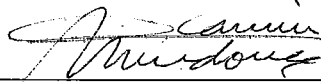


ALGUNS RESULTADOS EM INVARIANTES DE NÃO PLANARIDADE EM  
GRAFOS: UMA ABORDAGEM ESTRUTURAL E DE COMPLEXIDADE

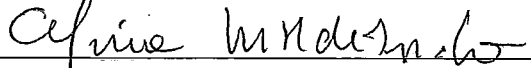
Luerbio Faria

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PRO-  
GRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NE-  
CESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM  
ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

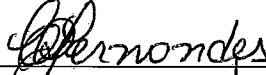
Aprovada por:



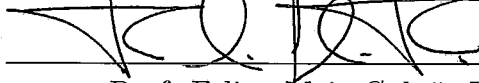
Prof. Candido F. Xavier de Mendonça, Ph.D.



Prof<sup>a</sup>. Celina M. Herrera de Figueiredo, D.Sc.



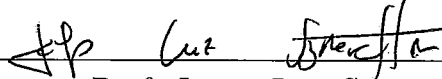
Prof<sup>a</sup>. Cristina Gomes Fernandes, Ph.D.



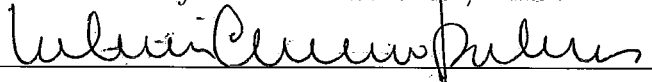
Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.



Prof<sup>a</sup>. Inês de Castro Dutra, Ph.D.



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

AGOSTO DE 1998

FARIA, LUERBIO

Alguns Resultados em Invariantes de Não Planaridade em Grafos: uma Abordagem Estrutural e de Complexidade [Rio de Janeiro] 1998

VIII, 110 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1998)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

- 1 - Teoria dos grafos
- 2 - Invariantes de Planaridade
- 3 - Classes de Grafos
- 4 - Complexidade
- 5 - splitting number
- 6 - subgrafo planar máximo
- 7 - crossing number

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*para Moniquinha  
minha esposinha  
mais linda e  
para Marcelinho  
meu amiguinho mais  
querido <sup>1</sup>*

---

<sup>1</sup>Moniquinha=Monica Grillo de Abreu, Marcelinho=Marcelo do Almo Vicente

Agradeço por tudo ao criador de tudo.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

## Alguns Resultados em Invariantes de Não Planaridade em Grafos: uma Abordagem Estrutural e de Complexidade

Luerbio Faria

Agosto/1998

Orientadora : Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Nesta tese nós estudamos quatro invariantes de não planaridade em grafos. O número mínimo de cruzamentos de arestas para um desenho no plano (*crossing number*), o número máximo de arestas em um subgrafo planar (*maximum planar subgraph*), o número mínimo de arestas cuja remoção obtém um grafo planar (*skewness*) e o número mínimo de “divisões” de vértices, em pares de vértices não adjacentes, que obtém um grafo planar (*splitting number*). Nós estudamos estes invariantes para a classe dos grafos  $n$ -cubos. Nós provamos que o *splitting number* do 4-cubo é 4. Nós usamos este resultado para exibir um limite inferior para o *splitting number* do  $n$ -cubo. Nós exibimos um limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo melhorando o limite superior de Madej, o único limite superior conhecido para o *crossing number* do  $n$ -cubo. E nós provamos que a conjectura de Guy e Erdős para o *crossing number* do  $n$ -cubo é válida para os 6-, 7- e 8-cubos. Nós provamos que as versões de decisão dos problemas *splitting number*, *skewness* e *maximum planar subgraph* são NP-completas para grafos cúbicos. Nós provamos que as versões de otimização dos problemas *splitting number* e *skewness* são MAX SNP-difíceis para grafos cúbicos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## Some Results About Nonplanarity Invariants in Graphs: an Analysis of Structure and Complexity

Luerbio Faria

August, 1998

Thesis Supervisor : Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Department : Computing and Systems Engineering

In this thesis we study four invariants of nonplanarity in graphs. The minimum number of crossings of edges for a drawing in the plane (crossing number), the maximum number of edges in a planar subgraph (maximum planar subgraph), the minimum number of edges whose removal obtains a planar graph (skewness) and the minimum number of splittings of vertices that obtains a planar graph (splitting number). We study these invariants for the class of the  $n$ -cube graphs. We prove that the splitting number of the 4-cube is 4. And we use this fact to exhibit a lower bound for the splitting number of the  $n$ -cube. We exhibit an upper bound for the crossing number of the  $n$ -cube improving the upper bound of Madej, the only known upper bound for the crossing number of the  $n$ -cube. And we prove that the conjecture of Guy and Erdős for the crossing number of the  $n$ -cube holds for the 6-, 7- and 8-cubes. We prove that the corresponding decision problem versions for splitting number, skewness and maximum planar subgraph are NP-complete for cubic graphs. We prove that the corresponding optimization problem versions for splitting number and skewness are MAX SNP-hard for cubic graphs.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação do trabalho desenvolvido . . . . .	1
1.2	Teoria dos grafos e planaridade, definições básicas . . . . .	5
1.2.1	O grafo $n$ -cubo . . . . .	8
1.3	Os invariantes estudados . . . . .	9
1.3.1	Sobre a relevância do <i>splitting number</i> . . . . .	12
1.4	Sobre complexidade . . . . .	13
1.4.1	Problemas de decisão . . . . .	13
1.4.2	Problemas de otimização . . . . .	16
<b>2</b>	<b>O <i>splitting number</i> do 4-cubo</b>	<b>18</b>
2.1	O <i>splitting number</i> do 4-cubo é 4 . . . . .	19
<b>3</b>	<b>A respeito da conjectura de Guy e Erdős para o <i>crossing number</i> do <math>n</math>-cubo</b>	<b>28</b>
3.1	A confirmação da conjectura de Guy e Erdős para os valores de $n = 6, 7$ e $8$ . . . . .	29
3.2	Um limite superior para o <i>crossing number</i> do $n$ -cubo . . . . .	34
<b>4</b>	<b>A respeito da NP-completude dos invariantes estudados</b>	<b>57</b>
4.1	Preliminares . . . . .	57

4.2	A NP-completude dos problemas de decidir o <i>splitting number</i> , <i>sub-grafo planar máximo</i> e <i>skewness</i> restritos a grafos cúbicos . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Sobre a não aproximabilidade para SPLITTING NUMBER e REMOÇÃO DE ARESTAS</b>	<b>86</b>
5.1	A respeito de 3SAT . . . . .	88
5.2	SPLITTING NUMBER MÍNIMO e REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA são problemas em MAX SNP-difícil . . . . .	94
5.2.1	MINSN $\Delta$ 3 é MAX SNP-difícil . . . . .	94
5.2.2	MINRA $\Delta$ 3 é MAX SNP-difícil . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>101</b>



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Apresentação do trabalho desenvolvido

O conceito de cruzamentos de arestas em desenhos de grafos já existe há muito tempo. Em 1930, K. Kuratowski utilizou este conceito em seu famoso artigo “Sur le problème des courbes gauches en topologie” [26]. Neste artigo Kuratowski mostrou que um grafo é planar, se e somente se ele não contém uma subdivisão de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  como subgrafo. Assim, quando um grafo não é planar uma questão natural que se coloca é: o quão longe de planar está o grafo? Dessa forma surgiram as medidas de não planaridade. Dado um grafo  $G$ , algumas das medidas mais conhecidas de não planaridade em grafos são o número mínimo de cruzamentos de arestas para um desenho no plano ( $\nu(G)$ , o *crossing number* de  $G$ ), o número máximo de arestas em um subgrafo planar (*subgrafo planar máximo*) e o problema complementar: o número mínimo de arestas cuja remoção do grafo resulta em um grafo planar ( $\kappa(G)$ , a *skewness* de  $G$ ). Mais recentemente, considerou-se também o número mínimo de operações de *splitting* de vértice que obtêm um grafo planar a partir de  $G$  ( $\sigma(G)$ , o *splitting number* de  $G$ ), onde uma operação de *splitting* do vértice  $v$  substitui o vértice  $v$  por dois vértices  $v_1$  e  $v_2$  não adjacentes particionando a vizinhança de  $v$  ( $\text{viz}(v)$ ) em dois conjuntos não vazios:  $\text{viz}(v_1)$  e  $\text{viz}(v_2)$ . Nesta tese estudamos estes quatro invariantes.

Estes invariantes ocupam um lugar de destaque na ciência da computação, porque muitas aplicações em ciência da computação são modeladas por grafos não planares. Em 1981, Leighton [27] mostrou que o *crossing number* de um grafo pode ser usado para obter limites inferiores para a área mínima requerida pelo grafo em um circuito de VLSI. Aplicações em problemas de otimização muitas vezes requerem a maximalidade do número de arestas em um subgrafo planar de um grafo. As operações de *splitting* têm sido muito usadas, recentemente, em visualização em grafos e técnicas de *layout* [9, 32, 10].

Liu e Goldmacher em 1978 [30], Garey e Johnson em 1983 [17] e Faria, Figueiredo e Mendonça em 1997 [14] mostraram que os problemas de decidir, respectivamente a *skewness*, o *crossing number* e o *splitting number* em um grafo são NP-completos. A dificuldade para determinar os valores para estes invariantes pode por vezes, justificar artigos nos quais somente um grafo é considerado. Por exemplo, os *crossing numbers* para os grafos  $C_6 \times C_6$  e  $C_7 \times C_7$  foram recentemente estabelecidos em [1] e [2].

O conhecimento de um destes invariantes para o menor elemento não planar em uma classe de grafos pode ajudar a encontrar os valores ou limites para este invariante para todo elemento da classe. Por exemplo, Harary, Schwenk e Kainen em 1973 [20], provaram que  $\nu(C_3 \times C_3) = 3$ . Mais tarde, Beineke e Ringelsen em 1978 [35], usaram este resultado para provar que  $\nu(C_3 \times C_n) = n$ .

Segue das definições destes três invariantes que, para todo grafo  $G$ , é válida a relação  $\sigma(G) \leq \kappa(G) \leq \nu(G)$ . Assim, o *splitting number* de um grafo é um limite inferior natural tanto para sua *skewness*, quanto para seu *crossing number*. Enquanto que o *crossing number* de um grafo é um limite superior natural tanto para sua *skewness*, quanto para seu *splitting number*.

Seja  $Q_n$  o grafo  $n$ -cubo, onde  $Q_1$  é o grafo simples completamente conectado com dois vértices e para  $n \geq 2$ , definimos  $Q_n = Q_1 \times Q_{n-1}$ . Recentemente, redes baseadas

em  $n$ -cubos, têm recebido atenção considerável devido ao seu alto potencial para execução paralela associada a um diâmetro pequeno para a rede [19, 22].

O problema de calcular a *skewness* do  $n$ -cubo foi resolvido por Cimikowski em [4].

Em nosso trabalho nós procuramos fazer uma análise da determinação do *crossing number* e do *splitting number* para a família dos  $n$ -cubos [13, 15]. Nós procuramos também dar um enfoque na complexidade do problema *splitting number* em sua versão de decisão [14] e de otimização obtendo resultados para *splitting number*, para *skewness* e para o subgrafo planar máximo.

Desta forma, apresentamos os capítulos desta tese da seguinte maneira.

No primeiro capítulo passamos às definições básicas da teoria dos grafos necessárias e a um tratamento formal de alguns conceitos de planaridade para a seguir localizar historicamente o leitor no problema de determinar estes invariantes com dois enfoques, a saber: com o enfoque estrutural, isto é, para famílias de grafos e com o enfoque da complexidade computacional.

Apresentamos no segundo capítulo um resultado estrutural para o *splitting number* do  $n$ -cubo [15]. Nós provamos que o *splitting number* do menor elemento não planar da classe dos  $n$ -cubos, o 4-cubo, é quatro. Nós usamos ainda este valor para exibir o limite inferior  $2^{n-2} \leq \sigma(Q_n)$  para o *splitting number* de um  $n$ -cubo genérico com  $n \geq 4$ .

No terceiro capítulo nós apresentamos um resultado estrutural para o *crossing number* do  $n$ -cubo [13]. Nós trabalhamos com a conjectura de Richard Guy e Paul Erdős [18] para um limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo  $\nu(Q_n) \leq \frac{5}{32}4^n - \lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor 2^{n-2}$ . Nós mostramos que a conjectura é válida para os 6-, 7- e 8-cubos. Além disso, nós exibimos um limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo,  $\nu(Q_n) \leq \frac{165}{1024}4^n - \frac{2n^2-11n+34}{2}2^{n-2}$ , que melhora o único limite superior que existe na literatura, o limite de Madej [31]:  $\nu(Q_n) \leq \frac{1}{6}4^n - n^2 \cdot 2^{n-3} - 3 \cdot 2^{n-4} + \frac{1}{48}(-2)^n$ . Além disso, nós mostramos que nosso limite é razoavelmente mais próximo, com

respeito ao limite de Madej, do valor da conjectura de Richard Guy e Paul Erdős.

Passamos ao quarto capítulo com nossos resultados sobre a complexidade do problema de decidir o *splitting number* de um grafo [14], que é definido como, SPLITTING NUMBER: “Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k$ , existe um conjunto  $Z$  de *splittings* com  $|Z| \leq k$ , tal que  $Z$  obtém um grafo planar  $G'$  a partir de  $G$ ?”. Mostramos que este problema é realmente difícil, pois mesmo o grafo sendo cúbico o problema continua sendo NP-completo. Este resultado foi muito proveitoso. Mostramos como corolários que dois conhecidos problemas de decisão adicionais continuam NP-completos quando restritos a grafos cúbicos, a saber: SUBGRAFO PLANAR: “Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k$  existe um subgrafo planar  $G' = (V, E')$  de  $G$  com  $|E'| \geq k$ ?” e REMOÇÃO DE ARESTAS: “Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k$ , existe um subconjunto  $E'$  de  $E$  com  $|E'| \leq k$ , tal que  $G' = (V, E \setminus E')$  é planar?”. Estes corolários constituem em uma melhora razoável no resultado de Liu e Geldmacher [30], que haviam provado que SUBGRAFO PLANAR e REMOÇÃO DE ARESTAS são NP-completos para grafos em geral. Mais ainda, este resultado estabelece o limite inferior ótimo 3 para o grau máximo dos vértices de um grafo, quando os problemas: SPLITTING NUMBER, SUBGRAFO PLANAR e REMOÇÃO DE ARESTAS ainda são NP-completos. Pois um grafo com grau máximo 2 é uma coleção de vértices isolados, caminhos e ciclos que sempre define um grafo planar.

No quinto capítulo, fazemos uma aplicação da classe de complexidade recentemente definida por Papadimitriou e Yannakakis em [33] e conhecida como STRICT NP (SNP). Os autores mostraram neste artigo que existem vários problemas de otimização clássicos que são completos na versão de otimização desta classe (MAX SNP) sob uma redução especial chamada  $L$ -redução. Mostraram também que, ou todos os problemas de MAX SNP, ou nenhum problema completo em MAX SNP sob a  $L$ -redução admite um Esquema de Aproximação de Tempo Polinomial (PTAS).

Em 1992, Arora, Lund, Montwani e Szegedy [3] mostraram que MAX3SAT, um problema MAX SNP-completo [33], não admite PTAS, a menos que  $P=NP$ . Călinescu, Fernandes, Finkler e Karloff [6] mostraram em 1996 que as versões de otimização de SUBGRAFO PLANAR e REMOÇÃO DE ARESTAS para grafos em geral são problemas MAX SNP-difícil. Nós observamos que em [6] não fica estabelecido que SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO ou REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA são MAX SNP-difícil quando restringimos a entrada para grafos cúbicos. Nós mostramos no quinto capítulo que as versões de otimização de SPLITTING NUMBER e REMOÇÃO DE ARESTAS restritos a grafos cúbicos são MAX SNP-difícil.

No sexto capítulo passamos às nossas conclusões com as principais consequências, conjecturas e perspectivas para trabalhos futuros decorrentes desta tese.

## 1.2 Teoria dos grafos e planaridade, definições básicas

A finalidade desta seção é fixar a terminologia e as notações relativas aos conceitos da Teoria dos Grafos que serão utilizados nesta tese. Nesta seção, formalizamos também algumas propriedades topológicas dos grafos que necessitamos para trabalhar os conceitos de invariantes em não planaridade de um grafo.

Um *grafo*  $G$  é uma tripla ordenada de conjuntos  $G = (V(G), E(G), \psi(G))$  consistindo de um conjunto não vazio  $V(G)$  de *vértices*, um conjunto de *arestas*  $E(G)$  disjunto de  $V(G)$  e uma função de incidência  $\psi(G)$  que associa a cada aresta de  $E(G)$  um par não ordenado de vértices de  $V(G)$ . Nós denotamos um grafo omitindo sua função de incidência escrevendo somente  $G = (V(G), E(G))$ . Um *laço* é uma aresta associada a um par de vértices idênticos. Dizemos que um grafo  $G$  admite *arestas múltiplas* se  $G$  possui duas ou mais arestas associadas com o mesmo par de vértices. Um grafo é dito ser *simples* se ele não tem arestas múltiplas nem laços. Se  $(u, v) \in E(G)$ , dizemos que  $u$  é *adjacente* a  $v$ , e que  $v$  é adjacen-

te a  $u$ . Se  $(u, v)$  e  $(u, w)$  são arestas em  $E(G)$ , dizemos que  $(u, v)$  é *incidente* a  $(u, w)$ . Nós dizemos que um grafo  $G' = (V(G'), E(G'))$  é um *subgrafo* de  $G$  se  $V(G') \subseteq V(G)$  e  $E(G') \subseteq E(G)$ . Dado um subconjunto  $S$  de  $V(G)$ , nós chamamos de subgrafo de  $G$  *induzido* pelos vértices de  $S$ , o subgrafo maximal de  $G$  cujo conjunto de vértices é  $S$ . Se  $v \in V(G)$ , denotamos por  $G \setminus \{v\}$  o subgrafo maximal de  $G$ , cujo conjunto de vértices é  $V(G \setminus \{v\}) = V(G) \setminus \{v\}$  e analogamente, se  $H$  é subgrafo de  $G$ , denotamos por  $G \setminus H$  o subgrafo maximal de  $G$ , onde  $V(G \setminus H) = V(G) \setminus V(H)$ . Dado um vértice  $v$  de  $G$ , chamamos de *vizinhança* de  $v$  o conjunto  $viz(v) = \{u \in V(G) | (v, u) \in E(G)\}$ . Dado um vértice  $v$  de  $G$  nós chamamos de *grau* de  $v$  o número de vértices no conjunto  $viz(v)$ . Nós dizemos que um grafo  $G$  é *regular* de grau  $d$  se, para cada vértice  $v$  de  $G$ , o grau de  $v$  é igual a  $d$ . Nós vamos dizer que um grafo  $G$  é *cúbico* se  $G$  é regular de grau 3. Dado um grafo  $G$ , um vértice  $v$  de  $G$  é dito ser uma *folha* de  $G$  se o grau de  $v$  for 1.

O grafo *completo*  $n$ , denotado por  $K_n$ , é o grafo simples com  $n$  vértices e que possui todos os pares de vértices adjacentes. Dizemos que um grafo  $G$  é *bipartido* se existe uma partição para  $V(G)$  em dois subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  tal que, toda a aresta  $e = (u, v) \in E(G)$  satisfaz  $u \in V_1$  e  $v \in V_2$ . Dizemos que um grafo  $G$  é um *bipartido completo*  $m$  por  $n$ , e denotamos  $G$  por  $K_{m,n}$ , se  $G$  é um grafo bipartido onde  $V(G)$  é particionado pelos conjuntos  $V_1$  e  $V_2$  cujas cardinalidades são  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$  e  $E(G)$  é maximal.

Dado um grafo  $G$ , uma sequência  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$  é chamada um *caminho* em  $G$  se os  $k+1$  vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  são constituídos de pares de elementos distintos de  $V$ , exceto possivelmente  $v_0$  e  $v_k$  e se  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Nós dizemos que  $k$  é o comprimento do caminho, dizemos que o caminho conecta  $v_0$  a  $v_k$ . Se adicionalmente  $v_0 = v_k$  o caminho é dito ser um *ciclo*  $k$ . Nós denotamos por  $P_n$  um grafo constituído por um caminho de comprimento  $n - 1$  e por  $C_n$  o grafo constituído por um ciclo  $n$ .

Um grafo simples  $T$  é uma *árvore* se  $T$  é conexo e não possui ciclos. Uma árvore  $T$  é dita ser *enraizada* quando algum vértice  $r$  de  $T$  é escolhido como especial. Este vértice  $r$  é chamado de *raiz* de  $T$ . Sejam  $v, w$  dois vértices de  $T$ . Suponha que  $v$  pertença ao caminho que liga  $r$  a  $w$ . Então  $v$  é *ancestral* de  $w$  e  $w$  é *descendente* de  $v$ . Se ainda  $v \neq w$ ,  $v$  é ancestral de  $w$  e  $(v, w)$  é uma aresta de  $T$ , então  $v$  é *pai* de  $w$ , sendo  $w$  *filho* de  $v$ . A raiz não possui pai, uma folha de  $T$  que não é a raiz não possui filho. Dizemos que o *nível* de um vértice  $v$  é  $p$ , se  $p$  é o comprimento do caminho que liga a raiz  $r$  até  $v$ . Dizemos também que  $v$  *está* no nível  $p$  da árvore  $T$ . A raiz está no nível 0. Dizemos que uma árvore tem *último* nível  $p$  se  $p$  é o maior dos níveis de seus vértices. Uma árvore *estritamente binária* é uma árvore enraizada em que a raiz tem grau 0 ou 2 e cada vértice não folha possui exatamente dois filhos. Uma árvore binária *completa* é uma árvore estritamente binária na qual todas as folhas tem um mesmo nível. Pela definição, se  $T$  é uma árvore binária completa e  $p$  é o último nível de  $T$ , então existem  $2^p$  vértices em  $T$  no nível  $p$ .

Dados dois grafos  $G$  e  $H$ , dizemos que  $G$  e  $H$  são *isomorfos*, e notamos  $G \sim H$ , se existe uma função bijetiva  $f : V(G) \rightarrow V(H)$ , tal que  $(u, v) \in E(G)$  se e somente se  $(f(u), f(v)) \in E(H)$ . Neste caso, dizemos que  $f$  é um *isomorfismo* de  $G$  em  $H$ . Quando  $G$  for isomorfo a  $H$ , dizemos também que  $G$  é uma *cópia* de  $H$ .

Sejam  $G_1 = (V_1, E_1)$  e  $G_2 = (V_2, E_2)$  dois grafos. O grafo *produto* de  $G_1$  por  $G_2$ , denotado por  $G_1 \times G_2$ , é o grafo cujos vértices são denotados pelo par ordenado  $(u, v)$ , onde  $u \in V(G_1)$  e  $v \in V(G_2)$  e  $E(G_1 \times G_2) = \{((u, v_1), (u, v_2)), ((u_1, v), (u_2, v)) \mid u \in V(G_1) \text{ e } v \in V(G_2), \text{ onde } (v_1, v_2) \in E(G_1) \text{ e } (u_1, u_2) \in E(G_2)\}$ .

Se  $n$  é um número inteiro positivo, chamamos de *n-upla 01* ou *n-upla binária*, o vetor de  $n$  elementos ordenados  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , onde cada elemento pertence ao conjunto  $\{0, 1\}$ . Por vezes notamos a *n-upla* binária omitindo as vírgulas na notação de vetor. Quando mencionamos *n-upla*, estamos sempre nos referindo a uma *n-upla* binária, salvo menção em contrário. Chamamos os elementos da *n-upla* de *termos*,

chamamos também o termo mais a esquerda da  $n$ -upla de termo *inicial* ou *primeiro* termo da  $n$ -upla e analogamente, o termo mais a direita chamamos termo *final* ou *último* termo da  $n$ -upla. Decorre da definição que a cardinalidade do conjunto das  $n$ -uplas é de  $2^n$ .

