



SOBRE COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS KNESER E DE GRAFOS
PRODUTO DIRETO DE COMPLETOS E DE CICLOS

Caroline da Silva Reis Patrão

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Luis Antonio Brasil Kowada
Diana Sasaki Nobrega

Rio de Janeiro
Outubro de 2021

SOBRE COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS KNESER E DE GRAFOS
PRODUTO DIRETO DE COMPLETOS E DE CICLOS

Caroline da Silva Reis Patrão

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Luis Antonio Brasil Kowada
Diana Sasaki Nobrega

Aprovada por: Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Prof. Luis Antonio Brasil Kowada
Prof. Diana Sasaki Nobrega
Prof. Diane Castonguay
Prof. Fábio Happ Botler
Prof. Mario Valencia-Pabon
Prof. Sulamita Klein

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2021

Patrão, Caroline da Silva Reis

Sobre coloração total de grafos Kneser e de grafos produto direto de completos e de ciclos/Caroline da Silva Reis Patrão. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2021.

XII, 114 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Diana Sasaki Nobrega

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 53 – 56.

1. Coloração total. 2. Grafos Kneser. 3. Produto direto de completos. 4. Produto direto de ciclos. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico esta tese a todos que
acreditaram em mim.*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos que fizeram parte deste trabalho. Primeiramente a Deus, a quem devoto todas as minhas conquistas. Aos meus pais, Manoel e Edna, e minha irmã Rafaela, que sempre me incentivaram no caminho da educação. Ao meu marido Alex e meu filho Mateus, que me apoiaram e entenderam todos os momentos dedicados a este trabalho. À minha orientadora Celina, pela excelência, dedicação e apoio, desde o mestrado, e agora também neste doutorado. Ao meu co-orientador Luis, pelo empenho e ajuda desde o mestrado. À minha amiga e co-orientadora Diana, pela amizade, dedicação, incentivo e por ter tornado esse caminho mais alegre. Aos colaboradores Diane Castonguay e Mario Valencia-Pabón, pela amizade e aprendizado durante todos os trabalhos juntos. Ao meu amigo Alexsander, por toda assistência dada durante todo o doutorado. Agradeço aos membros da banca ainda não citados aqui, Fábio Botler e Sulamita Klein, por terem aceitado o convite e examinado essa tese. Por fim, agradeço a todos os amigos que de alguma forma me ajudaram neste desafio.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS KNESER E DE GRAFOS PRODUTO DIRETO DE COMPLETOS E DE CICLOS

Caroline da Silva Reis Patrão

Outubro/2021

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Luis Antonio Brasil Kowada
Diana Sasaki Nobrega

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Nesta tese, investigamos o problema de coloração total em três classes de grafos: grafos Kneser, produto direto de grafos completos e produto direto de grafos ciclos. Na classe dos grafos Kneser $K(n, s)$, mostramos que os conexos mais esparsos $K(2k-1, k-1)$, conhecidos como grafos ímpares, são Tipo 1 e provamos que os densos grafos Kneser $K(n, 2)$ verificam a TCC quando n é par, ou quando n é ímpar não divisível por 3. Para os casos restantes quando n é ímpar e divisível por 3, obtemos uma coloração total de $K(n, 2)$ com $\Delta(K(n, 2)) + 3$ cores quando $n \equiv 3 \pmod{4}$, e com $\Delta(K(n, 2)) + 4$ cores quando $n \equiv 1 \pmod{4}$. Além disso, apresentamos uma família infinita de grafos Kneser $K(n, 2)$ que possuem índice cromático igual a $\Delta(K(n, 2))$.

Com relação ao produto direto de grafos completos $K_m \times K_n$, é conhecido que se pelo menos um dos números m ou n é par, então $K_m \times K_n$ é Tipo 1, exceto para $K_2 \times K_2$. Provamos que o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1 quando m e n são ímpares, completando o resultado de que todos os grafos $K_m \times K_n$ são Tipo 1, exceto para $K_2 \times K_2$.

Adicionalmente, para o produto direto de ciclos $C_m \times C_n$, casos particulares de $C_m \times C_n$, para $m = 3p, 5\ell$ e 8ℓ com $p \geq 2$ e $\ell \geq 1$, e $n \geq 3$, são conhecidos serem Tipo 1. Este resultado motivou a conjectura de que, exceto para $C_4 \times C_4$, o produto direto $C_m \times C_n$, para $m, n \geq 3$, é Tipo 1. Usamos técnicas de colagem para provar que todos os $C_m \times C_n$ são Tipo 1, exceto $C_4 \times C_4$. Além disso, investigamos condições que possam nos ajudar a verificar que o produto direto de dois grafos quaisquer alcance o limitante inferior para o número cromático total.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ON TOTAL COLORING OF KNESER GRAPHS AND THE DIRECT
PRODUCT OF COMPLETE GRAPHS AND CYCLES

Caroline da Silva Reis Patrão

October/2021

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Diana Sasaki Nobrega

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this thesis, the total chromatic number in three classes of graphs is studied: Kneser graphs, direct product of complete graphs and direct product of cycle graphs. In the class of Kneser graphs $K(n, s)$, we show that the most sparse connected $K(2k - 1, k - 1)$, known as Odd Graphs, are Type 1 and we prove that the dense Kneser graphs $K(n, 2)$ satisfy the TCC when n is even, or when n is odd and not divisible by 3. For the remaining cases when n is odd and divisible by 3, we get a total coloring of $K(n, 2)$ with $\Delta(K(n, 2)) + 3$ colors when $n \equiv 3 \pmod{4}$, and with $\Delta(K(n, 2)) + 4$ colors when $n \equiv 1 \pmod{4}$. In addition, we present an infinite family of Kneser graphs $K(n, 2)$ that have the chromatic index equal to $\Delta(K(n, 2))$.

For the direct product of complete graphs $K_m \times K_n$, it is known that if at least one of the numbers m or n are even, then $K_m \times K_n$ is Type 1, except for $K_2 \times K_2$. We prove that the graph $K_m \times K_n$ is Type 1 when m and n are odd, ensuring in this way that all graphs $K_m \times K_n$ are Type 1, except for $K_2 \times K_2$.

Additionally, for the direct product of cycle graphs $C_m \times C_n$, particular cases of $C_m \times C_n$, for $m = 3p, 5\ell$ and 8ℓ with $p \geq 2$ and $\ell \geq 1$, and $n \geq 3$, were previously known to be Type 1. This result motivated the conjecture that, except for $C_4 \times C_4$, the direct product $C_m \times C_n$ with $m, n \geq 3$ is Type 1. We establish merge techniques to prove that all $C_m \times C_n$ are Type 1, except for $C_4 \times C_4$. In addition, we investigate conditions that can help us to verify that the direct product of any two graphs reaches the lower bound for the total chromatic number.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
1.1 Definições e Notações	4
1.1.1 Coloração de grafos	6
1.2 Os grafos Kneser	7
1.3 Produto direto de dois grafos	9
2 A coloração de arestas e a coloração total de alguns grafos Kneser	11
2.1 Grafos Ímpares	12
2.2 Grafos Kneser $K(n, 2), n \geq 6$	13
2.2.1 Preliminares	13
2.2.2 Um limitante superior para o número cromático total	19
2.2.3 Uma família infinita Classe 1 de grafos Kneser $K(n, 2)$	26
3 O número cromático total do produto direto de grafos completos	29
3.1 $K_m \times K_n$ é Tipo 1 para $m, n \geq 13$	30
3.2 Decomposições hamiltonianas para obter uma cor guia para ímpares $m, n \geq 3$ e $m < 13$	31
3.2.1 Decomposições hamiltonianas	31
3.2.2 Uma coloração total Tipo 1 com elementos da cor guia	35
3.3 $K_m \times K_n$ é Tipo 1 para ímpares $m, n \geq 3$ e $m < 13$	37
3.3.1 Famílias $K_3 \times K_n, K_5 \times K_n, K_7 \times K_n$	38
3.3.2 Famílias $K_9 \times K_n$ e $K_{11} \times K_n$	39
4 A maioria do produto direto de grafos é Tipo 1	41
4.1 Coloração total de $C_m \times C_n$	42
4.1.1 Famílias infinitas base	44
4.1.2 Colagem do padrão para obtenção de uma 5-coloração total para um valor grande de m	45

4.2	Coloração total de produto direto bipartido	46
5	Conclusões e Trabalhos Futuros	50
	Referências Bibliográficas	53
A	Anexo: Manuscrito “On total and edge coloring some Kneeser graphs” publicado em Journal of Combinatorial Optimization	57
B	Anexo: Manuscrito “Total chromatic number of the direct product of complete graphs” apresentado no LAGOS2021 e submetido como artigo completo para Graphs and Combinatorics	75
C	Anexo: Manuscrito “Most direct product of graphs are Type 1” submetido para Discrete Applied Mathematics - Special Issue: CTW2020	98

Lista de Figuras

1.1	Uma coloração total do grafo de Petersen usando $\Delta + 1 = 4$ cores.	2
1.2	Um exemplo de grafo harmônico.	7
1.3	O grafo Kneser $K(5, 2)$ é o famoso grafo de Petersen.	8
1.4	Uma representação do grafo produto direto $K_3 \times K_3$	9
2.1	(a) O grafo de Petersen O_3 com a 4-coloração total obtida pelo Teorema 2.1. (b) A representação de O_3 decomposto no conjunto independente I_5 e no emparelhamento M_5 . (c) O grafo bipartido auxiliar A_3 com uma 3-coloração de arestas. . .	13
2.2	(a) Uma 5-coloração de arestas de K_5 . (b) Uma 5-coloração de arestas de K_6 obtida a partir da 5-coloração de arestas ótima de K_5	14
2.3	(a) Uma 5-coloração total de K_4 obtida a partir da 5-coloração de arestas de K_5 . (b) Uma 5-coloração total de K_5	15
2.4	Uma 3-clique-decomposição do grafo Kneser $K(6, 2)$	16
2.5	(a) Uma representação do subgrafo bipartido $B_{1,2}(6, 2)$. (b) Uma representação do subgrafo bipartido $B_{1,2}(7, 2)$	18
2.6	Ilustração do grafo $B'(7, 2)$	19
2.7	Uma ilustração dos elementos que são coloridos com a cor 1 (laranja) pelo Algoritmo 1.	21
2.8	Uma ilustração do grafo de entrada do Algoritmo 1 de $K(7, 2)$ destacando os elementos coloridos com 7 cores.	22
2.9	Uma 8-coloração total de $K(6, 2)$	23
2.10	Uma ilustração da coloração total restante de $K(13, 2)$ após o uso do Algoritmo 1.	26
2.11	Uma representação de um subgrafo do grafo de entrada do Algoritmo 2 de $K(8, 2)$ destacando as arestas coloridas para $k = 1, 2$ e $i = 1$ fixo.	28
3.1	O grafo $K_3 \times K_3$ é harmônico.	30
3.2	Decomposição hamiltoniana de Waleski de $K_5 = \sigma^0(C5) \oplus \sigma^1(C5)$	32
3.3	Uma decomposição hamiltoniana de $K_3 \times K_5$, particionado em 4 ciclos hamiltonianos.	33
3.4	Uma representação de $K_3 \times K_9$ destacando os 8 ciclos hamiltonianos coloridos.	34

3.5	Uma representação de $K_3 \times K_5$ particionado em 4 ciclos hamiltonianos: (a) $C(1, 1)$, (b) $C(1, 2)$, (c) $C(1, 3)$ e (d) $C(1, 4)$, tais que todas as arestas e os vértices extremos das arestas com cor guia (roxa) estão coloridos.	36
3.6	Uma ilustração de $K_3 \times K_5$ destacando as arestas coloridas com a cor guia e seus vértices extremos coloridos.	37
3.7	Uma tabela composta pelos elementos da cor guia (roxa) em cada ciclo hamiltoniano de $K_3 \times K_5$, e sua representação usando cores dos vértices extremos para identificar os ciclos hamiltonianos que os contêm.	37
4.1	Grafo $C_5 \times C_5$	41
4.2	Uma 5-coloração total de $C_5 \times C_5$ e o respectivo grafo quociente $Q[C_5 \times C_5]$. . .	43
4.3	A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_5 \times C_n]$	44
4.4	A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_6 \times C_n]$	44
4.5	A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_8 \times C_n]$	44
4.6	A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_9 \times C_n]$	44
4.7	A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_{12} \times C_n]$	44
4.8	Uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_{11} \times C_n]$. Esta 5-coloração total é obtida colando uma vez a 5-coloração total do padrão destacado $Q[C_5 \times C_n]$ na 5-coloração total de $Q[C_6 \times C_n]$	46
4.9	Uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_{16} \times C_n]$. Esta 5-coloração total é obtida colando duas vezes a 5-coloração total do padrão destacado $Q[C_5 \times C_n]$ na 5-coloração total de $Q[C_6 \times C_n]$	46
4.10	Uma 5-coloração total de $C_6 \times C_8$ e uma coloração harmônica apresentada na prova do Teorema 4.2.	48
4.11	Uma 4-coloração total de $G \times K_2$ obtida de uma 4-coloração total de G	48

Lista de Tabelas

1.1	Densidade dos grafos Kneser.	8
2.1	A 3-clique-decomposição-ordenada de $K(6, 2)$	17
2.2	A 3-clique-decomposição-ordenada de $K(7, 2)$	17
3.1	Tabela contendo os elementos da cor guia do grafo $K_3 \times K_9$	38

Capítulo 1

Introdução

Grafo é uma ferramenta matemática que modela relações entre elementos de um conjunto. Um grafo simples G é um par ordenado (V, E) , no qual V é um conjunto não vazio de objetos denominados *vértices* e E é um subconjunto de pares distintos de V denominados *arestas*, e denotamos a aresta que possui vértices extremos v e w por vw . O grande alcance das aplicações da teoria dos grafos vem do fato de que as relações representadas pelos conjuntos das arestas podem ser qualquer tipo de relação entre os elementos de V , os quais também podem ser oriundos das mais diversas áreas. Por exemplo, se $V = \{c_1, \dots, c_n\}$ é um conjunto de computadores ligados em rede, uma aresta $c_i c_j$ pode indicar a existência de um link direto de comunicação entre os computadores c_i e c_j . Em um cenário completamente diferente, podemos ter um conjunto $V = \{p_1, \dots, p_n\}$ de pessoas que possuem conta no facebook e uma aresta $p_i p_j$ representando a existência de algum tipo de relação entre estas pessoas, por exemplo, a relação de amizade no facebook. Quando uma situação problema é modelada utilizando grafos, é possível concentrar esforços somente nos aspectos combinatórios relevantes do problema.

Um dos problemas motivadores da área da teoria dos grafos é o bem conhecido *Problema das 4 Cores*. Em 1852, o matemático Francis Guthrie, ao tentar colorir o mapa da Inglaterra, propôs o problema de determinar quantas cores bastavam para se colorir qualquer mapa que pudesse ser desenhado numa folha de papel de forma que regiões vizinhas possuíssem cores diferentes. Após um estudo mais detalhado, ele e demais pesquisadores conjecturaram que 4 cores sempre bastavam. A *Conjectura das 4 Cores* pode ser modelada como um problema de coloração dos vértices de um grafo, de forma que vértices representam as regiões e existe aresta entre os vértices quando as regiões são vizinhas. Após mais de cem anos, mais precisamente em 1976, os pesquisadores Appel e Haken provaram esta conjectura [2] e esta foi a primeira prova matemática com o auxílio de um computador. O famoso *Teorema das 4 Cores* é referência na área de teoria dos grafos.

Os problemas de coloração de grafos modelam situações de conflito e, em geral,

com o objetivo de utilizar o menor número possível de cores. O foco deste trabalho é o problema de coloração total de grafos. De uma forma simplificada, uma coloração total de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas do grafo, de forma que elementos que sejam adjacentes ou incidentes possuam cores diferentes. Apresentamos um exemplo de coloração total na Figura 1.1. O menor número de cores tal que o grafo admite uma coloração total é chamado de número cromático total e a conjectura fundamental do problema de coloração total, a *Conjectura da Coloração Total* (TCC do inglês: Total Coloring Conjecture), está aberta desde 1964 [5, 36] e afirma que todo grafo simples possui número cromático total igual a $\Delta + 1$ ou $\Delta + 2$, onde Δ é o grau máximo do grafo. Para os grafos cuja TCC é verificada, temos a classificação destes em Tipo 1, quando o número cromático total é $\Delta + 1$; e em Tipo 2, quando o número cromático total é $\Delta + 2$.

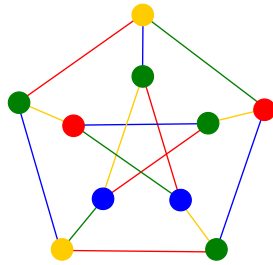


Figura 1.1: Uma coloração total do grafo de Petersen usando $\Delta + 1 = 4$ cores.

É fácil ver que o número cromático total de um grafo é pelo menos $\Delta + 1$, pois precisamos de Δ cores para colorir as arestas incidentes ao vértice de grau máximo do grafo e mais uma cor para colorir este próprio vértice. Para mostrar que um grafo é Tipo 1, basta apresentar uma coloração total com $\Delta + 1$ cores, porém para mostrar que um grafo é Tipo 2, é preciso provar que este não possui nenhuma coloração total com apenas $\Delta + 1$ cores e que este possui uma coloração total com $\Delta + 2$ cores (TCC).

Investigamos o problema de coloração total em grafos regulares. Sabemos que o problema de determinar o número cromático total de um grafo qualquer é NP-difícil [33]. Importante destacar que se a TCC for verificada para os grafos regulares de grau Δ , então ela é verificada para todos os grafos com grau máximo Δ [4]. Embora a TCC seja trivialmente verificada para todos os grafos bipartidos, o problema de determinar o número cromático total de um grafo bipartido k -regular permanece NP-difícil, para um valor fixo $k \geq 3$ [28], confirmando o quão desafiador é o problema da coloração total. Neste contexto, citamos alguns resultados recentes sobre coloração total de grafos regulares [12, 17, 24, 40].

Neste trabalho, apresentamos famílias infinitas de grafos regulares que são Tipo 1. Assim, para aqueles cuja TCC ainda estava em aberto, ao classificá-los quanto ao seu Tipo, verificamos também a conjectura. Nesta busca por grafos Tipo 1, estudamos propriedades estruturais dos grafos, utilizamos técnicas de de-

composição dos grafos e as aplicamos ao problema de coloração total. Usamos também a estratégia de colagem (já muito utilizada), de combinar colorações de grafos menores de forma a construir colorações de grafos maiores. Além disso, propomos e investigamos questões sobre o número cromático total de produto direto de grafos.

O desenvolvimento da pesquisa nos permitiu contribuir para o problema da coloração total nas seguintes classes de grafos: grafos Kneser, produto direto de grafos completos e produto direto de grafos ciclos. O tema da tese teve como principal motivação resultados parciais e problemas recentes existentes na literatura e que iremos mencionar a seguir.

Para a classe dos grafos Kneser, em 2020, Prajnanaswaroopo et al. [29] verificaram a TCC para uma família de grafos Kneser, conhecida como grafos ímpares. Nós mostramos que todos os grafos ímpares desta família são Tipo 1. Também trabalhamos com outra família infinita de grafos Kneser cuja TCC ainda não foi verificada. Nós conseguimos verificar a TCC para alguns grafos dessa família e apresentamos colorações totais para os demais grafos da família com $\Delta + 3$ ou $\Delta + 4$ cores. Ainda sobre os grafos Kneser, investigamos o problema de coloração de arestas e obtivemos resultados parciais (veja Cap. 2).

Com relação ao produto direto de grafos completos, o problema da coloração total tem sido bastante estudado [15, 20, 38]. Em 2020, Janssen e Mackeigan [20] mostraram que os grafos dessa classe são Tipo 1 se pelo menos um dos completos possuir número par de vértices, com exceção do grafo $K_2 \times K_2$ que é Tipo 2. Nesta tese, complementamos o resultado anterior, provando que o produto direto dos grafos completos, tal que ambos possuem número ímpar de vértices, também é Tipo 1, classificando assim todos os grafos dessa classe como Tipo 1, exceto pelo $K_2 \times K_2$.

Com relação ao produto direto dos grafos ciclos, Geetha e Somasundaram [15] mostraram que algumas famílias dessa classe são Tipo 1 e conjecturaram que todos os grafos dessa classe seriam Tipo 1, com exceção do $C_4 \times C_4$ que é Tipo 2. Nesta tese, verificamos a conjectura de Geetha e Somasundaram, obtendo colorações totais Tipo 1 para todos os grafos da classe, incluindo as famílias já classificadas por eles [15], exceto pelo $C_4 \times C_4$.

Além disso, investigamos a coloração total do produto direto de grafos em geral, conseguindo obter como consequência de alguns resultados, que se um grafo é Tipo 1, o produto direto dele com qualquer grafo bipartido também é Tipo 1. Propomos uma questão que busca compreender se o produto direto de um grafo Tipo 1 com um grafo qualquer obedeceria a mesma classificação em Tipo 1. Por fim e para ajudar a resolver essa questão, obtivemos um resultado que envolve uma propriedade de grafos regulares Tipo 1.

Este doutorado teve início em março de 2017 sob a orientação de Celina Miraglia Herrera de Figueiredo (professora titular da COPPE/UF RJ, Universidade Federal

do Rio de Janeiro) e sob a coorientação de Diana Sasaki Nobrega (professora adjunta do IME/UERJ, Universidade do Estado do Rio de Janeiro) e Luis Antonio Brasil Kowada (professor associado do IC/UFF, Universidade Federal Fluminense). Esta tese incorpora os resultados desenvolvidos com o pesquisador estrangeiro Mario Valencia-Pabon (professor da Université Sorbonne Paris Nord, França), e também com a pesquisadora Diane Castonguay (professora titular do INF/UFG, Universidade Federal de Goiás).

Com o objetivo de facilitar a leitura da tese, optamos por não inserir integralmente todas as provas dos resultados obtidos. De uma forma geral, em algumas provas, inserimos esboços das mesmas e remetemos o leitor às referências onde se encontram os detalhes de cada prova. As seguintes referências possuem resultados desta tese e, portanto, encontram-se anexadas a ela:

- Os resultados do Capítulo 2, que foram publicados na revista “Journal of Combinatorial Optimization” e estão presentes no Apêndice A.
- O Capítulo 3 apresenta os resultados submetidos na versão completa para a revista “Graphs and Combinatorics” em setembro de 2021, e que estão presentes no Apêndice B; estes já foram apresentados no LAGOS 2021 e serão publicados na revista Procedia Computer Science.
- E finalmente, o Capítulo 4 engloba os resultados que foram submetidos para a revista “Discrete Applied Mathematics” - Edição especial CTW 2020 em julho de 2021, estes presentes no Apêndice C.

Após esta introdução sobre o tema abordado, passamos a apresentar o que fizemos nesta caça aos grafos Tipo 1.

1.1 Definições e Notações

Esta seção é dedicada às definições e notações principais desta tese. Ao longo do texto, apresentamos mais algumas definições, notações e conceitos que serão utilizados a partir de um determinado ponto da tese ou somente em um capítulo ou seção. As definições foram extraídas das principais referências sobre coloração total, produto direto, grafos Kneser e também do livro do Bondy e Murty [7].

Como visto anteriormente, um *grafo simples* denotado por $G(V, E)$, ou simplesmente G é formado por um conjunto não vazio $V := V(G)$ de objetos denominados *vértices* e um subconjunto $E := E(G)$ de pares distintos de $V(G)$ denominados *arestas*. Denotamos por $S(G) := V(G) \cup E(G)$ o conjunto dos elementos de G , isto é, seus vértices e arestas. Por simplicidade, escrevemos a aresta que possui extremos

v e w como vw . Um *subgrafo* de G é um grafo cujo conjunto de vértices é um subconjunto de $V(G)$ e o conjunto de arestas é um subconjunto de $E(G)$. A *ordem* de um grafo G é a cardinalidade do conjunto de vértices, ou seja, o número de vértices de G .

Um grafo G é *conexo* se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices de G . Caso contrário, G é chamado de *desconexo*. As *componentes conexas* de G são os subgrafos conexos maximais de G , ou seja, aqueles que não estão contidos em nenhum outro subgrafo conexo.

Quando um vértice v é um extremo de $e \in E(G)$, dizemos que v e e são *incidentes*. Dois elementos de $E(G)$ incidentes ao mesmo vértice, bem como dois vértices incidentes a uma mesma aresta, são chamados de *adjacentes* (ou *vizinhos*). O *grau* de um vértice v é o número de arestas incidentes a v . O *grau máximo* de um grafo G , denotado por $\Delta(G)$, é o maior grau dos vértices do grafo G . Em um grafo regular, todos os vértices possuem o mesmo grau d , e assim podemos chamar o grafo de *d-regular*.

Uma *clique* em um grafo é um conjunto de vértices dois a dois adjacentes. Um *conjunto independente de vértices* de um grafo é um conjunto composto de vértices mutuamente não adjacentes. Um *conjunto independente de arestas* de G é aquele composto de arestas mutuamente não incidentes e é chamado de *emparelhamento*. Se G possuir um número par n de vértices e existir um emparelhamento no grafo de tamanho $\frac{n}{2}$, este é chamado de *emparelhamento perfeito*. O *número de independência* de G é a cardinalidade máxima de um conjunto independente de vértices.

Um *caminho* em G é uma sequência finita ou infinita de vértices distintos conectados por uma sequência de arestas. A *distância entre dois vértices* x e y é o comprimento do menor caminho de x a y no grafo. O *diâmetro* de G é a maior distância entre qualquer par de vértices do grafo.

O *complemento de um grafo* G é o grafo \overline{G} que possui o mesmo conjunto de vértices de G , e tal que dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são em G . O *grafo linha* G' de G é um grafo cujos vértices representam as arestas de G , e dois vértices são adjacentes em G' se e somente se suas arestas correspondentes compartilham um mesmo vértice em G . Dizemos que dois grafos G e H são *isomorfos* se existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de G e os vértices de H que preserve a relação de adjacência entre vértices e arestas.

O grafo *ciclo*, denotado por C_n , $n \geq 3$, é o grafo formado por uma sequência de vértices conectados por arestas, com o vértice inicial sendo o mesmo vértice final, grafo este 2-regular conexo. O grafo *completo* com n vértices, denotado por K_n , $n \geq 1$, é o grafo no qual quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. Um grafo *bipartido* é o grafo cujos vértices podem ser particionados em dois conjuntos (partes ou partições), nos quais não há arestas entre vértices de um mesmo conjunto.

Um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos com número ímpar de vértices. O grafo *bipartido completo*, denotado por $K_{m,n}$, $m, n \geq 1$, é o grafo tal que cada vértice de uma partição é adjacente a todos os vértices da outra partição.

A *densidade de um grafo* é a razão entre a quantidade de arestas do grafo e a quantidade de arestas do grafo completo com a mesma quantidade de vértices. Chamamos um grafo de *esparso* se essa razão se aproxima de 0, e chamamos um grafo de *denso*, se essa razão se aproxima de 1.

1.1.1 Coloração de grafos

Uma *coloração de um grafo* $G = (V(G), E(G))$ é uma função $\pi : S' \rightarrow C$ que atribui cores de C a um conjunto de elementos $S' \subset S(G)$ de tal forma que elementos incidentes ou adjacentes $x, y \in S(G)$ sempre recebem cores diferentes – ou seja, $\pi(x) \neq \pi(y)$. Se $C = 1, 2, \dots, k$, então π é dito uma *k-coloração*. Em particular, se $S' = V(G)$, então π é uma *k-coloração de vértices*; se $S' = E(G)$, então π é uma *k-coloração de arestas*; se $S' = S(G)$, então π é uma *k-coloração total*.

O *número cromático* de G , denotado por $\chi(G)$, é o menor k tal que G possui uma *k-coloração de vértices*. O *índice cromático* de G , denotado por $\chi'(G)$, é o menor k tal que G possui uma *k-coloração de arestas*. O *número cromático total* de G , denotado por $\chi_T(G)$, é o menor k tal que G possui uma *k-coloração total*. São NP-difíceis os problemas de se determinar o número cromático [23], o índice cromático [19] e o número cromático total [33] de um grafo. Nesse sentido, na área de coloração de grafos é muito comum nos concentrarmos em investigar classes de grafos.

O índice cromático de um grafo G está relacionado com o seu grau máximo $\Delta(G)$. É fácil ver que todo grafo G precisa de pelo menos $\Delta(G)$ em uma coloração de arestas: considere um vértice de maior grau $\Delta(G)$, então precisamos de $\Delta(G)$ cores diferentes para as $\Delta(G)$ arestas incidentes nele. Pelo Teorema de Vizing [36], temos que $\chi'(G)$ é igual a $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$. Se $\chi'(G) = \Delta(G)$, então G é dito *Classe 1*, caso contrário G é dito *Classe 2*.

Assim como o índice cromático, o número cromático total de um grafo também está relacionado com o seu grau máximo, como já mencionamos anteriormente. A *Conjectura da Coloração Total* (TCC) [5, 36] afirma que $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Um grafo é dito *Tipo 1* ou *Tipo 2* se o seu número cromático total é $\Delta(G)+1$ ou $\Delta(G)+2$, respectivamente. A TCC foi verificada para todos os grafos com grau máximo 4 [25] e grafos com grau máximo grande [18], mas não foi verificada para todos os grafos regulares. Existem poucas classes de grafos para as quais o número cromático total foi determinado, apresentamos a seguir algumas classes bem conhecidas e que são abordadas nesta tese. O grafo C_n é Tipo 1, se n é múltiplo de 3 e Tipo 2, caso

contrário [37]. O grafo K_n é Tipo 1 se n é ímpar e Tipo 2, se n é par [37]. Por último, o grafo $K_{m,n}$ é Tipo 1 se $m \neq n$ e Tipo 2, se $m = n$ [37].

Uma k -coloração de arestas parcial de um grafo G é uma atribuição de k cores a um subconjunto de arestas de G de forma que arestas adjacentes no subconjunto tenham cores diferentes. Uma k -coloração total parcial de um grafo G é uma atribuição de k cores a um subconjunto de elementos de G de forma que os elementos adjacentes ou incidentes no subconjunto tenham cores diferentes.

Em uma coloração de um grafo, chamamos de *classe de cor* o conjunto de elementos que possuem aquela cor.

Um grafo regular G é *harmônico* (ou *conformable*) se G admite uma coloração de vértices com $\Delta(G) + 1$ cores tal que o número de vértices em cada classe de cor tem a mesma paridade que $|V(G)|$, conforme definido por Chetwynd e Hilton [9]. Teses de Doutorado que envolvem grafos harmônicos pioneiras no Brasil podem ser encontradas em [8, 27, 31]. Na Figura 1.2 é apresentado um exemplo de um grafo 4-regular com número ímpar de vértices e que é harmônico, pois na coloração apresentada cada uma das 5 classes de cor possui paridade ímpar, com um ou três vértices.

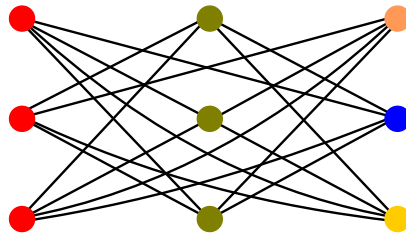


Figura 1.2: Um exemplo de grafo harmônico.

Uma k -coloração total equilibrada é uma k -coloração total em que o número de elementos em cada classe de cor difere no máximo em uma unidade.

A seguir, apresentaremos as classes de grafos que serão abordadas na tese.

1.2 Os grafos Kneser

Um s -subconjunto é um conjunto com s elementos. Dados inteiros positivos n, s com $n \geq 2s$, o grafo Kneser $K(n, s)$ é o grafo onde cada vértice está associado a um s -subconjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$. E dois vértices são adjacentes se os subconjuntos associados a eles são disjuntos. O grafo Kneser $K(n, s)$ tem $\binom{n}{s}$ vértices e é um grafo $\binom{n-s}{s}$ -regular. Por exemplo, note na Figura 1.3, que os vértices de $K(5, 2)$ são todas as combinações possíveis de cinco elementos tomados dois a dois e que o vértice $\{1, 3\}$ é adjacente ao vértice $\{2, 4\}$ mas não é adjacente ao vértice $\{1, 4\}$.

Para maiores informações sobre os grafos Kneser, veja [16]. Muitos parâmetros

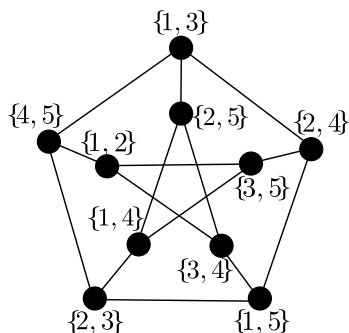


Figura 1.3: O grafo Kneser $K(5,2)$ é o famoso grafo de Petersen.

teóricos já são conhecidos para estes grafos, por exemplo, o número de independência [13], o número cromático [26] e o diâmetro [35].

Vamos nos concentrar em duas famílias não triviais bem conhecidas de grafos Kneser que se opõem quanto à densidade. Note que a família de grafos Kneser trivialmente esparsa é a família $K(2s, s)$, em vermelho na Tabela 1.1, em que o grafo corresponde a um emparelhamento perfeito; e a família de grafos Kneser trivialmente densa é a família $K(n, 1)$, em azul na Tabela 1.1, em que o grafo corresponde ao grafo completo K_n . Para $k \geq 3$, a família de grafos Kneser $K(2k - 1, k - 1)$, em verde na Tabela 1.1, é conhecida como família dos *grafos ímpares*, denotados por O_k , estes são os grafos Kneser conexos mais esparsos. Por outro lado, para $n \geq 4$, o caso não trivial mais denso é a família de grafos Kneser $K(n, 2)$, em laranja na Tabela 1.1, em que o grafo é o complemento do grafo Johnson $J(n, 2)$, conhecido por ser isomorfo ao grafo de linha do grafo completo K_n [16].

Tabela 1.1: Densidade dos grafos Kneser.

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$
$s = 1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$s = 2$	0,2	0,33	0,43	0,5	0,56	0,6	0,636	0,66667	0,69231	0,71429
$s = 3$	*	*	0,05	0,1	0,18	0,24	0,294	0,34146	0,38356	0,42105
$s = 4$	*	*	*	*	0,01	0,04	0,072	0,10638	0,1417	0,17467
$s = 5$	*	*	*	*	*	*	0,004	0,01302	0,02655	0,04355
$s = 6$	*	*	*	*	*	*	*	*	0,00108	0,00408

Em azul, a família de grafos Kneser trivialmente densa $K(n, 1) = K_n$, para $n \leq 13$. Em vermelho, a família de grafos Kneser trivialmente esparsa $K(2s, s)$, para $s \leq 6$. Em laranja, a família de grafos Kneser não triviais mais densa $K(n, 2)$, para $n \leq 13$. E em verde, os grafos ímpares $K(2k - 1, k - 1) = O_k$, que são os grafos Kneser conexos mais esparsos, considerando $k - 1 = s$ e $3 \leq k \leq 7$.

Pelo famoso Teorema de Erdős [13], a cardinalidade máxima de um conjunto independente em $K(n, s)$ (ou seja, o número de independência) é igual a $\binom{n-1}{s-1}$. Já para grafos Kneser não triviais (ou seja, quando $n > 2s$), um conjunto máximo independente I em $K(n, s)$ tem sempre um centro, ou seja, um inteiro $w \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $I = I_w = \{A \in V(K(n, s)) : w \in A\}$. Portanto, os únicos conjuntos independentes com tamanho máximo em $K(n, s)$ são os conjuntos I_i , para $1 \leq i \leq n$.

No Capítulo 2, apresentamos resultados de coloração de arestas e coloração total nas duas famílias de grafos Kneser mencionadas.

1.3 Produto direto de dois grafos

O *produto direto* (também chamado de *produto tensorial* ou *produto categórico*) de dois grafos G e H é um grafo denotado por $G \times H$, cujo conjunto de vértices é o produto cartesiano $V(G) \times V(H)$, para o qual os vértices (u, v) e (u', v') são adjacentes se e somente se $uu' \in E(G)$ e $vv' \in E(H)$. Claramente, o grau máximo satisfaz $\Delta(G \times H) = \Delta(G) \cdot \Delta(H)$ e o produto direto $G \times H$ é um grafo regular se e somente se G e H são grafos regulares. Na Figura 1.4 temos um exemplo do grafo produto direto de completos $K_3 \times K_3$, um grafo 4-regular.

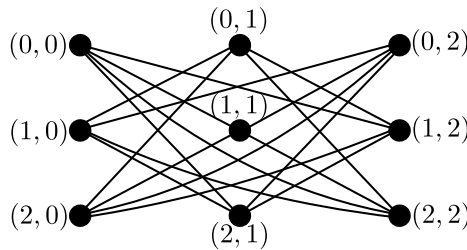


Figura 1.4: Uma representação do grafo produto direto $K_3 \times K_3$.

No que diz respeito à categoria de grafos, onde os objetos são grafos e os morfismos são homomorfismos de grafos, sabemos que o produto direto $G \times H$ é o produto categórico que é definido pelas projeções $p_G : G \times H \rightarrow G$ e $p_H : G \times H \rightarrow H$. O produto direto possui propriedade comutativa, ou seja, o grafo $G \times H$ é isomorfo ao grafo $H \times G$. Além disso, o produto direto $G \times H$ é bipartido se e somente se G ou H é bipartido, e é desconexo se e somente se G e H são grafos bipartidos. Em particular, no caso de G e H serem grafos bipartidos conexos, o produto direto $G \times H$ tem exatamente duas componentes bipartidas conexas.

Sejam $G_1 = (V, E_1)$ e $G_2 = (V, E_2)$ dois grafos com o mesmo conjunto de vértices V e onde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Denote por $\bigoplus_{i=1}^2 G_i$ o grafo soma direta $G = (V, E_1 \cup E_2)$ dos grafos G_1 e G_2 . Neste trabalho, usamos a conhecida propriedade de que o produto direto é distributivo sobre a união disjunta de grafos, ou seja, se $G = \bigoplus_{i=1}^t G_i$, onde G_i são subgrafos de arestas disjuntas de G e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_t)$, então $H \times G = \bigoplus_{i=1}^t (H \times G_i)$.

Com relação à coloração de vértices do grafo $G \times H$, Hedetniemi conjecturou em 1966 que o número cromático de $G \times H$ seria igual ao mínimo dos números cromáticos de G e H e recentemente, cinquenta anos depois, a conjectura foi refutada

por Shitov [32]. Com relação à coloração das arestas do grafo $G \times H$, Jaradat [21] provou que se G é Classe 1, então $G \times H$ também é Classe 1.

Quanto à coloração total do grafo produto direto, poucos são os resultados conhecidos. A maioria do produto direto de grafos já classificados é Tipo 1. Prnaver e Zmazek [30] verificaram a TCC para o produto direto de um caminho de comprimento maior ou igual a 3 e um grafo arbitrário G com índice cromático $\chi'(G) = \Delta(G)$. Além disso, eles provaram, para $m, n \geq 3$, que $\chi_T(P_m \times P_n)$ e $\chi_T(P_m \times C_n)$ são iguais a 5.

Nos Capítulos 3 e 4, apresentamos resultados de coloração total do produto direto de grafos completos e do produto direto de grafos ciclos, respectivamente.

Capítulo 2

A coloração de arestas e a coloração total de alguns grafos Kneser

Neste capítulo, investigamos a coloração total e a coloração de arestas de duas famílias de grafos Kneser. Algumas definições e conceitos sobre os grafos Kneser foram apresentados na Subseção 1.2.

Com relação à coloração total dos grafos Kneser, provamos que a família conexa mais esparsa dessa classe de grafos, os grafos ímpares, são Tipo 1. Também provamos que a família não trival mais densa dos grafos Kneser, os grafos $K(n, 2)$, com $n \geq 6$, satisfazem a TCC quando n é par, ou quando for ímpar não divisível por 3. Para os casos restantes de $K(n, 2)$, quando n for ímpar e divisível por 3, obtemos uma coloração total de $K(n, 2)$ com $\Delta(K(n, 2)) + 3$ cores quando $n \equiv 3 \pmod{4}$, e com $\Delta(K(n, 2)) + 4$ cores quando $n \equiv 1 \pmod{4}$. Também obtemos resultados em coloração de arestas dos grafos $K(n, 2)$, com $n \geq 6$. É um resultado conhecido que todo grafo regular com número ímpar de vértices é Classe 2, pois não possui emparelhamento perfeito. Nós apresentamos uma família infinita Classe 1 dos grafos Kneser $K(n, 2)$ com número par de vértices, a saber, quando $n \equiv 0 \pmod{4}$.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2.1 melhoramos o limite superior conhecido para grafos ímpares provando que todos os grafos ímpares são Tipo 1. A Seção 2.2 trata do grafo Kneser $K(n, 2)$ e é subdividida em três subseções. Na Subseção 2.2.1 apresentamos um tipo de decomposição extremamente útil, a decomposição do grafo Kneser em cliques, além de outras preliminares. Na Subseção 2.2.2 fornecemos o primeiro limitante superior conhecido para o número cromático total da família $K(n, 2)$. Já na Subseção 2.2.3 consideramos a coloração das arestas do grafo $K(n, 2)$, estabelecendo a primeira família infinita de grafos Kneser que são Classe 1.

2.1 Grafos Ímpares

Vale lembrar que os grafos ímpares são denotados por $O_k = K(2k-1, k-1)$ para $k \geq 2$, e é a família de grafos Kneser conexos mais esparsa dos grafos Kneser. Os grafos ímpares são grafos k -regulares. O primeiro grafo dessa família é o $O_2 = K(3, 1)$, que é o grafo ciclo C_3 .

Com relação à coloração de arestas, sabemos que todo grafo regular com número ímpar de vértices é Classe 2. Sabemos que o grafo de Petersen é Classe 2. Além deste, aqueles com um número ímpar de vértices, são precisamente os grafos O_k com $k = 2^r$, para algum inteiro positivo r . Em 1977, Fiorini e Wilson conjecturaram que para todos os outros valores de k , os grafos ímpares são Classe 1 [14] e essa conjectura ainda não foi provada.

Com relação à coloração total dos grafos ímpares, recentemente, Prajnanaswaroop et al. [29] verificaram a TCC para todo grafo ímpar $O_k = K(2k-1, k-1)$, para $k \geq 3$, usando a representação canônica de Biggs [6], onde um grafo ímpar é decomposto em um conjunto independente e um emparelhamento perfeito. Usamos esta representação para provar que todo grafo ímpar é Tipo 1.

Para a representação canônica de Biggs considere $w \in \{1, 2, \dots, 2k-1\}$ e considere o conjunto independente $I_w = \{A \in V(O_k) : w \in A\}$ de vértices com centro w . Seja $\overline{I_w} = V(O_k) \setminus I_w$ o subconjunto consistindo nos $(k-1)$ -subconjuntos de $\{1, 2, \dots, 2k-1\} - \{w\}$. Uma vez que cada $(k-1)$ -subconjunto é disjunto a precisamente um $(k-1)$ -subconjunto, os vértices correspondentes em $\overline{I_w}$ induzem um emparelhamento. Portanto, o conjunto de vértices $V(O_k)$ é particionado em I_w e $\overline{I_w}$ de forma que I_w seja um conjunto independente e $\overline{I_w}$ induz um emparelhamento M_w . Como O_k é k -regular, cada vértice de I_w é adjacente a k vértices de M_w , e cada vértice de M_w é adjacente a $k-1$ vértices de I_w . Dessa forma o grafo ímpar é decomposto em um conjunto independente I_w e um emparelhamento perfeito M_w (veja a Figura 2.1 (b) para um exemplo do grafo O_3 decomposto no conjunto independente I_5 e no emparelhamento M_5).

Teorema 2.1 [Teorema 1 do Apêndice A] *O grafo ímpar O_k , para $k \geq 3$, admite uma $(k+1)$ -coloração total.*

Esboço da prova: Como $\Delta(O_k) = k$, a ideia é obter uma $(k+1)$ -coloração total da seguinte forma: Primeiramente, atribua a cor $k+1$ a todos os vértices em I_w e todas as arestas em M_w (representada pela cor verde no grafo O_3 na Figura 2.1(b)). Para atribuir as outras k cores, construímos um grafo bipartido auxiliar A_k subdividindo as arestas de M_w , (ver Figura 2.1 (c)). Note que o grafo A_k é k -regular, e pelo Teorema de König, existe uma k -coloração ϕ de arestas para A_k (ver Figura 2.1 (c)). Atribua as cores dadas por ϕ a todas as arestas incidentes aos vértices de

I_w . Finalmente, atribua a cor dada por ϕ à aresta $x_i v_i$ (respectivamente $y_i v_i$) para cada vértice x_i (respectivamente y_i). Como as cores atribuídas por ϕ a esses pares de arestas de A_k são diferentes, os vértices adjacentes x_i e y_i em O_k têm cores diferentes na coloração total obtida. Portanto, $\chi_T(O_k) = \Delta(O_k) + 1 = k + 1$. Um exemplo da coloração total obtida é ilustrado na Figura 2.1 (a).

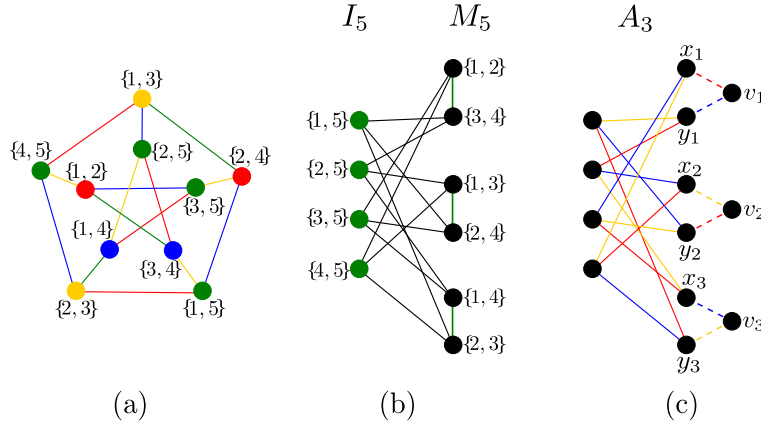


Figura 2.1: (a) O grafo de Petersen O_3 com a 4-coloração total obtida pelo Teorema 2.1. (b) A representação de O_3 decomposto no conjunto independente I_5 e no emparelhamento M_5 . (c) O grafo bipartido auxiliar A_3 com uma 3-coloração de arestas.

