

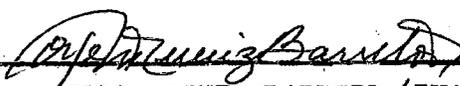
SISTEMAS COM GANHO DISCRETAMENTE VARIADO :  
UMA TÉCNICA DE ANÁLISE

JOSÉ LUCAS MOURÃO RANGEL NETTO

Uma tese submetida ao Corpo Docente da  
Coordenação dos Programas Pós-Graduados  
de Engenharia da U.F.R.J. como parte dos  
requisitos necessários para a obtenção  
do grau de Mestre em Ciência ( M.Sc. ).

Aprovada por

  
\_\_\_\_\_  
Prof. CARLOS JUAREZ TAVORA (COPPE)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. JORGE MUNIZ BARRETO (PUC)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. JULIO COUTINHO (COPPE)

AGRADECIMENTO

A meus pais, por tudo.

A Carlos Távora, por sua paciência.

ÍNDICE

Fôlha título .....	i
Agradecimento .....	ii
Índice .....	1
Sumário .....	2
Cap. I - Introdução e definições .....	3
Cap. II - Análise da resposta do sistema estudado .....	8
Cap. III - Primeiro tipo de aplicações ( AGCD ) .....	16
Cap. IV - Segundo tipo de aplicações (Chopper ) .....	21
Cap. V - Conclusões .....	28
Bibliografia .....	30

José Lucas Mourão Rangel Netto

SUMÁRIO

Um método de análise baseado numa relação entre operadores é desenvolvido, para sistemas lineares variantes no tempo que admitam o modelo apresentado. Aplicações deste método são apresentadas, como exemplo, para amplificadores com ganho digitalmente controlado, e amplificadores tipo chepper.

Capítulo I - INTRODUÇÃO E DEFINIÇÕES

I.1 - Sistema a ser estudado

- Apresentação do modelo

Seja o sistema S (representado na Fig 1 (a) , cujos estágios

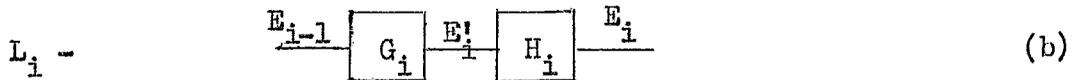
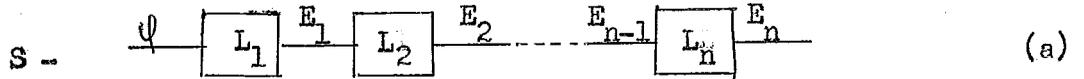


Fig 1.1

$L_i$  ,  $i=1, 2, \dots, n$  são passíveis de decomposição em subsistemas, como indicado na Fig 1 (b) , onde :

(a)  $G_i$  é um subsistema, cuja entrada  $E_{i-1}(t)$  e cuja saída  $E_i'(t)$  se relacionam da forma abaixo :

$$E_i'(t) = g_i(t) E_{i-1}(t) , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

onde

$$g_i(t) = \begin{cases} c_{i0} & t < \tau_1 \\ c_{i1} & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ \dots & \dots \\ c_{ik} & \tau_k \leq t < \tau_{k+1} \\ \dots & \dots \\ c_{ip} & \tau_p \leq t \end{cases} \quad (2)$$

sendo os  $c_{ik}$  constantes reais finitas.

(b)  $H_i$  é um subsistema linear, invariante no tempo, caracterizado por sua resposta ao impulso  $h_i(t)$  , de maneira que sua entrada  $E_i'(t)$  e sua saída  $E_i(t)$  se encontrem relacionadas por :

$$E_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t - t') E_i'(t') dt' \quad (3)$$

sendo

$$h_i(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (4)$$

## I.2 - Características do modelo

## (a) Características de S

(i) Consideremos como entrada do sistema S, a função  $u$ , entrada de  $L_1$ , e, como suas saídas, as saídas de seus estágios  $L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e, dessa maneira, teremos n saídas:  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ . Por extensão, escreveremos:

$$E_0 = \psi \quad (5)$$

(ii) Restringiremos as funções de entrada do sistema, àquelas funções  $\psi$  limitadas no intervalo  $(-\infty, t]$ , ou seja, exigiremos:

$$(-\infty, t]$$

(iii) Das definições anteriores, se depreende ser linear o sistema S, já que o são os seus elementos conectados em cascata,  $G_i$  e  $H_i$ . S é, en tretanto, variante no tempo, já que o são os subsistemas  $G_i$ .

(b) Características de  $G_i$ .

(i) Uma forma alternativa de se expressar  $g_i(t)$  é a seguinte:

$$g_i = - \sum_{k=0}^p d_{ik} u_k \quad (6)$$

onde

$$d_{ik} = \begin{cases} -c_{i0} & k = 0 \\ c_{i, k-1} - c_{ik} & k = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (7)$$

além de

$$u_k(t) = u(t - \tau_k) \quad k = 0, 1, \dots, p \quad (8)*$$

---

\* O caso em que um ganho constante existe no sistema, para todo t anterior a todos os outros considerados, pode ser tratado, fazendo-se, formalmente,  $\tau_0 = -\infty$

e  $u_0 = u(t + \infty) = 1$ .

(ii)  $G_i$  pode ser interpretado, como veremos nas aplicações, como um sistema cujo ganho salta bruscamente, em cada instante  $\tau_k$ , do valor  $c_{i k-1}$  para o valor  $c_{ik}$ , dando portanto um salto de  $-d_{ik} = c_{ik} - c_{i k-1}$ .

(c) Características de  $H_i$ . Já que, como foi indicado anteriormente,  $h_i(t) = 0 \forall t < 0$ , o sistema  $H_i$ , além de linear, é causal. Podemos escrever também:

$$E_i(t) = \int_{-\infty}^t h_i(t-t') E_i^!(t') dt' \quad (9)$$

o que decorre de

$$h_i(t-t') = 0 \quad \forall t' > t \quad (10)$$

equivalente a (4).

### I.3 - Operadores associados a $G_i$ e $H_i$ .

Para simplificar a notação, vamos introduzir agora dois operadores,  $Q_i$  e  $\mathcal{N}_i$ , como aqueles que, operando sobre as funções de entrada dos blocos  $G_i$  e  $H_i$ , nos fornecem as respectivas saídas, ou seja, aqueles operadores tais que as equações

$$Q_i \left[ E_{i-1}(t) \right] = E_i^!(t) \quad (11)$$

$$\mathcal{N}_i \left[ E_i^!(t) \right] = E_i(t) \quad (12)$$

sejam, pela definição, equivalentes às equações (2) e (3).

Assim,

$$Q_i E_{i-1} = g_i E_{i-1} \quad (13)$$

$$\mathcal{N}_i E_i^! = \int_{-\infty}^t h_i(t-t') E_i^!(t') dt' \quad (14) **$$

= Expressão das saídas  $E_i$ , de  $L_i$ .

Substituindo (11) em (12),

$$E_i = \mathcal{N}_i \left[ Q_i E_{i-1} \right] = \mathcal{N}_i Q_i E_{i-1} \quad (15)$$

\*\* - Por conveniência, a dependência funcional em  $t$ ,  $(t)$ , será omitida. Assim,  $g_i = g_i(t)$ ,  $E_i^! = E_i^!(t)$ , etc. Dependências funcionais em outras variáveis serão assinaladas.

Portanto, aplicando  $i$  vezes a equação (15), e observando que fizemos  $E_0 = \psi$ , teremos :

$$E_i = \mathcal{N}_i \mathcal{Q}_i \mathcal{N}_{i-1} \mathcal{Q}_{i-1} \dots \mathcal{N}_1 \mathcal{Q}_1 \psi \tag{16}$$

ou ainda,

$$E_i = \left[ \prod_{j=1}^i (\mathcal{N}_j \mathcal{Q}_j) \right] \psi \tag{17}$$

se convencionarmos representar por

$$\prod_{j=1}^i M_j$$

o operador correspondente à aplicação sucessiva e ordenada dos operadores  $M_1, M_2, \dots, M_i$ , ou seja, o operador  $M_i M_{i-1} \dots M_1$ .

- Aplicação sucessiva dos operadores  $\mathcal{Q}_j$  e  $\mathcal{N}_j$

(a) operador  $\mathcal{Q}_j$ .

