



O PROBLEMA DE QUASE-EQUILÍBRIO: UMA ABORDAGEM DO TIPO-NEWTON REGULARIZADO

Pedro Jorge Sousa dos Santos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler
Paulo Sérgio Marques dos Santos

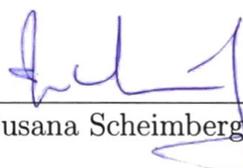
Rio de Janeiro
Abril de 2018

O PROBLEMA DE QUASE-EQUILÍBRIO: UMA ABORDAGEM DO
TIPO-NEWTON REGULARIZADO

Pedro Jorge Sousa dos Santos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

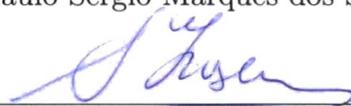
Examinada por:



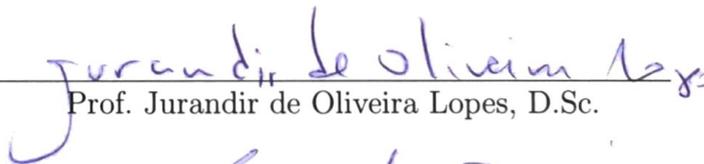
Prof^a. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.



Prof. Paulo Sérgio Marques dos Santos, D.Sc.



Prof. Alfredo Noel Iusem, D.Sc.



Prof. Jurandir de Oliveira Lopes, D.Sc.



Prof. Luiz Carlos Matioli, D.Sc.



Prof^a. Marcia Helena Costa Fampa, D.Sc.



Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
ABRIL DE 2018

Santos, Pedro Jorge Sousa dos

O problema de quase-equilíbrio: uma abordagem do tipo-Newton regularizado/Pedro Jorge Sousa dos Santos.
– Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XIII, 78 p. 29, 7cm.

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 73–78.

1. Problema de quase-equilíbrio.
 2. Método tipo-Newton.
 3. Problema de equilíbrio.
 4. Problema de equilíbrio de Nash generalizado.
 5. Problema de otimização multiobjetivo.
- I. Makler, Susana Scheimberg de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*À Pollyana, minha companheira
eterna, e ao nosso amado filho
Tito.
Aos casais considerados
grandiosos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me ter concedido a realização deste projeto. Por ter me permitido nascer de bons pais, ter me dado irmãos únicos e por ter me presenteado com uma esposa e filho maravilhosos.

Aos meus pais, Paulo Jorge e Eunice, por me darem amor incondicional, instrução e tudo o mais.

À minha esposa, Pollyana, por ser minha companheira em todos os momentos. Por me confortar nas horas de dificuldades. Por se empenhar em me fazer uma pessoa melhor. Por tornar minha vida muito mais feliz.

Ao meu filho, Tito, por ser uma luz em minha vida. Por me levar a conhecer o verdadeiro amor.

Aos meus irmãos, Paulo Jorge e Pauline, por acreditarem em mim. Por serem um porto seguro. Por nosso passado, presente e futuro.

Ao meu padrasto e minha madrastra, Rui Jacques e Silvana, por cuidarem tão bem de meus pais. Por me apoiarem.

Aos meus sogros, Edson e Elisabete, por se tornarem uma segunda família para mim.

À minha cunhada, Caroline, pelo apoio. Por ser uma segunda irmã. Por me presentear com dois sobrinhos maravilhosos.

Aos meus sobrinhos, Heitor e Laura, por serem a esperança de uma sociedade melhor.

Ao meu cunhado, Jedson, pelo carinho que tem por mim, minha esposa e filho.

A cada um de meus antepassados que, por meio de suas escolhas diárias, me permitiram chegar até aqui.

À Prof^ª. Susana Scheimberg, por sua excelente orientação, no sentido mais amplo e preciso que este termo encerra. Por me levar a ver o mundo científico sob uma nova e agradável perspectiva. Por me conduzir em meio as minhas dificuldades matemáticas.

Ao Prof. Paulo Sérgio, por seu apoio e incentivo à realização do curso de doutorado e por sua orientação científica.

Aos professores Nelson Maculan Filho, Marcia Helena Costa Fampa, Alfredo Noel Iusem, Jurandir de Oliveira Lopes e Luiz Carlos Matioli por aceitarem participar de

minha banca examinadora.

Ao colega João Carlos de Oliveira Souza, por seu incentivo na realização deste curso. Por me dar moradia no Rio de Janeiro em certos momentos de dificuldades.

À Universidade Federal do Piauí, por me permitir realizar este trabalho através da concessão de meu afastamento funcional durante os últimos 2 anos e meio.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro, em especial ao PESC, por me oferecer ótimos professores. Por me dar suporte financeiro, juntamente com a CAPES, nestes últimos 2 anos.

À COPPE \TeX pelo template de formatação do texto da tese. Por me ter feito perder menos horas de sono.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

O PROBLEMA DE QUASE-EQUILÍBRIO: UMA ABORDAGEM DO TIPO-NEWTON REGULARIZADO

Pedro Jorge Sousa dos Santos

Abril/2018

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler
Paulo Sérgio Marques dos Santos

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema de quase-equilíbrio (QEP) corresponde a um problema de equilíbrio clássico (EP) onde a região viável muda em cada ponto considerado, não sendo mais um conjunto fixo. QEP fornece, portanto, uma estrutura unificada para uma família ampla de problemas matemáticos os quais não se encaixam no escopo de EP. Isto inclui, por exemplo, problemas de equilíbrio de Nash generalizados (GNEPs) e desigualdades quase-variacionais (QVIs). Neste trabalho, propomos um método implementável do tipo-Newton para resolver o problema EP juntamente com sua extensão para o problema QEP. Analisamos as propriedades dos algoritmos e provamos a convergência local para uma solução do problema, sob hipóteses usuais para métodos do tipo-Newton, obtendo taxa de convergência superlinear/quadrática. Propomos uma globalização do algoritmo no caso EP. Apresentamos aplicações dos métodos propostos ao problema GNEP e ao problema de otimização multiobjetivo (MOP). Para aplicar os algoritmos obtidos ao problema MOP, apresentamos inicialmente uma aproximação suave da bifunção para a sua colocação como um problema EP. Posteriormente, introduzimos uma formulação que nos permite tratar o MOP como um QEP. Essa formulação possui a vantagem de fornecer um QEP com dados suaves envolvendo apenas os elementos originais do problema. Finalmente, ilustramos o comportamento numérico dos algoritmos locais por meio de problemas-teste da literatura envolvendo os problemas EP, GNEP e MOP. O algoritmo proposto para o problema de quase-equilíbrio se mostrou eficiente ao resolver um QEP que não se enquadra nem na formulação de QVIs nem na de GNEPs, além de ser capaz de resolver um GNEP *nonjointly convex*.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THE QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEM: A REGULARIZED NEWTON-TYPE APPROACH

Pedro Jorge Sousa dos Santos

April/2018

Advisors: Susana Scheimberg de Makler

Paulo Sérgio Marques dos Santos

Department: Systems Engineering and Computer Science

The quasi-equilibrium problem (QEP) allows, in contrast to standard equilibrium problem (EP), a change in the feasible region together with the considered point. Therefore, QEP provides an unified framework for a wider family of mathematical problems which do not fit within the scope of EP. It includes, for example, generalized Nash equilibrium problems (GNEPs) and quasi-variational inequalities (QVIs). In this work, we propose an implementable Newton-type method to solve EPs as well as its extension to solve QEPs. We analyze some properties of the algorithms proving its local convergence to a solution of the problem under usual assumptions for Newton-type methods as well as its superlinear/quadratic convergence rate. We propose a global version of the algorithm for EP. Applications of the proposed method to GNEP and multiobjective optimization problem (MOP) are considered. For applying our results to the multiobjective optimization problem, we present a smooth approximation of the bifunction which allows a formulation of the problem as an EP. Next, we introduce a formulation that allows us to consider a MOP as a QEP. This formulation has the advantage of providing a QEP with smooth data involving only the original data of the problem. Finally, we illustrate the numerical behavior of the local algorithms through some test-problems involving EP, GNEP and MOP. The proposed algorithm to solve QEPs has been proved to be efficient for solving a QEP which is neither a QVI nor a GNEP, besides the fact that it has been able to solve a nonjointly convex GNEP.

Sumário

Lista de Símbolos	xi
Lista de Abreviaturas	xiii
Introdução	1
1 Material preliminar	4
1.1 Funções e aplicações	4
1.2 Aplicações ponto-conjunto	8
1.3 Instâncias dos problemas de equilíbrio clássico e quase-equilíbrio	9
1.3.1 Problema de equilíbrio de Nash	10
1.3.2 Problema de equilíbrio de Nash generalizado	11
1.3.3 Problema de otimização multiobjetivo	13
1.3.4 Problema de desigualdade quase-variacional	15
2 Um método do tipo-Newton para o Problema de Equilíbrio clássico	16
2.1 O método proposto	16
2.2 O algoritmo	28
2.2.1 A boa definição	30
2.2.2 Propriedades de convergência	31
2.3 Aplicação ao problema de otimização multiobjetivo	32
2.4 Experiências numéricas	34
3 Um método do tipo-Newton global para o Problema de Equilíbrio clássico	38
3.1 O método proposto	38
3.2 O algoritmo	42
3.2.1 Propriedades de convergência	42
4 Um método do tipo-Newton para o Problema de Quase-Equilíbrio	46
4.1 O método proposto	46
4.2 O algoritmo	54

4.2.1	A boa definição	56
4.2.2	Propriedades de convergência	56
5	Aplicações do método proposto	59
5.1	Problema de equilíbrio de Nash generalizado	60
5.2	Problema de otimização multiobjetivo	62
6	Experimentos numéricos	64
7	Considerações finais	71
	Referências Bibliográficas	73

Lista de Símbolos

\emptyset	O conjunto vazio, p. 8
\mathbb{R}	O conjunto dos números reais, p. 1
\mathbb{R}_{++}	O conjunto dos números reais estritamente positivos, p. 33
\mathbb{R}^n	O espaço real n -dimensional, p. 1
$\langle x, y \rangle$	$\equiv \sum_{i=1}^n x_i y_i$. O produto interno usual do \mathbb{R}^n , p. 5
$\ \cdot \ $	$\equiv \sqrt{\langle x, x \rangle}$. A norma induzida pelo produto interno usual, p. 4
$B(x, \delta)$	A bola aberta de centro x e raio δ , p. 27
$\ \cdot \ _P$	$\equiv \sqrt{\langle x, Px \rangle}$. A norma induzida pela matriz P , p. 17
I_m	$\equiv \{1, \dots, m\}$; Os m primeiros números inteiros positivos, p. 19
$\Lambda_+(\lambda)$	$\equiv \{i \in I_m \mid \lambda_i > 0\}$; O suporte do vetor $\lambda \in \mathbb{R}^m$, p. 19
$I(m)$	A matriz identidade de ordem m , p. 22
$\ln(\cdot)$	A função logaritmo natural, p. 33
$\cosh(t)$	$\equiv \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \in \mathbb{R}$); A função cosseno hiperbólico, p. 17
$\nabla \varphi$	$\equiv \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)$; O vetor gradiente da função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, p. 5
$\nabla^2 \varphi$	$\equiv \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)$; A matriz hessiana de $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, p. 5
∇g	$\equiv [\nabla g_1 \cdots \nabla g_m]_{n \times m}$ com $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; A matriz com vetores colunas ∇g_i , $i = 1, \dots, m$, p. 19
$\nabla_y f(x, y)$	O gradiente parcial $n \times 1$ da bifunção $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com respeito a y . De modo análogo define-se $\nabla_x f$, p. 17

$\nabla_{yx}^2 \phi(x, y)$	$\equiv \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial y_i} \right)$; A derivada parcial de segunda ordem $m \times n$ de $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ obtida derivando-se primeiramente com respeito a y e então com respeito a x , p. 22
$J\Psi$	$\equiv \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j} \right)$; O jacobiano $m \times n$ da aplicação $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$), p. 7
$J_y \Psi(x, y)$	O jacobiano parcial de Ψ com respeito a y , p. 5
$\partial_C y(x)$	O jacobiano generalizado computável de $y(\cdot)$ em x , p. 24
$O(\ x\)$	Qualquer aplicação tal que $\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{\ O(\ x\)\ }{\ x\ } < \infty$, p. 7
$o(\ x\)$	Qualquer aplicação tal que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ o(\ x\)\ }{\ x\ } = 0$, p. 7
$I_0(x)$	O subconjunto de índices ativos $\{i \in I_m \mid g_i(x, y(x)) = 0\}$, p. 19
$\mathcal{M}(x)$	O conjunto dos multiplicadores de Lagrange, pp. 19 , 51
$\mathcal{B}(x)$	$\equiv \{\mathcal{J} \subseteq I_0(x) \mid \{\nabla_y g_i(x, y(x))\}_{i \in \mathcal{J}} \text{ é linearmente independente e } \exists \lambda \in \mathcal{M}(x) \text{ tal que } \lambda_i = 0 \text{ para todo } I_0(x) \setminus \mathcal{J}\}$, pp. 19 , 51
$\Omega : X \rightrightarrows Y$	Uma aplicação ponto-conjunto, isto é, uma aplicação que associa a cada ponto de X um subconjunto de Y , p. 8
$\text{dom}(K)$	$\equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid K(x) \neq \emptyset\}$. O domínio da aplicação ponto-conjunto $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, p. 48
$\text{fix}(K)$	$\equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in K(x)\}$. O conjunto dos pontos fixos da aplicação ponto-conjunto $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, p. 13
arg min	O conjunto dos pontos que realizam o mínimo, p. 18

Lista de Abreviaturas

QEP	Problema de quase-equilíbrio (<i>quasi-equilibrium problem</i>), p. 1
NEP	Problema de equilíbrio de Nash (<i>Nash equilibrium problem</i>), p. 10
GNEP	Problema de equilíbrio de Nash generalizado (<i>Generalized Nash equilibrium problem</i>), p. 11
MOP	Problema de otimização multiobjetivo (<i>multiobjective optimization problem</i>), p. 13
QVI	Desigualdade quase-variacional (<i>quasi-variational inequality</i>), p. 15
EP	Problema de equilíbrio (<i>equilibrium problem</i>), p. 16
PC ¹	Aplicação continuamente diferenciável por partes (<i>piecewise continuously differentiable</i>), p. 7
CRCQ	Condição de qualificação das restrições posto constante (<i>constant rank constraint qualification</i>), pp. 20 , 51

Introdução

Este trabalho de tese versa sobre o Problema de Quase-Equilíbrio (QEP). Formalmente QEP pode ser formulado da seguinte maneira: dada uma bifunção $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e uma aplicação ponto-conjunto $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ que descreve como a região viável muda juntamente com o ponto considerado, o Problema de Quase-Equilíbrio associado com K e f , o qual denotaremos por $\text{QEP}(K, f)$, consiste em

Encontrar $x^* \in K(x^*)$ tal que $f(x^*, y) \geq 0$ para todo $y \in K(x^*)$.

Este problema, originalmente introduzido por MOSCO [1], pode ser visto como uma formulação unificada de vários problemas considerados na literatura no contexto de equilíbrio, possuindo aplicações em diversas áreas da ciência tais como engenharia, economia e pesquisa operacional; veja, por exemplo, [2, 3] e suas referências. Para uma apropriada escolha dos operadores K e f , $\text{QEP}(K, f)$ cobre uma ampla variedade de problemas matemáticos os quais não se encaixam no escopo do Problema de Equilíbrio clássico (EP) introduzido por FAN [4], tais como o problema de desigualdade quase-variacional (QVI) e o problema de equilíbrio de Nash generalizado (GNEP).

Observamos que o problema de equilíbrio clássico torna-se um caso particular de nossa formulação para $K(x) \equiv \mathbf{K}$. Este último problema recebeu bastante atenção após o trabalho de BLUM e OETTLI [5]. Resultados sobre existência de soluções para EP têm sido extensivamente estudados; veja, por exemplo, [6-10] e suas referências. Têm sido propostos algoritmos numéricos para resolver EP utilizando-se diversas técnicas tais como de ponto proximal, de penalidade, do princípio auxiliar, de projeções, de lagrangeano aumentado e de funções *gap*^a; veja por exemplo, [11-22] e suas referências.

Em contraste com o que ocorre no cenário de EP, que possui uma extensa literatura sobre resultados de existência e métodos de resolução numérica, o estudo de QEP têm recebido menos atenção em virtude das dificuldades inerentes ao problema. Resultados sobre existência de solução para QEP podem ser encontrados,

^aPara detalhes sobre o uso do termo *gap*, veja Observação 3.1, página 40.

por exemplo, em [1, 23-27]. Existem poucos trabalhos tratando de métodos de resolução numéricos para QEP. Este fato deve-se principalmente à dificuldade de resolver simultaneamente um problema de equilíbrio juntamente com um problema de ponto fixo. Pelo que temos conhecimento, algoritmos para resolver QEP encontram-se apenas em [28-30]. BIGI e PASSACANTANDO [28] propõem um método para resolver QEP que consiste em minimizar uma apropriada função *gap* associada ao problema. Por outro lado, STRODIOT *et al.* [29] e VAN *et al.* [30] apresentam métodos do tipo extra-gradiente para resolver QEP. Os algoritmos apresentados nos trabalhos citados possuem convergência global no sentido de admitir, *a priori*, um ponto qualquer como ponto de partida para inicialização de seus algoritmos. No entanto, eles são métodos que possuem, por natureza, convergência lenta.

Algoritmos com convergência local rápida são conhecidos para problemas particulares de QEP. Métodos do tipo-Newton para QVI e GNEP são apresentados, por exemplo, em [31-34]. Um método híbrido envolvendo lagrangeano aumentado e Newton para EP é proposto em [19]. Entretanto não encontra-se na literatura métodos para o problema QEP possuindo tais propriedades.

Diante do exposto, o objetivo desse trabalho de tese é propor um método com convergência local rápida para resolver QEP. Para atingirmos este objetivo final, nos dedicamos inicialmente a desenvolver um algoritmo local para o problema de equilíbrio clássico. Estes resultados iniciais foram publicados em SANTOS *et al.* [16]. Posteriormente, propomos uma globalização de [16] baseada nas ideias de DREVES *et al.* [35]. Estes resultados foram apresentados e publicados nos anais do *XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Finalmente, o método proposto neste trabalho de tese consiste em uma extensão de [16] para o cenário mais amplo de problemas de quase-equilíbrio. Os resultados desta extensão encontram-se em fase final de preparação para submissão em revista internacional. Estes resultados foram apresentados no *15th EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization* em Montreal, Canadá.

O presente trabalho está organizado do seguinte modo: No Capítulo 1, apresentamos notações e resultados prévios que serão úteis para o desenvolvimento e compreensão dos capítulos subsequentes. Apresentamos algumas instâncias do problema de equilíbrio clássico e quase-equilíbrio que serão discutidos em nossas aplicações. No Capítulo 2 apresentamos resultados específicos para EP os quais foram publicados em [16] e, no Capítulo 3, apresentamos sua globalização. No Capítulo 4 apresentamos o método desenvolvido para QEP, definimos o algoritmo proposto e estudamos sua convergência. O Capítulo 5 é dedicado a aplicações de nosso método. Na Seção 5.1 aplicamos nossos resultados ao GNEP. Na Seção 5.2 aplicamos os resultados ao problema de otimização multiobjetivo (MOP) para encontrar uma solução Pareto-fraco do problema. No Capítulo 6 reportamos alguns resultados numéricos

preliminares. Finalmente, no Capítulo [7](#), apresentamos nossas considerações finais e indicamos nossos trabalhos e pesquisas futuras como continuação natural deste trabalho de tese.

Capítulo 1

Material preliminar

Neste capítulo apresentaremos noções conhecidas bem como definições e propriedades que serão necessárias para o desenvolvimento dos demais capítulos. Apresentaremos algumas instâncias do problema de quase-equilíbrio. Nosso objetivo é tornar o trabalho o mais auto-contido possível. Indicaremos referências para maiores informações bem como para demonstrações dos resultados apresentados.

1.1 Funções e aplicações

Nesta seção revisaremos algumas definições e propriedades referentes a funções de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} e aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m com $m > 1$.

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. Dizemos que $\varphi : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função:

- convexa em X se, para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y).$$

- fortemente convexa em X (com módulo $\gamma > 0$) se, para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) - \gamma t(1-t)\|x - y\|^2.$$

- quase-convexa em X se, para quaisquer $x, y \in X$ e $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\varphi((1-t)x + ty) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}.$$

- fortemente côncava, côncava ou quase-côncava se $-\varphi$ é fortemente convexa, convexa ou quase-convexa, respectivamente.

As proposições apresentadas a seguir serão úteis no estabelecimento do método desenvolvido nos Capítulos [2](#) e [4](#).

Proposição 1.1. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função fortemente convexa e X um subconjunto convexo, fechado e não-vazio de \mathbb{R}^n .*

Então, φ possui um único minimizador em X .

Demonstração. Veja, por exemplo, [\[36\]](#) Corolário 3.4.2] □

A proposição abaixo apresenta uma caracterização para funções (fortemente) convexas duas vezes diferenciáveis.

Proposição 1.2. *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, aberto e não-vazio e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em X . Então,*

(a) *φ é convexa em X se, e somente se, a matriz Hessiana de φ , $\nabla^2\varphi$, é semi-definida positiva em todo ponto de X , isto é,*

$$\langle \nabla^2\varphi(x)d, d \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X, \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

(b) *φ é fortemente convexa em X com módulo $\gamma > 0$ se, e somente se, a matriz Hessiana de φ , $\nabla^2\varphi$, é uniformemente positiva definida em X , isto é,*

$$\forall x \in X, \quad \langle \nabla^2\varphi(x)d, d \rangle \geq 2\gamma\|d\|^2 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. Veja, por exemplo, [\[36\]](#) Teoremas 3.4.7 e 3.4.10] □

Proposição 1.3. *Seja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa e diferenciável e X um subconjunto convexo e não-vazio de \mathbb{R}^n .*

Então x^ é um minimizador de φ em X se, e somente se,*

$$\langle \nabla\varphi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Veja, por exemplo, [\[36\]](#) Teorema 3.4.8] □

O resultado a seguir é conhecido como o Teorema da Aplicação Implícita.

Proposição 1.4. *Considere $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ aberto e não-vazio e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação p vezes continuamente diferenciável. Seja (a, b) um ponto de U com $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(a, b) = 0$. Suponha que $J_y f(a, b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ seja inversível.*

Então, existem uma vizinhança aberta $V(a) \subset \mathbb{R}^m$ de a , e uma única aplicação p vezes continuamente diferenciável em $V(a)$, $g : V(a) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $g(a) = b$,

$$f(x, g(x)) = 0$$

e

$$Jg(x) = -[J_y f(x, g(x))]^{-1} \cdot J_x f(x, g(x)) \quad \forall x \in V(a),$$

onde Jg denota o jacobiano da aplicação g , $J_x f(x, y)$ denota o jacobiano parcial de $f(x, y)$ com respeito a x e $J_y f(x, y)$ é definido de modo análogo.

Demonstração. Veja, por exemplo, [37] páginas 529 e 537]. □

A proposição a seguir será utilizada no desenvolvimento do método proposto no Capítulo 3.

Proposição 1.5. [58, Teorema 10.2.1] *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}^m$ fechado e não-vazio e $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e não-vazio. Assuma que a bifunção $\psi : U \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $U \times X$ e que $\nabla_x \psi(x, y)$ existe e é contínua em $U \times X$. Defina a função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por*

$$\varphi(x) := \sup_{y \in X} \psi(x, y), \quad x \in U \tag{1.1}$$

e considere o conjunto solução de (1.1), dado por

$$M(x) := \{y \in X \mid \varphi(x) = \psi(x, y)\}.$$

Seja $x \in U$ um vetor dado. Suponha que exista uma vizinhança de x , $V(x) \subseteq U$, tal que $M(z)$ é não-vazio para todo $z \in V(x)$ e o conjunto

$$\bigcup_{z \in V(x)} M(z)$$

é limitado. Então,

(a) A função φ é direcionalmente diferenciável em x e

$$\varphi'(x; d) = \sup_{y \in M(x)} \langle \nabla_x \psi(x, y), d \rangle.$$

(b) Se $M(x)$ possui exatamente um elemento, digamos $M(x) = \{y(x)\}$, então φ é diferenciável em x e

$$\nabla \varphi(x) = \nabla_x \psi(x, y(x)).$$

A próxima definição pode ser encontrada em [38-40].

Definição 1.1. *Seja $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $X \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio. Dizemos que Ψ é uma aplicação Lipschitz contínua em X , com uma constante $L > 0$, se*

$$\|\Psi(y) - \Psi(x)\| \leq L \|y - x\|$$

para todo $x, y \in X$. Dizemos que Ψ é localmente Lipschitz contínua em torno de x , com constante $L > 0$, se existe uma vizinhança $V(x)$ de x tal que Ψ é Lipschitz contínua em $V(x)$ com constante L .

Apresentamos a seguir um resultado técnico que será utilizado na análise da ordem de convergência dos Algoritmos **NMEP** e **NMQEP** introduzidos nos Capítulos 2 e 4, respectivamente.

Proposição 1.6. [39, Lema A.11] *Para qualquer $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, se Ψ é diferenciável no segmento $[x, y]$, com sua derivada sendo Lipschitz contínua neste segmento com uma constante $L > 0$, então*

$$\|\Psi(x) - \Psi(y) - J\Psi(y)(x - y)\| \leq \frac{L}{2} \|x - y\|^2,$$

onde $J\Psi$ denota o jacobiano da aplicação Ψ .

A definição abaixo será útil no desenvolvimento do método do tipo-Newton apresentado nos Capítulos 2 e 4, dado que lidaremos com aplicações não necessariamente diferenciáveis.