Denotamos o conjunto dos *reais não negativos* por  $\mathfrak{R}^+ = \{x \in \mathfrak{R} | x \geq 0\}$  e o conjunto dos *reais positivos*  $\mathfrak{R}^+ \setminus \{0\}$  por  $\mathfrak{R}_*^+$ . Seja  $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathfrak{R}$  uma função que associa cada inteiro positivo  $n$  a um número real  $f(n)$ . Definimos  $O(f)$  como o conjunto das funções  $O(f) = \{g : \mathcal{N} \rightarrow \mathfrak{R} | \exists c \in \mathfrak{R}_*^+ \text{ e } n_0 \in \mathcal{N}, \text{ onde para todo } n > n_0, g(n) < cf(n)\}$ . Se  $g \in O(f)$ , dizemos que  $f$  é ordem de limite superior de  $g$ . Se  $f$  é ordem de limite superior de  $g$ , denotamos  $g = O(f)$ . Por outro lado, definimos  $\Omega(f)$  como o conjunto das funções  $\Omega(f) = \{g : \mathcal{N} \rightarrow \mathfrak{R} | \exists c \in \mathfrak{R}_*^+ \text{ e } n_0 \in \mathcal{N}, \text{ onde para todo } n > n_0, g(n) > cf(n)\}$ . Se  $g \in \Omega(f)$ , dizemos que  $f$  é ordem de limite inferior de  $g$ . Se  $f$  é ordem de limite inferior de  $g$ , denotamos  $g = \Omega(f)$ . Finalmente, definimos  $\Theta(f)$  como o conjunto das funções  $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$ . Se  $g \in \Theta(f)$ , dizemos que  $f$  é ordem de  $g$ . Se  $f$  é ordem de  $g$ , denotamos  $g = \Theta(f)$ .

### 1.2.1 O grafo $n$ -cubo

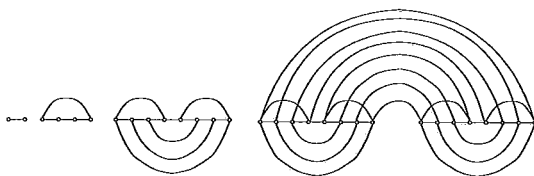


Figura 1.1: Desenhos ótimos para  $Q_1, Q_2, Q_3$  e  $Q_4$ .

Dado  $n$  um inteiro não negativo, o grafo simples  $n$ -cubo possui  $2^n$  vértices, os quais estão associados biunivocamente as  $2^n$   $n$ -uplas binárias, onde um vértice é adjacente a outro se e somente se a  $n$ -upla correspondente a um destes vértices diferir em um único termo da  $n$ -upla do outro. Denotamos o grafo  $n$ -cubo por  $Q_n$ . Nesta tese, será conveniente usar também uma definição alternativa para o grafo  $n$ -cubo  $Q_n$  através de grafos produto, fazendo  $Q_0 = K_1$  e quando  $n \geq 1$ , fazendo  $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$ .



A cada vértice do  $n$ -cubo está associada uma única  $n$ -upla binária, assim quando nos referimos a  $v \in Q_n$ , estando nos referindo a sua  $n$ -upla correspondente, geralmente denotamos por  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , onde  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  é sua  $n$ -upla correspondente.

A estrutura algébrica induzida pelos vértices do  $n$ -cubo permite diversos artifícios nos processos de desenhos destes grafos, devido as propriedades de ordenação e simetria de seu conjunto de vértices. Por vezes, nos referimos a uma  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  nos referindo ao número binário  $(a_1 a_2 \dots a_n)$ , utilizamos a ordenação na base 2 e quando necessário, definimos operações algébricas sobre os vértices do  $n$ -cubo.

### 1.3 Os invariantes estudados

Um *desenho* de um grafo  $G$  em uma superfície  $S$  [29], denotado por  $D_S(G)$ , é a imagem do par de aplicações  $F_v$  e  $F_e$  onde  $F_v$  é uma bijeção de  $V(G)$  em um conjunto de pontos distintos de  $S$  e  $F_e$  é uma função bijetora que leva uma aresta  $e = (x, y) \in E(G)$  em uma imagem em  $S$ , do intervalo  $[0, 1]$ , por uma função injetora e contínua  $f$ , onde  $f(0) = F_v(x)$  e  $f(1) = F_v(y)$ . No desenho  $D_S(G)$  manteremos a nomenclatura de vértices e arestas, respectivamente, para as imagens dos vértices e arestas de  $G$  pelas funções  $F_v$  e  $F_e$ . Vamos considerar que as imagens das arestas estão em posição geral [8]. Em nosso trabalho, vamos sempre nos interessar que a superfície  $S$  seja o plano, por isso omitimos  $S$  da notação de  $D_S(G)$ , usamos também uma pequena circunferência para representar um vértice de  $D(G)$ .

Um *cruzamento* é o ponto em comum entre duas arestas, desde que este ponto não seja um vértice. Se houver um cruzamento em uma aresta dizemos que esta aresta tem ou possui um cruzamento. Dizemos ainda que duas arestas compartilham ou tem um cruzamento em comum.

Um *desenho simples* de um grafo  $G$  é um desenho de  $G$  no plano tal que arestas

incidentes ao mesmo vértice não possuem cruzamentos em comum, um par de arestas pode compartilhar somente um cruzamento, arestas não interceptam vértices (exceto em suas bordas) e não mais que duas arestas compartilham um cruzamento. Nesta tese todos os desenhos considerados são simples.

Um desenho *ótimo* de um grafo  $G$  é um desenho de  $G$  com o número mínimo de cruzamentos. Um grafo  $G$  é *planar* se o número de cruzamentos em um desenho ótimo de  $G$  é zero, caso contrário dizemos que  $G$  é *não planar*. Se  $D(G)$  não possui cruzamentos,  $D(G)$  é dito ser um *desenho plano* para  $G$ . Um grafo  $G$  é dito ser *periplanar* se existe um desenho plano  $D(G)$  para  $G$ , tal que existe uma região de  $D(G)$  que contém todos os vértices de  $G$ .

Dado um grafo  $G$  e uma aresta  $e = (u, v)$  de  $G$ . Dizemos que  $G'$  é obtido de  $G$  por *subdividir*  $e$  se  $G' = (V(G) \cup \{v_e\}, E(G) \setminus \{e\} \cup \{(u, v_e), (v_e, v)\})$ . Se um grafo  $G''$  é obtido a partir de  $G$  por qualquer número, possivelmente zero, de subdivisões de arestas de  $G$ ,  $G''$  é dito ser uma *subdivisão* de  $G$ . Dados dois grafos  $G'$  e  $G''$  se existe um grafo  $G$  tal que  $G'$  e  $G''$  são subdivisões de  $G$ , Então  $G'$  é dito ser *homeomorfo* a  $G''$ . Nós dizemos que um grafo  $G'$  é um *minor* de  $G$  se  $G'$  é homeomorfo a um subgrafo de  $G$ .

Dizemos que um grafo  $G$  é *contrátil* a um grafo  $G'$ , se  $G'$  é obtido de  $G$  por um número finito de aplicações do processo de contração.

Resulta, uma vez que  $G$  é homeomorfo a  $G'$ , que o número de cruzamentos em um desenho ótimo de  $G$  é igual ao número de cruzamentos de um desenho ótimo de  $G'$ .

Em 1930, Kuratowski [26] caracterizou os grafos planares, mostrando que um grafo é planar, se e somente se, ele não possui uma subdivisão de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  como subgrafo.

O *crossing number*  $\nu(G)$  de um grafo  $G$  é o número de cruzamentos em um desenho ótimo de  $G$ .

A *skewness*  $\kappa(G)$  de um grafo  $G$  é o menor número inteiro positivo  $k$ , tal que a

remoção de  $k$  arestas de  $G$  produz um grafo planar.

O *splitting number*  $\sigma(G)$  de um grafo  $G = (V(G), E(G))$  é o menor inteiro positivo  $k$ , tal que um grafo planar pode ser obtido a partir de  $G$  por  $k$  operações de *splitting* de vértice. Uma operação de *splitting* de vértice, ou simplesmente *splitting*, de um vértice  $v \in V(G)$  particiona  $\text{viz}(v)$  em dois conjuntos não vazios  $P_1$  e  $P_2$  e adiciona a  $G \setminus v$  dois vértices novos e não adjacentes  $v_1$  e  $v_2$ , tal que  $P_1 = \text{viz}(v_1)$  e  $P_2 = \text{viz}(v_2)$ . Se um grafo  $H$  é obtido a partir de  $G$  por um conjunto de  $k$  *splittings*, nós dizemos que  $H$  é o *grafo resultante* deste conjunto de  $k$  *splittings* em  $G$ . Nós observamos que o grafo resultante  $H$  pode ser obtido por *splittings* nos vértices de  $G$ , ou por *splittings* nos vértices de  $G$  e nos vértices criados por *splittings* nos vértices de  $G$ . Quando necessário nós distinguimos se um conjunto de *splittings* é de uma forma ou de outra.

Muito pouco se sabe sobre *skewness*, *crossing numbers* ou *splitting numbers* para classes de grafos.

O *crossing number* de classes de grafos é conhecido para algumas classes de bipartidos e grafos produtos, como  $K_{5,n}$  [25],  $C_3 \times C_n$  [35] e outros [28]. São conhecidos também limites superiores e inferiores para algumas classes, por exemplo superior [31] e inferior [37] para os  $n$ -cubos e superior para  $K_{m,n}$  [38]. Nós estabelecemos em [13] um limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo.

O *splitting number* de classes de grafos tem sido estabelecido para grafos completos [21], e para grafos bipartidos completos [24]. Nós estabelecemos em [14] um limite inferior para o *splitting number* do  $n$ -cubo.

A técnica para a obtenção de um limite superior, de um destes invariantes estudados, para uma classe de grafos é basicamente uma, a saber, encontra-se para cada grafo da classe, respectivamente, em cada caso: um desenho para o *crossing number*, um conjunto de arestas para a *skewness* ou para *maximum planar subgraph* e um conjunto de *splittings* para *splitting number*.

Na determinação do limite inferior de um destes invariantes de um grafo, o trabalho é bem mais fino. Uma das técnicas é tomar subgrafos do grafo, nos quais se tenha alguma espécie de controle sobre o valor do invariante no subgrafo, então, através de alguma análise, obtém-se um limite inferior para o invariante no grafo em função do valor do invariante nos subgrafos.

Em se tratando de analisar a dificuldade do problema, Tarjan exibiu em 1974 [23], um algoritmo que determina se um grafo qualquer é ou não planar em tempo linear no tamanho do grafo. Dessa forma existe um algoritmo eficiente para testar em tempo linear se um grafo  $G$  tem  $\nu(G)$ ,  $\kappa(G)$  ou  $\sigma(G)$  iguais a zero.

Liu e Geldmacher, e Garey e Johnson provaram, respectivamente, em [30] e [17], que os problemas de decisão SUBGRAFO PLANAR e CROSSING NUMBER são ambos NP-Completos. Nós provamos em [14] que SPLITTING NUMBER é NP-completo.

Dois aspectos sobre o estudo de *splitting numbers* foram recentemente considerados por Eades e Mendonça. Eles estabeleceram a NP-completude de um problema relacionado ELIGIBLE-SPLIT-SET [32]: “Dado um grafo  $G$ , um subconjunto  $S$  de  $V(G)$  e um inteiro  $k$ , existe um conjunto  $Z$  de *splittings* somente nos vértices de  $S$ , com tamanho  $|Z| \leq k$  tal que o grafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  através do conjunto de *splittings*  $Z$  é planar?” Eles utilizaram também a operação *splitting* em algoritmos de desenhos de *Layout* [9, 32, 10].

### 1.3.1 Sobre a relevância do *splitting number*

Além do uso em diversas aplicações, tais como *graph drawing*, visualização e algoritmos de *layout* [9, 32, 10], pesquisa em *splitting number* de grafos pode também ser justificada quando relacionamos em um mesmo grafo  $G$  os três invariantes: *crossing number*, *skewness* e *splitting number*.

Considere um desenho ótimo para  $G$  com  $\nu(G)$  cruzamentos. Se neste desenho uma das arestas envolvidas em cada cruzamentos é removida de  $E(G)$ , então existe

um subconjunto de  $E(G)$  com no máximo  $\nu(G)$  arestas, cuja remoção de  $G$  produz um grafo planar. Isto significa que o *crossing number*  $\nu(G)$  de  $G$  é maior ou igual a *skewness*  $\kappa(G)$  de  $G$ .

Por outro lado suponha  $\kappa(G)$  arestas cuja remoção a partir de  $G$  produz um grafo resultante planar. Suponha que  $e = (u, u_1)$  é uma destas  $\kappa(G)$  arestas e que  $\text{viz}(u)$  é dada por  $\text{viz}(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_{d(u)}\}$ . Considere o *splitting* de  $u$  nos vértices  $v_1$  e  $v_2$  tal que  $\text{viz}(v_1) = \{u_2, u_3, \dots, u_{d(u)}\}$  e  $\text{viz}(v_2) = \{u_1\}$ . Nós observamos que este *splitting* remove o cruzamento que ocorria em  $e = (u, u_1)$ . Por aplicar sucessivamente o algoritmo de Tarjan [23], existe um conjunto de *splittings* de tamanho máximo  $\kappa(G)$ , tal que após estes *splittings* nós obtemos a partir de  $G$  um grafo resultante planar. Assim, a *skewness*  $\kappa(G)$  de  $G$  é maior ou igual ao *splitting number*  $\sigma(G)$  de  $G$ . Em conclusão, o estudo do *splitting number* para um dado grafo pode ajudar a obter limites inferiores tanto para sua *skewness* quanto para seu *crossing number*.

## 1.4 Sobre complexidade

Nesta seção, fazemos uma introdução aos problemas de decisão e de otimização. Em particular, definimos o problema de decisão SATISFABILIDADE que será fundamental ao trabalho desenvolvido nos Capítulos 4 e 5 desta tese.

### 1.4.1 Problemas de decisão

Um *problema de decisão* consiste em um conjunto de dados ou entrada e um objetivo ou questão que consiste em responder: sim ou não a respeito de alguma propriedade do conjunto de dados. Quando um conjunto de dados em um problema de decisão é fixado dizemos que este conjunto de dados fixado constitui uma *instância* para este problema de decisão.

Nós dizemos que um problema de decisão  $\Pi$  está no conjunto  $P$  se para toda instância  $I$  de  $\Pi$  existe um algoritmo que, executando um número de passos polino-

mial no tamanho de  $I$ , responde ao objetivo de  $\Pi$ .

Dado um problema de decisão  $\Pi$  e uma instância  $I$  de  $\Pi$  nós dizemos que  $J$  é um *certificado para a resposta sim* para  $I$ , se  $J$  é um subconjunto de  $I$  que tem informações suficientes para demonstrar a resposta sim para o objetivo do problema  $\Pi$ .

Nós dizemos que um problema de decisão  $\Pi$  está no conjunto  $NP$  se para toda a instância  $I$  de  $\Pi$  existe um algoritmo que executa um número de passos polinomial no tamanho de  $I$  e que verifica a corretude de um certificado para a resposta sim para  $I$ .

Pelas definições,  $P \subseteq NP$ . Atualmente a questão mais importante em complexidade consiste na pergunta:  $P$  é igual a  $NP$ ? ( $P \stackrel{?}{=} NP$ ). Na tentativa de responder a esta pergunta um problema especial na classe  $NP$  assume valor de destaque. Este problema chama-se *SATISFABILIDADE* e foi o problema chave do início da pesquisa sobre a complexidade dos problemas de decisão. Em particular, este problema será muito importante para nós porque ele será muito usado nesta tese. Nós passamos agora aos pré-requisitos de sua definição.

Nós chamamos de *variável lógica* uma variável que pode assumir somente um valor entre possíveis dois valores que são: o valor de verdade  $T$  ou o valor de falsidade  $F$ . Seja  $u$  uma variável lógica. A *negação* de  $u$  denotada por  $\bar{u}$  é uma outra variável lógica que assume o valor oposto de  $u$ , isto é,  $u = T$ , se e somente se  $\bar{u} = F$ . Dado um conjunto de variáveis lógicas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , nós chamamos de *atribuição de verdade* para  $U$  uma escolha fixada de valores  $T$  ou  $F$  para as variáveis de  $U$ .

Dado um conjunto de variáveis lógicas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  nós chamamos de *disjunção* sobre  $U$  uma sentença lógica  $c$  da forma  $c = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \dots \vee x_k)$ , onde para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  acontece que  $x_i = u_j$  ou  $x_i = \bar{u}_j$ , para algum  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tal que uma vez dada uma atribuição de verdade para  $U$  a sentença  $c$  assume valor de verdade, se e somente se existe pelo menos um índice  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $x_i = T$ . Chamamos  $c$  de *cláusula* sob  $U$ , se  $c$  é uma disjunção sob  $U$ . Chamamos

também de *literal* aos elementos da forma  $x_i$  em  $c$ . É muito importante para o leitor capturar a diferença entre os verbetes: variável lógica e literal. Enquanto variável lógica é um elemento de  $U$ , temos que literal é um elemento de  $U$  ou sua negação em alguma cláusula.

Dado um conjunto de variáveis lógicas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  nós chamamos de *conjunção de disjunções* sob  $U$  uma sentença lógica da forma  $C = (c_1 \wedge c_2 \wedge c_3 \wedge \dots \wedge c_m)$ , onde para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  cada  $c_i$  é uma cláusula sob  $U$ , tal que uma vez dada uma atribuição de verdade para  $U$  a conjunção de disjunções  $C$  assume valor de verdade, se e somente se cada  $c_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$  assume valor de verdade. Se existe uma tal atribuição de verdade para  $U$  nós dizemos que  $C$  é *satisfatível*. Chamamos  $C$  de *conjunto de cláusulas*, se  $C$  é uma conjunção de disjunções e notamos  $C = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_m\}$ .

Nós definimos o problema de decisão SATISFABILIDADE, como o problema de decisão que consiste em um conjunto de dados formado por um conjunto de variáveis lógicas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  e um conjunto de cláusulas  $C$  com o objetivo de responder se  $C$  é satisfatível ou não.

Em 1971, Cook estudou a questão  $P \stackrel{?}{=} NP$  sugerindo o conceito de redução em tempo polinomial. Dados dois problemas de decisão  $\Pi$  e  $\Pi'$  se existe um algoritmo  $f$  que para toda instância  $I$  de  $\Pi$ , obtém uma instância  $I' = f(I)$  de  $\Pi'$  em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , tal que  $I$  tem resposta sim, se e somente se  $I'$  tem resposta sim, então nós dizemos que  $\Pi$  *reduz para*  $\Pi'$ , dizemos também que  $f$  é uma *redução polinomial* ou simplesmente *redução* de  $\Pi$  para  $\Pi'$ . Uma propriedade fácil de demonstrar é que as reduções compõem, isto é, se  $\Pi$  reduz para  $\Pi'$  e  $\Pi'$  reduz para  $\Pi''$ , então  $\Pi$  reduz para  $\Pi''$ .

Neste artigo, Cook [5] demonstrou que dado um problema qualquer  $\Pi$  em NP,  $\Pi$  reduz para SATISFABILIDADE.

Ainda não se sabe responder a pergunta  $P \stackrel{?}{=} NP$ . Mas, este resultado de Cook [5],

implica que se SATISFABILIDADE estiver em P, então todo problema de NP está em P. Isto significaria que  $P=NP$ . A dificuldade “polinomialmente” maior de SATISFABILIDADE em relação a cada problema na classe NP, justificou o nome *NP-completo* para a subclasse especial de NP formada pelos problemas  $\Pi$  em NP que como SATISFABILIDADE satisfazem a existência de uma redução de um problema qualquer de NP para  $\Pi$ .

A utilização das reduções possibilitou um grande avanço no estabelecimento de outros problemas NP-completos. Pois, uma vez que  $\Pi$  é NP-completo,  $\Pi$  reduz para  $\Pi'$  e  $\Pi'$  está em NP, então  $\Pi'$  também é um problema NP-completo.

Por outro lado, se  $\Pi$  é NP-completo,  $\Pi$  reduz para  $\Pi'$  e não se sabe se  $\Pi'$  está em NP, então a pertinência de  $\Pi'$  em P implica em  $P=NP$ , mas não necessariamente o fato de  $P=NP$  implica na pertinência de  $\Pi'$  em P. Dizemos neste caso que  $\Pi'$  é um problema *NP-difícil*.

Definindo mais geralmente, dada uma classe  $\mathcal{C}$  de problemas e uma redução (não necessariamente a nossa redução polinomial) nós dizemos que um problema  $\Pi$  é um problema  $\mathcal{C}$ -difícil sob esta redução, se cada problema desta classe reduz para  $\Pi$ . Observe que não necessariamente  $\Pi$  é um problema de  $\mathcal{C}$ .

## 1.4.2 Problemas de otimização

Um problema de *otimização* consiste em um conjunto de dados ou entrada com um objetivo de obter uma *solução viável* (que atende a uma propriedade), onde esta solução está associada a um certo custo que se deseja maximizar ou minimizar. Quando o objetivo requer a maximização dizemos que o problema é um *problema de maximização*, caso contrário dizemos que o problema é um *problema de minimização*. Dizemos que  $I$  é uma *instância* para um problema de otimização se  $I$  tem fixada uma entrada para o problema de otimização.

Seja  $I$  uma instância para um problema de maximização (respectivamente, mi-



nimização), uma solução viável é dita ser ótima com custo  $c$  se toda solução viável para  $I$  possui custo menor (respectivamente, maior) ou igual que  $c$ .

Seja  $\Pi$  um problema de maximização (respectivamente, minimização). Seja  $I$  uma instância para  $\Pi$  e  $Opt_{\Pi}(I)$  o custo da solução ótima para  $I$ . Um *algoritmo de aproximação*  $A$  para  $\Pi$  com *erro fixado*  $\epsilon_0 > 0$  é um algoritmo, que roda em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , e que obtém uma solução viável de custo  $c$  para  $I$ , tal que  $\frac{|Opt_{\Pi}(I)-c|}{|Opt_{\Pi}(I)|} \leq \epsilon_0$ . Observe que se  $\Pi$  é um problema de maximização (respectivamente, minimização), então  $\frac{c}{Opt_{\Pi}(I)} \geq (1 - \epsilon_0)$  (respectivamente,  $\frac{c}{Opt_{\Pi}(I)} \leq (1 + \epsilon_0)$ ). Nós definimos a *razão de erro* do algoritmo de aproximação  $A$  como o valor  $(1 - \epsilon_0)$  (respectivamente,  $(1 + \epsilon_0)$ ). Para muitos problemas de otimização tais como CAIXEIRO VIAJANTE COM DESIGUALDADE TRIANGULAR, SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO e COBERTURA POR VÉRTICES temos razões de erro respectivamente  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{2}{5}$  e 2.

