



O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS E COLORAÇÃO TOTAL PARA GRAFOS SPLIT 2-ADMISSÍVEIS

Diego Amaro Ferraz da Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Sulamita Klein
Fernanda Vieira Dias Couto

Rio de Janeiro
Março de 2022

O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS E COLORAÇÃO TOTAL
PARA GRAFOS SPLIT 2-ADMISSÍVEIS

Diego Amaro Ferraz da Costa

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E
COMPUTAÇÃO.

Orientadores: Sulamita Klein
Fernanda Vieira Dias Couto

Aprovada por: Prof. Sulamita Klein
Prof. Fernanda Vieira Dias Couto
Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Prof. Luís Felipe Ignácio Cunha
Prof. Sheila Moraes de Almeida

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2022

Costa, Diego Amaro Ferraz da

O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para grafos split 2-admissíveis /Diego Amaro Ferraz da Costa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2022.

XI, 46 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Sulamita Klein

Fernanda Vieira Dias Couto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 43 – 46.

1. Coloração de Arestas. 2. Coloração Total.
3. t -admissibilidade. I. Klein, Sulamita *et al.*
- II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Todos fazemos escolhas; mas no fim, nossas escolhas nos fazem.

Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer a Deus por ter me dado a oportunidade de cursar este mestrado e me concedido forças e saúde para concluí-lo durante um período tão delicado que estamos vivendo desde o início de 2019, que é a pandemia do COVID-19.

Ao meu saudoso pai José Amaro (*in memoriam*), que durante toda a sua estadia entre nós nunca mediu esforços para me proporcionar a melhor educação possível, sempre me inspirando com palavras de ânimo e incentivo. Você sempre será meu maior exemplo a seguir. Embora tenha partido cedo, durante a minha graduação, ainda conseguiu acompanhar algumas de minhas conquistas. Sei que ficaria orgulhoso com o término deste ciclo de minha vida.

A minha mãe Elane que, na ausência de meu pai, se mostrou mais dedicada do que nunca em saber como eu estava a cada dia e no que ela podia me ajudar para que eu me sentisse melhor. Em inúmeras vezes durante o mestrado entendeu que as tarefas que eu estava realizando eram tão complexas e desgastantes que se oferecia para tratar de alguns assuntos domésticos e gerais para me proporcionar mais tempo de estudo. Obrigado por me dar forças mesmo nos momentos em que eu pensei desistir.

A minha namorada Patricia, que conheci no fim de minha graduação em 2019 e foi uma grande incentivadora de tudo que fiz desde então. Me dando coragem para me inscrever em processos seletivos, se oferecendo para ensaiar apresentações comigo e sempre preocupada em como estava o andar do meu mestrado. Você, com certeza, foi de suma importância como ajudadora em todas as conquistas recentes da minha vida. Obrigado por me fazer tão feliz, sendo a melhor namorada que eu poderia sonhar em ter ao meu lado.

A todos os familiares e amigos: meus avós, tios, primos e amigos de infância. Em especial minha vó Maria da Glória (*in memoriam*) que nos deixou durante essa caminhada do mestrado. Mesmo estando bem debilitada sempre me perguntava como eu estava indo nos estudos. Aos demais familiares, também agradeço a curiosidade em saber se tudo estava indo bem durante estes dois anos. A minha prima Jéssica que lá atrás no início de minha graduação, me ensinou um pouco sobre programação e foi essencial para eu não desanimar do curso. Aquela aula me fez amar o que faço

hoje em dia!

Aos colegas de mestrado do PESC, embora tenhamos tido pouco contato por conta da pandemia, realizamos boas discussões e estudos em conjunto durante estes dois anos.

Às Professoras Sulamita Klein e Fernanda Couto, minhas orientadoras, que sempre apostaram no sucesso deste trabalho e foram grandes fontes de conhecimento e inspiração. Sou um grande admirador do trabalho das duas. Obrigado pela dedicação durante toda a orientação. Manifesto aqui também minha profunda gratidão à professora Fernanda Couto que lá no fim de 2019, durante a elaboração de meu TCC, me falou sobre o PESC e me incentivou a realizar a inscrição no processo seletivo.

Aos Professores Celina, Luís Felipe e Sheila, por aceitarem fazer parte desta banca, reunindo grande valor a este trabalho. Também manifesto minha gratidão à professora Celina por todo o conhecimento sobre coloração passado durante as disciplinas do mestrado. Suas aulas me fizeram gostar ainda mais do tema e me aprofundar nesta área de pesquisa.

Agradeço a CAPES e a FAPERJ pelo apoio financeiro dado a mim, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS E COLORAÇÃO TOTAL PARA GRAFOS SPLIT 2-ADMISSÍVEIS

Diego Amaro Ferraz da Costa

Março/2022

Orientadores: Sulamita Klein

Fernanda Vieira Dias Couto

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma *coloração de arestas* de G é uma atribuição de cores às arestas de G . Uma *coloração total* de um grafo G é uma atribuição de cores que é realizada simultaneamente às arestas e aos vértices de G . Uma coloração é *própria*, quando cores distintas são atribuídas a elementos adjacentes e incidentes. O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS e o PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL têm como objetivo realizar a coloração própria de arestas/total de um grafo de modo que o número de cores utilizado seja minimizado. De maneira geral, estes problemas são NP-difíceis, o que incentiva a busca por classes onde seja possível resolvê-los em tempo polinomial. A classe dos *grafos split* é um exemplo de classe onde ambas as variantes permanecem em aberto. Chamamos de *split* um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente. Outro problema desafiador já estudado no contexto dos grafos *split*, é o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE. Dado um grafo conexo G , uma *árvore t -geradora* de G é uma árvore geradora de G na qual a distância entre quaisquer dois vértices vizinhos em G é no máximo t . Se G admite tal árvore, G é dito t -admissível. Além disso, t é o *fator de extensão* associado à árvore. O menor fator de extensão dentre todas as árvores geradoras de G é o *índice de extensão de G* , denotado por $\sigma(G)$. O PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE consiste em determinar o índice de extensão de um grafo. Sabe-se que os grafos *split* são 3-admissíveis e que podemos particioná-los em três subclasses: grafos *split* com $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ ou $\sigma = 3$. Sob esta nova perspectiva, classificamos completamente a classe dos grafos *split* com $\sigma = 2$ com respeito à COLORAÇÃO DE ARESTAS e COLORAÇÃO TOTAL, restando apenas o estudo da subclasse com $\sigma = 3$ para finalizar a classificação dos grafos *split* em ambos os problemas de coloração.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THE EDGE COLORING PROBLEM AND TOTAL COLORING PROBLEM
FOR 2-ADMISSIBLE SPLIT GRAPHS

Diego Amaro Ferraz da Costa

March/2022

Advisors: Sulamita Klein

Fernanda Vieira Dias Couto

Department: Systems Engineering and Computer Science

Given a graph $G = (V, E)$, an *edge coloring* of G is a color assignment on the edges of G . A *total coloring* of a graph G is a color assignment which is performed simultaneously on the edges and vertices of G . A coloring is *proper*, when distinct colors are assigned to adjacent and incident elements. The EDGE COLORING PROBLEM and the TOTAL COLORING PROBLEM have the objective of performing an edge/total proper coloring of a graph in order that the number of colors used is minimized. In general, these problems are NP-hard, which encourages the search for classes in which is possible to solve them in polynomial time. The class of *split graphs* is an example of a class where both variants remain open. A split graph is a graph whose vertex set can be partitioned into a clique and an independent set. Another challenging problem already studied in the context of split graphs, is the t -ADMISSIBILITY PROBLEM. Given a connected graph G , a *spanning tree* T of G is a spanning tree of G in which the distance between any two adjacent vertices in G is at most t . If G admits such a tree, G is said to be t -admissible. Furthermore, t is the *stretch factor* of the tree. The smallest stretch factor among all spanning trees of G is the *stretch index* of G , denoted by $\sigma(G)$. The t -ADMISSIBILITY PROBLEM aims to determine the stretch index of a graph. It is known that split graphs are 3-admissible and that we can partition them into three subclasses: split graphs with $\sigma(G) = 1$, $\sigma(G) = 2$ or $\sigma(G) = 3$. Under this new perspective, we completely classify the class of split graphs with $\sigma(G) = 2$ with respect to EDGE COLORING and TOTAL COLORING, remaining only the study of the subclass with $\sigma(G) = 3$ to finish the classification of split graphs in both coloring problems.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Definições Preliminares	3
2 Problemas de Coloração	6
2.1 Coloração de Arestas	7
2.2 Coloração total	9
2.3 Grafos split nos problemas de coloração	11
2.3.1 Resultados Gerais no Problema da Classificação	11
2.3.2 Resultados de Grafos Split no Problema da Classificação	14
2.3.3 Resultados de Grafos Split em Coloração Total	17
3 O Problema da t-admissibilidade	19
3.1 Resultados Preliminares	19
3.2 Grafos split no estudo da t -admissibilidade	24
4 O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para grafos split 2-admissíveis	29
4.1 Índice Cromático de grafos split 2-admissíveis	31
4.2 Número Cromático Total de grafos split 2-admissíveis	36
5 Conclusão e Trabalhos Futuros	41
Referências Bibliográficas	43

Lista de Figuras

1.1	Grafo G e seus componentes 3-conexos.	5
2.1	Grafo Touro cujo grau máximo é três e uma atribuição de cores ao seu conjunto de arestas. Para tal grafo, $\chi'(G) = 3$	7
2.2	(a) Grafo roda W_5 . $\Delta(W_5) = \chi'(W_5) = 4$, ou seja, W_5 é Classe 1. (b) Grafo completo K_3 . $\Delta(K_3) + 1 = \chi'(K_3)$, ou seja, K_3 é Classe 2.	8
2.3	Grafo Cubo e sua coloração total ótima. Para este exemplo, $\chi''(G) = 4$. 10	
2.4	Grafo completo K_5 cujo grau máximo é 4 e 5 cores são necessárias para colorir propriamente seu conjunto de arestas; e grafo completo K_5 a menos de duas arestas. O grau máximo é mantido, mas apenas 4 cores são necessárias.	13
2.5	Grafo G que é subgrafo-sobrecarregado, mas não é vizinhança-sobrecarregado. Neste caso, o subgrafo que atende à Definição 2.1.2 é o próprio grafo G	15
2.6	Um grafo indiferença com duas cliques maximais. Uma com 6 vértices e outra com 4. Note que o vértice x aparece em ambas as cliques e toda a sua vizinhança (assim como a de todos os vértices) aparece em sequência na ordem estabelecida, assim respeitando a definição de ordem indiferença.	16
2.7	Uma família de intervalos e o grafo de interseção desta família de intervalos, ou seja, um grafo de intervalo.	16
2.8	(a) Grafo G de comparabilidade. (b) Uma orientação transitiva das arestas de G	17
3.1	Grafo/Árvore com 5 vértices e 4 arestas.	21
3.2	(a) Grafo $G = C_6$. (b) A menos de isomorfismo, a única árvore geradora de G	22
3.3	(a) Grafo completo $G = K_5$. (b) Uma árvore 2-geradora de G	22
3.4	(a) Grafo G . (b) Uma árvore 2-geradora de G	23
3.5	Grafo G e uma árvore 2-geradora de G	23
3.6	Grafo split e sua árvore 3-geradora.	25

3.7	(a) Grafo split G_1 2-admissível. (b) Uma árvore 2-geradora de G_1 . (c) Grafo split G_2 3-admissível. (d) Uma árvore 3-geradora de G_2	26
3.8	Particionamento da classe dos grafos t -admissíveis com respeito aos valores de $t = 1, 2$ e 3 voltados para a classe dos grafos split.	28
4.1	Grafo $G = ((X, Y), E)$ split 2-admissível cujo grau máximo é par e todos os vértices de Y apresentam grau fora do intervalo $\left\lceil \frac{ X }{2} \right\rceil \leq d(v) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$	30
4.2	(a) Grafo split-indiferença 2-admissível. (b) Grafo split-indiferença 3-admissível. (c) Grafo split-intervalo 2-admissível. (d) Grafo split-intervalo 3-admissível. (e) Grafo split-comparabilidade 2-admissível. (f) Grafo split-comparabilidade 3-admissível.	30
4.3	Dois grafos split 2-admissíveis que não são de comparabilidade, nem de intervalo e nem indiferença.	31
4.4	(a) Grafo split G 2-admissível. (b) Fase 1: Obtenção do subgrafo $H = G[N[v]]$. (c) Fase 1: Coloração das arestas de H . (d) Fase 2: Obtenção do subgrafo H' . (e) Fase 2: Coloração das arestas de H' . (f) Fase 3: Retorno ao grafo G . (g) Fase 3: Coloração das arestas de G . 33	
4.5	(a) Grafo split G 2-admissível. (b) Fase 1: Obtenção do subgrafo $H = G[N[v]]$. (c) Fase 1: Coloração das arestas de H . (d) Fase 2: Obtenção do subgrafo H' . (e) Fase 2: Coloração das arestas de H' . (f) Fase 3: Retorno ao grafo G . (g) Fase 3: Coloração das arestas de G . (g) Fase 4: Coloração dos vértices pendentos adicionados durante as Fases 1 e 2.	38
5.1	Diagrama que mostra o que se sabe sobre a coloração de arestas de grafos split e subclasses relacionadas. A região que estudamos neste trabalho é a região delimitada pela circunferência vermelha. As regiões marcadas com um ponto de interrogação são regiões que testes iniciais demonstraram ser vazias.	42

Capítulo 1

Introdução

Um *grafo* é uma poderosa ferramenta de modelagem que representa relações e pode ser usado para representar diversas situações reais, traduzindo tais situações para uma linguagem matemática, assim nos proporcionando uma melhor visão do problema sobre o qual estamos interessados. Grafos são formados por um conjunto finito de *vértices* V e um conjunto E de pares não-ordenados de vértices, denominados *arestas*. Podemos modelar com grafos, por exemplo, relações de amizade em uma rede social. Neste caso, os usuários da rede seriam os vértices e a existência de uma aresta indica a relação de amizade entre os usuários representados. Outros exemplos de situações que podem, inclusive, impactar no funcionamento da sociedade são o roteamento de veículos, rotas aéreas, melhor rota, mapeamento de DNA dentre outros [46]. Note que, algumas vezes, os grafos são utilizados para representar situações de conflito, como por exemplo, no problema de escalonamento de tarefas e no clássico problema da coloração.

Uma coloração em um grafo é uma atribuição de cores ou rótulos aos seus elementos estruturais. Esta atribuição, por sua vez, pode ser aos vértices de G [11], às arestas de G [48], a ambos estes elementos simultaneamente [49], etc. Quando, nesta atribuição, elementos adjacentes ou incidentes devem receber cores distintas, esta coloração é dita própria. Assim, uma k -coloração própria é uma coloração própria de elementos do grafo que utiliza k cores e o grafo é dito k -colorível. Em uma coloração própria de vértices, por exemplo, vértices adjacentes recebem cores distintas. Nos problemas de coloração busca-se minimizar o número de cores atribuídas, ou seja, determinar o menor k para o qual o grafo seja k -colorível. No PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE VÉRTICES, este número é chamado de *número cromático* e é denotado por $\chi(G)$; para o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS, este número é chamado de *índice cromático* e é denotado por $\chi'(G)$. Quando a proposta é colorir propriamente vértices e arestas, simultaneamente, de um grafo, estamos lidando com uma variante do problema da coloração denominada PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL. Neste caso, o menor número de cores é chamado de *número cromático total*

e é denotado por $\chi''(G)$. Todos estes problemas são extremamente desafiadores e provados NP-difíceis ([24], [31], [47]). Por esta razão, a busca de pesquisadores por classes de grafos em que seja possível resolver eficientemente tais problemas segue desde suas formulações. A classe dos grafos split é estudada em muitos problemas distintos ([7], [35], [15]). Um grafo é split se, e somente se, pode ter seu conjunto de vértices particionado em uma clique e um conjunto independente. Enquanto que, muitos problemas restritos a esta classe são eficientes ([40], [25], [35]), os problemas da coloração de arestas e coloração total permanecem em aberto para os grafos split. A literatura conta com vários resultados que influenciam (direta ou indiretamente) a coloração de arestas de grafos split ([51], [43], [15], [1]) e também a coloração total de grafos split ([15], [29]). Além disso o estudo de subclasses de split também é alvo de alguns pesquisadores ([13], [39], [26]).