Definição 1.2. [40, Definição 4.5.1] *Uma aplicação $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita ser continuamente diferenciável por partes (ou PC^1) em torno de $x \in \mathbb{R}^n$ se Ψ é contínua e existe uma vizinhança $V(x)$ de x e uma família finita de aplicações continuamente diferenciáveis definidas em $V(x)$, $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_k\}$, para algum inteiro positivo k , tal que $\Psi(y) \in \{\Psi_1(y), \dots, \Psi_k(y)\}$ para todo $y \in V(x)$. Cada aplicação Ψ_i é denominada uma C^1 -parte de Ψ em x .*

Finalizamos esta seção com algumas notações. Dada uma aplicação $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$, escreveremos que $\Psi(x) = O(\|x - x^*\|)$ para x suficientemente próximo a x^* , se existe $c > 0$ tal que $\|\Psi(x)\| \leq c \|x - x^*\|$ para todo x suficientemente próximo a x^* , ou seja, se $\limsup_{x \rightarrow x^*} \frac{\|\Psi(x)\|}{\|x - x^*\|} < \infty$. Do mesmo modo, escreveremos que $\Psi(x) = o(\|x - x^*\|)$ para x suficientemente próximo a x^* , se, para qualquer $\varepsilon > 0$, a desigualdade $\|\Psi(x)\| \leq \varepsilon \|x - x^*\|$ é válida para todo x suficientemente próximo a x^* , ou seja, se $\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{\|\Psi(x)\|}{\|x - x^*\|} = 0$.

1.2 Aplicações ponto-conjunto

Uma aplicação ponto-conjunto $\Omega : X \rightrightarrows Y$ é uma aplicação que associa a cada ponto de X um subconjunto de Y . As noções apresentadas nesta seção estão de acordo com HOGAN [41], onde X e Y são subconjuntos de espaços topológicos.

Definição 1.3. *Uma aplicação ponto conjunto $\Omega : X \rightrightarrows Y$ é dita ser:*

- (a) *uniformemente compacta em torno de x^* , se existe uma vizinhança V de x^* tal que o fecho do conjunto $\bigcup_{x \in V} \Omega(x)$ é compacto;*
- (b) *aberta em $x^* \in X$, se para qualquer sequência $\{x^k\} \subseteq X$ com $x^k \rightarrow x^*$ e qualquer $y^* \in \Omega(x^*)$, existem um inteiro p e uma sequência $\{y^k\} \subseteq Y$ tais que $y^k \in \Omega(x^k)$ para todo $k \geq p$ e $y^k \rightarrow y^*$;*
- (c) *fechada em $x^* \in X$, se para qualquer sequência $\{x^k\} \subseteq X$ com $x^k \rightarrow x^*$ e qualquer sequência $y^k \rightarrow y^*$ com $y^k \in \Omega(x^k)$ para todo inteiro k suficientemente grande, temos $y^* \in \Omega(x^*)$;*
- (d) *contínua em $x^* \in X$, se ela é simultaneamente aberta e fechada em x^* ;*
- (e) *aberta, fechada ou contínua em X se é aberta, fechada ou contínua em todo $x \in X$.*

Proposição 1.7. [41, Corolário 1.3] *Se Ω é aberta em X , então o conjunto $\{x \mid \Omega(x) \neq \emptyset\}$ é aberto em X .*

Com o intuito de introduzir alguns resultados que serão utilizados nos próximos capítulos, dada uma aplicação ponto-conjunto $\Omega : X \rightrightarrows Y$ consideremos a função marginal

$$v(x) := \sup_{y \in \Omega(x)} \varphi(x, y) \quad (1.2)$$

onde

$$\varphi : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty],$$

e definamos a aplicação ponto-conjunto que descreve o conjunto solução de (1.2), dada por

$$M(x) := \{y \in \Omega(x) \mid v(x) \leq \varphi(x, y)\}.$$

As seguintes propriedades serão utilizadas nos próximos capítulos.

Proposição 1.8. [41, Corolário 8.1] *Suponha que Ω é contínua em x^* , φ é contínua em $x^* \times \Omega(x^*)$, M é não vazio e uniformemente compacto em torno de x^* , e que $M(x^*)$ possui um único elemento. Então M é contínua em x^* .*

Proposição 1.9. [41, Corolário 9.1] Suponha que $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, φ é contínua em $X \times Y$, $\varphi(x, \cdot)$ é quase-côncava, Ω é fechada em uma vizinhança de x^* e aberta em x^* , e que $\Omega(x)$ é convexo para cada x numa vizinhança de x^* . Então $M(x^*)$ é não vazio e compacto se, e somente se, $M(x)$ é não vazio e uniformemente compacto em uma vizinhança de x^* .

Lema 1.1. Seja X não-vazio e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ não-vazio e convexo. Considere $\varphi : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ convexa em y para cada x fixado e contínua em $X \times Y$. Seja $\Omega : X \rightrightarrows Y$ uma aplicação ponto-conjunto contínua em uma vizinhança de x^* , com $\Omega(x)$ convexo para cada x nesta vizinhança. Defina

$$\mathcal{Y}(x) := \{z \in \Omega(x) \mid \inf_{y \in \Omega(x)} \varphi(x, y) = \varphi(x, z)\}$$

e suponha que $\mathcal{Y}(x^*)$ tem exatamente um elemento. Então a aplicação ponto-conjunto \mathcal{Y} é contínua em x^* .

Demonstração. Segue diretamente das Proposições 1.8 e 1.9. □

Finalizamos esta seção apresentando algumas propriedades de aplicações ponto-conjunto dadas por desigualdades.

Considere

$$P(x) := \{y \in Y \mid g(x, y) \leq 0\},$$

onde $g : X \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]^m$.

Temos os seguintes resultados com respeito à continuidade da aplicação ponto-conjunto P .

Proposição 1.10. [41, Teorema 10] Se cada componente de g é semi-contínua inferior em $x^* \times Y$, então P é fechada em x^* .

Proposição 1.11. [41, Teorema 12] Suponha que $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ é convexo, cada função componente de g é contínua em $x^* \times P(x^*)$ e convexa em y para cada $x \in X$ fixo, e que existe um y^* tal que $g(x^*, y^*) < 0$, então P é aberta em x^* .

1.3 Instâncias dos problemas de equilíbrio clássico e quase-equilíbrio

Lembremos que o problema de quase-equilíbrio (QEP) pode ser visto como uma formulação unificada de vários problemas considerados na literatura no contexto de equilíbrio. De fato, para uma apropriada escolha dos operadores K e f , QEP(K, f) cobre uma ampla variedade de problemas matemáticos, tais como o problema de

desigualdade quase-variacional (QVI) e o problema de equilíbrio de Nash generalizado. Em particular, o problema de equilíbrio clássico (EP) introduzido por FAN [4] pode ser visto como um caso particular de QEP para $K(x) \equiv \mathbf{K}$.

Nesta seção apresentaremos algumas instâncias dos problemas de quase-equilíbrio e equilíbrio clássico aos quais serão aplicados os resultados contidos neste trabalho de tese.

1.3.1 Problema de equilíbrio de Nash

O problema de equilíbrio de Nash (NEP) [42] é uma clássica instância de EP. Formalmente, considere um NEP com N jogadores. Cada jogador v controla as variáveis $x^v \in \mathbb{R}^{n_v}$. Denotamos por $x = (x^1, \dots, x^N)$ o vetor formado por todas as variáveis, o qual possui dimensão $n = \sum_{v=1}^N n_v$, e por x^{-v} o vetor formado por todas as variáveis de decisão exceto aquelas do jogador v . Para enfatizar as variáveis do v -ésimo jogador em x , escreveremos (x^v, x^{-v}) ao invés de x . Note que este ainda é o vetor $x = (x^1, \dots, x^N)$.

Seja $X_v \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ o conjunto de estratégias de cada jogador v e considere $\mathbf{K} = \prod_{v=1}^n X_v$ o conjunto de todas as estratégias possíveis. Cada jogador tem uma função objetivo $\theta_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que depende das variáveis de decisão de todos os jogadores.

O objetivo do jogador v , dado as estratégias dos demais jogadores x^{-v} , é escolher uma estratégia x^v que resolva o problema de minimização

$$\begin{aligned} \min_{x^v} \quad & \theta_v(x^v, x^{-v}) \\ \text{s.a.} \quad & x^v \in X_v. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Um vetor x^* é uma solução de NEP se, para todos os jogadores $v = 1, \dots, N$, tem-se

$$\theta_v(x^{*,v}, x^{*,-v}) \leq \theta_v(x^v, x^{*,-v}) \quad \forall x^v \in X_v,$$

isto é, se para cada jogador v , $x^{*,v}$ é a solução do problema do v -ésimo jogador quando os demais jogadores fixam suas variáveis em $x^{*,-v}$.

A proposição a seguir estabelece uma formulação de NEP como um problema de equilíbrio clássico.

Proposição 1.12. *Considere um NEP dado. Então, um ponto x^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se, ele é uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$, onde*

$$f(x, y) = \sum_{v=1}^N [\theta_v(y^v, x^{-v}) - \theta_v(x^v, x^{-v})]. \tag{1.4}$$

Demonstração. Se x^* é um equilíbrio de Nash, é imediato que x^* é uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$. Reciprocamente, suponha que x^* seja uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$. Fixe

$v \in \{1, \dots, N\}$. Assim, dado $x^v \in X_v$, considere o vetor $y = (y^1, \dots, y^N) \in \mathbb{R}^n$ definido do seguinte modo:

$$y^\mu := \begin{cases} x^v & , \text{ se } \mu = v \\ x^{*,\mu} & , \text{ se } \mu \neq v. \end{cases}$$

Observe que $y \in \mathbf{K}$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x^*, y) &= \sum_{\mu=1}^N [\theta_\mu(y^\mu, x^{*,-\mu}) - \theta_\mu(x^{*,\mu}, x^{*,-\mu})] \\ &= \left(\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^N [\theta_\mu(y^\mu, x^{*,-\mu}) - \theta_\mu(x^{*,\mu}, x^{*,-\mu})] \right) + \theta_v(y^v, x^{*, -v}) - \theta_v(x^{*,v}, x^{*, -v}) \\ &= \theta_v(x^v, x^{*, -v}) - \theta_v(x^{*,v}, x^{*, -v}) \end{aligned}$$

isto é, $x^{*,v}$ resolve o problema de minimização (1.3). Como o índice v foi tomado arbitrariamente, ganhamos que x^* é um equilíbrio de Nash. \square

1.3.2 Problema de equilíbrio de Nash generalizado

A diferença com o problema de equilíbrio de Nash clássico, o problema de equilíbrio de Nash generalizado (GNEP) permite que o conjunto de estratégias de cada jogador dependa das estratégias dos jogadores rivais. Deste modo, o GNEP não se encaixa no escopo de EP. Como veremos adiante o GNEP pode ser formulado adequadamente por meio de um problema de quase-equilíbrio.

Formalmente, considere um GNEP com N jogadores. Utilizando as mesmas notações da seção 1.3.1, seja $X_v(x^{-v}) \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ o conjunto de estratégias de cada jogador, o qual depende das estratégias dos jogadores rivais.

O objetivo do jogador v , dado as estratégias dos demais jogadores x^{-v} , é escolher uma estratégia x^v que resolva o problema de minimização

$$\begin{aligned} \min_{x^v} \quad & \theta_v(x^v, x^{-v}) \\ \text{s.a.} \quad & x^v \in X_v(x^{-v}). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Um vetor x^* é uma solução de GNEP se, para todos os jogadores $v = 1, \dots, N$, tem-se

$$\theta_v(x^{*,v}, x^{*, -v}) \leq \theta_v(x^v, x^{*, -v}) \quad \forall x^v \in X_v(x^{*, -v}),$$

isto é, se para cada jogador v , $x^{*,v}$ é a solução do problema do v -ésimo jogador quando os demais jogadores fixam suas variáveis em $x^{*, -v}$. Uma tal solução x^* é frequentemente chamada de um *equilíbrio de Nash generalizado*.

O problema de equilíbrio de Nash generalizado pode ser reformulado através de

QEP como segue.

Proposição 1.13. *Considere um GNEP dado. Então, um ponto x^* é um equilíbrio de Nash generalizado se, e somente se, ele é uma solução de $\text{QEP}(K, f)$, onde*

$$K(x) = \prod_{v=1}^N X_v(x^{-v}) \quad (1.6)$$

e

$$f(x, y) = \sum_{v=1}^N [\theta_v(y^v, x^{-v}) - \theta_v(x^v, x^{-v})]. \quad (1.7)$$

Demonstração. Se x^* é um equilíbrio de Nash generalizado, claramente x^* é uma solução de $\text{QEP}(K, f)$.

Suponha agora que x^* seja uma solução de $\text{QEP}(K, f)$. Fixe $v \in \{1, \dots, N\}$. Assim, dado $x^v \in X_v(x^{*, -v})$, considere o vetor $y = (y^1, \dots, y^N) \in \mathbb{R}^n$ definido do seguinte modo:

$$y^\mu := \begin{cases} x^v & , \text{ se } \mu = v \\ x^{*, \mu} & , \text{ se } \mu \neq v. \end{cases}$$

Temos que $y \in K(x^*)$ uma vez que $x^* \in K(x^*) = \prod_{\mu=1}^N X_\mu(x^{*, -\mu})$. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x^*, y) &= \sum_{\mu=1}^N [\theta_\mu(y^\mu, x^{*, -\mu}) - \theta_\mu(x^{*, \mu}, x^{*, -\mu})] \\ &= \left(\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq v}}^N [\theta_\mu(y^\mu, x^{*, -\mu}) - \theta_\mu(x^{*, \mu}, x^{*, -\mu})] \right) + \theta_v(y^v, x^{*, -v}) - \theta_v(x^{*, v}, x^{*, -v}) \\ &= \theta_v(x^v, x^{*, -v}) - \theta_v(x^{*, v}, x^{*, -v}) \end{aligned}$$

isto é, $x^{*, v}$ resolve o problema de minimização [\(1.5\)](#). Como o índice v foi tomado arbitrariamente, ganhamos que x^* é um equilíbrio de Nash generalizado. \square

Jointly convex GNEP

Uma classe especial de GNEPs é o denominado *jointly convex* GNEP. Este problema é um caso intermediário entre o GNEP geral e o problema de equilíbrio de Nash clássico. O *jointly convex* GNEP tem sido frequentemente considerado na literatura por ser mais simples de tratar que o GNEP geral, veja por exemplo [\[2, 32, 43-45\]](#). Apresentamos abaixo sua definição.

Definição 1.4. [\[2, Definição 3.6\]](#) *Considere um GNEP dado tal que a função $\theta_v(\cdot, x^{-v})$ é convexa e o conjunto $X_v(x^{-v})$ é fechado e convexo para todo $v = 1, \dots, N$. Dizemos que este GNEP é jointly convex se, para algum conjunto con-*

vexo e fechado $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, e para todo $v = 1, \dots, N$, tem-se

$$X_v(x^{-v}) = \{y^v \in \mathbb{R}^{n_v} \mid (y^v, x^{-v}) \in \mathbf{X}\}. \quad (1.8)$$

No caso especial de restrições *jointly convex*, é fácil ver que

$$x \in \text{fix}(K) \iff x \in K(x) = \prod_{v=1}^N X_v(x^{-v}) \iff x \in \mathbf{X}, \quad (1.9)$$

onde $\text{fix}(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in K(x)\}$. Em outras palavras, o conjunto \mathbf{X} coincide com o conjunto de pontos fixos da aplicação ponto-conjunto K dada por (1.6).

Existem diversos trabalhos na literatura de *jointly convex* GNEPs dedicados a encontrar uma solução especial destes problemas denominada **equilíbrio de Nash normalizado**. Apresentamos abaixo sua definição formal.

Definição 1.5. [44, Definição 3.1] Um vetor $x^* \in \mathbf{X}$ é denominado um **equilíbrio de Nash normalizado** de um *jointly convex* GNEP, se $\sup_{y \in \mathbf{X}} \{-f(x^*, y)\} \leq 0$ se verifica, onde f é a bifunção definida em (1.7).

Observe que o problema referente a encontrar um equilíbrio de Nash normalizado em um *jointly convex* GNEP pode ser claramente reformulado como uma instância do problema de equilíbrio clássico como segue.

Proposição 1.14. Considere um *jointly convex* GNEP dado. Então, um ponto x^* é um equilíbrio de Nash normalizado se, e somente se, ele é uma solução de EP(\mathbf{X}, f) com f dada por (1.7).

1.3.3 Problema de otimização multiobjetivo

O problema de otimização multiobjetivo (MOP) corresponde ao processo de otimizar simultaneamente duas ou mais funções reais. Em PAPPALARDO [46] pode ser encontrada uma visão geral a respeito de MOP. Formalmente, seja \mathbf{K} um subconjunto fechado, convexo e não vazio de \mathbb{R}^n e seja $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_P}$ uma aplicação dada por $\Psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_{m_P}(x))$. O MOP(\mathbf{K}, Ψ) consiste em resolver o seguinte problema

$$\min \Psi(x) \text{ sujeito a } x \in \mathbf{K}, \quad (1.10)$$

no sentido que, um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de (1.10), chamado ponto Pareto fraco ótimo, se e somente se $x^* \in \mathbf{K}$ e não existe nenhum outro $x \in \mathbf{K}$ com $\psi_i(x) < \psi_i(x^*)$ para todo $i \in \{1, \dots, m_P\}$, veja [47] e suas referências.

O lema a seguir será útil para estabelecer as formulações de MOP tanto como uma instância de EP como também de QEP.

Lema 1.2. Um ponto $x^* \in \mathbf{K}$ satisfaz

$$f_\infty(x^*, y) := \max_{1 \leq i \leq m_P} \{\psi_i(y) - \psi_i(x^*)\} \geq 0 \quad (1.11)$$

para todo $y \in \mathbf{K}$ se, e somente se, x^* é um ponto Pareto fraco ótimo para (1.10).

Demonstração. Segue diretamente da definição de ponto Pareto fraco ótimo. \square

O problema $\text{EP}(\mathbf{K}, f_\infty)$ é a formulação clássica de MOP como um problema de equilíbrio [20].

Formulação como problema de quase-equilíbrio

Nesta seção apresentaremos uma formulação de MOP como um problema de quase-equilíbrio (QEP). Nossa formulação do tipo QEP de MOP utiliza apenas os dados originais do problema e fornece uma reformulação suave no sentido de diferenciabilidade.

Formalmente, seja $w = (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $z = (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. O MOP (1.10) pode ser visto como uma instância de QEP com

$$f(w, z) := v - u \quad \text{e} \quad K(w) := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \in \mathbf{K} \text{ e } g^P(w, z) \leq 0\} \quad (1.12)$$

onde $g_i^P(w, z) = \psi_i(y) - \psi_i(x) - v$ para todo $i = 1, \dots, m_P$.

De fato, estes dados definem um QEP que é equivalente ao MOP no seguinte sentido:

Proposição 1.15. Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é solução de MOP (1.10) se, e somente se, existe $u^* \in \mathbb{R}$ tal que $w^* = (x^*, u^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ resolve o QEP dado por (1.12).

Demonstração. Suponha que x^* resolve MOP. Tome $u^* = 0$. Então $w^* \in K(w^*)$ uma vez que $x^* \in \mathbf{K}$. Agora, considere $z = (y, v) \in K(w^*)$. Assim, $y \in \mathbf{K}$ e $\psi_i(y) - \psi_i(x^*) \leq v$ para todo $i = 1, \dots, m_P$. Portanto $\max_{1 \leq i \leq m_P} \{\psi_i(y) - \psi_i(x^*)\} \leq v$ e, pelo Lema 1.2, $v \geq 0$. Isto implica que $f(w^*, z) = v - u^* = v \geq 0$. Como z foi tomado arbitrariamente, w^* resolve QEP.

Por outro lado, seja $w^* = (x^*, u^*)$ uma solução de QEP. Temos que $w^* \in K(w^*)$, isto é, $x^* \in \mathbf{K}$ e $u^* \geq 0$. Suponha que x^* não resolve MOP. Então, existe $y \in \mathbf{K}$ tal que $\max_{1 \leq i \leq m_P} \{\psi_i(y) - \psi_i(x^*)\} < 0$. Tome $v := \max_{1 \leq i \leq m_P} \{\psi_i(y) - \psi_i(x^*)\}$ e considere $z = (y, v)$. Deste modo, $z \in K(w^*)$ e $f(w^*, z) = v - u^* < 0$. Uma contradição com o fato de w^* ser uma solução de QEP. \square

Esta formulação permite uma aplicação ao MOP de outros métodos propostos para o problema de quase-equilíbrio, além do que será apresentado neste trabalho de tese.

1.3.4 Problema de desigualdade quase-variacional

Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação ponto-ponto e $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma aplicação ponto-conjunto. O problema de desigualdade quase-variacional associado com K e F , o qual denotaremos por $QVI(K, F)$, consiste em:

Encontrar $x^* \in K(x^*)$ tal que $\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$ para todo $y \in K(x^*)$.

O problema de desigualdade quase-variacional pode ser claramente reformulado através de um QEP como segue:

Proposição 1.16. *Considere um QVI dado. Então, um ponto x^* é uma solução de $QVI(K, F)$ se, e somente se, ele é uma solução de $QEP(K, f)$, com f definida por*

$$f(x, y) := \langle F(x), y - x \rangle.$$

Quando existe $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $K(x) \equiv \mathbf{K}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o problema de desigualdade quase-variacional torna-se o problema de desigualdade variacional clássico $VI(\mathbf{K}, F)$. Desigualdades variacionais podem ser vistas como uma instância do problema de equilíbrio clássico de modo análogo ao exposto na Proposição [1.16](#). Alguns trabalhos numéricos dedicados à instância de QVI podem ser encontrados em [\[3, 33, 34, 48-50\]](#).

Capítulo 2

Um método do tipo-Newton para o Problema de Equilíbrio clássico

Neste capítulo apresentamos uma generalização do método desenvolvido por VON HEUSINGER *et al.* [32] destinado a encontrar um equilíbrio normalizado em problemas de equilíbrio de Nash generalizado *jointly convex*, para uma ampla família de modelos matemáticos que podem ser formulados no cenário de problemas de equilíbrio clássico. Introduzimos uma família de bifunções auxiliares contendo aquela utilizada em [32]. Provamos que o método é localmente convergente e estabelecemos a convergência superlinear/quadrática do algoritmo para uma solução do problema sob hipóteses usuais.

Para mostrar a força de nossa generalização, uma aplicação do método proposto ao problema de otimização multiobjetivo (MOP) foi considerada. Além disso, algumas experiências numéricas foram apresentadas envolvendo um problema de equilíbrio clássico o qual não corresponde nem a um problema de equilíbrio de Nash nem a um problema de desigualdade variacional.

Os resultados apresentados neste capítulo encontram-se publicados na revista *Optimization Letters* sob o título *A proximal Newton-type method for equilibrium problems* [16].

2.1 O método proposto

Lembremos que o problema de equilíbrio clássico, $EP(\mathbf{K}, f)$, consiste em:

$$\text{Encontrar } x^* \in \mathbf{K} \text{ tal que } f(x^*, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in \mathbf{K},$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma bifunção de equilíbrio, isto é, f é tal que $f(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e \mathbf{K} é um subconjunto convexo, fechado e não-vazio do \mathbb{R}^n .

Problemas tais como otimização, desigualdade variacional, complementaridade,

ponto fixo e equilíbrio de Nash clássico podem ser modelados como um problema de equilíbrio clássico. Veja por exemplo BLUM e OETTLI [5] e IUSEM e SOSA [20] para uma visão geral destas reformulações. Quando não houver possibilidade de mau entendimento da escolha dos operadores \mathbf{K} e f , escreveremos apenas EP em substituição a $EP(\mathbf{K}, f)$.

Ao longo deste capítulo assumiremos a seguinte hipótese padrão para uma abordagem numérica do tipo-Newton .

Hipótese 2.1. (a) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\nabla_y f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa.

(b) O conjunto $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ é não vazio e possui a seguinte representação:

$$\mathbf{K} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(y) \leq 0\}$$

com $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde cada função componente g_i , $i = 1, \dots, m$, é convexa e duas vezes continuamente diferenciável.

Consideremos a *bifunção regularizada* $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) := f(x, y) + h(x, y) \tag{2.1}$$

onde a *bifunção auxiliar* h satisfaz a seguinte condição:

Hipótese 2.2. (a) $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\nabla_y h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis;

(b) $h(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é fortemente convexa para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) $\nabla_y h(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.1. As seguintes famílias de bifunções auxiliares satisfazem a Hipótese [2.2]:

(i) $h(x, y) = \|y - x\|_P^2 := \langle y - x, P(y - x) \rangle$ onde P é uma matriz simétrica definida positiva. Note que $P = \frac{\alpha}{2}I(n)$, com $\alpha > 0$, é considerada em [32].

(ii) $h(x, y) = \frac{\alpha}{2} \cdot \cosh(y - x)$, com $\alpha > 0$, onde $\cosh(y - x) := \sum_{i=1}^n \cosh(y_i - x_i)$.

Estas duas famílias de bifunções auxiliares foram consideradas em nossos experimentos numéricos. Ressaltamos que em [18] é considerada uma regularização para [2.1] no cenário de funções gap^a para EP com hipóteses similares à Hipótese [2.2].

De agora em diante, a menos que explicitamente afirmado o contrário, assumiremos que as Hipóteses [2.1] e [2.2] estão satisfeitas.

Temos a seguinte proposição:

^aPara detalhes veja Observação [3.1], página [40]

Proposição 2.1. *O seguinte problema de otimização*

$$\min_y \Phi(x, y) \quad \text{sujeito a } y \in \mathbf{K} \quad (2.2)$$

tem uma única solução ótima para cada $x \in \mathbb{R}^n$, o qual denotaremos por $y(x)$.

Demonstração. O conjunto \mathbf{K} é convexo, fechado e não-vazio. Além disso, fixado $x \in \mathbb{R}^n$, a função $\Phi(x, \cdot)$ é fortemente convexa. O resultado segue diretamente da Proposição [1.1](#). \square

Propriedades relevantes da aplicação y serão apresentadas abaixo. A proposição a seguir caracteriza as soluções do problema $EP(\mathbf{K}, f)$.

Proposição 2.2. *Um ponto x é solução de $EP(\mathbf{K}, f)$ se, e somente se, $y(x) = x$.*

Demonstração. Pelas Hipóteses [2.1](#) e [2.2](#), tem-se que $y(x) = x$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(\text{Prop. } \a href="#">1.3))}{\leq} \langle \nabla_y f(x, x) + \nabla_y h(x, x), y - x \rangle \\ &= \langle \nabla_y f(x, x), y - x \rangle \quad \forall y \in \mathbf{K} \end{aligned}$$

o que é equivalente a dizer que x é uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$. \square

Levando em conta a Proposição [2.2](#), nosso objetivo consiste em desenvolver um método do tipo-Newton para encontrar um zero da aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) := y(x) - x. \quad (2.3)$$

Proposição 2.3. *A aplicação $y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$y(x) := \arg \min_y \{\Phi(x, y) \mid y \in \mathbf{K}\}$$

é contínua.