2.2 Grafos Kneser $K(n, 2)$, $n \geq 6$

O primeiro grafo Kneser desta família é o grafo desconexo $K(4, 2)$, sendo um emparelhamento perfeito com 6 vértices, que é Tipo 2. O segundo membro é o grafo de Petersen $K(5, 2)$ que é sabido ser Tipo 1 (veja a Figura 2.1 (a)). Vamos tratar dos grafos Kneser $K(n, 2)$, para $n \geq 6$. Vale lembrar que estes são grafos com $\binom{n}{2}$ vértices e $\binom{n-2}{2}$ -regulares. A Subseção 2.2.1 apresenta preliminares com notações, definições e a decomposição em cliques do grafo $K(n, 2)$. A Subseção 2.2.2 trata da coloração total dos grafos $K(n, 2)$ estabelecendo a TCC para n par e n ímpar não divisível por 3, e limitantes superiores para o número cromático total para famílias infinitas com n divisível por 3. E a Subseção 2.2.3 trata da coloração de arestas dos grafos Kneser $K(n, 2)$, obtendo o índice cromático de uma família infinita.

2.2.1 Preliminares

Para qualquer inteiro $n > 0$, denotamos por $[n]$ o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Lembrando que a notação $\{u, v\}$ é usada para uma aresta de extremos u e v em $K(n, 2)$.

A seguir, veremos propriedades de coloração dos grafos completos, que usaremos mais adiante. Sabemos que o índice cromático de um grafo completo, $\chi'(K_n)$, é n quando n é ímpar, e $n - 1$ quando n é par [3]. Na verdade, uma coloração de arestas

ótima (aquela que atinge o índice cromático) de K_n com n ímpar pode ser dada pela partição de arestas em E_1, \dots, E_n , onde $E_i = \{\{i - q, i + q\} : 1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}\}$, para $1 \leq i \leq n$, em que as operações aritméticas são tomadas módulo n (sendo $0 \equiv n$). Observe que quando n é ímpar, $i \notin E_i$ para todos os $i \in [n]$. Quando n é par, uma coloração de arestas ótima de K_n pode ser obtida a partir de uma coloração de arestas ótima de K_{n-1} onde cada conjunto E_i da partição de arestas de K_{n-1} é adicionado à aresta $\{i, n\}$.

Por exemplo, como podemos ver na Figura 2.2 (a), quando $n = 5$ obtemos a partição de arestas $E_1 = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, $E_2 = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}\}$, $E_3 = \{\{2, 4\}, \{1, 5\}\}$, $E_4 = \{\{3, 5\}, \{1, 2\}\}$ e $E_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, e para $n = 6$ a partição de arestas será $E_i \cup \{i, 6\}$ para $1 \leq i \leq 5$. Na Figura 2.2 (a), apresentamos uma 5-coloração de arestas de K_5 tal que a cor verde é atribuída ao $E_1 = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, a cor rosa é atribuída ao $E_2 = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}\}$, a cor preta é atribuída ao $E_3 = \{\{2, 4\}, \{1, 5\}\}$, a cor laranja é atribuída ao $E_4 = \{\{3, 5\}, \{1, 2\}\}$, e finalmente a cor azul é atribuída ao $E_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. E na Figura 2.2 (b), temos uma 5-coloração de arestas de K_6 obtida a partir da 5-coloração de arestas de K_5 , ou seja, a cor verde é atribuída ao $E_1 = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 6\}\}$, a cor rosa é atribuída ao $E_2 = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 6\}\}$, a cor preta é atribuída ao $E_3 = \{\{2, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}$, a cor laranja é atribuída ao $E_4 = \{\{3, 5\}, \{1, 2\}, \{4, 6\}\}$, e finalmente a cor azul é atribuída ao $E_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$.

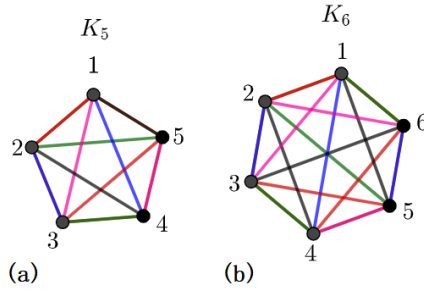


Figura 2.2: (a) Uma 5-coloração de arestas de K_5 . (b) Uma 5-coloração de arestas de K_6 obtida a partir da 5-coloração de arestas ótima de K_5 .

Quanto ao número cromático total de grafos completos $\chi_T(K_n)$, já vimos que $\chi_T(K_n) = n$ quando n é ímpar e $\chi_T(K_n) = n + 1$ quando n é par. Colorações totais ótimas (aquelas que atingem o número cromático total) de K_n podem ser obtidas da seguinte forma: Se n for ímpar, então uma coloração total ótima de K_n pode ser construída a partir dos conjuntos $S_i = \{i\} \cup E_i$, para $1 \leq i \leq n$, onde E_i é o conjunto de arestas descrito anteriormente. Se n for par, então uma coloração total ótima de K_n é obtida a partir de uma coloração ótima de arestas E_1, E_2, \dots, E_{n+1} de K_{n+1} como segue: para $1 \leq i \leq n$, seja E'_i o conjunto de arestas E_j em K_{n+1}

contendo a aresta $\{i, n + 1\}$. Assim, para $1 \leq i \leq n$, $S_i = \{i\} \cup (E'_i \setminus \{i, n + 1\})$ e $M_{n+1} = E_{n+1}$.

Por exemplo, veja a Figura 2.3. Quando $n = 4$, obtemos da coloração ótima de arestas E_1, \dots, E_5 de K_5 descrita anteriormente, uma coloração total ótima de K_4 como segue: $S_1 = \{\{1\}, \{2, 4\}\}$ (note que as arestas $\{2, 4\}$ e $\{1, 5\}$ pertencem ao mesmo conjunto de arestas E_3 de K_5), $S_2 = \{\{2\}, \{3, 4\}\}$ (note que as arestas $\{2, 5\}$ e $\{3, 4\}$ pertencem ao mesmo conjunto de arestas E_1 de K_5), $S_3 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$ (note que as arestas $\{3, 5\}$ e $\{1, 2\}$ pertencem ao mesmo conjunto de arestas E_4 de K_5), $S_4 = \{\{4\}, \{1, 3\}\}$ (note que as arestas $\{1, 3\}$ e $\{4, 5\}$ pertencem ao mesmo conjunto de arestas E_2 de K_5) e $M_5 = E_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$. Na Figura 2.3 (a) temos uma 5-coloração total de K_4 obtida a partir da 5-coloração de arestas de K_5 , ou seja, a cor verde é atribuída ao vértice 1 e à aresta $\{2, 4\}$, a cor rosa é atribuída ao vértice 2 e à aresta $\{3, 4\}$, a cor preta é atribuída ao vértice 3 e à aresta $\{1, 2\}$, a cor laranja é atribuída ao vértice 4 e à aresta $\{1, 3\}$, e finalmente a cor azul é atribuída às arestas $\{1, 4\}$ e $\{2, 3\}$. Na Figura 2.3 (b) temos uma 5-coloração total de K_5 tal que a cor verde é atribuída ao vértice 1 e às arestas $\{2, 5\}$ e $\{3, 4\}$, a cor rosa é atribuída ao vértice 2 e às arestas $\{1, 3\}$ e $\{4, 5\}$, a cor preta é atribuída ao vértice 3 e às arestas $\{2, 4\}$ e $\{1, 5\}$, a cor laranja é atribuída ao vértice 4 e às arestas $\{3, 5\}$ e $\{1, 2\}$, e finalmente a cor azul é atribuída ao vértice 5 e às arestas $\{1, 4\}$ e $\{2, 3\}$.

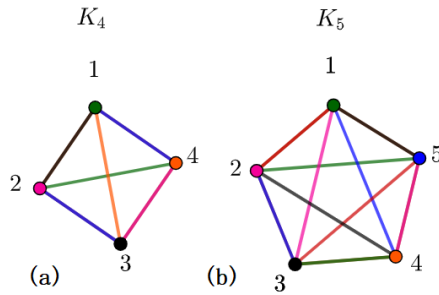


Figura 2.3: (a) Uma 5-coloração total de K_4 obtida a partir da 5-coloração de arestas de K_5 . (b) Uma 5-coloração total de K_5 .

Na Definição 2.1 vemos que o conjunto de vértices de um grafo pode ser particionado de modo a induzir cliques. A partição de um grafo em cliques pode auxiliar na obtenção da coloração total de um grafo, já que toda clique é um grafo completo.

Definição 2.1 *Seja $t \geq 2$, $r \geq 1$, e G um grafo com rt vértices. Dizemos que G admite uma t -clique-decomposição se os vértices de G podem ser particionados em r conjuntos, onde cada conjunto induz uma clique C_i , $i = 1, 2, \dots, r$, de tamanho t . Denotamos a t -clique-decomposição por $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$.*

Como consequência do Teorema de Baranyai [3], o conjunto de vértices do grafo Kneser pode ser particionado de modo a induzir cliques. A Figura 2.4 apresenta o grafo Kneser $K(6, 2)$ com uma 3-clique-decomposição $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_5$.

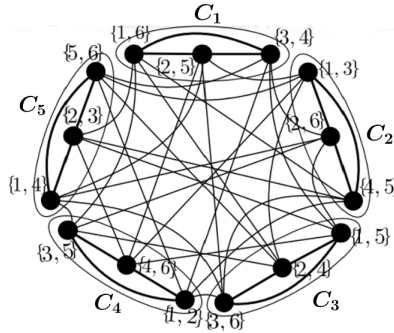


Figura 2.4: Uma 3-clique-decomposição do grafo Kneser $K(6, 2)$.

No Lema 2.2, vamos separar os vértices que induzem as cliques de $K(n, 2)$ de uma forma especial. Para isso, vamos utilizar a coloração de arestas ótima do grafo completo K_n .

Lema 2.2 [Lema 1 do Apêndice A] *Seja $n \geq 6$ e $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e além disso, $C_i = E_i$, para $1 \leq i \leq n$, quando n é ímpar (resp. para $1 \leq i \leq n - 1$, quando n é par). O grafo Kneser $K(n, 2)$ admite a seguinte t -clique-decomposição: uma decomposição em cliques de tamanho t do conjunto de vértices de $K(n, 2)$, onde os conjuntos E_i são os conjuntos de arestas de K_n que correspondem a uma coloração de arestas ótima de K_n .*

Seja $n \geq 6$ e seja o tamanho da clique $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Note que t divide o número de vértices $\binom{n}{2}$. De fato, $\binom{n}{2}$ é igual a tn quando n é ímpar (resp. $t(n - 1)$ quando n é par). Portanto, há uma decomposição simples do conjunto de vértices de $K(n, 2)$ induzidos em cliques de tamanho t .

Como exemplo do Lema 2.2, note na Figura 2.4 que os vértices que induzem cada clique C_i de $K(6, 2)$, para $1 \leq i \leq 5$, representam as arestas do conjunto correspondente da coloração ótima de arestas E_i , para $1 \leq i \leq 5$ de K_6 visto anteriormente ($E_1 = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}, \{1, 6\}\}$, $E_2 = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}, \{2, 6\}\}$, $E_3 = \{\{2, 4\}, \{1, 5\}, \{3, 6\}\}$, $E_4 = \{\{3, 5\}, \{1, 2\}, \{4, 6\}\}$, $E_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$).

A partir de agora, queremos dar uma ordem aos vértices que induzem cada clique, pois usamos a posição desses vértices na clique para a obtenção da coloração total parcial de $K(n, 2)$. Usamos uma t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, 2)$, onde cada clique C_i na decomposição é um conjunto ordenado com as seguintes propriedades:

- (i) Cada vértice $\{a, b\}$ em C_i é ordenado, ou seja, $a < b$.

(ii) Seja o tamanho da clique $t = |C_i| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Se existe um vértice $\{j, b\} \in C_i$, com $j < b$ e $1 \leq j \leq t$, então $\{j, b\}$ é o j -ésimo vértice na clique C_i , que é denotado por C_i^j . Caso contrário, as posições que faltam são preenchidas em ordem crescente pelos vértices restantes que são ordenados de forma lexicográfica ($\{a, b\} < \{a', b'\}$ se e somente se $a < a'$ ou, $a = a'$ e $b < b'$).

A Tabela 2.1 apresenta a 3-clique-decomposição-ordenada de $K(6, 2)$. E a Tabela 2.2 mostra a 3-clique-decomposição-ordenada de $K(7, 2)$.

Tabela 2.1: A 3-clique-decomposição-ordenada de $K(6, 2)$.

j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
1	{1, 6}	{1, 3}	{1, 5}	{1, 2}	{1, 4}
2	{2, 5}	{2, 6}	{2, 4}	{4, 6}	{2, 3}
3	{3, 4}	{4, 5}	{3, 6}	{3, 5}	{5, 6}

Tabela 2.2: A 3-clique-decomposição-ordenada de $K(7, 2)$.

j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	{4, 5}	{1, 3}	{1, 5}	{1, 7}	{1, 2}	{1, 4}	{1, 6}
2	{2, 7}	{4, 7}	{2, 4}	{2, 6}	{4, 6}	{2, 3}	{2, 5}
3	{3, 6}	{5, 6}	{6, 7}	{3, 5}	{3, 7}	{5, 7}	{3, 4}

Pela construção da t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, 2)$ temos a seguinte importante observação.

Observação 1 *Seja $n \geq 6$ e o tamanho da clique $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Seja o número de cliques $r = \binom{n}{2}/t$ e seja $C_1 \cup \dots \cup C_r$ a t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, 2)$ descrita anteriormente. Temos que:*

- i. Se n é par, então para $1 \leq i \leq r$: $1 \in C_i^1$; e $2 \in C_i^2$ exceto quando $i = \frac{n+2}{2}$.*
- ii. Se n é ímpar, então para $1 \leq i \leq r$: $1 \in C_i^1$ exceto quando $i = 1$; e $2 \in C_i^2$ exceto quando $i = 2$ e $i = \frac{n+3}{2}$. Além disso, os vértices C_1^1 , C_2^2 e $C_{\frac{n+3}{2}}^2$ não possuem arestas entre si.*

De fato, note que por construção, se n é par, então $C_{\frac{n+2}{2}}^2 = \{\frac{n+2}{2}, n\}$. Note na Tabela 2.1 que na 3-clique-decomposição-ordenada de $K(6, 2)$, temos que o elemento 1 pertence às cliques na primeira posição (primeira linha), e o elemento 2 pertence às cliques na segunda posição (segunda linha) exceto em C_4 . Além disso, se n é ímpar, então $C_1^1 = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}$, $C_2^2 = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+7}{2}\}$, e $C_{\frac{n+3}{2}}^2 = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+5}{2}\}$. Então, por definição de $K(n, 2)$, esses vértices não possuem arestas entre si. Na Tabela 2.2 podemos observar na 3-clique-decomposição-ordenada de $K(7, 2)$, que o elemento 1 pertence às cliques na primeira posição (primeira linha), exceto em C_1 ; e o elemento 2 pertence às cliques na segunda posição (segunda linha), exceto em C_2 e em $C_{\frac{n+3}{2}} = C_5$. Além

disso, os vértices $C_1^1 = \{4, 5\}$, $C_2^2 = \{4, 7\}$ e $C_5^2 = \{4, 6\}$ não possuem arestas entre si.

A seguir, vamos definir um subgrafo de $K(n, 2)$ em que as arestas das cliques são removidas e assim, as partições formam conjuntos independentes. Este grafo será importante para a obtenção da coloração total parcial do grafo $K(n, 2)$.

Definição 2.2 *Seja $n \geq 6$, $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $r = \binom{n}{2}/t$ e seja $C_1 \cup \dots \cup C_r$ a t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, 2)$. Denote por $B(n, 2)$ o grafo r -partido obtido de $K(n, 2)$ pela remoção das arestas de cada clique C_i . Cada partição de $B(n, 2)$ é o conjunto independente \overline{C}_i . Além disso, para $1 \leq i \neq j \leq r$, denote por $B_{i,j}(n, 2)$ o subgrafo bipartido de $B(n, 2)$ induzido por $\overline{C}_i \cup \overline{C}_j$.*

O Lema 2.3 determina o grau dos vértices dos grafos bipartidos $B_{i,j}(n, 2)$ em $B(n, 2)$, para $1 \leq i \neq j \leq r$. Utilizamos esses grafos bipartidos no algoritmo que obtém uma coloração total parcial de $K(n, 2)$, na Subseção 2.2.2.

Lema 2.3 *[Lema 2 do Apêndice A] Seja $n \geq 6$, $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $r = \binom{n}{2}/t$. Para $1 \leq i \neq j \leq r$, o subgrafo $B_{i,j}(n, 2)$ possui as seguintes propriedades:*

- (i) *Se n é par, então $B_{i,j}(n, 2)$ é $(t - 2)$ -regular;*
- (ii) *Se n é ímpar, então $\Delta(B_{i,j}(n, 2)) = t - 1$. Além disso, cada $B_{i,j}(n, 2)$ contém exatamente dois vértices, um em \overline{C}_i e o outro em \overline{C}_j com grau $t - 1$, e esses dois vértices não são adjacentes quando n é divisível por 3 ($n = 3q$, para algum $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$) e $j = (i \pm q) \pmod n$; caso contrário, esses dois vértices são adjacentes.*

Na Figura 2.5 apresentamos exemplos de subgrafos bipartidos de $B(n, 2)$, para $t = 3$, para n par e para n ímpar. A Figura 2.5 (a) apresenta o grafo bipartido 1-regular $B_{1,2}(6, 2)$. E a Figura 2.5 (b) apresenta o grafo bipartido $B_{1,2}(7, 2)$ onde os vértices $\{2, 7\}$ e $\{1, 3\}$ possuem grau máximo igual a 2. Além disso, sabemos que estes últimos são adjacentes entre si, já que $n = 7$ não é divisível por 3.

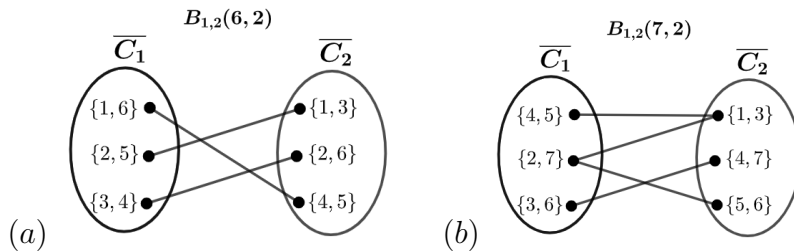


Figura 2.5: (a) Uma representação do subgrafo bipartido $B_{1,2}(6, 2)$. (b) Uma representação do subgrafo bipartido $B_{1,2}(7, 2)$.

No Lema 2.4, definimos um grafo 2-regular, para n ímpar e não divisível por 3, cujas arestas são formadas entre os vértices de grau $t - 1$ de todos os possíveis

subgrafos bipartidos $B_{i,j}(n, 2)$, para $1 \leq i \neq j \leq r$. As arestas desse grafo 2-regular não serão coloridas pelo algoritmo proposto na Subseção 2.2.2 que obtém uma coloração total parcial de $K(n, 2)$.

Lema 2.4 [Lema 3 do Apêndice A] *Seja $n > 6$ um inteiro ímpar tal que n não seja divisível por 3. Seja $B'(n, 2)$ o grafo n -partido tendo o conjunto de vértices de $B(n, 2)$ e onde para $1 \leq i \neq j \leq n$ há apenas uma aresta entre as partes \overline{C}_i e \overline{C}_j que é a aresta entre os dois únicos vértices de grau $t - 1$ em $B_{i,j}(n, 2)$. Assim, $B'(n, 2)$ é um grafo 2-regular n -partido.*

Como exemplo, considere a Figura 2.6 que apresenta o grafo $B'(7, 2)$, que é um grafo 2-regular e 7-partido. Como $n = 7$ é ímpar e não divisível por 3, note que entre os conjuntos independentes \overline{C}_i e \overline{C}_j em $B_{i,j}(7, 2)$, para $1 \leq i \neq j \leq 7$, os dois únicos vértices de grau $t - 1$ são adjacentes, um em \overline{C}_i e outro em \overline{C}_j .

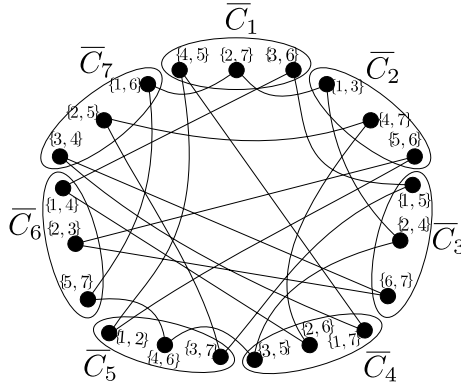


Figura 2.6: Ilustração do grafo $B'(7, 2)$.

2.2.2 Um limitante superior para o número cromático total

Esta subseção é dedicada a explicar como foram obtidos os limitantes do número cromático total de $K(n, 2)$ com $n \geq 6$, apresentados no Teorema 2.5. Considere o grafo $K(n, 2)$ decomposto em r cliques de tamanho $t = |C_i| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, denotado por $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$, conforme apresentado na Subseção 2.2.1.

Teorema 2.5 [Teorema 2 do Apêndice A] *Seja $n \geq 6$. O número cromático total do grafo Kneser $K(n, 2)$ é limitado superiormente como segue:*

$$\chi_T(K(n, 2)) \leq \begin{cases} \Delta(K(n, 2)) + 2 & : \text{ se } n \text{ par, ou } n \text{ ímpar e não divisível por 3;} \\ \Delta(K(n, 2)) + 3 & : \text{ se } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ e divisível por 3;} \\ \Delta(K(n, 2)) + 4 & : \text{ se } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ e divisível por 3.} \end{cases}$$

A prova na íntegra se encontra nas Subseções 3.2 e 3.3 do Apêndice A.

A ideia da prova é obtermos inicialmente uma $(t-2)r$ -coloração total parcial de $K(n, 2)$, onde $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, através do Algoritmo 1. Depois, investigamos como colorir os vértices e arestas restantes considerando a paridade de n e t e a divisibilidade de n por 3.

Algumas definições são necessárias para o entendimento do Algoritmo 1. Seja $t = |C_i|$ e seja S_p , para $1 \leq p \leq t$, o conjunto dos elementos da p -ésima classe de cor de uma coloração total do grafo completo K_t , conforme apresentado na Subseção 2.2.1. Lembre-se que quando t é par, devemos considerar ainda o emparelhamento perfeito M_{t+1} formando a $(t+1)$ -ésima classe de cor em K_t . Então:

- Suponha que t é ímpar. Denotamos por $S_{p,i}$, com $1 \leq p \leq t$, o conjunto dos elementos da p -ésima classe de cor de uma coloração total da clique C_i , formado por um vértice C_i^p e pelas arestas $\{C_i^w, C_i^z\}$ tal que $\{w, z\} \in S_p$.
- Suponha que t é par. Similarmente ao caso ímpar, mas considerando a coloração total de K_t com t par e $M_{t+1,i}$, onde $M_{t+1,i}$ denota o emparelhamento perfeito em C_i de tamanho $\frac{t}{2}$ formado pelas arestas $\{C_i^w, C_i^z\}$ tal que $\{w, z\} \in M_{t+1}$.

Considere ainda o grafo $B(n, 2)$ conforme a Definição 2.2 da Subseção 2.2.1. Vale lembrar que as partições em $B(n, 2)$ são conjuntos independentes. No Algoritmo 1, a escolha de um subconjunto de arestas E' que são retiradas de $B(n, 2)$ será apresentada mais adiante, pois depende da paridade de n .

O Algoritmo 1 retorna uma $(t-2)r$ -coloração total parcial de $K(n, 2)$ para elementos dentro das cliques (etapa (i)) e para as arestas entre partições (etapa (ii)).

Algoritmo 1:

Entrada: Seja $n \geq 6$, $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $r = \binom{n}{2}/t$. Seja $C_1 \cup \dots \cup C_r$ uma t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, 2)$. Seja E' um subconjunto de arestas (possivelmente vazio) em $B(n, 2)$ e seja $B^*(n, 2)$ o grafo $B(n, 2)$ sem as arestas em E' . Além disso, assuma que para cada $1 \leq i \neq j \leq r$, o subgrafo bipartido $B_{i,j}^*(n, 2)$ de $B^*(n, 2)$ possui grau máximo $(t-2)$ e seja $F_{i,j}^1 \cup \dots \cup F_{i,j}^{t-2}$ uma $(t-2)$ -coloração de arestas ótima de $B_{i,j}^*(n, 2)$.

Saída: Uma $(t-2)r$ -coloração total parcial de $K(n, 2)$.

1. **Para $k = 1$ até $t - 2$ faça**
2. **Para $i = 1$ até r faça**
3. (i) Atribua a cor $i + r(k-1)$ ao conjunto independente de elementos $S_{k+2,i}$ da clique C_i em $K(n, 2)$.

4. (ii) Para todas as arestas $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. a i -ésima classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_r). Atribua a cor $i + r(k - 1)$ a todas as arestas em F_{i_1, i_2}^k de $B_{i, j}^*(n, 2)$.

O Algoritmo 1 apresenta uma $(t - 2)r$ -coloração total parcial de $K(n, 2)$ como segue: Em (i), para cada valor de k , o Algoritmo 1 colore $t - 2$ vértices e $\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor$ arestas. Mais precisamente, colorimos o vértice C_i^{k+2} e as arestas $\{C_i^w, C_i^z\}$ tal que $\{w, z\} \in S_{k+2}$ da clique C_i , para $1 \leq i \leq r$ com a cor $i + r(k - 1)$. Em (ii), o Algoritmo 1 colore algumas arestas de $B(n, 2)$, ou seja, arestas que estão entre partições. Para cada cor $i + r(k - 1)$, o Algoritmo 1 (ii) considera as arestas $\{i_1, i_2\}$ da i -ésima classe de cor de uma coloração ótima de arestas do completo K_r (ou equivalentemente podemos considerar os vértices $\{i_1, i_2\}$ de uma clique C_i), de modo que, para cada aresta $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (ou equivalentemente para cada vértice $\{i_1, i_2\} \in C_i$), vamos colorir com a cor k um emparelhamento perfeito em $B_{i_1, i_2}^*(n, 2)$, para $1 \leq i \neq j \leq r$, ou seja, entre as partições $\overline{C_{i_1}}$ e $\overline{C_{i_2}}$.

A Figura 2.7 apresenta os elementos coloridos com a cor 1 (laranja) pelo Algoritmo 1 em $K(7, 2)$. São os elementos em $S_{3,1}$ (i.e., o vértice $\{3, 6\}$ e a aresta $\{\{4, 5\}, \{2, 7\}\}$), e o conjunto de arestas em $F_{4,5}^1$ (i.e., $\{\{1, 7\}, \{4, 6\}\}, \{\{2, 6\}, \{3, 7\}\}$ e $\{\{3, 5\}, \{1, 2\}\}$), e em $F_{3,6}^1$ (i.e., $\{\{1, 5\}, \{2, 3\}\}, \{\{2, 4\}, \{5, 7\}\}$ e $\{\{6, 7\}, \{1, 4\}\}$) e em $F_{2,7}^1$ (i.e., $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}\}, \{\{4, 7\}, \{1, 6\}\}$ e $\{\{5, 6\}, \{3, 4\}\}$). De fato, note que E_1 , a primeira classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_7 , é o conjunto de arestas $\{\{4, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}\}$ (ou equivalentemente são os vértices de C_1).

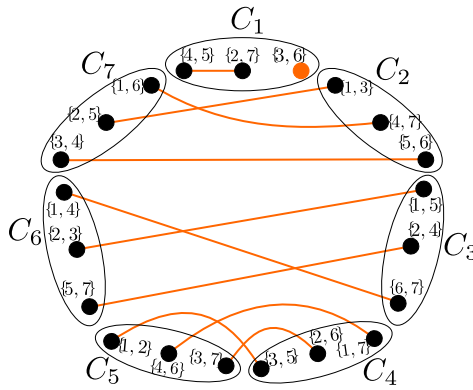


Figura 2.7: Uma ilustração dos elementos que são coloridos com a cor 1 (laranja) pelo Algoritmo 1.

Já a Figura 2.8 apresenta uma ilustração dos elementos coloridos pelo Algoritmo 1 com as $(t - 2)r = (3 - 2)7 = 7$ cores em um subgrafo de $K(7, 2)$. Como k recebe somente o valor 1 (para $t = 3$), para $1 \leq i \leq 7$, o Algoritmo 1 colore o conjunto independente de elementos $S_{3,i}$ da clique C_i , composta por uma aresta e um vértice com a cor i e, para todas as arestas $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. a i -ésima classe de

cor das arestas de uma coloração de arestas ótima de K_7), o Algoritmo 1 também colore com a cor i todas as arestas em F_{i_1, i_2}^1 .

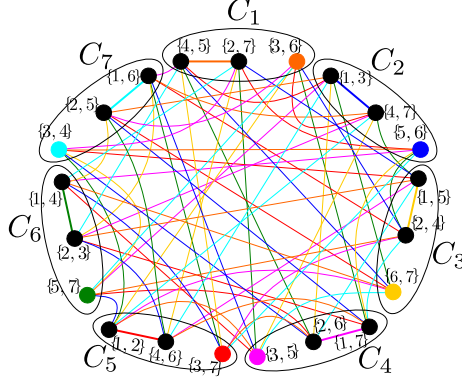


Figura 2.8: Uma ilustração do grafo de entrada do Algoritmo 1 de $K(7,2)$ destacando os elementos coloridos com 7 cores.

Lema 2.6 [Lema 4 do Apêndice A] *O Algoritmo 1 é correto e obtém uma coloração total parcial do grafo de entrada com $(t - 2)r$ cores.*

A partir de agora, estamos interessados em colorir os elementos que não foram coloridos pelo Algoritmo 1.

Para identificarmos o conjunto de arestas E' que foi utilizado no Algoritmo 1 e para colorir os vértices e as arestas restantes não coloridos no grafo $K(n, 2)$ após o Algoritmo 1, são considerados os seguintes casos: (a) Para n par, (b) para n ímpar e não divisível por 3, e finalmente, (c) para n ímpar e divisível por 3, com t par e t ímpar.

Vamos destacar somente os casos em que a TCC foi verificada para os grafos Kneser $K(n, 2)$ (itens (a) e (b)). No entanto a prova do Teorema 2.5 se encontra na íntegra na Subseção 3.3.2 do Apêndice A. Vale lembrar que $\Delta(K(n, 2)) = \binom{n-2}{2} = \frac{n^2-5n}{2} + 3$.

(a) Para n par, temos que $t = \frac{n}{2}$ e $r = \binom{n}{2}/t = n - 1$. Pelo Lema 2.3 (ii), sabemos que para cada $1 \leq i \neq j \leq r$, o subgrafo bipartido $B_{i,j}(n, 2)$ do grafo $B(n, 2)$ é $(t - 2)$ -regular. Portanto, podemos usar o Algoritmo 1 definindo $E' = \emptyset$ a fim de obter uma coloração total parcial de $K(n, 2)$ com $(t - 2)r = (\frac{n}{2} - 2)(n - 1) = \frac{n^2-5n}{2} + 2 = \Delta(K(n, 2)) - 1$ cores em que todas as arestas em $B(n, 2)$ são coloridas. Para completar a coloração total de $K(n, 2)$, é importante identificar os elementos que não são coloridos pelo Algoritmo 1. Precisamos considerar a paridade de t .

(i) Para t ímpar: como $\chi_T(K_t) = t$, resta colorir os conjuntos $S_{1,i}$ e $S_{2,i}$ de cada clique C_i , com $1 \leq i \leq r$. Claramente, para cada $1 \leq i \neq j \leq r$,

nenhuma aresta da clique C_i incide em qualquer aresta da clique C_j . Além disso, pela Observação 1 (i), $1 \in C_i^1$ e assim, podemos colorir todas as arestas e o vértice em cada $S_{1,i}$ com a cor $(t-2)r+1$. Novamente, pela Observação 1 (i), podemos colorir todas as arestas e o vértice em cada $S_{2,i}$ com a cor $(t-2)r+2$, exceto o vértice $C_{\frac{n+2}{2}}^2$, para o qual usamos a cor $(t-2)r+3$. Portanto, usamos no máximo $\Delta(K(n,2)) - 1 + 3 = \Delta(K(n,2)) + 2$ cores para a coloração total $K(n,2)$.

Para um exemplo, consulte a Figura 2.9, que ilustra uma 8-coloração total de $K(6,2)$, considerando a 5-coloração total parcial obtida pelo Algoritmo 1 representada pelas cores vermelho, azul, verde, amarelo e roxo. Para completar a coloração total parcial dada pelo Algoritmo 1, colorimos com a cor 6 (azul claro) os elementos em $S_{1,i}$ de cada clique C_i , e colorimos com a cor 7 (laranja) os elementos $S_{2,i}$, exceto para o vértice $C_4^2 = \{4,6\}$ em $S_{2,4}$ que precisa de uma cor diferente 8 (cinza).

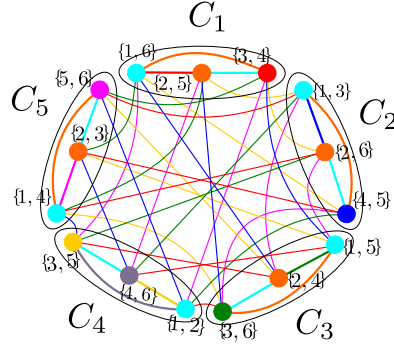


Figura 2.9: Uma 8-coloração total de $K(6,2)$.

- (ii) Para t par: Como $\chi_T(K_t) = t + 1$, resta colorir os conjuntos $S_{1,i}$, $S_{2,i}$ e $M_{t+1,i}$ de cada clique C_i , com $1 \leq i \leq r$. Procedemos de maneira semelhante ao caso em que t é ímpar para colorir os conjuntos $S_{1,i}$ com a cor $(t-2)r+1$. Para $i \neq \frac{n+2}{2}$, colorimos os conjuntos $S_{2,i}$ e $M_{t+1, \frac{n+2}{2}}$ com a cor $(t-2)r+2$ e os conjuntos $S_{2, \frac{n+2}{2}}$ e $M_{t+1,i}$ com a cor $(t-2)r+3$. Observe que, por construção, obtemos uma coloração total porque a única clique cujo segundo vértice não é da forma $\{2, b\}$ com $2 < b \leq n$, é a clique $C_{\frac{n+2}{2}}$ e, portanto, qualquer aresta em $M_{t+1, \frac{n+2}{2}}$ é incidente a um vértice $\{2, b\}$. Assim, obtemos uma coloração total de $K(n,2)$ com $\Delta(K(n,2)) + 2$ cores.

Isso verifica a TCC para os grafos Kneser $K(n,2)$ para n par.

- (b) Para n ímpar e não divisível por 3, temos que $t = \frac{n-1}{2}$ e $r = \binom{n}{2}/t = n$. Para cada i, j , com $1 \leq i < j \leq r$, pelo Lema 2.3 (ii), o grafo bipartido $B_{i,j}(n,2)$ tem grau máximo igual a $t-1$. Pelo Lema 2.4, o subgrafo $B'(n,2)$ de $B(n,2)$ é 2-regular. Seja E' o conjunto de arestas de $B'(n,2)$. Pelos Lema 2.3 (ii) e

Lema 2.4, os subgrafos bipartidos do grafo $B(n, 2)$ sem o conjunto de arestas E' são $(t - 2)$ -regular. Portanto, aplicando o Algoritmo 1 ao $K(n, 2)$, obtemos uma coloração parcial total de $K(n, 2)$ com $(t - 2)r = (\frac{n-1}{2} - 2)n = \frac{n^2-5n}{2} = \Delta(K(n, 2)) - 3$ cores. Para completar a coloração total de $K(n, 2)$, precisamos considerar a paridade de t .

- (i) Para t ímpar: resta colorir os conjuntos $S_{1,i}$ e $S_{2,i}$ de cada clique C_i , com $1 \leq i \leq r$. Claramente, para cada $1 \leq i \neq j \leq r$, nenhuma aresta de C_i incide em qualquer aresta de C_j . Além disso, pela Observação 1 (ii), $1 \in C_i^1$ exceto quando $i = 1$; e $2 \in C_i^2$ exceto quando $i = 2$ e $i = \frac{n+3}{2}$. Então, colorimos os elementos nos conjuntos $S_{1,i}$ e $S_{2,i}$ com as cores $\Delta(K(n, 2)) - 2$ e $\Delta(K(n, 2)) - 1$ respectivamente, exceto os vértices C_1^1 , C_2^2 e $C_{\frac{n+3}{2}}^2$ que, novamente pela Observação 1 (ii), não são adjacentes entre si. Resta colorir as arestas em $B'(n, 2)$ e o conjunto de vértices $\{C_1^1, C_2^2, C_{\frac{n+3}{2}}^2\}$. Pelo Lema 2.4, $B'(n, 2)$ tem grau máximo igual a 2. Portanto, três novas cores são suficientes para colorir as arestas em $B'(n, 2)$ e os vértices em $\{C_1^1, C_2^2, C_{\frac{n+3}{2}}^2\}$. Portanto, usamos no máximo $\Delta(K(n, 2)) - 1 + 3 = \Delta(K(n, 2)) + 2$ cores para a coloração total $K(n, 2)$. Isso verifica a TCC para os grafos Kneser $K(n, 2)$ para n não divisível por 3 e $n \not\equiv 1 \pmod{4}$.
- (ii) Para t par: Observe que, neste caso, $n \equiv 1 \pmod{4}$. Para completar a coloração total de $K(n, 2)$, resta colorir os conjuntos $S_{1,i}$, $S_{2,i}$, as arestas $M_{t+1,i}$ de cada clique C_i , com $1 \leq i \leq r$ e o conjunto de arestas $E' = B'(n, 2)$. Lembre-se de que cada clique pode ser descrita como um grafo completo K_t que admite uma $(t + 1)$ -coloração total quando t é par.

Considere a clique $C_1 = \{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_t y_t\}$ tal que $2 \leq x_i \neq y_i \leq n$ e seja $d_i = x_i - 1$. Observe que o grafo $B'(n, 2)$ pode ser descrito como t ciclos disjuntos de tamanho n . Sem perda de generalidade, podemos construir esses t ciclos disjuntos de tamanho n a partir de C_1 da seguinte maneira: a partir de cada $x_i y_i \in C_1$, com $1 \leq i \leq t$, forme os ciclos considerando o módulo de inteiros n por $Ciclo(d_i) = \{x_i y_i, (x_i + d_i)(y_i + d_i), (x_i + 2d_i)(y_i + 2d_i), \dots, (x_i + nd_i, y_i + nd_i), x_i y_i\}$ (veja um exemplo para $n = 13$ e $t = 6$ na Figura 2.10). Como n é ímpar, podemos colorir os ciclos ímpares com 3 cores da seguinte forma: para cada $Ciclo(d_i)$ atribua à aresta $\{x_i y_i, (x_i + d_i)(y_i + d_i)\}$ a cor $\Delta(K(n, 2)) - 2$; para $j \geq 1$ ímpar, atribua às arestas $\{(x_i + jd_i)(y_i + jd_i), (x_i + (j + 1)d_i)(y_i + (j + 1)d_i)\}$ a cor $\Delta(K(n, 2)) - 1$ e para $j > 1$ par, atribua às arestas $\{(x_i + jd_i)(y_i + jd_i), (x_i + (j + 1)d_i)(y_i + (j + 1)d_i)\}$ a cor $\Delta(K(n, 2))$.

Atribua a cor $\Delta(K(n, 2)) - 2$ apenas às arestas do conjunto $S_{1,i}$ com $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ e à todos os elementos em $S_{1,i}$ para $\frac{n+3}{2} \leq i \leq n$. Observe

que as cores das arestas incidentes aos vértices C_i^1 com $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ são $\Delta(K(n, 2)) - 2$ e $\Delta(K(n, 2)) - 1$ e assim, podemos atribuir a cor $\Delta(K(n, 2))$ à esses vértices. Observe que as cores das arestas incidentes aos vértices em C_1 são $\Delta(K(n, 2)) - 2$ e $\Delta(K(n, 2))$, então podemos atribuir ao conjunto S_1^1 a cor $\Delta(K(n, 2)) - 1$. Resta colorir o conjunto $S_{2,i}$ e as arestas $M_{t+1,i}$ de cada clique C_i .

Atribua aos conjuntos $M_{t+1,2}$ e $M_{t+1, \frac{n+3}{2}}$, e aos conjuntos $S_{2,i}$ para $i \neq 2, \frac{n+3}{2}$ a cor $\Delta(K(n, 2)) + 1$; atribua às arestas de $M_{t+1,i}$ a cor $\Delta(K(n, 2)) + 2$. Agora, para $i = 2, \frac{n+2}{2}$, atribua aos conjuntos $S_{2,i}$ a cor $\Delta(K(n, 2)) + 2$. Observe que, por construção, obtemos uma coloração total e, portanto, usamos no máximo $\Delta(K(n, 2)) + 2$ cores para a coloração total de $K(n, 2)$. Isso verifica a TCC para os grafos Kneser para n não divisível por 3 e $n \equiv 1 \pmod{4}$.

A Figura 2.10 ilustra a coloração total restante de $K(13, 2)$ após o uso do Algoritmo 1. Note que, desconsiderando os elementos coloridos pelo Algoritmo 1 com $(t - 2)r = (6 - 2)13 = 52$ cores, mostramos como completar a coloração total de $K(13, 2)$ destacando os elementos coloridos com as cinco novas cores: 53 (azul), 54 (verde), 55 (vermelho), 56 (roxo) e $57 = \Delta(K(13, 2)) + 2$ (amarelo). As cores 53, 54 e 55 são atribuídas aos elementos em $S_{1,i}$ (ou seja, cada $S_{1,i}$ é composto por duas arestas e um vértice) de cada clique C_i , para $1 \leq i \leq 13$, como segue. Primeiro, atribua a cor 53 a todos os elementos em $S_{1,i}$, para $8 \leq i \leq 13$ e apenas às arestas em $S_{1,i}$, para $2 \leq i \leq 7$; atribua a cor 54 a todos os elementos em $S_{1,1}$, e atribua a cor 55 apenas aos vértices de $S_{1,i}$, para $2 \leq i \leq 7$. Além disso, as cores 53, 54 e 55 são usadas para colorir as arestas do grafo $B'(13, 2)$. Em seguida, a cor 56 é atribuída aos emparelhamentos perfeitos $M_{7,2}$ e $M_{7,8}$, e também é atribuída aos elementos em $S_{2,i}$ de cada C_i (exceto para os conjuntos $S_{2,2}$ e $S_{2,8}$ cujos elementos são coloridos com a cor 57, porque $2 \notin C_2^2 = \{7, 10\}$ e $2 \notin C_8^2 = \{7, 9\}$ e, portanto, tais vértices são adjacentes aos vértices coloridos com a cor 56). Finalmente, a cor 57 é atribuída aos emparelhamentos perfeitos $M_{7,i}$ de cada C_i , por $i \notin \{2, 8\}$.

Para os casos em que n é divisível por 3 não conseguimos verificar a TCC, mas obtivemos limitantes superiores, conforme enunciado no Teorema 2.5. A prova para esses casos pode ser encontrada na Subseção 3.3.2 do Apêndice A.

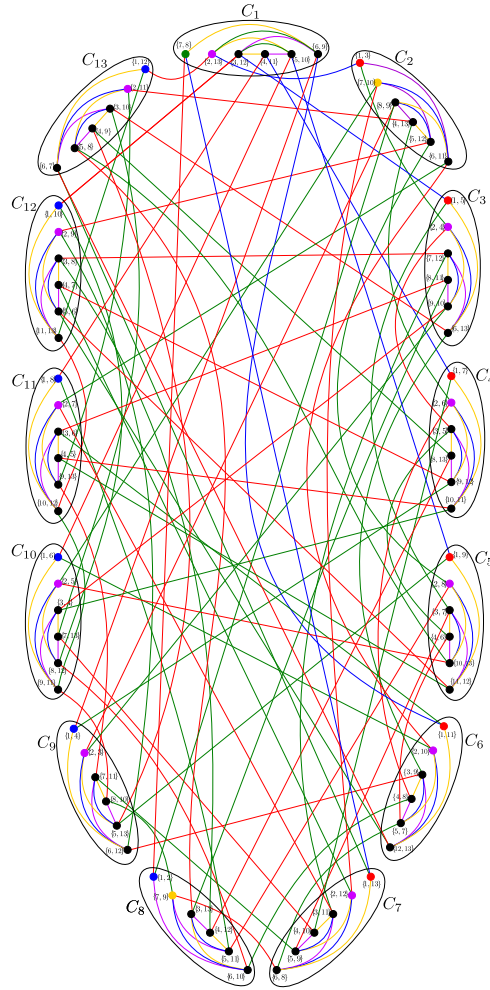


Figura 2.10: Uma ilustração da coloração total restante de $K(13, 2)$ após o uso do Algoritmo 1.

2.2.3 Uma família infinita Classe 1 de grafos Kneser $K(n, 2)$

O grafo Kneser $K(4, 2)$ consiste em um emparelhamento perfeito com 6 vértices, e é Classe 1. O grafo de Petersen $K(5, 2)$ é sabido ser Classe 2. É bem sabido também que um grafo regular com um número ímpar de vértices é Classe 2. Lembre-se de que o número de vértices de $K(n, 2)$ é $\binom{n}{2}$, então grafos Kneser $K(n, 2)$ com $n \equiv 2 \pmod{4}$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$ são precisamente aqueles com um número ímpar de vértices, o que implica que eles são Classe 2. Assim, resta considerar apenas os grafos Kneser $K(n, 2)$ com um número par de vértices, ou seja, $n \equiv 0 \pmod{4}$ ou $n \equiv 1 \pmod{4}$, o que implica que $n \geq 8$.

No Teorema 2.7 obtemos o índice cromático para a família com $n \equiv 0 \pmod{4}$ e dedicamos essa subseção para apresentar a ideia da prova.

Teorema 2.7 [Teorema 3 do Apêndice A] *Se $n \equiv 0 \pmod{4}$, então $\chi'(K(n, 2)) = \Delta(K(n, 2))$.*

A ideia da prova é primeiro obtermos uma $(t - 2)r$ -coloração de arestas parcial

de $K(n, 2)$ através do Algoritmo 2 análogo ao Algoritmo 1 e depois colorir as arestas restantes.

Observe que, como $n \equiv 0 \pmod{4}$ e $t = \frac{n}{2}$ são ambos pares, uma coloração de arestas ótima da clique C_i de tamanho par usa $t - 1$ cores. O Algoritmo 2 é uma variação do Algoritmo 1 e colore algumas arestas de $K(n, 2)$ da seguinte maneira.

