

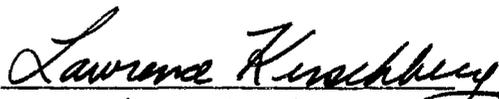
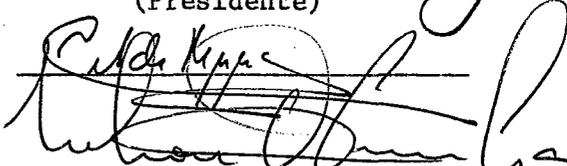
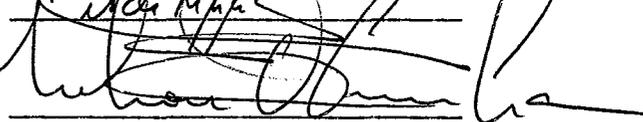
UM DESACOPLAMENTO CANÔNICO PARA SISTEMAS

LINEARES MULTIVARIÁVEIS

JOÃO LUIZ MAURITY SABOIA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:


(Presidente)



RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

JULHO DE 1970

À Ana Lúcia

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu orientador Dr. Lawrence Kerschberg pelo incentivo e encorajamento durante os meses em que trabalhamos juntos. Este agradecimento é extensivo a todos os colegas da COPPE que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho; especialmente a Paulo Augusto Silva Veloso e Luiz Fernando Loureiro Legey.

A Ana Rita e Vera, o meu muito obrigado pelo trabalho paciente e competente de datilografia.

Finalmente, agradeço à minha mulher Ana Lúcia pela sua paciência e estímulo durante todos os momentos.

Este trabalho foi realizado graças ao apoio financeiro da COPPE.

João Luiz Maurity Sabóia

Sabóia, J.

iii.

S I N O P S E

Esta tese apresenta um novo método para o desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis, invariantes no tempo. O método utiliza os conceitos de Fatores Invariantes e Forma Canônica Racional de uma matriz. São dadas condições necessárias e suficientes para o desacoplamento do sistema, e estuda-se a controlabilidade e observabilidade do sistema desacoplado.

Embora se tenha estudado o problema sob o ponto de vista da teoria de controle contínuo, o método também pode ser empregado para sistemas lineares discretos.

Foi desenvolvido um programa de computador que calcula os fatores invariantes de uma matriz, a transformação de similaridade que leva uma matriz à sua correspondente forma canônica racional, e que determina se o sistema pode ser desacoplado.

João Luiz Maurício Saboia

iv.

A B S T R A C T

In this thesis a new method is presented for the decoupling of multivariable, time-invariant, linear systems. The method utilizes the Invariant Factors and the Rational Canonical Form of a matrix. Necessary and sufficient conditions are given for the input-state-output decoupling of the system. System controllability and observability are studied in this framework.

Although the decoupling scheme is developed for continuous control systems, it is also valid for discrete-time linear systems.

A Fortran computer program is presented which calculates the invariant factors of a matrix, the similarity transformation that maps a matrix to the rational canonical form, and determines whether the system can be decoupled.

Í N D I C E

AGRADECIMENTOS.....	ii
SINOPSE.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ÍNDICE.....	v
 CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO E PRELIMINARES	
1. Objetivo da Pesquisa.....	1
2. Sumário do conteúdo da tese.....	1
3. Contribuições da tese.....	2
4. Notação e terminologia.....	3
5. O desacoplamento entrada-saida e sua solução.....	5
 CAPÍTULO II - O DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO-SAIDA	
1. Introdução.....	10
2. Desacoplamento entrada-estado.....	17
3. Desacoplamento estado-saida.....	26
4. Desacoplamento entrada-saida	32
5. A função de transferência do sistema desacoplado.....	34
6. Um exemplo.....	38
 CAPÍTULO III - DOIS PROGRAMAS DE COMPUTADOR PARA O DESACOPLAMENTO	
1. Introdução.....	46
2. Fatores invariantes e matriz de similaridade.....	46
Programa.....	53
3. O problema do "rank" de uma matriz retangular.....	69
Programa.....	72

CAPÍTULO IV - CONCLUSÕES E SUGESTÕES

1. Conclusões..... 78
2. Sugestões para futuros estudos..... 79

APÊNDICE - TEORIA DOS FATÔRES INVARIANTES E FORMA CANÔNICA RACIONAL

1. Fatôres invariantes..... 81
2. Forma canônica racional de uma matriz..... 90
3. Método de construção da matriz de similaridade..... 92

BIBLIOGRAFIA..... 94

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO E PRELIMINARES

1. - OBJETIVO DA PESQUISA

O objetivo desta pesquisa é o desenvolvimento de um método de desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis. O método surge naturalmente, a partir dos conceitos de "fatores invariantes de uma matriz" e sua "forma canônica racional"^{1,2,3}.

O desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis, tem sido profundamente estudado por Gilbert⁴, Falb, Wolovich^{5,6}.

O desacoplamento aqui estudado será diferente do desenvolvido pelos autores acima citados pois, enquanto lá a preocupação é apenas com as entradas e saídas, nós nos preocuparemos também com os estados, decorrendo daí duas definições diferentes para desacoplamento: "desacoplamento entrada-saída" e "desacoplamento entrada-estado-saída". A diferença entre estes dois conceitos, será vista no decorrer da tese e se verá também, que o segundo conceito é mais forte que o primeiro.

2. - SUMÁRIO DO CONTEÚDO DA TESE

O resto deste capítulo é dedicado à notação e terminologia além

de uma apresentação sucinta do desacoplamento entrada-saida.

No Capítulo II é desenvolvido um método de desacoplamento entrada-estado-saida, que utiliza os conceitos de Fatores Invariantes e Forma Canônica Racional de uma matriz. Chega-se ao teorema que fornece condições necessárias e suficientes para este desacoplamento. Estuda-se a controlabilidade e observabilidade do sistema desacoplado além de sua função de transferência.

O Capítulo III apresenta dois programas para computador, que são fundamentais para o emprego do método apresentado no capítulo II.

No Capítulo IV estão as conclusões da tese.

O Apêndice apresenta um resumo da teoria dos fatores invariantes e a forma canônica racional de uma matriz, necessária para a compreensão do trabalho desenvolvido.

3. - CONTRIBUIÇÕES DA TESE

A tese apresenta um método novo de desacoplamento de sistemas lineares multivariáveis. Ele é bastante simples e geral, pois são empregadas apenas transformações de coordenadas nas entradas, estados e saídas. A transformação dos estados conduz à Forma Canônica Racional que é válida para qualquer campo sobre o qual se trabalhe (os auto-valores podem ser reais ou complexos, simples ou repetidos). O teorema que fornece condições necessárias e suficientes para este desacoplamento é encontrado, e são de

envolvidos programas que auxiliam bastante a realização do desacoplamento.

4. - NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Os capítulos da tese são denotados por algarismos romanos e divididos em seções, sendo que, cada seção é numerada consecutivamente. Cada seção contém definições, teoremas e lemas. Dentro de um determinado capítulo, a j -ésima proposição (definição, teorema ou lema) da i -ésima seção é denotada por proposição (i,j) . Quando nos referimos, fora de um capítulo, a uma proposição deste capítulo, usamos o algarismo romano do capítulo. Assim, a proposição 3.2 do capítulo II será referida por (II.3.2), quando esta referência for feita em outro capítulo. Se esta for do Apêndice será referida por (A.3.2). Quando a referência for feita no mesmo capítulo, usaremos apenas (3.2).

Equações são numeradas consecutivamente em cada capítulo com o algarismo romano referente ao capítulo precedendo a numeração. Assim, a décima equação numerada do capítulo II é denotada por (II.10). Se esta for do Apêndice será (A.10).

Os símbolos mais frequentes que aparecem na tese, são:

A, B, C, \dots	- matrizes constantes.
$m \times n$	- dimensão de uma matriz (m linhas, n colunas)
A'	- matriz transposta de A
A^{-1}	- matriz inversa de A

$\oplus M$	- forma canônica racional
$\left \quad \right $	- barras que delimitam uma matriz quando esta for representada por alguns de seus elementos
C^*	- matriz de controlabilidade
O^*	- matriz de observabilidade
I	- matriz identidade
$S(A, B, C)$	- sistema determinado pelas matrizes A, B, C.
$S(\oplus M, Q, R)$	- sistema desacoplado entrada-estado-saida.
s	- variável de Laplace
$H(s, \oplus M)$	- função de transferência do sistema desacoplado
λ	- variável independente dos fatores invariantes
$A(\lambda)$	- matriz polinomial
$f_i(\lambda)$	- i-ésimo fator invariante
\dot{x}	- derivada do vetor estado em relação ao tempo
\min	- mínimo
rank	- rank de uma matriz.
\det	- determinante
t	- tempo

5. - O DESACOPLAMENTO ENTRADA-SAIDA E SUA SOLUÇÃO

Seja o sistema linear dinâmico multivariável invariante no tempo $S(A,B,C)$ representado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\tag{I.1}$$

onde:

- $u = u(t)$ - vetor-entrada real m -dimensional
- $y = y(t)$ - vetor-saida real m -dimensional
- $x = x(t)$ - vetor-estado real n -dimensional
- t - tempo
- A - matriz constante, real $(n \times n)$
- B - matriz constante, real $(n \times m)$
- C - matriz constante, real $(m \times n)$

Um assunto largamente estudado é o desacoplamento entrada-saida de $S(A,B,C)$ que consiste em se determinar uma lei de controle que faça com que tenhamos entradas controlando saídas independentemente, ou seja, cada componente do vetor-entrada influenciando uma componente do vetor-saida. É este, em termos heurísticos, o problema do desacoplamento entrada-saida.

Gilbert, Falb e Wolovich estudaram este problema usando a lei de controle:

$$u = Fx + G\bar{u}\tag{I.2}$$

onde:

$\bar{u} = \bar{u}(t)$ - novo vetor-entrada real m-dimensional

F - matriz real constante (mxn)

G - matriz real constante não-singular (mxm)

Seja $S(F,G)$ o sistema $S(A,B,C)$ com a lei de controle (I.2).

Falb-Wolovich⁵ determinaram condições necessárias e suficientes para o desacoplamento entrada-saida e determinaram uma classe de matrizes (F,G) que desacopla $S(A,B,C)$. Gilbert⁴ estendeu os resultados obtidos em⁵ generalizando o problema do desacoplamento. Além disso, o seu trabalho é apresentado de uma forma mais clara.

A função de transferência de $S(A,B,C)$ é dada por:

$$H(s) = C(Is - A)^{-1} B \quad (I.3)$$

onde:

I - matriz identidade (nxn)

s - variável da transformada de Laplace

A função de transferência de $S(F,G)$ é dada por:

$$H(s,F,G) = C(Is - A - BF)^{-1} BG \quad (I.4)$$

De acordo com Gilbert⁴, temos:

5.1 - DEFINIÇÃO

Dizemos que há desacoplamento entrada-saída em $S(F,G)$ se $H(.,F,G)$ é diagonal e não singular.

O teorema que resolve o problema do desacoplamento entrada-saída e que é devido a Gilbert está enunciado resumidamente abaixo:

5.2 - TEOREMA

(i) Para todo sistema $S(A,B,C)$ existe uma matriz $D(*)$ de dimensão (mxm) unicamente determinada. É possível desacoplar $S(F,G)$ se e somente se D é não-singular.

(ii) Se D é não singular, pode-se determinar a partir de $S(A,B,C)$ os seguintes resultados: inteiros $p_i > 0$, $i=1, \dots, m$; inteiros $r_i \geq 0$, $i=1, \dots, m+2$ ($r_i < p_i$, $i=1, \dots, m$ e $r_{m+2} \neq 0$ se e somente se S é não-controlável); polinômios $\alpha_i(s) = s^{r_i} - \alpha_{i1}s^{r_i-1} - \dots - \alpha_{ir_i}$, $i=1, \dots, m+2$ (se $r_i=0$, $\alpha_i(s)=1$); matrizes $G_i (mxm)$, $i=1, \dots, m$; matrizes $J_{ik} (mxn)$, $i=1, \dots, m, k=1, \dots, p_i$; matrizes $K_{ik} (mxn)$, $i=1, \dots, m, k=1, \dots, r_{m+2}$ (as K_{ik} não são definidas se $r_{m+2}=0$); uma matriz $A^* (mxn)$. A classe de matrizes $\{F,G\}$ que desacoplam o sistema é dada por:

(*) - Vide página 9.

$$G = \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i \quad e$$

$$F = -D^{-1} A^* + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{p_i} (\sigma_{ik} - \pi_{ik}) J_{ik} + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{r_{m+2}} \rho_{ik} K_{ik} \quad (I.5)$$

onde:

$\pi_{ik} = \alpha_{ik}$, $k=1, \dots, r_i$, $\pi_{ik} = 0$, $k=r_i+1, \dots, p_i$, e λ_i , σ_{ik} , ρ_{ik} são números reais arbitrários ($\lambda_i \neq 0$, $i=1, \dots, m$). O último termo em (I.5) é nulo se $r_{m+2} = 0$.

(iii) Sejam $h_i(s, F, G)$, $i=1, \dots, m$, os elementos da matriz diagonal $H(s, F, G)$. Então:

$$h_i(s, F, G) = \frac{\lambda_i \alpha_i(s)}{\psi_i(s, \sigma_i)} \quad (I.6)$$

$$\psi_i(s, \sigma_i) = s^{p_i} - \sigma_{i1} s^{p_i-1} - \dots - \sigma_{ip_i}, \quad \sigma_i = (\sigma_{i1}, \dots, \sigma_{ip_i})$$

onde λ_i e σ_i , $i=1, \dots, m$, podem ser escolhidos arbitrariamente. Uma vez

que λ_i e σ_i , $i=1, \dots, m$, sejam escolhidos, $\{F, G\}$ é dada por (I.5).