Demonstração. As Hipóteses [2.1](#) (a) e [2.2](#) (a-b) implicam que a aplicação $\Phi(x, \cdot)$ é (fortemente) convexa para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado e contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Defina a aplicação ponto-conjunto $\Omega : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ por $\Omega(x) \equiv \mathbf{K}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. A Proposição [2.1](#) mostra que o conjunto $\mathcal{Y}(x) := \{z \in \mathbf{K} \mid \inf_{y \in \mathbf{K}} \Phi(x, y) = \Phi(x, z)\}$ possui um único elemento para cada $x \in \mathbb{R}^n$, a saber $y(x)$. Portanto, a aplicação y vista com uma aplicação ponto-conjunto é contínua pelo Lema [1.1](#). Segue então que a aplicação ponto-ponto y é contínua. \square

É importante mencionar que embora a aplicação y seja contínua ela nem sempre é diferenciável. Este fato pode ser observado no seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Considere $EP(\mathbf{K}, f)$ com $n = 1$, a bifunção f dada por $f(x, y) = x(y-x)$ e o conjunto $\mathbf{K} = [0, 1]$. Escolhendo $h(x, y) = (y-x)^2$ temos que a aplicação y é dada por

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & , \text{ se } 0 < x < 2 \\ 1 & , \text{ se } x \geq 2, \end{cases}$$

que é contínua mas não é diferenciável em toda a reta. Como pode ser visto, a única solução deste problema é $x^* = 0$ (cf. Proposição [2.2](#)).

Apesar da aplicação y não ser necessariamente diferenciável, prova-se que y (e portanto F) é uma aplicação continuamente diferenciável por partes (ou PC^1 , veja Definição [1.2](#), página [7](#)) sob hipóteses usuais. Para aplicações PC^1 existe uma noção de Jacobiano generalizado computável [\[32, 39, 51\]](#). Esta noção de Jacobiano generalizado será fundamental no desenho de nosso método do tipo-Newton.

Considere o sistema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema [\(2.2\)](#)

$$\begin{aligned} \nabla_y \Phi(x, y) + \nabla g(y)\lambda &= 0 \\ \lambda &\geq 0, \quad g(y) \leq 0, \quad \langle \lambda, g(y) \rangle = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

e seja $\mathcal{M}(x)$ o conjunto dos multiplicadores de Lagrange, i.e.,

$$\mathcal{M}(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid (y(x), \lambda) \text{ satisfaz } \a href="#">(2.4)\}.$$

A seguinte família composta por subconjuntos do conjunto das restrições ativas $I_0(x) := \{i \in \{1, 2, \dots, m\} \mid g_i(y(x)) = 0\}$, dada por

$$\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{J} \subseteq I_0(x) \mid \{\nabla g_i(y(x))\}_{i \in \mathcal{J}} \text{ é linearmente independente e}$$

$$\exists \lambda \in \mathcal{M}(x) \text{ tal que } \lambda_i = 0 \text{ para todo } i \in I_0(x) \setminus \mathcal{J}\},$$

tem uma participação crucial em nossa análise.

Lema 2.1. Se $\mathcal{M}(x) \neq \emptyset$ então $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$.

Demonstração. A prova deste lema é essencialmente a mesma daquela apresentada em [\[32\]](#). Nós a exibimos aqui por uma questão de completude do texto.

Se $0 \in \mathcal{M}(x)$, tem-se que $\mathcal{J} := \emptyset$ pertence a $\mathcal{B}(x)$. Por outro lado, se $0 \notin \mathcal{M}(x)$, tome $\lambda \in \mathcal{M}(x)$ tal que o conjunto $\Lambda_+(\lambda) := \{i \in I_m := \{1, 2, \dots, m\} \mid \lambda_i > 0\}$ é minimal. Afirmamos que $\mathcal{J} := \Lambda_+(\lambda)$ pertence a $\mathcal{B}(x)$. De fato, $\mathcal{J} \subseteq I_0(x)$ pelo sistema [\(2.4\)](#). Assim, resta mostrar que $\nabla g_i(y(x))$ ($i \in \mathcal{J}$) são linearmente independentes.

Suponha que isto não seja verdade. Então, existe um vetor não-nulo $\beta_{\mathcal{J}} = (\beta_i)_{i \in \mathcal{J}}$ tal que $\sum_{i \in \mathcal{J}} \beta_i \nabla g_i(y(x)) = 0$. Trocando $\beta_{\mathcal{J}}$ por $-\beta_{\mathcal{J}}$ se necessário, podemos assu-

mir que pelo menos uma componente β_i ($i \in \mathcal{J}$) é positiva. Seja $\bar{t} := \min\{\frac{\lambda_i}{\beta_i} \mid \beta_i > 0\}$. Então $\lambda_i - \bar{t}\beta_i \geq 0$ para todo $i \in \mathcal{J}$ e $\lambda_{i_0} - \bar{t}\beta_{i_0} = 0$ para pelo menos um índice $i_0 \in \mathcal{J}$. Defina

$$\bar{\lambda}_i := \begin{cases} \lambda_i - \bar{t}\beta_i & , \text{ se } i \in \mathcal{J} \\ \lambda_i & , \text{ se } i \notin \mathcal{J}. \end{cases}$$

Observe que o vetor $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)^T$ pertence a $\mathcal{M}(x)$. Contudo, pela construção, o conjunto $\Lambda_+(\bar{\lambda})$ está estritamente contido no conjunto $\Lambda_+(\lambda)$, uma contradição com nossa escolha de λ . \square

Observação 2.2. *De acordo com a demonstração do Lema [2.1](#), temos que $0 \in \mathcal{M}(x)$ se, e somente se, $\emptyset \in \mathcal{B}(x)$.*

Como em [32](#), iremos considerar a seguinte condição de qualificação das restrições que nos permite garantir a existência de multiplicadores de Lagrange [43](#), [52](#).

Hipótese 2.3. [40](#), p. 262] *Dado $x \in \mathbb{R}^n$, a condição de qualificação das restrições de posto constante (CRCQ) vale em $y(x)$, isto é, existe uma vizinhança V de $y(x)$ tal que para qualquer conjunto $\mathcal{J} \subseteq I_0(x) = \{i \in I_m \mid g_i(y(x)) = 0\}$, o conjunto*

$$\{\nabla_y g_i(y) \mid i \in \mathcal{J}\}$$

possui o mesmo posto (o qual depende de \mathcal{J}) para todo $y \in V$.

Note que a condição CRCQ é sempre satisfeita no caso de restrições lineares. Esta condição é também mais fraca que a condição de qualificação de independência linear das restrições.

Lema 2.2. *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$. Suponha que a Hipótese [2.3](#) é satisfeita em $y(x^*)$. Então existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que, para todo $x \in V(x^*)$, as seguintes afirmações valem:*

- (a) *A Hipótese [2.3](#) vale em $y(x)$;*
- (b) $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}(x^*)$.

Demonstração. (a) Segue diretamente da definição da condição de qualificação das restrições de posto constante (Hipótese [2.3](#)) e de argumentos de continuidade conforme Hipótese [2.1](#) e Proposição [2.3](#).

(b) A prova é essencialmente a mesma daquela dada por PANG e RALPH [53](#) no cenário de operadores de projeção e por VON HEUSINGER *et al.* [32](#) tratando de GNEPs.

Suponha que a afirmação seja falsa. Assim, deve existir uma sequência $x^k \rightarrow x^*$ tal que, para todo k , existe um índice $\mathcal{J}_k \in \mathcal{B}(x^k) \setminus \mathcal{B}(x^*)$. Uma vez que há

apenas uma quantidade finita de tais índices, trabalhando com uma subsequência se necessário, podemos assumir que \mathcal{J}_k é o mesmo conjunto de índices para todo k , o qual denotaremos por \mathcal{J} .

Assim, temos que o conjunto $\{\nabla g_i(y(x^k))\}_{i \in \mathcal{J}}$ é linearmente independente e existe $\lambda^k \in \mathcal{M}(x^k)$ tal que $\Lambda_+(\lambda^k) := \{i \in I_m \mid \lambda_i^k > 0\} \subseteq \mathcal{J} \subseteq I_0(x^k)$ mas $\mathcal{J} \notin \mathcal{B}(x^*)$. Note que $\mathcal{J} \subseteq I_0(x^*)$. Logo, pela Hipótese [2.3](#), o conjunto $\{\nabla g_i(y(x^*))\}_{i \in \mathcal{J}}$ deve ser linearmente independente. Portanto, o único modo de $\mathcal{J} \notin \mathcal{B}(x^*)$ é não existir $\lambda \in \mathcal{M}(x^*)$ com $\Lambda_+(\lambda) \subseteq \mathcal{J}$.

Pelo fato de $\lambda^k \in \mathcal{M}(x^k)$, temos que

$$\nabla_y \Phi(x^k, y(x^k)) + \nabla g_{\mathcal{J}}(y(x^k)) \cdot \lambda_{\mathcal{J}}^k = 0 \quad (2.5)$$

para todo k . Levando em conta a continuidade das aplicações envolvidas na igualdade [\(2.5\)](#) e a independência linear de $\{\nabla g_i(y(x^*))\}_{i \in \mathcal{J}}$, temos que a sequência $\{\lambda_{\mathcal{J}}^k\}$ é convergente, digamos $\lambda_{\mathcal{J}}^k \rightarrow \lambda_{\mathcal{J}}^*$. Tomando o limite em [\(2.5\)](#) e pondo $\lambda_{\hat{\mathcal{J}}}^* := 0$, vemos que $\lambda^* := (\lambda_{\mathcal{J}}^*, \lambda_{\hat{\mathcal{J}}}^*) \in \mathcal{M}(x^*)$ e $\Lambda_+(\lambda^*) \subseteq \mathcal{J}$ o que é uma contradição. \square

A seguir definiremos uma aplicação que nos permitirá provar a propriedade PC¹ da aplicação y bem como deduzir expressões para o jacobiano de suas C¹-partes.

Seja $\mathcal{J} \subseteq I_m = \{1, 2, \dots, m\}$ e $\hat{\mathcal{J}} = I_m \setminus \mathcal{J}$. Considere a aplicação $\Psi_{\mathcal{J}} : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definida por

$$\Psi_{\mathcal{J}}(x, y, \lambda) := \begin{pmatrix} \nabla_y \Phi(x, y) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla g_i(y) \\ g_{\mathcal{J}}(y) \\ \lambda_{\hat{\mathcal{J}}} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

onde a partição $(\mathcal{J}, \hat{\mathcal{J}})$ de I_m é usada para separar os vetores λ e $g(y)$ em $\lambda = (\lambda_{\mathcal{J}}, \lambda_{\hat{\mathcal{J}}})$ e $g(y) = (g_{\mathcal{J}}(y), g_{\hat{\mathcal{J}}}(y))$, respectivamente.

São necessários os seguintes lemas para demonstrar que y é uma aplicação PC¹:

Lema 2.3. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e suponha que a Hipótese [2.3](#) vale em $y(x)$. Então, para qualquer $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$, existe um único vetor $\lambda \in \mathcal{M}(x)$ tal que $\Psi_{\mathcal{J}}(x, y(x), \lambda) = 0$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ e $\lambda \in \mathcal{M}(x)$ tal que $\lambda_i = 0$ para todo $i \in \hat{\mathcal{J}}$. Uma vez que $(y(x), \lambda)$ satisfaz [\(2.4\)](#) e $\lambda_{\hat{\mathcal{J}}} = 0$, tem-se que

$$\nabla_y \Phi(x, y(x)) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla g_i(y(x)) = 0.$$

Além disso, $g_{\mathcal{J}}(y(x)) = 0$ pois $\mathcal{J} \subseteq I_0(x)$. Assim, $\Psi_{\mathcal{J}}(x, y(x), \lambda) = 0$. A unicidade é devido ao fato de $\{\nabla g_i(y(x))\}_{i \in \mathcal{J}}$ ser um conjunto linearmente independente. \square

A aplicação $\Psi_{\mathcal{J}}$ é continuamente diferenciável, uma vez que $\nabla_y \Phi$ é continuamente diferenciável e g é duas vezes continuamente diferenciável. Temos que o jacobiano de $\Psi_{\mathcal{J}}$ no ponto (x, y, λ) é dado, após alguma possível reordenação dos índices, por

$$J \Psi_{\mathcal{J}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_{yx}^2 \Phi(x, y) & \nabla_{yy}^2 \Phi(x, y) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla^2 g_i(y) & \nabla g_{\mathcal{J}}(y) & 0 \\ 0 & (\nabla g_{\mathcal{J}}(y))^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(|\hat{\mathcal{J}}|) \end{bmatrix},$$

e o jacobiano de $\Psi_{\mathcal{J}}$ com respeito às variáveis (y, λ) é

$$J_{(y, \lambda)} \Psi_{\mathcal{J}}(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_{yy}^2 \Phi(x, y) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla^2 g_i(y) & \nabla g_{\mathcal{J}}(y) & 0 \\ (\nabla g_{\mathcal{J}}(y))^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(|\hat{\mathcal{J}}|) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

onde $I(|\hat{\mathcal{J}}|)$ é a notação para a matriz identidade de ordem $|\hat{\mathcal{J}}|$.

O seguinte lema decorre do teorema clássico da aplicação implícita [37].

Lema 2.4. *Considere $x^* \in \mathbb{R}^n$ e suponha que a Hipótese 2.3 é satisfeita em $y^* = y(x^*)$. Seja $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ fixado e seja $\lambda^* \in \mathcal{M}(x^*)$ o correspondente (único) multiplicador de Lagrange dado no Lema 2.3 tal que $\Psi_{\mathcal{J}}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0$. Então, existem vizinhanças abertas $V^{\mathcal{J}}(x^*)$ e $V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$, bem como uma aplicação continuamente diferenciável $(y^{\mathcal{J}}(\cdot), \lambda^{\mathcal{J}}(\cdot)) : V^{\mathcal{J}}(x^*) \rightarrow V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$ tal que $y^{\mathcal{J}}(x^*) = y^*$, $\lambda^{\mathcal{J}}(x^*) = \lambda^*$ e, para todo $x \in V^{\mathcal{J}}(x^*)$,*

$$\Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) = 0, \quad (2.8)$$

e

$$\begin{bmatrix} J y^{\mathcal{J}}(x) \\ J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \end{bmatrix} = -[J_{(y, \lambda)} \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x))]^{-1} \cdot J_x \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)). \quad (2.9)$$

Demonstração. Observe que o jacobiano dado em (2.7) é inversível em (x^*, y^*, λ^*) . De fato, temos que $\nabla g_{\mathcal{J}}(y^*)$ possui posto completo pela escolha de $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$, $\nabla^2 g_i(y^*)$ é semidefinida positiva uma vez que g_i é convexa, e $\nabla_{yy}^2 \Phi(x^*, y^*)$ é positiva definida devido a $\Phi(x^*, \cdot)$ ser fortemente convexa, conforme Proposição 1.2. A afirmação é então uma consequência direta do Teorema da Aplicação Implícita, conforme Proposição 1.4. \square

Levando em conta os resultados expostos anteriormente, provaremos a seguir a propriedade PC¹ da aplicação y .

Proposição 2.4. *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ dado. Suponha que a Hipótese 2.3 vale em $y(x^*)$. Então, existe uma vizinhança V^* de x^* tal que a aplicação y é uma aplicação PC^1 em V^* . Mais precisamente, em qualquer ponto $x \in V^*$ dado, a igualdade $y(x) = y^{\mathcal{J}}(x)$ vale para qualquer conjunto de índices $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$, onde $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é a aplicação definida no Lema 2.4.*

Demonstração. A prova desta proposição é baseada naquela apresentada em [43, Teorema 3.10 (passo 4)].

Considere $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que a Hipótese 2.3 é satisfeita em $y^* = y(x^*)$. Defina $V^* := (\bigcap_{\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)} V^{\mathcal{J}}(x^*))$ onde $V^{\mathcal{J}}(x^*)$ são as vizinhanças que aparecem no Lema 2.4. Sem perda de generalidade, assumamos que $V^{\mathcal{J}}(x^*) \subseteq V(x^*)$ para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$, onde $V(x^*)$ é a vizinhança definida no Lema 2.2. V^* é uma vizinhança de x^* , uma vez que $\mathcal{B}(x^*)$ é um conjunto finito.

Considere $x \in V^*$ e seja $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ dado. O Lema 2.3 assegura a existência de um único multiplicador de Lagrange $\lambda(x) \in \mathcal{M}(x)$ satisfazendo $\Psi_{\mathcal{J}}(x, y(x), \lambda(x)) = 0$. Além disso, o Lema 2.4 garante a existência de vizinhanças abertas $V^{\mathcal{J}}(x^*)$ e $V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$ bem como de uma aplicação continuamente diferenciável $(y^{\mathcal{J}}(\cdot), \lambda^{\mathcal{J}}(\cdot)) : V^{\mathcal{J}}(x^*) \rightarrow V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$ tal que $\Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) = 0$ para todo $x \in V^{\mathcal{J}}(x^*)$. Em particular, $(y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x))$ é uma solução localmente única do sistema $\Psi_{\mathcal{J}}(x, y, \lambda) = 0$ para cada $x \in V^{\mathcal{J}}(x^*)$; veja novamente Proposição 1.4.

Agora, iremos mostrar que $(y(x), \lambda(x)) \in V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$ para todo x suficientemente próximo a x^* . Assim, pela unicidade local, ganhamos que $y(x) = y^{\mathcal{J}}(x)$ (e $\lambda(x) = \lambda^{\mathcal{J}}(x)$) para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}(x^*)$.

Suponha que isto não seja verdade. Então, existem uma sequência $\{x^k\}$ com $x^k \rightarrow x^*$ e um correspondente $\mathcal{J}_k \in \mathcal{B}(x^k)$ tal que

$$(y(x^k), \lambda(x^k)) \notin V^{\mathcal{J}_k}(y^*, \lambda^*) \quad (2.10)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Trabalhando com uma subsequência se necessário, podemos assumir que \mathcal{J}_k é um mesmo conjunto de índices para todo k o qual denotaremos por \mathcal{J} .

Temos que $y(x^k) \rightarrow y^*$. Além disso, para cada x^k com associados $y(x^k)$ e $\lambda(x^k)$, temos de (2.6) que

$$\begin{aligned} \nabla_y \Phi(x^k, y(x^k)) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i(x^k) \nabla g_i(y(x^k)) &= 0, \\ \lambda_i(x^k) &= 0, \quad i \in \hat{\mathcal{J}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

para todo k . A continuidade das aplicações $\nabla_y \Phi$, y and ∇g_i , juntamente com a independência linear dos vetores $\nabla g_i(y^*)$ (que é uma consequência de $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^k) \subseteq \mathcal{B}(x^*)$ e da Hipótese 2.3) implica que a sequência $\{\lambda(x^k)\}$ é convergente. Seja $\bar{\lambda}$ o

correspondente ponto limite. Passando o limite em (2.11) ganhamos

$$\nabla_y \Phi(x^*, y^*) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(y^*) = 0$$

bem como $\bar{\lambda}_i = 0$ para todo $i \in \hat{\mathcal{J}}$. Note que o Lema 2.3 implica que $\bar{\lambda}$ é o único vetor satisfazendo estas igualdades. Contudo, por definição, o vetor λ^* também satisfaz estas equações, portanto $\lambda(x^k) \rightarrow \lambda^*$. Porém, isto implica que $(y(x^k), \lambda(x^k)) \in V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$ para todo k suficientemente grande. Uma contradição com (2.10). \square

A seguinte noção pode ser encontrada em [32, 39, 51] e tem uma participação fundamental em nosso algoritmo uma vez que a aplicação y não necessariamente é diferenciável.

Definição 2.1. O jacobiano generalizado computável de $y(\cdot)$ em x é definido por

$$\partial_C y(x) := \{J y^{\mathcal{J}}(x) \mid \mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)\},$$

onde $J y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é o jacobiano de $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$.

A próxima proposição nos fornece expressões para o Jacobiano da aplicação $y^{\mathcal{J}}$. Estas expressões generalizam aquelas apresentadas em [32] no contexto de GNEPs.

Proposição 2.5. Considere $x^* \in \mathbb{R}^n$, e suponha que a Hipótese 2.3 é satisfeita em $y(x^*)$. Seja $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ fixado e $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ a correspondente aplicação definida no Lema 2.4. Temos que o jacobiano de $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é dado por

$$J y^{\mathcal{J}}(x) = C^{-1}A - C^{-1}D(D^T C^{-1}D)^{-1}(D^T C^{-1}A), \quad (2.12)$$

com

$$\begin{aligned} A &= A^{\mathcal{J}}(x) = -\nabla_{yx}^2 f(x, y^{\mathcal{J}}(x)) - \nabla_{yx}^2 h(x, y^{\mathcal{J}}(x)), \\ C &= C^{\mathcal{J}}(x) = \nabla_{yy}^2 f(x, y^{\mathcal{J}}(x)) + \nabla_{yy}^2 h(x, y^{\mathcal{J}}(x)) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i^{\mathcal{J}}(x) \nabla^2 g_i(y^{\mathcal{J}}(x)), \\ D &= D^{\mathcal{J}}(x) = \nabla g_{\mathcal{J}}(y^{\mathcal{J}}(x)), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $\nabla g_{\mathcal{J}}(\cdot)$ é a notação para a matriz com vetores coluna $\{\nabla g_i(\cdot)\}_{i \in \mathcal{J}}$.

Demonstração. Da equação (2.9) no Lema 2.4, temos que

$$J_x \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) = -J_{(y, \lambda)} \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) \cdot \begin{bmatrix} J y^{\mathcal{J}}(x) \\ J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \end{bmatrix}.$$

Portanto, utilizando as expressões (2.7) e (2.13), resulta o seguinte sistema de

equações

$$\begin{bmatrix} -A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C & D & 0 \\ D^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(|\hat{\mathcal{J}}|) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J y^{\mathcal{J}}(x) \\ J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \end{bmatrix}$$

o qual implica que

$$A = C \cdot J y^{\mathcal{J}}(x) + D \cdot J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \quad (2.14)$$

$$0 = -D^T \cdot J y^{\mathcal{J}}(x) \quad (2.15)$$

$$0 = J \lambda^{\mathcal{J}}(x).$$

De (2.14) e da não-singularidade da matriz C, temos a seguinte igualdade

$$J y^{\mathcal{J}}(x) = C^{-1}A - C^{-1}D \cdot J \lambda^{\mathcal{J}}(x). \quad (2.16)$$

Multiplicando a equação (2.16) por D^T pelo lado esquerdo e levando em conta a igualdade (2.15), temos que

$$J \lambda^{\mathcal{J}}(x) = (D^T C^{-1} D)^{-1} (D^T C^{-1} A). \quad (2.17)$$

Substituindo a expressão (2.17) na igualdade (2.16), obtemos o resultado desejado. \square

Observação 2.3. Observe que as matrizes A e C dadas em [32] são casos particulares de (2.13). Note também que se $\mathcal{J} = \emptyset$ então $J y^{\mathcal{J}}(x) = C^{-1}A$ com $A = A^{\emptyset}(x) = -\nabla_{yx}^2 f(x, y^{\emptyset}(x)) - \nabla_{yx}^2 h(x, y^{\emptyset}(x))$ e $C = C^{\emptyset}(x) = \nabla_{yy}^2 f(x, y^{\emptyset}(x)) + \nabla_{yy}^2 h(x, y^{\emptyset}(x))$.

O seguinte lema nos possibilita encontrar um elemento $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ e um correspondente multiplicador λ . Isto será importante para tornar o algoritmo totalmente implementável na prática.

Lema 2.5. Considere $x^* \in \mathbb{R}^n$, e suponha que a Hipótese 2.3 vale em $y^* = y(x^*)$. Seja λ^* um vértice solução do problema de programação linear abaixo

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \sum_{i \in I_0(x^*)} \lambda_i \\ \text{s.a.} \quad & \nabla g(y^*) \lambda = -\nabla_y \Phi(x^*, y^*), \\ & \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I_0(x^*), \\ & \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I_m \setminus I_0(x^*). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Defina $\mathcal{J} := \{i \in I_0(x^*) \mid \lambda_i^* > 0\}$. Então \mathcal{J} pertence a $\mathcal{B}(x^*)$ e λ^* é o λ mencionado no Lema 2.3.

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma daquela apresentada em [32]

Lema 5.1]. Note que (2.18) possui pelo menos um ponto viável uma vez que $\mathcal{M}(x^*) \neq \emptyset$ pela Hipótese 2.3. Além disso, a função objetivo é limitada inferiormente por zero no conjunto viável o que faz com que o problema de programação linear tenha solução.

Por argumentos da teoria de programação linear, existe pelo menos um vértice λ^* do poliedro definido pelo conjunto viável de (2.18) que é solução do problema. Assim, novamente por resultados de programação linear, segue que o conjunto $\{\nabla g_i(y^*)\}_i$ com $i \in \Lambda_+(\lambda^*) := \{i \in I_m \mid \lambda_i^* > 0\}$ é linearmente independente. O resultado segue das definições de $\mathcal{B}(x^*)$ e $\Psi_{\mathcal{J}}$ (veja páginas 19 e 21). \square

Iremos considerar a seguinte hipótese para estabelecer a convergência do algoritmo desenvolvido na próxima seção.

Hipótese 2.4. *Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Para cada $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ e $\lambda \in \mathcal{M}(x)$, tem-se*

$$d^T \left(M(x, y(x)) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla^2 g_i(y(x)) \right) d \neq 0 \quad \forall d \in \mathcal{T}^{\mathcal{J}}(x), d \neq 0, \quad (2.19)$$

onde $\mathcal{T}^{\mathcal{J}}(x) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(y(x))^T d = 0 \text{ para todo } i \in \mathcal{J}\}$ e $M(x, y) = \nabla_{yy}^2 \Phi(x, y) + \nabla_{yx}^2 \Phi(x, y)$.

Destacamos que, quando o problema de equilíbrio clássico deriva de um equilíbrio de Nash generalizado *jointly convex*^b e a bifunção auxiliar é dada por $h(x, y) = \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$ ($\alpha > 0$), a condição acima é a Hipótese 4.1 considerada em [32].

Finalizamos esta seção com dois resultados úteis para o estabelecimento do algoritmo que será proposto à frente.