(i) Definamos:

$$g_i^* = \prod_{j=1}^i g_j \tag{18}$$

$$c_{ik}^* = \prod_{j=1}^i c_{jk} \tag{19}$$

$$d_{ik}^* = c_{i, k-1}^* - c_{ik}^* \tag{20}$$

de maneira que

$$g_i^* = \begin{cases} c_{i0}^* & \tau_0 \leq t < \tau_1 \\ \dots & \dots \\ c_{ik}^* & \tau_k \leq t < \tau_{k+1} \\ \dots & \dots \\ c_{ip}^* & \tau_p < t \end{cases}$$

ou

$$g_i^* = - \sum_{k=0}^p d_{ik}^* u_k \tag{21}$$

(ii) Apliquemos, nessa ordem, a uma função  $\psi$ , os operadores

$\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_i$ . O resultado dessa aplicação será :

$$\mathcal{Q}_i \mathcal{Q}_{i-1} \dots \mathcal{Q}_1 \psi = \left( \prod_{j=1}^i g_j \right) \psi = g_i^* \psi \tag{22}$$

em virtude das definições de  $\mathcal{Q}_j$  e  $g_i^*$ .

(b) operador  $\mathcal{N}_j$ . Definiremos simplesmente,  $\psi_i$ , como o resultado da aplicação sucessiva dos operadores  $\mathcal{N}_j, j = 1, 2, \dots, i$  sobre a função de entrada  $\psi$ .

Então,

$$\varphi_i = \left( \prod_{j=1}^i K_j \right) \varphi = K_i K_{i-1} \dots K_1 \varphi \quad (23)$$

#### I.4 - Plano geral do trabalho

O presente trabalho se encontra dividido em cinco capítulos, a saber :

I - Introdução e definições : introduz, como foi visto, o sistema S, suas equações fundamentais, além dos operadores que caracterizam os blocos de S.

II - em que a resposta de S é obtida para o caso geral.

III e IV - onde a teoria vista é aplicada a dois tipos essencialmente distintos de aplicações : sistemas onde se deseja obter uma saída múltipla da entrada, por um fator variável com o tempo, de intervalo para intervalo, e sistemas onde, em oposição, se deseja apenas amplificar (por um fator constante) a entrada do sistema. Representa o primeiro tipo, o chamado amplificador de ganho digitalmente controlado, e o segundo, o amplificador do tipo chopper, que utiliza um amplificador ac de maneira a obter amplificação numa faixa distinta de frequências, incluindo mesmo o zero. Para ambos os casos, problemas típicos simples são examinados.

V - Conclusões, onde se faz uma revista geral dos resultados, e se mencionam as possibilidades de aplicação e extensão deste trabalho.

## Capítulo II - ANÁLISE DA RESPOSTA DO SISTEMA ESTUDADO

### II.1 - Introdução

Nêste capítulo, utilizando os elementos introduzidos no capítulo anterior, chegamos inicialmente a um resultado válido para qualquer sistema S, expresso na forma de um teorema, com auxílio do qual a resposta do sistema é obtida como a soma de duas parcelas essencialmente distintas, cujas principais propriedades são analisadas.

### II.2 - Lema

Sejam os operadores  $\mathcal{N}_0$  e  $\mathcal{Q}$ , definidos por :

$$\mathcal{N}_0 f = \int_{-\infty}^t h(t-t') f(t') dt' \quad (1)$$

$$\mathcal{Q} f = g f, \text{ sendo } g = - \sum_{k=0}^p d_{.k} u_k \quad (2,3)$$

onde os  $d_{.k}$  são constantes reais finitas. Esses operadores satisfazem a relação abaixo :

$$\mathcal{N}_0 \mathcal{Q} f - \mathcal{Q} \mathcal{N}_0 f = \sum_{k=0}^p d_{.k} u_k \mathcal{N}_0 [f v_k] \quad (4)$$

onde

$$v_k = 1 - u_k \quad (5)$$

#### Demonstração :

Temos, por substituição direta :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 \mathcal{Q} f - \mathcal{Q} \mathcal{N}_0 f &= \mathcal{N}_0 [g f] - g \mathcal{N}_0 f = \\ &= \mathcal{N}_0 \left[ - \sum_{k=0}^p d_{.k} u_k f \right] + \sum_{k=0}^p d_{.k} u_k \mathcal{N}_0 f = \\ &= \sum_{k=0}^p d_{.k} \left[ u_k \mathcal{N}_0 f - \mathcal{N}_0 (f u_k) \right] \end{aligned}$$

em virtude da linearidade de  $\mathcal{N}_0$ . Em consequência de (1),

$$\mathcal{N}_0 [f u_k] = 0 \quad \forall t < \tau_k \quad (6)$$

ou ainda,

$$\mathcal{N}_0 [f u_k] = \mathcal{N}_0 [f u_k] u_k \quad (7)$$

e assim,

$$\mathcal{N}_0 \mathcal{Q} f - \mathcal{Q} \mathcal{N}_0 f = \sum_{k=0}^p d_{.k} u_k \mathcal{N}_0 [f (1 - u_k)] \quad (8)$$

usando novamente a linearidade de  $\mathcal{N}_0$ . Aplicando (5) em (8), obteremos (4).

Corolário 1 : Se considerarmos (ver nota \*, cap I)  $\tau_0 = -\infty$ ,  $u_0 = 1$  e portanto,  $v_0 = 0$ . Nêsta caso, a relação (4) se escreve :

$$\mathcal{N}_0 \mathcal{Q} f - \mathcal{Q} \mathcal{N}_0 f = \sum_{k=1}^p d_{.k} u_k \mathcal{N}_0 [ f v_k ] \quad (9)$$

Corolário 2 : Se tivermos :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &= \mathcal{N}_j \\ \mathcal{Q} &= \prod_{m=1}^j \mathcal{Q}_m \quad (g = g_j^*, d_{.k} = d_{jk}^*) \\ f &= \varphi_{j-1} \end{aligned}$$

poderemos escrever :

$$\mathcal{N}_j g_j^* \varphi_{j-1} = g_j^* \mathcal{N}_j \varphi_{j-1} + \varepsilon_{jj} \quad (10)$$

onde definimos

$$\varepsilon_{jj} = \sum_{k=0}^p d_{jk}^* u_k \mathcal{N}_0 [ \varphi_{j-1} v_k ] \quad (11)$$

II.3 Teorema : Os operadores  $\mathcal{Q}_j$  e  $\mathcal{N}_j$ , e a função  $\varphi$  satisfazem a relação

$$\left[ \prod_{j=1}^i \mathcal{N}_j \mathcal{Q}_j \right] \varphi - \left[ \prod_{j=1}^i \mathcal{Q}_j \right] \left[ \prod_{j=1}^i \mathcal{N}_j \right] \varphi = \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} \quad (12)$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = \left[ \prod_{m=j+1}^i \mathcal{N}_m \mathcal{Q}_m \right] \varepsilon_{jj} \quad (13)$$

Prova (por indução finita)

(a) para  $i=1$ , a relação (12) se escreve :

$$\mathcal{N}_1 \mathcal{Q}_1 \varphi_0 - \mathcal{Q}_1 \mathcal{N}_1 \varphi_0 = \varepsilon_{11} \quad (14)$$

o que é um caso particular de (10), quando se faz  $j=1$ .

(b) suponhamos que (12) seja válida para um dado  $i$ . Provaremos que ela é então válida para  $i+1$ . (12) pode ser escrita :

$$\left[ \prod_{j=1}^i \mathcal{N}_j \mathcal{Q}_j \right] \varphi = g_i^* \varphi_i + \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} \quad (15)$$

Aplicando  $\mathcal{N}_{i+1} \mathcal{Q}_{i+1}$ , ou seja,  $\mathcal{N}_{i+1} g_{i+1}$ ,

$$\left[ \prod_{j=1}^{i+1} \mathcal{N}_j \mathcal{Q}_j \right] \varphi = \mathcal{N}_{i+1} \left[ g_{i+1}^* \varphi_i \right] + \mathcal{N}_{i+1} g_{i+1} \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} \quad (16)$$

Examinaremos agora, de per si, as duas parcelas do segundo membro. Em vista de (4), fazendo

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_{i+1} ; g = g_{i+1}^* ; f = \varphi_i$$

chegaremos a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i+1} \left[ g_{i+1}^* \varphi_i \right] &= g_{i+1}^* \mathcal{N}_{i+1} \varphi_i + \sum_{k=0}^p d_{i+1, k}^* u_k \mathcal{N}_{i+1} \left[ \varphi_i v_k \right] = \\ &= g_{i+1}^* \varphi_{i+1} + \varepsilon_{i+1, i+1} \end{aligned} \quad (17)$$

Por outro lado,

$$\mathcal{N}_{i+1} g_{i+1} \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} = \sum_{j=1}^i \mathcal{N}_{i+1} g_{i+1} \varepsilon_{ij} = \sum_{j=1}^i \varepsilon_{i+1, j} \quad (18)$$

observando-se (13).