(iv) A equação característica do sistema em malha fechada é dada por:

$$q(s,F) = \det (Is-A-BF) = \alpha_{m+1}(s) \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \psi_i(s, \sigma_i) \quad (I.7)$$

A matriz D é tal que:

$$D = \begin{vmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_m \end{vmatrix}$$

onde $D_i = C_i A^{d_i} B \quad i = 1, 2, \dots, m$

sendo

C_i - i-ésima linha de C.

$$d_i \begin{cases} = \min \{j / C_i A^j B \neq 0, j = 0, 1, \dots, n-1\} \\ = n-1 \quad \text{se } C_i A^j B = 0 \quad \text{para todo } j \end{cases}$$

O teorema 5.2 resolve o problema do desacoplamento entrada-saída, pois (I.6) fornece as características em malha fechada que o sistema pode ter e, uma vez que $H(s,F,G)$ é escolhida, (I.5) fornece a lei de controle $\{F,G\}$.

Para maiores detalhes sobre o teorema 5.2, podem ser utilizadas as referências^{4,7}.

C A P Í T U L O I I

O DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO-SAÍDA

1 - INTRODUÇÃO

Seja $S(A,B,C,)$ um sistema linear dinâmico multivariável invariante no tempo como em I.1), com a diferença que, aqui, o sistema não possuirá obrigatoriamente o mesmo número de entradas e saídas. Assim, podemos representar $S(A,B,C)$ por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{II.1}$$

onde:

$u \hat{=} u(t)$ - vetor-entrada real m -dimensional

$y \hat{=} y(t)$ - vetor-saída real p -dimensional

$x \hat{=} x(t)$ - vetor-estado real n -dimensional

t - tempo

A - matriz constante, real ($n \times n$)

B - matriz constante, real ($n \times m$)

C - matriz constante, real ($p \times n$)

Será desenvolvido, neste capítulo, um método de desacoplamento para $S(A,B,C)$. Este método, entretanto, não utilizará o desacoplamento entrada-saída (I.1.1) e sim o desacoplamento entrada-estado-saída, que será defi

nido adiante.

Representaremos os vetores x , u , y , respectivamente por:

$$x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} \quad u = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m \end{vmatrix} \quad y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{vmatrix}$$

1.1 - DEFINIÇÃO

Seja X o conjunto de componentes x_1, x_2, \dots, x_n do vetor-estado x de $S(A,B,C)$. Seja X_1, X_2, \dots, X_k uma partição de X .

Dizemos que há desacoplamento entrada-estado em $S(A,B,C)$ se cada conjunto X_i é influenciado por apenas uma componente de entrada u_j , e cada u_j influencia, no máximo, um conjunto X_i .

Dizemos que há desacoplamento estado-saída em $S(A,B,C)$, se cada conjunto X_i influencia apenas uma componente de saída y_ℓ , e cada y_ℓ é influenciado, no máximo, por um conjunto X_i .

Dizemos que há desacoplamento entrada-estado-saída em $S(A,B,C)$, se cada conjunto X_i é influenciado por apenas por u_j , e influencia apenas um y_ℓ , e cada u_j influencia, no máximo, um conjunto X_i , e cada y_ℓ é influen

ciado, no máximo, por um conjunto X_i , ($i = 1, 2, \dots, k$), ($j = 1, 2, \dots, m$), ($\ell = 1, 2, \dots, p$).

Observação

Quando se diz, na definição (1.1), que X_i é influenciado por u_j , isto significa dizer que, pelo menos, um $x_i \in X_i$ é influenciado por u_j . Quando se diz que X_i influencia um y_ℓ , isto significa dizer que, pelo menos, um $x_i \in X_i$ influencia y_ℓ . Portanto, é possível que, após o desacoplamento, o sistema não seja controlável nem observável (2.3, 2.4, 3.3, 3.4).

Comparando-se as definições (1.1) e (I.1.1), verificamos que em (I.1.1) não há preocupação com os estados do sistema que poderão estar acoplados, enquanto que em (1.1) há também desacoplamento entre os estados.

Na definição (1.1) foi dito que uma componente de entrada influencia um conjunto de componentes de estado que, por sua vez, influencia uma componente de saída. A definição foi feita desta forma para tornar o estudo sistemático. É evidente que se tivéssemos, por exemplo, duas entradas, influenciando um conjunto de estados, e apenas este conjunto de estados, também teríamos desacoplamento entrada-estado-saída. Casos como este não foram incluídos na definição (1.1) para evitar que o excesso de generalização acarretasse resultados pouco práticos.

Verificamos, pela definição (1.1), que, após o desacoplamento entrada-saída, $(m - k)$ componentes de entrada, e $(p - k)$ componentes de saída de $S(A, B, C)$ estarão isoladas do sistema, pois não influenciarão, nem serão

influenciadas por nenhuma componente de estado.

O método utilizado neste trabalho usará as noções de fatores invariantes da matriz A (A.1.1) e sua forma canônica racional (A.8), que foram resumidas no Apêndice da tese. Segundo este, existe uma matriz não-singular T , tal que:

$$\oplus M = T^{-1} A T \quad (\text{II.2})$$

onde $\oplus M$ é a forma canônica racional de A .

Admitindo-se que A possui k fatores invariantes com grau positivo $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_k(\lambda)$, a matriz $\oplus M$ terá a forma:

$$\oplus M = \begin{vmatrix} M_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & M_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & M_k \end{vmatrix}$$

onde

$$M_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -(\alpha_{p_{i-1}+1}) \\ 1 & 0 & \dots & -(\alpha_{p_{i-1}+2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ & & & -(\alpha_{p_i}) \end{vmatrix}$$

sendo que cada matriz M_i ($i = 1, 2, \dots, k$) corresponde à matriz "companion" do fator invariante $f_i(\lambda)$, ($i = 1, 2, \dots, k$), de A . Portanto, o sistema $S(A, B, C)$ pode ser transformado no sistema $S(A, B, C, T)$ abaixo

$$\dot{\bar{x}} = T^{-1} A T \bar{x} + T^{-1} B u \quad (II.4)$$

$$y = C T \bar{x}$$

onde $\bar{x} = T^{-1} x$ (II.5)

Para o desacoplamento são propostas transformações de coordenadas para a entrada e a saída. Para a entrada, usamos a transformação:

$$u = G \bar{u} \quad (II.6)$$

onde \bar{u} é um vetor real m -dimensional, correspondente às novas entradas e G é uma matriz real ($m \times m$).

Para a saída, usamos a transformação:

$$\bar{y} = H y \quad (\text{II.7})$$

onde \bar{y} é um vetor real p -dimensional correspondente às novas saídas e H é uma matriz real $(p \times p)$.

Portanto, o sistema $S(A,B,C,T)$ transforma-se no sistema $S(A,B,C,T,G,H)$ abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= T^{-1} A T \bar{x} + T^{-1} B G \bar{u} \\ \bar{y} &= H C T \bar{x} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

ou ainda, fazendo-se $T^{-1} B G = Q$ e $H C T = R$

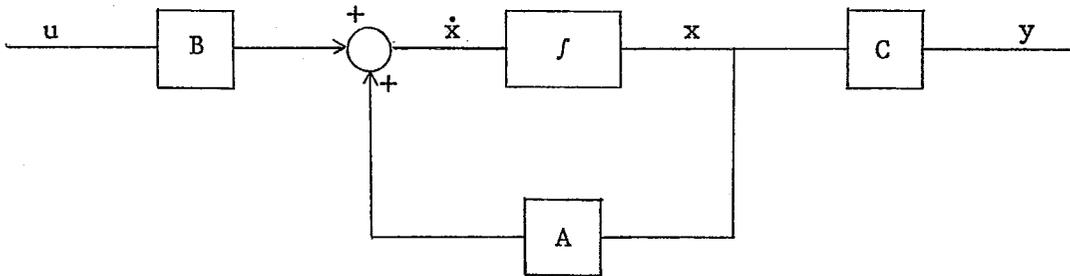
$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \oplus M \bar{x} + Q \bar{u} \\ \bar{y} &= R \bar{x} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Sejam \bar{x} , \bar{u} , \bar{y} representados, respectivamente por:

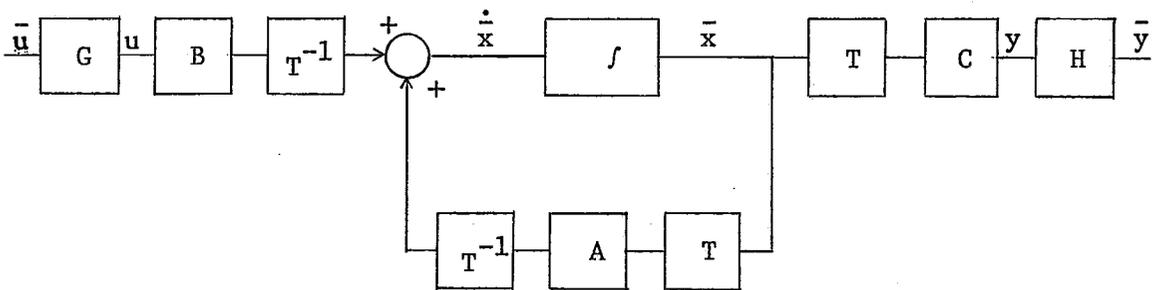
$$\bar{x} = \begin{vmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_n \end{vmatrix} \quad \bar{u} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{u}_m \end{vmatrix} \quad \bar{y} = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{y}_p \end{vmatrix}$$

Representemos o sistema $S(A,B,C,T,G,H)$ pela forma abreviada $S(\oplus M,Q,R)$.

O sistema $S(A,B,C)$ pode ser representado por:



O sistema $S(\oplus M,Q,R)$ pode ser representado por:



2 - DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO

Seja \bar{X} o conjunto de componentes $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ do vetor-estado \bar{x} de $S(\oplus M, Q, R)$ e seja $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ a partição de \bar{X} determinada pelos blocos M_i de $\oplus M$.

Nesta seção será desenvolvido o desacoplamento entrada-estado, que corresponde a fazer (veja definição 1.1) com que cada um dos conjuntos \bar{X}_i determinados por $\oplus M$ seja influenciado por uma componente de entrada \bar{u}_j , mas de forma tal que cada \bar{u}_j influencie, no máximo, um \bar{X}_i .

Seja d_i o grau de $f_i(\lambda)$, ($i = 1, 2, \dots, k$).

É fácil verificar que a definição de desacoplamento entrada-estado de $S(\oplus M, Q, R)$ é equivalente a que se tenha a matriz Q com a seguinte forma:

$$Q = \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 q_{p_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array} & d_1 \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 0 & q_{p_1+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & q_{p_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array} & d_2 \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & q_{p_2+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & q_{p_{k-1}} & 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{p_{k-1}+1} & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q_n & 0 & \dots & 0
 \end{array} & d_k
 \end{array} \tag{II.10}$$

onde q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são constantes, e pelo menos um q_i de cada uma das k primeiras colunas não deve ser nulo.

Sejam:

$$\tilde{C} = T^{-1}B = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1m} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nm} \end{vmatrix}$$

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mm} \end{vmatrix}$$

Vejamos em que condições existe G tal que $T^{-1}BG$ tem a forma indicada em (II.10).

Para que a i -ésima coluna de $T^{-1}BG$ tenha a forma indicada em (II.10) será necessário e suficiente que o sistema de equações abaixo tenha solução.

$$\sum_{j=1}^m \tau_{1j} g_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \tau_{2j} g_{ji} = 0$$

.

.

.

$$\sum_{j=1}^m \tau_{p_{i-1}j} g_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \tau_{p_{i-1}+1,j} g_{ji} = q_{p_{i-1}+1}$$

(II.11)

.

.

.

$$\sum_{j=1}^m \tau_{p_i j} g_{ji} = q_{p_i}$$

$$\sum_{j=1}^m \tau_{p_i+1,j} g_{ji} = 0$$

.

.

.

$$\sum_{j=1}^m \tau_{nj} g_{ji} = 0$$

Notamos que $(n - d_i)$ equações do sistema de equações lineares (II.11) são homogêneas, enquanto que d_i equações não são obrigatoriamente homogêneas. Além disso, temos apenas k sistemas de equações para serem resolvidas pois os $(m - k)$ sistemas restantes são triviais (basta escolher as

últimas $(m - k)$ colunas de G nulas)

Podemos ter três hipóteses:

$$1) \quad m < k$$

$$2) \quad m = k$$

$$3) \quad m > k$$

- 1) Se tivermos $m < k$ (mais blocos de estados \bar{X}_i do que componentes de entrada \bar{u}_j) não será possível o desacoplamento entrada-estado, pois teremos $(k - m)$ blocos X_i que não poderão ser comandados pelas componentes de entrada.
- 2) Se tivermos $m = k$ (mesmo número de blocos de estados e de componentes de entrada), será necessário que os k sistemas de equações lineares (II.11) tenham solução para que o desacoplamento entrada-estado seja possível.
- 3) Se tivermos $m > k$ (menos blocos de estados do que componentes de entrada) será preciso que os k sistemas do tipo (II.11) tenham solução. Deve-se notar, neste caso, que $(m - k)$ colunas de Q serão nulas, o que significa dizer que $(m - k)$ entradas não influenciam o sistema, ou seja, que as últimas $(m - k)$ colunas de G são nulas.

Podemos, portanto, enunciar o lema:

2.1 - LEMA

Uma condição necessária para o desacoplamento entrada-estado é

que $m > k$, onde m é o número de entradas e k o número de fatores invariantes da matriz A com grau positivo.

