



## AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS COM APLICAÇÕES A SISTEMAS BIOLÓGICOS

Kátia Kelvis Cassiano Lozano

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Rio de Janeiro

Março de 2017

AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS COM APLICAÇÕES A  
SISTEMAS BIOLÓGICOS

Kátia Kelvis Cassiano Lozano

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

---

Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.

---

Profa. Priscila Machado Vieira Lima, Ph.D.

---

Prof. Luís Alfredo Vidal de Carvalho, D.Sc.

---

Profa. Lúcia Maria de Assumpção Drummond, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2017

Lozano, Kátia Kelvis Cassiano

Autômatos Celulares Probabilísticos com Aplicações a Sistemas Biológicos/ Kátia Kelvis Cassiano Lozano. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XIII, 143 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 127-130.

1. Autômatos Celulares. 2. Ganho de Informação. 3. Sistemas Complexos. 4. Informação Integrada. I. Barbosa, Valmir Carneiro. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

## **Agradecimentos**

“Gratidão é devolver o que recebeu com honra, amor e bom ânimo” (Aislan Dlano).

Não foi fácil, pensei em desistir várias vezes, mas agora só me resta agradecer àqueles que, com honra, amor e bom ânimo, contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Primeiramente a Deus e à Maria, rainha intercessora, por me acalmar nas horas de angústia e manter minha saúde e sanidade.

À minha fonte de amor e fé, minha mãe Iva Eterna, por me dar colo sempre que precisei e torcer pelo meu sucesso, pelas incansáveis e efetivas orações. Pelas mensagens de ânimo nas madrugadas.

Ao meu esposo Carlos Ortiz, por entrar comigo nesta longa e árdua caminhada, por cuidar de mim e estar sempre do meu lado torcendo para que eu conseguisse finalizar mais este desafio e assim fazer jus àquela frase que diz “Sonho que se sonha só é apenas um sonho; sonho que se sonha junto é realidade”.

À minha filha Ana Clara, que chegou no meio deste turbilhão mas encheu de luz esta caminhada. Por ela e com ela, tudo se tornou possível. Por cada sorriso e beijo dedicados, pelo amor incondicional. Pela pureza e doçura que me encorajaram a seguir em frente quando tudo parecia não fazer sentido.

Aos meus irmãos e irmãs, que mesmo sem entender o porquê, aceitaram minha ausência e torceram por este momento. Especialmente, agradeço a Greice Carla e Kênia Cristina por cuidarem da nossa princesinha nas diversas vezes que precisei me ausentar.

Eterna e sincera gratidão ao meu orientador Valmir Carneiro Barbosa, um ser especial cujos ensinamentos ultrapassam o domínio de conhecimento para este trabalho. Uma vez, bem no meio do percurso, no auge da minha exaustão e repleta de incertezas, ele me ensinou: “Você não sabe o que está no final da curva, pode ser exatamente o contrário do que você está pensando. Continue, não pare!”. E não posso deixar de ressaltar

o alto nível de orientação que recebi desde o primeiro dia que conversamos. Um orientador exemplar, que estuda contigo, que mostra o caminho, que pega na sua mão e não te permite esmorecer. Muito obrigada pelo modo brilhante de me conduzir até aqui.

Ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, tão bem representado pelos professores e funcionários, por manter um alto nível de conhecimento a seus alunos.

Aos membros da banca de qualificação, professores Felipe França e Priscila Machado, pelas críticas e contribuições naquela ocasião.

A todos aqueles que direta e indiretamente me acompanharam nesta, que talvez tenha sido uma das competições mais difíceis da minha vida e que, felizmente, tive a oportunidade de finalizar.

Enfim, missão cumprida. Agradeço a todos pelo apoio e até a próxima linha de chegada!

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS COM APLICAÇÕES A SISTEMAS BIOLÓGICOS

Kátia Kelvis Cassiano Lozano

Março/2017

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Sistemas biológicos são complexos e sua compreensão requer o entendimento das interações entre os componentes individuais e das propriedades emergentes. Esses sistemas são altamente adaptativos, dinâmicos e evoluem ao longo do tempo por meio do processamento da informação. O objetivo deste trabalho é identificar modelos que possam ser aplicados a sistemas biológicos. Em especial, foram considerados autômatos celulares binários unidimensionais e regras elementares. Na evolução do autômato foi introduzida incerteza no nível celular, de forma que cada célula tem a possibilidade de desobedecer a regra em uso e alterar seu estado de forma distinta daquela determinada pela regra. A análise dos resultados sugere que, ao tentar reduzir a incerteza que emerge das interações, os componentes do sistema geram informação e, muitas vezes, há informação adicional criada pela forma como eles interagem entre si. Esses resultados podem ser utilizados, metaforicamente, na representação de processos biológicos complexos, tais como a resposta imune (sistema imunitário) e o aparecimento de estados conscientes (sistema neuronal).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

PROBABILISTIC CELLULAR AUTOMATA WITH APPLICATIONS TO  
BIOLOGICAL SYSTEMS

Kátia Kelvis Cassiano Lozano

March/2017

Advisor: Valmir Carneiro Barbosa

Department: Systems Engineering and Computer Science

Biological systems are complex and their comprehension requires understanding the interactions between the individual components as well as emergent properties. Such systems are highly adaptive, dynamical, and evolve in time by processing information. The goal of the present work is to identify models that can be applied to biological systems. In particular, we have considered binary one-dimensional cellular automata under elementary rules, and have introduced a probability parameter aimed to alter an automaton's evolution in time in such a way as to allow each cell to occasionally disobey the rule in use. The results obtained suggest that, while trying to reduce the uncertainty that emerges from the interactions between cells, the system's components generate information, often giving rise to the appearance of surplus information resulting from the manner of their interactions. They also suggest the metaphorical use of cellular automata in the representation of complex biological processes, such as the immune response (by the immune system) and the rise of conscious states (in the neuronal system).

# SUMÁRIO

Índice de Figuras .....	x
Índice de Tabelas .....	xii
1. Introdução .....	1
1.1 Objetivo Geral .....	4
1.2 Objetivos Específicos .....	4
1.3 Estrutura da Tese .....	5
2. Revisão Bibliográfica.....	6
3. Fundamentação Teórica .....	9
3.1 Sistemas Complexos .....	9
3.2 Autômatos Celulares.....	11
3.3 Autômatos Celulares Probabilísticos .....	18
3.4 Cadeia de Markov .....	19
3.5 Informação Integrada.....	22
4. Definição do Modelo .....	24
4.1 Variáveis em Função do Cálculo de Probabilidades .....	26
5. Metodologia .....	33
5.1 Representação da Computação de Estados .....	34
5.2 Representação da Integração da Informação .....	35
6. Resultados e Discussão Geral .....	37
6.1 Análise da Distribuição de Probabilidades .....	42
6.2 Ganho de Informação .....	44
7. Análise Qualitativa x Análise Quantitativa.....	54
7.1 Regras da Classe 1 .....	55
7.2 Regras da Classe 2 .....	62
7.3 Regras da Classe 3 .....	97



7.4 Regras da Classe 4 .....	116
8. Considerações Finais .....	123
Referências Bibliográficas .....	127

## Índice de Figuras

Figura 1. Representação gráfica de um autômato celular.....	11
Figura 2. Definição da Regra de Transição de Estados (#30).....	13
Figura 3. Evolução do autômato celular elementar segundo a regra de transição 30, do estado global 01011 ao estado global 00010 em 3 passos de tempo.....	13
Figura 4. Bacia de Atratores: estrutura e denominação dos estados globais.....	14
Figura 5. Padrão espaço-temporal e <i>bacia</i> de atratores da regra 253 (classe 1) para $n=10$ .....	16
Figura 6. Padrão espaço-temporal e <i>bacia</i> de atratores da regra 51 (classe 2) para $n=10$ .....	16
Figura 7. Padrão espaço-temporal e <i>bacia</i> de atratores da regra 90 (classe 3) para $n=8$ .....	16
Figura 8. Padrão espaço-temporal e <i>bacia</i> de atratores da regra 193 (classe 4) para $n=10$ .....	17
Figura 9. Bacias típicas do campo de atratores da regra 193.....	17
Figura 10. Padrão espaço-temporal das regras 193 e sua equivalente regra 137.....	18
Figura 11. Padrão espaço-temporal das regras 110 e sua equivalente regra 124.....	18
Figura 12. Evolução determinística e probabilística do autômato.....	25
Figura 13. Dinâmica de evolução probabilística resultando em trajetórias distintas e aleatórias.....	25
Figura 14. Evolução determinística e probabilística a partir do estado inicial $i$ .....	26
Figura 15. Regra 251 (a-c) e regra 253 (d-f), $n = 150$ , condição inicial canônica.....	57
Figura 16. Regras 251 (a-c) e 253 (d-f), $n = 151$ , condição inicial canônica.....	58
Figura 17. Regra 248, $n = 150$ , condição inicial canônica (a-c) e $n = 151$ , condição inicial aleatória (d-f).....	61
Figura 18. Regra 15 (a-c) e regra 240 (d-f), $n = 150$ condição inicial canônica.....	64
Figura 19. Regra 51 (a-c) e regra 204 (d-f) $n = 150$ condição inicial canônica.....	65
Figura 20. Regra 15 (a-c) e regra 240 (d-f), $n = 151$ condição inicial aleatória.....	66
Figura 21. Regra 51 (a-c) e regra 204 (d-f) $n = 151$ condição inicial aleatória.....	67
Figura 22. Regra 12, $n = 150$ , condição inicial canônica (a-c) e $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f).....	70
Figura 23. Regra 29, $n = 151$ , condição inicial canônica (a-c) e $n = 151$ , condição inicial aleatória (d-f).....	71
Figura 24. Regra 38, $n = 151$ , condição inicial canônica e $n = 151$ condição inicial aleatória (d-f).....	72
Figura 25. Regra 57, $n = 150$ condição inicial canônica.....	74
Figura 26. Regra 57, $n = 151$ , condição inicial canônica.....	75
Figura 27. Regra 57, $n = 150$ , condição inicial aleatória.....	76
Figura 28. Regra 214, $n = 150$ , condição inicial canônica.....	77
Figura 29. Regra 214, $n = 150$ , condição inicial aleatória.....	78

Figura 30. Regra 222, $n = 150$ , condição inicial canônica .....	79
Figura 31. Regra 222, $n = 150$ , condição inicial aleatória.....	80
Figura 32. Regra 210, $n = 150$ e condição inicial canônica .....	82
Figura 33. Regra 210, $n = 151$ e condição inicial canônica .....	83
Figura 34. Regra 210, $n = 150$ , condição inicial aleatória.....	84
Figura 35. Regra 226, $n = 151$ , condição inicial canônica .....	85
Figura 36. Regra 243, $n = 150$ , condição inicial canônica .....	86
Figura 37. Regra 243 $n = 151$ , condição inicial aleatória.....	87
Figura 38. Regra 29, $n = 150$ condição inicial canônica (a-c) e Regra 19, $n = 150$ , condição inicial canônica (d-f) .....	90
Figura 39. Regra 23 $n = 151$ , condição inicial aleatória.....	91
Figura 40. Regra 232, $n = 151$ condição inicial aleatória.....	92
Figura 41. Regra 178 $n = 150$ , condição inicial aleatória e Regra 198 $n = 150$ , condição inicial aleatória .....	93
Figura 42. Regra 218 $n = 150$ , condição inicial aleatória (a-c) e Regra 233 $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f).....	94
Figura 43. Regra 236 $n = 150$ , condição inicial aleatória (a-c) e Regra 237 $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f).....	95
Figura 44. Regra 30 $n = 150$ , condição inicial aleatória (a-c) e Regra 45 $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f).....	97
Figura 45. Regra 18 $n = 150$ , condição inicial canônica .....	99
Figura 46. Regra 18 $n = 151$ , condição inicial canônica .....	100
Figura 47. Regra 161 $n = 150$ , condição inicial aleatória.....	101
Figura 48. Regra 161 $n = 151$ , condição inicial aleatória.....	102
Figura 49. Regra 182 $n = 151$ , condição inicial canônica .....	103
Figura 50. Regra 182 $n = 151$ , condição inicial aleatória.....	104
Figura 51. Regra 60, $n = 150$ , condição inicial canônica .....	106
Figura 52. Regra 90, $n = 151$ condição inicial canônica .....	107
Figura 53. Regra 105, $n = 150$ condição inicial canônica .....	109
Figura 54. Regra 105 $n = 151$ , condição inicial canônica .....	110
Figura 55. Regra 105 $n = 151$ , condição inicial aleatória.....	111
Figura 56. Regra 150 $n = 150$ , condição inicial canônica .....	112
Figura 57. Regra 150, $n = 151$ condição inicial canônica .....	113
Figura 58. Regra 73 $n = 150$ condição inicial canônica .....	114
Figura 59. Regra 73 $n = 150$ condição inicial aleatória.....	115
Figura 60. Regra 193 $n = 150$ condição inicial canônica .....	117

Figura 61. Regra 193, $n = 150$ condição inicial aleatória.....	118
Figura 62. Regra 193 $n = 151$ condição inicial canônica .....	119
Figura 63. Regra 193, $n = 151$ condição inicial aleatória.....	120
Figura 64. Regra 225 $n = 150$ , condição inicial canônica .....	121
Figura 65. Regra 225 $n = 150$ , condição inicial aleatória.....	122

## Índice de Tabelas

Tabela 1. Distâncias Hellinger .....	37
Tabela 2. Média e desvio padrão (I: $p=0,001$ ; II: $p=0.01$ ) .....	40
Tabela 3. Ganho de informação e razão de correlação total para $n=11$ .....	45
Tabela 4. Ganho de informação e razão de correlação total para $n=12$ .....	47
Tabela 5. Características das bacias de atratores de cada regra .....	62

# 1. INTRODUÇÃO

A compreensão dos processos associados aos sistemas biológicos não é trivial pelo fato de os mesmos não serem regidos por leis do campo das ciências exatas. Não é possível atribuir regras precisas para o comportamento celular, por exemplo, tampouco para a forma como as células interagem entre si.

Sistemas biológicos são sistemas complexos, compostos por inúmeros elementos que interagem de modo que o comportamento agregado não possa ser inferido do comportamento das unidades constituintes isoladamente (BRESCIANNI, 2000). A mais importante característica de um sistema complexo é provavelmente o fato de o mesmo apresentar propriedades emergentes.

Uma propriedade emergente é um comportamento do sistema não facilmente expressivo em baixa escala. Trata-se de uma propriedade resultante das interações não lineares entre os componentes do sistema.

Como exemplo, pode ser citada a formação de organismos multicelulares a partir da evolução de uma simples célula. A vida é uma propriedade que emerge da interação celular, envolvendo comunicação, troca de informações, aprendizado e especialização (FISHER *et al.*, 2011).

A organização dos seres vivos é um processo movido pelo acaso, de forma que a ordem é criada a partir da desordem (ATLAN, 1992). As propriedades dos sistemas auto-organizáveis incluem a desordem e o aleatório. Em seu livro “*Entre o cristal e a fumaça: ensaio sobre a organização do ser vivo*”, Atlan afirma que, na vida, o erro tem um papel organizacional, sendo empregado como inventividade nos processos de vida e na auto-organização: a vida está entre a fumaça (caos/ desordem/ erros) e o cristal (organização).

Sistemas biológicos são também adaptativos, reagindo a perturbações nos ambientes interno e externo, aprendendo de forma contínua e refinando o seu comportamento ao longo do tempo (FISHER *et al.*, 2011).

A adaptabilidade e reatividade são importantes características dos sistemas biológicos e despertam outros aspectos de interesse de estudo, a saber: concorrência, excitabilidade, interação, informação integrada e complexidade.

O estudo das propriedades emergentes nos sistemas complexos possibilita a compreensão de seu comportamento global e da forma pela qual os componentes individuais se interagem para formar o todo.

Entender o comportamento de sistemas complexos envolve, portanto, a compreensão do padrão típico de estruturação, das propriedades similares que independem da escala de observação, e da dinâmica temporal predominantemente não-linear, sensível a variações externas e cuja previsibilidade de longo alcance é mais improvável (SOUZA e BUCKERIDGE, 2004).

Como a complexidade emerge por meio da evolução? Por que existem formas de vida complexa ao invés (ou justamente por causa) de simples células que se replicam?

A imagem de um organismo complexo como um sistema desenvolvendo computações e sendo capaz de lidar como as mudanças ambientais é o núcleo do problema de como a complexidade emerge. Um dos problemas-chaves é a compreensão de como a informação é integrada e como isso dispara a emergência de uma computação.

Composto por elementos de diferentes escalas (órgãos, células, moléculas), o sistema imunitário por exemplo, é um dos maiores sistemas regulatórios do corpo provendo a defesa contra organismos patogênicos, vírus e bactérias, identificando-os e esforçando-se na tentativa de eliminar células com comportamentos anormais antes que se estabeleçam tumores e realizando a restauração de tecidos.

A resposta imune, bem como a participação do sistema na manutenção do organismo como um todo, são produtos dos processos de aprendizado e auto-organização. O sistema imunitário é capaz de recriar-se ao longo do tempo e isso é possível por meio de hipermutação somática, um processo que provê a diversidade no nível celular (ODEGARD e SCHATZ, 2006).

Sob este ponto de vista, é correto dizer que a auto-organização do sistema imunitário é um processo que procede do nível mais baixo, iniciando com interações locais em nível molecular, que geram desordem no sistema, e a imunidade resultante é, portanto, um processo sistêmico.

Estados do organismo vivo são termos macroscópicos relacionados ao nível de desordem (entropia) do sistema imunitário, de forma que o estado de saúde relaciona-se à baixa entropia. De forma análoga, no córtex cerebral a entropia também explica o estado de consciência, sendo a entropia média o estado de maior consciência, enquanto a entropia

baixa relaciona-se ao estado de depressão alastrante, morte cerebral e epilepsia e a entropia alta relaciona-se a alucinações e tetania.

Cohen (2007), numa tentativa de conciliar as principais teorias explanatórias do sistema imunitário, apresenta uma visão que retrata a capacidade de “computar” os estados, alterando-os e valendo-se continuamente de adições aleatórias (erros) enquanto o sistema tanto atua quanto aprende.

No caso do córtex cerebral, a mais recente proposta teórica para explicar o aparecimento da experiência consciente apela para a teoria da integração da informação na tentativa de sumarizar consequências do processamento neuronal coletivo (Balduzzi & Tononi, 2008; Koch, 2012), por sua vez sujeito a aleatoriedades advindas de imprecisões e assincronismos.

Modelos computacionais são importantes para caracterização e compreensão de sistemas biológicos e, por meio da aplicação de ferramentas e técnicas, simplificam a descrição dos mesmos a partir da identificação das propriedades emergentes, relacionando as ações individuais com o estado global. A modelagem baseia-se, então, no pressuposto que as partes e o todo de um sistema se conectam e interagem continuamente.

Dentre as técnicas utilizadas para modelagem de sistemas complexos tem-se equações diferenciais, autômatos celulares, teoria de agentes e redes complexas. Apesar de todos os avanços computacionais, o que ainda não se compreende é muito vasto.

Wolfram (2001) descreve diversos modelos físicos e biológicos utilizando autômatos celulares. Classificações qualitativas, como as encontradas na biologia, e a descoberta de mecanismos complexos que emergem de diferentes sistemas, são tratados em sua obra a partir da análise computacional de formas puras e simples. De acordo com o autor o potencial dessa ferramenta é quase infinito, de forma que qualquer fenômeno complexo poderia ser traduzido em autômatos e regras.

Este trabalho utiliza autômatos celulares são utilizados para modelar dinâmicas populacionais em baixa escala e, a partir do entendimento de seu processo evolutivo, identificar possibilidades de o referido modelo representar sistemas complexos.



## 1.1 OBJETIVO GERAL

O presente trabalho teve como objetivo principal obter um modelo baseado em autômatos celulares, que fosse ao mesmo tempo simples e capaz de representar propriedades dos sistemas biológicos que emergem das interações locais.

Tendo como motivação as contribuições de Wolfram (2001), Cohen (2007) e Balduzzi e Tononi (2008), a referida tese parte da premissa de que, de fato, autômatos celulares são capazes de modelar qualquer fenômeno complexo e para validar o modelo proposto, duas propriedades emergentes foram tratadas: computação de estados no sistema imunitário e a integração da informação para formação da consciência no córtex cerebral.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar o comportamento de autômatos celulares probabilísticos, por meio das características dos padrões espaço-temporais e distribuição dos estados ao longo do tempo;
- Compreender as características do estado de equilíbrio do sistema em um futuro distante;
- Identificar a capacidade do sistema gerar informação a partir do conceito de entropia;
- Quantificar o ganho de informação que resulta das interações entre os componentes do sistema;
- Verificar como o modelo pode ser utilizado na representação da imunidade como uma propriedade emergente da computação contínua de estados do corpo e, para tal, foram propostas representações para a resposta imune a partir da relação entre a aleatoriedade e os níveis de entropia do sistema (nível microscópico), que resultam em diferentes estados (estados de boa saúde, estados de convalescência e estados de doença) em nível macroscópico;
- Avaliar o processamento da informação e verificar como o modelo pode ser utilizado na compreensão da experiência consciente a partir da emergência da informação integrada no córtex cerebral.

### 1.3 ESTRUTURA DA TESE

A tese encontra-se estruturada da seguinte forma:

Capítulo 2 apresenta o estado da arte da modelagem de sistemas complexos, referenciando trabalhos que utilizaram autômatos celulares;

Capítulo 3 apresenta o arcabouço teórico dos sistemas complexos, apresentando as principais características dos mesmos, bem como dos autômatos celulares probabilísticos;

Capítulo 4 apresenta o modelo proposto e as formulações matemáticas para definição de variáveis para análise do estado estacionário;

Capítulo 5 apresenta a metodologia adotada nas simulações para a obtenção dos dados utilizados na análise do modelo;

Capítulo 6 apresenta os resultados em favor de duas variáveis de interesse: nível de similaridade das distribuições de probabilidade no estado estacionário e ganho de informação;

Capítulo 7 apresenta análises qualitativa e quantitativa dos resultados, com discussão voltada para a identificação de características do modelo que possam representar as propriedades emergentes de computação dos estados e integração da informação.

Por fim, o Capítulo 8 apresenta as considerações finais dos resultados e de toda a análise realizada, confrontando-os com os objetivos do trabalho.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Autômatos celulares podem ser aplicados na modelagem e simulação de sistemas diversos, em diferentes formas de implementação. Nesta seção, serão apresentadas algumas aplicações desta ferramenta computacional na modelagem de sistemas biológicos.

Alves et al. (2003) utilizaram autômatos celulares probabilísticos (PCA) para investigar as limitações do poder preditivo de  $R_0$ , um parâmetro tradicionalmente utilizado no estudo da disseminação de epidemias. Apesar de sua importância no âmbito da epidemiologia, a formulação de  $R_0$  não considera o espalhamento da doença em uma população finita, tampouco envolve as interações complexas entre indivíduos suscetíveis e indivíduos imunes. Ou seja, a heterogeneidade inerente e a natureza probabilística das relações entre indivíduos tem sido negligenciada na abordagem tradicional que tem  $R_0$  como preditor. O modelo apresentado pelos autores assume que a probabilidade de indivíduos suscetíveis serem infectados é uma superposição de influências locais e globais. Tomando como configuração inicial apenas um indivíduo infectado em uma população totalmente suscetível, condição frequentemente utilizada para definir  $R_0$ , o trabalho demonstrou que para um sistema discreto finito (no tempo e no espaço), o poder preditivo pretensioso de  $R_0$  é significativamente reduzido. O resultado permite concluir, portanto, que  $R_0$  é uma ferramenta preditiva incompleta pois qualquer epidemia tem uma probabilidade de se estabelecer, dado a natureza estocástica inerente a qualquer sistema finito. Nesse contexto, a abordagem apresentada naquele trabalho é uma proposta efetiva para investigar a propagação de epidemias em uma população, o que poderá facilitar a análise de diferentes cenários epidêmicos, considerando toda a dinâmica evolucionária de agentes patogênicos.

Balduzzi e Tononi (2008) desenvolveram um framework para identificar e medir a informação integrada em sistemas discretos, cujos elementos evoluem ao longo do tempo. O framework permite realizar previsões acerca dos relacionamentos das partes para gerar informação. O trabalho demonstrou que a informação integrada é uma propriedade gerada pelo sistema, dependente do seu estado corrente e é maior quando existe um equilíbrio entre o número de elementos ativos e inativos no sistema. Os autores verificaram que quando o sistema está completamente inativo ou hiperativo, há pouca informação integrada. Ainda, comprovaram que a informação integrada pode diferir em sistemas com

dinâmicas similares, porque esta propriedade emerge da complexidade das interações entre os elementos e não da dinâmica em si.

Schulle et al. (2009) investigaram a capacidade computacional de autômatos celulares probabilísticos na classificação de entradas binárias. Trabalhos anteriores haviam concluído que não existiam autômatos celulares determinísticos com esta capacidade. Com relevância, Schulle et al. (2009) demonstraram que esta habilidade existe e está relacionada ao comportamento emergente apresentado na transição de fase.

Jiao e Torquato (2011) apresentaram um modelo baseado em autômatos celulares para simular o crescimento do tumor em um ambiente heterogêneo. O modelo incorpora uma variedade de interações de elementos de baixa escala, incluindo degradações dirigidas pelos gradientes de concentração de nutrientes nas células tumorais, o que conferiu ao modelo a capacidade de prever a dinâmica de crescimento e os comportamentos emergentes de tumores invasivos. Os resultados apresentados elucidam a importância de conhecer as propriedades do ambiente, uma vez que o mesmo pode afetar a morfologia e a dinâmica de crescimento do tumor, e sugere o uso de ferramentas desse tipo na área clínica para traçar estratégias de tratamento individualizado.

Chen et al. (2014) utilizaram autômatos celulares em um modelo computacional para o entendimento do fenômeno de dormência verificado no processo evolutivo de diversos tumores – período de tempo antes de o tumor crescer no qual o volume ou o número de células tumorais permanece em um nível muito baixo. O modelo utiliza regras que incorporam interações celulares e induzem uma competição entre o tumor e fatores de supressão do mesmo como, por exemplo, a resposta imune. O trabalho tem como foco a previsão de um comportamento emergente, no qual o autômato passa de um estado de dormência para um estado de proliferação. Os resultados apresentados mostraram que quando o número de células ativas na janela de proliferação do tumor atinge um certo nível crítico, embora ainda reduzido, o tumor dormente tem alta probabilidade de retomar o crescimento rápido (comportamento emergente). Ainda, demonstra que sob os fatores de supressão o tumor tem maior proliferação, se comparados àqueles tumores que crescem sem a presença desses fatores.

Diferentes abordagens tentam elucidar as características do sistema imunitário, tanto nível local quanto em nível geral. No primeiro escopo, tem-se as teorias da seleção clonal (BURNET, 1959) e para o segundo a teoria das redes idiotípicas (JERNE, 1974) (BEHN, 2007) (MADI et al., 2011), a qual se baseia na interação entre as regiões variáveis

dos anticorpos produzidos (idiotipo). Modelos do sistema imunitário tem abordado a evolução no tempo por meio de equações diferenciais (DOMANY e KINZEL, 1984), e por meio de abstrações de tempo discreto utilizando autômatos celulares (CHEN *et al.*, 2014) (JIAO e TORQUATO, 2011). Em geral, tais modelos apresentam informações qualitativas convincentes de como as diversas funções imunológicas surgem ou de como a rede idiotípica é organizada.

Uma recente perspectiva (COHEN, 2007) traz a ideia unificada da imunidade como computação, ou seja, a imunidade como um processo de computação de estados do corpo para a proteção efetiva, impulsionado pelo processo de aprendizado. Esta visão de computação contínua de estados do corpo requer novas abstrações sobre como os estados podem ser representados e manipulados, matematicamente ou computacionalmente, e uma vez que esta representação for identificada, deve-se considerar a possibilidade de eventos incertos tornarem o sistema inteiro tanto adaptativo como vulnerável.

### **3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Este capítulo apresenta o arcabouço teórico sobre sistemas complexos (Seção 3.1) e autômatos celulares probabilísticos (Seção 3.2), ferramenta computacional utilizada na construção dos modelos deste trabalho. Em seguida será apresentada a Cadeia de Markov – utilizada para análise da situação de equilíbrio do sistema (Seção 3.3).

#### **3.1 SISTEMAS COMPLEXOS**

A análise científica, em sua forma tradicional, escolhe o objeto de investigação e aplica um método para desvendar o funcionamento de suas partes. Portanto, as ciências clássicas isolam os objetos de pesquisa de seu ambiente e, por meio da análise de suas partes, obtém uma descrição do funcionamento do objeto como um todo (FENZI e MACHADO, 2002).

Durante muitos séculos, as ciências consideraram seus objetos de observação como unidimensionais, sujeitos exclusivamente às leis da mecânica clássica. No final do século XIX o espaço interno dos objetos passou a ser considerados e, devido à descoberta das moléculas e átomos os objetos passaram a ser tratados como bidimensionais.

Com o surgimento da termodinâmica estatística, considerou-se a possibilidade de determinar a dimensão macroscópica de um sistema por meio de parâmetros empíricos (como a temperatura, volume e pressão), enquanto os estados microscópicos podem ser descritos como probabilidade. Na década de 30 o conceito de sistema ganhou mais uma dimensão: o ambiente.

De fato, os sistemas biológicos, ecossistemas e a dinâmica das populações apresentam características que não podem ser deduzidas simplesmente a partir da análise de suas partes. É preciso explorar a relação entre as partes e a relação destas com o ambiente.

Um sistema complexo é um conjunto de partes, em diferentes escalas e níveis de organização, interligadas formando uma estrutura estável (HEYLIGHEN, 1988).

Os efeitos nem sempre são diretamente proporcionais às causas e pequenas perturbações podem causar: um grande efeito em todo o sistema (efeito borboleta), um efeito proporcional à perturbação ou nenhum efeito. Por exemplo, um acidente vascular cerebral de tamanho milimétrico pode causar a morte de um indivíduo, ou deixar sequelas

ou, ainda, passar despercebido. Processos que ocorrem no espaço interno do corpo de uma pessoa em segundos podem ter efeitos de longo prazo para o indivíduo e inclusive para muitos indivíduos do seu ambiente (FENZI, 2002).

Os sistemas complexos apresentam comportamentos emergentes, que se manifestam como resultado das interações entre as partes. Assim, a totalidade do sistema é maior que a soma de suas partes e o todo exhibe padrões e estruturas que surgem espontaneamente de suas partes. Por exemplo: andar, caminhar, dançar são comportamentos emergentes, pois nunca poderão ser compreendidos por meio do estudo isolado de suas partes. As partes são distintas mas interconectadas, não sendo possível analisar um sistema complexo por métodos reducionistas.

Um sistema complexo apresenta previsibilidade espacial e temporal, não sendo necessário conhecer todo o sistema para reconstruí-lo ou prever sua estrutura: o sistema é redundante. Assim, a complexidade é considerada particularmente por meio do conceito complexidade estrutural que é a quantidade de informação que o sistema armazena.

A evolução de sistemas complexos é marcada por um misto de ordem (muitas conexões, poucas ou nenhuma distinção no padrão comportamental) e desordem (muitas distinções no padrão comportamental e poucas conexões). É fato que algumas partes ou estruturas do sistema serão conservadas durante uma certa evolução de tempo enquanto que outras irão se modificar.

A auto-organização e a evolução são processos que tendem a ser vistos como resultado da dinâmica interna e da adaptação ao ambiente externo, respectivamente. O conceito de auto-organização é utilizado na criação de sistemas artificiais, como a simulação computacional de organismos e de sistemas de multi-agentes por meio de algoritmos genéticos (HEYLIGHEN, 1988).

A evolução gera complexidade pelo aumento de variedade (número de estruturas ou de estados distintos) e dependência (ajuste ou adaptação de um sistema ao outro). A desordem gera organização. O comportamento de um sistema auto-organizável revela-se como padrões espaciais e temporais - tais como caminhos, limites, ciclos e sucessões (HEYLIGHEN, 1988).

No caso de sistemas biológicos, pode-se dizer que entre a repetição e a simetria perfeita de um lado, e a imprevisibilidade completa, de outro, a natureza criou uma forma de organização, ainda largamente misteriosa, na qual substâncias, células e tecidos são continuamente renovados, mas a estabilidade do conjunto se mantém (ATLAN, 1992).

As definições qualitativas genéricas a respeito de sistemas complexos indicam que estes possuem elementos ativos com relações interativas com causalidade retroativa e recursiva, caracterizando interconexão, entrelaçamento e interdependência.

A complexidade emerge pelo surgimento de novos padrões organizacionais, pela adaptação da organização ao meio-ambiente, pela criação de nova organização e pela evolução da organização ao longo do tempo

Dessa forma, no estudo dos sistemas complexos, é importante considerar dois aspectos: a) como as partes do sistema desenvolvem computações e lidam com mudanças aleatórias e b) como a informação é integrada e como isso dispara a emergência de uma computação de estados.

### 3.2 AUTÔMATOS CELULARES

Um autômato celular (Figura 1) é um sistema discreto dinâmico que evolui sob regência de uma regra de transição de estados (WUENSCHÉ, 1992). Apesar de ser simples, de fácil implementação do ponto de vista matemático, o autômato celular suporta a modelagem de comportamentos complexos.

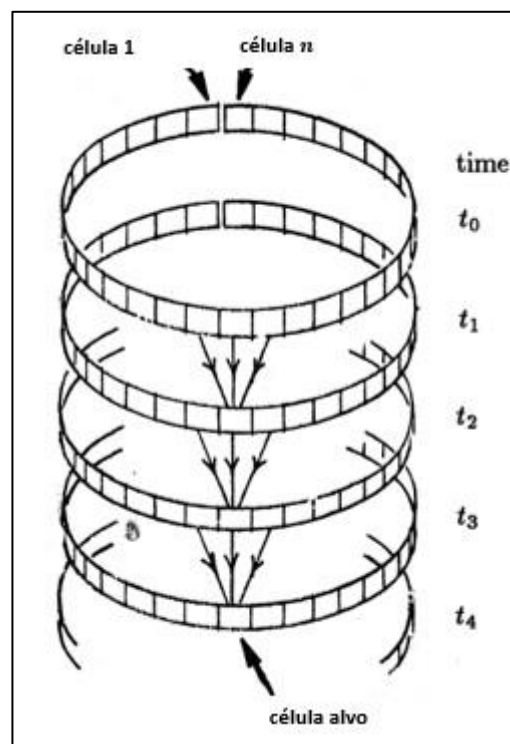


Figura 1. Representação gráfica de um autômato celular.



Um autômato celular é construído da seguinte forma: o tempo é discreto e a evolução ocorre em passos ( $t = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ ). Uma grade de determinada dimensão, potencialmente um espaço infinito, é particionada em células. O menor elemento de um autômato celular é, portanto, a célula ( $c$ ) que assume um valor, denominado estado local, dentre os possíveis de um conjunto finito de valores inteiros. O padrão de valores em toda a grade de dimensão (células de 1 a  $n$ ) é denominado estado global do autômato em um dado instante de tempo.

Com o objetivo de limitar o espaço de estados, uma condição de fronteira periódica é utilizada. Dessa forma, para um autômato de dimensão  $n$ , a célula 1 tem como vizinho à esquerda a célula  $n$  e a célula  $n$  tem a célula 1 como vizinho à direita. Ao longo do tempo, a arquitetura apresentada na Figura 1 é definida. O conjunto de todos os estados globais possíveis é denominado espaço de estados do autômato celular.

O autômato evolui de forma iterativa de um estado global para outro, por meio de uma regra de transição que atua localmente, ou seja, atualizando os estados das células em cada passo de tempo discreto (WOLFRAM, 1982). A atualização pode ser síncrona, se todas as células da configuração são atualizadas simultaneamente, ou assíncrona caso apenas uma célula é atualizada por iteração. O valor de uma determinada célula no próximo passo é função dos estados de um grupo de células denominado vizinhança ( $\delta$ ).

A regra de evolução pode ser representada como o conjunto de todas as saídas de uma tabela das vizinhanças possíveis. A Figura 2 apresenta um exemplo da definição de uma regra para um autômato celular elementar binário – aquele nos cada célula pode assumir apenas um de dois valores possíveis ( $c = \{0,1\}$ ) e o novo estado da célula alvo depende do seu próprio estado atual e dos estados atuais das células à esquerda e à direita ( $\delta=2$ ).

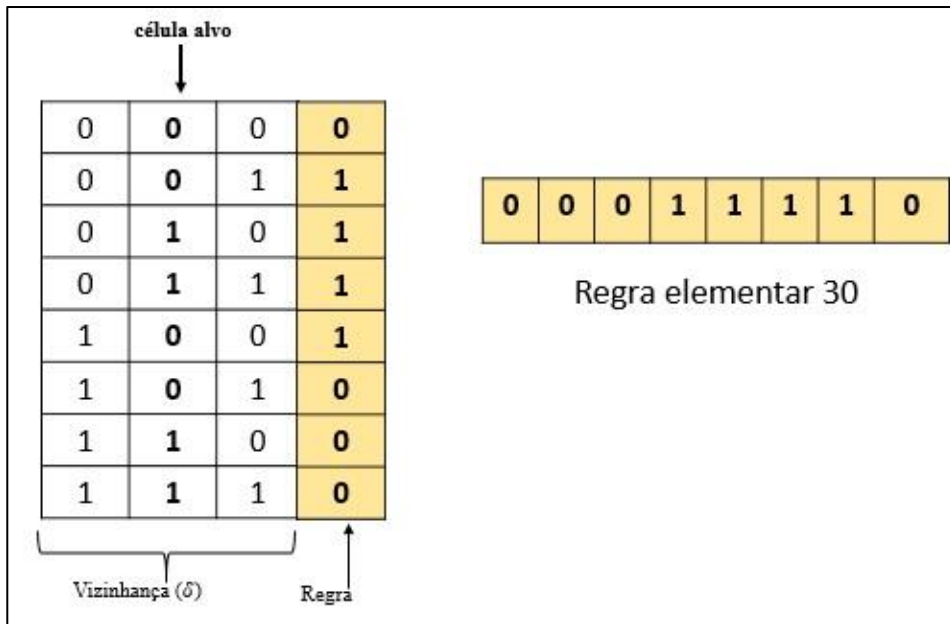


Figura 2. Definição da Regra de Transição de Estados (#30)

Uma regra de transição é referenciada pelo valor decimal correspondente ao conjunto formado pelas saídas da tabela equivalente (Figura 2b). Assim, para um autômato celular elementar, existem  $2^3$  entradas na tabela (vizinhos possíveis para uma determinada célula alvo) e para cada uma delas, há 2 saídas possíveis. Portanto, existem  $2^{2^3}$  regras elementares.

Considerando que um autômato elementar binário pode ser definido por meio da tupla  $AC(n, \text{espaço de estados}, \text{condição inicial}, \text{regra}, \text{condição de fronteira})$ , então a Figura 3 apresenta a evolução temporal para  $AC = \{5, \{0,1\}^n, 11,30, \text{periódica}\}$ .

As células cujos valores estão destacados correspondem à condição de fronteira.

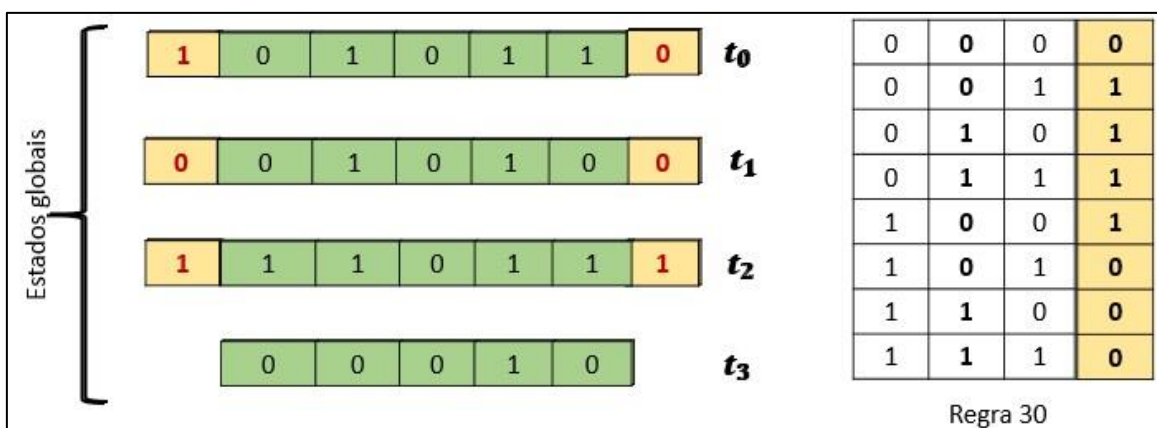


Figura 3. Evolução do autômato celular elementar segundo a regra de transição 30, do estado global 01011 ao estado global 00010 em 3 passos de tempo

Pelo fato de a evolução ser determinística, e o sistema é fechado a ruído, partindo de um estado qualquer do espaço de estados, uma trajetória única será definida até um conjunto de estados denominado ciclo atrator, no qual a evolução do autômato é perpetuamente confinada (WOLFRAM, 1982).

A estrutura definida pela trajetória é denominada árvore de transientes e o conjunto de trajetórias para um mesmo ciclo atrator define uma bacia de atratores, conforme apresentada na Figura 4.

Cada estado da bacia possui um único sucessor e pode ou não ter antecessores. Se o estado global não possui antecessor é denominado Garden-of-Eden – a evolução tem início a partir de um estado desse tipo. Os estados globais pertencentes à árvore de transientes no caminho que leva ao ciclo atrator são denominados transientes e os estados globais que pertencem ao ciclo atrator são denominados atratores.

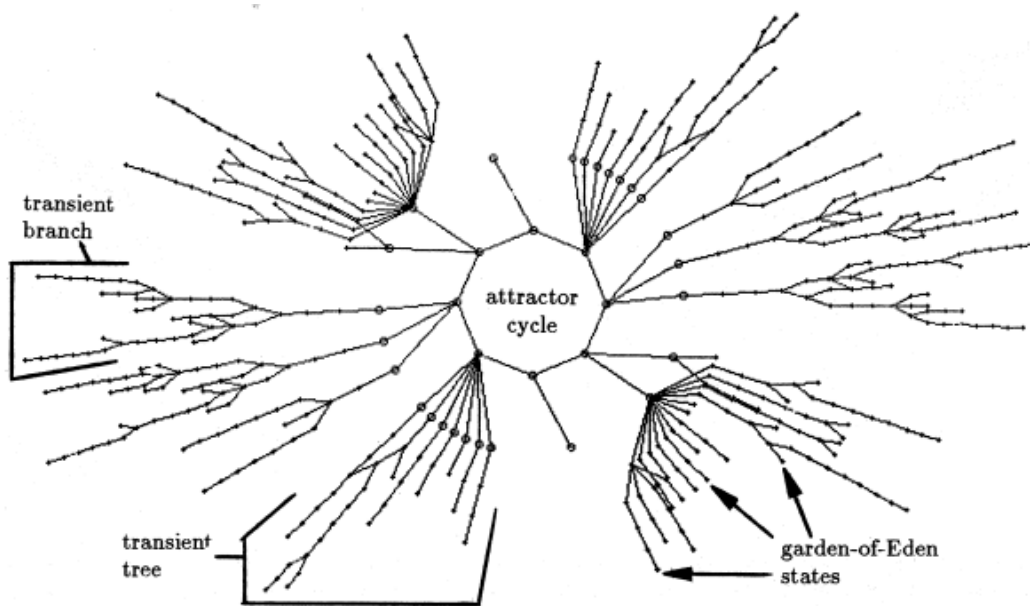


Figura 4. Bacia de Atratores: estrutura e denominação dos estados globais

Baseado nas características dos mapas espaço-temporais, Wolfram (1982) propôs uma classificação universal das regras, a saber:

- Classe 1: o estado global do autômato ao final da evolução é determinado com probabilidade 1 e independe do estado inicial. O comportamento do autômato é homogêneo, evoluindo para um ponto fixo (ciclo atrator contém um único estado) e em geral, gera no máximo duas *bacias* de atratores.

- Classe 2: o comportamento do autômato é denominado estável simples ou periódico. Os padrões gerados são constituídos por estruturas periódicas persistentes, com ciclos e transientes tipicamente curtos.
- Classe 3: o comportamento é caótico, não possuindo padrão reconhecível. A evolução é irregular. As regras pertencentes a essa classe possuem forte dependência das condições iniciais, apresentando grande instabilidade com relação a pequenas variações nos estados iniciais.
- Classe 4: o comportamento é complexo, gerando estruturas que evoluem imprevisivelmente. Logo, não é possível fazer previsões acerca da evolução, sendo o comportamento determinado apenas por meio de simulações. Wolfram considera a possibilidade de que as regras pertencentes a essa classe possam apresentar a propriedade de computação universal - configurações iniciais adequadas podem especificar procedimentos algorítmicos arbitrários, fazendo com que o sistema funcione como um computador para aplicações gerais, capaz de avaliar qualquer função computável.

Wolfram (1984) foi o primeiro a demonstrar que um autômato celular poderia exibir comportamento complexo mesmo com regras locais simples. Sua classificação demonstra que tais regras podem levar a uma espécie de auto-organização, o que contribui inicialmente para uma maior compreensão do fenômeno de formação espontânea de padrões.

As Figura 5, Figura 6, Figura 7 e Figura 8 apresentam à esquerda os padrões espaço-temporais (WOLFRAM, 2002) produzidos na evolução determinística ao longo do tempo a partir de um estado inicial aleatório e à direita uma das bacias do campo de atratores (WUENSCHÉ e LESSER, 1992) gerado pelas regras 253 (classe 1), 51 (classe 2), 90 (classe 3) e 193 (classe 4), respectivamente.

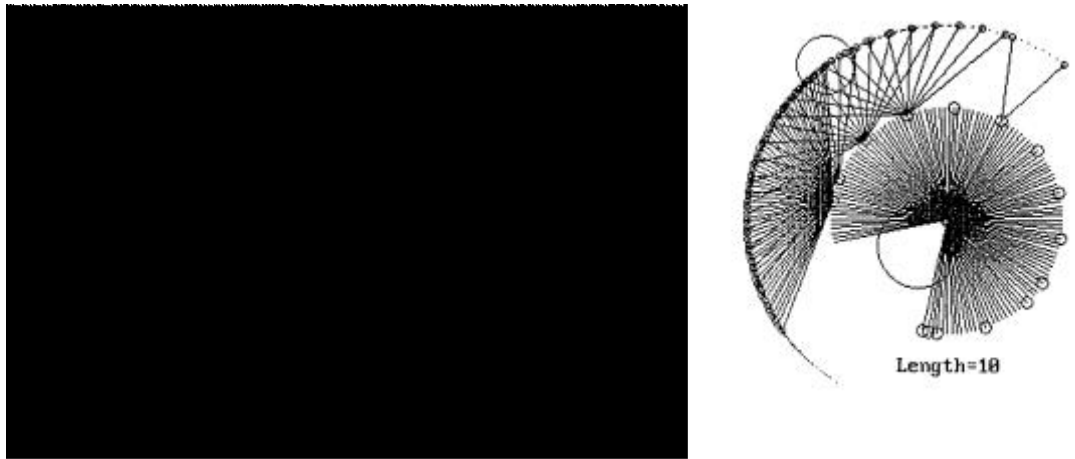


Figura 5. Padrão espaço-temporal e *bacia* de atratores da regra 253 (classe 1) para  $n=10$

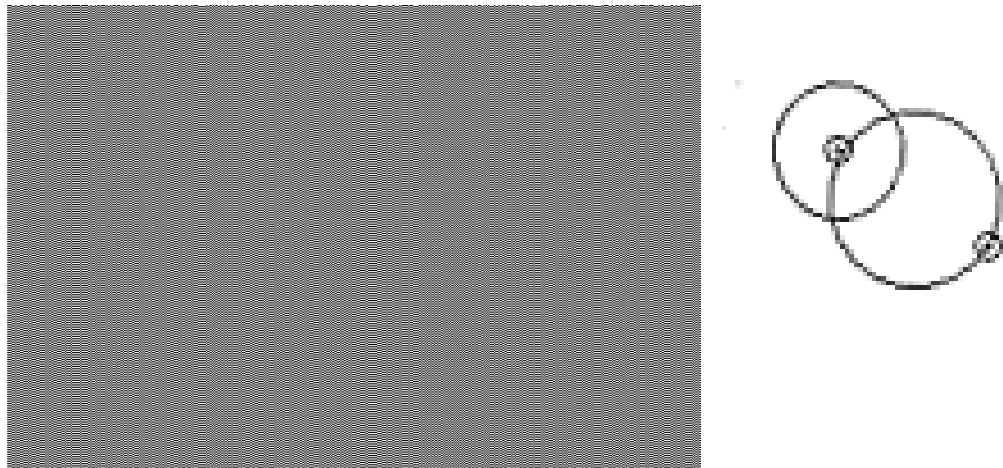


Figura 6. Padrão espaço-temporal e *bacia* de atratores da regra 51 (classe 2) para  $n=10$

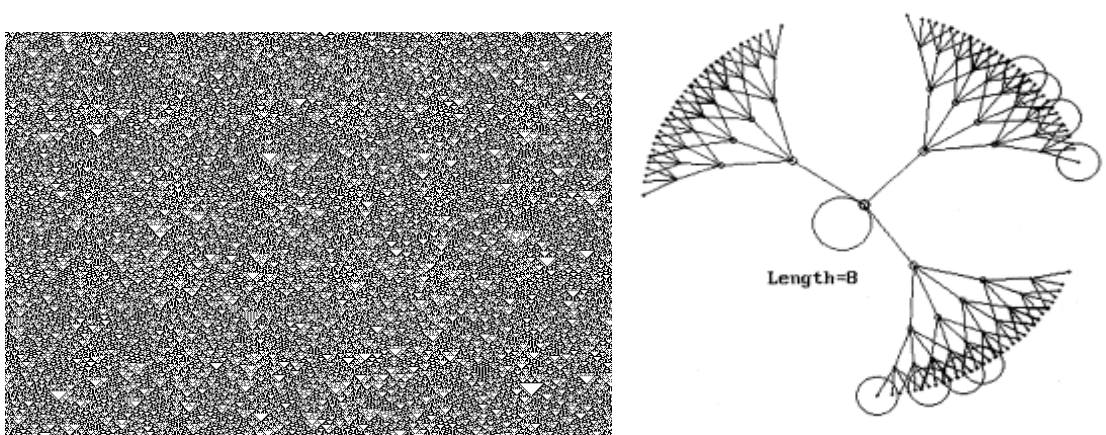


Figura 7. Padrão espaço-temporal e *bacia* de atratores da regra 90 (classe 3) para  $n=8$

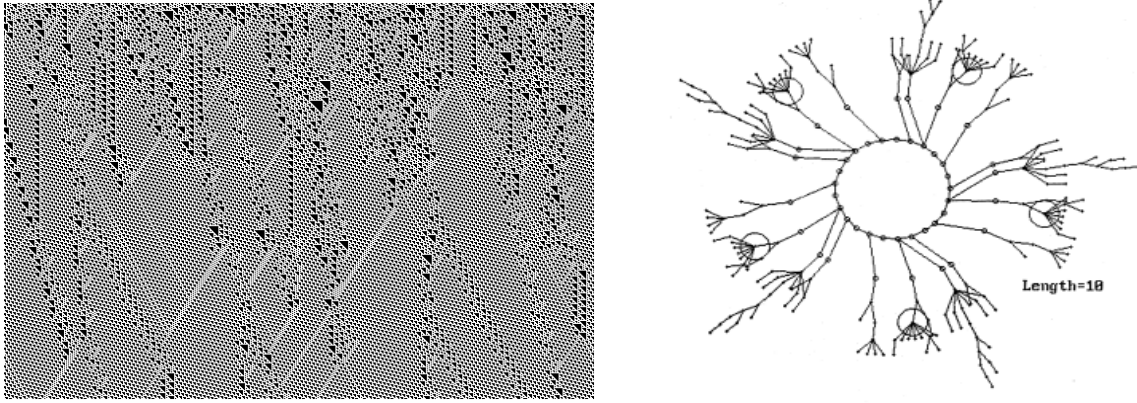


Figura 8. Padrão espaço-temporal e *bacia* de atratores da regra 193 (classe 4) para  $n=10$

O conjunto de todas as *bacias* de atratores geradas na evolução de um autômato é definido por  $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_m\}$ . Cada *bacia* é, portanto, um subconjunto do espaço de estados e caracteriza o comportamento global do sistema.