Proposição 2.6. *Seja $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que as Hipóteses 2.3 e 2.4 valem em $y^* = y(x^*)$ e x^* , respectivamente. Então, $Jy^{\mathcal{J}}(x^*) - I(n)$ é não singular para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$.*

Demonstração. A prova desta proposição segue as ideias daquela apresentada em [32, Lema 4.2]. Suponha que existe $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ tal que $Jy^{\mathcal{J}}(x^*) - I(n)$ é uma matriz singular. Considere $\lambda^* \in \mathcal{M}(x^*)$ o único multiplicador de Lagrange mencionado no Lema 2.3

Uma vez que $Jy^{\mathcal{J}}(x^*) - I(n)$ é singular, existe $v \in \mathbb{R}^n$ não-nulo tal que $(Jy^{\mathcal{J}}(x^*) - I(n))v = 0$, isto é,

$$(Jy^{\mathcal{J}}(x^*))v = v. \quad (2.20)$$

Multiplicando (2.12) por D^T à esquerda, ganhamos que $D^T Jy^{\mathcal{J}}(x^*) = 0$ o que implica que

$$0 = D^T Jy^{\mathcal{J}}(x^*)v = D^T v = (\nabla g_{\mathcal{J}}(y^*))^T v, \quad (2.21)$$

^bVeja definição na página 12.

isto é, $v \in \mathcal{T}^{\mathcal{J}}(x^*)$.

Por outro lado, multiplicando (2.12) por $v^T C$ à esquerda e por v à direita ganhamos

$$\begin{aligned} v^T C J y^{\mathcal{J}}(x^*) v &= v^T C C^{-1} A v - v^T C C^{-1} D (D^T C^{-1} D)^{-1} (D^T C^{-1} A) v \\ &= v^T A v - v^T D (D^T C^{-1} D)^{-1} (D^T C^{-1} A) v \\ &\stackrel{\text{(eq. (2.21))}}{=} v^T A v. \end{aligned}$$

Levando em conta a igualdade (2.20), temos que $v^T C v = v^T A v$, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= v^T (C - A) v \\ &\stackrel{\text{(eq. (2.13))}}{=} v^T \left(M(x^*, y^*) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i^* \nabla^2 g_i(y^*) \right) v, \end{aligned}$$

o que é uma contradição com (2.19). \square

Lema 2.6. *Seja x^* uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$. Suponha que as Hipóteses 2.3 e 2.4 são satisfeitas em x^* . Então existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $\|(H(x))^{-1}\| \leq M$ para todo $x \in B(x^*, \delta)$ e para todo $H(x) \in \partial_C F(x)$ onde $F(x) = y(x) - x$.*

Demonstração. Fixe $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ e considere $H^{\mathcal{J}}(x) = J y^{\mathcal{J}}(x) - I(n)$. Seja $\sigma_{\mathcal{J}} > 0$ o menor valor singular da matriz $H^{\mathcal{J}}(x^*)$. Portanto,

$$\sigma_{\mathcal{J}} \|d\| \leq \|H^{\mathcal{J}}(x^*) d\| \quad \forall d \in \mathbb{R}^n. \quad (2.22)$$

Além disso, uma vez que $H^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é contínua em uma vizinhança de x^* , tomando $c_{\mathcal{J}} \in (0, 1)$ tem-se que, para cada $\varepsilon_{\mathcal{J}} = c_{\mathcal{J}} \sigma_{\mathcal{J}}$, existe $\delta_{\mathcal{J}} > 0$ tal que

$$\|H^{\mathcal{J}}(x) - H^{\mathcal{J}}(x^*)\| \leq \varepsilon_{\mathcal{J}} \quad \forall x \in B(x^*, \delta_{\mathcal{J}}). \quad (2.23)$$

Das desigualdades (2.22) e (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} \|H^{\mathcal{J}}(x) d\| &= \|H^{\mathcal{J}}(x^*) d + (H^{\mathcal{J}}(x) - H^{\mathcal{J}}(x^*)) d\| \\ &\geq \|H^{\mathcal{J}}(x^*) d\| - \|(H^{\mathcal{J}}(x) - H^{\mathcal{J}}(x^*)) d\| \\ &\geq \sigma_{\mathcal{J}} \|d\| - c_{\mathcal{J}} \sigma_{\mathcal{J}} \|d\| \\ &= (1 - c_{\mathcal{J}}) \sigma_{\mathcal{J}} \|d\|. \end{aligned}$$

Assim, dado $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|y\| = 1$, e tomando $d = (H^{\mathcal{J}}(x))^{-1} y$, temos que

$$1 = \|y\| = \|H^{\mathcal{J}}(x) (H^{\mathcal{J}}(x))^{-1} y\| \geq (1 - c_{\mathcal{J}}) \sigma_{\mathcal{J}} \|(H^{\mathcal{J}}(x))^{-1} y\|.$$

Portanto, uma vez que existem apenas uma quantidade finita de elementos em $\mathcal{B}(x^*)$,

temos que existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que $\|(H^{\mathcal{J}}(x))^{-1}\| \leq M$ para todo $x \in B(x^*, \delta)$ e para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$. O resultado segue do Lema [2.2](#). \square

2.2 O algoritmo

Nosso objetivo nesta seção é propor e analisar a convergência de um algoritmo do tipo-Newton implementável para resolver EP, denominado Algoritmo **NMEP**.

Após a descrição do algoritmo, apresentaremos algumas propriedades e resultados auxiliares para estabelecer sua boa definição. Posteriormente, analisaremos sua convergência. De agora em diante, assumiremos a existência de solução para o problema EP.

Algoritmo NMEP

Passo 0: Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e faça $k := 0$.

Passo 1: Encontre $y^k = \arg \min\{\Phi(x^k, y) \mid y \in \mathbf{K}\}$.

Se $y^k = x^k$, então pare. (x^k é uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$).

Passo 2: Encontre um vértice solução λ^k do problema de programação linear [\(2.18\)](#) com $x^* = x^k$ e $y^* = y^k$. Tome $\mathcal{J} := \{i \in I_0(x^k) \mid \lambda_i^k > 0\}$.

Passo 3: Calcule $H_k = J y^{\mathcal{J}}(x^k) - I(n)$ utilizando [\(2.12\)](#)-[\(2.13\)](#) com $x = x^k$, $\lambda^{\mathcal{J}}(x) = \lambda^k$, e encontre a solução d^k do sistema $H_k d = -F(x^k)$.

Passo 4: Defina $x^{k+1} := x^k + d^k$, $k = k + 1$ e volte ao *Passo 1*.

Observação 2.4. *Encontrar um vértice solução do problema de programação linear [\(2.18\)](#) no Passo 2 tem por objetivo encontrar um elemento em $\mathcal{B}(x^k)$ (veja Lema [2.5](#)). Isto é realizado apenas para tornar o algoritmo completamente implementável na prática. De fato, qualquer outro modo de encontrar um elemento em $\mathcal{B}(x^k)$ pode ser utilizado no Passo 2.*

O seguinte lema será útil tanto para completar a boa definição do Algoritmo **NMEP** quanto para provar sua convergência. Ele é uma generalização de [\[32, Lema 4.4\]](#) para problemas de equilíbrio clássico utilizando a classe de bifunções auxiliares considerada neste trabalho de tese.

Lema 2.7. *Seja x^* uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$. Suponha que a Hipótese [2.3](#) vale em $y(x^*) = x^*$. Então, para qualquer $H \in \partial_C F(x)$ tem-se*

$$F(x) - F(x^*) - H(x - x^*) = o(\|x - x^*\|). \quad (2.24)$$

Além disso, se o jacobiano de todas as aplicações ∇g_i , $i = 1, \dots, m$ e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuas em torno de x^* , resulta

$$F(x) - F(x^*) - H(x - x^*) = O(\|x - x^*\|^2). \quad (2.25)$$

Demonstração. Para provarmos a igualdade (2.24), devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|F(x) - F(x^*) - H(x - x^*)\| \leq \varepsilon \|x - x^*\|$$

para todo $x \in B(x^*, \delta)$ e para todo $H \in \partial_C F(x)$.

Pelo Lema 2.4, para cada $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$, existe uma vizinhança $V^{\mathcal{J}}(x^*)$ de x^* e uma aplicação continuamente diferenciável $y^{\mathcal{J}}$ definida em $V^{\mathcal{J}}(x^*)$ tal que $y^{\mathcal{J}}(x^*) = y(x^*) = x^*$. Portanto, sendo $y^{\mathcal{J}}$ continuamente diferenciável em $V^{\mathcal{J}}(x^*)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_{\mathcal{J}} > 0$ tal que

$$\|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x^*)(x - x^*)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x - x^*\|$$

e

$$\|J y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $x \in B(x^*, \delta_{\mathcal{J}})$. Tome $\delta := \min_{\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)} \delta_{\mathcal{J}}$. Assim, a desigualdade abaixo

$$\begin{aligned} \|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x)(x - x^*)\| &= \|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x^*)(x - x^*) \\ &\quad + (J y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x))(x - x^*)\| \\ &\leq \|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x^*)(x - x^*)\| \\ &\quad + \|(J y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x))(x - x^*)\| \\ &\leq \varepsilon \|x - x^*\| \end{aligned} \quad (2.26)$$

vale para qualquer $x \in B(x^*, \delta)$ e qualquer $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$.

Agora, dado $x \in B(x^*, \delta)$, considere $H \in \partial_C F(x)$ arbitrário. Pela Definição 2.1, existe $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ ($\subseteq \mathcal{B}(x^*)$); veja Lema 2.2 tal que $H = J y^{\mathcal{J}}(x) - I(n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x^*) - H(x - x^*)\| &\stackrel{(F(x^*)=0)}{=} \|y(x) - x - (J y^{\mathcal{J}}(x) - I(n))(x - x^*)\| \\ &= \|y(x) - x^* - J y^{\mathcal{J}}(x)(x - x^*)\| \\ &\stackrel{(\text{Prop. 2.4})}{=} \|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - J y^{\mathcal{J}}(x)(x - x^*)\| \\ &\stackrel{(2.26)}{\leq} \varepsilon \|x - x^*\|, \end{aligned}$$

o que prova a relação (2.24).

Para provarmos a igualdade (2.25), devemos mostrar que existem $c > 0$ e $\delta > 0$

tais que

$$\|F(x) - F(x^*) - H(x - x^*)\| \leq c \|x - x^*\|^2$$

para todo $x \in B(x^*, \delta)$ e todo $H \in \partial_C F(x)$.

Observe que se os Jacobianos de todas as aplicações ∇g_i , $i = 1, \dots, m$ e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuos em torno de x^* então, pelas expressões dadas na Proposição 2.5, a aplicação $Jy^{\mathcal{J}}$ é também Lipschitz contínuas em torno de x^* . Denote por $L > 0$ a constante de Lipschitz de $Jy^{\mathcal{J}}$.

O resultado segue de modo semelhante ao que foi feito acima. De fato, pela continuidade Lipschitz de $Jy^{\mathcal{J}}$ e levando em conta a Proposição 1.6, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|Jy^{\mathcal{J}}(x) - Jy^{\mathcal{J}}(x^*)\| \leq L \|x - x^*\|$$

e

$$\|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - Jy^{\mathcal{J}}(x^*)(x - x^*)\| \stackrel{(\text{Prop. 1.6})}{\leq} \frac{L}{2} \|x - x^*\|^2$$

para todo $x \in B(x^*, \delta)$ e qualquer $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$. Portanto, tomando $c = \frac{3L}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \|F(x) - F(x^*) - H(x - x^*)\| &= \|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - Jy^{\mathcal{J}}(x)(x - x^*)\| \\ &\leq \|y^{\mathcal{J}}(x) - y^{\mathcal{J}}(x^*) - Jy^{\mathcal{J}}(x^*)(x - x^*)\| \\ &\quad + \|(Jy^{\mathcal{J}}(x^*) - Jy^{\mathcal{J}}(x))(x - x^*)\| \\ &\leq \frac{L}{2} \|x - x^*\|^2 + L \|x - x^*\|^2 \\ &= c \|x - x^*\|^2, \end{aligned}$$

o que prova a relação (2.25). □

2.2.1 A boa definição

Seja x^* uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$. Nesta seção mostraremos que o Algoritmo **NMEP** é localmente bem definido em torno de x^* . Isto é, mostraremos a existência de uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que, dado qualquer ponto $x^k \in V(x^*)$, x^{k+1} é bem definido e pertence a esta vizinhança.

Observe que, pela Proposição 2.1, o *Passo 1* é bem definido para qualquer $x^k \in \mathbb{R}^n$. Além disso, pelos Lemas 2.2 e 2.5, existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que o *Passo 2* é bem definido para qualquer $x^k \in V(x^*)$, desde que x^* verifique a Hipótese 2.3.

Proposição 2.7. *Seja x^* uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$. Suponha que as Hipóteses 2.3 e 2.4 sejam satisfeitas em $y(x^*) = x^*$. Então, existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que as matrizes $H_k \in \partial_C F(x^k) = \{Jy^{\mathcal{J}}(x^k) - I(n) \mid \mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^k)\}$ são não-singulares para todo $x^k \in V(x^*)$. Portanto, o *Passo 3* é localmente bem definido.*

Demonstração. A não-singularidade das matrizes pertencentes a $\partial_C F(x^*)$ é garantida pela Proposição [2.6](#). O resultado segue da continuidade da aplicação $Jy^{\mathcal{J}}$ e do Lema [2.2](#). \square

Para concluir a boa definição do algoritmo proposto, precisamos garantir que $x^{k+1} \in V(x^*)$ sempre que $x^k \in V(x^*)$. De fato, em decorrência do Lema [2.6](#) existem $\delta_1 > 0$ e $M > 0$ tal que, para todo $x \in B(x^*, \delta_1)$,

$$\|H^{-1}\| \leq M$$

para todo $H \in \partial_C F(x)$. Tome $M > 0$. Pelo Lema [2.7](#), existe δ_2 tal que

$$\|F(x) - F(x^*) - H(x - x^*)\| \leq \frac{1}{M+1} \|x - x^*\| \quad \forall x \in B(x^*, \delta_2).$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e considere $x^k \in B(x^*, \delta)$ e $H_k \in \partial_C F(x^k)$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|x^k - H_k^{-1}F(x^k) - x^*\| \\ &= \|H_k^{-1}[H_k(x^k - x^*) - F(x^k)]\| \\ &\leq \|H_k^{-1}\| \cdot \|F(x^k) - F(x^*) - H_k(x^k - x^*)\| \\ &\leq \frac{M}{M+1} \|x^k - x^*\| \\ &< \|x^k - x^*\| \end{aligned}$$

e portanto $x^{k+1} \in B(x^*, \delta)$.

2.2.2 Propriedades de convergência

A Proposição [2.2](#) assegura que, se $y^k = x^k$, então x^k resolve EP(\mathbf{K}, f). De agora em diante, assumiremos que a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo **NMEP** é infinita.

Teorema 2.1. *Seja x^* uma solução do problema EP(\mathbf{K}, f). Suponha que as Hipóteses [2.3](#) e [2.4](#) sejam satisfeitas em $y(x^*) = x^*$. Então, existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que para um ponto inicial arbitrário $x^0 \in V(x^*)$ a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo **NMEP** converge para x^* superlinearmente. Além disso, se os Jacobianos das aplicações ∇g_i , $i = 1, \dots, m$ e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuos em torno de x^* , então a taxa de convergência é quadrática.*

Demonstração. A existência de uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* foi assegurada na Seção [2.2.1](#), tal que o Algoritmo **NMEP** é bem definido para qualquer ponto inicial $x^0 \in V(x^*)$. Do Lema [2.6](#), existe $M > 0$ tal que $\|H_k^{-1}\| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue,

portanto, do Lema [2.7](#) que

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|H_k^{-1}[F(x^k) - F(x^*) - H_k(x^k - x^*)]\| \\ &\leq M\|F(x^k) - F(x^*) - H_k(x^k - x^*)\| = o(\|x^k - x^*\|), \end{aligned}$$

o que prova a convergência local superlinear da sequência $\{x^k\}$. Ademais, se os Jacobianos das aplicações ∇g_i , $i = 1, \dots, m$, e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuos em torno de x^* , de modo análogo ao feito acima e levando em conta a segunda parte do Lema [2.7](#), obtemos a convergência quadrática de $\{x^k\}$. \square

No Capítulo [4](#) será apresentado um resultado de terminação finita no cenário mais amplo de problemas de quase-equilíbrio o qual também se aplica ao Algoritmo NMEP; veja página [57](#).

2.3 Aplicação ao problema de otimização multi-objetivo

Nesta seção aplicaremos os resultados obtidos ao problema de otimização multi-objetivo (MOP). Seja \mathbf{K} um subconjunto fechado, convexo e não vazio de \mathbb{R}^n e $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_P}$ uma aplicação dada por $\Psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_{m_P}(x))$. Lembre-se que o problema MOP consiste em

$$\min \Psi(x) \text{ sujeito a } x \in \mathbf{K}, \quad (2.27)$$

no sentido que, um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é uma solução de [\(2.27\)](#), chamado ponto Pareto fraco ótimo, se e somente se $x^* \in \mathbf{K}$ e não existe nenhum outro $x \in \mathbf{K}$ com $\psi_i(x) < \psi_i(x^*)$ para todo $i \in \{1, \dots, m_P\}$.

Ao longo desta seção assumiremos a seguinte hipótese clássica para métodos numéricos do tipo-Newton [\[54, 55\]](#).

Hipótese 2.5. (a) $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_P}$ é continuamente diferenciável e convexa.

(b) $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ tem a seguinte representação

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g^I(x) \leq 0\}$$

com $g^I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_I}$ duas vezes continuamente diferenciável e convexa.

Como apresentado no Capítulo [1](#), Seção [1.3.3](#), $\text{EP}(\mathbf{K}, f_\infty)$ com f_∞ dada por

$$f_\infty(x, y) := \max_{1 \leq i \leq m_P} \{\psi_i(y) - \psi_i(x)\}, \quad (2.28)$$

é a formulação usual de MOP como um problema de equilíbrio clássico. No entanto, f_∞ é não diferenciável o que impede uma aplicação direta do método proposto neste trabalho ao problema $\text{EP}(\mathbf{K}, f_\infty)$.

Deste modo, precisamos considerar uma aproximação diferenciável da bifunção f_∞ . De fato, seja $\mathcal{L}_c : \mathbb{R}^{m_P} \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_{++}$, dada por

$$\mathcal{L}_c(z) = c^{-1} \ln \left(\frac{1}{m_P} \sum_{i=1}^{m_P} e^{c z_i} \right) = c^{-1} \ln \left(\frac{e^{c z_1} + e^{c z_2} + \dots + e^{c z_{m_P}}}{m_P} \right). \quad (2.29)$$

Consideremos a bifunção $f_c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como uma aproximação de f_∞ definida da seguinte maneira:

$$f_c(x, y) := \mathcal{L}_c(\Psi(y) - \Psi(x)). \quad (2.30)$$

Proposição 2.8. *Dado $c \in \mathbb{R}_{++}$, as seguintes desigualdades valem*

$$f_\infty(x, y) - c^{-1} \ln(m_P) \leq f_c(x, y) \leq f_\infty(x, y).$$

Demonstração. Utilizando (2.28), (2.29) e (2.30), segue que

$$\begin{aligned} f_\infty(x, y) - c^{-1} \ln(m_P) &= c^{-1} \max_{1 \leq i \leq m_P} \{c(\psi_i(y) - \psi_i(x))\} - c^{-1} \ln(m_P) \\ &= c^{-1} \left[\ln \left(\max_{1 \leq i \leq m_P} \{e^{c(\psi_i(y) - \psi_i(x))}\} \right) - \ln(m_P) \right] \\ &\leq c^{-1} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^{m_P} e^{c(\psi_i(y) - \psi_i(x))} \right) - \ln(m_P) \right] \\ &= f_c(x, y) \\ &= c^{-1} \left[\ln \left(\frac{1}{m_P} \sum_{i=1}^{m_P} e^{c(\psi_i(y) - \psi_i(x))} \right) \right] \\ &\leq c^{-1} \left[\ln \left(\max_{1 \leq i \leq m_P} \{e^{c(\psi_i(y) - \psi_i(x))}\} \right) \right] \\ &= f_\infty(x, y), \end{aligned}$$

e o resultado desejado está provado. \square

Ressaltamos que uma expressão similar à equação (2.29) é dada por BOYD e VANDENBERGHE [56, p.72]. A bifunção de equilíbrio f_c satisfaz a Hipótese 2.1 (a) uma vez que a função \mathcal{L}_c é convexa e suave. Pela Proposição 2.8, aplicando o Algoritmo NMEP para resolver $\text{EP}(\mathbf{K}, f_c)$, encontramos uma solução Pareto-fraco para MOP. Na Seção 2.4 um exemplo numérico será reportado.

Destacamos que nosso método não utiliza escalarização, uma estratégia popular para resolver MOPs. Para mais detalhes sobre o problema de otimização multiob-

jetivo, veja [46, 47] e suas referências.

2.4 Experiências numéricas

Nesta seção ilustramos a performance do Algoritmo **NMEP** por meio de dois problemas. O primeiro problema é um EP o qual não é nem um problema de equilíbrio de Nash nem um problema de desigualdade variacional. Neste primeiro exemplo comparamos nosso algoritmo com o Método do Subgradiente Projetado Inexato (IPSM) introduzido por SANTOS e SCHEIMBERG [14] e com o Método do Lagrangeano Aumentado [57] combinado com técnicas do tipo-Newton (ALM-N) desenvolvido por NASRI *et al.* [19]. Em seguida, utilizamos a abordagem sugerida na Seção 2.3 para resolver um problema de otimização multiobjetivo.

Nos testes numéricos desta seção foram utilizadas diferentes bifunções auxiliares h satisfazendo a Hipótese 2.2. O Algoritmo **NMEP** associado com a bifunção auxiliar $h(x, y) = \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$ encontra-se denotado por **NMEP-N** enquanto que o Algoritmo **NMEP** associado com a bifunção auxiliar $h(x, y) = \frac{\alpha}{2} \cosh(y - x) = \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \cosh(y_i - x_i)$ encontra-se denotado por **NMEP-C**. Os algoritmos foram implementados no SCILAB 5.5.2 e executados em um computador Intel Core i5 com 8 GB RAM. Calculamos y^k utilizando a sub-rotina `fmincon` no esquema **NMEP-C** e a sub-rotina `qld` no esquema **NMEP-N**. O problema de programação linear do *Passo 2* foi resolvido utilizando-se a sub-rotina `linpro`. Para o *Passo 3* utilizamos a sub-rotina `linsolve`. O critério de parada adotado em nossos experimentos foi $\|y^k - x^k\| < \varepsilon$.

Exemplo 2.2. [14, 19, Exemplos 4.3] Considere os dois problemas de equilíbrio $EP(\mathbf{K}, f_j)$, $j \in \{1, 2\}$, onde

$$\mathbf{K} = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \sum_{i=1}^5 x_i \geq -1 \text{ com } -5 \leq x_i \leq 5, i = 1, \dots, 5 \right\}$$

e a bifunção f_j é da forma

$$f_j(x, y) = \langle P_j x + Qy + q, y - x \rangle$$

onde as matrizes P_1 , P_2 e Q e o vetor q são dados por

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

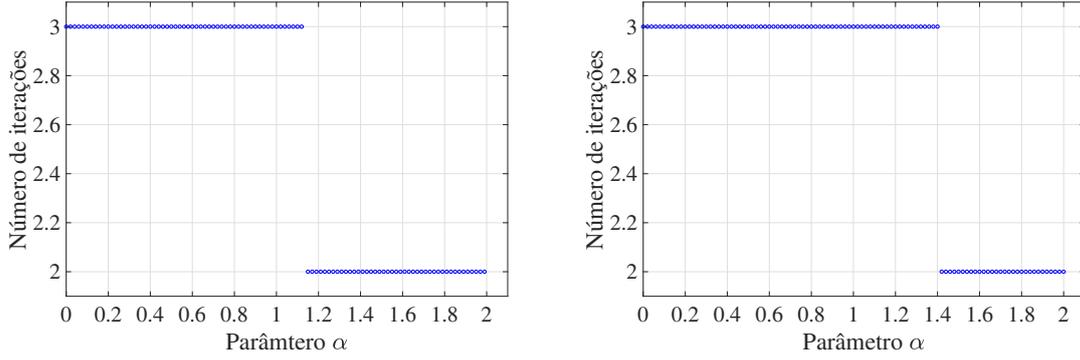


Figura 2.1: Número de iterações *versus* parâmetro α para $P = P_1$ (esquerda) e $P = P_2$ (direita) com $x^0 = (1, 3, 1, 1, 2)$.

Tabela 2.1: Resultados numéricos referente ao Exemplo 2.2 utilizando $x^0 = (1, 3, 1, 1, 2)^T$ e $\varepsilon = 10^{-3}$.

Esquema		Problema 1 (P_1)		Problema 2 (P_2)	
		iter.(k)	cpu(s)	iter.(k)	cpu(s)
NMEP-N	$\alpha^* = 1.65$	1	0.0015	1	0.0016
NMEP-C	$\alpha^* = 1.65$	4	0.3295	4	0.3508

$$Q = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que [14, 19] consideram apenas o ponto inicial $x^0 = (1, 3, 1, 1, 2)$, nós avaliamos o número de iterações do Algoritmo **NMEP-N** *versus* o parâmetro α no intervalo $[10^{-8}, 2]$, e adotamos $\alpha^* = 1,65$ em nossos testes (veja Figura 2.1).

Na Tabela 2.1, apresentamos uma resumo do comportamento do Algoritmo **NMEP** na forma **NMEP-N** e **NMEP-C** adotando $x^0 = (1, 3, 1, 1, 2)$ e $\varepsilon = 10^{-3}$. O número de iterações, $\text{iter}(k)$, e o tempo de cpu estão informados. Note que o comportamento do esquema **NMEP-C** é desvantajoso em comparação com o esquema **NMEP-N** devido ao uso da sub-rotina `fmincon`.

Na Tabela 2.2, comparamos o comportamento do Algoritmo **NMEP** com os esquemas **IPSM** [14] e **ALM-N** [19]. Foram utilizados 100 pontos iniciais aleatórios de uma distribuição uniforme na caixa $[-5, 5]^5$ e adotado $\varepsilon = 10^{-10}$ no critério de parada. A média do número de iterações e do tempo de cpu estão informados. A comparação com os esquemas **IPSM** e **ALMN-N** aponta um melhor comportamento do Algoritmo **NMEP** em termos de tempo computacional e número de iterações.

Tabela 2.2: Resultados numéricos referente ao Exemplo 2.2 com pontos iniciais aleatórios na caixa $[-5, 5]^5$ e $\varepsilon = 10^{-10}$.