Em vez de estudarmos os k sistemas de equações do tipo (II.11), estudaremos os k sistemas de equações homogêneas derivadas, ou seja, os k sistemas de equações obtidas quando retiradas as d_i ($i = 1, 2, \dots, k$) equações não-homogêneas. Assim, ficamos com k sistemas de equações homogêneas, sendo que cada um possui $(n - d_i)$ equações e m incógnitas, ($i = 1, 2, \dots, k$).

Assim:

$$\sum_{j=1}^m \tau_{1j} g_{ji} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \tau_{2j} g_{ji} = 0$$

·
·
·
·

$$\sum_{j=1}^m \tau_{p_{i-1}j} g_{ji} = 0$$

(II.12)

$$\sum_{j=1}^m \tau_{p_i+1,j} g_{ji} = 0$$

·
·
·
·

$$\sum_{j=1}^m \tau_{nj} g_{ji} = 0$$

Para cada um dos sistemas (I.12), podemos ter duas hipóteses:

$$1.^a) \quad m > n - d_i$$

$$2.^a) \quad m \leq n - d_i$$

1.^a) Se $m > n - d_i$ (mais incógnitas do que equações) então, de acôrdo com a teoria elementar de sistemas de equações lineares¹, o i -ésimo sistema (II.12) terá solução.

2.^a) Se $m \leq n - d_i$ (número de incógnitas menor ou igual ao número de equações) então, para que o sistema (II.12) tenha solução não-trivial (pe-lo menos algum $g_{j_i} \neq 0$) será preciso que $\text{rank } \bar{\zeta}_i < m$ ¹, onde $\bar{\zeta}_i$ é a matriz dos coeficientes do sistema (II.12), ou seja, a matriz obtida a partir de $\bar{\zeta}$ quando retiramos as d_i linhas convenientes. Neste caso, $(m - \text{rank } \bar{\zeta}_i)$ incógnitas são arbitradas.

2.2 - TEOREMA

Uma condição necessária para o desacoplamento entrada-estado de um sistema $S(A,B,C)$, usando-se a forma canônica racional de A e a transformação $u = G\bar{u}$ é que $m > k$ e que se existir i ($i = 1, 2, \dots, k$) tal que $m \leq n - d_i$, então $\text{rank } \bar{\zeta}_i < m$.

Prova:

Se $m < k$, então, $(k - m)$ blocos de estados \bar{X}_i não terão componen-

tes de entrada que os influenciem o que contraria a hipótese de desacoplamento entrada-estado.

Se existir i tal que $m \leq n - d_i$ e $\text{rank } \bar{C}_i = m$, então, de acordo com a teoria elementar de sistemas de equações lineares¹, o i -ésimo sistema de equações homogêneas (II.12) terá apenas a solução trivial ($g_{ji} = 0$, $j = 1, 2, \dots, m$) o que significa dizer que uma coluna de G é nula e, portanto, o bloco \bar{X}_i não será influenciado pela entrada \bar{u}_i , o que contraria a hipótese de desacoplamento entrada-estado.

C.Q.D.

O teorema 2.2 é uma condição necessária para o desacoplamento entrada-estado, pois se êle fôr satisfeito, existirá uma matriz G que anula os $(n - d_i)$ elementos convenientes da i -ésima coluna de Q , ($i = 1, 2, \dots, k$). Entretanto, nada sabemos ainda sôbre os d_i elementos restantes da i -ésima coluna de Q e, para que haja desacoplamento entrada-estado, será preciso que, pelo menos, um elemento dos d_i elementos da i -ésima coluna de Q não seja nulo.

Após o desacoplamento entrada-estado, podemos passar ao estudo da controlabilidade de $S(\oplus M, Q, R)$.

Para facilitar êste estudo, são dados, a seguir, dois teoremas.

2.3 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M, Q, R)$ não seja

controlável é que $q_{p_{i-1}+1} = q_{p_{i-1}+2} = \dots = q_{p_i} = 0$ para algum i
 ($i = 1, 2, \dots, k$).

Prova:

Basta verificar que para a hipótese acima, teremos $\text{rank } C^* < n$,
 onde

$$C^* = \left| Q \mid \oplus M Q \mid \dots \mid (\oplus M)^{n-1} Q \right| \quad (\text{II.13})$$

Desenvolvendo-se as matrizes $Q, \oplus M Q, \dots, (\oplus M)^{n-1} Q$, verificamos que, em virtude da hipótese do teorema, as d_i linhas de C^* de mesma ordem que os d_i elementos nulos de Q são nulas. Portanto,

$$\text{rank } C^* \leq n - d_i < n$$

C.Q.D.

2.4 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M, Q, R)$ não seja controlável é que $q_{p_{i-1}+1} = 0$ e $\alpha_{p_{i-1}+1} = 0$ para algum i ($i = 1, 2, \dots, k$) onde $\alpha_{p_{i-1}+1}$ é o elemento do canto superior direito de M_i e $q_{p_{i-1}+1}$ é o primeiro elemento não obrigatoriamente nulo da i -ésima coluna de Q .

Prova:

Desenvolvendo-se as matrizes $Q, \oplus MQ, \dots, (\oplus M)^{n-1} Q$, verifica-se que a $(p_{i-1} + 1)$ -ésima linha de C^* se anula para $q_{p_{i-1}+1} = 0$ e

$\alpha_{p_{i-1}+1} = 0$. Portanto, $\text{rank } C^* \leq n - 1 < n$.

C.Q.D.

3 - DESACOPLAMENTO ESTADO-SAÍDA

Nesta seção, será desenvolvido o desacoplamento estado-saída que corresponde a fazer com que cada um dos conjuntos \bar{X}_i determinados por $\oplus M$ influencie uma componente de saída \bar{y}_ℓ , mas de tal forma que cada \bar{y}_ℓ seja influenciado, no máximo, por um \bar{X}_i .

Para este desacoplamento, foi introduzida na seção 1 a transformação $\bar{y} = Hy$.

Sejam:

$$\Gamma = CT = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \gamma_{p2} & \dots & \gamma_{pn} \end{vmatrix} \quad H = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{p1} & h_{p2} & \dots & h_{pp} \end{vmatrix} \quad (\text{II.14})$$

É fácil verificar que a definição de desacoplamento estado-saída

de $S(\oplus M, Q, R)$ é equivalente a que se tenha a matriz R com a seguinte forma:

$$R = \begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc}
 & \underbrace{d_1}_{r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{p_1}} & & & \underbrace{d_2}_{0 \ \dots \ 0} & & & & \underbrace{d_k}_{0 \ \dots \ 0} & & & & & & \\
 \hline
 & r_1 & r_2 & \dots & r_{p_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{p_1+1} & \dots & r_{p_2} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{p_2+1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
 & \vdots & \cdot & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & r_{p_{k-1}} & 0 & \dots & 0 & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & r_{p_{k-1}+1} & \dots & r_n & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\
 \hline
 \end{array} \tag{II.15}$$

onde, pelo menos, um r_i de cada uma das k primeiras linhas não deve ser nulo.

Vejamos em que condições existe H tal que HCT tem a forma indicada em (II.15).

O desenvolvimento do desacoplamento estado-saída é bastante semelhante ao entrada-estado. Por isso, não entraremos em muitos detalhes.

Será preciso resolver k sistemas de equações lineares do tipo:

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{j1} h_{ij} = 0$$

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{j2} h_{ij} = 0$$

⋮

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{j p_{i-1}} h_{ij} = 0$$

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{j p_{i-1}+1} h_{ij} = r_{p_{i-1}+1} \quad (\text{II.16})$$

⋮

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{j p_i} h_{ij} = r_{p_i}$$

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{j p_i+1} h_{ij} = 0$$

⋮

$$\sum_{j=1}^p \gamma_{jn} h_{ij} = 0$$

A discussão das 3 hipóteses $p < k$, $p = k$, $p > k$ é análoga à já feita na seção 2 para o desacoplamento entrada-estado.

Assim, chegamos ao lema 3.1.

3.1 - LEMA

Uma condição necessária para o desacoplamento estado-saída é que $p \geq k$, onde p é o número de saídas do sistema e k o número de fatores invariantes da matriz A com grau positivo.

Aqui também será estudado o sistema de equações lineares homogêneas abaixo derivado de (II.16).

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^p \gamma_{j1} h_{ij} &= 0 \\
 \sum_{j=1}^p \gamma_{j2} h_{ij} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=1}^p \gamma_{jp_{i-1}} h_{ij} &= 0 \\
 \sum_{j=1}^p \gamma_{jp_i+1} h_{ij} &= 0 \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=1}^p \gamma_{jn} h_{ij} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{II.17}$$

As duas hipóteses discutidas no desacoplamento entrada-estado são substituídas pelas hipóteses $p > n - d_i$ e $p \leq n - d_i$.

As conclusões tiradas são análogas e chegamos ao teorema:

3.2 - TEOREMA

Uma condição necessária para o desacoplamento estado-saída de um sistema $S(A,B,C)$, usando-se a forma canônica racional de A e a transformação $\bar{y} = Hy$ é que $p \geq k$ e que se existir i ($i = 1, 2, \dots, k$) tal que $p \leq n - d_i$, então, $\text{rank } \Gamma_i < m$, onde Γ_i é a matriz obtida a partir de Γ , quando são retiradas as d_i colunas que aparecem em (II.16) e não aparecem em (II.17).

Prova:

A demonstração é análoga à do teorema 2.2.

C.Q.D.

O teorema 3.2 nos garante a existência de uma matriz H que possui zeros, onde deve possuí-los, mas não dá informações sobre os elementos não nulos. Esta é a razão pela qual este teorema não é uma condição necessária e suficiente.

A seguir, são dados 2 teoremas para facilitar o estudo da observabilidade de $S(\oplus M, Q, R)$.

3.3 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M, Q, R)$ não seja observável é que $r_{p_{i-1}+1} = r_{p_{i-1}+2} = \dots = r_{p_i} = 0$ para algum i

($i = 1, 2, \dots, k$).

Prova:

Basta verificar que para a hipótese acima, teremos $\text{rank } O^* < n$, onde

$$O^* = \left[R' \mid \oplus M'R' \mid \dots \mid (\oplus M')^{n-1} R' \right] \quad (\text{II.18})$$

sendo R' e $\oplus M'$ respectivamente as transpostas de R e $\oplus M$.

Desenvolvendo-se as matrizes $R', \oplus M'R', \dots, (\oplus M')^{n-1} R'$, verificamos que, em virtude da hipótese do teorema, d_i linhas de O^* são nulas.

Portanto,

$$\text{rank } O^* \leq n - d_i < n$$

C.Q.D.

3.4 - TEOREMA

Uma condição suficiente para que o sistema $S(\oplus M, Q, R)$ não seja

observável é que $\alpha_{p_{i-1}+1} = 0$ e que $r_{p_i} = -\alpha_{p_{i-1}+2} r_{p_{i-1}+1} - \alpha_{p_{i-1}+3} r_{p_{i-1}+2} - \dots - \alpha_{p_i} r_{p_i-1}$ para algum i ($i = 1, 2, \dots, k$).

Prova:

Desenvolvendo-se $R', \oplus M'R', \dots, (\oplus M')^{n-1} R'$, verifica-se que para a hipótese acima, a linha de O^* correspondente à última linha do i -ésimo

bloco M_i , ou seja a $(\sum_{k=1}^i d_k)$ -ésima linha é combinação linear das outras

$(d_i - 1)$ linhas de O^* correspondentes ao i -ésimo bloco M_i . Portanto,

$$\text{rank } O^* \leq n - 1 < n$$

C.Q.D.

4 - DESACOPLAMENTO ENTRADA-ESTADO-SAÍDA

De acôrdo com a definição 1.1 haverá desacoplamento entrada-estado-saída, quando houver desacoplamento entrada-estado e estado-saída. Portanto, podemos enunciar o teorema:

4.1 - TEOREMA

A condição necessária e suficiente para o desacoplamento entrada-estado-saída de um sistema $S(A,B,C)$, usando-se a forma canônica racional de

A e as transformações $u = G\bar{u}$ e $\bar{y} = Hy$ é que

(i) $m \geq k, p \geq k$

(ii) Se existir $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $m \leq n - d_i$ ($p \leq n - d_i$)
então, $\text{rank } \bar{C}_i < m$ ($\text{rank } \Gamma_i < p$)

(iii) Para nenhum $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$

$$q_{p_i+1} = q_{p_i+2} = \dots = q_{p_{i+1}} = 0 \quad (r_{p_i+1} = r_{p_i+2} = \dots = r_{p_{i+1}} = 0) \quad \text{onde } p_0 = 0.$$

onde:

- n - número de componentes do vetor-estado
- m - número de componentes do vetor-entrada
- p - número de componentes do vetor-saída
- k - número de fatores invariantes com grau positivo
- d_i - grau do fator invariante $f_i(\lambda)$

$\bar{C}_i(\Gamma_i)$ - matrizes definidas por II.12 (II.17)

q_i 's - elementos de Q (II.10)

r_i 's - elementos de R (II.15)

Prova:

A condição é necessária:

(i) e (ii) decorrem dos teoremas 2.2 e 3.2, respectivamente.

(iii) decorre da definição 1.1, pois se (iii) não fôr satisfeito para algum i , então, \bar{X}_i não será influenciado por nenhuma entrada (não influenciárá nenhuma saída) o que contraria a hipótese de desacoplamento.

A condição é suficiente:

O desacoplamento entrada-estado-saída é equivalente a ter-se Q e R com as formas apresentadas em (II.10) e (II.15), respectivamente.

(i) implica na existência do número mínimo de colunas (linhas) de $Q(R)$.

(ii) implica que $Q(R)$ possui zeros, onde deve possuí-los.

(iii) implica que, pelo menos, um elemento de cada uma das k primeiras linhas (colunas) de $Q(R)$ não é nulo.