Substituindo agora (18) e (17) em (16), obteremos :

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{i+1} \mathcal{N}_j g_j \varphi &= g_{i+1}^* \varphi_{i+1} + \varepsilon_{i+1, i+1} + \sum_{j=1}^i \varepsilon_{i+1, j} = \\ &= g_{i+1}^* \varphi_{i+1} + \sum_{j=1}^{i+1} \varepsilon_{i+1, j} \end{aligned} \quad (19)$$

ou ainda,

$$\left( \prod_{j=1}^{i+1} \mathcal{N}_j g_j \right) \varphi = \left[ \prod_{j=1}^{i+1} g_j \prod_{j=1}^{i+1} \mathcal{N}_j \right] \varphi = \sum_{j=1}^{i+1} \varepsilon_{i+1, j}$$

como queríamos obter.

(c) Dessa forma, vistos (a) e (b), o método da indução finita mostra a validade de (12) para qualquer i.

#### II.4 - Expressão final das respostas de S - E<sub>i</sub>

Como visto no Capítulo I (Eq.I.22),

$$E_i = \left[ \prod_{j=1}^i \mathcal{N}_j g_j \right] \varphi \quad (I.22)$$

Combinando a equação acima com o teorema anterior (Eq. 15), temos :

$$E_i = g_i^* \varphi_i + \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} \quad (20)$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = \left( \prod_{m=j+1}^i \mathcal{N}_m g_m \right) \varepsilon_{ij} \quad (21)$$

$$\varepsilon_{jj} = \sum_{k=0}^p d_{jk}^* u_k \mathcal{H}_j[\varphi_{j-1} v_k] \quad (22)$$

Dessa forma, a resposta fica decomposta em duas parcelas, cujas características e propriedades principais relacionamos abaixo :

(a) A primeira parcela,  $g_i^* \varphi_i$ , ou seja,  $\prod_{j=1}^i q_j \prod_{j=1}^i \mathcal{H}_j \varphi$  é a saída do sistema representado na Fig II.4, e iguala o produto de uma função do tempo,  $g_i^*$ , pela resposta  $\varphi_i$  de um sistema invariante no tempo.

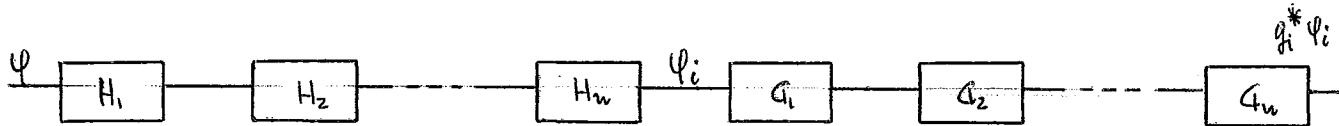


Fig II.4

(b)  $\varepsilon_{jj}$  pode ser decomposto em uma soma de funções que se anulam idênticamente antes dos instantes  $\tau_k$ . Cada uma dessas funções depende exclusivamente do salto  $d_{jk}^*$  a ela associado, independentemente das outras transições que o sistema sofreu ou ainda vai sofrer,

(c) Se aplicarmos os resultados do Apêndice IIA ao cálculo de  $\varepsilon_{ij}$  a partir de  $\varepsilon_{jj}$ , veremos que a propriedade da decomposição do tipo considerado ainda permanece, sendo que agora, entretanto, cada uma das parcelas, que vai multiplicar  $u_k$  conterá não apenas o fator  $d_{jk}^*$ , como anteriormente, e sim também os valores de todos os saltos ocorridos para  $t \leq \tau_k$ , nos estágios que o sinal atravessou, ou seja,  $\varepsilon_{ij}$  vai ser função de  $d_{jk}^*$  e dos saltos  $d_{mk}$ ,  $j+1 \leq m \leq i$ .

A importância das propriedades listadas acima está diretamente relacionada com a utilização desta teoria, como se pode ver :

(a)  $\varphi_i = \prod_{j=1}^i \mathcal{H}_j \varphi$  é a resposta do sistema composto pelos sub-sistemas invariantes no tempo, e pode portanto, ser calculada por métodos mais simples, métodos operacionais, por exemplo as transformadas de Laplace (simples ou bilateral), acrescentando ainda que  $\varphi$  e os  $\varphi_j$  são certamente funções mais simples do que, por exemplo,  $E_i$  ou  $g_i E_i$ .

(b) Sabemos que para usar a transformada de Laplace (simples), devemos ter como funções de entrada (e de saída) funções idênticamente nulas para  $t < 0$ , ou, utilizando um deslocamento no tempo, para  $t < \tau$ , sendo  $\tau$  positivo ou ne-

gativo. Dessa forma, podemos calcular por intermédio das transformadas de Laplace, os  $\varepsilon_{ij}$  depois de obtidos os  $\varepsilon_{jj}$ .

(c) Naqueles sistemas em que cada  $H_i(s) = \mathcal{L} [h_i(t)]$  é uma função racional de  $s$ , cada  $\varepsilon_{jj}$  é uma combinação linear das funções próprias do sistema, em cada intervalo  $[z_k, z_{k+1})$ , enquanto  $\varepsilon_{ij}$  é uma combinação linear das funções próprias do sistema  $H_j(s) H_{j+1}(s) \dots H_i(s)$ , no mesmo intervalo. Estes fatos decorrem de que  $u_k \mathcal{V}_j [f v_k]$  é uma combinação linear das funções próprias de  $H_j(s)$ , uma vez que não há termo forçado para  $t \geq z_k$ , por ser  $f v_k = 0$  nesse intervalo. Por outro lado, a resposta de  $H_i(s)$  a uma das funções próprias de  $H_j(s)$  é uma função própria de  $H_i(s) H_j(s)$  para quaisquer  $i$  e  $j$ , ou então uma combinação linear delas.

Além de ser usada nas simplificações descritas acima, a decomposição efetuada nas saídas do sistema,  $E_i$ , pode ser usada naqueles casos em que um dos termos pode ser identificado com a resposta desejada do sistema (Ver Cap III) ou então ser nula, ou ainda desprezível em relação aos outros termos (Cap IV)

### II.5 - Um único instante de transição ( $p=1$ )

Vamos agora examinar um caso particular em que somente é necessário uma transição nas funções  $g_i$ . Usaremos a mesma notação que anteriormente, omitindo entretanto o índice  $k=1$ , quando desnecessário, para obter algumas das propriedades características do sistema, neste caso.

Assim,

$$g_i = \begin{cases} c_{i0} & t \leq \tau \\ c_{i1} & t \geq \tau \end{cases}$$

$$= c_{i0} - d_i u$$

onde  $u = u_1 = u(t - \tau_1) = u(t - \tau)$  sendo  $\tau_0 = -\infty$  e  $\tau_1 = \tau$ .