Um Esquema de Aproximação em Tempo polinomial (PTAS) para um problema de maximização (respectivamente, minimização)  $\Pi$  é um algoritmo de aproximação  $A$  que dada uma instância  $I$  de  $\Pi$  e  $\epsilon > 0$  o algoritmo  $A$  obtém, em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , uma solução viável para  $I$  de custo  $c$  com erro  $\epsilon$ , isto é,  $\frac{|Opt_{\Pi}(I)-c|}{|Opt_{\Pi}(I)|} \leq \epsilon$ , isto significa que  $A$  tem razão de erro  $(1 - \epsilon)$  (respectivamente  $(1 + \epsilon)$ ). Nós dizemos que um algoritmo  $A$  é um *Esquema de Aproximação em Tempo Polinomial Fully (FPTAS)* para um problema de maximização (respectivamente, minimização)  $\Pi$  se  $A$  é um PTAS e dada uma instância  $I$  de  $\Pi$  e  $\epsilon > 0$  o algoritmo  $A$  obtém, em tempo polinomial no tamanho de  $I$  e de  $\frac{1}{\epsilon}$ , uma solução viável para  $I$  de custo  $c$  com razão de erro  $(1 - \epsilon)$  (respectivamente  $(1 + \epsilon)$ ).

# Capítulo 2

## O *splitting number* do 4-cubo

Muito tem sido publicado a respeito das propriedades de não planaridade dos  $n$ -cubos. Guy e Erdős [11] conjecturaram que  $\nu(Q_n) \leq \frac{5}{32}4^n - \lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor 2^{n-2}$ . Madej [31] estabeleceu o único limite superior conhecido para o *crossing number* do  $n$ -cubo:  $\nu(Q_n) \leq 4^n \frac{1}{6} - n^2 2^{n-3} - 3 \times 2^{n-4} + \frac{1}{48}(-2)^n$ . Sýkora e Vrto [37], usando esta função, provaram que  $\nu(Q_n) = \Theta(4^n)$ . Cimikowski [4] mostrou que  $\kappa(Q_n) = (n-2)2^n - n2^{n-1} + 4$ . Mas, até agora nenhum estudo havia sido publicado sobre o *splitting number* do  $n$ -cubo.

Nós notamos que  $\sigma(Q_n) = 0$ , para  $n = 1, 2$  ou  $3$ , enquanto  $\sigma(Q_n) > 0$ , para todo  $n \geq 4$ . Recentemente Dean e Richter [7] dedicaram um único artigo para provar  $\nu(Q_4) = 8$ . Sua prova consiste em dois passos principais. O primeiro em mostrar que em qualquer desenho ótimo de  $Q_4$  existe um  $C_4$  com no mínimo quatro cruzamentos; O segundo em afirmar que a remoção das arestas de um  $C_4$  em  $Q_4$  produz uma subdivisão de  $C_3 \times C_4$ . Usando que devido a [35]  $\nu(C_3 \times C_4) = 4$  eles estabeleceram que  $\nu(Q_4) = 8$ .

Neste capítulo nós provamos que o *splitting number* do 4-cubo é 4. Nós estabelecemos primeiro que a remoção das arestas de um  $C_4$  em  $Q_n$  produz o mesmo grafo a menos de isomorfismo. A segunda parte consiste em mostrar que, se fosse possível obter um grafo resultante planar a partir de  $Q_4$  com três *splittings*, então seria necessário fazer cada um destes três *splittings* em três diferentes vértices de  $Q_4$

sem que cada par deles esteja em algum  $C_4$ . Adicionando a este resultado o fato que para cada tripla de vértices em  $Q_4$ , existe um  $C_4$  contendo dois deles, nós temos a necessidade de quatro *splittings* estabelecida, como requerida.

Nós notamos que para  $n \geq 4$ , existem  $2^{n-4}$  subgrafos de  $Q_n$  disjuntos por vértices isomorfos a  $Q_4$ . Assim, o valor do *splitting number* de  $Q_4$  permite obter um limite inferior para o *splitting number* do  $n$ -cubo para todo  $n \geq 4$  que é  $\sigma(Q_n) \geq \sigma(Q_4)2^{n-4} = 4 \times 2^{n-4} = 2^{n-2}$ . A *skewness* do  $n$ -cubo é conhecida [4] ser  $\kappa(Q_n) = 2^n(n-2) - 2^{n-1}n + 4$ . Como notamos no Capítulo 1 a *skewness* e o *splitting number* do  $n$ -cubo se relacionam como segue:  $\kappa(Q_n) \geq \sigma(Q_n)$ . Desta forma nosso limite inferior implica que o *splitting number* do  $n$ -cubo é dominado pela função  $2^n$ .

## 2.1 O *splitting number* do 4-cubo é 4

Nesta seção nós apresentamos uma prova para a igualdade  $\sigma(Q_4) = 4$ .

A Figura 2.1 exhibe um conjunto de quatro *splittings* que obtém um grafo resultante planar a partir de  $Q_4$ . Isto prova que  $\sigma(Q_4) \leq 4$ .

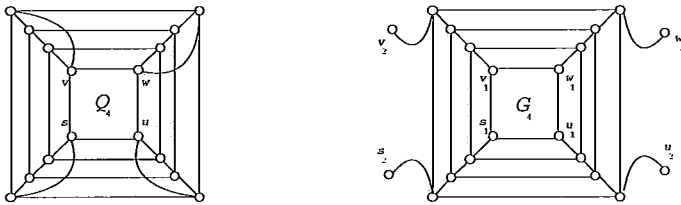


Figura 2.1:  $\sigma(Q_4) \leq 4$ .

Nós lembramos que  $Q_4$  é um grafo regular de grau 4. Nós podemos fazer um *splitting* em um vértice  $v$  de grau 4 nos vértices  $v_1$  e  $v_2$  de sete maneiras diferentes, como mostrado na Figura 2.2. Mais especificamente nós podemos generalizar esta afirmação com o seguinte lema.

**Lema 2.1** *Se  $v$  é um vértice de grau  $d(v)$  em  $G$ , então existem exatamente  $2^{d(v)-1} - 1$  diferentes *splittings* em  $v$ .*

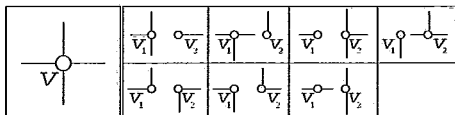


Figura 2.2: Todos os possíveis *splittings* em um vértice  $v$  de grau 4.

**Prova:** Seja  $\text{viz}(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_{d(v)}\}$ . Seja  $H$  o grafo resultante obtido a partir de  $G$  pelo *splitting* em  $v$  nos vértices  $v_1$  e  $v_2$ .

Nós mostramos que este *splitting* em  $v$  pode ser feito de  $2^{d(v)-1} - 1$  maneiras diferentes por considerar as possibilidades para particionar  $\text{viz}(v)$  em dois conjuntos.

Para cada  $u_i \in \text{viz}(v)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, d(v)\}$  nós temos que decidir se este vértice pertence a  $\text{viz}(v_1)$  ou não. Nós temos  $2^{d(v)}$  possibilidades para esta decisão. Dado que  $P_1$  e  $P_2$  definem uma partição para  $\text{viz}(v)$ . A atribuição do conjunto  $P_1$  para  $\text{viz}(v_1)$  e do conjunto  $P_2$  para  $\text{viz}(v_2)$  obtém um grafo isomorfo ao grafo resultante da atribuição do conjunto  $P_1$  para  $\text{viz}(v_2)$  e do conjunto  $P_2$  para  $\text{viz}(v_1)$ . Assim, nós temos que dividir  $2^{d(v)}$  por 2 de forma a não obter as mesmas partições. Finalmente, como a partição que obtém um dos conjuntos  $P_1$  ou  $P_2$  vazios não é permitida, nós temos que subtrair 1 de  $2^{d(v)-1}$ , como requerido.  $\square$

Um *automorfismo*  $\alpha$  de  $G$  é uma função bijetiva  $\alpha : V(G) \rightarrow V(G)$ , tal que  $(u, v) \in E(G)$  se e somente se  $(\alpha(u), \alpha(v)) \in E(G)$ .

Dado um grafo  $G$  e um subgrafo  $S$  de  $G$ , nós dizemos que  $G$  é *S-transitivo* se para cada par  $F, H$  de subgrafos de  $G$ , onde  $F$  e  $H$  são isomorfos a  $S$ , existe um automorfismo  $\alpha$  de  $G$  tal que se  $v \in V(F)$ , então  $\alpha(v) \in V(H)$ .

O Lema 2.2 prova que o  $n$ -cubo é  $C_4$ -transitivo, isto significa que um  $C_4$  pode ser selecionado sem perda de generalidade entre todos os subgrafos  $C_4$  de  $Q_n$ , para todo  $n \geq 2$ .

**Lema 2.2** *Se  $n \geq 2$  e  $Q_n$  é considerado sem os rótulos de seus vértices, então qualquer  $C_4$  pode ser selecionado em  $Q_n$  sem perda de generalidade entre todos os*

subgrafos  $C_4$  de  $Q_n$ .

**Prova:** Dados  $S$  e  $W$  dois  $C_4$ 's de  $Q_n$ , nós exibimos um automorfismo de  $Q_n$  que leva  $S$  em  $W$ .

Porque um automorfismo é uma função bijetiva, ele tem inversa e admite uma composição com outro automorfismo.

Assim, para concluir a prova, uma vez dado  $T$  um  $C_4$  fixado de  $Q_n$ , é suficiente definir para cada  $C_4$  de  $Q_n$  um automorfismo  $\alpha$  de  $Q_n$  levando este  $C_4$  para  $T$ .

Para isto, nós primeiro mostramos a propriedade que nas  $n$ -uplas binárias dos vértices de um  $C_4$  de  $Q_n$  existem  $(n - 2)$ -dígitos fixados.

Nós vamos definir  $\alpha$  usando esta propriedade.

Considere  $Q_n$ ,  $n \geq 2$  e  $C_4$  o ciclo induzido pelos vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4$  em  $Q_n$ , onde  $(v_i, v_{(i+1) \bmod 4}) \in E(Q_n), \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Seja  $v_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  a  $n$ -upla de  $v_1$ , tal que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, a_i \in \{0, 1\}$ .

Como  $v_1$  é adjacente a  $v_2$ , pela definição do  $n$ -cubo existe  $k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  satisfazendo  $v_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, \bar{a}_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ , onde  $\bar{a}_k$  denota o complemento binário de  $a_k$ , que é,  $\bar{a}_k = 0$  se e somente se  $a_k = 1$ .

Como  $v_1 \neq v_3$  e  $(v_2, v_3) \in E(Q_n)$ , então existe  $j, j \neq k$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $v_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \bar{a}_j, a_{j+1}, \dots, a_{k-1}, \bar{a}_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ , supondo  $j < k$  sem perda de generalidade.

De maneira análoga, por  $v_4 \neq v_2$  e  $(v_1, v_4) \in E(Q_n)$ , nós temos que a  $n$ -upla de  $v_4$  é dada por  $v_4 = (a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, \bar{a}_j, a_{j+1}, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ .

Assim, as  $n$ -uplas dos vértices de um  $C_4$  de  $Q_n$  têm  $(n - 2)$  dígitos fixados.

Desta forma, nós podemos definir  $S$  um genérico  $C_4$  de  $Q_n$  escrevendo  $S = (I, s_{|I|+1}, II, s_{|(I,II)|+2}, III)$ , onde  $s_{|I|+1}$  e  $s_{|(I,II)|+2}$  tem valores em  $\{0, 1\}$ , e  $(I, II, III) = (s_1, s_2, \dots, s_{n-2})$  é a  $(n - 2)$ -upla fixada em  $S$ .

Vamos fixar  $T$  um  $C_4$  de  $Q_n$  dado por  $T = (IV, t_{|IV|+1}, t_{|IV|+2})$ , onde  $IV$  é a

$(n - 2)$ -upla consistindo somente de 0's.

Nós definimos um automorfismo  $\alpha$  de  $Q_n$  levando  $S$  para  $T$  como segue:

$$\alpha : Q_n \rightarrow Q_n \text{ onde,}$$

$$\begin{aligned} & \alpha(x_1, x_2, \dots, x_{|I|-1}, x_{|I|}, x_{|I|+1}, \dots, x_{|I,II|}, x_{|I,II|+1}, x_{|I,II|+2}, \dots, x_n) = \\ & = (y_1, y_2, \dots, y_{|I|}, y_{|I|+2}, y_{|I|+3}, \dots, y_{|I,II|+1}, y_{|I,II|+3}, y_{|I,II|+4}, \dots, y_n, x_{|I|+1}, x_{|I,II|+2}), \end{aligned}$$

tal que,

$$y_i = x_i, \text{ se e somente se } s_i = 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ e } i \notin \{|I| + 1, |I, II| + 2\}.$$

Trivialmente,  $\alpha$  leva  $S$  para  $T$ . Pela definição de  $\alpha$  ser tal que cada  $n$ -upla de  $Q_n$  tem trocados o mesmo conjunto de dígitos que depende de  $S$ , nós temos que de fato,  $\alpha$  é um automorfismo, como requerido.  $\square$

Por um argumento similar ao usado no Lema 2.2 nós podemos provar que o  $n$ -cubo é também vértice transitivo.

**Propriedade 2.3** *Para qualquer conjunto de três vértices em um  $Q_4$ , existe um  $C_4$  contendo dois deles.*

**Prova:** Considere, sem perda de generalidade, o vértice preto de  $Q_4$  na Figura 2.3(a). Os vértices em  $Q_4$  que não estão no mesmo  $C_4$  com respeito a este vértice estão pintados de preto na Figura 2.3(b). Como cada par destes vértices estão em um mesmo  $C_4$ , o resultado é obtido.  $\square$

Agora nós mostramos que um certo subgrafo  $F$  de  $Q_4$  possui *splitting number* maior ou igual a 2. Este grafo  $F$  será um grafo auxiliar usado nos Lemas 2.5 e 2.6 para obter que o grafo  $G$  resultante de um conjunto de 2 *splittings* em  $Q_4$  tem  $F$  como subgrafo, isto é, o *splitting number* de  $G$  é maior ou igual a 2. O que implica em  $Q_4$  ter *splitting number* maior ou igual que 4.

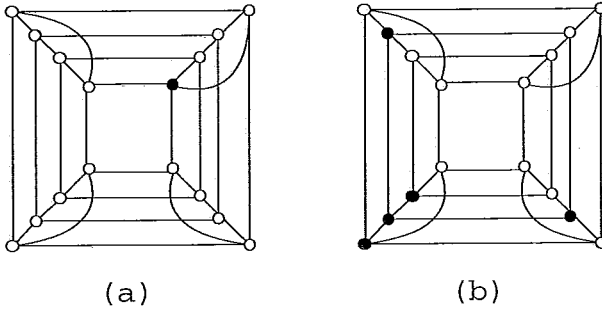


Figura 2.3: Não existe uma tripla de vértices em  $Q_4$  sem que pelo menos um par deles esteja no mesmo  $C_4$ .

**Teorema 2.4** *Se  $F$  é o subgrafo de  $Q_4$  definido pela Figura 2.4, então  $\sigma(F) \geq 2$ .*

**Prova:** Considere o subgrafo  $F$  de  $Q_4$  definido pela Figura 2.4. Considere  $F$  o subgrafo de  $Q_4$  definido pelo desenho  $D(F)$  no topo da Figura 2.4. Para mostrar que  $\sigma(F) \geq 2$ , nós mostramos que um *splitting* de um vértice arbitrário de  $F$  produz um grafo contendo uma subdivisão de  $K_{3,3}$ .

Na Figura 2.4 nós mostramos também dez cópias auxiliares de  $D(F)$ . Nós particionamos os vértices de  $F$  em dois conjuntos: vértices pretos e vértices listrados. Nós mostramos primeiro que a remoção de qualquer um dos vértices pretos produz um grafo contendo uma subdivisão de  $K_{3,3}$ . Apesar da remoção de um vértice listrado produzir um grafo planar, nós mostramos que o *splitting* de um vértice listrado produz um grafo contendo uma subdivisão de  $K_{3,3}$ .

Considere primeiro a Cópia 1, a cópia mais a direita e mais acima de  $D(F)$  na Figura 2.4. Esta cópia contém três vértices pretos e um subgrafo de  $F$  que é uma subdivisão de  $K_{3,3}$  cujas partições são rotuladas, respectivamente, com os rótulos 1 e 2. Isto significa que a remoção de qualquer um dos três vértices pretos, produz um grafo que possui uma subdivisão de  $K_{3,3}$  como subgrafo. Um argumento análogo mostra que este é o caso para qualquer vértice preto nas outras nove cópias de  $D(F)$ . Como um vértice preto pode ser removido sem produzir um grafo planar, com mais razão o *splitting* de um vértice preto não pode produzir um grafo planar.

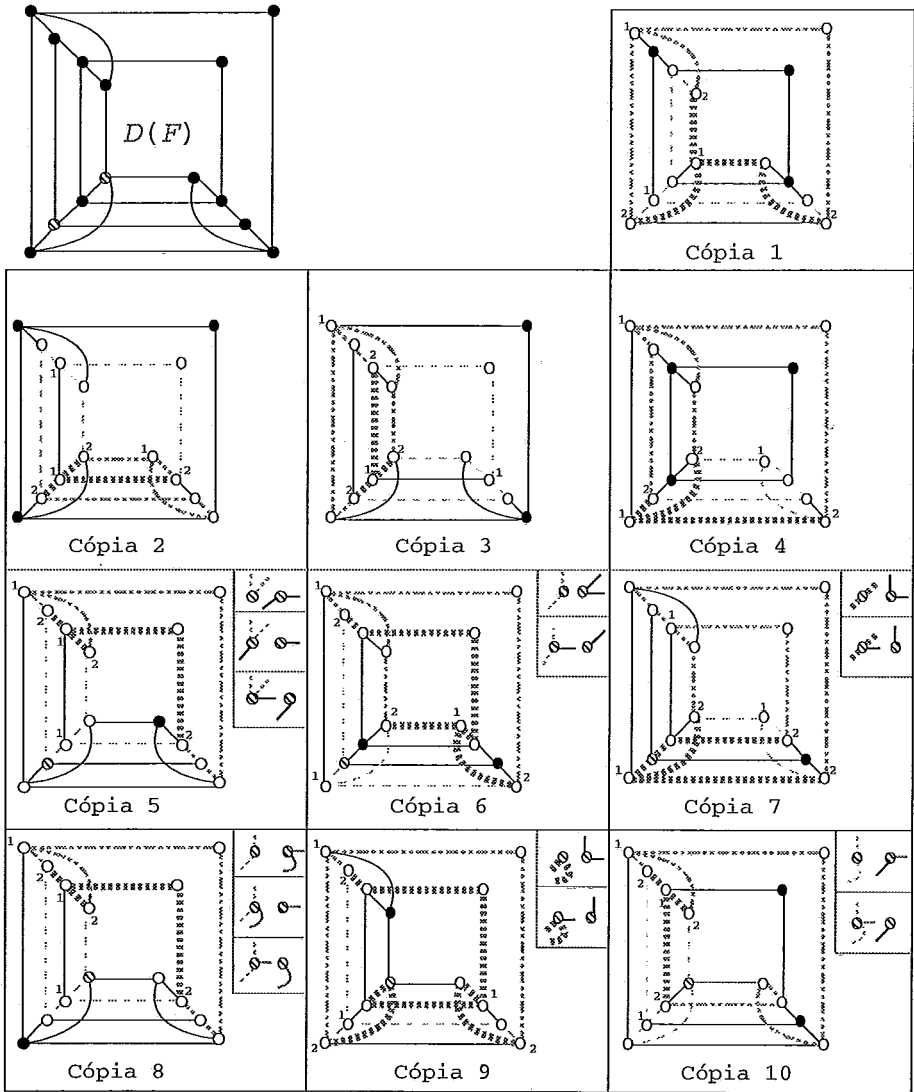


Figura 2.4: O grafo  $F$  com *splitting number* no mínimo 2 (para o Lema 2.1).



Nós observamos que através de uma análise de simetria para os vértices pretos é suficiente analisar somente as cópias 1 e 2.

A propriedade chave que nós usamos com respeito ao *splitting* de qualquer vértice listrado é que: se  $v$  é um vértice de grau 4, então qualquer *splitting* de  $v$  nos vértices  $v_1$  e  $v_2$ , é tal que ou  $v_1$  ou  $v_2$  possui grau no mínimo 2. Nós colocamos três cópias de  $D(F)$  para cada um destes dois vértices listrados com as correspondentes três subdivisões de  $K_{3,3}$ , onde cada subdivisão utiliza duas arestas incidentes a cada um dos vértices listrados. Nós colocamos ao lado de cada um dos seis desenhos cada *splitting* possível para um vértice listrado e a correspondente subdivisão de  $K_{3,3}$  no grafo resultante.  $\square$

A seguir nós mostramos que se  $G$  é um grafo obtido a partir de  $Q_4$  por três *splittings*, tal que um dos três *splittings* não é feito em um vértice de  $Q_4$ , então  $G$  é não planar.

**Lema 2.5** *Se  $G$  é obtido a partir de  $Q_4$  por dois *splittings*, tal que o primeiro ocorre no vértice  $v$  de  $Q_4$  dando origem aos vértices  $u$  e  $w$ , e o segundo no vértice  $u$ , então  $\sigma(G) \geq 2$ .*

**Prova:** Seja  $G$  um grafo satisfazendo a hipótese do lema. Nós estabelecemos que  $\sigma(G) \geq 2$  considerando que  $F$  é um subgrafo de  $G$ .

Porque  $F$  é um subgrafo de  $G$ , nós temos que  $\sigma(G) \geq \sigma(F)$ . Como  $\sigma(F) \geq 2$ , o lema decorre.  $\square$

Agora nós mostramos que três *splittings*, feitos em três vértices de  $Q_4$ , dois deles no mesmo  $C_4$ , não são suficientes para obter um grafo resultante planar a partir de  $Q_4$ .

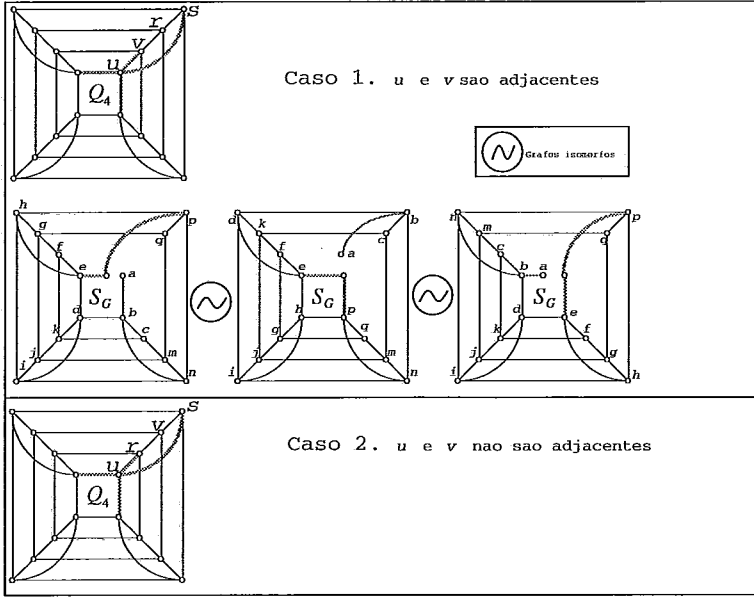


Figura 2.5: As possibilidades para um subgrafo  $S_G$  de  $G$ , onde foram feitos dois *splittings* nos vértices  $u$  e  $v$  de  $Q_4$  para obter  $G$  (para o Lema 2.6).

**Lema 2.6** Se  $G$  é obtido a partir de  $Q_4$  por dois *splittings* em vértices de um mesmo  $C_4$ , então  $\sigma(G) \geq 2$ .