Portanto, Q e R têm as formas apresentadas em (II.10) e (II.15) e a condição é suficiente.

C.Q.D.

O teorema 4.1 resolve o problema do desacoplamento entrada-estado-saída.

5 - A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO SISTEMA DESACOPLADO

Nesta seção, são desenvolvidas duas formas de se determinar a função de transferência $H(s, \oplus M)$ do sistema desacoplado $S(\oplus M, Q, R)$.

De (II.9) segue imediatamente que:

$$H(s, \oplus M) = R(sI - \oplus M)^{-1} Q \quad (\text{II.19})$$

onde I é a matriz identidade ($n \times n$). Mas, de acôrdo com (A.1.4)

$$\left| \begin{array}{cccc}
 f_n(s) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & f_{n-1}(s) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & f_1(s)
 \end{array} \right| = P_1(s) (sI - \oplus M) P_2(s) \tag{II.20}$$

onde $P_1(s)$ e $P_2(s)$ são produtos de matrizes elementares. Tomando-se a inversa, vem:

$$\left| \begin{array}{cccc}
 1/f_n(s) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1/f_{n-1}(s) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1/f_1(s)
 \end{array} \right| = P_2^{-1}(s) (sI - \oplus M)^{-1} P_1^{-1}(s) \tag{II.21}$$

onde $P_1^{-1}(s)$ e $P_2^{-1}(s)$ existem e também são produtos de matrizes elementares (vide Apêndice).

Tirando-se $(sI - \oplus M)^{-1}$ de (II.21), e levando em (II.19), vem:

$$H(\tilde{s}, \oplus M) = R P_2(s) \left| \begin{array}{cccc}
 1/f_n(s) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 1/f_{n-1}(s) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1/f_1(s)
 \end{array} \right| P_1(s) Q \tag{II.22}$$

A relação (II.22) é de grande valor para o cálculo de $H(s, \oplus M)$, pois as matrizes $P_1(s)$ e $P_2(s)$ estão praticamente determinadas, quando se calcula a matriz de similaridade T tal que $\oplus M = T^{-1} AT$ (vide Apêndice).

Vejamus outra forma de se calcular $H(s, \oplus M)$.

Como $(sI - \oplus M)$ é uma matriz formada por blocos na diagonal, a sua inversa também será. Podemos, então, escrever:

$$H(s, \oplus M) = R \begin{vmatrix} H^*(s, M_1) & 0 & \dots\dots 0 \\ 0 & H^*(s, M_2) & \dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots H^*(s, M_k) \end{vmatrix} Q \quad (II.23)$$

onde $H^*(s, M_i) = (sI_{d_i} - M_i)^{-1}$ (II.24)

I_{d_i} - matriz identidade ($d_i \times d_i$)

É fácil verificar que:

$$H(s, \oplus M) = \begin{vmatrix} R_1 H^*(s, M_1) Q_1' & \dots\dots 0 & 0 & \dots\dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots\dots R_k H^*(s, M_k) Q_k' & 0 & \dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots\dots 0 & 0 & \dots\dots 0 \end{vmatrix} \quad (II.25)$$

onde R_i - i -ésima linha de R

Q_i' - i -ésima coluna de Q $i = 1, 2, \dots, k$

ou, ainda, fazendo-se $H(s, M_i) = R_i H^*(s, M_i) Q_i'$

$$H(s, \oplus M) = \left| \begin{array}{cccc} H(s, M_1) & 0 & \dots\dots\dots 0 & 0 \dots\dots\dots 0 \\ 0 & H(s, M_2) & \dots\dots\dots 0 & 0 \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots H(s, M_k) & 0 \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots 0 & 0 \dots\dots\dots 0 \end{array} \right| \quad (II.26)$$

Seja:

$$f_i(s) = s^{d_i} + \alpha_{d_i-1,i} s^{d_i-1} + \dots + \alpha_{1,i} s + \alpha_{0,i} \quad (II.27)$$

Levando-se em consideração que $\det H^*(s, M_i) = f_i(s)$ (vide Apêndice) e em virtude da referência¹ (pg. 82-85):

$$H(s, M_i) = \frac{1}{f_i(s)} \left(R_i P_0 Q_i' s^{d_i-1} + R_i P_1 Q_i' s^{d_i-2} + \dots + R_i P_{d_i-1} Q_i' \right) \quad (II.28)$$

onde: $P_j = \oplus M P_{j-1} + \alpha_{d_i-j,i} I_{d_i}$ $j = 1, 2, \dots, d_i-1$ (II.29)

$$P_0 = I_{d_i}$$

Portanto, de (II.26), (II.27), (II.28) e (II.29), calculamos $H(s, \oplus M)$.

Assim, temos duas formas para o cálculo de $H(s, \oplus M)$, sendo que a primeira é mais direta que a segunda, pois no cálculo da matriz de similaridade T temos meios de determinar $P_1(s)$ e $P_2(s)$ diretamente.

6 - UM EXEMPLO

Seja o sistema $S(A,B,C)$ abaixo:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & -23 & 12 \end{vmatrix}$$

Calculando-se os fatores invariantes de A, obtemos:

$$f_1(\lambda) = (\lambda + 1)^3$$

$$f_2(\lambda) = (\lambda + 1)$$

$$f_3(\lambda) = 1$$

$$f_4(\lambda) = 1$$

Portanto, a forma canônica racional de A é:

$$\oplus M = T^{-1}AT = \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

A transformação de similaridade é:

$$T = \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 11 & -5 \\ 1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 11 & -23 & 12 \end{array} \right|$$

E a sua inversa:

$$T^{-1} = \begin{vmatrix} 14 & -1 & 1 & -2 \\ 17 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Usando-se as transformação $u(t) = G \bar{u}(t)$ e $\bar{y}(t) = H y(t)$,

obtemos:

$$\dot{\bar{x}} = \oplus M \bar{x} + \bar{C} G \bar{u}(t)$$

$$\bar{y}(t) = H \Gamma \bar{x}$$

Para o nosso exemplo, temos:

$$d_1 = 3$$

$$d_2 = 1$$

$$k = 2$$

$$m = 2$$

$$n = 4$$

$$p = 2$$

Usando-se o teorema 4.1, vemos que para que o desacoplamento seja

possível, precisamos:

$$\text{rank } \mathcal{Z}_2 < 2$$

$$\text{rank } \Gamma_2 < 2$$

Vejamos se estas condições são satisfeitas:

$$\mathcal{Z} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{Z}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{rank } \mathcal{Z}_2 = 1 < 2$$

$$\text{rank } \Gamma_2 = 1 < 2$$

O desacoplamento é possível.

Determinemos G e Q

$$Q = \bar{C} G = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} \\ 2g_{11} & 2g_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 & | & 0 \\ q_2 & | & 0 \\ q_3 & | & 0 \\ \hline 0 & | & q_4 \end{vmatrix}$$

Arbitrando-se $g_{11} = 1$ e $g_{22} = -1$, obtemos

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad Q = \begin{vmatrix} 0 & | & 0 \\ 1 & | & 0 \\ 2 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Determinemos H e R

$$R = H \Gamma = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 30h_{11} & 2h_{11} & h_{11} & -2h_{11}+h_{12} \\ 30h_{21} & 2h_{21} & h_{21} & -2h_{21}+h_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & r_4 \end{vmatrix}$$

Arbitrando-se $h_{11} = 1$ e $h_{22} = 1$, obtemos

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad R = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

O sistema desacoplado fica

$$\dot{\bar{x}} = \oplus M \bar{x} + Q \bar{u}$$

$$\bar{y} = R \bar{x}$$

com

$$\oplus M = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -3 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & | & 0 \\ 1 & | & 0 \\ 2 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 1 \end{vmatrix} \qquad R = \begin{vmatrix} 30 & 2 & 1 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{vmatrix}$$

Para o cálculo de $H(s, \oplus M)$, podemos usar, por exemplo, (II.22).

Assim, calculamos:

$$P_1(s) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & s & s^2 & 0 \end{vmatrix}$$

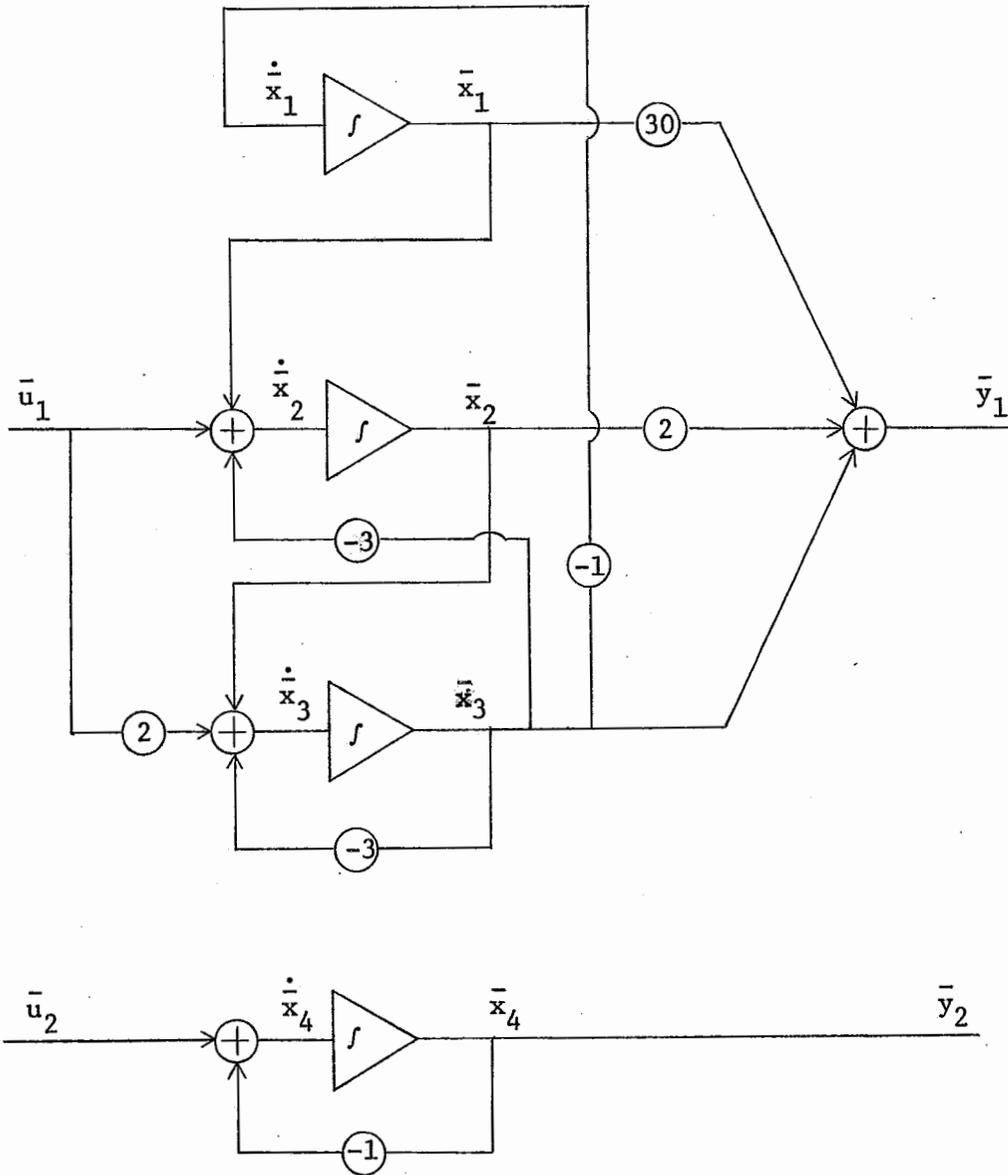
$$P_2(s) = \begin{vmatrix} 1 & s & 0 & s^2+3s+3 \\ 0 & 1 & 0 & s+3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Levando-se em (II.22), chegamos a:

$$H(s, \oplus M) = \begin{vmatrix} \frac{4s^2-65s-34}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{vmatrix}$$

Finalmente, podemos representar $S(\oplus M, Q, R)$ por:

Podemos representar $S(\oplus M, Q, R)$ por:



C A P Í T U L O I I I

DOIS PROGRAMAS DE COMPUTADOR PARA O DESACOPLAMENTO

1. - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são desenvolvidos dois programas para computador. O primeiro determina os fatores invariantes da matriz A de $S(A,B,C)$, assim como a matriz de similaridade T tal que $\oplus M = T^{-1} A T$. O segundo determina para uma matriz retangular (n x m), se o "rank" é igual ou menor que $\min(n,m)$ pois é isto que queremos saber quando aplicamos o teorema (II.4.1) que fornece a condição necessária e suficiente para o desacoplamento entrada-estado-saída.

O computador utilizado foi um IBM-1130 e os programas foram desenvolvidos em FORTRAN.

2. - FATÔRES INVARIANTES E MATRIZ DE SIMILARIDADE

O programa que calcula os fatores invariantes e a forma canônica racional de A, foi desenvolvido utilizando-se as referências¹ e ².

Para o cálculo dos fatores invariantes, empregou-se o método apresentado por Gill², e para a matriz de similaridade, o método descrito no Apêndice.