Algoritmo 2:

Entrada: Seja $n \geq 8$, $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $r = \binom{n}{2}/t$. Seja $C_1 \cup \dots \cup C_r$ uma t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, 2)$. Seja E' um subconjunto de arestas (possivelmente vazio) em $B(n, 2)$ e seja $B^*(n, 2)$ o grafo $B(n, 2)$ sem as arestas em E' . Além disso, assuma que para cada $1 \leq i \neq j \leq r$, o subgrafo bipartido $B_{i,j}^*(n, 2)$ de $B^*(n, 2)$ possui grau máximo igual a $(t - 2)$ e seja $F_{i,j}^1 \cup \dots \cup F_{i,j}^{t-2}$ uma $(t - 2)$ -coloração de arestas ótima de $B_{i,j}^*(n, 2)$.

Saída: Uma $(t - 2)r$ -coloração de arestas parcial de $K(n, 2)$.

1. **Para $k = 1$ até $t - 2$ faça**
2. **Para $i = 1$ até r faça**
3. (i) Atribua a cor $i + r(k - 1)$ a todas as arestas no conjunto $E_{k+1,i} = \{\{C_i^u, C_i^v\} : \{u, v\} \in E_{k+1}\}$ (onde E_{k+1} denota a $(k + 1)$ -ésima classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_t) da clique C_i .
4. (ii) Para toda aresta $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. a i -ésima classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_r), atribua a cor $i + r(k - 1)$ a todas as arestas em F_{i_1, i_2}^k de $B_{i,j}^*(n, 2)$.

Lema 2.8 [Lema 5 do Apêndice A] *O Algoritmo 2 é correto e obtém uma coloração de arestas parcial do grafo de entrada com $(t - 2)r$ cores.*

Como exemplo do funcionamento do Algoritmo 2, observe a Figura 2.11 do $K(8, 2)$, que destaca os elementos coloridos pelo algoritmo, para $k = 1, 2$ e um valor fixo $i = 1$, com as cores 1 (azul) e 8 (vermelho). Para $k = 1$, seja $E_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ a segunda classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_4 para obter as arestas coloridas com a cor 1 (azul): $E_{2,1} = \{\{\{1, 8\}, \{3, 6\}\}, \{\{2, 7\}, \{4, 5\}\}\}$, e seja $E_2 = \{\{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ a segunda classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_7 para obter as arestas coloridas também com a cor 1 (azul) em $F_{2,7}^1$ (i.e., $\{\{1, 3\}, \{7, 8\}\}, \{\{2, 8\}, \{1, 6\}\}, \{\{5, 6\}, \{3, 4\}\}$ e $\{\{4, 7\}, \{2, 5\}\}$), em $F_{3,6}^1$ (i.e., $\{\{1, 5\}, \{2, 3\}\}, \{\{2, 4\}, \{6, 8\}\}, \{\{3, 8\}, \{5, 7\}\}$ e $\{\{6, 7\}, \{1, 4\}\}$), e em $F_{4,5}^1$ (i.e., $\{\{1, 7\}, \{5, 8\}\}, \{\{2, 6\}, \{3, 7\}\}, \{\{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ e

$\{\{4, 8\}, \{1, 2\}\}$). Para $k = 2$, seja $E_3 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ a terceira classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_4 para obter as arestas coloridas com a cor 8 (vermelho): $E_{3,1} = \{\{\{1, 8\}, \{2, 7\}\}, \{\{3, 6\}, \{4, 5\}\}\}$, e seja $E_2 = \{\{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ a segunda classe de cor de uma coloração de arestas ótima de K_7 para obter as arestas coloridas também com a cor 8 (vermelho) em $F_{2,7}^2$ (i.e. $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}\}, \{\{2, 8\}, \{3, 4\}\}, \{\{5, 6\}, \{7, 8\}\}$ e $\{\{4, 7\}, \{1, 6\}\}$), em $F_{3,6}^2$ (i.e. $\{\{1, 5\}, \{6, 8\}\}, \{\{2, 4\}, \{5, 7\}\}, \{\{3, 8\}, \{1, 4\}\}$ e $\{\{6, 7\}, \{2, 3\}\}$), e em $F_{4,5}^2$ (i.e. $\{\{1, 7\}, \{4, 6\}\}, \{\{2, 6\}, \{5, 8\}\}, \{\{3, 5\}, \{1, 2\}\}$, e $\{\{4, 8\}, \{3, 7\}\}$).

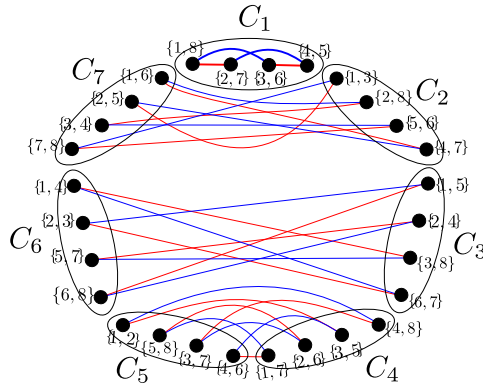


Figura 2.11: Uma representação de um subgrafo do grafo de entrada do Algoritmo 2 de $K(8, 2)$ destacando as arestas coloridas para $k = 1, 2$ e $i = 1$ fixo.

Capítulo 3

O número cromático total do produto direto de grafos completos

Alguns conceitos e definições do produto direto de dois grafos foram introduzidos na Seção 1.3 do Capítulo 1.

Neste capítulo tratamos exclusivamente do produto direto de grafos completos, denotado por $K_m \times K_n$, sendo m e n inteiros positivos, que tem por conjunto de vértices $V(K_m \times K_n) = \{(u, v) : u \in K_m \text{ e } v \in K_n\}$, e existe aresta entre dois vértices (u, v) e (u', v') quando $u \neq u'$ e $v \neq v'$. É fácil ver que este grafo possui mn vértices e, como um grafo completo K_n é regular de grau $n - 1$, temos que $K_m \times K_n$ é um grafo regular de grau $\Delta(K_m \times K_n) = (m - 1)(n - 1)$. O grafo $K_m \times K_n$ pode ser descrito como um grafo n -partido com m vértices em cada partição (como usaremos nesta tese), ou vice-versa. Vale lembrar que o produto direto de dois grafos é desconexo se e somente se ambos os grafos são bipartidos. Como um grafo completo não é bipartido para $n \geq 3$, temos também que $K_m \times K_n$ é um grafo conexo para m ou n maior ou igual a 3. A Figura 1.4 apresenta o grafo $K_3 \times K_3$ e este grafo também pode ser analisado neste capítulo na Figura 3.1, com uma coloração harmônica. Note que, cada vértice (u, v) de $K_m \times K_n$, possui aresta entre todos os vértices que não pertencem à sua respectiva linha u e respectiva coluna v .

Vamos analisar o estado da arte sobre número cromático total de $K_m \times K_n$, que já foi determinado quando m ou n é um número par. Quando $m = n = 2$, sabemos que o grafo desconexo $K_2 \times K_2$ é Tipo 2, uma vez que cada componente conexa K_2 é Tipo 2. Quando $m \geq 3$, $K_m \times K_2$ é o grafo obtido do bipartido completo $K_{m,m}$ ao removermos um emparelhamento perfeito, e este grafo é sabido ser Tipo 1 [38]. Em 2018, Geetha e Somasundaram [15] provaram que quando $n \geq 4$ e n é um número par, $K_n \times K_n$ é Tipo 1. Em 2020, Janssen e Mackeigan [20] mostraram que $K_m \times K_n$ é Tipo 1 quando m ou n é um número par, com $m, n \geq 3$. Neste trabalho, para o caso restante, quando m e n são números ímpares, estabelecemos o número cromático total de $K_m \times K_n$, provando que este grafo é Tipo 1. Assim, podemos

concluir que, exceto para o único grafo $K_2 \times K_2$, o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1, ou ainda, que todo grafo conexo $K_m \times K_n$ é Tipo 1.

A fim de obtermos uma coloração total para todos os grafos $K_m \times K_n$, quando m e n são números ímpares, provamos dois teoremas que dependem do valor de m e n . Na Seção 3.1, classificamos em Tipo 1 os grafos $K_m \times K_n$ com m e n ímpares suficientemente grandes ($m, n \geq 13$) utilizando um resultado envolvendo o grau de um grafo regular e que nos fornece a equivalência Tipo 1 se e somente se o grafo é harmônico. Na Seção 3.2, apresentamos conceitos preliminares sobre decomposição hamiltoniana no grafo $K_m \times K_n$, usada para construir uma classe de cor especial, que chamamos de cor guia, para obter uma coloração total Tipo 1 de $K_m \times K_n$ quando m ou n são menores que 13. A Seção 3.3 é dedicada a provar que $K_m \times K_n$ é Tipo 1, para ímpares $m, n \geq 3$ e, m ou n menor que 13. Fornecemos colorações totais Tipo 1 para todas as famílias infinitas envolvidas.

3.1 $K_m \times K_n$ é Tipo 1 para $m, n \geq 13$

Nesta seção mostramos que, para m e n ímpares suficientemente grandes ($m, n \geq 13$), o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1, e para tal veremos que basta mostrar que eles são harmônicos. O Lema 3.1 estabelece que produto direto de grafos completos, para todos os ímpares $m, n \geq 3$, é harmônico.

Lema 3.1 [*Lema 1 do Apêndice B*] *Para ímpares $m, n \geq 3$, o grafo $K_m \times K_n$ é harmônico.*

Esboço da prova: Sem perda de generalidade, considere $m \leq n$. Construimos uma coloração de vértices harmônica com $(m-1)(n-1)+1$ cores de forma que cada classe de cor seja composta por 1 ou 3 vértices. Para $i = \{0, \dots, \frac{m+n-4}{2}\}$, atribuímos a cor c_i para o conjunto independente de vértices $(0, i), (1, i), (2, i)$ de $K_m \times K_n$. E atribuímos uma cor adicional diferente a cada um dos vértices restantes sem cor. Como exemplo desta coloração harmônica, observe a Figura 3.1.

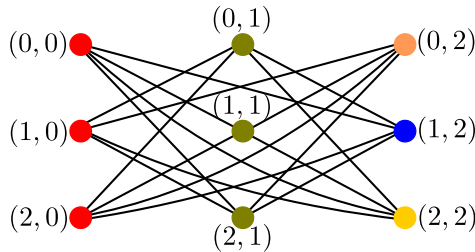


Figura 3.1: O grafo $K_3 \times K_3$ é harmônico.

A TCC para grafos G com $\Delta(G) \geq \frac{3}{4}|V(G)|$ foi provada por Hilton e Hind [18]. Chetwynd et al. [10] provaram que quando G é um grafo regular de ordem ímpar e

grau $\Delta(G) \geq \frac{\sqrt{7}}{3}|V(G)|$, então G é Tipo 1 se e somente se G for harmônico. Chew [11] melhorou este resultado ao mostrar que é suficiente exigir que $\Delta(G) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6}|V(G)|$. Este último resultado será usado para mostrar o Teorema 3.2, que classifica o grafo $K_m \times K_n$ para ímpares m e n suficientemente grandes.

Teorema 3.2 [Teorema 1 do Apêndice B] Para $m, n \geq 13$ ímpares, o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1.

Esboço da prova: Sua prova consiste em mostrar que quando $m, n \geq 13$ são ímpares, o grau do grafo satisfaz o limite inferior exigido pelo Teorema de Chew, que combinado com o Lema 3.1 implica no resultado. A prova na íntegra pode ser analisada no Teorema 1 do Apêndice B.

Na Seção 3.2, vamos desenvolver a técnica empregada para a obtenção de colorações totais Tipo 1 nos grafos $K_m \times K_n$ para m e n ímpares não obtidos nesta seção, ou seja, para ímpares m, n tal que m ou n é menor que 13. Vale lembrar que, como $K_m \times K_n$ é isomorfo a $K_n \times K_m$, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $m < 13$.

3.2 Decomposições hamiltonianas para obter uma cor guia para ímpares $m, n \geq 3$ e $m < 13$

Primeiramente é importante destacar que nesta seção englobamos 5 famílias infinitas: $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$, $K_9 \times K_n$ e $K_{11} \times K_n$, para ímpares $n \geq 3$. Para cada família infinita obtemos colorações totais Tipo 1. Para isso, vamos particionar o grafo em ciclos hamiltonianos e obter os elementos da classe de cor guia que nos indicará a coloração total Tipo 1.

Para $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$ e $K_7 \times K_n$, na Subseção 3.2.1, usamos a decomposição hamiltoniana de Waleski do grafo completo K_n para definir decomposições hamiltonianas adequadas de $K_m \times K_n$ que dependem do máximo divisor comum entre m e n ; na Subseção 3.2.2, explicamos como os elementos da classe de cor guia, utilizados adequadamente nos ciclos hamiltonianos produzidos na Subseção 3.2.2, são suficientes para obtermos uma $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -coloração total.

3.2.1 Decomposições hamiltonianas

Um grafo p -regular G tem uma *decomposição hamiltoniana* se seu conjunto de arestas pode ser particionado em $\frac{p}{2}$ ciclos hamiltonianos quando p é par, ou em $\frac{(p-1)}{2}$ ciclos hamiltonianos mais um 1-fator (ou emparelhamento perfeito) quando p é ímpar. Maiores detalhes sobre decomposições hamiltonianas podem ser encontradas em [1].

Considere a decomposição hamiltoniana de Waleski do grafo completo K_n para $n \geq 3$. Devemos considerar apenas n ímpar, pois estamos analisando o caso $K_m \times K_n$ para m e n ímpares. Seja $n = 2w + 1$ e rotule os vértices de K_n como $0, 1, \dots, 2w$. Seguindo a notação usada por Alspach et al. [1], seja C_n o ciclo hamiltoniano $\langle 0, 1, 2, 2w, 3, 2w - 1, 4, 2w - 2, 5, 2w - 3, \dots, w + 3, w, w + 2, w + 1, 0 \rangle$. Se σ é a permutação $(0)(1, 2, 3, 4, \dots, 2w - 1, 2w)$, então $\sigma^0(C_n), \sigma^1(C_n), \sigma^2(C_n), \dots, \sigma^{w-1}(C_n)$ é uma decomposição hamiltoniana de K_n . Observe que $\sigma^0(C_n) = C_n$. Escreveremos $K_n = \bigoplus_{i=1}^w \sigma^{i-1}(C_n)$. Denote por $\sigma^t(C_n)_z$, com $z = 0, 1, \dots, n - 1$ o z -ésimo vértice no ciclo $\sigma^t(C_n)$, e observe que o vértice 0 é sempre o 0-ésimo vértice. Observe ainda que para $t \geq w$, o ciclo $\sigma^t(C_n)$ é o ciclo oposto a $\sigma^{t \bmod w}(C_n)$, ou seja, $\sigma^t(C_n)_z = \sigma^{t \bmod w}(C_n)_{nz}$ para todo $z \geq 1$.

Observe o exemplo da decomposição hamiltoniana de Waleski para K_5 . Temos que $w = 2$. A decomposição hamiltoniana de Waleski de $K_5 = \bigoplus_{i=1}^2 \sigma^{i-1}(C_5)$, onde os ciclos hamiltonianos são $\sigma^0(C_5) = \langle 0, 1, 2, 4, 3, 0 \rangle$ e $\sigma^1(C_5) = \langle 0, 2, 3, 1, 4, 0 \rangle$, conforme destacado na Figura 3.2. Observe que $\sigma^2(C_5) = \langle 0, 3, 4, 2, 1, 0 \rangle$ é o ciclo oposto de $\sigma^0(C_5)$, e $\sigma^3(C_5) = \langle 0, 4, 1, 3, 2, 0 \rangle$ é o ciclo oposto de $\sigma^1(C_5)$.

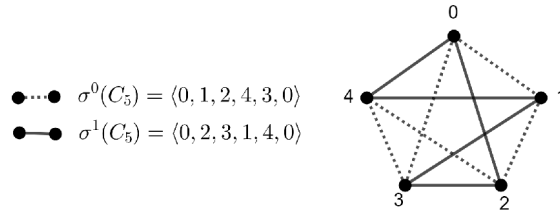


Figura 3.2: Decomposição hamiltoniana de Waleski de $K_5 = \sigma^0(C_5) \oplus \sigma^1(C_5)$

É conhecido que o produto direto de ciclos possui decomposição hamiltoniana se e somente se pelo menos um deles for um ciclo ímpar [22]. A seguir, para ambos m e n ímpares, usamos a decomposição hamiltoniana de Waleski do grafo completo K_n e a propriedade distributiva do produto direto para definir uma decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$, para $m = 3, 5, 7$ e ímpar $n \geq 3$, adequada para nossa coloração total desejada.

Escreva os ímpares $m, n \geq 3$ como $m = 2q + 1$ e $n = 2w + 1$. Seja $\text{mdc}(m, n) = d$. Para $j = 1, \dots, 2q$, $i = 1, \dots, 2w$ e $k = 0, \dots, d - 1$, denote por $C(j, i)^k$ o ciclo $\langle C(j, i)_z^k \rangle_{z=0, \dots, \frac{mn}{d}}$ com $\frac{mn}{d}$ vértices, onde $C(j, i)_z^k = (\sigma^{j-1}(C_m)_{(z+k) \bmod m}, \sigma^{i-1}(C_n)_{z \bmod n})$, com $z = 0, \dots, \frac{mn}{d}$, é o z -ésimo vértice do ciclo $C(j, i)^k$. Observe que de acordo com a notação para o vértice $C(j, i)_z^k$, temos $C(j, i)_0^k = C(j, i)_{\frac{mn}{d}}^k$, e o vértice $(0, 0)$ é sempre 0-ésimo vértice de $C(j, i)^0$.

A seguir construímos decomposições hamiltonianas de $K_m \times K_n$ que dependem do máximo divisor comum entre m e n . O Caso 1 considera que m e n são primos entre si, ou seja, $\text{mdc}(m, n) = 1$, obtendo um único $k = 0$, e cada $C(j, i)^0$ é um

ciclo hamiltoniano, tal que $\{C(j, i) = C(j, i)^0 \mid j = 1, \dots, q \text{ e } i = 1, \dots, 2w\}$ é uma decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$. O Caso 2 considera o caso em que $\text{mdc}(m, n) \neq 1$, o que implica que cada ciclo $C(j, i)^k$ não é um ciclo hamiltoniano. Neste caso, construímos uma decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$ dada por $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 2q \text{ e } i = 1, \dots, w\}$ onde cada ciclo hamiltoniano é composto por d caminhos obtidos a partir dos ciclos $C(j, i)^k$, de modo que, para cada $k = 0, \dots, d-1$, o ciclo $C(j, i)^k$ torna-se um caminho removendo uma aresta.

Caso 1: $\text{mdc}(m, n) = 1$. Considere $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, q \text{ e } i = 1, \dots, 2w\}$ uma decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$, onde $C(j, i) = C(j, i)^0$, veja um exemplo na Figura 3.5. De fato, considere $K_m = \bigoplus_{j=1}^q (\sigma^{j-1}(C_m))$ e $K_n = \bigoplus_{i=1}^w (\sigma^{i-1}(C_n))$ as decomposições hamiltonianas de Waleski de K_m e K_n , respectivamente. Assim, escrevemos $K_m \times K_n = \bigoplus_{j=1}^q \bigoplus_{i=1}^w (\sigma^{j-1}(C_m) \times \sigma^{i-1}(C_n))$. Como o grau $\Delta(\sigma^{j-1}(C_m) \times \sigma^{i-1}(C_n)) = 4$, para qualquer $j = 1, 2, \dots, q$ e para qualquer $i = 1, 2, \dots, w$, cada subgrafo $\sigma^{j-1}(C_m) \times \sigma^{i-1}(C_n)$ de $K_m \times K_n$ tem dois ciclos hamiltonianos: $C(j, i)$ e $C(j, i + w)$, logo, basta considerar $C(j, i)$ para $j = 1, \dots, q$ e $i = 1, \dots, 2w$.

Por exemplo, considere $K_3 \times K_5$ na Figura 3.3. Como $\text{mdc}(3, 5) = 1$, usamos a decomposição hamiltoniana de $K_3 \times K_5 = \bigoplus_{j=1}^1 \bigoplus_{i=1}^2 (\sigma^{j-1}(C_3) \times \sigma^{i-1}(C_5))$, em que os 2 ciclos hamiltonianos do subgrafo $\sigma^0(C_3) \times \sigma^0(C_5)$ de $K_3 \times K_5$ são $C(1, 1)$ e $C(1, 3)$ e, analogamente, os 2 ciclos hamiltonianos do subgrafo $\sigma^0(C_3) \times \sigma^1(C_5)$ de $K_3 \times K_5$ são $C(1, 2)$ e $C(1, 4)$.

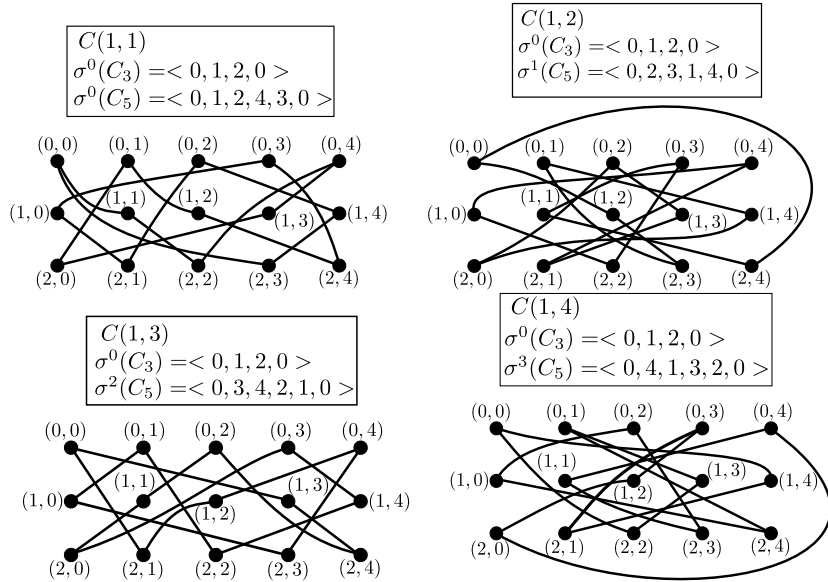


Figura 3.3: Uma decomposição hamiltoniana de $K_3 \times K_5$, particionado em 4 ciclos hamiltonianos.

Caso 2: $\text{mdc}(m, n) = d > 1$. Por definição, neste caso, cada $C(j, i)^k$ não é um ciclo hamiltoniano. Para $k = 0, \dots, d-1$, denote por $P(j, i)^k$ o caminho induzido pelos $\frac{mn}{d}$ vértices $C(j, i)_z^k$, com $z = 0, \dots, \frac{mn}{d} - 1$, obtido de $C(j, i)^k$ removendo

uma aresta. Considere $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 2q \text{ e } i = 1, \dots, w\}$ uma decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$, onde os ciclos hamiltonianos são definidos como segue.

(i) Para $m = 3$:

$$C(j, i) = \langle P(j, i)^0, P(j, i)^1, P(j, i)^2, (0, 0) \rangle$$

Para $i = 1, \dots, w$, os ciclos $C(1, i)$ e $C(2, i)$ formam uma decomposição hamiltoniana de $\sigma^0(C_3) \times \sigma^{i-1}(C_n)$.

Por exemplo, na Figura 3.4, considere apenas a decomposição hamiltoniana do grafo $K_3 \times K_9$ em 8 ciclos hamiltonianos, onde cada ciclo é formado pelos caminhos induzidos correspondentes. Como $\text{mdc}(3, 9) = 3$, usamos a decomposição hamiltoniana $K_3 \times K_9 = \bigoplus_{i=1}^4 (\sigma^0(C_3) \times \sigma^{i-1}(C_9))$. Os 2 ciclos hamiltonianos do subgrafo $\sigma^0(C_3) \times \sigma^0(C_9)$ são $C(1, 1)$ e $C(2, 1)$; e analogamente do subgrafo $\sigma^0(C_3) \times \sigma^1(C_9)$ são $C(1, 2)$ e $C(2, 2)$; do subgrafo $\sigma^0(C_3) \times \sigma^2(C_9)$ são $C(1, 3)$ e $C(2, 3)$; e finalmente do subgrafo $\sigma^0(C_3) \times \sigma^3(C_9)$ são $C(1, 4)$ e $C(2, 4)$.

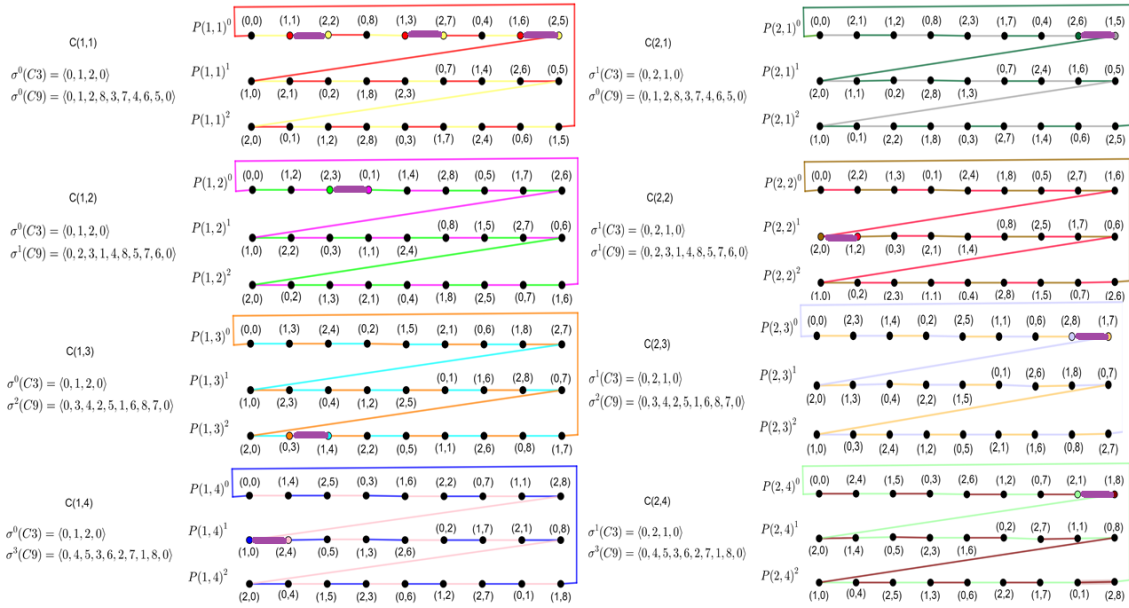


Figura 3.4: Uma representação de $K_3 \times K_9$ destacando os 8 ciclos hamiltonianos coloridos.

(ii) Para $m = 5$:

$$C(j, i) = \begin{cases} \langle P(j, i)^0, P(j, i)^1, P(j, i)^2, P(j, i)^3, P(j, i)^4, (0, 0) \rangle, & \text{se } j = 1, 3 \\ \langle P(j, i)^0, P(j, i)^2, P(j, i)^4, P(j, i)^1, P(j, i)^3, (0, 0) \rangle, & \text{se } j = 2, 4 \end{cases}$$

Para $i = 1, \dots, w$, o conjunto de ciclos $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 4\}$ é uma decomposição hamiltoniana de $K_5 \times \sigma^{i-1}(C_n)$.

(iii) Para $m = 7$:

$$C(j, i) = \begin{cases} \langle P(j, i)^0, P(j, i)^3, P(j, i)^4, P(j, i)^5, P(j, i)^1, P(j, i)^2, P(j, i)^6, (0, 0) \rangle, \\ \text{se } j = 1, 3, 5 \\ \langle P(j, i)^0, P(j, i)^4, P(j, i)^1, P(j, i)^3, P(j, i)^6, P(j, i)^2, P(j, i)^5, (0, 0) \rangle, \\ \text{se } j = 2, 4, 6 \end{cases}$$

Para $i = 1, \dots, w$, o conjunto de ciclos $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 6\}$ é uma decomposição hamiltoniana de $K_7 \times \sigma^{i-1}(C_n)$.

3.2.2 Uma coloração total Tipo 1 com elementos da cor guia

Nesta subseção vamos explicar a técnica de obter uma coloração total Tipo 1 de $K_m \times K_n$, para ímpares $m, n \geq 3$ e $m < 13$, a partir da escolha adequada de elementos de uma classe de cor guia em cada ciclo hamiltoniano da decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$ definida na subseção anterior. Vale destacar que, em uma $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -coloração total, ao tomar um vértice qualquer do grafo e uma cor qualquer dentre as $\Delta(K_m \times K_n) + 1$ cores, sabemos que, ou a cor está atribuída a esse vértice ou está atribuída a uma aresta incidente a esse vértice.

A *classe de cor guia*, ou simplesmente *cor guia*, é a única classe de cor que contém uma ou três arestas de cada ciclo hamiltoniano de $K_m \times K_n$, para $m, n \geq 3$ ímpares e $m < 13$. A escolha dos elementos da cor guia em cada grafo é apresentada na Seção 3.3. A seguir, vamos mostrar que, uma escolha adequada dessas arestas de cada ciclo hamiltoniano, representa uma coloração total Tipo 1 do grafo. Para isso, nesta subseção, assumamos que temos uma escolha adequada para as arestas da cor guia nos ciclos hamiltonianos.

Sabemos que cada ciclo hamiltoniano de $K_m \times K_n$, para m e n ímpares, é um ciclo de tamanho mn , portanto um ciclo ímpar. Pelo Teorema de Vizing [36], o ciclo ímpar admite uma 3-coloração de arestas. Assim, para cada ciclo hamiltoniano já colorido com a cor guia, atribuímos duas cores adicionais às arestas restantes do ciclo e aos vértices incidentes à(s) aresta(s) com a cor guia do ciclo, como na Figura 3.5. De fato, se um ciclo hamiltoniano contém uma única aresta da cor guia, então os seus vértices extremos e as arestas restantes do ciclo são facilmente coloridas usando duas cores adicionais. Da mesma forma, se um ciclo hamiltoniano contém três arestas da cor guia, então podemos facilmente ver que seus vértices extremos definem dois conjuntos independentes, que podem ser coloridos com duas cores, uma para cada conjunto independente, e essas mesmas cores também podem ser atribuídas às arestas restantes do ciclo hamiltoniano correspondente. As arestas da cor guia são escolhidas de forma que, os vértices não incidentes a elas no grafo $K_m \times K_n$, formam um conjunto independente, e podemos atribuir a cor guia a esses vértices. Então, de fato, usamos somente $\Delta(K_m \times K_n) + 1$ cores: a cor guia, mais duas cores adicionais em cada um dos $\frac{\Delta(K_m \times K_n)}{2}$ ciclos hamiltonianos, ou seja,

$$1 + 2 \cdot \frac{\Delta(K_m \times K_n)}{2} = \Delta(K_m \times K_n) + 1 \text{ cores.}$$

Para facilitar a compreensão de como a cor guia representa uma coloração total Tipo 1, vamos analisar o grafo $K_3 \times K_5$. A Figura 3.5 destaca todas as arestas coloridas e alguns vértices coloridos no grafo $K_3 \times K_5$. Note que a cor guia (representada pela cor roxa) é atribuída a uma ou três arestas em cada ciclo hamiltoniano. Para cada ciclo, atribuímos duas cores adicionais às arestas restantes do ciclo hamiltoniano e aos vértices incidentes às arestas com a cor guia. Em (a) temos o ciclo hamiltoniano $C(1, 1)$ com 3 cores: as arestas $(1, 1)(2, 2)$, $(1, 2)(2, 4)$ e $(1, 3)(2, 0)$ são coloridas com a cor guia (roxa); e os vértices extremos das arestas roxas e as arestas restantes de $C(1, 1)$ são coloridos com as cores laranja e verde escuro. Em (b) temos o ciclo hamiltoniano $C(1, 2)$ também colorido com 3 cores: a aresta $(0, 1)(1, 4)$ também colorida com a cor roxa; e os vértices extremos da aresta roxa e as arestas restantes de $C(1, 2)$ são coloridos com as cores vermelho e azul escuro. Em (c) temos $C(1, 3)$ também com 3 cores: a aresta $(1, 0)(2, 3)$ também colorida com a cor roxa; e os vértices extremos da aresta roxa e as arestas restantes de $C(1, 3)$ são coloridos com as cores azul claro e verde claro. Finalmente em (d) temos $C(1, 4)$ também colorido com 3 cores: a aresta $(0, 3)(2, 1)$ também colorida com a cor roxa; e os vértices extremos da aresta roxa e as arestas restantes de $C(1, 4)$ são coloridos com as cores rosa e amarelo.

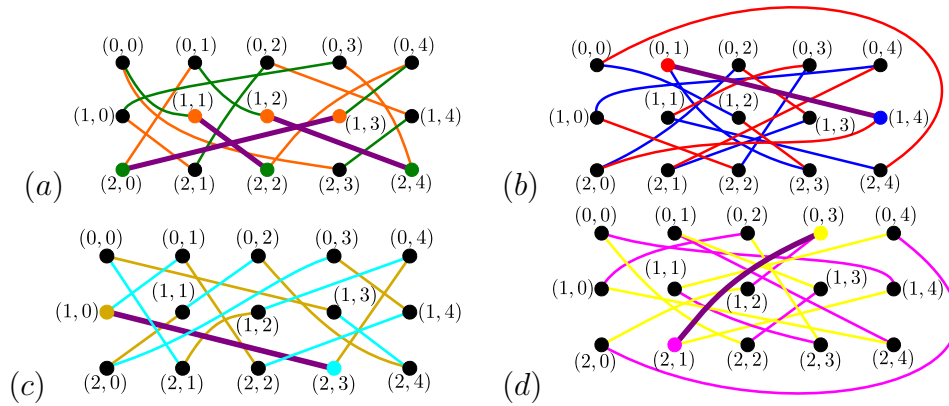


Figura 3.5: Uma representação de $K_3 \times K_5$ particionado em 4 ciclos hamiltonianos: (a) $C(1, 1)$, (b) $C(1, 2)$, (c) $C(1, 3)$ e (d) $C(1, 4)$, tais que todas as arestas e os vértices extremos das arestas com cor guia (roxa) estão coloridos.

Na Figura 3.6, isolamos as arestas atribuídas à cor guia (roxa) juntamente com seus vértices extremos coloridos, obtidos da Figura 3.5. Podemos perceber que ainda existem vértices não coloridos, são eles: $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, 4)$, que formam um conjunto independente. Note que esses vértices não são incidentes a nenhuma aresta roxa, e portanto podemos atribuir a cor roxa a eles. Assim, colorimos todos os elementos do grafo $K_3 \times K_5$ com 9 cores: a cor guia mais 2 cores adicionais em cada um dos 4 ciclos hamiltonianos.

A Figura 3.7 apresenta uma 9-coloração total do grafo $K_3 \times K_5$, já que as cores

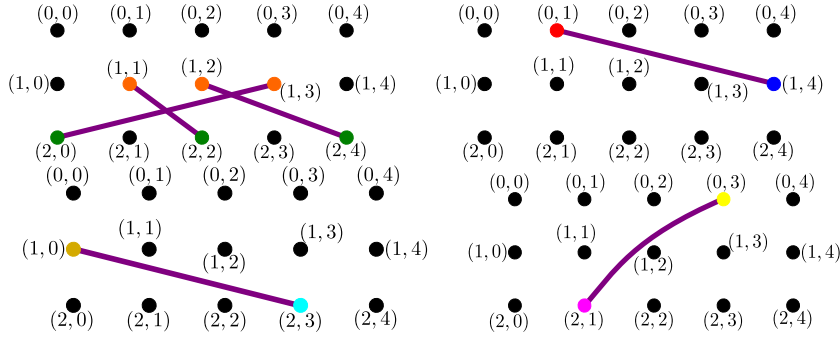


Figura 3.6: Uma ilustração de $K_3 \times K_5$ destacando as arestas coloridas com a cor guia e seus vértices extremos coloridos.

dos vértices coloridos extremos das arestas roxas definem as cores das arestas do ciclo hamiltoniano de origem. Observe que através da tabela da Figura 3.7 podemos reunir as informações dos ciclos e dos elementos da cor guia correspondente a cada ciclo, de modo a também representar uma 9-coloração total do grafo $K_3 \times K_5$.

Elementos de $K_3 \times K_5$ com a cor guia	
$C(1,1)$	$(1,1)(2,2), (1,3)(2,0), (1,2)(2,4)$
$C(1,2)$	$(0,1)(1,4)$
$C(1,3)$	$(1,0)(2,3)$
$C(1,4)$	$(2,1)(0,3)$
Vértices: $(0,0), (0,2), (0,4)$	

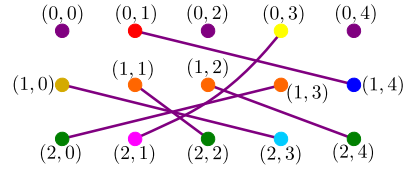


Figura 3.7: Uma tabela composta pelos elementos da cor guia (roxa) em cada ciclo hamiltoniano de $K_3 \times K_5$, e sua representação usando cores dos vértices extremos para identificar os ciclos hamiltonianos que os contêm.

Para mais um exemplo, consulte a Figura 3.4, onde o grafo $K_3 \times K_9$ é particionado em oito ciclos hamiltonianos destacando todas as arestas coloridas e os vértices coloridos incidentes às arestas roxas. Note que o ciclo hamiltoniano $C(1,1)$ é colorido com três cores: as arestas $(1,1)(2,2)$, $(1,3)(2,7)$ e $(1,6)(2,5)$ são coloridas com a cor guia (roxa), e os vértices incidentes às arestas roxas e as arestas restantes de $C(1,1)$ são coloridos com as cores vermelho e amarelo. Nos sete ciclos hamiltonianos restantes, cada um deles tem uma única aresta roxa, cujos vértices adjacentes bem como as arestas restantes do ciclo são coloridos com duas novas cores adicionais. Note que os vértices não coloridos $(0,0), (0,2), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7)$ e $(0,8)$ formam um conjunto independente e podem ser coloridos com a cor roxa, obtendo uma 17-coloração total de $K_3 \times K_9$, conforme representado na Tabela 3.1.

3.3 $K_m \times K_n$ é Tipo 1 para ímpares $m, n \geq 3$ e $m < 13$

Esta seção é dedicada à prova do Teorema 3.3, que inclui as cinco famílias infinitas do produto direto de grafos completos: $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$, $K_9 \times K_n$ e $K_{11} \times K_n$, para $n \geq 3$.

Elementos de $K_3 \times K_9$ com a cor guia	
$C(1, 1)$	$(1, 1)(2, 2), (1, 3)(2, 7), (1, 6)(2, 5)$
$C(1, 2)$	$(0, 1)(2, 3)$
$C(1, 3)$	$(0, 3)(1, 4)$
$C(1, 4)$	$(1, 0)(2, 4)$
$C(2, 1)$	$(1, 5)(2, 6)$
$C(2, 2)$	$(1, 2)(2, 0)$
$C(2, 3)$	$(1, 7)(2, 8)$
$C(2, 4)$	$(1, 8)(2, 1)$
Vertices: $(0, i), 0 \leq i \leq 8, i \neq 1, 3$	

Tabela 3.1: Tabela contendo os elementos da cor guia do grafo $K_3 \times K_9$.

Teorema 3.3 [Teorema 2 do Apêndice B] Para ímpares $m, n \geq 3$ com $m < 13$, o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1.

Dividimos esta exposição em duas subseções. Para $n \geq 3$ ímpar, na Subseção 3.3.1 apresentamos as colorações totais Tipo 1 das famílias $K_3 \times K_n, K_5 \times K_n$ e $K_7 \times K_n$, e na Subseção 3.3.2, apresentamos as colorações totais Tipo 1 das famílias $K_9 \times K_n$ e $K_{11} \times K_n$. Em cada subseção, para cada família considerada, omitimos um número finito de grafos particulares que são muito pequenos para obedecer ao padrão descrito. Suas decomposições hamiltonianas e suas tabelas contendo os elementos da cor guia são fornecidas no Apêndice B.

Para cada uma dessas famílias, vamos descrever uma coloração total Tipo 1 usando a estratégia já apresentada na Seção 3.2 de obter primeiramente uma decomposição hamiltoniana e, em seguida, escolher os elementos que compõem a classe de cor guia. Lembrando que ao obtermos os elementos da cor guia estamos automaticamente obtendo uma coloração total do grafo, como tratado na Subseção 3.2.2. As tabelas contendo os elementos com a cor guia foram omitidas ao longo desta seção mas estão referenciadas para o leitor encontrá-las no Apêndice B.

3.3.1 Famílias $K_3 \times K_n, K_5 \times K_n, K_7 \times K_n$

Nesta subseção, vamos mostrar a coloração total Tipo 1 para três famílias infinitas: $K_m \times K_n$, para $m = 3, 5, 7$ e $n > m$ ímpar, dividindo-se em duas etapas: quando $\text{mdc}(m, n) = 1$ no Lema 3.4 e quando $\text{mdc}(m, n) = m$ no Lema 3.5.

Lema 3.4 [Lema 2 do Apêndice B] Para $m = 3, 5, 7$ e $n > m$ ímpar com $\text{mdc}(m, n) = 1$, o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1.

Esboço da prova: Primeiro usamos a decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$ definida no Caso 1 da Subseção 3.2.1. Depois construímos as tabelas com os elementos da cor guia em cada ciclo hamiltoniano, obtendo assim uma $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -coloração total.

- Para $m = 3$: A tabela foi construída para $n \geq 11$ e é apresentada como Tabela 1 no Apêndice B. Esse caso possui dois grafos particulares: $K_3 \times K_5$ (Veja Figura 3.5 na Subseção 3.2.2) e $K_3 \times K_7$.
- Para $m = 5$: A tabela foi construída para $n \geq 17$ com $n \neq 21$ e é apresentada como Tabela 2 no Apêndice B. Esse caso possui cinco grafos particulares $K_5 \times K_n$ com $n = 7, 9, 11, 13, 21$.
- Para $m = 7$: A tabela foi construída para $n \geq 23$ com $n \neq 25, 33$ e é apresentada como Tabela 3 no Apêndice B. Esse caso possui oito grafos particulares $K_7 \times K_n$ com $n = 9, 11, 13, 15, 17, 19, 25, 33$.

Lema 3.5 [Lema 3 do Apêndice B] Para $m = 3, 5, 7$ e $n \geq m$ ímpar com $\text{mdc}(m, n) = m$, o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1.

Esboço da prova: Análogo ao Lema 3.4. Primeiro usamos a decomposição hamiltoniana de $K_m \times K_n$ definida no Caso 2 da Subseção 3.2.1, referente ao $\text{mdc}(m, n) \neq 1$. Depois construímos tabelas, onde cada tabela contém os elementos da cor guia usados em cada ciclo hamiltoniano, obtendo assim uma $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -coloração total.

- Para $m = 3$: A tabela foi construída para $n \geq 9$ e é apresentada como Tabela 4 no Apêndice B. Esse caso possui um único grafo particular, o grafo $K_3 \times K_3$.
- Para $m = 5$: A tabela foi construída para $n \geq 15$ e é apresentada como Tabela 5 no Apêndice B. Esse caso possui um único grafo particular, o grafo $K_5 \times K_5$.
- Para $m = 7$: A tabela foi construída para $n \geq 35$ e é apresentada como Tabela 6 no Apêndice B. Esse caso possui dois grafos particulares $K_7 \times K_7$ e $K_7 \times K_{21}$.

3.3.2 Famílias $K_9 \times K_n$ e $K_{11} \times K_n$

Nesta subseção, vamos mostrar a coloração total Tipo 1 para duas famílias infinitas: $K_9 \times K_n$ e $K_{11} \times K_n$, para $n \geq m$ ímpar. Vale lembrar que os casos particulares são apresentados no apêndice do Apêndice B, onde é apresentada a decomposição hamiltoniana de cada caso particular, bem como os elementos adequados da cor guia.

Usamos o Teorema de Chew [11] e o Lema 3.1 para obtermos o número cromático total dessas duas famílias a partir de um valor de n . Por fim, para os grafos restantes não contemplados anteriormente, aplicamos a mesma técnica de decomposição

hamiltoniana e construção da tabela com os elementos da cor guia para obter uma coloração total Tipo 1.

Lema 3.6 [*Lema 4 do Apêndice B*] Para $m = 9, 11$ e $n \geq m$ ímpar, o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1.

Esboço da prova: Mostramos que $K_9 \times K_n$ com $n \geq 23$ e $K_{11} \times K_n$ com $n \geq 15$ satisfazem o limitante de Chew [11]. Os grafos particulares de $K_9 \times K_n$ são quando $n = 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$, e de $K_{11} \times K_n$, são quando $n = 11, 13$.

Capítulo 4

A maioria do produto direto de grafos é Tipo 1

Alguns conceitos e definições do produto direto de dois grafos foram introduzidos na Seção 1.3 do Capítulo 1.

A maioria do produto direto de dois grafos já classificados na literatura é Tipo 1. Neste capítulo obtemos mais uma classe de grafos Tipo 1, com exceção de apenas um grafo: a classe do produto direto de ciclos, denotados por $C_m \times C_n$, com $m, n \geq 3$, que tem por conjunto de vértices $V(C_m \times C_n) = \{(u, v) : u \in C_m \text{ e } v \in C_n\}$, e existe aresta entre dois vértices (u, v) e (u', v') de $C_m \times C_n$ quando a aresta $uu' \in C_m$ e a aresta $vv' \in C_n$. O grafo $C_m \times C_n$ pode ser descrito como um grafo n -partido com m vértices em cada partição (como usaremos nesta tese), ou vice-versa. Vale lembrar que este grafo possui mn vértices e é um grafo 4-regular, conforme Figura 4.1. O grafo $C_m \times C_n$ é desconexo precisamente quando m e n são pares, caso em que $C_m \times C_n$ consiste em duas componentes conexas isomorfas, 4-regulares, cada uma sendo um subgrafo gerador do grafo bipartido completo $K_{\frac{nm}{4}, \frac{nm}{4}}$.

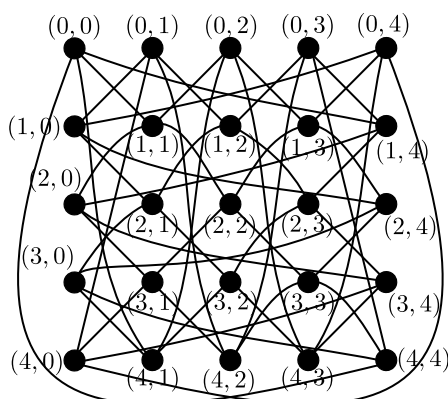


Figura 4.1: Grafo $C_5 \times C_5$.