Além disso, agora,

$$v = 1 - u$$

$$e \quad g_i^* = c_{i0}^* - d_i^* u$$

Reescrevendo os resultados de II.4,

$$E_i = g_i^* \varphi_i + \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} \quad (26)$$

onde

$$\varepsilon_{ij} = \prod_{m=j+1}^i \gamma_{0m} g_m \varepsilon_{jj} \quad (27)$$

e

$$\varepsilon_{jj} = d_j^* u \gamma_{0j} [\varphi_{j-1} v] \quad (28)$$

Como  $\varepsilon_{jj} = 0 \quad \forall t < \tau$  e  $g_m = c_{ml} \quad \forall t > \tau$ , teremos  $\varepsilon_{ij} = 0 \quad \forall t < \tau$ ,

$$\varepsilon_{ij} = \left[ \prod_{m=j+1}^i c_{ml} \prod_{m=j+1}^i \gamma_{0m} \right] \varepsilon_{jj} \quad (29)$$

Sejam agora,

$$\xi_{jj} = u \gamma_{0j} [\varphi_{j-1} v] \quad (30)$$

e

$$\xi_{ij} = \left[ \prod_{m=j+1}^i \gamma_{0m} \right] \xi_{jj} \quad (31)$$

Em termos destes,

$$\varepsilon_{ij} = A_{ij} \xi_{ij} \quad (32)$$

onde

$$A_{ij} = d_j^* \prod_{m=j+1}^i c_{ml} \quad (33)$$

Dessa maneira, neste caso particular, podemos decompor cada  $\varepsilon_{ij}$ , em um produto  $A_{ij} \xi_{ij}$ , onde:

(a)  $A_{ij}$  só depende das funções  $g_1, g_2, \dots, g_i$ .

(b)  $\xi_{ij}$  depende da função de entrada  $\varphi$  e dos sistemas  $H_1, H_2,$

$\dots, H_i$ , e do instante  $\tau$  em que se realiza a transição.

O caso  $A_{ij} = 1$ , em que  $\varepsilon_{ij} = \xi_{ij}$ , é um caso particular muito importante. Ele pode ser alcançado fazendo-se, por exemplo,

$$g_1 = \begin{cases} 1 & t < \tau \\ 2 & t \geq \tau \end{cases}$$

$$g_2 = g_3 = \dots = g_n = 1$$

e pode ser usado como base teórica para determinação experimental de  $\xi_{ij}$  de vez

que, se tivermos uma única transição em um único estágio  $j$ , e obtivermos experimentalmente  $\varepsilon_j$ , poderemos simplesmente obter todos os  $\xi_{ij}$ , e depois, calcular os  $\varepsilon_{ij}$  a partir das transições sofridas pelo sistema.

## II-A - Apêndice ao Capítulo II

II.A.1 - Demonstração: Se  $x = \sum_{k=0}^p x_k u_k$  e  $y = \sum_{k=0}^p y_k u_k$ ,  $z = x y$  admite uma decomposição semelhante:

$$z = \sum_{k=0}^p z_k u_k \quad \text{onde} \quad z_k = \sum_{m=0}^k x_k y_m + \sum_{m=0}^{k-1} x_m y_k$$

Temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^p x_k u_k \sum_{k=0}^p y_k u_k = \sum_{k=0}^p x_k u_k \sum_{m=0}^p y_m u_m = \\ & = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^p x_k y_m u_k u_m = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^k x_k y_m u_k u_m + \sum_{m=k+1}^p x_k y_m u_k u_m = \\ & = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^k x_k y_m u_k + \sum_{m=k+1}^p x_k y_m u_m = \\ & = \sum_{k=0}^p \sum_{m=0}^k x_k y_m u_k + \sum_{m=0}^{k-1} x_m y_k u_k = \\ & = \sum_{k=0}^p u_k \sum_{m=0}^k x_k y_m + \sum_{m=0}^{k-1} x_m y_k \end{aligned}$$

II.A.2 - Demonstração: Se  $x$  admite a decomposição  $\sum_{k=0}^p x_k(t) u_k$  então,  $\mathcal{N}g x$  admite decomposição da mesma forma.

Temos:

$$\mathcal{N}g \sum_{k=0}^p x_k u_k = \mathcal{N}g \left[ - \sum_{k=0}^p d_{\bullet k} u_k \sum_{k=0}^p x_k u_k \right] = \mathcal{N}g \left[ \sum_{k=0}^p z_k u_k \right]$$

$$\text{onde} \quad z_k = - \left[ \sum_{m=0}^k x_m d_{\bullet m} + \sum_{m=0}^{k-1} x_m d_{\bullet k} \right]$$

$$\text{ou seja,} \quad \mathcal{N}g x = \sum_{k=0}^p u_k \mathcal{N}g [z_k u_k]$$

$$\text{já que} \quad \mathcal{N}g [z_k u_k] = u_k \mathcal{N}g [z_k u_k]$$

em virtude da causalidade de  $\mathcal{N}g$ .

## Capítulo III - Primeiro tipo de aplicações ( AGCD )

### III.1 - Introdução

O amplificador de ganho digitalmente controlado, (também chamado amplificador com controle automático de ganho digital - AGCD) é um sistema em que a saída pode influir sobre o seu ganho total, de maneira a manter o seu nível de saída entre níveis préfixados, submetido adicionalmente à restrição de somente variar o ganho por potências de dois. É um caso particular de uma série de sistemas ( amplificadores) cujo ganho é bruscamente variado, de uma maneira dependente, conforme o sistema, da saída ou de um comando externo. Tais sistemas têm em comum o fato de que mudanças de ganho devem ser transmitidas à saída, e portanto, de que as mudanças de ganho em seus estágios amplificadores são essenciais, sendo os fatores que devem compor a mudança de ganho total aparente à saída. A variedade de sistemas assim constituídos, tem uma constante: a precisão de ganho pode ser obtida dessa maneira é bastante superior àquela que pode ser obtida com ganhos continuamente variados, precisão esta difícil de ser obtida.

A análise de um sistema desse tipo, projetado como é, para a obtenção de um sinal determinado, deve incluir a definição de um erro, capaz de medir, neste caso, a inabilidade da saída de atingir imediatamente após cada transição, o valor da saída correspondente ao novo ganho instalado no sistema, medindo por tanto a diferença entre a saída atual do sistema, e uma saída desejada, que deve ser definida incluindo as variações de ganho, que se desejam aparentes à saída, e também aquelas deformações que o sistema introduz no sinal, mesmo quando não há nenhuma transição. Este segundo aspecto pode ser aceito, em consequência do fato de que nenhum sistema físico, a ganho constante, que seja, é capaz de reproduzir fielmente uma entrada aplicada a ele. No nosso sistema, tais deformações ainda vão existir, e continuarão aparentes, mesmo quando das transições sofridas, mas não devem ser incluídas em um erro cuja finalidade é analisar o efeito de uma mudança de ganho no sistema, e assim na saída desejada.

O sistema S estudado anteriormente, pode representar o sis

tema de que tratamos acima, e nêsse caso, em geral, os blocos  $G_i$  representarão atenuadores variáveis que se alternarão com estágios amplificadores  $H_i$ , caracterizados por suas funções de transferência  $H_i(s)$ .

De acôrdo com as considerações acima, a saída desejada pode ser  $e_i = g_i^* \varphi_i$ , para o estágio  $L_i$ , e  $e_n = g_n^* \varphi_n$  vai representar a saída total desejada. Observamos que :

- (a)  $g_i^*$  caracteriza as mudanças de ganho sofridas entre os estágios  $l$  e  $i$ .
- (b)  $\varphi_i$  inclui as deformações que os estágios amplificadores  $H_i(s)$  introduzem no sinal, mesmo quando  $g_i =$  constante.

Dessa maneira, o erro será definido como  $\varepsilon_i = E_i - e_i$ , sendo o erro devido às mudanças de ganho sofridas pelo sistema. A seção seguinte é dedicada às definições, e à expressão de  $\varepsilon_i$ , obtida através dos resultados de capítulo anterior. As demais seções examinam exemplos dêste tipo de aplicação.

### III.2 - Definição de erro, e sua expressão

Definimos a saída desejada para o estágio  $L_i$  de sistema S, como sendo  $e_i = \left[ \prod_{j=1}^i g_j \prod_{j=1}^i \gamma_j \right] \varphi$ , onde  $g_j$  e  $\gamma_j$  são os operadores definidos no capítulo I, e  $\varphi$  é a entrada do sistema.

Definimos o erro  $\varepsilon_i$ , devido às transições sofridas pelo sistema S, à saída de  $L_i$ , como sendo igual à diferença entre a saída atual  $E_i$  e a saída desejada  $e_i$ ,

$$\varepsilon_i = E_i - e_i \tag{1}$$

De acôrdo com (II.20),  $\varepsilon_i$  se escreve:

$$\varepsilon_i = E_i - e_i = E_i - g_i^* \varphi_i = \sum_{j=1}^i \varepsilon_{ij} \tag{2}$$

sendo  $\varepsilon_{ij}$  como definido anteriormente (Cap. II).