Pelo algoritmo da divisão:

$$a_{jk}(\lambda) = q_{jk}(\lambda) a_{ik}(\lambda) + a'_{jk}(\lambda)$$

onde

$$\text{grau}(a'_{jk}(\lambda)) < \text{grau}(a_{jk}(\lambda))$$

Portanto, por OEL(2) (segunda operação elementar de linha), podemos somar à j -ésima linha a i -ésima linha multiplicada por $(-q_{jk}(\lambda))$. Assim, o elemento $a_{jk}(\lambda)$ fica substituído por $a'_{jk}(\lambda)$ que possui grau menor. Uma operação similar pode ser aplicada quando os dois elementos pertencem à mesma linha. Se $a_{ik}(\lambda)$ divide todos os elementos de sua linha e de sua coluna, mas não divide um elemento $a_{j\ell}(\lambda)$ de outra posição, a operação pode ser efetuada através de um elemento que pertença à i -ésima linha e ℓ -ésima coluna (ou j -ésima linha e k -ésima coluna). Assim:

$$a_{i\ell}(\lambda) = q_{i\ell}(\lambda) a_{ik}(\lambda)$$

$$a_{j\ell}(\lambda) = q_{j\ell}(\lambda) a_{ik}(\lambda) + a'_{j\ell}(\lambda)$$

Daí tiramos:

$$a_{j\ell}(\lambda) = \frac{q_{j\ell}(\lambda)}{q_{i\ell}(\lambda)} a_{i\ell}(\lambda) + a'_{j\ell}(\lambda)$$

Portanto, por OEL(2), podemos somar à j -ésima linha a i -ésima linha multiplicada por $(-q_{j\ell}(\lambda)/q_{i\ell}(\lambda))$. Assim $a_{j\ell}(\lambda)$ fica substituído por $a'_{j\ell}(\lambda)$ que possui grau menor.

O processo é continuado até que seja encontrado um elemento que divida todos os elementos da matriz (isto é garantido, pois na pior das hipóteses este elemento será uma constante). Por OEL(3) e OEC(3) este elemento pode ser levado ao canto superior esquerdo da matriz. Como este elemento divide toda a matriz poderemos por meio de OEC(2)'s e OEL(2)'s anular todos os outros elementos da primeira linha e primeira coluna da matriz, cuja forma será:

$$\left| \begin{array}{c|c} f_n(\lambda) & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ \vdots & A_1(\lambda) \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right|$$

Podemos agora repetir o processo para $A_1(\lambda)$. Chegaremos a uma matriz da forma:

$$\left| \begin{array}{cc|c} f_n(\lambda) & 0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ 0 & f_{n-1}(\lambda) & 0 \dots \dots \dots 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & A_2(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{array} \right|$$

Continuando-se o processo, chegaremos a:

$$\begin{vmatrix} f_n(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & f_{n-1}(\lambda) & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & f_1(\lambda) \end{vmatrix}$$

onde $f_i(\lambda)$ ($i=1,2,\dots,n$) são os fatores invariantes de A.

OBSERVAÇÃO:

Para o caso em que o elemento $a_{ik}(\lambda)$ divide toda linha e toda coluna mas não divide um elemento de outra posição, podemos usar como elemento intermediário $a_{il}(\lambda)$ ou $a_{jk}(\lambda)$. Foi escolhido, para o programa, $a_{il}(\lambda)$ pois como se verá adiante, isto economizará operações quando for feito o cálculo de T (matriz de similaridade).

Quando $a_{il}(\lambda)$ é nulo, não podemos usá-lo para esta operação. Neste caso somamos à i-ésima linha a j-ésima linha e recomeçamos o processo.

2.2 - MATRIZ DE SIMILARIDADE

Após o cálculo dos fatores invariantes, deseja-se calcular a matriz de similaridade T tal que $\oplus M = T^{-1}AT$. Uma das formas de se calcular

T está desenvolvida no Apêndice.

Deve-se notar que o cálculo da matriz de similaridade, depende do conhecimento das OEC's efetuadas em $(\lambda I - A)$ quando se calculam os fatores invariantes. Esta é a razão pela qual o programa desenvolvido determina simultaneamente os fatores invariantes e a matriz de similaridade.

2.3 - O PROGRAMA

O programa desenvolvido pode ser empregado para matrizes quadradas A com dimensão máxima (10 x 10). Com pequenas modificações, poderemos utilizá-lo para matrizes com dimensão maior.

Foram utilizadas 2 subrotinas científicas IBM:

PMPY - multiplica polinômios

PDIV - divide polinômios

Foram também desenvolvidas 2 subrotinas:

GRAPO - calcula os graus dos polinômios de uma λ -matriz

PROMA - multiplica duas matrizes quadradas.

A utilização do programa é muito simples. Para uma matriz A(nxn) utilizam-se (n+1) cartões de entrada. O primeiro fornece n no formato I2. Os outros cartões fornecem as n linhas da matriz em ordem crescente de linha. Cada cartão fornece os n elementos de uma linha em ordem crescente de coluna, sendo que, cada elemento, está representado no formato F7.3.

Nas próximas páginas temos a listagem do programa, assim como, o resultado para duas matrizes.

PAGE 1 P 163044

// JOB 00FF 10FF

P 163044

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001
		2013	0002

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FORTRAN

**

* LIST SOURCE PROGRAM

* ONE WORD INTEGERS

PAGE 2 P 163044

```

SUBROUTINE GRAPD(MATRX, GRAU, M, TOL)
C   GRAU DOS ELEMENTOS DE UMA MATRIZ POLINOMIAL
      INTEGER GRAU(10,10)
      REAL MATRX(10,10,10)
      N=M+1
      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,M
      DO 4 K=1,N
      K1=N+1-K
      IF(ABS(MATRX(I,J,K1))-TOL)2,2,1
1     GRAU(I,J)=K1-1
      GO TO 5
2     IF(K-N)4,3,3
3     GRAU(I,J)=0
4     CONTINUE
5     CONTINUE
      RETURN
      END

```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR GRAPD
COMMON 0 VARIABLES 6 PROGRAM 126

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA GRAPD
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FORTRAN

**

* LIST SOURCE PROGRAM
* ONE WORD INTEGERS

PAGE 3 P 163044

```
C      SUBROUTINE PROMA(A,B,R,M)
      PRODUTO DE DUAS MATRIZES QUADRADAS
      DIMENSION A(10,10),B(10,10),R(10,10)
      DO 10 I=1,M
      DO 10 J=1,M
      SOMA=0.
      DO 10 K=1,M
      R(I,J)=SOMA+A(I,K)*B(K,J)
      SOMA=R(I,J)
10     CONTINUE
      RETURN
      END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR PROMA
COMMON 0 VARIABLES 8 PROGRAM 104

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE WS UA PROMA
D 06 ENTRY POINT NAME ALREADY IN LET/FLET

// FORTRAN

**

* IOCS(2501 READER,1403 PRINTER)
* LIST SOURCE PROGRAM
* ONE WORD INTEGERS

PAGE 4 P 163044

```

C      INICIO DO PROGRAMA PRINCIPAL
      REAL MATRX(10,10,10),MATR(10,10)
      INTEGER GRAU(10,10),CONTA,COL1(100),COL2(100),DIMFI(10)
      DIMENSION X(10),Y(10),P(10),Z(20),Q(10),S(10)
      DIMENSION III(100),POL(100,10),IDPOL(100),ICONT(2),ROL(10)
      DIMENSION AA(10,10,10),R(10,10),A(10,10),B(10,10)

C
C      PRIMEIRA PARTE.MATRIZ(XI-A)
C      ESCOLHA DO ELEMENTO DE MENOR GRAU DA MATRIZ POLINOMIAL
      READ(8,40) M
40     FORMAT(12)
      DO 38 I=1,10
      DO 38 J=1,10
      DO 38 K=1,10
38     MATRX(I,J,K)=0.
      READ(8,41)((MATRX(I,J,1),J=1,10),I=1,M)
41     FORMAT(10F7.3)
      WRITE(5,42)
42     FORMAT('1',///,' MATRIZ A ',//)
      DO 43 I=1,M
      WRITE(5,43)(MATRX(I,J,1),J=1,M)
43     FORMAT(10F8.2)
      DO 44 I=1,M
      DO 44 J=1,M
44     MATRX(I,J,1)=-MATRX(I,J,1)
      DO 45 I=1,M
45     MATRX(I,I,2)=1.
      TOL=0.001
      IJ=1
      N=M+1
      CONTA=0
      IJK=1
20     MINGR=N
      DO 31 I=IJ,M
      DO 31 J=IJ,M
      DO 30 K=1,N
      K1=N+1-K
      IF(ABS(MATRX(I,J,K1))-TOL)32,32,10
10     GRAU(I,J)=K1-1
      IF(GRAU(I,J)-MINGR)11,11,31
11     MINGR=GRAU(I,J)
      IMIN=I
      JMIN=J
      GO TO 31
32     IF(K-N)30,33,33
33     GRAU(I,J)=0
30     CONTINUE
31     CONTINUE
      IF(MINGR)150,150,100

C
C      TESTE DA LINHA

```

PAGE 5 P 163044

```

100 DO 113 J=IJ,M
    IF(JMIN-J)110,113,110
110 DO 111 I1=1,N
111 X(I1)=MATRX(IMIN,J,I1)
    DO 112 I2=1,N
112 Y(I2)=MATRX(IMIN,JMIN,I2)
    IDIMX=GRAU(IMIN,J)+1
    IDIMY=MINGR+1
    CALL PDIV(P, IDIMP, X, IDIMX, Y, IDIMY, TOL, IER)
    IDIP=IDIMP+1
    DO 137 K2=IDIP,10
137 P(K2)=0.
C INICIO DO TESTE PARA SABER SE HA RESTO
DO 108 I3=1, IDIMX
IF(ABS(X(I3))-TOL)108,108,114
108 CONTINUE
113 CONTINUE
C NAO HA RESTO
GO TO 201
C HA RESTO. INICIO DO PRODUTO DA COLUNA MINIMA PELO QUOCIENTE
114 CONTA=CONTA+1
    III(CONTA)=-1
    DO 166 I=IJ,M
    IF(GRAU(I,JMIN))168,168,167
168 IF(ABS(MATRX(I,JMIN,1))-TOL)166,166,167
167 DO 115 K=1,N
115 Y(K)=MATRX(I,JMIN,K)
    IDIMY=GRAU(I,JMIN)+1
    CALL PMPY(Z, IDIMZ, P, IDIMP, Y, IDIMY)
    IDIZ=IDIMZ+1
    DO 140 K2=IDIZ,20
140 Z(K2)=0.
    DO 116 K2=1,N
116 MATRX(I,J,K2)=MATRX(I,J,K2)-Z(K2)
166 CONTINUE
    COL1(CONTA)=J
    COL2(CONTA)=JMIN
    DO 601 N1=1, IDIMP
601 POL(CONTA,N1)=P(N1)
    IDPOL(CONTA)=IDIMP
    IDP=IDIMP+1
    DO 651 N1=IDP,10
651 POL(CONTA,N1)=0.
C TESTE DO GRAU DO NOVO POLINOMIO ( HOUVE RESTO )
DO 120 K3=1, IDIMX
K4=IDIMX+1-K3
IF(ABS(MATRX(IMIN,J,K4))-TOL)120,120,117
117 GRAU(IMIN,J)=K4-1
    IF(GRAU(IMIN,J))125,118,125
120 CONTINUE
C NOVO GRAU E ZERO

```

PAGE 6 P 163044

```

118 JMIN=J
    MINGR=0
    GO TO 150
C   NOVO GRAU DIFERENTE DE ZERO
125 JMIN=J
    MINGR=GRAU(IMIN,J)
C   CALCULO DO GRAU DA NOVA COLUNA
    DO 131 I=IJ,M
    DO 130 K=1,N
    K1=N+1-K
    IF(ABS(MATRX(I,JMIN,K1))-TOL)132,132,135
135 GRAU(I,JMIN)=K1-1
    GO TO 131
132 IF(K-N)130,133,133
133 GRAU(I,JMIN)=0
130 CONTINUE
131 CONTINUE
    GO TO 100
C
C   TESTE DA COLUNA
201 DO 213 I=IJ,M
    IF(IMIN-1)210,213,210
210 DO 211 J1=1,N
211 X(J1)=MATRX(I,JMIN,J1)
    DO 212 J2=1,N
212 Y(J2)=MATRX(IMIN,JMIN,J2)
    IDIMX=GRAU(I,JMIN)+1
    IDIMY=MINGR+1
    CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
    DO 208 J3=1,IDIMX
    IF(ABS(X(J3))-TOL)208,208,214
208 CONTINUE
213 CONTINUE
    GO TO 160
214 DO 266 J=IJ,M
    IF(GRAU(IMIN,J))268,268,267
268 IF(ABS(MATRX(IMIN,J,1))-TOL)266,266,267
267 DO 215 K=1,N
215 Y(K)=MATRX(IMIN,J,K)
    IDIMY=GRAU(IMIN,J)+1
    CALL PMPY(Z,IDIMZ,P,IDIMP,Y,IDIMY)
    DO 216 K2=1,N
216 MATRX(I,J,K2)=MATRX(I,J,K2)-Z(K2)
266 CONTINUE
    DO 220 K3=1,IDIMX
    K4=IDIMX+1-K3
    IF(ABS(MATRX(I,JMIN,K4))-TOL)220,220,217
217 GRAU(I,JMIN)=K4-1
    IF(GRAU(I,JMIN))225,218,225
220 CONTINUE
218 IMIN=I

```

PAGE 7 P 163044

```

MINGR=0
GO TO 150
225 IMIN=I
MINGR=GRAU(I,JMIN)
C   CALCULO DO GRAU DA NOVA LINHA
DO 231 J=IJ,M
DO 230 K=1,N
K1=N+1-K
IF(ABS(MATRX(IMIN,J,K1))-TOL)232,232,235
235 GRAU(IMIN,J)=K1-1
GO TO 231
232 IF(K-N)230,233,233
233 GRAU(IMIN,J)=0
230 CONTINUE
231 CONTINUE
GO TO 100