**Prova:** Nós mostramos que  $G$  contém o grafo auxiliar  $F$  como subgrafo, que implicará em  $\sigma(G) \geq 2$ .

A definição de  $G$  determina dois vértices  $u$  e  $v$  no mesmo  $C_4$  de  $Q_4$  com os correspondentes *splittings*. Nós definimos  $S_G$  como o grafo obtido a partir de  $Q_4$  pela remoção de  $v$  e pelo *splitting* de  $u$  do mesmo modo pelo qual é feito o *splitting* de  $u$  de modo a obter  $G$ . Note que  $S_G$  é um subgrafo de  $G$ . Nós mostramos que  $F$  é subgrafo de  $S_G$  pela análise de todas as possibilidades para  $S_G$ .

Nós consideramos na Figura 2.5 dois casos de acordo com  $u$  e  $v$  serem adjacentes ou não em  $Q_4$ .

- **Caso 1.**  $u$  e  $v$  são adjacentes. Para a conveniência do leitor nós definimos três isomorfismos entre as três possibilidades para  $S_G$ . Nós notamos que  $S_G \setminus \{a, b\}$  é por sua vez isomorfo a  $F$ , como requerido.

- **Caso 2.**  $u$  e  $v$  não são adjacentes. Neste caso é suficiente verificar que  $Q_4 \setminus \{u, v\}$  é igual a  $F$  e portanto  $F$  é subgrafo de  $S_G$ .

□

Finalmente, nós enunciamos e provamos o Teorema principal do capítulo.

**Teorema 2.7** *O splitting number de  $Q_4$  é quatro.*

**Prova:** É suficiente estabelecer que  $\sigma(Q_4) \geq 4$ . Segue da Propriedade 2.3, Lema 2.5 e Lema 2.6 que não existe um conjunto de três *splittings* a partir de  $Q_4$  obtendo um grafo planar resultante e portanto  $\sigma(Q_4) \geq 4$ . Como já vimos que  $\sigma(Q_4) \leq 4$ , temos que o *splitting number* de  $Q_4$  é quatro. □

## Capítulo 3

# A respeito da conjectura de Guy e Erdős para o *crossing number* do $n$ -cubo

O problema de encontrar o *crossing number* do  $n$ -cubo, para qualquer  $n$  é aberto. Eggleton e Guy [11] anunciaram em 1970, que o *crossing number* do  $n$ -cubo é determinado pela função  $\nu(Q_n) = \frac{5}{32}4^n - \lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor 2^{n-2}$ . Porém em 1971, Guy e Erdős [12] publicaram que existia um erro na demonstração anunciada em [11] e que então eles estabeleciam como uma conjectura que o *crossing number* do  $n$ -cubo é limitado superiormente por aquela função, isto é,  $\nu(Q_n) \leq \frac{5}{32}4^n - \lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor 2^{n-2}$ .

Nós observamos que os grafos: 1-cubo, 2-cubo e 3-cubo são planares (Figura 1.1), isto é,  $\nu(Q_n) = 0$ , se  $n = 1, 2$  ou  $3$ . Recentemente, Dean e Richter mostraram que o *crossing number* do 4-cubo é 8 [7] o que confirma a conjectura de Guy e Erdős para  $n = 4$ .

Madej [31] estabeleceu um algoritmo para desenhar um  $n$ -cubo qualquer, onde o desenho para o  $n$ -cubo deste algoritmo possui  $\frac{1}{6}4^n - n^2 \cdot 2^{n-3} - 3 \cdot 2^{n-4} + \frac{1}{48}(-2)^n$  cruzamentos. Desde então, esta função de  $n$  passou a ser o único limite superior conhecido para o *crossing number* do  $n$ -cubo, isto é,  $\nu(Q_n) \leq \frac{1}{6}4^n - n^2 \cdot 2^{n-3} - 3 \cdot 2^{n-4} + \frac{1}{48}(-2)^n$ . É sabido que este limite superior não é ótimo, porque para  $n = 5$  a função de Madej obtém 64 cruzamentos e Madej exibiu em [31] um desenho (que não é o desenho obtido pelo algoritmo) para o 5-cubo com 56 cruzamentos, confirmando

assim a conjectura de limite superior de Guy e Erdős para o *crossing number* do  $n$ -cubo quando  $n = 5$ . Sýkora e Vrto [37] provaram em 1993, que  $\nu(Q_n) = \Omega(4^n)$ . Assim, nós temos que  $\nu(Q_n) = \Theta(4^n)$ .

Nós mostramos, na primeira seção deste capítulo, os desenhos que confirmam a conjectura de Guy e Erdős para o limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo quando  $n = 6, 7$  e  $8$  [13]. Além disso, nós exibimos, na segunda seção deste capítulo, um novo limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo com  $n \geq 7$  dado por  $\nu(Q_n) \leq \frac{165}{1024}4^n - \frac{2n^2-11n+34}{2}2^{n-2}$ . Este limite constitui um melhoramento razoável com respeito ao limite de Madej em [31]. Pois, além de nosso limite ser sempre menor que o limite de Madej, a constante multiplicativa do termo  $4^n$  é reduzida de  $\frac{1}{6} > \frac{170}{1024}$  na fórmula de Madej para  $\frac{165}{1024}$  em nossa fórmula. Além disso, a conjectura de Guy e Erdős possui a constante multiplicativa do termo  $4^n$  igual a  $\frac{5}{32} = \frac{160}{1024}$ , o que significa que nossa função também aproxima razoavelmente o valor esperado na conjectura de Richard Guy e Paul Erdős.

### 3.1 A confirmação da conjectura de Guy e Erdős para os valores de $n = 6, 7$ e $8$

A seguir nós mostramos os desenhos que confirmam a conjectura de Guy e Erdős para o limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo quando  $n = 6, 7$  e  $8$ .

Os três desenhos que vamos descrever têm todos a mesma estratégia de construção: Antes de mais nada, nós damos uma oitava parte do desenho do  $n$ -cubo correspondente. As sete oitavas partes restantes, são as mesmas que a primeira, porém elas diferem com respeito as reflexões, que serão definidas a seguir. Finalmente, nós definimos um método para ligar as arestas entre estas oito oitavas partes.

Este método será aplicado à Figura 3.2 de forma a obter um desenho para o 6-cubo, à Figura 3.4 para o 7-cubo e à Figura 3.5 para o 8-cubo.

Considere o diagrama na Figura 3.1, obtido pelas reflexões do quadrado cópia 1

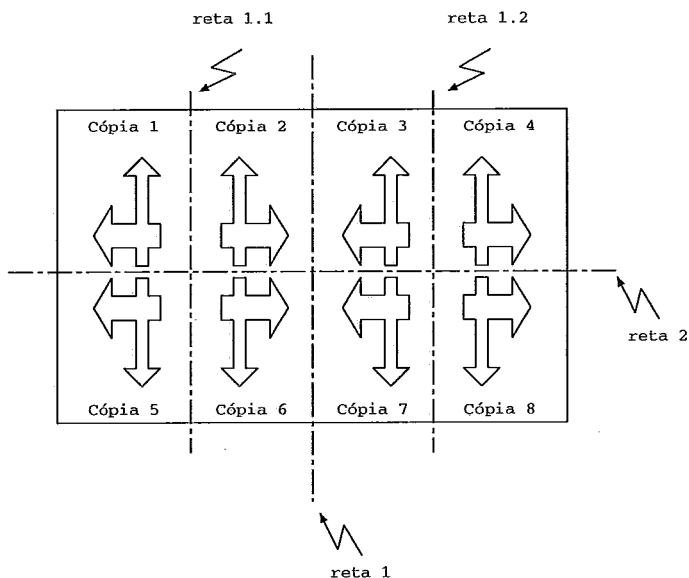


Figura 3.1: Reflexões do quadrado cópia 1.

como segue.

O quadrado cópia 2 é o quadrado cópia 1 obtido por uma reflexão com respeito a reta 1.1. Cópia 3 é idêntica a cópia 1. Cópia 4 é idêntica a cópia 2. A Cópia 5 é a cópia 1 obtida por uma reflexão com respeito a reta 2. Nós definimos as outras três cópias, em relação ao quadrado cópia 1, de modo análogo.

O quadrado cópia 1 representa uma cópia de uma das Figuras: 3.2, 3.4, ou 3.5 de forma a obter um desenho do 6-cubo, ou do 7-cubo, ou do 8-cubo, respectivamente.

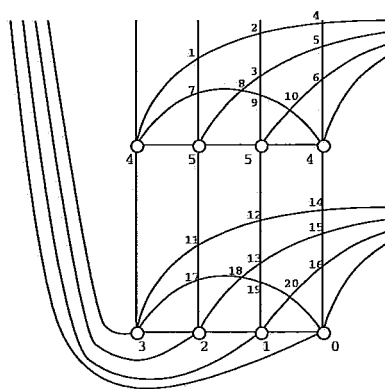


Figura 3.2: Referente ao 6-cubo.

As arestas que tomam a direção horizontal em cada cópia ligam vértices simétricos em cópias vizinhas com respeito as retas 1.1 e 1.2. Arestas que tomam

a direção vertical em cada cópia, ligam vértices simétricos em cópia vizinhas com respeito a reta 1. Nós também consideramos no quadrado cópia 1 as distâncias exteriores (*ext. dis.*), anexadas aos vértices, para representar o número mínimo de cruzamentos induzidos nas arestas do quadrado cópia 1, por uma aresta ligando um vértice do quadrado cópia 1 a um vértice do quadrado cópia 5.

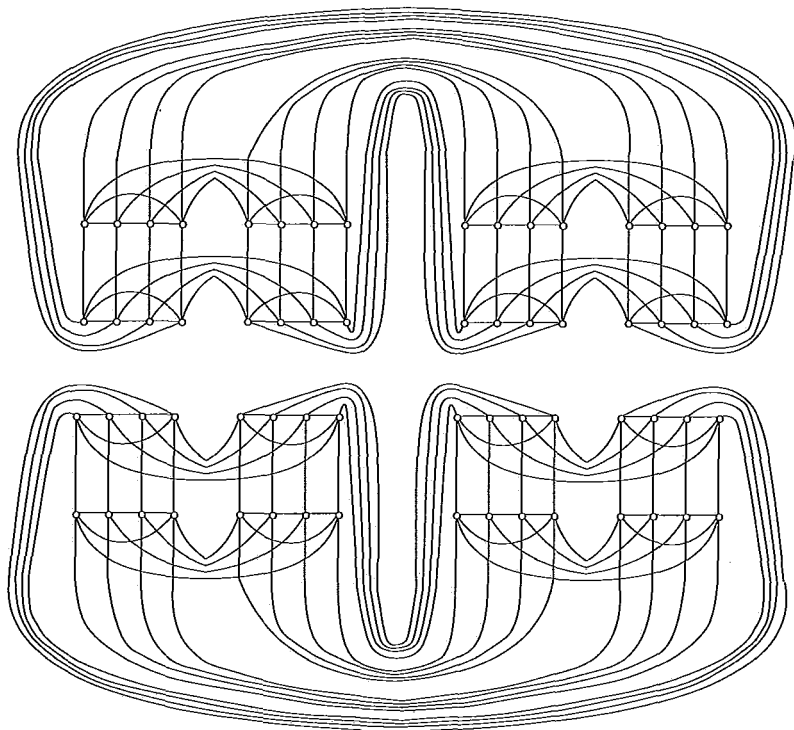


Figura 3.3: Método completo para desenhar o 6-cubo (arestas entre as partes superior e inferior são omitidas).

Então, no desenho do 6-cubo da Figura 3.2, nós obtemos, que a soma das distâncias exteriores é igual a 24 e o número de cruzamentos é igual a 20. A função de Guy e Erdős para  $n = 6$  tem imagem  $\frac{5}{32}4^6 - \lfloor \frac{6^2+1}{2} \rfloor 2^{6-2} = 352 = 8 \times 44$ . Para ilustrar o método completo, nós mostramos na Figura 3.3 o caso  $n = 6$ , onde nós omitimos as arestas entre as partes superior e inferior para simplificar o desenho.

Analogamente, nós temos no caso  $n = 7$  que a soma das distâncias exteriores é igual a 120 e o número de cruzamentos é igual a 100. Para  $n = 7$ , a função de Guy e Erdős tem imagem  $\frac{5}{32}4^7 - \lfloor \frac{7^2+1}{2} \rfloor 2^{7-2} = 1760 = 8 \times 220$ .

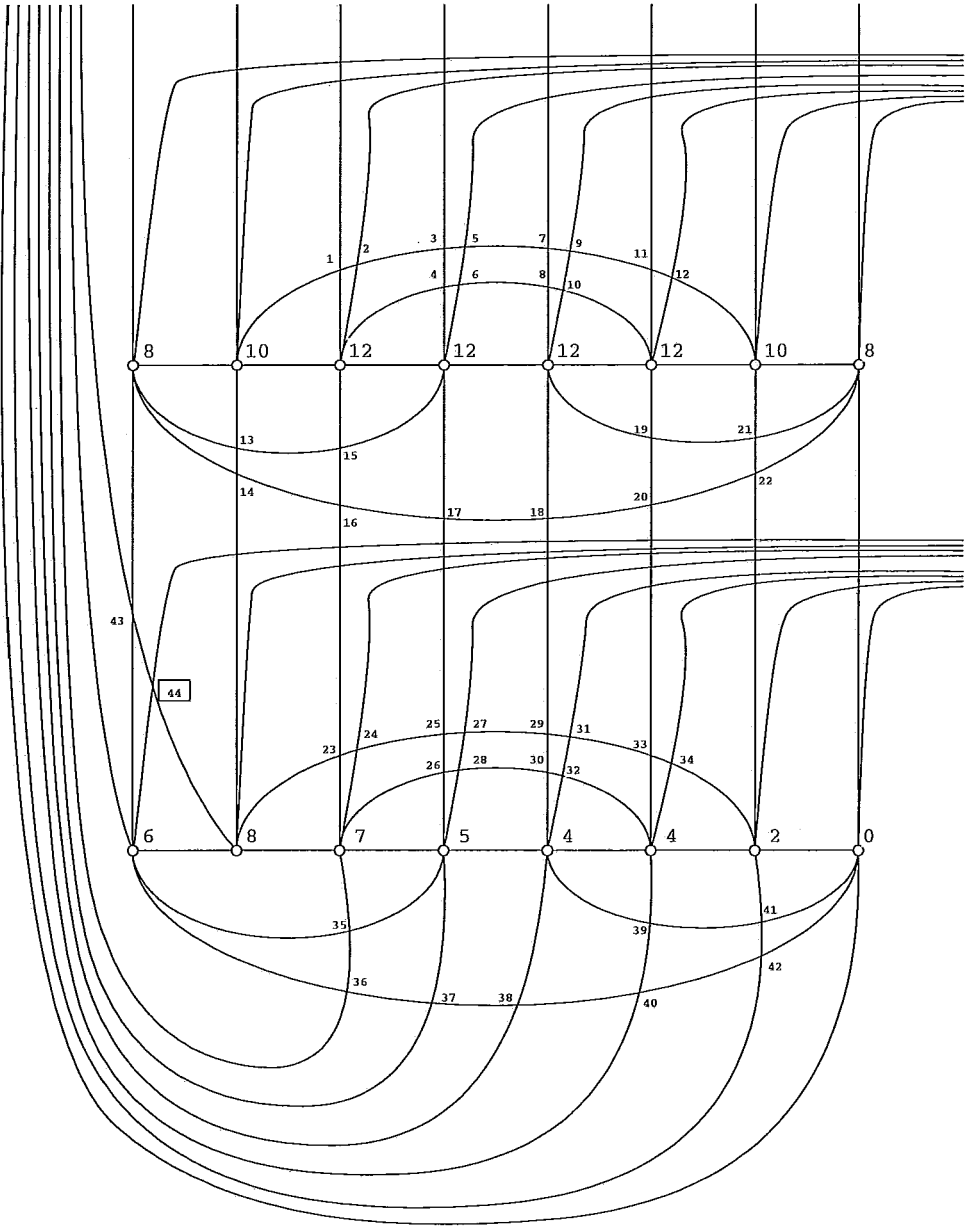


Figura 3.4: Referente ao 7-cubo.



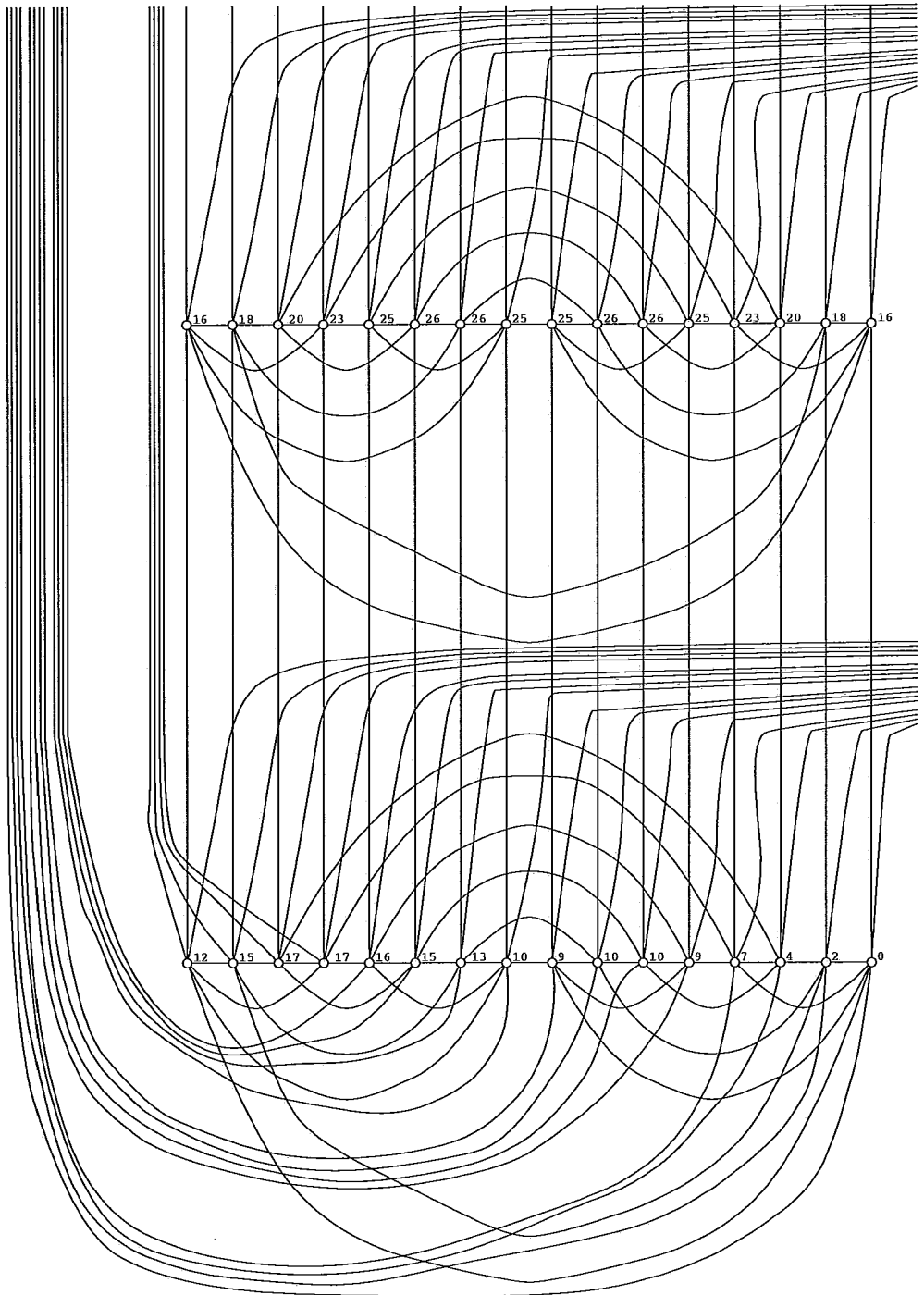


Figura 3.5: Referente ao 8-cubo.

No caso  $n = 8$ , as arestas que seguem horizontais, sem vértice final, que vão ligar vértices em cópias simétricas com respeito as retas 1.1 e 1.2, induzem 240 cruzamentos dentro de cada cópia. Isto é fácil de ver porque nós temos na Figura 3.5 um cruzamento com a aresta mais a direita que possui cruzamento, dois com a próxima e respectivamente  $3, 4, \dots, 15$  com as demais e assim, nós temos um total de 120 cruzamentos para a parte superior da cópia e 120 para a inferior. Então nós temos que a soma das distâncias exteriores é igual a 524 e o número de cruzamentos é igual a 500. Finalmente, se  $n = 8$ , a função de Guy e Erdős tem imagem  $\frac{5}{32}4^8 - \lfloor \frac{8^2+1}{2} \rfloor 2^{8-2} = 8192 = 1024 \times 8$ .

### 3.2 Um limite superior para o *crossing number* do $n$ -cubo

Agora nós vamos apresentar o limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo  $\nu(Q_n) \leq \frac{165}{1024}4^n - \frac{2n^2-11n+34}{2}2^{n-2}$ . Para isso, usamos como base de idéias os desenhos que temos para os 7- e 8-cubos da seção anterior e a estratégia usada para suas construções. Nós agora vamos definir um desenho para o  $n$ -cubo para todo  $n \geq 7$  e vamos contar o número de cruzamentos neste desenho, de forma a obter o limite superior  $\nu(Q_n) \leq \frac{165}{1024}4^n - \frac{2n^2-11n+34}{2}2^{n-2}$  para a classe dos  $n$ -cubos com  $n \geq 7$ .

**Definição do desenho para um  $n$ -cubo com  $n \geq 7$ .**

Considere a Figura 3.6, onde temos o desenho de uma oitava parte de um  $n$ -cubo, correspondente ao quadrado cópia 1. Os demais quadrados cópias 2,3,4,5,6,7 e 8 assumem a mesma definição, em relação ao quadrado cópia 1, que possuíam para o caso dos desenhos dos 7- e 8-cubos. A fim de facilitar o entendimento para o leitor, nós sugerimos que o mesmo acompanhe quando for o caso, o desenho da Figura 3.6 correspondente ao  $n$ -cubo ao mesmo tempo que os desenhos nas Figuras 3.4 e 3.5 correspondentes aos desenhos dos 7- e 8-cubos, os quais são casos particulares do desenho na Figura 3.6. Nós observamos que não é este o caso do

desenho na Figura 3.2 correspondente ao 6-cubo, porque na definição do desenho do  $n$ -cubo da Figura 3.6 nós requerimos um subgrafo correspondente a um  $Q_{n-7}$ , o que não está definido para um  $n$ -cubo com  $n \leq 6$ .