O *produto cartesiano*, denotado por $C_m \square C_n$, é o grafo com $V(C_m \square C_n) = V(C_m) \times V(C_n)$ e dois vértices (u, v) e (u', v') são adjacentes quando $((u, u') \in E(C_m)$

e $v = v'$) ou $((v, v') \in E(C_n)$ e $u = u')$. Em 2009, Tong et al. [34] mostraram que $C_m \square C_n$ possui coloração total equilibrada com cinco cores para todos os valores possíveis $m, n \geq 3$. Vale lembrar que toda coloração total equilibrada é uma coloração total. Como $C_{2n+1} \times C_{2n+1}$ é isomorfo a $C_{2n+1} \square C_{2n+1}$ [15], sabemos que o número cromático total $\chi_T(C_{2n+1} \times C_{2n+1}) = 5$, para todo $n \geq 1$.

Em 2018, Geetha e Somasundaram [15] conjecturaram que, exceto para $C_4 \times C_4$ (que é Tipo 2), todos os grafos $C_m \times C_n$ são Tipo 1. Como evidência, eles estabeleceram três famílias infinitas Tipo 1: para $n \geq 3$ arbitrário, $\chi_T(C_m \times C_n) = 5$ se $m = 3p, 5\ell, 8\ell$, onde $p \geq 2$ e $\ell \geq 1$. A fim de descrever as colorações totais correspondentes para estas três famílias infinitas, eles apresentam quatro tabelas cujas entradas são as cinco cores dadas para emparelhamentos adequados entre conjuntos independentes de vértices que são coloridos sem conflitos.

Na Seção 4.1, apresentamos colorações totais Tipo 1 para todos os grafos $C_m \times C_n$, exceto para $C_4 \times C_4$. Assim, garantimos que as famílias infinitas restantes em aberto de $C_m \times C_n$ também são Tipo 1. Na Seção 4.2, investigamos outras condições que garantem que o produto direto entre dois grafos quaisquer seja Tipo 1. Conjecturamos se um grafo ser Tipo 1 é suficiente para garantir que o produto direto também seja Tipo 1. Além disso, investigamos a coloração total do produto direto entre dois grafos quando um deles é bipartido.

4.1 Coloração total de $C_m \times C_n$

Nesta seção, provamos que todo grafo $C_m \times C_n$ é Tipo 1, exceto pelo $C_4 \times C_4$. Observe que o grafo $C_4 \times C_4$ é Tipo 2, pois é isomorfo a duas cópias de $K_{4,4}$, sabido ser Tipo 2, sendo então a única exceção do produto direto de grafos ciclo $C_m \times C_n$. A presente seção é dedicada à prova do Teorema 4.1.

Teorema 4.1 [Teorema 1 do Apêndice C] *O grafo $C_m \times C_n$ é Tipo 1, exceto $C_4 \times C_4$.*

Omitimos cinco casos particulares que são pequenos demais para aplicar a técnica usada para obtenção das colorações totais, mas que são fáceis de verificar que são Tipo 1, por exemplo, usando o sistema de software de matemática de código aberto gratuito Sage Math. Eles são: $C_3 \times C_3$, $C_3 \times C_4$, $C_3 \times C_7$, $C_4 \times C_7$ e $C_7 \times C_7$. Como $C_m \times C_n$ é isomorfo a $C_n \times C_m$, vamos considerar nesta tese $C_m \times C_n$, com $m, n \geq 3$ e $m \neq 3, 4, 7$. Escrevemos $m = 5k + b$, para $k \geq 0$ e $b = 5, 6, 8, 9$ e 12 . Observe que como $m \neq 7$, o próximo caso é $m = 12$ para o qual o resto da divisão por 5 é 2. Por exemplo, para obtermos uma 5-coloração total de $C_3 \times C_{24}$, consideramos o grafo isomorfo $C_{24} \times C_3$, e escrevemos $24 = 5k + b$, com $k = 3$ e $b = 9$.

Para provar o Teorema 4.1, construímos uma 5-coloração total de um grafo auxiliar do grafo $C_m \times C_n$, a partir do qual obtemos uma 5-coloração total de $C_m \times C_n$.

A seguir, usaremos conjuntos independentes adequados em $C_m \times C_n$ como vértices no grafo auxiliar, e emparelhamentos entre os conjuntos independentes como arestas no grafo auxiliar, inspirados na estratégia usada por Geetha e Somasundaram [15] para obterem a coloração total das três famílias infinitas particulares.

Para $i = 0, \dots, m - 1$, denotamos por $I_i = \{(i, j) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$, $M_i = \{(i, j)((i + 1) \bmod m, (j + 1) \bmod n) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$ e $M'_i = \{(i, j)((i + 1) \bmod m, (j - 1) \bmod n) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$. Claramente, cada conjunto tem n elementos, e os conjuntos M_i e M'_i são dois emparelhamentos perfeitos entre os conjuntos independentes I_i e I_{i+1} em $C_m \times C_n$. A partir daí, definimos o *grafo quociente de emparelhamentos* de $C_m \times C_n$, ou simplesmente *grafo quociente* de $C_m \times C_n$, denotado por $Q[C_m \times C_n]$, como o multigrafo (grafo que admite mais de uma aresta entre dois vértices) onde cada um de seus m vértices corresponde a um conjunto independente $I_i, i = 0, \dots, m - 1$, e temos duas arestas entre I_i e I_{i+1} que correspondem a M_i e M'_i . Observe que uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_m \times C_n]$ representa uma 5-coloração total de $C_m \times C_n$. A Figura 4.2 apresenta uma 5-coloração total do grafo $C_5 \times C_5$ e seu respectivo grafo quociente $Q[C_5 \times C_5]$.

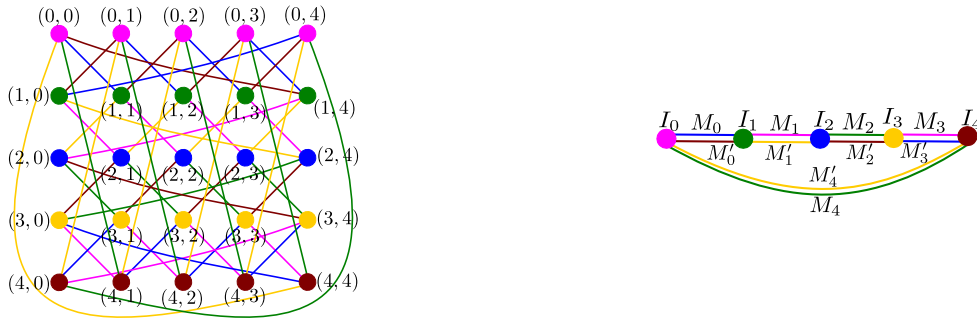


Figura 4.2: Uma 5-coloração total de $C_5 \times C_5$ e o respectivo grafo quociente $Q[C_5 \times C_5]$.

Na Subseção 4.1.1, exibimos colorações totais Tipo 1 para os grafos quocientes de cinco famílias, que chamamos de *famílias infinitas base*, são elas: $C_5 \times C_n, C_6 \times C_n, C_8 \times C_n, C_9 \times C_n$ e $C_{12} \times C_n$, para $n \geq 3$. Observe que as famílias infinitas base são aquelas onde $m = 5k + b$ para $k = 0$ e $b = 5, 6, 8, 9, 12$. Vale ressaltar que a 5-coloração total da família infinita base $C_5 \times C_n$ vai atuar como nosso padrão, conforme veremos nesta subseção. Na Subseção 4.1.2, para o grafo quociente $Q[C_m \times C_n]$, com um valor arbitrário grande de m , observamos que podemos dividir $Q[C_m \times C_n]$ em (possivelmente muitos) blocos do padrão (que é o grafo quociente de $C_5 \times C_n$), e um único bloco da base (que é identificado como um dos grafos quocientes das famílias infinitas base $C_5 \times C_n, C_6 \times C_n, C_8 \times C_n, C_9 \times C_n$ e $C_{12} \times C_n$). Cada 5-coloração total dos grafos quocientes das famílias infinitas base, fornecida na Subseção 4.1.1, produz uma 5-coloração total de cada bloco de forma que não exista conflito de cores. A estratégia de obter o grafo quociente de $C_m \times C_n$, dividí-lo em blocos ainda menores e colorir esses blocos sem conflitos de cores, produz uma 5-coloração total

do grafo quociente de $C_m \times C_n$, garantindo o grafo $C_m \times C_n$ seja Tipo 1.

4.1.1 Famílias infinitas base

Nesta subseção vamos apresentar uma 5-coloração total para cada família infinita base. Considere as famílias infinitas base $Q[C_m \times C_n]$ com $m = 5, 6, 8, 9, 12$ e $n \geq 3$. Referimo-nos às Figuras 4.3, 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7 para a 5-coloração total de cada caso.

Cor	Vértices	Arestas
1 (rosa)	I_0	M_1, M_3
2 (verde)	I_1	M_2, M_4
3 (azul)	I_2	M_0, M'_3
4 (amarelo)	I_3	M'_1, M'_4
5 (marrom)	I_4	M'_0, M'_2

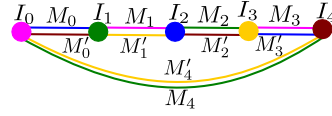


Figura 4.3: A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_5 \times C_n]$.

Cor	Vértices	Arestas
1	I_0, I_3	M_1, M_4
2	I_1, I_4	M_2, M_5
3	I_2, I_5	M_0, M_3
4	–	M'_1, M'_3, M'_5
5	–	M'_0, M'_2, M'_4

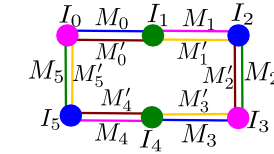


Figura 4.4: A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_6 \times C_n]$.

Cor	Vértices	Arestas
1	I_0, I_5	M_1, M_3, M_6
2	I_1, I_4	M_2, M_5, M_7
3	I_2, I_7	M_0, M'_3, M'_5
4	I_3, I_6	M'_1, M_4, M'_7
5	–	M'_0, M'_2, M'_4, M'_6

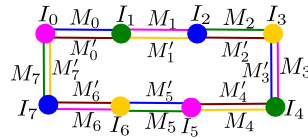


Figura 4.5: A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_8 \times C_n]$.

Cor	Vértices	Arestas
1	I_0, I_3, I_6	M_1, M_4, M_7
2	I_1, I_4, I_7	M_2, M_5, M_8
3	I_2	M_0, M_3, M'_5, M'_7
4	I_5	M'_1, M'_3, M_6, M'_8
5	I_8	M'_0, M'_2, M'_4, M'_6

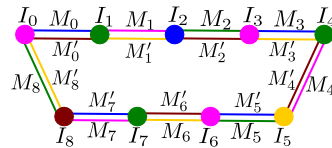


Figura 4.6: A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_9 \times C_n]$.

Cor	Vértices	Arestas
1	I_0, I_3, I_6, I_9	M_1, M_4, M_7, M_{10}
2	I_1, I_8	$M_2, M_4, M_6, M_9, M_{11}$
3	I_2, I_7	$M_0, M_3, M_5, M_8, M'_{10}$
4	I_5, I_{10}	$M'_1, M'_3, M'_6, M'_8, M'_{11}$
5	I_4, I_{11}	$M'_0, M'_2, M'_5, M'_7, M'_9$

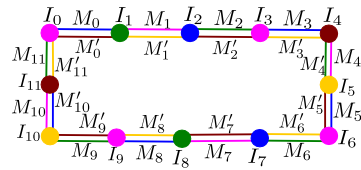


Figura 4.7: A tabela de cores e o exemplo de uma 5-coloração total do caso base $Q[C_{12} \times C_n]$.

Observe que as 5-colorações totais das famílias infinitas base possuem características importantes em comum: a mesma cor 1 (rosa) atribuída ao vértice I_0 , a mesma

cor 2 (verde) atribuída ao emparelhamento M_{m-1} e a mesma cor 4 (amarelo) atribuída ao emparelhamento M'_{m-1} . Essas características fornecem a compatibilidade necessária que nos permite definir um padrão comum para valores maiores de m , conforme veremos na Subseção 4.1.2.

4.1.2 Colagem do padrão para obtenção de uma 5-coloração total para um valor grande de m

Para obtermos uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_m \times C_n]$ para um valor grande de m , colamos repetidamente o bloco padrão (dado pela 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_5 \times C_n]$), com a 5-coloração total do bloco base (dado pela 5-coloração total do grafo quociente de uma das famílias infinitas base $Q[C_b \times C_n]$, para $b = 5, 6, 8, 9, 12$). Observe que o bloco padrão também é um bloco base, e só existe um único padrão usado para a técnica de colagem para um valor grande de m .

Lembre-se de que, como argumentamos no início da Seção 4.1, trocando m e n , sempre podemos considerar $n \geq 3$ e escrever um valor grande de $m \geq 10$ como $m = 5k + b$, para $k \geq 1$ e $b = 5, 6, 8, 9, 12$. Para obtermos a coloração total Tipo 1 do grafo quociente $Q[C_m \times C_n]$ para $m \geq 10$ e $n \geq 3$, primeiramente, colorimos com uma coloração total ótima seu bloco base $Q[C_b \times C_n]$ e, em seguida, colamos repetidamente k cópias do bloco padrão $Q[C_5 \times C_n]$ colorido com uma coloração total ótima. Portanto, a 5-coloração total de $Q[C_m \times C_n]$ é definida por duas etapas da seguinte forma:

- **Etapa base:** para cada $i = 0, \dots, b-1$, a cor de I_i (respectivamente, M_i e M'_i) em $Q[C_m \times C_n]$ é igual à cor de I_i (respectivamente, M_i e M'_i) em seu bloco base $Q[C_b \times C_n]$.
- **Etapa padrão:** para cada $i = b, \dots, m-1$, escreva $t = (ib) \bmod 5$, e a cor de I_i (respectivamente, M_i e M'_i) em $Q[C_m \times C_n]$ é igual à cor de I_t (respectivamente, M_t e M'_t) no bloco padrão $Q[C_5 \times C_n]$.

Por exemplo, considere $m = 11$ e consulte a Figura 4.8. Observe que na etapa base colorimos os elementos I_i, M_i e M'_i , para $i = 0, \dots, 5$, de $Q[C_{11} \times C_n]$ com as mesmas cores de sua família infinita base $Q[C_6 \times C_n]$. Agora, na etapa padrão, colorimos os elementos I_i, M_i e M'_i , para $i = 6, 7, 8, 9, 10$ de $Q[C_{11} \times C_n]$ com as mesmas cores do padrão $Q[C_5 \times C_n]$ (como na Figura 4.3). Analogamente, quando $m = 16$ colamos o padrão $Q[C_5 \times C_n]$ duas vezes em $Q[C_6 \times C_n]$ para obter uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_{16} \times C_n]$ como destacado na Figura 4.9 pelos elementos I_i, M_i e M'_i , para $i = 6, \dots, 15$. Assim, para um $m \geq 10$ escrito na forma $m = 5k + b$, colamos k padrões $Q[C_5 \times C_n]$ na família infinita base $Q[C_b \times C_n]$ para obter uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_{5k+b} \times C_n]$.

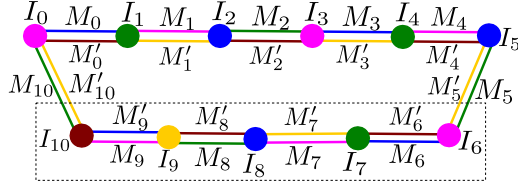


Figura 4.8: Uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_{11} \times C_n]$. Esta 5-coloração total é obtida colando uma vez a 5-coloração total do padrão destacado $Q[C_5 \times C_n]$ na 5-coloração total de $Q[C_6 \times C_n]$.

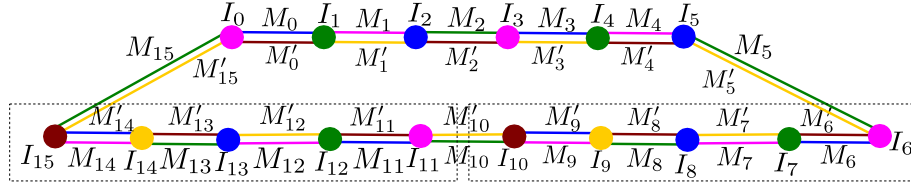


Figura 4.9: Uma 5-coloração total do grafo quociente $Q[C_{16} \times C_n]$. Esta 5-coloração total é obtida colando duas vezes a 5-coloração total do padrão destacado $Q[C_5 \times C_n]$ na 5-coloração total de $Q[C_6 \times C_n]$.

Observe que não há conflito entre as cores atribuídas na 5-coloração total definida para $m \geq 10$. Na verdade, já sabemos que cada família infinita base tem cor 1 (rosa) no I_0 , cor 2 (verde) no M_{b-1} e cor 4 (amarelo) no M'_{b-1} . Observe que, independente de quantas vezes usamos o padrão, não há conflito de cores entre os padrões, pois as arestas coloridas nas cores 2 (verde) e 4 (amarelo) no caso base $Q[C_5 \times C_n]$ são as mesmas usadas entre os padrões. Além disso, não há conflito de cores entre o caso base e o padrão, pois as arestas coloridas nas cores 2 (verde) e 4 (amarelo) entre I_{b-1} e I_b (rosa), e entre I_0 (rosa) e I_{m-1} , são as mesmas usadas em nossos casos base, e I_{b-1} e I_{m-1} têm um vértice vizinho colorido com a cor 1 (rosa).

4.2 Coloração total de produto direto bipartido

Nesta seção, propomos e investigamos duas questões motivadas pela busca de um padrão geral para a classificação em Tipo 1 ou Tipo 2 do produto direto de dois grafos. Nesse sentido, é natural buscarmos condições suficientes para que o produto direto seja Tipo 1. Prnaver e Zmazek [30] provaram que se G admitir uma $\Delta(G)$ -coloração de aresta (Classe 1), então $G \times P_m$, para $m \geq 3$, é Tipo 1. Janssen e Mackeigan [20] em seguida provaram que se $G \times K_2$ é Tipo 1, então $G \times H$ também é Tipo 1, para qualquer grafo bipartido H . Lembre-se de que, para a coloração das arestas, Jaradat [21] provou que o produto direto de um grafo Classe 1 com um grafo qualquer é sempre Classe 1, investigamos na Questão 1 se uma proposição análoga é válida para a coloração total.

Questão 1 Dado um grafo G Tipo 1 e um grafo arbitrário H , o produto direto $G \times H$ é Tipo 1?

A pergunta análoga foi considerada para o produto cartesiano, mas foi apenas parcialmente respondida. Sabe-se que se o fator do produto direto com maior grau do vértice é Tipo 1, então o produto cartesiano também é Tipo 1 [39]. Até agora, todos os produtos diretos Tipo 2 conhecidos de dois grafos são o produto direto $G \times H$, onde G e H são Tipo 2, incluindo casos com $G = H$. O produto direto de grafos que são conhecidos ser Tipo 2 são: $K_2 \times K_2$, $C_4 \times C_4$, $K_{n,n} \times K_{m,m}$, e $C_m \times K_2$ para m não múltiplo de 3. Por outro lado, um produto direto Tipo 1 de dois grafos $G \times H$ pode ser obtido quando G e H são Tipo 1, quando G e H são Tipo 2, ou ainda, quando um deles for Tipo 1 e o outro for Tipo 2. Por exemplo, K_m é Tipo 1 quando m é ímpar e Tipo 2 quando m é par, e ainda o produto direto $K_m \times K_n$ é Tipo 1 quando m e n são ímpares (Capítulo 3 desta tese), quando $m, n \neq 2$ são pares [15], ou então quando m ou n são pares [20]; enquanto que quando $m = n = 2$, o grafo $K_2 \times K_2$ é Tipo 2. Vimos neste capítulo, que o produto direto $C_m \times C_n$ é Tipo 1 quando $m, n \neq 4$, e ainda C_m é Tipo 1 quando m é múltiplo de 3 e Tipo 2 caso contrário; enquanto que quando $m = n = 4$, o grafo $C_4 \times C_4$ é Tipo 2.

Contribuímos com a Questão 1 apresentando evidências positivas. Como já vimos, um grafo regular G é harmônico se G admite uma coloração de vértices com $\Delta(G) + 1$ cores tal que o número de vértices em cada classe de cor tem a mesma paridade de $|V(G)|$ [10]. Sabe-se que todo grafo Tipo 1 deve ser harmônico. O inverso não é verdadeiro, mas ser harmônico ajuda a identificar se um grafo é um candidato para ser Tipo 1 ou para ter certeza de que não pode ser Tipo 1. No Teorema 4.2, mostramos que se um grafo regular G é harmônico, então o produto direto de grafos regulares $G \times H$ é harmônico.

Teorema 4.2 [Teorema 2 do Apêndice C] *Sejam G e H dois grafos regulares. Se G é harmônico, então $G \times H$ é harmônico.*

Para exemplos com número de vértices ímpares e pares, consulte a Figura 3.1 e a Figura 4.10, respectivamente.

Pelo Teorema 4.2, contribuímos com a Questão 1, uma vez que dados grafos regulares G e H com G sendo Tipo 1, sabemos que $G \times H$ é harmônico. Grafos regulares que são harmônicos, de ordem ímpar e grau grande o suficiente, são Tipo 1 (Chew [11]). Por exemplo, como vimos no Capítulo 3, o grafo $K_m \times K_n$, para $m, n \geq 3$ ímpares, é harmônico. Através deste resultado e do resultado de Chew, foi possível provar que o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1 para $m, n \geq 13$ ímpares.

O lema a seguir mostra que se G é Tipo 1, então o produto direto $G \times K_2$ é Tipo 1, o que leva a um corolário que responde a Questão 1 positivamente quando um fator é Tipo 1 e o outro é bipartido.

Lema 4.3 [Lema 1 do Apêndice C] *Se G é Tipo 1, então $G \times K_2$ é Tipo 1.*

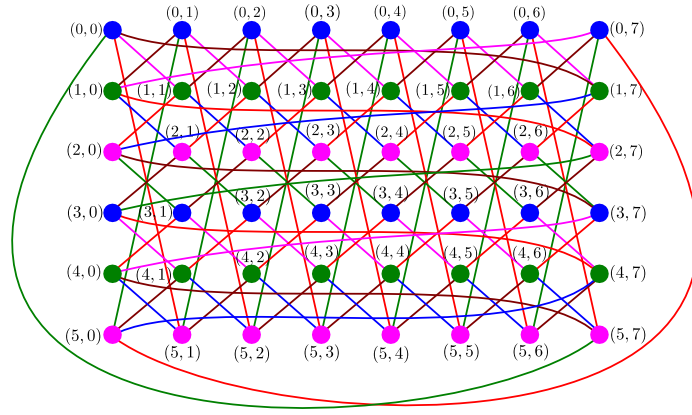


Figura 4.10: Uma 5-coloração total de $C_6 \times C_8$ e uma coloração harmônica apresentada na prova do Teorema 4.2.

A Figura 4.11 apresenta uma 4-coloração total de $G \times K_2$ a partir da 4-coloração total do grafo G , onde G é o produto cartesiano $C_3 \square K_2$.

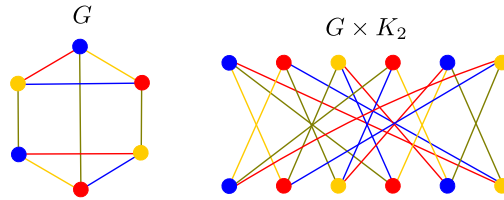


Figura 4.11: Uma 4-coloração total de $G \times K_2$ obtida de uma 4-coloração total de G .

Vale lembrar que Mackeigan e Janssen [20] provaram que, se $G \times K_2$ é Tipo 1 então $G \times H$ é Tipo 1, para qualquer bipartido H . O Lema 4.3 junto com o resultado de Mackeigan e Janssen fornecem o seguinte corolário:

Corolário 4.1 [Corolário 1 do Apêndice C] *Se G é Tipo 1 e H é bipartido, então $G \times H$ é Tipo 1.*

Observamos que $C_3 \times C_4$ é Tipo 1 (vale lembrar que $C_3 \times C_4$ foi um dos casos particulares de $C_m \times C_n$ dito ser Tipo 1 que não apresentamos a 5-coloração total), o que corrobora com o Corolário 4.1, já que C_3 é Tipo 1 e C_4 é um grafo bipartido. Sabemos que $C_m \times K_2$ é Tipo 1 se e somente se m é múltiplo de 3. O inverso do Corolário 4.1 não é verdadeiro, visto que existem muitos exemplos de grafos G Tipo 2 tal que o produto direto $G \times K_2$ é Tipo 1. Por exemplo, K_m para m par é Tipo 2, e ainda $K_m \times K_2$ é o grafo bipartido completo $K_{m,m}$ menos um emparelhamento perfeito, conhecido ser Tipo 1 para $m \geq 4$ [37].

Além disso, para dois grafos bipartidos completos $K_{m,m'}$ e $K_{n,n'}$, o produto direto $K_{m,m'} \times K_{n,n'}$ é Tipo 2 se e somente se $m = m'$ e $n = n'$. Caso contrário, é Tipo 1. De fato, observe que se $m \neq m'$ ou $n \neq n'$, então $K_{m,m'} \times K_{n,n'}$ é Tipo 1 pelo Corolário 4.1, já que $K_{m,m'}$ é Tipo 1 [37]. Por outro lado, se $m = m'$ e $n = n'$, o

grafo $K_{m,m} \times K_{n,n}$ é isomorfo a duas cópias de $K_{mn,mn}$ [22]. Sabe-se que $K_{mn,mn}$ é Tipo 2 [37] e, portanto, o grafo $K_{m,m} \times K_{n,n}$ também é Tipo 2.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta tese, investigamos o problema de coloração total na classe dos grafos regulares. Este tema foi motivado naturalmente pela Conjectura da Coloração Total aberta há mais de 50 anos e a escolha das classes abordadas foi motivada pelos resultados parciais recentes e questões propostas encontradas na literatura.

Contribuímos com o problema de coloração total nas classes dos grafos Kneser e do produto direto de grafos completos e de grafos ciclos. Para tanto, investigamos propriedades estruturais dos grafos, nos aproveitamos de técnicas de decomposição em subgrafos e ferramentas de coloração, para o desenvolvimento de novas técnicas de coloração total.

A seguir, apresentamos em tópicos os resultados obtidos em cada capítulo desta tese, seguindo de questões e investigações futuras.

- No Capítulo 2 abordamos a classe dos grafos Kneser $K(n, s)$. Mais precisamente trabalhamos com duas famílias não triviais: os conexos mais esparsos, e os mais densos que não são grafos completos. Para os grafos ímpares (conexos mais esparsos), obtivemos o número cromático total e portanto sabemos que todos são Tipo 1. Já para os mais densos $K(n, 2)$, verificamos a TCC quando n é par, ou quando n é ímpar não divisível por 3. Para os casos restantes, ou seja, quando n é ímpar e divisível por 3, obtivemos uma coloração total de $K(n, 2)$ com $\Delta(K(n, 2)) + 3$ cores quando $n \equiv 3 \pmod{4}$, e com $\Delta(K(n, 2)) + 4$ cores quando $n \equiv 1 \pmod{4}$. Além disso, mostramos que para uma das duas famílias infinitas com número par de vértices dos grafos Kneser $K(n, 2)$, a família em que $n \equiv 0 \pmod{4}$, todos os seus grafos são Classe 1.

Como consequência do Teorema de Baranyai [3], o conjunto de vértices do grafo Kneser $K(n, s)$ pode ser particionado em $\binom{n}{s} / \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ cliques de tamanho $\lfloor \frac{n}{s} \rfloor$, quando $\lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ divide $\binom{n}{s}$. No entanto, a fim de generalizar nossos resultados sobre as colorações total e de arestas de $K(n, 2)$ para valores arbitrários de s , é necessária uma análise estrutural mais profunda do grafo $B(n, s)$ induzido

pelos cliques em uma t -clique-decomposição-ordenada de $K(n, s)$ na qual as arestas dentro de tais cliques são removidas.

Com relação ao índice cromático de $K(n, 2)$, o único caso não resolvido é quando $n \equiv 1 \pmod{4}$. Observe que, neste caso, o número de vértices $\binom{n}{2}$ é par. No entanto, n é ímpar e precisamos considerar os casos em que n é divisível por 3 ou não. É preciso investigar como colorir as arestas não coloridas de $K(n, 2)$ após aplicar o Algoritmo 2. Na verdade, observe que o Algoritmo 2 usa $(t-2)r = (\frac{n-1}{2}-2)n = \Delta(K(n, 2)) - 3$ cores. Portanto, devemos ser capazes de colorir essas arestas usando precisamente 3 novas cores se quisermos uma $\Delta(K(n, 2))$ -coloração das arestas de $K(n, 2)$. Usando o software SageMath, fomos capazes de: (i) calcular uma 55-coloração de arestas para essas arestas do $K(13, 2)$, o que implica que $K(13, 2)$ é Classe 1, e (ii) uma 21-coloração de arestas de $K(9, 2)$ que também implica que este grafo é Classe 1. Acreditamos que quando $n \equiv 1 \pmod{4}$ é sempre possível colorir $K(n, 2)$ com $\Delta(K(n, 2))$ cores e assim, formulamos a seguinte conjectura.

Conjectura 1 *Para $n \geq 9$, o grafo Kneser $K(n, 2)$ com $n \equiv 1 \pmod{4}$ é Classe 1.*

Se essa conjectura for verdadeira, podemos dizer que os grafos Kneser $K(n, 2)$ são Classe 1 para os de ordem par e Classe 2 para os de ordem ímpar, com exceção do Petersen, que é Classe 2 com 10 vértices.

- No Capítulo 3 abordamos a classe do produto direto de grafos completos $K_m \times K_n$. Já era conhecido na literatura que, se pelo menos um dos números m ou n são pares, então $K_m \times K_n$ é Tipo 1, exceto quando $m = n = 2$. Provamos que o grafo $K_m \times K_n$ é Tipo 1 quando m e n são números ímpares, garantindo desta forma que todos os grafos $K_m \times K_n$ são Tipo 1, exceto o grafo desconexo $K_2 \times K_2$, que é Tipo 2.

A técnica empregada para obter uma coloração total Tipo 1 para o produto direto dos completos $K_m \times K_n$, para ímpares $m, n \geq 3$ e $m < 13$, é bem engenhosa. Em resumo, o grafo é particionado em ciclos hamiltonianos, e depois elementos são escolhidos em cada ciclo para receberem uma mesma cor guia, de modo que sempre seja possível ter duas cores distintas (diferentes da cor guia) em cada ciclo, obtendo assim uma coloração total Tipo 1. Para provar que $K_m \times K_n$ é Tipo 1, para ímpares $m, n \geq 13$, mostramos que eles são harmônicos e usamos o resultado de Chew [11].

Pretendemos investigar outros grafos de ordem ímpar para os quais existe uma decomposição hamiltoniana, de modo que possamos empregar a mesma técnica

de selecionar adequadamente os elementos da classe de cor guia em cada ciclo hamiltoniano.

- No Capítulo 4, abordamos a classe do produto direto de grafos ciclos $C_m \times C_n$. Já sabíamos que os casos particulares de $C_m \times C_n$, para $m = 3p, 5\ell$ e 8ℓ com $p \geq 2$ e $\ell \geq 1$, e $n \geq 3$ arbitrário, são Tipo 1, o que motivou a conjectura de que, exceto para $C_4 \times C_4$, o produto direto de grafos ciclos $C_m \times C_n$, para $m, n \geq 3$, é Tipo 1. Neste capítulo obtivemos 5-colorações totais para todos os grafos $C_m \times C_n$, exceto para $C_4 \times C_4$. Utilizamos a técnica de colagem de grafos coloridos, muito utilizada na literatura, para obtermos colorações totais Tipo 1. Neste trabalho a composição é feita entre um único bloco base, dentre 5 possíveis, e um ou mais blocos de um único padrão pré-estabelecido.

Além disso, neste capítulo ainda investigamos condições que possam nos ajudar a verificar que o produto direto de dois grafos quaisquer alcance o limitante inferior para o número cromático total. Embora já fosse conhecido na literatura que se $G \times K_2$ é Tipo 1, então $G \times H$ também é Tipo 1, para H bipartido; mostramos que se G é Tipo 1 então $G \times K_2$ também é Tipo 1, e obtivemos como corolário que, se G é Tipo 1 e H é bipartido, então o produto direto $G \times H$ é Tipo 1.

Como trabalhos futuros, gostaríamos de mostrar que $G \times H$ é Tipo 1 para G Tipo 1 e H um grafo arbitrário, conforme propomos na Questão 1 (Dado um grafo G Tipo 1 e um grafo arbitrário H , o produto direto $G \times H$ é Tipo 1?). Já mostramos que, para dois grafos regulares G e H , se G é harmônico então $G \times H$ também é harmônico, o que implica dizer para os grafos regulares que se G é Tipo 1 então $G \times H$ é harmônico. Vale lembrar que um grafo Tipo 1 sempre é harmônico. Além da Questão 1, observe que se G é bipartido e Tipo 1, então o Corolário 4.1 (Se G é Tipo 1 e H é bipartido, então $G \times H$ é Tipo 1.) implica que $G \times G$ é Tipo 1 também. Neste contexto, propusemos uma questão sobre um grafo geral Tipo 1, que é um caso particular da Questão 1:

Questão 2 *Dado um grafo G Tipo 1, o produto direto $G \times G$ é Tipo 1 também?*

Também temos interesse em investigar a coloração total do produto direto entre grafos ciclos e grafos completos, ou seja, o grafo $C_m \times K_n$, com $m \geq 3$ e $n \geq 2$. Já sabemos que os grafos $C_3 \times K_n$, para qualquer n , e $C_m \times K_2$, para m múltiplo de 3, são Tipo 1. Além disso, como todo ciclo par é bipartido, pelo Corolário 4.1, temos que $C_m \times K_n$ é Tipo 1, para m par e n ímpar, pois todo grafo K_n com n ímpar é Tipo 1.

Referências Bibliográficas

- [1] ALSPACH, B., BERMOND, J.-C., SOTTEAU, D., 1990, *Decomposition Into Cycles I: Hamilton decompositions*. Montreal, Quebec, May 3-9, 1987 (Ed. G. Hahn, G. Sabidussi, and R. E. Woodrow). Dordrecht, Holland: Kluwer, In Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Cycles and Rays: Basic Structures in Finite and Infinite Graphs.
- [2] APPEL, K., HAKEN, W., 1976, “Every planar map is four colorable”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 82, pp. 711–712.
- [3] BARANYAI, Z., 1973, “On the factorization of the complete uniform hypergraph”. In: Hajnal, A., Rado, R., Sós, V. T. (Eds.), *Infinite and Finite Sets, Proc. Coll. Keszthely*, pp. 91–107, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, North-Holland, Amsterdam.
- [4] BEHZAD, M., 1971, *The total chromatic number of a graph: A survey*. In Combinatorial Mathematics and its Applications (Ed. D. J. A. Welsh), Acad. Press.
- [5] BEHZAD, M., CHARTRAND, G., COOPER JR, J. K., 1967, “The colour numbers of complete graphs”, *J. London Math. Soc.*, v. 42, pp. 226–228.
- [6] BIGGS, N. L., 1979, “Some odd graph theory”, *Second International Conference on Combinatorial Mathematics, Annals of the New York Academy of Sciences*, v. 319, pp. 71–81.
- [7] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., 1977, *Graph theory with applications*. 290 ed. London, Macmillan.
- [8] CAMPOS, C. N., 2006, *O problema da coloração total em classes de grafos*. Tese de D.Sc., Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, Campinas, SP, Brasil.
- [9] CHETWYND, A. G., HILTON, A. J. W., 1988, “Some refinements of the total chromatic number conjecture”, *Congr. Numer.*, v. 66, pp. 195–216.

- [10] CHETWYND, A. G., HILTON, A. J. W., ZHAO, C., 1991, “The total chromatic number of graphs of high minimum degree”, *J. London Math. Soc.*, v. 44, pp. 193–202.
- [11] CHEW, K. H., 1996, “Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree”, *Discrete Math.*, v. 154, pp. 41–51.
- [12] CRUZ, M. M. F., DE FIGUEIREDO, C. M. H., SASAKI, D., et al., 2021, “Hunting a Type 2 fullerene nanodisc”, *Manuscrito submetido para a Mat. Contemp.*
- [13] ERDŐS, P., KO, C., RADO, R., 1961, “Intersection theorem for system of finite sets”, *Quart J Math*, v. 12, pp. 313–318.
- [14] FIORINI, S., WILSON, R. J., 1977, *Edge-Colouring of Graphs*. Pitman.
- [15] GEETHA, J., SOMASUNDARAM, K., 2018, “Total colorings of product graphs”, *Graphs Combin.*, v. 34, pp. 339–347.
- [16] GODSIL, C., ROYLE, G., 2004, *Algebraic Graph Theory*, v. 207. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.
- [17] GONÇALVES, I., DANTAS, S., SASAKI, D., 2021, “On equitable total coloring of snarks”, *Manuscrito aceito para publicação na revista Procedia Comput. Sci.*
- [18] HILTON, A. J. W., HIND, H. R., 1993, “The total chromatic number of graphs having large maximum degree”, *Discrete Math.*, v. 117, pp. 127–140.
- [19] HOLYER, I., 1982, “The NP-completeness of edge-colouring”, *SIAM J. Comput.*, v. 10, pp. 718–720.
- [20] JANSSEN, J., MACKEIGAN, K., 2020, “Total colourings of direct product graphs”, *Contributions to Discrete Math.*, v. 15, n. 1, pp. 67–71.
- [21] JARADAT, M. M. M., 2005, “On the Anderson–Lipman conjecture and some related problems”, *Discrete Math.*, v. 297, n. 1-3, pp. 167–173.
- [22] JHA, P. K., 1992, “Hamiltonian decompositions of products of cycles”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, v. 23, pp. 723–729.
- [23] JOHNSON, D. S., 1985, “The NP-completeness column: an ongoing guide”, *J. Algorithms*, v. 6, pp. 434–451.

- [24] JUNIOR, M. N. A., ADAUTO, M. N., SASAKI, D., 2021, “On total coloring of 4-regular circulant graphs”, *Manuscrito aceito para publicação na revista Procedia Comput. Sci.*
- [25] KOSTOCHKA, A. V., 1996, “The total chromatic number of any multigraph with maximum degree five is at most seven”, *Discrete Math.*, v. 162, pp. 161–163.
- [26] LOVÁSZ, L., 1978, “Kneser’s Conjecture, Chromatic Numbers and Homotopy”, *J Combin Theory (A)*, v. 25, pp. 319–324.
- [27] MACHADO, R. C. S., 2010, *Decomposições para Coloração de Arestas e Coloração Total de Grafos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [28] MCDIARMID, C. J. H., SÁNCHEZ-ARROYO, A., 1994, “Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard”, *Discrete Math.*, v. 124, pp. 155–162.
- [29] PRAJNANASWAROOPA, S., GEETHA, J., SOMASUNDARAM, K., et al., 2020, “On total coloring of some classes of regular graphs”, *ArXiv:1910.03922v4*.
- [30] PRNAVER, K., ZMAZEK, B., 2010, “On total chromatic number of direct product graphs”, *J. Appl. Math. Comput.*, v. 33(1-2), pp. 449–457.
- [31] SASAKI, D., 2013, *Sobre Coloração Total de Grafos Cúbicos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [32] SHITOV, Y., 2019, “Counterexamples to Hedetniemi’s conjecture”, *Ann. Math.*, v. 190, n. 2, pp. 663–667.
- [33] SÁNCHEZ-ARROYO, A., 1989, “Determining the total colouring number is NP-hard”, *Discrete Math*, v. 78, pp. 315–319.
- [34] TONG, C., XIAOHUI, L., YUANSHENG, Y., et al., 2009, “Equitable total coloring of $C_m \square C_n$ ”, *Discret. Appl. Math.*, v. 157, n. 4, pp. 596–601.
- [35] VALENCIA-PABON, M., VERA, J., 2005, “On the diameter of Kneser graphs”, *Discrete Math*, v. 305, pp. 383–385.
- [36] VIZING, V. G., 1964, “On an estimate of the chromatic class of a p-graph”, *Metody Diskret. Analiz.*, v. 3, pp. 25–30.
- [37] YAP, H. P., 1996, *Total Colourings of Graphs*. Germany, Lect. Notes Math., Springer-Verlag.

- [38] YAP, H. P., 1995, “Generalization of two results of Hilton on total-colourings of graphs”, *Discrete Math.*, v. 140, pp. 245–252.
- [39] ZMAZEK, B., ZEROVNIK, J., 2002, “Behzad-Vizing conjecture and Cartesian-product graphs”, *Appl. Math. Lett.*, v. 15, n. 6, pp. 781–784.
- [40] ZORZI, A., DE FIGUEIREDO, C. M. H., MACHADO, R. C. S., et al., 2019, “Even-power of Cycles With Many Vertices are Type 1 Total Colorable”, *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.*, v. 346, pp. 747–758.

Apêndice A

Anexo: Manuscrito “On total and edge coloring some Kneeser graphs” publicado em Journal of Combinatorial Optimization



On total and edge coloring some Kneser graphs

C. M. H. de Figueiredo¹ · C. S. R. Patrão^{1,2} · D. Sasaki³ · M. Valencia-Pabon⁴

Accepted: 24 September 2021

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2021

Abstract

In this work, we investigate the total and edge colorings of the Kneser graphs $K(n, s)$. We prove that the sparse case of Kneser graphs, the odd graphs $O_k = K(2k-1, k-1)$, have total chromatic number equal to $\Delta(O_k) + 1$. We prove that Kneser graphs $K(n, 2)$ verify the Total Coloring Conjecture when n is even, or when n is odd not divisible by 3. For the remaining cases when n is odd and divisible by 3, we obtain a total coloring of $K(n, 2)$ with $\Delta(K(n, 2)) + 3$ colors when $n \equiv 3 \pmod{4}$, and with $\Delta(K(n, 2)) + 4$ colors when $n \equiv 1 \pmod{4}$. Furthermore, we present an infinite family of Kneser graphs $K(n, 2)$ that have chromatic index equal to $\Delta(K(n, 2))$.

Keywords Total coloring · Edge coloring · Odd graphs · Kneser graphs

Mathematics Subject Classification 05C15 · 05C85 · 05C69 · 05C76

1 Introduction

Let G be a simple connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. An *element* of G is one of its vertices or edges, and the maximum degree of G is denoted by $\Delta(G)$.

A k -edge coloring of G is an assignment of k colors to the edges of G so that adjacent edges have different colors. The *chromatic index*, denoted by $\chi(G)$, is the smallest integer k for which G has a k -edge coloring. Clearly, $\chi(G) \geq \Delta(G)$ and Vizing's theorem (Vizing 1964) states that $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Graphs with $\chi(G) = \Delta(G)$ are said to be Class 1 and graphs with $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ are said to be Class 2. Deciding between the two candidate values for the chromatic index is NP-

✉ D. Sasaki
diana.sasaki@ime.uerj.br

¹ COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

² Instituto Federal de Goiás, Goiás, Brazil

³ IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil

⁴ LIPN, Université Sorbonne Paris Nord, Villetaneuse, France

complete even for regular graphs of degree at least 3 (Leven and Galil 1983). A k -total coloring of G is an assignment of k colors to the elements (vertices and edges) of G so that adjacent or incident elements have different colors. The *total chromatic number*, denoted by $\chi_T(G)$, is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$ and the *Total Coloring Conjecture* (TCC), posed independently by Behzad et al. (1967) and Vizing (1964), states that $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Graphs with $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ are said to be Type 1 and graphs with $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$ are said to be Type 2. The problem of determining the total chromatic number of an arbitrary graph G is NP-hard (Sánchez-Arroyo 1989). The TCC has been verified in restricted cases, such as cubic graphs Rosenfeld (1971) but has not been settled for all regular graphs for more than fifty years, exposing how challenging the problem of total coloring is. Surprisingly, T Srinivasa Murthy Murthy 2021 has communicated in an unpublished manuscript a proof that the TCC holds for all graphs.

In this paper, we consider the total coloring and the edge coloring of Kneser graphs. Given positive integers n, s with $n \geq 2s$, the *Kneser graph* $K(n, s)$ has as vertices the s -subsets of an n -set, and two s -subsets are adjacent in $K(n, s)$ if they are disjoint. The Kneser graph $K(n, s)$ has $\binom{n}{s}$ vertices and it is a $\binom{n-s}{s}$ -regular graph. Kneser graphs have a very nice structure. For a survey on this much studied family of graphs we refer the reader to Godsil and Royle (2004). Many graph theoretic parameters have been computed for a Kneser graph $K(n, s)$, for instance the independence number Erdős et al. (1961), the chromatic number (Lovász 1978), the circular chromatic number in a combinatorial perspective Liu and Zhu (2016) and the diameter Valencia-Pabon and Vera (2005). An *independent set of vertices* of a graph is composed of mutually nonadjacent vertices. An *independent set of edges* of a graph is composed of mutually non incident edges and is called a *matching*. If a graph has an even number N of vertices and there is a matching of the graph with size $\frac{N}{2}$ then such a matching is called a *perfect matching*. Notice that $K(2s, s)$ is a perfect matching. By the famous Erdős-Ko-Rado theorem (Erdős et al. 1961), the maximum size of an independent set in $K(n, s)$ (i.e. the independence number) equals $\binom{n-1}{s-1}$. Moreover, for non trivial Kneser graphs (i.e. when $n > 2s$), a maximum independent set I in $K(n, s)$ has always a center, that is, an integer $w \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $I = I_w = \{A \in V(K(n, s)) : w \in A\}$. Therefore, the only independent sets with maximum size in $K(n, s)$ are the sets I_i , for $1 \leq i \leq n$.

We shall focus on two well known families of Kneser graphs, which are opposed regarding the density given by the number of edges over the number of edges in the complete graph with the same number of vertices. Trivial opposed cases are the sparse $K(2k, k)$ which is a perfect matching, and the dense $K(n, 1)$ which corresponds to the complete graph K_n . For $k \geq 3$, the family of Kneser graphs $K(2k - 1, k - 1)$ is known as *odd graphs* and denoted by O_k , they constitute the sparsest connected case of the Kneser graphs. In 2020, Prajnanaswaroopaa et al. (Prajnanaswaroopaa et al. 2020) communicated in an unpublished manuscript the TCC for all odd graphs, that is, these graphs have a total coloring with $\Delta(O_k) + 2$ colors. On the other hand, the densest non trivial case is the family of Kneser graphs $K(n, 2)$, which are the complements of Johnson graphs $J(n, 2)$ known to be isomorphic to the line graph of the complete graph K_n (Godsil and Royle 2004). As far as we know, there are no results concerning the total coloring of graphs $K(n, 2)$.