Neste trabalho, seguimos a linha do estudo do problema da coloração de arestas e total em uma subclasse de split, definida através da restrição de um outro problema, em geral bastante desafiador, à classe dos grafos split: o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE. Proposto por Cai e Corneil em 1995 [12], o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE, também conhecido como o PROBLEMA DA ÁRVORE GERADORA DE EXTENSÃO MÍNIMA, tem como objetivo a determinação do menor t tal que um dado grafo G admita uma árvore t -geradora, isto é, uma árvore geradora T cuja maior distância entre quaisquer pares de vértices adjacentes em G é no máximo t . Se G admite uma árvore t -geradora então, G é dito t -admissível, onde t é o *fator de extensão* associado à árvore. O menor fator de extensão dentre todas as árvores geradoras de G é o *índice de extensão de G* , denotado por $\sigma(G)$. Alguns estudos prévios motivaram a criação do PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE, como os trabalhos de Peleg e Ullman [42] em 1987, e Chew em 1986 [18]. Saber se um grafo G é 1-admissível pode ser feito em tempo polinomial, visto que para tal condição, o grafo deve ser uma árvore. Também é fácil saber se um grafo G é 2-admissível. Além disso, para valores de $t \geq 4$, o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE é NP-completo. Todos estes resultados foram mostrados por Cai e Corneil [12]. Porém, há mais de 25 anos, decidir se $\sigma(G)$ de grafo qualquer é 3 é um problema em aberto, e por esta razão, é objeto de estudo de alguns pesquisadores ([4], [23], [41]). Numa tentativa de resolver o PROBLEMA DA 3-ADMISSIBILIDADE, muitos estudos concentram-se na obtenção de classes 3-admissíveis, que é o caso dos grafos split ([41], [19]).

O problema da t -admissibilidade para grafos split particiona a classe em 3 sub-classes: grafos split com $\sigma(G) = 1$ (bi-estrelas, i.e, árvores T com n vértices e pelo menos $n - 2$ folhas), $\sigma(G) = 2$ e $\sigma(G) = 3$. Da literatura [33], sabemos colorir bi-estrelas, em ambas as variantes (arestas e total). Com isso, para classificar completamente os problemas da coloração de arestas e da coloração total para grafos split, resta-nos, portanto, o estudo dos split com $\sigma(G) = 2$ e $\sigma(G) = 3$. Neste tra-

balho, classificamos completamente os split com $\sigma(G) = 2$ com respeito à coloração de arestas e coloração total.

Este texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, além desta breve introdução, apresentamos alguns conceitos preliminares que serão utilizados no decorrer do trabalho; no Capítulo 2 apresentamos formalmente o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS e o PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL e listamos resultados existentes na literatura para os grafos split nos dois problemas; no Capítulo 3 definimos formalmente o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE e mostramos que o índice de extensão de um grafo split G é tal que, $1 \leq \sigma(G) \leq 3$. No Capítulo 4, apresentamos nossos resultados, enunciando as caracterizações do índice cromático e do número cromático total de grafos split 2-admissíveis. Por fim, no Capítulo 5, discutimos sobre as contribuições deste trabalho, as considerações finais e diretrizes futuras para a pesquisa.

1.1 Definições Preliminares

Nesta seção, definiremos alguns conceitos gerais que serão referenciados no restante do trabalho ([9], [50]).

Um *grafo* $G = (V, E)$ é uma estrutura matemática que é formada por um conjunto finito não vazio de vértices V e um multiconjunto E de pares não-ordenados de vértices, denominados arestas. O *grau* de um vértice v é o número de arestas incidentes a v e é denotado por $d(v)$. Caso o grau de um vértice v seja igual a 1, v é chamado de *vértice pendente*.

Um *passeio* (ou *percurso*) em um grafo, é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e termina com um vértice. Um passeio é *fechado*, se tem pelo menos duas arestas e seu primeiro vértice coincide com o último. Um *caminho* é um passeio sem repetição de vértices. Um *ciclo* é um passeio fechado com pelo menos três arestas e tal que todos os seus vértices com exceção do primeiro e do último são distintos. Um *caminho* sem cordas com n vértices é denotado por P_n , onde uma *corda* é uma aresta entre dois vértices não consecutivos do caminho. Um grafo é *conexo* se existir caminho entre qualquer par de vértices. A *distância* entre dois vértices é o comprimento do menor caminho entre os mesmos. O *diâmetro* de um grafo G é a maior distância entre qualquer par de vértices de G . O *grafo ciclo* C_n é um grafo que consiste de um único ciclo, i.e, um ciclo sem cordas. Uma *corda de ciclo* é uma aresta entre dois vértices não consecutivos do ciclo.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se todo vértice de H é vértice de G e toda aresta de H é aresta de G . Um subgrafo H de um grafo G é *gerador* se contém todos os vértices de G . Um subgrafo H de um grafo G é *induzido* por um conjunto de vértices, se, para qualquer par de vértices u e v de H , uv é uma aresta de H se,

e somente se, uv é uma aresta de G . Um subgrafo H de um grafo G é *induzido* por um conjunto de arestas E' , se $E(H) = E'$ e todo vértice de H é extremo de alguma aresta de E' . A *cintura* $g(G)$ de um grafo G é o tamanho do menor ciclo induzido deste grafo. Dizemos que um grafo G tem *cintura fina* quando a mesma é menor ou igual a 4, caso contrário, o grafo tem *cintura gorda*. Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico. Uma *bi-estrela* é um tipo especial de árvore com n vértices e pelo menos $n-2$ vértices pendentos. Uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo gerador T de G , que é em particular, uma árvore. Dizemos que um vértice u é *vizinho* de um vértice v (ou u é *adjacente* a v) se, uv é uma aresta do grafo. A *vizinhança* de um vértice $u \in V$ é o conjunto $N(u) = \{v \in V | uv \in E\}$ e sua *vizinhança fechada* é $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Dois vértices u e v são *gêmeos* em G se $N(u) = N(v)$. Se $uv \in E(G)$, u e v são ditos gêmeos verdadeiros, caso contrário, falsos. Um vértice u de um grafo G é *universal* quando é adjacente a todos os demais vértices de G .

Um *grafo nulo* é um grafo sem arestas. Um *grafo trivial* é um grafo com apenas um vértice. Um *grafo completo* é um grafo em que todo vértice é universal. O grafo completo de n vértices é denotado por K_n . O *grafo complemento* de um grafo G é o grafo \overline{G} com o conjunto de vértices igual ao de G e onde dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles não são adjacentes em G .

Uma *clique* de um grafo G é um subconjunto de vértices de V que induz um grafo completo. Um *conjunto independente* de vértices de um grafo G é um subconjunto de vértices de V que induz um grafo nulo. Podemos ainda citar uma variante do conjunto independente para arestas chamada de *emparelhamento*. Um emparelhamento num grafo G é um conjunto M de arestas que satisfaz: todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M . Além disso, M é dito máximo se não existe outro emparelhamento M' tal que $|M'| > |M|$. Dizemos que S' é *máximo* (resp. *mínimo*) em relação a uma certa propriedade P se, S' satisfaz P e para todo subconjunto S'' de S tal que S'' satisfaz P , temos $|S''| \leq |S'|$ (resp. $|S''| \geq |S'|$). Além disso, dizemos que S' é *maximal* (resp. *minimal*) em relação a uma certa propriedade P se, S' satisfaz P e não existe subconjunto S'' de S tal que S'' satisfaz P e contenha S' (resp. esteja contido em S').

Um *grafo cordal* é um grafo em que todos os ciclos com pelo menos 4 vértices possuem uma corda. Um *grafo split* é um grafo cujo conjunto de vértices V pode ser particionado em uma clique X e um conjunto independente Y . Neste trabalho vamos denotar um grafo split G por $G = ((X, Y), E)$ e, sempre consideraremos X como clique maximal, ou seja, não existe uma outra clique X' tal que $X \subset X'$.

Em um grafo conexo G , não completo, um *corte de vértices* é um conjunto de vértices cuja remoção torna o grafo G desconexo. Um corte de vértices constituído de apenas um vértice é chamado *articulação*. Um grafo sem articulações é denotado como *bloco*. Definimos $\kappa(G)$ o tamanho do menor corte de vértices de G . Um grafo

G é k -conexo em vértices quando G é conexo e $\kappa \geq k$. Além disso, ainda dentro do contexto de conectividade de grafos, dado um grafo conexo G , os *componentes 3-conexos em vértices* de G são seus subgrafos maximais 3-conexos em vértices, suas pontes (subgrafos maximais isomorfos ao K_2) e seus subgrafos maximais isomorfos ao K_3 .

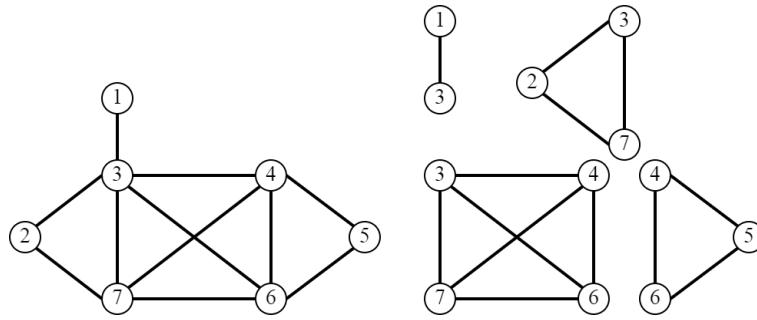


Figura 1.1: Grafo G e seus componentes 3-conexos.

Capítulo 2

Problemas de Coloração

A origem dos problemas de coloração em grafos data do século XIX e se deu por conta do que hoje é conhecido como o PROBLEMA DAS QUATRO CORES. Esta história se inicia em 1852 com o matemático, e botânico sul-africano Francis Guthrie. Enquanto fazia a coloração de alguns mapas dos condados da Inglaterra, Francis observou que talvez fosse possível colorir sempre um mapa utilizando apenas quatro cores, de modo que regiões vizinhas não recebessem a mesma cor. Francis então compartilhou sua teoria com seu irmão Frederick, que por sua vez formalizou a conjectura das quatro cores e a apresentou ao seu professor, um famoso matemático chamado Augustus De Morgan. Augustus também ficou muito empolgado com tal problema e o disseminou entre os membros da academia da época. Foi então que, em 1879 (exatamente 27 anos depois das observações de Francis Guthrie), surge a primeira prova desta conjectura apresentada pelo matemático inglês Alfred Kempe. Esta prova viria ser aceita pelos próximos dez anos até que em 1890, um erro foi encontrado em tal demonstração. E mais uma vez a conjectura das quatro cores ficou em aberto, desafiando os pesquisadores da época. Décadas foram se passando e ainda não existia uma nova prova para a conjectura, o trabalho para encontrar esta demonstração até rendeu outros resultados interessantes como o teorema das cinco cores (que consiste em uma versão análoga ao teorema das quatro cores em que temos a permissão de utilizar uma quinta cor na coloração dos mapas). Até que, em 1976 a conjectura das quatro cores foi provada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken [2], dois matemáticos da Universidade de Illinois. Parte desta prova usou o computador, e por isso não foi reconhecida por uma parcela grande da comunidade matemática. Em 1994 surgiu outra prova apresentada por Robertson et al.[44] que embora também utilizasse o computador, mas em menor escala, foi melhor aceita pela comunidade. Mas a questão de construir uma demonstração totalmente combinatória que não necessite do auxílio de computadores continua em aberto.

O PROBLEMA DAS QUATRO CORES pode ser visto como o problema que deu origem ao universo dos problemas de coloração e de inúmeras variações que surgiram

e são estudadas até o dia de hoje. Como por exemplo, os PROBLEMAS DE COLORAÇÃO de vértices [11], de arestas [48], total [49], equilibrada [16], de cliques [37], etc. Neste trabalho abordaremos duas destas variações: a COLORAÇÃO DE ARESTAS E A COLORAÇÃO TOTAL. Ainda neste capítulo veremos mais sobre ambos os problemas.

2.1 Coloração de Arestas

A coloração de arestas de um grafo $G = (V, E)$ consiste em atribuir cores ao conjunto de arestas E de G . Esta coloração é denominada própria, se para qualquer par de arestas adjacentes (incidentes a um mesmo vértice), as cores destas duas arestas são diferentes. Se G admite uma coloração própria com k cores, G é dito k -colorível. O PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS consiste em, dado um grafo G de entrada, obter o menor número de cores para colorir seu conjunto de arestas propriamente; este número é chamado de índice cromático de G e é denotado por $\chi'(G)$.

PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS:

Entrada: um grafo G e um inteiro positivo k .

Pergunta: G é k -colorível propriamente?

A partir da definição de uma coloração própria, podemos concluir imediatamente que o grau máximo de G ($\Delta(G)$) é um limite inferior para o índice cromático, ou seja, para qualquer grafo G : $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. A figura abaixo ilustra um grafo G e uma atribuição de cores própria ao seu conjunto de arestas.

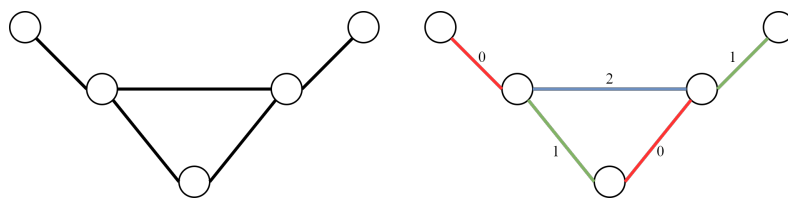


Figura 2.1: Grafo Touro cujo grau máximo é três e uma atribuição de cores ao seu conjunto de arestas. Para tal grafo, $\chi'(G) = 3$.

Conforme dito acima, sabemos, intuitivamente, qual é o limite inferior para o índice cromático de um grafo G , mas junto com este resultado, pode surgir o seguinte questionamento: e quanto ao limite superior para $\chi'(G)$? Podemos pensar em $|E(G)|$ como um limite superior intuitivo, mas claramente esse limite não é justo. A pergunta que surge então é se um limite bem mais justo é conhecido. E a resposta para tal pergunta é sim, e este é um resultado extremamente importante e conhecido

da teoria dos grafos e foi enunciado em 1964 por Vizing. Este resultado é conhecido como Teorema de Vizing:

Teorema 2.1.1. (Teorema de Vizing, 1964) [48] *Seja G um grafo simples, então $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Neste trabalho, Vizing demonstra que o índice cromático de qualquer grafo G só pode ser um de dois valores: o valor do grau máximo de G ou o valor do grau máximo de G acrescido de uma unidade. Em outras palavras, este resultado dividiu todo o universo dos grafos em duas classes no contexto da coloração de arestas: a classe dos grafos que admitem uma coloração de arestas própria utilizando apenas $\Delta(G)$ cores e uma segunda que necessita de $\Delta(G) + 1$ cores para colorir todo o seu conjunto de arestas propriamente. Os grafos que podem ser coloridos com $\Delta(G)$ cores são chamados *grafos Classe 1*, enquanto que os grafos que precisam de $\Delta(G) + 1$ cores são chamados de *grafos Classe 2*. O que é extremamente interessante é que, mesmo existindo apenas duas possibilidades para o valor do índice cromático de um grafo G , o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS ainda é provado ser NP-completo. Holyer mostrou em 1981 [31] que classificar grafos como Classe 1 ou Classe 2 é um problema NP-completo. Desde então, o problema passou a ser conhecido como o PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO. Formalmente temos a seguinte definição:

PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO:

Entrada: um grafo G .

Pergunta: G é Classe 1?

A figura abaixo ilustra um exemplo de um grafo Classe 1 e um exemplo de um grafo Classe 2.

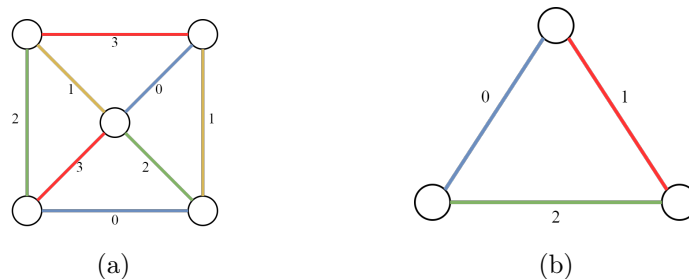


Figura 2.2: (a) Grafo roda W_5 . $\Delta(W_5) = \chi'(W_5) = 4$, ou seja, W_5 é Classe 1. (b) Grafo completo K_3 . $\Delta(K_3) + 1 = \chi'(K_3)$, ou seja, K_3 é Classe 2.