O grafo induzido pelos vértices da Figura 3.6 define um  $Q_{n-3}$ . Na horizontal da parte superior da Figura 3.6, temos um  $Q_{n-4}$  e na horizontal da parte inferior da Figura 3.6, temos outro  $Q_{n-4}$ . Considere primeiro o  $Q_{n-4}$  na parte superior da Figura 3.6 e a horizontal onde ficam os seus vértices. Os vértices na metade esquerda deste  $Q_{n-4}$  definem um  $Q_{n-5}$  e os vértices na metade direita deste  $Q_{n-4}$  definem também um  $Q_{n-5}$ . Todas as arestas do  $Q_{n-5}$  esquerdo ficam abaixo da horizontal superior. Isto vale para o  $Q_{n-5}$  da metade direita deste  $Q_{n-4}$ . As arestas dos dois  $Q_{n-5}$ 's da metade esquerda e direita do  $Q_{n-4}$  inferior ficam abaixo da horizontal inferior. Voltando para o  $Q_{n-4}$  superior. Existem  $2^{n-5}$  arestas que ligam os vértices do  $Q_{n-5}$  da metade esquerda com os vértices do  $Q_{n-5}$  da metade direita. As  $2^{n-7}$  arestas que ligam os  $2^{n-7}$  vértices mais a esquerda do  $Q_{n-5}$  esquerdo com os  $2^{n-7}$  vértices mais a direita do  $Q_{n-5}$  direito, ficam abaixo da horizontal superior. As restantes  $2^{n-5} - 2^{n-7} = 2^{n-7}(2^2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-7}$  arestas que ligam os vértices do  $Q_{n-5}$  da metade esquerda com os vértices do  $Q_{n-5}$  da metade direita serão desenhadas na parte superior da horizontal superior. Isto vale também para o  $Q_{n-4}$  inferior. As arestas que ligam os vértices  $Q_{n-4}$  superior com os vértices do  $Q_{n-4}$  inferior têm a direção vertical no desenho da Figura 3.6. As arestas que ligam cada um dos vértices dos  $Q_{n-4}$ 's com os vértices correspondentes dos  $Q_{n-4}$ 's no quadrado cópia 2 seguem na direção horizontal para a direita no desenho da Figura 3.6. As arestas que ligam cada um dos vértices do  $Q_{n-4}$  superior com os vértices do  $Q_{n-4}$  correspondente no quadrado cópia 4 seguem na direção vertical e para cima no desenho da Figura 3.6. As arestas que ligam os  $\frac{3}{4}2^{n-4}$  vértices mais a direita do  $Q_{n-4}$  inferior com os vértices correspondentes no quadrado cópia 4 seguem por baixo da horizontal inferior para depois subirem pela extrema esquerda do desenho da Figura

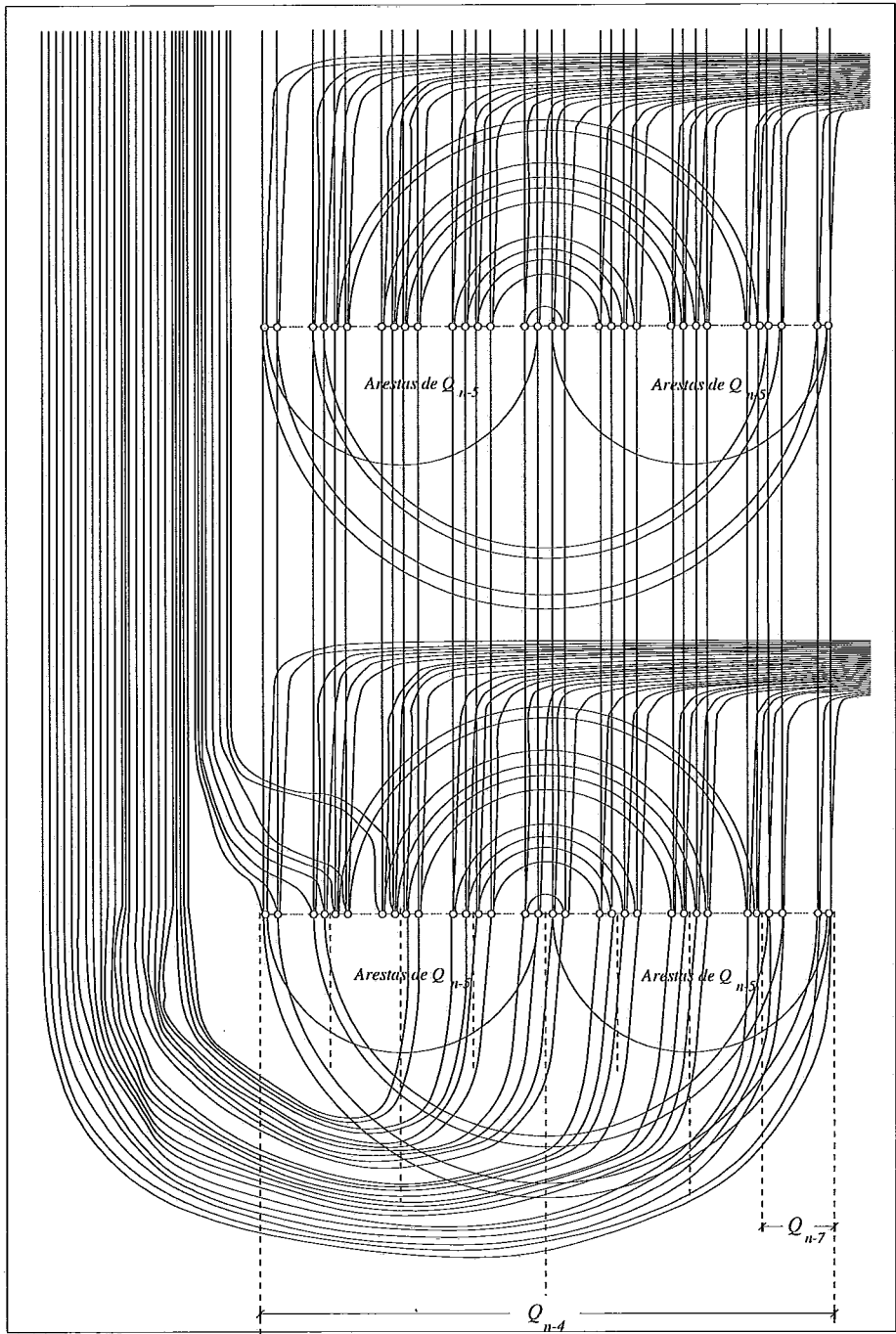


Figura 3.6: Desenho para o quadrado cópia 1 correspondente a um  $n$ -cubo, com  $n \geq 7$ .

3.6. As arestas que ligam os  $\frac{1}{4}2^{n-4}$  vértices mais a esquerda do  $Q_{n-4}$  inferior com os vértices correspondentes no quadrado cópia 4, seguem por cima da horizontal inferior para depois se juntarem as  $\frac{3}{4}2^{n-4}$  arestas restantes na extrema esquerda do desenho da Figura 3.6. Os quadrados cópia 1,2,3,4,5,6,7 e 8 são ligados para formar o desenho para  $Q_n$  como nos casos dos desenhos para os 7- e 8-cubos. Descrevemos as arestas que conectam os vértices das cópias 1,2,3 e 4 com os respectivos vértices nas cópias 5,6,7 e 8 através das distâncias exteriores, da mesma maneira que fizemos na seção anterior. Isto conclui a definição do desenho de  $Q_n$ .

Tendo definido o desenho do  $Q_n$  para qualquer  $n$  inteiro positivo,  $n \geq 7$ , nós vamos contar o número de cruzamentos deste desenho de  $Q_n$ . O processo de contagem de cruzamentos é semelhante àquele usado para os desenhos para o 7- e 8-cubos. Nós primeiro contamos os cruzamentos no quadrado cópia 1, depois somamos as distâncias exteriores no quadrado cópia 1. Totalizando estes dois valores, nós multiplicamos por oito para obter o número de cruzamentos no desenho do  $n$ -cubo.

- Determinação do número de cruzamentos no desenho para  $Q_n$

Agora nós calculamos os cruzamentos no desenho da oitava parte do  $n$ -cubo exibido na Figura 3.6. Para isso, nós exibimos na Figura 3.7(a) um desenho plano com algumas arestas da Figura 3.6. Na Figura 3.7(b) nós temos uma cópia da Figura 3.7(a) com algumas outras arestas que estão na Figura 3.6 e não estão na Figura 3.7(a). Estas novas arestas induzem um certo número de cruzamentos na Figura 3.7(b). Nós contamos estes cruzamentos e passamos para a Figura 3.7(c), onde nós temos uma cópia da Figura 3.7(b) com algumas outras arestas que estão na Figura 3.6 e não estão na Figura 3.7(b). Nós contamos os cruzamentos adicionais na Figura 3.7(c) e somamos com os cruzamentos contados até o momento. Analogamente, nós passamos colocando arestas adicionais e contando os cruzamentos adicionais produzidos até que

nós finalmente contamos os cruzamentos na Figura 3.7(f) onde nós temos uma cópia da Figura 3.6. Isto encerra o processo de contagem dos cruzamentos.

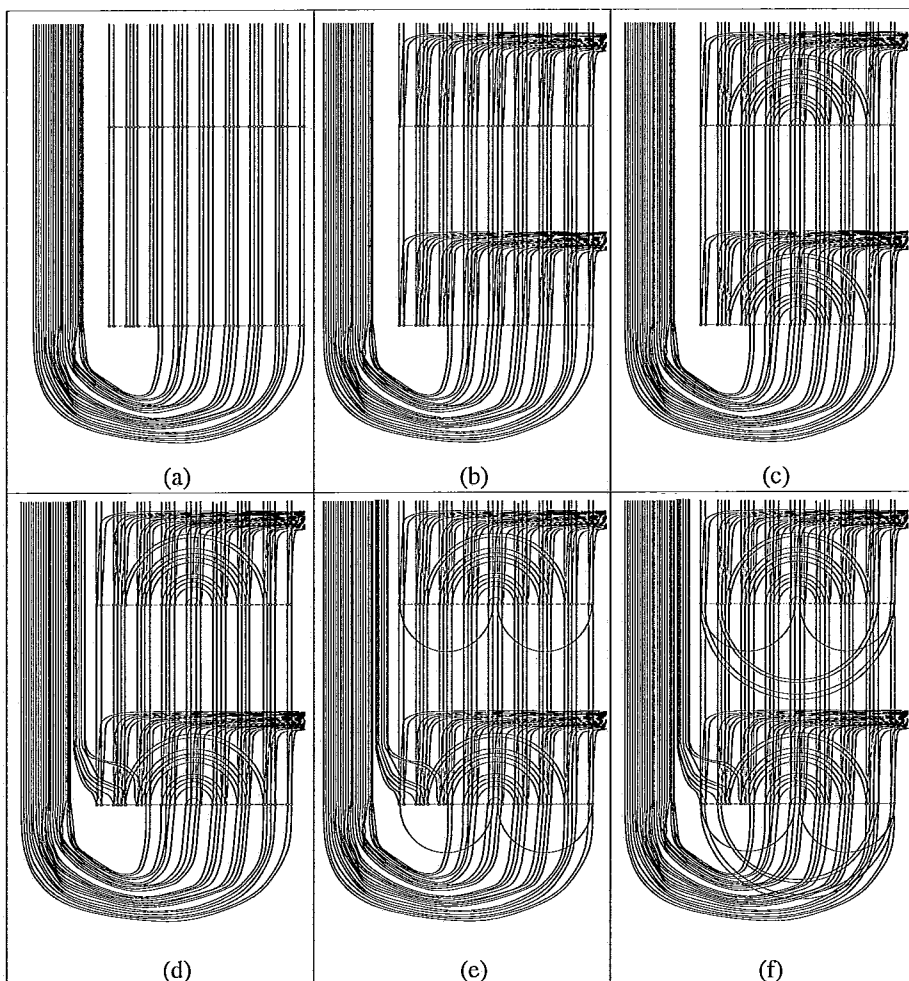


Figura 3.7: Processo de contagem de cruzamentos.

Vamos começar a calcular os cruzamentos em cada uma das Figuras 3.7(b),(c), (d), (e) e (f)

– Na Figura 3.7(b).

Esta parte é a mais fácil, porque temos acima da horizontal superior a soma de cruzamentos  $(2^{n-4} - 1) + (2^{n-4} - 2) + (2^{n-4} - 3) + \dots + (1) = \sum_{i=1}^{2^{n-4}-1} i$  que resulta na soma dos primeiros  $(2^{n-4} - 1)$  números naturais que dão  $2^{n-5}(2^{n-4} - 1)$  cruzamentos acima da horizontal superior, e analogamente  $2^{n-5}(2^{n-4} - 1)$  cruzamentos entre a horizontal superior

e a horizontal inferior. Ou seja, temos um total de  $2^{n-4}(2^{n-4} - 1) = 4^{n-4} - 2^{n-4}$  cruzamentos na Figura 3.7(b).

– Na Figura 3.7(c).

Para cada vértice do  $Q_{n-4}$  da parte superior e para cada vértice do  $Q_{n-4}$  da parte inferior existe um par de arestas incidentes que sobem na Figura 3.7(b). Consideramos primeiro os cruzamentos acima da horizontal superior. Existem  $3 \times 2^{n-7} - 1$  arestas ligando os vértices do  $Q_{n-5}$  esquerdo com os vértices do  $Q_{n-5}$  direito na horizontal superior, que possuem cruzamentos. Considere a aresta mais interior destas  $3 \times 2^{n-7} - 1$  arestas. Existem dois vértices entre as extremidades desta aresta, como duas arestas sobem em cada um destes dois vértices, temos  $2 \times 2$  cruzamentos nesta aresta. Depois desta aresta, a primeira aresta mais para o exterior, possui quatro vértices entre suas extremidades, por isso temos adicionais  $4 \times 2$  cruzamentos. A próxima aresta tem seis vértices entre suas extremidades, por isso  $6 \times 2$  cruzamentos, este processo pára quando temos  $(2 \times (3 \times 2^{n-7} - 1)) \times 2$  cruzamentos. Assim, temos  $4 \sum_{i=1}^{3 \times 2^{n-7} - 1} i$  cruzamentos para a parte superior e  $4 \sum_{i=1}^{3 \times 2^{n-7} - 1} i$  cruzamentos para a parte inferior. O que totalizam  $3 \times 2^{n-5}(3 \times 2^{n-7} - 1) = 9 \times 4^{n-6} - 3 \times 2^{n-5}$  cruzamentos adicionais na Figura 3.7(c).

– Na Figura 3.7(d).

Vamos primeiro definir uma função chamada  $\psi(n)$  que é definida como o número de cruzamentos adicionais da Figura 3.7(d). Considere o  $Q_{n-6}$  mais a esquerda do  $Q_{n-4}$  da horizontal inferior na Figura 3.6. Veja agora esta mesma região no desenho da Figura 3.6(c). Considere primeiro o  $Q_{n-7}$  na metade esquerda deste  $Q_{n-6}$ . Para cada vértice nesse  $Q_{n-7}$ , existem duas arestas que seguem na direção vertical no desenho da Fi-

gura 3.7(c). Considere agora o  $Q_{n-7}$  na metade direita deste  $Q_{n-6}$ . Para cada vértice nesse  $Q_{n-7}$  existem três arestas que seguem na direção vertical no desenho da Figura 3.7(c). Assim, no desenho da Figura 3.7(c) existe o seguinte número de cruzamentos adicionais

$$\begin{aligned}\psi(n) &= 2 \sum_{i=1}^{2^{n-6}-1} i + \sum_{i=1}^{2^{n-7}-1} i = \\ &= 2^{n-6}(2^{n-6} - 1) + 2^{n-8}(2^{n-7} - 1) = \frac{4^n}{2^{12}} + \frac{4^n}{2^{15}} - 2^{n-6} - 2^{n-8}.\end{aligned}$$

O que obtém que:

$$\psi(n) = \frac{9}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8}.$$

– Na Figura 3.7(e).

Para este cálculo nós vamos precisar definir duas funções extras. Passemos a elas:

Considere a Figura 3.8(a). Nós vamos indutivamente desenhar em cada horizontal, um  $Q_n$  para todo  $n$  inteiro positivo, tal que todas as arestas de  $Q_n$  estejam abaixo dessa horizontal. O desenho para  $Q_n$  é obtido através de dois desenhos para  $Q_{n-1}$  ligando  $2^{n-1}$  arestas. A corretude para este desenho vem do fato que  $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$  (Figura 3.8(b)). Em um desenho deste tipo para  $Q_n$  (Figura 3.9(a)), queremos determinar a soma do número de cruzamentos que  $2^n$  novas arestas, saindo uma de cada um dos vértices de  $Q_n$  para a região infinita abaixo da horizontal, produzem com as arestas deste desenho (Figura 3.9(d)). Em outras palavras, queremos calcular a soma das distâncias exteriores dos vértices de  $Q_n$  em relação a região infinita abaixo da horizontal deste desenho para  $Q_n$ . Este número será definido como  $\phi(n)$ . Isto é,  $\phi(n)$  é o número de cruzamentos que  $2^n$



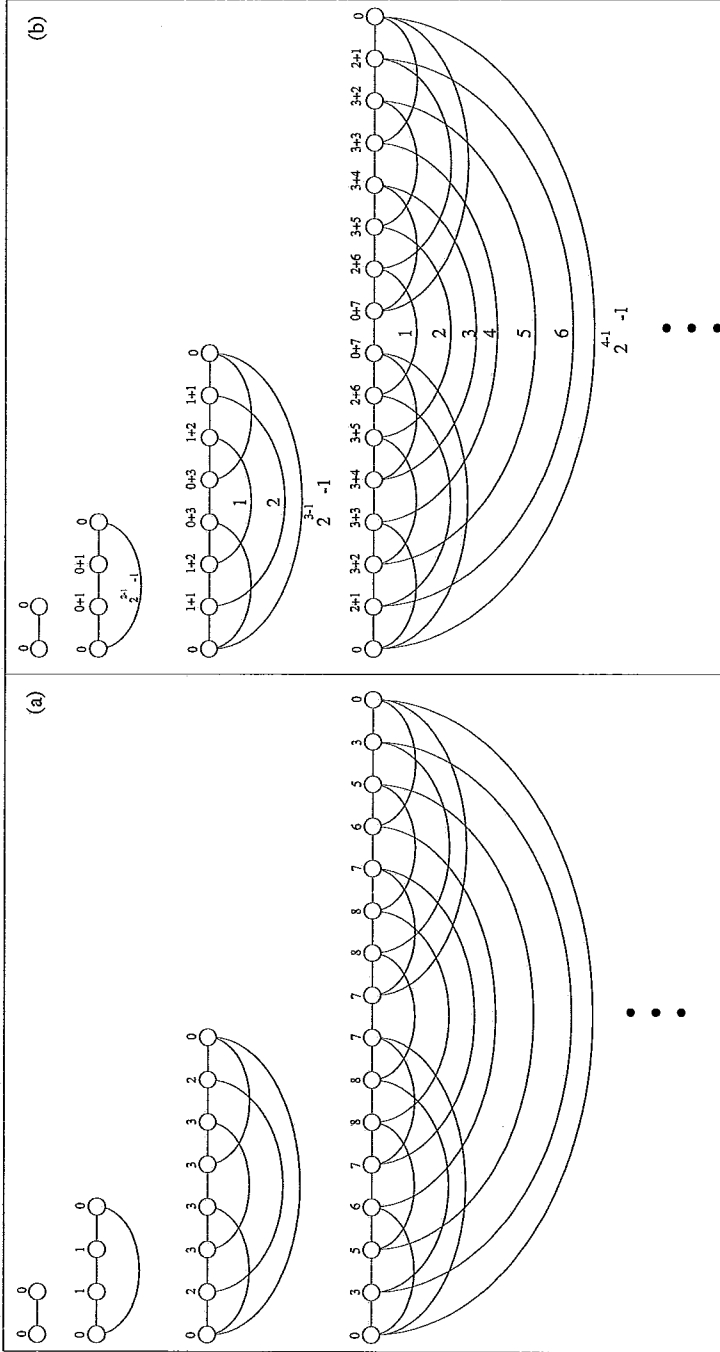


Figura 3.8: Distâncias exteriores para função  $\phi(n)$ .

arestas seguindo verticalmente e para baixo compartilham com as arestas de  $Q_n$  como desenhado na Figura 3.9(a). Vamos agora determinar o valor de  $\phi(n)$ . Considere a Figura 3.9(d). Nela temos um desenho para  $Q_n$  e  $2^n$  arestas seguindo verticalmente e para baixo. Calcularemos o valor de  $\phi(n)$  em duas partes. A primeira parte com os cruzamentos entre as arestas verticais e as arestas de cada um dos  $Q_{n-1}$  das duas extremidades de  $Q_n$ , como mostrado na Figura 3.9(b), que totalizará duas vezes o valor de  $\phi(n-1)$ . A segunda parte serão os cruzamentos das arestas verticais com as  $2^{n-1}$  arestas que ligam os vértices do  $Q_{n-1}$  da extremidade direita de  $Q_n$  aos vértices do  $Q_{n-1}$  da extremidade esquerda de  $Q_n$  como mostrado na Figura 3.9(c). Para a mais exterior destas  $2^{n-1}$  arestas que ligam os dois  $Q_{n-1}$ 's da extremidade direita e da extremidade esquerda, temos  $(2^{n-1} - 1)2$  cruzamentos, que são  $2^{n-1} - 1$  cruzamentos com as  $2^{n-1}$  arestas verticais mais a direita e  $2^{n-1} - 1$  cruzamentos com as  $2^{n-1}$  arestas verticais mais a esquerda, porque a primeira aresta vertical mais a esquerda e a primeira aresta vertical mais a direita não possuem cruzamento. Analogamente, do exterior para o interior temos, respectivamente,  $(2^{n-1} - 2)2$ ,  $(2^{n-1} - 3)2, \dots, 2 \cdot 2$  e  $1 \cdot 2$  cruzamentos para a mais interior destas  $2^{n-1}$  arestas que ligam os vértices dos dois  $Q_{n-1}$ 's da extremidade direita e da extremidade esquerda de  $Q_n$  (Figura 3.9(c)). Sabemos também que  $\phi(1) = 0$ . E dessa forma, para  $n \geq 1$  o valor de  $\phi(n)$  é dado por  $\phi(n) = 2\phi(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} i$ .

Resolvendo a recorrência,

$$\begin{cases} \phi(1) = 0 \\ \phi(n) = 2\phi(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} i, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\phi(n) = 2\phi(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-1}-1} i =$$

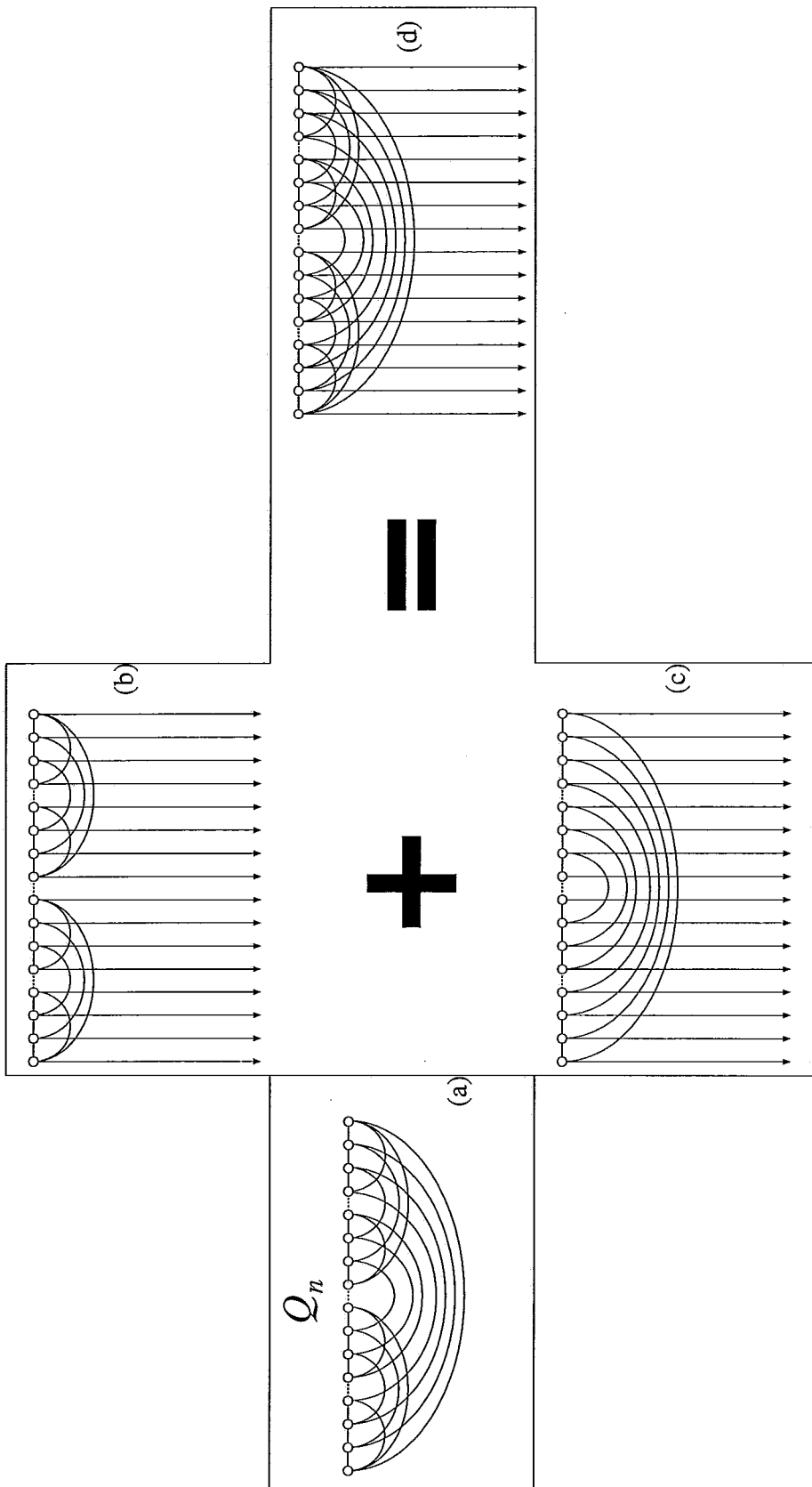


Figura 3.9: Distâncias exteriores para função  $\phi(n)$ .

$$\begin{aligned}
&= 2\phi(n-1) + 2^{n-1}(2^{n-1} - 1) = 2\phi(n-1) + 2^{2(n-1)} - 2^{n-1} = \\
&= 2^2\phi(n-2) + 2^{2(n-2)+1} - 2^{(n-2)+1} + 2^{2n-2} - 2^{n-1} = \\
&= 2^2\phi(n-2) + 2^{2n-2} + 2^{2n-3} - 2^{n-1} - 2^{n-1} =
\end{aligned}$$

Suponha por indução que para algum  $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$  se tenha que:

$$\phi(n) = 2^k\phi(n-k) + 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \dots + 2^{2n-(k+1)} - 2^{n-1}(k).$$

Vamos mostrar que este argumento é válido para  $k+1$ .