Concerning the edge coloring of Kneser graphs the known Class 2 odd graphs O_k are the Petersen graph O_3 , and the odd graphs with an odd number of vertices that are precisely O_k with $k = 2^r$, for some positive integer r . In 1977, Fiorini and Wilson (1977) conjectured that all other values of k give Class 1 odd graphs. Fiorini and Wilson's conjecture remains still open. The Kneser graphs $K(n, 2)$ have an odd number of vertices precisely when $n \equiv 2 \pmod{4}$ or $n \equiv 3 \pmod{4}$, which implies that they are Class 2. Considering the ones with an even number of vertices, we establish that all $K(n, 2)$ with $n \equiv 0 \pmod{4}$ are Class 1.

This paper is organized as follows. Section 2 improves the known upper bound by proving that all odd graphs are Type 1. Section 3 gives the first known upper bound for the total chromatic number of the family $K(n, 2)$. Section 4 considers the edge coloring of the family $K(n, 2)$, establishing the first infinite family of Kneser graphs that are Class 1. Section 5 concludes the paper by presenting a conjecture.

2 Odd graphs are Type 1

Recently, Prajnanaswaroopaa et al. (Prajnanaswaroopaa et al. 2020) have verified the TCC for all odd graphs by using Biggs standard representation (Biggs 1979), where an odd graph is decomposed into an independent set and a perfect matching. We use this representation to prove that all odd graphs $O_k = K(2k - 1, k - 1)$, $k \geq 3$, are Type 1.

Let $w \in \{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ and consider the independent set I_w of vertices with center w . Consider the subset $\overline{I_w} = V(O_k) \setminus I_w$ consisting of the $(k - 1)$ -subsets of the set of size $2k - 1$ that not contain w . Since each $(k - 1)$ -subset is disjoint to precisely one $(k - 1)$ -subset, the corresponding vertices in $\overline{I_w}$ induce a matching. Therefore the set of vertices $V(O_k)$ is partitioned into I_w and $\overline{I_w}$ such that I_w is an independent set and $\overline{I_w}$ induces a matching M_w . As O_k is k -regular, each vertex of I_w is adjacent to k vertices of M_w , and each vertex of M_w is adjacent to $k - 1$ vertices of I_w (see Fig. 1).

Theorem 1 All odd graphs O_k , $k \geq 3$, have a $(k + 1)$ -total coloring.

Proof In order to prove that $\chi_T(O_k) = \Delta(O_k) + 1 = k + 1$, consider the independent set I_w and the matching M_w defined previously (see Fig. 1b). Assign color $k + 1$ to all vertices in I_w and all edges in M_w .

To assign the other k colors, we construct an auxiliary bipartite graph A_k by subdividing the edges of M_w , i.e., by removing all edges of $M_w = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{|M_w|}, y_{|M_w|})\}$ and adding vertex v_i , and edges (x_i, v_i) and (v_i, y_i) , for $i = 1, \dots, |M_w|$ (see Fig. 1 (c)). The bipartite graph A_k has set of vertices $V(A_k) = V_1 \cup V_2$, where $V_1 = I_w \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{|M_w|}\}$ and $V_2 = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{|M_w|}, y_{|M_w|}\}$, and has set of edges $E(A_k) = \{E(O_k) \setminus M_w\} \cup \{(x_1, v_1), (x_2, v_2), \dots, (x_{|M_w|}, v_{|M_w|})\} \cup \{(v_1, y_1), (v_2, y_2), \dots, (v_{|M_w|}, y_{|M_w|})\}$. The maximum degree of A_k is $\Delta(A_k) = \Delta(O_k) = k$, and by König's theorem, A_k has a k -edge coloring (see Fig. 1 (c)). We conclude the total coloring of O_k as follows.

Let ϕ be a k -edge coloring of A_k . Assign the colors given by ϕ to all edges incident to the vertices of I_w . Finally, assign the color given by ϕ to the edge (x_i, v_i) (respectively

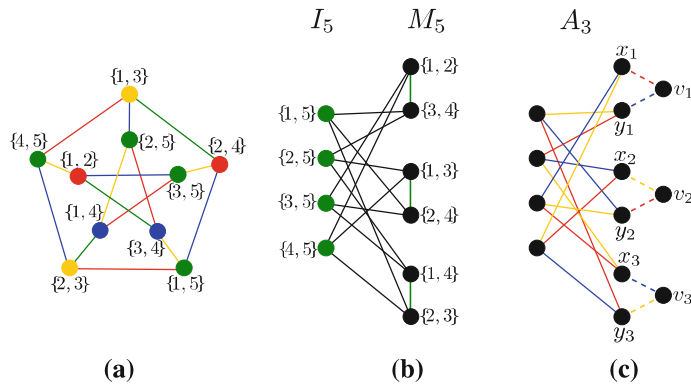


Fig. 1 **a** The Petersen graph O_3 with the 4-total coloring obtained by Theorem 1. **b** The representation of O_3 with the independent set I_5 and the matching M_5 . **c** The auxiliary bipartite A_3 with a 3-edge coloring

(v_i, y_i) to each vertex x_i (respectively y_i). Since the colors assigned by ϕ to these pairs of edges of A_k are different, adjacent vertices x_i and y_i in O_k have different colors in the obtained total coloring. Therefore, $\chi_T(O_k) = \Delta(O_k) + 1$. An example of the obtained total coloring is depicted in Fig. 1a.

3 An upper bound for the total chromatic number of $K(n, 2)$

We consider the infinite family of Kneser graphs $K(n, 2)$ and the main result of this section is Theorem 2. Recall that $\Delta(K(n, 2)) = \binom{n-2}{2}$. The first Kneser graph of this family is the graph $K(4, 2)$, consisting of a perfect matching with 6 vertices, which is Type 2. The second member is the Petersen graph $K(5, 2)$ which is known to be Type 1 (see Fig. 1).

Theorem 2 *Let $n \geq 6$. The total chromatic number of the Kneser graphs $K(n, 2)$ is upper bounded as follows:*

$$\chi_T(K(n, 2)) \leq \begin{cases} \Delta(K(n, 2)) + 2 & : n \text{ even, or } n \text{ odd and not divisible by 3;} \\ \Delta(K(n, 2)) + 3 & : n \equiv 3 \pmod{4} \text{ and divisible by 3;} \\ \Delta(K(n, 2)) + 4 & : n \equiv 1 \pmod{4} \text{ and divisible by 3.} \end{cases}$$

We prove Theorem 2 in Subsect. 3.3. In Subsect. 3.1 we present definitions and notations used to deal with total and edge colorings of the Kneser graphs $K(n, 2)$, and in Subsect. 3.2 we present Algorithm 1 that gives a partial total coloring of the Kneser graphs $K(n, 2)$.

3.1 Preliminaries

The following definitions and notation are used to deal with total and edge colorings of the Kneser graphs $K(n, 2)$. For any integer $n > 0$, we denote by $[n]$ the set $\{1, 2, \dots, n\}$.

It is well known that the chromatic index of a complete graph $\chi(K_n) = n$ when n is odd and $\chi(K_n) = n - 1$ when n is even (Baranyai 1973). In fact, an optimal edge coloring of K_n with n odd can be given by the edge partition E_1, \dots, E_n , where $E_i = \{\{i - q, i + q\} : 1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}\}$, for $1 \leq i \leq n$, where arithmetic operations are taken modulo n (being $0 \equiv n$). Notice that when n is odd, $i \notin E_i$ for all $i \in [n]$. When n is even, an optimal edge coloring of K_n can be obtained from an optimal edge coloring of K_{n-1} where each set E_i of the edge partition of K_{n-1} is added the edge $\{i, n\}$. For example, when $n = 5$ we obtain the edge partition $E_1 = \{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$, $E_2 = \{\{1, 3\}, \{4, 5\}\}$, $E_3 = \{\{2, 4\}, \{1, 5\}\}$, $E_4 = \{\{3, 5\}, \{1, 2\}\}$ and $E_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$, and for $n = 6$ the edge partition will be $E_i \cup \{i, 6\}$ for $1 \leq i \leq 5$.

Concerning the total chromatic number of complete graphs $\chi_T(K_n)$, it is well known that $\chi_T(K_n) = n$ when n is odd and $\chi_T(K_n) = n + 1$ when n is even (Behzad et al. 1967). Optimal total colorings of K_n can be obtained as follows: If n is odd then, an optimal total coloring of K_n can be constructed from the sets $S_i = \{i\} \cup E_i$, for $1 \leq i \leq n$, where E_i is the set of edges described previously. If n is even then, an optimal total coloring of K_n is obtained from an optimal edge coloring E_1, E_2, \dots, E_{n+1} of K_{n+1} as follows: for $1 \leq i \leq n$, let E'_i be the set of edges E_j in K_{n+1} containing the edge $\{i, n+1\}$. Thus, for $1 \leq i \leq n$, $S_i = \{i\} \cup (E'_i \setminus \{i, n+1\})$ and $M_{n+1} = E_{n+1}$. For example, when $n = 4$, we obtain from the optimal edge coloring E_1, \dots, E_5 of K_5 described previously, an optimal total coloring of K_4 as follows: $S_1 = \{\{1\}, \{2, 4\}\}$, $S_2 = \{\{2\}, \{3, 4\}\}$, $S_3 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$, $S_4 = \{\{4\}, \{1, 3\}\}$ and $M_5 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$.

We present next definitions and notation that are used to construct a representation of the Kneser graphs $K(n, 2)$ where the vertices are partitioned into cliques.

Definition 1 Let $t \geq 2$, $r \geq 1$, and G be a graph with rt vertices. We say that G is t -clique-decomposable if the vertices of G can be partitioned into r sets, where each set induces a clique C_i , $i = 1, 2, \dots, r$, of size t . We say that G admits a t -clique decomposition, denoted $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$.

Let $n \geq 6$ and let $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Notice that t divides $\binom{n}{2}$. In fact, $\binom{n}{2}$ is equal to tn when n is odd (resp. $t(n-1)$ when n is even). Moreover, there is a simple decomposition of the vertex set of $K(n, 2)$ into cliques of size t .

Lemma 1 Let $n \geq 6$ and $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. The Kneser graph $K(n, 2)$ admits the following t -clique decomposition: Let $C_i = E_i$, for $1 \leq i \leq n$, when n is odd (resp. for $1 \leq i \leq n-1$, when n is even), be a decomposition into cliques of size t of the vertex set of $K(n, 2)$, where the sets E_i are the edge sets of K_n corresponding to an optimal edge coloring of K_n .

From now on, we use a t -ordered clique decomposition of $K(n, 2)$, where each clique C_i in a t -clique decomposition of $K(n, 2)$ is an ordered set having the following properties.

Table 1 The 3-ordered clique decomposition of $K(7, 2)$

j	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	{4, 5}	{1, 3}	{1, 5}	{1, 7}	{1, 2}	{1, 4}	{1, 6}
2	{2, 7}	{4, 7}	{2, 4}	{2, 6}	{4, 6}	{2, 3}	{2, 5}
3	{3, 6}	{5, 6}	{6, 7}	{3, 5}	{3, 7}	{5, 7}	{3, 4}

(i) Each vertex $\{a, b\}$ in C_i is ordered, that is, $a < b$.

(ii) Let $t = |C_i|$. If there exists a vertex $\{j, b\} \in C_i$, with $j < b$ and $1 \leq j \leq t$, then $\{j, b\}$ is the j^{th} vertex in the clique C_i , which is denoted by C_i^j . Otherwise, the remaining positions are fulfilled in increasing order by the remaining vertices which are ordered in a lexicographical way.

Table 1 shows the 3-ordered clique decomposition of $K(7, 2)$ as depicted in Fig. 2.

By the construction of the t -ordered clique decomposition of $K(n, 2)$ we have the following relevant observation.

Observation 1 Let $n \geq 6$ and let $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Let $r = \binom{n}{2}/t$ and let $C_1 \cup \dots \cup C_r$ be the t -ordered clique decomposition of $K(n, 2)$ described previously. Thus,

- i. If n is even, then for $1 \leq i \leq r$: $1 \in C_i^1$; and $2 \in C_i^2$ except when $i = \frac{n+2}{2}$.
- ii. If n is odd, then for $1 \leq i \leq r$: $1 \in C_i^1$ except when $i = 1$; and $2 \in C_i^2$ except when $i = 2$ and $i = \frac{n+3}{2}$. Moreover, the vertices C_1^1, C_2^2 and $C_{\frac{n+3}{2}}^2$ are pairwise non adjacent.

In fact, notice that by construction, if n is even, then $C_{\frac{n+2}{2}}^2 = \{\frac{n+2}{2}, n\}$. Moreover, if n is odd, then $C_1^1 = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\}$, $C_2^2 = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+7}{2}\}$, and $C_{\frac{n+3}{2}}^2 = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+5}{2}\}$. Thus, by definition of $K(n, 2)$, these vertices are pairwise non adjacent.

As each clique C_i is a complete graph, we use the following notation for a total coloring of them: Let $t = |C_i|$ and let S_p be the p^{th} -color class of a total coloring of K_t as defined in Subsect. 3.1, for $1 \leq p \leq t$, and let M_{t+1} be the perfect matching forming the $(t + 1)^{th}$ -color class in K_t when t is even. Thus,

- Suppose that t is odd. We denote by $S_{p,i}$, with $1 \leq p \leq t$, the p^{th} -color class of a total coloring of C_i , formed by the vertex C_i^p and the set of edges $\{C_i^w, C_i^z\}$: such that $\{w, z\} \in S_p$.
- Suppose that t is even. Similarly to the odd case, but considering the total coloring of K_t with t even and where $M_{t+1,i}$ denotes the perfect matching in C_i of size $\frac{t}{2}$ formed by the edges $\{C_i^w, C_i^z\}$ such that $\{w, z\} \in M_{t+1}$.

Definition 2 Let $n \geq 6, t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, r = \binom{n}{2}/t$ and let $C_1 \cup \dots \cup C_r$ be the t -ordered clique decomposition of $K(n, 2)$. Denote by $B(n, 2)$ the r -partite graph obtained from $K(n, 2)$ by removing the edges of each clique C_i . Each part of $B(n, 2)$ is the independent set \overline{C}_i . Furthermore, for $1 \leq i \neq j \leq r$, denote by $B_{i,j}(n, 2)$ the bipartite subgraph of $B(n, 2)$ induced by $\overline{C}_i \cup \overline{C}_j$.

Lemma 2 Let $n \geq 6, t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ and $r = \binom{n}{2}/t$. For $1 \leq i \neq j \leq r$, the subgraph $B_{i,j}(n, 2)$ has the following properties.

(i) If n is even, then $B_{i,j}(n, 2)$ is $(t - 2)$ -regular;

(ii) If n is odd, then $\Delta(B_{i,j}(n, 2)) = t - 1$. Moreover, each $B_{i,j}(n, 2)$ contains exactly two vertices, one in $\overline{C_i}$ and the other in $\overline{C_j}$ with degree $t - 1$, and these two vertices are not adjacent when $n = 3q$ and $j = (i \pm q) \pmod n$; otherwise, these two vertices are adjacent.

Proof (i) For n even, each clique C_i can be viewed as a perfect matching of K_n and so $\bigcup_{v \in C_i} v = [n]$. Thus, given a vertex $\{i_1, i_2\} \in C_i$, there exist exactly two vertices $\{j_1, j_2\}, \{j'_1, j'_2\} \in C_j$, with $i \neq j \in [r]$, such that exactly one of them contains i_1 and the other one contains i_2 . Assume w.l.o.g. that $i_1 \in \{j_1, j_2\}$ and $i_2 \in \{j'_1, j'_2\}$. The remaining vertices in C_j have empty intersection with the vertex $\{i_1, i_2\}$. Therefore, the number of neighbors of vertex $\{i_1, i_2\} \in B_{i,j}(n, 2)$ is exactly $t - 2$.

(ii) For n odd, each clique C_i corresponds to a matching in K_n of size $\frac{n-1}{2}$. Therefore, by construction of the t -ordered clique decomposition, each clique C_i misses exactly the integer i (i.e. i does not belong to any vertex in C_i). Now, let C_j , with $j \neq i$, be another clique in the decomposition of $K(n, 2)$. In a similar way, the integer j does not belong to any vertex in C_j . Thus, let $\{j_1, j_2\} \in C_j$ such that $i \in \{j_1, j_2\}$. Assume w.l.o.g. that $j_1 = i$. There is exactly one vertex $\{i_1, i_2\} \in C_i$ containing j_2 . So, vertex $\{j_1, j_2\} \in C_j$ has exactly $t - 1$ neighbors in C_i . Similarly, there exists only one vertex $\{i_1, i_2\} \in C_i$ containing the integer j and thus, such a vertex has exactly $t - 1$ neighbors in C_j . All the remaining vertices in $B_{i,j}(n, 2)$ have exactly $t - 2$ neighbors. Finally, let $\{i', j\} \in C_i$ and $\{j', i\} \in C_j$ (or $\{i, j'\} \in C_j$) be the two vertices of degree $t - 1$ in $B_{i,j}(n, 2)$, with $1 \leq i \neq j \leq n$. By construction, $(i', j) = (i - q \pmod n, i + q \pmod n)$ for some $1 \leq q \leq \frac{n-1}{2}$. Assume first that $j = i + q \pmod n$. Therefore, $(j - q \pmod n, j + q \pmod n) \in C_j$ is the vertex $(i \pmod n, (i + 2q) \pmod n) = (i, (i + 2q) \pmod n)$. As $i \neq j$, we have that $i + 2q \pmod n = i - q \pmod n \iff i + 2q \equiv i - q \pmod n \iff n$ divides $3q$. Now, assume that $j = i - q \pmod n$. Thus, $(j - q \pmod n, j + q \pmod n) \in C_j$ is the vertex $(i - 2q \pmod n, i)$. Similarly to the previous case, $i - 2q \pmod n = i + q \pmod n \iff n$ divides $3q$. However, as $q \leq \frac{n-1}{2}$, the only possibility of the vertices of degree $t - 1$ are not adjacent is when $n = 3q$ and $j = (i \pm q) \pmod n$.

Lemma 3 Let $n > 6$ be an odd integer such that n is not divisible by 3. Let $B'(n, 2)$ be the n -partite graph having the set of vertices of $B(n, 2)$ and where for $1 \leq i \neq j \leq n$ there is only one edge between the parts $\overline{C_i}$ and $\overline{C_j}$ which is the edge between the only two vertices of degree $t - 1$ in $B_{i,j}(n, 2)$. Thus, $B'(n, 2)$ is a 2-regular n -partite graph.

Proof As n is odd, we have that $B'(n, 2)$ has n parts $\overline{C_1} \cup \dots \cup \overline{C_n}$. By Lemma 2 (ii), each one of the integers $i \in [n]$ does not belong to any vertex in each part $\overline{C_i}$. Now, let $\{j, k\}$ be any vertex in $\overline{C_i}$. Thus, $i \neq j \neq k \in [n]$ and by Lemma 2 (ii), as 3 does not divide n , we have that vertex $\{j, k\} \in \overline{C_i}$ has only two neighbors, one $\{i, j'\} \in \overline{C_j}$ and one $\{i, k'\} \in \overline{C_k}$, such that vertices $\{j, k\}, \{i, j'\}$ (resp. $\{j, k\}, \{i, k'\}$) have degree $t - 1$ in $B'_{i,j}(n, 2)$ (resp. in $B'_{i,k}(n, 2)$). As we have chosen any $i \in [n]$ and any vertex $\{j, k\} \in \overline{C_i}$, each vertex in $B'(n, 2)$ has degree equal to 2.

3.2 An algorithm for a partial total coloring of $K(n, 2)$

In this section, we present Algorithm 1 that gives a partial total coloring of the Kneser graphs $K(n, 2)$, which is used in the proof of Theorem 2. A partial k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to a subset of elements of G such that adjacent or incident elements in the subset have different colors.

Algorithm 1:

Input: Let $n \geq 6$, $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ and $r = \binom{n}{2}/t$. Let $C_1 \cup \dots \cup C_r$ be a t -ordered clique decomposition of $K(n, 2)$. Let E' be a subset of edges (possibly empty) in $B(n, 2)$ and let $B^*(n, 2)$ be the graph $B(n, 2)$ without the edges in E' . Moreover, assume that for each $1 \leq i \neq j \leq r$, the bipartite subgraph $B_{i,j}^*(n, 2)$ of $B^*(n, 2)$ has maximum degree equal to $(t - 2)$ and let $F_{i,j}^1 \cup \dots \cup F_{i,j}^{t-2}$ be an optimal $(t - 2)$ -edge coloring of $B_{i,j}^*(n, 2)$.

Output: A partial total coloring of $K(n, 2)$ with $(t - 2)r$ colors.

- 1 **For** $k = 1$ **to** $t - 2$ **do**
- 2 **For** $i = 1$ **to** r **do**
- 3 (i) Color the independent set of elements $S_{k+2,i}$ of clique C_i with color $i + r(k - 1)$.
- 4 (ii) For all edges $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. the i^{th} edge color class of an optimal edge coloring of K_r), color all edges in F_{i_1,i_2}^k with color $i + r(k - 1)$.

Lemma 4 *Algorithm 1 is correct and gives a partial total coloring of the input graph with $(t - 2)r$ colors.*

Proof Clearly, the number of colors used by Algorithm 1 is equal to $(t - 2)r$. We know that r is an odd integer. In fact, $r = n$ if n is odd, otherwise $r = n - 1$. As we saw in Subsect. 3.1, K_r has an edge decomposition E_1, E_2, \dots, E_r corresponding to an optimal edge coloring such that integer i does not belong to the edge set E_i , for $1 \leq i \leq r$. Let $k = 1$ and consider the most internal loop: for each $1 \leq i \leq r$, we use the information in the set E_i to color the edges and vertices of $K(n, 2)$ as follows: as integer i does not belong to E_i , first, we color the elements in the set $S_{3,i}$ of clique C_i with color i . Notice that such a coloring of $S_{3,i}$ is proper. Next, for each edge $\{i_1, i_2\} \in E_i$, we use color i to color a matching between each one of the bipartite subgraphs $B_{i_1,i_2}^*(n, 2)$ which corresponds to the edge set F_{i_1,i_2}^1 . As for any $\{i_1, i_2\}, \{i'_1, i'_2\} \in E_i$ we have that $\{i_1, i_2\} \cap \{i'_1, i'_2\} = \emptyset$ and $\{i\} \cap \{i_1, i_2\} = \{i\} \cap \{i'_1, i'_2\} = \emptyset$, such an edge coloring is proper. So, at the end of the internal loop, we have properly colored, with colors $1 \leq i \leq r$, the set $S_{3,i}$ of C_i and one matching (i.e. a color class in an optimal edge coloring) of each $B_{i_1,i_2}^*(n, 2)$ with $1 \leq i_1 \neq i_2 \leq r$. Thus, for each fixed k , $1 \leq k \leq t - 2$, when the internal loop ends, for each $1 \leq i \leq r$, we have properly colored the set $S_{k+2,i}$ of C_i and one matching (i.e. a color class in an optimal edge coloring) of each $B_{i_1,i_2}^*(n, 2)$, where $1 \leq i_1 \neq i_2 \leq r$ and $i \neq i_1, i_2$, with color $i + r(k - 1)$. So, it is not difficult to see that at the end of Algorithm 1, all the edges of each $B_{i_1,i_2}^*(n, 2)$ with $1 \leq i_1 \neq i_2 \leq r$ have been properly colored with colors $1, 2, \dots, (t - 2)r$. Moreover, the sets $S_{j,i}$ of each clique C_i of size t , where $3 \leq j \leq t$,

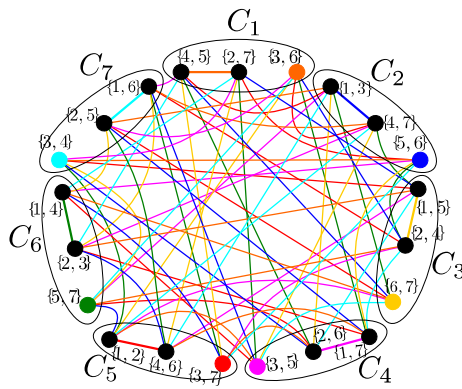


Fig. 2 A depiction of the input graph of $K(7, 2)$ highlighting the elements colored by Algorithm 1 with $(t - 2)r = (3 - 2)7 = 7$ colors. As k takes only the value 1 (i.e. $t = 3$), for $1 \leq i \leq 7$ Algorithm 1 colors the independent set of elements $S_{3,i}$ of clique C_i , composed by one edge and one vertex with the color i and, for all edges $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. the i^{th} edge color class of an optimal edge coloring of K_7), Algorithm 1 also colors with color i all the edges in F_{i_1, i_2}^1 . For instance, the elements which are colored with color 1 (orange) are the elements in $S_{3,1}$ (i.e. the vertex $\{3, 6\}$ and the edge $\{\{4, 5\}, \{2, 7\}\}$), and the set of edges in $F_{4,5}^1$ (i.e. $\{\{1, 7\}, \{4, 6\}\}, \{\{2, 6\}, \{3, 7\}\}$ and $\{\{3, 5\}, \{1, 2\}\}$), and in $F_{3,6}^1$ (i.e. $\{\{1, 5\}, \{2, 3\}\}, \{\{2, 4\}, \{5, 7\}\}$ and $\{\{6, 7\}, \{1, 4\}\}$) and in $F_{2,7}^1$ (i.e. $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}\}, \{\{4, 7\}, \{1, 6\}\}$ and $\{\{5, 6\}, \{3, 4\}\}$). In fact, notice that E_1 , the first color class of an optimal edge coloring of K_7 , is the set of edges $\{\{4, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}\}$ (Color figure online)

have been also properly colored with colors $1, 2, \dots, (t - 2)r$. Thus, Algorithm 1 is correct. Finally, notice that the sets $S_{1,i}$ and $S_{2,i}$ of each clique $C_i, 1 \leq i \leq r$, remain uncolored. Therefore, Algorithm 1 gives a partial total coloring of the input graphs. Figure 2 presents the elements colored by Algorithm 1 considering $K(7, 2)$.

3.3 The proof of Theorem 2

The focus of this subsection is to assign colors to the vertices and edges of $K(n, 2)$ not colored by Algorithm 1 and thus obtain the bounds of Theorem 2. Let $n \geq 6$ and let $\Delta(K(n, 2)) = \binom{n-2}{2} = \frac{n^2-5n}{2} + 3$.

3.3.1 Case n even

If n is even, then $t = \frac{n}{2}$ and $r = \binom{n}{2}/t = n - 1$. By Lemma 2 (ii), we know that for each $1 \leq i \neq j \leq r$, the bipartite subgraph $B_{i,j}(n, 2)$ of the graph $B(n, 2)$ is $(t - 2)$ -regular. Therefore, we can use Algorithm 1 by setting $E' = \emptyset$ in order to obtain a partial total coloring of $K(n, 2)$ with $(t - 2)r = (\frac{n}{2} - 2)(n - 1) = \frac{n^2-5n}{2} + 2 = \Delta(K(n, 2)) - 1$ colors in which all the edges in $B(n, 2)$ are colored. In order to complete the total coloring of $K(n, 2)$, we need to consider the following cases:

1. Case t odd. As the total coloring of K_t is equal to t , it remains to color the sets $S_{1,i}$ and $S_{2,i}$ of each clique C_i , with $1 \leq i \leq r$. Clearly, for each $1 \leq i \neq j \leq r$, no

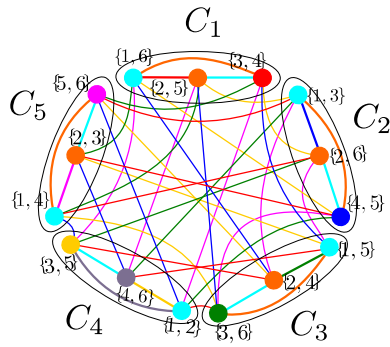


Fig. 3 A total coloring of $K(6, 2)$ with $\Delta(K(6, 2)) + 2 = 8$ colors. First, Algorithm 1 obtains a partial total coloring with 5 colors (red, blue, green, yellow and purple) as follows. As k takes only the value 1 (i.e. $t = 3$) then, for $1 \leq i \leq 5$, Algorithm 1 colors the elements in the set $S_{3,i}$ of clique C_i , composed by one edge and one vertex, with the color i and, for all edges $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. the i^{th} edge color class of an optimal edge coloring of K_5), Algorithm 1 also colors with color i all the edges in F_{i_1, i_2}^1 . For instance, at the end of Algorithm 1, the elements which are colored with color 1 (red) are the elements in $S_{3,1}$ (i.e. the vertex $\{3, 4\}$ and the edge $\{\{1, 6\}, \{2, 5\}\}$) and, the set of edges in $F_{2,5}^1$ (i.e. $\{\{1, 3\}, \{5, 6\}\}, \{\{2, 6\}, \{1, 4\}\}$ and $\{\{4, 5\}, \{2, 3\}\}$) and in $F_{3,4}^1$ (i.e. $\{\{1, 5\}, \{4, 6\}\}, \{\{2, 4\}, \{3, 5\}\}$ and $\{\{3, 6\}, \{1, 2\}\}$). In fact, notice that E_1 , the color class 1 in an optimal edge coloring of K_5 is the set of edges $\{\{2, 5\}, \{3, 4\}\}$. In order to complete the partial total coloring given by Algorithm 1, we color with color 6 (light blue) the elements in $S_{1,i}$ of each clique C_i , and we color with color 7 (orange) the elements $S_{2,i}$, except for vertex $C_4^2 = \{4, 6\}$ in $S_{2,4}$ which needs different color 8 (gray) (Color figure online)

edge inside C_i is incident to any edge inside C_j . Moreover, by Observation 1 (i), $1 \in C_i^1$ and so, we can color all the edges and the vertex in each $S_{1,i}$ with color $(t-2)r+1$. Again, by Observation 1 (i), we can color all the edges and the vertex in each $S_{2,i}$ with color $(t-2)r+2$ except the vertex $C_{\frac{n+2}{2}}^2$ for which we use the color $(t-2)r+3$. Therefore, we use at most $\Delta(K(n, 2)) - 1 + 3 = \Delta(K(n, 2)) + 2$ colors to total coloring $K(n, 2)$. For an example of the obtained $(\Delta(K(n, 2)) + 2)$ -total coloring when t is odd, see Fig. 3.

- Case t even. As the total coloring of K_t is $t + 1$, it remains to color the sets $S_{1,i}$, $S_{2,i}$ and $M_{t+1,i}$ of each clique C_i , with $1 \leq i \leq r$. We proceed in a similar way as in the Case 1 in order to color the sets $S_{1,i}$ with color $(t-2)r+1$. For $i \neq \frac{n+2}{2}$, we color the sets $S_{2,i}$ and $M_{t+1, \frac{n+2}{2}}$ with color $(t-2)r+2$ and the sets $S_{2, \frac{n+2}{2}}$ and $M_{t+1,i}$ with color $(t-2)r+3$. Notice that by construction, the previous total coloring is proper because the only clique whose second vertex is not of the form $\{2, b\}$ with $2 < b \leq n$ is the clique $C_{\frac{n+2}{2}}$ and thus, any edge in $M_{t+1, \frac{n+2}{2}}$ is incident to a vertex $\{2, b\}$. Therefore, we use at most $\Delta(K(n, 2)) + 2$ colors to total coloring $K(n, 2)$.

3.3.2 Case n odd

If n is odd, then $t = \frac{n-1}{2}$ and $r = \binom{n}{2}/t = n$. For each i, j , with $1 \leq i < j \leq r$, by Lemma 2 (ii), the bipartite graph $B_{i,j}(n, 2)$ has maximum degree equal to $t - 1$. We must consider the following cases:

a. **n is not divisible by 3.** By Lemma 3, the subgraph $B'(n, 2)$ of $B(n, 2)$ is 2-regular. Let E' be the set of edges of $B'(n, 2)$. By Lemma 2 (ii) and Lemma 3, the bipartite subgraphs of the graph $B(n, 2)$ without the set of edges E' are $(t - 2)$ -regular. Therefore, by applying the Algorithm 1 to $K(n, 2)$ with E' being the set of edges in $B'(n, 2)$, we obtain a partial total coloring of $K(n, 2)$ with $(t - 2)r = (\frac{n-1}{2} - 2)n = \frac{n^2 - 5n}{2} = \Delta(K(n, 2)) - 3$ colors. In order to complete the total coloring of $K(n, 2)$, we need to consider the following cases:

1. Case t odd. As the total coloring of K_t is equal to t , it remains to color the sets $S_{1,i}$ and $S_{2,i}$ of each clique C_i , with $1 \leq i \leq r$. Clearly, for each $1 \leq i \neq j \leq r$, no edge inside C_i is incident to any edge inside C_j . Moreover, by Observation 1 (ii), $1 \in C_i^1$ except when $i = 1$; and $2 \in C_i^2$ except when $i = 2$ and $i = \frac{n+3}{2}$. So, we color the elements in the sets $S_{1,i}$ and $S_{2,i}$ with colors $\Delta(K(n, 2)) - 2$ and $\Delta(K(n, 2)) - 1$ respectively, except the vertices C_1^1, C_2^2 and $C_{\frac{n+3}{2}}^2$ which, again by Observation 1 (ii), they are pairwise non adjacent. It remains to color the edges in $B'(n, 2)$ and the set of vertices $\{C_1^1, C_2^2, C_{\frac{n+3}{2}}^2\}$. By Lemma 3, $B'(n, 2)$ has maximum degree equal to 2. Therefore, 3 new colors are enough to color the edges in $B'(n, 2)$ and the vertices in $\{C_1^1, C_2^2, C_{\frac{n+3}{2}}^2\}$. So, we use at most $\Delta(K(n, 2)) - 1 + 3 = \Delta(K(n, 2)) + 2$ colors to total coloring $K(n, 2)$. Notice that in this case, n is not divisible by 3 and $n \not\equiv 1 \pmod 4$.

2. Case t even. Notice that in this case $n \equiv 1 \pmod 4$. In order to complete the total coloring of $K(n, 2)$, it remains to color the sets $S_{1,i}, S_{2,i}$, the edges $M_{t+1,i}$ of each clique C_i , with $1 \leq i \leq r$ and the set of edges $E' = B'(n, 2)$. Recall that each clique can be described as a complete graph K_t which admits a $(t + 1)$ -total coloring when t is even.

Consider the clique $C_1 = \{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_t y_t\}$ such that $2 \leq x_i \neq y_i \leq n$ and let $d_i = x_i - 1$. Note that, the graph $B'(n, 2)$ can be described as t disjoint cycles of size n , w.l.o.g. we can construct these t disjoint cycles of size n from C_1 as follows: from each $x_i y_i \in C_1$, with $1 \leq i \leq t$, form the cycles considering the integers modulo n by $Cycle(d_i) = \{x_i y_i, (x_i + d_i)(y_i + d_i), (x_i + 2d_i)(y_i + 2d_i), \dots, (x_i + nd_i, y_i + nd_i), x_i y_i\}$. As n is odd, we can color the odd cycles with 3 colors as follows: for each $Cycle(d_i)$ assign the edge $\{x_i y_i, (x_i + d_i)(y_i + d_i)\}$ with the color $\Delta(K(n, 2)) - 2$; for $j \geq 1$ odd, assign the edges $\{(x_i + jd_i)(y_i + jd_i), (x_i + (j + 1)d_i)(y_i + (j + 1)d_i)\}$ with the color $\Delta(K(n, 2)) - 1$ and for $j > 1$ even, assign the edges $\{(x_i + jd_i)(y_i + jd_i), (x_i + (j + 1)d_i)(y_i + (j + 1)d_i)\}$ with the color $\Delta(K(n, 2))$.

Assign with the color $\Delta - 2$ only the edges of set $S_{1,i}$ with $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ and all the elements in $S_{1,i}$ for $\frac{n+3}{2} \leq i \leq n$. Note that, the colors of the edges incident to the vertices C_i^1 with $2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ are $\Delta(K(n, 2)) - 2$ and $\Delta(K(n, 2)) - 1$ and so, we can assign the color $\Delta(K(n, 2))$ to these vertices. Note that the edges incident to the vertices in C_1 are $\Delta(K(n, 2)) - 2$ and $\Delta(K(n, 2))$, so we can assign the set S_1^1 with the color $\Delta(K(n, 2)) - 1$. It remains color the set $S_{2,i}$ and the edges $M_{t+1,i}$ of each clique C_i .

Assign the sets $M_{t+1,2}$, $M_{t+1, \frac{n+3}{2}}$ and the sets $S_{2,i}$ for $i \neq 2, \frac{n+3}{2}$ with color $\Delta(K(n, 2)) + 1$; assign the edges of $M_{t+1,i}$ with the color $\Delta(K(n, 2)) + 2$. Now for $i = 2, \frac{n+3}{2}$, assign the sets $S_{2,i}$ with color $\Delta(K(n, 2)) + 2$. Notice that by construction, the previous total coloring is proper and therefore, we use at most $\Delta(K(n, 2)) + 2$ colors to total coloring $K(n, 2)$. Figure 4 presents a depiction of the Kneser graph $K(13, 2)$ with the elements colored as previously using 5 colors.

- b. n is divisible by 3. Let $n = 3p$ for some odd integer $p \geq 3$. Let E_1, E_2, \dots, E_n be an optimal edge coloring of K_n , as defined in Section 2, representing a t -ordered clique decomposition $C_1 \cup \dots \cup C_n$ of $K(n, 2)$. As shown in Lemma 2 (ii), there are some cliques C_i, C_j such that they contain a vertex $\{j, i'\}$ and $\{i, j'\}$ respectively, both of degree $t - 1$ in $B_{i,j}(n, 2)$, but not adjacent between them. Precisely, consider the cliques C_i, C_j and C_k with $i \neq j \neq k \in [n]$ such that $j = i - p \pmod{3p}$ and $k = i + p \pmod{3p}$. By construction, the vertex $\{j, k\} = \{i - p \pmod{3p}, i + p \pmod{3p}\}$ belongs to C_i . Moreover, the vertex $\{j - p \pmod{3p}, j + p \pmod{3p}\} = \{k, i\}$ belongs to C_j and the vertex $\{k - p \pmod{3p}, k + p \pmod{3p}\} = \{i, j\}$ belongs to C_k . Therefore, the two vertices of degree $t - 1$ in the bipartite graphs $B_{i,j}(n, 2)$, $B_{i,k}(n, 2)$ and $B_{j,k}(n, 2)$ respectively, are pairwise non adjacent. It is not hard to see that we can partition the cliques C_1, \dots, C_{3p} in triples verifying the previous property of pairwise non adjacency between their respective vertices of degree $t - 1$. In fact, for any $i \in [n]$, let $\text{Orb}(i) = \{i\} \cup \{j : j = i - p \pmod{3p} \text{ or } j = i + p \pmod{3p}\}$ be the orbit of i . Clearly, there are exactly p different orbits and they form a partition of $[n]$. For example, for $n = 9$ we have three orbits: $\text{Orb}(1) = \{1, 4, 7\}$, $\text{Orb}(2) = \{2, 5, 8\}$, and $\text{Orb}(3) = \{3, 6, 9\}$. Now, for each orbit $\text{Orb}(i) = \{i, j, k\}$ we construct 3 vertex disjoint paths on three vertices in $B(n, 2)$ as follows: let $P_i = \{\{j_1, j_2\}, \{j, k\}, \{k_1, k_2\}\}$, $P_j = \{\{i_1, i_2\}, \{i, k\}, \{k_3, k_4\}\}$, and $P_k = \{\{i_3, i_4\}, \{i, j\}, \{j_3, j_4\}\}$, where $\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}$ are two different vertices in C_i ; $\{j_1, j_2\}, \{j_3, j_4\}$ are two different vertices in C_j ; and $\{k_1, k_2\}, \{k_3, k_4\}$ are two different vertices in C_k such that, $\{i_1, i_2\}, \{j_1, j_2\}$ are adjacent in $B_{i,j}(n, 2)$, and $\{i_3, i_4\}, \{k_1, k_2\}$ are adjacent in $B_{i,k}(n, 2)$, and $\{j_3, j_4\}, \{k_3, k_4\}$ are adjacent in $B_{j,k}(n, 2)$. Notice that the construction of such three vertex disjoint paths for each orbit is always possible because $n \geq 9$ and so each C_i has at least 4 vertices. For example, for $n = 9$, the three vertex disjoint paths on 3 vertices of the orbit $\text{Orb}(1)$ can be $P_1 = \{\{8, 9\}, \{4, 7\}, \{5, 9\}\}$, $P_4 = \{\{5, 6\}, \{1, 7\}, \{6, 8\}\}$, and $P_7 = \{\{3, 8\}, \{1, 4\}, \{3, 5\}\}$. Now, let F be the set of the edges of the $3p$ vertex disjoint paths on 3 vertices constructed previously and associated to the p orbits of $[n]$. Moreover, let F' be the set of edges in the graph $B'(n, 2)$. It's not so hard to verify that the maximum degree of the bipartite graphs in the graph $B(n, 2)$ without the edges in $F \cup F'$ is equal to $t - 2$. Therefore, we can apply the Algorithm 1 to $K(n, 2)$ by setting $E' = F \cup F'$ which give us a partial total coloring of $K(n, 2)$ with $(t - 2)n = \Delta(K(n, 2)) - 3$ colors. Now, in order to complete such a total coloring for $K(n, 2)$, we consider the following cases:

1. Case t odd. We proceed in a similar way as in the Case ii.a.1. Thus, we color the elements in the sets $S_{1,i}$ and $S_{2,i}$ with colors $\Delta(K(n, 2)) - 2$ and $\Delta(K(n, 2)) - 1$ respectively, except the vertices C_1^1, C_2^2 and $C_{\frac{n+3}{2}}^2$ which, by Observation 1 (ii), they are pairwise non adjacent. Let $B''(n, 2)$ be the graph $B'(n, 2)$ to which we add the edges in the set F defined previously. Then, it remains to color the edges in $B''(n, 2)$ and the set of vertices $\{C_1^1, C_2^2, C_{\frac{n+3}{2}}^2\}$. By construction, the maximum degree in $B''(n, 2)$ is equal to 3. Therefore, four colors are enough to color the edges in $B''(n, 2)$. Moreover, the same new four colors are enough also to color the independent vertices $\{C_1^1, C_2^2, C_{\frac{n+3}{2}}^2\}$. Therefore, we use at most $\Delta(K(n, 2)) + 3$ colors to total coloring $K(n, 2)$. Notice that in this case, $n \equiv 3 \pmod 4$.
2. Case t even. As the total coloring of K_t is $t + 1$, it remains to color the sets $S_{1,i}, S_{2,i}$ and $M_{t+1,i}$ of each clique C_i , with $1 \leq i \leq n$. We proceed in a similar way as in the Case b.1 in order to color the sets $S_{1,i}, S_{2,i}$ of each C_i and the edges in $B''(n, 2)$. Finally, we use a new color in order to color the edges of each edge set $M_{t+1,i}$. Therefore, we use at most $\Delta(K(n, 2)) + 4$ colors to total color $K(n, 2)$. Notice that in this case, $n \equiv 1 \pmod 4$.

As all the cases have been considered, we have that Theorem 2 holds. □

4 An infinite family of Class 1 $K(n, 2)$ graphs

The Kneser graph $K(4, 2)$ consisting of a perfect matching with 6 vertices is Class 1, and the Petersen graph $K(5, 2)$ is known to be Class 2. It is well known that a regular graph with an odd number of vertices is Class 2. Recall that the number of vertices of $K(n, 2)$ is $\binom{n}{2}$, so the Kneser graphs $K(n, 2)$ with $n \equiv 2 \pmod 4$ or $n \equiv 3 \pmod 4$ are precisely the ones with an odd number of vertices, which implies that they are Class 2. In the following, we consider the Kneser graphs $K(n, 2)$ with an even number of vertices, that is with $n \equiv 0 \pmod 4$ or $n \equiv 1 \pmod 4$, which implies that $n \geq 8$.

We use Algorithm 2 to obtain a $\Delta(K(n, 2))$ -edge coloring of the infinite family of $K(n, 2)$ when $n \equiv 0 \pmod 4$. Note that in this case both n and $t = \frac{n}{2}$ are even and thus an optimal edge coloring of clique C_i of an even size uses $t - 1$ colors. Algorithm 2 is a variation of Algorithm 1 which is used only to color the edges of $K(n, 2)$ as follows.

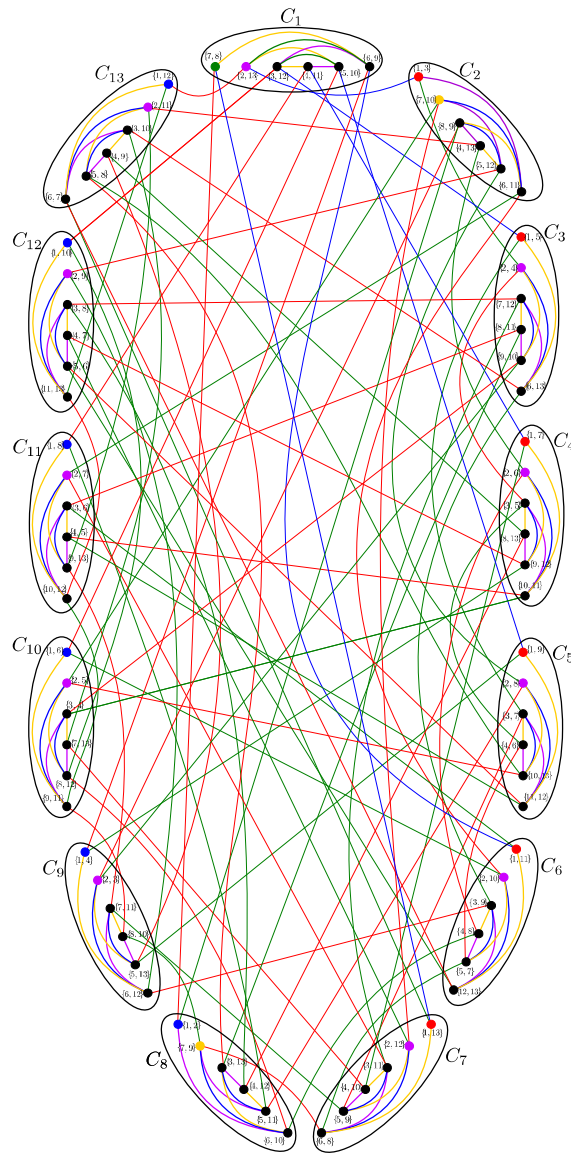
Algorithm 2:

Input: Let $n \geq 8, t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ and $r = \binom{n}{2}/t$. Let $C_1 \cup \dots \cup C_r$ be a t -ordered clique decomposition of $K(n, 2)$. Let E' be a subset of edges (possibly empty) in $B(n, 2)$ and let $B^*(n, 2)$ be the graph $B(n, 2)$ without the edges in E' . Moreover, assume that for each $1 \leq i \neq j \leq r$, the bipartite subgraph $B_{i,j}^*(n, 2)$ of $B^*(n, 2)$ has maximum degree equal to $(t - 2)$ and let $F_{i,j}^1 \cup \dots \cup F_{i,j}^{t-2}$ be an optimal $(t - 2)$ -edge coloring of $B_{i,j}^*(n, 2)$.