C
C   TESTE LINHA-COLUNA
160 DO 333 I=IJ,M
DO 313 J=IJ,M
IF(IMIN-I)309,333,309
309 IF(JMIN-J)305,313,305
305 IDIMX=GRAU(I,J)+1
IDIMY=MINGR+1
IF(IDIMX-1)313,313,310
C   INICIO DA PRIMEIRA DIVISAO
310 DO 311 L=1,N
311 X(L)=MATRX(I,J,L)
DO 312 L=1,N
312 Y(L)=MATRX(IMIN,JMIN,L)
CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
IDIMR=IDIMX
DO 313 L=1,IDIMX
IF(ABS(X(L))-TOL)313,313,314
313 CONTINUE
333 CONTINUE
C   HA RESTO
GO TO 150
314 DO 315 L=1,IDIMP
C   PRIMEIRO QUOCIENTE EM Q
315 Q(L)=P(L)
IDIMQ=IDIMP
C   INICIO DA SEGUNDA DIVISAO
DO 316 L=1,N
316 X(L)=MATRX(IMIN,J,L)
IDIMX=GRAU(IMIN,J)+1
IF(IDIMX-1)380,380,370
380 IF(ABS(MATRX(IMIN,J,1))-TOL)381,381,370
381 DO 385 J1=IJ,M
DO 385 K=1,N
385 MATRX(IMIN,J1,K)=MATRX(IMIN,J1,K)+MATRX(I,J1,K)

```

PAGE 8 P 163044

```

GO TO 20
370 CALL PDIV(P, IDIMP, X, IDIMX, Y, IDIMY, TOL, IER)
DO 317 L=1, IDIMP
C   SEGUNDO QUOCIENTE EM S
317 S(L)=P(L)
    IDIMS=IDIMP
    DO 320 J1=IJ, M
    DO 318 L=1, N
318 Y(L)=MATRX(IMIN, J1, L)
    IDIMY=GRAU(IMIN, J1)+1
    CALL PMPY (Z, IDIMZ, Q, IDIMQ, Y, IDIMY)
    CALL PDIV (P, IDIMP, Z, IDIMZ, S, IDIMS, TOL, IER)
    IDIP=IDIMP+1
    DO 319 L=IDIP, 10
319 P(L)=0.
    DO 320 L=1, N
320 MATRX(I, J1, L)=MATRX(I, J1, L)-P(L)
C   TESTE DO GRAU DO NOVO POLINOMIO ( HOUVE RESTO )
DO 330 K3=1, IDIMR
    K4=IDIMR+1-K3
    IF(ABS(MATRX(I, J, K4))-TOL)330, 330, 327
327 GRAU(I, J)=K4-1
    IF(GRAU(I, J))325, 328, 325
330 CONTINUE
328 IMIN=I
    JMIN=J
    MINGR=0
    GO TO 150
C   O NOVO POLINOMIO TEM GRAU ZERO
325 JMIN=J
    IMIN=I
    MINGR=GRAU(I, J)
C   CALCULO DO GRAU DA NOVA LINHA
DO 331 J=IJ, M
    DO 340 K=1, N
    K1=N+1-K
    IF(ABS(MATRX(IMIN, J, K1))-TOL)332, 332, 335
335 GRAU(IMIN, J)=K1-1
    GO TO 331
332 IF(K-N)340, 338, 338
338 GRAU(IMIN, J)=0
340 CONTINUE
331 CONTINUE
C   VOLTA AO TESTE DE LINHA
GO TO 100
C
C   TRANSFERENCIA DO POLINOMIO MINIMO PARA SUA POSICAO
C   TRANSFERENCIA LINHA
C
150 IF(IMIN-IJ)401, 405, 401
401 DO 404 J=IJ, M
    DO 404 K=1, N

```

PAGE 9 P 163044

```

PAT=MATRX(IMIN,J,K)
MATRX(IMIN,J,K)=MATRX(IJ,J,K)
404 MATRX(IJ,J,K)=PAT
C TRANSFERENCIA COLUNA
405 IF(JMIN-IJ)606,410,606
606 CONTA=CONTA+1
    III(CONTA)=1
    COL1(CONTA)=IJ
    COL2(CONTA)=JMIN
    DO 607 N1=1,10
607 POL(CONTA,N1)=0.
    IDPOL(CONTA)=0
    DO 409 I=IJ,M
    DO 409 K=1,N
    PAT=MATRX(I,JMIN,K)
    MATRX(I,JMIN,K)=MATRX(I,IJ,K)
409 MATRX(I,IJ,K)=PAT
C CALCULO DO GRAU DOS POLINOMIOS DA MATRIZ TRANSFORMADA
410 CALL GRAPG(MATRX,GRAU,M,TOL)
C
C TRANSFORMACAO DOS ELEMENTOS DA LINHA EM ZEROS
    IJ1=IJ+1
    DO 425 J=IJ1,M
    DO 420 K1=1,N
420 X(K1)=MATRX(IJ,J,K1)
    DO 421 K1=1,N
421 Y(K1)=MATRX(IJ,IJ,K1)
    IDIMX=GRAU(IJ,J)+1
    IDIMY=GRAU(IJ,IJ)+1
    CALL PDIV(P,IDIMP,X,IDIMX,Y,IDIMY,TOL,IER)
    IDIP=IDIMP+1
    DO 422 K2=IDIP,10
422 P(K2)=0.
    CONTA=CONTA+1
    III(CONTA)=-1
    COL1(CONTA)=J
    COL2(CONTA)=IJ
    DO 602 N1=1,IDIMP
602 POL(CONTA,N1)=P(N1)
    IDPOL(CONTA)=IDIMP
    IDP=IDIMP+1
    DO 652 N1=IDP,10
652 POL(CONTA,N1)=0.
    DO 424 I=IJ,M
    DO 427 K1=1,N
427 Y(K1)=MATRX(I,IJ,K1)
    IDIMY=GRAU(I,IJ)+1
    CALL PMPY(Z,IDIMZ,P,IDIMP,Y,IDIMY)
    IDIZ=IDIMZ+1
    DO 423 K2=IDIZ,10
423 Z(K2)=0.

```

PAGE 10 P 163044

```

DO 424 K=1,N
424 MATRX(I,J,K)=MATRX(I,J,K)-Z(K)
425 CONTINUE

```

C

C TRANSFORMACAO DOS ELEMENTOS DA COLUNA EM ZEROS

```

DO 426 I=1J1,M
DO 426 K=1,N
426 MATRX(I,IJ,K)=0.
DO 428 K1=1,N
428 Y(K1)=MATRX(IJ,IJ,K1)
IDIMY=GRAU(IJ,IJ)+1
X(1)=1./Y(IDIMY)
IDIMX=1
CALL PMPY(Z,IDIMZ,X,IDIMX,Y,IDIMY)
IDIZ=IDIMZ+1
DO 430 K1=IDIZ,10

```

430 Z(K1)=0.

DO 437 K2=1,N

437 MATRX(IJ,IJ,K2)=Z(K2)

C CALCULO DO GRAU DOS POLINOMIOS DA NOVA MATRIZ

CALL GRAPO(MATRX,GRAU,M,TOL)

IF((IJ-M)+1)431,432,432

431 IJ=IJ+1

GO TO 20

432 IDM=GRAU(M,M)+1

DO 434 K=1,IDM

434 MATRX(M,M,K)=MATRX(M,M,K)/MATRX(M,M,IDM)

IF(IJK-1)429,429,435

429 WRITE(5,433)

433 FORMAT(///)

DO 461 I=1,M

DO 461 K=1,10

461 MATR(I,K)=MATRX(I,I,K)

DO 462 I=1,M

DO 462 K=1,10

IF(MATR(I,K))463,462,464

463 MATR(I,K)=MATR(I,K)-0.0005

GO TO 462

464 MATR(I,K)=MATR(I,K)+0.0005

462 CONTINUE

WRITE(5,440)

440 FORMAT(' FATORES INVARIANTES ',//)

WRITE(5,441)

441 FORMAT(' GRAUO ',3X,' 1 ',3X,' 2 ',3X,' 3 ',3X,' 4 ',3X,' 5 ' ,

13X,' 6 ',3X,' 7 ',3X,' 8 ',3X,' 9 ',//)

WRITE(5,436)((MATR(I,K),K=1,10),I=1,M)

436 FORMAT(10F6.2)

435 ICONT(IJK)=CONTA

IJK=IJK+1

IF(IJK-2)608,608,700

C CARREGAMENTO DOS FATORES INVARIANTES EM MATR

PAGE 11 P 163044

```

608 DO 610 JJ=1,M
    DO 610 K=1,N
    M1=M-JJ+1
610 MATR(M1,K)=MATRX(JJ,JJ,K)
C   CALCULO DAS DIMENSOES DOS FATORES INVARIANTES
    DO 611 I=1,M
    M2=M-I+1
611 DIMFI(M2)=GRAU(I,I)+1
C   CALCULO DO NUMERO DE F. I. COM GRAU DIFERENTE DE ZERO
    NFI=0
    DO 612 I=1,M
    NFI=NFI+DIMFI(I)-1
    IF(NFI-M)612,613,613
613 NFIDZ=I
    GO TO 614
612 CONTINUE
    NFIDZ=M
C
C   SEGUNDA PARTE.MATRIZ(XI-(+)M)
614 DO 615 I=1,10
    DO 615 J=1,10
    DO 615 K=1,10
615 MATRX(I,J,K)=0.
    DO 620 I=1,M
620 MATRX(I,I,2)=1.
    IC=0
    DO 630 JJ=1,NFIDZ
    IDFI=DIMFI(JJ)-1
    DO 625 I=1,IDFI
    I1=I+IC
    I2=IDFI+IC
625 MATRX(I1,I2,1)=MATR(JJ,I)
    IF(IDFI-1)629,629,626
626 DO 627 I=2,IDFI
    I1=I+IC
    I2=I-1+IC
627 MATRX(I1,I2,1)=-1
629 IC=IC+IDFI
630 CONTINUE
    IJ=1
    GO TO 20
C
C   CALCULO DE Q1(X)
C   OPERACOES ELEMENTARES DA PRIMEIRA PARTE
700 DO 710 I=1,10
    DO 710 J=1,10
    DO 710 K=1,10
710 MATRX(I,J,K)=0.
    DO 715 I=1,M
715 MATRX(I,I,1)=1.
    IC=ICONT(1)

```

PAGE 12 P 163044

```

      DO 800 L=1, IC
      CALL GRAPO(MATRX, GRAU, M, TOL)
      IF(III(L)) 720, 720, 730
C     OPERACAO TIPO 1 ( TROCA DE COLUNAS )
720   ICOL1=COL1(L)
      ICOL2=COL2(L)
      IDROL=IDPOL(L)
      DO 721 I=1, IDROL
721   ROL(I)=POL(L, I)
      DO 725 I=1, M
      DO 723 K=1, N
723   X(K)=MATRX(I, ICOL2, K)
      IDIMX=GRAU(I, ICOL2)+1
      CALL PMPY(Z, IDIMZ, X, IDIMX, ROL, IDROL)
      IDIZ=IDIMZ+1
      DO 722 K1=IDIZ, 20
722   Z(K1)=0.
      DO 724 K1=1, N
724   MATRX(I, ICOL1, K1)=MATRX(I, ICOL1, K1)-Z(K1)
725   CONTINUE
      GO TO 800
C     OPERACAO TIPO 2 ( COLUNA1-POLINOMIO*COLUNA2)
730   ICOL1=COL1(L)
      ICOL2=COL2(L)
      DO 731 I=1, M
      DO 731 K=1, N
      PAT=MATRX(I, ICOL1, K)
      MATRX(I, ICOL1, K)=MATRX(I, ICOL2, K)
731   MATRX(I, ICOL2, K)=PAT
800   CONTINUE
C
C     CALCULO DE Q(X). OPERACOES ELEMENTARES DA SEGUNDA PARTE
      IC=ICONT(2)-ICONT(1)
      ID=ICONT(2)+1
      DO 900 L=1, IC
      ID1=ID-L
      CALL GRAPO(MATRX, GRAU, M, TOL)
      IF(III(ID1)) 820, 820, 830
820   ICOL1=COL1(ID1)
      ICOL2=COL2(ID1)
      IDROL=IDPOL(ID1)
      DO 821 I=1, IDROL
821   ROL(I)=POL(ID1, I)
      DO 825 I=1, M
      DO 823 K=1, N
823   X(K)=MATRX(I, ICOL2, K)
      IDIMX=GRAU(I, ICOL2)+1
      CALL PMPY(Z, IDIMZ, X, IDIMX, ROL, IDROL)
      IDIZ=IDIMZ+1
      DO 822 K1=IDIZ, 20
822   Z(K1)=0.

```

PAGE 13 P 163044

```

      DO 824 K1=1,N
824  MATRX(I,ICOL1,K1)=MATRX(I,ICOL1,K1)+Z(K1)
825  CONTINUE
      GO TO 900
830  ICOL1=COL1(ID1)
      ICOL2=COL2(ID1)
      DO 831 I=1,M
      DO 831 K=1,N
      PAT=MATRX(I,ICOL1,K)
      MATRX(I,ICOL1,K)=MATRX(I,ICOL2,K)
831  MATRX(I,ICOL2,K)=PAT
900  CONTINUE
C    CALCULO DO GRAU MAXIMO DE Q(X)
      CALL GRAPU(MATRX,GRAU,M,TOL)
      MAXGR=0
      DO 1115 I=1,M
      DO 1115 J=1,M
      IF(GRAU(I,J)-MAXGR)1115,1110,1110
1110  MAXGR=GRAU(I,J)
1115  CONTINUE
      IF(MAXGR)1210,1210,1120
1120  DO 1105 I=1,10
      DO 1105 J=1,10
      DO 1105 K=1,10
1105  AA(I,J,K)=0.
C    CARREGAMENTO DE (+M) EM AA(I,J,1)
      IC=0
      DO 1130 JJ=1,NFIDZ
      IDFI=DIMFI(JJ)-1
      DO 1125 I=1,IDFI
      IA=I+IC
      IB=IDFI+IC
1125  AA(IA,IB,1)=-MATR(JJ,I)
      IF(IDFI-1)1129,1129,1126
1126  DO 1127 I=2,IDFI
      IA=I+IC
      IB=I-1+IC
1127  AA(IA,IB,1)=1.
1129  IC=IC+IDFI
1130  CONTINUE
C    CALCULO DAS POTENCIAS DE (+M) EM AA(I,J,K)
      DO 1150 I=1,M
      DO 1150 J=1,M
      A(I,J)=AA(I,J,1)
1150  R(I,J)=AA(I,J,1)
      MAX=MAXGR-1
      DO 1180 L=1,MAX
      LI=L+1
      DO 1160 I=1,M
      DO 1160 J=1,M
1160  B(I,J)=R(I,J)

```

PAGE 14 P 163044