Esquema	Problema 1 (P_1)		Problema 2 (P_2)	
	med.(k)	cpu(s)	med.(k)	cpu(s)
NMEP-N $\alpha^* = 1.65$	2	0.0029	2	0.0028
IPSM	2299	0.2052	6608	0.2854
ALM-N	4	0.0168	4	0.0122

Tabela 2.3: Resultados numéricos referente ao Exemplo 2.3.

Esquema	med.(k)	cpu(s)	$\ F(x^*)\ $
NMEP-N	34,54	1,7829	3,9372e-10
NMEP-C	21,62	1,2877	1,2171e-10

Exemplo 2.3. [47, Exemplo 1] Considere o problema de otimização multiobjetivo definido pelas seguintes funções

$$\psi_1(x) = 2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \quad e \quad \psi_2(x) = 9x_1 - (x_2 - 1)^2,$$

e o conjunto de restrições dado por

$$\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -20 \leq x \leq 20, x_1 - 3x_2 + 10 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 \leq 225\}.$$

O conjunto solução Pareto-ótimo é dado por $x_1^* = -2,5$ e $x_2^* \in [2,5, 14,79]$. Além disso, o *front* Pareto-ótimo é dado por $\{(\lambda, -0,25 - \lambda) \mid \lambda \in [24,5, 212,4141]\}$.

Resolvemos o problema utilizando 100 pontos iniciais aleatórios tomados em uma distribuição uniforme na caixa $[-10, 10]^2$. Os parâmetros adotados foram: $c = 10$, $\alpha = 0,01$ e $\varepsilon = 10^{-8}$. Na Tabela 2.3 estão informados: média do número de iterações, tempo de cpu e média de $\|F(x^*)\|$ na última iteração o que nos dá uma medida da “otimalidade” do ponto encontrado.

As soluções encontradas utilizando o esquema **NMEP-N** estão exibidas na Figura 2.2. Observa-se que as soluções computadas estão bem distribuídas no conjunto solução do problema. Na Figura 2.3, apresentamos o conjunto de pontos não dominados (*front* Pareto-ótimo) e as soluções obtidas pelo esquema **NMEP-N**.

De acordo com os testes numéricos exibidos acima, nosso método se mostrou competitivo em comparação com aqueles apresentados em [14, 19], além de ser capaz de encontrar uma solução com alta precisão.

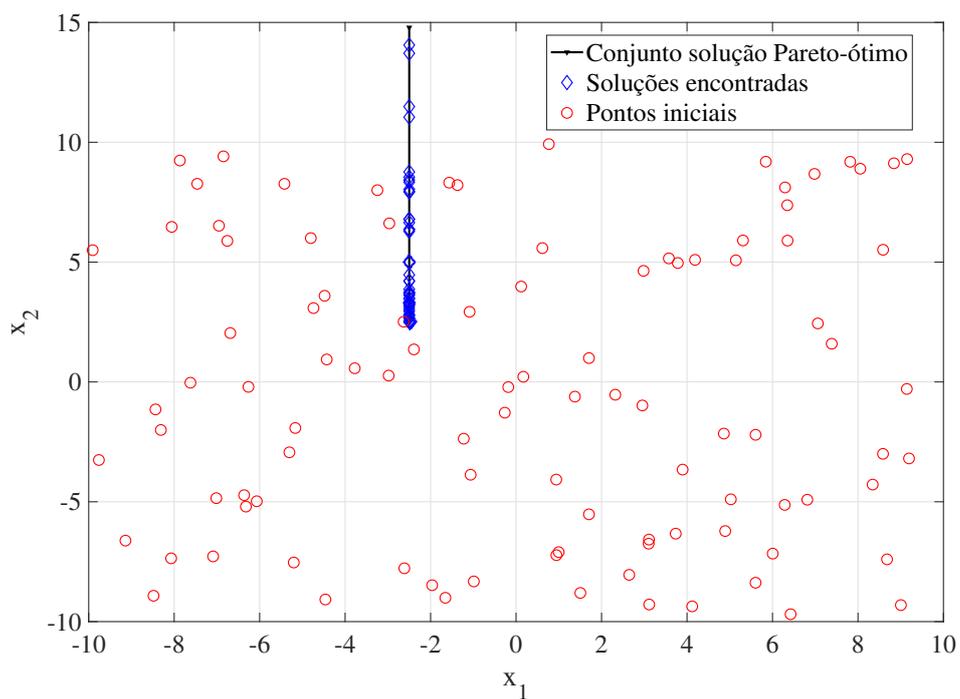


Figura 2.2: Resultados numéricos referente ao Exemplo 2.3 utilizando o esquema NMEP-N - Soluções computadas.

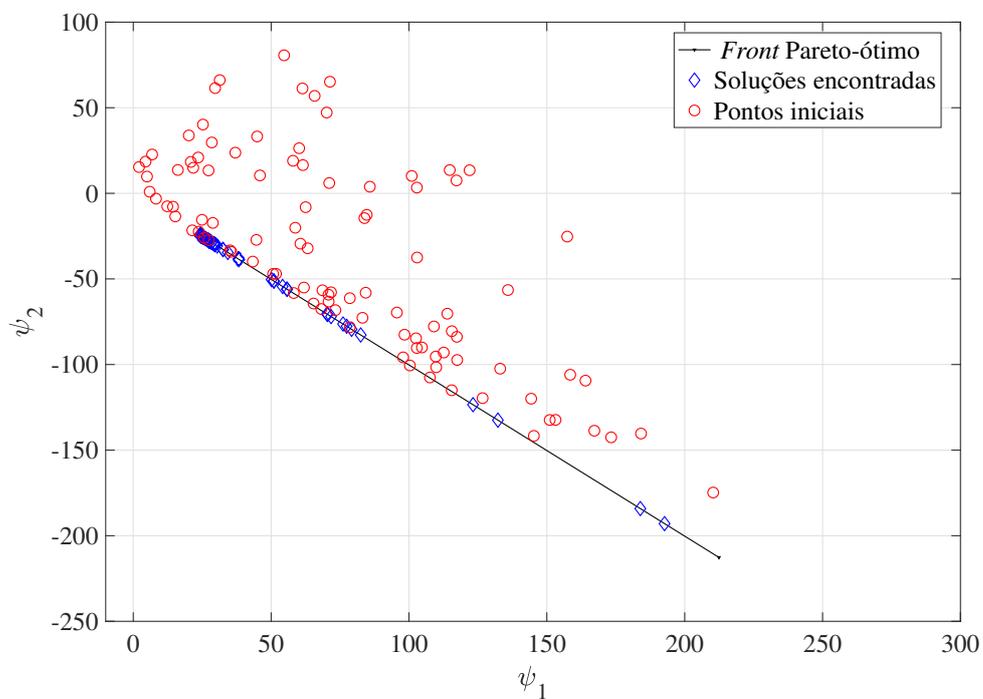


Figura 2.3: Resultados numéricos referente ao Exemplo 2.3 utilizando o esquema NMEP-N - Espaço objetivo.

Capítulo 3

Um método do tipo-Newton global para o Problema de Equilíbrio clássico

Como exposto no Capítulo 2, o Algoritmo **NMEP** possui convergência apenas local no sentido de que é requerido pontos iniciais próximos a uma solução para o mesmo convergir. Neste capítulo propomos uma globalização do Algoritmo **NMEP** baseado no trabalho de DREVES *et al.* [35] para equilíbrio de Nash. A principal ferramenta é o uso de uma função *gap*^a como função de mérito para a globalização.

Os resultados contidos neste capítulo foram publicados na forma de trabalho completo nos anais do *XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*.

3.1 O método proposto

Ao longo deste capítulo, a menos que explicitamente afirmado o contrário, assumiremos que as Hipóteses 2.1 e 2.2 estão satisfeitas.

Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\varphi(x) := -\Phi(x, y(x)) = -\min_{y \in \mathbf{K}} \Phi(x, y). \quad (3.1)$$

Esta função terá um papel crucial no processo de globalização do algoritmo. É interessante mencionar que embora a aplicação y não seja necessariamente diferenciável como observado no Capítulo 2, o mesmo não ocorre com a função φ . Temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1. *A função φ é continuamente diferenciável e seu gradiente é dado*

^aVeja Observação 3.1, página 40.

por

$$\nabla\varphi(x) = -\nabla_x\Phi(x, y(x)) = -\nabla_x f(x, y(x)) - \nabla_x h(x, y(x)).$$

Demonstração. Segue da Proposição 1.5 (b) tomando $\psi(x, y) = -\Phi(x, y)$. \square

Considere duas bifunções auxiliares distintas, digamos h_A e h_B , e as suas respectivas aplicações associadas

$$\Phi_A(x, y) := f(x, y) + h_A(x, y),$$

$$y_A(x) := \arg \min\{\Phi_A(x, y) \mid y \in \mathbf{K}\},$$

$$F_A(x) := y_A(x) - x,$$

$$\varphi_A(x) := -\Phi_A(x, y_A(x)) = -\min_{y \in \mathbf{K}} \Phi_A(x, y),$$

e Φ_B, y_B, F_B e φ_B definidas de modo análogo.

A função φ_{AB} dada por

$$\varphi_{AB}(x) := \varphi_A(x) - \varphi_B(x) \tag{3.2}$$

terá um papel fundamental em nossa globalização.

Temos o seguinte lema.

Lema 3.1. *A desigualdade*

$$h_B(x, y_B(x)) - h_A(x, y_B(x)) \leq \varphi_{AB}(x) \leq h_B(x, y_A(x)) - h_A(x, y_A(x))$$

vale para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. De fato, segue da definição (3.1) que

$$\varphi_B(x) = -\Phi_B(x, y_B(x)) = -\min_{y \in K} \Phi_B(x, y) \geq -\Phi_B(x, y_A(x)).$$

Logo,

$$\varphi_{AB}(x) = \varphi_A(x) - \varphi_B(x) \leq -\Phi_A(x, y_A(x)) + \Phi_B(x, y_A(x)) = h_B(x, y_A(x)) - h_A(x, y_A(x)).$$

A desigualdade restante prova-se de modo análogo. \square

Corolário 3.1. *Seja A e B matrizes quadradas de ordem n tal que A e $B - A$ são simétricas positivas definidas. Considere $h_A(x, y) := \|y - x\|_A^2$ (e h_B definido de modo análogo). Neste caso, temos que*

$$\|y_B(x) - x\|_{B-A}^2 \leq \varphi_{AB}(x) \leq \|y_A(x) - x\|_{B-A}^2,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.2. *Sejam A, B, h_A e h_B satisfazendo as hipóteses do Corolário 3.1. Então, as seguintes afirmações são válidas:*

- (a) $\varphi_{AB}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
- (b) x^* resolve $EP(\mathbf{K}, f)$ se, e somente se, $\varphi_{AB}(x^*) = 0$;
- (c) φ_{AB} é continuamente diferenciável e seu gradiente é dado por

$$\nabla \varphi_{AB}(x) = \nabla_x \Phi_B(x, y_B(x)) - \nabla_x \Phi_A(x, y_A(x)).$$

Demonstração. (a) Segue diretamente da desigualdade à esquerda no Corolário 3.1.
 (b) Segue da Proposição 2.2 e do Corolário 3.1.
 (c) Segue da Proposição 3.1 e da igualdade (3.2). □

Observação 3.1. *Uma função satisfazendo os itens (a) e (b) da Proposição 3.2 será frequentemente referenciada por nós como uma função gap associada ao problema de equilíbrio.*

Como veremos adiante, o algoritmo proposto na próxima seção ou encontra uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$ ou um ponto estacionário da função φ_{AB} . Para garantir que um ponto estacionário seja solução do problema, devemos acrescentar alguma hipótese sobre os seus dados e sobre as matrizes A e B . Nesta direção, considere a seguinte hipótese:

Hipótese 3.1. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y_A(x) \neq y_B(x)$, a desigualdade*

$$\langle (\nabla_x f(x, y_B(x)) + \nabla_y f(x, y_B(x))) - (\nabla_x f(x, y_A(x)) + \nabla_y f(x, y_A(x))), y_B(x) - y_A(x) \rangle > 0$$

vale.

Lema 3.2. *Considere A, B, h_A e h_B satisfazendo as hipóteses do Corolário 3.1. Além disso, assuma válida a Hipótese 3.1. Então todo ponto estacionário da função φ_{AB} é solução do problema de equilíbrio $EP(\mathbf{K}, f)$.*

Demonstração. Seja x um ponto estacionário da função φ_{AB} . Da Proposição 3.2

temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \varphi_{AB}(x) \\
&= \nabla_x \Phi_B(x, y_B(x)) - \nabla_x \Phi_A(x, y_A(x)) \\
&= \nabla_x f(x, y_B(x)) - \nabla_x f(x, y_A(x)) + \nabla_x h_B(x, y_B(x)) - \nabla_x h_A(x, y_A(x)) \\
&= \nabla_x f(x, y_B(x)) - \nabla_x f(x, y_A(x)) - \nabla_y h_B(x, y_B(x)) + \nabla_y h_A(x, y_A(x)) \\
&= \nabla_x f(x, y_B(x)) + \nabla_y f(x, y_B(x)) - \nabla_x f(x, y_A(x)) - \nabla_y f(x, y_A(x)) \\
&\quad - \nabla_y f(x, y_B(x)) + \nabla_y f(x, y_A(x)) - \nabla_y h_B(x, y_B(x)) + \nabla_y h_A(x, y_A(x)) \\
&= \nabla_x f(x, y_B(x)) + \nabla_y f(x, y_B(x)) - \nabla_x f(x, y_A(x)) - \nabla_y f(x, y_A(x)) \\
&\quad + \nabla_y \Phi_A(x, y_A(x)) - \nabla_y \Phi_B(x, y_B(x)). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Por outro lado, da definição de $y_A(x)$, temos a seguinte condição de otimalidade

$$\langle \nabla_y \Phi_A(x, y_A(x)), z - y_A(x) \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \mathbf{K}. \tag{3.4}$$

De modo análogo,

$$\langle \nabla_y \Phi_B(x, y_B(x)), \tilde{z} - y_B(x) \rangle \geq 0 \quad \forall \tilde{z} \in \mathbf{K}. \tag{3.5}$$

Pondo $z = y_B(x)$ em (3.4), $\tilde{z} = y_A(x)$ em (3.5) e somando as duas desigualdades obtemos

$$\langle \nabla_y \Phi_B(x, y_B(x)) - \nabla_y \Phi_A(x, y_A(x)), y_B(x) - y_A(x) \rangle \leq 0.$$

Tomando o produto interno em (3.3) com respeito a $y_B(x) - y_A(x)$ e considerando a equação acima, obtemos

$$\langle (\nabla_x f(x, y_B(x)) + \nabla_y f(x, y_B(x))) - (\nabla_x f(x, y_A(x)) + \nabla_y f(x, y_A(x))), y_B(x) - y_A(x) \rangle \leq 0.$$

Logo, da Hipótese 3.1, temos que $y_A(x) = y_B(x)$. Levando em conta essa igualdade em (3.3) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_y h_B(x, y_A(x)) - \nabla_y h_A(x, y_A(x)) \\
&= 2(B - A)(y_A(x) - x).
\end{aligned}$$

O que implica que $y_A(x) = x$ uma vez que $B - A$ é uma matriz simétrica positiva definida. O resultado segue da Proposição 2.2. \square

3.2 O algoritmo

Utilizando os resultados e notações do Capítulo 2 e da seção anterior, estamos agora em condições de estabelecer a globalização proposta para o Algoritmo NMEP.

Algoritmo GNMEP

Passo 0: Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $s > 1$, $\rho > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $\sigma \in (0, 1)$ e faça $k := 0$.

Passo 1: Se $\|F_B(x^k)\| = \|y_B(x^k) - x^k\| = 0$, pare;

Passo 2: Calcule $H_k \in \partial_C F_B(x^k)$.

(a) Encontre uma solução $d^k \in \mathbb{R}^n$ do sistema linear

$$H_k d^k = -F_B(x^k), \quad (3.6)$$

caso exista. Se não existe, tome $d^k := -\nabla\varphi_{AB}(x^k)$ e vá para o *Passo 3*, caso contrário, vá para (b).

(b) Se

$$\varphi_{AB}(x^k + d^k) \leq \tau\varphi_{AB}(x^k), \quad (3.7)$$

tome $x^{k+1} := x^k + d^k$, $k = k + 1$ e volte ao *Passo 1*. Caso contrário, vá para (c).

(c) Se d^k não satisfaz a condição

$$\langle \nabla\varphi_{AB}(x^k), d^k \rangle \leq -\rho\|d^k\|^s, \quad (3.8)$$

tome $d^k := -\nabla\varphi_{AB}(x^k)$. Vá para o *Passo 3*.

Passo 3: Calcule $t_k := \max\{2^{-l}; l = 0, 1, 2, \dots\}$ tal que

$$\varphi_{AB}(x^k + t_k d^k) \leq \varphi_{AB}(x^k) + \sigma t_k \langle \nabla\varphi_{AB}(x^k), d^k \rangle. \quad (3.9)$$

Defina $x^{k+1} := x^k + t_k d^k$, $k = k + 1$ e volte ao *Passo 1*.

3.2.1 Propriedades de convergência

Teorema 3.1. *Suponha válida a Hipótese 2.3 para todo $x \in \mathbf{K}$. Ademais, considere A , B , h_A e h_B satisfazendo as hipóteses do Corolário 3.1 e assuma a Hipótese 3.1. Então, ou o Algoritmo GNMEP para em uma solução do problema de equilíbrio, ou todo ponto de acumulação x^* da sequência gerada por ele é uma solução de EP(\mathbf{K}, f).*

Demonstração. A prova segue os mesmos passos de [35, Teorema 3.2]. Nós a exibimos aqui por questão de completude.

Se o algoritmo para no *Passo 1* então $\{x^k\}$ é uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$ por conta da Proposição 2.2. Caso contrário, considere uma subsequência $\{x^k\}$ convergindo para x^* . Se, para um conjunto infinito de índices na sequência $\{x^k\}$, tivermos $d^k = -\nabla\varphi_{AB}(x^k)$ então, por argumentos padrão, x^* é um ponto estacionário de φ_{AB} e portanto, pelo Lema 3.2, x^* é uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$.

Suponha então que d^k é sempre obtido resolvendo-se a equação (3.6). Se (3.7) vale para uma quantidade infinita de índices ganhamos que $\varphi_{AB}(x^*) = 0$ uma vez que φ_{AB} é contínua, $\varphi_{AB}(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\tau \in (0, 1)$. Logo, pela Proposição 3.2, x^* é uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$. Suponha então que, além de d^k ser obtido resolvendo-se a equação (3.6), a condição (3.8) é sempre satisfeita. De (3.8) temos que $\|d^k\|^{s-1} \leq -\frac{1}{\rho} \langle \nabla\varphi_{AB}(x^k), \frac{d^k}{\|d^k\|} \rangle$ o que implica que a sequência $\{d^k\}$ é limitada uma vez que $x^k \rightarrow x^*$, $\nabla\varphi_{AB}$ é contínua e $s > 1$. Sem perda de generalidade, suponha que $d^k \rightarrow d^*$.

Suponha $d^* \neq 0$. De (3.8) e (3.9), temos que $\varphi_{AB}(x^k + t_k d^k) - \varphi_{AB}(x^k) \leq \sigma t_k \langle \nabla\varphi_{AB}(x^k), d^k \rangle < 0$, e como $\varphi_{AB}(x^k + t_k d^k) - \varphi_{AB}(x^k) \rightarrow 0$, ganhamos que

$$t_k \langle \nabla\varphi_{AB}(x^k), d^k \rangle \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Suponha que $t_k \rightarrow 0$. Novamente de (3.9), temos

$$\frac{\varphi_{AB}(x^k + 2t_k d^k) - \varphi_{AB}(x^k)}{2t_k} > \sigma \langle \nabla\varphi_{AB}(x^k), d^k \rangle.$$

Passando o limite e levando em conta que φ_{AB} é continuamente diferenciável, temos $\langle \nabla\varphi_{AB}(x^*), d^* \rangle \geq \sigma \langle \nabla\varphi_{AB}(x^*), d^* \rangle$ o que nos dá $\langle \nabla\varphi_{AB}(x^*), d^* \rangle \geq 0$ ($\sigma \in (0, 1)$) contradizendo (3.8) uma vez que $d^* \neq 0$. Logo, existe $c > 0$ tal que $t_k > c$ para todo k . Contudo, (3.8) e (3.10) implicam que $d^k \rightarrow 0$ o que é uma contradição com $d^* \neq 0$. Portanto, $d^* = 0$.

Da Proposição 2.4, H_k é o Jacobiano de uma das C^1 -partes de F_B o que implica que $\{H_k\}$ é limitada. Já que $\|F_B(x^k)\| = \|H_k d^k\| \leq \|H_k\| \cdot \|d^k\|$ e $d^k \rightarrow 0$ segue que $F_B(x^*) = 0$ e, pela Proposição 2.2, x^* é uma solução de $\text{EP}(\mathbf{K}, f)$. \square

Para analisar as propriedades locais de convergência do Algoritmo **GNMEP** assumiremos a não-singularidade dos elementos do Jacobiano generalizado computável de F_B . A não-singularidade de tais elementos pode ser alcançada considerando a Hipótese 2.4, conforme Proposição 2.6.

O próximo lema é uma consequência direta dos Lemas 2.6 e 2.7. Veja também [32, 35].

Lema 3.3. *Seja x^* uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$. Suponha que as Hipóteses [2.3](#) e [2.4](#) valem em x^* . Considere $\{x^k\}$ uma sequência arbitrária convergindo para x^* . Se d^k é uma solução de $H_k d^k = -F_B(x^k)$, então temos que*

$$\|x^k + d^k - x^*\| = o(\|x^k - x^*\|).$$

Além disso, se os Jacobianos de todas as ∇g_i , $i = 1, \dots, m$, e de $\nabla_y \Phi$ são localmente Lipschitz contínuos, então

$$\|x^k + d^k - x^*\| = O(\|x^k - x^*\|^2).$$

Teorema 3.2. *Suponha válidas as hipóteses do Corolário [3.1](#). Seja x^* uma solução de $EP(\mathbf{K}, f)$ e suponha que x^* é um ponto de acumulação da sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo **GNMEP**. Se as Hipóteses [2.3](#) e [2.4](#) valem em x^* , então toda a sequência x^k converge para x^* . Além disso, existe k_0 tal que para $k \geq k_0$ o sistema [\(3.6\)](#) é sempre solúvel, a desigualdade [\(3.7\)](#) é satisfeita e $\{x^k\}$ converge superlinearmente para x^* . Ademais, se o Jacobiano de todas as ∇g_i , $i = 1, \dots, m$, e de $\nabla_y f$ são localmente Lipschitz contínuos, então a taxa de convergência é quadrática.*

Demonstração. A prova segue as ideias de [[35](#), Teorema 3.6]. De modo análogo a este, é possível provar que, sob as hipóteses acima, a sequência $\{x^k\}$ converge para x^* . Além disso, prova-se que existe $c > 0$ tal que

$$\frac{c}{2} \|x - x^*\| \leq \|F_B(x)\| \tag{3.11}$$

para todo x suficientemente próximo a x^* .

Quanto à segunda parte do Teorema temos que o sistema [\(3.6\)](#) é sempre solúvel para k suficientemente grande devido a Proposição [2.7](#). Provemos agora que a desigualdade [\(3.7\)](#) é sempre satisfeita para k grande o suficiente. Seja $L > 0$ a constante de Lipschitz local de F_A em torno de x^* (a qual existe devido F_A ser PC^1 , logo localmente Lipschitz contínua). Do Corolário [3.1](#) e do Lema [3.3](#) temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi_{AB}(x^k + d^k)} &\stackrel{\text{Corolário } \a href="#">3.1}}{\leq} \|F_A(x^k + d^k)\|_{B-A} \\ &= \|F_A(x^k + d^k) - F_A(x^*)\|_{B-A} \\ &\leq \sqrt{\|B - A\|} \cdot \|F_A(x^k + d^k) - F_A(x^*)\| \\ &\leq \sqrt{\|B - A\|} \cdot L \cdot \|x^k + d^k - x^*\| \\ &\stackrel{\text{Lema } \a href="#">3.3}}{=} o(\|x^k - x^*\|). \end{aligned}$$

Portanto, para k grande o suficiente, temos

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\varphi_{AB}(x^k + d^k)} &\leq \sqrt{\tau} \eta \frac{c}{2} \|x^k - x^*\| \\
 &\stackrel{(3.11)}{\leq} \sqrt{\tau} \eta \|F_B(x^k)\| \\
 &\leq \sqrt{\tau} \|F_B(x^k)\|_{B-A} \\
 &\stackrel{\text{Corolário 3.1}}{\leq} \sqrt{\tau} \sqrt{\varphi_{AB}(x^k)}
 \end{aligned}$$

onde η é uma constante da equivalência entre as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{B-A}$. Assim, (3.7) é satisfeito. Deste modo, para k suficientemente grande, o método globalizado coincide com o método local associado ao Algoritmo **NMEP** e portanto herda suas propriedades de taxa de convergência. \square

Capítulo 4

Um método do tipo-Newton para o Problema de Quase-Equilíbrio

Neste capítulo apresentaremos um método para resolver o Problema de Quase-Equilíbrio. Tal método consiste em uma extensão daquele apresentado no Capítulo 2 para o problema de equilíbrio clássico (EP). Em seguida, detalharemos um algoritmo implementável associado a ele e discutiremos sua convergência.

Lembramos que o Problema de Quase-Equilíbrio, $\text{QEP}(K, f)$, consiste em:

$$\text{Encontrar } x^* \in K(x^*) \text{ tal que } f(x^*, y) \geq 0 \text{ para todo } y \in K(x^*),$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma bifunção de equilíbrio, i.e., f é tal que $f(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é uma aplicação ponto-conjunto que descreve como a região viável muda juntamente com o ponto considerado. Quando não houver possibilidade de mau entendimento escreveremos apenas QEP em substituição a $\text{QEP}(K, f)$.

4.1 O método proposto

Ao longo deste trabalho assumiremos a seguinte hipótese padrão para uma abordagem numérica do tipo-Newton.

Hipótese 4.1. (a) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\nabla_y f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa.

(b) $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ é contínua e possui a seguinte representação:

$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(x, y) \leq 0\}$$

onde $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma bifunção duas vezes continuamente diferenciável

e tal que $g(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é convexa para todo $x \in \mathbb{R}^n$, i.e., cada função componente $g_i(x, \cdot)$, $i = 1, \dots, m$, é convexa em \mathbb{R}^n .