Uma definição muito recorrente na literatura e que também será amplamente utilizada neste trabalho é a definição de estruturas sobrecarregadas. Para apresen-

tarmos formalmente esta definição, precisamos antes de tudo, responder a seguinte pergunta: qual o número máximo de arestas que podemos colorir com uma mesma cor em um grafo G ? Pela definição de coloração própria de arestas, sabemos que duas arestas podem receber a mesma cor se, e somente se, não possuem vértices em comum. Logo, um conjunto de arestas que pode ser colorido com uma única cor é um emparelhamento no grafo. Conseqüentemente, ao tomarmos um emparelhamento máximo em um grafo, determinamos o número máximo de arestas que podem ser coloridas utilizando uma mesma cor. Portanto temos que, o maior número de arestas que podem ser coloridas com uma mesma cor em um grafo $G = (V, E)$ é dado por $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, onde $n = |V(G)|$. A partir desta dedução, podemos dizer que o número máximo de arestas que podem ser coloridas com $\Delta(G)$ cores é $\Delta(G) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Entretanto, existem grafos que possuem um número de arestas maior que o dado por esta expressão. Estes grafos são chamados de grafos sobrecarregados. Para estes grafos, $\Delta(G)$ cores não são suficientes para colorir seu conjunto de arestas propriamente, ou seja, eles precisam de $\Delta(G) + 1$ cores e portanto, são grafos Classe 2. Mais formalmente, temos:

Definição 2.1.1. *Um grafo $G = (V, E)$ é dito sobrecarregado quando $|E| > \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, onde $n = |V|$. Além disso, quando $|E| = \Delta(G) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, G é dito saturado.*

Existem ainda mais dois tipos de estruturas sobrecarregadas: subgrafo-sobrecarregado e vizinhança-sobrecarregado. Estas definições partem da definição de grafos sobrecarregados e podem ser melhor entendidas a seguir:

Definição 2.1.2. *Um grafo $G = (V, E)$ é dito subgrafo-sobrecarregado se existe um subgrafo H de G tal que $\Delta(H) = \Delta(G)$ e H é sobrecarregado. Além disso, se H é induzido por um vértice v tal que $d(v) = \Delta(G)$ e por todos os seus vizinhos, então G é dito vizinhança-sobrecarregado.*

Com base neste fato, podemos dizer que qualquer grafo G que apresente alguma estrutura sobrecarregada é Classe 2, pois já necessitamos de $\Delta(G) + 1$ cores para colorir um subgrafo de G . Mais formalmente, temos:

Fato 2.1.1. *Todo grafo sobrecarregado, subgrafo-sobrecarregado ou vizinhança-sobrecarregado é Classe 2*

O grafo exibido na Figura 2.2b é um exemplo de um grafo sobrecarregado.

2.2 Coloração total

A Coloração total é uma atribuição de cores aos vértices e arestas de um grafo. Quando própria, são impostas tanto as restrições da coloração de vértices quanto as

da coloração de arestas, somadas à restrição de que cada aresta tem cor diferente das cores dos vértices em que incide. O PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL pode ser visto mais formalmente através da seguinte definição:

PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL:
Entrada: um grafo G e um inteiro k .
Pergunta: G admite uma coloração total própria com k cores?

Observe que um limite inferior natural para o número cromático total de um grafo G pode ser obtido ao colorirmos um vértice de grau máximo do grafo bem como as arestas incidentes a ele. Claramente, são necessárias $\Delta(G) + 1$ cores nesse caso. O menor número de cores necessário para colorir totalmente um grafo G é chamado de *número cromático total* e é denotado por $\chi''(G)$. A figura abaixo ilustra um grafo G e a sua coloração total ótima.

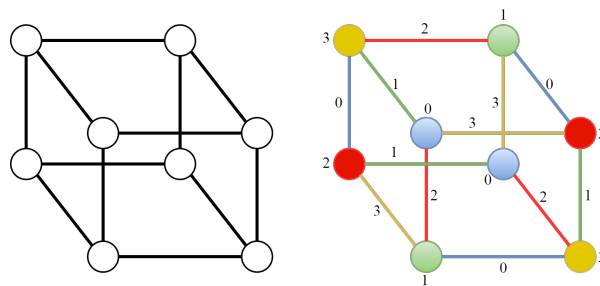


Figura 2.3: Grafo Cubo e sua coloração total ótima. Para este exemplo, $\chi''(G) = 4$.

Os pesquisadores Behzad [5] e Vizing [49], de forma independente durante os anos de 1964 a 1968, introduziram uma conjectura chamada: CONJECTURA DA COLORAÇÃO TOTAL (do inglês Total Coloring Conjecture, denotada por TCC). Tal conjectura afirma que é possível colorir totalmente qualquer grafo G com $\Delta(G) + 1$ ou $\Delta(G) + 2$ cores. Os grafos que se encaixam no primeiro caso são chamados de Tipo 1 e os grafos que se enquadram na segunda categoria são chamados de Tipo 2. Mais formalmente, temos:

Conjectura 2.2.1. ([5], [49]) *Seja G um grafo simples, então $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

O grafo da Figura 2.3 é um exemplo de um grafo Tipo 2. O PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL, assim como o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS é um problema extremamente desafiador e, no geral, provado também ser NP-difícil [47].

2.3 Grafos split nos problemas de coloração

Conforme dito na introdução deste capítulo, as variações de problemas de coloração que vamos trabalhar são os problemas de coloração de arestas e de coloração total. Entretanto, ambos os problemas são NP-difíceis. Portanto, um estudo de classes pode ser uma saída muito interessante para abordar tais problemas. Para algumas classes, são conhecidos resultados na literatura que determinam o índice cromático ou o número cromático total, como por exemplo: a coloração de arestas de grafos bipartidos [33] e de grafos completos [6] ou a coloração total de grafos split-indiferença [13] e de grafos com vértice universal [30].

Sabe-se resolver completamente tais problemas para algumas classes, entretanto, para muitas outras, ambos os problemas permanecem em aberto, como: os grafos split, cografos e grafos planares. Este trabalho adota a estratégia de trabalhar tanto com a coloração de arestas quanto com a coloração total restringindo estas variantes ao estudo de uma subclasse dos grafos split, denominada grafos split 2-admissíveis. O objetivo desta seção é apresentar um levantamento dos resultados da literatura do PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS e do PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL para grafos split.

2.3.1 Resultados Gerais no Problema da Classificação

Iniciamos esta subseção falando dos grafos completos através do seguinte resultado:

Teorema 2.3.1. [6] *O grafo completo K_n é Classe 1 se, e somente se, n é par.*

Sabemos que grafos completos com um número par de vértices são Classe 1, então como consequência deste resultado podemos extrair as seguintes observações:

Observação 2.3.1. *Qualquer subgrafo H de um grafo completo K_n tal que $\Delta(H) = \Delta(K_n)$ e n é par é Classe 1.*

Uma consequência imediata da Observação 2.3.1 é a seguinte:

Observação 2.3.2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com vértice universal tal que $|V(G)|$ é par, então G é Classe 1.*

Para a coloração de um grafo G com vértice universal cujo grau máximo $\Delta(G)$ é ímpar, podemos utilizar a coloração do grafo completo $G' = K_{\Delta(G)+1}$. Como o grafo G é um subgrafo de G' e como a remoção de arestas não causa um aumento no valor do índice cromático, sabemos que $\chi'(G) = \chi'(G')$. Esta coloração, por sua vez, pode ser feita através do seguinte algoritmo:

Algoritmo 2.3.1 Coloração de arestas de grafos com vértice universal cujo grau máximo é ímpar

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer tal que $\Delta(G) = |V(G)| - 1$ e $|V(G)|$ é par.

Coloração do grafo completo $K_{\Delta(G)}$:

- 1: Seja $V(K_{\Delta(G)}) = \{0, 1, \dots, \Delta(K_{\Delta(G)})\}$. Note que $\Delta(K_{\Delta(G)}) = \Delta(G) - 1$
- 2: A função $c : E(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, \Delta(K_{\Delta(G)})\}$ tal que $c(ij) = (i + j) \bmod (\Delta(K_{\Delta(G)}) + 1)$ é uma coloração de arestas do grafo $K_{\Delta(G)}$ com $\Delta(G) + 1$ cores

Extensão da coloração das arestas do grafo $K_{\Delta(G)}$ para o grafo $G' = K_{\Delta(G)+1}$

- 3: Em cada vértice da coloração acima realizada falta exatamente uma das cores. Além disso todas estas cores são distintas, pois são os restos da divisão de $2i$ pelo número ímpar $\Delta(K_{\Delta}) + 1$
- 4: Adicionar o $(\Delta(G) + 1)$ -ésimo vértice que é conectado aos demais vértices e para cada aresta utilizar a cor $(2i) \bmod (\Delta(K_{\Delta}) + 1)$

Eliminação de arestas:

- 5: Por fim, eliminar as arestas de G' para que ele se torne G .
-

O algoritmo acima se baseia na ideia da extensão da coloração de um grafo completo G com um número ímpar de vértices para o grafo completo G' com um número par de vértices cuja cardinalidade do conjunto de vértices é uma unidade a mais que $|V(G)|$. Conforme já dito, grafos completos de ordem ímpar são sobrecarregados e, portanto, Classe 2. Uma *cor faltante* em um vértice v de um grafo G é uma cor que foi utilizada na coloração das arestas de G , mas não está presente nas arestas incidentes a v . O Algoritmo 2.3.1 utiliza a cor faltante de cada vértice de G para colorir as arestas incidentes ao vértice v tal que $v \in (V(G') \setminus V(G))$.

Para grafos com vértice universal e com uma quantidade ímpar de vértices não existe um resultado tão direto quanto o resultado para grafos com uma quantidade par de vértices. Tomemos como exemplo um grafo completo com um número ímpar de vértices. Sabemos que tal grafo é Classe 2, mas isto não implica que algum subgrafo que mantenha o grau máximo também será Classe 2 (veja a Figura 2.4). Plantholt forneceu uma caracterização para grafos com vértice universal e com uma quantidade ímpar de vértices em seu trabalho de 1981 [43]. Plantholt utilizou o conceito de subgrafo-sobrecarregado para chegar em tal resultado.

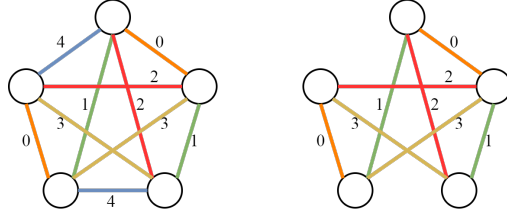


Figura 2.4: Grafo completo K_5 cujo grau máximo é 4 e 5 cores são necessárias para colorir propriamente seu conjunto de arestas; e grafo completo K_5 a menos de duas arestas. O grau máximo é mantido, mas apenas 4 cores são necessárias.

Teorema 2.3.2. [43] *Seja $G = (V, E)$ um grafo com vértice universal e com $|V(G)|$ ímpar. G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado.*

A prova da necessidade é imediata: se G é Classe 1, claramente G não é subgrafo-sobrecarregado. Por outro lado, para a prova da suficiência, Plantholt teve como ideia principal exibir uma $\Delta(G)$ -coloração de grafos que tenham o máximo número possível de arestas e que não sejam sobrecarregados. Relembrando que, um grafo $G = (V, E)$ é dito saturado quando $|E(G)| = \Delta(G)\lfloor n/2 \rfloor$. Como estamos considerando grafos cujo grau máximo é par e com $|V(G)|$ ímpar, temos que $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$. Além disso, G tem um vértice universal, logo $\Delta(G) = n-1$, portanto tal relação também pode ser escrita da seguinte forma: $|E(G)| = \Delta(G)^2/2$. Também podemos notar que os grafos para os quais Plantholt obteve uma coloração para a base de sua demonstração, são os grafos completos com um número ímpar de vértices com $\Delta(G)/2$ arestas a menos:

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ retirando } \frac{\Delta(G)}{2} \text{ arestas, temos:}$$

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n-1}{2} \rightarrow \frac{(n-1)^2}{2} = \frac{\Delta(G)^2}{2}.$$

A ideia apresentada por Plantholt fundamenta-se em fazer uma partição do conjunto de vértices de um grafo G em dois subconjuntos L e R , de modo que façamos uma coloração das arestas dos subgrafos induzidos pelas partes L e R com as mesmas $\Delta(G)/2$ cores e que mais $\Delta(G)/2$ cores sejam utilizadas nas arestas transversais (do inglês "across"), ou seja, nas arestas que apresentam extremos em diferentes partes.

A parte L é determinada de modo que $|L| = \Delta(G)/2 + 1$ e $G[L]$ não seja subgrafo-sobrecarregado. A parte R é escolhida de forma que o subgrafo induzido por R seja isomorfo ao grafo completo com $\Delta(G)/2$ vértices. Mais formalmente: $G[R] \cong K_{\frac{\Delta(G)}{2}}$. Plantholt garante que, se G não é subgrafo-sobrecarregado, então tal partição existe.

O próximo passo deste procedimento é a construção de um grafo bipartido B , cujas arestas serão justamente as arestas transversais entre as partes L e R . A seguir, tomamos dois novos subgrafos X e Y , de modo que X é induzido por L e Y é induzido por R . E por fim, um terceiro subgrafo Z , tal que $Z = X \cup Y$.

Pela escolha das partes L e R , sabemos que o subgrafo Y é isomorfo a um grafo completo, mais especificamente o grafo completo $K_{\frac{\Delta(G)}{2}}$. Logo, Y pode ser colorido

com, no máximo, $\Delta(G)/2$ cores. Para a parte X , temos dois possíveis casos:

1. Para o caso em que $\Delta(G)/2$ é ímpar, temos que X é isomorfo a um grafo completo par e, conseqüentemente, pode ser colorido com $\Delta(G)$ cores;
2. Para o caso em que $\Delta(G)/2$ é par, Plantholt prova por indução que, se $X = G[L]$ não é sobrecarregado e tem um vértice universal, então pode ser colorido com $\Delta(G)/2$ cores. Como o autor demonstra que, se G não é subgrafo-sobrecarregado, então a partição $[L, R]$ existe, é possível escolher L tal que $G[L]$ não seja sobrecarregado.

Por fim, como X e Y são disjuntos, as mesmas cores usadas nas arestas de X podem ser usadas nas arestas de Y . O objetivo agora é colorir as arestas entre as partes L e R com $\Delta(G)/2$ cores. Entretanto, pode existir um empecilho para que tal estratégia seja aplicada no grafo bipartido construído com as arestas transversais das partes L e R . Tal empecilho consiste na presença de vértices com grau igual a $\Delta(G)/2 + 1$ no grafo bipartido que fora construído durante as etapas iniciais. Plantholt prova que é possível retirar uma aresta incidente em cada um destes vértices cujo grau é igual a $\Delta(G)/2 + 1$ e incluir tais arestas no subgrafo Z sem aumentar o índice cromático deste segundo. Ao fim deste processo, temos uma coloração com $\Delta(G)/2$ cores de Z e uma coloração com $\Delta(G)/2$ cores do grafo bipartido, ou seja, uma coloração com $\Delta(G)$ cores de G . Lembrando que, caso não existam vértices cujo grau é $\Delta(G)/2$ no grafo bipartido, já temos a coloração com $\Delta(G)$ cores.

2.3.2 Resultados de Grafos Split no Problema da Classificação

Além dos resultados gerais exibidos na subseção anterior, também existem alguns resultados particulares importantes no estudo do PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO para a classe dos grafos split. O resultado mais notável neste contexto é o que leva em conta a paridade do grau máximo de um grafo split.

Teorema 2.3.3. [15] *Seja G um grafo split tal que $\Delta(G)$ é ímpar, então G é Classe 1.*

Um outro resultado importante no universo dos grafos split e que nos ajuda a redirecionar esforços para determinadas subclasses em nosso estudo surgiu em [1]. Tal resultado consiste em uma condição suficiente para um grafo split G qualquer ser Classe 1 baseado no tamanho de X e no valor de $\Delta(G)$.

Teorema 2.3.4. [1] *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split. Se $\exists v \in Y$ tal que $\lceil \frac{|X|}{2} \rceil \leq d(v) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$, então G é Classe 1.*

Neste trabalho, a autora demonstra que a existência de pelo menos um vértice v no conjunto independente Y tal que o grau de v esteja dentro de uma faixa que depende do tamanho da clique X e do grau máximo do grafo em questão já é uma condição suficiente para que este mesmo grafo seja Classe 1.

Ainda no contexto de resultados sobre o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS que afetam diretamente a classe dos grafos split, podemos citar o resultado abaixo. O Teorema 2.3.5 garante que para decidir se um grafo split G é subgrafo-sobrecarregado, é suficiente avaliar os subgrafos de G induzidos pelas vizinhanças de seus vértices com grau $\Delta(G)$.

Teorema 2.3.5. [20] *Seja G um grafo split. Então, G é subgrafo-sobrecarregado se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Estes dois conceitos, apesar de equivalentes para a classe dos grafos split, não seguem esta equivalência no geral. Pela definição, temos que qualquer grafo vizinhança-sobrecarregado é subgrafo-sobrecarregado, mas a recíproca não é verdadeira. Veja a figura abaixo:

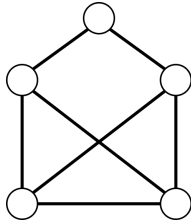


Figura 2.5: Grafo G que é subgrafo-sobrecarregado, mas não é vizinhança-sobrecarregado. Neste caso, o subgrafo que atende à Definição 2.1.2 é o próprio grafo G .