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= 2^k(2\phi(n-(k+1)) + 2^{2(n-(k+1))} - 2^{n-(k+1)}) + \\
&+ 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \dots + 2^{2n-(k+1)} - 2^{n-1}(k) = \\
&= 2^{k+1}\phi(n-(k+1)) + 2^{2(n-(k+1))+k} - 2^{n-(k+1)+k} + \\
&+ 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \dots + 2^{2n-(k+1)} - 2^{n-1}(k) = \\
&= 2^{k+1}\phi(n-(k+1)) + 2^{2n-k-2} - 2^{n-1} + \\
&+ 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \dots + 2^{2n-(k+1)} - 2^{n-1}(k) = \\
&= 2^{k+1}\phi(n-(k+1)) + 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + \\
&+ 2^{2n-4} + \dots + 2^{2n-(k+1)} + 2^{2n-(k+2)} - 2^{n-1}(k+1), \text{ como requerido.}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= 2^{n-1}\phi(1) + 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + 2^{2n-4} + \dots + 2^{2n-n} - 2^{n-1}(n-1) = \\
&= 0 + \sum_{i=2}^n 2^{2n-i} + -2^{n-1}(n-1) = 2^{2n-n}(2^{n-1} - 1) - 2^{n-1}(n-1) = \\
&= 2^{2n-1} - 2^n - 2^{n-1}(n-1).
\end{aligned}$$

E concluimos,  $\phi(n) = \frac{4^n}{2} - 2^{n-1}(n+1)$ .

Queremos saber agora, qual é o número de cruzamentos no desenho de  $Q_n$  da Figura 3.8(a). Este número de cruzamentos será dado pela função  $v(n)$ , vamos usar  $\phi(n)$  para definir esta função.

Pela definição do desenho da Figura 3.8(a), teremos o número de cruzamentos no desenho de  $Q_n$  igual ao número de cruzamentos no desenho de cada um dos  $Q_{n-1}$ 's mais o número de cruzamentos entre as arestas dos  $Q_{n-1}$ 's com as  $2^{n-1}$  arestas que ligam os vértices correspondentes aos dois  $Q_{n-1}$ 's, isto é  $v(n) = 2v(n-1) + 2\phi(n-1)$ .

Vamos agora resolver a recorrência para  $v(n)$ .

$$\begin{cases} v(2) = 0 \\ v(n) = 2v(n-1) + 2\phi(n-1), n \geq 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
v(n) &= 2v(n-1) + 4^{n-1} - 2^{n-1}n = 2v(n-1) + 4^{n-1} - 2^{n-1}n = \\
&= 2^2v(n-2) + 2 \cdot 4^{n-2} - 2 \cdot 2^{n-2}(n-1) + 4^{n-1} - 2^{n-1}n = \\
&= 2^2v(n-2) + 2 \cdot 4^{n-2} - 2^{n-1}(n-1) + 4^{n-1} - 2^{n-1}n =
\end{aligned}$$

$$= 2^2 v(n-2) + 2 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} - 2^{n-1}(n + (n-1)).$$

Suponha por indução que para algum  $k \in \{1, 2, \dots, n-3\}$  se tenha que

$$v(n) = 2^k v(n-k) + 2^{k-1} \cdot 4^{n-k} + \dots + 2^2 \cdot 4^{n-3} + 2 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} - \\ - 2^{n-1}(n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1)).$$

Vamos mostrar que o argumento é válido para  $k+1$ .

$$v(n) = 2^k (2v(n-(k+1)) + 4^{n-(k+1)} - 2^{n-(k+1)}(n-k)) + \\ + 2^{k-1} \cdot 4^{n-k} + \dots + 2^2 \cdot 4^{n-3} + 2 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} - \\ - 2^{n-1}(n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1)) = \\ = 2^{k+1} v(n-(k+1)) + 2^k \cdot 4^{n-(k+1)} - 2^{n-(k+1)+k}(n-k) + \\ + 2^{k-1} \cdot 4^{n-k} + \dots + 2^2 \cdot 4^{n-3} + 2 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} - \\ - 2^{n-1}(n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1)) = \\ = 2^{k+1} v(n-(k+1)) - 2^{n-1}(n-k) + \\ + 2^k \cdot 4^{n-(k+1)} + 2^{k-1} \cdot 4^{n-k} + \dots + 2^2 \cdot 4^{n-3} + 2 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} - \\ - 2^{n-1}(n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1)) = \\ = 2^{k+1} v(n-(k+1)) + 2^k \cdot 4^{n-(k+1)} + \\ + 2^{k-1} \cdot 4^{n-k} + \dots + 2^2 \cdot 4^{n-3} + 2 \cdot 4^{n-2} + 4^{n-1} - \\ - 2^{n-1}(n + (n-1) + (n-2) + \dots + (n-k+1) + (n-k)), \text{ como requerido.}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&= 2^{n-2}v(2) + 2^{n-3}.4^2 + \dots + 2^2.4^{n-3} + 2.4^{n-2} + 4^{n-1} - \\
&\quad - 2^{n-1}(n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3) = \\
&= 0 + 2^{2n-(n-1)} + \dots + 2^{2n-4} + 2^{2n-3} + 2^{2n-2} - 2^{n-2}(n-2)(n+3) = \\
&= 2^{2n-(n-1)}.(2^{n-2} - 1) - 2^{n-2}(n-2)(n+3) = \\
&= 2^{2n-1} - 2^{n+1} - 2^{n-2}(n-2)(n+3) = \frac{4^n}{2} - 2^{n+1} - 2^{n-2}(n-2)(n+3).
\end{aligned}$$

Assim, temos que  $v(n) = \frac{4^n}{2} - 2^{n-2}(n^2 + n + 2)$ .

Voltando a Figura 3.7(e). Como na Figura 3.7(e) são adicionadas as arestas correspondentes aos 4  $Q_{n-5}$ 's nós temos primeiro os cruzamentos entre os pares de arestas destes 4  $Q_{n-5}$ 's, que são  $v(n-5)$ . Depois nós temos ainda os cruzamentos com as arestas da Figura 3.6(a). Estes últimos cruzamentos são  $\phi(n-5)$  para o  $Q_{n-5}$  da metade esquerda do  $Q_{n-4}$  superior, somado a  $\phi(n-5)$  para o  $Q_{n-5}$  da metade direita do  $Q_{n-4}$  superior, somado a  $\phi(n-5)$  para o  $Q_{n-5}$  da metade direita do  $Q_{n-4}$  inferior e somado a  $\frac{1}{2}\phi(n-5)$  para o  $Q_{n-5}$  da metade esquerda do  $Q_{n-4}$  inferior. Assim, o número de cruzamentos adicionais na Figura 3.7(e) será de  $4v(n-5) + \frac{7}{2}\phi(n-5)$ . Sendo assim, temos o seguinte número de cruzamentos:

$$\begin{aligned}
&4v(n-5) + \frac{7}{2}\phi(n-5) = \\
&= \frac{4^{n-4}}{2} - 2^{n-5}(n^2 - 10n + 25 + n - 5 + 2) + 7.4^{n-6} - 7.2^{n-7}(n-4) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4^{n-6}\left(7 + \frac{16}{2}\right) - 2^{n-7}(4n^2 - 36n + 88 + 7n - 28) = \\
&= 15 \cdot 4^{n-6} - 2^{n-7}(4n^2 - 29n + 60).
\end{aligned}$$

Ou seja, temos  $60 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(8n^2 - 58n + 120)$  cruzamentos adicionais, na Figura 3.7(e).

– Na Figura 3.7(f)

Os cruzamentos adicionais nesta figura serão calculados em duas partes. A primeira parte dos cruzamentos das arestas colocadas na Figura 3.7(f) com as arestas da Figura 3.6(a). E a segunda parte, das arestas colocadas na Figura 3.7(f) com as arestas dos quatro  $Q_{n-5}$  colocadas na Figura 3.7(e).

Vamos calcular a primeira parte. Olhemos primeiro para os cruzamentos nas  $2^{n-7}$  arestas, que são colocadas na Figura 3.7(f), na região entre a horizontal superior e a horizontal inferior. Considere primeiro a aresta mais exterior. Existem  $(2^{n-4} - 2)$  cruzamentos nesta aresta. A aresta consecutiva a esta possui  $(2^{n-4} - 2 \cdot 2)$  cruzamentos. Em geral nós temos a soma de cruzamentos nesta região:  $(2^{n-4} - 2) + (2^{n-4} - 2 \cdot 2) + (2^{n-4} - 2 \cdot 3) + \dots + (2^{n-4} - 2 \cdot 2^{n-7}) = 2^{n-4}2^{n-7} - 2 \cdot 2^{n-8} \cdot (2^{n-7} + 1) = 2^{n-4}2^{n-7} - 2^{n-7} \cdot (2^{n-7} + 1)$ . Olhemos agora para os cruzamentos abaixo da horizontal inferior. Serão  $(\frac{3}{4}2^{n-4} - 1) + (\frac{3}{4}2^{n-4} - 2) + (\frac{3}{4}2^{n-4} - 3) + \dots + (\frac{3}{4}2^{n-4} - 2^{n-7}) = \frac{3}{4}2^{n-4} \cdot 2^{n-7} - 2^{n-8} \cdot (2^{n-7} + 1)$  cruzamentos, que totalizam para a primeira parte

$$\frac{7}{4}2^{n-4}2^{n-7} - 3 \cdot 2^{n-8}(2^{n-7} + 1) = \frac{25}{2}4^{n-7} - 3 \times 2^{n-8}.$$

Vamos agora a segunda parte. Observe primeiro que os cruzamentos das arestas adicionais na Figura 3.7(f) com as arestas de um dos  $Q_{n-5}$  são



exatamente quatro vezes a soma das distâncias exteriores do desenho de  $Q_{n-5}$  do vértice da extremidade até os primeiros  $2^{n-7}$  vértices. Chamaremos este número de cruzamentos de  $\phi'(n-5)$ . Vamos dividir esta soma das distâncias exteriores em três partes. A primeira parte é correspondente a soma das distâncias exteriores no  $(n-7)$ -cubo que é igual a  $\phi(n-7)$ . A segunda parte corresponde as  $2^{(n-7)-1}$  arestas que ligam os  $2^{n-7}$  vértices do  $(n-7)$ -cubo da extremidade esquerda do  $Q_{n-5}$  aos vértices do  $(n-7)$ -cubo lateral para formar o  $(n-6)$ -cubo da extremidade esquerda do  $Q_{n-5}$ . Para estas arestas temos que somar as distâncias exteriores:  $2^{n-7} - 1$  para a aresta mais exterior,  $2^{n-7} - 2$  para a próxima, e respectivamente  $2^{n-7} - (2^{n-7} - 1)$ . A terceira parte consiste nas  $2^{(n-7)-1}$  arestas que ligam os  $2^{n-7}$  vértices do  $(n-7)$ -cubo da extremidade esquerda do  $Q_{n-5}$  aos vértices do  $(n-7)$ -cubo correspondente no  $(n-6)$ -cubo da extremidade direita do  $Q_{n-5}$ . Para estas arestas temos que somar as distâncias exteriores:  $2^{n-7} - 1$  para a aresta mais exterior,  $2^{n-7} - 2$  para a próxima, e respectivamente  $2^{n-7} - (2^{n-7} - 1)$ .

Dessa forma, definimos a função  $\phi'(n)$  como segue:

$$\phi'(n) = \phi(n-7) + 2 \sum_{i=1}^{2^{n-7}-1} i.$$

Desenvolvendo essa expressão, temos que:

$$\begin{aligned} \phi'(n) &= \frac{4^{n-7}}{2} - 2^{n-8}(n-6) + 2^{n-7}(2^{n-7} - 1) = \\ &= \frac{4^{n-7}}{2} - 2^{n-8}(n-6) + 4^{n-7} - 2^{n-7} = \frac{3}{2}4^{n-7} - 2^{n-8}(n-6+2). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\phi'(n) = \frac{3}{2}4^{n-7} - 2^{n-8}(n-4).$$

Assim, o total de cruzamentos obtido na segunda parte é:  $4 \times \phi'(n) = \frac{3}{2}4^{n-6} - 2^{n-6}(n-4)$ .

Somando agora o total dos cruzamentos no desenho de  $Q_n$  temos:

$$\begin{aligned}
& 4^{n-4} - 2^{n-4} + \\
& + 9 \times 4^{n-6} - 3 \times 2^{n-5} + \\
& + \frac{9}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8} + \\
& + 60 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(8n^2 - 58n + 120) + \\
& + \frac{25}{2}4^{n-7} - 3 \times 2^{n-8} + \\
& + \frac{3}{2}4^{n-6} - 2^{n-6}(n-4) = \\
& = (64 + 36 + \frac{9}{2} + 60 + \frac{25}{2} + 6)4^{n-7} - \\
& - 2^{n-8}(16 + 24 + 5 + 8n^2 - 58n + 120 + 3 + 4n - 16) = \\
& = (166 + 17)4^{n-7} - 2^{n-8}(8n^2 - 54n + 152).
\end{aligned}$$

Assim, o número de cruzamentos neste desenho de  $Q_n$  é dado por:  $183 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(8n^2 - 54n + 152)$ . Isto conclui o total de cruzamentos para o desenho na Figura 3.6. Passamos agora a soma das distâncias no desenho na Figura 3.6.

- Determinação da soma das distâncias exteriores no desenho para  $Q_n$ .

Vamos agora calcular a soma das distâncias exteriores dos vértices do desenho na Figura 3.6. Para isso, dividimos os vértices da Figura 3.6 em seis grupos de vértices, que são os vértices nas regiões  $DE1, DE2, DE3, DE4, DE5$  e  $DE6$  definidas na Figura 3.10. As distâncias exteriores serão calculadas com respeito ao fluxo do diagrama da Figura 3.11 correspondente a cada região.

Dessa forma, a seguir passamos a calcular as distâncias exteriores dos vértices em cada uma das regiões  $DE1, DE2, DE3, DE4, DE5$  e  $DE6$ .

– Região  $DE1$ .

Pela definição de  $\psi(n)$  e porque nós temos  $2^{n-6}$  vértices na região  $DE1$ , a soma das distâncias exteriores dos vértices nesta região é

$$\psi(n) + 2^{n-4}2^{n-6} = \frac{9}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8} + 4^{n-5} = \frac{41}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8}.$$

– Região  $DE2$ .

Por causa das arestas adicionais na Figura 3.7(e) temos  $\phi(n-5)$  cruzamentos.

Por causa das arestas que ligam os vértices da cópia 1 aos vértices das cópias 2 e 4 e porque temos  $2^{n-5}$  vértices na região  $DE2$  temos adicionais  $2^{n-4}2^{n-5}$  cruzamentos.

Por causa das  $2^{n-7}$  arestas adicionais na Figura 3.7(f) entre a horizontal superior e a horizontal inferior e porque temos  $2^{n-5}$  vértices na região  $DE2$  temos  $2^{n-7}2^{n-5}$  cruzamentos.

Vamos analisar os cruzamentos com as  $2^{n-4}$  arestas verticais que ligam os vértices do  $Q_{n-4}$  superior aos vértices do  $Q_{n-4}$  inferior. Considere o vértice mais a esquerda de  $DE2$ . Este vértice é responsável por  $2^{n-6}$

cruzamentos com as arestas verticais. O primeiro vértice em  $DE2$ , a direita deste vértice é responsável por  $2^{n-6} + 1$  cruzamentos com as arestas verticais. Este processo pára no último vértice desta parte do fluxo de  $DE2$ , que é o vértice mais a direita da metade esquerda de  $DE2$ , quando temos  $2^{n-5} - 1$  cruzamentos. Pela direção do fluxo de  $DE2$  uma soma idêntica é obtida na metade direita de  $DE2$ . Assim, temos a soma de  $2 \sum_{i=2^{n-6}}^{2^{n-5}-1} i = 2^{n-6}(3 \times 2^{n-6} - 1)$  cruzamentos. O que totaliza o seguinte número de cruzamentos na região  $DE2$ .

$$\begin{aligned} & \phi(n-5) + 2^{n-4}2^{n-5} + 2^{n-7}2^{n-5} + 2^{n-6}(3 \times 2^{n-6} - 1) = \\ & = \frac{1}{2}4^{n-5} - 2^{n-6}(n-4) + \frac{1}{2}4^{n-4} + 4^{n-6} + 3 \times 4^{n-6} - 2^{n-6} = \\ & = (8 + 32 + 16)4^{n-7} - 2^{n-8}(4n-12) = 56 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(4n-12). \end{aligned}$$

– Região  $DE3$ .

Pela definição de  $\psi(n)$ , a soma das distâncias exteriores dos vértices nesta região é

$$\psi(n) + 2^{n-4}2^{n-6} = \frac{9}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8} + 4^{n-5} = \frac{41}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8}.$$

– Região  $DE4$ .

Por causa das arestas adicionais na Figura 3.7(e) nós temos na região  $DE4$   $\frac{1}{2}\phi(n-5)$  cruzamentos.

Por causa das  $2^{n-7}$  arestas adicionais na Figura 3.7(f) nós temos a soma de  $\sum_{i=1}^{2^{n-7}-1} i = 2^{n-8}(2^{n-7} - 1)$  cruzamentos para os  $2^{n-7}$  vértices na metade esquerda de  $DE4$  e  $2^{n-7} \cdot 2^{n-7}$  cruzamentos para os  $2^{n-7}$  vértices na metade direita de  $DE4$ .

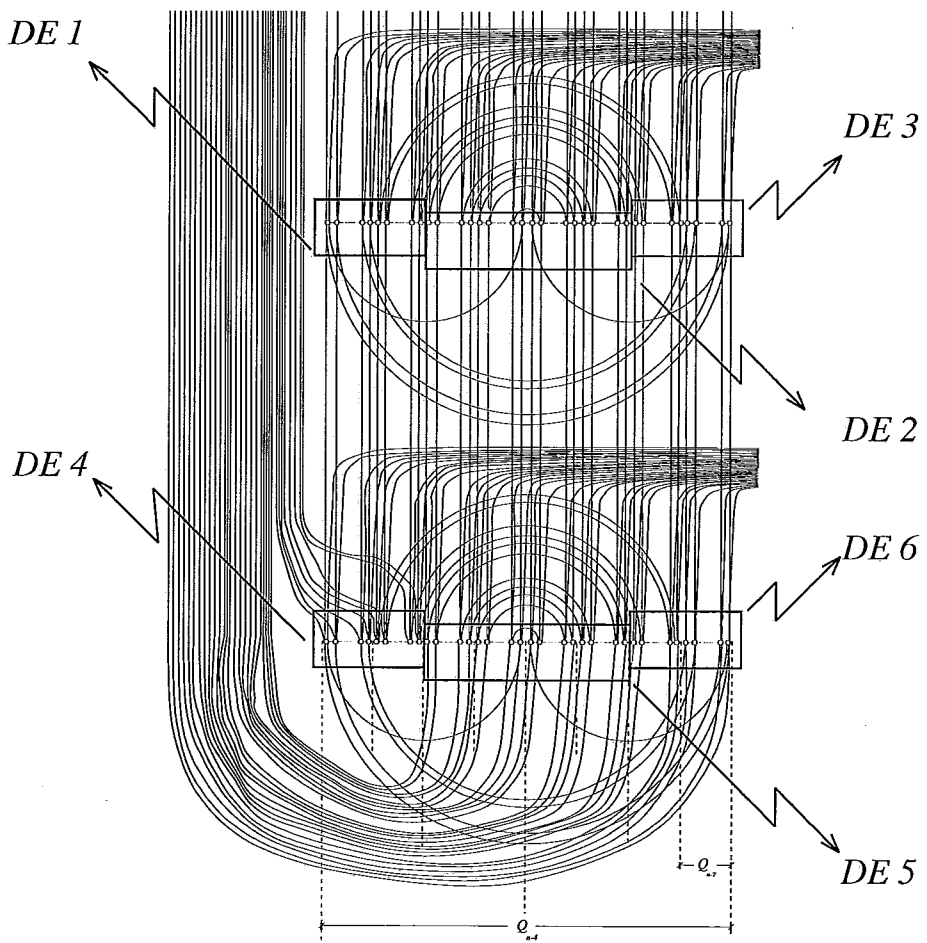


Figura 3.10: Regiões de contagem das distâncias exteriores.