Observação 4.1. (i) A aplicação ponto-conjunto K dada pelas desigualdades acima, com as respectivas hipóteses de continuidade e convexidade, é sempre fechada; veja a Proposição [1.10](#). No entanto, ela não é necessariamente aberta;

(ii) Uma condição suficiente para garantir que a aplicação ponto-conjunto K seja aberta em um ponto x é que ela satisfaça a condição de qualificação de Slater, isto é, exista \bar{y} tal que $g(x, \bar{y}) < 0$; veja a Proposição [1.11](#).

(iii) O domínio da aplicação ponto-conjunto K , $\text{dom}(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid K(x) \neq \emptyset\}$, é aberto sob a Hipótese [4.1](#); veja a Proposição [1.7](#).

Do mesmo modo como definido no Capítulo [2](#), consideremos a bifunção regularizada $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) := f(x, y) + h(x, y) \quad (4.1)$$

onde a bifunção auxiliar h satisfaz a seguinte condição:

Hipótese 4.2. (a) $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\nabla_y h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis;

(b) $h(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é fortemente convexa para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(c) $\nabla_y h(x, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

A escolha mais direta para a bifunção auxiliar é $h(x, y) = \|y - x\|_P^2 := \langle y - x, P(y - x) \rangle$ onde P é uma matriz simétrica definida positiva. Veja também a Observação [2.1](#), página [17](#). Uma classe mais ampla de bifunções auxiliares satisfazendo a Hipótese [4.2](#) é dada por

$$h(x, y) = H(y) - H(x) - \langle \nabla H(x), y - x \rangle \quad (4.2)$$

onde $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é fortemente convexa e duas vezes continuamente diferenciável. Observe que $h(x, y) = \|y - x\|_P^2$ pode ser obtida de [\(4.2\)](#) com $H(x) = \|x\|_P^2$. Ressaltamos que em [\[28\]](#) é considerada uma regularização para [\(4.1\)](#) no cenário de funções gap^a para QEP com hipóteses similares à Hipótese [4.2](#).

De agora em diante, a menos que explicitamente afirmado o contrário, assumiremos que as Hipóteses [4.1](#) e [4.2](#) estão satisfeitas.

Temos a seguinte proposição:

^aVeja Observação [3.1](#), página [40](#).

Proposição 4.1. *O seguinte problema de otimização*

$$P(x) : \min_y \Phi(x, y) \quad \text{sujeito a } y \in K(x) \quad (4.3)$$

tem uma única solução ótima para cada $x \in \text{dom}(K)$, o qual denotaremos por $y(x)$.

Demonstração. Fixado $x \in \text{dom}(K)$, temos que a função $\Phi(x, \cdot)$ é fortemente convexa e o conjunto $K(x)$ é convexo, fechado e não-vazio. O resultado segue diretamente da Proposição 1.1. \square

Propriedades relevantes da aplicação y serão apresentadas abaixo. A proposição a seguir caracteriza as soluções do problema QEP(K, f).

Proposição 4.2. *Um ponto x é solução de QEP(K, f) se, e somente se, $y(x) = x$.*

Demonstração. Pelas Hipóteses 4.1 e 4.2, tem-se que $y(x) = x$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{(Prop. 1.3)}}{\leq} \langle \nabla_y f(x, x) + \nabla_y h(x, x), y - x \rangle \\ &= \langle \nabla_y f(x, x), y - x \rangle \quad \forall y \in K(x) \end{aligned}$$

o que é equivalente a dizer que x é uma solução de QEP(K, f). \square

Tendo em vista a Proposição 4.2, nosso objetivo consiste em desenvolver um método do tipo-Newton para encontrar um zero da aplicação $F : \text{dom}(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(x) := y(x) - x. \quad (4.4)$$

Proposição 4.3. *A aplicação $y : \text{dom}(K) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$y(x) := \arg \min_y \{\Phi(x, y) \mid y \in K(x)\}$$

é contínua.

Demonstração. As Hipóteses 4.1 (a) e 4.2 (a-b) implicam que a aplicação $\Phi(x, \cdot)$ é (fortemente) convexa para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixado e contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pela Hipótese 4.1 (b) a aplicação ponto-conjunto K é contínua com $K(x)$ convexo and não-vazio para todo $x \in \text{dom}(K)$. A Proposição 4.1 mostra que o conjunto $\mathcal{Y}(x) := \{z \in K(x) \mid \inf_{y \in K(x)} \Phi(x, y) = \Phi(x, z)\}$ possui um único elemento para cada $x \in \text{dom}(K)$, a saber $y(x)$. Portanto, a aplicação y vista com uma aplicação ponto-conjunto é contínua pelo Lema 1.1. Segue então que a aplicação ponto-ponto y é contínua. \square

Embora a aplicação y seja contínua, ela não é necessariamente diferenciável. Veja isto no exemplo abaixo o qual é uma ligeira modificação de [28, Exemplo 1].

Exemplo 4.1. Considere QEP com $n = 1$, a bifunção $f(x, y) = x(y - x)$ e a aplicação ponto-conjunto $K(x) = [2x - 1, 2x] = [-1, 0] + 2x$.

Tomando $h(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)^2$, tem-se que a aplicação y é dada por

$$y(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } x \leq 0 \\ 0 & , \text{ se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & , \text{ se } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esta aplicação é contínua mas não é diferenciável. Como pode ser visto na Figura 4.1, o conjunto solução deste problema é o conjunto $\{0, 1\}$ (cf. Proposição 4.2).

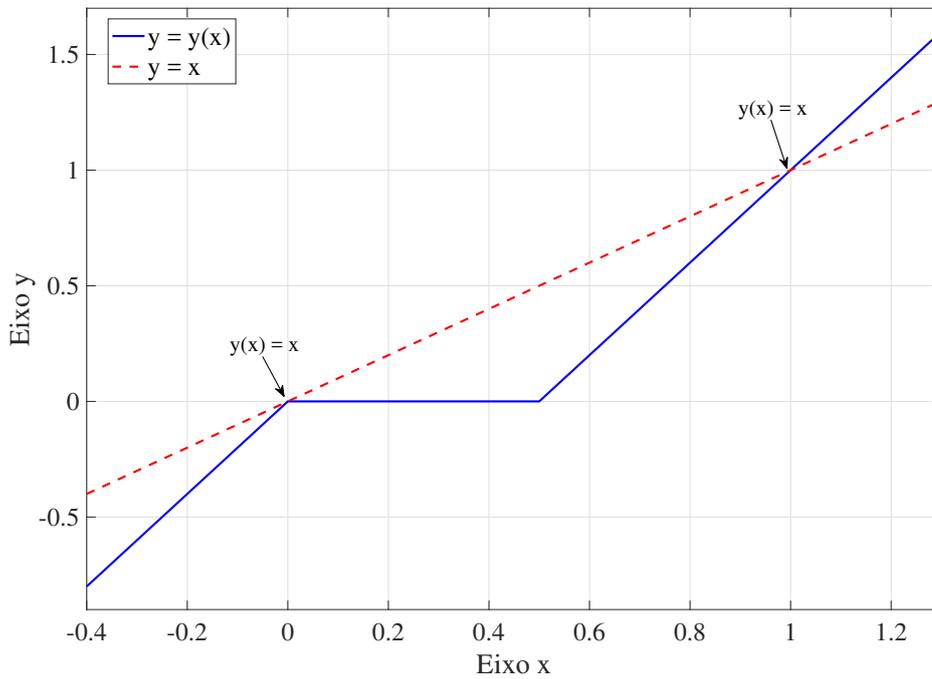


Figura 4.1: Gráfico da aplicação $y(\cdot)$ referente ao Exemplo 4.1.

Como veremos adiante, apesar da aplicação y não ser necessariamente diferenciável, é possível impor condições em nosso problema sob as quais y (e portanto F) torna-se uma aplicação continuamente diferenciável por partes (ou PC^1); veja Definição 1.2, página 7. Como observado no Capítulo 2, para aplicações PC^1 existe uma noção de Jacobiano generalizado computável [32, 39, 51] que será fundamental no desenho de nosso método do tipo-Newton.

De modo análogo como tratado no Capítulo 2, considere o sistema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) do problema (4.3)

$$\begin{aligned} \nabla_y \Phi(x, y) + \nabla_y g(x, y) \lambda &= 0 \\ \lambda &\geq 0, \quad g(x, y) \leq 0, \quad \langle \lambda, g(x, y) \rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

e seja $\mathcal{M}(x)$ o conjunto dos multiplicadores de Lagrange, isto é,

$$\mathcal{M}(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid (y(x), \lambda) \text{ satisfaz (4.5)}\}.$$

A seguinte família de subconjuntos de $I_0(x) := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(x, y(x)) = 0\}$, dada por

$$\mathcal{B}(x) = \{\mathcal{J} \subseteq I_0(x) \mid \{\nabla_y g_i(x, y(x))\}_{i \in \mathcal{J}} \text{ é linearmente independente e}$$

$$\exists \lambda \in \mathcal{M}(x) \text{ tal que } \lambda_i = 0 \text{ para todo } i \in I_0(x) \setminus \mathcal{J}\},$$

tem uma participação crucial em nossa análise.

Lema 4.1. *Se $\mathcal{M}(x) \neq \emptyset$ então $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Segue os mesmos passos do Lema 2.1. □

A hipótese a seguir pode ser vista como uma generalização da Hipótese 2.3 utilizada nos Capítulos 2 e 3 no contexto de problemas de equilíbrio clássico. Ela foi considerada em [59, 60] no cenário de otimização paramétrica e garante a existência de multiplicadores de Lagrange [43, 52].

Hipótese 4.3. *Considere $x \in \text{dom}(K)$ e o problema de otimização $P(x)$. A condição de qualificação das restrições de posto constante (CRCQ) é satisfeita em $(x, y(x))$, isto é, existe uma vizinhança V de $(x, y(x))$ tal que para qualquer conjunto $\mathcal{J} \subseteq I_0(x)$, o conjunto*

$$\{\nabla_y g_i(z, w) \mid i \in \mathcal{J}\}$$

possui o mesmo posto (o qual depende de \mathcal{J}) para todo $(z, w) \in V$.

Note que a condição CRCQ é sempre satisfeita no caso de restrições lineares. Esta condição é também mais fraca que a condição de qualificação de independência linear das restrições.

O resultado apresentado no próximo lema é padrão em trabalhos envolvendo a condição CRCQ (Hipótese 4.3).

Lema 4.2. *Seja $x^* \in \text{dom}(K)$. Suponha que a Hipótese 4.3 vale em $(x^*, y(x^*))$. Então existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que, para todo $x \in V(x^*)$, as seguintes afirmações se verificam:*

- (a) *A Hipótese 4.3 é satisfeita em $(x, y(x))$;*
- (b) $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}(x^*)$.

Demonstração. Segue os mesmos passos do Lema 2.2. □

Exemplo 4.1 (continuação) Considere QEP com $n = 1$, a bifunção $f(x, y) = x(y - x)$ e a aplicação ponto conjunto $K(x) = [2x - 1, 2x]$.

Tomando $g(x, y) = (2x - y - 1, y - 2x)$ e $h(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)^2$ temos que o conjunto $\mathcal{B}(x)$ é dado por

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \{\{2\}\} & , \text{ se } x < 0 \\ \{\{2\}, \emptyset\} & , \text{ se } x = 0 \\ \{\emptyset\} & , \text{ se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \{\{1\}, \emptyset\} & , \text{ se } x = \frac{1}{2} \\ \{\{1\}\} & , \text{ se } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A seguir definiremos uma aplicação que nos permitirá provar a propriedade PC¹ da aplicação y bem como deduzir expressões para o jacobiano de suas C¹-partes. Esta aplicação é uma generalização para o cenário QEP daquela apresentada em (2.6), página 21.

Seja $\mathcal{J} \subseteq I_m = \{1, \dots, m\}$ e $\hat{\mathcal{J}} = I_m \setminus \mathcal{J}$. Considere a aplicação $\Psi_{\mathcal{J}} : \mathbb{R}^{2n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ definida por

$$\Psi_{\mathcal{J}}(x, y, \lambda) := \begin{pmatrix} \nabla_y \Phi(x, y) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) \\ g_{\mathcal{J}}(x, y) \\ \lambda_{\hat{\mathcal{J}}} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

onde a partição $(\mathcal{J}, \hat{\mathcal{J}})$ de I_m é usada para separar os vetores λ e $g(x, y)$ em $\lambda = (\lambda_{\mathcal{J}}, \lambda_{\hat{\mathcal{J}}})$ e $g(x, y) = (g_{\mathcal{J}}(x, y), g_{\hat{\mathcal{J}}}(x, y))$, respectivamente.

Observe que a aplicação $\Psi_{\mathcal{J}}$ é continuamente diferenciável, uma vez que $\nabla_y \Phi$ é continuamente diferenciável e g é duas vezes continuamente diferenciável. Tomando $z = (x, y)$, temos que o Jacobiano de $\Psi_{\mathcal{J}}$ em (z, λ) é dado, após alguma possível reordenação de índices, por

$$J \Psi_{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} \nabla_{yx}^2 \Phi(z) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla_{yx}^2 g_i(z) & \nabla_{yy}^2 \Phi(z) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla_{yy}^2 g_i(z) & \nabla_y g_{\mathcal{J}}(z) & 0 \\ (\nabla_x g_{\mathcal{J}}(z))^T & (\nabla_y g_{\mathcal{J}}(z))^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(|\hat{\mathcal{J}}|) \end{bmatrix},$$

e o Jacobiano de $\Psi_{\mathcal{J}}$ com respeito às variáveis (y, λ) é

$$J_{(y, \lambda)} \Psi_{\mathcal{J}}(z, \lambda) = \begin{bmatrix} \nabla_{yy}^2 \Phi(z) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i \nabla_{yy}^2 g_i(z) & \nabla_y g_{\mathcal{J}}(z) & 0 \\ (\nabla_y g_{\mathcal{J}}(z))^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(|\hat{\mathcal{J}}|) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

onde $I(|\hat{\mathcal{J}}|)$ é a notação para a matriz identidade de ordem $|\hat{\mathcal{J}}|$.

Os próximos dois lemas são extensões ao cenário QEP dos Lemas 2.3 e 2.4. Eles são necessários para demonstrar que y é uma aplicação PC^1 .

Lema 4.3. *Seja $x \in \text{dom}(K)$ e suponha que a Hipótese 4.3 vale em $(x, y(x))$. Então, para qualquer $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$, existe um único vetor $\lambda \in \mathcal{M}(x)$ tal que $\Psi_{\mathcal{J}}(x, y(x), \lambda) = 0$.*

Lema 4.4. *Considere $x^* \in \text{dom}(K)$ e suponha que a Hipótese 4.3 seja satisfeita em $(x^*, y^* = y(x^*))$. Seja $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ fixado e seja $\lambda^* \in \mathcal{M}(x^*)$ o correspondente (único) multiplicador de Lagrange dado no Lema 4.3 tal que $\Psi_{\mathcal{J}}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0$. Então, existem vizinhanças abertas $V^{\mathcal{J}}(x^*)$ e $V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$, bem como uma aplicação continuamente diferenciável $(y^{\mathcal{J}}(\cdot), \lambda^{\mathcal{J}}(\cdot)) : V^{\mathcal{J}}(x^*) \rightarrow V^{\mathcal{J}}(y^*, \lambda^*)$ tal que $y^{\mathcal{J}}(x^*) = y^*$, $\lambda^{\mathcal{J}}(x^*) = \lambda^*$ e, para todo $x \in V^{\mathcal{J}}(x^*)$,*

$$\Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) = 0, \quad (4.8)$$

e

$$\begin{bmatrix} J y^{\mathcal{J}}(x) \\ J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \end{bmatrix} = -[J_{(y,\lambda)} \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x))]^{-1} \cdot J_x \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)). \quad (4.9)$$

A proposição abaixo prova a propriedade PC^1 da aplicação y .

Proposição 4.4. *Seja $x^* \in \text{dom}(K)$ dado. Suponha que a Hipótese 4.3 se verifica em $(x^*, y(x^*))$. Então, existe uma vizinhança V^* de x^* tal que a aplicação $y(\cdot)$ é uma aplicação PC^1 em V^* . Mais precisamente, em qualquer ponto $x \in V^*$ dado, a igualdade $y(x) = y^{\mathcal{J}}(x)$ vale para qualquer conjunto de índices $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$, onde $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é a aplicação definida no Lema 4.4.*

Demonstração. Segue os mesmos passos da Proposição 2.4 (página 23) tomando $V^* = \left(\bigcap_{\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)} V^{\mathcal{J}}(x^*) \right) \cap \text{dom}(K)$. Lembre-se que o conjunto $\text{dom}(K)$ é aberto conforme Observação 4.1. \square

Assim como no Capítulo 2, faremos uso do jacobiano generalizado computável da aplicação $y(\cdot)$ uma vez que esta aplicação não é necessariamente diferenciável. Recordamos que o jacobiano generalizado computável é definido por

$$\partial_C y(x) := \{J y^{\mathcal{J}}(x) \mid \mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)\},$$

onde $J y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é o jacobiano da aplicação $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$.

A próxima proposição nos fornece expressões para o jacobiano da aplicação $y^{\mathcal{J}}$. Estas expressões generalizam aquelas exibidas na Proposição 2.5 no contexto de problemas de equilíbrio clássico para o cenário mais amplo de problemas de quase-equilíbrio.

Proposição 4.5. *Considere $x^* \in \text{dom}(K)$, e suponha que a Hipótese [4.3](#) vale em $(x^*, y(x^*))$. Seja $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ fixado e $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ a correspondente aplicação definida no Lema [4.4](#). Temos que o jacobiano de $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é dado por*

$$J y^{\mathcal{J}}(x) = C^{-1}A - C^{-1}D_2(D_2^T C^{-1}D_2)^{-1}(D_1^T + D_2^T C^{-1}A), \quad (4.10)$$

com

$$\begin{aligned} A &= A^{\mathcal{J}}(x) = -\nabla_{yx}^2 \Phi(x, y^{\mathcal{J}}(x)) - \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i^{\mathcal{J}}(x) \nabla_{yx}^2 g_i(x, y^{\mathcal{J}}(x)), \\ C &= C^{\mathcal{J}}(x) = \nabla_{yy}^2 \Phi(x, y^{\mathcal{J}}(x)) + \sum_{i \in \mathcal{J}} \lambda_i^{\mathcal{J}}(x) \nabla_{yy}^2 g_i(x, y^{\mathcal{J}}(x)), \\ D_1 &= D_1^{\mathcal{J}}(x) = \nabla_x g_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x)), \\ D_2 &= D_2^{\mathcal{J}}(x) = \nabla_y g_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde $\nabla_x g_{\mathcal{J}}(\cdot, \cdot)$ é a notação para a matriz com vetores coluna $\{\nabla_x g_i(\cdot, \cdot)\}_{i \in \mathcal{J}}$ e $\nabla_y g_{\mathcal{J}}(\cdot, \cdot)$ é definido de modo análogo.

Demonstração. Levando em conta a equação [\(4.9\)](#) no Lema [4.4](#), temos que

$$J_x \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) = -J_{(y,\lambda)} \Psi_{\mathcal{J}}(x, y^{\mathcal{J}}(x), \lambda^{\mathcal{J}}(x)) \cdot \begin{bmatrix} J y^{\mathcal{J}}(x) \\ J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \end{bmatrix}.$$

Portanto, utilizando as expressões [\(4.7\)](#) e [\(4.11\)](#), ganhamos o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} -A \\ D_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} C & D_2 & 0 \\ D_2^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(|\hat{\mathcal{J}}|) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J y^{\mathcal{J}}(x) \\ J \lambda^{\mathcal{J}}(x) \end{bmatrix}$$

o qual implica que

$$A = C \cdot J y^{\mathcal{J}}(x) + D_2 \cdot J \lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(x) \quad (4.12)$$

$$D_1^T = -D_2^T \cdot J y^{\mathcal{J}}(x) \quad (4.13)$$

$$J \lambda_{\hat{\mathcal{J}}}^{\mathcal{J}}(x) = 0.$$

De [\(4.12\)](#) e da não-singularidade da matriz C , temos a seguinte igualdade

$$J y^{\mathcal{J}}(x) = C^{-1}A - C^{-1}D_2 \cdot J \lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(x). \quad (4.14)$$

Multiplicando a equação [\(4.14\)](#) por D_2^T à esquerda e levando em conta a igualdade [\(4.13\)](#), temos que

$$J \lambda_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}(x) = (D_2^T C^{-1}D_2)^{-1}(D_1^T + D_2^T C^{-1}A). \quad (4.15)$$

Substituindo a expressão (4.15) na igualdade (4.14), obtemos o resultado desejado. \square

Observação 4.2. Note que se $\mathcal{J} = \emptyset$ então $Jy^\theta(x) = C^{-1}A$ com $A = A^\theta(x) = -\nabla_{yx}^2\Phi(x, y^\theta(x))$ e $C = C^\theta(x) = \nabla_{yy}^2\Phi(x, y^\theta(x))$. Compare as expressões (4.11) deduzidas acima com as exibidas na Proposição 2.5, página 24.

Exemplo 4.1 (continuação) Considere QEP com $n = 1$, a bifunção $f(x, y) = x(y - x)$ e a aplicação ponto-conjunto $K(x) = [2x - 1, 2x]$.

Tomando $h(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)^2$ e levando em conta a Proposição 4.5, tem-se

$$\partial_C y(x) = \begin{cases} \{0\} & , \text{ se } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \{0, 2\} & , \text{ se } x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \\ \{2\} & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O seguinte lema nos permite encontrar um elemento $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ e um correspondente multiplicador λ . Isto é importante para tornar o algoritmo totalmente implementável na prática.

Lema 4.5. Considere $x^* \in \text{dom}(K)$, e suponha que a Hipótese 4.3 seja satisfeita em $(x^*, y^* = y(x^*))$. Seja λ^* um vértice solução do problema de programação linear

$$\begin{aligned} \min_{\lambda} \quad & \sum_{i \in I_0(x^*)} \lambda_i \\ \text{s. a.} \quad & \nabla_y g(x^*, y^*)\lambda = -\nabla_y \Phi(x^*, y^*), \\ & \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I_0(x^*), \\ & \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I_m \setminus I_0(x^*). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Defina $\mathcal{J} := \{i \in I_0(x^*) \mid \lambda_i^* > 0\}$. Então \mathcal{J} pertence a $\mathcal{B}(x^*)$ e λ^* é o λ mencionado no Lema 4.3.

Demonstração. A prova é basicamente a mesma daquela apresentada no Lema 2.5. \square

4.2 O algoritmo

Nesta seção, nosso objetivo é propor e analisar a convergência de um algoritmo do tipo-Newton implementável para resolver QEP, o qual iremos denominar Algoritmo **NMQEP**. Nosso algoritmo estende para QEP o Algoritmo **NMEP** específico para problemas de equilíbrio clássico apresentado no Capítulo 2.

Após a descrição do algoritmo, apresentaremos algumas propriedades e resultados auxiliares para estabelecer sua boa definição. Posteriormente, analisaremos sua convergência.

De agora em diante, assumiremos a existência de solução para o problema QEP.

Algoritmo NMQEP

Passo 0: Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e faça $k := 0$.

Passo 1: Encontre $y^k = \arg \min \{\Phi(x^k, y) \mid y \in K(x^k)\}$.

Se $y^k = x^k$, então pare. (x^k é uma solução de $\text{QEP}(K, f)$).

Passo 2: Encontre um vértice solução λ^k do problema de programação linear (4.16) com $x^* = x^k$ e $y^* = y^k$. Tome $\mathcal{J} := \{i \in I_0(x^k) \mid \lambda_i^k > 0\}$.

Passo 3: Calcule $H_k = J y^{\mathcal{J}}(x^k) - I(n)$ utilizando as expressões (4.10)-(4.11) com $x = x^k$, $\lambda^{\mathcal{J}}(x) = \lambda^k$, e encontre a solução d^k do sistema

$$H_k d = -F(x^k).$$

Passo 4: Defina $x^{k+1} := x^k + d^k$, $k = k + 1$ e volte ao *Passo 1*.

Como observado na página 28, encontrar um vértice solução do problema de programação linear (4.16) no *Passo 2* do Algoritmo NMQEP tem por objetivo encontrar um elemento em $\mathcal{B}(x^k)$ (veja Lema 4.5). Isto é feito apenas para tornar o algoritmo completamente implementável na prática. De fato, qualquer outro modo de encontrar um elemento em $\mathcal{B}(x^k)$ pode ser utilizado no *Passo 2*.

Os próximos dois lemas serão úteis para provar a boa definição e as propriedades de convergência do Algoritmo NMQEP. A prova destes lemas seguem as mesmas ideias dos Lemas 2.6 e 2.7 apresentados no Capítulo 2. Para obtermos o primeiro deles precisamos da seguinte hipótese:

Hipótese 4.4. *As matrizes $J y^{\mathcal{J}}(x^*) - I(n)$ são não singulares para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$.*

Lema 4.6. *Seja x^* uma solução de $\text{QEP}(K, f)$. Suponha que as Hipóteses 4.3 e 4.4 valem em x^* . Então existem $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que $\|(H(x))^{-1}\| \leq M$ para todo $x \in B(x^*, \delta)$ e para todo $H(x) \in \partial_C F(x)$ onde $F(x) = y(x) - x$.*

Lema 4.7. *Seja x^* uma solução de $\text{QEP}(K, f)$. Suponha que a Hipótese 4.3 vale em $(x^*, y(x^*) = x^*)$. Então, para qualquer $H \in \partial_C F(x)$ tem-se*

$$F(x) - F(x^*) - H(x - x^*) = o(\|x - x^*\|). \quad (4.17)$$

Além disso, se os Jacobianos de todas as aplicações $\nabla_y g_i$, $i = 1, \dots, m$ e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuos em torno de x^* , tem-se

$$F(x) - F(x^*) - H(x - x^*) = O(\|x - x^*\|^2). \quad (4.18)$$

4.2.1 A boa definição

Seja x^* uma solução de $\text{QEP}(K, f)$. Mostraremos que o Algoritmo **NMQEP** é localmente bem definido em torno de x^* . Isto é, mostraremos a existência de uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que, dado qualquer ponto $x^k \in V(x^*)$, x^{k+1} é bem definido e pertence a esta vizinhança.