A Figura 9 apresenta os tipos de *bacias* de atratores geradas na evolução de um autômato celular definido para  $n = 10$ ,  $\delta = 2$  e regra de transição de estados 193.

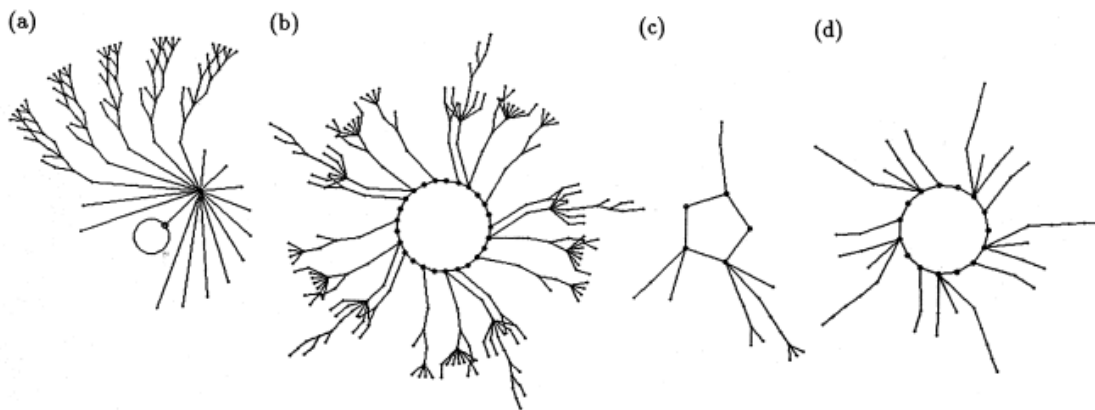


Figura 9. *Bacias* típicas do campo de atratores da regra 193

Para esta configuração o espaço de estados é particionado em 15 *bacias*, sendo uma do tipo (a), duas do tipo (b), dez do tipo (c) e duas do tipo (d).

Das 256 regras elementares da classificação de Wolfram, 88 são consideradas “únicas”, por apresentarem comportamento totalmente equivalente dado o fato de que todas as suas *bacias* de atratores são idênticas.

Wuensche e Lesser (1992) propuseram o agrupamento de regras equivalentes em *clusters*, segundo a similaridade de padrões espaço-temporais e mapas de *bacias* de atratores, e então o campo de estudo foi reduzido para 88 regras elementares.

Para uma determinada regra  $R$ , que tem o estado  $j$  como sucessor determinístico do estado  $i$ , diz-se que existe uma regra equivalente  $R'$  se, e somente se, esta regra define  $g(j)$

como sucessor de  $g(i)$ . A função  $g$  pode ser de negação ou reflexão (o estado da célula  $c$  no estado  $i$  é o mesmo que o estado da célula  $n - c + 1$  em  $g(i)$ ).

As Figura 10 e Figura 11 apresentam padrões espaço-temporais de regras equivalentes.

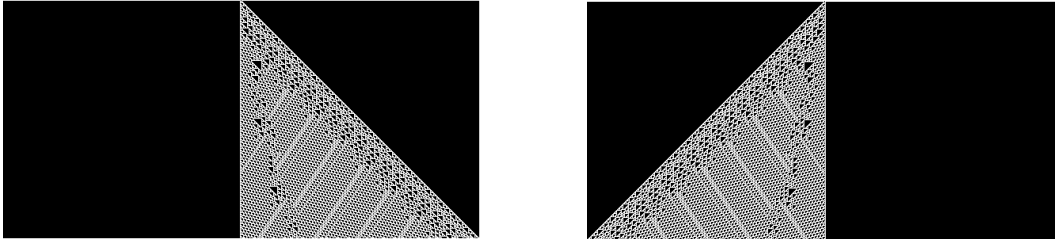


Figura 10. Padrão espaço-temporal das regras 193 e sua equivalente regra 137

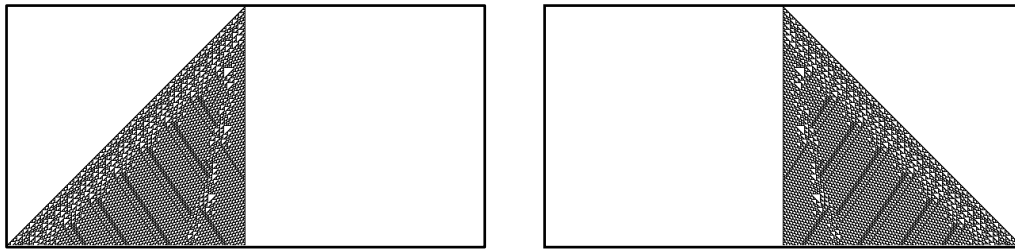


Figura 11. Padrão espaço-temporal das regra 110 e sua equivalente regra 124

O principal desafio para os modelos baseados em autômatos celulares é prever, com maior precisão, a configuração final do sistema a partir de uma configuração inicial arbitrária.

### 3.3 AUTÔMATOS CELULARES PROBABILÍSTICOS

Autômatos celulares probabilísticos (PCA's) são uma especialização de autômatos celulares com uma aleatoriedade embutida em algum nível da evolução, representando uma fonte de incerteza do processo evolutivo. Pode ser que a célula a ser atualizada seja escolhida ao acaso; pode ser que a própria regra de transição local envolva probabilidades na atualização de cada célula (AGAPIE *et al.*, 2014) ou, ainda, que a regra de transição seja escolhida ao acaso.

São sistemas descritos por um conjunto de variáveis discretas onde os estados de cada célula são atualizados de forma síncrona e que obedecem a regras probabilísticas, dependendo apenas do estado de seus vizinhos no instante corrente (FERREIRA, 2009).

Pelo fato de o estado corrente do autômato ser o único responsável pelo próximo estado global, a evolução de PCA's pode ser modelada por uma Cadeia de Markov homogênea finita, e o resultado final é a distribuição de probabilidades correspondente ao estado estacionário, obtida a longo prazo.

### 3.4 CADEIA DE MARKOV

Um processo estocástico é definido como uma coleção de variáveis aleatórias  $(X(t))$  indexadas por um parâmetro  $t$  tomado de um conjunto de inteiros não-negativos, de forma que  $X(t)$  é uma característica mensurável de interesse no tempo. Os valores assumidos pela variável  $X(t)$  são denominados estados e o conjunto de todos os estados possíveis é denominado Espaço de Estados do Processo.

Processos estocásticos nos quais  $X(t)$  é definida sobre um conjunto enumerável ou finito é classificado como Processo de Estado Discreto ou, simplesmente, Cadeia.

Um processo markoviano é um processo estocástico que se caracteriza pelo fato de a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado o evento passado e o estado presente, ser dependente somente do estado presente. Por isso, é dito que trata-se de um processo sem memória.

As probabilidades condicionais  $P\{X(t + 1) = j | X(t) = i\}$  representam a probabilidade do estado  $X(t + 1)$  ser igual a  $j$  no instante  $(t + 1)$ , dado que o estado atual  $X(t)$  é igual a  $i$  no instante  $(t)$  e são denominadas *probabilidades de transição* se para cada  $i$  e  $j$   $P\{X(t + 1) = j | X(t) = i\} = P\{X(1) = j | X(0) = i\}$ , para todo  $t=0,1,2,..$

Uma Cadeia de Markov é um processo markoviano cujas variáveis aleatórias  $X(t)$  são definidas no espaço de estados discretos e as probabilidades de transição de estados são estacionárias, ou seja, não alteram em relação ao tempo.

A probabilidade de transição de estado  $i$  para o estado  $j$  é usualmente denotada por  $p_{ij}$  e representa a probabilidade do processo que se encontra no estado  $i$  ser encontrado no estado  $j$  após um intervalo de tempo fixo, denominado passos.



Assim, para  $n$  passos à frente e para todo  $t=0,1,2,\dots$  temos que:

$$P\{X(t+n) = j | X(t) = i\} = P\{X(n) = j | X(0) = i\} \quad (1)$$

O que pode ser simplificado da seguinte forma:

$$p_{ij} = P\{X(1) = j | X(0) = i\} \quad (2)$$

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(n) = j | X(0) = i\} \quad (3)$$

Como consequência da notação acima:

$$p_{ij}^{(0)} = P\{X(0) = j | X(0) = i\} \quad (4)$$

$$\begin{cases} p_{ij}^{(0)} = 1, \text{ se } i = j \\ p_{ij}^{(0)} = 0, \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

$p_{ij}^{(n)}$  são probabilidades condicionais e precisam ser não negativas. Para que o processo possa realizar uma transição de um estado qualquer a outro, precisam ser satisfeitas as seguintes propriedades:

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \forall (i, j); n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

$$\sum_{j=0}^N p_{ij}^{(n)} = 1 \quad \forall i; n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Seja  $S$  o conjunto finito de estados e o par  $(i, j) \in S \times S$ . Se para cada par de estados  $(i, j)$  é associado um número real  $p_{ij}^{(n)}$  que satisfaça as seguintes condições:

$$\begin{cases} 0 \leq p_{ij}^{(n)} \leq 1, \forall (i, j) \in S \times S \\ \sum_{j \in S} p_{ij}^{(n)} = 1, \forall i \in S \end{cases} \quad (8)$$

Então pode ser definida a matriz  $P^{(n)}$  para representar todas as probabilidades de transição de passo  $n$ .  $P^{(n)}$  é denominada Matriz de Transição de Estados. Esta matriz é relacionada à distribuição de probabilidades inicial  $p(0)$  e ao vetor de probabilidades de estados para  $n$  passos, de forma que:

$$p(n) = p(0)P^{(n)} \quad (9)$$

Definindo a matriz de transição de estados como  $P$ , o vetor de probabilidades inicial como  $\pi^0$  e o vetor de probabilidades de estados para  $n$  passos como  $\pi^n$ , a Equação 9 pode ser reescrita como:

$$\pi^n = \pi^0 P \quad (10)$$

### 3.4.1 Classificação dos Estados Discretos

No que tange à classificação dos estados pertencentes a uma Cadeia de Markov, diz-se que o estado  $j$  é alcançável ou acessível a partir de um estado  $i$  se  $p_{ij}^{(n)} > 0$  para algum passo  $n \geq 0$ . Isso implica que é possível o sistema estar no estado  $j$  ao longo do tempo, tendo começado no estado  $i$ . No caso específico em que o estado  $i$  também é alcançável a partir do estado  $j$ , diz-se que eles são comunicantes e, portanto, pertencem à mesma classe. Uma Cadeia de Markov na qual todos os estados pertencem à uma única classe é denominada irredutível.

Se um estado  $j$  é alcançável a partir de um estado  $i$  ( $j \neq i$ ), mas eles não são comunicantes entre si, então  $i$  é um estado transiente – toda vez que o processo visita este estado existe uma probabilidade de que processo se mova para o estado  $j$  e nunca mais retorne. Ao contrário, um estado é recorrente se ele pode ser novamente visitado, ainda que não necessariamente no próximo passo.

Se o processo atinge um estado e o mantém num futuro distante, este estado é dito absorvente. Se o retorno a um determinado estado é possível somente em  $t, 2t, 3t, \dots$  passos, para  $t > 1$ , diz-se que o estado é periódico. Estados periódicos definem uma classe de propriedade recorrente e todos os estados nesta classe tem período  $t$ .

No entanto, se o retorno ao estado é assegurado dentro de um conjunto finito de passos, porém ele não é periódico, diz-se que o estado é ergódico.

### 3.4.2 Propriedades da Cadeia de Markov

Se a matriz de probabilidades de transição de estados  $P^{(n)}$  é ergódica e irredutível, ao longo do tempo os valores de seus elementos estabilizam e o processo torna-se independente da distribuição de probabilidade inicial  $p^{(0)}$ , ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ .

Os  $\pi_j$  são denominados Probabilidades de Estados Estacionários ou Propriedades de Equilíbrio (Steady-State) e apresentam as seguintes propriedades:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^N \pi_i p_{ij} \text{ para } j=1,2,3,\dots,N \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^N \pi_j = 1 \text{ para } j=1,2,3,\dots,N \quad (12)$$

### 3.5 INFORMAÇÃO INTEGRADA

Toda vez que um sistema atinge um estado particular  $x$  fora do seu repertório (o repertório é uma distribuição de probabilidade do grupo de possíveis estados de um sistema), é gerada informação (BALDUZZI e TONONI, 2008).

A informação gerada é função do repertório do sistema e de como a incerteza sobre o mesmo é reduzida após ter atingido o estado  $x$ . A redução da incerteza é realizada por interações entre os elementos do sistema, derivadas de mecanismos causais.

A dinâmica observada nos sistemas complexos é também determinada pelas interações com os diversos domínios, que podem inclusive alterar a informação armazenada e desencadear outros processos causais.

Uma forma de mensurar a quantidade de informação integrada em um determinado sistema é por meio da medida de sua entropia. Esta medida pode ser aplicada ao sistema em questão tanto no nível de seus componentes individuais quanto no nível dos estados globais do sistema.

Ambas as abordagens dependem de distribuições de probabilidades e estão inter-relacionadas. A informação é integrada por um sistema quando a soma de todas as entropias locais supera a entropia global do sistema. Este excesso implica que o sistema como um todo é capaz de gerar mais informação que todos os componentes individuais juntos – ganho de informação.

A emergência da informação não está relacionada à operação dos componentes do sistema, mas sim à maneira pela qual eles interagem. Devido a esta característica peculiar, a informação integrada tem sido objeto de estudo de diversos fenômenos tais como a consciência e o aprendizado (MUDRICK *et al.*, 2014) (KOCH, 2012) (ENCINAS e MARTIN DEL REY, 2007).

Neste trabalho a integração da informação foi estudada em uma abordagem determinística e probabilística, sendo analisado o ganho resultante a longo prazo - estado estacionário - da evolução dos autômatos celulares.

## 4. DEFINIÇÃO DO MODELO

No referido trabalho considerou-se autômatos celulares binários, ou seja, aqueles cujas células podem assumir um estado  $c \in \{0,1\}$ . Para um número finito de células ( $n$ ), o espaço de estados  $\{0,1\}^n$  possui  $2^n$  estados globais ou configurações.

A evolução ocorre de forma síncrona, ou seja, todas as células atualizam seus estados simultaneamente, a cada passo de seu tempo discreto, segundo uma regra de transição de estados. Cada regra define uma função de mapeamento  $f$  que relaciona dois estados do espaço de estados.

A regra considera o estado corrente da célula e de sua vizinhança  $\delta$ , sendo representada por uma tabela de saídas binárias indexadas por  $(\delta + 1)$  bits de entrada. O tamanho de cada regra é  $2^{\delta+1}$ , portanto, há  $2^{2^{\delta+1}}$  regras distintas.

Para o modelo foram utilizadas 88 regras elementares, sendo selecionada a regra de menor número no *cluster* – aquela que identifica o grupo.

Uma vez que duas regras são complementares quando, para uma mesma entrada, uma das regras produz saída  $b$  e a outra produz  $1 - b$  e dado que para  $p = 0$  o comportamento é determinístico para uma regra  $R$ , então  $p = 1$  induz o comportamento determinístico na regra complementar  $R'$ .

Isso também é verificado para outros valores de  $p > 0$ , não sendo necessário portanto analisar o comportamento das regras para  $p < 0,5$  e  $p > 0,5$ : o comportamento da regra  $R$  com parâmetro  $p > 0,5$  é o mesmo da regra  $R'$  com parâmetro  $(1 - p) < 0,5$ . Em face do exposto, utilizou-se no presente trabalho  $p < 0,5$ .

Ainda na definição do modelo considerou-se  $\delta=2$ , implicando que o estado da célula no próximo instante de tempo depende do seu estado atual e dos estados atuais de seus vizinhos à esquerda e à direita.

O autômato determinístico foi transformado em probabilístico por meio da introdução de incerteza na dinâmica de evolução (parâmetro  $p$ ), sendo este parâmetro associado à probabilidade de transição de estado: cada célula, independentemente das outras e a cada passo da evolução, pode se comportar diferentemente do previsto, desobedecendo a regra em uso com probabilidade  $p$ .

Em geral, os autômatos celulares probabilísticos não fazem menção a nenhuma regra, utilizando apenas uma função que fornece a probabilidade do próximo estado de

cada célula (0 ou 1). Neste trabalho, a mudança de estado probabilística é caracterizada como sendo uma desobediência à regra em uso (representando ruído, falha ou incerteza).

Neste quesito, portanto, o modelo é original pois cada célula decide, a cada passo, obedecer ou desobedecer a regra em uso.

A Figura 12 apresenta uma ilustração da evolução segundo o modelo proposto, a partir de um estado inicial  $i$  e a regra de evolução 30. Na Figura,  $k_i$  é o estado sucessor de  $i$  segundo a evolução determinística e  $j$  é um estado obtido a partir de  $i$ , considerando uma evolução probabilística onde algumas células desobedeceram a regra.

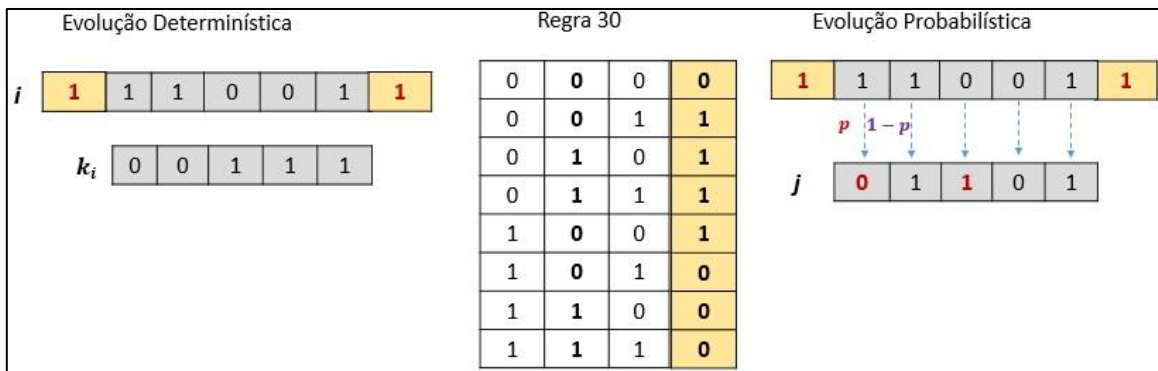


Figura 12. Evolução determinística e probabilística do autômato

Para garantir um grau de incerteza mesmo quando  $p = 0$ , o modelo prevê que o autômato evolua a partir de um estado inicial  $i_0 \in \{0,1\}^n$  escolhido ao acaso. Dessa forma, a evolução a longo prazo é sempre dotada de algum grau de incerteza.

A consequência direta do modelo proposto é que todo estado global  $j$  ( $j \in \{0,1\}^n$ ) é alcançável a partir de qualquer outro estado global  $i$  ( $i \in \{0,1\}^n$ ) com uma dada probabilidade de transição denominada  $p_{ij}$ , ou seja, a evolução ao longo do tempo descreve uma trajetória que não é única, conforme ilustrado na Figura 13.

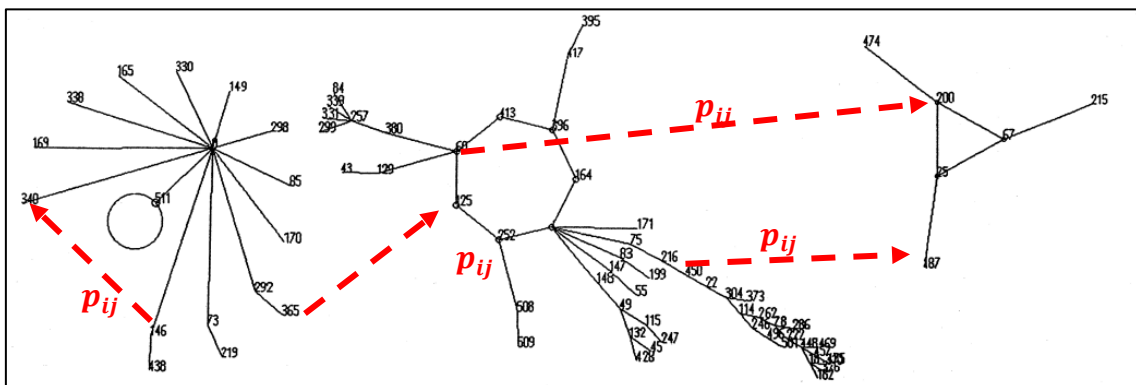


Figura 13. Dinâmica de evolução probabilística resultando em trajetórias distintas e aleatórias

Dessa forma, ao longo do tempo a evolução se processa por trajetórias distintas e pode ser que num futuro distante o sistema não esteja confinado em um ciclo atrator, dado o indeterminismo. Com uma certa probabilidade, uma vez iniciado no estado global  $i$ , no instante  $t_x$ , o estado global  $j$  é obtido ao invés de  $k_i$ , no instante  $t_{x+1}$ .

#### 4.1 VARIÁVEIS EM FUNÇÃO DO CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Dada a necessidade de quantificar eventos e prever o estado do autômato em um futuro distante (análise do estado estacionário do sistema), e dessa forma avaliar o comportamento global do sistema e suas características, algumas variáveis foram definidas em função do parâmetro  $p$ .

Para exemplificar, suponha a evolução determinística e probabilística a partir de um estado global apresentada na Figura 14.



Figura 14. Evolução determinística e probabilística a partir do estado inicial  $i$

Conforme pode ser observado na Figura 14, o estado global  $j$  resulta da desobediência de algumas células à regra em uso. A probabilidade de obter  $j$  ao invés de  $k_i$  (sucessor determinístico de  $i$ ) a partir do estado global  $i$  é dada por:

$$p_{ij} = p^{\#células\ que\ diferem\ entre\ j\ e\ k_i} \cdot (1 - p)^{\#células\ iguais\ entre\ j\ e\ k_i}$$

Devem ser consideradas as seguintes variáveis:

$(i, j) \in \{0,1\}^n$  dois estados globais quaisquer,

$D_{ij}$  a quantidade de células cujos estados diferem quando  $i$  e  $j$  são comparados (Distância *Hamming*) e

$\kappa_i = f(i)$  o estado global que sucede o estado  $i$ , conforme dinâmica determinística prescrita pela regra escolhida.

Sendo a Distância *Hamming* uma medida da quantidade de valores que diferem entre duas distribuições,  $p_{ij}$  pode ser assim definida:

$$p_{ij} = p^{D_{j,\kappa_i}}(1 - p)^{n - D_{j,\kappa_i}} \quad (13)$$

Nota-se que se  $j = \kappa_i$ ,  $D_{j,\kappa_i} = 0$  e, conseqüentemente  $p_{ij} = (1 - p)^n$  é a probabilidade para a qual o estado  $j$  sucede o estado  $i$ . Esta, probabilidade está associada à evolução determinística do autômato.

Portanto, a Equação 15 pode ser reescrita como

$$p_{ij} = (1 - p)^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-D_{j,\kappa_i}} \quad (14)$$

E, claramente, nota-se que a probabilidade da dinâmica ser determinística decai exponencialmente com  $D_{j,\kappa_i}$ .

Face ao exposto, para avaliação do cenário determinístico, é interessante considerar valores menores de  $p$ , para os quais o termo  $(1 - p)$  é mais notável no nível dos estados.

No nível das *bacias* de atratores, contudo, nenhuma equivalência pode ser esperada: considerando a evolução determinística, na qual a sucessão de estados é definida exclusivamente pela regra escolhida, a probabilidade de que o autômato seja encontrado em uma *bacia* de atratores particular a longo prazo depende de como os estados são agrupados em *bacias* e, em geral, acontece de forma distinta entre uma regra e sua complementar.

Porém, existem pares de regras tais que a longo prazo o autômato é encontrado em uma dada *bacia* de uma das regras com a mesma probabilidade com a qual é encontrado em uma *bacia* equivalente da outra regra. Identificar estas regras no nosso contexto é importante para reduzir o campo de estudo ou a quantidade de regras para análise.

Para estudar o comportamento do autômato na evolução determinística, a incerteza em relação ao estado em que se encontra o autômato em um futuro distante é consequência da escolha aleatória do estado inicial. A probabilidade depende do fato do estado inicial  $i$  pertencer ou não a um ciclo atrator  $A_B \subseteq B$  e pode ser definida por:



$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{\sigma_B}{|A_B|}, & \text{se } i \in A_B, \forall B \in \mathcal{B} \\ 0, & \text{se } i \notin A_B \end{cases} \quad (15)$$

Onde  $\sigma_B$  é o tamanho relativo da *bacia* B, ou seja,

$$\sigma_B = \frac{|B|}{2^n} \quad (16)$$

A equação 15 pode ser reescrita em termos da probabilidade condicional  $\Pr(i_0)$  e então:

$$\sigma_i = \sum_{i_0 \in \{0,1\}^n} \sigma_{i|i_0} \Pr(i_0) \quad (17)$$

Onde

$$\sigma_{i|i_0} = \begin{cases} \frac{1}{|A_B|}, & \text{se } i \in A_B \text{ para } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } i_0 \in B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (18)$$

é a probabilidade condicional de o autômato ser encontrado no estado  $i$  a longo prazo, dado que seu estado inicial é  $i_0$ ; e  $\Pr(i_0) = \frac{1}{2^n}$  é a probabilidade do estado inicial ser  $i_0$ .

Para a evolução probabilística, existe uma probabilidade de erro na evolução, associada a cada uma das células, de tal forma que sendo  $c$  o próximo estado da célula, e  $b$  o estado previsto para aquela célula segundo a regra de transição determinística, tem-se:

$$c := \begin{cases} 1 - b, & \text{com probabilidade } p \\ b, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (19)$$

Fixando o estado inicial  $i$  e para um dado valor  $p > 0$ , a incerteza reside na aleatoriedade da dinâmica em si e pode ser representado por uma Cadeia de Markov de Tempo Discreto.

Considerando que para todo e qualquer estado  $i \in \{0,1\}^n$  existe uma probabilidade associada à dinâmica de evolução, existe uma matriz de transição de estados  $P = [p_{ij}]$ , sendo que a soma de todos os elementos de cada linha da matriz P é igual a 1, ou seja, a matriz é estocástica:

$$\sum_{j \in \{0,1\}^n} p_{ij} = \sum_{d=0}^n \binom{n}{d} p^d (1-p)^{n-d} = 1 \quad (20)$$

Além disso, para  $p > 0$  todos os elementos da matriz são diferentes de zero e, portanto, independente do estado inicial  $i_0$ , a longo prazo, o autômato é encontrado no estado global  $i$  com probabilidade estacionária total  $\pi_i$ , que pode ser definida como:

$$\pi_i = \sum_{i_0 \in \{0,1\}^n} \pi_{i|i_0} \Pr(i_0) \quad (21)$$

Onde  $\pi_{i|i_0}$  é a probabilidade condicional do autômato ser encontrado a longo prazo no estado  $i$ , dado que iniciou em  $i_0$ , e  $\Pr(i_0) = \frac{1}{2^n}$  é a probabilidade do autômato ter iniciado em  $i_0$ .

Isso, portanto, resulta em:

$$\pi_{i|i_0} = \pi_i \quad (22)$$

$$\pi_0 = \pi_i \quad (23)$$

Por fim, a Equação 10 pode ser reescrita:

$$\pi = \pi P \quad (24)$$

onde  $\pi = [\pi_i]$  é um vetor linha e a solução do sistema resulta na distribuição de probabilidades no futuro distante, a qual representa o comportamento estacionário do PCA.

Com o objetivo de estudar a propriedade emergente de informação integrada, utilizou-se medida de entropia. A entropia mede a incerteza de um conjunto de variáveis aleatórias, dado a distribuição de probabilidades de seus valores. Neste caso, as variáveis de interesse são  $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$ , os estados das células e  $H$  é a entropia expressa em nível de bits, definida por:

$$H = - \sum_{i \in \{0,1\}^n} \Pr(i) \log_2 \Pr(i) \quad (25)$$

De uma forma genérica, definiu-se  $\Pr(i) = \rho_i$ . Esta variável expressa a probabilidade do estado  $i$  e, portanto,  $\rho_i = \sigma_i$  para o cenário determinístico e  $\rho_i = \pi_i$  para o cenário probabilístico.

O valor de  $H$  é maximizado pela distribuição que expressa a máxima incerteza possível, aquele para a qual  $\Pr(i) = \frac{1}{2^n}$  para todos os estados globais do autômato. Quando isso ocorre,  $H = n$  e este valor é utilizado como limite superior na quantificação da incerteza nos cenários determinístico e probabilístico.

A diferença resultante é denominada ganho de informação do sistema e denotado por  $G^\rho$ :

$$G^\rho = n - H^\rho \quad (26)$$

Onde

$$H^\rho = - \sum_{i \in \{0,1\}^n} \rho_i \log_2 \rho_i \quad (27)$$

A entropia também foi mensurada para cada célula  $c$  para quantificar a incerteza associada ao estado local. Esta entropia foi definida como:

$$H_C = - \sum_{b \in \{0,1\}} \Pr(\text{estado da célula } c \text{ é } b) \log_2 \Pr(\text{estado da célula } c \text{ é } b) \quad (28)$$

A entropia local  $H_C$  é maximizada quando  $\Pr(\text{estado da célula } c \text{ é } b) = 0,5$  e, portanto o valor utilizado como limite superior é  $H_C = 1$ . De forma análoga, o ganho de informação local é dado por

$$G_C^\rho = 1 - H_C^\rho \quad (29)$$

Onde  $H_C^\rho$  é obtido fazendo  $\Pr(\text{estado da célula } c \text{ é } b) = \rho_{c,b}$  na Equação 26. Se os estados das células são todos independentes entre si e fazendo  $\rho_i = \prod_{c=1}^n \rho_{c,b_c}$  para todo  $i \in \{0,1\}^n$ , onde  $b_c$  é o estado da célula  $c$  no estado  $i$ , então:

$$\sum_{c=1}^n H_C^\rho = H^\rho \quad (30)$$

Nos casos em que as variáveis não são independentes entre si,  $\sum_{c=1}^n H_c^\rho > H^\rho$  e a diferença é denominada correlação total dentre as  $n$  variáveis. Neste caso, definiu-se:

$$C^\rho = \sum_{c=1}^n H_c^\rho - H^\rho \quad (31)$$

A correlação total pode ser definida em relação ao ganho de informação total e local, da seguinte forma:

$$C^\rho = G^\rho - \sum_{c=1}^n G_c^\rho \quad (32)$$

$$G^\rho = \sum_{c=1}^n G_c^\rho + C^\rho \quad (33)$$

$$r^\rho = \frac{C^\rho}{G^\rho} \quad (34)$$

Onde  $r^\rho$  é a razão de correlação total que relaciona a informação que excede (diferença entre o ganho de informação global e a soma do ganho de informação local) e a informação global do sistema.

Como complemento ao estudo do comportamento do autômato, foram ainda realizadas comparações das distribuições de probabilidade estacionárias dos cenários determinístico e probabilístico.

Para tal utilizou-se a Distância Hellinger entre elas, a qual foi definida como:

$$H(\pi, \sigma) = \sqrt{1 - \sum_{B \in \mathcal{B}} \sqrt{\pi_B \sigma_B}} \quad (35)$$

Onde  $\pi_B$  é a distribuição de probabilidades de uma determinada *bacia* B no estado estacionário para o cenário probabilístico e  $\sigma_B$  é a distribuição de probabilidades da mesma *bacia* B no estado estacionário para o cenário determinístico.

A distância Hellinger é uma função mais robusta no contexto de identificação de similaridades entre duas distribuições de probabilidades e  $0 \leq H(\pi, \sigma) \leq 1$ . No nosso caso específico,  $H(\pi, \sigma)$  nunca será igual a 1 pois as distribuições  $\pi_B$  e  $\sigma_B$  são estritamente positivas para todas as *bacias* e, portanto,  $\pi_B \sigma_B \neq 0$ . No entanto, pode acontecer de as distribuições serem iguais e, conseqüentemente,  $H(\pi, \sigma) = 0$ .

A média e desvio padrão do tamanho das *bacias* também foram utilizados para verificar o quanto variam as distribuições entre si.

Para este fim, definiu-se:

$$\rho_{mean} = \frac{\sum_{B \in \mathcal{B}} \pi_B |B|}{\sum_{B \in \mathcal{B}} \sigma_B |B|} \quad (36)$$

Então, o desvio padrão é dado por:

$$\rho_{s.d} = \sqrt{\frac{\sum_{B \in \mathcal{B}} \pi_B |B|^2 - (\sum_{B \in \mathcal{B}} \pi_B |B|)^2}{\sum_{B \in \mathcal{B}} \sigma_B |B|^2 - (\sum_{B \in \mathcal{B}} \sigma_B |B|)^2}} \quad (37)$$

Vale lembrar que a variável  $\rho$  é utilizada no trabalho para generalizar o cenário.

## 5. METODOLOGIA

Para cada uma das 88 regras elementares de interesse, e para valores fixos de  $n$  e  $p$ , fez-se necessário obter as probabilidades estacionárias  $\sigma_i$  (evolução determinística) e  $\pi_i$  (evolução probabilística) para então computar as variáveis definidas na Seção 4.4.

Para obter as referidas probabilidades, dois desafios precisaram ser considerados: primeiramente, o espaço de estados do autômato cresce exponencialmente com o valor de  $n$ , o que requer quantidade substancial de memória para armazenamento; segundo, o tempo requerido para calcular as probabilidades estacionárias referentes à evolução probabilística tende a ser oneroso mesmo para valores modestos de  $n$ , dado a necessidade de resolver o sistema  $\pi = \pi P$ , sob as condições de que  $\pi_i > 0$  para todo  $i \in \{0,1\}^n$  e  $\sum_{i \in \{0,1\}^n} \pi_i = 1$ .

O cálculo dessas probabilidades foi realizado por meio de um *solver* disponibilizado na ferramenta de modelagem Tangram-II (SOUZA E SILVA *et al.*, 2006) e para autômatos celulares probabilísticos definidos para todas as combinações de  $n \in \{10, 11, 12\}$  e  $p \in \{0,001, 0,01\}$ .

O cálculo das probabilidades para  $n > 12$  revelou-se inviável, visto que a solução de uma instância do sistema  $\pi = \pi P$  com  $n = 13$  demandou três meses de computação em um processador Intel Xeon E5-1650 a 3,2 GHz e memória suficiente para armazenar a matriz  $P$  ( $2^{13} \times 2^{13}$ ).

Os autômatos foram avaliados quantitativa e qualitativamente de modo a verificar se o modelo proposto na Seção 4.1 pode ser utilizado na representação de processos biológicos complexos.

Para tal verificação, dois processos de interesse foram considerados, motivados pelos estudos de teorias explanatórias do sistema imunitário, de Cohen (2007), e estudos da formação da consciência, de Balduzzi e Tononi (2008): a) a computação de estados do sistema imunitário e (b) a integração da informação no córtex cerebral.

Para análise quantitativa foram utilizadas as variáveis definidas na Seção 4.2 e para a análise qualitativa foi observado o comportamento ao longo do tempo, por meio da identificação das características dos mapas de bacias de atratores (organização das partes) e o diagrama espaço-temporal (interação entre as partes).

As características dos mapas de bacias de atratores foram obtidas no Atlas de referência (WUENSCHÉ e LESSER, 1992) e os diagramas espaço-temporais foram obtidos a partir do software *DDLABz04* (WUENSCHÉ, 2016). Ressalta-se que o Atlas

apresenta as características das bacias para pequenos valores de  $n$ , servindo apenas como referência. *DDLABz04* permitiu a análise de valores maiores de  $n$ , sendo então consideradas combinações  $(N, p)$ , sendo  $n = \{150, 151\}$  e  $p = \{0, 10^{-3}, 10^{-2}\}$  e de duas condições iniciais (estado a partir do qual o autômato evolui): canônica (apenas o bit central igual a 1) e aleatória (escolhida ao acaso). No entanto, por limitações gráficas, apenas os diagramas espaço-temporais foram gerados, sendo as características das bacias inferidas por meio dos registros no Atlas.

Todos os diagramas espaço-temporais foram gerados considerando 10.000 (dez mil) passos de evolução, valor escolhido para simular o estado estacionário do sistema.

Na análise qualitativa observou-se também a influência da incerteza introduzida na evolução em nível celular (a partir do parâmetro  $p$ ) e da incerteza devida à condição inicial no comportamento do sistema, bem como se existe influência do tamanho do autômato ( $n$ ) no padrão comportamental apresentado.

## 5.1 REPRESENTAÇÃO DA COMPUTAÇÃO DE ESTADOS

Para o modelo definido na Seção 4.1 é sabido que, dado uma certa regra e um autômato definido por  $n$  células, a evolução determinística resulta em uma trajetória única e os estados globais são distribuídos em  $m$  bacias de atratores.

Cada uma dessas bacias de atratores pode ser utilizada para representar, metaforicamente, um estado do sistema imunitário (macroscopicamente conhecido como saúde, convalescência ou doença). Num futuro distante, o sistema estaria confinado em um desses estados caso a evolução fosse determinística e este estado (do sistema) é conhecido, pois depende do estado global a partir do qual a evolução se processa, ou seja, o sistema é fechado a ruído e ele se encontraria na mesma bacia onde iniciou.

Em termos gerais, a probabilidade de que o autômato seja encontrado em uma bacia de atratores  $B \in \beta = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$ , tendo iniciado a evolução em qualquer um dos estados globais ( $i \in \{0,1\}^n$ ), escolhido ao acaso, é dada pela Equação 16.

Quando a aleatoriedade na evolução é considerada, existe uma probabilidade de que, num futuro distante, o autômato seja encontrado numa bacia de atratores distinta daquela a qual pertence o estado inicial. Então, a probabilidade do sistema estar em uma determinada bacia de atratores, num futuro distante, é dada por:

$$\pi_B = \sum_{i \in B} \pi_i \quad (38)$$

Ao considerar esta probabilidade, pretende-se representar a dinâmica de computação de estados no sistema imunitário, verificando se o modelo definido na Seção 4.1, embora permita transições entre as bacias de atratores, ainda garante que no futuro distante, as probabilidades de distribuição de estados sejam semelhantes àsquelas da evolução determinística sob escolha aleatória do estado inicial.

Para a referida análise foi realizada a comparação das distribuições de probabilidades das bacias de atratores, utilizando a variável  $H(\pi, \sigma)$  definida na Equação 35.

As regras e valores de  $n$  apropriados à modelagem da computação de estados do sistema imunitário serão aqueles para os quais as distribuições dadas por  $\sigma_B$  e  $\pi_B$  pouco diferem.

## 5.2 REPRESENTAÇÃO DA INTEGRAÇÃO DA INFORMAÇÃO

Para o modelo definido na Seção 4.1 é sabido que a aleatoriedade embutida pelo parâmetro  $p$  produz incerteza na evolução do sistema. O nível de incerteza pode ser medido por meio da Entropia Shannon, definida na Equação 25, e a partir da qual deriva o ganho de informação do sistema, quantificado pela variável genérica  $G^p$  (Equação 26).

Dada a distribuição  $\pi_i$  sobre os estados de um autômato probabilístico no futuro distante e a distribuição associada  $\pi_{c,b}$  indicando que a célula  $c$  está no estado  $b$  ( $b \in \{0,1\}$ ), há dois ganhos de informação associados: (a) o ganho de informação local à célula  $c$  (entre 0 e 1), definido na Equação 29 e (b) o ganho de informação global (entre 0 e  $n$ ), definido na Equação 26.

Para a representação da informação integrada a partir do modelo proposto, pretende-se identificar regras e valores de  $n$  que promovam ganho global superior à soma dos ganhos locais, ou seja:

$$G^\pi > \sum_{c=1}^n G_c^\pi \quad (39)$$



A diferença  $G^\pi - \sum_{c=1}^n G_c^\pi$  (correlação total) nunca é negativa e então toda a análise se processa sobre a razão  $r^\pi$ , que expressa a fração do ganho de informação que corresponde à correlação total e pode ser definida a partir da Equação 34 como:

$$r^\pi = \frac{1 + \sum_{c=1}^n G_c^\pi}{G^\pi} \quad (40)$$

O valor mínimo para a razão  $r^\pi$  é zero, resultante da situação na qual nenhum ganho informação existe além do que as células provêm localmente e ocorre se, e somente se  $G^\pi = \sum_{c=1}^n G_c^\pi > 0$ . Isso ocorre se e somente se os estados das células são probabilisticamente independentes uns dos outros

O valor máximo para a razão  $r^\pi$  é 1 e então o sistema é gerador de informação. Tal situação ocorre se, e somente se, nenhuma célula provê ganho de informação local, o que resulta em  $\sum_{c=1}^n G_c^\pi = 0$  e  $G^\pi > 0$ . A condição necessária e suficiente para que isso ocorra é que  $\pi_{c,0} = \pi_{c,1} = 0,5$ , para toda célula  $c$ .

Para verificar se o modelo proposto na Seção 4.1 pode ser utilizado na representação do processo de integração da informação, tal como ocorre no córtex cerebral, deverão ser selecionadas regras com  $r^\pi \approx 1$ , evitando aquelas que tem  $G^\pi=0$  (matrizes P duplamente estocásticas), já que nesse caso teríamos uma indeterminação ( $r^\pi = 0/0$ ), a qual foi tratada como  $r^\pi = 1$  somente por convenção.

## 6. RESULTADOS E DISCUSSÃO GERAL

A Tabela 1 apresenta a comparação entre as distribuições de probabilidades estacionárias considerando os cenários probabilístico ( $\pi$ ) e determinístico ( $\sigma$ ), em termos da Distância *Hellinger* ( $H(\pi, \sigma)$ ) para todas as combinações de  $n$  e  $p$ .

Tabela 1. Distâncias *Hellinger*

Regra	Classe	$H(\pi, \sigma)$ para $n=10$		$H(\pi, \sigma)$ para $n=11$		$H(\pi, \sigma)$ para $n=12$	
		$p=0.001$	$p=0.01$	$p=0.001$	$p=0.01$	$p=0.001$	$p=0.01$
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
248	1	0.248956	0.248918	0.223216	0.223206	0.200278	0.200274
<b>249</b>	<b>1</b>	<b>0.091299</b>	<b>0.091276</b>	<b>0.073387</b>	<b>0.073380</b>	<b>0.059551</b>	<b>0.059549</b>
250	1	0.176776	0.176729	0.015626	0.015626	0.125000	0.124995
<b>251</b>	<b>1</b>	<b>0.031257</b>	<b>0.031224</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.015626</b>	<b>0.015623</b>
<b>252</b>	<b>1</b>	<b>0.022100</b>	<b>0.022100</b>	<b>0.015626</b>	<b>0.015626</b>	<b>0.011049</b>	<b>0.011049</b>
<b>253</b>	<b>1</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
<b>254</b>	<b>1</b>	<b>0.022100</b>	<b>0.022100</b>	<b>0.015626</b>	<b>0.015626</b>	<b>0.011049</b>	<b>0.011049</b>
1	2	0.237315	0.239354	0.260833	0.261584	0.283045	0.283760
2	2	0.214709	0.203996	0.224895	0.223983	0.234612	0.233671
3	2	0.121415	0.124573	0.136260	0.136566	0.150518	0.150766
4	2	0.198416	0.178198	0.207861	0.206196	0.216913	0.215180
5	2	0.122062	0.123784	0.136260	0.136566	0.151784	0.152007
6	2	0.145932	0.099881	0.153279	0.140815	0.178978	0.167294
7	2	0.570014	0.073262	0.600195	0.477705	0.627823	0.494088
9	2	0.127448	0.058579	0.198415	0.169627	0.130059	0.112595
10	2	0.104076	0.102039	0.088408	0.086590	0.106435	0.104504
11	2	0.339538	0.265903	0.290900	0.238953	0.543483	0.346141
<b>12</b>	<b>2</b>	<b>0.084915</b>	<b>0.083186</b>	<b>0.088408</b>	<b>0.086590</b>	<b>0.091966</b>	<b>0.090065</b>
13	2	0.561884	0.436485	0.298189	0.248901	0.620558	0.469093
14	2	0.296465	0.245507	0.335487	0.266519	0.492403	0.338750
<b>15</b>	<b>2</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
19	2	0.665262	0.455025	0.687454	0.466017	0.706507	0.476426
23	2	0.649786	0.504885	0.674805	0.517551	0.699909	0.532909
24	2	0.151170	0.145988	0.162003	0.156480	0.163455	0.157906
25	2	0.178794	0.142287	0.205302	0.166376	0.240752	0.184615
<b>26</b>	<b>2</b>	<b>0.096811</b>	<b>0.087081</b>	<b>0.092313</b>	<b>0.081963</b>	<b>0.082902</b>	<b>0.073380</b>

Regra	Classe	$H(\pi, \sigma)$ para $n=10$		$H(\pi, \sigma)$ para $n=11$		$H(\pi, \sigma)$ para $n=12$	
		p=0.001	p=0.01	p=0.001	p=0.01	p=0.001	p=0.01
<b>27</b>	<b>2</b>	<b>0.078410</b>	<b>0.075206</b>	<b>0.078149</b>	<b>0.075674</b>	<b>0.088139</b>	<b>0.084074</b>
28	2	0.507050	0.293820	0.276705	0.187250	0.554002	0.304611
<b>29</b>	<b>2</b>	<b>0.042041</b>	<b>0.041289</b>	<b>0.044401</b>	<b>0.043618</b>	<b>0.046283</b>	<b>0.045463</b>
33	2	0.128619	0.124749	0.102505	0.099605	0.131497	0.128095
35	2	0.112197	0.095522	0.108425	0.093326	0.136032	0.100919
36	2	0.210118	0.202473	0.212746	0.204591	0.218307	0.209832
37	2	0.217930	0.128618	0.130832	0.085161	0.153067	0.127335
<b>38</b>	<b>2</b>	<b>0.053281</b>	<b>0.051025</b>	<b>0.060564</b>	<b>0.058097</b>	<b>0.058462</b>	<b>0.055931</b>
43	2	0.299150	0.254258	0.340329	0.279313	0.499819	0.357524
46	2	0.176524	0.167568	0.186924	0.177534	0.196353	0.186419
50	2	0.621971	0.428828	0.434170	0.334403	0.667557	0.448039
<b>51</b>	<b>2</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
57	2	0.271948	0.093908	0.095220	0.034859	0.287305	0.079804
58	2	0.230614	0.194367	0.401245	0.276011	0.410814	0.410734
62	2	0.197845	0.138003	0.132255	0.122913	0.215650	0.117917
73	2	0.294481	0.182849	0.120781	0.107784	0.181444	0.151175
77	2	0.649786	0.504885	0.447864	0.375344	0.699909	0.532909
94	2	0.306439	0.269040	0.277744	0.242535	0.569790	0.280718
178	2	0.649786	0.504885	0.447864	0.375344	0.699909	0.532909
197	2	0.529675	0.345739	0.285589	0.211139	0.581408	0.362983
198	2	0.522388	0.330289	0.282790	0.203589	0.572138	0.344295
201	2	0.220405	0.209932	0.217887	0.207934	0.221112	0.209812
<b>204</b>	<b>2</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
<b>205</b>	<b>2</b>	<b>0.081927</b>	<b>0.080898</b>	<b>0.082447</b>	<b>0.081349</b>	<b>0.083984</b>	<b>0.082815</b>
<b>210</b>	<b>2</b>	<b>0.007328</b>	<b>0.006725</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.010027</b>	<b>0.008364</b>
212	2	0.299150	0.254258	0.340329	0.279313	0.499819	0.357524
214	2	0.104722	0.100715	0.138109	0.122696	0.112897	0.094736
217	2	0.120698	0.115389	0.130762	0.125581	0.126279	0.121099
218	2	0.266122	0.259242	0.221638	0.214302	0.265582	0.258562
<b>220</b>	<b>2</b>	<b>0.092624</b>	<b>0.090070</b>	<b>0.092633</b>	<b>0.089882</b>	<b>0.094236</b>	<b>0.091322</b>
<b>222</b>	<b>2</b>	<b>0.081912</b>	<b>0.081363</b>	<b>0.081185</b>	<b>0.080555</b>	<b>0.084533</b>	<b>0.084083</b>
226	2	0.170992	0.148976	0.079509	0.075465	0.196928	0.168250
227	2	0.128235	0.089781	0.076123	0.065573	0.109403	0.072279
228	2	0.322168	0.308522	0.308795	0.298360	0.299346	0.290927
229	2	0.101086	0.096509	0.134254	0.119041	0.115874	0.108862
230	2	0.238324	0.230492	0.258104	0.250046	0.277262	0.268729

Regra	Classe	$H(\pi, \sigma)$ para $n=10$		$H(\pi, \sigma)$ para $n=11$		$H(\pi, \sigma)$ para $n=12$	
		$p=0.001$	$p=0.01$	$p=0.001$	$p=0.01$	$p=0.001$	$p=0.01$
232	2	0.649786	0.504885	0.674805	0.517551	0.699909	0.532909
233	2	0.370172	0.311163	0.404103	0.341928	0.420107	0.357435
236	2	0.767929	0.677742	0.790184	0.701010	0.810056	0.722260
237	2	0.511025	0.446457	0.532280	0.465832	0.551887	0.483901
<b>240</b>	<b>2</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
241	2	0.161638	0.159585	0.169371	0.167225	0.176764	0.174527
242	2	0.219813	0.216880	0.229854	0.226784	0.239672	0.236473
<b>243</b>	<b>2</b>	<b>0.084915</b>	<b>0.083186</b>	<b>0.088408</b>	<b>0.086590</b>	<b>0.091966</b>	<b>0.090065</b>
244	2	0.253371	0.248050	0.265043	0.259493	0.276340	0.270564
246	2	0.123588	0.121820	0.126632	0.124803	0.133269	0.131387
18	3	0.177219	0.171971	0.098671	0.095609	0.216715	0.200709
22	3	0.051738	0.044548	0.090170	0.077895	0.250064	0.134211
<b>30</b>	<b>3</b>	<b>0.034544</b>	<b>0.016889</b>	<b>0.020255</b>	<b>0.007665</b>	<b>0.038162</b>	<b>0.009492</b>
<b>45</b>	<b>3</b>	<b>0.016456</b>	<b>0.010594</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.056506</b>	<b>0.004097</b>
<b>60</b>	<b>3</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
<b>90</b>	<b>3</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
<b>105</b>	<b>3</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
126	3	0.114009	0.110473	0.158805	0.146309	0.140149	0.125633
<b>150</b>	<b>3</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>	<b>0.000000</b>
161	3	0.213897	0.142957	0.046676	0.018741	0.145264	0.101305
182	3	0.118028	0.098982	0.037891	0.030647	0.110355	0.095368
41	4	0.120070	0.097433	0.115620	0.106492	0.150240	0.107285
54	4	0.250242	0.160801	0.078368	0.060045	0.285840	0.138826
<b>193</b>	<b>4</b>	<b>0.066972</b>	<b>0.049254</b>	<b>0.057118</b>	<b>0.030831</b>	<b>0.096156</b>	<b>0.052231</b>
225	4	0.034380	0.020135	0.062034	0.018674	0.488660	0.119769

A Tabela 2 apresenta a média e desvio padrão das distribuições de probabilidades estacionárias do cenário probabilístico ( $\pi$ ) e do cenário determinístico ( $\sigma$ ) para todas as combinações de  $n$  e  $p$ .