Output: A partial edge coloring of $K(n, 2)$ with $(t - 2)r$ colors.

1 **For** $k = 1$ **to** $t - 2$ **do**

Fig. 4 Disregarding the elements colored by Algorithm 1 with $(t - 2)r = (6 - 2)13 = 52$ colors, we show how to complete the total coloring of $K(13, 2)$ by highlighting the elements colored with the 5 new colors 53 (blue), 54 (green), 55 (red), 56 (purple) and $57 = \Delta(K(13, 2)) + 2$ (yellow). Colors 53, 54 and 55 color the elements in $S_{1,i}$ (i.e. each $S_{1,i}$ is composed by two edges and one vertex) of each clique C_i , for $1 \leq i \leq 13$, as follows. First, color 53 colors all the elements in $S_{1,i}$, for $8 \leq i \leq 13$ and only the edges in $S_{1,i}$, for $2 \leq i \leq 7$; color 54 colors all the element in $S_{1,1}$, and color 55 colors only the vertices of $S_{1,i}$, for $2 \leq i \leq 7$. Moreover, colors 53, 54 and 55 are used to color the edges of graph $B'(13, 2)$. Next, color 56 colors the perfect matchings $M_{7,2}$ and $M_{7,8}$, and it also colors the elements in $S_{2,i}$ of each C_i (except for the sets $S_{2,2}$ and $S_{2,8}$ whose elements are colored with color 57, because $2 \notin C_2^2 = \{7, 10\}$ and $2 \notin C_8^2 = \{7, 9\}$ and thus, such vertices are adjacents to vertices colored with color 56). Finally, color 57 colors the perfect matchings $M_{7,i}$ of each C_i , for $i \notin \{2, 8\}$ (Color figure online)



- 2 **For $i = 1$ to r do**
- 3 (i) Color all the edges in the set $E_{k+1,i} = \{\{C_i^u, C_i^v\} : \{u, v\} \in E_{k+1}\}$ (where E_{k+1} denotes the $(k + 1)^{th}$ edge color class of an optimal edge coloring of K_r) of clique C_i with color $i + r(k - 1)$.
- 4 (ii) For all edge $\{i_1, i_2\} \in E_i$ (i.e. the i^{th} edge color class of an optimal edge coloring of K_r), color all edges in F_{i_1,i_2}^k with color $i + r(k - 1)$.

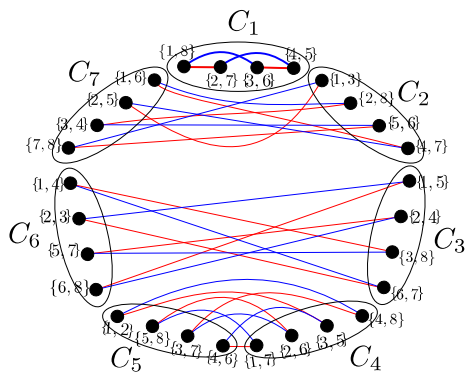


Fig. 5 A depiction of a subgraph of the input graph $K(8, 2)$ highlighting the edges colored by Algorithm 2, for $k = 1, 2$ and when we fix $i = 1$, which use colors 1 (blue) and 8 (red). For $k = 1$, let the second color class of an optimal edge coloring of K_4 be $E_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ to get the edges colored with the color 1 (blue): $E_{2,1} = \{\{1, 8\}, \{3, 6\}, \{2, 7\}, \{4, 5\}\}$, and let the second color class of an optimal edge coloring of K_7 be $E_2 = \{\{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ to get the edges colored also with the color 1 (blue) in $F_{2,7}^1$ (i.e. $\{\{1, 3\}, \{7, 8\}, \{2, 8\}, \{1, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 4\}\}$ and $\{4, 7\}, \{2, 5\}\}$), in $F_{3,6}^1$ (i.e. $\{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{6, 8\}, \{3, 8\}, \{5, 7\}\}$ and $\{6, 7\}, \{1, 4\}\}$), and in $F_{4,5}^1$ (i.e. $\{\{1, 7\}, \{5, 8\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ and $\{4, 8\}, \{1, 2\}\}$). For $k = 2$, let the third color class of an optimal edge coloring of K_4 be $E_3 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ to get the edges colored with the color 8 (red): $E_{3,1} = \{\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$, and let the second color class of an optimal edge coloring of K_7 be $E_2 = \{\{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$ to get the edges colored also with the color 8 (red) in $F_{2,7}^2$ (i.e. $\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 8\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}\}$ and $\{4, 7\}, \{1, 6\}\}$), in $F_{3,6}^2$ (i.e. $\{\{1, 5\}, \{6, 8\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{3, 8\}, \{1, 4\}\}$ and $\{6, 7\}, \{2, 3\}\}$), and in $F_{4,5}^2$ (i.e. $\{\{1, 7\}, \{4, 6\}, \{2, 6\}, \{5, 8\}, \{3, 5\}, \{1, 2\}, \text{ and } \{4, 8\}, \{3, 7\}\}$) (Color figure online)

Figure 5 presents a subgraph of the input graph of $K(8, 2)$ highlighting how Algorithm 2 colors the edges when $i = 1$ is fixed.

Lemma 5 Algorithm 2 is correct and gives a partial edge coloring of the input graph by using $(t - 2)r$ colors.

Proof The proof is analogous to the one of Lemma 4. Just notice that t is even and thus, an optimal edge coloring of K_t uses only $t - 1$ colors. Therefore, at the end of Algorithm 2, the matching $E_{1,i} = \{\{C_i^u, C_i^v\} : \{u, v\} \in E_1\}$ (where E_1 denotes the first edge color class of an optimal edge coloring of K_t) in each one of the cliques C_i , with $1 \leq i \leq r$, remains uncolored.

Theorem 3 Let $n \equiv 0 \pmod 4$. Thus, $\chi(K(n, 2)) = \Delta(K(n, 2))$.

Proof Since $n \equiv 0 \pmod 4$, by Lemma 2 (i) we can apply the Algorithm 2 to $K(n, 2)$ by setting $E' = \emptyset$. Notice that $r = n - 1$ and $t = \frac{n}{2}$. Thus, by Lemma 5, Algorithm 2 gives a partial proper edge coloring of $K(n, 2)$ with $(t - 2)r$ colors and only one perfect matching in each clique C_i remains uncolored. As a matching in two different cliques share no vertices, we can color each uncolored perfect matching in each one of the cliques C_i with only one new color. Therefore, we can properly color the edges of $K(n, 2)$ by using $(t - 2)r + 1 = (\frac{n}{2} - 2)(n - 1) + 1 = \frac{n^2 - 5n}{2} + 3 = \binom{n-2}{2} = \Delta(K(n, 2))$ colors.

5 Concluding remarks

As a consequence of Baranyai's theorem Baranyai 1973, the vertex set of the Kneser graph $K(n, s)$ can be partitioned into $\theta_{n,s} = \binom{n}{s} / \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ cliques of size $\omega_{n,s} = \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$, when $\lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ divides $\binom{n}{s}$. However, in order to generalize our results about total and edge colorings of $K(n, 2)$ to arbitrary values of s , a deeper structural analysis of the graph $B(n, s)$ induced by the cliques in the t -ordered clique decomposition of $K(n, s)$ in which the edges inside such cliques are removed is needed.

Concerning the chromatic index of $K(n, 2)$, the only unsettled case is when $n \equiv 1 \pmod{4}$. Notice that in this case, the number of vertices $\binom{n}{2}$ is even. However, n is odd and we need to consider the cases when n is divisible by 3 or not. We need to study how to color the uncolored edges of $K(n, 2)$ after applying Algorithm 2. In fact, notice that Algorithm 2 uses $(t-2)r = (\frac{n-1}{2} - 2)n = \Delta(K(n, 2)) - 3$ colors. Thus, we must be able to color these edges by using precisely 3 new colors if we want a $\Delta(K(n, 2))$ -edge coloring of $K(n, 2)$. By using SageMath software, we have been able to: (i) compute a 55-edge coloring for these edges of $K(13, 2)$, which implies that $K(13, 2)$ is Class 1, and (ii) a 21-edge coloring of $K(9, 2)$ which also implies that this graph is Class 1. We believe that when $n \equiv 1 \pmod{4}$ it is always possible to edge-color $K(n, 2)$ with $\Delta(K(n, 2))$ colors and so, we conjecture the following.

Conjecture 1 For $n \geq 6$, the Kneser graph $K(n, 2)$ with $n \equiv 1 \pmod{4}$ is Class 1.

Funding This work is partially supported by the Brazilian agencies CNPq (Grant numbers: 302823/2016-6, 407635/2018-1 and 313797/2020-0) and FAPERJ (Grant numbers: CNE E-26/202.793/2017 and ARC E-26/010.002674/2019). M. Valencia-Pabon was supported by the French-Brazilian Network in Mathematics.

Declarations

Conflict of interest The authors declare that there is no conflict of interest.

Availability of data and material Not applicable.

Code availability Not applicable.

References

- Baranyai Zs (1973) On the factorization of the complete uniform hypergraph. In A Hajnal, R Rado, and V T Sós, editors, *Infinite and Finite Sets, Proc Coll Keszthely*, pages 91–107, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, North-Holland, Amsterdam
- Behzad M, Chartrand G, Cooper JK Jr (1967) The colour numbers of complete graphs. *J London Math Soc* 42:226–228
- Biggs NL (1979) Some odd graph theory. *Second International Conference on Combinatorial Mathematics, Annals of the New York Academy of Sciences* 319:71–81
- Erdős P, Ko C, Rado R (1961) Intersection theorem for system of finite sets. *Quart J Math* 12:313–318
- Fiorini S, Wilson RJ (1977) *Edge-Colourings of Graphs*. Research Notes in Math 16
- Godsil C, Royle G (2004) *Algebraic graph theory*, vol 207. Springer, New York
- Leven D, Galil Z (1983) NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *J Algorithms* 4:35–44
- Liu DD, Zhu X (2016) A combinatorial proof for the circular chromatic number of Kneser graphs. *J Comb Optim* 32:765–774

- Lovász L (1978) Kneser's conjecture, chromatic numbers and homotopy. *J Combin Theory (A)* 25:319–324
- Murthy TS (2021) A proof of the total coloring conjecture. [ArXiv:2003.09658v3](https://arxiv.org/abs/2003.09658v3),
- Prajnanaswaroop S, Geetha J, Somasundaram K, Lin-Fu H, Narayanan N (2020) On total coloring of some classes of regular graphs [ArXiv:1910.03922v4](https://arxiv.org/abs/1910.03922v4)
- Rosenfeld M (1971) On the total coloring of certain graphs. *Israel J Math* 9:396–402
- Sánchez-Arroyo A (1989) Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Math* 78:315–319
- Valencia-Pabon M, Vera J (2005) On the diameter of Kneser graphs. *Discrete Math* 305:383–385
- Vizing VG (1964) On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Metody Diskret Analiz* 3:25–30

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

Apêndice B

Anexo: Manuscrito “Total chromatic number of the direct product of complete graphs” apresentado no LAGOS2021 e submetido como artigo completo para *Graphs and Combinatorics*

Total chromatic number of the direct product of complete graphs

D. Castonguay · C.M.H. de Figueiredo ·
L.A.B. Kowada · C.S.R. Patrão ·
D. Sasaki · M. Valencia-Pabon

Received: September 3, 2021 / Accepted: date

Abstract A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the elements (vertices and edges) of G so that adjacent or incident elements have different colors. The total chromatic number is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. The well known Total Coloring Conjecture states that the total chromatic number of a graph is either $\Delta(G) + 1$ or $\Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . We consider the direct product of complete graphs $K_m \times K_n$. It is known that if at least one of the numbers m or n is even, then $K_m \times K_n$ has total chromatic number equal to $\Delta(K_m \times K_n) + 1$, except when $m = n = 2$. We prove that the graph $K_m \times K_n$ has total chromatic number equal to $\Delta(K_m \times K_n) + 1$ when both m and n are odd numbers, ensuring in this way that all graphs $K_m \times K_n$ have total chromatic number equal to $\Delta(K_m \times K_n) + 1$, except when $m = n = 2$. In order to achieve the

This work has been presented at Lagos 2021.

D. Castonguay
INF, Universidade Federal de Goiás, Brazil
E-mail: diane@inf.ufg.br

C.M.H. de Figueiredo
COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil
E-mail: celina@cos.ufrj.br

L.A.B. Kowada
IC, Universidade Federal Fluminense, Brazil
E-mail: luis@ic.uff.br

C.S.R. Patrão
COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro and Instituto Federal de Goiás, Brazil
E-mail: caroline.patrael@ufrj.edu.br

D. Sasaki
IME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brazil
E-mail: diana.sasaki@ime.uerj.br

M. Valencia-Pabon
LIPN, Université Sorbonne Paris Nord, France
E-mail: valencia@lipn.univ-paris13.fr

claimed total colorings for all graphs $K_m \times K_n$, with m and n odd numbers, we use that the conformable condition is sufficient for the total chromatic number to be $\Delta(K_m \times K_n) + 1$ when both m and n are large enough, and Hamiltonian decompositions to obtain a guiding color for the remaining target total colorings.

Keywords total coloring · direct product · regular graph · complete graph

Mathematics Subject Classification (2010) 05C15 · 05C85 · 68R10 · 05C76

1 Introduction

Let G be a simple connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to the elements (vertices and edges) of G so that adjacent or incident elements have different colors. The total chromatic number, denoted by $\chi_T(G)$, is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$ and the Total Coloring Conjecture (TCC), posed independently by Vizing [11] and Behzad et al. [2], states that $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . Graphs with $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ are said to be *Type 1* and graphs with $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$ are said to be *Type 2*. The TCC has been verified in restricted cases, such as cubic graphs [10] and graphs with large maximum degree [7], but has not been settled for all regular graphs for more than fifty years.

We denote an undirected edge $e \in E(G)$ whose ends are u and v by uv . The direct product (also called tensor product or categorical product) of two graphs G and H is a graph denoted by $G \times H$, whose vertex set is the Cartesian product $V(G) \times V(H)$, for which vertices (u, v) and (u', v') are adjacent if and only if $uu' \in E(G)$ and $vv' \in E(H)$. The maximum degree $\Delta(G \times H) = \Delta(G) \cdot \Delta(H)$, and $G \times H$ is regular if and only if both G and H are regular graphs. Let $G_1 = (V, E_1)$ and $G_2 = (V, E_2)$ be two graphs on the same vertex set V and where $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, and denote by $\bigoplus_{i=1}^2 G_i$ the direct sum graph $G = (V, E_1 \cup E_2)$ of graphs G_1 and G_2 . In this work, we use the well known property that the direct product is distributive over edge disjoint union of graphs, that is, if $G = \bigoplus_{i=1}^t G_i$, where G_i are edge-disjoint subgraphs of G and

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_t), \text{ then } H \times G = \bigoplus_{i=1}^t (H \times G_i).$$

The complete graph on n vertices is denoted by K_n . The direct product of complete graphs $K_m \times K_n$ is a regular graph of degree $\Delta(K_m \times K_n) = (m-1)(n-1)$ and can be described as an n -partite graph with m vertices in each part. The total chromatic number of $K_m \times K_n$ has been determined when m or n is an even number. When $m = n = 2$, we have the disconnected $2K_2$, which is Type 2, since each connected component K_2 is Type 2. When $m \geq 3$,

$K_m \times K_2$ is the complete bipartite graph $K_{m,m}$ minus a perfect matching, and Yap [12] proved that this graph is Type 1. When $n \geq 4$ and n is an even number, Geetha and Somasundaram [6] proved that $K_n \times K_n$ is Type 1. Janssen and Mackeigan [8] recently proved that $K_m \times K_n$ is Type 1 when m or n is an even number, with $m, n \geq 3$. As far as we know, for the remaining case, when both m and n are odd numbers, it is not known whether $K_m \times K_n$ is Type 1 or Type 2. In this work, we establish the total chromatic number of $K_m \times K_n$, when m and n are odd numbers, by proving that this graph is Type 1. Thus, we can conclude that, except for $m = n = 2$, the graph $K_m \times K_n$ is Type 1.

In order to achieve the claimed total colorings for all graphs $K_m \times K_n$, when m and n are odd numbers, we prove two theorems according to whether m and n are both large enough or not. In Section 2, we recall the conformable necessary condition to be Type 1 and a known lower bound on the vertex degree for regular graphs which ensures the equivalence, and we prove Lemma 1 and Theorem 1 which together provide the required total colorings of the direct product of complete graphs $K_m \times K_n$, for odd numbers $m, n \geq 13$. In Section 3, we present preliminary concepts on Hamiltonian decompositions used to obtain a guiding color for the remaining target total colorings. In Section 4, we prove Theorem 2 which provides the required total colorings of $K_m \times K_n$, for odd numbers $m, n \geq 3$ and $m < 13$. Along the proof, we omit a finite number of particular graphs that are too small to obey the described pattern and include their total colorings in the appendix.

2 The conformable condition is enough for odd numbers $m, n \geq 13$

A regular graph G is *conformable* if G admits a vertex coloring with $\Delta(G) + 1$ colors such that the number of vertices in each color class has the same parity as $|V(G)|$, as defined by Chetwynd and Hilton [3].

Lemma 1 *For odd numbers $m, n \geq 3$, the graph $K_m \times K_n$ is conformable.*

Proof Consider $m \leq n$. We construct a vertex coloring with $(m-1)(n-1) + 1$ colors such that each color class is composed by 1 or 3 vertices. Let $t = \frac{m+n-2}{2}$. Since $t < n$, vertices $(0, i), (1, i), (2, i)$ in the direct product $K_m \times K_n$ define an independent set and can receive the same color c_i , for $i = \{0, \dots, t-1\}$. Now color each of the $mn - 3t$ remaining uncolored vertices with a different additional color, to obtain the desired vertex coloring with $t + (mn - 3t) = mn - 2t = mn - m - n + 2 = (m-1)(n-1) + 1 = \Delta(K_m \times K_n) + 1$ colors. \square

The TCC for graphs G having $\Delta(G) \geq \frac{3}{4}|V(G)|$ was established by Hilton and Hind [7]. Chetwynd et al. [4] proved that letting G be a regular graph of odd order and with degree $\Delta(G) \geq \frac{\sqrt{7}}{3}|V(G)|$, then G is Type 1 if and only if G is conformable. Chew [5] improved this result by showing that it is enough to require that $\Delta(G) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6}|V(G)|$. In Theorem 1, we establish that when $m, n \geq 13$ are odd numbers, then $\Delta(K_m \times K_n)$ satisfies the lower

bound required by Chew, which together with Lemma 1 implies the desired result.

Theorem 1 *For odd numbers $m, n \geq 13$, the graph $K_m \times K_n$ is Type 1.*

Proof Let $m, n \geq 13$ be two odd numbers. Hence, $(7 - \sqrt{37})n - 6 \geq (7 - \sqrt{37}) \cdot 13 - 6 \geq 0$ and $n \geq 13 \geq \frac{72}{13(7 - \sqrt{37}) - 6}$. So, $13(7 - \sqrt{37})n \geq 72 + 6n$ and $13(7 - \sqrt{37})n - 13 \cdot 6 \geq 72 + 6n - 13 \cdot 6$, which implies that $13 \geq \frac{6(n-1)}{(7 - \sqrt{37})n - 6}$. Now, as $m \geq 13$, we have that $m \geq \frac{6(n-1)}{(7 - \sqrt{37})n - 6}$. Therefore, $(7 - \sqrt{37})mn - 6m \geq 6n - 6$, which is equivalent to $(1 - \sqrt{37})mn + 6mn - 6m - 6n + 6 \geq 0$. So, $mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6}mn$. Since $\Delta(K_m \times K_n) = (m - 1)(n - 1)$, we have that $\Delta(K_m \times K_n) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6}|V(K_m \times K_n)|$. Therefore, by the Chew's result [5] and by Lemma 1, we have that $K_m \times K_n$ is Type 1. \square

3 Hamiltonian decompositions to get a guiding color for odd numbers $m, n \geq 3$ and $m < 13$

We consider 5 infinite families: $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$, $K_9 \times K_n$ and $K_{11} \times K_n$, with $n \geq 3$ an odd number. For $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$ and $K_7 \times K_n$, in Subsection 3.1, we use Waleski's Hamiltonian decomposition of K_n to define suitable Hamiltonian decompositions of $K_m \times K_n$, first when $\gcd(m, n) = 1$ and second when $\gcd(m, n) \neq 1$; in Subsection 3.2, we apply the constructed Hamiltonian decomposition to define a guiding color representing a color class from which the target $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring is finally obtained in Subsection 4.1. For $K_9 \times K_n$ and $K_{11} \times K_n$, we use the result of Chew [5] and Lemma 1 to obtain that the family $K_9 \times K_n$ is Type 1 for $n \geq 23$ and the family $K_{11} \times K_n$ is Type 1 for $n \geq 15$ in Subsection 4.2. For the particular graphs $K_9 \times K_n$, for $9 \leq n \leq 21$, and $K_{11} \times K_n$, for $n = 11, 13$, we use suitable Hamiltonian decompositions and the guiding color to obtain a Type 1 total coloring presented in the appendix in the Subsection 5.2.

3.1 Hamiltonian decompositions

A k -regular graph G has a *Hamiltonian decomposition* (or is *Hamiltonian decomposable*) if its edge set can be partitioned into $\frac{k}{2}$ Hamiltonian cycles when k is an even number, or into $\frac{(k-1)}{2}$ Hamiltonian cycles plus a one factor (or perfect matching) when k is an odd number. Please refer to [1] for a survey on Hamiltonian decompositions.

Consider the well known Waleski's Hamiltonian decomposition of the complete graph K_n for $n \geq 3$. We shall focus on an odd number n . Let $n = 2w + 1$ and label the vertices of K_n as $0, 1, \dots, 2w$. Following the notation used in [1], let C_n be the Hamiltonian cycle $\langle 0, 1, 2, 2w, 3, 2w-1, 4, 2w-2, 5, 2w-3, \dots, w+3, w, w+2, w+1, 0 \rangle$. If σ is the permutation $(0)(1, 2, 3, 4, \dots, 2w-1, 2w)$, then

$\sigma^0(C_n), \sigma^1(C_n), \sigma^2(C_n), \dots, \sigma^{w-1}(C_n)$ is a Hamiltonian decomposition of K_n .

Observe that $\sigma^0(C_n) = C_n$. We write $K_n = \bigoplus_{i=1}^w \sigma^{i-1}(C_n)$. Denote by $\sigma^t(C_n)_z$,

with $z = 0, 1, \dots, n-1$ the z^{th} -vertex in the cycle $\sigma^t(C_n)$, and note that the vertex 0 is always the 0^{th} -vertex. Note that for $t \geq w$, the cycle $\sigma^t(C_n)$ is the opposite cycle of $\sigma^{t \bmod w}(C_n)$, that is, $\sigma^t(C_n)_z = \sigma^{t \bmod w}(C_n)_{n-z}$ for all $z \geq 1$.

For instance consider $n = 5$, write $n = 2w + 1$ and thus $w = 2$, to get the Hamiltonian decomposition $K_5 = \bigoplus_{i=1}^2 \sigma^{i-1}(C_5)$, where $\sigma^0(C_5) = \langle 0, 1, 2, 4, 3, 0 \rangle$ and $\sigma^1(C_5) = \langle 0, 2, 3, 1, 4, 0 \rangle$, as highlighted in Figure 1. Note that $\sigma^2(C_5) = \langle 0, 3, 4, 2, 1, 0 \rangle$ is the opposite cycle of $\sigma^0(C_5)$, and $\sigma^3(C_5) = \langle 0, 4, 1, 3, 2, 0 \rangle$ is the opposite cycle of $\sigma^1(C_5)$.

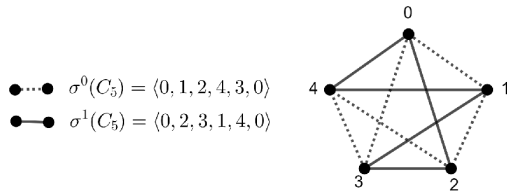


Fig. 1: Waleski's Hamiltonian decomposition of $K_5 = \sigma^0(C_5) \oplus \sigma^1(C_5)$

It is well known and not hard to see that the direct product of cycle graphs is Hamiltonian decomposable if and only if at least one of them is an odd cycle [9]. In what follows, for both m and n odd numbers, we shall use Waleski's Hamiltonian decomposition of the complete graph K_n and the well known distributive property of the direct product to define a Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$, for $m = 3, 5, 7$ and odd number $n \geq 3$ suitable to our target total coloring.

Write odd numbers $m, n \geq 3$ as $m = 2q + 1$ and $n = 2w + 1$. Let $\gcd(m, n) = d$. For $j = 1, \dots, 2q$, $i = 1, \dots, 2w$ and $k = 0, \dots, d-1$, denote by $C(j, i)^k$ the cycle on $\frac{mn}{d}$ vertices $\langle C(j, i)_z^k \rangle_{z=0, \dots, \frac{mn}{d}}$, where $C(j, i)_z^k = (\sigma^{j-1}(C_m)_{(z+k) \bmod m}, \sigma^{i-1}(C_n)_{z \bmod n})$, with $z = 0, \dots, \frac{mn}{d}$, is the z^{th} -vertex of the cycle $C(j, i)^k$. Observe that according to the notation for vertex $C(j, i)_z^k$, we have $C(j, i)_0^k = C(j, i)_{\frac{mn}{d}}^k$, and the vertex $(0, 0)$ is always the 0^{th} -vertex of $C(j, i)^0$.

We consider next the construction of a Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$ according to whether $\gcd(m, n) = 1$ or not. Case 1 considers $\gcd(m, n) = 1$ which gives a single $k = 0$ and that each $C(j, i)^0$ is a Hamiltonian cycle which gives that $\{C(j, i) = C(j, i)^0 \mid j = 1, \dots, q \text{ and } i = 1, \dots, 2w\}$ is a Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$. Case 2 considers $\gcd(m, n) \neq 1$ which implies that each cycle $C(j, i)^k$ is not a Hamiltonian cycle. We construct a Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$ given by $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 2q \text{ and } i = 1, \dots, w\}$

where each Hamiltonian cycle is composed by d paths obtained from the cycles $C(j, i)^k$, such that, for each $k = 0, \dots, d - 1$, the cycle $C(j, i)^k$ becomes a path by removing one edge.

Case 1: $\gcd(m, n) = 1$. Consider $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, q \text{ and } i = 1, \dots, 2w\}$, a Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$, where $C(j, i) = C(j, i)^0$, see an example in Figure 2. Indeed, consider $K_m = \bigoplus_{j=1}^q (\sigma^{j-1}(C_m))$ and $K_n = \bigoplus_{i=1}^w (\sigma^{i-1}(C_n))$ the Waleski's Hamiltonian decompositions of K_m and K_n , respectively. Thus we write $K_m \times K_n = \bigoplus_{j=1}^q \bigoplus_{i=1}^w (\sigma^{j-1}(C_m) \times \sigma^{i-1}(C_n))$. As the degree $\Delta(\sigma^{j-1}(C_m) \times \sigma^{i-1}(C_n)) = 4$, for any $j = 1, 2, \dots, q$ and for any $i = 1, 2, \dots, w$, each subgraph $\sigma^{j-1}(C_m) \times \sigma^{i-1}(C_n)$ of $K_m \times K_n$ has two Hamiltonian cycles: $C(j, i)$ and $C(j, i + w)$, and so, it is enough to consider $C(j, i)$ for $j = 1, \dots, q$ and $i = 1, \dots, 2w$.

For instance, consider $K_3 \times K_5$ in Figure 2. As $\gcd(3, 5) = 1$ we use $K_3 \times K_5 = \bigoplus_{j=1}^1 \bigoplus_{i=1}^2 (\sigma^{j-1}(C_3) \times \sigma^{i-1}(C_5))$, the 2 Hamiltonian cycles of the subgraph $\sigma^0(C_3) \times \sigma^0(C_5)$ of $K_3 \times K_5$ are $C(1, 1)$ and $C(1, 3)$. Analogously, the 2 Hamiltonian cycles of the subgraph $\sigma^0(C_3) \times \sigma^1(C_5)$ of $K_3 \times K_5$ are $C(1, 2)$ and $C(1, 4)$.

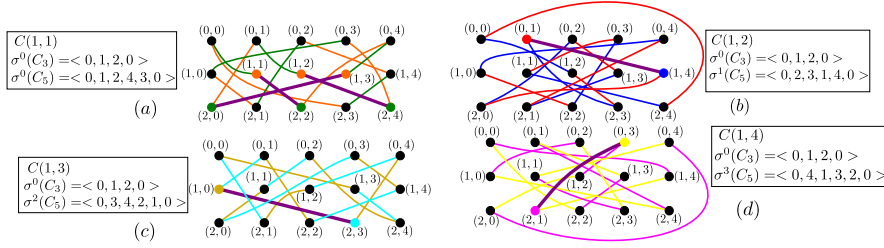


Fig. 2: A depiction of $K_3 \times K_5$ partitioned into 4 Hamiltonian cycles. In (a) we have the Hamiltonian cycle $C(1, 1)$ with 3 colors: the edges $(1, 1)(2, 2)$, $(1, 2)(2, 4)$ and $(1, 3)(2, 0)$ are colored with the guiding purple color; the endvertices of the purple edges and the remaining edges of $C(1, 1)$ are colored with colors orange and dark green. In (b) we have the Hamiltonian cycle $C(1, 2)$ also colored with 3 colors: the edge $(0, 1)(1, 4)$ also colored with the guiding purple color; the endvertices of the purple edge and the remaining edges of $C(1, 2)$ are colored with colors red and dark blue. In (c) we have $C(1, 3)$ also with 3 colors: the edge $(1, 0)(2, 3)$ also colored with the guiding purple color; the endvertices of the purple edge and the remaining edges of $C(1, 3)$ are colored with colors light blue and light green. Finally in (d) we have $C(1, 4)$ also colored with 3 colors: the edge $(0, 3)(2, 1)$ also colored with the guiding purple color; the endvertices of the purple edge and the remaining edges of $C(1, 4)$ are colored with colors pink and yellow

Case 2: $\gcd(m, n) = d > 1$. By definition, in this case, each $C(j, i)^k$ is not a Hamiltonian cycle. For $k = 0, \dots, d - 1$, denote by $P(j, i)^k$ the path induced by the $\frac{mn}{d}$ vertices $C(j, i)_z^k$, with $z = 0, \dots, \frac{mn}{d} - 1$, obtained from $C(j, i)^k$

by removing one edge. Consider $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 2q \text{ and } i = 1, \dots, w\}$ a Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$, where the Hamiltonian cycles are defined as follows.

(i) For $m = 3$:

$$C(j, i) = \langle P(j, i)^0, P(j, i)^1, P(j, i)^2, (0, 0) \rangle$$

For $i = 1, \dots, w$, the cycles $C(1, i)$ and $C(2, i)$ form a Hamiltonian decomposition of $\sigma^0(C_3) \times \sigma^{i-1}(C_n)$.

For instance, consider $K_3 \times K_9$ in Figure 3. As $\gcd(3, 9) = 3$ we write $K_3 \times K_9 = \bigoplus_{i=1}^4 (\sigma^0(C_3) \times \sigma^{i-1}(C_9))$. The 2 Hamiltonian cycles of the subgraph

$\sigma^0(C_3) \times \sigma^0(C_9)$ are $C(1, 1)$ and $C(2, 1)$; and analogously of the subgraph $\sigma^0(C_3) \times \sigma^1(C_9)$ are $C(1, 2)$ and $C(2, 2)$; of the subgraph $\sigma^0(C_3) \times \sigma^2(C_9)$ are $C(1, 3)$ and $C(2, 3)$; finally of the subgraph $\sigma^0(C_3) \times \sigma^3(C_9)$ are $C(1, 4)$ and $C(2, 4)$.

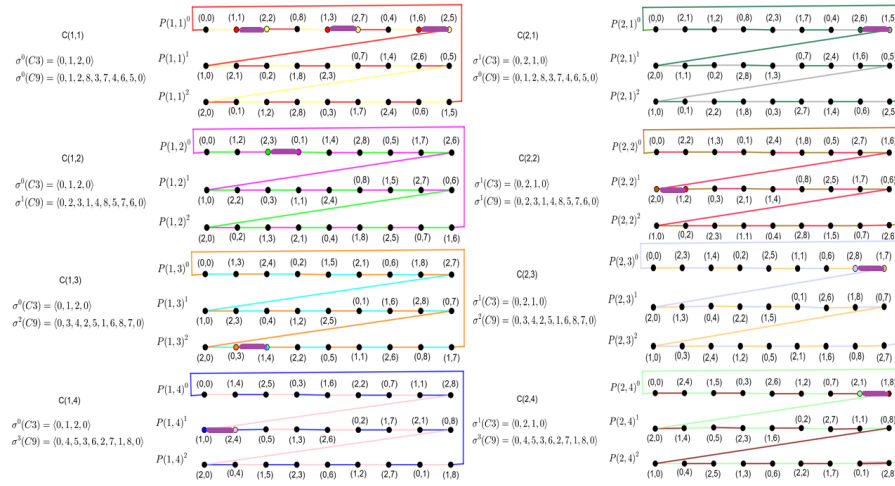


Fig. 3: A depiction of $K_3 \times K_9$ partitioned into 8 Hamiltonian cycles. We have the Hamiltonian cycle $C(1, 1)$ with 3 colors: the edges $(1, 1)(2, 2)$, $(1, 3)(2, 7)$ and $(1, 6)(2, 5)$ are colored with the guiding purple color; the endvertices of the purple edges and the remaining edges of $C(1, 1)$ are colored with colors red and yellow. In the remaining 7 Hamiltonian cycles, each of them has one edge with the guiding purple color whose endvertices and the remaining edges of the cycle are colored with additional new two colors. The vertices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, 4)$, $(0, 5)$, $(0, 6)$, $(0, 7)$ and $(0, 8)$ are an independent set and can be colored with the guiding purple color obtaining a 17-total coloring of $K_3 \times K_9$

(ii) For $m = 5$:

$$C(j, i) = \begin{cases} \langle P(j, i)^0, P(j, i)^1, P(j, i)^2, P(j, i)^3, P(j, i)^4, (0, 0) \rangle, & \text{if } j = 1, 3 \\ \langle P(j, i)^0, P(j, i)^2, P(j, i)^4, P(j, i)^1, P(j, i)^3, (0, 0) \rangle, & \text{if } j = 2, 4 \end{cases}$$

For $i = 1, \dots, w$, the set of cycles $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 4\}$ is a Hamiltonian decomposition of $K_5 \times \sigma^{i-1}(C_n)$.

(iii) For $m = 7$:

$$C(j, i) = \begin{cases} \langle P(j, i)^0, P(j, i)^3, P(j, i)^4, P(j, i)^5, P(j, i)^1, P(j, i)^2, P(j, i)^6, \\ (0, 0) \rangle, & \text{if } j = 1, 3, 5 \\ \langle P(j, i)^0, P(j, i)^4, P(j, i)^1, P(j, i)^3, P(j, i)^6, P(j, i)^2, P(j, i)^5, \\ (0, 0) \rangle, & \text{if } j = 2, 4, 6 \end{cases}$$

For $i = 1, \dots, w$, the set of cycles $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 6\}$ is a Hamiltonian decomposition of $K_7 \times \sigma^{i-1}(C_n)$.

3.2 $\Delta((K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring from elements of a guiding color

We are ready to explain how a $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring of $K_m \times K_n$ is obtained by considering the Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$ into Hamiltonian cycles $C(i, j)$ defined in Subsection 3.1. In a $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring, each color class is such that each vertex is either inside the color class or is incident to an edge of the color class. We shall choose a guiding color with the additional property that its color class contains one or three edges of each Hamiltonian cycle. Note that each Hamiltonian cycle is an odd cycle and, by Vizing's theorem [11], admits a 3-edge coloring. Thus, for each cycle, we assign two additional colors to the remaining edges of the Hamiltonian cycle and to the endvertices of the edges with the guiding color, as Figures 2 and 3. With suitable choices for the edges of the matching colored by the guiding color, the so far uncolored vertices define an independent set which can be also colored with the guiding color as Figure 4.

In order to obtain a $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring, we give a table composed by the elements of the guiding color class. We identify the edges of the guiding color on the corresponding Hamiltonian cycle where they belong. If the Hamiltonian cycle contains a unique edge of the guiding color, then its endvertices and the remaining edges of the cycle are easily colored using two additional colors. If the Hamiltonian cycle contains three edges of the guiding color, then we can easily see that their endvertices define two independent sets that can be colored with two colors as also the remaining edges of the cycle.

For instance, consider $K_3 \times K_5$ in Figure 4. We represent a table and a subgraph highlighting all elements (edges and vertices) colored by the guiding color and the colored vertices of Figure 2. We can identify which of the four Hamiltonian cycles contains which highlighted edges by observing the colors of their endvertices. In Fig 2(a), the six endvertices of the three edges colored with the guiding color (purple) in $C(1, 1)$ are the three vertices $(1, 1)$, $(1, 2)$ and $(1, 3)$ defining an independent set that can be assigned with one color (orange), and the three vertices $(2, 0)$, $(2, 2)$ and $(2, 4)$ defining another independent set that can be assigned with one color (green). The remaining edges of $C(1, 1)$ can be assigned with the colors orange and green. Analogously for the Hamiltonian cycles $C(1, 2)$, $C(1, 3)$ and $C(1, 4)$, as in Figure 2. The remaining uncolored vertices $(0, 0)$, $(0, 2)$ and $(0, 4)$ of Figure 2 represent an independent set that can be colored with the guiding color. Thus we can easily obtain a 9-total coloring of $K_3 \times K_5$ from the elements colored with the guiding color.

Elements of $K_3 \times K_5$ of the guiding color	
$C(1, 1)$	$(1, 1)(2, 2), (1, 3)(2, 0), (1, 2)(2, 4)$
$C(1, 2)$	$(0, 1)(1, 4)$
$C(1, 3)$	$(1, 0)(2, 3)$
$C(1, 4)$	$(2, 1)(0, 3)$
Vertices: $(0, 0), (0, 2), (0, 4)$	

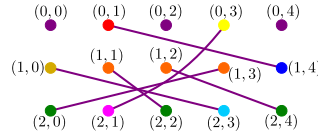


Fig. 4: A table composed by the elements of the guiding purple color in $K_3 \times K_5$, and its depiction using colors of the endvertices to identify the Hamiltonian cycles containing them

4 Proof of Theorem 2

In this section, we consider only the direct product of odd complete graphs $K_m \times K_n$ with $m, n \geq 3$ and $m < 13$. Along the proof, we may sometimes omit the fact that m, n are odd numbers and $m, n \geq 3$, since it is clear that we work only with odd complete graphs greater than 2. Theorem 2 includes the five Type 1 infinite families of the direct product of complete graphs: $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$, $K_9 \times K_n$ and $K_{11} \times K_n$. Theorem 2 completes the result that $K_m \times K_n$ is Type 1, except when $m = n = 2$.

Theorem 2 *For odd numbers $m, n \geq 3$ with $m < 13$, the graph $K_m \times K_n$ is Type 1.*

We now present two subsections. In each subsection, for each considered family, we omit a finite number of particular graphs that are too small to obey the described pattern. For each particular graph, we were able to describe a particular Type 1 total coloring using the general strategy of first obtaining a particular Hamiltonian decomposition and then choosing a suitable guiding color. Their particular Hamiltonian decompositions and their tables containing the elements of the guiding color are omitted in the main text and are given in an appendix. The appendix is organized into two subsections, corresponding to the two subsections below: Subsection 5.1 Elements of the guiding color of particular graphs for families $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$; and Subsection 5.2 Hamiltonian decomposition of particular graphs $K_9 \times K_n$ and $K_{11} \times K_n$, and the elements of the guiding color.

4.1 Families $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$

In this subsection, we consider three Type 1 infinite families $K_m \times K_n$, for $m = 3, 5, 7$ and $n > m$ an odd number, dividing into two steps: when $\gcd(m, n) = 1$ in Lemma 2 and when $\gcd(m, n) = m$ in Lemma 3.

Lemma 2 *For $m = 3, 5, 7$ and an odd number $n > m$ with $\gcd(m, n) = 1$, the graph $K_m \times K_n$ is Type 1.*

Proof To obtain a $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring for the three infinite families $K_m \times K_n$ for $m = 3, 5, 7$ and $n > m$ an odd number with $\gcd(m, n) = 1$, first

we use the Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$ defined in Subsection 3.1 Case 1 to construct the three tables respectively with the elements of the guiding color.

- For $m = 3$. The general case for $K_3 \times K_n$, with $n \geq 11$ and $\gcd(3, n) = 1$, is presented in Table 1. This case $m = 3$ has 2 particular graphs: $K_3 \times K_5$ (solved in Subsection 3.2, see Figure 4) and $K_3 \times K_7$ presented in the appendix in Subsection 5.1.

Table 1: Elements of $K_3 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 2w + 1$, $n \geq 11$ and $\gcd(3, n) = 1$

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(1, 1)(2, 2), (1, 3)(2, 2w - 1), (1, 2w - 2)(2, 5)$	$C(1, 4)$	$(1, 0)(2, 4)$
$C(1, i)$	$(1, i)(2, i + 1), i = 2, 5, 6, \dots, 2w - 3, 2w - 1$	$C(1, 2w - 2)$	$(2, 0)(0, 2w - 2)$
$C(1, 3)$	$(0, 3)(1, 4)$	$C(1, 2w)$	$(1, 2w)(2, 1)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 2w, i \neq 3, 2w - 2$			

- For $m = 5$. The general case for $K_5 \times K_n$, with $n \geq 17$, $n \neq 21$ and $\gcd(5, n) = 1$, is presented in Table 2. This case $m = 5$ has 5 particular graphs: for $n = 7, 9, 11, 13, 21$ presented in the appendix in Subsection 5.1.

Table 2: Elements of $K_5 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 2w + 1$, $n \geq 17$, $n \neq 21$ and $\gcd(5, n) = 1$

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(2, 2)(4, 2w), (2, 2w - 2)(4, 5), (2, 7)(4, 2w - 5)$	$C(2, 1)$	$(3, 2)(1, 2w)$
$C(1, i)$	$(2, i + 1)(4, i - 1), i = 2, \dots, 2w - 1,$ $i \neq 6, 2w - 4, 2w - 3$	$C(2, i)$	$(3, i + 1)(1, i - 1), i = 2, \dots, 2w - 1,$ $i \neq 5, 2w - 5, 2w - 4$
$C(1, 6)$	$(0, w + 6)(1, 0)$	$C(2, 5)$	$(4, 0)(0, 5)$
$C(1, 2w - 4)$	$(2, 0)(4, 2w - 4)$	$C(2, 2w - 5)$	$(3, 0)(1, 2w - 5)$
$C(1, 2w - 3)$	$(3, 2w - 4)(0, 2w - 1)$	$C(2, 2w - 4)$	$(0, 2w - 4)(2, 2w - 3)$
$C(1, 2w)$	$(2, 1)(4, 2w - 1)$	$C(2, 2w)$	$(3, 1)(1, 2w - 1), (3, 2w - 3)(1, 4),$ $(3, 6)(1, 2w - 6)$
Vertices: $(0, i),$ for $i = 0, \dots, 2w, i \neq 5, w + 6, 2w - 4, 2w - 1$			

- For $m = 7$. The general case for $K_7 \times K_n$, with $n \geq 23$, $n \neq 25, 33$ and $\gcd(7, n) = 1$, is presented in Table 3. This case $m = 7$ has 8 particular graphs: for $n = 9, 11, 13, 15, 17, 19, 25, 33$ presented in the appendix in Subsection 5.1.

Thus, the family $K_m \times K_n$, with odd numbers $m = 3, 5, 7$, $n > m$ and $\gcd(m, n) = 1$, is Type 1. \square

Lemma 3 For $m = 3, 5, 7$ and an odd number $n > m$ with $\gcd(m, n) = m$, the graph $K_m \times K_n$ is Type 1.

Table 3: Elements of $K_7 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 2w + 1$, $n \geq 23$, $n \neq 25, 33$ and $\gcd(7, n) = 1$

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 2w)(3, 3), (6, 6)(3, 2w - 4),$ $(6, 2w - 7)(3, 10)$	$C(2, 2w - 8)$	$(5, 0)(0, 2w - 8)$
$C(1, i)$	$(6, i - 1)(3, i + 2), i = 2, \dots, 2w - 2,$ $i \neq 7, 8, 2w - 6$	$C(2, 2w - 1)$	$(1, 2w - 2)(4, 1), (1, 4)(4, 2w - 6),$ $(1, 2w - 9)(4, 8)$
$C(1, 7)$	$(2, 0)(6, 7)$	$C(2, 2w)$	$(1, 2w - 1)(4, 2)$
$C(1, 8)$	$(4, 7)(0, 10)$	$C(3, 1)$	$(2, 2w)(5, 3)$
$C(1, 2w - 6)$	$(0, w - 6)(1, 0)$	$C(3, i)$	$(2, i - 1)(5, i + 2), i = 2, \dots, 2w - 2,$ $i \neq 6, 7, 2w - 7$
$C(1, 2w - 1)$	$(6, 2w - 2)(3, 1)$	$C(3, 6)$	$(4, 0)(2, 6)$
$C(1, 2w)$	$(6, 2w - 1)(3, 2)$	$C(3, 7)$	$(0, 6)(3, 9)$
$C(2, 1)$	$(1, 2w)(4, 3)$	$C(3, 2w - 7)$	$(6, 0)(0, 2w - 7)$
$C(2, i)$	$(1, i - 1)(4, i + 2), i = 2, \dots, 2w - 2,$ $i \neq 5, 6, 2w - 8$	$C(3, 2w - 1)$	$(2, 2w - 2)(5, 1)$
$C(2, 5)$	$(3, 0)(1, 5)$	$C(3, 2w)$	$(2, 2w - 1)(5, 2), (2, 5)(5, 2w - 5),$ $(2, 2w - 8)(5, 9)$
$C(2, 6)$	$(5, 8)(0, 4)$		
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 2w, i \neq 4, 6, 10, w - 6, 2w - 8, 2w - 7$			

Proof Analogous to the proof of Lemma 2, to obtain a $(\Delta(K_m \times K_n) + 1)$ -total coloring for the families $K_m \times K_n$, when $m = 3, 5, 7$, $n \geq m$ are odd numbers and $\gcd(m, n) = m$, first we use the Hamiltonian decomposition of $K_m \times K_n$ as Subsection 3.1 Case 2 to construct the three tables respectively with the elements of the guiding color.