Convém observar que, nestas condições,  $\varepsilon_i$  é o erro total à saída de  $L_i$ ;  $\varepsilon_{ij}$  é o erro introduzido pelo estágio  $j$ , observado à saída de  $L_j$ , e  $\varepsilon_{ij}$  é o resultado da propagação do erro até o estágio  $L_i$ , onde é observado, sendo portanto o erro gerado por  $L_j$ , observado em  $L_i$ .

O erro total, à saída de S (ou de  $L_n$ ) é  $\varepsilon_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{nj}$ , igual à soma dos erros gerados nos estágios anteriores, observados à saída do sistema.

### III.3 - Erro de um sistema composto por estágios de primeira ordem, idênticos.

Seja, em particular, o sistema S representado na página seguinte.

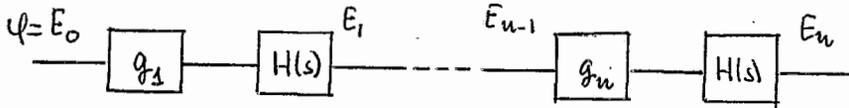


Fig. III.3

onde os estágios \$H\_1\$ (idênticos) são caracterizados por sua função de transferência comum, \$H(s)\$, e as funções \$g\_i\$ sofrem uma única transição em \$t = z\$.

De acôrdo com o encontrado na seção II.5,

$$\begin{aligned} \xi_{ij} &= u \mathcal{N}_j [\varphi_{j-1}, v_j] = u \int_{-\infty}^t \alpha e^{-\alpha(t-t')} \varphi_{j-1}(t') v_j(t') dt' = \\ &= \varphi_j(z) e^{-\alpha(t-z)} u(t-z) \end{aligned} \quad (3)$$

Para calcular \$\xi\_{ij}\$, podemos empregar as integrais de definição de \$\mathcal{N}\_j\$, mas, entretanto, é mais simples usar as transformadas de Laplace, como sugerido no capítulo anterior, fazendo-se corresponder, por simplicidade, \$t-z\$ à variável \$s\$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \prod_{m=j+1}^i \mathcal{N}_m \xi_{ij} \right] &= \left( \frac{\alpha}{s+\alpha} \right)^{i-j} \varphi_j(z) \frac{1}{s+\alpha} = \varphi_j(z) \alpha^{i-j} \frac{1}{(s+\alpha)^{i-j+1}} = \\ &= \mathcal{L} \left[ \varphi_j(z) \alpha^{i-j} \frac{(t-z)^{i-j} e^{-\alpha(t-z)}}{(i-j)!} u(t-z) \right] = \mathcal{L} \left[ \varphi_j(z) \frac{[\alpha(t-z)]^{i-j} e^{-\alpha(t-z)}}{(i-j)!} u \right] \end{aligned} \quad (4)$$

e, portanto,

$$\xi_{ij} = \varphi_j(z) \frac{[\alpha(t-z)]^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\alpha(t-z)} u \quad (5)$$

sendo o erro total

$$\epsilon_i = \left[ \sum_{j=1}^i A_{ij} \varphi_j(z) \frac{[\alpha(t-z)]^{i-j}}{(i-j)!} \right] e^{-\alpha(t-z)} u \quad (6)$$

como foi notado antes, uma combinação das funções próprias de \$H\_1(s)\$ \$H\_2(s)\$ ...

$$H_1(s) = \left( \frac{\alpha}{s+\alpha} \right)^i$$

Cumpre notar, aqui, que, como a finalidade do sistema é reproduzir (amplificada) a função \$\varphi\$, devemos ter \$\varphi\_i \approx \varphi\$, o que nos dá, aproximadamente,

$$\epsilon_i = \varphi(z) \left[ \sum_{j=1}^i \frac{A_{ij}}{(i-j)!} [\alpha(t-z)]^{i-j} \right] e^{-\alpha(t-z)} u \quad (7)$$

A seção seguinte relaciona algumas das conclusões que se podem deduzir da expressão de \$\epsilon\_i\$ e da aproximação acima.

### III.4 - Análise dos resultados obtidos.

Consideremos o amplificador de ganho bruscamente variado da seção anterior. Vimos, então, que o erro é dado por

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^i A_{ij} \xi_{ij} \quad (8)$$

onde

$$\xi_{ij} = \varphi_j(z) \frac{[\alpha(t-z)]^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\alpha(t-z)} u(t-z) = \varphi_j(z) \frac{\chi^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\chi} u(\chi) \quad (9)$$

se definirmos, para facilitar a análise, \$\chi = \alpha(t-z)\$.

Podemos ver, das expressões encontradas para  $\xi_{ij}$ , que  $\xi_{ii}$  (ou  $\xi_{jj}$ ) é uma função decrescente de  $x$  (ou de  $t$ ), para  $x > 0$ , passando por um máximo em  $x=0$  ( $\xi_{jj} = \psi_j(\tau)$ ), no instante da transição. Além disso,  $\xi_{ij}$  ( $i \neq j$ ) se anula para  $x=0$ , passa por um máximo (ou mínimo), conforme o sinal de  $\psi_j(\tau)$ , e decai exponencialmente para zero, quando  $x \rightarrow \infty$ . Observando

$$\frac{d\xi_{ij}}{dx} = \xi_{ij} \left[ \frac{i-j}{x} - 1 \right] \quad (10)$$

que se anula para  $x=i-j$ , vemos que o máximo, nêsse instante, é

$$\max \xi_{ij} = \psi_j(\tau) \frac{(i-j)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-(i-j)} \quad (11)$$

Nas condições da aproximação feita na seção anterior ( $\psi_j \approx \varphi$ ),  $\xi_{ij}$  é função apenas de  $i-j$ , ou seja, de número de estágios que o êrro atravessa, desde que é gerado, até o estágio em que é observado.

Vamos agora considerar o caso em que o sistema, em  $t=\tau$ , sofre uma mudança de ganho, passando de um ganho  $C_{no}^*$  para um ganho  $C_{ni}^* = \mu C_{no}^*$ , e em que se supõe que apenas o estágio  $k$  sofre uma transição, passando de ganho  $C_{ko}$  para o ganho  $\mu C_{ko}$ . Consideraremos ainda válida a aproximação  $\psi_j \approx \varphi$ , vista anteriormente. Teremos :

$$C_{io} = C_{i1}, \quad i \neq k \quad (12)$$

$$\mu C_{ko} = C_{k1} \quad (i=k) \quad (13)$$

portanto,

$$C_{io}^* = C_{i1}^* \quad i < k \quad (14)$$

$$\mu C_{io}^* = C_{i1}^* \quad i \geq k \quad (15)$$

de maneira que

$$d_i^* = 0 \quad i < k \quad (16)$$

$$d_i^* = C_{io}^* (1-\mu), \quad i \geq k \quad (17)$$

Assim,

$$A_{ij} = 0, \quad j < k \quad (18)$$

$$A_{ij} = C_{jo}^* (1-\mu) \prod_{m=j+1}^i C_{mo}^* = C_{io}^* (1-\mu) \quad j \geq k \quad (19)$$

Dessa maneira,

$$\epsilon_n = \sum_{j=1}^n A_{ij} \xi_{ij} = C_{no}^* (1-\mu) \sum_{j=k}^n \xi_{nj} = \left( C_{no}^* - C_{ni}^* \right) \sum_{j=k}^n \varphi(\tau) \frac{\tau^{n-j} e^{-\tau}}{(n-j)!} \quad (20)$$

$$\text{ou,} \quad \epsilon_n = \left( C_{no}^* - C_{ni}^* \right) \varphi(\tau) e^{-\tau} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\tau^j}{j!} \quad (21)$$

e que mostra que tanto maior será, em valor absoluto, para qualquer  $x$ , (ou  $t$ ), o valor de  $\epsilon_n$ , quanto menor fôr  $k$ , de maneira que a melhor situação será quando tivermos  $k$ , máximo, igual a  $n$ . Uma transição, dessa forma, conduz ao menor êrro, quando se realiza, integralmente, no último estágio.