Tabela 2. Média e desvio padrão (I: p=0,001; II: p=0.01)

Regra	Classe	n=10				n=11				n=12			
		ρmean		ρs.d.		ρmean		ρs.d.		ρmean		ρs.d.	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
248	1	1.13	1.13	0.00	0.00	1.11	1.11	0.00	0.00	1.09	1.09	0.00	0.00
<b>249</b>	<b>1</b>	<b>1.02</b>	<b>1.02</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>
250	1	1.06	1.06	0.00	0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	1.03	1.03	0.00	0.00
<b>251</b>	<b>1</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>
<b>252</b>	<b>1</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>
<b>253</b>	<b>1</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
<b>254</b>	<b>1</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>
1	2	0.41	0.40	0.74	0.74	0.35	0.35	0.68	0.68	0.30	0.30	0.62	0.62
2	2	0.75	0.80	0.98	0.99	0.72	0.73	0.93	0.93	0.67	0.67	0.88	0.88
3	2	0.91	0.88	0.93	0.94	0.85	0.85	0.90	0.90	0.80	0.80	0.86	0.85
4	2	0.49	0.53	0.72	0.75	0.45	0.46	0.68	0.68	0.42	0.43	0.64	0.65
5	2	0.70	0.65	0.76	0.71	0.63	0.63	0.71	0.70	0.59	0.58	0.66	0.65
6	2	0.88	0.95	1.05	1.03	0.85	0.87	1.12	1.12	0.84	0.85	1.02	1.02
7	2	1.40	1.07	0.14	1.00	1.49	1.44	0.15	0.50	1.43	1.38	0.16	0.51
9	2	1.11	1.04	0.97	1.00	0.84	0.86	1.58	1.53	0.99	0.98	0.98	0.99
10	2	0.90	0.90	0.98	0.98	0.92	0.92	1.02	1.02	0.90	0.90	1.04	1.04
11	2	1.08	1.08	0.88	0.90	1.11	1.09	0.90	0.92	2.37	1.92	0.39	0.91
<b>12</b>	<b>2</b>	<b>0.93</b>	<b>0.93</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>	<b>0.92</b>	<b>0.92</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>	<b>0.91</b>	<b>0.92</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
13	2	1.93	1.83	0.18	0.54	1.17	1.16	0.08	0.26	2.33	2.14	0.24	0.71
14	2	1.03	1.03	0.99	0.99	1.42	1.37	0.71	0.77	1.91	1.71	0.26	0.68
<b>15</b>	<b>2</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
19	2	3.68	2.95	0.48	1.16	4.28	3.27	0.58	1.33	4.97	3.61	0.70	1.51
23	2	3.33	3.01	0.26	0.75	3.89	3.43	0.32	0.88	4.57	3.92	0.38	1.02
24	2	1.01	1.01	1.23	1.21	0.97	0.97	1.03	1.02	0.97	0.98	0.98	0.98
25	2	1.00	0.99	0.99	1.00	0.87	0.89	1.27	1.22	1.21	1.17	0.99	1.01
<b>26</b>	<b>2</b>	<b>0.92</b>	<b>0.92</b>	<b>1.03</b>	<b>1.03</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>	<b>0.98</b>	<b>0.98</b>	<b>0.89</b>	<b>0.90</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>
<b>27</b>	<b>2</b>	<b>0.95</b>	<b>0.95</b>	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>	<b>0.93</b>	<b>0.93</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>	<b>0.98</b>	<b>0.98</b>
28	2	2.16	1.78	0.35	0.85	1.22	1.18	0.16	0.48	2.72	2.04	0.46	1.03
<b>29</b>	<b>2</b>	<b>1.03</b>	<b>1.03</b>	<b>1.03</b>	<b>1.03</b>	<b>1.04</b>	<b>1.04</b>	<b>1.06</b>	<b>1.06</b>	<b>1.04</b>	<b>1.04</b>	<b>1.05</b>	<b>1.05</b>
33	2	0.77	0.77	0.85	0.86	0.79	0.79	0.84	0.84	0.77	0.77	0.83	0.83
35	2	1.15	1.13	1.01	1.01	1.00	1.00	0.97	0.97	1.10	1.07	1.00	1.00
36	2	0.57	0.59	0.90	0.90	0.54	0.56	0.86	0.87	0.50	0.52	0.82	0.83

Regra	Classe	<i>n</i> =10				<i>n</i> =11				<i>n</i> =12			
		$\rho$ mean		$\rho$ s.d.		$\rho$ mean		$\rho$ s.d.		$\rho$ mean		$\rho$ s.d.	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
37	2	0.86	0.92	1.18	1.10	0.96	0.99	1.14	1.09	1.03	1.03	0.96	0.96
<b>38</b>	<b>2</b>	<b>0.96</b>	<b>0.97</b>	<b>1.02</b>	<b>1.02</b>	<b>0.96</b>	<b>0.96</b>	<b>1.04</b>	<b>1.03</b>	<b>0.95</b>	<b>0.95</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
43	2	1.06	1.05	0.86	0.87	1.42	1.38	0.68	0.74	2.08	1.87	0.24	0.65
46	2	0.96	0.96	1.09	1.08	0.97	0.97	1.14	1.13	0.92	0.93	1.03	1.03
50	2	3.29	2.74	0.37	0.94	1.58	1.52	0.14	0.43	4.49	3.43	0.52	1.22
<b>51</b>	<b>2</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
57	2	1.28	1.12	0.34	0.83	1.03	1.01	0.28	0.78	1.35	1.12	0.41	0.89
58	2	0.97	0.98	1.00	0.99	1.36	1.30	0.18	0.52	1.35	1.31	0.43	0.43
62	2	1.24	1.17	0.61	0.77	1.31	1.30	1.17	1.16	0.85	0.96	1.04	1.01
73	2	1.08	1.02	1.16	1.09	0.93	0.93	0.90	0.90	0.91	0.86	0.98	0.92
77	2	3.33	3.01	0.26	0.75	1.58	1.55	0.10	0.32	4.57	3.92	0.38	1.02
94	2	0.84	0.87	1.13	1.12	0.90	0.92	1.04	1.03	2.04	1.30	0.66	1.08
178	2	3.33	3.01	0.26	0.75	1.58	1.55	0.10	0.32	4.57	3.92	0.38	1.02
197	2	1.91	1.70	0.28	0.75	1.17	1.15	0.13	0.39	2.30	1.92	0.37	0.94
198	2	2.17	1.85	0.30	0.80	1.22	1.19	0.14	0.42	2.75	2.17	0.41	0.98
201	2	0.91	0.91	1.16	1.15	0.90	0.91	1.12	1.11	0.97	0.96	1.22	1.19
<b>204</b>	<b>2</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
<b>205</b>	<b>2</b>	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>	<b>1.02</b>	<b>1.01</b>	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.97</b>	<b>0.97</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>
<b>210</b>	<b>2</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
212	2	1.04	1.04	0.91	0.91	1.56	1.50	0.85	0.89	2.08	1.87	0.24	0.65
214	2	0.96	0.96	1.05	1.05	0.79	0.82	1.09	1.09	0.97	0.97	0.96	0.97
217	2	0.94	0.94	1.37	1.36	0.92	0.92	1.37	1.35	0.90	0.90	1.12	1.11
218	2	0.59	0.60	0.80	0.81	0.55	0.56	0.79	0.80	0.50	0.52	0.73	0.74
<b>220</b>	<b>2</b>	<b>0.93</b>	<b>0.93</b>	<b>1.02</b>	<b>1.02</b>	<b>0.92</b>	<b>0.92</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>	<b>0.91</b>	<b>0.92</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>
<b>222</b>	<b>2</b>	<b>0.85</b>	<b>0.85</b>	<b>0.91</b>	<b>0.91</b>	<b>0.83</b>	<b>0.84</b>	<b>0.89</b>	<b>0.89</b>	<b>0.82</b>	<b>0.81</b>	<b>0.88</b>	<b>0.88</b>
226	2	1.08	1.07	0.96	0.97	0.99	0.99	1.00	1.00	1.09	1.08	0.98	0.98
227	2	1.07	1.04	1.00	1.00	1.07	1.05	1.04	1.04	1.08	1.05	1.02	1.01
228	2	0.72	0.74	1.05	1.05	0.69	0.70	0.98	0.98	0.66	0.68	0.91	0.91
229	2	0.96	0.96	1.03	1.03	0.89	0.90	1.01	1.01	0.80	0.81	0.86	0.86
230	2	0.70	0.71	0.86	0.87	0.73	0.74	0.90	0.91	0.70	0.71	0.80	0.81
232	2	3.33	3.01	0.26	0.75	3.89	3.43	0.32	0.88	4.57	3.92	0.38	1.02
233	2	1.39	1.37	0.09	0.28	1.48	1.46	0.09	0.28	1.53	1.51	0.09	0.29
236	2	5.40	5.11	0.24	0.72	6.39	6.01	0.27	0.82	7.57	7.08	0.31	0.92
237	2	1.88	1.84	0.10	0.31	2.00	1.95	0.10	0.32	2.13	2.07	0.11	0.33
<b>240</b>	<b>2</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>

Regra	Classe	$n=10$				$n=11$				$n=12$			
		$\rho_{mean}$		$\rho_{s.d.}$		$\rho_{mean}$		$\rho_{s.d.}$		$\rho_{mean}$		$\rho_{s.d.}$	
		I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
241	2	0.80	0.80	0.94	0.94	0.77	0.77	0.90	0.90	0.76	0.76	0.88	0.89
242	2	0.78	0.78	0.96	0.96	0.68	0.68	0.81	0.81	0.69	0.69	0.86	0.86
<b>243</b>	<b>2</b>	<b>0.94</b>	<b>0.94</b>	<b>1.04</b>	<b>1.04</b>	<b>0.92</b>	<b>0.92</b>	<b>1.02</b>	<b>1.02</b>	<b>0.92</b>	<b>0.93</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
244	2	0.96	0.96	0.98	0.98	0.96	0.96	0.99	0.99	0.96	0.96	1.00	1.00
246	2	0.88	0.88	1.10	1.10	0.89	0.90	1.17	1.16	0.92	0.92	1.07	1.07
18	3	0.86	0.86	0.94	0.94	0.90	0.90	1.04	1.04	0.81	0.82	0.64	0.65
22	3	0.94	0.95	0.98	1.00	0.97	0.96	0.99	0.98	0.60	0.79	1.01	1.05
<b>30</b>	<b>3</b>	<b>0.98</b>	<b>0.99</b>	<b>1.05</b>	<b>1.04</b>	<b>0.98</b>	<b>0.99</b>	<b>1.02</b>	<b>1.01</b>	<b>0.99</b>	<b>1.00</b>	<b>1.10</b>	<b>1.04</b>
<b>45</b>	<b>3</b>	<b>0.99</b>	<b>0.99</b>	<b>1.01</b>	<b>1.01</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>0.98</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
<b>60</b>	<b>3</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
<b>90</b>	<b>3</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
<b>105</b>	<b>3</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
126	3	0.91	0.91	1.07	1.07	0.88	0.88	1.02	1.02	0.87	0.88	0.75	0.78
<b>150</b>	<b>3</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>	<b>1.00</b>
161	3	0.97	0.98	1.16	1.12	1.02	1.00	0.98	1.02	0.93	0.94	1.05	1.05
182	3	1.02	1.02	0.87	0.88	1.02	1.02	0.95	0.96	1.01	1.00	0.87	0.86
41	4	1.04	1.03	0.95	0.97	1.16	1.15	1.12	1.12	0.83	0.89	0.97	1.01
54	4	0.86	0.90	0.84	0.89	1.03	1.04	1.06	1.05	1.41	1.17	0.86	0.98
<b>193</b>	<b>4</b>	<b>1.03</b>	<b>1.02</b>	<b>0.99</b>	<b>1.00</b>	<b>1.07</b>	<b>1.03</b>	<b>0.92</b>	<b>0.97</b>	<b>0.95</b>	<b>0.97</b>	<b>1.05</b>	<b>1.03</b>
225	4	0.99	0.99	1.02	1.02	1.03	0.99	0.88	1.04	0.39	0.92	1.24	1.14

## 6.1 ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

Ao comparar as duas distribuições, se  $H(\pi, \sigma) = 0$ , então  $\rho_{mean} = 1$  e  $\rho_{s.d} = 1$ , independentemente da regra e tamanho do autômato considerado. Embora estes resultados sejam os desejados (os estados serem encontrados nas mesmas *bacias* por longos períodos de tempo), não são comuns.

Este fato pode ser observado na Tabela 1: a ocorrência de  $H(\pi, \sigma) = 0$  depende de outros detalhes da dinâmica da evolução, particularmente da forma como as *bacias* são definidas em termos de estados globais no campo de atratores e se o autômato, durante a evolução, troca de *bacia* ao escolher como sucessor do estado  $i$  um outro estado  $j \neq k_i$  ( $k_i$  é o estado alcançado pelo autômato na evolução determinística).

Algumas características de regras destacadas nas Tabela 1 e Tabela 2 precisaram ser consideradas para análise dos resultados obtidos. Tais características foram confirmadas por Wuensche e Lesser (1992).

O primeiro resultado notável é que  $H(\pi, \sigma) = 0$  para as regras 0 e 253 (classe 1), regras 15, 51, 204 e 240 (classe 2), regras 60, 90, 105 e 150 (classe 3).

No caso das regras da classe 1, ao analisar as matrizes de transição e as distribuições de probabilidades, verificou-se que as distribuições são uniformes.

O valor de  $H(\pi, \sigma)$  também é precisamente 0 para as regras 15, 51, 204, 240, 105 e 150 (as duas últimas exceto quando  $n = 12$ ), mas por uma razão diferente: verificou-se que a matriz de probabilidades de transição é duplamente estocástica, o que implica que a distribuição estacionária dos estados é uniforme. Para as regras 51 e 204 a dupla estocasticidade é consequência do fato de a matriz ser simétrica ( $p_{ij} = p_{ji}$  para todos os estados  $i$  e  $j$ ).

Ao analisar quantitativamente os resultados apresentados pelas regras 60 e 90, verificou-se que  $H(\pi, \sigma)$  é, na verdade, aproximadamente igual a 0. Esta diferença é devida a erros de aproximação – para seis casas decimais. Vale ressaltar que as matrizes referentes a estas regras não são duplamente estocásticas e a partir da análise qualitativa pretende-se elucidar razões para os resultados encontrados.

Se a análise dos resultados da Tabela 1 for menos rigorosa e tratar  $H(\pi, \sigma) \cong 0$ , considerando valores de  $H(\pi, \sigma) < 0,1$ , outras regras apresentarão similaridade quando as distribuições de probabilidades forem comparadas. Inclusive a regra 193 (classe 4), amplamente conhecida por sua equivalente regra 110 pela sua capacidade de computação universal.

As regras 249, 251, 252 e 254 (classe 1) também poderão ser incluídas na análise, por apresentarem valores de  $H(\pi, \sigma) \approx 0$  e a razão é a mesma das regras 0 e 253: apresentam um mapa de atratores com uma única *bacia*.

Para as demais regras que seriam incluídas neste novo contexto, não foram encontradas na análise das matrizes de transição e distribuição de probabilidades características que possam explicar a similaridade das distribuições, exceto para as regras 45 e 210 cujas matrizes também são duplamente estocásticas para  $n = 11$ .

Admitindo arbitrariamente o valor máximo de  $H(\pi, \sigma) = 0,45$  quatro regras (19,23,232 e 236) ainda poderiam ser analisadas. Mais uma vez, não foi possível discernir características que explicassem tal fato, porém ao analisar a Tabela 2, verifica-se que estas



regras tem em comum o fato de  $\rho_{mean} \gg 1$  (mas diminui quando  $p$  é incrementado) e  $\rho_{s,d} \ll 1$  (mas cresce quando  $p$  é incrementado).

Esta análise preliminar teve como objetivo apenas nortear a análise comportamental dos autômatos, com vistas a modelagem da dinâmica de evolução do sistema.

A busca de características será explanada na Seção 7, onde foram avaliados a estrutura do mapa de bacias de atratores - forma pela qual os estados se organizam - e o diagrama espaço-temporal - forma pela qual os estados interagem.

## 6.2 GANHO DE INFORMAÇÃO

Os ganhos de informação e as razões de correlação total são apresentados nas Tabela 3 e Tabela 4 considerando um cenário determinístico ( $p = 0$ ) e dois cenários probabilísticos ( $p = 0,001$  e  $p = 0,01$ ), para  $n = 11$  e  $n = 12$ , respectivamente, convencionou-se destacar em negrito os pares (ganho de informação e razão de correlação total) para os quais a razão de correlação total é máxima ( $r^\sigma = 1$ ) e em itálico os pares para os quais ela é mínima ( $r^\sigma = 0$ ).

Não foram considerados os resultados para  $n = 10$  porque não apresentaram relevância para a análise - não foram observadas diferenças significativas entre os valores de  $n$  par e ímpar.

Optou-se por apresentar os resultados com 4 casas decimais, apesar de alguns valores serem sensíveis ao arredondamento. Um caso de arredondamento ocorre com a regra 30 na Tabela 3 (valores sublinhados): após análise minuciosa dos resultados apresentados, verificou-se que a ocorrência  $r^\pi = 1,0000$  para ambos os valores de  $p$  é, na verdade,  $r^\pi = 0,999988$  para  $p = 0,001$  e  $r^\pi = 0,999985$  para  $p = 0,01$ . O mesmo ocorre com as regras 23 e 57 na Tabela 4: a ocorrência  $r^\sigma = 1,0000$  refere-se a  $r^\sigma = 0,999997$  para a regra 23 e  $r^\sigma = 0,999999$  para a regra 57.

Tabela 3. Ganho de informação e razão de correlação total para n=11

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
0	1	11.0000	0.0000	10.8745	0.0000	10.1113	0.0000
248	1	9.8149	0.0972	10.8743	0.0000	10.0962	0.0000
249	1	10.8664	0.0439	10.8743	0.0000	10.0964	0.0000
250	1	10.9939	0.0055	10.8744	0.0000	10.1039	0.0000
251	1	11.0000	0.0000	10.8744	0.0000	10.1040	0.0000
252	1	10.9939	0.0055	10.8744	0.0000	10.1039	0.0000
253	1	11.0000	0.0000	10.8744	0.0000	10.1041	0.0000
254	1	10.9939	0.0055	10.8745	0.0000	10.1112	0.0000
1	2	5.4737	0.9662	3.9532	0.9269	3.5371	0.9132
2	2	6.9611	0.0888	5.0112	0.2350	4.6206	0.2016
3	2	3.1524	0.9650	2.5157	0.9455	2.2041	0.9344
4	2	5.4158	0.1435	4.2273	0.1342	3.9721	0.1121
5	2	2.8336	0.9258	2.5157	0.9455	2.2041	0.9344
6	2	6.6380	0.1423	4.2454	0.4671	3.5261	0.4197
7	2	5.5036	0.9945	9.7352	1.0000	8.0350	0.9998
9	2	9.2894	0.9998	5.4167	0.9504	3.7860	0.9174
10	2	3.9120	0.2753	3.3973	0.3915	3.1046	0.3591
<b>11</b>	<b>2</b>	<b>4.4633</b>	<b>1.0000</b>	4.3969	0.9978	3.4942	0.9964
12	2	3.5437	0.3919	3.3973	0.3915	3.1046	0.3591
13	2	6.7514	0.9684	7.3462	0.9910	6.2310	0.9890
14	2	6.4286	0.4749	5.5259	0.9930	4.3577	0.9873
<b>15</b>	<b>2</b>	<b>0.0338</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
<b>19</b>	<b>2</b>	<b>4.0612</b>	<b>1.0000</b>	9.3448	1.0000	6.4186	0.9999
<b>23</b>	<b>2</b>	<b>4.4155</b>	<b>1.0000</b>	<b>9.6667</b>	<b>1.0000</b>	<b>7.7807</b>	<b>1.0000</b>
24	2	5.9045	0.1561	5.0244	0.2166	4.4889	0.1796
25	2	8.7170	0.9998	5.1766	0.9869	3.2991	0.9732
26	2	3.2929	0.5160	1.8577	0.7354	1.4591	0.6972
27	2	2.5655	0.9892	2.0429	0.9860	1.6168	0.9835
28	2	5.5200	0.9661	6.2799	1.0000	4.8558	0.9998
<b>29</b>	<b>2</b>	1.5038	0.9926	<b>1.5355</b>	<b>1.0000</b>	<b>1.3491</b>	<b>1.0000</b>
33	2	3.9746	0.8913	3.6030	0.8923	3.0633	0.8663
35	2	3.5095	0.9706	2.8857	0.8440	2.3023	0.8222
36	2	7.4540	0.0688	6.0282	0.0638	5.5462	0.0456
37	2	4.9850	0.9517	4.1290	0.9427	2.6269	0.9331

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
38	2	3.6690	0.3740	2.8163	0.4666	2.4383	0.4259
<b>43</b>	<b>2</b>	3.9427	0.9999	<b>5.0562</b>	<b>1.0000</b>	<b>4.0296</b>	<b>1.0000</b>
46	2	5.9045	0.6557	4.9939	0.9625	4.2328	0.9580
50	2	4.4377	0.9948	6.3393	1.0000	5.1962	0.9999
<b>51</b>	<b>2</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
<b>57</b>	<b>2</b>	7.5139	0.9977	<b>6.2250</b>	<b>1.0000</b>	<b>4.6150</b>	<b>1.0000</b>
58	2	8.1430	0.6769	7.1978	0.9193	5.4153	0.9156
62	2	3.8652	0.9960	3.0641	0.8693	1.9817	0.8497
73	2	2.5267	0.9600	2.4561	0.9970	1.8017	0.9894
<b>77</b>	<b>2</b>	4.3581	0.9814	<b>6.4074</b>	<b>1.0000</b>	<b>5.6031</b>	<b>1.0000</b>
94	2	4.2574	0.9567	4.5916	0.9291	3.5605	0.9225
<b>178</b>	<b>2</b>	4.4372	0.9949	<b>6.4074</b>	<b>1.0000</b>	<b>5.6031</b>	<b>1.0000</b>
197	2	6.8246	0.9860	7.3036	0.9909	5.9481	0.9880
<b>198</b>	<b>2</b>	5.5163	0.9215	<b>6.3246</b>	<b>1.0000</b>	<b>5.0879</b>	<b>1.0000</b>
201	2	2.4247	0.5599	2.4971	0.4695	2.0955	0.4368
<b>204</b>	<b>2</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
205	2	1.6579	0.5761	1.6152	0.6299	1.4590	0.6054
<b>210</b>	<b>2</b>	0.2646	0.9252	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
<b>212</b>	<b>2</b>	5.6692	0.5589	<b>5.0562</b>	<b>1.0000</b>	<b>4.0296</b>	<b>1.0000</b>
214	2	8.1190	0.7069	4.3917	0.5350	3.4123	0.4811
217	2	5.2172	0.2670	4.9732	0.2331	4.3655	0.1972
218	2	6.7121	0.9262	5.5600	0.1032	5.0568	0.0752
220	2	3.5427	0.4380	3.3903	0.3906	3.0595	0.3541
222	2	4.3997	0.6183	4.0985	0.1503	3.8358	0.1271
<b>226</b>	<b>2</b>	4.3731	0.3908	<b>3.5097</b>	<b>1.0000</b>	<b>2.9098</b>	<b>1.0000</b>
227	2	4.8292	0.3590	3.8792	0.8679	3.2172	0.8445
228	2	5.3784	0.2321	4.9405	0.2298	4.1640	0.1823
229	2	5.2951	0.2537	3.7003	0.5585	2.9112	0.5054
230	2	6.5927	0.9993	5.0247	0.2164	4.4858	0.1779
<b>232</b>	<b>2</b>	4.4155	0.7805	<b>9.6667</b>	<b>1.0000</b>	<b>7.7807</b>	<b>1.0000</b>
233	2	8.7447	0.2280	10.8486	0.0009	9.8961	0.0048
236	2	3.3083	0.4426	10.7658	0.0082	9.3477	0.0448
237	2	7.4470	0.4177	10.8377	0.0015	9.8405	0.0077
<b>240</b>	<b>2</b>	0.0169	0.9630	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
241	2	1.9915	0.6295	1.4947	0.5414	1.3441	0.5100
242	2	4.2560	0.9690	3.3110	0.5057	3.0030	0.4793

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
243	2	3.9120	0.2647	3.3973	0.3915	3.1046	0.3591
244	2	2.5174	0.9963	2.5485	0.4707	2.2923	0.4393
246	2	6.1468	0.9712	5.0110	0.2351	4.6170	0.2018
18	3	5.1029	0.6673	4.5431	0.6601	3.4291	0.5699
22	3	4.7351	0.8053	4.0192	0.8740	2.6205	0.8076
30	3	8.2934	0.3914	1.8822	<u>1.0000</u>	0.4181	<u>1.0000</u>
<b>45</b>	<b>3</b>	4.1107	0.9999	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
<b>60</b>	<b>3</b>	3.7936	0.7492	<b>0.9134</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.5322</b>	<b>1.0000</b>
<b>90</b>	<b>3</b>	1.1451	0.9937	<b>0.9134</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.5322</b>	<b>1.0000</b>
<b>105</b>	<b>3</b>	<b>0.1451</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
126	3	5.2229	0.9925	4.4457	0.9797	3.3005	0.9715
<b>150</b>	<b>3</b>	0.0726	0.9715	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
161	3	5.0171	0.9921	4.3989	0.9726	2.9997	0.9516
182	3	5.0748	0.8158	4.6099	0.6379	3.4097	0.5480
41	4	4.4215	0.9244	3.3402	0.8589	2.1464	0.7690
54	4	4.7445	0.9380	3.5125	0.9772	2.1520	0.9548
193	4	8.4343	0.4560	3.0861	0.9236	1.5514	0.9270
225	4	9.7681	0.0904	1.7866	0.9771	0.3309	0.9938

Tabela 4. Ganho de informação e razão de correlação total para n=12

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
0	1	12.0000	0.0000	11.8631	0.0000	11.0305	0.0000
248	1	10.9633	0.0772	11.8629	0.0000	11.0140	0.0000
249	1	11.9093	0.0329	11.8629	0.0000	11.0142	0.0000
250	1	11.7678	0.0987	11.8630	0.0000	11.0225	0.0000
251	1	11.9934	0.0027	11.8630	0.0000	11.0225	0.0000
252	1	11.9967	0.0030	11.8630	0.0000	11.0225	0.0000
253	1	12.0000	0.0000	11.8630	0.0000	11.0226	0.0000
254	1	11.9967	0.0030	11.8631	0.0000	11.0304	0.0000
1	2	6.0118	0.9647	4.3124	0.9269	3.8585	0.9132
2	2	7.3975	0.0940	5.4670	0.2351	5.0408	0.2017
3	2	3.4231	0.9635	2.7444	0.9455	2.4045	0.9344
4	2	5.9082	0.1469	4.6116	0.1342	4.3332	0.1121
5	2	3.1116	0.9285	2.7524	0.9459	2.4113	0.9348

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
6	2	5.1189	0.3888	4.5158	0.5773	3.7770	0.5120
7	2	5.9856	0.9944	10.6969	1.0000	8.7545	0.9997
9	2	6.2106	0.9567	5.2452	0.9353	3.7604	0.9000
10	2	4.1649	0.2864	3.7057	0.3914	3.3865	0.3590
11	2	5.4050	0.9999	9.1705	1.0000	5.6743	0.9993
12	2	3.8657	0.3916	3.7061	0.3915	3.3868	0.3591
13	2	7.3354	0.9649	10.6700	1.0000	8.7279	0.9993
14	2	6.9360	0.5401	9.3649	1.0000	6.4017	0.9973
<b>15</b>	<b>2</b>	0.0284	0.9992	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
<b>19</b>	<b>2</b>	<b>4.4312</b>	<b>1.0000</b>	10.2245	1.0000	6.9111	0.9999
<b>23</b>	<b>2</b>	4.8031	<u>1.0000</u>	<b>10.6072</b>	<b>1.0000</b>	<b>8.4314</b>	<b>1.0000</b>
24	2	6.1840	0.1898	5.4814	0.2167	4.8971	0.1797
25	2	5.2543	0.9866	4.6353	0.9800	2.9800	0.9617
26	2	3.2749	0.6617	2.3692	0.8083	1.7615	0.7537
27	2	2.5162	0.9884	2.2044	0.9847	1.7538	0.9824
28	2	6.0127	0.9416	10.1677	1.0000	6.5555	0.9998
<b>29</b>	<b>2</b>	1.6331	0.9930	<b>1.6753</b>	<b>1.0000</b>	<b>1.4720</b>	<b>1.0000</b>
33	2	4.3519	0.8883	3.9283	0.8923	3.3398	0.8662
35	2	3.9843	0.9724	3.9851	0.8650	2.9320	0.8386
36	2	8.1266	0.0737	6.5768	0.0638	6.0508	0.0455
37	2	5.6552	0.9587	4.5088	0.9431	3.0788	0.9306
38	2	3.4141	0.4347	3.0763	0.4666	2.6628	0.4259
<b>43</b>	<b>2</b>	5.7458	0.9999	<b>9.4076</b>	<b>1.0000</b>	<b>6.4673</b>	<b>1.0000</b>
46	2	6.1879	0.7170	5.4573	0.9625	4.6255	0.9581
50	2	4.9581	0.9572	10.3458	1.0000	7.2818	0.9999
<b>51</b>	<b>2</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
<b>57</b>	<b>2</b>	8.8859	<u>1.0000</u>	<b>9.8724</b>	<b>1.0000</b>	<b>5.7901</b>	<b>1.0000</b>
58	2	8.8538	0.8375	9.1855	0.9046	5.7138	0.9108
62	2	5.0852	0.9783	4.4037	0.9323	2.3477	0.8830
73	2	4.3257	0.9635	4.1166	0.9965	2.5287	0.9893
<b>77</b>	<b>2</b>	4.7242	0.9682	<b>10.6072</b>	<b>1.0000</b>	<b>8.4314</b>	<b>1.0000</b>
94	2	4.8790	0.9885	8.9317	0.9058	4.7377	0.9148
<b>178</b>	<b>2</b>	4.9578	0.9573	<b>10.6072</b>	<b>1.0000</b>	<b>8.4314</b>	<b>1.0000</b>
197	2	7.4741	0.9821	10.4449	1.0000	7.6695	0.9978
<b>198</b>	<b>2</b>	6.0131	0.9324	<b>10.3312</b>	<b>1.0000</b>	<b>7.1215</b>	<b>1.0000</b>
201	2	2.6352	0.5459	2.7661	0.4743	2.3094	0.4402
<b>204</b>	<b>2</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
205	2	1.8069	0.5713	1.7622	0.6299	1.5918	0.6054
210	2	0.2001	0.9861	0.0620	0.9996	0.0363	0.9996
<b>212</b>	<b>2</b>	6.1928	0.5834	<b>9.4076</b>	<b>1.0000</b>	<b>6.4673</b>	<b>1.0000</b>
214	2	5.1102	0.9655	4.6487	0.6824	3.6478	0.6075
217	2	5.6595	0.2863	5.4256	0.2331	4.7625	0.1972
218	2	6.7277	0.9966	6.0657	0.1033	5.5166	0.0752
220	2	3.8652	0.4233	3.6985	0.3906	3.3377	0.3541
222	2	4.7980	0.5614	4.4711	0.1503	4.1845	0.1271
<b>226</b>	<b>2</b>	4.8855	0.3928	<b>4.8729</b>	<b>1.0000</b>	<b>3.9663</b>	<b>1.0000</b>
227	2	4.8331	0.3698	4.7018	0.8802	3.7120	0.8524
228	2	5.8775	0.2538	5.3899	0.2298	4.5433	0.1823
229	2	5.0590	0.3979	3.9467	0.6617	3.1185	0.5957
230	2	7.0931	0.9899	5.4817	0.2165	4.8938	0.1780
<b>232</b>	<b>2</b>	4.8016	0.7413	<b>10.6072</b>	<b>1.0000</b>	<b>8.4314</b>	<b>1.0000</b>
233	2	9.4717	0.2346	11.8348	0.0009	10.7957	0.0048
236	2	3.6091	0.4395	11.7444	0.0082	10.1974	0.0448
237	2	8.1243	0.4170	11.8230	0.0015	10.7351	0.0077
<b>240</b>	<b>2</b>	0.0387	0.9186	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>	<b>0.0000</b>	<b>1.0000</b>
241	2	2.1014	0.6609	1.6306	0.5414	1.4663	0.5100
242	2	4.5260	0.9234	3.6120	0.5058	3.2760	0.4794
243	2	4.1114	0.2931	3.7061	0.3915	3.3868	0.3591
244	2	2.6381	0.9994	2.7798	0.4707	2.5005	0.4393
246	2	6.5741	0.9102	5.4668	0.2351	5.0369	0.2019
18	3	5.4850	0.5728	4.9312	0.6297	3.7099	0.5390
22	3	8.8848	0.3983	6.6699	0.6261	3.5737	0.6611
30	3	4.6560	0.8994	1.7843	0.9831	0.3332	0.9958
45	3	7.6936	0.9999	1.6755	1.0000	0.0998	0.9999
<b>60</b>	<b>3</b>	4.1853	0.9940	<b>3.5731</b>	<b>1.0000</b>	<b>1.7232</b>	<b>1.0000</b>
<b>90</b>	<b>3</b>	4.0586	0.9980	<b>3.7778</b>	<b>1.0000</b>	<b>2.6528</b>	<b>1.0000</b>
<b>105</b>	<b>3</b>	8.1250	0.9875	<b>7.4925</b>	<b>1.0000</b>	<b>4.7941</b>	<b>1.0000</b>
126	3	5.3877	0.9935	4.5984	0.9971	3.3678	0.9891
<b>150</b>	<b>3</b>	8.1250	0.9895	<b>7.4925</b>	<b>1.0000</b>	<b>4.7941</b>	<b>1.0000</b>
161	3	5.3009	0.9956	4.5606	0.9977	2.9457	0.9836
182	3	5.3737	0.7992	5.0251	0.6066	3.6983	0.5182
41	4	5.9904	0.9579	4.9622	0.9321	2.7975	0.8301
54	4	6.5286	0.8871	6.6093	0.9993	2.8375	0.9788
193	4	6.7149	0.9740	4.5883	0.9826	1.7759	0.9589

Regra	Classe	$p = 0$		$p = 0.001$		$p = 0.01$	
		$G^\sigma$	$r^\sigma$	$G^\pi$	$r^\pi$	$G^\pi$	$r^\pi$
225	4	9.6682	0.2317	4.4156	0.1840	0.5267	0.9178

De acordo com a Equação 26, o ganho de informação é máximo ( $G^\sigma = n$ ) se, e somente se, a entropia  $H^\sigma = 0$ , e está relacionado a  $\sigma_i = 1$  para qualquer estado  $i$  do espaço de estados do autômato ou, de forma equivalente,  $\sigma_{c,0} = 1$  ou  $\sigma_{c,1} = 1$  para toda célula  $c$  de um estado global  $i$ . Este último acontece se  $H_c^\sigma = 0$  para cada célula  $c$ , o que implica em  $C^\sigma = 0$  e  $r^\sigma = 0$ , conforme Equações 32 e 33.

A condição para  $\sigma_i = 1$  é o mapa de atratores ser composto por uma única *bacia* e que o seu ciclo atrator tenha apenas um estado – uma vez alcançado, ele se repete perpetuamente.

Investigando os resultados apresentados nas Tabela 3 e Tabela 4 para as regras 0, 251 e 253 verificou-se que este fato realmente ocorre, exceto para a regra 251 com  $n = 12$  cujo mapa de atratores não possui uma única bacia e, portanto, justifica  $r^\sigma \neq 0$ .

No estado estacionário, o máximo de incerteza ( $H^\sigma = n$ ) implica em ganho mínimo ( $G^\sigma = 0$ ) e ocorre se  $\sigma_i = \frac{1}{2^n}$  para todo estado  $i$ , quando todas as bacias tem o mesmo tamanho e também a mesma quantidade de estados no ciclo atrator. A análise dos resultados revelou esta característica no mapa de atratores das regras 51 e 204, justificando os resultados apresentados nas Tabela 3 e Tabela 4. Vale ressaltar que essas regras são equivalentes entre si.

No que diz respeito à razão de correlação total, é esperado que  $G^\sigma = 0$  resulte em  $C^\sigma = 0$  e, conseqüentemente,  $r^\sigma = 1$  (Equação 33). No entanto, as Tabela 3 e Tabela 4 apresentam resultados nos quais  $r^\sigma = 1$  para  $G^\sigma > 0$ .

Se  $G^\pi = n$  sugere-se que ao permitir desvios no comportamento determinístico do autômato ( $p > 0$ ), a dinâmica trabalha para reduzir a incerteza. Não foi observada ocorrência de  $G^\pi = n$ . Ao contrário,  $G^\pi = 0$  ocorre algumas vezes e deve ser associado a  $H^\pi = n$  e uma distribuição uniforme  $\pi$  (onde  $\pi_i = \frac{1}{2^n}$ , para todo estado  $i$ ). isso ocorre se, e somente se, a matriz de probabilidades de transição  $P$  é duplamente estocástica.

Na Tabela 3, observa-se  $G^\pi = 0$  para algumas regras da classe 2 (15, 51, 204, 210 e 240) e algumas da classe 3 (45, 105 e 150). Na análise dos resultados, verificou-se que as matrizes de probabilidades de transição são duplamente estocásticas, exceto as regras 51 e 204 cujas matrizes são apenas simétricas.

Ainda, para as regras 15 e 204, com  $n = 11$ , as matrizes não são duplamente estocásticas e, portanto,  $G^\pi = 0$  implica em problemas de aproximação dos valores em 4 casas decimais.

Como no caso determinístico, também foram observadas situações nas quais a razão de correlação total é máxima ( $r^\pi = 1$ ) e existe ganho de informação ( $G^\pi > 0$ ).

Se ignorarmos que  $G^\sigma = 0$  se, e somente,  $C^\sigma = 0$  e  $r^\sigma = 1$ , outras regras da Tabela 3 e Tabela 4 poderão ser analisadas por apresentarem máxima razão de correlação total: para  $n = 11$  algumas regras da classe 2 (11, 15, 19 e 23) e a regra 105 (classe 3); para  $n = 12$  a regra 19.

Nenhuma dessas regras apresentam mapa de atratores com *bacias* de mesmo tamanho e com mesma quantidade de estados no ciclo atrator, por isso sugere-se que a ocorrência verificada ( $r^\sigma = 1$  para  $G^\sigma > 0$ ) deva-se a um arranjo diferenciado das *bacias* ou à precisão utilizada (4 casas decimais) que é insuficiente e  $r^\sigma$  seja, de fato, menor que 1.

De forma similar, se a mesma condição for ignorada para as variáveis referentes ao cenário probabilístico ( $G^\pi, C^\pi, r^\pi$ ), outras regras poderão ser consideradas por apresentarem máxima razão de correlação total para ganho de informação diferente de zero: para  $n = 11$  algumas regras da classe 2 (23, 29, 43, 57, 77, 178, 198, 212, 226 e 232) e também algumas regras da classe 3 (45, 60 e 90); para  $n = 12$  tal fato foi observado para todas essas regras e também para as regras 105 e 150 da classe 3.

Ao analisar o comportamento dos autômatos para estas regras, não foi encontrado nenhum padrão que permita explicar o porquê da máxima razão de correlação total para os valores de  $p$  e  $n$ .

Em respeito à correlação total mínima, no cenário probabilístico foi observado que  $r^\pi = 0$  para  $G^\pi \neq n$ , contrário portanto ao observado no cenário determinístico. Conforme os resultados apresentados nas Tabela 3 e Tabela 4, somente as regras da classe 1 (comportamento homogêneo) tem  $r^\pi = 0$ .

Os campos de bacias atratores de todas as regras da classe 1 são caracterizados pela concentração de praticamente todos os estados em uma única bacia e um único estado no ciclo atrator. Adicionalmente, este atrator concentra a maior probabilidade no estado estacionário e como resultado o autômato é encontrado, a longo prazo, em uma situação de baixa entropia  $H^\pi$  e com entropia local  $H_c^\pi$  significativamente superior a  $H^\pi$ . O baixo valor da entropia é a quantidade que implica o ganho aquém do valor de  $n$ .



Se forem ignorados os casos de ganho de informação e razão de correlação total nulos, uma inspeção rápida nas Tabela 3 e Tabela 4 revela que poucas regras apresentam correlação total  $C^\sigma < 0,6$  ou  $C^\pi < 0,6$ .

Este valor limite (0,6) foi escolhido arbitrariamente mas refere-se à incerteza esperada, no estado estacionário, se fossem consideradas todas as distribuições de probabilidade possíveis dos  $2^n$  estados do autômato. Se os pesos são o mesmos então o valor esperado de  $H^p$  é aproximado por  $n - (1 - \gamma)/\ln 2$ , onde  $\gamma \approx 0,57722$  é a constante Euler.

O valor esperado de  $G^p$  é aproximado por  $(1 - \gamma)/\ln 2 \approx 0,6$  e, portanto, constitui um limite superior para a correlação total  $C^p$  na Equação 32. Por meio desse limite, mais regras poderão ser estudadas por apresentarem ganho de informação e assim, juntamente com as regras que apresentaram  $r^\pi = 1$  observa-se que os autômatos elementares tem notável desempenho nesta propriedade emergente, com ganho de informação além do que é gerado pelas suas células.

Uma varredura nas Tabela 3 e Tabela 4 permite comparar os cenários determinístico e probabilísticos em relação ao ganho de informação. Observa-se, como esperado, que alterando  $p$  resulte uma sequência de decremento do valor do ganho de informação: iniciando com  $G^p$  ( $p = 0$ ), o incremento de  $p$  produz uma sequência de ganhos  $G^\pi$  cujos valores não superam  $G^p$ .

Isso deve-se ao fato de que ao incrementar  $p$  a dinâmica do autômato desvia do comportamento tradicional e então produz mais incerteza e, logicamente, menor ganho de informação.

Poucas exceções existem, mas para uma em particular (regra 236 da classe 2) observa-se que  $\frac{G^\pi}{G^\sigma} \approx 3,254$ , ou seja, o ganho de informação no cenário probabilístico com  $p = 0,01$  é mais que o triplo do ganho de informação apresentado no cenário determinístico.

Com exceção das regras de classe 1, que dificilmente exibem a razão de correlação total não nula, os valores destacados nas Tabela 3 e Tabela 4 referem-se à quantidade de correlação que corresponde a todo o ganho de informação.

As regras em questão são das classes 2 e 3 e exibem padrões espaço-temporais denominados periódico e caótico, respectivamente. No caso das regras 54 e 193 da classe 4, elas geram correlação total substancial e embora as razões de correlação total sejam maiores que 0,9 (exceto  $r^p$  para a regra 193 e  $n = 11$ , regra 54 e  $n = 12$ ) o ganho de

informação é menos expressivo que aquele observado para as outras regras. Esta percepção sugere que, principalmente em relação à regra 193, a capacidade de ganhar informação é menor que a capacidade de realizar computação universal.

Esta percepção de ganho de informação modesto nas regras de classe 4 pode ser atribuída às características de suas *bacias* de atratores, compostas por longos transientes e longos ciclos atratores. No caso determinístico, isso sugere que a distribuição de probabilidades  $\sigma$  está, provavelmente, mais concentrada em poucos estados e não espalhada a ponto de se assemelhar a uma distribuição uniforme, o que converge para valores médios de  $H^\sigma$  e  $G^\sigma$ .

Igualmente, no caso probabilístico, as características do campo de bacias de atratores das regras de classe 4 influenciam os resultados obtidos uma vez que, de acordo com a Equação 17, com  $p < 0,5$  é mais provável que o estado  $i$  seja sucedido pelo estado  $k_i$  do que por qualquer outro. Portanto, os resultados sugerem, para a distribuição  $\pi$ , propriedades similares às daquelas da distribuição  $\sigma$  e efeitos semelhantes na entropia  $H^\pi$  e ganho de informação  $G^\pi$ .

## 7. ANÁLISE QUALITATIVA X ANÁLISE QUANTITATIVA

Nesta seção, será realizada análise quantitativa e qualitativa, confrontando os valores apresentados nas Tabela 1, Tabela 3 e Tabela 4 com as características do diagrama espaço-temporal – interações entre os estados globais – e do mapa de bacias de atratores – organização dos estados globais.

Os diagramas espaço-temporais foram gerados para  $n = 150$  e  $n = 151$ , valores escolhidos arbitrariamente para possibilitar análise de sistemas com grande número de componentes, mais próximo da realidade. Estes diagramas também contemplam os três cenários definidos para evolução do autômato ( $p = 0, p = 10^{-3}, p = 10^{-2}$ ), cada um representado em uma coluna das figuras. Em alguns casos duas regras serão apresentadas na mesma figura, para melhor visualização da característica destacada na análise, cada uma em uma linha.

Ainda, para melhor efeito visual e sem prejuízo na análise do padrão comportamental, em alguns casos os diagramas espaço-temporais foram recortados de forma que as imagens apresentadas consideram apenas os 670 últimos passos de evolução.

Vale ressaltar a importância das formulações matemáticas apresentadas na Seção 4.2, em especial a Distância *Hellinger* (Equação 35) para comparar as distribuições de probabilidades no estado estacionário.

Os valores apresentados na Tabela 1 foram utilizados para avaliar se no modelo proposto (evolução probabilística) existe garantia de que no futuro distante (estado estacionário) as distribuições de probabilidades sejam semelhantes às da evolução determinística.