Ainda no trabalho [20], os autores demonstram uma condição suficiente para um grafo split qualquer possuir um vértice universal. Esta condição pode ser melhor vista a seguir:

Lema 2.3.1. [20] *Se G é split e sobrecarregado, então G possui um vértice universal.*

Podemos ainda citar algumas classes de grafos que surgem da interseção da classe dos grafos split com uma segunda classe de grafos para os quais o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS está resolvido. Primeiramente, podemos falar sobre a classe dos *grafos split-indiferença*. Essa classe de grafos surge da interseção dos grafos split com os grafos indiferença. Um grafo G é chamado de *grafo indiferença* se, e somente se, G admite uma *ordem indiferença*. Tal ordem consiste em dispor os vértices de G contidos em uma mesma clique maximal, de forma que estes vértices sejam consecutivos na ordem. Veja a Figura 2.6. A classe dos grafos indiferença

constitui uma subclasse dos grafos de intervalo. Os *grafos de intervalo*, definidos por Hajos [27] são os grafos de interseção de uma família de intervalos em uma reta (observe a Figura 2.7). No caso dos grafos indiferença, todos estes intervalos são unitários, ou seja, a classe dos grafos de intervalo é uma superclasse dos grafos indiferença.

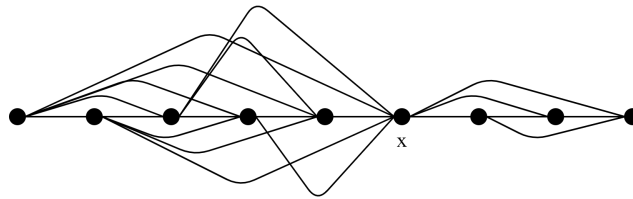


Figura 2.6: Um grafo indiferença com duas cliques maximais. Uma com 6 vértices e outra com 4. Note que o vértice x aparece em ambas as cliques e toda a sua vizinhança (assim como a de todos os vértices) aparece em sequência na ordem estabelecida, assim respeitando a definição de ordem indiferença.

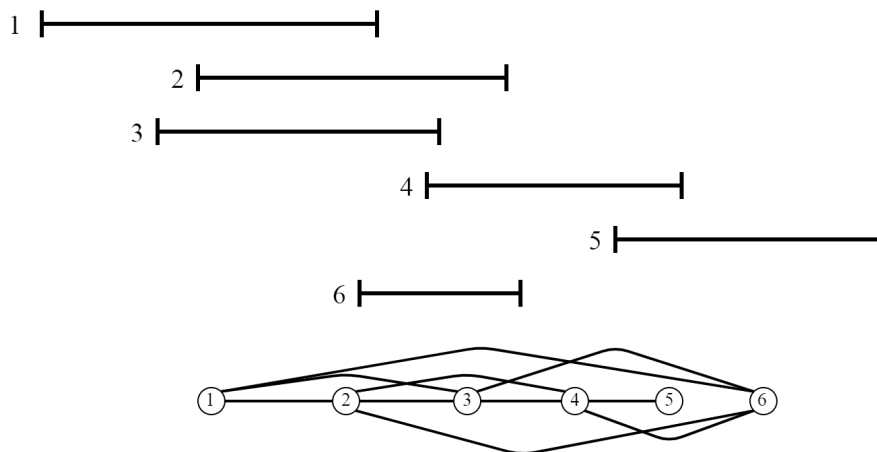


Figura 2.7: Uma família de intervalos e o grafo de interseção desta família de intervalos, ou seja, um grafo de intervalo.

Portanto, os grafos split-indiferença são os grafos split que admitem uma ordem indiferença. Ortiz et. al [38] resolveram completamente o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS para esta classe de grafos e enunciaram o seguinte resultado.

Teorema 2.3.6. [38] *Seja G um grafo split-indiferença. G é Classe 2 se, e somente se, G é subgrafo-sobre-carregado.*

Uma outra classe que é resultante da interseção de duas outras classes de grafos, sendo uma delas os grafos split e a outra os grafos de comparabilidade, para qual o PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO foi completamente resolvido é a classe dos grafos split-comparabilidade. Dado um grafo G e uma orientação das arestas de G , esta orientação é dita *transitiva* se para quaisquer três vértices u, v, w de G , se existirem

arestas orientadas $(u, v) \in \vec{E}$ e $(v, w) \in \vec{E}$, então $(u, w) \in \vec{E}$. Um grafo G que admite tal orientação é chamado de *grafo de comparabilidade*. Veja a figura abaixo.

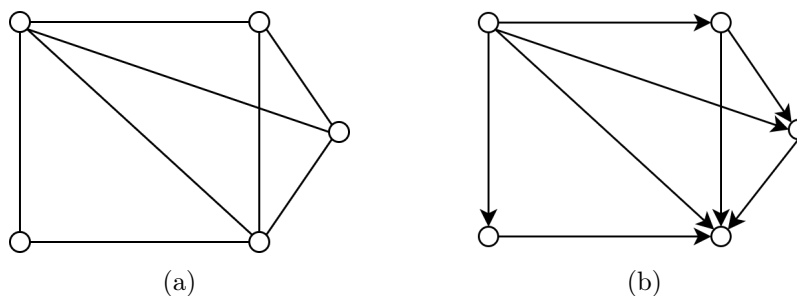


Figura 2.8: (a) Grafo G de comparabilidade. (b) Uma orientação transitiva das arestas de G .

Portanto, *grafos split-comparabilidade* são grafos split que admitem uma orientação transitiva do seu conjunto de arestas. Ortiz e Villanueva [39] caracterizaram como é a estrutura de um grafo split-comparabilidade. Cruz et. al [22] apresentaram uma caracterização dos grafos split-comparabilidade Classe 2 através do seguinte resultado.

Teorema 2.3.7. [22] *Seja G um grafo split-comparabilidade. G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

Por último, podemos citar a classe dos grafos split-intervalo como um terceiro exemplo da interseção da classe dos grafos split com uma segunda classe de grafos, neste caso a classe dos grafos de intervalo. O PROBLEMA DA CLASSIFICAÇÃO para a classe dos grafos split-intervalo foi resolvido por Gonzaga et. al [26] através do seguinte resultado:

Teorema 2.3.8. [26] *Seja G um grafo split-intervalo. G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado.*

2.3.3 Resultados de Grafos Split em Coloração Total

Assim como o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS, o PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL também é um problema NP-difícil. Logo, o estudo de classes faz-se útil para abordar tal problema. Na Seção 2.2, apresentamos uma conjectura chamada Conjectura da Coloração Total (TCC), Conjectura 2.2.1, que diz que, para qualquer grafo simples G , $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Sabe-se que algumas classes de grafos satisfazem a TCC, como é o caso dos grafos split [15]. Além dos grafos split, os grafos indiferença ou grafos de intervalo unitário também satisfazem a TCC [21]. Por esta razão, sabemos resolver o PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL

para algumas subclasses dos grafos split. Alguns resultados direta ou indiretamente relacionados aos grafos split podem ser vistos a seguir.

Teorema 2.3.9. [15] *Seja $G = ((X, Y); E)$ um grafo split. Se G possui grau máximo $\Delta(G)$ par, então G é Tipo 1.*

O resultado abaixo é conhecido como condição de Hilton e é bem frequente em caracterizações no contexto do PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL de diversas classes de grafos, o que também se aplica para a classe dos grafos split, como veremos no Capítulo 4.

Teorema 2.3.10. (Condição de Hilton) [29] *Seja G um grafo simples com um número par de vértices. Se G possui um vértice universal, então G é Tipo 2 se, e somente se, $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) < |V(G)|/2$, onde $\alpha'(\overline{G})$ denota o tamanho emparelhamento máximo de \overline{G} .*

Capítulo 3

O Problema da t -admissibilidade

O PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE, do inglês *minimum stretch spanning tree - MSST*, também conhecido como problema da árvore geradora de extensão mínima, ou árvore geradora de dilatação mínima, é um problema bastante estudado na literatura ([12], [42], [4], [23], [41], [8], [10]).

Por ser um problema do tipo Min-Max, realiza análises de otimalidade oposta dentro de um mesmo contexto, o que o torna bastante interessante. Um outro problema muito conhecido que envolve análises de otimalidade opostas é o PROBLEMA DO DIÂMETRO. Este, por sua vez, é um problema Max-Min, que consiste em encontrar o tamanho do maior caminho mínimo entre os pares de vértices de um grafo. Sabemos solucionar o PROBLEMA DO DIÂMETRO em tempo polinomial, sendo suficiente para tal, calcular os menores caminhos entre todos os pares de vértices do grafo e, a partir destes valores, determinar o maior deles [46].

O PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE possui forte cunho prático, tendo vasta aplicação em diversos problemas da área de redes como elaboração de tipos especiais de circuitos integrados, construção de malhas de estradas que minimizem a distância entre dois pontos (geralmente cidades) [18], otimização na eficiência de redes de comunicação, sistemas distribuídos ([3], [34]), análises filogenéticas [45], computação geométrica [18] e na construção de sincronizadores que têm a capacidade de transformar algoritmos síncronos em algoritmos assíncronos [42].

3.1 Resultados Preliminares

Originalmente [42], o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE foi formulado da seguinte maneira:

Dado um grafo conexo $G = (V, E)$ e um número inteiro $t \geq 1$, uma árvore t -geradora deste grafo é uma árvore geradora T onde a distância entre quaisquer pares de vértices é, no máximo, t vezes a distância destes mesmos vértices em G . Se

G admite uma árvore t -geradora, dizemos que o grafo G é t -admissível [42].

No artigo [12], os autores mostraram que esta definição é equivalente a algumas outras, como pode ser visto no Teorema 3.1.1. Vale ressaltar que neste artigo os autores consideram grafos ponderados. Na variante abordada nesta dissertação, estamos trabalhando com o caso particular onde as arestas têm peso unitário. Além disso, apenas os grafos conexos são considerados, uma vez que podemos aplicar os resultados deste trabalho a cada componente conexo de um grafo independentemente, tornando assim o resultado mais geral.

Teorema 3.1.1. [12] *Seja T uma árvore geradora de um grafo $G = (V, E)$, os itens a seguir são equivalentes:*

1. Para toda aresta $xy \in E$, $d_T(x, y) \leq t \cdot d_G(x, y)$
2. Para toda aresta $xy \in E \setminus E(T)$, $d_T(x, y) \leq t \cdot d_G(x, y)$
3. Para toda aresta $xy \in E$, $d_T(x, y) \leq t$
4. Para toda aresta $xy \in E \setminus E(T)$, $d_T(x, y) \leq t$

Consideramos a definição 3 a mais conveniente para trabalharmos no contexto aqui abordado. Além disso, todas as instâncias trabalhadas neste contexto consideram grafos conexos, uma vez que apenas grafos conexos admitem árvores geradoras.

Formalmente, definimos o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE da seguinte maneira:

PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE:

Entrada: um grafo conexo G e um inteiro positivo t .

Pergunta: G é t -admissível?

Chamamos de *fator de extensão* (*stretch factor*) o valor da maior distância em uma árvore geradora entre dois vértices vizinhos em G . O menor fator de extensão de um grafo G é chamado de *índice de extensão* (*stretch index*) de G , denotado por $\sigma(G)$.

Em [12], os autores provaram que o problema de determinar se um grafo possui índice de extensão no mínimo 4 é um problema NP-completo.

Teorema 3.1.2. [12] *Para qualquer valor fixo de $t \geq 4$, o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE é NP-completo.*

Para provar tal NP-completude, os autores fizeram uma redução polinomial a partir do problema NP-completo intitulado *3-SAT*. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12].

Para solucionar o *MSST*, intuitivamente, poderíamos utilizar um algoritmo de força bruta para encontrar todas as árvores geradoras de um grafo, e a partir das árvores encontradas, analisar as distâncias entre os vértices. Restaria, portanto, encontrar a árvore ótima para a solução do problema. Porém, esta solução não é eficiente, não pelo cálculo das distâncias entre os vértices, pois esta operação pode ser realizada em tempo polinomial, mas sim pelo número exponencial de árvores geradoras de um grafo (Número de *Cayley*: n^{n-2}) [14].

Um limite inferior natural para o PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE pode ser obtido se considerarmos a cintura $g(G)$, ou seja, o tamanho do menor ciclo de G . Se G é t -admissível, então $t \geq g(G) - 1$. Este limite inferior deve-se ao fato de que, para cada ciclo do grafo G , deve haver alguma não-aresta. Portanto, pelo menos as demais arestas do ciclo devem ser utilizadas para garantir a distância do par de vértices que definia a aresta removida. Por outro lado, o PROBLEMA DA ÁRVORE GERADORA DE DIÂMETRO MÍNIMO produz um limite superior para o índice de extensão. O diâmetro de uma árvore geradora T é definido como a maior dentre as menores distâncias entre todo par de vértices de T . O objetivo do PROBLEMA DA ÁRVORE GERADORA DE DIÂMETRO MÍNIMO é o de encontrar a árvore geradora com o menor diâmetro possível. Para este problema (que pode ser resolvido em tempo polinomial), dizemos que $D_T(G)$ corresponde ao diâmetro da árvore geradora de diâmetro mínimo de G [28].

Teorema 3.1.3 ([12], [28]). *Dado $g(G)$ a cintura de um grafo G , temos que $g(G) - 1 \leq \sigma(G) \leq D_T(G)$.*

A seguir, apresentamos alguns exemplos intuitivos:

Exemplo 3.1.1. *Considere que G seja uma árvore como na Figura 3.1. Note que, como toda aresta de G pertencerá à árvore geradora de G , temos que o índice de extensão deste grafo é 1. Claramente, ser árvore é condição suficiente e necessária para um grafo ser 1-admissível, como formulado no Fato 3.1.1.*

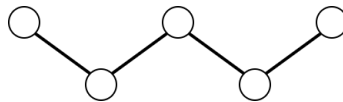


Figura 3.1: Grafo/Árvore com 5 vértices e 4 arestas.

Fato 3.1.1. *Um grafo G é 1-admissível se, e somente se, G é uma árvore.*

Exemplo 3.1.2. *Considere a Figura 3.2. Note que, a menos de isomorfismo, a árvore mostrada em 3.2b é a única árvore para o grafo G , mostrado em 3.2a. Em grafos ciclo, sempre temos índice de extensão bem definido em função do tamanho do ciclo, ou seja, C_n sempre tem $\sigma(C_n) = n - 1$.*

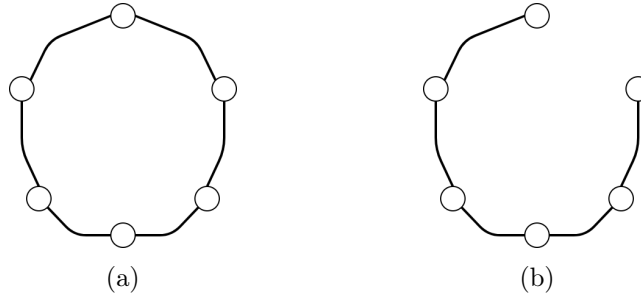


Figura 3.2: (a) Grafo $G = C_6$. (b) A menos de isomorfismo, a única árvore geradora de G .

Exemplo 3.1.3. *Vamos considerar agora a classe dos grafos completos com pelo menos três vértices. Pelo Fato 3.1.1, eles têm índice de extensão, no mínimo, 2. Além disso, por definição, todos os vértices de um grafo completo são universais, o que implica na possibilidade de construção de uma estrela geradora, como exibido na Figura 3.3. Portanto temos $\sigma(G) = 2$.*

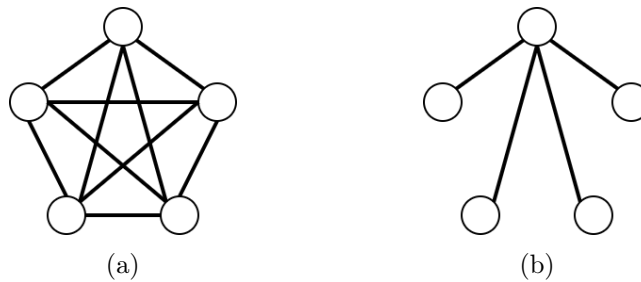


Figura 3.3: (a) Grafo completo $G = K_5$. (b) Uma árvore 2-geradora de G .

Os grafos completos não são as únicas estruturas que possuem índice de extensão igual a 2. Os grafos completos contam com uma condição suficiente para a existência de uma árvore 2-geradora, que é a presença de um vértice universal em seu conjunto de vértices. Mais formalmente, temos:

Observação 3.1.1. *A existência de um vértice universal em um grafo G é uma condição suficiente para que este grafo seja 2-admissível.*

Note, porém, que esta condição não é necessária, dado que existem outros grafos que são 2-admissíveis (veja as Figuras 3.4 e 3.5) e não possuem vértice universal, o que pode ser caracterizado pelo Teorema 3.1.4, que enuncia uma condição suficiente e necessária para a 2-admissibilidade de qualquer grafo G .