Podemos provar, nêste caso, que os máximos de  $\xi_{ij}$  não tem correspondente em  $\epsilon_n$ :

$$\text{const. } \frac{dE_u}{dx} = \frac{d}{dx} \left( e^{-x} \sum_{j=0}^{u-k} \frac{x^j}{j!} \right) = - \frac{x^{u-k} e^{-x}}{(u-k)!} < 0 \quad (22)$$

Erro relativo. Um erro relativo poderia ser definido como  $E_u / (c_{ui}^* \varphi_u(t))$ , dividindo o erro (absoluto) encontrado, pelo valor da saída desejada no instante considerado. Mais cômodo, entretanto, é usar para representar  $\varphi_u(t)$  o valor de  $\varphi(\tau)$  e definir um erro relativo

$$E'_u = \frac{E_u}{c_{ui}^* \varphi(\tau)} \quad (23)$$

nas condições da aproximação feita.

Para o caso particular acima,

$$E'_u = c_{ui}^* (1-\mu) \sum_{j=k}^u \xi_{uj} / c_{ui}^* \varphi(\tau) = \frac{1-\mu}{\mu} e^{-x} \sum_{j=0}^{u-k} \frac{x^j}{j!} \quad (24)$$

depende de um fator  $\lambda = \frac{1-\mu}{\mu}$ , sendo

$$0 \leq |\lambda| < 1 \quad \text{para } \mu > 1 \quad (25)$$

$$\text{e } 0 \leq |\lambda| \quad \text{para } \mu \leq 1 \quad (26)$$

Quando se leva a cabo uma diminuição de ganho, por um fator  $\mu$ , o erro relativo é bem maior que quando o ganho aumenta, pelo mesmo fator. Dessa maneira, como uma norma para a escolha de uma rotina das mudanças de ganho de um sistema real, deveremos escolher para as diminuições de ganho, os estágios mais próximos do último. Além disso, notemos apenas que como  $E_u$  é proporcional a  $\varphi(\tau)$  (aproximadamente) se o instante  $\tau$  é escolhido de maneira a anular ou minimizar  $\varphi(t)$ , o mesmo acontecerá, (aproximadamente), a  $E_u$  ..

Evidentemente, uma análise bem mais detalhada pode ser feita, mas isso não é o desejado aqui, onde ela apenas figura como um exemplo de aplicação da teoria vista.

## Capítulo IV - Segundo tipo de aplicações: chopper

### IV.1 - Introdução

O amplificador d.c. a vibrador síncrono pode ter descrito o seu funcionamento, dizendo-se que êle amplifica sinais de baixa frequência (d.c.) usando-os para modular um sinal em forma de onda quadrada, que é então amplificado por um amplificador a.c. (cuja faixa de passagem não inclui, em geral, as frequências da entrada). Um estágio posterior faz a demodulação e a filtragem do sinal, de maneira que a saída reproduz a entrada amplificada. Não nos cabe aqui discutir ou demonstrar as qualidades e desvantagens do sistema, nem sequer a sua realização prática. Interessa-nos apenas mostrar que a teoria desenvolvida anteriormente permite analisar o seu comportamento, sendo aplicada aqui de maneira inteiramente diversa da encontrada no capítulo anterior.

Por simplicidade, êste capítulo se divide em quatro seções, a saber:

IV.1 - esta introdução

IV.2 - generalidades sôbre a aplicação da teoria ao tipo de sistema aqui estudado.

IV.3 - uma análise sucinta de um modelo extremamente simplificado

IV.4 - comentários dos resultados de IV.3, em que se estudam as características principais do sistema em estado permanente ou transitório

### IV.2 - Generalidades

Um sistema como o amplificador chopper sumariamente descrito em IV.1, pode ser representado pelo sistema S estudado anteriormente, como abaixo, (fazendo-se, naturalmente,  $n=2$ )

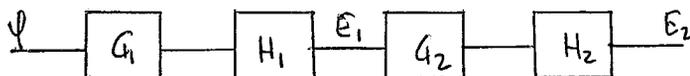


Fig.IV.2

$G_1$  e  $G_2$  representam os estágios modulador e demodulador. As funções  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  que os definem, em geral, serão semelhantes ou iguais. Exemplos para êles são os choppers, simétrico e assimétrico:

(a) chopper assimétrico :

$$g_1 = \begin{cases} 0 & 2nT \leq t < (2n+1)T \\ 1 & (2n+1)T \leq t < 2(n+1)T \end{cases} \quad (1)$$

$$g_2 = 1 - g_1 \quad (2)$$

(b) chopper simétrico :

$$g_1 = \begin{cases} -1 & 2nT \leq t < (2n+1)T \\ +1 & (2n+1)T \leq t < 2(n+1)T \end{cases} \quad (3)$$

$$g_2 = -g_1 \quad (4)$$

Em continuação,  $H_1$  e  $H_2$  representam o estágio amplificador (a.c.) e o filtro. De forma geral,  $H_1$  será um sistema passabanda ou passaalto, e  $H_2$  será um sistema passabaixo, destinado a eliminar as frequências mais altas introduzidas no processo.

No caso prático, a função  $\varphi$  de entrada será constituída de frequências inteiramente fora da faixa de passagem de  $H_1$ , e, nessas condições, poderemos tomar :

$$\mathcal{N}_1 \varphi \approx 0 \quad (5)$$

como uma aproximação suficiente. No caso em que  $\varphi = \text{constante}$ , a aproximação se tornará em igualdade, isto é, teremos realmente  $\mathcal{N}_1 \varphi = 0$ .

Nessas condições, escreveremos :

$$E_1 = \mathcal{N}_1 g_1 \varphi = g_1 \mathcal{N}_1 \varphi + \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11} \quad (6)$$

e portanto,

$$E_2 = \mathcal{N}_2 g_2 E_1 = \mathcal{N}_2 g_2 \varepsilon_{11} = \varepsilon_{21} \quad (7)$$

Como vemos, aqui reside a distinção essencial entre este tipo de aplicações e o anterior, de vez que naquêlo, o termo mais importante da resposta é aqui nulo ou desprezível, e a resposta desejada do sistema deve ser procurada no termo  $\varepsilon_{21}$ , que naquele caso era apenas uma parcela de erro.

Observemos apenas, para concluir, que se não tivermos

$\mathcal{N}_1 \varphi \approx 0$  poderemos sempre levar avante o cálculo, e obter os termos  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_{22}$  da resposta. Entretanto, realmente, repetimos, o valor de  $g_1 \mathcal{N}_1 \varphi$  poderá, em geral, ser desprezado, frente a  $\varepsilon_{11}$ , e a resposta será dada por  $\varepsilon_{21}$ .

#### IV.3 - Análise de um caso extremamente simplificado

Consideraremos nesta seção, e na seguinte, um caso particular extremamente simplificado daquêlo encontrado em IV.2. Faremos, com efeito, do primeiro grau as funções de transferência de  $H_1$  e  $H_2$ , quais sejam,

$$H_1(s) = \frac{s}{s+\beta} = 1 - \frac{\beta}{s+\beta} \quad (8)$$

e

$$H_2(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad (9)$$

e com que as funções  $g_1(t)$  e  $g_2(t)$  sejam iguais :

$$g_1(t) = g_2(t) = g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 2mT \leq t < (2m+1)T \\ 0 & (2m+1)T \leq t < 2(m+1)T, m=0,1,\dots \end{cases} \quad (10)$$

Podemos exprimir também  $g = g_1(t) = g_2(t)$  na forma já usada anteriormente ;

$$g = - \sum_{k=0}^{\infty} d_{.k} u_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u(t-kT) \quad (11)$$

o que nos permite escrever

$$d_{.k} = (-1)^{(k+1)}, \quad u_k = u(t-kT) \quad (12) \quad *)$$

Para que se tenha realmente  $\mathcal{N}_0, \varphi \neq 0$ , tomaremos para a análise,  $\varphi = \varphi_0 = \text{constante}$ , como função de entrada. A resposta a  $\varphi = \varphi_0$  será apresentada nesta seção, e suas propriedades principais, na seção seguinte.

Temos :

$$E_1 = \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_0 \varphi + E_{11} = E_{11} \quad (13)$$

já que, em virtude da definição de  $H_1(s)$

$$h_1(t) = \mathcal{L}^{-1} H_1(s) = \mathcal{L}^{-1} \frac{s}{s+\beta} = \mathcal{L}^{-1} \left[ 1 - \frac{\beta}{s+\beta} \right] = \delta(t) - \beta e^{-\beta t} u(t) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 \varphi &= \mathcal{N}_0 \varphi_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-t') \varphi(t') dt' = \\ &= \varphi_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t') dt' - \varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} \beta e^{-\beta(t-t')} u(t-t') dt' = \varphi_0 - \varphi_0 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Assim,

$$E_1 = E_{11} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{.k} u_k \mathcal{N}_1 [\varphi u_k] \quad (16)$$

onde, como antes,  $v_k = 1 - u_k$ .