- For $m = 3$. First, we construct a Hamilton decomposition of $K_3 \times K_n$ as Subsection 3.1 Case 2(i). The general case for $K_3 \times K_n$, with $n \geq 9$ and $\gcd(3, n) = 3$, is presented in Table 4. This case $m = 3$ has one particular graph $K_3 \times K_3$ presented in the appendix in Subsection 5.1.

Table 4: Elements of $K_3 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 2w + 1$, $n \geq 9$ and $\gcd(3, n) = 3$

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(1, 1)(2, 2), (1, 3)(2, 2w - 1), (1, 2w - 2)(2, 5)$	$C(1, w - 2)$	$(2, w - 1)(0, w - 3)$
$C(1, i)$	$(1, i)(2, i + 1),$ $i = 2, 5, 6, \dots, w - 3, w - 1, w$	$C(2, i)$	$(2, w + i + 1)(1, w + i),$ $i = 1, \dots, w - 3, w - 1$
$C(1, 3)$	$(0, 3)(1, 4)$	$C(2, w - 2)$	$(2, 0)(1, w - 2)$
$C(1, 4)$	$(1, 0)(2, 4)$	$C(2, w)$	$(2, 1)(1, 2w)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 2w, i \neq 3, w - 3$			

- For $m = 5$. First, we construct a Hamilton decomposition of $K_5 \times K_n$ as Subsection 3.1 Case 2(ii). The general case for $K_5 \times K_n$, with $n \geq 15$ and $\gcd(5, n) = 5$, is presented in Table 5. This case $m = 5$ has one particular graph $K_5 \times K_5$ presented in the appendix in Subsection 5.1.
- For $m = 7$. First we construct a Hamilton decomposition of $K_7 \times K_n$ as Subsection 3.1 Case 2(iii). The general case for $K_7 \times K_n$, with $n \geq 35$ and $\gcd(7, n) = 7$, is presented in Table 6. This case $m = 7$ has 2 particular

Table 5: Elements of $K_5 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 2w + 1$, $n \geq 15$ and $\gcd(5, n) = 5$

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(2, 2)(4, 2w), (2, 2w-2)(4, 5), (2, 7)(4, 2w-5)$	$C(3, w-4)$	$(3, 2w-4)(2, 0)$
$C(1, i)$	$(2, i+1)(4, i-1), i = 2, \dots, w, i \neq 6$	$C(3, w-3)$	$(1, 0)(0, w-3)$
$C(1, 6)$	$(3, 0)(0, 6)$	$C(3, w)$	$(4, 2w-1)(2, 1)$
$C(2, 1)$	$(3, 2)(1, 2w)$	$C(4, i)$	$(1, w+i-1)(3, w+i+1), i = 1, \dots, w-1,$ $i \neq w-5, w-4$
$C(2, i)$	$(3, i+1)(1, i-1), i = 2, \dots, w, i \neq 5$	$C(4, w-5)$	$(4, 2w-4)(1, 2w-5)$
$C(2, 5)$	$(4, 0)(0, 5)$	$C(4, w-4)$	$(2, 2w-3)(0, 2w-4)$
$C(3, i)$	$(4, w+i-1)(2, w+i+1), i = 1, \dots, w-1,$ $i \neq w-4, w-3$	$C(4, w)$	$(1, 2w-6)(3, 6), (1, 4)(3, 2w-3),$ $(1, 2w-1)(3, 1)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 2w, i \neq 5, 6, w-3, 2w-4$			

graphs $K_7 \times K_7$ and $K_7 \times K_{21}$ presented in the appendix in Subsection 5.1.

Thus, the family $K_m \times K_n$, with odd numbers $m = 3, 5, 7$, $n > m$ and $\gcd(m, n) = m$, is Type 1. \square

Table 6: Elements of $K_7 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 2w + 1$, $n \geq 35$ and $\gcd(7, n) = 7$

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 2w)(3, 3), (6, 6)(3, 2w-4),$ $(6, 2w-7)(3, 10)$	$C(4, i)$	$(3, w+i+2)(6, w+i-1), i = 1, \dots, w-2,$ $i \neq w-6$
$C(1, i)$	$(6, i-1)(3, i+2), i = 2, \dots, w,$ $i \neq 7, 8$	$C(4, w-6)$	$(1, 0)(0, w-6)$
$C(1, 7)$	$(2, 0)(6, 7)$	$C(4, w-1)$	$(3, 1)(6, 2w-2)$
$C(1, 8)$	$(4, 7)(0, 10)$	$C(4, w)$	$(3, 2)(6, 2w-1)$
$C(2, 1)$	$(1, 2w)(4, 3)$	$C(5, i)$	$(4, w+i+2)(1, w+i-1), i = 1, \dots, w-2,$ $i \neq w-8$
$C(2, i)$	$(1, i-1)(4, i+2), i = 2, \dots, w,$ $i \neq 5, 6$	$C(5, w-8)$	$(0, 2w-8)(6, 0)$
$C(2, 5)$	$(3, 0)(1, 5)$	$C(5, w-1)$	$(4, 8)(1, 2w-9), (4, 2w-6)(1, 4),$ $(4, 1)(1, 2w-2)$
$C(2, 6)$	$(5, 8)(0, 4)$	$C(5, w)$	$(4, 2)(1, 2w-1)$
$C(3, 1)$	$(2, 2w)(5, 3)$	$C(6, i)$	$(5, w+i+2)(2, w+i-1), i = 1, \dots, w-2,$ $i \neq w-7$
$C(3, i)$	$(2, i-1)(5, i+2), i = 2, \dots, w,$ $i \neq 6, 7$	$C(6, w-7)$	$(0, 2w-7)(5, 0)$
$C(3, 6)$	$(4, 0)(2, 6)$	$C(6, w-1)$	$(5, 1)(2, 2w-2)$
$C(3, 7)$	$(0, 6)(3, 9)$	$C(6, w)$	$(5, 9)(2, 2w-8), (5, 2w-5)(2, 5),$ $(5, 2)(2, 2w-1)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 2w, i \neq 4, 6, 10, w-6, 2w-8, 2w-7$			

4.2 Families $K_9 \times K_n$ and $K_{11} \times K_n$

Lemma 4 For $m = 9, 11$ and an odd number $n \geq m$, the graph $K_m \times K_n$ is Type 1.

Proof In Section 2, we have actually proved that for odd numbers m, n the graph $K_m \times K_n$ is Type 1, provided that $\Delta(G) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6} |V(G)|$.

We show next that $K_9 \times K_n$ with $n \geq 23$ and $K_{11} \times K_n$ with $n \geq 15$ satisfy the required bound. Indeed, for $K_9 \times K_n$, when $n \geq 23$, we have that $n \geq 16/(16 - 3(\sqrt{37} - 1))$. Therefore, $8(n - 1) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6} \cdot 9n$, that is $\Delta(K_9 \times K_n) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6} \cdot |V(K_9 \times K_n)|$. For $K_{11} \times K_n$, when $n \geq 15$, we have that $n \geq 60/(60 - 11(\sqrt{37} - 1))$. Therefore, $10(n - 1) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6} \cdot 11n$, that is $\Delta(K_{11} \times K_n) \geq \frac{(\sqrt{37}-1)}{6} \cdot |V(K_{11} \times K_n)|$. Thus, we have that for $n \geq 23$, the graph $K_9 \times K_n$ is Type 1 and for $n \geq 15$, the graph $K_{11} \times K_n$ is Type 1.

Particular graphs are $K_9 \times K_n$, for $n = 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$, and $K_{11} \times K_n$, for $n = 11, 13$. These particular graphs are presented in the appendix in Subsection 5.2. \square

Declarations

Funding: This work is partially supported by the Brazilian agencies CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) (Grant numbers: 302823/2016-6, 407635/2018-1 and 313797/2020-0) and FAPERJ (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro) (Grant numbers: CNE E-26/202.793/2017 and ARC E-26/010.002674/2019). M. Valencia-Pabon was supported by the French-Brazilian Network in Mathematics.

Conflicts of interest/Competing interests: Not applicable.

Availability of data and material: Not applicable.

Code availability: Not applicable.

References

1. Alspach, B., Bermond, J.C., Sotteau, D.: Decomposition Into Cycles I: Hamilton decompositions. In Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Cycles and Rays: Basic Structures in Finite and Infinite Graphs held in Montreal, Quebec, May 3-9, 1987 (Ed. G. Hahn, G. Sabidussi, and R. E. Woodrow). Dordrecht, Holland: Kluwer (1990)
2. Behzad, M., Chartrand, G., Cooper Jr, J.K.: The colour numbers of complete graphs. J. London Math. Soc. **42**, 226–228 (1967)
3. Chetwynd, A.G., Hilton, A.J.W.: Some refinements of the total chromatic number conjecture. Congr. Numer. **66**, 195–216 (1988)
4. Chetwynd, A.G., Hilton, A.J.W., Zhao, C.: The total chromatic number of graphs of high minimum degree. J. London Math. Soc. **44**, 193–202 (1991)
5. Chew, K.H.: Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree. Discrete Math. **154**, 41–51 (1996)
6. Geetha, J., Somasundaram, K.: Total colorings of product graphs. Graphs Combin. **34**, 339–347 (2018)
7. Hilton, A., Hind, H.: The total chromatic number of graphs having large maximum degree. Discrete Math. **117**, 127–140 (1993)

8. Janssen, J., Mackeigan, K.: Total colourings of direct product graphs. *Contributions to Discrete Math.* **15**(1), 67–71 (2020)
9. Jha, P.K.: Hamiltonian decompositions of products of cycles. *Indian J. Pure Appl. Math.* **23**, 723–729 (1992)
10. Rosenfeld, M.: On the total chromatic number of a graph. *Israel J. Math.* **9**, 396–402 (1971)
11. Vizing, V.G.: On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Metody Diskret. Analiz.* **3**, 25–30 (1964)
12. Yap, H.P.: Generalization of two results of Hilton on total-colourings of graphs. *Discrete Math.* **140**, 245–252 (1995)

5 Appendix A

5.1 Elements of the guiding color of particular graphs for families $K_3 \times K_n$, $K_5 \times K_n$, $K_7 \times K_n$

Please refer to Table 7 of particular graph $K_3 \times K_7$; to Table 8 of particular graphs $K_5 \times K_n$, for $n = 5, 7, 9, 11, 13, 21$; to Table 9 of particular graphs $K_7 \times K_n$, for $n = 9, 11, 13, 15, 17$; and to Table 10 of particular graphs $K_7 \times K_n$, for $n = 19, 25, 33$ according to Lemma 2.

Please refer to Figure 5 which depicts the particular graph $K_3 \times K_3$ with 5 colors; to Table 11 of particular graph $K_5 \times K_5$; to Table 12 of particular graph $K_7 \times K_7$; and to Table 13 of particular graph $K_7 \times K_{21}$ according to Lemma 3.

Table 7: Elements of particular graph $K_3 \times K_7$ of the guiding color

Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(1, 1)(2, 2), (1, 3)(2, 5), (1, 0)(2, 1)$	$C(1, 3)$	$(1, 6)(2, 0)$	$C(1, 5)$	$(1, 5)(2, 6)$
$C(1, 2)$	$(1, 2)(2, 3)$	$C(1, 4)$	$(0, 0)(1, 4)$	$C(1, 6)$	$(2, 4)(0, 3)$
Vertices: $(0, i)$ for $i = 1, 2, 4, 5, 6$					

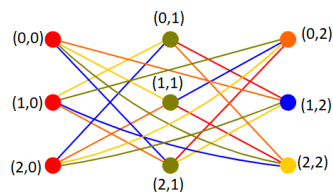


Fig. 5: A depiction of particular graph $K_3 \times K_3$ with 5 colors

Table 8: Elements of particular graphs $K_5 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 7, 9, 11, 13, 21$

Elements of $K_5 \times K_7$ of the guiding color			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	(2,2)(4,6), (2,0)(4,1), (2,5)(4,4)	$C(2, 1)$	(0,2)(2,6)
$C(1, 2)$	(1,2)(2,3)	$C(2, 2)$	(3,3)(1,1)
$C(1, 3)$	(2,4)(4,2)	$C(2, 3)$	(1,0)(4,3)
$C(1, 4)$	(3,5)(0,3)	$C(2, 4)$	(4,0)(0,4)
$C(1, 5)$	(3,2)(0,0)	$C(2, 5)$	(3,6)(1,4)
$C(1, 6)$	(2,1)(4,5)	$C(2, 6)$	(3,1)(1,5), (3,0)(1,6), (3,4)(1,3)
Vertices: (0, 1), (0, 5), (0, 6)			
Elements of $K_5 \times K_9$ of the guiding color			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	(2,2)(4,8), (2,6)(4,5), (2,8)(4,3)	$C(2, 1)$	(3,2)(1,8)
$C(1, 2)$	(2,3)(4,1)	$C(2, 2)$	(3,3)(1,1)
$C(1, 3)$	(2,4)(4,2)	$C(2, 3)$	(0,8)(2,7)
$C(1, 4)$	(2,0)(4,4)	$C(2, 4)$	(0,4)(2,5)
$C(1, 5)$	(0,7)(1,3)	$C(2, 5)$	(3,0)(1,5)
$C(1, 6)$	(4,0)(3,6)	$C(2, 6)$	(1,0)(4,6)
$C(1, 7)$	(3,4)(0,3)	$C(2, 7)$	(3,8)(1,6)
$C(1, 8)$	(2,1)(4,7)	$C(2, 8)$	(3,1)(1,7), (3,5)(1,4), (3,7)(1,2)
Vertices: (0, i), for $i = 0, 1, 2, 5, 6$			
Elements of $K_5 \times K_{11}$ of the guiding color			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	(2,2)(4,10), (2,8)(4,5), (2,1)(4,2)	$C(2, 1)$	(3,2)(1,10)
$C(1, i)$	(2, $i+1$)(4, $i-1$), $i = 2, 4, 5, 8, 9$	$C(2, 2)$	(0,8)(2,7)
$C(1, 3)$	(0,9)(1,8)	$C(2, i)$	(3, $i+1$)(1, $i-1$), $i = 3, 4, 7, 8$
$C(1, 6)$	(4,0)(3,6)	$C(2, 5)$	(4,9)(0,1)
$C(1, 7)$	(3,3)(0,2)	$C(2, 6)$	(1,0)(4,6)
$C(1, 10)$	(1,5)(2,0)	$C(2, 9)$	(2,4)(3,0)
		$C(2, 10)$	(3,1)(1,9), (3,7)(1,4), (3,10)(1,1)
Vertices: (0, i), for $i = 0, 3, 4, 5, 6, 7, 10$			
Elements of $K_5 \times K_{13}$ of the guiding color			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	(2,2)(4,12), (2,10)(4,5), (2,7)(4,0)	$C(2, 1)$	(3,2)(1,12), (3,10)(1,5), (3,7)(1,0)
$C(1, i)$	(2, $i+1$)(4, $i-1$), $i = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11$	$C(2, i)$	(3, $i+1$)(1, $i-1$), $i = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11$
$C(1, 6)$	(3,0)(0,6)	$C(2, 6)$	(4,8)(0,4)
$C(1, 9)$	(0,10)(1,8)	$C(2, 9)$	(0,3)(2,0)
$C(1, 12)$	(2,1)(4,11)	$C(2, 12)$	(3,1)(1,11)
Vertices: (0, i), $i = 0, 1, 2, 5, 7, 8, 9, 11, 12$			
Elements of $K_5 \times K_{21}$ of the guiding color			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	(2,2)(4,20), (2,18)(4,5), (2,7)(4,15)	$C(2, 1)$	(3,2)(1,20)
$C(1, i)$	(2, $i+1$)(4, $i-1$), $i = 2, \dots, 19$, $i \neq 6, 16, 17$	$C(2, i)$	(3, $i+1$)(1, $i-1$), $i = 2, \dots, 19$, $i \neq 5, 15, 16$
$C(1, 6)$	(3,16)(0,0)	$C(2, 5)$	(4,0)(0,5)
$C(1, 16)$	(2,0)(4,16)	$C(2, 15)$	(3,0)(1,15)
$C(1, 17)$	(0,7)(1,0)	$C(2, 16)$	(0,16)(2,17)
$C(1, 20)$	(2,1)(4,19)	$C(2, 20)$	(3,1)(1,19), (3,17)(1,4), (3,6)(1,14)
Vertices: (0, i), for $i = 1, \dots, 20$, $i \neq 0, 5, 7, 16$			

5.2 Hamiltonian decomposition of particular graphs $K_9 \times K_n$ and $K_{11} \times K_n$, and the elements of the guiding color

Consider the particular graphs $K_9 \times K_n$ with $n = 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$ and $K_{11} \times K_n$ with $n = 11, 13$, according to Lemma 4. First, we present each Hamiltonian decomposition. Second, refer to the following tables containing the elements of the guiding color: to Table 14 of particular graphs $K_9 \times K_n$, for $n = 11, 13, 17, 19$; to Table 15 of particular graphs $K_9 \times K_n$, for $n = 9, 15, 21$; to Table 16 of particular graph $K_{11} \times K_{11}$; and to Table 17 of particular graph $K_{11} \times K_{13}$.

In order to present the Hamiltonian decompositions when $\gcd(9, n) = 1$ and when $\gcd(11, n) = 1$, we refer to Subsection 3.1 Case 1.

We present next five Hamiltonian decompositions to deal with $\gcd(9, n) \neq 1$ and $\gcd(11, n) \neq 1$. Let m and n odd numbers such that $\gcd(m, n) = d \neq 1$. Recall that we have defined the following paths of $K_m \times K_n$. For $j = 1, \dots, m-1$, $i = 1, \dots, n-1$ and $k = 0, \dots, d-1$, the path $P(j, i)^k$ is induced by $(\sigma^{j-1}(C_m)_{(t+k) \bmod m}; \sigma^{i-1}(C_n)_{z \bmod n})$, with $z = 0, \dots, \frac{mn}{d} - 1$.

- For $K_9 \times K_9$, a Hamiltonian decomposition is given by $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 8, i = 1, \dots, 4\}$, where:

$$C(j, i) = \langle P(j, i)^0, P(j, i)^7, P(j, i)^5, P(j, i)^3, P(j, i)^1, P(j, i)^8, P(j, i)^6, P(j, i)^4, \\ P(j, i)^2, (0, 0) \rangle$$

Observe that, for $j = 1, 2, 3, 4$ and $i = 1, \dots, 4$, the cycles $C(j, i)$ and $C(j+4, i)$ form a Hamiltonian decomposition of $\sigma^{j-1}(C_9) \times \sigma^{i-1}(C_9)$.

For $K_9 \times K_{15}$ and $K_9 \times K_{21}$, for $j = 1, \dots, 8$, $i = 1, \dots, n-1$, we have three paths $P(j, i)^0, P(j, i)^1$ and $P(j, i)^2$. In this case, for each of them, we will consider 3 subpaths. Let $P(j, i)^{(k, k')}$ be the path induced by $P(j, i)_{nk'}^k, P(j, i)_{nk'+1}^k, \dots, P(j, i)_{nk'+n-1}^k$, for $j = 1, \dots, 8$, $i = 1, \dots, n-1$, $k = 0, 1, 2$ and $k' = 0, 1, 2$. In each case, these subpaths can be rearranged to give the desired Hamiltonian cycles.

- For $K_9 \times K_{15}$, a Hamiltonian decomposition is given by $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 8, i = 1, \dots, 7\}$, where $C(j, i)$ is the following Hamiltonian cycle:

$$\langle P(j, i)^{(0,0)}, P(j, i)^{(1,2)}, P(j, i)^{(2,1)}, P(j, i)^{(0,2)}, P(j, i)^{(1,1)}, P(j, i)^{(2,0)}, \\ P(j, i)^{(0,1)}, P(j, i)^{(1,0)}, P(j, i)^{(2,2)}, (0, 0) \rangle$$

Observe that, for $j = 1, 2, 3, 4$ and $i = 1, \dots, 7$, the cycles $C(j, i)$ and $C(j+4, i)$ form a Hamiltonian decomposition of $\sigma^{j-1}(C_9) \times \sigma^{i-1}(C_{15})$.

- For $K_9 \times K_{21}$, a Hamiltonian decomposition is given by $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 8, i = 1, \dots, 10\}$, where $C(j, i)$ is the following Hamiltonian cycle:

$$\langle P(j, i)^{(0,0)}, P(j, i)^{(1,0)}, P(j, i)^{(2,0)}, P(j, i)^{(0,1)}, P(j, i)^{(1,1)}, P(j, i)^{(2,1)}, \\ P(j, i)^{(0,2)}, P(j, i)^{(1,2)}, P(j, i)^{(2,2)}, (0, 0) \rangle$$

Observe that, for $j = 1, 2, 3, 4$ and $i = 1, \dots, 10$, the cycles $C(j, i)$ and $C(j+4, i)$ form a Hamiltonian decomposition of $\sigma^{j-1}(C_9) \times \sigma^{i-1}(C_{21})$.

- For $K_{11} \times K_{11}$, a Hamiltonian decomposition is given by $\{C(j, i) \mid j = 1, \dots, 10, i = 1, \dots, 5\}$, where $C(j, i)$ is the following Hamiltonian cycle:

$$\langle P(j, i)^0, P(j, i)^9, P(j, i)^7, P(j, i)^5, P(j, i)^3, P(j, i)^1, P(j, i)^{10}, P(j, i)^8, \\ P(j, i)^6, P(j, i)^4, P(j, i)^2, (0, 0) \rangle$$

Observe that, for $j = 1, \dots, 5$ and $i = 1, \dots, 5$, the cycles $C(j, i)$ and $C(j + 5, i)$ form a Hamiltonian decomposition of $\sigma^{j-1}(C_{11}) \times \sigma^{i-1}(C_{11})$.

Second, we apply each constructed Hamiltonian decomposition to define a guiding color from which the total coloring is obtained, please refer to the corresponding tables.

Table 9: Elements of particular graphs $K_7 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 9, 11, 13, 15, 17$

Elements of $K_7 \times K_9$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 8)(3, 3), (6, 1)(3, 2), (6, 5)(3, 0)$	$C(2, 1)$	$(1, 8)(4, 3)$	$C(3, 1)$	$(0, 7)(3, 4)$
$C(1, 2)$	$(0, 8)(1, 5)$	$C(2, i)$	$(1, i - 1)(4, i + 2), i = 2, 3, 5$	$C(3, i)$	$(2, i - 1)(5, i + 2), i = 2, 3, 4, 6$
$C(1, i)$	$(6, i - 1)(3, i + 2), i = 3, 4, 5$	$C(2, 4)$	$(5, 3)(0, 6)$	$C(3, 5)$	$(6, 7)(0, 3)$
$C(1, 6)$	$(4, 2)(0, 0)$	$C(2, 6)$	$(1, 0)(4, 6)$	$C(3, 7)$	$(2, 0)(5, 7)$
$C(1, 7)$	$(6, 6)(3, 1)$	$C(2, 7)$	$(1, 6)(4, 1), (1, 7)(4, 8), (1, 3)(4, 0)$	$C(3, 8)$	$(2, 7)(5, 2), (2, 8)(5, 1), (2, 4)(5, 0)$
$C(1, 8)$	$(6, 0)(3, 8)$	$C(2, 8)$	$(0, 2)(2, 6)$		
Vertices: $(0, 1), (0, 4), (0, 5)$					
Elements of $K_7 \times K_{11}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 10)(3, 3), (6, 6)(3, 0), (6, 4)(3, 8)$	$C(2, 1)$	$(1, 10)(4, 3)$	$C(3, 1)$	$(2, 10)(5, 3)$
$C(1, i)$	$(6, i - 1)(3, i + 2), i = 2, 3, 4, 8$	$C(2, i)$	$(1, i - 1)(4, i + 2), i = 2, 6, 7, 8$	$C(3, i)$	$(2, i - 1)(5, i + 2), i = 2, 3, 7, 8$
$C(1, 5)$	$(4, 5)(0, 6)$	$C(2, 3)$	$(5, 8)(0, 0)$	$C(3, 4)$	$(6, 5)(0, 3)$
$C(1, 6)$	$(0, 9)(1, 3)$	$C(2, 4)$	$(3, 9)(1, 0)$	$C(3, 5)$	$(6, 0)(0, 5)$
$C(1, 7)$	$(4, 7)(0, 8)$	$C(2, 5)$	$(2, 4)(3, 7)$	$C(3, 6)$	$(2, 0)(5, 6)$
$C(1, 9)$	$(6, 8)(3, 1)$	$C(2, 9)$	$(1, 8)(4, 1), (1, 4)(4, 0), (1, 2)(4, 6)$	$C(3, 9)$	$(2, 8)(5, 1)$
$C(1, 10)$	$(6, 9)(3, 2)$	$C(2, 10)$	$(1, 9)(4, 2)$	$C(3, 10)$	$(2, 9)(5, 2), (2, 5)(5, 0), (2, 3)(5, 7)$
Vertices: $(0, i), i = 1, 2, 4, 7, 10$					
Elements of $K_7 \times K_{13}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 12)(3, 3), (6, 6)(3, 8), (6, 3)(3, 11)$	$C(2, 1)$	$(1, 12)(4, 3)$	$C(3, 1)$	$(2, 12)(5, 3)$
$C(1, i)$	$(6, i - 1)(3, i + 2), i = 2, 3, 5, 8, 10$	$C(2, 2)$	$(5, 8)(0, 0)$	$C(3, i)$	$(2, i - 1)(5, i + 2), i = 2, 4, 7, 9, 10$
$C(1, 4)$	$(1, 0)(2, 4)$	$C(2, i)$	$(1, i - 1)(4, i + 2), i = 3, 6, 8, 9, 10$	$C(3, 3)$	$(5, 0)(1, 3)$
$C(1, 6)$	$(4, 0)(0, 6)$	$C(2, 4)$	$(4, 4)(6, 5)$	$C(3, 5)$	$(0, 11)(3, 0)$
$C(1, 7)$	$(2, 7)(6, 8)$	$C(2, 5)$	$(6, 0)(5, 5)$	$C(3, 6)$	$(3, 6)(4, 7)$
$C(1, 9)$	$(0, 12)(1, 6)$	$C(2, 7)$	$(0, 1)(2, 0)$	$C(3, 8)$	$(0, 8)(3, 9)$
$C(1, 11)$	$(6, 10)(3, 1)$	$C(2, 11)$	$(1, 10)(4, 1), (1, 4)(4, 6), (1, 1)(4, 9)$	$C(3, 11)$	$(2, 10)(5, 1)$
$C(1, 12)$	$(6, 11)(3, 2)$	$C(2, 12)$	$(1, 11)(4, 2)$	$C(3, 12)$	$(2, 11)(5, 2), (2, 5)(5, 7), (2, 2)(5, 10)$
Vertices: $(0, i), i = 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10$					
Elements of $K_7 \times K_{15}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 14)(3, 3), (6, 6)(3, 10), (6, 2)(3, 14)$	$C(2, 1)$	$(0, 6)(2, 10)$	$C(3, 1)$	$(2, 14)(5, 3)$
$C(1, i)$	$(6, i - 1)(3, i + 2), i = 2, 4, 5, 6, 9, 10, 11$	$C(2, i)$	$(1, i - 1)(4, i + 2), i = 2, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 12$	$C(3, 2)$	$(0, 10)(3, 9)$
$C(1, 3)$	$(4, 7)(0, 13)$	$C(2, 5)$	$(3, 0)(1, 5)$	$C(3, i)$	$(2, i - 1)(5, i + 2), i = 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12$
$C(1, 7)$	$(2, 0)(6, 7)$	$C(2, 6)$	$(5, 8)(0, 4)$	$C(3, 6)$	$(4, 0)(2, 6)$
$C(1, 8)$	$(0, 8)(1, 9)$	$C(2, 10)$	$(4, 3)(6, 0)$	$C(3, 7)$	$(6, 11)(0, 3)$
$C(1, 12)$	$(3, 5)(5, 0)$	$C(2, 13)$	$(1, 12)(4, 1), (1, 4)(4, 8), (1, 14)(4, 12)$	$C(3, 11)$	$(5, 4)(1, 0)$
$C(1, 13)$	$(6, 12)(3, 1)$	$C(2, 14)$	$(1, 13)(4, 2)$	$C(3, 13)$	$(2, 12)(5, 1)$
$C(1, 14)$	$(6, 13)(3, 2)$			$C(3, 14)$	$(2, 13)(5, 2), (2, 5)(5, 9), (2, 1)(5, 13)$
Vertices: $(0, i), i = 0, 1, 2, 5, 7, 9, 11, 12, 14$					
Elements of $K_7 \times K_{17}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 16)(3, 3), (6, 6)(3, 12), (6, 0)(3, 1)$	$C(2, 1)$	$(1, 16)(4, 3)$	$C(3, 1)$	$(2, 16)(5, 3)$
$C(1, i)$	$(6, i - 1)(3, i + 2), i = 2, \dots, 14, i \neq 7, 10$	$C(2, i)$	$(1, i - 1)(4, i + 2), i = 2, \dots, 14, i \neq 5, 8, 13$	$C(3, i)$	$(2, i - 1)(5, i + 2), i = 2, \dots, 13, i \neq 6, 9$
$C(1, 7)$	$(5, 0)(4, 7)$	$C(2, 5)$	$(0, 14)(2, 13)$	$C(3, 6)$	$(6, 14)(0, 0)$
$C(1, 10)$	$(1, 12)(2, 8)$	$C(2, 8)$	$(3, 9)(1, 7)$	$C(3, 9)$	$(6, 9)(0, 10)$
$C(1, 15)$	$(4, 0)(0, 15)$	$C(2, 13)$	$(5, 8)(0, 3)$	$C(3, 14)$	$(0, 6)(3, 0)$
$C(1, 16)$	$(6, 15)(3, 2)$	$C(2, 15)$	$(1, 14)(4, 1), (1, 4)(4, 10), (1, 0)(4, 15)$	$C(3, 15)$	$(2, 14)(5, 1)$
		$C(2, 16)$	$(1, 15)(4, 2)$	$C(3, 16)$	$(2, 15)(5, 2), (2, 5)(5, 11), (2, 0)(5, 16)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 16, i \neq 0, 3, 6, 10, 14, 15$					

Table 10: Elements of particular graphs $K_7 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 19, 25, 33$ that differ of the general case $K_7 \times K_n$ with $\gcd(7, n) = 1$

Elements of $K_7 \times K_{19}$ of the guiding color that differ of the Table 3			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 8)$	$(0, 17)(1, 0)$	$C(1, 12)$	$(4, 7)(0, 18)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 20, i \neq 4, 6, 10, 11, 17, 18$			
Elements of $K_7 \times K_{25}$ of the guiding color that differ of the Table 3			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(3, 7)$	$(6, 0)(0, 7)$	$C(3, 17)$	$(0, 1)(3, 9)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 20, i \neq 1, 4, 6, 7, 10, 16$			
Elements of $K_7 \times K_{33}$ of the guiding color that differ of the Table 3			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 8)$	$(0, 24)(1, 0)$	$C(2, 24)$	$(5, 8)(0, 0)$
$C(1, 26)$	$(4, 7)(0, 13)$	$C(3, 7)$	$(6, 0)(0, 7)$
$C(2, 6)$	$(5, 0)(0, 6)$	$C(3, 25)$	$(0, 10)(3, 9)$
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 2w, i \neq 0, 6, 7, 10, 13, 24$			

Table 11: Elements of particular graph $K_5 \times K_5$ of the guiding color

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(2, 2)(4, 4), (4, 2)(3, 4), (3, 2)(0, 4)$	$C(3, 1)$	$(3, 3)(2, 0)$
$C(1, 2)$	$(1, 4)(4, 0)$	$C(3, 2)$	$(2, 4)(0, 0)$
$C(2, 1)$	$(1, 0)(4, 1)$	$C(4, 1)$	$(2, 1)(0, 2)$
$C(2, 2)$	$(3, 0)(1, 2)$	$C(4, 2)$	$(1, 3)(3, 1), (2, 3)(0, 1), (4, 3)(1, 1)$
Vertex: $(0, 3)$			

Table 12: Elements of particular graph $K_7 \times K_7$ of the guiding color

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(6, 6)(3, 3), (5, 6)(4, 3), (2, 6)(6, 3)$	$C(4, 1)$	$(0, 4)(3, 0)$
$C(1, 2)$	$(0, 5)(2, 0)$	$C(4, 2)$	$(2, 3)(1, 1)$
$C(1, 3)$	$(4, 0)(0, 3)$	$C(4, 3)$	$(3, 2)(6, 5)$
$C(2, 1)$	$(3, 4)(5, 0)$	$C(5, 1)$	$(4, 6)(1, 3)$
$C(2, 2)$	$(5, 3)(0, 1)$	$C(5, 2)$	$(4, 1)(1, 4), (3, 1)(2, 4), (6, 1)(4, 4)$
$C(2, 3)$	$(1, 2)(4, 5)$	$C(5, 3)$	$(0, 6)(6, 0)$
$C(3, 1)$	$(0, 2)(3, 6)$	$C(6, 1)$	$(1, 0)(5, 1)$
$C(3, 2)$	$(2, 1)(5, 4)$	$C(6, 2)$	$(6, 4)(1, 6)$
$C(3, 3)$	$(2, 2)(5, 5)$	$C(6, 3)$	$(5, 2)(2, 5), (4, 2)(3, 5), (6, 2)(1, 5)$
Vertex: $(0, 0)$			

Table 13: Elements of particular graph $K_7 \times K_{21}$ of the guiding color that differ of the general case $K_7 \times K_n$ with $\gcd(7, n) = 7$

Elements of $K_7 \times K_{21}$ that differ of the Table 6			
Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 8)$	$(0, 11)(1, 5)$	$C(3, 7)$	$(3, 0)(4, 7)$
$C(2, 5)$	$(5, 8)(0, 2)$	$C(6, 3)$	$(3, 9)(0, 17)$
$C(2, 6)$	$(5, 0)(0, 6)$		
Vertices: $(0, i), i = 0, \dots, 20, i \neq 2, 4, 6, 11, 12, 17$			

Table 14: Elements of particular graphs $K_9 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 11, 13, 17, 19$

Elements of $K_9 \times K_{11}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1,1)$	$(3,3)(7,9), (3,2)(7,10), (3,0)(7,1)$	$C(2,3)$	$(6,3)(0,4)$	$C(3,8)$	$(5,3)(1,0)$
$C(1,2)$	$(5,2)(0,3)$	$C(2,4)$	$(0,2)(2,7)$	$C(3,9)$	$(5,1)(1,7), (5,10)(1,8), (5,0)(1,9)$
$C(1,3)$	$(0,1)(1,6)$	$C(2,i)$	$(4,i+2)(8,i-2), i = 5, 6, 7, 8$	$C(3,10)$	$(0,7)(3,4)$
$C(1,i)$	$(3,i+2)(7,i-2), i = 4, 5, 6, 7, 8$	$C(2,9)$	$(4,1)(8,7)$	$C(4,1)$	$(0,8)(4,5)$
$C(1,9)$	$(3,1)(7,7)$	$C(2,10)$	$(4,2)(8,8)$	$C(4,2)$	$(8,9)(0,6)$
$C(1,10)$	$(3,5)(7,0)$	$C(3,1)$	$(7,8)(0,5)$	$C(4,i)$	$(6,i+2)(2,i-2), i = 3, 4, 5, 6, 7, 8$
$C(2,1)$	$(4,6)(8,0)$	$C(3,2)$	$(5,4)(1,10)$	$C(4,9)$	$(6,4)(2,0)$
$C(2,2)$	$(4,4)(8,10), (4,3)(8,1), (4,0)(8,2)$	$C(3,i)$	$(5,i+2)(1,i-2), i = 3, 4, 5, 6, 7$	$C(4,10)$	$(6,2)(2,8), (6,1)(2,9), (6,0)(2,10)$
Vertices: $(0,i), i = 0, 9, 10$					
Elements of $K_9 \times K_{13}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1,1)$	$(3,3)(7,11), (3,0)(7,1), (3,9)(7,6)$	$C(2,i)$	$(4,i+2)(8,i-2), i = 3, 5, 6, 7, 10$	$C(3,6)$	$(0,3)(3,10)$
$C(1,2)$	$(3,4)(7,12)$	$C(2,4)$	$(2,4)(3,5)$	$C(3,11)$	$(5,1)(1,9), (5,0)(1,11), (5,7)(1,4)$
$C(1,3)$	$(0,0)(1,3)$	$C(2,8)$	$(6,4)(0,1)$	$C(3,12)$	$(5,2)(1,10)$
$C(1,i)$	$(3,i+2)(7,-2), i = 4, 5, 6, 9, 10$	$C(2,9)$	$(7,0)(6,9)$	$C(4,1)$	$(6,3)(2,11)$
$C(1,7)$	$(5,8)(0,6)$	$C(2,11)$	$(4,1)(8,9)$	$C(4,2)$	$(0,11)(4,6)$
$C(1,8)$	$(5,3)(0,2)$	$C(2,12)$	$(4,2)(8,10)$	$C(4,i)$	$(6,i+2)(2,i-2), i = 3, 4, 5, 8, 9, 10$
$C(1,11)$	$(3,1)(7,9)$	$C(3,1)$	$(7,5)(0,9)$	$C(4,6)$	$(1,0)(8,6)$
$C(1,12)$	$(3,2)(7,10)$	$C(3,2)$	$(5,4)(1,12)$	$C(4,7)$	$(8,0)(0,7)$
$C(2,1)$	$(4,3)(8,11)$	$C(3,i)$	$(5,i+2)(1,i-2), i = 3, 4, 7, 8, 9, 10$	$C(4,11)$	$(6,1)(2,9)$
$C(2,2)$	$(4,4)(8,12), (4,0)(8,2), (4,10)(8,7)$	$C(3,5)$	$(4,11)(2,0)$	$C(4,12)$	$(6,2)(2,10), (6,0)(2,12), (6,8)(2,5)$
Vertices: $(0,i), i = 4, 5, 8, 10, 12$					
Elements of $K_9 \times K_{17}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1,1)$	$(3,3)(7,15), (3,11)(7,8), (3,15)(7,4)$	$C(2,7)$	$(6,11)(0,3)$	$C(3,11)$	$(7,7)(0,16)$
$C(1,2)$	$(3,4)(7,16)$	$C(2,10)$	$(8,0)(5,10)$	$C(3,15)$	$(5,1)(1,13), (5,9)(1,6), (5,13)(1,2)$
$C(1,i)$	$(3,i+2)(7,i-2), i = 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 14$	$C(2,11)$	$(0,12)(2,10)$	$C(3,16)$	$(5,2)(1,14)$
$C(1,6)$	$(6,0)(5,6)$	$C(2,14)$	$(2,6)(3,0)$	$C(4,1)$	$(6,3)(2,15)$
$C(1,9)$	$(7,0)(4,9)$	$C(2,15)$	$(4,1)(8,13)$	$C(4,2)$	$(6,4)(2,16)$
$C(1,10)$	$(0,11)(1,9)$	$C(2,16)$	$(4,2)(8,14)$	$C(4,i)$	$(6,i+2)(2,i-2), i = 3, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 14$
$C(1,13)$	$(1,5)(2,0)$	$C(3,1)$	$(5,3)(1,15)$	$C(4,5)$	$(8,12)(0,14)$
$C(1,15)$	$(3,1)(7,13)$	$C(3,2)$	$(5,4)(1,16)$	$C(4,8)$	$(5,0)(3,8)$
$C(1,16)$	$(3,2)(7,14)$	$C(3,i)$	$(5,i+2)(1,i-2), i = 3, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14$	$C(4,9)$	$(0,6)(4,13)$
$C(2,1)$	$(4,3)(8,15)$	$C(3,4)$	$(3,12)(4,0)$	$C(4,12)$	$(8,8)(0,1)$
$C(2,2)$	$(4,4)(8,16), (4,12)(8,9), (4,16)(8,5)$	$C(3,7)$	$(1,0)(6,7)$	$C(4,15)$	$(6,1)(2,13)$
$C(2,i)$	$(4,i+2)(8,i-2), i = 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13$	$C(3,8)$	$(7,11)(0,5)$	$C(4,16)$	$(6,2)(2,14), (6,10)(2,7), (6,14)(2,3)$
Vertices: $(0,i), i = 0, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 15$					
Elements of $K_9 \times K_{19}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1,1)$	$(3,3)(7,17), (3,13)(7,8), (3,18)(7,3)$	$C(2,6)$	$(8,15)(5,0)$	$C(3,17)$	$(5,1)(1,15), (5,11)(1,6), (5,16)(1,1)$
$C(1,2)$	$(3,4)(7,18)$	$C(2,11)$	$(6,6)(0,17)$	$C(3,18)$	$(5,2)(1,16)$
$C(1,i)$	$(3,i+2)(7,i-2), i = 3, \dots, 15, i \neq 5, 10, 11$	$C(2,12)$	$(3,0)(1,12)$	$C(4,1)$	$(6,3)(2,17)$
$C(1,5)$	$(6,0)(5,5)$	$C(2,17)$	$(0,9)(2,8)$	$C(4,2)$	$(6,4)(2,18)$
$C(1,10)$	$(5,10)(0,11)$	$C(2,18)$	$(4,2)(8,16)$	$C(4,i)$	$(6,i+2)(2,i-2), i = 3, \dots, 16, i \neq 4, 9, 10, 15$
$C(1,11)$	$(4,0)(6,11)$	$C(3,1)$	$(5,3)(1,17)$	$C(4,5)$	$(2,13)(7,0)$
$C(1,16)$	$(1,7)(2,0)$	$C(3,2)$	$(5,4)(1,18)$	$C(4,9)$	$(0,6)(4,13)$
$C(1,17)$	$(3,1)(7,15)$	$C(3,3)$	$(0,13)(3,12)$	$C(4,10)$	$(1,0)(8,10)$
$C(1,18)$	$(3,2)(7,16)$	$C(3,i)$	$(5,i+2)(1,i-2), i = 4, \dots, 16, i \neq 8, 9, 14$	$C(4,15)$	$(0,4)(4,8)$
$C(2,1)$	$(4,3)(8,17)$	$C(3,8)$	$(7,14)(0,2)$	$C(4,17)$	$(6,1)(2,15)$
$C(2,2)$	$(4,4)(8,18), (4,14)(8,9), (4,1)(8,4)$	$C(3,9)$	$(8,0)(7,9)$	$C(4,18)$	$(6,2)(2,16), (6,12)(2,7), (6,17)(2,2)$
$C(2,i)$	$(4,i+2)(8,i-2), i = 3, \dots, 16, i \neq 6, 11, 12$	$C(3,14)$	$(0,3)(3,7)$		
Vertices: $(0,i), i = 0, 1, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18$					

Table 15: Elements of particular graphs $K_9 \times K_n$ of the guiding color, for $n = 9, 15, 21$