Os valores de razão de correlação total ( $r^\pi$ ) apresentados nas Tabela 3 e Tabela 4 foram utilizados para validar o ganho de informação, principalmente para identificar situações nas quais o sistema gera informação.

Vale ressaltar que nas situações em que as características das bacias de atratores são citadas, trata-se apenas de uma referência pois não foram obtidos os mapas de bacias de atratores para estes valores de  $n$ , tendo em vista limitações de processamento gráfico.

A análise qualitativa que se segue foi realizada por classes de regras, tendo em vista esta classificação corresponder ao padrão comportamental. O objetivo principal da referida análise é verificar se existe alguma característica na organização dos estados em bacias que possa explicar os resultados obtidos por meio das formulações matemáticas.

## 7.1 REGRAS DA CLASSE 1

### 7.1.1 Modelo para a Computação de Estados

A Figura 15 apresenta o diagrama espaço-temporal para o autômato de tamanho para  $n = 150$  evoluindo a partir da condição inicial canônica e por meio das regras 251 e 253.

Como pode ser observado na Figura 15, a introdução do erro ( $p$ ) produz uma perturbação no sistema representada pela alteração do estado global, e o que se observa é uma tentativa do sistema voltar para a situação de equilíbrio – o ciclo atrator.

Na análise qualitativa dos mapas das bacias de atratores (WUENSCHÉ e LESSER, 1992), verificou-se as seguintes características:

a) A regra 251 apresenta uma única bacia de atratores quando  $n$  é ímpar e duas bacias de atratores quando  $n$  é par. Para  $n$  par, uma bacia possui 2 estados atratores e a outra possui  $(2^n - 2)$  estados. Independente do tamanho do autômato ( $n$ ) as bacias características desta regra tem o ciclo atrator tem período igual a 1. A maior bacia, quando  $n$  é par possui árvore de transientes com  $O(n)$  níveis - ( $ml = n/2$ ) e mais de 95% dos estados da bacia são do tipo *Garden-of-Eden*.

b) A regra 253 apresenta uma única bacia com árvore de estados transientes com 2 níveis, 99% dos estados são do tipo *Garden-of-Eden* e o ciclo atrator tem período igual a 1, independente do valor de  $n$ .

Das características das bacias de atratores, pode-se supor que a introdução do erro na evolução do autômato pode, para a regra 251 e  $n$  par, resultar em um estado do tipo *Garden-of-Eden*, distante  $O(n)$  do ciclo atrator.

Na Tabela 1, verifica-se que  $H(\pi, \sigma) = 0,000000$  para todo  $(n, p)$  na regra 253 e para  $n$  ímpar na regra 251, corroborando com as características citadas na análise qualitativa dos mapas de bacias de atratores – só existe uma bacia e portanto a distribuição de probabilidade nas bacias após o erro é a mesma que a distribuição no cenário determinístico  $\pi_B = \sigma_B$ , para a bacia  $B$ .

Quando  $H(\pi, \sigma) > 0,000000$  (regras 249, 250, 251, 252 e 254) é preciso avaliar qual a probabilidade de um estado qualquer pertencer à mesma bacia após a introdução do erro. Quanto menor for o valor de  $H(\pi, \sigma)$  maior a probabilidade de que o erro produza alterações para estados da mesma bacia, de modo que a evolução se processe de forma mais próxima da evolução determinística – apenas deslocada alguns passos para trás.

Esta interpretação pode ser aplicada à regra 251 ao confrontar os resultados apresentados na Tabela 1 ( $H(\pi, \sigma) > 0,000000$  para  $n$  par e  $H(\pi, \sigma) = 0,000000$  para  $n$  ímpar) e o diagrama espaço-temporal nas Figura 15 e Figura 16.

Para a regra 253 o desvio na evolução produz alternância de estados dentro da mesma bacia (de um estado do tipo Garden-of-Eden para o atrator) e de forma intermitente, pois a árvore de transientes é muito curta.

Para ambas as regras, quanto maior o erro, maior a desordem. Nas Figura 15b (regra 251) e Figura 15e (regra 253) é notável em alguns passos de evolução o autômato está confinado no ciclo atrator, reproduzindo o comportamento estacionário da evolução determinística. Nas Figuras 15c e 15f, embora não seja tão notável, existe esta tentativa também. No caso da regra 251 (Figura 15c), o erro pode alterar o estado global do autômato para um estado do tipo Garden-of-Eden o que, para esta regra, significa voltar  $O(n)$  passos.

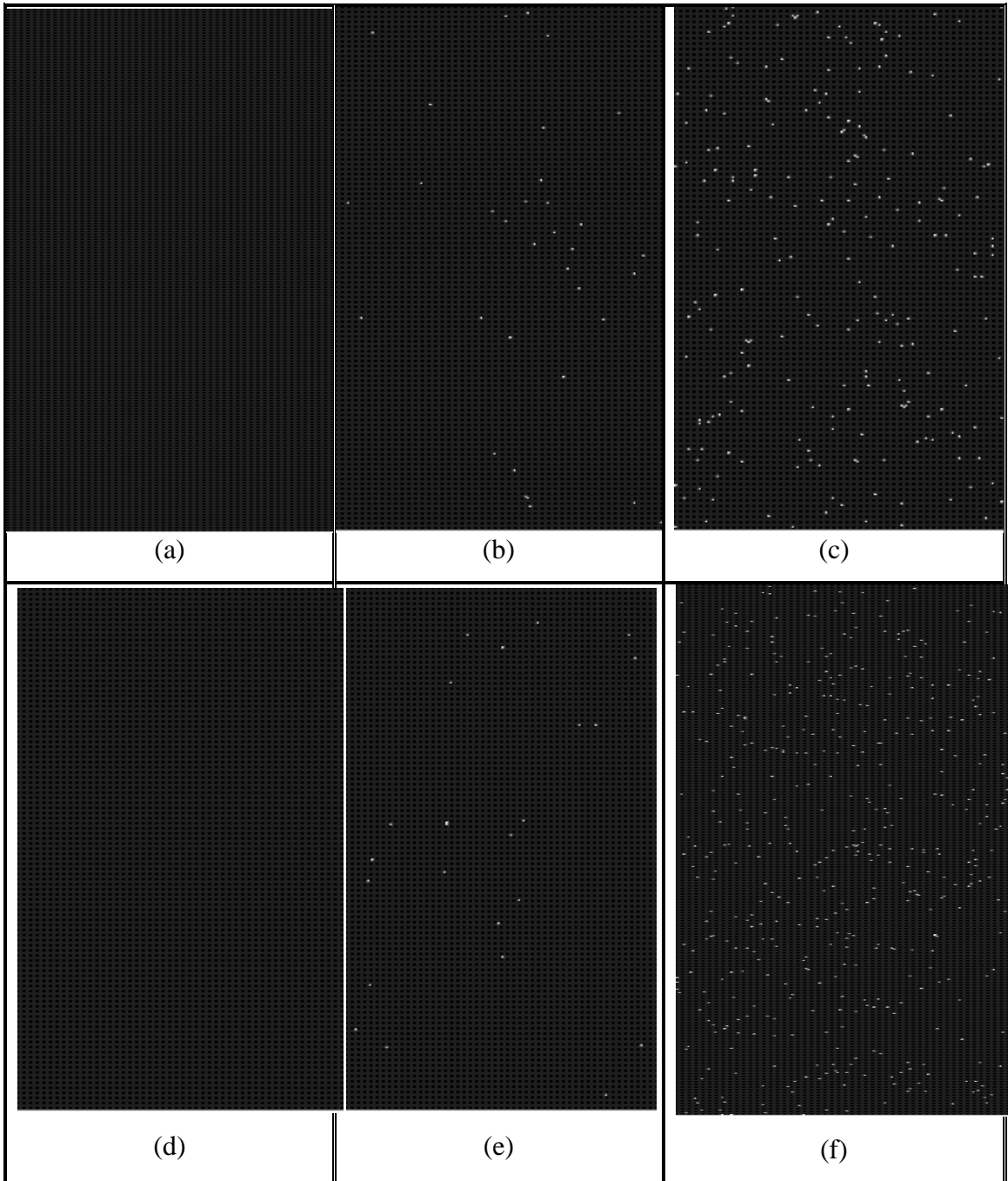


Figura 15. Regra 251 (a-c) e regra 253 (d-f),  $n = 150$ , condição inicial canônica

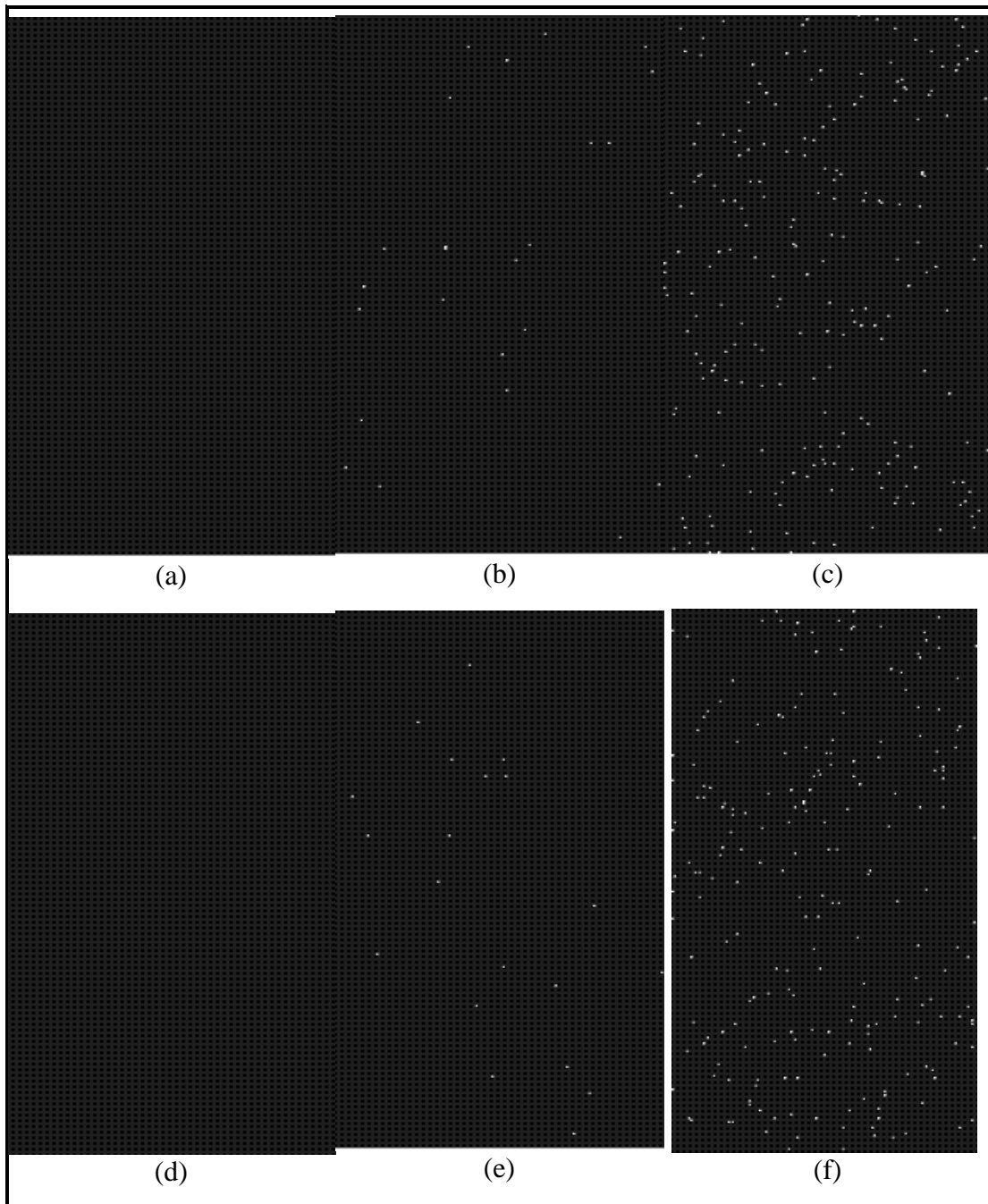


Figura 16. Regras 251 (a-c) e 253 (d-f),  $n = 151$ , condição inicial canônica

As mesmas suposições podem ser realizadas para as demais regras da classe 1 que apresentaram  $H > 0,000000$  para todos os valores de  $(n, p)$ , uma vez que elas apresentam as seguintes características em seus mapas de bacias de atratores:

- Regras 248 e 249: independente do valor de  $n$ , existem várias bacias menores, de tamanho  $n$ , e uma bacia se destaca das demais por concentrar

mais de 90% dos estados globais do autômato e árvore de transientes com  $(n - 2)$  níveis. O ciclo atrator possui  $n$  estados em todas as bacias.

- Regra 250: para  $n$  ímpar existem duas bacias sendo uma com  $2^n - 1$  estados e árvore de transientes com  $n$  níveis. Para  $n$  par sempre duas bacias se destacam em tamanho.
- Regra 252 e 254: independente do valor de  $n$ , existem duas bacias, sendo uma com  $2^n - 1$  estados e árvore de transientes com  $n$  níveis.

Ou seja, todas as regras da classe 1 apresentam uma *bacia* que sobressai em tamanho em relação às demais, concentrando mais de 95% dos estados globais, resultando portanto no padrão comportamental descrito na mesma análise anterior para a regra 251. Inclusive, os diagramas espaço-temporais dessas regras são semelhantes aos apresentados para a regra 251, em todos os cenários.

De maneira geral, foi observado que nem a condição inicial (estado global a partir do qual o autômato evoluiu) nem o tamanho do autômato influenciam no diagrama espaço-temporal das regras da classe 1.

Embora as características das bacias de atratores tenham sido identificadas e analisadas, os diagramas espaço-temporais não são suficientes para compreender o que está acontecendo na evolução. Apesar de valores distintos na Tabela 1, as regras 251 e 253 apresentaram o mesmo diagrama espaço-temporal.

Devido ao critério adotado para a geração dos diagramas espaço-temporais (10000 passos de evolução e registro apenas dos últimos 780 passos) o que se verifica nas Figuras 15b, 15c, 15e, 15f são apenas um subconjunto dos estados assumidos ao longo da evolução, a qual é caracterizada por uma tentativa do sistema em se aproximar da evolução determinística cada vez mais. Nesse sentido, a formulação matemática é essencial.

### 7.1.2 Modelo para a Integração da Informação

Observa-se que as regras 0, 251 e 253 apresentaram valores mínimos para a razão de correlação total sobre o ganho de informação global, significando nenhum ganho de informação é obtido além do que as células provêm localmente.

Conforme definido anteriormente, o ganho de informação está diretamente relacionado à entropia do sistema, de forma que o ganho é máximo quando o comportamento é ordenado ( $H^\sigma = 0$  para o cenário determinístico e  $H^\pi = 0$  para os



cenários probabilísticos), ou seja, o ganho é resultado da tentativa do sistema reduzir a incerteza.

Tal situação pode ser validada nas Figura 15 e Figura 16 para as regras 251 e 253 – maior a desordem quando  $p = 10^{-2}$ . Ao introduzir o erro, toda a dinâmica de evolução trabalha em prol de reduzir a incerteza, gerando alguma informação local.

Por fim, nem todos os valores de ganho de informação constantes nas Tabela 3 e Tabela 4 podem ser explicados apenas por meio da análise dos diagramas espaço-temporais. A Figura 17, por exemplo, apresenta a regra 248 e a única informação que pode ser obtida é que a entropia aumenta com respeito ao grau de incerteza ( $p$ ), a mesma inferência realizada para as regras 251 e 253.

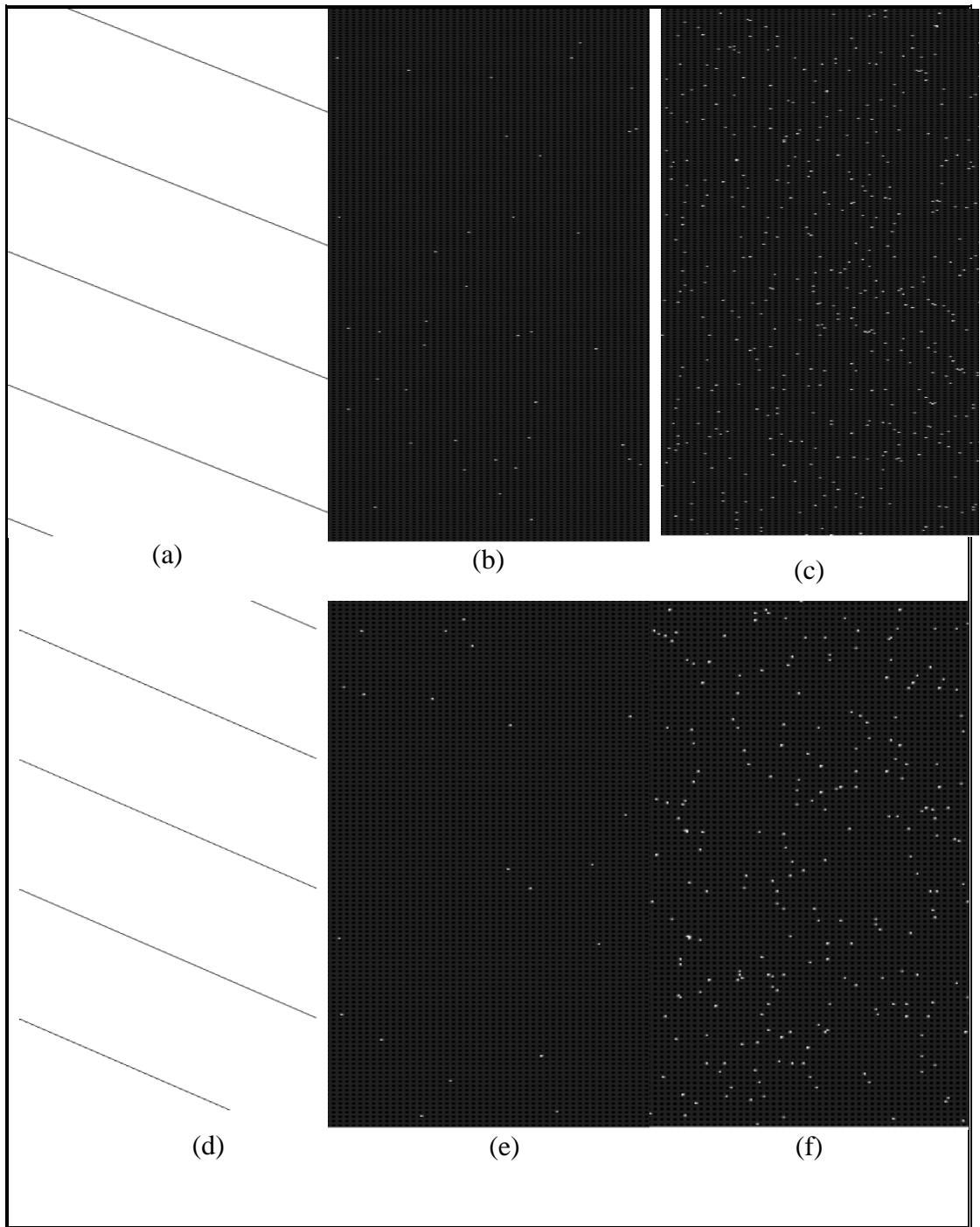


Figura 17. Regra 248,  $n = 150$ , condição inicial canônica (a-c) e  $n = 151$ , condição inicial aleatória (d-f)

## 7.2 REGRAS DA CLASSE 2

A Classe 2 agrupa a maior quantidade de regras, as quais apresentam uma diversidade de características nas bacias de atratores. Com o intuito de reagrupar as regras que se destacara, na análise qualitativa, a Tabela 5 apresenta um resumo das características das bacias de atratores. As linhas destacadas em negrito na Tabela 5 referem-se a regras cujas bacias de atratores são muito populosas, sendo o tamanho significativamente superior.

Tabela 5. Características das bacias de atratores

Regra	Ciclo Atrator	#bacias	Tamanho da maioria das bacias	Maior bacia		
				Tamanho	#Garden-of-Eden	#Transientes
12	1	Grande	Pequeno	$O(n)$	$O(n)$	1
27	$O(n)$	Grande	Pequeno	$O(n)$	$O(n)$	1
<b>29</b>	<b>2</b>	<b>Grande</b>	<b>Grande</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b>1</b>
38	$O(n)$	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	2
<b>57</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b>Grande</b>	<b>Grande</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b><math>O(n)</math></b>
205	1	Grande	Pequeno	$O(n)$	$O(n)$	1
210	$O(n)$	Grande	$O(n)$	$O(n)$	0	0
220	1	Grande	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	n
<b>222</b>	<b>1</b>	<b>Grande</b>	<b>Grande</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b>5</b>
226	N	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	n
227	N	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	2
243	N	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	1
<b>246</b>	<b>N</b>	<b>Grande</b>	<b>Grande</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b>n</b>
15	$O(n)$	Grande	Grande	$O(n)$	0	0
51	2	Grande	2	2	0	0
204	1	Grande	1	1	0	0
240	N	Grande	Grande	N	0	0
33	2	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	n
35	$O(n)$	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	n
<b>214</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b>Grande</b>	<b>Grande</b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b><math>O(n)</math></b>	<b>n</b>
217	1	Grande	Grande	$O(n)$	$O(n)$	n
229	$O(n)$	Pequeno	Grande	$O(n)$	$O(n)$	n
241	N	Pequeno	Grande	$O(n)$	$O(n)$	1

### 7.2.1 Modelo para a Computação de Estados

A Figura 18 apresenta o diagrama espaço-temporal das regras 15 e 240, enquanto a Figura 19 apresenta o diagrama espaço-temporal para as regras 51 e 204, ambos para  $n = 150$  e evolução a partir de uma condição inicial canônica. As regras foram assim agrupadas pelo fato de serem complementares.

Na Figura 18 observa-se que tanto para a regra 15 quanto para a regra 240 existe, nos modelos probabilísticos, uma tendência do sistema ao padrão apresentado para o modelo determinístico (Figuras 18a e 18d). É notável a perturbação adquirida com a introdução da incerteza na evolução – modelos probabilísticos.

Especificamente para a regra 240 parece que esta perturbação é maior com o aumento do valor de  $p$ . As mesmas observações podem ser estendidas à Figura 19 e o parâmetro  $p$  exerce maior influência sobre a evolução da regra 204.

Nas Figura 20 e Figura 21 ( $n = 151$  e condição inicial aleatória para as mesmas regras) observa-se que o tamanho do autômato não exerce qualquer influência na evolução temporal, porém o mesmo não se pode afirmar sobre o parâmetro  $p$ .

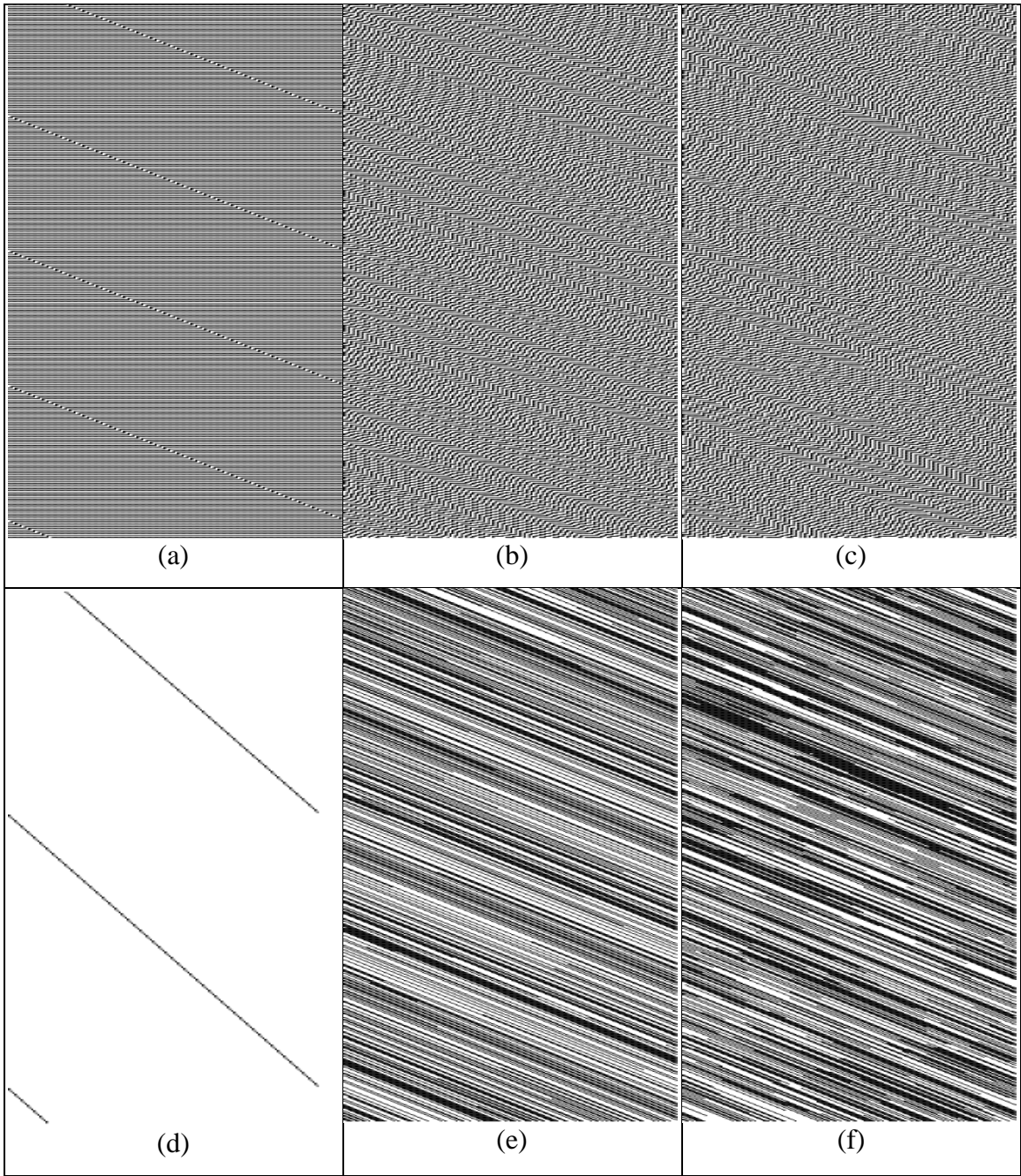


Figura 18. Regra 15 (a-c) e regra 240 (d-f),  $n = 150$  condição inicial canônica

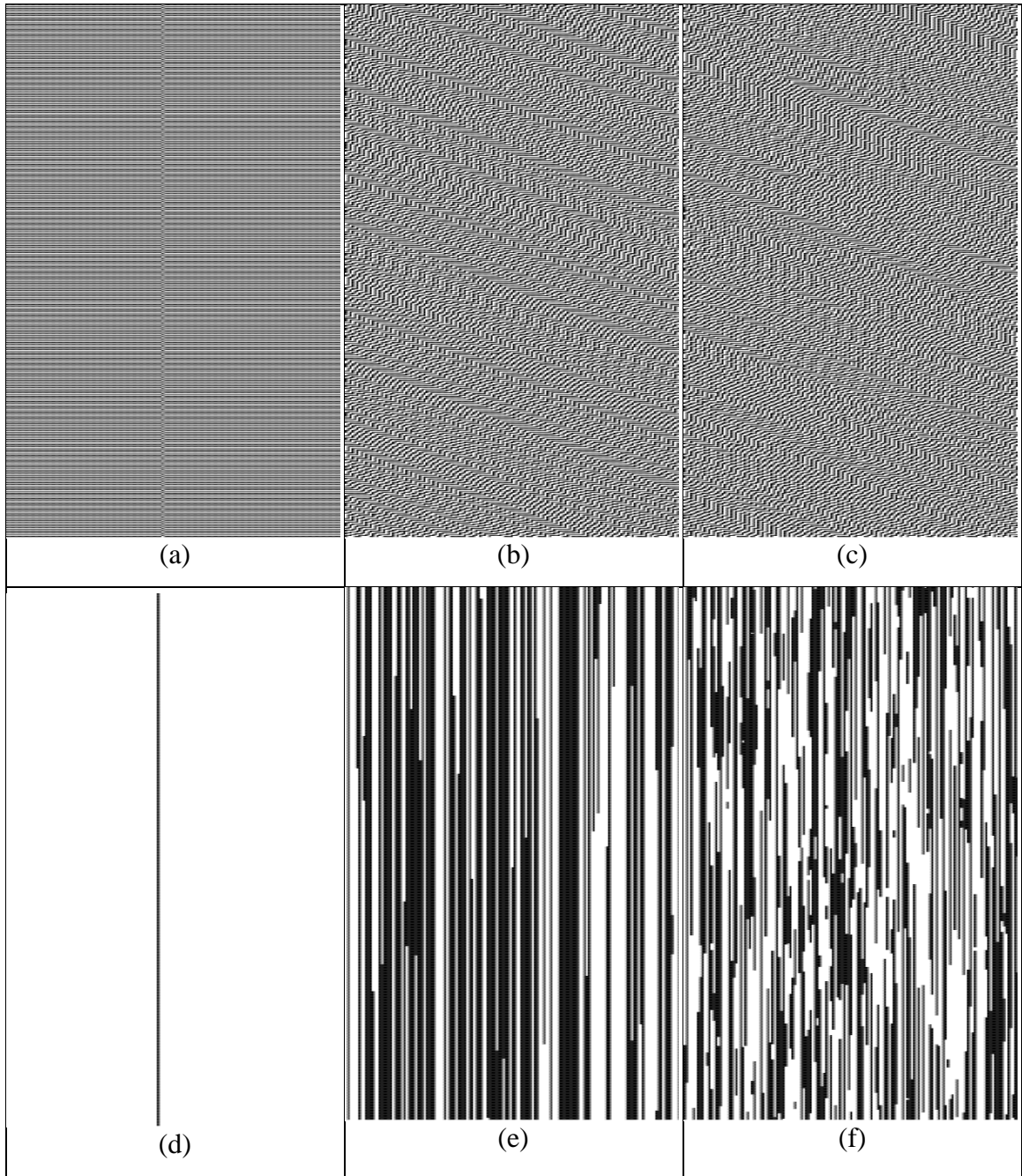


Figura 19. Regra 51 (a-c) e regra 204 (d-f)  $n = 150$  condição inicial canônica

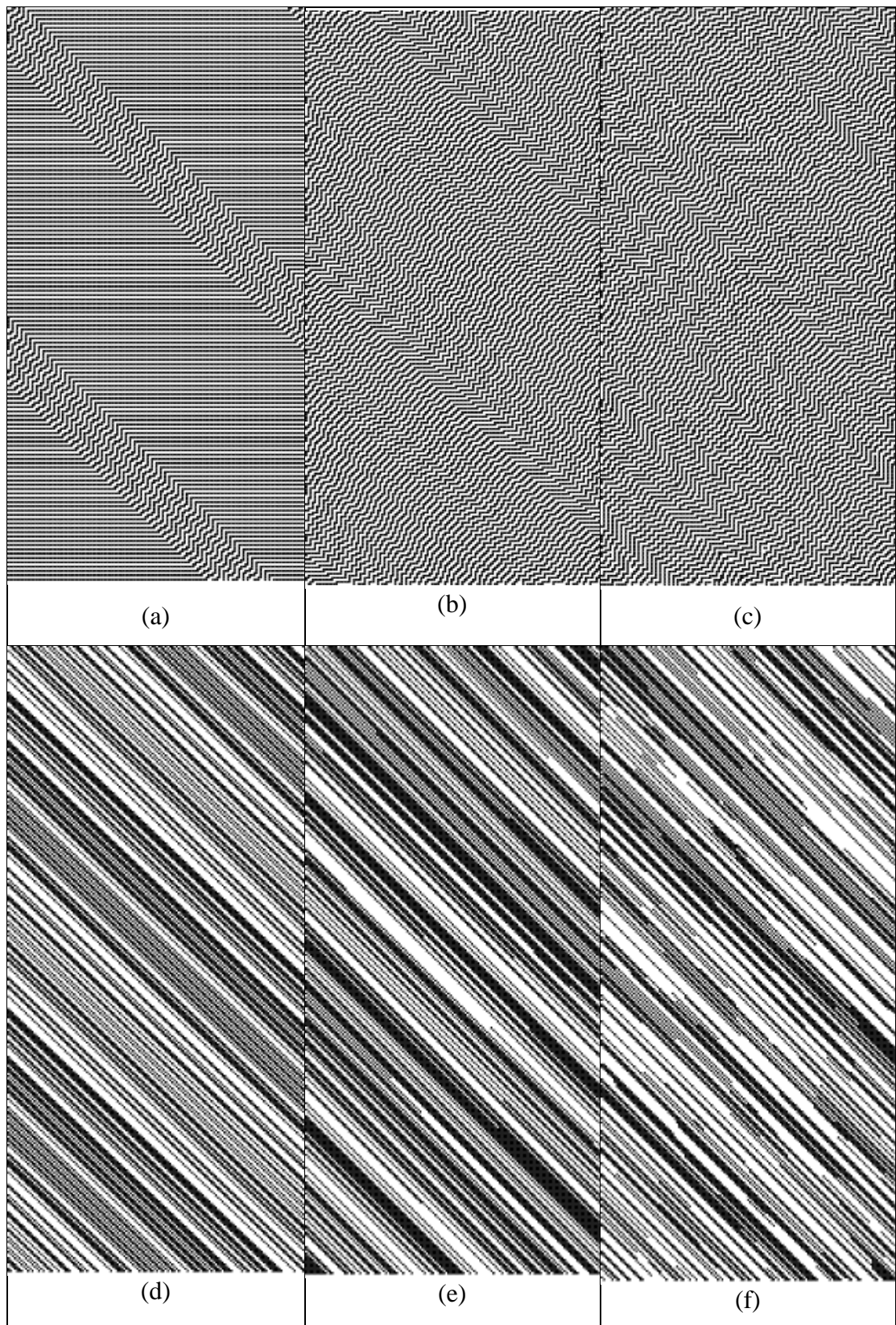


Figura 20. Regra 15 (a-c) e regra 240 (d-f),  $n = 151$  condição inicial aleatória

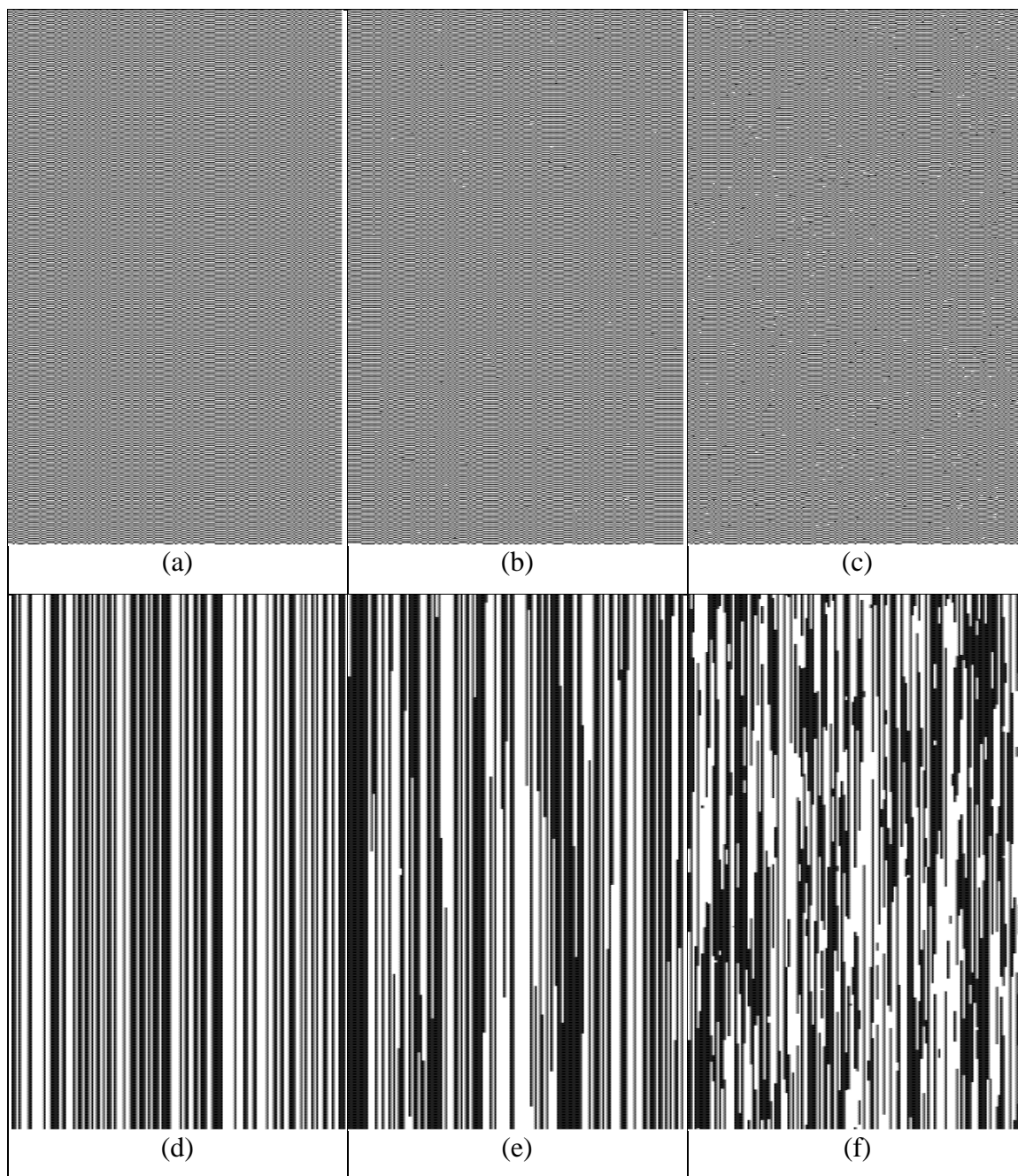


Figura 21. Regra 51 (a-c) e regra 204 (d-f)  $n = 151$  condição inicial aleatória

Além do que já foi comentado acima, dois aspectos chamam atenção na análise visual dos diagramas espaço-temporais constantes nas Figuras 18 a 21:

- a) o desvio no curso natural de evolução do autômato, que ocorre se  $p > 0$ , resulta em um padrão diferente do apresentado no modelo determinístico, porém o comportamento ainda é periódico. Tal resultado é esperado, visto que as regras 15, 51, 204 e 240 possuem uma característica peculiar: todos as bacias são ciclos atratores, ou seja, o sistema está sempre confinado em um estado (no caso das regras 51 e 204) ou em um grupo de  $O(n)$  estados (no caso das regras 15 e 240). Isso significa que



embora o parâmetro  $p$  cause um desvio, por resultar em  $f(i) \neq k_i$  (sendo  $i$  e  $k_i$  estados de uma mesma bacia,  $k_i$  é sucessor de  $i$  na evolução determinística), o novo estado pode até pertencer a outra bacia, porém é certo que o sistema ainda estará confinado em um ciclo atrator.

b) Curiosamente, o padrão observado nos cenários  $\{(n, p), n = 151 \text{ e } p = \{0, 10^{-3}, 10^{-2}\}\}$  com condição inicial aleatória (Figura 20 e Figura 21) são os mesmos observados nos cenários probabilísticos  $\{(n, p), n = 150 \text{ e } p = \{10^{-3}, 10^{-2}\}\}$  com condição inicial canônica (Figura 18 e Figura 19). Tal observação sugere, portanto, que o comportamento do sistema é indiferente ao tamanho do autômato e ao estado a partir do qual inicia-se a evolução do autômato. No entanto, infere-se que na definição do padrão espaço-temporal a incerteza proveniente da capacidade da célula alterar o estado de forma independente às demais células e contrária ao preconizado pela regra de transição é majoritária.

As regras 15 e 240 possuem bacias mais populosas, de tamanho  $O(n)$ , enquanto que as regras 51 e 204 as bacias tem, no máximo 2 estados.

Na Tabela 1 as regras 15, 51, 204 e 240 apresentaram  $H(\pi, \sigma) = 0,000000$  para todos os modelos  $\{(n, p), \text{para } n = \{10, 11, 12\} \text{ e } p = \{0, 10^{-3}, 10^{-2}\}\}$ . O valor de  $H(\pi, \sigma)$  significa o quanto as distribuições de probabilidades das bacias  $(\pi_B, \sigma_B)$  são semelhantes. Neste caso, então, como  $H(\pi, \sigma) = 0,000000$ , significa que para as regras 15, 51, 204 e 240 todos os modelos apresentam distribuição de probabilidades iguais.

Na análise visual dos diagramas espaço-temporais (Figuras 18 a 21) não é possível confirmar esta similaridade. Ao contrário do esperado, o que se observa são significativas diferenças na distribuição dos estados, quando comparados os modelos probabilísticos e determinístico.

Ao analisar as referidas distribuições verificou-se que, na verdade, o valor de  $H(\pi, \sigma)$  é próximo de 0 e não exatamente 0. E que a matriz de probabilidades de transição de estados é duplamente estocástica o que implica que a distribuição estacionária dos estados na bacias é uniforme. Para as regras 51 e 204 esta situação é consequência do fato de as matrizes serem simétricas ( $p_{ij} = p_{ji}$  para todos os estados  $i$  e  $j$ ) e corroboram com a organização dos estados nas bacias de atratores, detalhadas anteriormente.

Deve-se ressaltar que o comportamento apresentado nas Figuras 18 a 21 refere-se a uma janela de tempo (os últimos 670 passos de 10000 passos de evolução) numa situação

na qual o curso de evolução do autômato é desviado para uma sequência diferente da evolução natural. O que se observa nestas figuras quando  $p > 0$  é uma tendência em manter a evolução natural, com sucessores determinísticos, porém o erro capacita cada célula a alterar o valor de forma independente das demais e a sequência natural pode nunca mais voltar a ocorrer.

Como todos os estados são atratores, embora o modelo probabilístico permita transições entre as bacias, ele ainda garante que no futuro distante as probabilidades de distribuição de estados nas bacias sejam semelhantes àsquelas do caso determinístico sob escolha de estado inicial aleatório.

Seguindo esta linha de raciocínio, é importante ressaltar as regras para as quais as distribuições são parecidas. Portanto, foram analisadas as regras que apresentaram  $H(\pi, \sigma) < 0,1$ .

A seguir são apresentados os diagramas espaço-temporais para as regras 12, 29, 38, 57, 210, 214, 222, 226 e 243 (Figuras 22 a 37). Nos casos em o valor de  $n$  não representa diferenças significativas no comportamento, optou-se por apresentar o diagrama em um dos tamanhos ( $n = 150$  ou  $n = 151$ ). Apenas em situações onde há diferença, foram apresentados em ambos os tamanhos. A mesma decisão foi tomada para a condição inicial.

Na Figura 22 pode-se verificar que o comportamento nos modelos probabilísticos são semelhantes ao comportamento do modelo determinístico evoluindo a partir de uma condição inicial escolhida ao acaso. Tal fato sugere que, apesar do erro na evolução, o modelo garante que num futuro distante as distribuições de probabilidades sejam parecidas, corroborando para os resultados apresentados na Tabela 1 ( $H(\pi, \sigma) < 0,1$ ).

A regra 12 possui uma bacia que se destaca das demais com tamanho  $O(n)$  e um nível de transientes e um estado no ciclo atrator. Logo, o que se observa na Figura 22 para a condição inicial canônica (a-c) é que a introdução do erro resulta em um estado do tipo *Garden-of-Eden*. Tal situação, portanto, não configura mudança de bacia mas também não é explicada somente pela análise visual do diagrama, necessitando da formulação matemática.

A mesma análise pode ser feita para as regras 29 (Figura 23) e 38 (Figura 24).

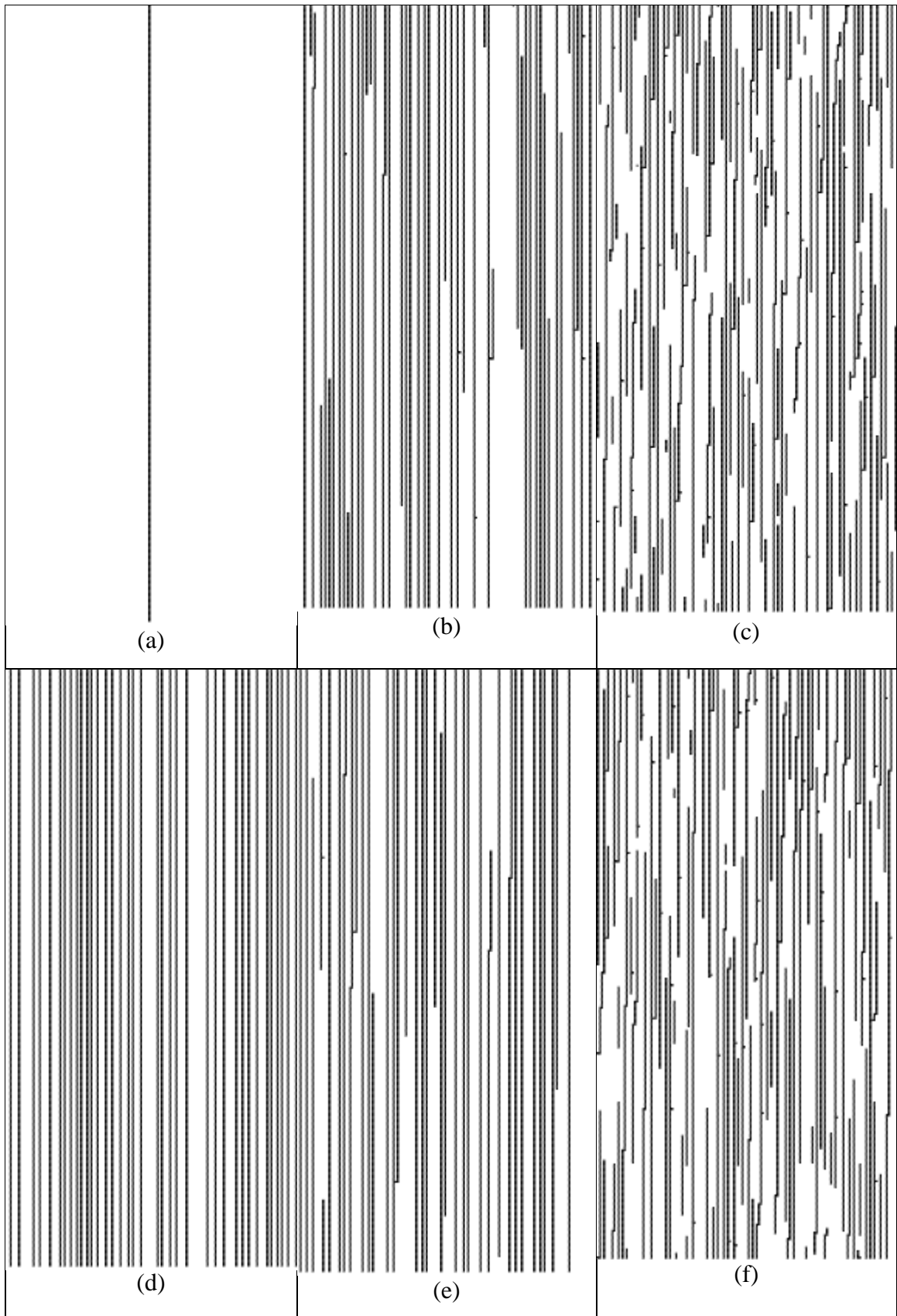


Figura 22. Regra 12,  $n = 150$ , condição inicial canônica (a-c) e  $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f)

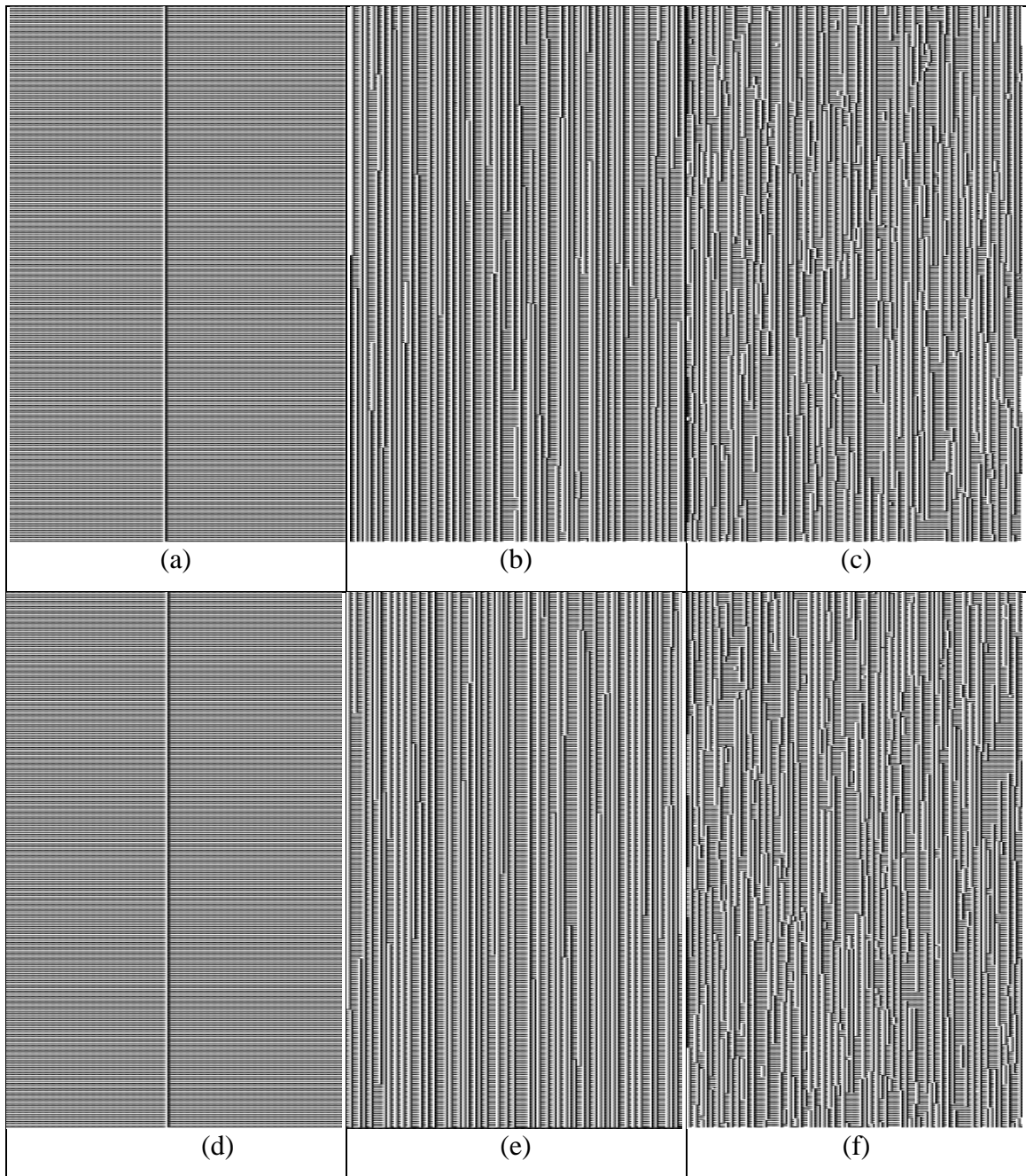


Figura 23. Regra 29,  $n = 151$ , condição inicial canônica (a-c) e  $n = 151$ , condição inicial aleatória (d-f)

Assim como discutido anteriormente, é possível observar nos diagramas espaço-temporais da regra 38 (Figura 24) uma tendência do sistema voltar ao comportamento do modelo determinístico no estado estacionário – a sequência de estados do ciclo atrator.