Portanto,

$$E_2 = \mathcal{N}_2 \mathcal{Q}_2 E_{11} = \mathcal{N}_2 \left[ \mathcal{Q}_2 \sum_{k=0}^{\infty} d_{.k} u_k \mathcal{N}_1 [\varphi u_k] \right] \quad (17)$$

De acôrde com o apêndice IV-A, temos, para  $qT \leq t < (q+1)T$

$$E_2 = A_q e^{-\alpha(t-qT)} + B_q e^{-\beta(t-qT)} \quad (18)$$

onde, conforme a paridade de  $q$ , ( $q = 2p$  ou  $q = 2p+1$ ),

\*) - Neste caso,  $u_0 \neq 0$ , e porisso, o somatório se estende desde zero, mesmo para o cálculo de  $E_{ij}$  (no caso,  $E_{11}$ ).

- A soma indicada ( até infinito ) representa apenas a soma até  $q$ , sendo o intervalo  $[qT, (q+1)T)$  o intervalo que contém o ponto  $t$  considerado.

$$A_{2p} = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} e^{-2\alpha p T} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{\alpha(2p+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} - \frac{1 + e^{(\alpha - \beta)(2p+1)T}}{1 - e^{(\alpha - \beta)T}} \right] - \frac{1 - e^{2\alpha(p+1)T}}{1 - e^{2\alpha T}} \right\} \quad (19)$$

$$A_{2p+1} = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} e^{-\alpha(2p+1)T} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{2\alpha(p+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} - \frac{1 - e^{2(\alpha - \beta)(p+1)T}}{1 + e^{(\alpha - \beta)T}} \right] - \frac{1 - e^{2\alpha(p+1)T}}{1 - e^{2\alpha T}} \right\} \quad (20)$$

$$B_{2p} = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \frac{1 + e^{-\beta(2p+1)T}}{1 + e^{-\beta T}} \quad (21)$$

$$B_{2p+1} = 0 \quad (22)$$

Estes resultados serão analisados e comentados na seção seguinte.

#### IV.4 - Análise dos resultados obtidos.

Em vista das expressões encontradas no final da seção anterior, podemos dizer que

(a) Durante o intervalo em que  $g_2 \neq 0$  (intervalos onde  $q$  é par) a resposta do sistema é uma superposição das exponenciais características do amplificador ( $e^{-\beta T}$ ), e do filtro passabaixo ( $e^{-\alpha T}$ ), e nos intervalos em que  $q$  é ímpar, (onde  $g_2 = 0$ ), apenas a segunda exponencial se apresenta, em virtude do desacoplamento efetuado por  $g_2 = 0$ .

(b) Pode-se verificar que a saída  $E_2$  é uma função contínua do tempo, observando que

$$A_{2p} + B_{2p} = A_{2p-1} e^{-\alpha T} \quad (t = 2pT) \quad (23)$$

e que

$$A_{2p} e^{-\alpha T} + B_{2p} e^{-\beta T} = A_{2p+1} \quad (24)$$

o que já era, naturalmente, esperado.

(c) À medida que  $q$  cresce,  $A_q$  e  $B_q$  têm dois pontos de acumulação, cada um. Na realidade, podemos observar que:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} A_{2p} &= \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{-e^{\alpha T}}{1 - e^{\alpha T}} \right] - \frac{-e^{2\alpha T}}{1 - e^{2\alpha T}} \right\} = \\ &= \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \frac{e^{\alpha T}}{1 - e^{\alpha T}} \left[ \frac{e^{\alpha T}}{1 + e^{\alpha T}} - \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \right] = A^+ \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} A_{2p+1} &= \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{-e^{\alpha T}}{1 - e^{\alpha T}} \right] + \frac{e^{\alpha T}}{1 - e^{2\alpha T}} \right\} = \\ &= \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \frac{e^{\alpha T}}{1 - e^{\alpha T}} \left[ \frac{1}{1 + e^{\alpha T}} - \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \right] = A^- \end{aligned} \quad (26)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} B_{2p} = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \frac{1}{1 + e^{-\beta T}} = B^+ \quad (27)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} B_{2p+1} = 0 = B^- \quad (28)$$

e, em estado permanente,  $\bar{E}_2$  pode ser escrito :

$$E_2 = A^+ e^{-\alpha t_0} + B^+ e^{-\beta t_0} \quad \text{nos intervalos pares} \quad (29)$$

$$E_2 = A^- e^{-\alpha t_0} \quad \text{nos intervalos ímpares} \quad (30)$$

sendo  $t_0$  o tempo contado a partir do início de intervalo.

(d) o valor médio de  $\bar{E}_2$  pode ser calculado, como sendo, em estado permanente :

$$\bar{E}_2 = \frac{1}{2T} \left[ \int_0^T (A^+ e^{-\alpha t_0} + B^+ e^{-\beta t_0}) dt_0 + \int_0^T A^- e^{-\alpha t_0} dt_0 \right] = \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2T} \frac{1}{\beta - \alpha} \left[ e^{-\alpha T} \frac{1 + e^{2\beta T}}{1 + e^{\beta T}} + \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta T} \frac{1 - e^{\beta T}}{1 + e^{\beta T}} \right] = K \varphi_0$$

de maneira que  $K$  será o efetivo ganho do sistema. Num sistema real, deveríamos ainda acrescentar a este fator  $K$ , o ganho do amplificador a.c., que, no nosso exemplo, foi tomado unitário, e, portanto, teríamos um ganho efetivo  $KK_0$ , chamando de  $K_0$  esse outro fator.

IV-A - Apêndice

Cálculo de  $E_2$ ; Este apêndice contém a demonstração da expressão apresentada na seção IV.3.

Como ponto de partida, temos:

$$E_2 = \gamma_2 \left[ q \sum_{k=0}^{\infty} d_{.k} u_k \gamma_1 [\psi v_k] \right]$$

onde

$$\varphi = \varphi_0, \quad d_{.k} = (-1)^{k+1}, \quad q = - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$$

Como

$$\begin{aligned} u_k \gamma_1 [\psi v_k] &= u_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \delta(t-t') - \beta e^{-\beta(t-t')} u(t-t') \right] \psi(t') v_k(t') dt' = \\ &= u_k \varphi_0 v_k - u_k \varphi_0 \int_{-\infty}^t \beta e^{-\beta(t-t')} [1 - u(t'-kT)] dt' = \\ &= -u_k \varphi_0 e^{-\beta(t-kT)} \int_{-\infty}^{kT} \beta e^{-\beta(kT-t')} dt' = -u_k \varphi_0 e^{-\beta(t-kT)} \end{aligned}$$

temos

$$E_2 = \gamma_2 \left[ - \sum_{k=0}^{\infty} d_{.k} u_k \sum_{k=0}^{\infty} d_{.k} \left[ -\varphi_0 e^{-\beta(t-kT)} u_k \right] \right]$$

Fazendo uso de

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} x_k u_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} y_k u_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \left( \sum_{m=0}^k x_k y_m + \sum_{m=0}^{k-1} x_m y_k \right)$$

(extensão da fórmula demonstrada no apêndice II-A), obteremos:

$$\begin{aligned} E_2 &= \gamma_2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} u_k \left( \sum_{m=0}^k d_{.m} d_{.k} \varphi_0 e^{-\beta(t-kT)} + \sum_{m=0}^{k-1} d_{.k} d_{.m} \varphi_0 e^{-\beta(t-mT)} \right) \right] = \\ &= \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ d_{.k} \left[ \sum_{m=0}^k d_{.m} + \sum_{m=0}^{k-1} d_{.m} e^{\beta(m-k)T} \right] \gamma_2 \left[ e^{-\beta(t-kT)} u_k \right] \right\} \end{aligned}$$