De fato, pela Proposição [4.1](#), o *Passo 1* está bem definido para qualquer $x^k \in \text{dom}(K)$. Além disso, pelos Lemas [4.2](#) e [4.5](#), existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que o *Passo 2* é bem definido para qualquer $x^k \in V(x^*)$, desde que x^* satisfaça a Hipótese [4.3](#). Para o *Passo 3*, temos a seguinte propriedade:

Proposição 4.6. *Seja x^* uma solução de $\text{QEP}(K, f)$. Suponha que as Hipóteses [4.3](#) e [4.4](#) sejam satisfeitas em $y(x^*) = x^*$. Então, existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que as matrizes $H_k \in \partial_C F(x^k) = \{Jy^{\mathcal{J}}(x^k) - I(n) \mid \mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^k)\}$ são não singulares para todo $x^k \in V(x^*)$. Portanto, o *Passo 3* é localmente bem definido.*

Demonstração. De fato, as matrizes que compõem o conjunto $\partial_C F(x^*)$ são não singulares pela Hipótese [4.4](#). O resultado segue então da continuidade da aplicação $Jy^{\mathcal{J}}$ em uma vizinhança de x^* e do Lema [4.2](#). \square

Observação 4.3. *Para concluir a boa definição do algoritmo proposto, devemos garantir que $x^{k+1} \in V(x^*)$ sempre que $x^k \in V(x^*)$. Isto pode ser feito de modo semelhante ao realizado na página [31](#) após a Proposição [2.7](#), Capítulo [2](#).*

4.2.2 Propriedades de convergência

Nesta subseção analisaremos as propriedades de convergência da sequência gerada pelo Algoritmo **NMQEP**. Como foi demonstrado, a Proposição [4.2](#) assegura que se $y^k = x^k$ então x^k resolve $\text{QEP}(K, f)$. Portanto, de agora em diante, assumiremos que a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo **NMQEP** é infinita.

Obtemos o seguinte teorema de convergência:

Teorema 4.1. *Seja x^* uma solução do problema $\text{QEP}(K, f)$. Suponha que as Hipóteses [4.3](#) e [4.4](#) se verificam em $y(x^*) = x^*$. Então, existe uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que para um ponto inicial arbitrário $x^0 \in V(x^*)$ a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo **NMQEP** converge para x^* superlinearmente. Além disso, se o jacobiano das aplicações $\nabla_y g_i$, $i = 1, \dots, m$ e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuas em torno de x^* , então a taxa de convergência é quadrática.*

Demonstração. Na seção anterior foi assegurado a existência de uma vizinhança $V(x^*)$ de x^* tal que o Algoritmo **NMQEP** é bem definido para qualquer ponto

inicial $x^0 \in V(x^*)$. Por outro lado, o Lema 4.6 garante a existência de $M > 0$ tal que $\|H_k^{-1}\| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Assim, do Lema 4.7, tem-se

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|H_k^{-1}[F(x^k) - F(x^*) - H_k(x^k - x^*)]\| \\ &\leq M\|F(x^k) - F(x^*) - H_k(x^k - x^*)\| = o(\|x^k - x^*\|) \end{aligned}$$

o que prova a convergência superlinear da sequência $\{x^k\}$.

Ademais, se os Jacobianos das aplicações $\nabla_y g_i$, $i = 1, \dots, m$ e $\nabla_y \Phi$ são Lipschitz contínuos em torno de x^* , da mesma maneira como feito acima e levando em conta a expressão (4.18) no Lema 4.7, temos

$$\|x^{k+1} - x^*\| = O(\|x^k - x^*\|^2)$$

garantindo assim a taxa de convergência quadrática da sequência $\{x^k\}$. \square

A seguinte proposição é um resultado de terminação finita para problemas quadráticos com restrições lineares.

Proposição 4.7. *Suponha que a bifunção f é dada por*

$$f(x, y) = \langle Px + Qy + q, y - x \rangle$$

onde $q \in \mathbb{R}^n$, e P e Q são matrizes quadradas de ordem n , com Q simétrica semidefinida positiva. Além disso, suponha que as restrições são dadas por desigualdades lineares, isto é,

$$g(x, y) = Rx + Sy + b$$

para algum vetor $b \in \mathbb{R}^m$ e matrizes $R, S \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Seja x^* uma solução do problema QEP(K, f) e suponha que a Hipótese 4.4 se verifica em x^* . Além disso, suponha que a bifunção auxiliar adotada no Algoritmo NMQEP é da forma $h(x, y) = \|y - x\|_W^2 := \langle y - x, W(y - x) \rangle$, onde W é uma matriz simétrica definida positiva.

Então, existe uma vizinhança V^* de x^* tal que, uma vez que x^k entra em V^* , o próximo iterado x^{k+1} coincide com x^* .

Demonstração. Dividiremos a prova em duas etapas. Primeiro, provaremos a existência de uma vizinhança V^* de x^* tal que, para todo $x \in V^*$ e qualquer $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$, existe uma matriz $E^{\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um vetor $e^{\mathcal{J}} \in \mathbb{R}^n$ tais que $y(x) = y^{\mathcal{J}}(x) = E^{\mathcal{J}}x + e^{\mathcal{J}}$.

De fato, pelo Lema 4.2 e a Proposição 4.4, existe uma vizinhança V^* de x^* tal que, para todo $x \in V^*$, $\mathcal{B}(x) \subseteq \mathcal{B}(x^*)$ e $y(x) = y^{\mathcal{J}}(x)$ para todo $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x)$ (note que

a Hipótese [4.3](#) vale em qualquer ponto $x \in \text{dom}(K)$. Tome $\mathcal{J} \in \mathcal{B}(x^*)$ arbitrário e considere a correspondente aplicação $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ definida no Lema [4.4](#). Das Proposições [4.4](#) e [4.5](#), $y^{\mathcal{J}}$ é uma aplicação continuamente diferenciável em V^* com jacobiano dado por $E^{\mathcal{J}} := Jy^{\mathcal{J}}(x) = C^{-1}A - C^{-1}D_2(D_2^T C^{-1}D_2)^{-1}(D_1^T + D_2^T C^{-1}A)$ onde $A = Q - P + 2W$, $C = 2(Q + W)$, $D_1 = R_{\mathcal{J}}^T$ e $D_2 = S_{\mathcal{J}}^T$, em outras palavras, a matriz $E^{\mathcal{J}}$ é constante. Isto implica que $y^{\mathcal{J}}(\cdot)$ é uma aplicação afim e portanto existe um vetor $e^{\mathcal{J}}$ tal que $y^{\mathcal{J}}(x) = E^{\mathcal{J}}x + e^{\mathcal{J}}$. Isto encerra a primeira parte da demonstração.

Agora, considere a aplicação $F^{\mathcal{J}}(\cdot)$ definida em V^* e dada por $F^{\mathcal{J}}(x) := y^{\mathcal{J}}(x) - x$. Seja $x^k \in V^*$ e $\mathcal{J}_k \in \mathcal{B}(x^k)$. Uma vez que $y^{\mathcal{J}_k}(\cdot)$ é uma aplicação afim em V^* ($\mathcal{B}(x^k) \subseteq \mathcal{B}(x^*)$), tem-se que

$$F^{\mathcal{J}_k}(x^*) = F^{\mathcal{J}_k}(x^k) + JF^{\mathcal{J}_k}(x^k)(x^* - x^k). \quad (4.19)$$

Por outro lado, pelas Proposições [4.2](#) e [4.4](#), temos que $F^{\mathcal{J}_k}(x^*) = y^{\mathcal{J}_k}(x^*) - x^* = y(x^*) - x^* = 0$. Pela Proposição [4.6](#) (diminuindo V^* se necessário) ganhamos a não singularidade de $JF^{\mathcal{J}_k}(x^k)$. Obtemos então de [\(4.19\)](#) que

$$\begin{aligned} x^* &= x^k - (JF^{\mathcal{J}_k}(x^k))^{-1} \cdot F^{\mathcal{J}_k}(x^k) \\ &= x^k - H_k^{-1} \cdot F(x^k), \end{aligned}$$

isto é, o lado direito da igualdade acima é precisamente a iteração do Algoritmo **NMQEP** em x^k , e assim x^{k+1} coincide com a solução x^* . \square

Capítulo 5

Aplicações do método proposto

Este capítulo é dedicado a ilustrar algumas aplicações de nosso método para QEP. De fato, reencontramos o método do tipo-Newton para problemas de equilíbrio clássico apresentado no Capítulo 2 como caso particular do esquema para QEP. Neste capítulo, aplicaremos nossos resultados ao problema geral (*nonjointly*) de equilíbrio de Nash generalizado (GNEP) e ao problema de otimização multiobjetivo (MOP).

Considere $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma aplicação ponto-conjunto satisfazendo a Hipótese 4.1. Iniciamos este capítulo com algumas noções úteis ao nosso desenvolvimento.

Denotaremos por $\text{fix}(K)$ o conjunto dos pontos fixos da aplicação ponto-conjunto K , isto é,

$$\text{fix}(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in K(x)\}.$$

A seguinte definição será utilizada especialmente na Seção 5.1. Como veremos, ela generaliza para o contexto de QEPs a ideia de equilíbrio normalizado existente na literatura de GNEPs.

Definição 5.1. *Considere um QEP(K, f) dado. Uma solução x^* de QEP é um equilíbrio normalizado se x^* é uma solução de EP($\text{fix}(K), f$).*

Exemplo 4.1 (continuação) Considere QEP com $n = 1$, a bifunção $f(x, y) = x(y - x)$ e a aplicação ponto-conjunto $K(x) = [2x - 1, 2x] = [-1, 0] + 2x$.

O conjunto solução de QEP é o conjunto $\{0, 1\}$ (veja Figura 4.1, página 49) enquanto que a única solução de EP($\text{fix}(K), f$) é $x^* = 0$ onde $\text{fix}(K) = [0, 1]$, conforme Exemplo 2.1, página 19.

Proposição 5.1. *Dado um QEP(K, f), suponha que $K(x) \subseteq \text{fix}(K)$ para todo $x \in \text{fix}(K)$. Então, toda solução de EP($\text{fix}(K), f$) é também uma solução de QEP(K, f).*

Demonstração. Segue imediatamente das definições. □

Observação 5.1. *A hipótese de que $K(x) \subseteq \text{fix}(K)$ para todo $x \in \text{fix}(K)$ é requerida por BIGI e PASSACANTANDO [28] e STRODIOT et al. [29] no desenvolvimento de seus algoritmos. Observe que nós não a requeremos.*

Dado um QEP(K, f), podemos utilizar as expressões apresentadas no Capítulo 2 para resolver EP($\text{fix}(K), f$) por meio do Algoritmo NMEP. Isto será feito na Seção 5.1 no contexto de problemas de equilíbrio de Nash.

5.1 Problema de equilíbrio de Nash generalizado

Nesta seção aplicaremos nossos resultados ao problema de equilíbrio de Nash generalizado (GNEP). Como veremos, nosso algoritmo é capaz de resolver o GNEP convexo geral (*nonjointly*). No caso *jointly convex* nosso esquema nos permite encontrar qualquer solução do problema, não apenas as soluções normalizadas. Ademais, apresentaremos um modo de encontrar unicamente um equilíbrio normalizado. Vale mencionar que quando o interesse for encontrar unicamente um equilíbrio normalizado em um *jointly convex* GNEP e a bifunção auxiliar adotada for do tipo $h(x, y) = \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$ ($\alpha > 0$), nosso trabalho reencontra os resultados apresentados por VON HEUSINGER et al. [32]. Este último, como mencionado anteriormente, é um caso particular do Capítulo 2.

Considere um GNEP com N jogadores. Cada jogador v controla as variáveis $x^v \in \mathbb{R}^{n_v}$. Denotamos por $x = (x^1, \dots, x^N)$ o vetor formado por todas as variáveis, o qual possui dimensão $n = \sum_{v=1}^N n_v$, e por x^{-v} o vetor formado por todas as variáveis de decisão exceto aquelas do jogador v . Para enfatizar as variáveis do v -ésimo jogador em x , escreveremos (x^v, x^{-v}) no lugar de x .

Cada jogador tem uma função objetivo $\theta_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que depende das variáveis de decisão de todos os jogadores. Lembremos que $X_v(x^{-v}) \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ denota o conjunto de estratégias de cada jogador, que depende das estratégias dos jogadores rivais.

De acordo com FACCHINEI e KANZOW [2] o caso mais comum de GNEP é quando os conjuntos $X_v(x^{-v})$, $v = 1, \dots, N$, são definidos por restrições de desigualdade. Mais especificamente, para cada $v \in \{1, \dots, N\}$, o conjunto $X_v(x^{-v})$ é dado por

$$X_v(x^{-v}) = \{y^v \in \mathbb{R}^{n_v} \mid g^v(y^v, x^{-v}) \leq 0\} \quad (5.1)$$

onde $g^v(\cdot, x^{-v}) : \mathbb{R}^{n_v} \rightarrow \mathbb{R}^{m_v}$.

Considere $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $m := \sum_{v=1}^N m_v$, definida por

$$g(x, y) := (g^1(y^1, x^{-1}), \dots, g^N(y^N, x^{-N})).$$

Tem-se, portanto, que

$$K(x) := \prod_{v=1}^N X_v(x^{-v}) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(x, y) \leq 0\}.$$

A hipótese clássica para uma abordagem do tipo-Newton em GNEPs é que as funções θ_v e g^v , $v = 1, \dots, N$, sejam duas vezes continuamente diferenciáveis e, como função de x^v , convexas [2, 32, 61]. Neste caso, a Hipótese 4.1 é satisfeita com $K(x)$ e $f(x, y)$ dadas por (1.6) e (1.7). Temos que

$$\begin{aligned} \nabla_y f(x, y) &= \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} \theta_1(y^1, x^{-1}) \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} \theta_N(y^N, x^{-N}) \end{pmatrix}_{n \times 1}, \\ \nabla_{yy}^2 f(x, y) &= \begin{bmatrix} \nabla_{x^1 x^1}^2 \theta_1(y^1, x^{-1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \nabla_{x^N x^N}^2 \theta_N(y^N, x^{-N}) \end{bmatrix}_{n \times n}, \\ \nabla_{yx}^2 f(x, y) &= \begin{bmatrix} \nabla_{x^1 x^1}^2 \theta_1(y^1, x^{-1}) & \cdots & \nabla_{x^1 x^N}^2 \theta_1(y^1, x^{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_{x^N x^1}^2 \theta_N(y^N, x^{-N}) & \cdots & \nabla_{x^N x^N}^2 \theta_N(y^N, x^{-N}) \end{bmatrix}_{n \times n} - \nabla_{yy}^2 f(x, y). \end{aligned}$$

O caso jointly convex

O cenário mais estudado na literatura de *jointly convex* GNEP é aquele cujo conjunto \mathbf{X} é dado por

$$\mathbf{X} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g(y) \leq 0\}$$

onde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação na qual suas componentes g_i são convexas. Neste caso, os conjuntos $X_v(x^{-v})$ são definidos pelo sistema de desigualdades como em (5.1) com $g^1 = g^2 = \dots = g^N := g$ e $m_v = m$ para todo $v = 1, \dots, N$.

A próxima proposição fornece um meio de encontrar unicamente um equilíbrio normalizado em um *jointly convex* GNEP.

Proposição 5.2. *Considere um jointly convex GNEP dado. Então, toda solução de EP(\mathbf{X}, f) com f dado por (1.7), é também uma solução do GNEP.*

Demonstração. Segue os mesmos passos da demonstração da Proposição 1.13. Note que aqui $y \in \mathbf{X}$ pela igualdade (1.8). \square

A Proposição 5.2 conclui que o conjunto solução de EP(\mathbf{X}, f) é exatamente o equilíbrio normalizado introduzido na Definição 5.1; veja também a Proposição 1.14 e a relação (1.9), página 13. Note que neste caso nossa definição de equilíbrio normalizado coincide com a encontrada na literatura de GNEPs conforme a Definição 1.5 e referências [2, 44].

Observamos que nosso algoritmo encontra qualquer solução em um *jointly convex* GNEP e não apenas o equilíbrio normalizado; veja o Exemplo 6.5, Capítulo 6. Por outro lado, se nosso objetivo for unicamente encontrar um equilíbrio normalizado, podemos fazê-lo resolvendo $\text{EP}(\mathbf{X}, f)$ por meio do Algoritmo **NMEP** apresentado no Capítulo 2.

É importante mencionar também que o Algoritmo **NMQEP** resolve o GNEP geral e não apenas o *jointly convex* GNEP; veja o Exemplo 6.4, Capítulo 6. Em FACCHINEI e KANZOW [2] pode ser encontrada uma visão geral a respeito de GNEP e suas aplicações.

5.2 Problema de otimização multiobjetivo

Nesta seção aplicaremos ao problema de otimização multiobjetivo (MOP) os resultados obtidos no Capítulo 4. Utilizaremos a formulação de MOP como um problema de quase-equilíbrio (QEP) apresentada no Capítulo 1. Esta formulação tem algumas vantagens computacionais em comparação com a apresentada no Capítulo 2. Podemos citar, por exemplo, a ausência de possíveis *overflow/underflow* além de um menor esforço computacional.

Assim como no Capítulo 2, assumiremos nesta seção a seguinte hipótese clássica para métodos numéricos do tipo-Newton [54, 55].

Hipótese 5.1. (a) $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_P}$ é continuamente diferenciável e convexa.

(b) $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^n$ tem a seguinte representação

$$\mathbf{K} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid g^I(y) \leq 0\}$$

com $g^I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_I}$ duas vezes continuamente diferenciável e convexa.

Seja $w = (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ e $z = (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Lembramos que o $\text{MOP}(\mathbf{K}, \Psi)$ pode ser visto como uma instância de QEP utilizando os seguintes dados:

$$f(w, z) := v - u \quad \text{e} \quad K(w) := \{z \in \mathbb{R}^{n+1} \mid g(w, z) := (g^I(y), g^P(w, z)) \leq 0\}$$

onde $g_i^P(w, z) = \psi_i(y) - \psi_i(x) - v$ para $i = 1, \dots, m_P$. Veja Proposição 1.15, p. 14.

Neste caso, temos que

$$\nabla_z f(w, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{(n+1) \times 1}, \quad \nabla_{zz}^2 f(w, z) = \nabla_{zw}^2 f(w, z) = \mathbf{0}_{n+1},$$

$$\begin{aligned}
\nabla_z g(w, z) &= \begin{bmatrix} \nabla g^I(y) & \nabla \Psi(y) \\ \mathbf{0}_{1 \times m_I} & -\mathbf{1}_{1 \times m_P} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (m_I + m_P)}, \\
\nabla_w g(w, z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m_I} & -\nabla \Psi(x) \\ \mathbf{0}_{1 \times m_I} & \mathbf{0}_{1 \times m_P} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (m_I + m_P)}, \\
\nabla_{zz}^2 g_i(w, z) &= \begin{cases} \begin{bmatrix} \nabla^2 g_i^I(y) & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)}, & \text{para } 1 \leq i \leq m_I \\ \begin{bmatrix} \nabla^2 \psi_i(y) & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)}, & \text{para } m_I \leq i \leq m_P, \end{cases} \\
\nabla_{zw}^2 g_i(w, z) &= \mathbf{0}_{n+1} \text{ para todo } 1 \leq i \leq m_I + m_P,
\end{aligned}$$

onde os números em negrito representam matrizes com entradas assumindo os valores indicados.

Destacamos que nosso método não utiliza escalarização, uma estratégia popular para resolver MOPs. No Capítulo [6](#) um exemplo numérico será reportado juntamente com uma comparação entre as duas formulações apresentadas nesta tese. Para mais detalhes sobre o problema multiobjetivo, veja [\[46, 47\]](#) e suas referências.

Capítulo 6

Experimentos numéricos

Neste capítulo analisaremos a performance do método proposto através de sete problemas-teste. O primeiro problema é o Exemplo [4.1](#) utilizado como ilustração ao longo do Capítulo [4](#). O segundo problema é um QEP acadêmico de dimensão 5 proposto por STRODIOT *et al.* [\[29\]](#) que não é nem um problema de equilíbrio de Nash generalizado (GNEP) nem uma desigualdade quase-variacional (QVI). O terceiro problema é um QVI com restrições não lineares considerado por FACCHINEI *et al.* [\[62\]](#). Posteriormente, resolvemos dois jogos de Nash generalizado. O primeiro problema é um *nonjointly* GNEP proposto por FACCHINEI e KANZOW [\[63\]](#). O segundo problema é um *jointly convex* GNEP, considerado por DREVES e KANZOW [\[43\]](#), onde procuramos tanto uma solução geral como também uma solução normalizada. Finalmente, resolvemos um MOP proposto por VALENZUELA-RENDON e URESTI-CHARRE [\[64\]](#) utilizando ambas as formulações apresentadas neste trabalho de tese a fim de compará-las.

As implementações foram feitas em MATLAB[®] R2016b e executadas em um MacBook Intel Core i7 com 8 GB RAM. Em todos os exemplos adotamos a bifunção auxiliar $h(x, y) = \frac{1}{2} \|y - x\|^2$. Calculamos y^k utilizando a sub-rotina `quadprog` quando o problema é quadrático e `fmincon` caso contrário. O problema de programação linear do *Passo 2* é resolvido utilizando-se a sub-rotina `linprog`. Para o *Passo 3* utilizamos a sub-rotina `linsolve`. É importante mencionar que no Exemplo [4.1](#) utilizamos as expressões apresentadas ao longo do Capítulo [4](#) em substituição às sub-rotinas adotadas. O critério de parada adotado em nossos experimentos foi $\|y^k - x^k\| < \varepsilon$ com $\varepsilon = 10^{-6}$.

Em todos os testes foram utilizados 100 pontos iniciais aleatórios tomados em algum intervalo citado no exemplo. O resumo dos resultados numéricos encontra-se na Tabela [6.1](#), onde as colunas possuem os seguintes significados:

Exemplo	Número do problema-teste considerado.
Ponto inicial	Representa o interval (ou caixa) onde foram tomados os 100 pontos iniciais aleatórios.
min.(k)	O menor número de iterações entre os 100 pontos iniciais considerados.
max.(k)	O maior número de iterações entre os 100 pontos iniciais considerados.
med.(k)	A média do número de iterações para os 100 pontos iniciais considerados.
$\ F(x^*)\ $	A média da norma de $F(x^k) = y^k - x^k$ na última iteração para os 100 pontos iniciais considerados. Este número representa uma medida da <i>otimalidade</i> da solução encontrada; veja Proposição 4.2.
cpu(s)	A média do tempo de CPU, em segundos, gasto para resolver o problema a partir dos 100 pontos iniciais considerados.

Problemas de Quase-Equilíbrio

Exemplo 6.1. [Capítulo 4, Exemplo 4.1] Considere QEP com $n = 1$, a bifunção $f(x, y) = x(y - x)$ e a aplicação ponto-conjunto $K(x) = [2x - 1, 2x] = [-1, 0] + 2x$.

O conjunto solução deste problema, conforme Figura 4.1 (página 49), é o conjunto $\{0, 1\}$. Para 46 pontos iniciais o Algoritmo **NMQEP** convergiu para a solução (normalizada) $x^* = 0$ e nos demais pontos iniciais para a solução $x^* = 1$. Observamos que as soluções encontradas estão bem distribuídas sobre o conjunto solução do problema.

Exemplo 6.2. [29, Exemplo 1] Considere o problema de quase-equilíbrio onde a aplicação ponto-conjunto K é dada por

$$K(x) = \prod_{1 \leq i \leq 5} K_i(x),$$

onde, para cada $x \in \mathbb{R}^5$ e cada i , o conjunto $K_i(x)$ é definido por

$$K_i(x) = \left\{ y_i \in \mathbb{R} \mid y_i + \sum_{1 \leq j \leq 5, j \neq i} x_j \geq -1 \right\}$$

e a bifunção f é da forma

$$f(x, y) = \langle Px + Qy + q, y - x \rangle$$

onde as matrizes P e Q e o vetor q são dados por

$$P = \begin{bmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Note que este problema não é nem um GNEP nem um QVI. Para mais detalhes a respeito do Exemplo [6.2](#), veja [\[29\]](#) e suas referências. Observamos que os pontos iniciais considerados em [\[29\]](#) estão contidos na caixa $[0, 3]^5$ adotada em nossos testes numéricos; veja Tabela [6.1](#).

Desigualdade Quase-Variacional

Exemplo 6.3. [\[62\]](#), *MovSet1A*] Considere a desigualdade quase-variacional onde o operador F é dado por

$$F(x) = Ax + b$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 19.8699 & 0.5369 & 2.9482 & 0.3358 & 7.1239 \\ 4.1819 & 16.3484 & -5.2030 & 5.4332 & 2.7143 \\ -5.6554 & 0.9422 & 19.0981 & 7.1556 & -7.3810 \\ -1.8770 & 0.1918 & -5.3596 & 18.3565 & -7.8847 \\ -6.0303 & -3.6171 & -1.4658 & 4.6238 & 15.4085 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix},$$

e a aplicação ponto-conjunto K é definida, para cada $x \in \mathbb{R}^5$, por

$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^5 \mid \|y - 0,1x\|^2 \leq 0,5\}.$$

Recordamos que QVI(K, F) pode ser reformulado através de um QEP(K, f) com a bifunção f dada por $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle$.

Note que os subproblemas do *Passo 1* não são problemas de programação quadráticos. De fato, os subproblemas são dados por

$$y^k = \arg \min_y \left\{ \frac{1}{2} \|y\|^2 + \langle (A + I(5))x^k + b, y \rangle \text{ sujeito a } \|y - 0,1x^k\|^2 \leq 0,5 \right\}.$$

Portanto, utilizamos em nossos testes a sub-rotina `fmincon` o que justifica um maior tempo de cpu nos resultados obtidos; veja Tabela [6.1](#). Para mais detalhes sobre este ou outros QVIs, veja a excelente coleção de problemas-teste QVILIB produzida por FACCHINEI *et al.* [\[62\]](#).

Equilíbrio de Nash Generalizado

Os próximos exemplos são problemas de equilíbrio de Nash generalizados ou formulações QEP para estes.