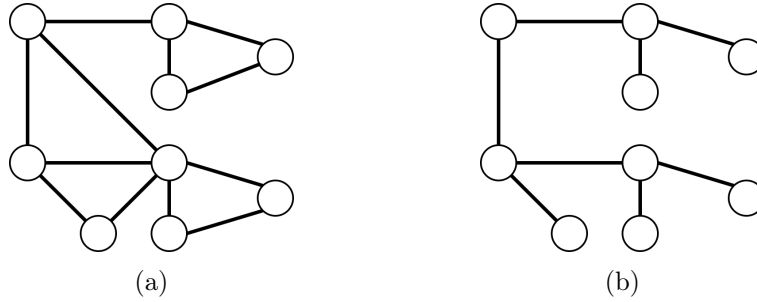


Figura 3.4: (a) Grafo G . (b) Uma árvore 2-geradora de G .

Uma outra observação que podemos fazer sobre a obtenção de árvores t -geradoras para grafos em geral é sobre a influência que vértices pendentes exercem na determinação do índice de extensão de um grafo G . Os vértices pendentes, por possuírem apenas uma aresta incidente neles, necessitam que esta aresta esteja presente na árvore t -geradora T de um grafo G . Podemos concluir então que, vértices pendentes não são relevantes para o índice de extensão $\sigma(G)$. Logo, sempre podemos fazer um pré-processamento em qualquer grafo realizando a remoção de todos os vértices pendentes deste grafo antes de determinar uma árvore t -geradora do mesmo.

Grafos 2-admissíveis podem ser caracterizados pelo Teorema 3.1.4:

Teorema 3.1.4. [12] *Seja G um grafo 2-conexo. Então, uma árvore geradora T de G é uma árvore 2-geradora se, e somente se, para cada componente 3-conexo H de G , $T \cap H$ é uma estrela geradora de H .*

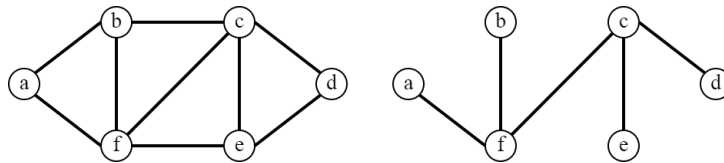


Figura 3.5: Grafo G e uma árvore 2-geradora de G .

Observe a Figura 3.5. De acordo com o Teorema 3.1.4, a interseção entre cada componente 3-conexo H de G e árvore T deve ser uma estrela geradora de H . Neste exemplo, temos como componentes 3-conexas os triângulos formados pelos vértices (a, b, f) , (b, c, f) , (c, e, f) e (c, d, e) . Observe que, a interseção da árvore T ilustrada na Figura 3.5 com cada um dos 4 componentes 3-conexos acima enumerados é uma estrela geradora de cada um deles.

O Teorema 3.1.4 nos fornece um algoritmo que encontra uma árvore 2-geradora de um grafo G (caso exista) com complexidade $O(n + m)$, onde $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. Para este algoritmo, os autores utilizam um conceito chamado de aresta de ligação (do inglês, *binding edge*). Uma aresta $e = uv$ é uma aresta de ligação se u e v formam um conjunto de corte minimal. Além disso, também é citado

pelos autores, neste algoritmo, um resultado de Bondy [8] que pode ser melhor visto a seguir:

Lema 3.1.1. [8] *Seja G um grafo 2-conexo e T uma árvore 2-geradora arbitrária de G . Então, para todo corte de vértices de tamanho 2 u, v de G , $uv \in E(T)$.*

Através do Teorema 3.1.4 e do Lema 3.1.1, Cai e Corneil introduzem o seguinte algoritmo para a obtenção de uma árvore 2-geradora de um grafo qualquer:

Algoritmo 3.1.1 Obtenção de Árvore 2-geradora T de um grafo G qualquer

Seja $G = (V, E)$ um grafo qualquer

- 1: Encontrar todos os blocos de G
- 2: Para cada bloco, encontrar todos os cortes de vértices de tamanho 2 e componentes 3-conexos

Caso exista algum corte de vértices de tamanho 2 (encontrado na etapa anterior) que não induza uma aresta de ligação, então, pelo Lema 3.1.1, G não admite uma árvore 2-geradora

- 3: Adicionar todas as arestas de ligação em T
- 4: Para cada componente 3-conexo H , encontrar uma estrela geradora contendo todas as arestas de H e adicionar em T

Se não existe tal estrela geradora, os autores provam que G não admite uma árvore 2-geradora.

- 5: Se T é uma árvore geradora, então é também uma árvore 2-geradora. Caso contrário, G não admite uma árvore 2-geradora
-

Os autores também mostram que a complexidade $O(n + m)$ para este algoritmo pode ser atingida ao utilizar um algoritmo específico para encontrar componentes 3-conexos descrito em [32].

Apesar do PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE ser estudado há mais de 25 anos, curiosamente decidir se um grafo possui $\sigma(G) = 3$ é um problema que permanece em aberto. É natural então que se estudem classes 3-admissíveis ([4], [23], [41]). A seguir, veremos que este é o caso dos grafos split.

3.2 Grafos split no estudo da t -admissibilidade

Os resultados apresentados nesta seção são decorrentes do trabalho de conclusão de curso, do mesmo autor desta dissertação, na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro realizado sob orientação da professora Fernanda Couto e que estão em fase de submissão para um periódico.

Observação 3.2.1. Neste trabalho, consideraremos sempre que a clique X do grafo split em questão é maximal.

A estrutura bem definida dos grafos split possibilita a formulação de uma caracterização particular para a classe dos split que possuem $\sigma(G) = 2$. Além disso, para qualquer grafo split, é possível exibir um algoritmo que constrói uma árvore 3-geradora. Com isso, podemos garantir que o índice de extensão dos grafos split é, no máximo, 3. Primeiramente, vamos demonstrar este limite superior. Considere o exemplo da Figura 3.6 e o Algoritmo 3.2.1. A ideia é que comecemos a construção da árvore 3-geradora a partir de uma estrela e, em seguida, acrescentemos os vértices restantes que não eram adjacentes ao centro da estrela já construída.

Algoritmo 3.2.1 Construção de árvore 3-geradora de um grafo split

Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split.

- 1: Tomar um vértice $v \in X$ tal que v tenha o maior grau possível
 - 2: Iniciar a construção da árvore a partir de uma estrela com centro v e cujas folhas são todos os vizinhos de v em G
 - 3: Se ainda houver vértice não adicionado, adicioná-lo à árvore utilizando uma aresta arbitrária de G
-

Note que independentemente do vértice $v \in X$ que escolhamos para centro da estrela inicial, esta construção nos conduz a uma árvore 3-geradora, como é provado no Lema 3.2.1.

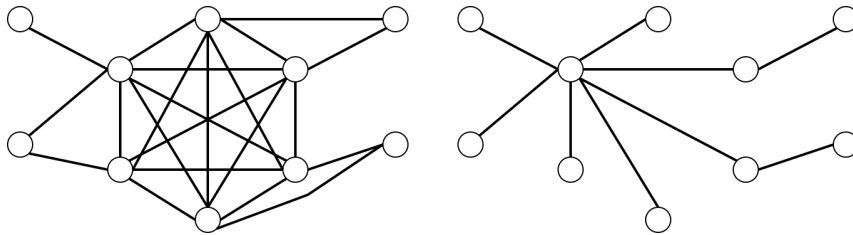


Figura 3.6: Grafo split e sua árvore 3-geradora.

Lema 3.2.1. ([41]) Se G é um grafo split, então $\sigma(G) \leq 3$.

Demonstração. Nós obtemos uma árvore geradora T para um grafo split $G = ((X, Y), E)$, onde X representa uma clique e Y representa um conjunto independente, da seguinte forma. Defina qualquer vértice x em X como o centro da estrela que inclui todos os outros vértices de X . Em seguida, para cada vértice $y \in Y$, escolha uma aresta incidente em y , arbitrariamente, e faça de y um vértice pendente em T . Nos resta mostrar que a distância entre dois vértices adjacentes v, w em G é, no máximo, 3 em T . i) $v, w \in X$: já que possuímos uma estrela em T em relação a X , então $d(v, w) \leq 2$, pelo caminho vwx ii) $v \in X, w \in Y$: o pior caso ocorre

quando $d_G(w) \geq 2$ e v é uma folha da estrela em T . Neste caso, $d(v, w) = 3$ pelo caminho $vx'w$, onde $x'w$ pertence a T . \square

Pelo Fato 3.1.1, grafos split com $\sigma(G) = 1$ são árvores e, portanto, bi-estrelas, i.e., árvores com n vértices e pelo menos $n - 2$ folhas. A seguir, tendo como base o Teorema 3.1.4, vamos apresentar uma breve discussão acerca de propriedades estruturais inerentes as grafos split com $\sigma(G) = 2$ ou $\sigma(G) = 3$.

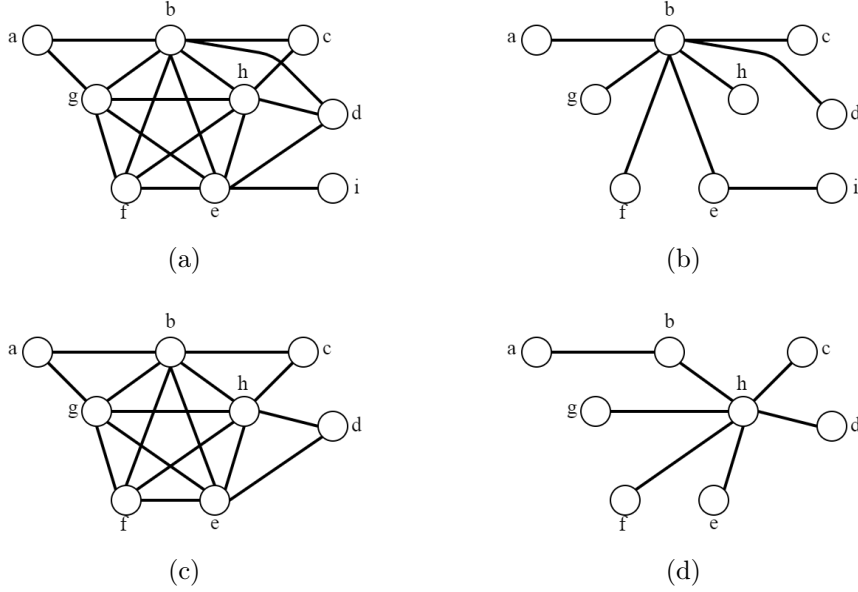


Figura 3.7: (a) Grafo split G_1 2-admissível. (b) Uma árvore 2-geradora de G_1 . (c) Grafo split G_2 3-admissível. (d) Uma árvore 3-geradora de G_2 .

De acordo com o Teorema 3.1.4, para um grafo G admitir uma árvore T 2-geradora, a interseção desta árvore T com cada componente 3-conexo H de G deve ser uma estrela geradora de H . Ao observarmos o grafo da Figura 3.7a, vemos que os componentes 3-conexos do grafo são os triângulos formados pelos vértices (a, b, g) , (b, h, c) , a clique e a aresta ei . A interseção de cada um destes componentes com a árvore mostrada em 3.7b é uma estrela geradora de cada um destes. Na Figura 3.7c, os componentes 3-conexos do grafo G_2 são os três triângulos formados pelos vértices (a, b, g) , (b, c, h) e (d, e, h) e a clique. A Figura 3.7d ilustra uma árvore T 3-geradora de G_1 . O fator de extensão desta árvore se dá por conta da distância entre os vértices a, g , que em T é igual a 3. Entretanto, a interseção desta árvore T com o triângulo formado pelos vértices (a, b, g) não é uma estrela geradora deste triângulo. E mesmo que alteremos o vértice centro de T , continuaremos com o mesmo problema, que é não conseguirmos que a interseção de T com cada um dos componentes 3-conexos seja uma estrela geradora de cada um, simultaneamente.

Conforme dito na subseção anterior, vértices pendentos não influenciam no índice de extensão de um grafo G . E mais formalmente, temos a seguinte afirmação:

Afirmção 3.2.1. *Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e seja $P = \{v \in V \mid d(v) = 1\}$. Então, $\sigma(G) = \sigma(G \setminus P)$.*

Podemos, com a Afirmção 3.2.1 deduzir que um grafo split G cujos vértices do independente são todos pendentos possui índice de extensão $\sigma(G) = 2$. Pois ao realizarmos o pré-processamento para a retirada destes vértices, teremos como saída um grafo completo que possui um vértice universal e logo, pela Observação 3.1.1, é 2-admissível. Com a ajuda deste resultados parciais, podemos enunciar o Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.1. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split, tal que $\forall y \in Y, d_G(y) > 1$. Então, $\sigma(G) = 2$ se, e somente se, G possui um vértice universal.*

Demonstração. Seja G um grafo split com vértice universal. Pela Observação 3.1.1, esta é uma condição suficiente para a 2-admissibilidade e, portanto, $\sigma(G) = 2$. Nos resta provar que: se G é um grafo split tal que $\forall y \in Y, d_G(y) > 1$ e $\sigma(G) = 2$, então G possui um vértice universal. Vamos assumir que $|Y| \geq 2$, pois caso contrário, G tem vértice universal. Existem, portanto, dois casos:

- (i) $d_G(y) = 2, \forall y \in Y$;
- (ii) $\exists y \in Y$, tal que $d_G(y) \geq 3$.

Em (i), vamos supor que o grafo split G possua um conjunto independente com 2 ou mais vértices e, por absurdo, vamos supor que G não possua um vértice universal. Logo, a árvore ótima T não é uma estrela geradora de G . Além disso, temos como componentes 3-conexos de G , a clique X e cada triângulo formado por um vértice $y \in Y$ e dois vértices x_1 e $x_2 \in X$, que denotaremos por Y_t . De acordo com o Teorema 3.1.4 de Cai e Corneil [12], existe uma árvore geradora T de G tal que, $T \cap H$ é uma estrela geradora de H , para todo componente 3-conexo H . Como X induz um componente 3-conexo em G , $T \cap G[X]$ é uma estrela geradora de $G[X]$. Como não temos vértice universal em G , existe pelo menos um vértice $y \in Y$, adjacente a duas folhas de $T \cap G[X]$, e neste caso, $\sigma(G) = 3$. Absurdo. Em (ii), vamos começar tratando dos grafos split onde, $d_G(y) \geq 3, \forall y \in Y$. Neste caso, todo o grafo G é um componente 3-conexo. Temos, que pelo Teorema 3.1.4, existe uma árvore geradora T tal que $G \cap T$ é uma estrela geradora de G . Portanto o grafo deve obrigatoriamente apresentar um vértice universal e este será o centro da estrela. Por fim, dentro deste mesmo caso, podemos ter em Y , pelo menos um vértice y cujo grau é 2. Neste subcaso, os componentes 3-conexos são: $G[Z]$, onde $Z = \{X \cup \{y\} \mid y \in Y, d_G(y) \geq 3\}$ e os triângulos Y_t . Vamos construir T , inicialmente, a partir do componente $G[Z]$. Neste caso, ou o centro da estrela geradora de $G[Z]$ pertence a X ou a Y . Primeiramente, suponha que o centro da estrela geradora

de G seja um vértice $x \in X$ e que G não possua vértice universal. Logo, existe pelo menos um vértice $y \in Y$, adjacente a duas folhas de $T \cap G[Z]$, e neste caso, $\sigma(G) = 3$. Absurdo. Agora suponha que o centro da estrela geradora de $G[Z]$ esteja em Y . Neste caso, existe pelo menos um vértice $y \in Y$, tal que $d_G(y) = 2$ que não tem adjacência com o centro da estrela. Logo, este vértice é adjacente a duas folhas da geradora de $G[Z]$, assim implicando em $\sigma(G) = 3$. Absurdo. \square

Com estes resultados, podemos particionar os grafos split em 3 subclasses sob a perspectiva da t -admissibilidade. Grafos split com $\sigma(G) = 1$, grafos split com $\sigma(G) = 2$ e grafos split com $\sigma(G) = 3$ (observe o diagrama da Figura). Observe que os grafos split com $\sigma(G) = 1$ são árvores e, portanto, bipartidos. A variantes do problema da coloração: COLORAÇÃO DE ARESTAS e COLORAÇÃO TOTAL estão resolvidos para árvores, ou seja, sabemos determinar o índice cromático e o número cromático total de grafos split 1-admissíveis. Neste trabalho, abordaremos estas duas variantes do problema da coloração restritas aos split 2-admissíveis.