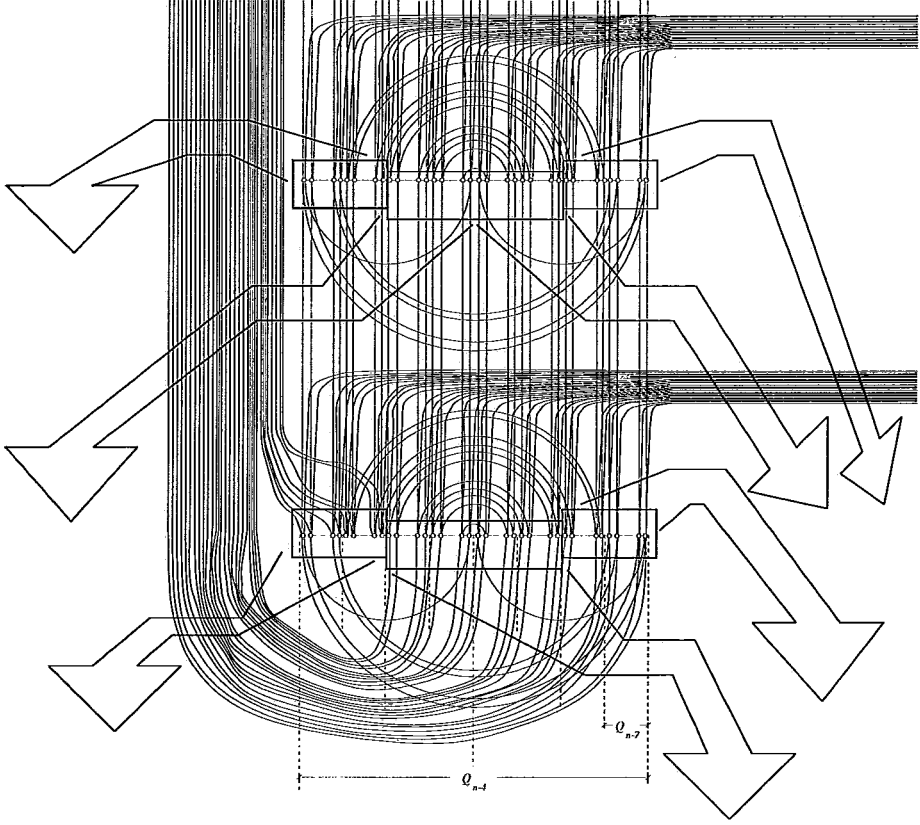


Figura 3.11: Fluxo das arestas correspondentes as distâncias exteriores.

Por causa das  $\frac{3}{4}2^{n-4}$  arestas que ligam os vértices do  $Q_{n-4}$  inferior com os vértices correspondentes da cópia 4 e que saem por baixo da horizontal inferior, e existirem  $2^{n-6}$  vértices na região  $DE4$ , nós temos  $\frac{3}{4}2^{n-4}2^{n-6}$  cruzamentos. O que totaliza o seguinte número de cruzamentos para a região  $DE4$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\phi(n-5) + 2^{n-7}2^{n-7} + 2^{n-8}(2^{n-7} - 1) + 3 \times 2^{n-6}2^{n-6} = \\ & 4^{n-6} - 2^{n-7}(n-4) + 4^{n-7} + \frac{1}{2}4^{n-7} - 2^{n-8} + 3 \times 4^{n-6} = \\ & (4 + 1 + \frac{1}{2} + 12)4^{n-7} - 2^{n-8}(2n - 8 + 1) = \frac{35}{2}4^{n-7} - 2^{n-8}(2n - 7). \end{aligned}$$

– Região  $DE5$ .

Por causa das arestas adicionais na Figura 3.7(e) temos  $\phi(n - 5)$  cruzamentos adicionais.

Vamos agora considerar as  $\frac{3}{4}2^{n-4}$  arestas que ligam os vértices do  $Q_{n-4}$  inferior aos vértices da cópia 4. Considere o vértice mais a direita de  $DE5$ . A direção do fluxo de  $DE5$  mostra que este vértice é responsável por  $2^{n-6}$  cruzamentos com as  $\frac{3}{4}2^{n-4}$  arestas. O primeiro vértice de  $DE5$  imediatamente a esquerda deste vértice é responsável por  $2^{n-6} + 1$  cruzamentos com as  $\frac{3}{4}2^{n-4}$  arestas. Este processo pára no vértice mais a esquerda de  $DE5$ , quando temos  $2^{n-6} + 2^{n-5} - 1$  cruzamentos. Assim, nós temos a soma de  $\sum_{i=2^{n-6}}^{2^{n-6}+2^{n-5}-1} i = 2^{n-6}(2^{n-4} - 1)$  cruzamentos adicionais.

Por causa das arestas adicionais na Figura 3.7(f) e porque temos  $2^{n-5}$  vértices na região  $DE2$  nós temos  $2^{n-7}2^{n-5}$  cruzamentos. O que totalizam o seguinte número de cruzamentos na região  $DE5$ :

$$\begin{aligned} & \phi(n - 5) + 2^{n-7}2^{n-5} + 2^{n-6}(2^{n-4} - 1) = \\ & = \frac{1}{2}4^{n-5} - 2^{n-6}(n - 4) + 4^{n-6} + 4^{n-5} - 2^{n-6} = \\ & = (8 + 4 + 16)4^{n-7} - 2^{n-8}(4n - 16 + 4) = 28 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(4n - 12). \end{aligned}$$

– Região  $DE6$ .

Pela definição de  $\psi(n)$ , a soma das distâncias exteriores dos vértices nesta região é  $\psi(n) = \frac{9}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8}$ .

Assim, o número de cruzamentos na Figura 3.6 somado as distâncias exteriores, totaliza:

$$183 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(8n^2 - 54n + 152) +$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{41}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8} + \\
& +56 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(4n - 12) + \\
& +\frac{41}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8} + \\
& +\frac{35}{2}4^{n-7} - 2^{n-8}(2n - 7) + \\
& +28 \times 4^{n-7} - 2^{n-8}(4n - 12) + \\
& +\frac{9}{2}4^{n-7} - 5 \times 2^{n-8} = \\
& = (183 + \frac{41}{2} + 56 + \frac{41}{2} + \frac{35}{2} + 28 + \frac{9}{2})4^{n-7} \\
& - (8n^2 - 54n + 152 + 5 + 4n - 12 + 5 + 2n - 7 + 4n - 12 + 5)2^{n-8} = \\
& = 330 \times 4^{n-7} + (8n^2 - 44n + 136)2^{n-8}.
\end{aligned}$$

Dessa forma nós obtemos um limite superior para o *crossing number* de um  $n$ -cubo qualquer dado pela função:

$$\begin{aligned}
\nu(Q_n) & \leq 8(330 \times 4^{n-7} - (8n^2 - 44n + 136)2^{n-8}) = \\
& = \frac{165}{1024}4^n - \frac{2n^2 - 11n + 34}{2}2^{n-2}. \square
\end{aligned}$$



## Capítulo 4

# A respeito da NP-completude dos invariantes estudados

Neste capítulo nós mostramos que o problema de decisão SPLITTING NUMBER “Dado um grafo  $G$  e um inteiro positivo  $k$ ,  $\sigma(G) \leq k$ ?” é NP-completo.

Como um subproduto nós obtemos que SPLITTING NUMBER, SUBGRAFO PLANAR e REMOÇÃO DE ARESTAS permanecem NP-completos para grafos com grau máximo 3, para grafos cúbicos e assim, como consequência, para grafos sem subdivisão de  $K_5$ .

### 4.1 Preliminares

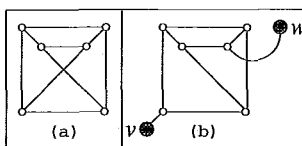


Figura 4.1:  $K_{3,3}$  e  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligado aos vértices  $v$  e  $w$ .

Nós usamos fortemente a caracterização de Kuratowski para grafos não planares [26], em particular a não planaridade das subdivisões de  $K_{3,3}$ . Desta forma, para um melhor entendimento de nossa prova é conveniente que o leitor se familiarize com o desenho especial de  $K_{3,3}$  definido na Figura 4.1a. Nós dizemos que um grafo  $G$  é um  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligado aos vértices  $v$  e  $w$  se  $G$  é definido pelo desenho na Figura 4.1b. Este grafo é uma importante “ferramenta” em nossa prova e a propriedade mais importante é que um grafo não pode ser planar, se ele contém como subgrafo

um  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligado aos vértices  $v$  e  $w$  e um caminho  $P$  ligando  $v$  a  $w$ , onde  $P$  é internamente disjunto em vértices deste  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ .

Seja  $D(G)$  um desenho simples para  $G$  e  $v$  um vértice em  $V(G)$  com grau  $d(v)$ . Porque  $D(G)$  é simples e em um desenho simples arestas incidentes com o mesmo vértice não podem compartilhar cruzamentos,  $D(G)$  define para cada vértice  $v$  uma *lista de adjacência ordenada* no sentido horário  $\vec{Adj}(v) = (v_1, v_2, \dots, v_{d(v)})$ , onde  $viz(v) = \{v_1, v_2, \dots, v_{d(v)}\}$ . Assim, cada lista de adjacência ordenada  $\vec{Adj}(v)$  é uma permutação circular do conjunto de vértices adjacentes a  $v$ . Um exemplo onde as listas de adjacências ordenadas são definidas para os vértices de um grafo  $G$  com respeito a  $D(G)$  é mostrado na Figura 4.2. Note que nós podemos ter arestas múltiplas.

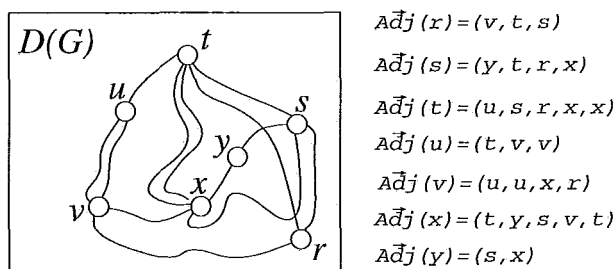


Figura 4.2: listas de adjacência ordenada dos vértices de  $G$  com respeito a  $D(G)$ .

## 4.2 A NP-completude dos problemas de decidir o *splitting number*, *subgrafo planar máximo* e *skewness* restritos a grafos cúbicos

Nesta seção nós apresentamos uma prova que SPLITTING NUMBER, SUBGRAFO PLANAR e REMOÇÃO DE ARESTAS restritos a grafos cúbicos são NP-completos. Nossa prova consiste em fazer uma transformação polinomial reduzindo o problema NP-completo 3SATISFABILIDADE [5] para SPLITTING NUMBER restrito a grafos cúbicos. A partir daí apresentamos outras duas transformações polinomiais uma reduzindo SPLITTING NUMBER restrito a grafos cúbicos para REMOÇÃO DE ARESTAS restrito

a grafos cúbicos e outra reduzindo REMOÇÃO DE ARESTAS restrito a grafos cúbicos para SUBGRAFO PLANAR restrito a grafos cúbicos. Nós começamos por definir inicialmente os dois problemas relativos a primeira transformação.

### 3SATISFABILIDADE (3SAT)

INSTÂNCIA: Conjunto  $U$  de variáveis, coleção  $C$  de cláusulas sobre  $U$ , tal que cada cláusula  $c \in C$  possui  $|c| = 3$ .

QUESTÃO:  $C$  é satisfatível?

### SPLITTING NUMBER (SN)

INSTÂNCIA: Grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k > 0$ .

QUESTÃO:  $\sigma(G) \leq k$ ?

A estratégia para reduzir 3SAT para SN consiste em construir um inteiro positivo  $k$  e um grafo  $G$  a partir de uma instância genérica  $I$  de 3SAT, tal que  $I$  é satisfatível se e somente se  $\sigma(G) \leq k$ . O grafo  $G$  é composto de dois tipos de subgrafos: *Definidor-de-Verdade*, correspondente as variáveis de  $U$  e *Testador-de-Satisfação* correspondente as cláusulas de  $C$ . A definição do subgrafo *Testador-de-Satisfação* requer algumas propriedades topológicas em uma certa classe  $\mathcal{A}$  de grafos que nós agora vamos definir e estudar.

Um grafo  $G$  é um elemento da classe  $\mathcal{A}$  se  $G$  tem dois subgrafos  $P_G$  e  $Q_G$ , tal que  $V(P_G) \cup V(Q_G) = V(G)$  e  $V(P_G) \cap V(Q_G) = \{f_1, f_2, \dots, f_6, g_1, g_2, \dots, g_6\}$  com  $P_G$  e  $Q_G$  satisfazendo o seguinte:

- O subgrafo  $P_G$  é definido pelo desenho na Figura 4.3. Na Figura 4.3 existe um subconjunto  $\Sigma$  de  $V(P_G)$ ,  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_6, d_1, d_2, \dots, d_6\}$  identificado pelos vértices pretos. Existem exatamente  $q \geq 1$  arestas ligando dois vértices adjacentes de  $V(P_G) \setminus \Sigma$ , e uma única aresta ligando um vértice branco de  $V(P_G) \setminus \Sigma$  a um vértice preto de  $\Sigma$ . Observe que nós desenhamos na Figura 4.3 entre dois vértices adjacentes de  $P_G \setminus \Sigma$  somente duas arestas: uma dese-

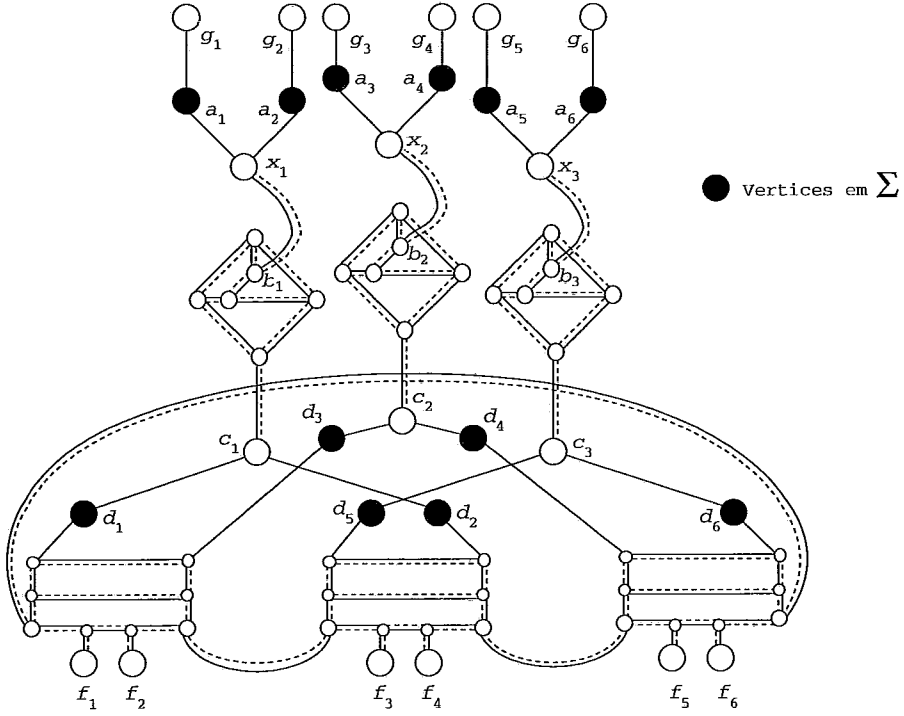


Figura 4.3: Um desenho para o subgrafo  $P_G$  de  $G$ .

nhada com uma linha contínua e uma desenhada com uma linha pontilhada as outras  $(q - 2)$  arestas são omitidas, mas consideradas desenhadas na região sem vértices limitada por estas duas arestas.

- O subgrafo  $Q_G$  é um grafo conexo planar não desenhado na Figura 4.3, tal que  $Q_G$  admite um desenho sem cruzamentos, completamente no interior da região exterior definida pelo desenho de  $P_G$  na Figura 4.3.

Nós estamos preocupados em analisar como um grafo planar pode ser obtido a partir de  $G \in \mathcal{A}$  por um conjunto  $Z$  de *splittings* somente nos vértices de  $\Sigma$ . Veremos mais tarde, que uma vez construído o grafo  $G$  e o inteiro  $k$  da transformação de 3SAT para SPLITTING NUMBER, a restrição:  $\sigma(G) \leq k$  forçará que os *splittings* em  $G$  ocorram somente nos vértices pretos.

**Lema 4.1** *Se  $G \in \mathcal{A}$ , e  $H$  é um grafo planar obtido a partir de  $G$  por um conjunto  $Z$  de *splittings* nos vértices de  $\Sigma$ , então  $|Z| \geq 6$ .*

**Prova:** É suficiente provar que para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados a  $x_i$  e  $c_i$  de  $P_G$  requerem dois *splittings* adicionais em  $Z$ . Para isso, considere os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados aos vértices  $x_1$  e  $c_1$  na Figura 4.3. Como  $Q_G$  é um subgrafo conexo de  $G$  e  $V(P_G) \cap V(Q_G) = \{f_1, f_2, \dots, f_6, g_1, g_2, \dots, g_6\}$ , qualquer conjunto de *splittings* em  $\Sigma$  que remove os caminhos em  $G$  ligando o vértice  $x_1$  ao vértice  $c_1$ , disjunto em vértices destes  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's, tem que conter  $a_1$  e  $a_2$ , ou  $d_1$  e  $d_2$ , isto é, dois *splittings* adicionais são requeridos em  $Z$ . Um argumento análogo mostra que este também é o caso para os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados aos vértices  $x_2$  e  $c_2$  e para os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados aos vértices  $x_3$  e  $c_3$ , como foi requerido.  $\square$

Nós denotamos os subconjuntos  $M_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_6, d_1, d_2\}$ ,  $M_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_6, d_3, d_4\}$  e  $M_3 = \{a_1, a_2, \dots, a_6, d_5, d_6\}$  de  $\Sigma$ .

**Lema 4.2** *Seja  $G$  um grafo em  $\mathcal{A}$ . Seja  $i$  um índice fixado,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Se  $H$  é obtido a partir de  $G$  por um conjunto  $Z$  de *splittings* nos vértices de  $\Sigma$  com  $|Z| = 8$ , tal que existe um único *splitting* de  $Z$  em cada vértice do conjunto  $M_i$ , então  $H$  não é planar.*

**Prova:** A verificação do Lema 4.2 é feita por inspeção nos três desenhos da Figura 4.4, onde para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  é mostrada uma subdivisão de  $K_{3,3}$  (arestas tracejadas e vértices rotulados) como um subgrafo para cada possibilidade correspondente de  $H$ .  $\square$

Nós lembramos que  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_6, d_1, d_2, \dots, d_6\}$ , denota o conjunto de vértices pretos de  $P_G$  na Figura 4.3.

**Lema 4.3** *Seja  $G$  um grafo em  $\mathcal{A}$ . Seja também  $G'$  o grafo obtido a partir de  $G$  por um conjunto não vazio  $Z$  de *splittings* no conjunto  $\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ , tal que no máximo um *splitting* é feito em cada um dos três conjuntos:  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{a_3, a_4\}$  e*

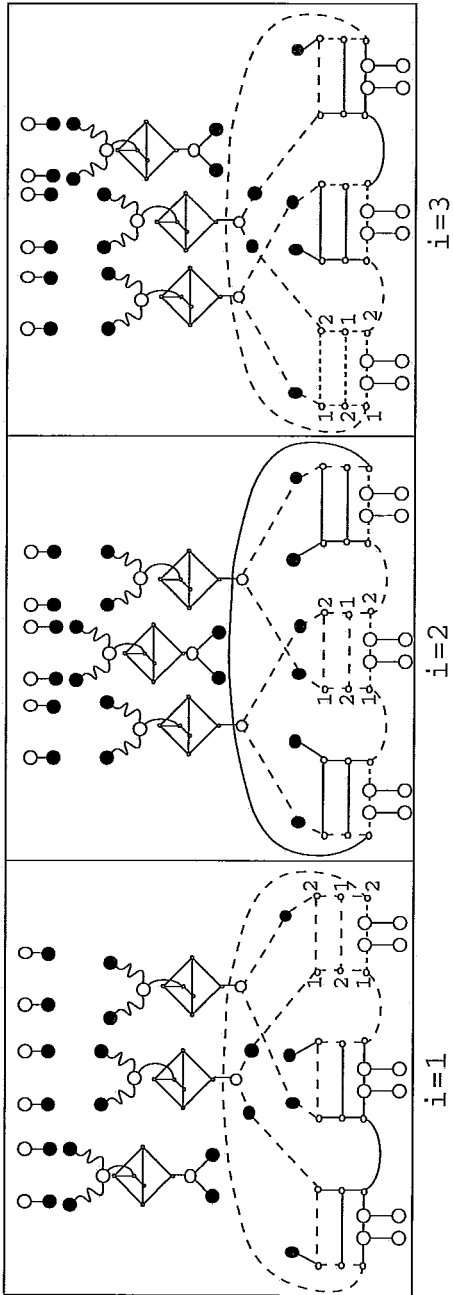


Figura 4.4: Subdivisão de  $K_{3,3}$  como subgrafo de  $H$ .

$\{a_5, a_6\}$ . Se  $H$  é um grafo planar obtido por sua vez a partir de  $G'$  por um conjunto  $Z'$  *splittings* nos vértices de  $\Sigma \setminus Z$ , então  $|Z'| \geq 5$  e existe um conjunto  $Z'$  satisfazendo  $|Z'| = 5$ . Além disso, um desenho  $D(H)$  pode ser construído tal que, os vértices de  $G \setminus (Z \cup Z')$  possuem as mesmas listas de adjacências ordenadas com respeito a  $D(H)$  e com respeito ao desenho de  $G$  na Figura 4.3.

**Prova:** Sem perda de generalidade nós assumimos  $n \in \{0, 1, 2\}$  e que se um *splitting* de  $Z$  ocorre em um vértice de  $\{a_{2n+1}, a_{2n+2}\}$ , então ele ocorre no vértice  $a_{2n+1}$ . Nós consideramos três casos de acordo com  $|Z| = 1$ ,  $|Z| = 2$  ou  $|Z| = 3$ .

- Caso  $|Z| = 1$ . Este caso segue diretamente do Lema 4.1, porque nós temos um *splitting* em  $Z$ , e o Lema 4.1 diz que cinco *splittings* adicionais em  $Z'$  são requeridos. Para a conveniência do leitor, nós exibimos na Figura 4.5 três possibilidades de  $Z'$ , com  $|Z'| = 5$  considerando que o *splitting* de  $Z$  ocorre em  $a_1, a_3$ , ou  $a_5$ .

Nós reduzimos as definições para  $Z', |Z'| = 5$  nos casos  $|Z| = 2$  e  $|Z| = 3$  pela referência aos correspondentes  $Z'$ 's definidos na Figura 4.5.

- Caso  $|Z| = 2$ . Pelo Lema 4.1 nós temos  $|Z'| \geq 4$ . Suponha sem perda de generalidade que os dois *splittings* de  $Z$  ocorrem nos vértices  $a_1$  e  $a_3$ . Os subgrafos  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligados a  $x_3$  e  $c_3$  requerem no mínimo dois *splittings* em  $Z'$  a saber: ou dois nos vértices  $a_5$  e  $a_6$ , ou dois nos vértices  $d_5$  e  $d_6$ . Suponha por contradição que  $|Z'| = 4$ . Porque os subgrafos  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligados a  $x_1$  e  $c_1$  e  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligados a  $x_2$  e  $c_2$  requerem no mínimo dois *splittings* adicionais em  $Z'$ , temos que  $a_2$  e  $a_4$  são necessariamente elementos de  $Z'$ . Note que os seis vértices até então em  $Z \cup Z'$  definem um subconjunto de  $M_i$  para algum  $i \in \{1, 2, 3\}$ , uma contradição para o Lema 4.2. A Figura 4.5 exhibe para cada uma das três possíveis escolhas de  $Z$  um correspondente conjunto de cinco *splittings* definindo  $Z'$ .