Exemplo 6.4. [63, Exemplo A.3] Considere um *nonjointly GNEP* com três jogadores cuja reformulação QEP envolve a bifunção

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\langle Ay, y \rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle + \langle Bx + b, y - x \rangle$$

e a aplicação ponto-conjunto K definida, para cada $x \in \mathbb{R}^7$, por

$$K(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^7 \mid \begin{array}{l} -10 \leq y \leq 10, \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 20, \\ y_1 + y_2 - y_3 \leq x_4 - x_7 + 5, \\ y_4 - y_5 \leq x_2 + x_3 - x_6 + 7, \\ y_7 \leq x_1 + x_3 - x_4 + 4. \end{array} \right\}.$$

As matrizes A e B e o vetor b considerados na bifunção f são dados por

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 39 & 53 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 & 10 & 11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -4 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 8 & -22 & 21 \\ 20 & 1 & -3 & 0 & 0 & 12 & 1 \\ 10 & -4 & 8 & 0 & 0 & 16 & 21 \\ 10 & -2 & 22 & 12 & 16 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & 21 & -4 & 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$b = \left(1, -1, 1, 1, 0, -1, 2 \right)^T.$$

Este problema foi inicialmente proposto por FACCHINEI e KANZOW [63]. É importante mencionar que existe uma escassez de exemplos e resultados numéricos relativos a *nonjointly GNEPs*. O Exemplo 6.4 mostra que de fato nosso método resolve o geral GNEP e não apenas o caso *jointly convex*. Para mais exemplos de *nonjointly GNEPs* veja [63].

Exemplo 6.5. [43, Exemplo 5.3] Este problema é um *jointly convex GNEP* com dois jogadores, cada um deles controlando uma única variável. As funções objetivo são

$$\theta_1(x) = x_1^2 - x_1x_2 - x_1 \quad e \quad \theta_2(x) = x_2^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_2,$$

e o espaço comum de estratégias é $\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$.

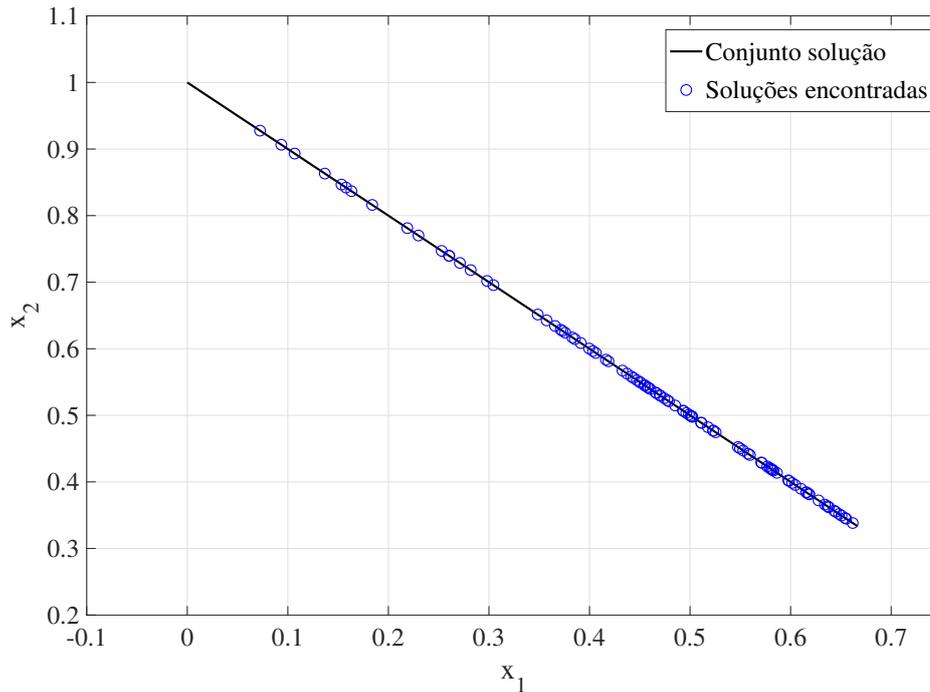


Figura 6.1: Resultados numéricos referente ao Exemplo 6.5.

O conjunto solução do Exemplo 6.5 é dado por $\{(\beta, 1 - \beta) \mid \beta \in [0, \frac{2}{3}]\}$. Para 82 pontos iniciais o Algoritmo **NMQEP** convergiu para uma solução do problema. Nos demais pontos iniciais, o algoritmo encontrou um iterado x^k tal que $K(x^k) = \emptyset$ e então não foi capaz de prosseguir. As soluções encontradas estão exibidas na Figura 6.1. Observa-se que as soluções computadas estão bem distribuídas no conjunto solução do problema. Em particular, como esperado, nosso método computa soluções não-normalizadas.

Exemplo 6.6. *Este exemplo é dado pelo mesmo problema do Exemplo 6.5, entretanto objetiva encontrar exclusivamente um equilíbrio normalizado.*

No Exemplo 6.6 resolvemos $\text{EP}(\mathbf{X}, f)$, com f definida pela equação (1.7), por meio do Algoritmo **NMEP** como apresentado no Capítulo 2. Veja Proposição 5.2 e comentários posteriores.

O único equilíbrio normalizado deste jogo é $x^* = (\frac{4}{11}, \frac{7}{11})$ o qual satisfaz a Hipótese 4.4 conforme Proposição 2.6. A sequência gerada pelo Algoritmo **NMEP** convergiu para x^* em apenas uma iteração em todos os pontos iniciais considerados.

Otimização Multiobjetivo

Exemplo 6.7. [64, Problema 1] Considere o MOP definido pelas seguintes funções

$$\psi_1(x) = x^2 \quad e \quad \psi_2(x) = (x - 2)^2,$$

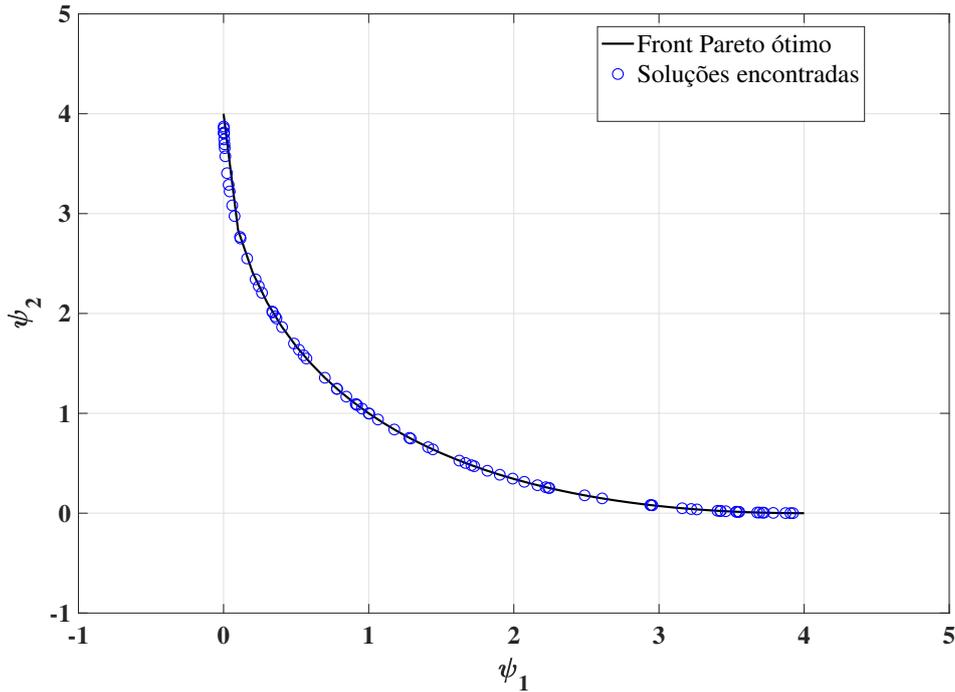


Figura 6.2: Resultados numéricos referente ao Exemplo 6.7 utilizando o Algoritmo NMQEP

e o conjunto de restrições $\mathbf{K} = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 6\}$.

- I. Utilizando a formulação apresentada na Seção 1.3.3, aplicamos o Algoritmo NMQEP ao Exemplo 6.7. Para 81 pontos iniciais o algoritmo convergiu para uma solução do problema. Nos demais pontos iniciais, o algoritmo encontrou uma iterada x^k tal que H_k era singular e, portanto, o método falhou. As soluções encontradas estão exibidas na Figura 6.2. Nota-se uma boa distribuição das soluções sobre o *front* Pareto ótimo do problema.
- II. Utilizando os elementos apresentados no Capítulo 2, Seção 2.3, aplicamos o Algoritmo NMEP ao problema EP(\mathbf{K}, f_c) para resolver o Exemplo 6.7. Adotamos em nossos testes numéricos a constante $c = 2$. Em 10 pontos iniciais houve *overflow/underflow*. Nos demais pontos iniciais, diferente do que ocorreu na aplicação do Algoritmo NMQEP, o Algoritmo NMEP convergiu para a mesma solução, $x^* = 1$, independente do ponto inicial escolhido.

Como pode ser visto na Tabela 6.1, o Algoritmo NMQEP teve um melhor desempenho em comparação ao Algoritmo NMEP em todos os quesitos avaliados.

O algoritmo apresentou um bom comportamento frente aos exemplos considerados. Observamos que ele é capaz de encontrar uma solução com alta precisão

numérica. Este método pode ser visto como uma alternativa frente aos métodos existentes [28-30], especialmente pelo fato de nossa abordagem ser distinta da presente na literatura de QEP.

Tabela 6.1: Resumo das experiências numéricas.

Exemplo	Ponto inicial	min.(k)	max.(k)	med.(k)	$\ F(x^*)\ $	cpu(s)
6.1	$[-1, 2]$	1	1	1	0	1,3212e-04
6.2	$[0, 3]^5$	1	1	1	5,7142e-09	0,0319
6.3	$[0, 5]^5$	5	7	5,82	4,9513e-07	0,3224
6.4	$[0, 1]^7$	1	1	1	7,9338e-09	0,0204
6.5	$[0, 1]^2$	1	4	1,54	5,1017e-08	0,0532
6.6	$[0, 1]^2$	1	1	1	4,5484e-10	0,0317
6.7 I.	$[-1, 3] \times \{0\}$	0	2	0,5926	0	0,0690
6.7 II.	$[-1, 3]$	24	53	37,64	7,2321e-07	0,8628

Capítulo 7

Considerações finais

Neste trabalho de tese foi desenvolvido um método para resolver o problema de equilíbrio clássico (EP) juntamente com uma extensão deste ao problema de quase-equilíbrio (QEP). Os algoritmos associados a tal método possuem convergência local no sentido de admitir, *a priori*, apenas pontos próximos a uma solução como ponto de partida para sua inicialização. Provamos, sob hipóteses usuais, que o algoritmo possui taxa de convergência superlinear e/ou quadrática. Propomos uma globalização do algoritmo no caso EP. Ademais, aplicamos nossos resultados ao problema de equilíbrio de Nash generalizado (GNEP) e ao problema de otimização multiobjetivo (MOP).

No método proposto ao problema de equilíbrio clássico realizamos comparações com trabalhos específicos para EP. Observamos que o algoritmo se mostrou numericamente competitivo. Uma aplicação a problemas de otimização multiobjetivo visto como um EP foi apresentado. Este resultado encontra-se publicado em SANTOS *et al.* [16] como fruto de nossas pesquisas iniciais para este trabalho de tese.

Observamos que, quando aplicado ao GNEP, o método estendido ao problema de quase-equilíbrio é capaz de resolver o geral (*nonjointly convex*) GNEP. Destacamos ainda que, quando aplicado ao caso *jointly convex*, o método nos permite encontrar qualquer solução do problema e não apenas as soluções denominadas “normalizadas” (*normalized equilibrium*). Ademais, exibimos um modo de encontrar exclusivamente as soluções normalizadas de um *jointly convex* GNEP. É importante mencionar que neste último caso, e para a particular escolha da bifunção auxiliar $h(x, y) = \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2$ ($\alpha > 0$), reencontramos os resultados de VON HEUSINGER *et al.* [32] como caso particular da teoria desenvolvida nesta tese.

Com o intuito de aplicar os resultados obtidos no Capítulo 4 ao problema de otimização multiobjetivo, apresentamos uma formulação do MOP como um problema de quase-equilíbrio. Essa formulação nos permite encontrar as soluções Pareto-fraco do problema. Ela possui a vantagem de envolver apenas os dados originais do MOP além de ser uma formulação suave no sentido da diferenciabilidade dos elementos

envolvidos.

Por fim, resultados numéricos incluindo vários problemas-testes foram apresentados para ilustrar o comportamento do método proposto. Em relação aos testes realizados, observamos que nosso algoritmo é capaz de encontrar uma solução com alta precisão numérica. Assim, este método pode ser visto como uma alternativa promissora frente aos métodos existentes [28-30], especialmente pelo fato de nossa abordagem ser distinta das presentes na literatura de QEP.

Futuras pesquisas que dão continuidade natural a este trabalho envolvem:

1. Propor uma globalização do Algoritmo **NMQEP** especificamente em relação a tornar possível a escolha de pontos não necessariamente próximos a uma solução como pontos de partida para a inicialização do algoritmo;
2. Encontrar condições que garantam a validade da Hipótese 4.4 que se refere à não singularidade dos elementos do jacobiano generalizado computável da aplicação $F(x) = y(x) - x$;
3. Ampliar as experiências numéricas fornecendo comparações com métodos específicos para QEP, como por exemplo, os descritos por STRODIOT *et al.* [29] e VAN *et al.* [30];
4. Propor outros métodos para resolver o problema de quase-equilíbrio, como por exemplo, extensões à QEP de métodos existentes na literatura de problemas de equilíbrio clássico.

Referências Bibliográficas

- [1] MOSCO, U. “Implicit variational problems and quasi variational inequalities”. In: *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, v. 543, *Lecture Notes in Mathematics*, cap. 3, pp. 83–156, Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 1976.
- [2] FACCHINEI, F., KANZOW, C. “Generalized Nash Equilibrium Problems”, *Annals of Operations Research*, v. 175, n. 1, pp. 177–211, 2010.
- [3] NGUYEN, T. T. V., NGUYEN, T. P. D., STRODIOT, J. J., et al. “A class of hybrid methods for quasi-variational inequalities”, *Optimization Letters*, v. 8, n. 8, pp. 2211–2226, 2014. ISSN: 1862-4480.
- [4] FAN, K. “A minimax inequality and its applications”. v. 3, *Inequalities*, pp. 103–113, New York, Academic Press, 1972.
- [5] BLUM, E., OETTLI, W. “From optimization and variational inequalities to equilibrium problems”, *The Mathematics Student*, v. 63, n. 1–4, pp. 123–145, 1994.
- [6] IUSEM, A., KASSAY, G., SOSA, W. “On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems”, *Mathematical Programming*, v. 116, n. 1, pp. 259–273, 2009.
- [7] IUSEM, A., KASSAY, G., SOSA, W. “An Existence Result for Equilibrium Problems with Some Surjectivity Consequences”, *Journal of Convex Analysis*, v. 16, n. 3, pp. 807–826, 2009.
- [8] OLIVEIRA, P., SANTOS, P., SILVA, A. “A Tikhonov-type regularization for equilibrium problems in Hilbert spaces”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 401, n. 1, pp. 336 – 342, 2013.
- [9] SCHEIMBERG, S., JACINTO, F. “An extension of FKKM lemma with application to generalized equilibrium problems”, *Pacific Journal of Optimization*, v. 6, n. 2, pp. 243–253, 2010.

- [10] IUSEM, A. N., SOSA, W. “New existence results for equilibrium problems”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 52, n. 2, pp. 621 – 635, 2003.
- [11] BELLO CRUZ, J., SANTOS, P., SCHEIMBERG, S. “A Two-Phase Algorithm for a Variational Inequality Formulation of Equilibrium Problems”, *Optimization Theory and Applications*, v. 159, pp. 562–575, 2013.
- [12] BIGI, G., PASSACANTANDO, M. “Descent and Penalization Techniques for Equilibrium Problems with Nonlinear Constraints”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 164, n. 3, pp. 804–818, 2015.
- [13] IUSEM, A., SOSA, W. “On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces”, *Optimization*, v. 59, pp. 1259–1274, 2010.
- [14] SANTOS, P., SCHEIMBERG, S. “An inexact subgradient algorithm for Equilibrium Problems”, *Computational & Applied Mathematics*, v. 30, pp. 91 – 107, 2011.
- [15] SCHEIMBERG, S., SANTOS, P. “A relaxed projection method for finite-dimensional equilibrium problems”, *Optimization*, v. 60, n. 8-9, pp. 1193–1208, 2011. doi: 10.1080/02331934.2010.527974.
- [16] SANTOS, P. J. S., SANTOS, P. S. M., SCHEIMBERG, S. “A proximal Newton-type method for equilibrium problems”, *Optimization Letters*, 2017. doi: 10.1007/s11590-017-1204-z.
- [17] SANTOS, P., SCHEIMBERG, S. “An outer approximation algorithm for equilibrium problems in Hilbert spaces”, *Optimization Methods and Software*, v. 30, n. 2, pp. 379–390, 2015. doi: 10.1080/10556788.2014.961019.
- [18] MASTROENI, G. “Gap functions for equilibrium problems”, *Journal of Global Optimization*, v. 27, pp. 411–426, 2003.
- [19] NASRI, M., MATIOLI, L. C., DA SILVA FERREIRA, E. M., et al. “Implementation of Augmented Lagrangian Methods for Equilibrium Problems”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 168, n. 3, pp. 971–991, 2016. doi: 10.1007/s10957-015-0846-1.
- [20] IUSEM, A. N., SOSA, W. “Iterative Algorithms for Equilibrium Problems”, *Optimization*, v. 52, n. 3, pp. 301–316, 2003.
- [21] NETO, J. C., LOPES, J., JR., P. S. “A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints”, *Optimization*, v. 65, n. 5, pp. 1061–1068, 2016. doi: 10.1080/02331934.2015.1080702.

- [22] CRUZ NETO, J. X., SANTOS, P. S. M., SOARES, P. A. “An extragradient method for equilibrium problems on Hadamard manifolds”, *Optimization Letters*, v. 10, n. 6, pp. 1327–1336, 2016.
- [23] CUBIOTTI, P. “Existence of solutions for lower semicontinuous quasi-equilibrium problems”, *Computers and Mathematics with Applications*, v. 30, n. 12, pp. 11–22, 1995.
- [24] AUSSEL, D., COTRINA, J., IUSEM, A. “An existence result for quasi-equilibrium problems”, *Journal of Convex Analysis*, v. 24, n. 1, pp. 55–66, 2017.
- [25] CASTELLANI, M., GIULLI, M. “An existence result for quasiequilibrium problems in separable Banach spaces”, *Journal of Mathematics Analysis and Applications*, v. 425, n. 1, pp. 85–95, 2015.
- [26] JACINTO, F. M. O., SCHEIMBERG, S. “Duality for generalized equilibrium problem”, *Optimization*, v. 57, n. 6, pp. 795–805, 2008.
- [27] COTRINA, J., ZÚÑIGA, J. “A note on quasi-equilibrium problems”, *Operations Research Letters*, v. 46, n. 1, pp. 138 – 140, 2018.
- [28] BIGI, G., PASSACANTANDO, M. “Gap functions for quasi-equilibria”, *Journal of Global Optimization*, v. 66, n. 4, pp. 791–810, 2016. ISSN: 1573-2916.
- [29] STRODIOT, J. J., NGUYEN, T. T. V., NGUYEN, V. H. “A new class of hybrid extragradient algorithms for solving quasi-equilibrium problems”, *Journal of Global Optimization*, v. 56, n. 2, pp. 373–397, 2013. ISSN: 1573-2916.
- [30] VAN, N. T. T., STRODIOT, J. J., NGUYEN, V. H., et al. “An extragradient-type method for solving nonmonotone quasi-equilibrium problems”, *Optimization*, 2017. doi: 10.1080/02331934.2017.1416610.
- [31] OUTRATA, J. V., ZOWE, J. “A Newton method for a class of quasi-variational inequalities”, *Computational Optimization and Applications*, v. 4, n. 1, pp. 5–21, 1995.
- [32] VON HEUSINGER, A., KANZOW, C., FUKUSHIMA, M. “Newton’s method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation”, *Mathematical Programming*, v. 132, pp. 99–123, 2012.

- [33] FACCHINEI, F., KANZOW, C., SAGRATELLA, S. “Solving quasi-variational inequalities via their KKT conditions”, *Mathematical Programming*, v. 144, n. 1, pp. 369–412, 2014.
- [34] FACCHINEI, F., KANZOW, C., KARL, S., et al. “The semismooth Newton method for the solution of quasi-variational inequalities”, *Computational Optimization and Applications*, v. 62, n. 1, pp. 85–109, 2015. ISSN: 1573-2894.
- [35] DREVES, A., VON HEUSINGER, A., KANZOW, C., et al. “A globalized Newton method for the computation of normalized Nash equilibria”, *Journal of Global Optimization*, v. 56, n. 2, pp. 327–340, 2013. ISSN: 1573-2916. doi: 10.1007/s10898-011-9824-9. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10898-011-9824-9>.
- [36] IZMAILOV, A. F., SOLODOV, M. V. *Otimização*, v. 1. IMPA, 2014.
- [37] LANG, S. *Undergraduate analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1997.
- [38] CLARKE, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. Wiley-Interscience, 1983.
- [39] IZMAILOV, A. F., SOLODOV, M. V. *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2014.
- [40] FACCHINEI, F., PANG, J. S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, v. 1, *Springer series in operations research*. Springer, 2003. ISBN: 0-387-95580-1.
- [41] HOGAN, W. W. “Point-to-set maps in mathematical programming”, *SIAM Review*, v. 15, pp. 591–603, 1973.
- [42] NASH, J. “Non-Cooperative Games”, *Annals of Mathematics*, v. 54, n. 2, pp. 286–295, 1951.
- [43] DREVES, A., KANZOW, C. “Nonsmooth optimization reformulations characterizing all solutions of jointly convex generalized Nash equilibrium problems”, *Computational Optimization and Applications*, v. 50, n. 1, pp. 23–48, 2011.

- [44] VON HEUSINGER, A., KANZOW, C. “Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido-Isoda-type functions”, *Computational Optimization and Applications*, v. 43, n. 3, pp. 353–377, 2009. ISSN: 1573-2894.
- [45] MATIOLI, L. C., SOSA, W., YUAN, J. “A numerical algorithm for finding solutions of a generalized Nash equilibrium problem”, *Computational Optimization and Applications*, v. 52, n. 1, pp. 281–292, 2012.
- [46] PAPPALARDO, M. “Multiobjective Optimization: A Brief Overview”. In: Chinchuluun, A., Pardalos, P. M., Migdalas, A., et al. (Eds.), *Pareto Optimality, Game Theory And Equilibria*, v. 17, pp. 517–528, New York, NY, Springer New York, 2008. ISBN: 978-0-387-77247-9.
- [47] BRITO, A., NETO, J. C., SANTOS, P., et al. “A relaxed projection method for solving multiobjective optimization problems”, *European Journal of Operational Research*, v. 256, n. 1, pp. 17 – 23, 2017. ISSN: 0377-2217.
- [48] HARMS, N., HOHEISEL, T., KANZOW, C. “On a Smooth Dual Gap Function for a Class of Quasi-Variational Inequalities”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 163, n. 2, pp. 413–438, 2014. ISSN: 1573-2878. doi: 10.1007/s10957-014-0536-4. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10957-014-0536-4>>.
- [49] KANZOW, C. “On the multiplier-penalty-approach for quasi-variational inequalities”, *Mathematical Programming*, v. 160, n. 1, pp. 33–63, 2016. ISSN: 1436-4646. doi: 10.1007/s10107-015-0973-3. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10107-015-0973-3>>.
- [50] HARMS, N., KANZOW, C., STEIN, O. “Smoothness properties of a regularized gap function for quasi-variational inequalities”, *Optimization Methods and Software*, v. 29, n. 4, pp. 720–750, 2014.
- [51] SUN, D., FUKUSHIMA, M., QI, L. “Complementary and Variational Problems: State of the Art”. cap. A computable generalized Hessian of the D-gap function and Newton-type methods for variational inequality problems, pp. 452–472, Philadelphia, SIAM, 1997.
- [52] JANIN, R. “Directional derivative of the marginal function in nonlinear programming”, *Mathematical Programming Study*, v. 21, pp. 110–126, 1984.
- [53] PANG, J.-S., RALPH, D. “Piecewise Smoothness, Local Invertibility, and Parametric Analysis of Normal Maps”, *Mathematics of Operations Research*, v. 21, n. 2, pp. 401–426, 1996. doi: 10.1287/moor.21.2.401.

- [54] FLIEGE, J., DRUMMOND, L. M. G., SVAITER, B. F. “Newton’s Method for Multiobjective Optimization”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 20, n. 2, pp. 602–626, 2009. doi: 10.1137/08071692X.
- [55] DRUMMOND, L. G., RAUPP, F., SVAITER, B. “A quadratically convergent Newton method for vector optimization”, *Optimization*, v. 63, n. 5, pp. 661–677, 2014.
- [56] BOYD, S., VANDENBERGHE, L. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- [57] IUSEM, ALFREDO N., NASRI, MOSTAFA. “Augmented Lagrangian methods for variational inequality problems”, *RAIRO-Oper. Res.*, v. 44, n. 1, pp. 5–25, 2010. doi: 10.1051/ro/2010006.
- [58] FACCHINEI, F., PANG, J. S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementary Problems*, v. 2, *Springer series in operations research*. Springer, 2003.
- [59] DEMPE, S., VOGEL, S. “The generalized Jacobian of the optimal solution in parametric optimization”, *Optimization*, v. 50, pp. 387–405, 2001.
- [60] RALPH, D., DEMPE, S. “Directional derivatives of the solution of a parametric nonlinear program”, *Mathematical Programming*, v. 70, n. 1, pp. 159–172, 1995. ISSN: 1436-4646.
- [61] FACCHINEI, F., FISCHER, A., PICCIALLI, V. “Generalized Nash equilibrium problems and Newton methods”, *Mathematical Programming*, v. 117, n. 1, pp. 163–194, 2009. doi: 10.1007/s10107-007-0160-2.
- [62] FACCHINEI, F., KANZOW, C., SAGRATELLA, S. “QVILIB: A library of quasi-variational inequality test problems”, *Pacific Journal of Optimization*, v. 9, n. 2, pp. 225–250, 2013.
- [63] FACCHINEI, F., KANZOW, C. “Penalty Methods for the Solution of Generalized Nash Equilibrium Problems”, *SIAM Journal on Optimization*, v. 20, n. 5, pp. 2228–2253, 2010.
- [64] VALENZUELA-RENDON, M., URESTI-CHARRE, E. “A Non-Generational Genetic Algorithm for Multiobjective Optimization”. In: *Proceedings of the Seventh International Conference on Genetic Algorithms*, pp. 658–665, 1997.