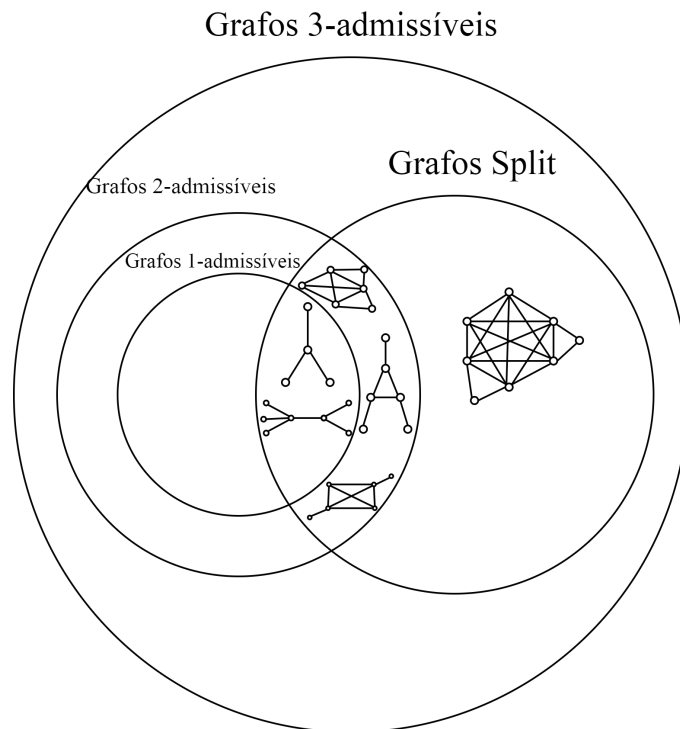


Figura 3.8: Particionamento da classe dos grafos t -admissíveis com respeito aos valores de $t = 1, 2$ e 3 voltados para a classe dos grafos split.

Capítulo 4

O Problema da Coloração de Arestas e Coloração Total para grafos split 2-admissíveis

Neste capítulo, fornecemos caracterizações para uma subclasse dos grafos split no contexto de duas variantes de problemas de coloração: o PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS e o PROBLEMA DA COLORAÇÃO TOTAL. Esta subclasse, por sua vez, é definida ao observarmos a classe dos grafos split sob a ótica do PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE, visto no Capítulo 3. Como visto, os grafos split são 3-admissíveis e sabemos caracterizar estruturalmente os grafos split 2-admissíveis através do Teorema 3.2.1. Sob essa perspectiva, conseguimos particionar a classe dos grafos split essencialmente em três partes: os grafos split com $\sigma(G) = 1$, $\sigma(G) = 2$ e $\sigma(G) = 3$. Note ainda que os únicos grafos split 1-admissíveis são árvores bem específicas: bi-estrelas. Bi-estrelas são grafos bipartidos. Logo, sabemos determinar seu índice cromático por [33]. Além disso, também é sabido que árvores a menos do K_2 são Tipo 1, enquanto que o K_2 é Tipo 2 [52]. Como foi mostrado pelo Teorema 3.2.1, após um pré-processamento onde os vértices de grau 1 são removidos, um grafo split é 2-admissível se, e somente se, possui um vértice universal. Isto implica que, os grafos split 3-admissíveis são os grafos split que, após a retirada dos vértices pendentos de Y , não possuem um vértice universal. Como o problema da coloração de arestas e total para grafos split já foi amplamente estudado, existem resultados parciais mencionados no Capítulo 2, que, junto com os resultados apresentados aqui completam o panorama da coloração de arestas e da coloração total para os grafos split 2-admissíveis. Portanto, com base na revisão literária feita e exibida no Capítulo 2, vamos restringir nossos estudos a grafos split 2-admissíveis com $\Delta(G)$ par (Teorema 2.3.3), que não possuem um vértice universal (Observação 2.3.2 e Teorema 2.3.2) e que não possuem um vértice em Y dentro da faixa

$\lceil \frac{|X|}{2} \rceil \leq d(v) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$ (Teorema 2.3.4). Observe a Figura 4.1. Além disso, uma outra restrição que vamos impor aos grafos utilizados no escopo desta dissertação é de que tais grafos não sejam sobrecarregados, visto que grafos sobrecarregados são Classe 2. Veja a figura abaixo.

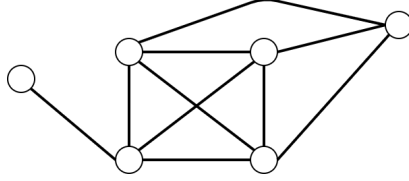


Figura 4.1: Grafo $G = ((X, Y), E)$ split 2-admissível cujo grau máximo é par e todos os vértices de Y apresentam grau fora do intervalo $\lceil \frac{|X|}{2} \rceil \leq d(v) \leq \frac{\Delta(G)}{2}$.

Ressaltamos que, até onde vai o nosso conhecimento da literatura acerca do PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS para grafos split, nenhuma classe estudada até hoje coincide com a classe dos grafos split 2-admissíveis. Por exemplo, as classes split-indiferença [38], split-intervalo [26] e split-comparabilidade [22] já foram estudadas e classificadas quanto à tratabilidade do PROBLEMA DA COLORAÇÃO DE ARESTAS. Estas três classes possuem apenas uma interseção com a classe dos grafos split 2-admissíveis, sendo possível assim, encontrar grafos 2-admissíveis e 3-admissíveis dentro de cada uma destas classes. Veja a figura abaixo:

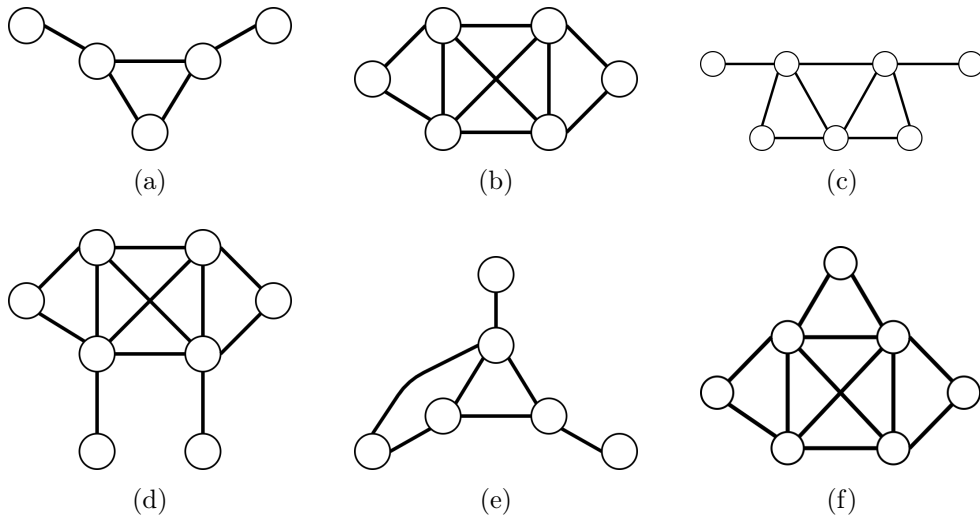


Figura 4.2: (a) Grafo split-indiferença 2-admissível. (b) Grafo split-indiferença 3-admissível. (c) Grafo split-intervalo 2-admissível. (d) Grafo split-intervalo 3-admissível. (e) Grafo split-comparabilidade 2-admissível. (f) Grafo split-comparabilidade 3-admissível.

Podemos apresentar infinitos grafos split 2-admissíveis que não pertencem às classes estudadas.

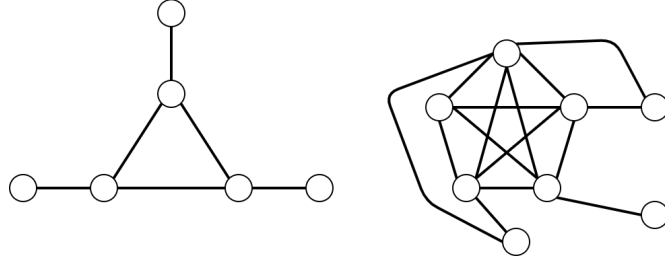


Figura 4.3: Dois grafos split 2-admissíveis que não são de comparabilidade, nem de intervalo e nem indiferença.

Os grafos da Figura 4.3 são grafos split 2-admissíveis, porém não são indiferença. Pois grafos split-indiferença podem ter, no máximo, dois vértices em seu conjunto independente [38]. Por outro lado, os grafos acima também não são de intervalo e nem de comparabilidade. Este fato se dá por conta do grafo da esquerda da Figura 4.3 ser um subgrafo proibido para ambas as classes: split-intervalo e split-comparabilidade (veja [36]). Seguindo esta ideia, podemos construir infinitos grafos que contenham este grafo como um subgrafo induzido e que ainda mantenham a propriedade de ser um grafo split 2-admissível. Esta construção pode ser feita tomando 3 vértices da clique e 3 vértices do conjunto independente, de modo que cada um dos vértices do conjunto independente seja adjacente a apenas um dos 3 vértices tomados da clique e estas adjacências sejam de um para um dentro deste subgrafo. E, além desta estrutura, exista um vértice v na clique que é adjacente a todos os vértices com grau maior ou igual a 2. Para qualquer clique que possua um tamanho maior ou igual a 4, podemos obter esta estrutura facilmente. Para cliques de tamanho igual a 3, o próprio grafo já deve ser a estrutura, como ilustrado na Figura 4.3.

4.1 Índice Cromático de grafos split 2-admissíveis

Sabemos, pelos resultados previamente exibidos (Fato 2.1.1) que todo grafo sobre-carregado é Classe 2. Desta forma, como dito anteriormente, não trabalharemos com grafos split 2-admissíveis sobre-carregados. Além disso, os conceitos de grafo subgrafo-sobre-carregado e vizinhança-sobre-carregado, que na classe dos grafos split são equivalentes pelo Teorema 2.3.5, vistos no Capítulo 2, são muito importantes para enunciarmos o resultado principal deste capítulo.

Lema 4.1.1. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$ tal que $\Delta(G)$ é par. Se $G[N[v]]$ é sobre-carregado para algum $v \in X$ tal que $d(v) = \Delta(G)$, então v não possui vizinho pendente.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $\forall v$ tal que $d(v) = \Delta(G)$, v possui pelo menos um vértice pendente em $N_Y(v)$, onde $N_Y(v)$ denota a vizinhança do

vértice v no conjunto independente Y . Considere $|N_Y(v)| = x + 1$. Note que $\Delta(G) = (k - 1) + x + 1 = k + x$ (onde $|X| = k$) que, por hipótese, é par. Então, $|V(G[N[v]])| = k + x + 1$. Como $G[N[v]]$ é sobrecarregado, temos que: $|E(G[N[v]])| > \lfloor \frac{k+x+1}{2} \rfloor (k+x)$. Como $k+x$ é par, $\lfloor \frac{k+x+1}{2} \rfloor = \frac{k+x}{2}$ e $|E(G[N[v]])| \geq \frac{k+x}{2}(k+x) + 1$ e isto implica que: $|E(G[N[v]])| \geq \frac{(k+x)^2}{2} + 1$. Portanto, $|E(G[N[v]])| \geq \frac{k^2+2kx+x^2}{2} + 1$. Note que esta unidade acrescida ao fim da expressão já representa a aresta incidente ao vértice pendente considerado e portanto, já é omitida na expressão a seguir. Como a clique X tem $\frac{k(k-1)}{2}$ arestas, temos pelo menos $\frac{k^2+2kx+x^2}{2} - \frac{k^2-k}{2} = \frac{2kx+k+x^2}{2}$ arestas transversais, i.e, entre a clique e os vizinhos de v em Y , onde nenhum destes vizinhos é o vértice pendente considerado. Note que, como X é maximal, o maior número de arestas transversais incidentes a um vértice de Y é $(k - 1)$. Logo, como temos x vértices em $G_Y[N[v]]$ que não são necessariamente pendentes, o maior número possível de arestas transversais é $x(k-1) = kx - x$. Portanto, $\frac{2kx+k+x^2}{2} - (kx - x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + k \leq 0$. Resolvendo tal inequação, obtemos como raízes os valores: $-1 + \sqrt{1-k}$ e $-(1 + \sqrt{1-k})$. O único caso em que estas expressões assumem valores reais é quando $k = 1$, como k denota o tamanho da clique maximal, sabemos que $k \geq 1$, logo o único valor que é de fato possível para k é 1. Entretanto, quando $k = 1$, o grafo split é uma estrela e conseqüentemente, 1-admissível. Isto nos leva a uma contradição e concluímos que se $G[N[v]]$ é sobrecarregado para algum $v \in X$ tal que $d(v) = \Delta(G)$, então não podem existir vértices pendentes em $N_Y(v)$. \square

O Lema 4.1.1 nos conduz ao Teorema 4.1.1, que caracteriza os grafos split 2-admissíveis com grau máximo par que são vizinhança-sobrecarregados.

Teorema 4.1.1. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$, $\Delta(G)$ par, e seja P o conjunto de vértices pendentes de G . Então G é vizinhança-sobrecarregado se, e somente se, $\exists v \in X$, tal que v é universal em $G[V \setminus P]$, $\Delta(G[N[v]]) = \Delta(G)$ e $G[N[v]]$ é sobrecarregado.*

Demonstração. Suponha inicialmente que, $\exists v \in X$ universal em $G[V \setminus P]$ tal que $\Delta(G[N[v]]) = \Delta(G)$ e $G[N[v]]$ é sobrecarregado. Isto é precisamente a definição de grafo vizinhança-sobrecarregado e isto prova a suficiência do teorema. Resta mostrar que se G é vizinhança-sobrecarregado, então $\exists v \in X$ universal em $G[V \setminus P]$ tal que $\Delta(G[N[v]]) = \Delta(G)$ e $G[N[v]]$ é sobrecarregado. Se G é vizinhança-sobrecarregado, então $\exists x \in X$, tal que $d(x) = \Delta(G)$ e $G[N[x]]$ é sobrecarregado. Como G é um grafo split 2-admissível, sabemos que $\exists v \in X$ que é universal em $G[V \setminus P]$. Logo, pelo Lema 4.1.1, v não possui vizinhos pendentes. \square

A seguir, propomos um algoritmo para coloração das arestas de um grafo split 2-admissível Classe 1:

Algoritmo 4.1.1 Coloração de arestas de grafos split 2-admissíveis Classe 1

Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$, sem vértice universal tal que $\Delta(G)$ é par. Seja P o conjunto de vértices pendentes de G e v um vértice universal em $G[V \setminus P]$.

Fase 1:

- 1: Obter $H = G[N[v]]$
- 2: Colorir H utilizando o algoritmo da literatura apropriado para coloração de arestas de grafos com vértice universal ([43], [6])

Fase 2 (a partir daqui, só falta colorir arestas incidentes a vértices pendentes.):

- 3: Adicionar vértices que estão em $G[V \setminus H]$ construindo assim o grafo H' tal que $\Delta(H) = \Delta(H')$
- 4: Colorir as arestas incidentes a estes novos vértices que foram adicionados com as cores faltantes em cada vértice

Fase 3:

- 5: Inserir os vértices restantes, se existirem
 - 6: Para cada aresta adicionada nesta etapa incidente a um vértice de grau $\Delta(G)$, utilizar uma nova cor
 - 7: Aplicar, apropriadamente, estas cores às demais arestas adicionadas.
-

A figura abaixo ilustra uma aplicação do Algoritmo 4.1.1:

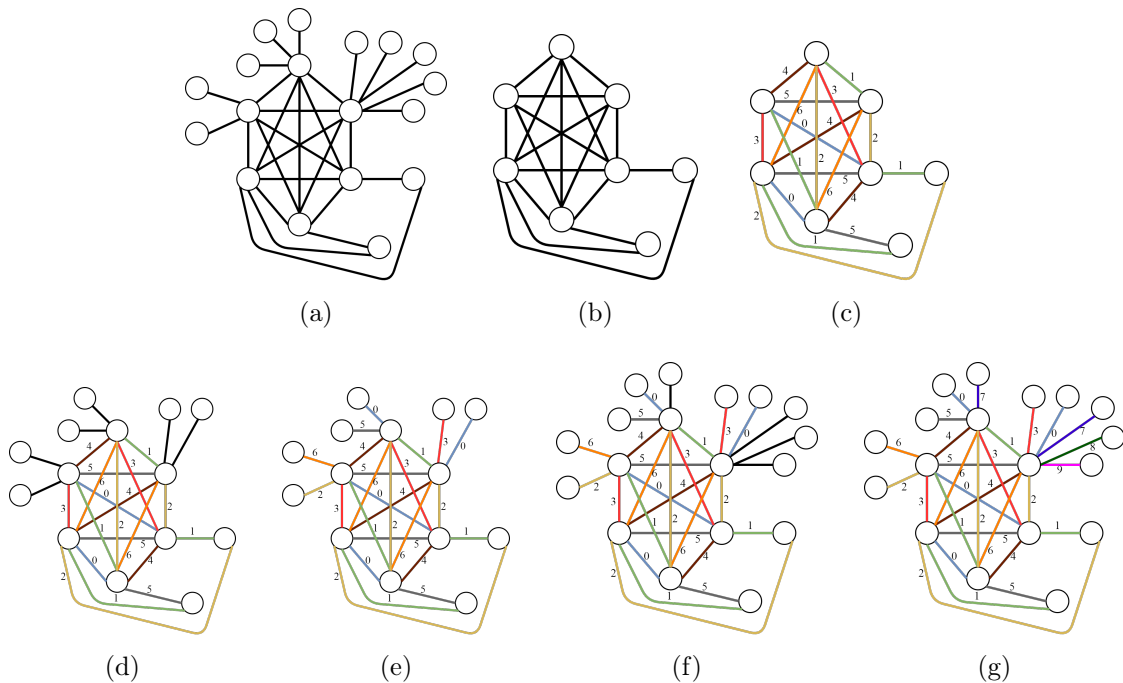


Figura 4.4: (a) Grafo split G 2-admissível. (b) Fase 1: Obtenção do subgrafo $H = G[N[v]]$. (c) Fase 1: Coloração das arestas de H . (d) Fase 2: Obtenção do subgrafo H' . (e) Fase 2: Coloração das arestas de H' . (f) Fase 3: Retorno ao grafo G . (g) Fase 3: Coloração das arestas de G .