```

      CALL PROMA(A,B,R,M)
      DO 1170 I=1,M
      DO 1170 J=1,M
1170 AA(I,J,L1)=R(I,J)
1180 CONTINUE
      DO 1200 L=1,MAXGR
      L1=L+1
      DO 1190 I=1,M
      DO 1190 J=1,M
      A(I,J)=MATRX(I,J,L1)
1190 B(I,J)=AA(I,J,L)
      CALL PROMA(A,B,R,M)
      DO 1195 I=1,M
      DO 1195 J=1,M
1195 MATRX(I,J,1)=MATRX(I,J,1)+R(I,J)
1200 CONTINUE
1210 DO 1205 I=1,M
      DO 1205 J=1,M
      IF(MATRX(I,J,1))1206,1207,1207
1206 MATRX(I,J,1)=MATRX(I,J,1)-0.0005
      GO TO 1205
1207 MATRX(I,J,1)=MATRX(I,J,1)+0.0005
1205 CONTINUE
      WRITE(5,1212)
1212 FORMAT(///,' MATRIZ DE SIMILARIDADE ',//)
      DO 1213 I=1,M
      WRITE(5,1211)(MATRX(I,J,1),J=1,M)
1211 FORMAT(10F8.2)
1213 CONTINUE
      CALL EXIT
      END

```

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON 0 VARIABLES 7532 PROGRAM 4978

END OF COMPILATION

// XEQ

MATRIZ A

1.00	-1.00	1.00	-1.00
-3.00	3.00	-5.00	4.00
8.00	-4.00	3.00	-4.00
15.00	-10.00	11.00	-11.00

FATORES INVARIANTES

GRAUO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	3.00	3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

MATRIZ DE SIMILARIDADE

-1.00	0.00	1.00	1.00
4.00	0.00	-5.00	-4.00
-5.00	1.00	3.00	5.00
-10.00	0.00	11.00	11.00

MATRIZ A

-3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	6.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	3.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
0.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

FATORES INVARIANTES

GRAUO	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-5.00	3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	5.00	-3.00	-6.00	3.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00

MATRIZ DE SIMILARIDADE

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.60	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.60	2.80	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2.80	-0.60	-6.00	0.00	-5.00	0.00	0.00	0.00
-0.60	-7.80	-3.00	-5.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-7.80	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	0.00

3. - O PROBLEMA DO "RANK" DE UMA MATRIZ RETANGULAR

3.1 - A ESCOLHA DAS LINHAS

Quando fazemos o desacoplamento entrada-estado-saida de $S(A,B,C)$ e usamos o teorema 4.1 (condição necessária e suficiente), eventualmente, precisaremos saber se "rank" $\mathcal{C}_i(\Gamma_i)$ é menor do que \underline{m} . Êste cálculo é muito trabalhoso, principalmente quando $\mathcal{C}_i(\Gamma_i)$ são matrizes retangulares com dimensões elevadas. Para o cálculo do "rank" de matrizes quadradas, podemos utilizar o algoritmo de GAUSS¹. Portanto é preciso que se encontre uma forma sistemática de se escolher as linhas (colunas) da matriz, de modo que, encontremos tôdas as matrizes quadradas de ordem máxima obtidas a partir de uma matriz retangular.

Seja a matriz retangular abaixo:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_m \\ \begin{array}{c} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{m1} \\ \vdots \\ m_{p1} \end{array} & \begin{array}{c} m_{12} \dots \dots \dots m_{1m} \\ m_{22} \dots \dots \dots m_{2m} \\ \vdots \\ m_{m2} \dots \dots \dots m_{mm} \\ \vdots \\ m_{p2} \dots \dots \dots m_{pm} \end{array} \\ \begin{array}{c} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \\ \vdots \\ i_p \end{array} \end{array} \end{array} \quad \text{onde } p \geq m$$

Queremos sistematizar a escolha de m das p linhas.

Sejam i_1^* , i_2^* , ..., i_m^* , as ordens das linhas escolhidas.

Uma forma de se escolher as m linhas, será variando os índices como se vê abaixo:

$$i_1^* = 1, 2, \dots, p-m+1$$

$$i_2^* = i_1^*+1, \dots, p-m+2$$

⋮

$$i_m^* = i_{m-1}^*+1, \dots, p$$

Assim, obtemos as $\frac{p!}{m! (p-m)!}$ combinações possíveis de linhas.

Vamos exemplificar:

Sejam $p=4$ e $m=3$

Então

$$i_1^* = 1, 2$$

$$i_2^* = i_1^*+1, 3$$

$$i_3^* = i_2^*+1, 4$$

E as quatro combinações possíveis serão:

	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
i ₁ [*]	1	1	1	2
i ₂ [*]	2	2	3	3
i ₃ [*]	3	4	4	4

3.2 - O PROGRAMA

O programa desenvolvido, pode ser empregado para matrizes retangulares com dimensão máxima (10x10). Pode ser modificado facilmente para dimensões maiores.

A utilização do programa é muito simples. Para uma matriz B(pxm), são utilizados (p+1) cartões de entrada. O primeiro cartão fornece m e p, nesta ordem e no formato 2 I.2. Os outros p cartões, fornecem as linhas da matriz, da mesma forma que o programa anterior.

O programa foi testado várias vezes com sucesso, obtendo-se, inclusive, tôdas as combinações possíveis de linhas.

Nas próximas páginas, temos a listagem do programa, assim como, o resultado para duas matrizes.

PAGE 1 P 163044

// JOB 00FF 10FF

P 163044

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	00FF	00FF	0000
0001	10FF	10FF	0001
		2013	0002

V2 M05 ACTUAL 32K CONFIG 32K

// FORTRAN

**

* IOCS(2501 READER, 1403 PRINTER)

* LIST SOURCE PROGRAM

* ONE WORD INTEGERS

PAGE 2 P 163044

```
DIMENSION A(10,10),B(10,10)
READ(8,10)M,N
10  FORMAT(2I2)
    READ(8,12)((A(I,J),J=1,10),I=1,N)
12  FORMAT(10F7.3)
    WRITE(5,16)
16  FORMAT('1')
    WRITE (5,13)
13  FORMAT(' MATRIZ A ',///)
    TOLER=0.0001
    DO 15 I=1,N
    WRITE(5,14)(A(I,J),J=1,M)
14  FORMAT(10F10.3)
15  CONTINUE
    LS1=N-M+1
    LS2=N-M+2
    LS3=N-M+3
    LS4=N-M+4
    LS5=N-M+5
    LS6=N-M+6
    LS7=N-M+7
    LS8=N-M+8
    LS9=N-M+9
    LS10=N-M+10
    DO 70 I1=1,LS1
    IF(M-1)30,30,20
20  LI2=I1+1
    DO 71 I2=LI2,LS2
    IF(M-2)30,30,21
21  LI3=I2+1
    DO 72 I3=LI3,LS3
    IF(M-3)30,30,22
22  LI4=I3+1
    DO 73 I4=LI4,LS4
    IF(M-4)30,30,23
23  LI5=I4+1
    DO 74 I5=LI5,LS5
    IF(M-5)30,30,24
24  LI6=I5+1
    DO 75 I6=LI6,LS6
    IF(M-6)30,30,25
25  LI7=I6+1
    DO 76 I7=LI7,LS7
    IF(M-7)30,30,26
26  LI8=I7+1
    DO 77 I8=LI8,LS8
    IF(M-8)30,30,27
27  LI9=I8+1
    DO 78 I9=LI9,LS9
    IF(M-9)30,30,28
28  LI10=I9+1
```

PAGE 3 P 163044

```

DO 79 I10=LI10,LS10
30 DO 80 J=1,M
80 B(1,J)=A(I1,J)
   IF(M-1)50,50,40
40 DO 81 J=1,M
81 B(2,J)=A(I2,J)
   IF(M-2)50,50,41
41 DO 82 J=1,M
82 B(3,J)=A(I3,J)
   IF(M-3)50,50,42
42 DO 83 J=1,M
83 B(4,J)=A(I4,J)
   IF(M-4)50,50,43
43 DO 84 J=1,M
84 B(5,J)=A(I5,J)
   IF(M-5)50,50,44
44 DO 85 J=1,M
85 B(6,J)=A(I6,J)
   IF(M-6)50,50,45
45 DO 86 J=1,M
86 B(7,J)=A(I7,J)
   IF(M-7)50,50,46
46 DO 87 J=1,M
87 B(8,J)=A(I8,J)
   IF(M-8)50,50,47
47 DO 88 J=1,M
88 B(9,J)=A(I9,J)
   IF(M-9)50,50,48
48 DO 89 J=1,M
89 B(10,J)=A(I10,J)
C   ELIMINACAO DOS ELEMENTOS ABAIXO DA DIAGONAL
50 M1=M-1
   DO 69 I=1,M1
C   TESTE PARA SABER SE B(I,I) E DIFERENTE DE ZERO
   DO 51 II=I,M
   IF(ABS(B(II,I))-TOLER)51,51,55
51 CONTINUE
C   NOVO TESTE ( COLUNA NULA )
   GO TO 70
55 IF(II-I)60,60,56
C   TROCA DE LINHAS ** B(I,I) = 0
56 DO 57 J=I,M
   TRANS=B(I,J)
   B(I,J)=B(II,J)
57 B(II,J)=TRANS
C   CONTINUACAO DO ' DO '
60 II=I+1
   DO 69 J=II,M
   BARMA=B(J,I)
   DO 69 K=I,M
   B(J,K)=B(J,K)-(BARMA/B(I,I))*B(I,K)

```

PAGE 4 P 163044