Ora, como

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k d_{.m} &= \sum_{m=0}^k (-1)^{m+1} = \frac{-1 - (-1)^k}{2} \\ \sum_{m=0}^{k-1} d_{.m} e^{\beta(m-k)T} &= \frac{(-1)^k - e^{-\beta kT}}{1 + e^{\beta T}} \end{aligned}$$

e, além disso, usando a transformada de Laplace (utilizando como tempo  $t-kT$ )

$$\begin{aligned} \gamma_2 \left[ e^{-\beta(t-kT)} u(t-kT) \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\alpha}{s+\alpha} \frac{1}{s+\beta} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \left( \frac{1}{s+\alpha} - \frac{1}{s+\beta} \right) \right] = \\ &= \frac{\beta}{\beta-\alpha} \left( e^{-\alpha(t-kT)} - e^{-\beta(t-kT)} \right) u(t-kT) \end{aligned}$$

teremos:

$$\begin{aligned} E_2 &= \varphi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{-1 - (-1)^k}{2} + \frac{(-1)^k - e^{-\beta kT}}{1 + e^{\beta T}} \right) \frac{\alpha}{\beta-\alpha} \left( e^{-\alpha(t-kT)} - e^{-\beta(t-kT)} \right) u_k \\ &= \frac{\alpha \varphi_0}{\alpha-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1 - e^{-\beta kT} (-1)^k}{1 + e^{\beta T}} - \frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \left( e^{-\alpha(t-kT)} - e^{-\beta(t-kT)} \right) u_k \end{aligned}$$

Se supusermos  $t$  contido no intervalo  $[qT, (q+1)T)$ , escreveremos :

$$E_2 = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \sum_{k=0}^q \left( \frac{1 - e^{-\beta kT} (-1)^k}{1 + e^{\beta T}} - \frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \left( e^{-\alpha(t-kT)} - e^{-\beta(t-kT)} \right)$$

Vamos agora calcular os fatores que multiplicam  $e^{-\alpha t}$  e  $e^{-\beta t}$  na expressão acima, calculando as somas indicadas abaixo :

$$S_\alpha = \sum_{k=0}^q \left[ \frac{1 - e^{-\beta kT} (-1)^k}{1 + e^{\beta T}} - \frac{1 + (-1)^k}{2} \right] e^{\alpha kT} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{\alpha(q+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} - \frac{1 + e^{(\alpha-\beta)(q+1)T} (-1)^q}{1 + e^{(\alpha-\beta)T}} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - e^{\alpha(q+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} + \frac{1 + e^{\alpha(q+1)T} (-1)^q}{1 + e^{\alpha T}} \right]$$

$$S_\beta = \sum_{k=0}^q \left[ \frac{1 - e^{\beta kT} (-1)^k}{1 + e^{\beta T}} - \frac{1 + (-1)^k}{2} \right] e^{\beta kT} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{\beta(q+1)T}}{1 - e^{\beta T}} - \frac{1 + (-1)^q}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - e^{\beta(q+1)T}}{1 - e^{\beta T}} + \frac{1 + e^{\beta(q+1)T} (-1)^q}{1 + e^{\beta T}} \right]$$

Com auxílio desses resultados, poderemos escrever :

$$E_2 = A_q e^{-\alpha(t-qT)} + B_q e^{-\beta(t-qT)}$$

onde

$$A_q = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} S_\alpha e^{-\alpha qT} = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} e^{-\alpha qT} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{\alpha(q+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} - \frac{1 + e^{(\alpha-\beta)(q+1)T} (-1)^q}{1 + e^{(\alpha-\beta)T}} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - e^{\alpha(q+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} + \frac{1 + e^{\alpha(q+1)T} (-1)^q}{1 + e^{\alpha T}} \right] \right\}$$

$$B_q = - \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} S_\beta e^{-\beta qT} = \frac{\alpha \psi_0}{\beta - \alpha} e^{-\beta qT} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{\beta(q+1)T}}{1 - e^{\beta T}} - \frac{1 + (-1)^q}{2} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - e^{\beta(q+1)T}}{1 - e^{\beta T}} + \frac{1 + e^{\beta(q+1)T} (-1)^q}{1 + e^{\beta T}} \right] \right\}$$

Se levarmos em conta a paridade (ou não) de  $q$ , ou seja, fazendo  $q=2p$  ( $q=2p+1$ ), conseguiremos fórmulas mais simples para os coeficientes acima

$$A_{2p} = \frac{\alpha \psi_0}{\beta - \alpha} e^{-2\alpha pT} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{\alpha(2p+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} - \frac{1 + e^{(\alpha-\beta)(2p+1)T}}{1 + e^{(\alpha-\beta)T}} \right] - \frac{1 - e^{2\alpha(p+1)T}}{1 - e^{2\alpha T}} \right\}$$

ou

$$A_{2p+1} = \frac{\alpha \psi_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha(2p+1)T} \left\{ \frac{1}{1 + e^{\beta T}} \left[ \frac{1 - e^{2\alpha(p+1)T}}{1 - e^{\alpha T}} - \frac{1 - e^{2(\alpha-\beta)(p+1)T}}{1 + e^{(\alpha-\beta)T}} \right] - \frac{1 - e^{2\alpha(p+1)T}}{1 - e^{2\alpha T}} \right\}$$

e, para  $B_q$

$$B_{2p} = \frac{\alpha \psi_0}{\alpha - \beta} \frac{1 + e^{-\beta(2p+1)T}}{1 + e^{-\beta T}}$$

$$B_{2p+1} = 0$$

## V.- Conclusões

Como foi visto anteriormente, o ponto fundamental deste trabalho é o estabelecimento de uma relação entre os operadores característicos do sistema estudado.

Esta relação, apresentada na forma de um teorema, é válida para os sistemas passíveis da decomposição em blocos apresentada no Cap. I. Nessa ocasião foram feitas várias hipóteses, para assegurar a validade do teorema, como passamos a discutir :

O teorema é válido, de acôrdo com as hipóteses feitas, para os operadores  $X_0$  correspondentes a sistema lineares, causais, invariantes no tempo. As duas primeiras restrições, necessárias à demonstração, foi, por comodidade, acrescentada a última, que não é essencial para a demonstração do teorema.

As restrições feitas a  $Q$ , ou à sua função característica  $g_1(t)$  (contínuidade e constância por intervalos), foram feitas de maneira a incluir os casos em que transições são levadas a efeito, em um ou em vários estágios, simultâneamente ou não, e a particularização para um único instante de transição permite analisar não apenas êsse caso específico, mas também o caso em que as transições são suficientemente afastadas entre si no tempo, de maneira que uma influi desprezívelmente sôbre a outra.

Da maneira como foram apresentadas, os instantes de transição são supostos conhecidos, mas na realidade basta que êles sejam função de um sinal externo qualquer, que pode até mesmo ser a entrada ou outro sinal dependente dela. Dessa maneira, escolhendo-se convenientemente os instantes de transição, podemos analisar aquêles sistemas não lineares, que sejam passíveis de equivalência a um sistema variante no tempo, como o considerado.

Quanto às aplicações apresentadas nos Caps. III e IV, sua análise figura apenas como exemplo de utilização da decomposição do sinal permitida pelo teorema estudado.

Assim, no Cap. III, uma saída desejada e um êrro são definidos, e o último calculado, para uma amplificador de ganho bruscamente (ou discretamente) variado, e, por outro lado, no Cap. IV, a saída é calculada, para um modêlo simples de amplificador chopper, em estado permanente e estado transitório, e seu ganho efetivo é determinado.

O trabalho visto, pode ser generalizado e (ou) estendido, a nosso ver, nas seguintes direções principais:

(a) extensão a sistemas não lineares passíveis de equivalência a sistema lineares variantes no tempo, como o sistema aqui estudado.

(b) extensão aos sistemas variantes no tempo, em que  $g_i(t)$  se transforme em uma função contínua.

(c) exame do caso em que as comutações de ganho são feitas em instantes e (ou) valores escolhidos aleatoriamente.

(d) análise de ruído no caso de transições conhecidas.

BIBLIOGRAFIA

1. Geophysics, Dez, 1965 - Abstracts of papers presented at the 35th Annual International SEG meeting.
2. Linear System Analysis - C.A.Desoer e L.A.Zadeh, McGraw-Hill
3. Principles and Techniques of Applied Mathematics - Bernard Friedman , John Wiley
4. Linear Differential Equations - Kenneth S. Miller , Norton
5. Operational Calculus - Van der Pol e Bremmer , Cambridge
6. State Space Analysis of Control Systems - M.Ogata , Prentice-Hall