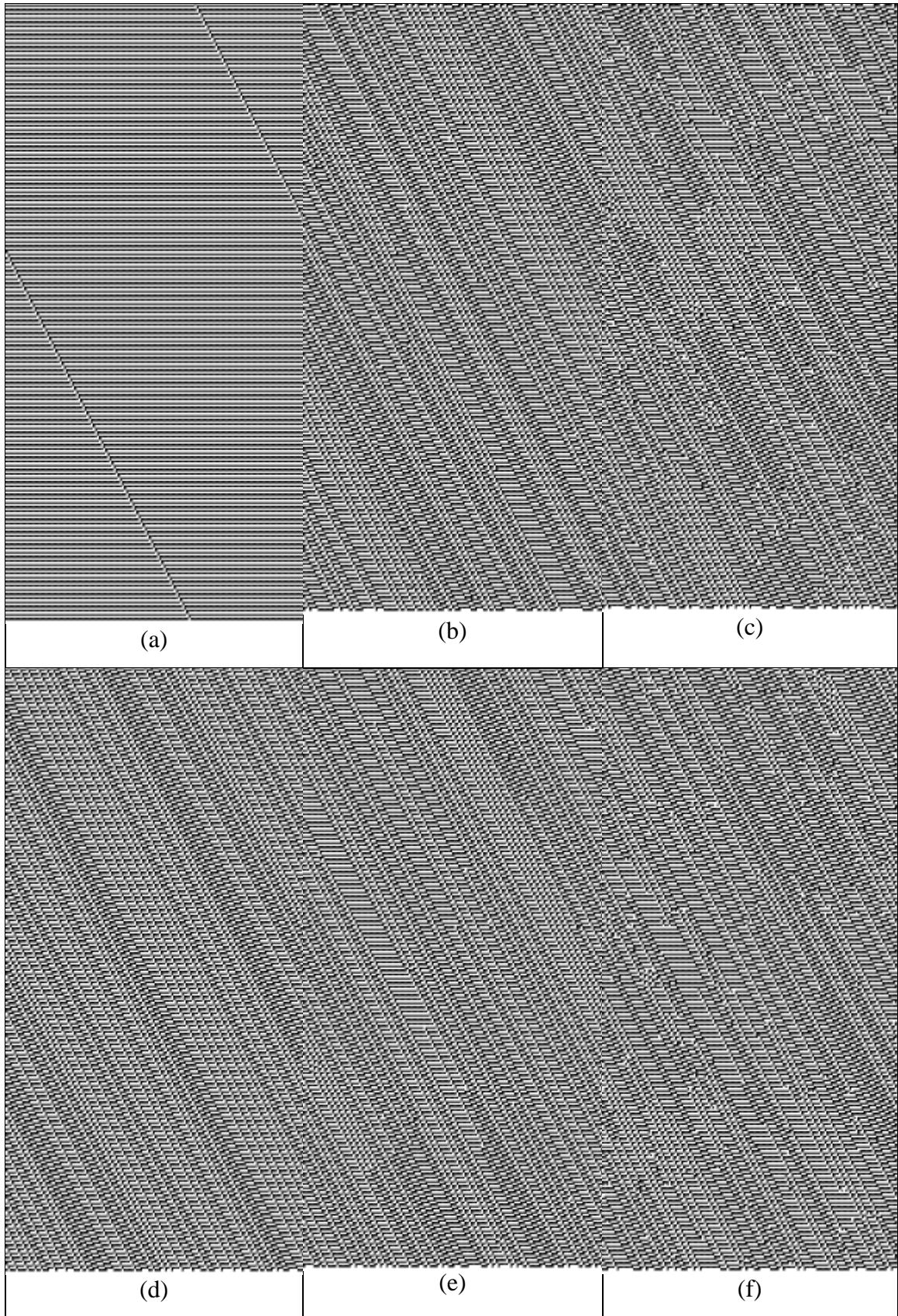


Figura 24. Regra 38,  $n = 151$ , condição inicial canônica e  $n = 151$  condição inicial aleatória (d-f)

Nas Figuras 25 a 36 são apresentados os diagramas espaço-temporais sem cortes para que seja possível visualizar uma janela maior de evolução, na tentativa de verificar se considerando mais passos possam ser extraídas informações que expliquem o comportamento observado.

Verificou-se que a evolução temporal das regras 57 é altamente influenciada pelo valor de  $p$ , sendo o padrão apresentado nos modelos probabilísticos bem mais desordenado que os das regras anteriores. O comportamento também é influenciado pela condição inicial, sendo que a incerteza advinda da escolha ao acaso do estado a partir do qual a evolução se processa, somada à incerteza devido ao parâmetro  $p$  gera um padrão ainda mais desordenado (Figura 27 e Figura 29).

Segundo consta na Tabela 5, a regra 57 é composta por muitas bacias populosas, de tamanho  $O(n)$ . A maior bacia possui  $O(n)$  níveis de transientes. Então, pode-se supor que com a introdução do erro na evolução, o sistema migra para um estado muito distante do ciclo atrator e, apesar da tendência em retornar ao ciclo atrator (visualmente observada para  $p = 10^{-3}$ ), o fato de existirem muitos estados possíveis dentro da mesma bacia ( $O(n)$  estados do tipo *Garden-of-Eden*), o resultado é um padrão totalmente aleatório e com muita perturbação, como pode ser observado nas Figuras 25 a 36.

Apesar do fato de as regras 214 (Figura 28 e Figura 29) e 222 (Figura 30 e Figura 31) apresentarem bacias de atratores com as mesmas características da regra 57, os padrões espaço-temporais destas não demonstram, pelo menos visualmente, ser influenciados como ocorre com a regra 57.

Novamente, deve-se recorrer às formulações matemáticas para entender o que está acontecendo. Na Tabela 1, ambas as regras apresentaram  $H(\pi, \sigma) < 0,1$ , significando que existe alguma semelhança entre as distribuições de probabilidades nas bacias de atratores dos modelos determinístico e probabilísticos. Esta semelhança pode ser inferida na análise visual dos diagramas considerando o fato de que a partir da desordem, o sistema tenta voltar para o ciclo atrator e como o diagrama é apenas uma janela de tempo da evolução, pode já ter saído do ciclo ou indo em direção ao mesmo.

De forma comparativa, os valores de  $H(\pi, \sigma)$  são menores para a regra 222, sugerindo que as distribuições de probabilidades são ainda mais parecidas. A análise visual não possibilita esta conclusão.

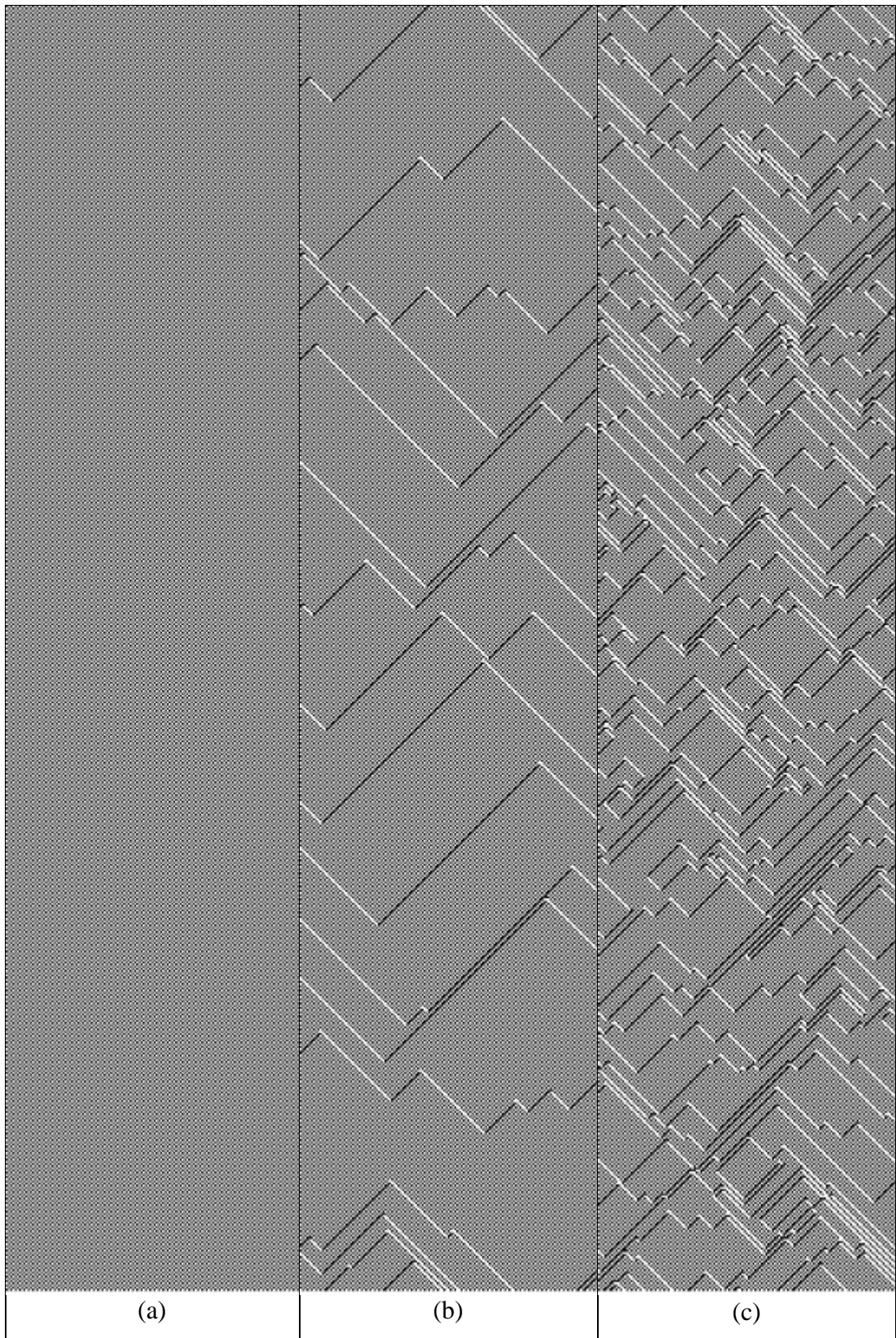


Figura 25. Regra 57,  $n = 150$  condição inicial canônica

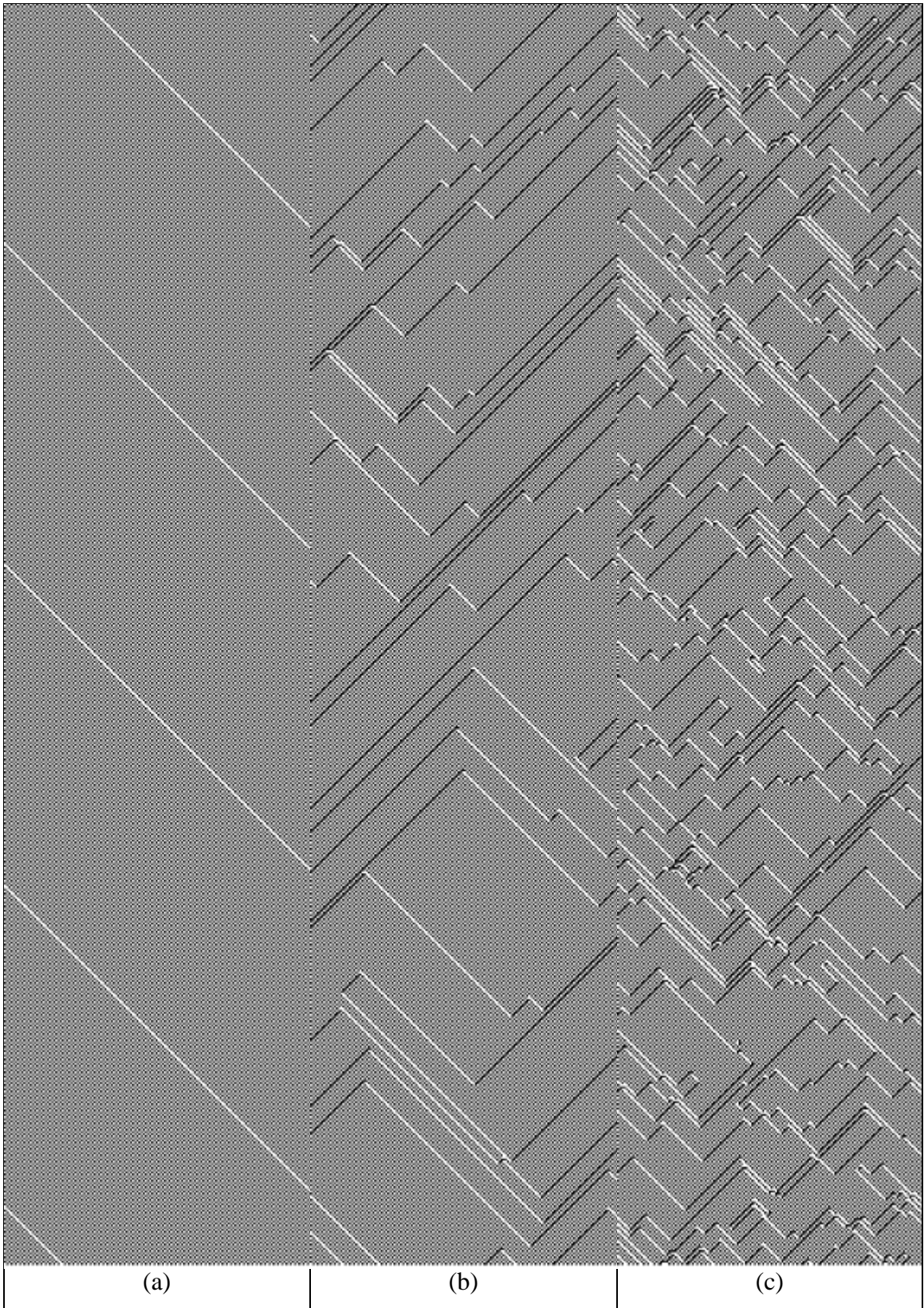


Figura 26. Regra 57,  $n = 151$ , condição inicial canônica



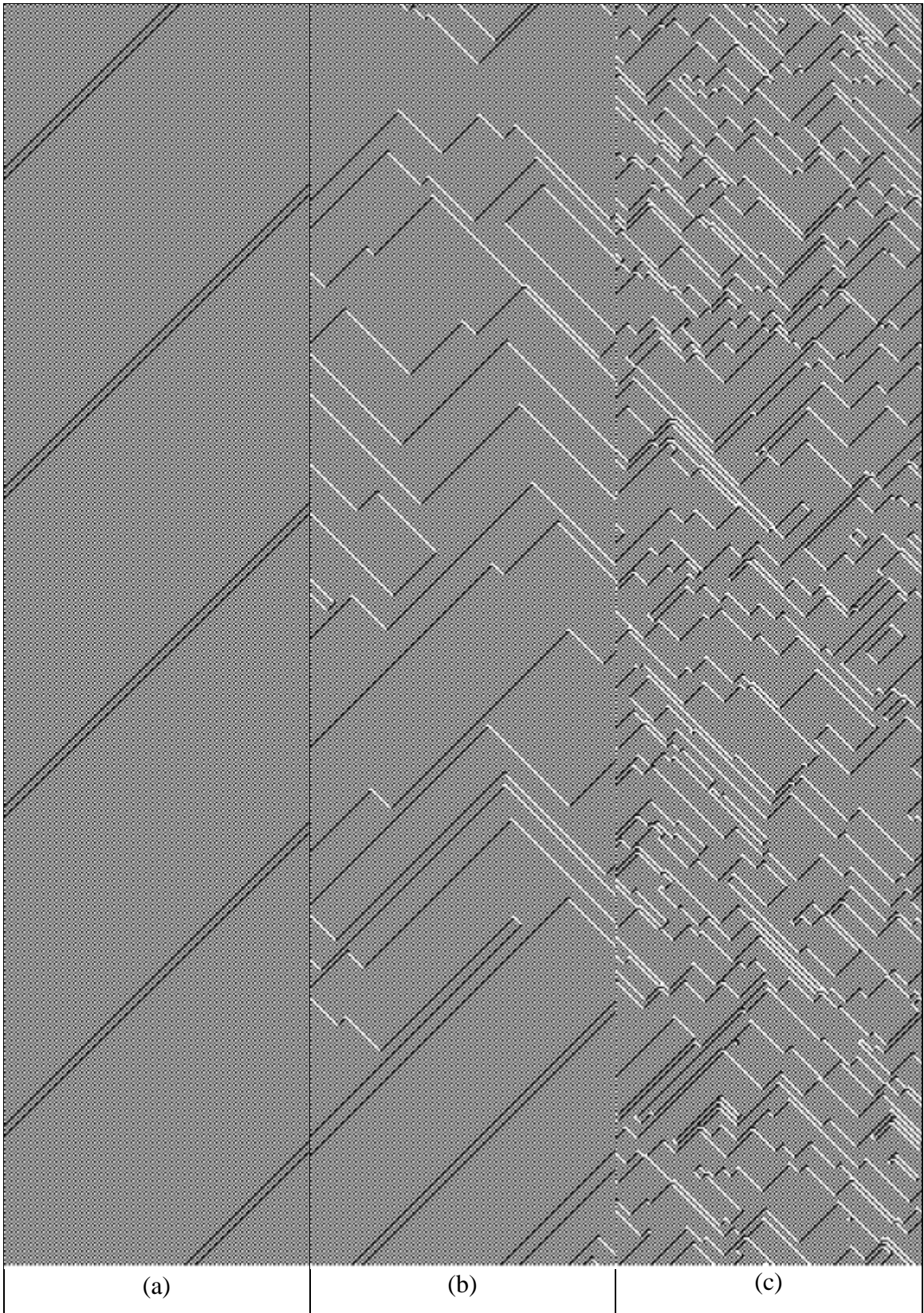


Figura 27. Regra 57,  $n = 150$ , condição inicial aleatória

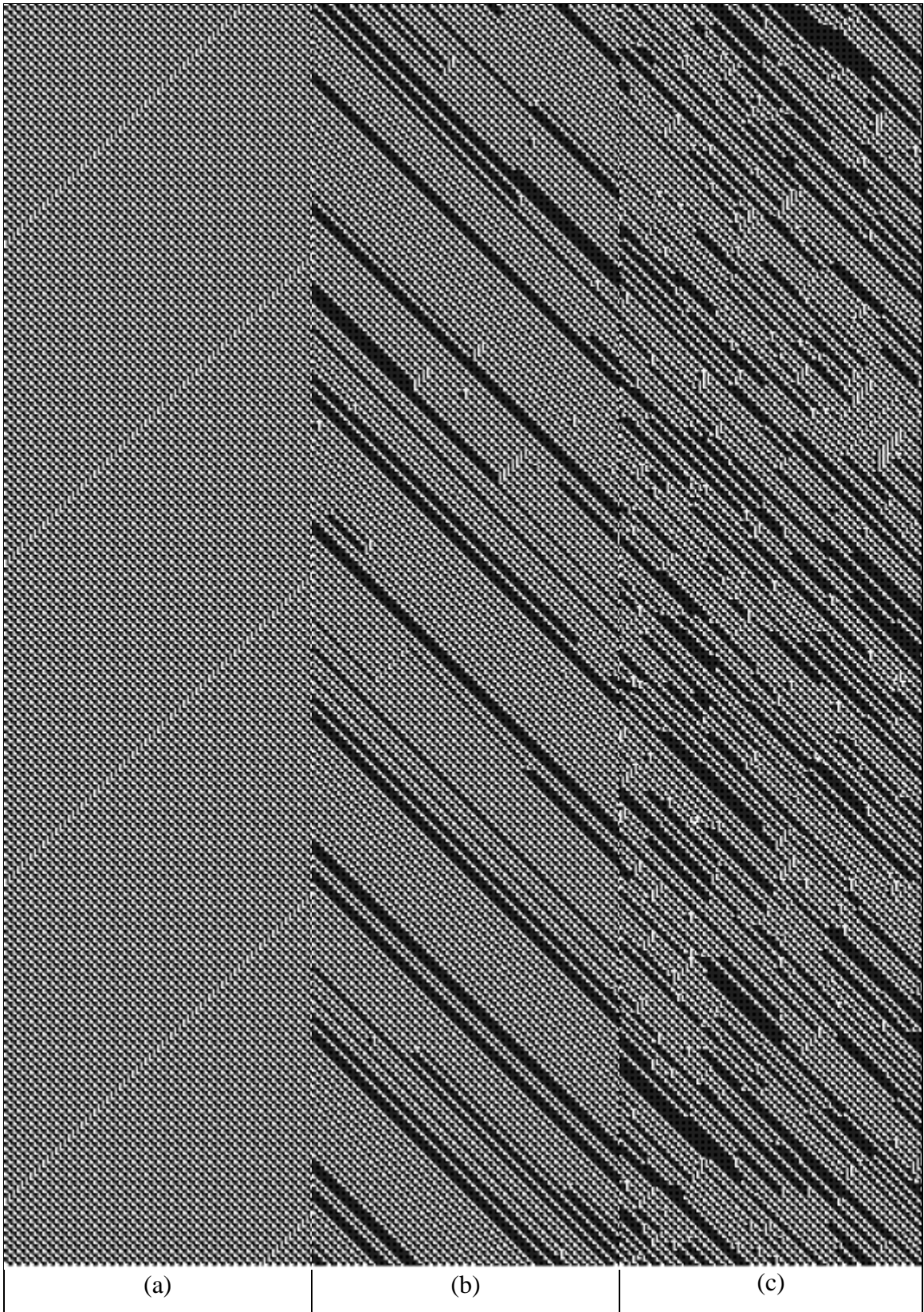


Figura 28. Regra 214,  $n = 150$ , condição inicial canônica

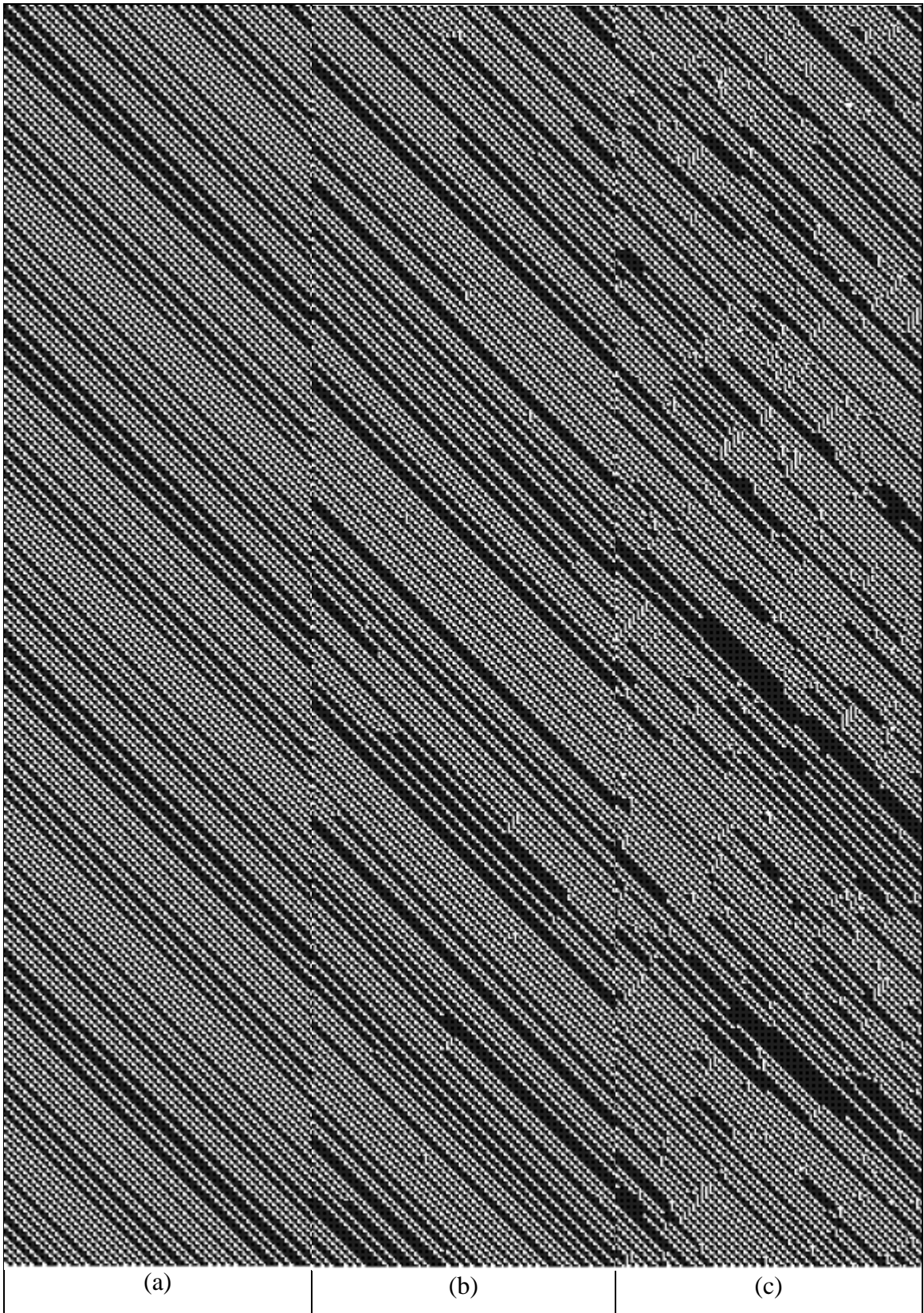


Figura 29. Regra 214,  $n = 150$ , condição inicial aleatória

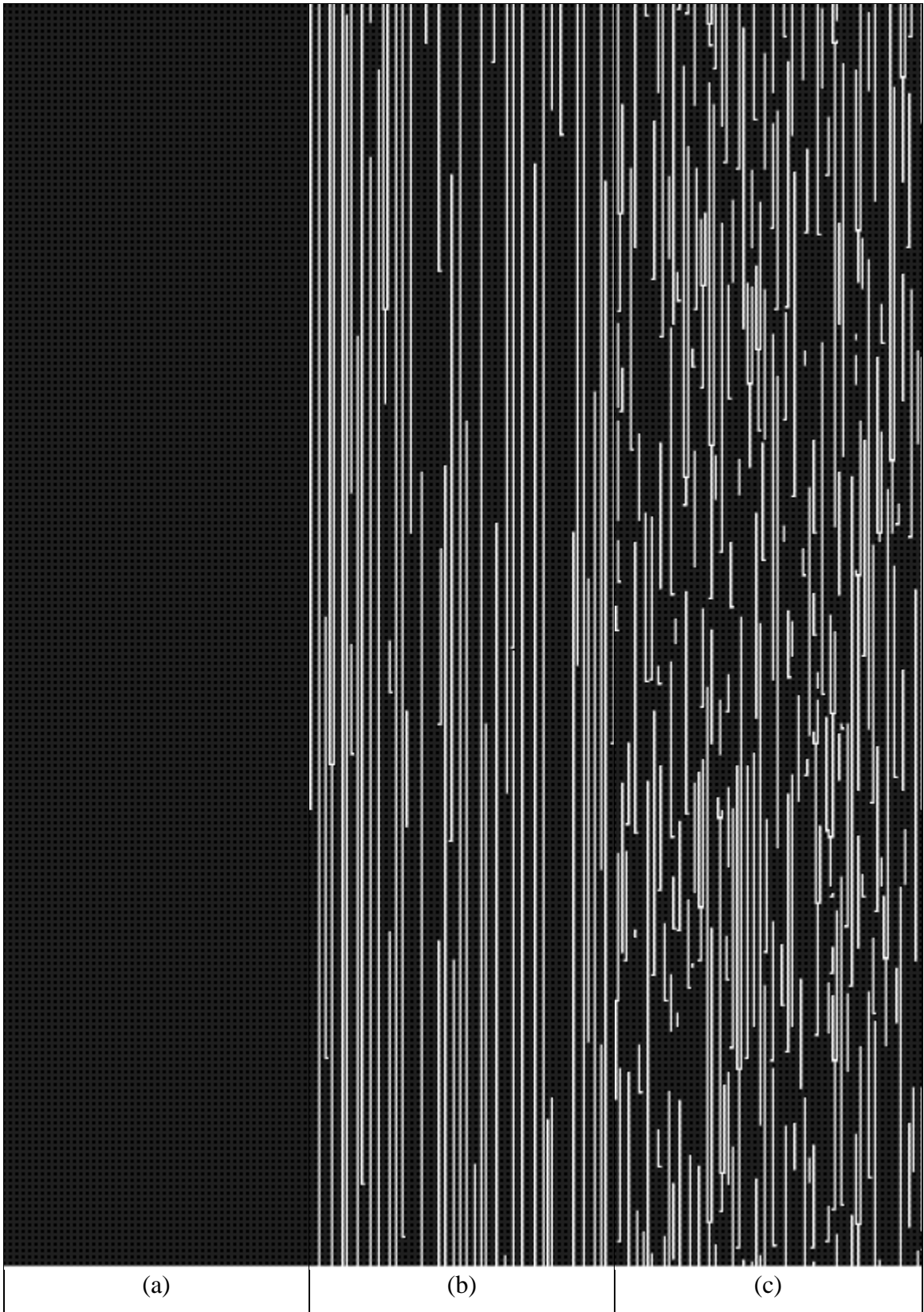


Figura 30. Regra 222,  $n = 150$ , condição inicial canônica

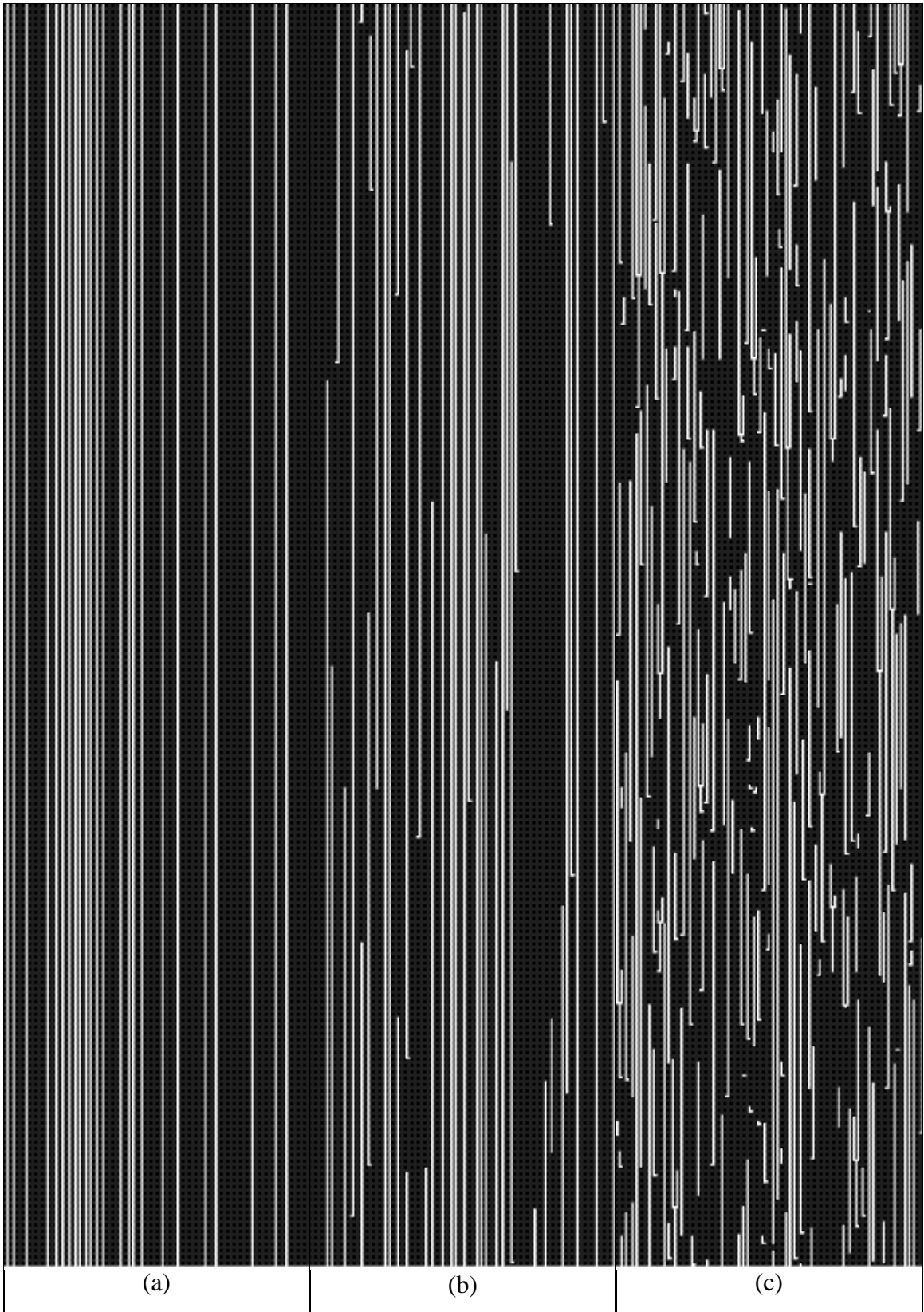


Figura 31. Regra 222,  $n = 150$ , condição inicial aleatória

Ainda para a regra 222 (Figura 30 e Figura 31) é notório dizer que todas as bacias tem um único estado atrator,  $O(n)$  níveis de transientes e  $O(n)$  estados do tipo *Garden-of-Eden*. Ora, analisando as Figura 30 e Figura 31, verifica-se que embora a evolução temporal probabilística siga outra sequência de estados, existe uma periodicidade, a qual pode ser associada ao fato de que outros ciclos atratores podem ter sido atingidos, não necessariamente aquele em que se processava a evolução determinística – mudança de bacia de atratores.

Diferentemente das regras acima discutidas, para a regra 210 todos os estados das bacias são do tipo atratores, então é esperado que o sistema esteja em um ciclo atrator independente da incerteza introduzida na evolução. Nos padrões apresentados nos diagramas correspondentes a esta regra (Figura 32 a Figura 34) existe uma certa regularidade nos estados assumidos ao longo do tempo.

Na Figura 34 é possível observar que nos padrões apresentados nos modelos probabilísticos (Figuras 34b e 34c) existe uma certa similiaridade com o padrão do modelo determinístico evoluindo a partir da condição inicial aleatória (Figura 34a).

O que pode ser inferido por meio da análise visual é que na janela de tempo observada nestes diagramas, para  $p > 0$  estão representados estados atratores, mas não na sequência de evolução natural. É observado na Figura 34 que os primeiros passos da evolução apresentam uma repetição do padrão apresentado pelo modelo determinístico, confirmando que de fato o sistema sai do ciclo atrator para uma sequência de estados aleatória. As bacias que compõem esta regra são populosas, de tamanho  $O(n)$ . Desta característica, pode-se inferir que apesar do erro na evolução resultar em um estado atrator, a sequência natural pode nunca mais ser atingida, como já foi suposto em outras regras analisadas.

Em relação a  $H(\pi, \sigma)$  os padrões apresentados nestes diagramas não agregam valor à análise dos resultados pois ao contrário do que é apresentado na Tabela 1 para a regra 210 ( $H(\pi, \sigma) < 0,1$ ), a similaridade não é facilmente identificada nos diagramas das Figuras 32 a 34.

Para a regra 226 (Figura 35) também não é possível explicar o comportamento associando o diagrama espaço-temporal às características das bacias de atratores. Esta regra possui bacias com muitos estados e muitos níveis de transientes. Apesar de os resultados da Tabela 1 ( $H(\pi, \sigma) < 0,1$  para  $n$  ímpar e  $H(\pi, \sigma) > 0,1$  para  $n$  par) não foi identificada influência do valor de  $n$  no padrão de evolução temporal.

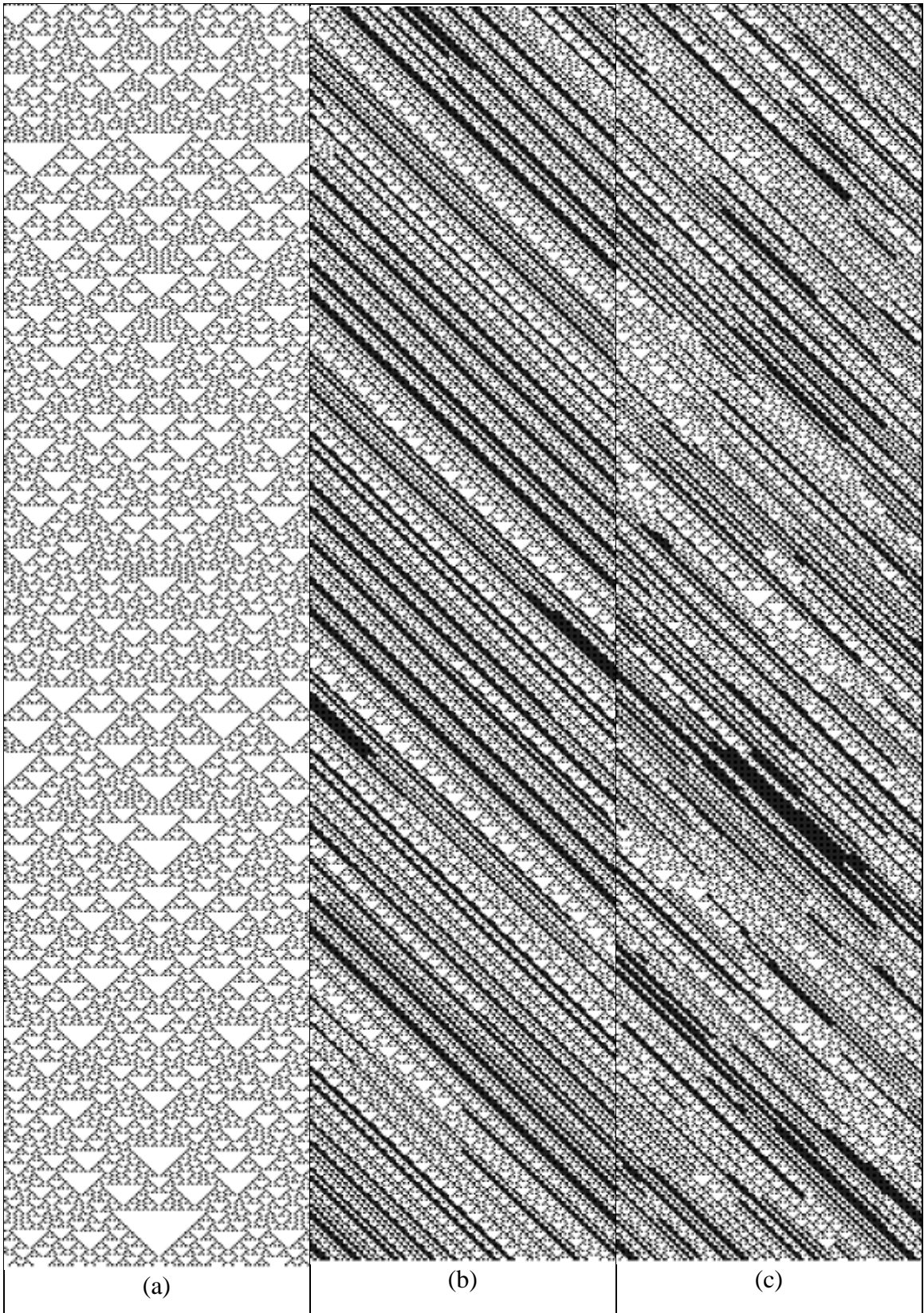


Figura 32. Regra 210,  $n = 150$  e condição inicial canônica

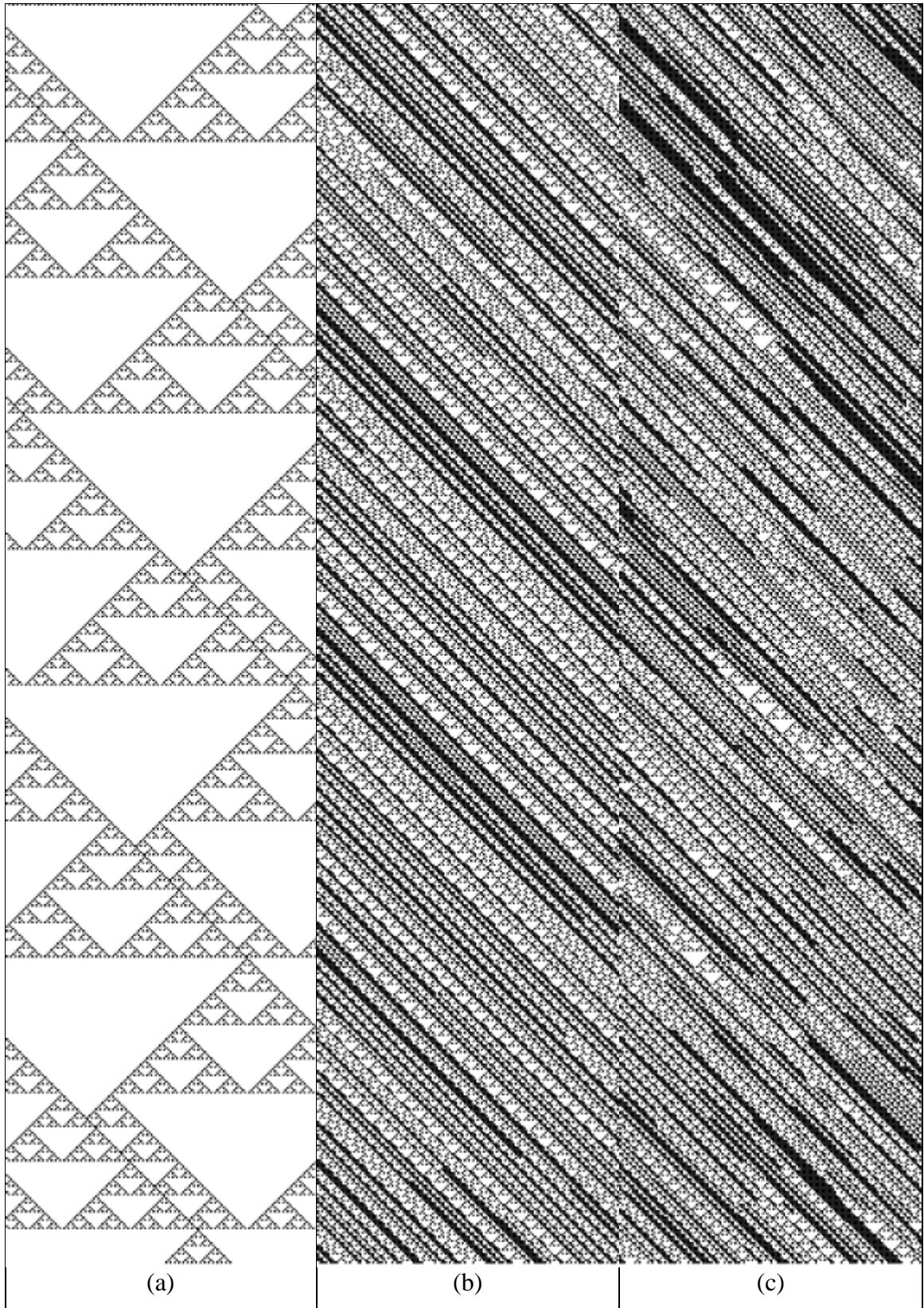


Figura 33. Regra 210,  $n = 151$  e condição inicial canônica



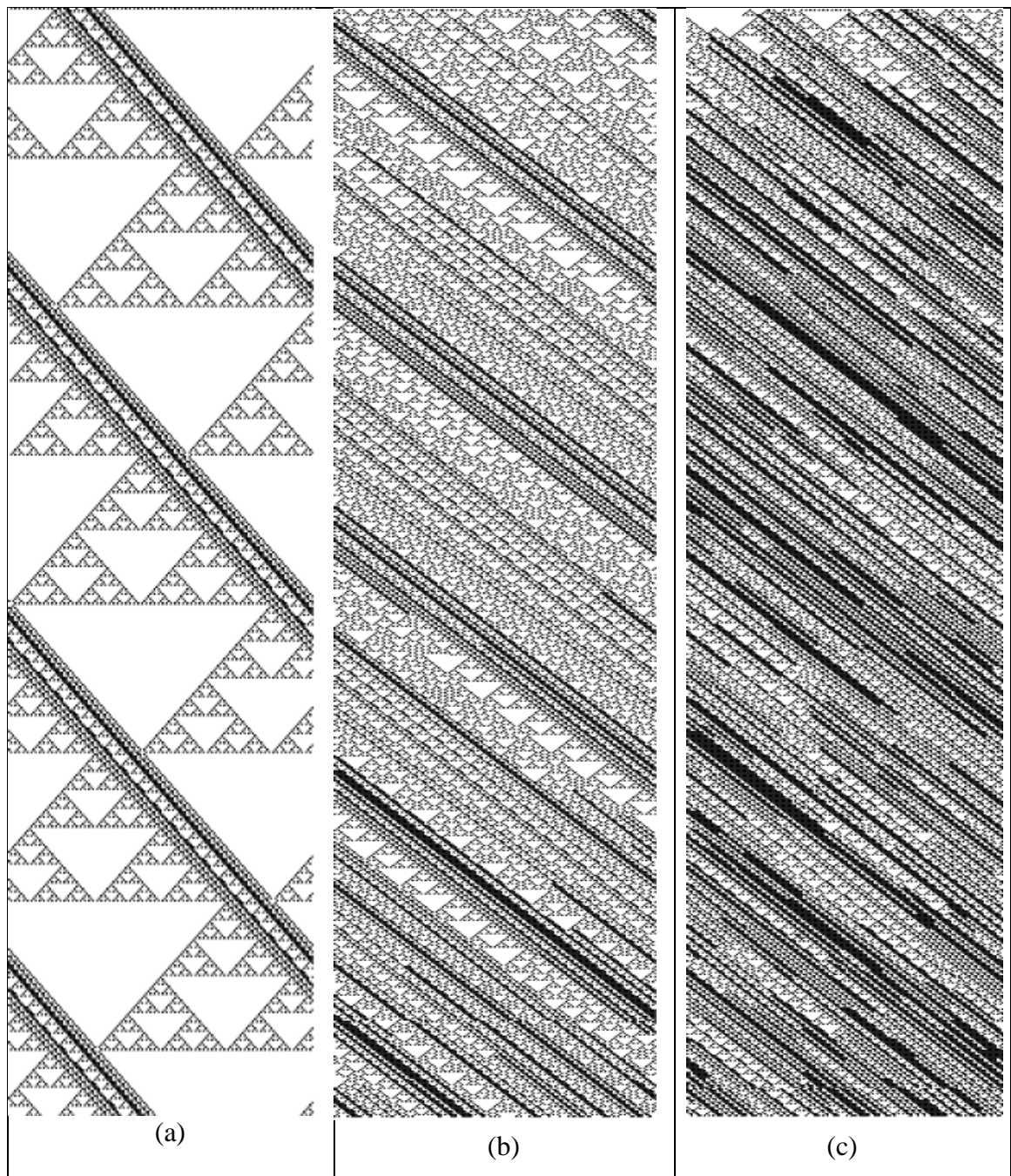


Figura 34. Regra 210,  $n = 150$ , condição inicial aleatória

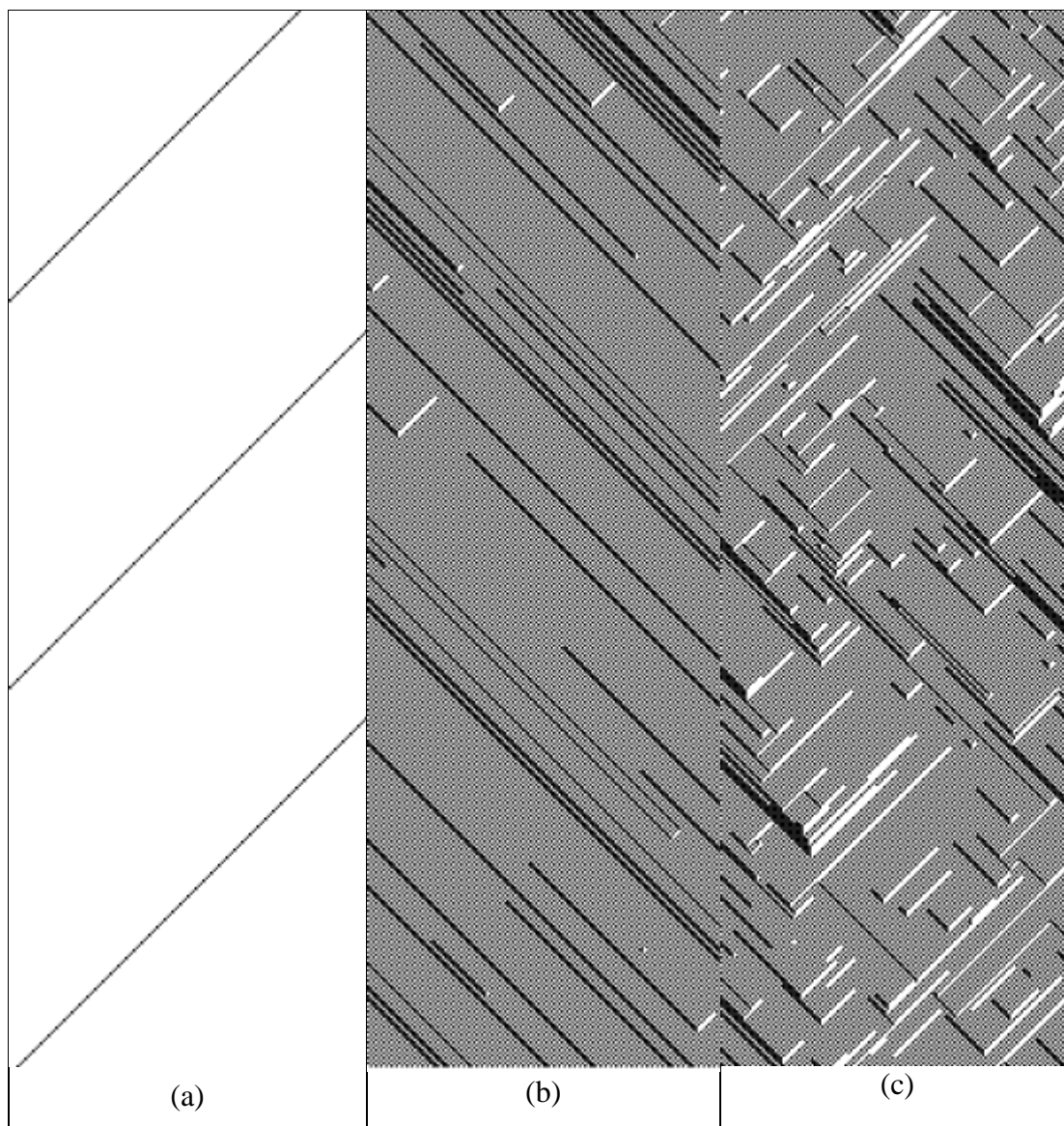


Figura 35. Regra 226,  $n = 151$ , condição inicial canônica

Já para a regra 243 (Figura 36 e Figura 37) é mais nítida a tentativa do sistema voltar ao ciclo atrator, justificando os resultados da Tabela 1 e valendo-se da possibilidade de o modelo atingir em um futuro distante uma sequência de estados parecida com a sequência natural da evolução determinística.