```
69 CONTINUE
   IF(ABS(B(M,M))-TOLER)65,65,95
65 GO TO(70,71,72,73,74,75,76,77,78,79),M
79 CONTINUE
78 CONTINUE
77 CONTINUE
76 CONTINUE
75 CONTINUE
74 CONTINUE
73 CONTINUE
72 CONTINUE
71 CONTINUE
70 CONTINUE
   GO TO 100
95 WRITE(5,91)M
91 FORMAT(///,' RANK A = ',I2)
   GO TO 101
100 WRITE(5,92)M
92 FORMAT(///,' RANK DE A MENOR DO QUE ',I2)
101 CALL EXIT
   END
```

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS
IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
COMMON 0 VARIABLES 446 PROGRAM 1092

END OF COMPILATION

// XEQ

MATRIZ A

1.000	-2.000	-2.500	-1.000
0.000	1.000	4.000	1.000
2.000	-6.000	-10.000	-4.000
4.000	4.000	-3.000	8.000
-1.000	2.000	0.000	1.000
0.000	2.000	-1.000	2.000
5.000	1.000	5.000	6.000

RANK DE A MENOR DO QUE 4

Observação:

É fácil verificar que a 4a. coluna é igual à soma das duas primeiras colunas.

MATRIZ A

1.000	-2.000	-2.500	1.000
5.000	1.000	5.000	7.000
0.000	2.000	-1.000	9.000
4.000	4.000	-3.000	8.000
-1.000	2.000	0.000	2.000
2.000	-6.000	-10.000	-4.000
0.000	1.000	4.000	3.000

RANK A = 4

C A P Í T U L O I VCONCLUSÕES E SUGESTÕES1 - CONCLUSÕES

O método é bastante geral, visto que os fatores invariantes podem ser calculados sobre qualquer campo. Foram usados os reais devido à sua ligação com a teoria de controle. Portanto, esta decomposição também pode ser usada para a Teoria da Codificação, Máquinas Sequenciais Lineares e outras áreas da Teoria de Sistemas.

O desacoplamento tem a vantagem de utilizar a estrutura inerente a A . O número de blocos em que o sistema é desacoplado depende exclusivamente dos fatores invariantes de A . Se levamos em consideração a referência 8, verificamos que o método desenvolvido utiliza o número mínimo de entradas e saídas necessárias para a completa controlabilidade e observabilidade do sistema desacoplado.

O método utilizado por Gilbert permite que se escolham os polos de função de transferência em malha fechada do sistema desacoplado. O nosso método não permite isto, pois os polos estarão determinados pelos fatores invariantes de A . Entretanto, temos algum controle sobre os zeros da função de transferência, pois, em geral, as matrizes Q e R não são unicamente determinadas. Isto significa que os zeros da função de transferência em malha fechada não são unicamente determinados (vide II.28). Já no desacoplamento

entrada-saída empregado por Gilbert, os zeros são fixos.

É fácil verificar porque se afirma que o desacoplamento entrada-estado-saída é mais forte que o desacoplamento entrada-saída. Imaginemos um sistema não controlável (observável) e que esteja desacoplado segundo entrada-saída. Então, é possível que este sistema possua uma componente do vetor-estado que influencie (seja influenciada por) mais de uma componente de saída (entrada).⁹ Neste caso, apesar de haver desacoplamento entrada-saída, não haverá desacoplamento entrada-estado-saída.

A grande vantagem do método desenvolvido para o desacoplamento entrada-estado-saída é a sua simplicidade e generalidade. Simplicidade, pois são feitas apenas transformações de coordenadas. Generalidade, pois a Forma Canônica Racional sempre existe e é única.

2 - SUGESTÕES PARA FUTUROS ESTUDOS

Para o sistema desacoplado, poderemos estudar o efeito da realimentação de estados sobre a resposta do sistema. Como o sistema está desacoplado, isto se reduz ao estudo de cada subsistema separadamente.

Um problema mais interessante é ver se a realimentação de estados pode transformar um sistema que não tenha satisfeito a condição do "rank" para o desacoplamento num sistema desacoplável. Isto talvez possa ser conseguido, modificando-se os fatores invariantes da matriz A.

É sabido que os fatores invariantes podem ser fatorados em "divi-

sores elementares", os quais dependem do campo sôbre o qual se opera¹. Isto reduzirá as dimensões dos blocos de variáveis de estado. Portanto, pode ser desenvolvida uma teoria para desacoplamento, utilizando-se os divisores elementares da matriz A.

A P Ê N D I C E

TEORIA DOS FATÔRES INVARIANTES E FORMA CANÔNICA RACIONAL

Neste apêndice serão apresentadas noções básicas sôbre os "fatôres invariantes" e a "forma canônica racional" de matrizes quadradas. As provas dos teoremas podem ser encontradas na referência¹.

1. - FATÔRES INVARIANTES

1.1 - DEFINIÇÃO

Uma matriz polinomial, ou λ - matriz, é uma matriz $A(\lambda)$ cujos elementos são polinômios em λ .

Seja $A(\lambda)$ uma matriz polinomial de dimensão $n \times n$ e "rank" n . Seja $D_j(\lambda)$ o máximo divisor comum de todos os menores de $A(\lambda)$ de ordem j ($j = 1, 2, \dots, n$). É fácil verificar que na série

$$D_n(\lambda), D_{n-1}(\lambda), \dots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) \equiv 1$$

cada polinômio divide o imediatamente anterior. Os correspondentes quocientes serão denotados por $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$:

$$f_1(\lambda) = \frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, f_2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \dots, f_n(\lambda) = \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} \quad (\text{A.1})$$

1.2 - DEFINIÇÃO

Os polinômios $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_n(\lambda)$ definidos em (A.1), são chamados fatôres invariantes da matriz $A(\lambda)$.

Serão apresentadas a seguir, três tipos de operações elementares nas linhas de uma matriz polinomial $A(\lambda)$. Estas operações são chamadas operações elementares à esquerda.

- 1 - Multiplicar uma linha, por exemplo, a i -ésima, por uma constante $c \neq 0$.
- 2 - Somar a uma linha, por exemplo, a i -ésima; outra linha, por exemplo, a j -ésima, multiplicada por um polinômio arbitrário $b(\lambda)$.
- 3 - Permutar duas linhas, por exemplo, i -ésima e j -ésima.

É fácil verificar que as operações 1, 2, 3, são equivalentes, respectivamente, a multiplicação à esquerda da matriz $A(\lambda)$ pelas seguintes matrizes quadradas de ordem n .

onde todos os elementos que não aparecem são 1 quando na diagonal principal, e zero quando em outra posição.

Da mesma forma podemos definir operações elementares nas colunas de $A(\lambda)$. Elas são chamadas operações elementares à direita, e correspondem a multiplicação à direita de $A(\lambda)$, respectivamente, pelas seguintes matrizes quadradas.

$$T' = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right| \quad (i)$$

$$T'' = \left| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & b(\lambda) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} (i) \\ (j) \end{array}$$

$$T''' = \left(\begin{array}{cccc} 1 & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (i) \\ (j) \end{array} \quad (A.3)$$

As matrizes (S' , S'' , S''' , T' , T'' , T''') são chamadas matrizes elementares.

É fácil verificar que as matrizes elementares possuem determinante constante não-nulo, e que a inversa de uma matriz elementar é uma matriz elementar. Além disso, pode-se provar¹ que toda matriz polinomial, cujo determinante é constante e diferente de zero, pode ser expressa como um produto de matrizes elementares. Assim:

1.3 - DEFINIÇÃO

Duas matrizes polinomiais $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$ são chamadas: 1) equivalente à esquerda; 2) equivalentes à direita; 3) equivalentes se

- 1) $B(\lambda) = P(\lambda) A(\lambda)$
- 2) $B(\lambda) = A(\lambda) Q(\lambda)$
- 3) $B(\lambda) = P(\lambda) A(\lambda) Q(\lambda)$,

respectivamente, onde $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ são matrizes polinomiais com determinante constante não-nulo.

Pode-se provar¹ que toda matriz polinomial pode ser levada através de operações elementares de linha e de coluna à forma abaixo.

$$\left| \begin{array}{cccc}
 a_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & a_2(\lambda) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & a_n(\lambda)
 \end{array} \right| \tag{A.4}$$

onde todos os elementos da matriz com exceção da diagonal principal são nulos; $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots, a_n(\lambda)$ são polinômios mônicos, e cada polinômio da sequência acima é divisível pelo precedente.

1.4 - TEOREMA

Toda matriz polinomial $A(\lambda)$ é equivalente à matriz canônica diagonal abaixo

$$F(\lambda) = \left| \begin{array}{cccc}
 f_n(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & f_{n-1}(\lambda) & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & f_1(\lambda)
 \end{array} \right| \tag{A.5}$$

onde $(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$ são os fatores invariantes de $A(\lambda)$.

Este teorema decorre do fato que $f_i(\lambda) = a_{n-i+1}(\lambda), (i = 1, 2, \dots, n)$ e de (A.4).

Comparando-se (A.4) e (A.5) concluímos que os fatores invariantes de uma matriz polinomial $A(\lambda)$, podem ser obtidos através de operações elementares de linha e de coluna em $A(\lambda)$.

1.5 - COROLÁRIO

Duas matrizes polinomiais quadradas $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$, são equivalentes se, e somente, se elas têm os mesmos fatores invariantes.

1.6 - COROLÁRIO

Na sequência de fatores invariantes $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$, cada polinômio divide o precedente.

1.7 - DEFINIÇÃO

Fatores invariantes de uma matriz constante A são fatores invariantes de sua matriz característica $(\lambda I - A)$, onde I é a matriz identidade com a mesma dimensão que A .

Pode-se provar¹ que para toda matriz constante A de dimensão $n \times n$ são válidas as igualdades abaixo:

$$g(\lambda) = \prod_{i=1}^n f_i(\lambda)$$

$$p(\lambda) = f_1(\lambda) \tag{A.6}$$

onde:

$g(\lambda)$ é o polinômio característico de A.

$p(\lambda)$ é o polinômio mínimo de A

$f_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) são fatores invariantes de A.

1.8 - TEOREMA

Se os binômios $(A_0 \lambda + A_1)$ e $(B_0 \lambda + B_1)$, onde A_0, A_1, B_0, B_1 são matrizes constantes e A_0, B_0 são não-singulares, são equivalentes, ou seja, se

$$B_0 \lambda + B_1 = P(\lambda) (A_0 \lambda + A_1) Q(\lambda)$$

então eles são estritamente equivalentes, ou seja,

$$B_0 \lambda + B_1 = P (A_0 \lambda + A_1) Q$$

onde P e Q são matrizes constantes não-singulares.

1.9 - TEOREMA

Duas matrizes A e B são similares ($B = T^{-1}A T$) se e somente se possuem os mesmos fatores invariantes.

1.10 - DEFINIÇÃO

Valor à direita $G(B)$ (esquerda $\hat{G}(B)$) de $G(\lambda)$ em B, onde $G(\lambda) = \lambda^m G_0 + \lambda^{m-1} G_1 + \dots + G_m$ e G_i ($i = 0, 1, \dots, m$) são matrizes é definido por $G(B) = G_0 B^m + G_1 B^{m-1} + \dots + G_m$ ($\hat{G}(B) = B^m G_0 + B^{m-1} G_1 + \dots + G_m$).

1.11 - TEOREMA

Se A e B são similares ($B = T^{-1}A T$), pode-se tomar como matriz de similaridade:

$$T = Q(B) = (\hat{P}(B))^{-1}$$

onde $P(\lambda)$ e $Q(\lambda)$ são matrizes polinomiais definidas pela identidade.

$$\lambda I - B = P(\lambda) (\lambda I - A) Q(\lambda)$$

que relaciona as matrizes características $(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - B)$; e onde $Q(B)$ ($\hat{P}(B)$) representa o valor à direita (esquerda) de $Q(\lambda)$ ($P(\lambda)$), quando o argumento é substituído por B.

2. - FORMA CANÔNICA RACIONAL DE UMA MATRIZ

$$\text{Seja } g(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

Consideremos a matriz quadrada M de dimensão $m \times m$.

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 0 \dots \dots 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 \dots \dots 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots \dots 1 & -\alpha_{m-1} \end{vmatrix} \quad (\text{A.7})$$

É fácil verificar que $g(\lambda)$ é o polinômio característico de M .

Também é fácil verificar que

$$f_1(\lambda) = g(\lambda)$$

$$f_2(\lambda) = \dots = f_m(\lambda) = 1$$

M é denominada matriz companion do polinômio $g(\lambda)$.

Seja A uma matriz $n \times n$ com fatores invariantes

$$f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_k(\lambda), f_{k+1}(\lambda) = 1, \dots, f_n(\lambda) = 1$$

onde os polinômios

$$f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$$

têm graus positivos. Sejam M_1, M_2, \dots, M_t , as matrizes companion correspondentes a estes polinômios.

A forma canônica racional de A é dada por:

$$\oplus M = \left| \begin{array}{cccc} M_1 & 0 \dots \dots \dots 0 & & \\ 0 & M_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots \dots \dots \dots & & M_t \end{array} \right| \quad (\text{A.8})$$

É fácil verificar que os fatores invariantes de A e de $\oplus M$ são os mesmos e, portanto, usando o teorema 1.9, segue que A e $\oplus M$ são similares ($\oplus M = T^{-1} A T$).

3. - MÉTODO DE CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE SIMILARIDADE

Seja A uma matriz quadrada $n \times n$. Veremos agora, como obter uma matriz de similaridade T, tal que:

$$\oplus M = T^{-1} A T \quad (\text{A.9})$$

De acordo com o teorema 1.11, podemos escolher como matriz de similaridade

$$T = Q(\oplus M) \quad (\text{A.10})$$

onde

$$\lambda I - \oplus M = P(\lambda) (\lambda I - A) Q(\lambda) \quad (\text{A.11})$$

Para determinarmos $Q(\lambda)$, transformamos $(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - \oplus M)$ em $F(\lambda)$ (veja teorema 1.4). Assim:

$$F(\lambda) = P_1(\lambda) (\lambda I - A) Q_1(\lambda)$$

$$F(\lambda) = P_2(\lambda) (\lambda I - \oplus M) Q_2(\lambda) \quad (\text{A.12})$$

onde

$$Q_1(\lambda) = T_1 T_2, \dots, T_{P_1}$$

$$Q_2(\lambda) = T_1^*, T_2^*, \dots, T_{P_2}^* \quad (\text{A.13})$$

e onde $T_1, T_2, \dots, T_{p_1}, T_1^*, \dots, T_{p_2}^*$ são matrizes elementares correspondentes às operações elementares de colunas nas matrizes $(\lambda I - A)$ e $(\lambda I - \oplus M)$.

De (A.12) e (A.13), vem:

$$Q(\lambda) = Q_1(\lambda) Q_2^{-1}(\lambda) = T_1 T_2 \dots T_{p_1} T_{p_2}^{*-1} \dots T_2^{*-1} T_1^{*-1} \quad (\text{A.14})$$

Finalmente, de acordo com (A.10), basta substituir λ em (A.14) por $\oplus M$ para se obter a matriz de similaridade.

OBSERVAÇÃO : Deve-se notar que a matriz de similaridade T não é única, pois sua forma geral é:

$$T = U T_1 \quad (\text{A.15})$$

onde

T_1 é uma das matrizes de similaridade

U é permutável com A , ou seja, $UA = AU$.

B I B L I O G R A F I A

1. - GANTMACHER, F.R., The Theory of Matrices , Chelsea Publising Company, New York, 1960.
2. - GILL, A., "Linear Modular Systems", System Theory, Zadeh, L.A., and Polak, E., editôres, McGraw-Hill, New York, p.179-231, 1969.
3. - KERSCHBERG, L., An Algebraic approach to Linear and Multilinear Systems Theory, tese de doutorado, Case Western Reserve University, 1969.
4. - GILBERT, E.G., "The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback", SIAM Journal of Control, vol.7, nº 1, Feb. 1969.
5. - FALB, P.L., WOLOVICH, W.A., "Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-12, nº 6, Dec. 1967.
6. - WOLOVICH, W.A., FALB, P.L., "On the Structure of Multivariable Systems", SIAM Journal of Control, vol.7, nº 3, Aug. 1969.
7. - GILBERT, E.G., PIVNICHNY, J.R., "A Computer Program for the Synthesis of Decoupled Multivariable Feedback Systems", Preprints , JACC (Boulder, Colorado, 1969), p.677-684.
8. - VOGT, W.G., CULLEN, C.G., "The Mininum Number of Inputs Required for the Complete Controllability of a Linear Stationary Dynamical System", IEEE Transactions on Automatic Control, June 1967.

9. - GILBERT, E.G., "Controllability and Observability in Multivariable Control Systems", SIAM Journal of Control, Ser. A, vol. 2, n^o 1, 1963.