- [11] DOURADO, M. C., OLIVEIRA, R. A., PROTTI, F., E SOUZA, U. S. Conexão de terminais com número restrito de roteadores e elos. In *Anais do XLVI Simpósio brasileiro de pesquisa operacional* (2014), pp. 2965–2976.

- [12] DOWNEY, R. G., E FELLOWS, M. R. *Parameterized Complexity*. Springer-Verlag, 1999. Monographs in Computer Science.
- [13] DOWNEY, R. G., E FELLOWS, M. R. *Fundamentals of Parameterized Complexity*. Texts in Computer Science. Springer London, 2013.
- [14] DREYFUS, S. E., E WAGNER, R. A. The steiner problem in graphs. *Networks* 1, 3 (1971), 195–207.
- [15] EILAM-TZOREFF, T. The disjoint shortest paths problem. *Discrete Applied Mathematics* 85, 2 (1998), 113–138.
- [16] EVEN, S., ITAI, A., E SHAMIR, A. On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal on Computing* 5, 4 (1976), 691–703.
- [17] FAMPA, M., LEE, J., E MELO, W. A specialized branch-and-bound algorithm for the euclidean steiner tree problem in n-space. *Journal Computational Optimization and Applications* 65, 1 (set. 2016), 47–71.
- [18] FENNER, T., LACHISH, O., E POPA, A. Min-sum 2-paths problems. *Theory of Computing Systems* 58, 1 (2016), 94–110.
- [19] GAREY, M. R., E JOHNSON, D. S. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- [20] GARGANO, L., HELL, P., STACHO, L., E VACCARO, U. Spanning trees with bounded number of branch vertices. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming* (2002), Springer, pp. 355–365.
- [21] HWANG, F. K., RICHARDS, D. S., E WINTER, P. *The Steiner tree problem*, vol. 53. Elsevier, 1992.
- [22] ITAI, A., PAPADIMITRIOU, C. H., E SZWARCFITER, J. L. Hamilton paths in grid graphs. *SIAM Journal on Computing* 11, 4 (1982), 676–686.
- [23] KARP, R. M. *Reducibility among Combinatorial Problems*. Springer US, Boston, MA, 1972, pp. 85–103.
- [24] KARP, R. M. On the complexity of combinatorial problems. *Networks* 5 (1975), 45–68.
- [25] KAWARABAYASHI, K.-I., KOBAYASHI, Y., E REED, B. The disjoint paths problem in quadratic time. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 102, 2 (2012), 424–435.

- [26] KLEINBERG, J., E TARDOS, E. *Algorithm design*. Pearson Education India, 2006.
- [27] KOBAYASHI, Y., E SOMMER, C. On shortest disjoint paths in planar graphs. *Discrete Optimization* 7, 4 (2010), 234–245.
- [28] KRUSKAL, J. B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical society* 7, 1 (1956), 48–50.
- [29] LIN, G., E XUE, G. On the terminal steiner tree problem. *Information Processing Letters* 84, 2 (2002), 103 – 107.
- [30] MELO, A. A., DE FIGUEIREDO, C. M. H., E SOUZA, U. S. The strict terminal connection problem with a bounded number of routers. In *VII Latin-American Workshop on Cliques in Graphs, LAWCliques 2016* (2016), p. 3.
- [31] MOHARANA, S. S., JOSHI, A., E VIJAY, S. Steiner path for trees. *International Journal of Computer Applications* 76, 5 (2013).
- [32] MÜLLER, H. Hamiltonian circuits in chordal bipartite graphs. *Discrete Mathematics* 156, 1–3 (1996), 291 – 298.
- [33] PRIM, R. C. Shortest connection networks and some generalizations. *The Bell System Technical Journal* 36, 6 (1957), 1389–1401.
- [34] ROBERTSON, N., E SEYMOUR, P. D. Graph minors. xiii. the disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 63, 1 (1995), 65–110.
- [35] SANTOS, V. F., E SOUZA, U. S. Uma introdução à complexidade parametrizada. In *Anais da 34ª Jornada de Atualização em Informática JAI 2015 (Cursos JAI - CSBC 2015 - SBC)* (2015), vol. 1, Sociedade Brasileira de Computação (SBC), pp. 39–47.
- [36] SCHEFFLER, P. A practical linear time algorithm for disjoint paths in graphs with bounded tree width. Relatório Técnico 396, FB Mathematik, Technische Universität Berlin, 1994.
- [37] SOUZA, U. S. *Multivariate Investigation of NP-Hard Problems: Boundaries Between Parametized Tractability and Intractability*. Tese de D.Sc., IC/UFF, Niterói, RJ, Brasil, 2014.
- [38] SUURBALLE, J. W. Disjoint paths in a network. *Networks* 4, 2 (1974), 125–145.

- [39] SUURBALLE, J. W., E TARJAN, R. E. A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths. *Networks* 14, 2 (1984), 325–336.
- [40] SZWARCFITER, J. L., E MARKENZON, L. *Estruturas de Dados e seus Algoritmos*, vol. 2. Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- [41] VOSS, S. *Steiner Tree Problems in Telecommunications*. Springer US, Boston, MA, 2006, pp. 459–492.
- [42] WATEL, D., WEISSER, M.-A., BENTZ, C., E BARTH, D. Steiner problems with limited number of branching nodes. In *Lecture Notes in Computer Science, Revised Selected Papers of the 20th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity - Volume 8179* (New York, NY, USA, 2013), SIROCCO 2013, Springer-Verlag New York, Inc., pp. 310–321.