Vamos demonstrar alguns resultados auxiliares sobre etapas do Algoritmo 4.1.1 que nos ajudarão a concluir a prova principal do teorema desta seção a seguir.

Lema 4.1.2. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$, sem vértice universal tal que $\Delta(G)$ é par. Após concluída a Fase 1 do Algoritmo 4.1.1, não são necessárias cores novas para completar a Fase 2 do Algoritmo 4.1.1.*

Demonstração. Note que se um vértice $v'' \in X$ teve aumento de grau na Fase 2, então $d_H(v'') < d_H(v)$. Temos então dois casos a tratar: H é Classe 1 ou H é Classe 2. No primeiro caso, existem pelo menos $d_H(v) - d_H(v'')$ cores que não são incidentes a v'' depois da coloração de H . Já no segundo caso, temos $d_H(v) + 1 - d_H(v'')$ cores disponíveis após a coloração de H . Em ambos casos, o número de arestas acrescentadas a v'' é exatamente $d_H(v) - d_H(v'')$, por construção. Como cada aresta acrescentada é incidente a um vértice pendente de Y , basta colorir cada uma com uma cor disponível e garantimos que não mais que $\chi'(H)$ cores foram usadas em H' . \square

Lema 4.1.3. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$, sem vértice universal tal que $\Delta(G)$ é par. Após concluída a Fase 2 do Algoritmo 4.1.1, na Fase 3, são usadas, no máximo, $d(v') - d(v)$ novas cores para completar a $\Delta(G)$ -coloração das arestas de G , onde v' denota um vértice de grau $\Delta(G)$.*

Demonstração. De fato, se H é Classe 1, então vamos acrescentar uma nova cor para cada aresta adicionada a v' . Note que isso finaliza uma $\Delta(G)$ -coloração de arestas de G uma vez que cada aresta adicionada leva ao aumento do grau máximo do grafo em uma unidade. O uso destas cores é aplicado a todos os vértices do grafo com acréscimo de arestas na Fase 3 e não há conflito, pois as arestas adicionadas são arestas incidentes a vértices pendentes de Y . Por outro lado, se H é Classe 2, então foram usadas $\Delta(H) + 1$ cores na coloração das Fases 1 e 2. Como, na Fase 2, o número de cores disponíveis é uma unidade maior do que o número de cores necessárias para colorir as arestas adicionadas a cada vértice, na Fase 3, são necessárias $d(v') - d(v) - 1$ novas cores para completar a $\Delta(G)$ -coloração de G . \square

Teorema 4.1.2. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$ e $\Delta(G)$ par. Então G é Classe 2 se, e somente se, G é vizinhança-sobrecarregado. Além disso, a coloração dos grafos split com $\sigma(G) = 2$ que não são vizinhança-sobrecarregados é realizada por meio do Algoritmo 4.1.1 e o mesmo está correto.*

Demonstração. Suponha, inicialmente, que G é vizinhança-sobrecarregado. Logo, G é Classe 2 pelo Fato 3.1.1. Resta mostrar que se G é Classe 2, então G é vizinhança-sobrecarregado. Tomemos a contrapositiva de tal implicação, i.e, se G não é vizinhança-sobrecarregado, então G é Classe 1. Pelo Teorema 4.1.1, se G não é vizinhança-sobrecarregado, então $\forall v \in X$ universal em $H = G[V \setminus P]$,

$\Delta(H) \neq \Delta(G)$ ou H não é sobrecarregado. Vamos mostrar que, em todos os casos, conseguimos colorir G com $\Delta(G)$ cores utilizando o Algoritmo 4.1.1. Suponha inicialmente que $\forall v \in X$ universal em $G[V \setminus P]$, $\Delta(H) \neq \Delta(G)$, ou seja, que exista um outro vértice $v' \in X$, tal que $d(v) < d(v') = \Delta(G)$. Na Fase 1 do Algoritmo 4.1.1 colorimos H . Este grafo possui um vértice universal e, portanto, sabemos determinar seu índice cromático através dos algoritmos citados na Subseção 2.3.1. De fato, se $|V(H)|$ é par e H tem um vértice universal, então H é um subgrafo de um K_{2n} , e, pela Observação 2.3.2, isto implica que H é Classe 1 e $\Delta(H)$ cores são usadas na sua coloração. Por outro lado, se $|V(H)|$ é ímpar, sabemos pelo Teorema 2.3.2 que H é Classe 1 se, e somente se, H não é subgrafo-sobrecarregado. Assim, temos dois subcasos, a saber: H é Classe 1 ou H é Classe 2. Para a Fase 2, conseguimos manter o mesmo subconjunto de cores utilizado na coloração de H , o que é demonstrado pela Afirmação 4.1.2. Por fim, na Fase 3, vamos adicionar todos os vértices restantes ao subgrafo H' até que H' se torne o grafo G inicial. Note que, na Fase 3, o número máximo de arestas que são adicionadas a um vértice é $d(v') - d(v)$, onde v' é um vértice de grau máximo em G . A Afirmação 4.1.3 garante a corretude desta etapa. Para finalizar a prova, suponha agora que $\Delta(H) = \Delta(G)$ mas que H não seja sobrecarregado. Neste caso, não há Fase 3 no Algoritmo 4.1.1. Note que, neste caso, H é sempre Classe 1 pois, caso contrário, G seria vizinhança-sobrecarregado. Em qualquer caso apresentado, concluímos que é possível estender a coloração de H para G sem necessitar de mais que $\Delta(G)$ cores e isso conclui a prova. \square

Esta demonstração e o Teorema 3.1.1 mostram que duas famosas conjecturas no âmbito da coloração de arestas são verdadeiras considerando a classe dos grafos split 2-admissíveis.

A primeira delas, e mais conhecida, é a Conjectura de Hilton [17]. Esta conjectura visa caracterizar grafos em geral cujo grau máximo é maior que um terço de sua quantidade de vértices. Como a caracterização que fornecemos acima vale para qualquer grafo split 2-admissível, sabemos que a mesma é satisfeita por tal classe de grafos.

Conjectura 4.1.1. [17] *Seja G um grafo com $\Delta(G) > |V(G)|/3$. G é Classe 1 se, e somente se, G não é subgrafo-sobrecarregado.*

Teorema 4.1.3. *A classe dos grafos split 2-admissíveis satisfaz a Conjectura 4.1.1.*

Demonstração. Segue como consequência direta da Prova do Teorema 4.1.2. \square

Já a Conjectura 4.1.2 dos autores Figueiredo et. al, pressupõe que grafos cordais sejam Classe 2 se, e somente se, são subgrafo-sobrecarregados. E pelo Teorema 2.3.5, este conceito é equivalente ao de ser vizinhança-sobrecarregado, quando

restrito à classe dos grafos split, que é a condição da caracterização fornecida pelo Teorema 4.1.2.

Conjectura 4.1.2. [20] *Seja G um grafo cordal. G é Classe 2 se, e somente se, G é subgrafo-sobrecarregado.*

Como consequência do Lema 4.1.1, podemos reescrever o Teorema 4.1.2 da seguinte forma:

Corolário 4.1.1. *Sejam $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$, $\Delta(G)$ par e $A = \{a_i \mid d(a_i) = \Delta(G)\}$. G é Classe 2 se, e somente se, $\exists a_i$ sem pendentes e $G[N[a_i]]$ é sobrecarregado.*

Note que, para o reconhecimento de um grafo split G 2-admissível com $\Delta(G)$ par que não é vizinhança-sobrecarregado, podemos, pelo Lema 4.1.1, excluir alguns dos vértices de grau máximo, pois este lema garante que somente os vértices universais em $G[V \setminus P]$ são possíveis candidatos a induzirem, com sua vizinhança fechada, um subgrafo sobrecarregado. Além disso, se todos esses candidatos possuírem vértices pendentes, ainda pelo Lema 4.1.1, podemos concluir que G não é subgrafo-sobrecarregado. Consequentemente, pelo Teorema 4.1.2, podemos enunciar a seguinte condição suficiente:

Corolário 4.1.2. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$, $A = \{a_i \mid d(a_i) = \Delta(G)$ e a_i é universal em $G[V \setminus P]\}$. Se todo a_i possui um ou mais pendentes, G é Classe 1.*

4.2 Número Cromático Total de grafos split 2-admissíveis

Como foi dito na subseção 2.3.3, os grafos split satisfazem a Conjectura 2.2.1 e isto implica que, para qualquer grafo split G , $\Delta(G) + 1 \leq \chi''(G) \leq \Delta(G) + 2$. Entretanto, ainda assim é um problema em aberto decidir se um grafo split qualquer é Tipo 1. Sabemos ainda, que toda árvore é Tipo 1, exceto o K_2 , que é Tipo 2[52]. Logo, como consequência, temos:

Teorema 4.2.1. [52] *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split 1-admissível que não seja isomorfo ao K_2 . Então G é Tipo 1. Se G é isomorfo ao K_2 , G é Tipo 2.*

Nesta seção caracterizamos os grafos split 2-admissíveis quanto ao número cromático total. Tal demonstração é algorítmica assim como a demonstração da classificação de grafos split 2-admissíveis exibida na seção anterior. Neste algoritmo utilizamos fortemente a caracterização de grafos split 2-admissíveis. O algoritmo

possui como etapa inicial a coloração de um subgrafo induzido pela vizinhança fechada de v , onde v denota um vértice que é adjacente a todos os vértices de Y cujo grau é maior ou igual a 2. O motivo desta estratégia é por conta deste subgrafo conter todos vértices de G que possuam grau maior ou igual a 2. Podemos garantir a existência do vértice v , pois estamos lidando com grafos split 2-admissíveis. Mais especificamente, os únicos vértices de G , que não estão em $G[N[v]]$ são alguns vértices pendentos. O Teorema 4.2.3, enunciado a seguir, utiliza fortemente a Condição de Hilton que foi descrita no Teorema 2.3.10. Vamos, entretanto, para a comodidade do leitor, rerepresentar a Condição de Hilton a seguir. Esta condição caracteriza grafos simples com um número par de vértices e que possuam um vértice universal que são $(\Delta(G) + 1)$ -coloríveis totalmente.

Teorema 4.2.2. (*Condição de Hilton*) [29] *Seja G um grafo simples com um número par de vértices. Se G possui um vértice universal, então G é Tipo 2 se, e somente se, $|E(\overline{G})| + \alpha'(\overline{G}) < |V(G)|/2$, onde $\alpha'(\overline{G})$ denota o tamanho do emparelhamento máximo de \overline{G} .*

Como fizemos na seção anterior, vamos enunciar um algoritmo que realiza a coloração total de um grafo split 2-admissível Tipo 1:

Algoritmo 4.2.1 Coloração total de grafos split 2-admissíveis Tipo 1

Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$ e seja P o conjunto de vértices pendentos de G . Seja v o vértice universal em $G[V \setminus P]$.

Fase 1:

- 1: Obter $H = G[N[v]]$
 - 2: Colorir H utilizando algoritmo da literatura apropriado [15]
- Fase 2 (a partir de agora restam apenas vértices pendentos e arestas incidentes a eles para serem coloridas. Nas fases 2 e 3 colorimos apenas arestas.):
- 3: Adicionar vértices que estão em $V(G) \setminus V(H)$ construindo assim o grafo H' tal que $\Delta(H) = \Delta(H')$
 - 4: Colorir as arestas incidentes a estes novos vértices que foram adicionados com as cores faltantes em cada vértice

Fase 3:

- 5: Inserir os vértices restantes, se existirem
- 6: Para cada aresta adicionada nesta etapa incidente a um vértice de grau $\Delta(G)$, utilizar uma nova cor
- 7: Aplicar, apropriadamente, estas cores às demais arestas adicionadas

Fase 4 (restam apenas os vértices pendentos para serem coloridos):

Seja zw uma aresta adicionada na Fase 2 ou na Fase 3, onde $z \in Y$ e $w \in X$

- 8: Colorir cada vértice pendente z com alguma cor já utilizada nas arestas de w já coloridas, exceto a cor usada na aresta zw .
-

A figura abaixo ilustra uma aplicação do Algoritmo 4.2.1:

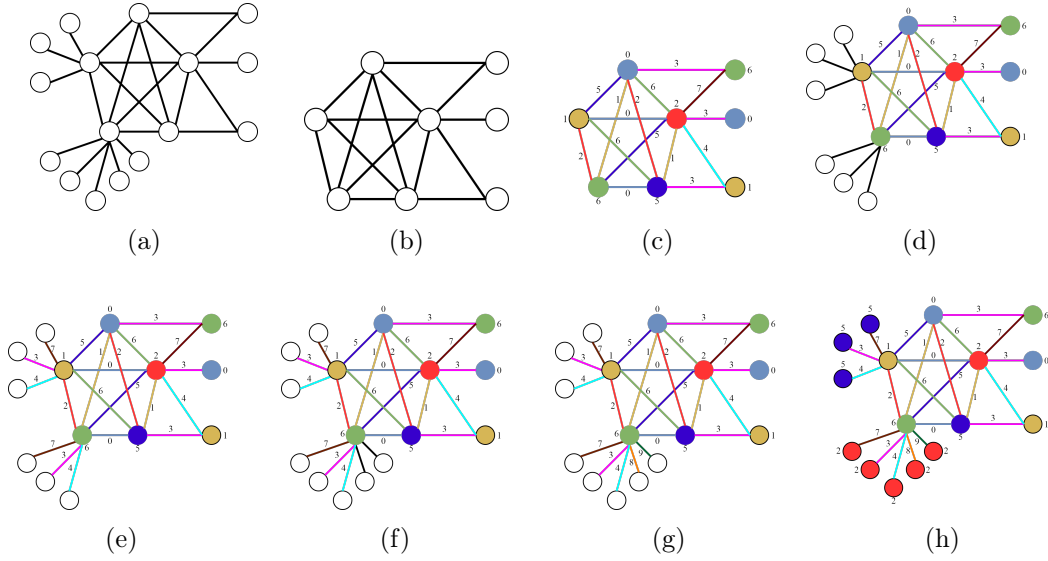


Figura 4.5: (a) Grafo split G 2-admissível. (b) Fase 1: Obtenção do subgrafo $H = G[N[v]]$. (c) Fase 1: Coloração das arestas de H . (d) Fase 2: Obtenção do subgrafo H' . (e) Fase 2: Coloração das arestas de H' . (f) Fase 3: Retorno ao grafo G . (g) Fase 3: Coloração das arestas de G . (h) Fase 4: Coloração dos vértices pendentes adicionados durante as Fases 1 e 2.

Vamos demonstrar alguns resultados auxiliares sobre etapas do Algoritmo 4.2.1 que nos ajudarão a concluir a prova principal do teorema desta seção a seguir.