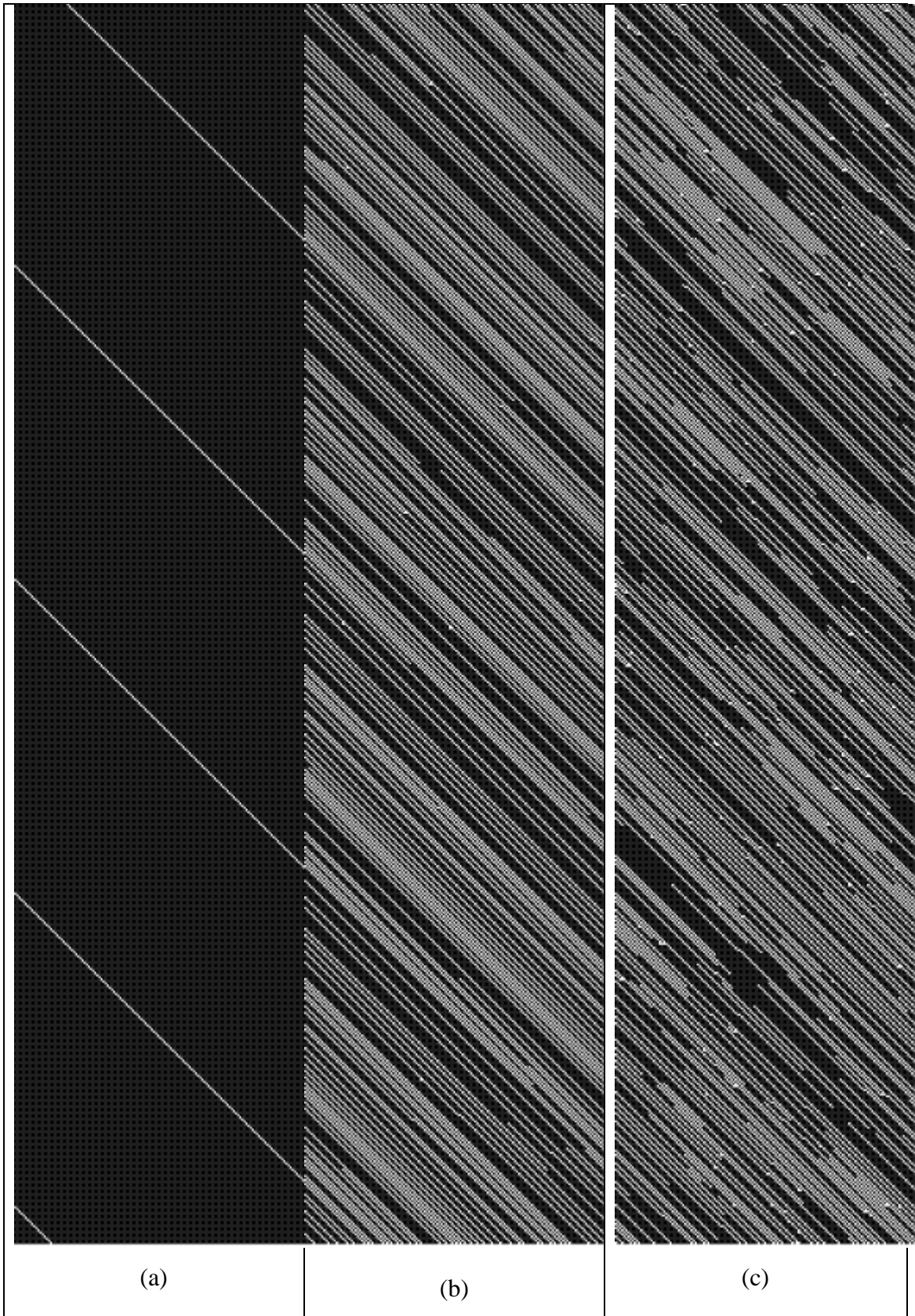


Figura 36. Regra 243,  $n = 150$ , condição inicial canônica

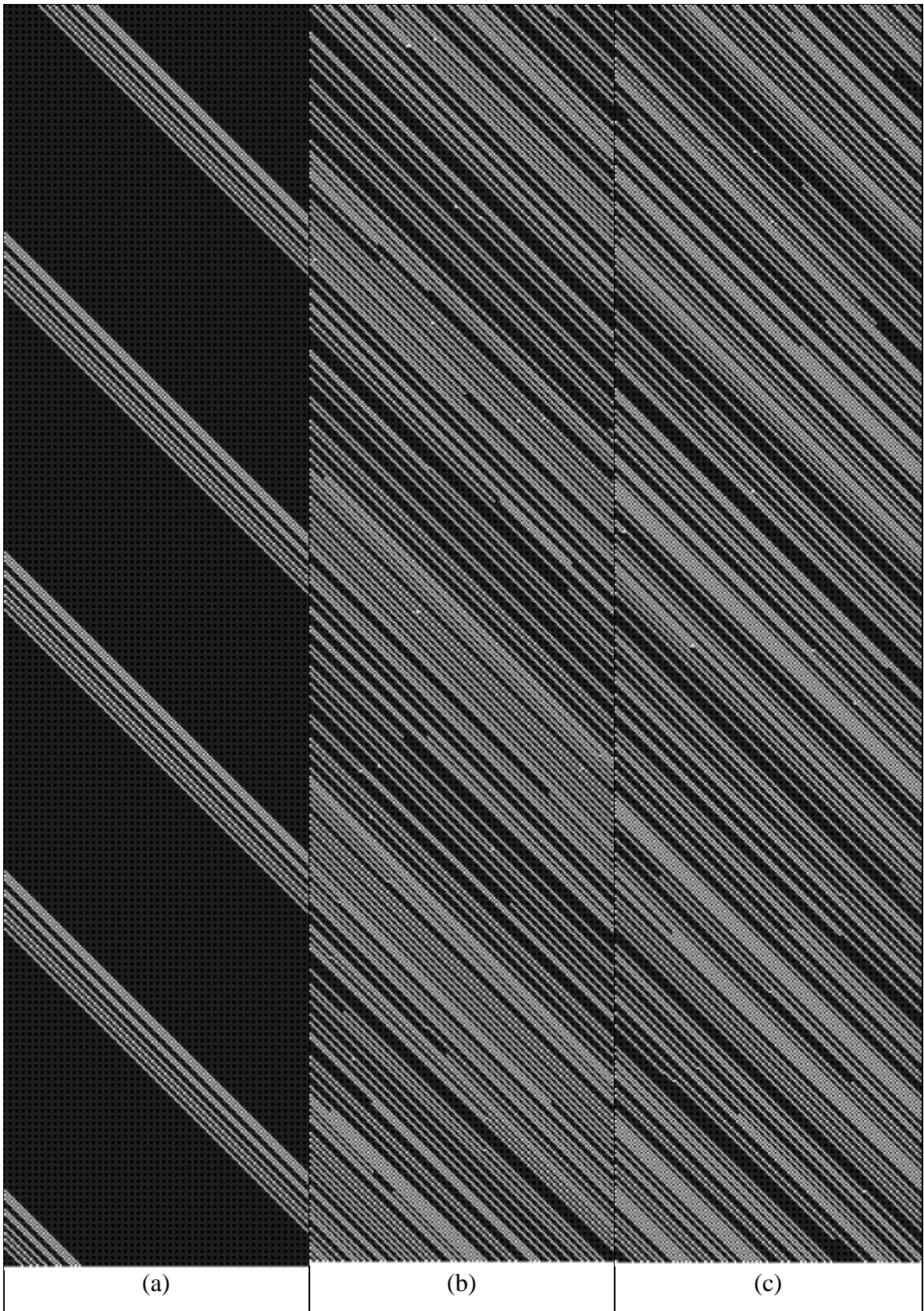


Figura 37. Regra 243  $n = 151$ , condição inicial aleatória

De toda a análise realizada, as regras que possuem em seu mapa de bacias de atratores, uma bacia que se destaca das demais em tamanho  $O(n)$  e apenas um nível de transientes (regras 12, 29, 38, 226, 243), verifica-se nos diagramas espaço-temporais que a entropia é alta e de forma sutil pode-se inferir que em algum momento antes da janela de tempo observada, o sistema apresentou a mesma sequência de estados da evolução do modelo determinístico, ou seja, o que se observa no diagrama é uma sequência aleatória, dado a incerteza introduzida na evolução, após ter saído do ciclo. Como a cada passo, cada célula pode alterar seu estado de forma independente das demais, o ciclo pode ser novamente atingido ou não, porém o sistema sempre tende a ele.

Já a regra 57, que também possui tamanho  $O(n)$  mas  $O(n)$  níveis de transientes observa-se alta entropia e não há indícios de similaridade entre os modelos probabilísticos e determinístico. Há grande chance de que o erro na evolução leve o sistema a ficar alternando entre estados transientes.

O caso da regra 210 é particular porque todos os estados são atratores – não há estados transientes. Logo, existe a garantia de que o sistema esteja confinado em um ciclo. Como nas demais regras, o erro na evolução gera uma sequência de estados distinta da evolução determinística, o que torna os padrões pouco parecidos.

Nas regras analisadas até agora, o erro introduzido na evolução pode resultar em transições entre bacias ou alternância de estados dentro da mesma bacia. Estas transições podem ser interpretadas como a capacidade do sistema computar estados.

## 7.2.2 Modelo para a Integração da Informação

No que tange ao ganho de informação, as regras 15, 51, 204 e 240 foram destacadas nas Tabela 3 e Tabela 4 por apresentarem  $G^\pi = G^\sigma = 0,000000$  e  $r^\pi = r^\sigma = 1,000000$ .

Este valor refere-se à situação na qual  $\sum_1^n G_c^\pi = 0$  e  $G^\pi = 0$ , e a aplicação direta da Equação 40 resulta uma indeterminação -  $r = \frac{0}{0}$ . Esta situação, portanto, não é interessante do ponto de vista da integração da informação, pois a entropia é alta e o ganho é degenerado.

Conforme observado nas Figuras 25 a 27 (regra 57), nos modelos probabilísticos a entropia do sistema é maior à medida que o valor de  $p$  aumenta. Ao analisar as características de seu mapa de atratores observou-se que a referida regra possui bacias muito populosas, inclusive com grande quantidade de estados marginais (*Garden-of-Eden*)

e árvores de transientes longas. Imagine que o erro na evolução, resultante da introdução do parâmetro  $p$ , resulte em um estado marginal e, a partir daí cada célula decida em cada passo de evolução desobedecer a regra em uso, a sequência de estados que define o padrão determinístico nunca mais será atingida.

Esta entropia local, em nível celular, resulta em aumento da entropia global do sistema, caracterizando um cenário de máxima incerteza. De acordo com a Tabela 3 e Tabela 4, ( $\{G^\sigma, G^\pi\} > 0$ ) para ( $\{r^\sigma, r^\pi\} \cong 1$ ), significando que o sistema é capaz de gerar informação e ainda, que este ganho de informação é global pois nenhuma célula é capaz de prover ganho.

Dessa forma, as características das bacias de atratores no que tange à organização dos estados bem como a análise visual dos diagramas espaço-temporais, fornecem subsídios para explicar o ganho de informação apresentado na Tabela 3 e Tabela 4 para a regra 57.

Outras regras foram destacadas por serem candidatas à modelagem da informação integrada por apresentarem ( $\{G^\sigma, G^\pi\} > 0$ ) para ( $\{r^\sigma, r^\pi\} \cong 1$ ): regras 19, 23, 29, 43, 77, 178, 198, 212, 226 e 232.

Destas, já foram discutidas as características dos mapas de bacias atratores e da evolução temporal para as regras 29 e 226. Apenas a análise visual da Figura 23 (regra 29) sugere que a entropia nos modelos probabilísticos é menor, se comparada à entropia apresentada na Figura 35 (regra 226). De fato, o ganho de informação apresentado nas Tabela 3 e Tabela 4 é maior para a regra 226, confirmado pela análise da evolução temporal.

Comparativamente à regra 29, a regra 19 apresentou maior ganho de informação. A análise qualitativa novamente permitiu explicar os resultados apresentados na Tabela 3 e Tabela 4. O mapa de bacias de atratores da regra 19 é composto por várias bacias pequenas, de ciclo atrator com período igual a 2 e árvore de estados transientes curta – 2 níveis apenas. A maioria dos estados da bacia são do tipo *Garden -of- Eden* (mais que 70%). Seguindo a análise qualitativa, para esta regra foi verificada maior perturbação à medida que o valor de  $p$  aumenta, talvez porque a cada passo o erro resulta em um estado do tipo *Garden-of-Eden* que pode, inclusive, ser de outra bacia – uma alternância de estados maior que o apresentado pela regra 29 (esta possui muitos estados na bacia e pode não ocorrer transições entre bacias). Portanto a análise visual da Figura 38 pode sugerir que o

ganho de informação para a regra 19 (d-f) seja maior que para a regra 29 (a-c), pois o sistema irá trabalhar para reduzir a incerteza, buscando o estado estacionário.

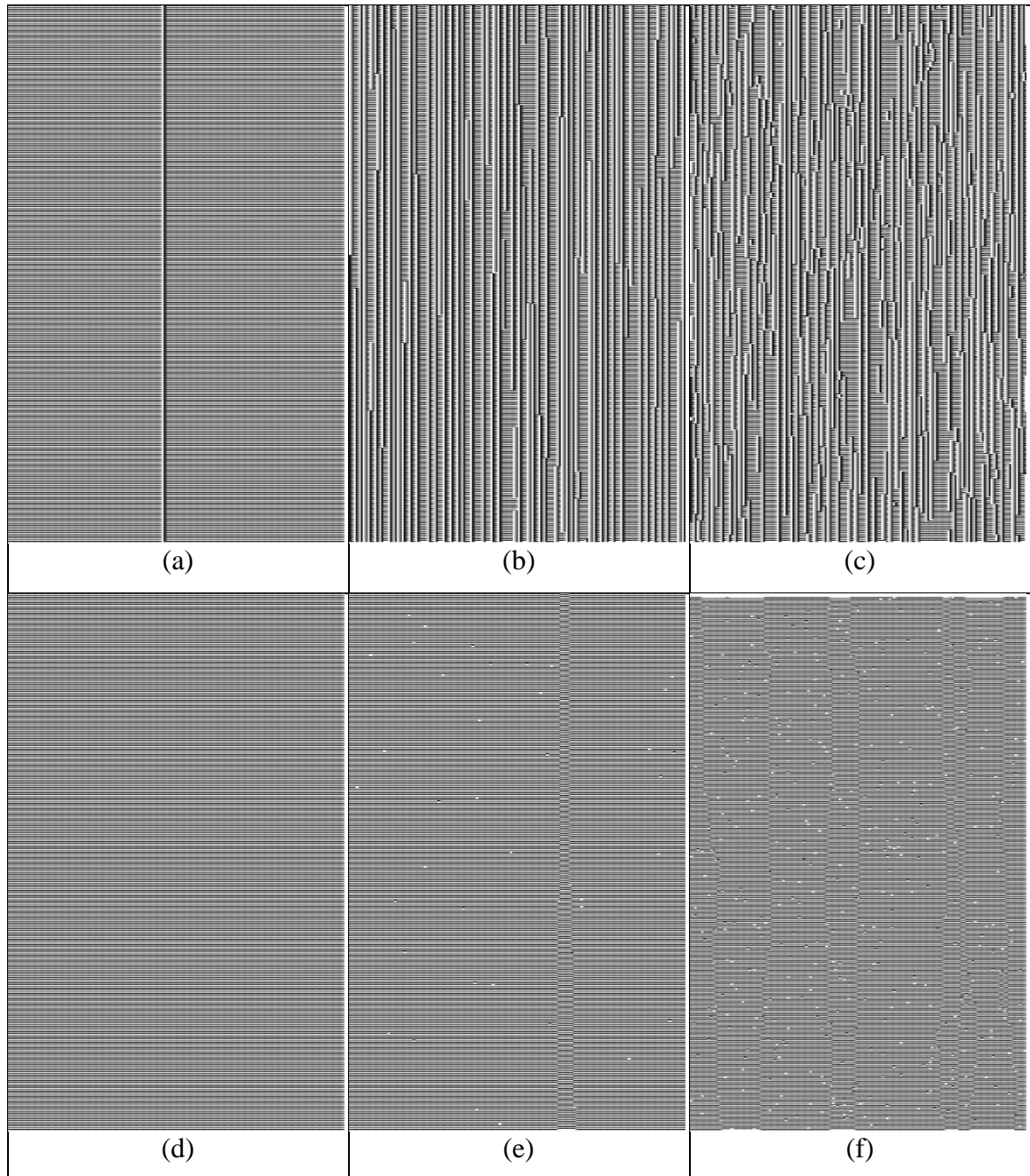


Figura 38. Regra 29,  $n = 150$  condição inicial canônica (a-c) e Regra 19,  $n = 150$ , condição inicial canônica (d-f)

Esta análise pode ser estendida à regra 23 (Figura 39), pois o mapa de bacias de atratores desta regra apresenta as mesmas características, de forma que como as bacias são menos populosas, é mais provável que ocorra transições entre bacias e esta incerteza resulta em ganho de informação.

Segundo os resultados da Tabela 3 e Tabela 4, nos quais o ganho de informação é menor para maiores valores de  $p$ . A explicação de tal constatação é extraída da análise visual do diagrama espaço-temporal (Figura 39): para  $p = 10^{-2}$  o comportamento é menos ordenado (maior a entropia) que para  $p = 10^{-3}$  (menor a entropia).

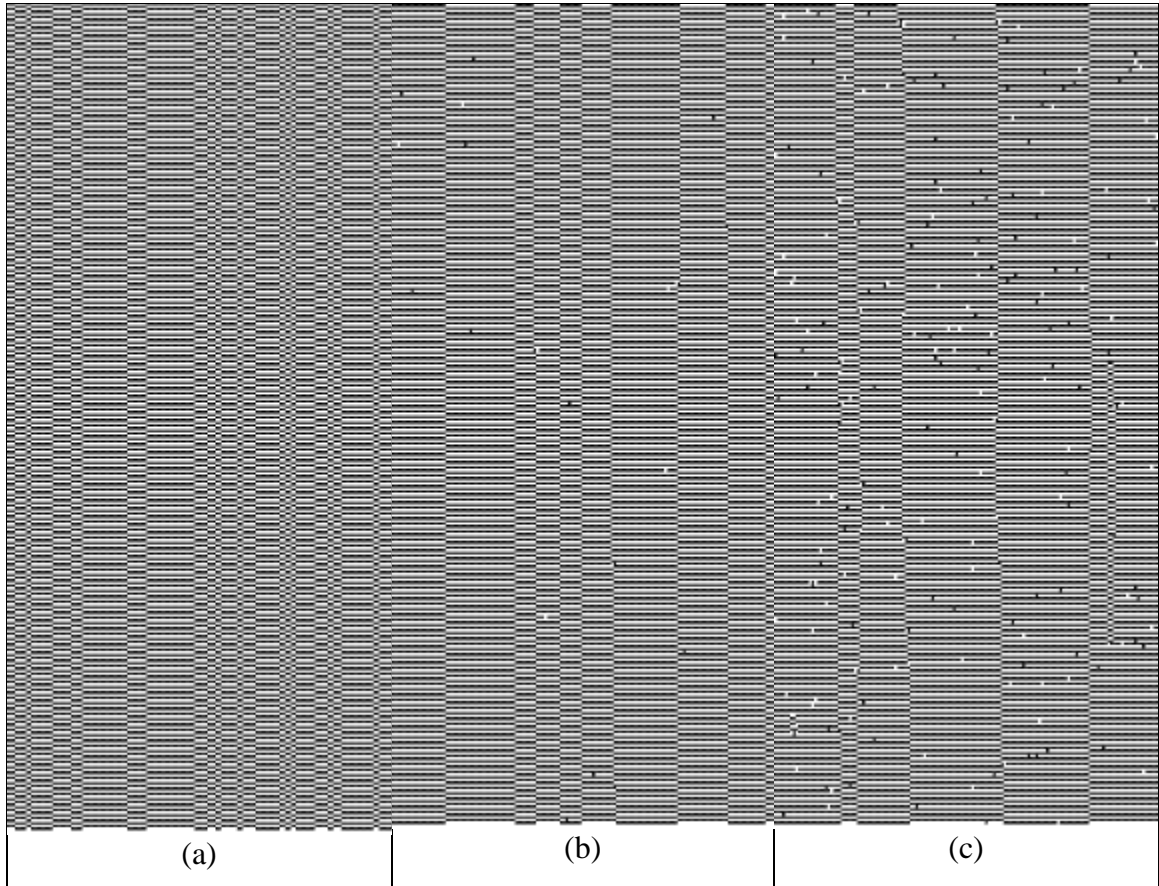


Figura 39. Regra 23  $n = 151$ , condição inicial aleatória

As regras 23 e 232 são complementares e apresentaram resultados parecidos para o ganho de informação (Tabela 3 e Tabela 4). A análise visual do diagrama apresentado na Figura 40 permite concluir que apesar de existir uma tendência ao comportamento determinístico, nos modelos probabilísticos há um aumento da entropia resultando um comportamento desordenado e, portanto, justificando o ganho de informação,



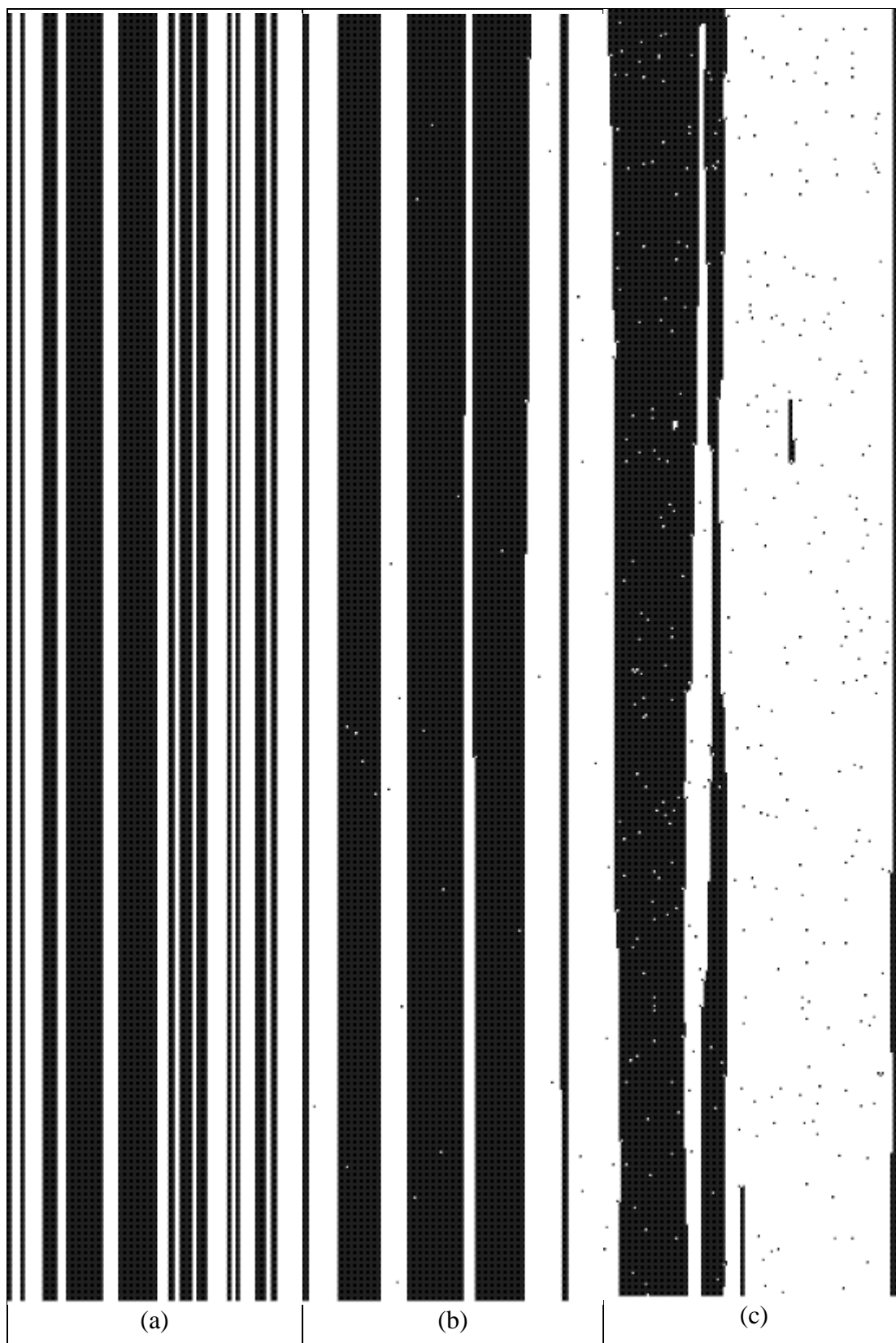


Figura 40. Regra 232,  $n = 151$  condição inicial aleatória

A Figura 41 apresenta a evolução temporal das regras 178 (a-c) e 198 (d-f); ambas apresentaram ganho de informação expressivo nas Tabela 3 e Tabela 4. Como

anteriormente, nos diagramas é possível verificar o aumento da entropia do sistema à medida que o erro na evolução é introduzido, justificando o ganho de informação.

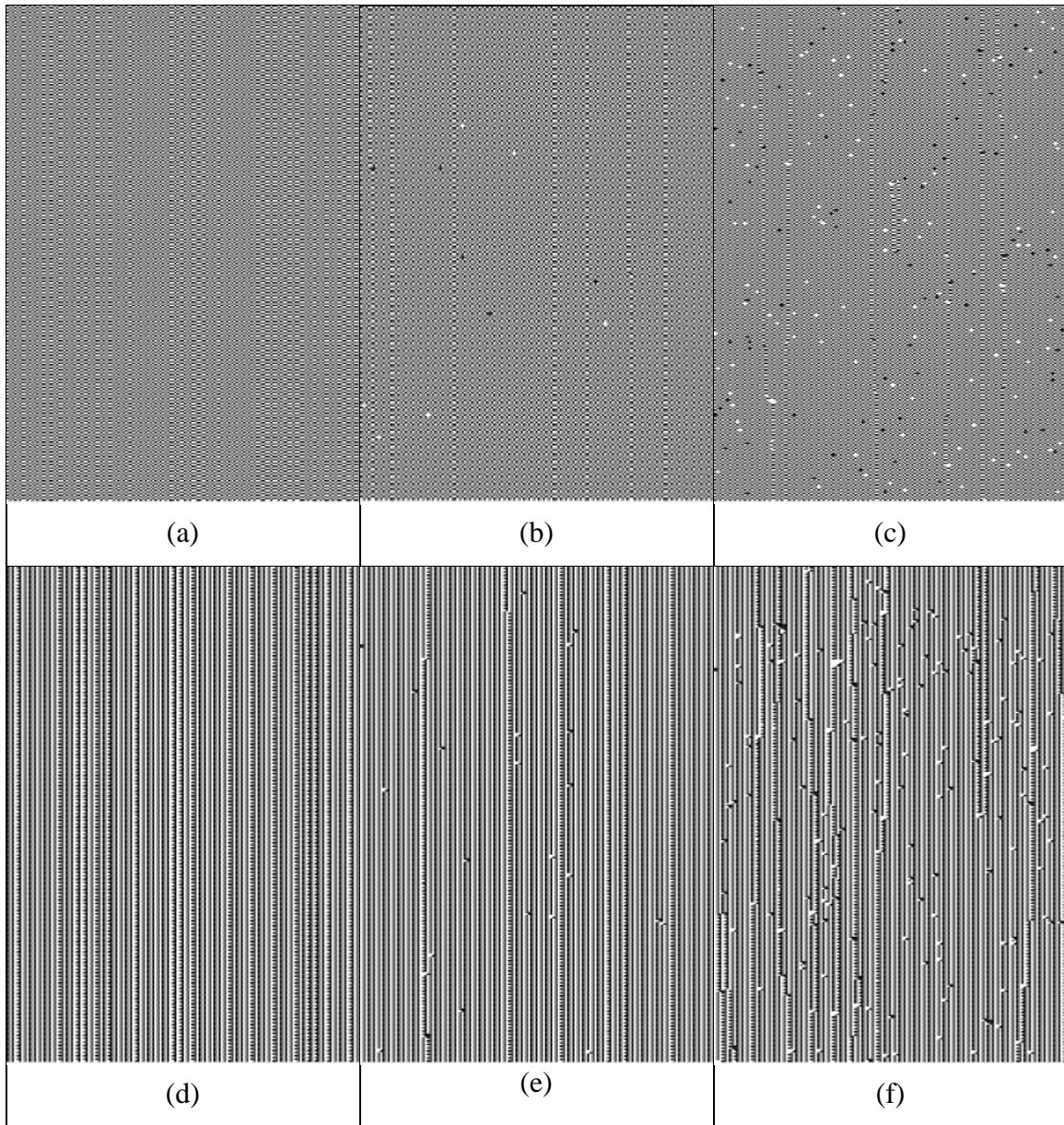


Figura 41. Regra 178  $n = 150$ , condição inicial aleatória e Regra 198  $n = 150$ , condição inicial aleatória

As Figura 42 e Figura 43 apresentam diagramas espaço-temporais para regras 218, 233, 236, 237 e 218, nas quais o sistema não gera nada além do que as células geram, ou seja, o ganho de informação global é praticamente igual ao ganho de informação local. De acordo com a Equação 40, tal situação remete à  $r^\pi \approx 0$  e  $G^\pi > 0$ .

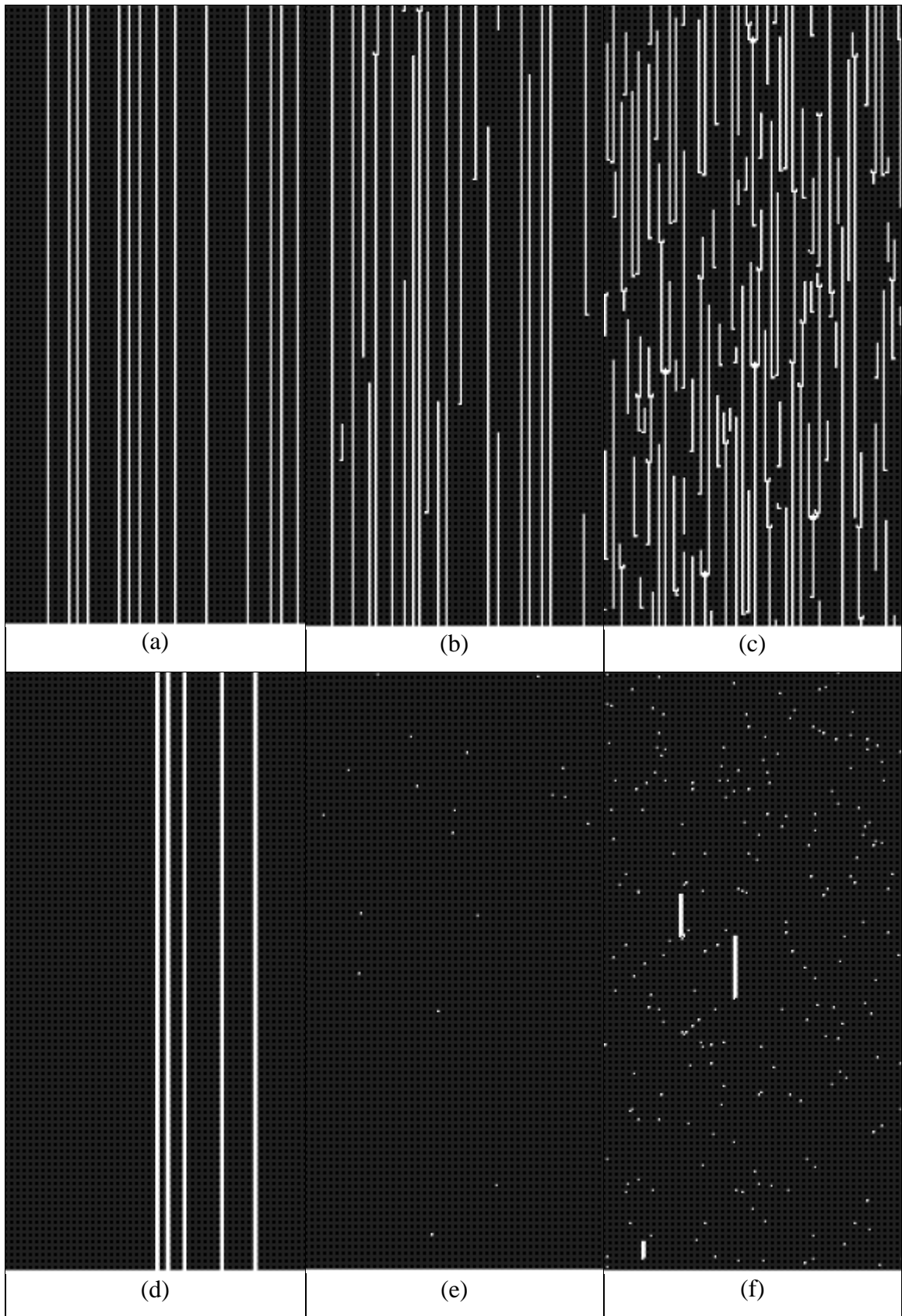


Figura 42. Regra 218  $n = 150$ , condição inicial aleatória (a-c) e Regra 233  $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f)

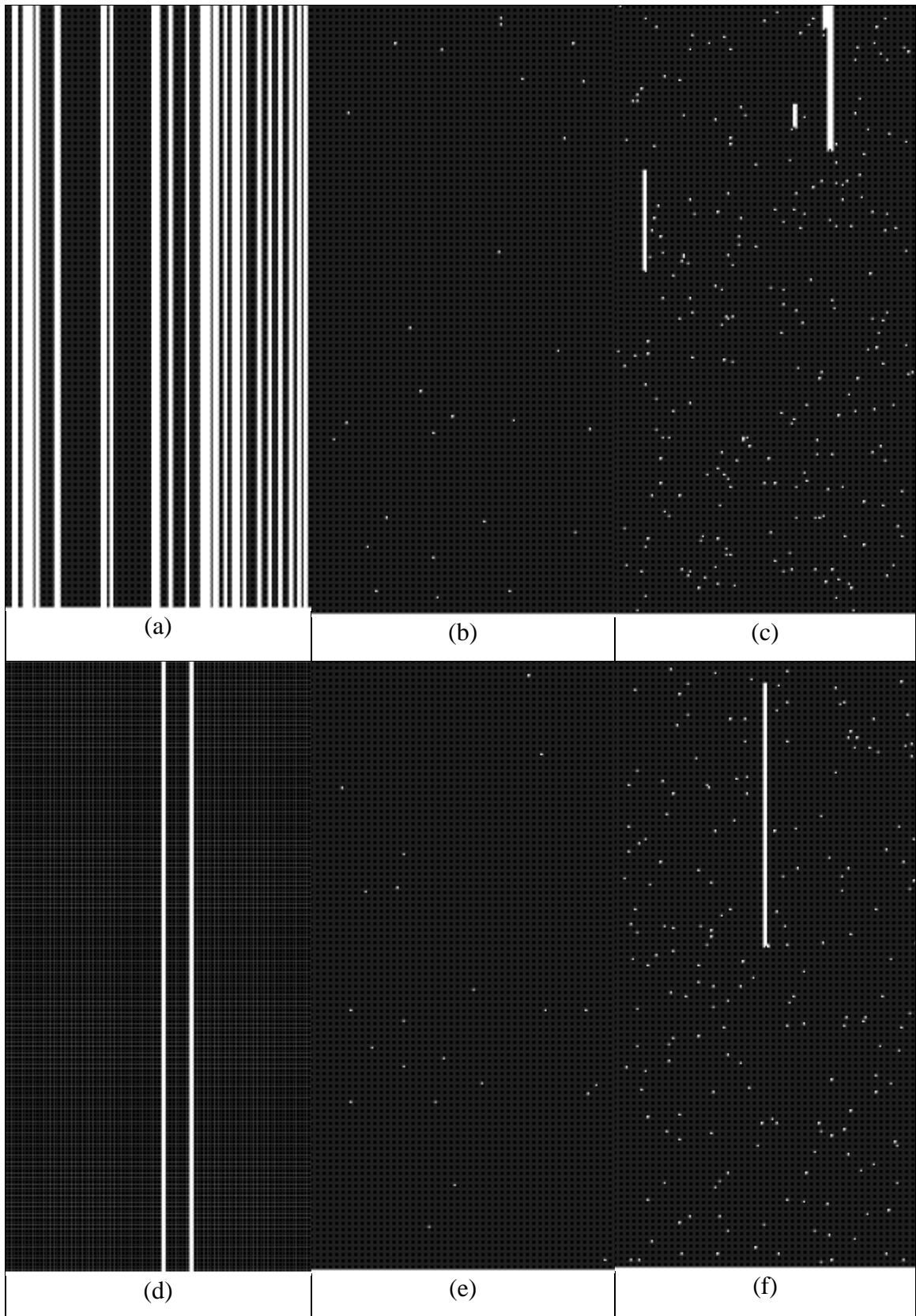


Figura 43. Regra 236  $n = 150$ , condição inicial aleatória (a-c) e Regra 237  $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f)

Conforme pode ser observado, a análise visual dos referidos diagramas não é suficiente para concluir sobre o ganho de informação. Assim como nas demais regras, onde  $r^\pi = 1$  e  $G^\pi > 0$ , verifica-se aumento da entropia no sistema, mas somente as formulações matemáticas são capazes de explicar o que está acontecendo no sistema para cada um dos casos, no que tange à integração da informação.

Será que as características das bacias de atratores das regras da Classe 2 podem sugerir uma explicação para o ganho de informação? De acordo com as características apresentadas na Tabela 5, as regras da Classe 2 podem ser reagrupadas da seguinte forma:

- a) Regras cujo mapa de bacias contém muitas bacias com tamanho  $|B| \ll n$  e uma bacia que se destaca, em tamanho, em relação às demais. Todas as bacias tem apenas um estado atrator (período igual a 1) e árvore de estados transientes curtíssima (no máximo um nível). Apenas a bacia de maior tamanho possui estados do tipo *Garden-of-Eden*, os quais representam em média 80% dos estados daquela bacia.
- b) Regras cujo mapa de bacias contém muitas bacias com  $|B| = O(n)$  e ciclo atrator com período  $[2, n]$  e árvore de transientes curtíssima (no máximo 2).
- c) Regras cujo mapa de bacias contém muitas bacias com  $|B| = O(n)$  e todos os estados são atratores.

Uma suposição é que em a) e b) há ganho de informação porque as alterações na dinâmica de evolução pode significar transições de estados e de bacias, mas com baixa probabilidade de que o autômato esteja confinado em um ciclo atrator – o estado assumido é do tipo *Garden-of-Eden*. Em c) não há ganho de informação, pois ainda que a dinâmica altere o curso de evolução a ponto de mudar de bacia (pior caso), o autômato estará confinado em um ciclo atrator.

No entanto, a inspeção visual dos diagramas de evolução temporal, por si só, não é suficiente para discriminar a situação no qual o sistema é gerador de informação ( $r^\pi = 1$  e  $G^\pi > 0$ ) – interesse para a modelagem da integração da informação - da situação na qual também existe ganho de informação, porém ele não é nada além do que as células geram ( $r^\pi \approx 0$  e  $G^\pi > 0$ ).

### 7.3 REGRAS DA CLASSE 3

#### 7.3.1 Modelo para a Computação de Estados

A Figura 44 apresenta os diagramas espaço-temporais das regras 30 e 45, para as quais  $H(\pi, \sigma) < 0,1$  na Tabela 1, confirmando a semelhança dos padrões de evolução temporal para os modelos probabilísticos e determinístico.

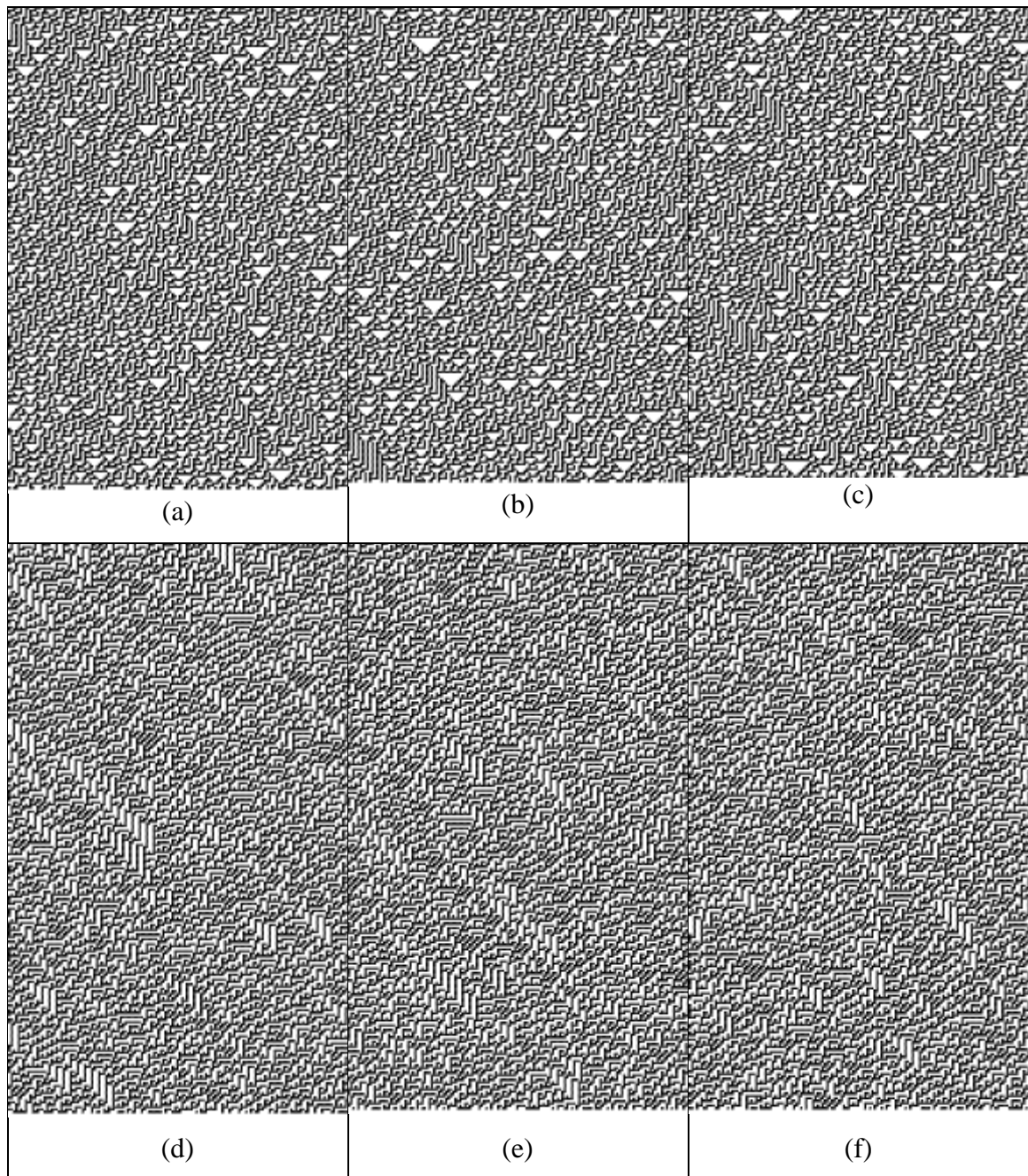


Figura 44. Regra 30  $n = 150$ , condição inicial aleatória (a-c) e Regra 45  $n = 150$ , condição inicial aleatória (d-f)

Os valores apresentados na Tabela 1 para as regras 18, 161 e 182 sugerem que os padrões de evolução temporal nos modelos probabilísticos são influenciados pelo valor de  $n$ . Para estas regras,  $H(\pi, \sigma) < 0,1$  para  $n$  ímpar e  $H(\pi, \sigma) > 0,1$  para  $n$  par.

Nas Figuras 45 a 50 são apresentados os diagramas espaço-temporais destas regras, numa janela de tempo maior (870 passos de evolução), no intuito de verificar se por meio da análise visual é possível identificar características que possam explicar tais resultados.

Para a regra 18 (Figura 45 e Figura 46), a análise visual resulta que na evolução determinística, o sistema é mais caótico para  $n$  ímpar e nos modelos probabilísticos, sutilmente, observa-se que a similaridade dos padrões é maior quando  $n$  é ímpar, corroborando com os resultados apresentados na Tabela 1 ( $H(\pi, \sigma) < 0,1$  para  $n$  ímpar). Nas Figura 47 e Figura 48 também é muito sutil a diferença no padrão de comportamento apresentado pelo fato de  $n$  ser par ( $n = 150$ ) ou ímpar ( $n = 151$ ) na regra 161.

Conforme pode ser observado para a regra 182 (Figura 49 e Figura 50) o comportamento dos modelos probabilísticos é semelhante ao comportamento do modelo determinístico evoluindo a partir de uma estado inicial escolhido ao acaso, corroborando com os resultados da Tabela 1. Esta situação, embora não apresentada nas figuras, é percebida também nas regras 18 e 161, para qualquer um dos valores de  $n$ .

Está á única conclusão possível de extrair da análise dos diagramas espaço-temporais. Não é possível, simplesmente por meio da análise visual, confirmar que o nível de similaridade dos comportamentos probabilísticos e determinístico sofre influência do valor de  $n$  ( $H(\pi, \sigma)$  é maior para  $n$  par segundo Tabela 1). Neste caso, somente a formulação matemática é capaz de demonstrá-la e sugerir o que está acontecendo em nível local e global.

Analisando o mapa de bacias de atratores, as regras 30 e 45 apresentam uma bacia com árvore de transientes muito longa, enquanto as regras 18, 161 e 182 apresentam várias bacias, porém uma bacia em especial se destaca em tamanho, com mais de 90% dos estados possíveis, e  $n$  níveis de transientes. Esta organização dos estados, assim como algumas regras da Classe 2, possibilita inferir que com a introdução do erro na evolução, ocorre uma alternância entre estados, sem contudo haver transição entre bacias, ou seja, o sistema mantém-se na bacia sendo apenas desviado para estados transientes que correspondem passos anteriores ao ciclo atrator.