Elements of $K_9 \times K_9$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(3, 3)(7, 7), (2, 3)(8, 7),$ $(0, 3)(1, 7)$	$C(3, 4)$	$(5, 6)(1, 2)$	$C(6, 3)$	$(0, 8)(6, 7)$
$C(1, 2)$	$(3, 6)(8, 0)$	$C(4, 1)$	$(6, 3)(2, 7)$	$C(6, 4)$	$(8, 6)(4, 2)$
$C(1, 3)$	$(6, 0)(5, 3)$	$C(4, 2)$	$(0, 7)(4, 6)$	$C(7, 1)$	$(1, 3)(5, 7)$
$C(1, 4)$	$(7, 8)(3, 0)$	$C(4, 3)$	$(6, 5)(2, 1)$	$C(7, 2)$	$(1, 4)(5, 8)$
$C(2, 1)$	$(1, 0)(4, 1)$	$C(4, 4)$	$(6, 6)(2, 2)$	$C(7, 3)$	$(1, 5)(5, 1), (8, 5)(6, 1),$ $(0, 5)(7, 1)$
$C(2, 2)$	$(4, 4)(8, 8), (3, 4)(1, 8),$ $(0, 4)(2, 8)$	$C(5, 1)$	$(7, 3)(3, 7)$	$C(7, 4)$	$(5, 4)(2, 5)$
$C(2, 3)$	$(4, 5)(8, 1)$	$C(5, 2)$	$(7, 4)(3, 8)$	$C(8, 1)$	$(4, 0)(0, 1)$
$C(2, 4)$	$(7, 0)(6, 4)$	$C(5, 3)$	$(7, 5)(3, 1)$	$C(8, 2)$	$(2, 4)(6, 8)$
$C(3, 1)$	$(3, 5)(0, 0)$	$C(5, 4)$	$(7, 6)(3, 2)$	$C(8, 3)$	$(5, 0)(4, 3)$
$C(3, 2)$	$(2, 0)(5, 2)$	$C(6, 1)$	$(8, 3)(4, 7)$	$C(8, 4)$	$(2, 6)(6, 2), (1, 6)(7, 2),$ $(0, 6)(8, 2)$
$C(3, 3)$	$(5, 5)(1, 1)$	$C(6, 2)$	$(8, 4)(4, 8)$		
Vertex: $(0, 2)$					
Elements of $K_9 \times K_{15}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(3, 3)(7, 13), (3, 0)(7, 1),$ $(3, 11)(7, 6)$	$C(3, 7)$	$(8, 0)(7, 7)$	$C(6, 3)$	$(2, 0)(0, 3)$
$C(1, 2)$	$(3, 4)(7, 14)$	$C(4, 1)$	$(6, 3)(2, 13)$	$C(6, 6)$	$(8, 11)(4, 1)$
$C(1, 3)$	$(6, 11)(5, 10)$	$C(4, 2)$	$(6, 4)(2, 14)$	$C(6, 7)$	$(8, 12)(4, 2)$
$C(1, i)$	$(3, i+2)(7, i-2),$ $i = 4, 5, 6, 7$	$C(4, i)$	$(6, i+2)(2, i-2),$ $i = 3, 4, 5$	$C(7, 1)$	$(5, 8)(1, 0)$
$C(2, 1)$	$(4, 3)(8, 13)$	$C(4, 6)$	$(6, 0)(2, 6)$	$C(7, i)$	$(1, i+5)(5, i+9),$ $i = 2, 3, 4, 5$
$C(2, 2)$	$(4, 4)(8, 14), (4, 0)(8, 2),$ $(4, 12)(8, 7)$	$C(4, 7)$	$(0, 4)(4, 11)$	$C(7, 6)$	$(1, 4)(5, 9), (1, 6)(5, 7),$ $(1, 11)(5, 1)$
$C(2, i)$	$(4, i+2)(8, i-2),$ $i = 3, 5, 6, 7$	$C(5, 1)$	$(1, 5)(0, 11)$	$C(7, 7)$	$(1, 12)(5, 2)$
$C(2, 4)$	$(3, 5)(1, 3)$	$C(5, 2)$	$(6, 9)(5, 0)$	$C(8, 1)$	$(0, 9)(8, 8)$
$C(3, 1)$	$(5, 3)(1, 13)$	$C(5, i)$	$(7, i+5)(3, i+9),$ $i = 3, 4, 5$	$C(8, 2)$	$(4, 6)(0, 12)$
$C(3, 2)$	$(5, 4)(1, 14)$	$C(5, 6)$	$(7, 11)(3, 1)$	$C(8, i)$	$(2, i+5)(6, i+9),$ $i = 3, 4, 5$
$C(3, i)$	$(5, i+2)(1, i-2),$ $i = 3, 4$	$C(5, 7)$	$(7, 12)(3, 2)$	$C(8, 6)$	$(2, 11)(6, 1)$
$C(3, 5)$	$(0, 1)(3, 10)$	$C(6, i)$	$(8, i+5)(4, i+9),$ $i = 1, 4, 5$	$C(8, 7)$	$(2, 5)(6, 10), (2, 7)(6, 8),$ $(2, 12)(6, 2)$
$C(3, 6)$	$(7, 0)(0, 6)$	$C(6, 2)$	$(2, 4)(0, 14)$		
Vertices: $(0, i)$, for $i = 0, 2, 5, 7, 8, 10, 13$					
Elements of $K_9 \times K_{21}$ of the guiding color					
Cycle	Edges	Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1, 1)$	$(3, 3)(7, 19), (3, 15)(7, 8),$ $(3, 20)(7, 3)$	$C(3, 8)$	$(7, 11)(0, 5)$	$C(6, 4)$	$(0, 18)(6, 11)$
$C(1, 2)$	$(3, 4)(7, 20)$	$C(4, 1)$	$(6, 3)(2, 19)$	$C(6, 9)$	$(4, 0)(1, 9)$
$C(1, i)$	$(3, i+2)(7, i-2),$ $i = 3, 4, 6, 7, 8, 9$	$C(4, 2)$	$(6, 4)(2, 20)$	$C(6, 10)$	$(8, 18)(4, 2)$
$C(1, 5)$	$(2, 15)(1, 0)$	$C(4, i)$	$(6, i+2)(2, i-2),$ $i = 3, 5, 6, 7, 8, 10$	$C(7, 1)$	$(3, 12)(0, 11)$
$C(1, 10)$	$(5, 5)(0, 16)$	$C(4, 4)$	$(1, 14)(7, 0)$	$C(7, i)$	$(1, i+8)(5, i+12),$ $i = 2, 3, 4, 5, 7, 8$
$C(2, 1)$	$(4, 3)(8, 19)$	$C(4, 9)$	$(0, 10)(4, 8)$	$C(7, 6)$	$(8, 0)(6, 6)$
$C(2, 2)$	$(4, 4)(8, 20), (4, 16)(8, 9),$ $(4, 1)(8, 4)$	$C(5, i)$	$(7, i+8)(3, i+12),$ $i = 1, 2, 4, 5, 6, 7$	$C(7, 9)$	$(1, 1)(5, 18), (1, 6)(5, 13),$ $(1, 17)(5, 1)$
$C(2, i)$	$(4, i+2)(8, i-2),$ $i = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10$	$C(5, 3)$	$(8, 17)(2, 10)$	$C(7, 10)$	$(1, 18)(5, 2)$
$C(2, 6)$	$(7, 16)(5, 0)$	$C(5, 8)$	$(0, 7)(5, 10)$	$C(8, i)$	$(2, i+8)(6, i+12),$ $i = 1, 3, 4, 5, 6, 8$
$C(3, 1)$	$(5, 3)(1, 19)$	$C(5, 9)$	$(7, 17)(3, 1)$	$C(8, 2)$	$(0, 13)(8, 12)$
$C(3, 2)$	$(5, 4)(1, 20)$	$C(5, 10)$	$(7, 18)(3, 2)$	$C(8, 7)$	$(6, 0)(3, 7)$
$C(3, 3)$	$(4, 13)(3, 0)$	$C(6, 1)$	$(2, 0)(0, 1)$	$C(8, 9)$	$(2, 17)(6, 1)$
$C(3, i)$	$(5, i+2)(1, i-2),$ $i = 4, 5, 6, 7, 9, 10$	$C(6, i)$	$(8, i+8)(4, i+12),$ $i = 2, 3, 5, 6, 7, 8$	$C(8, 10)$	$(2, 2)(6, 19), (2, 7)(6, 14),$ $(2, 18)(6, 2)$
Vertices: $(0, i)$, for $i = 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 17, 19, 20$					

Table 16: Elements of particular graph $K_{11} \times K_{11}$ of the guiding color

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1,1)$	(9,9)(4,4),(10,9)(3,4),(1,9)(2,4)	$C(6,i)$	$(4,i-2)(9,i+3), i = 3,4,5$
$C(1,2)$	(3,7)(10,0)	$C(7,1)$	(5,9)(10,4)
$C(1,3)$	(9,1)(4,6)	$C(7,2)$	(5,10)(10,5)
$C(1,4)$	(7,5)(6,3)	$C(7,i)$	$(5,i-2)(10,i+3), i = 3,5$
$C(1,5)$	(7,0)(6,5)	$C(7,4)$	(8,0)(6,4)
$C(2,1)$	(7,3)(0,9)	$C(8,1)$	(6,9)(1,4)
$C(2,2)$	(10,10)(5,5),(1,10)(4,5),(2,10)(3,5)	$C(8,2)$	(6,10)(1,5)
$C(2,i)$	$(10,i-2)(5,i+3), i = 3,4,5$	$C(8,3)$	(6,1)(1,6)
$C(2,5)$	(9,10)(5,0)	$C(8,4)$	(7,9)(9,0)
$C(3,1)$	(8,10)(0,3)	$C(8,5)$	(0,10)(3,0)
$C(3,2)$	(1,0)(6,2)	$C(9,1)$	(4,0)(0,1)
$C(3,i)$	$(1,i-2)(6,i+3), i = 3,4,5$	$C(9,2)$	(7,10)(2,5)
$C(4,1)$	(2,9)(7,4)	$C(9,3)$	(7,1)(2,6)
$C(4,2)$	(0,6)(4,8)	$C(9,4)$	(7,2)(2,7),(8,2)(1,7),(9,2)(10,7)
$C(4,i)$	$(2,i-2)(7,i+3), i = 3,4,5$	$C(9,5)$	(5,4)(4,7)
$C(5,1)$	(3,9)(8,4)	$C(10,1)$	(5,8)(0,5)
$C(5,2)$	(3,10)(8,5)	$C(10,2)$	(6,0)(5,2)
$C(5,i)$	$(3,i-2)(8,i+3), i = 3,4,5$	$C(10,3)$	(8,1)(3,6)
$C(6,1)$	(4,9)(9,4)	$C(10,4)$	(8,9)(2,0)
$C(6,2)$	(4,10)(9,5)	$C(10,5)$	(8,3)(3,8),(9,3)(2,8),(10,3)(1,8)

Vertices: $(0,i)$, for $i = 0,2,4,7,8$

Table 17: Elements of particular graph $K_{11} \times K_{13}$ of the guiding color

Cycle	Edges	Cycle	Edges
$C(1,1)$	(9,11)(4,4),(9,12)(4,3), (9,1)(4,2)	$C(3,5)$	(0,11)(3,0)
$C(1,2)$	(6,0)(0,2)	$C(3,i)$	$(1,i-2)(6,i+3),$ $i = 6,7,8,9$
$C(1,3)$	(1,12)(2,7)	$C(3,10)$	(1,8)(6,1)
$C(1,i)$	$(9,i-2)(4,i+3),$ $i = 4,5,6,7,8,9$	$C(3,11)$	(1,9)(6,2)
$C(1,10)$	(9,8)(4,1)	$C(3,12)$	(1,10)(6,3)
$C(1,11)$	(8,5)(5,0)	$C(4,1)$	(5,6)(3,8)
$C(1,12)$	(0,6)(1,0)	$C(4,2)$	(2,12)(7,5)
$C(2,1)$	(0,7)(2,0)	$C(4,i)$	$(2,i-2)(7,i+3),$ $i = 3,4,5,6,7,8$
$C(2,2)$	(10,12)(5,5),(10,1)(5,4), (10,2)(5,3)	$C(4,9)$	(9,0)(0,9)
$C(2,3)$	(8,0)(7,3)	$C(4,10)$	(10,11)(9,9)
$C(2,4)$	(3,9)(1,11)	$C(4,11)$	(2,9)(7,2),(2,10)(7,1), (2,11)(7,12)
$C(2,i)$	$(10,i-2)(5,i+3),$ $i = 5,6,7,8,9$	$C(4,12)$	(9,10)(0,3)
$C(2,10)$	(10,8)(5,1)	$C(5,1)$	(6,7)(4,0)
$C(2,11)$	(10,9)(5,2)	$C(5,2)$	(0,10)(5,7)
$C(2,12)$	(7,0)(0,12)	$C(5,i)$	$(3,i-2)(8,i+3),$ $i = 3,4,5,6,7,8,9$
$C(3,1)$	(4,6)(2,8)	$C(5,10)$	(4,5)(7,4)
$C(3,2)$	(6,8)(10,0)	$C(5,11)$	(10,10)(0,1)
$C(3,3)$	(1,1)(6,6),(1,2)(6,5), (1,3)(6,4)	$C(5,12)$	(3,10)(8,3),(3,11)(8,2), (3,12)(8,1)
$C(3,4)$	(8,4)(0,5)		

Vertices: $(0,i)$, for $i = 0,4,8$

Apêndice C

Anexo: Manuscrito “Most direct product of graphs are Type 1”
submetido para Discrete Applied Mathematics - Special Issue:
CTW2020

Most direct product of graphs are Type 1

D. Castonguay^a, C. M. H. de Figueiredo^b, L. A. B. Kowada^c, C. S. R. Patrão^{b,d}, D. Sasaki^e

^aINF, Universidade Federal de Goiás, Brazil

^bCOPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil

^cIC, Universidade Federal Fluminense, Brazil

^dIFG, Instituto Federal de Goiás, Brazil

^eIME, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Brazil

Abstract

A k -total coloring of a graph G is an assignment of k colors to its elements (vertices and edges) so that adjacent or incident elements have different colors. The total chromatic number is the smallest integer k for which the graph G has a k -total coloring. Clearly, this number is at least $\Delta(G) + 1$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G . When the lower bound is reached, the graph is said to be Type 1. The upper bound of $\Delta(G) + 2$ is a central problem that has been open for fifty years, is verified for graphs with maximum degree 4 but not for regular graphs.

Most classified direct product of graphs are Type 1. The particular cases of the direct product of cycle graphs $C_m \times C_n$, for $m = 3p, 5\ell$ and 8ℓ with $p \geq 2$ and $\ell \geq 1$, and arbitrary $n \geq 3$, were previously known to be Type 1 and motivated the conjecture that, except for $C_4 \times C_4$, all direct product of cycle graphs $C_m \times C_n$ with $m, n \geq 3$ are Type 1.

We give a general pattern proving that all $C_m \times C_n$ are Type 1, except for $C_4 \times C_4$. Additionally, we investigate sufficient conditions to ensure that the direct product reaches the lower bound for the total chromatic number.

Keywords: graph theory, total coloring, direct product, cycle graph

2010 MSC: 05C85, 05C15, 05C76, 05C38

1. Introduction

Let G be a simple connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A k -total coloring of G is an assignment of k colors to its elements (vertices and edges) so that adjacent or incident elements have distinct colors. The total chromatic number $\chi_T(G)$ is the smallest integer k for which G has a k -total coloring. Clearly, $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$, where $\Delta(G)$ is the maximum degree of G , and the *Total Coloring Conjecture* (TCC), posed fifty years ago independently by Vizing [1] and Behzad et al. [2], states that $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$. Graphs with $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ are said to be *Type 1* and graphs with $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$ are said to be *Type 2*. In 1977, Kostochka [3] verified the TCC for all graphs with maximum degree 4, but the TCC has not been settled for all regular graphs, where all vertices have the same degree. Although the TCC is trivially settled for all bipartite graphs, the problem of determining the total chromatic number of a k -regular bipartite graph is NP-hard, for each fixed $k \geq 3$ [4], exposing how challenging the problem of total coloring is.

The *direct product* (also called *tensor product* or *categorical product*) of two graphs G and H is a graph denoted by $G \times H$, whose vertex set is the Cartesian product of the vertex sets $V(G)$ and $V(H)$ that is $\{(u, v) : u \in V(G), v \in V(H)\}$, for which vertices (u, v) and (u', v') are adjacent if and only if $uu' \in E(G)$ and $vv' \in E(H)$. The definition clearly implies that the maximum degree satisfies $\Delta(G \times H) = \Delta(G) \cdot \Delta(H)$, and that the direct product $G \times H$ is a regular graph if and only if both G and H are regular graphs. Concerning the category of graphs, where objects are graphs and morphisms are graph homomorphisms, we know that the direct product $G \times H$ is the categorical product that is defined by projections $p_G : G \times H \rightarrow G$ and $p_H : G \times H \rightarrow H$. The direct product has the commutative property, that is, the graph $G \times H$ is isomorphic to the graph $H \times G$. Moreover, the direct product $G \times H$ is bipartite if and only if G or H is bipartite, and it is disconnected if and only if G and H are bipartite graphs. In particular, in case both G and H are connected bipartite graphs, the direct product $G \times H$ has exactly two bipartite connected components.

A total coloring defines a vertex coloring and an edge coloring, and both coloring problems have been studied with respect to the direct product. A z -vertex (resp. edge) coloring of a graph is an assignment of z colors to its vertices (resp. edges) so that adjacent vertices (resp. incident edges) have distinct colors.

35 The chromatic number (resp. index) is the smallest integer z for which a graph has a z -vertex (resp. edge) coloring. Concerning vertex coloring, Hedetniemi conjectured in 1966 that the chromatic number of $G \times H$ would be equal to the minimum of the chromatic numbers of G and H and recently, fifty years later, the conjecture has been refuted by Shitov [5]. Concerning edge coloring,

40 Jaradat [6] proved that if one factor reaches the lower bound for edge coloring, so does the direct product.

A *cycle graph*, denoted by $C_n, n \geq 3$, is a connected 2-regular graph. The graph C_n is Type 1 if n is multiple of 3 and Type 2, otherwise [7]. The direct product of cycle graphs $C_m \times C_n$ is a 4-regular graph, and it is disconnected

45 precisely when both m and n are even in which case $C_m \times C_n$ consists of two isomorphic 4-regular bipartite connected components each being a spanning subgraph of the complete bipartite graph $K_{\frac{nm}{4}, \frac{nm}{4}}$.

Concerning the total coloring of the direct product, there are few known results. Most classified direct product of graphs are Type 1. Prnaver and

50 Zmazek [8] established the TCC for the direct product of a path of length greater or equal to 3 and an arbitrary graph G with chromatic index $\chi'(G) = \Delta(G)$. They additionally proved, for $m, n \geq 3$, that $\chi_T(P_m \times P_n)$ and $\chi_T(P_m \times C_n)$ are equal to 5. Recently, the total chromatic number of direct product of complete graphs has been fully determined as being Type 1 with the exception of $K_2 \times$

55 K_2 [9].

An equitable total coloring is a total coloring where the number of elements colored with each color differs by at most one. In 2009, Tong et al. [10] showed that the equitable total chromatic number of the Cartesian product between C_m and C_n , denoted by $C_m \square C_n$, is equal to 5 for all possible values $m, n \geq 3$.

60 It is known that $C_{2n+1} \times C_{2n+1} \cong C_{2n+1} \square C_{2n+1}$ [11], therefore we know that $\chi_T(C_{2n+1} \times C_{2n+1}) = 5$, for all $n \geq 1$.

In 2018, Geetha and Somasundaram [11] conjectured that, except for $C_4 \times C_4$, all direct product of cycle graphs $C_m \times C_n$ are Type 1. As evidence, they established three infinite families of Type 1 direct product of cycle graphs: for arbitrary $n \geq 3$, $\chi_T(C_m \times C_n) = 5$ if $m = 3p, 5\ell, 8\ell$, where $p \geq 2$ and $\ell \geq 1$. In order to describe the claimed total colorings for the three infinite families, they present four tables whose entries are the 5 colors given to suitable matchings between independent sets of vertices that are colored with no conflicts.

In Section 2, we present a general pattern that gives a 5-total coloring for all graphs $C_m \times C_n$, except for $C_4 \times C_4$. Therefore we ensure that the open remaining infinite families of $C_m \times C_n$ are also Type 1. In Section 3, we investigate further conditions that ensure that the direct product $G \times H$ is Type 1. We ask whether one factor reaching the lower bound is enough to ensure that the direct product also reaches the lower bound for the total chromatic number. We manage to classify into Type 1 or Type 2 additional bipartite direct product of graphs.

2. Total coloring of $C_m \times C_n$

In this section, we prove that the graph $C_m \times C_n$ is Type 1, except for $C_4 \times C_4$. Note that the graph $C_4 \times C_4$ is Type 2, as it is isomorphic to two copies of $K_{4,4}$, well known to be Type 2, and it is the single exception among the direct product of cycle graphs $C_m \times C_n$.

The present section is devoted to the proof of Theorem 1.

Theorem 1. *Except for $C_4 \times C_4$, the graph $C_m \times C_n$ is Type 1.*

We omit five particular cases that are too small to apply the used technique, but are easy to verify to be Type 1, for instance by using the free open-source mathematics software system Sage Math. They are: $C_3 \times C_3$, $C_3 \times C_4$, $C_3 \times C_7$, $C_4 \times C_7$ and $C_7 \times C_7$. Figure 1 presents a 5-total coloring of $C_3 \times C_3$. Therefore, as $C_m \times C_n$ is isomorphic to $C_n \times C_m$, we shall consider in our proof $C_m \times C_n$ with $m, n \geq 3$ and $m \neq 3, 4, 7$. We shall write $m = 5k + b$, for $k \geq 0$ and $b = 5, 6, 8, 9$ and 12. Note that as $m \neq 7$, the next case is $m = 12$ for which the remainder of the division by 5 is 2. For instance, to obtain a 5-total coloring of

$C_3 \times C_{24}$, we consider the isomorphic graph $C_{24} \times C_3$ and write $24 = 5k + b$, with $k = 3$ and $b = 9$.

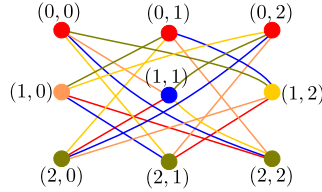


Figure 1: A 5-total coloring of $C_3 \times C_3$.

In order to prove Theorem 1, we construct a 5-total coloring of an auxiliary graph, called matching quotient, from which we obtain a 5-total coloring of $C_m \times C_n$. We use suitable independent sets and matchings between them, inspired by the strategy used by Geetha and Somasundaram [11] to total color the three particular infinite families. For $i = 0, \dots, m - 1$, denote by $I_i = \{(i, j) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$, $M_i = \{(i, j)((i + 1) \bmod m, (j + 1) \bmod n) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$ and $M'_i = \{(i, j)((i + 1) \bmod m, (j - 1) \bmod n) \mid j = 0, \dots, n - 1\}$. Clearly, each set has n elements, and sets M_i and M'_i are two perfect matchings between independent sets I_i and I_{i+1} in $C_m \times C_n$. From that, we define the matching quotient of $C_m \times C_n$, denoted by $Q[C_m \times C_n]$, as the multigraph where each of its m vertices correspond to an independent set $I_i, i = 0, \dots, m - 1$, and we have two edges between I_i and I_{i+1} which correspond to M_i and M'_i . Note that a 5-total coloring of the matching quotient $Q[C_m \times C_n]$ represents a 5-total coloring of $C_m \times C_n$. Figure 2 presents an example of a matching quotient, by depicting the matching quotient $Q[C_5 \times C_5]$ of $C_5 \times C_5$.

In Subsections 2.1 and 2.2, we establish a 5-total coloring of the matching quotient of $C_m \times C_n$, proving Theorem 1. In Subsection 2.1, we exhibit a 5-total coloring of the matching quotients of five base infinite families: $C_5 \times C_n, C_6 \times C_n, C_8 \times C_n, C_9 \times C_n$ and $C_{12} \times C_n$, for $n \geq 3$. Note that the base infinite families are those where $m = 5k + b$ for $k = 0$ and $b = 5, 6, 8, 9, 12$. We observe that the 5-total coloring of the base infinite family $C_5 \times C_n$ acts as a pattern. In Subsection 2.2, for the matching quotient of $C_m \times C_n$, with an arbitrary large

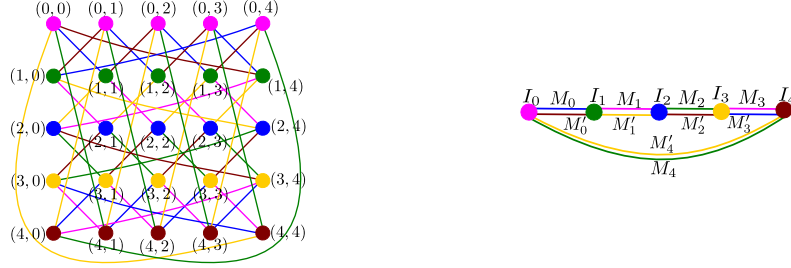


Figure 2: A 5-total coloring of $C_5 \times C_5$ (left) and the respective colored matching quotient $Q[C_5 \times C_5]$ (right).

115 value of m , we observe that we can split this graph into (possibly many) pattern blocks that are identified with the matching quotient of $C_5 \times C_n$, and one base block which is identified with the matching quotient of each base infinite family $C_5 \times C_n$, $C_6 \times C_n$, $C_8 \times C_n$, $C_9 \times C_n$ and $C_{12} \times C_n$. The 5-total colorings of the matching quotients, given in Subsection 2.1, produce a 5-total coloring of each
 120 block such that there are no conflicts of colors. The strategy of splitting the graph into blocks gives a 5-total coloring of the matching quotient of $C_m \times C_n$, ensuring that $C_m \times C_n$ is Type 1.

2.1. Base infinite families

We consider first the base infinite families $Q[C_m \times C_n]$ with $m = 5, 6, 8, 9, 12$
 125 and $n \geq 3$. We refer to Figures 3, 4, 5, 6 and 7 for the 5-total coloring of each base case. Note that, the 5-total colorings of the base infinite families have important features in common: the same color 1 (pink) given to the vertex I_0 , the same color 2 (green) given to the matching M_{m-1} and the same color 4 (yellow) given to the matching M'_{m-1} . These shared features provide the needed
 130 compatibility that allows us to define a common pattern used when we deal with larger values of m .

2.2. Merging the pattern to generate a 5-total coloring for arbitrary m

To obtain a 5-total coloring of the matching quotient $Q[C_m \times C_n]$ for an arbitrary large value of m , we repeatedly merge the pattern block given by 5-
 135 total coloring of the matching quotient $Q[C_5 \times C_n]$ with the 5-total coloring of

Color	Vertices	Edges
1 (pink)	I_0	M_1, M_3
2 (green)	I_1	M_2, M_4
3 (blue)	I_2	M_0, M'_3
4 (yellow)	I_3	M'_1, M'_4
5 (brown)	I_4	M'_0, M'_2

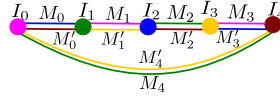


Figure 3: The table and the drawing of a 5-total coloring of the base case $Q[C_5 \times C_n]$.

Color	Vertices	Edges
1	I_0, I_3	M_1, M_4
2	I_1, I_4	M_2, M_5
3	I_2, I_5	M_0, M_3
4	–	M'_1, M'_3, M'_5
5	–	M'_0, M'_2, M'_4

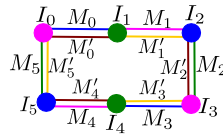


Figure 4: The table and the drawing of a 5-total coloring of the base case $Q[C_6 \times C_n]$.

Color	Vertices	Edges
1	I_0, I_5	M_1, M_3, M_6
2	I_1, I_4	M_2, M_5, M_7
3	I_2, I_7	M_0, M'_3, M'_5
4	I_3, I_6	M'_1, M_4, M'_7
5	–	M'_0, M'_2, M'_4, M'_6

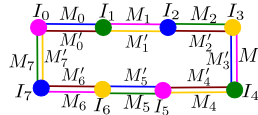


Figure 5: The table and the drawing of a 5-total coloring of the base case $Q[C_8 \times C_n]$.

Color	Vertices	Edges
1	I_0, I_3, I_6, I_9	M_1, M_4, M_7, M_{10}
2	I_1, I_4, I_7, I_{10}	M_2, M_5, M_8, M_{11}
3	I_2, I_7	M_0, M_3, M'_5, M'_7
4	I_5, I_{10}	$M'_1, M'_3, M'_6, M'_8, M'_{11}$
5	I_8	M'_0, M'_2, M'_4, M'_6

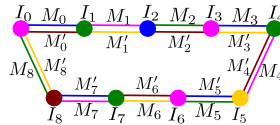


Figure 6: The table and the drawing of a 5-total coloring of the base case $Q[C_9 \times C_n]$.

Color	Vertices	Edges
1	I_0, I_3, I_6, I_9	M_1, M_4, M_7, M_{10}
2	I_1, I_8	$M_2, M'_4, M_6, M_9, M_{11}$
3	I_2, I_7	$M_0, M_3, M_5, M_8, M'_{10}$
4	I_5, I_{10}	$M'_1, M'_3, M'_6, M'_8, M'_{11}$
5	I_4, I_{11}	$M'_0, M'_2, M'_5, M'_7, M'_9$

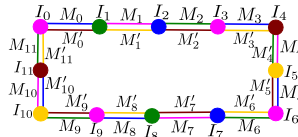


Figure 7: The table and the drawing of a 5-total coloring of the base case $Q[C_{12} \times C_n]$.

its base block $Q[C_b \times C_n]$, for $b = 5, 6, 8, 9, 12$. Note that the colored $Q[C_5 \times C_n]$ is the first base case and is also the only pattern used for an arbitrary value of m independently of its base case.

Recall that, as we argued in the beginning of Section 2, by swapping m and n , we are always able to consider $n \geq 3$ and write a large value of $m \geq 10$ as $m = 5k + b$, for $k \geq 1$ and $b = 5, 6, 8, 9, 12$. We optimally color first its base block $C_b \times C_n$ and then repeatedly merge with k copies of the optimally colored pattern block $C_5 \times C_n$. So the 5-total coloring of $Q[C_m \times C_n]$ is defined by two steps as follows:

- **Base step:** For each $i = 0, \dots, b-1$, the color of I_i (respectively, M_i and M'_i) in $Q[C_m \times C_n]$ is the same as the color of I_i (respectively, M_i and M'_i) in its base case $Q[C_b \times C_n]$.
- **Pattern step:** For each $i = b, \dots, m-1$, write $t = (i - b) \bmod 5$, and the color of I_i (respectively, M_i and M'_i) in $Q[C_m \times C_n]$ is the same as the color of I_t (respectively, M_t and M'_t) in the pattern $Q[C_5 \times C_n]$.

For instance, consider $m = 11$ and please refer to Figure 8. Note that, in the base step, we color the elements I_i, M_i and M'_i , for $i = 0, \dots, 5$, of $Q[C_{11} \times C_n]$ with the same colors as its base infinite family $Q[C_6 \times C_n]$. Now, in the pattern step, we color the elements I_i, M_i and M'_i , for $i = 6, 7, 8, 9, 10$ of $Q[C_{11} \times C_n]$ with the same colors as the pattern $Q[C_5 \times C_n]$ (as in Figure 3). Analogously, when $m = 16$ we merge the pattern $Q[C_5 \times C_n]$ twice into $Q[C_6 \times C_n]$ to obtain a 5-total coloring of the matching quotient $Q[C_{16} \times C_n]$ as highlighted in Figure 9 by elements I_i, M_i and M'_i , for $i = 6, \dots, 15$. Thus, for a general $m = 5k + b$ we merge k patterns $Q[C_5 \times C_n]$ into the corresponding base infinite family $Q[C_b \times C_n]$ to obtain a 5-total coloring of the matching quotient $Q[C_{5k+b} \times C_n]$.

Note that there is no conflict between the assigned colors in the defined 5-total coloring for an arbitrary value of m . Indeed, we already know that each base infinite family has color 1 (pink) to I_0 , color 2 (green) to M_{b-1} and color 4 (yellow) to M'_{b-1} . Note that, regardless of how many times we use the pattern,

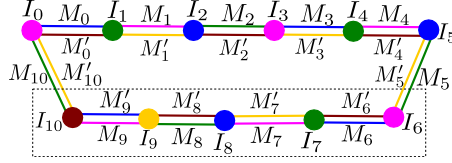


Figure 8: A 5-total coloring of the matching quotient $Q[C_{11} \times C_n]$. This 5-total coloring is obtained by merging once the 5-total coloring of the highlighted pattern $Q[C_5 \times C_n]$ into the 5-total coloring of $Q[C_6 \times C_n]$.

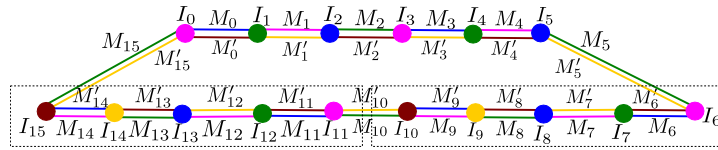


Figure 9: A 5-total coloring of the matching quotient $Q[C_{16} \times C_n]$. This 5-total coloring is obtained by merging twice the 5-total coloring of the highlighted pattern $Q[C_5 \times C_n]$ into the 5-total coloring of $Q[C_6 \times C_n]$.

165 there is no conflict between the patterns, as the edges colored 2 (green) and 4
 (yellow) in the case base $Q[C_5 \times C_n]$ are the ones used between the patterns.
 Also, there is no conflict between the base case and the pattern, as the edges
 colored 2 (green) and 4 (yellow) between I_{b-1} and I_b (pink), and between I_0
 colored 1 (pink) and I_{m-1} , are both used in our base cases, where both I_{b-1}
 170 and I_{m-1} have a colored 1 (pink) neighbor vertex.

3. On total coloring bipartite direct product of graphs

In this section, we propose and investigate two questions motivated by the
 search for a general pattern for the classification into Type 1 or Type 2 of the
 direct product of two graphs. In this sense, it is natural to seek for sufficient
 175 conditions for the direct product to be Type 1. Prnaver and Zmazek [8] previ-
 ously proved that if G admits a $\Delta(G)$ -edge coloring, then $G \times P_m$, for $m \geq 3$,
 is Type 1. Mackeigan and Janssen [12] subsequently proved that if $G \times K_2$ is
 Type 1, then $G \times H$ is also Type 1, for any bipartite graph H . Recall that for
 edge coloring, Jaradat [6] proved that if one factor reaches the lower bound for

180 edge coloring, so does the direct product. We investigate whether an analogous
property holds for total coloring:

Question 1. *Given a Type 1 graph G and an arbitrary graph H , is the direct
product $G \times H$ Type 1?*

The analogous question has been considered for the Cartesian product, but
185 has only been partially answered. It is known that if the factor with largest
vertex degree is of Type 1, then the Cartesian product is also of Type 1 [13].
So far, all known Type 2 direct product of two graphs are the direct product
 $G \times H$, where G and H are Type 2, including cases with $G = H$. The known
Type 2 direct product of two graphs are: $K_2 \times K_2$, $C_4 \times C_4$, $K_{n,n} \times K_{m,m}$, and
190 $C_m \times K_2$ for m not a multiple of 3. On the other hand, a Type 1 direct product
of two graphs $G \times H$ can be obtained when G and H are Type 1, when G and
 H are Type 2, or else when one of them is Type 1 and the other is Type 2. For
instance, K_m is Type 1 when m is odd and Type 2 when m is even, and yet
the direct product $K_m \times K_n$ is Type 1 when both m and n are odd [9], when
195 $m, n \neq 2$ are both even [11], or else when m or n is even [12]; whereas when
 $m = n = 2$, the graph $K_2 \times K_2$ is Type 2. The present work established that
the direct product $C_m \times C_n$ is Type 1 when $m, n \neq 4$, and yet C_m is Type 1
when m is multiple of 3 and Type 2 otherwise; whereas when $m = n = 4$, the
graph $C_4 \times C_4$ is Type 2.

200 We contribute to Question 1 by giving positive evidences. A regular graph
 G is *conformable* if G admits a vertex coloring with $\Delta(G) + 1$ colors such that
the number of vertices in each color class has the same parity as $|V(G)|$ [14].
It is known that every Type 1 graph must satisfy the conformable condition.
The converse is not true, but being conformable helps to identify whether a
205 graph has the potential to be Type 1 or to be sure that it cannot be Type 1. In
Theorem 2, we show a sufficient condition on the graph G for the direct product
of regular graphs $G \times H$ to be conformable.

Theorem 2. *Let G and H be two regular graphs. If G is conformable, then
 $G \times H$ is conformable.*

210 *Proof.* Since G is by hypothesis conformable, let us consider a vertex coloring
 $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ such that, for every $i = 1, \dots, \Delta(G) + 1$, the
color class $F_i = f^{-1}(i)$ has cardinality of the same parity as $|V(G)|$. Consider
one of the projections that define the direct product $p : V(G \times H) \rightarrow V(G)$.
Therefore, we have a function $f \circ p : V(G \times H) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$, which is
215 a vertex coloring of $G \times H$ such that every color class consists of the vertices
in the Cartesian product of the sets of vertices of F_i and $V(H)$, denoted by
 $F_i \times V(H)$, for $i = 1, \dots, \Delta(G) + 1$.

We consider two cases. First, consider the case when $G \times H$ is a graph of even
order. In this case, $|V(G)|$ or $|V(H)|$ is even. Recall that $\Delta(G \times H) = \Delta(G) \cdot$
220 $\Delta(H)$. Consider a vertex coloring $\gamma : V(G \times H) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) \cdot \Delta(H) + 1\}$,
defined by $\gamma(x, a) = f(x)$. Note that this function is actually obtained from
 $f \circ p$ by changing the codomain, thus this is also a vertex coloring of $G \times H$,
but possibly there are empty color classes. An empty set has cardinality zero,
which is of even parity. We have to prove that γ is conformable, that is, we have
225 to prove that every non-empty color class of γ has an even cardinality. But, a
non-empty color class of γ is of the form $F_i \times V(H)$, where F_i a color class of
 f . Since F_i has the same cardinality of $|V(G)|$ and $|F_i \times V(H)| = |F_i| \cdot |V(H)|$,
if $|V(G)|$ or $|V(H)|$ is even, then $|F_i \times V(H)|$ is also even, and thus, γ is a
conformable coloring of $G \times H$.

Now, consider the case when $G \times H$ is a graph of odd order, that is $|V(G)|$
and $|V(H)|$ are odd. Since G and H are regular graphs, we have that $\Delta(G)$ and
 $\Delta(H)$ are even. Observe that all color classes of $c \circ p$ have odd cardinality. Next,
we define a conformable coloring $\gamma : V(G \times H) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) \cdot \Delta(H) + 1\}$.
Observe that all color classes of γ have odd cardinality, hence they must have at
least one vertex. The idea is to remove even amount of vertices of each color class
of $f \circ p$. In this way, the parity of these color classes is preserved and additionally
we define new color classes of cardinality one, for each of this removed vertices.
Consider $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$ and consider, for each $i = 1, \dots, \Delta(G) + 1$, a

fixed element u_i of F_i . We define:

$$A_i = \begin{cases} \{(u_i, v_j) \mid j = 1, \dots, \Delta(H) - 2\}, & \text{if } i = 1, \dots, \Delta(G)/2 \\ \{(u_i, v_j) \mid j = 1, \dots, \Delta(H)\}, & \text{if } i = (\Delta(G)/2) + 1, \dots, \Delta(G) \end{cases}$$

230 In addition, define $A = \bigcup_{i=1}^{\Delta(G)} A_i$. We construct a vertex coloring γ of $G \times H$ by defining its color classes, each one is a subset of a color class of $f \circ p$. Each color class of γ is $F_i \times V(H) - A_i$, for $i = 1, \dots, \Delta(G)$, $F_{\Delta(G)+1}$ and $\{(u, v)\}$, for $(u, v) \in A$. In order to show that γ is conformable, we have to show that γ has $\Delta(G) \cdot \Delta(H) + 1$ color classes and that each color class has an odd cardinality,
235 as follows.

First, the number of color classes of γ is $\Delta(G) + 1 + |A|$. Since

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^{\Delta(G)} |A_i| = \left(\sum_{i=1}^{\frac{\Delta(G)}{2}} |A_i| \right) + \left(\sum_{i=(\frac{\Delta(G)}{2})+1}^{\Delta(G)} |A_i| \right) = \frac{\Delta(G)}{2}(\Delta(H)-2) + \frac{\Delta(G)}{2}\Delta(H) \\ &= \left(\frac{\Delta(G)}{2} \right) (2\Delta(H) - 2) = \Delta(G)(\Delta(H) - 1), \end{aligned}$$

we have that $\Delta(G) + 1 + |A| = \Delta(G) \cdot \Delta(H) + 1$.

Finally, we prove that each color class of γ has an odd cardinality. Recall that H is of odd order and has even degree. Since f is a conformable coloring of
240 G and G is of odd order, each F_i is of odd cardinality, for $i = 1, \dots, \Delta(G) + 1$. For each $i = 1, \dots, \Delta(G)/2$, $F_i \times V(H) - A_i$ has odd cardinality $|F_i| \cdot |V(H)| - \Delta(H) + 2$. Similarly, for each $i = (\Delta(G)/2) + 1, \dots, \Delta(G)$, $F_i \times V(H) - A_i$ has odd cardinality $|F_i| \cdot |V(H)| - \Delta(H)$. Clearly, $F_{\Delta(G)+1}$ and $\{(u, v)\}$, for $(u, v) \in A$ have odd cardinality. Therefore, γ is a conformable coloring of $G \times H$.

245 For examples of the odd and even cases, see Figures 1 and 10, respectively. Note that the conformable colorings of the base infinite families in Section 2 are not obtained in the same way, except $C_6 \times C_n$, $n \geq 3$. \square

By Theorem 2, we contribute to Question 1 since given regular graphs G and H with G of Type 1, we know that $G \times H$ is conformable. Conformable graphs
250 of odd order and sufficient large maximum degree are Type 1, see Chew [15].

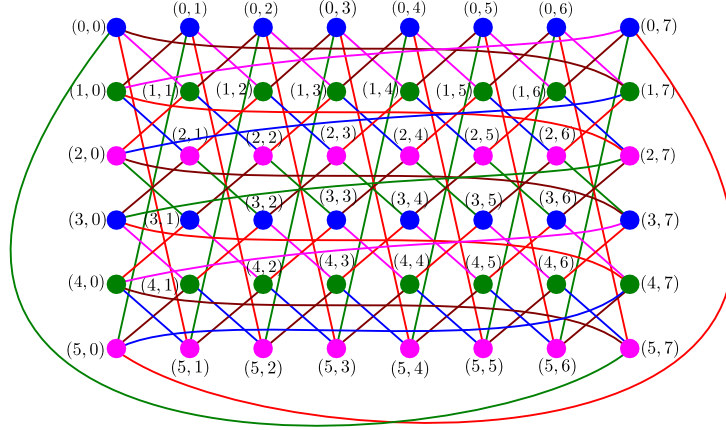


Figure 10: A 5-total coloring of $C_6 \times C_8$ which is also the conformable coloring of Theorem 2.

For example, in [9], we use this fact together with Hamiltonian decompositions, to give a full classification of the total chromatic number of the direct product of complete graphs $K_m \times K_n$.

Next lemma presents a sufficient condition on the graph G for the direct
 255 product $G \times K_2$ to be Type 1, which leads to a corollary that answers Question 1 positively when one factor is Type 1 and the other is bipartite.

Lemma 1. *If G is Type 1, then $G \times K_2$ is Type 1.*

Proof. Let $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ be a total coloring of a
 Type 1 graph G . Consider one of the projections that define the direct product
 260 $p : V(G \times K_2) \cup E(G \times K_2) \rightarrow V(G) \cup E(G)$ and the composite function $f \circ p : V(G \times K_2) \cup E(G \times K_2) \rightarrow \{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$. Observe that $\Delta(G \times K_2) = \Delta(G)$.

First note that, as before, $f \circ p$, when restricted to the vertices of $G \times K_2$, is a vertex coloring. Second, let $(x, i)(y, j) \in E(G \times K_2)$ and suppose this edge $(x, i)(y, j)$ and its endvertex (x, i) have the same color, that is $(f \circ p)((x, i)(y, j)) = (f \circ p)(x, i)$. Thus, $f(xy) = f(x)$, a contradiction since x is an endvertex of the edge xy in G . Finally, let $(x, i)(y, j)$ and $(y, j)(z, k)$ be two adjacent edges of $G \times K_2$ and suppose that these edges have the same colors, that is $(f \circ p)((x, i)(y, j)) = (f \circ p)((y, j)(z, k))$. Thus, $f(xy) = f(yz)$, a contradiction

since xy and yz are adjacent edges in G . □

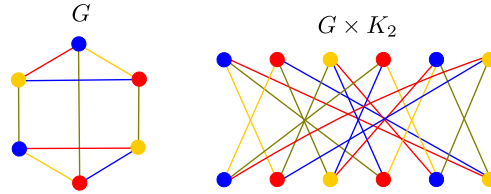


Figure 11: A 4-total coloring of $G \times K_2$ obtained by a 4-total coloring of G .

270 Figure 11 presents a 4-total coloring of $G \times K_2$, where G is the Cartesian product $G = C_3 \square K_2$. The above lemma along with the above mentioned result of Mackeigan and Janssen [12] give the following corollary:

Corollary 1. *If G is Type 1 and H is bipartite, then $G \times H$ is Type 1.*

We remark that $C_3 \times C_4$ is Type 1, which agrees with Corollary 1, as C_3 is Type 1 and C_4 is a bipartite graph. We remark that $C_m \times K_2$ is Type 1 if
 275 and only if m is multiple of 3. The converse of Corollary 1 is not true, since there are many examples of a Type 2 graph G such that the direct product of $G \times K_2$ is Type 1. For instance, K_m for even m is Type 2, and yet $K_m \times K_2$ is the complete bipartite graph $K_{m,m}$ minus a perfect matching, known to be
 280 Type 1 for $m \geq 4$ [7].

Also, for two complete bipartite graphs $K_{m,m'}$ and $K_{n,n'}$, the direct product $K_{m,m'} \times K_{n,n'}$ is Type 2 if and only if $m = m'$ and $n = n'$. Otherwise, it is Type 1. Indeed, note that if $m \neq m'$ or $n \neq n'$, then $K_{m,m'} \times K_{n,n'}$ is Type 1, by Corollary 1 since it is known that $K_{m,m'}$ is Type 1 [7]. On the other hand,
 285 if $m = m'$ and $n = n'$, the graph $K_{m,m} \times K_{n,n}$ is isomorphic to two copies of $K_{mn,mn}$ [16]. It is known that $K_{mn,mn}$ is Type 2 [7] and thus also $K_{m,m} \times K_{n,n}$.

If G is bipartite and Type 1, then Corollary 1 implies that $G \times G$ is Type 1 as well. In this context, we conclude by proposing the property for a general Type 1 graph:

290 **Question 2.** *Given a Type 1 graph G , is the direct product $G \times G$ Type 1 as well?*

Acknowledgements

This work is partially supported by the Brazilian agencies CNPq (Grant numbers: 302823/2016-6, 407635/2018-1 and 313797/2020-0) and FAPERJ (Grant numbers: CNE E-26/202.793/2017 and ARC E-26/010.002674/2019).

References

- [1] V. G. Vizing, On an estimate of the chromatic class of a p -graph, *Diskret. Analiz.* 3 (1964) 25–30.
- [2] M. Behzad, G. Chartrand, J. K. Cooper Jr, The colour numbers of complete graphs, *J. London Math. Soc.* 42 (1967) 226–228.
- [3] A. V. Kostochka, The total coloring of a multigraph with maximal degree 4, *Discrete Math.* 17(2) (1977) 161–163.
- [4] C. J. H. McDiarmid, A. Sánchez-Arroyo, Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard, *Discrete Math.* 124 (1994) 155–162.
- [5] Y. Shitov, Counterexamples to Hedetniemi’s conjecture, *Ann. Math.* 190 (2) (2019) 663–667.
- [6] M. M. M. Jaradat, On the Anderson–Lipman conjecture and some related problems, *Discrete Math.* 297 (1-3) (2005) 167–173.
- [7] H. P. Yap, *Total Colourings of Graphs*, Vol. 1623, *Lect. Notes Math.*, Springer, 1996.
- [8] K. Prnaver, B. Zmazek, On total chromatic number of direct product graphs, *J. Appl. Math. Comput.* 33(1-2) (2010) 449–457.
- [9] D. Castonguay, C. M. H. de Figueiredo, L. A. B. Kowada, C. S. R. Patrão, D. Sasaki, M. Valencia-Pabon, On total coloring the direct product of complete graphs, *Procedia Comput. Sci.*, LAGOS 2021 proceedings, accepted for publication.

- [10] C. Tong, L. Xiaohui, Y. Yuansheng, L. Zhihe, Equitable total coloring of $C_m \square C_n$, *Discret. Appl. Math.* 157 (4) (2009) 596–601.
- [11] J. Geetha, K. Somasundaram, Total Colorings of Product Graphs, *Graphs Comb.* 34 (2018) 339–347. 320
- [12] K. Mackeigan, J. Janssen, Total colourings of direct product graphs, *Contrib. to Discret. Math.* 15 (1) (2020) 67–71.
- [13] B. Zmazek, J. Zerovnik, Behzad-Vizing conjecture and Cartesian-product graphs, *Appl. Math. Lett.* 15 (6) (2002) 781–784.
- [14] A. G. Chetwynd, A. J. W. Hilton, C. Zhao, The total chromatic number of graphs of high minimum degree, *J. London Math. Soc.* 44 (1991) 193–202. 325
- [15] K. H. Chew, Total chromatic number of regular graphs of odd order and high degree, *Discrete Math.* 154 (1996) 41–51.
- [16] P. K. Jha, Hamiltonian decompositions of products of cycles, *Indian J. Pure Appl. Math.* 23 (10) (1992) 723–729. 330