Lema 4.2.1. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$. Concluída a Fase 1 do Algoritmo 4.2.1, não são necessárias cores novas para a conclusão da Fase 2.*

Demonstração. Note que, se um vértice $v'' \in X$ teve aumento de grau na Fase 2, então $d_H(v'') < d_H(v)$. Temos então dois casos a tratar: H é Tipo 1 ou H é Tipo 2. No primeiro caso, existem pelo menos $d_H(v) + 1 - d_H(v'')$ cores que não são incidentes a v'' depois da coloração de H . Já no segundo caso, temos $d_H(v) + 2 - d_H(v'')$ cores disponíveis após a coloração de H . Em ambos casos, o número de arestas acrescentadas a v'' é exatamente $d_H(v) - d_H(v'')$, por construção. Como cada aresta acrescentada é incidente a um vértice pendente de Y , basta colorir cada uma com uma cor disponível. Para a coloração de cada vértice z pendente adicionado durante a Fase 2, temos $d(w) - 1$ cores disponíveis para colorir z , onde w é vizinho de z . Como z é pendente, a única cor que z não pode receber é a cor da aresta zw . Portanto, ao fim da fase 2, garantimos que não mais que $\chi''(H)$ cores foram usadas em H' . \square

Lema 4.2.2. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$. Concluída a Fase 3 do Algoritmo 4.2.1, são usadas, no máximo, $d(v') - d(v)$ novas cores para completar a $(\Delta(G) + 1)$ -coloração total de G , onde v' é um vértice de G tal que $d(v') = \Delta(G)$.*

Demonstração. De fato, se H é Tipo 1, então vamos acrescentar uma nova cor para cada aresta adicionada a v' . Note que isso finaliza uma $\Delta(G)$ -coloração das arestas de G uma vez que cada aresta adicionada leva ao aumento do grau máximo do grafo em uma unidade. O uso destas cores é aplicado a todos às arestas incidentes aos vértices do grafo cujos graus subiram na Fase 3 e não há conflito, pois as arestas adicionadas são arestas incidentes a vértices pendentos de Y . Por outro lado, se H é Tipo 2, então foram usadas $\Delta(H) + 2$ cores na coloração das Fases 1 e 2. Como, na Fase 2, o número de cores disponíveis é uma unidade maior do que o número de cores necessárias para colorir as arestas adicionadas a cada vértice, na Fase 3, são necessárias $d(v') - d(v) - 1$ novas cores para completar a $\Delta(G) + 1$ -coloração total de G . \square

Teorema 4.2.3. *Seja $G = ((X, Y), E)$ um grafo split com $\sigma(G) = 2$ e seja P o conjunto de vértices pendentos de G . G é Tipo 2 se, e somente se, $\exists v \in X$ universal em $G[V \setminus P]$ tal que $d(v) = \Delta(G)$ e $G[N[v]]$ satisfaz a condição de Hilton.*

Demonstração. Inicialmente, temos dois casos: $\Delta(G)$ par e $\Delta(G)$ ímpar. Se $\Delta(G)$ é par, então G é Tipo 1 pelo Teorema 2.3.9. Se $\Delta(G)$ é ímpar, seja $v \in X$ universal em $G[V \setminus P]$ com maior grau possível e considere $H = G[N[v]]$. Note que, ou $d(v) = \Delta(G)$ ou $\exists v' \in X, v' \neq v$ tal que $d(v') = \Delta(G)$. Se $d(v) = \Delta(G)$ então $|V(H)|$ é par, e, conseqüentemente, H é Tipo 2 se, e somente se, satisfaz a Condição de Hilton. E portanto, G é Tipo 2 visto que já precisamos de $\Delta(G) + 2$ cores em um subgrafo de G , que também tem grau máximo $\Delta(G)$. Por outro lado, se $d(v) = \Delta(G)$ então $|V(H)|$ é par e a Condição de Hilton não é satisfeita, H é Tipo 1, e ao aplicarmos o Algoritmo 4.2.1, conseguimos colorir G , totalmente, com $\Delta(G) + 1$ cores. Se $d(v) < \Delta(G)$ e $d(v)$ é par, então, pelo Teorema 2.3.9, podemos colorir H com $\Delta(H) + 1$ cores. A Afirmação 4.2.1 garante que atinjamos a Fase 3 tendo usado não mais que $\chi''(H)$ cores. Além disso, a Afirmação 4.2.2 garante que, ao fim do Algoritmo 4.2.1 tenhamos usado $\Delta(G) + 1$ cores. Para a coloração de cada vértice pendente z , utilizamos uma das cores utilizadas nas arestas de w a menos da cor da aresta zw , tal que w é o vizinho de z na clique X , e portanto G é Tipo 1 neste caso. Se $d(v) < \Delta(G)$ e $d(v)$ é ímpar, isto implica que $|V(H)|$ é par. Sabemos que H é Tipo 2 se, e somente se, H satisfaz a Condição de Hilton. Se a Condição de Hilton é satisfeita, $\Delta(H) + 2$ cores já estão sendo usadas em H entretanto, vamos mostrar que G é Tipo 1. Novamente, pela Afirmação 4.2.1, após o fim da Fase 2, temos uma cor a mais para colorir as arestas restantes (que serão adicionadas na Fase 3). Isto implica que, existirão $\Delta(G) - \Delta(H)$ novas arestas, mas apenas $\Delta(G) - \Delta(H) - 1$ cores serão necessárias para as arestas. Para os vértices, utilizamos a estratégia da Fase 4 e isto mostra que G um grafo Tipo 1. Se a Condição de Hilton não é satisfeita, concluímos que H é Tipo 1 e, usando o Algoritmo 4.2.1,

conseguimos estender a coloração para todo G . Logo, G é também Tipo 1 neste caso. \square

O Teorema 4.2.3 nos fornece então uma maneira algorítmica de realizar a coloração total de grafos split 2-admissíveis com as restrições impostas ao longo desta subseção. Este resultado, por sua vez, utiliza fortemente a Condição de Hilton e as propriedades estruturais dos grafos split no contexto do PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE.

Capítulo 5

Conclusão e Trabalhos Futuros

Os problemas de coloração são objetos de estudo de muitos pesquisadores desde que surgiram e, embora sejam NP-completos no geral, a incerteza acerca de diversas classes no contexto destes problemas motiva o estudo detalhado de cada uma destas classes. Uma destas classes que é amplamente estudada tanto no problema de coloração de arestas, como no problema de coloração total é a classe dos grafos split, que também é a classe tratada aqui neste estudo. Neste trabalho, partimos de uma abordagem mais indireta, que foi a de particionar os grafos split por meio de um outro problema conhecido como PROBLEMA DA t -ADMISSIBILIDADE. Conseguimos então, através deste segundo problema particionar o universo dos grafos split em três subconjuntos: os grafos split com $\sigma(G) = 1$, $\sigma(G) = 2$ e $\sigma(G) = 3$. Os grafos split com $\sigma(G) = 1$ são bi-estrelas, ou seja, são árvores e como tal, já conhecemos seu índice cromático e seu número cromático total. Caracterizamos completamente os grafos split 2-admissíveis quanto ao seu índice cromático e quanto ao seu número cromático total. Esta nova visão não só nos forneceu uma perspectiva muito interessante para os problemas de coloração, como também deu indícios sobre possíveis novos resultados acerca da classe dos grafos split. Para fecharmos os grafos split, resta caracterizar os grafos split com $\sigma(G) = 3$ tanto em relação ao seu índice cromático quanto ao seu número cromático total. A figura abaixo ilustra o panorama da literatura sobre o problema da coloração de arestas quando restrito à classe dos grafos split.

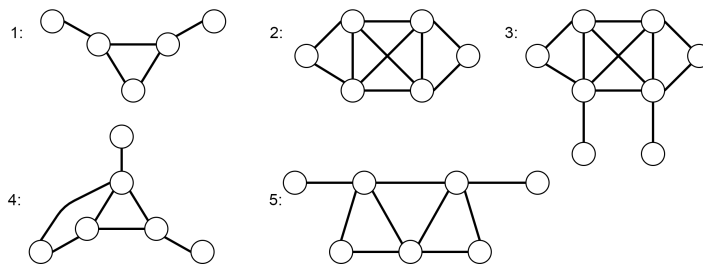
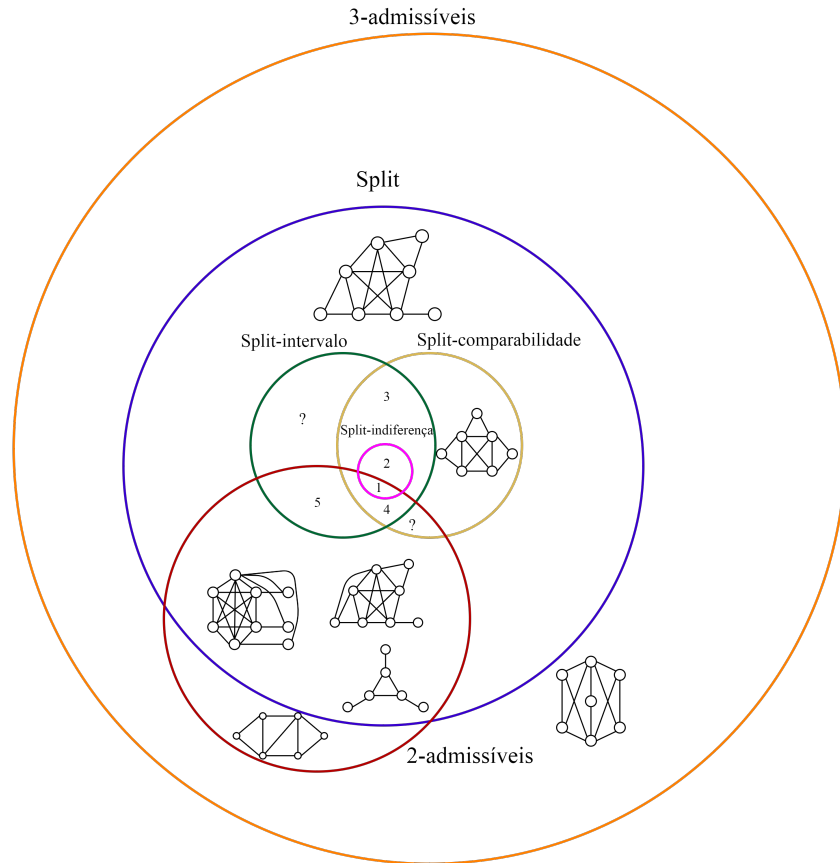


Figura 5.1: Diagrama que mostra o que se sabe sobre a coloração de arestas de grafos split e subclasses relacionadas. A região que estudamos neste trabalho é a região delimitada pela circunferência vermelha. As regiões marcadas com um ponto de interrogação são regiões que testes iniciais demonstraram ser vazias.

Justamente, sob este contexto, que surgem nossas pretensões para trabalhos futuros, que é a de abordar os grafos split 3-admissíveis. Em alguns exemplos simples e casos iniciais, já obtivemos resultados para algumas subclasses dos grafos split 3-admissíveis. Além disso, pretendemos estudar outras variantes do problema da coloração, como a coloração equilibrada, no contexto de grafos split com $\sigma(G) = 2$ e $\sigma(G) = 3$.

Referências Bibliográficas

- [1] Almeida, S. (2012). *Coloração de Arestas em Grafos Split*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.
- [2] Appel, K. and Haken, W. (1976). Every planar map is four colorable. *Bulletin of The American Mathematical Society - BULL AMER MATH SOC*, 82.
- [3] Awerbuch, B., Baratz, A., and Peleg, D. (1992). Efficient broadcast and light-weight spanners. *Manuscript*.
- [4] Barman, S., Mondal, S., and Pal, M. (2014). Computation of a tree 3-spanner on trapezoid graphs. *CoRR*.
- [5] Behzad, M. (1965). *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University.
- [6] Behzad, M., Chartrand, G., and Cooper, J. (1967). The colour numbers of complete graphs. *J. London Math. Soc.*, 42.
- [7] Bodlaender, H. L. and Jansen, K. (1994). On the complexity of the maximum cut problem. In Enjalbert, P., Mayr, E. W., and Wagner, K. W., editors, *STACS 94*, pages 769–780, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg.
- [8] Bondy, J. (1989). Trigraphs. *Discrete Mathematics*, 75:69–79.
- [9] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). *Graph Theory with Applications*. Elsevier, New York.
- [10] Brandstädt, A., Dragan, F. F., and et al., H.-O. L. (2004). Tree spanners on chordal graphs: Complexity and algorithms. *Theoretical Computer Science*, 310:329–354.
- [11] Brooks, R. L. (1941). On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37(2):194–197.
- [12] Cai, L. and Corneil, D. G. (1995). Tree spanners. *SIAM J. Discrete Math.*, 8:359–387.

- [13] Campos, C., de Figueiredo, C., Machado, R., and de Mello, C. (2012). The total chromatic number of split-indifference graphs. *Discrete Mathematics*, 312(17):2690–2693. Proceedings of the 8th French Combinatorial Conference.
- [14] Cayley, A. (1889). A theorem on trees. *Quart. J. Pure Appl. Math*, 13:376–378.
- [15] Chen, B.-L., Fu, H.-L., and Ko, M.-T. (1995). Total chromatic number and chromatic index of split graphs. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 17.
- [16] Chen, B.-L. and Yen, C.-H. (2012). Equitable δ -coloring of graphs. *Discrete Mathematics*, 312(9):1512–1517. Recent Trends in Graph Theory and Combinatorics.
- [17] Chetwynd, A. and Hilton, A. (1986). Star multigraphs with three vertices of maximum degree. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 100:303 – 317.
- [18] Chew, L. P. (1986). There are planar graphs almost as good as the complete graph. *Journal of Computer and System Sciences*, 39:205–219.
- [19] Couto, F. and Cunha, L. (2020). Hardness and efficiency on minimizing maximum distances in spanning trees. *Theoretical Computer Science*, 838.
- [20] de Figueiredo, C. M. H., Meidanis, J., and de Mello, C. P. (2000). Local conditions for edge-coloring. In *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, volume 32, pages 79–92.
- [21] de Figueiredo, C. M. H., Meidanis, J. a., and de Mello, C. P. (1999). Total-chromatic number and chromatic index of dually chordal graphs. *Inf. Process. Lett.*, 70(3):147–152.
- [22] de Sousa Cruz, J., Silva, C., and Almeida, S. (2017). The overfull conjecture on split-comparability graphs.
- [23] Fekete, S. and Kremer, J. (1998). Tree spanners in planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, pages 298–309.
- [24] Garey, M., Johnson, D., and Stockmeyer, L. (1976). Some simplified np-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1(3):237–267.
- [25] Golumbic, M., Kaplan, H., and Shamir, R. (1995). Graph sandwich problems. *Journal of Algorithms*, 19(3):449–473.

- [26] Gonzaga, L. (2021). Coloração de arestas em grafos split-comparabilidade e split-intervalos. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação.
- [27] Hajós, G. (1957). Über eine art von graphen, internat. *Math. Nachr*, 11.
- [28] Hassin, R. and Tamir, A. (1995). On the minimum diameter spanning tree problem. *Information Processing Letters*, 53:109–111.
- [29] Hilton, A. (1990a). A total chromatic number analogue of plantholt’s theorem. *Discrete Mathematics*, 79:169–175.
- [30] Hilton, A. J. W. (1990b). A total-chromatic number analogue of plantholt’s theorem. *Discrete Math.*, 79(2):169–175.
- [31] Holyer, I. (1981). The np-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10:718–720.
- [32] Hopcroft, J. E. and Tarjan, R. E. (1973). Dividing a graph into triconnected components. *SIAM Journal on Computing*, 2(3):135–158.
- [33] König, D. (1916). Graphok és alkalmazásuk a determinánsok és a halmazok eleméletére. (Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre.). *Mat. Természett. Értes.*, 34:104–119.
- [34] Liestman, A. and Shermer, T. (1993). Additive graph spanners. *Networks*, 23:343 – 363.
- [35] Maffray, F. (2003). *On the coloration of perfect graphs*, pages 65–84. Springer New York, New York, NY.
- [36] Mahadev, N. and Peled, U. (1995). Threshold graphs and related topics. 56.
- [37] Marx, D. (2011). Complexity of clique coloring and related problems. *Theoretical Computer Science*, 412(29):3487–3500.
- [38] Ortiz, C., Maculan, N., and Szwarcfiter, J. L. (1998). Characterizing and edge-colouring split-indifference graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 82(1):209–217.
- [39] Ortiz, C. and Villanueva, M. (1996). On split-comparability graphs. *In Proc. II ALIO-EURO Workshop on Pratical Combinatorial Optmization*, pages 91–105.
- [40] P., H. and D., K. (2007). Linear-time certifying recognition algorithms and forbidden induced subgraphs. *Nord. J. Comput.*, 14:87–108.

- [41] Panda, B. and Das, A. (2010). Tree 3-spanners in 2-sep chordal graphs: Characterization and algorithms. *Discrete Applied Mathematics*, 158:1913–1935.
- [42] Peleg, D. and Ullman, J. (1987). An optimal synchronizer for the hypercube. *In Proceedings of the 6th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, 18:77–85.
- [43] Plantholt, M. (1981). The chromatic index of graphs with a spanning star. *J. Graph Theory*, 5:45–53.
- [44] Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P., and Graham, C. (1996). A new proof of the four-colour theorem. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 2.
- [45] Swofford, D. L. (1990). Phylogeny reconstruction. *Molecular Systematics*, pages 411–501.
- [46] Szwarcfiter, J.L. e Markenzon, L. (1994). *Estruturas de dados e seus algoritmos*. Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- [47] Sánchez-Arroyo, A. (1989). Determining the total colouring number is np-hard. *Discrete Mathematics*, 78(3):315–319.
- [48] Vizing, V. (1964). On an estimate of the chromatic class of a p-graph (in russian). *(Russian) Diskret Analiz*, 3.
- [49] Vizing, V. (1968). Some unsolved problems in graph theory (russian). *Russian Mathematical Surveys - RUSS MATH SURVEY-ENGL TR*, 23:125–141.
- [50] West, D. B. (2000). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, New Jersey, 2 edition.
- [51] Wilson, R. and Watkins, J. (1991). Graphs: An introductory approach. *The Mathematical Gazette*, 75.
- [52] Yap, H. P. (1989). Total Colourings of Graphs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 21(2):159–163.