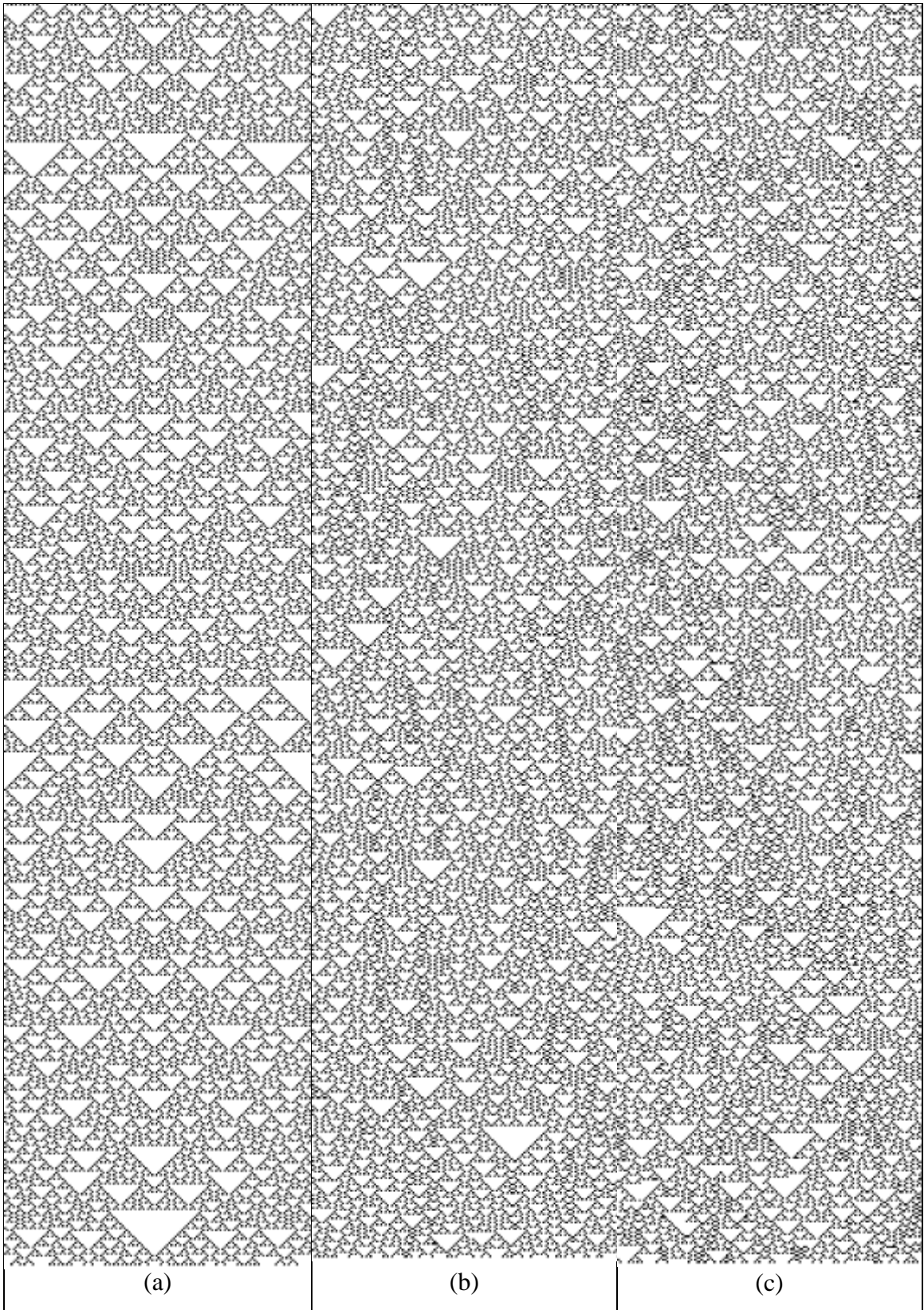


Figura 45. Regra 18  $n = 150$ , condição inicial canônica



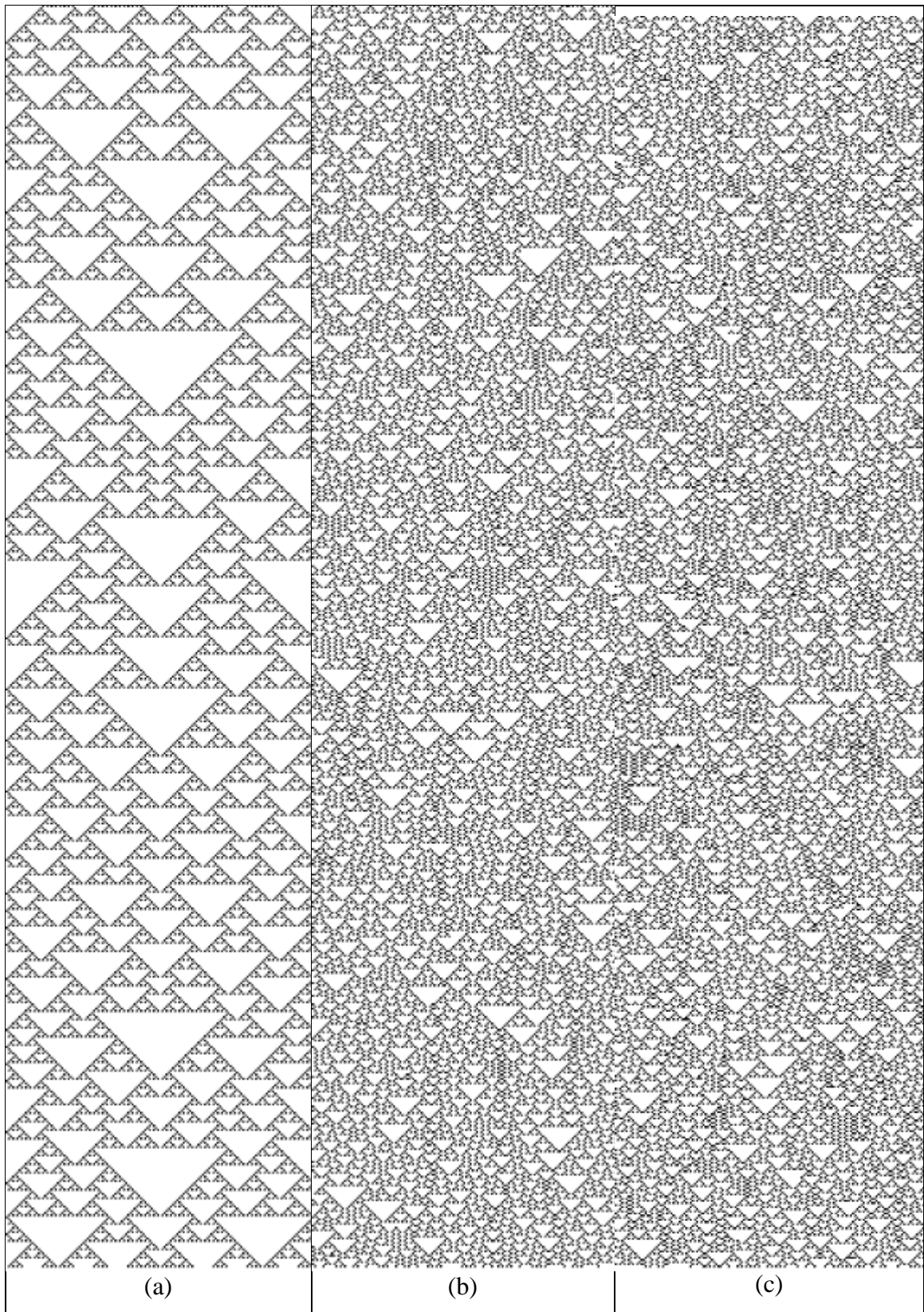


Figura 46. Regra 18  $n = 151$ , condição inicial canônica

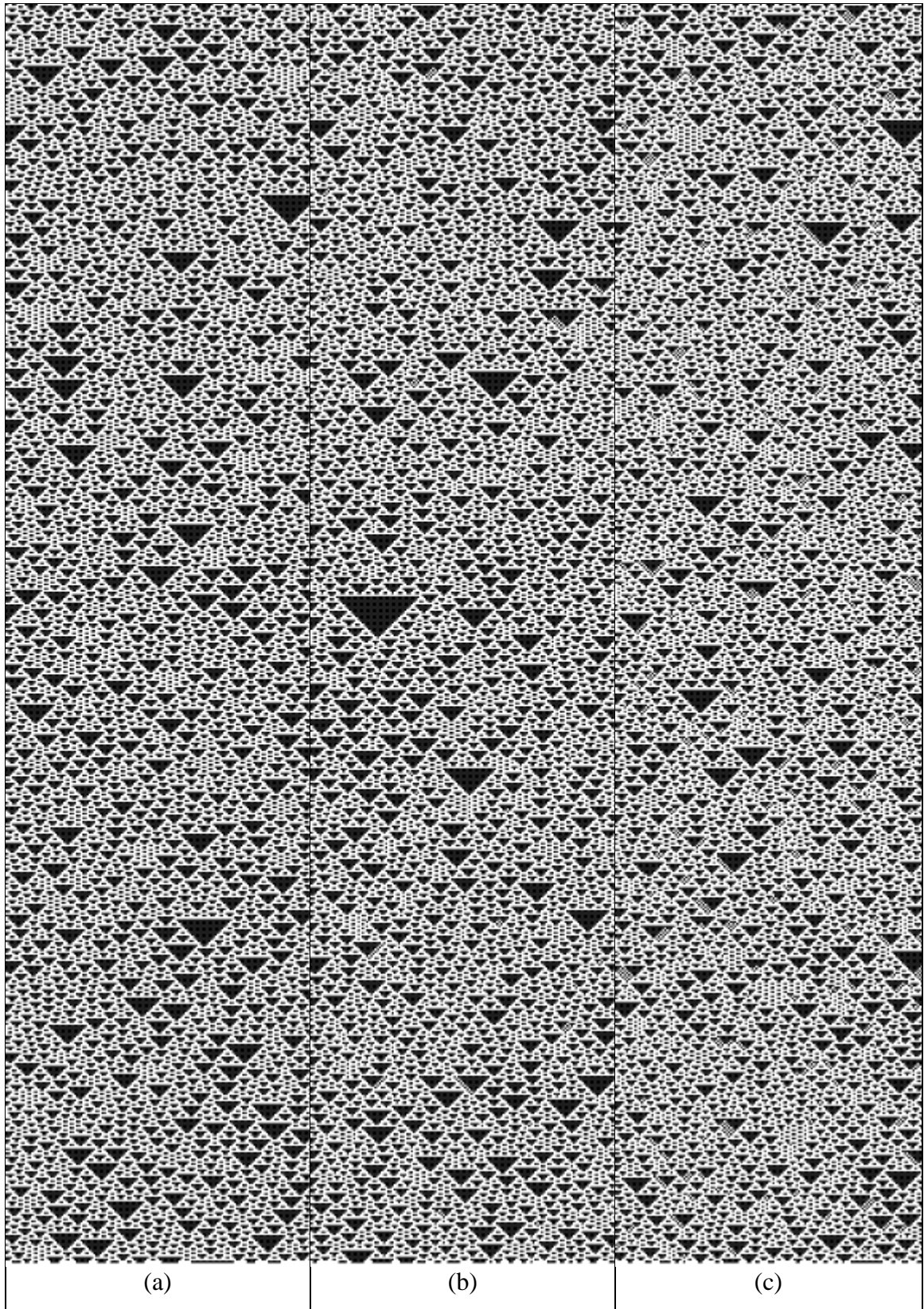


Figura 47. Regra 161  $n = 150$ , condição inicial aleatória

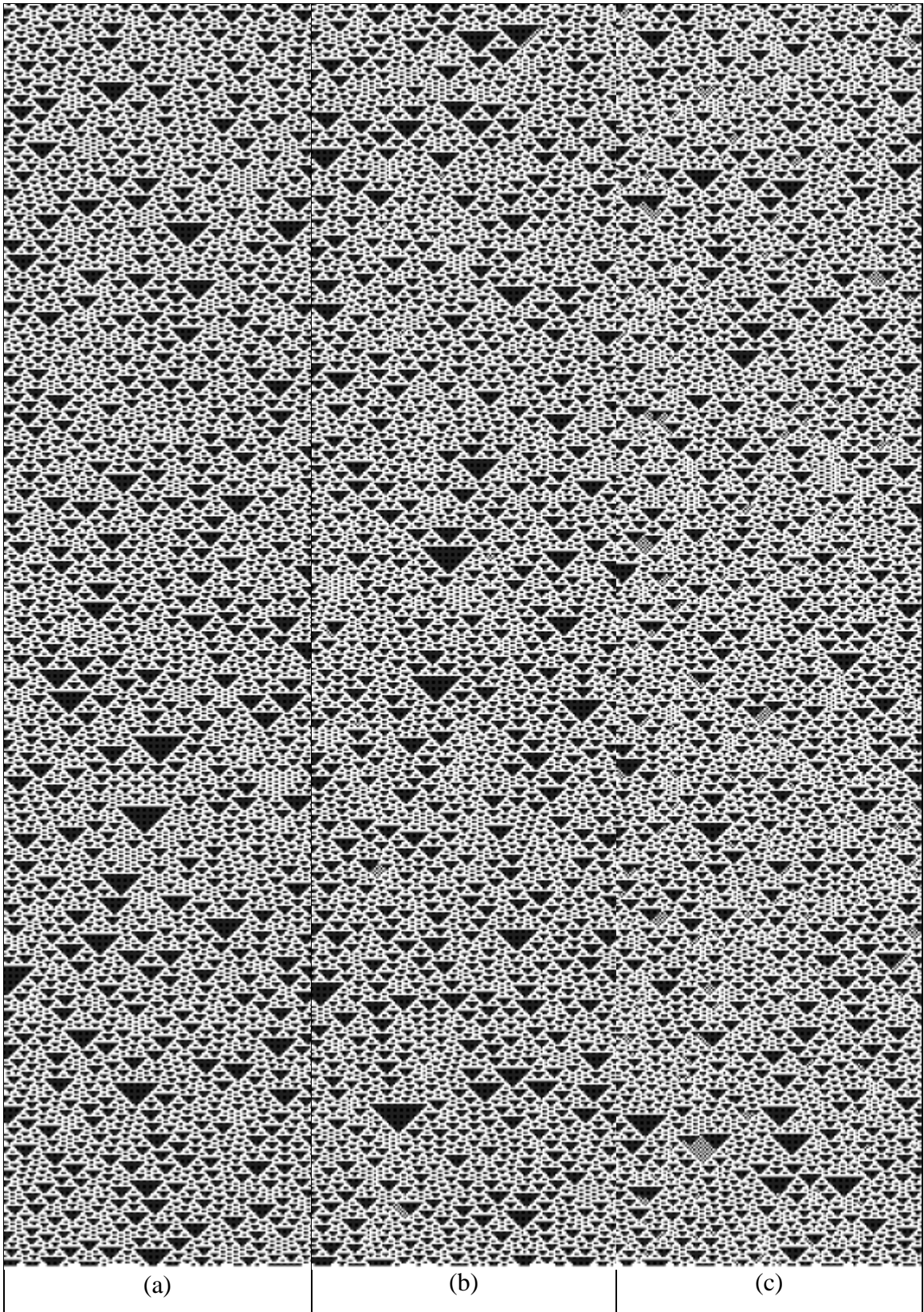


Figura 48. Regra 161  $n = 151$ , condição inicial aleatória

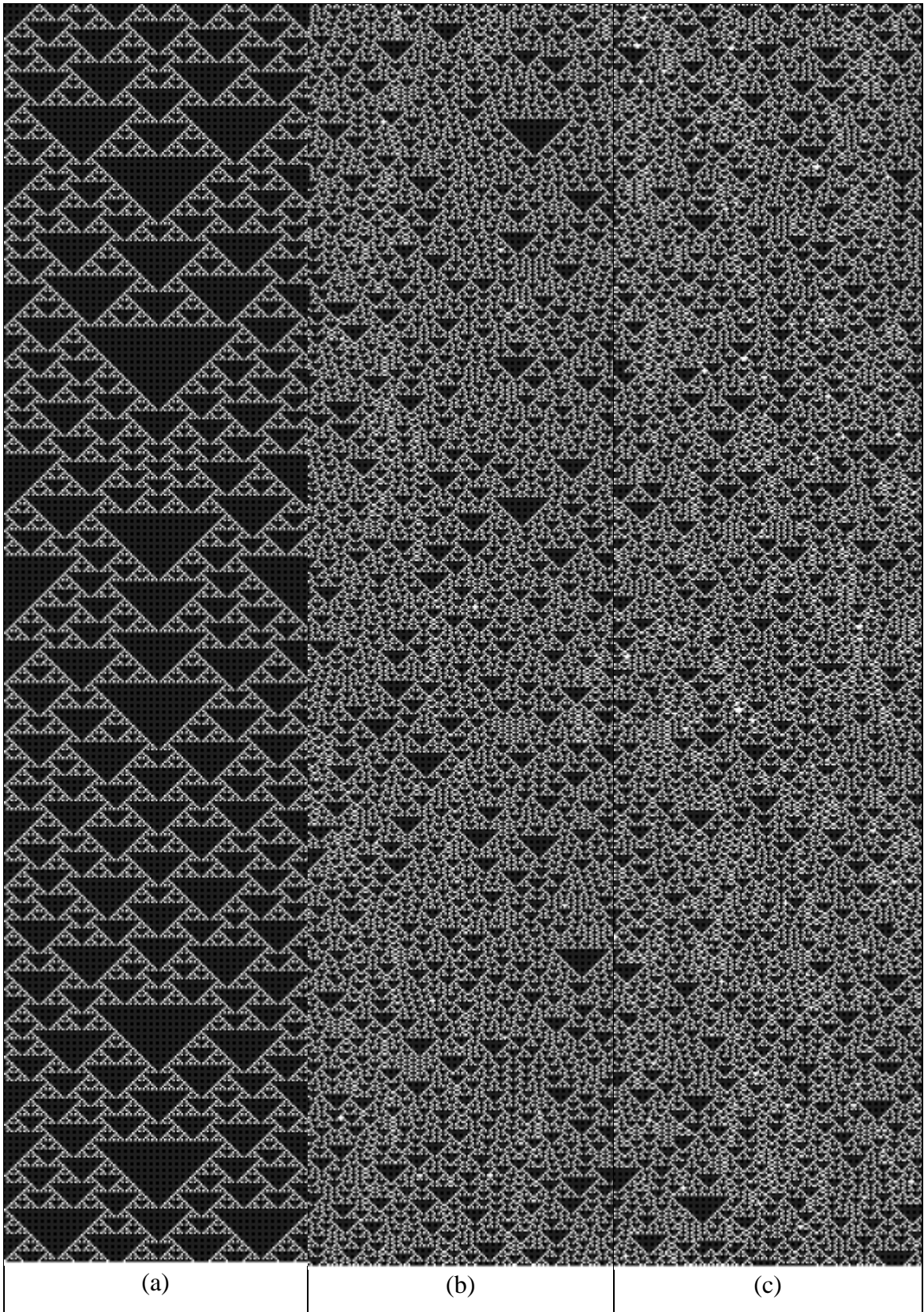


Figura 49. Regra 182  $n = 151$ , condição inicial canônica

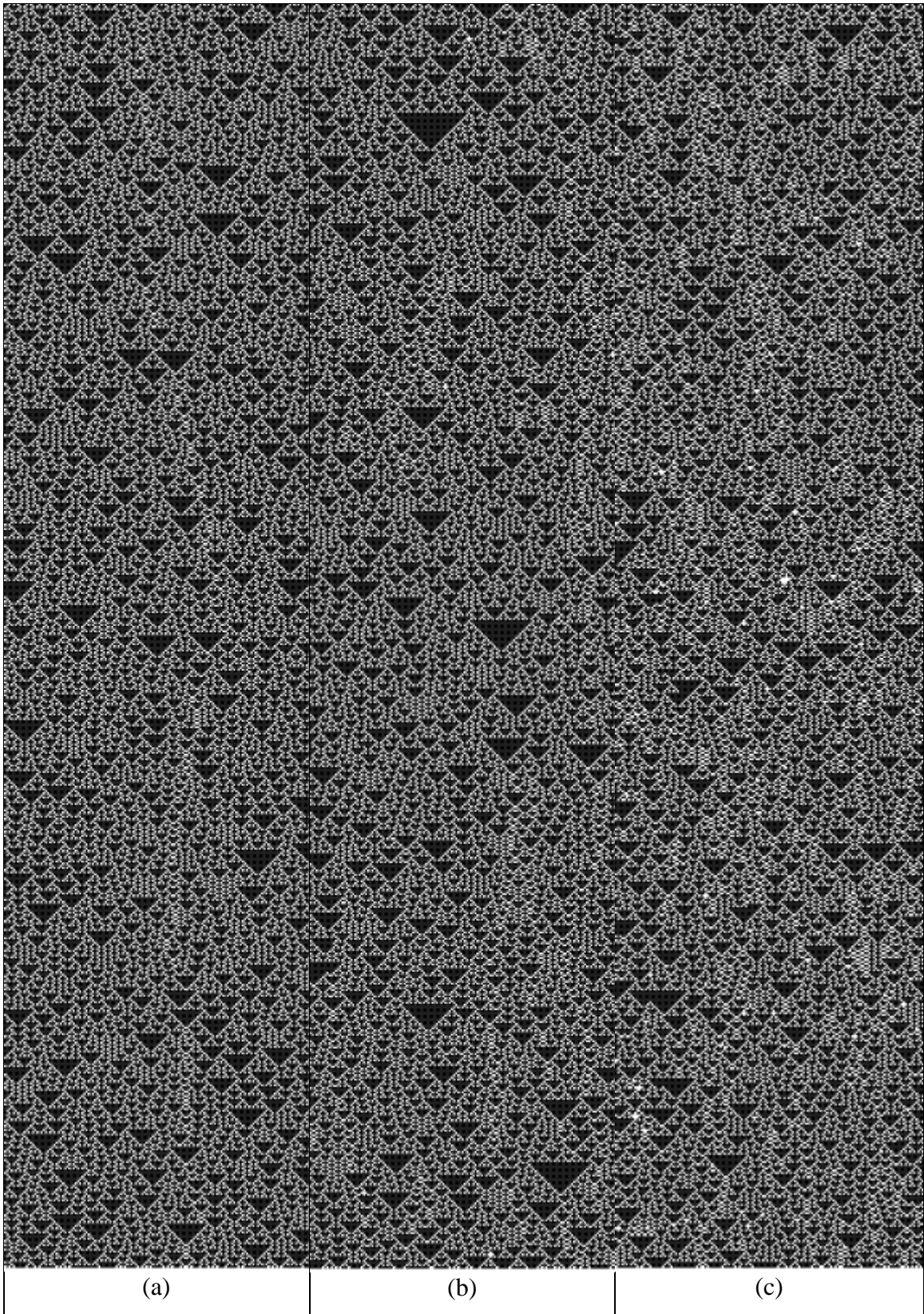


Figura 50. Regra 182  $n = 151$ , condição inicial aleatória

### 7.3.2 Modelo para a Integração da Informação

As regras 60 e 90 apresentaram, nas Tabela 3 e Tabela 4,  $G^\pi > 0,000000$  para  $r^\pi = 1,000000$  e, ainda, o ganho de informação ( $G^\pi$ ) é inversamente proporcional ao grau de incerteza introduzido na evolução ( $p$ ).

Esta situação é interessante porque representa ganho global superior à soma dos ganhos locais (Equação 32), significando que o sistema é gerador de informação.

Analisando o mapa de bacias de atratores das regras 60 e 90, observa-se que os estados se organizam em várias bacias equivalentes, de tamanho, período do ciclo atrator e quantidade de estados do tipo *Garden- of- Eden*  $O(n)$ . Todas as bacias tem apenas um nível de transientes. Para ambas as regras, quando  $n$  é ímpar as bacias são consideravelmente maiores, especialmente o ciclo atrator.

Devido a esta organização, podem ocorrer transições de bacias a cada passo de evolução, inclusive com possibilidade de retornar à situação do estado estacionário quando  $n$  é ímpar e grande parte dos estados são do ciclo atrator. Tudo isso é suposição, uma vez que nem a análise das bacias nem a análise visual dos diagramas são suficientes para este tipo de conclusão, e poderia explicar a similaridade dos padrões apresentados e os resultados da Tabela 1 ( $H(\pi, \sigma) = 0,000000$ ).

No que tange ao ganho de informação, e buscando relacioná-lo a alguma característica, analisando visualmente as Figura 51 e Figura 52, não é possível concluir que os modelos probabilísticos geram informação. De fato, observa-se uma relativa entropia/desordem na evolução, porém não expressiva o suficiente para explicar os resultados das Tabela 3 e Tabela 4.

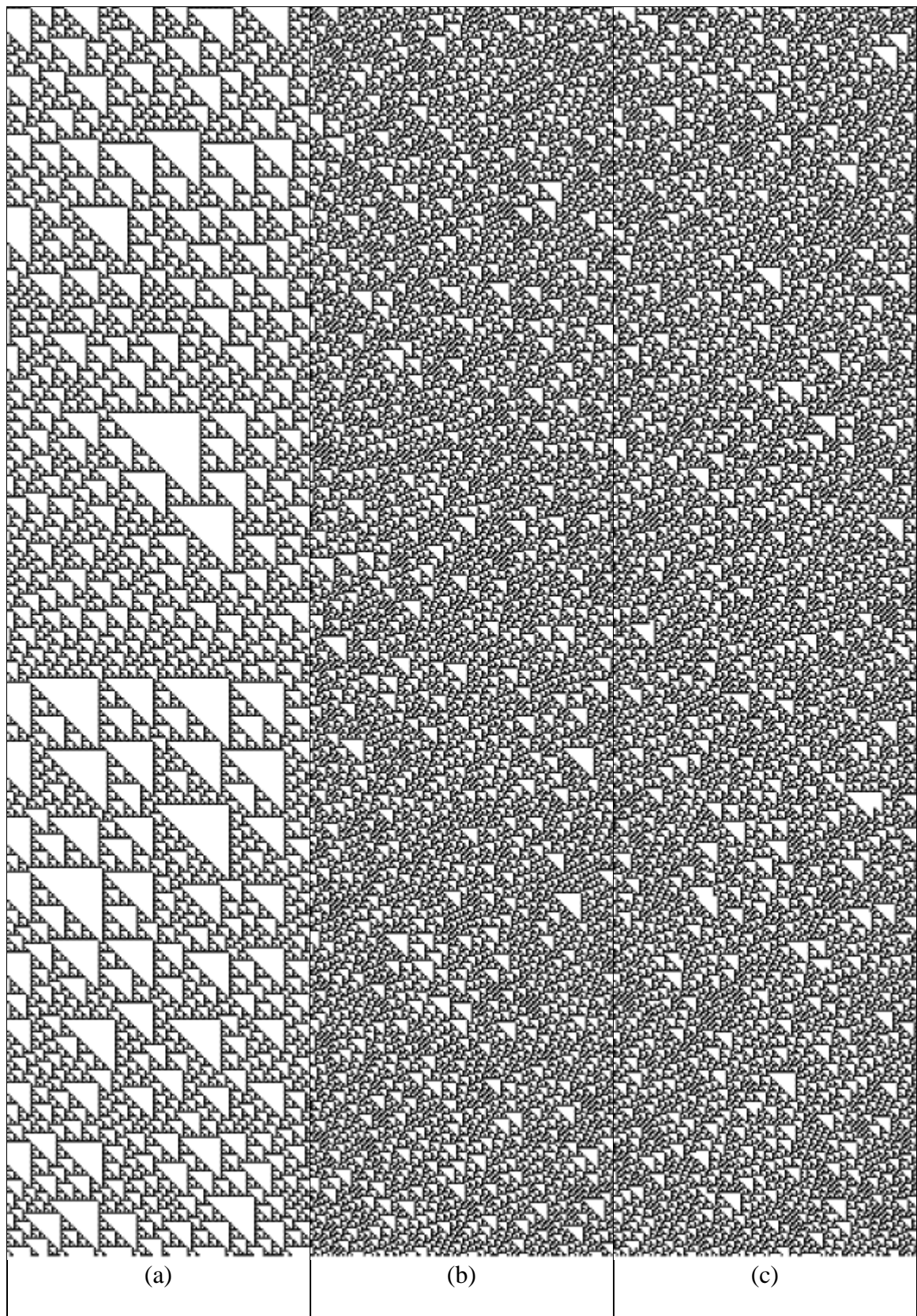


Figura 51. Regra 60,  $n = 150$ , condição inicial canônica

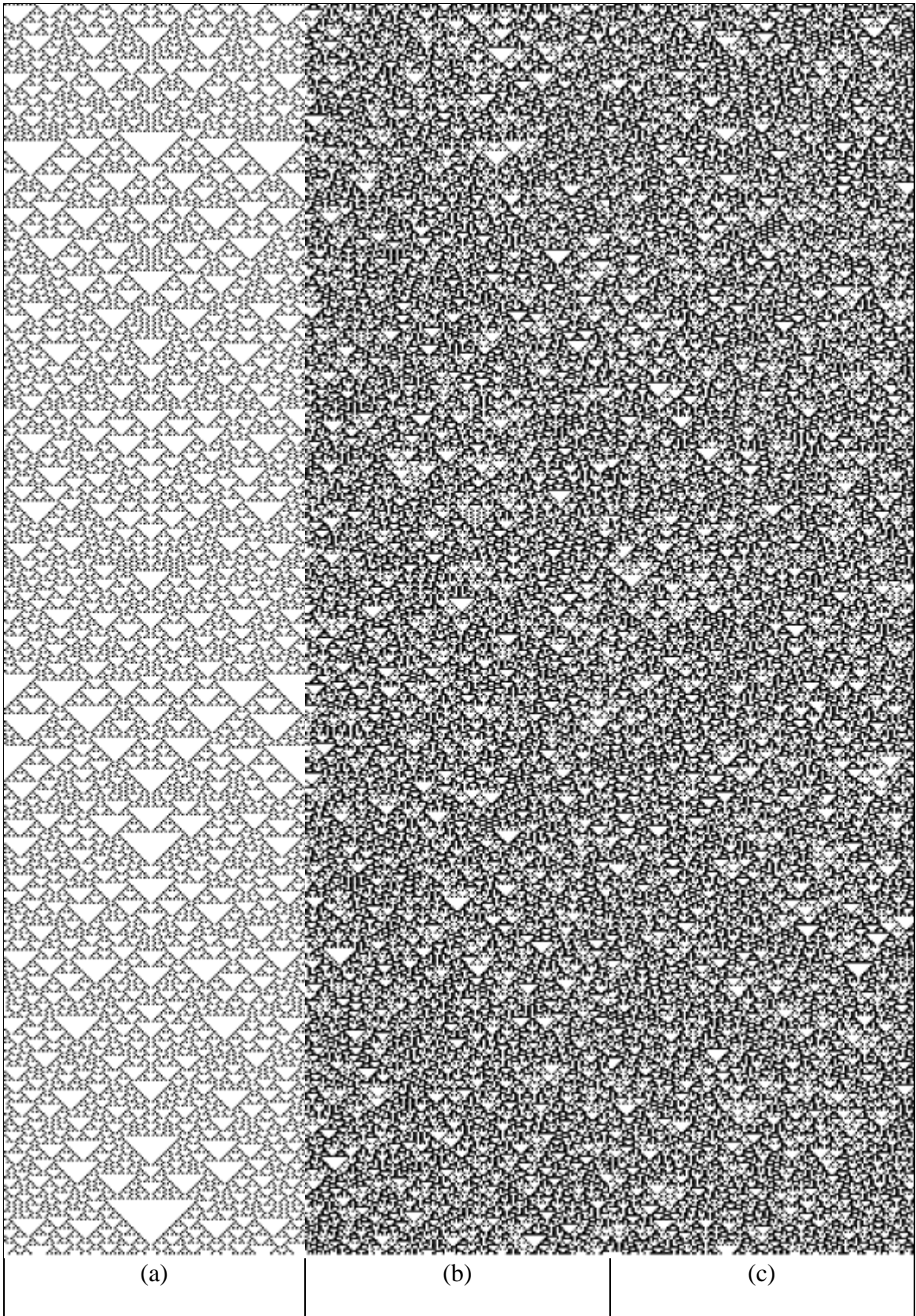


Figura 52. Regra 90,  $n = 151$  condição inicial canônica



Um resultado curioso é apresentado para as regras 105 e 150:  $r^\pi = 1,000000$  com  $G^\pi > 0$  para  $n$  par e  $r^\pi = 1,000000$  com  $G^\pi = 0,000000$  para  $n$  ímpar. As Figura 53 a Figura 55 apresentam o diagrama espaço-temporal das regras 105 e as Figura 56 e Figura 57 apresentam o diagrama espaço-temporal para a regra 150.

Entendamos o que acontece com as referidas regras. De maneira geral, em ambas as regras observa-se, à medida em que se aumenta o tamanho do autômato, e para  $n$  par, o surgimento de bacias com ciclos atratores de tamanho 2 e maior número e proporção de estados do tipo *Garden-of-Eden* – em média estes estados correspondem a 75% da quantidade total de estados da *bacia*. Sugere-se, portanto, que o ganho de informação quando  $n$  é par esteja relacionado à incidência desses estados. Ainda, para  $n$  ímpar observou-se que o mapa é formado por bacias nas quais todos os estados são atratores, corroborando para a análise já realizada anteriormente nas discussões deste Capítulo.

A perturbação causada no sistema pela introdução do erro na evolução resulta em transições entre bacias ou alternância de estados dentro da própria *bacia*. No caso de  $n$  par esta transição significa que o fluxo de evolução é desviado para um estado não pertencente ao ciclo atrator e pode nunca mais voltar ao mesmo ou, ainda, voltar por meio de uma sequência de estados distinta da evolução determinística. Esta tentativa do sistema em tratar a incerteza gera informação, pois aumenta a entropia do sistema. De forma análoga, quando  $n$  é ímpar e todos os estados da *bacia* são do tipo atratores, embora o erro resulte em alteração no curso natural de evolução, não será suficiente para agregar informação. Por meio da análise visual da Figura 55 é possível verificar que, de fato, ao longo da evolução o sistema é desviado para estados antecessores ao ciclo, e o que se observa nos modelos ao final de 10000 passos de evolução são estes estados. Nesta Figura são apresentados passos antecessores e observa-se, no início de cada diagrama, uma repetição do padrão característico do modelo determinístico. No entanto, de uma forma geral, a análise visual

não é suficiente para explicar o ganho de informação, a não ser pela constatação de aumento da entropia do sistema, mais expressiva para  $n$  par.

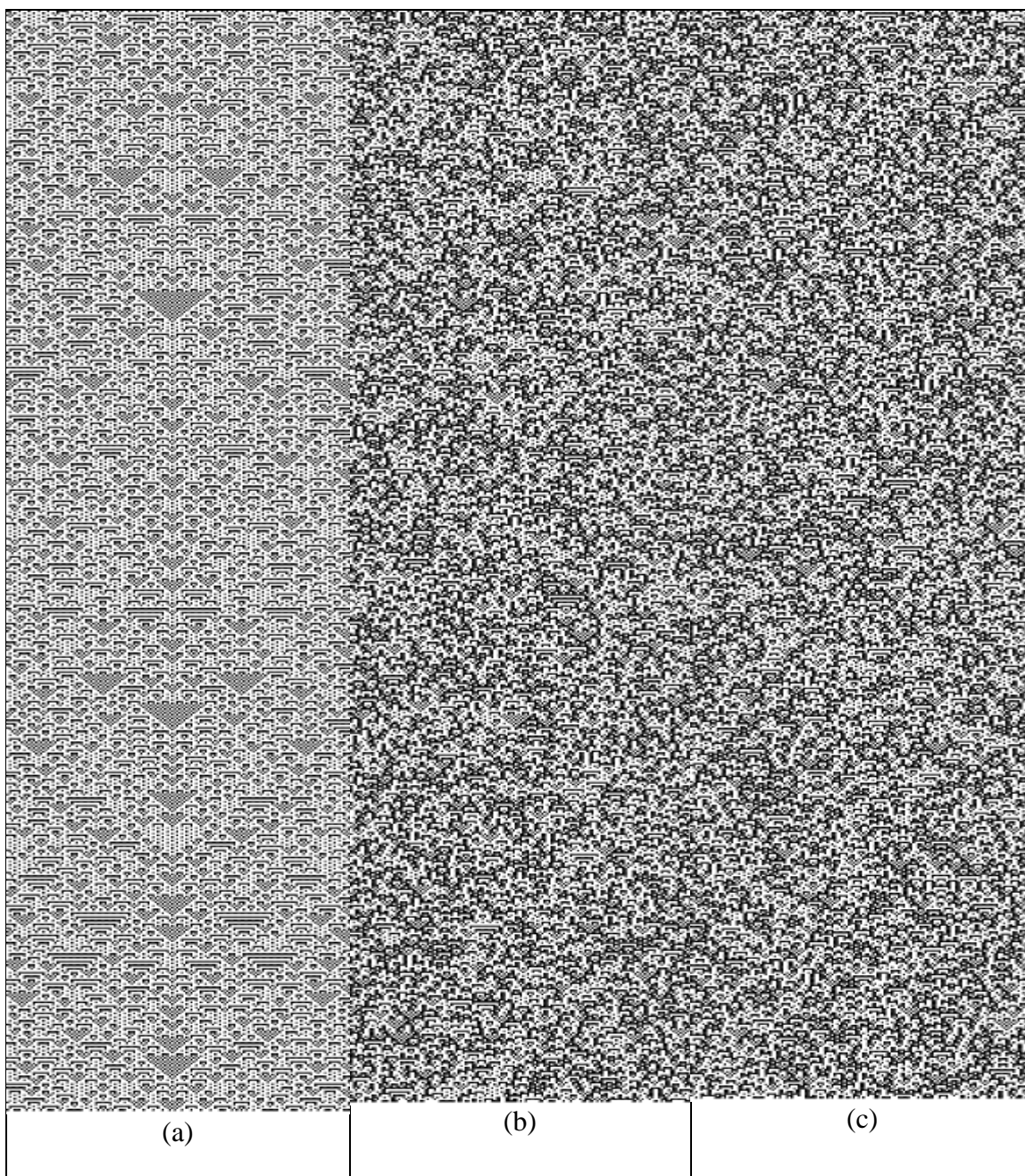


Figura 53..Regra 105,  $n = 150$  condição inicial canônica

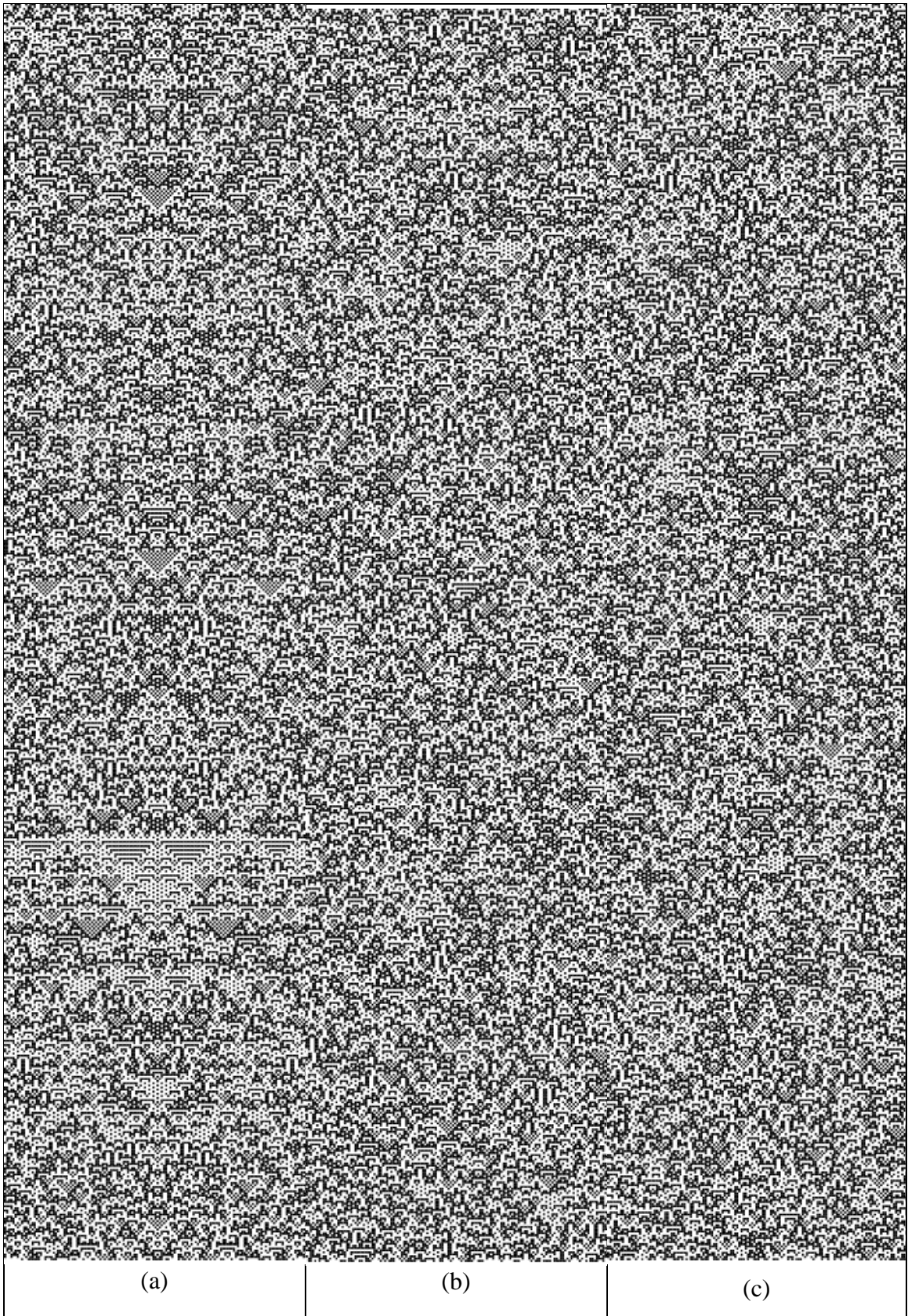


Figura 54. Regra 105  $n = 151$ , condição inicial canônica

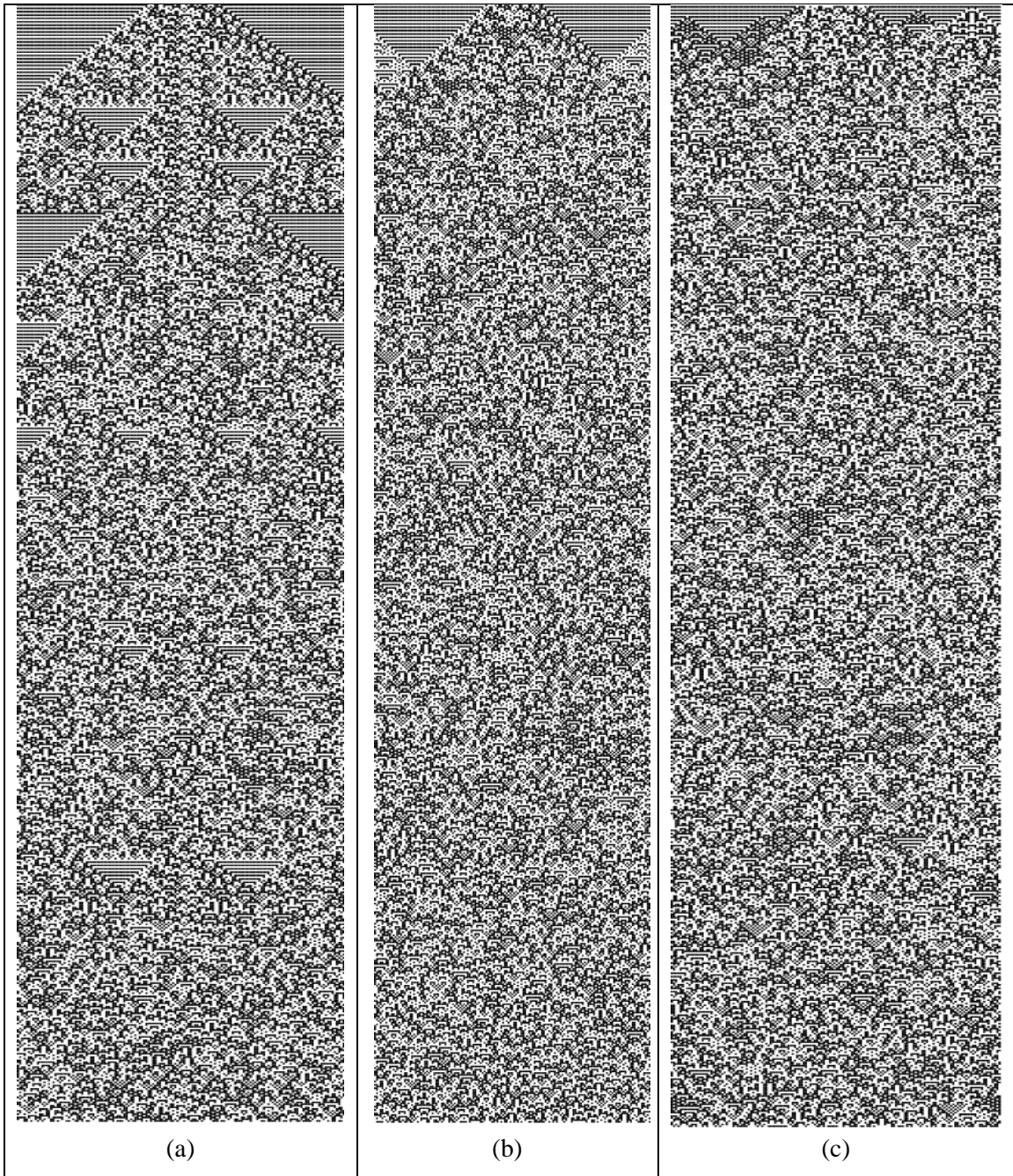


Figura 55. Regra 105  $n = 151$ , condição inicial aleatória

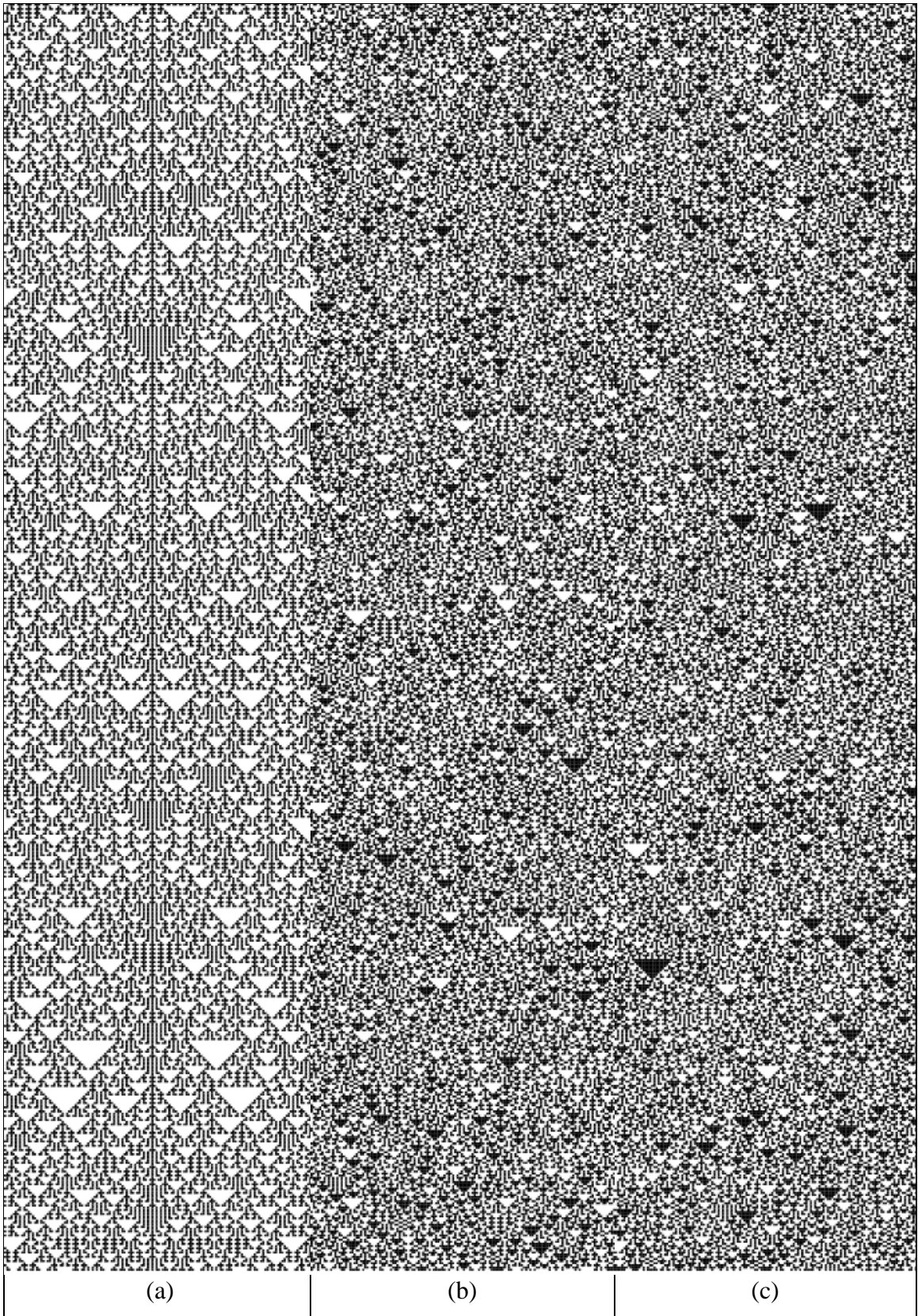


Figura 56. Regra 150  $n = 150$ , condição inicial canônica

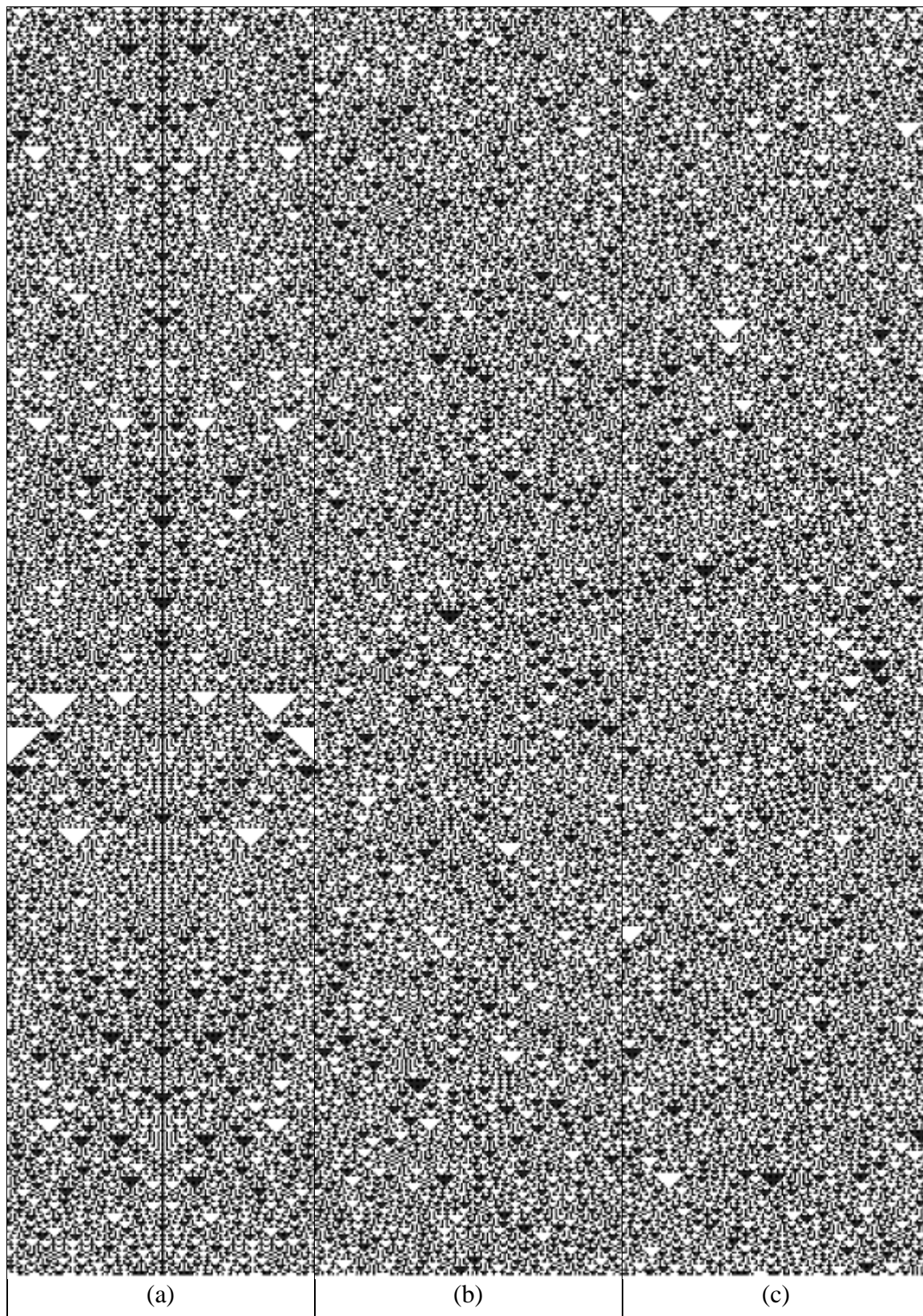


Figura 57. Regra 150,  $n = 151$  condição inicial canônica

As demais regras da classe 3 foram analisadas qualitativamente na tentativa de elucidar mais alguma característica relevante. Vale ressaltar a regra 73 e seu processo evolucionário, levando em consideração as características do mapa espaço-temporal na Figuras 58 e Figura 59. É notável que o comportamento é extremamente caótico; porém é bem nítido a influência da condição inicial.

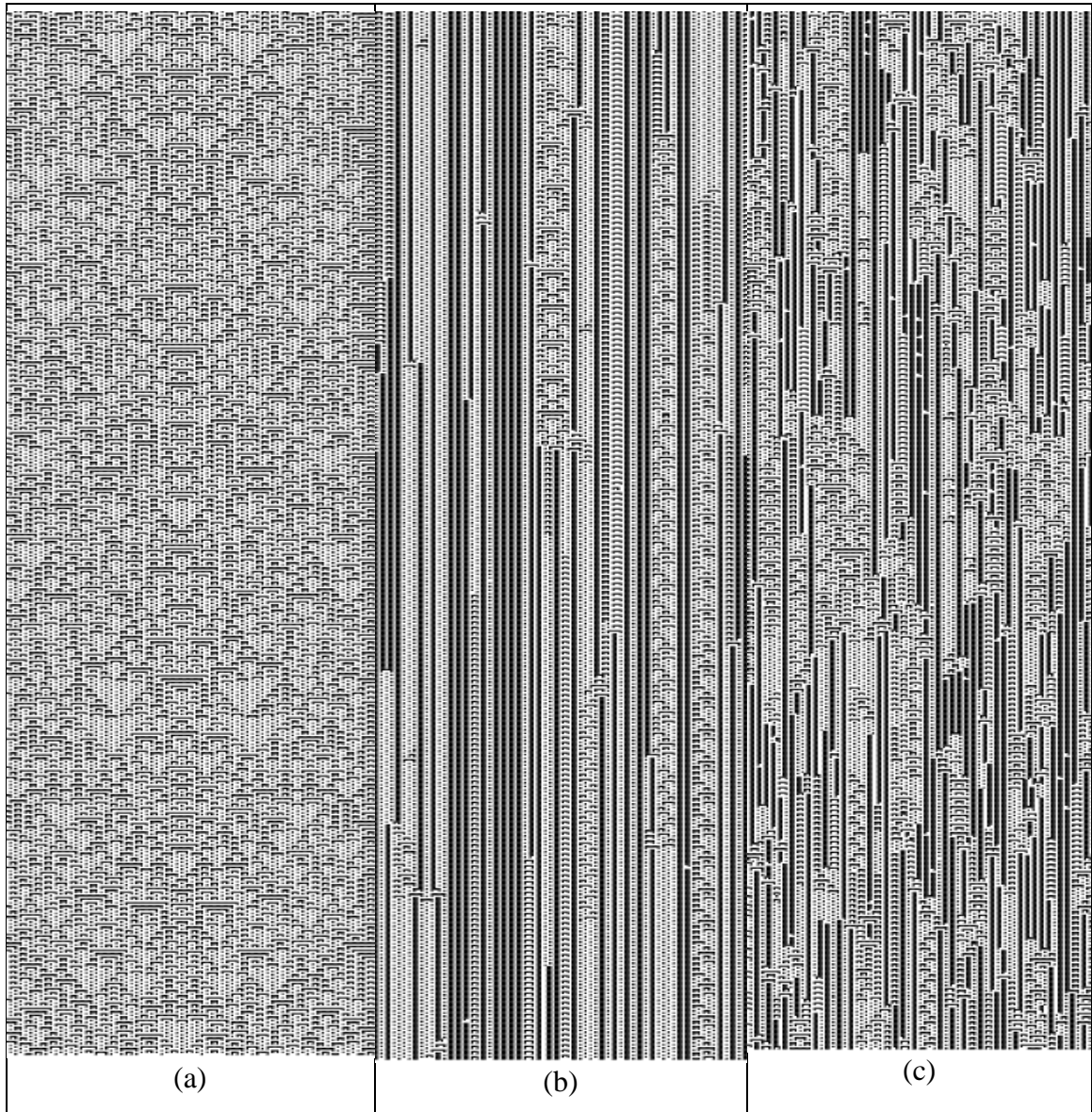


Figura 58. Regra 73  $n = 150$  condição inicial canônica

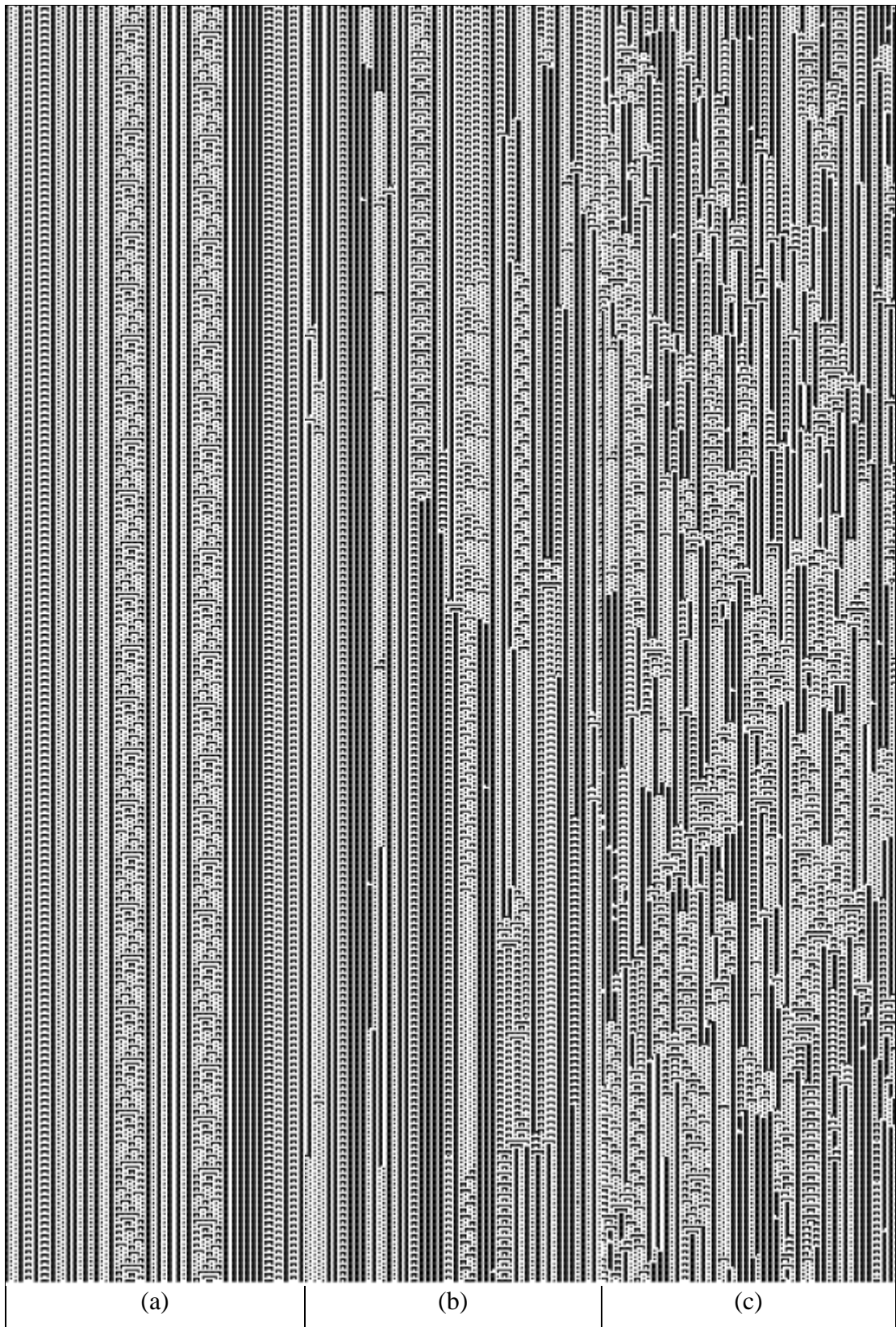


Figura 59. Regra 73  $n = 150$  condição inicial aleatória



## 7.4 REGRAS DA CLASSE 4

### 7.4.1 Modelo para a Computação de Estados

As regras 193 e 225 apresentaram  $H(\pi, \sigma) < 0,1$  na Tabela 1, sugerindo alguma similaridade entre as distribuições de probabilidades das bacias de atratores no estado estacionário.

Ao analisar os mapas de bacias de atratores, verificou-se que estas regras apresentam bacias populosas e a árvore de transientes possui vários níveis ( $O(n)$ ). Independente do tamanho do autômato ( $n$ ) existe sempre uma bacia que concentra em média 90% dos estados globais e destes, muitos são do tipo *Garden-of-Eden* e muitos são atratores.

Conforme pode ser observado na Figura 60, a regra 193 apresenta um padrão disforme, complexo, no cenário determinístico ( $p = 0$ ) e, ao introduzir o erro na evolução, o padrão tende a ser caótico aproximando-se do padrão característico das regras discutidas na seção anterior.

Tal observação sugere que das interações em nível celular, dado a capacidade de cada célula desobedecer a regra em questão a cada passo de evolução, emergem propriedades – neste caso, o padrão comportamental.

Observa-se que o comportamento do autômato é influenciado pela condição inicial, a qual confere outro nível de incerteza ao seu processo evolutivo, e tamanho do autômato ( $n$ ). Tais fatos podem ser confirmados nas Figura 61 a Figura 63.

Diferentemente da regra 193, ao observar as Figura 64 e Figura 65 conclui-se que o comportamento da regra 225 nos modelos probabilísticos é o mesmo apresentado no modelo determinístico, sugerindo que embora ocorra transições entre bacias o modelo garante que num futuro distante as distribuições de probabilidades são iguais.

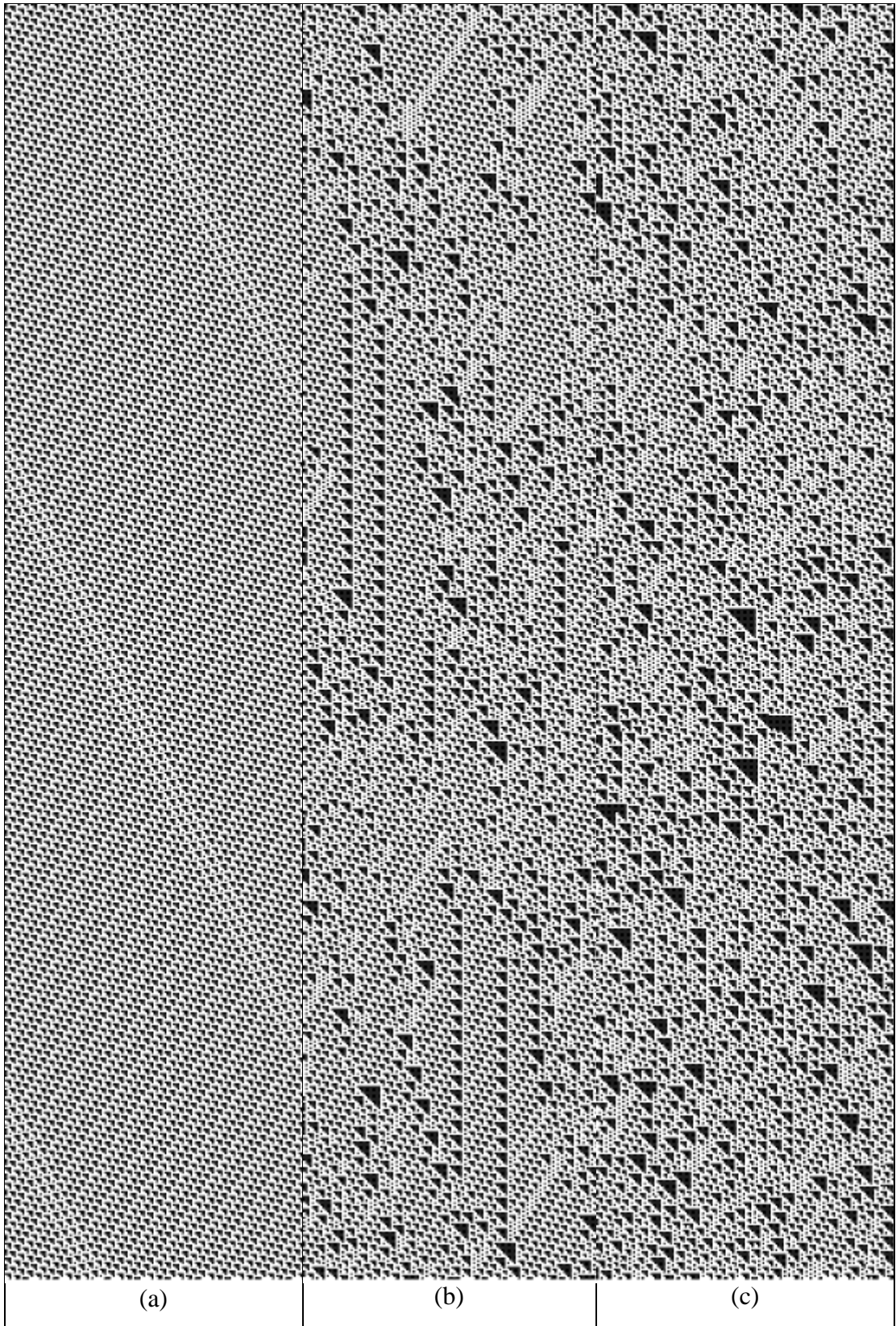


Figura 60. Regra 193  $n = 150$  condição inicial canônica

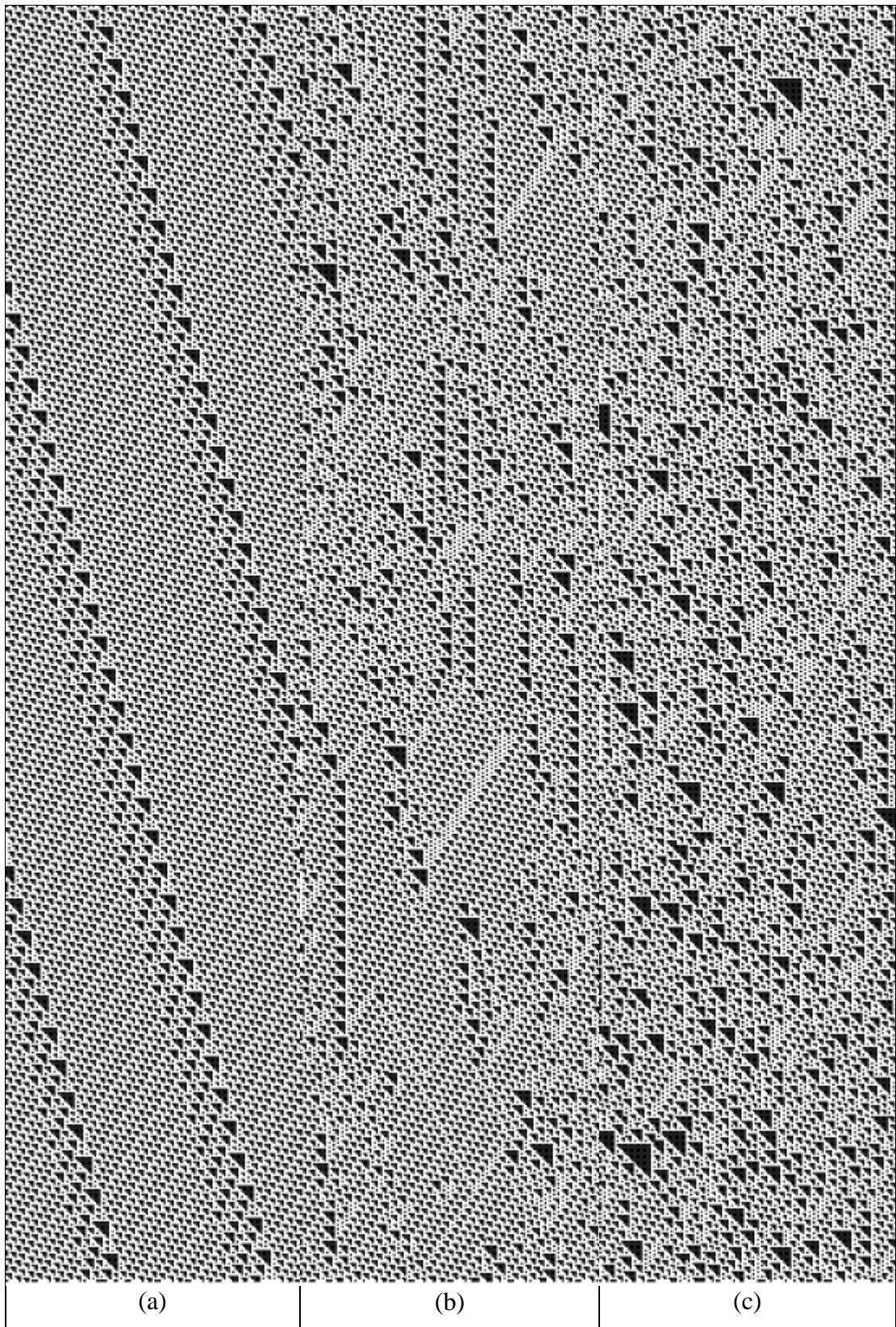


Figura 61. Regra 193,  $n = 150$  condição inicial aleatória

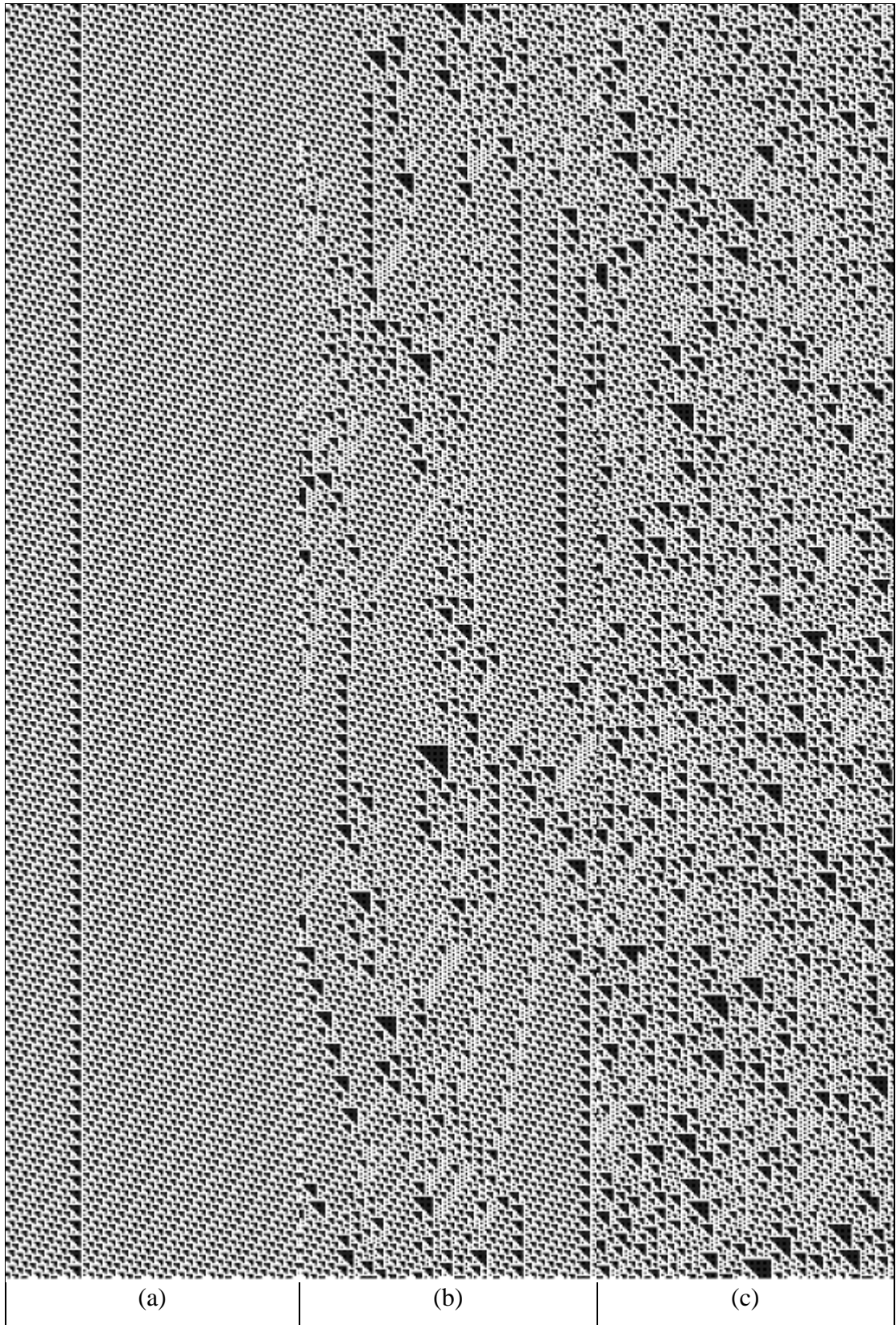


Figura 62. Regra 193  $n = 151$  condição inicial canônica

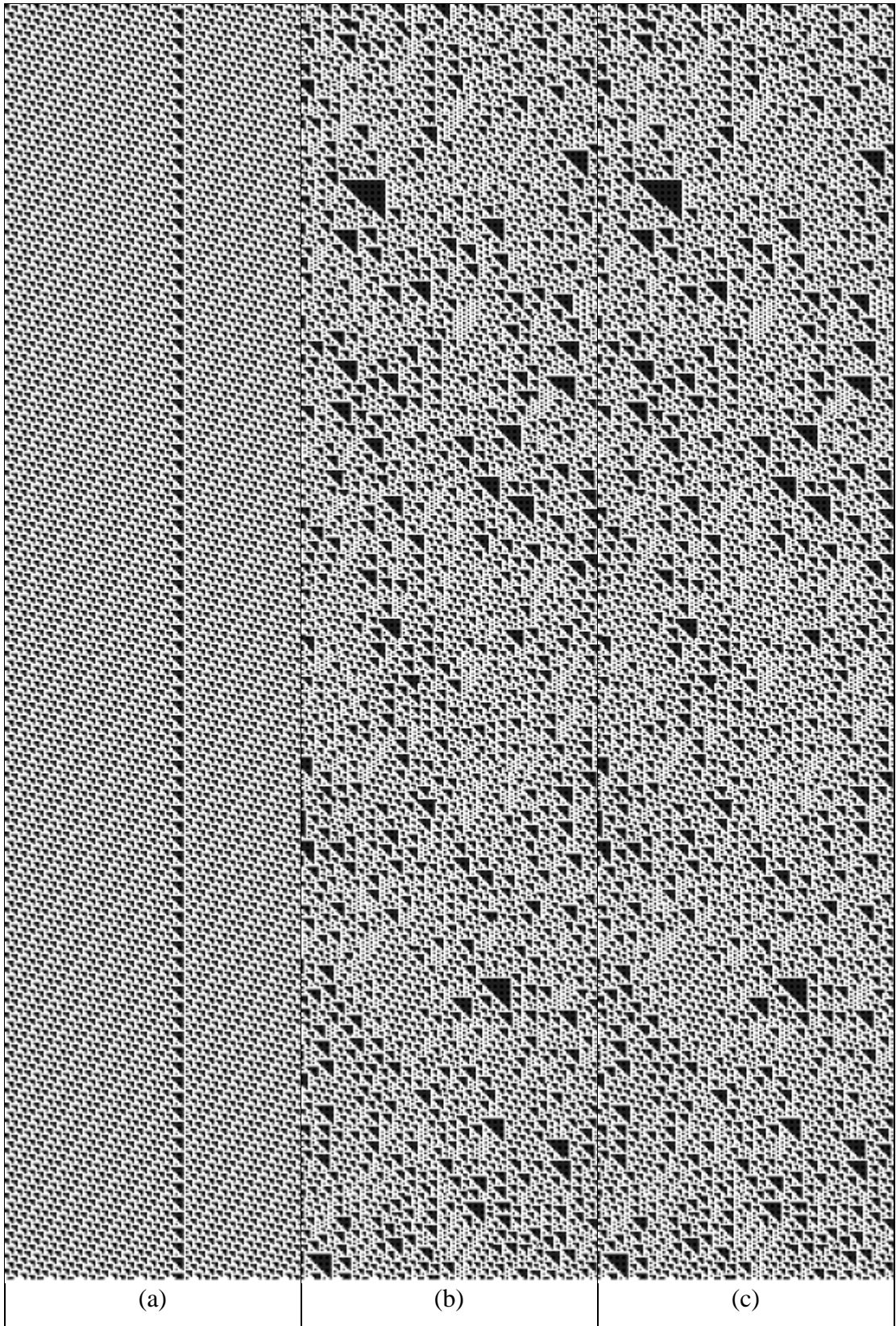


Figura 63. Regra 193,  $n = 151$  condição inicial aleatória

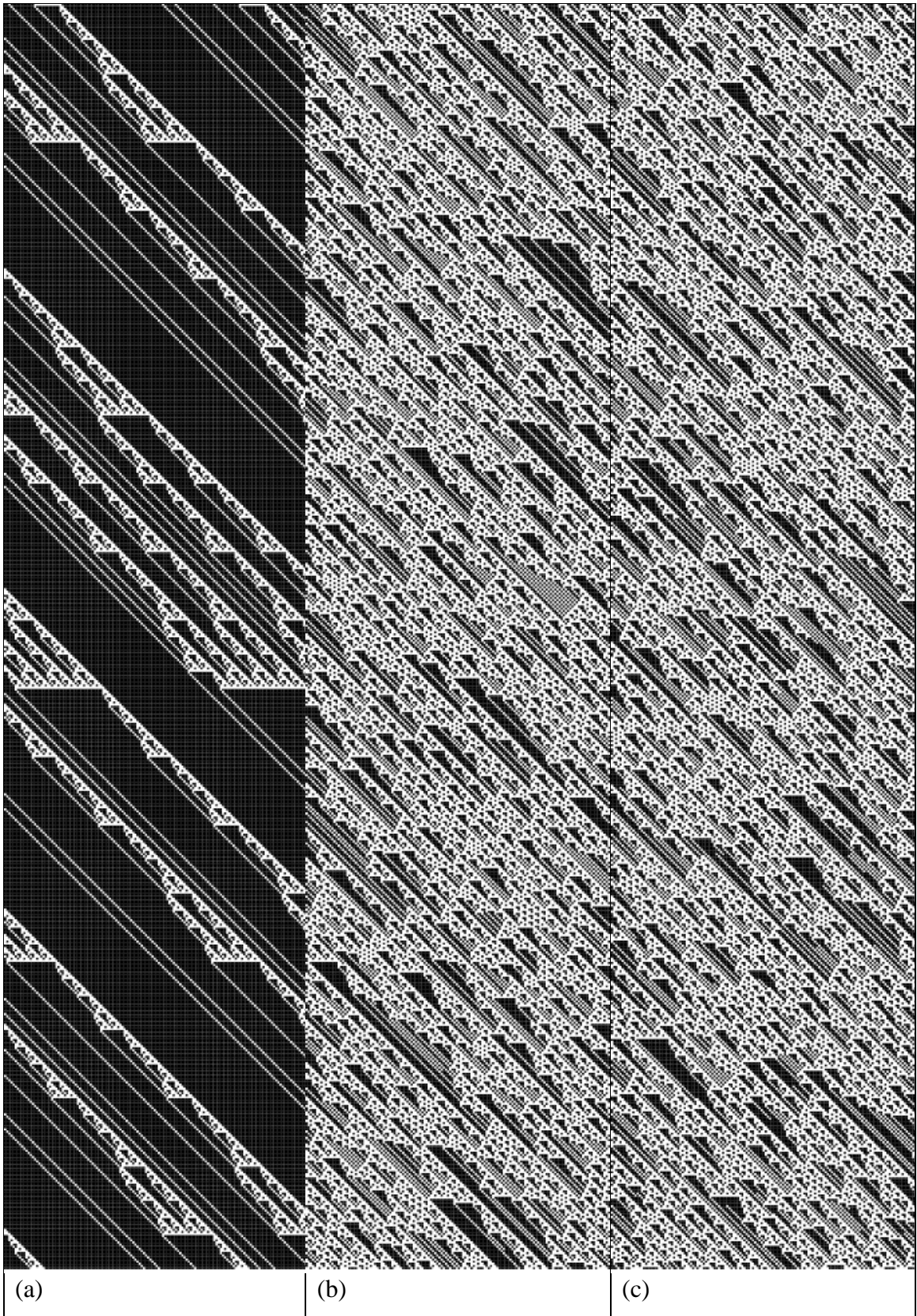


Figura 64. Regra 225  $n = 150$ , condição inicial canônica

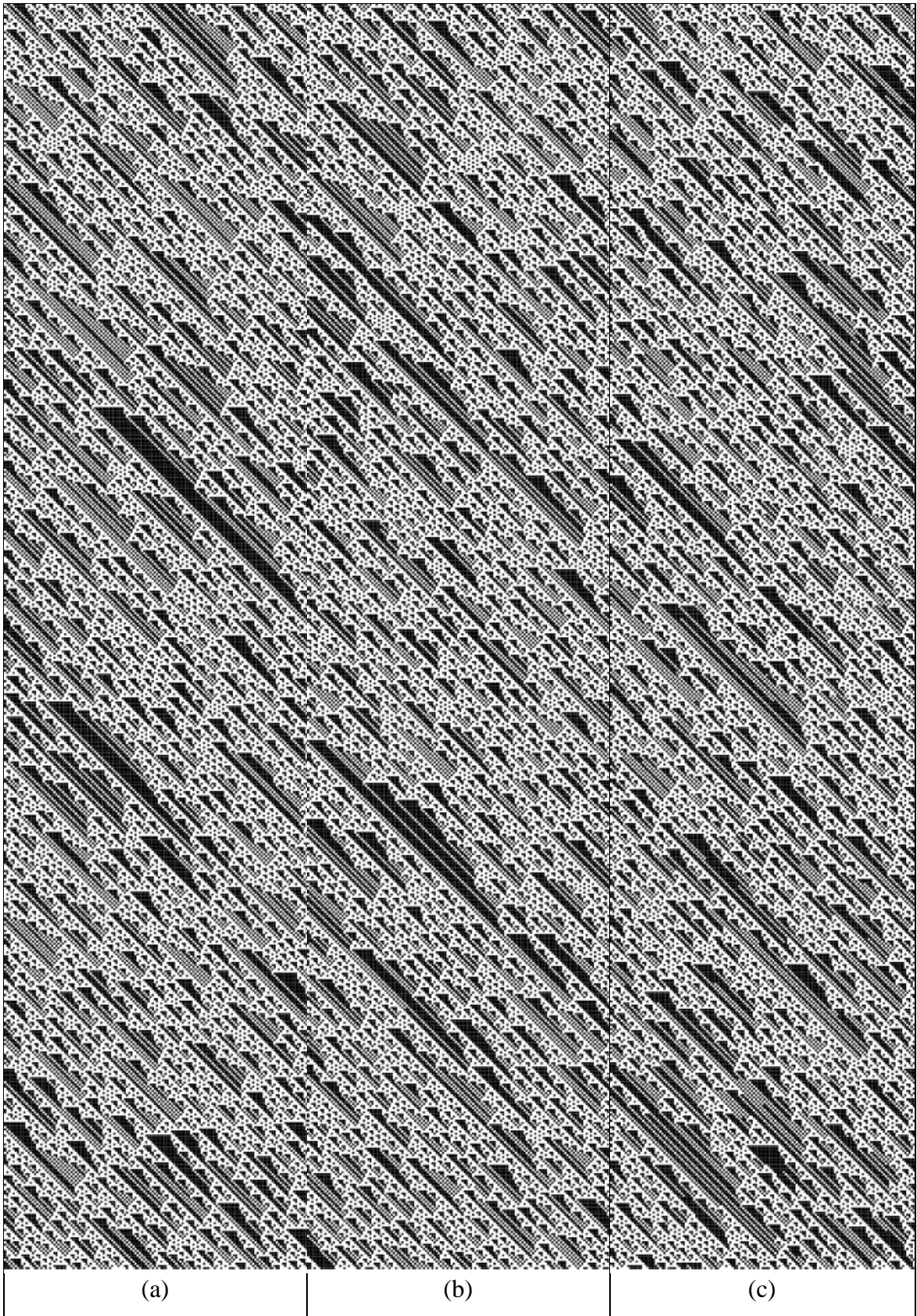


Figura 65. Regra 225  $n = 150$ , condição inicial aleatória

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho propôs um modelo simples, baseado em autômatos celulares elementares probabilísticos, para que a partir do entendimento de seu processo evolutivo, pudesse ser possível representar processos complexos relacionados a sistemas biológicos, tais como a computação de estados no sistema imunitário e a informação integrada no córtex cerebral.

As análises qualitativas norteadas com vistas à identificação de propriedades que emergem das bacias de atratores (organização das partes) e do padrão de comportamento global (interação entre as partes) que pudessem explicar os resultados obtidos a partir das formulações matemáticas.

Os autômatos probabilísticos foram implementados por meio da adoção de um não determinismo na evolução, seja na escolha ao acaso do estado inicial, seja no valor do parâmetro  $p$ . Com isso, pretende-se caracterizar a mudança de estado probabilística como sendo uma desobediência à regra em uso (representando ruído, falha ou incerteza).

Nesse sentido, os autômatos celulares probabilísticos deste trabalho são originais. Além da implementação ser consideravelmente simples, a aleatoriedade foi embutida em nível celular por meio de um parâmetro único. No modelo cada célula decide, a cada passo, obedecer ou desobedecer a regra que governa sua evolução temporal.

Se o sistema fosse determinístico, num futuro distante ele estaria na mesma bacia onde iniciou a evolução; com o não determinismo pode ser que o sistema permita transições entre as bacias e, ainda assim, garanta no futuro distante probabilidades semelhantes às daquelas do caso determinístico evoluindo a partir de um estado inicial aleatório.

Para tal verificação foi utilizada a distância de *Hellinger* entre as distribuições de probabilidades e os modelos (regras,  $n$ ) para os quais as distribuições de probabilidades não diferem muito foram considerados apropriados para a modelagem da computação de estados no sistema imunitário.

Metaforicamente, neste modelo cada bacia pode representar uma classe de “estados” (o termo estados refere-se ao nível macroscópico: saúde, doente, convalescente) os quais o organismo é confinado de acordo com a computação realizada pelo sistema imunitário.

Por meio do conceito de entropia do sistema, o modelo possibilitou mensurar o quanto de informação é integrada para gerar complexidade. Para tanto, o ganho de



informação foi expresso em função da razão de correlação total, a qual se refere à quantidade de informação que excede no sistema

As regras que apresentaram notoriedade no que tange à representação da “imunidade como computação” e da integração da informação conferem ao modelo proposto a capacidade de capturar a emergência de propriedades a partir do entendimento das interações locais, podendo inclusive serem utilizadas na modelagem de outros sistemas complexos e auto-organizáveis.

Do ponto de vista da computação de estados, dependendo da regra de transição, algumas bacias de atratores podem expressar uma sucessão complexa de estados corporais devido, por exemplo, o aparecimento ou recuperação de doenças ou ainda a adaptação do corpo a um novo conjunto de estados, uma vez que o sistema está sempre aprendendo, reagindo até mesmo quando do estado de “boa saúde”.

As mudanças de estado do autômato, provocadas pela incerteza do modelo, podem ser interpretadas de várias maneiras: as transições entre as bacias podem representar o aparecimento ou a recuperação de doenças, bem como a adaptação em um conjunto de estados distintos, porém ainda com o corpo saudável; transições dentro da mesma bacia de atratores podem representar um processo que não altera o estado global do corpo, tal como a resposta imune.

De fato, na análise espaço-temporal observou-se que existem regras que, mesmo com a incerteza associada à evolução, tendem a confinar a dinâmica do autômato à mesma *bacia* na qual os estados se desdobrariam caso não houvesse a incerteza.

As regras 251 e 253 (classe 1), 15, 51, 204, 240 (classe 2) e 60 e 90 (classe 3) sugerem modelos para representação da computação de estados no sistema imunitário. Para essas regras as alterações de estados são, em grande parte, realizadas dentro da própria bacia e podem ser interpretadas como a capacidade de o sistema imunitário responder a alterações do meio atuando de maneira usual para minimizar o dano, ou seja, sem muitas alterações na organização dos componentes do sistema.

As regras para as quais a dinâmica de evolução resulta em alteração de bacias podem ser utilizadas em modelos para representação de processos de recuperação de doenças e que envolvem adaptação, lembrando que estas alterações podem ou não vir acompanhadas de ganho de informação.

Portanto, no que tange à representação de processos biológicos complexos, as regras 12,19, 23, 29, 38, 210, 214, 222, 226, 232, 236 e 243 (classe 2) poderiam ser

utilizadas para modelar processos para os quais dinâmica de evolução trabalha em prol da manutenção do estado global. Nestas regras, as alterações de bacias podem ser interpretadas como a necessidade de desenvolver novas habilidades para tratamento da incerteza apresentada, e isso pode conduzir o sistema ao conhecimento de novos estados.

Portanto, para todas as classes de Wolfram o presente trabalho encontrou regras que podem ser utilizadas como modelos de computação de estados do sistema imunitário, pois as características de seus mapas de atratores e dos diagramas espaço-temporais revelaram características de adaptação de seus componentes seja pela transição entre bacias ou não.

Foram identificados, ainda, regras que promovem ganho global superior à soma dos ganhos locais, sugerindo que o sistema gera informação. Esta informação é gerada na tentativa do sistema reduzir a incerteza, em nível celular, e portanto a análise acerca da correlação total insinua que existem formas de reduzir a incerteza que emerge das interações entre os componentes do sistema.

Estes componentes podem criar informação por meio de sua evolução no tempo e, muitas vezes, há informação adicional criada pela forma como os componentes interagem entre si.

A incerteza provida pela adoção das alterações probabilísticas no nível celular impulsiona a adaptação, dá origem à diversidade e novas aparências/ comportamentos, sugerindo a possibilidade de aprendizagem - e todas estas propriedades emergem da organização dos estados e suas interações.

Assim, foram identificadas regras que promovem ganho global superior à soma dos ganhos locais. Do ponto de vista da informação integrada, é importante relacionar as regras 57 e 226 (Classe 2) e regras 60 e 90 (Classe 3) que demonstraram capacidade de gerar informação como resposta à incerteza.

Esta informação é gerada quando um subgrupo dos estados possíveis entra em um estado particular que não é do seu repertório (transições entre bacias não equivalentes ou transições intra bacias para estados do tipo *Garden of Eden*, distantes do ciclo atrator) e a evolução se processa como resultado de interações causais.

As regras das classes 2 e 3 que se destacaram no presente estudo e que, segundo análise qualitativa, geram informação a partir das interações nas bacias de atratores, são modelos possíveis para representar a integração da informação em sistemas biológicos complexos, tal como ocorre no processamento neuronal coletivo para formação da

consciência. Assim, metaforicamente, cada bacia de atratores pode ser vista como um grupo de neurônios, sujeito a aleatoriedades advindas de imprecisões e assincronismos.

Os resultados apresentados para as regras 193 e 225 (classe 4) sugerem seu uso na modelagem de processos relacionados à computação de estados pois alterações no repertório da evolução implicam em alterações nos diagramas espaço-temporais. No entanto, a referida regra não é um bom modelo de integração da informação.

Tal observação corrobora, portanto, com o fato de que a capacidade de computação universal da regra 193 supera a capacidade de integração da informação.

A análise dos diagramas espaço-temporais, realizada no Capítulo 7, demonstra que a formulação matemática é essencial, visto que raramente o exame visual dos diagramas ajuda a compreender o que está ocorrendo no sistema, principalmente em nível celular. Ainda, por limitações de processamento gráfico, não é possível gerar o mapa de bacias de atratores para sistemas grandes e, portanto, a análise do comportamento espaço-temporal do modelo é comprometida.

No entanto, toda a formulação matemática é realizada com base nas distribuições de probabilidades no estado estacionário, cujo cálculo para sistemas grandes constitui um desafio do ponto de vista computacional.

Embora o estudo seja preliminar, no sentido de tratar autômatos elementares de tamanhos modestos (pequenos valores de  $n$ ), os resultados são inovadores. Vale ressaltar que o modelo proposto não se limita à modelagem da “imunidade como computação” e da integração de informação, sendo tais processos apenas constituintes da motivação inicial e tomados como referência para o estudo em questão.

Considerando a limitação computacional para a solução da Cadeia de Markov, formulações mais complexas poderão abrir novas possibilidades. No entanto, de maneira geral, pode-se afirmar que os resultados obtidos garantem que o modelo é capaz de modelar sistemas complexos e auto-organizáveis.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES D., HASS V.J., CALIRI A., 2003, “*The predictive power of  $R_0$  in an epidemic probabilistic model*”, *Journal of Biological Physics*, vol. 29, issue 1, pp. 63-75.

ATLAN, H., 1992, “*Entre o cristal e a fumaça: ensaio sobre a organização do ser vivo*”, Editora ZAHAR.

BALDUZZI D., TONONI G., 2008, “*Integrated Information in Discrete Dynamical Systems: Motivation and Theoretical Framework*”, *PLoS Computational Biology*, vol. 4, issue 6, e1000091

BRESCIANI Filho, E. & D’OTTAVIANO, I. M. L. Conceitos básicos de sistêmica. In: D’OTTAVIANO, I.M.L.; GONZALES, M.E.Q. (orgs.). *Auto-Organização: Estudos Interdisciplinares*, Campinas: CLE/UNICAMP, p. 283-306, 2000 (Coleção CLE v.30).

BRESCIANI F.,E. & D’OTTAVIANO,I.M.L., *Sistema Dinâmico Caótico e AutoOrganização*.In: SOUZA, G.M. & D’OTTAVIANO,I.M.L. & GONZALES,M.E.Q. (orgs.), *Auto-Organização: Estudos Interdisciplinares*, Campinas: CLE/UNICAMP, p.239-256, 2004 (Coleção CLE v.38).

BRESCIANI F., E. *Sistemas Complexos e Sistemas Dinâmicos*, Texto apresentado nos Seminários sobre Auto-Organização, CLE-UNICAMP, Campinas, 2008b (mimeo).

CASSIANO K.K., BARBOSA V.C., 2015, “*Error-Prone Cellular Automata as Metaphors of Immunity as Computation*”, *Complex Systems*, vol. 24, nr. 2, pp. 93-111.

CASSIANO K.K., BARBOSA V.C., 2015, “*Information Integration in Elementary Cellular Automata*”, *Journal of Cellular Automata*, 10:235-260.

CHEN D., JIAO Y., TORQUATO S., 2014, “*A Cellular Automaton Model for Tumor Dormancy: Emergence of a Proliferative Switch*”, *PLoS ONE* 9(10): e109934. doi:10.1371/journal.pone.0109934

DDLAB (2016), Discrete Dynamic Lab. Disponível em [http://www.ddlab.org/download/ddlab\\_compiled\\_2016/](http://www.ddlab.org/download/ddlab_compiled_2016/)

DOMANY E., KINZEL W., 1984, “*Equivalence of Cellular Automata to Ising Models and Directed Percolation*”, Physical Review Letters, 53:311-314.

ENCINAS, L.H., MARTIN DEL REY, A., 2007, “*Inverse rules of ECA with rule number 150*”. Appl. Math. Comput., 189:1782–1786.

FENZI N., MACHADO J.A.C., 2009, A Sustentabilidade de Sistemas Complexos, Editora UFPA.

FERREIRA M.R., 2009, Autômato Celular com Probabilidades de Transição Dependentes da Altura para o Estudo do Crescimento de Superfícies, Dissertação de Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, CEFET-MG.

FISHER J., HAREL D., HENZINGER T.A., 2011, “*Exploring the connection of biology with reactive systems to better understand living systems*”, Communications of the ACM, vol.54, pp. 72-82.

HEYLIGHEN F., 1988, “*Building a Science of Complexity*”, Conference of the Cybernetic Society. Londin

JIAO Y., TORQUATO S., 2011, “*Emergent behaviors from a cellular automaton model for invasive tumor growth in heterogeneous microenvironments*”, PLoS Comput Biol, vol. 7, issue 12, e1002314.

KOCH, C., 2012, *Consciousness*. The MIT Press, Cambridge, MA

MUDRICK, L., FAIVRE, N., KOCH, C., 2014, “*Information integration without awareness*”, Trends in Cognitive Sciences, vol, 18, 488-496).

ODEGARD, V. H., SCHATZ, D.G., 2006, “Targetin of somatic hypermutation”, *Nature Reviews Immunology*, 6:573-583.

SCHULE M., OTT T., STOOP R., 2009, “*Computing with Probabilistic Cellular Automata*”, ICANN 2009, Part II, LNCS 5769, pp. 525-533.

SOUZA G.M., BUCKERIDGE M.S., 2004, *Sistemas Complexos: novas formas de ver a Botânica*, *Revista Brasil. Bot.*, vol. 27, nr 3, pp. 407-419.

SOUSA E SILVA, E., LEÃO R.M.M., SILVA A.P.C., ROCHA A.A.A., DUARTE, F.P., SILVEIRA FILHO F.J., JAIME G.D.G., MUNTS R.R., 2006, “*Modeling, analysis, measurement and experimentation with the Tangram-II integrated environment*”, *Proceedings of the First International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools*. Software disponível em: <http://www.land.ufrj.br/tools/tools.html>

TONONI, G., 2004, “*An information integration theory of consciousness*”, *BMC Neuroscience*, volume 5, pp. 42-64

WOLFRAM, S., 1982, “*Cellular automata as simple self-organizing systems*”. Publications by Stephen Wolfram

WOLFRAM S., 1983, “*Statistical Mechanics of Cellular Automata*”, *Revs. Modern Physics*, volume 55, nr 3, pp. 601-644.

WOLFRAM, S., 1984, “*Universality and complexity in cellular automata*”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 10, n. 1-2, p. 1 – 35.

WOLFRAM S., 2002, *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Champaign, IL.

WUENSCHÉ A., LESSER M., 1992, “*The Global Dynamics of Cellular Automata*”, Addison-Wesley, Reading, MA.

WUENSCHÉ, A., 2016, Exploring Discrete Dynamics, The DDLab Manual, Second EDITION