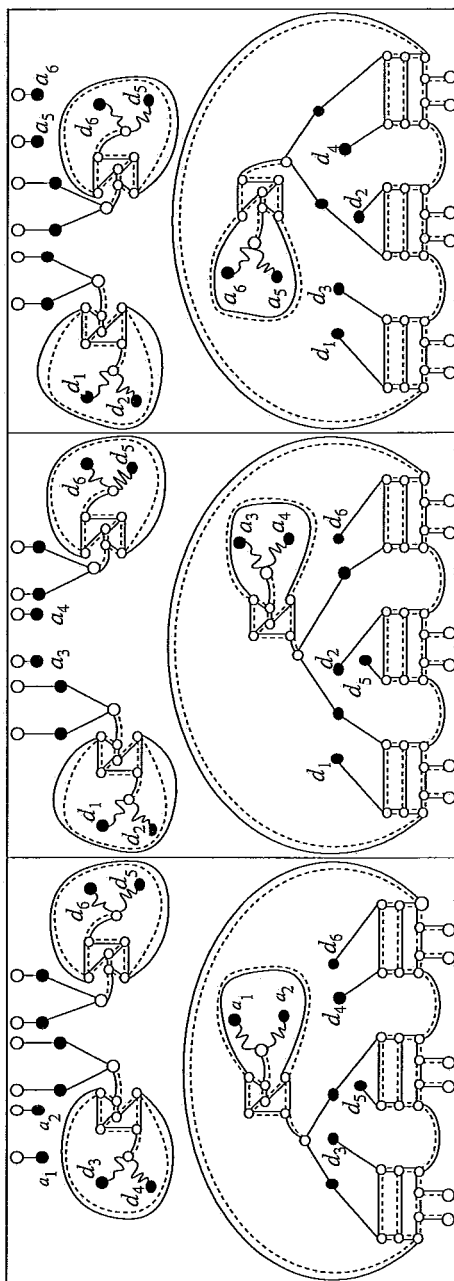


Figura 4.5: Um conjunto  $Z'$  de *splittings* com  $|Z'| = 5$ .



- Caso  $|Z| = 3$ . Suponha por contradição que  $|Z'| = 4$ . Se  $Z'$  não contém vértices em  $\{a_2, a_4, a_6\}$ , então  $|Z'| \geq 6$ . Se  $Z'$  contém  $a_2, a_4$  e  $a_6$ , então a planaridade de  $H$  contradiz o Lema 4.2. Se  $Z'$  contém um único vértice em  $\{a_2, a_4, a_6\}$ , digamos  $a_2$ , então os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados a  $x_2$  e  $c_2$  e os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados a  $x_3$  e  $c_3$  requerem quatro *splittings* adicionais em  $Z'$ . Assim,  $Z'$  contém exatamente dois vértices em  $\{a_2, a_4, a_6\}$ , digamos  $a_2$  e  $a_4$ . Neste caso, os  $K_{3,3} \setminus \{e\}$ 's ligados a  $x_3$  e  $c_3$  requerem que  $d_5$  e  $d_6$  sejam elementos de  $Z'$ . Os sete elementos até então em  $Z \cup Z'$  definem um subconjunto de  $M_1$ , uma contradição para o Lema 4.2. Cada um dos três desenhos na Figura 4.5 exibe um conjunto de cinco *splittings* definindo  $Z'$ .

Por simples inspeção, pode ser visto que os vértices de  $G \setminus (Z \cup Z')$  mantêm as mesmas listas de adjacências ordenadas com respeito a  $D(H)$  na Figura 4.5 e com respeito ao desenho de  $G$  na Figura 4.3. □

**Lema 4.4** *Seja  $G$  um grafo em  $\mathcal{A}$ . Seja  $l$  um índice fixado,  $l \in \{1, 2, 3\}$ . Seja também  $G'$  o grafo obtido a partir  $G$  por um conjunto  $Z$  de *splittings* nos vértices de  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ,  $|Z| \geq 2l$ ,  $2l$  dos quais nos vértices de  $l$  dos pares:  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{a_3, a_4\}$ ,  $\{a_5, a_6\}$ , tal que  $3 - l$  dos pares:  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{a_3, a_4\}$ ,  $\{a_5, a_6\}$  tem cada um no máximo um *splitting* de  $Z$ . Se  $H$  é um grafo planar obtido por sua vez a partir de  $G'$  por um conjunto  $Z'$  de *splittings* nos vértices de  $\Sigma \setminus Z$ , então  $|Z'| \geq 5 - l$ .*

**Prova:** Nós consideramos três casos de acordo com  $l = 1$ ,  $l = 2$  ou  $l = 3$ .

- Caso  $l = 1$ . Neste caso, sem perda de generalidade nós assumimos que dois *splittings* de  $Z$  são feitos em  $a_1$  e  $a_2$ . Nós, supomos por contradição  $|Z'| \leq 3$ . Porque existem dois subgrafos  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  respectivamente ligados aos vértices  $x_2$  e  $c_2$ , e  $x_3$  e  $c_3$ , nós temos que no mínimo um dos vértices em  $\{a_3, a_4, a_5, a_6\}$

pertence a  $Z'$ . Uma contradição segue do Lema 4.2. E desta maneira, nós temos  $|Z'| \geq 4 = 5 - l$ , como requerido.

- Caso  $l = 2$ . Neste caso, sem perda de generalidade nós assumimos que quatro *splittings* de  $Z$  são feitos em  $a_1, a_2, a_3$  e  $a_4$ . Nós supomos, por contradição, que  $|Z'| \leq 2$ . Porque nós temos um  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligado aos vértices  $x_3$  e  $c_3$ , nós temos que ou  $a_5$  e  $a_6$  estão em  $Z'$ , ou  $d_5$  e  $d_6$  estão em  $Z'$ . Isto implica em uma contradição ao Lema 4.2. Assim, nós temos  $|Z'| \geq 3 = 5 - l$ , como requerido.
- Caso  $l = 3$ . Neste caso, pelo Lema 4.2 nós precisamos de no mínimo  $2 = 5 - l$  *splittings* em  $Z'$ . □

**Teorema 4.5** *SN é NP-Completo.*

**Prova:** É fácil de ver que SN está em NP, porque uma vez que um algoritmo não determinístico estabeleça um conjunto de *splittings*, nós podemos verificar em tempo linear [23] se o grafo resultante é planar. Nós reduzimos 3SAT para SN da seguinte maneira. Seja  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  e  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  uma instância de 3SAT. Nós temos que construir um grafo  $G$  e um inteiro positivo  $k$ , tal que  $\sigma(G) \leq k$ , se e somente se  $C$  é satisfatível. De forma a definir  $G$  nós construímos primeiro um grafo auxiliar  $G^*$ .

**Construção de  $G^*$ .**

O grafo simples  $G^*$  é construído com dois tipos de subgrafos: subgrafos *Definidor-de-Verdade* e subgrafos *Testador-de-Satisfação*, e um conjunto de arestas para conectar estes subgrafos. Nós vamos definir  $G^*$  com listas de adjacências ordenadas. Desta maneira, nós precisamos dar os desenhos para cada um dos dois tipos

de subgrafos de forma a definir suas correspondentes listas de adjacências ordenadas. Os dois desenhos que nós vamos descrever, têm a seguinte estratégia em comum: Primeiro nós usamos os desenhos das Figuras 4.6c e 4.7 respectivamente para definir cada um dos subgrafos. Segundo, nas Figuras 4.6c e 4.7 nós particionamos os vértices dos subgrafos de  $G^*$  em vértices brancos, pretos e listrados, tal que cada vértice preto tem grau 2 e cada vértice branco tem grau 3. Os vértices listrados são vértices de ligação entre os subgrafos e podem ter grau 2 ou 3. Os vértices  $e_i[1], e_i[2]$  na Figura 4.6c e  $f_j[1], f_j[6]$  e  $b_j[h], h \in \{1, 2, 3\}$  na Figura 4.7, têm uma aresta incidente sem um vértice final. Estas arestas serão usadas mais tarde para indicar vértices listrados que necessariamente têm grau 3 em  $G^*$ . Terceiro, as arestas de  $G^*$  em cada um dos subgrafos são definidas por linhas contínuas. Observe que nas Figuras 4.6c e 4.7, para cada aresta contínua ligando dois vértices de grau 3 existe também uma aresta tracejada. Esta aresta tracejada não é usada na construção de  $G^*$ , ela deverá ser ignorada na construção de  $G^*$ , porque ela será usada mais tarde na construção de  $G$ . Agora nós descrevemos os dois tipos de subgrafos usados para construir  $G^*$ .

- *Subgrafo Definidor-de-Verdade*

Para cada variável  $u_i \in U$ , existe um subgrafo *Definidor-de-Verdade*  $T_i$ , definido pelo desenho da Figura 4.6c. O subgrafo  $T_i$  é obtido a partir de um  $K_{3,3}$  (Figura 4.6a) pela substituição de duas arestas e pela subdivisão de uma terceira como mostrado na Figura 4.6b. Note que nós temos dois vértices adicionais  $e_i[1]$  e  $e_i[2]$  (Figuras 4.6b e 4.6c). As duas arestas substituídas dão lugar a dois grafos chamados  $R_{u_i}$  e  $R_{\bar{u}_i}$ . Seja  $p$  o inteiro positivo que satisfaz  $2^p > 5m > 2^{p-1}$ . Os grafos  $R_{u_i}$  e  $R_{\bar{u}_i}$  são cada um, definidos como duas árvores binárias completas ligadas por suas folhas através dos vértices  $\bar{u}_i[1], \bar{u}_i[2], \dots, \bar{u}_i[2^p], u_i[1], u_i[2], \dots, u_i[2^p]$  como mostrado na Figura 4.6c. No-

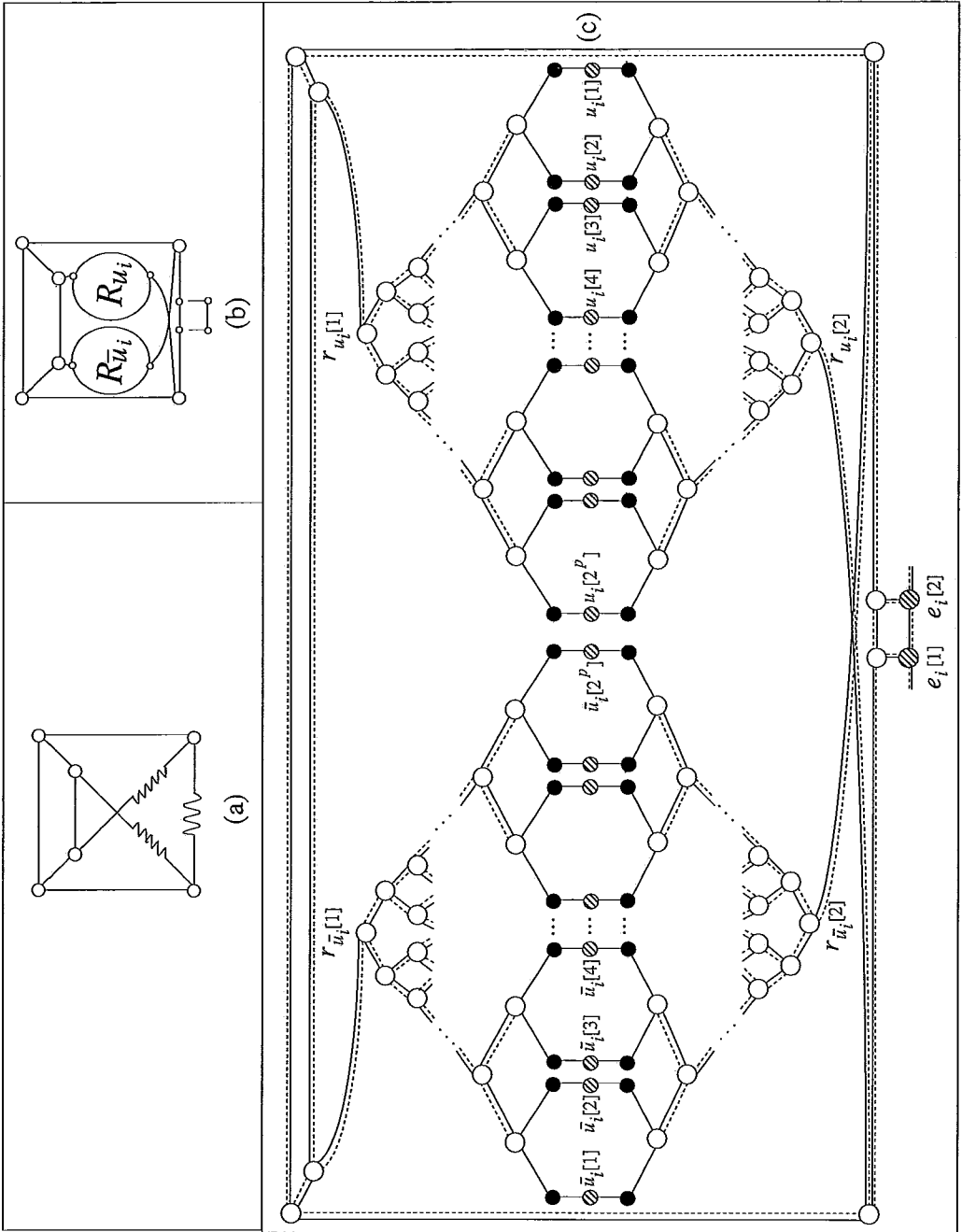


Figura 4.6: O Subgrafo *Definidor-de-Verdade*  $T_i$ .

te que o nível mais alto em cada uma destas árvores tem  $O(m)$  vértices.

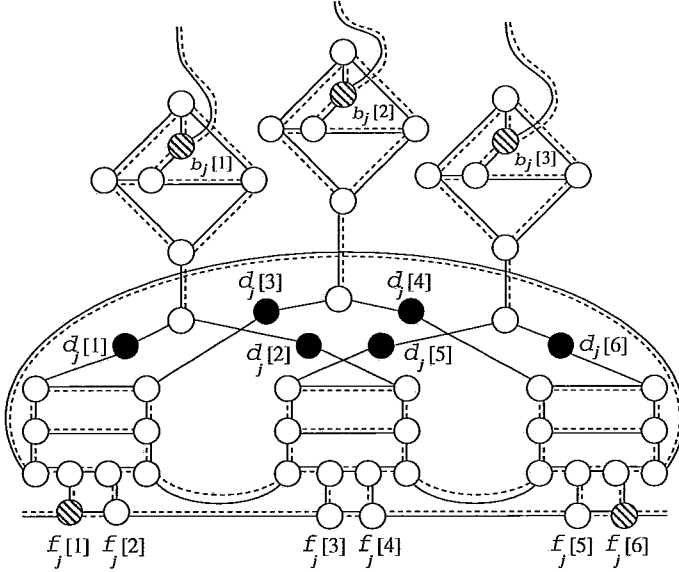


Figura 4.7: O Subgrafo *Testador-de-Satisfação*  $S_j$ .

- *Subgrafo Testador-de-Satisfação*

Para cada cláusula  $c_j \in C$  existe um subgrafo *Testador-de-Satisfação*  $S_j$  consistindo do grafo definido pela Figura 4.7.

Existe um conjunto de arestas para conectar os subgrafos *Definidor-de-Verdade* e *Testador-de-Satisfação* dado pelo conjunto:

$$E' = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{(e_i[2], e_{i+1}[1])\} \cup \{(e_n[2], f_1[1])\} \cup \bigcup_{j=1}^{m-1} \{(f_j[6], f_{j+1}[1])\} \cup \{(f_m[6], e_1[1])\}.$$

A única parte da construção de  $G^*$  que depende de quais literais ocorrem em quais cláusulas é a seguinte coleção de arestas produzida sequencialmente quando  $j$  cresce a partir de 1 até  $m$ . Sejam  $x_{i_1}, x_{i_2}$  e  $x_{i_3}$ , com  $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$  os três literais na cláusula  $c_j$ . Nós definimos os seguintes conjuntos de arestas conectando os subgrafos  $T_i$  e  $S_j$ :

$$E''_j = \{(b_j[1], x_{i_1}[l_1]), (b_j[2], x_{i_2}[l_2]), (b_j[3], x_{i_3}[l_3])\},$$

onde  $l_s, s = 1, 2, 3$ , é o número mínimo no conjunto  $\{1, 2, \dots, 2^p\}$  tal que não existe vértice  $b_{j'}[h], h \in \{1, 2, 3\}$  ligado a  $x_{i_s}[l_s]$  com  $j' \leq j$ .

A construção de  $G^*$  é completada por definir:  $G^* = (V(G^*), E(G^*))$ , onde:

$$V(G^*) = \left( \bigcup_{i=1}^n V(T_i) \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m V(S_j) \right)$$

e

$$E(G^*) = \left( \bigcup_{i=1}^n E(T_i) \right) \cup \left( \bigcup_{j=1}^m E(S_j) \right) \cup E' \cup \left( \bigcup_{j=1}^m E_j'' \right).$$

### Complexidade da Construção de $G^*$ .

O tempo necessário para construir as listas de adjacências ordenadas para cada subgrafo  $S_j$  depende somente do desenho de  $S_j$  dado pela Figura 4.7, e assim, este tempo não é dependente do tamanho da instância de 3SAT. Rotulando crescentemente os vértices de uma árvore binária completa da raiz para as folhas e do lado esquerdo para o lado direito, nós podemos obter as listas de adjacências ordenadas para a árvore em tempo linear ordenando decrescentemente os rótulos da vizinhança de cada vértice. Assim, o tempo para construir as listas de adjacências ordenadas para uma árvore binária completa com  $2^p$  vértices no maior nível é ordem de  $2^p$ , que significa que é possível construir as listas de adjacências ordenadas para o subgrafo  $T_i$  em tempo  $O(m)$ . Por causa dos testes para conectar os subgrafos  $S_j$ 's e  $T_i$ 's, nós temos tempo de ordem  $O(m^2n)$ . Assim é possível construir  $G^*$  em tempo polinomial no tamanho da instância de 3SAT.

### Construção de $G$ .

Seja  $B$  o subgrafo de  $G^*$  induzido pelos vértices de grau 3. Nós vamos mostrar que existe uma partição especial  $V_1(B)$  e  $V_2(B)$  para  $V(B)$ , tal que  $B$  é um grafo bipartido, nós vamos usar esta partição para definir  $G$ . Para provar que  $B$  é de fato um grafo bipartido é suficiente provar que cada uma das componentes conexas de  $B$  é um grafo bipartido.

Observe primeiro que existem exatamente  $3m + 1$  componentes conexas em  $B$ ,  $3m$  destas, contendo um subgrafo isomorfo a  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligado a dois vértices, e a

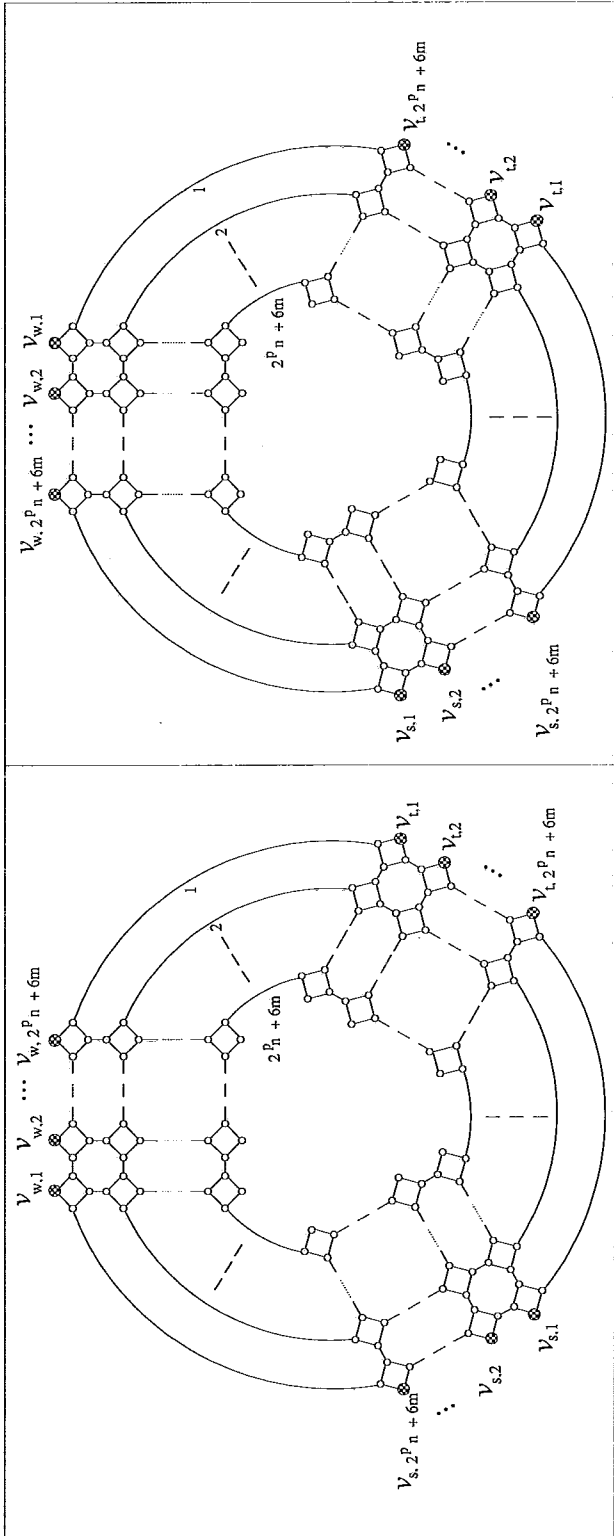
outra contendo todas arestas de  $E'$ .

Nós procedemos por definir as partições  $V_1(B)$  e  $V_2(B)$  em três passos:

- Para cada  $h \in \{1, 2, 3\}$  e  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tome uma *Breadth First Search* (*BFS*) a partir de  $b_j[h]$  na componente conexa de  $B$  contendo  $b_j[h]$ .
- Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tome uma *BFS* a partir de  $e_i[1]$  no subgrafo de  $G^*$  induzido pelos vértices  $V(T_i) \cap V(B)$ . E, para cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tome uma *BFS* a partir do vértice  $f_j[1]$  na componente conexa contendo  $f_j[1]$  do subgrafo de  $G^*$  induzido pelos vértices  $V(S_j) \cap V(B)$ .
- Para cada uma das  $n + 4m$  correspondentes árvores *BFS* produzidas, tome os vértices no nível par para a partição  $V_1(B)$  e tome os vértices no nível ímpar para a partição  $V_2(B)$ .

Observe que as  $3m$  componentes de  $B$  isomorfas a  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  ligado a dois vértices são trivialmente grafos bipartidos. Para mostrar que não existe conflito na definição da bipartição de  $B$ , resta analisar as componentes conexas de  $B$  contendo arestas em  $E'$ . Para isto, veja que  $\forall i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}, e_i[2] \in V_2(B)$  e  $e_{i+1}[1] \in V_1(B)$ ,  $e_n[2] \in V_2(B)$  e  $f_1[1] \in V_1(B)$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, (m-1)\}, f_j[6] \in V_2(B)$  e  $f_{j+1}[1] \in V_1(B)$  e  $f_m[6] \in V_2(B)$  e  $e_1[1] \in V_1(B)$ .

Um ponto crucial em nossa demonstração é que: uma vez construído  $G$  e o inteiro  $k$ , desde que  $\sigma(G) \leq k$ . Nós vamos requerer uma propriedade de  $G$ , que qualquer conjunto de  $k$  *splittings* que obtenha um grafo planar a partir de  $G$  seja forçado a ocorrer nós vértices pretos de  $G$ . Para conseguir isso, nós adicionamos “supervértices” e “superarestas” no subgrafo de  $G^*$  induzido pelos vértices de grau três de forma a obter  $G$ . A propriedade chave dos supervértices e das superarestas é que o seu tamanho será grande o suficiente, tal que a restrição  $\sigma(G) \leq k$  força que



(b)  $N_v$  Anti-horário

(a)  $N_v$  Horário

Figura 4.8: Subgrafo  $N_v$ , onde a lista de adjacência ordenada de  $v$  é dada por  $Adj(v) = (w, t, s)$ .



qualquer conjunto de  $k$  *splittings* que obtenha um grafo planar a partir de  $G$  seja forçado a ocorrer nós vértices pretos de  $G$ .

Agora nós estamos prontos para definir os supervértices de  $G$  correspondentes aos vértices de grau 3 em  $G^*$ . Para cada vértice  $v$  de grau 3 em  $G^*$  com lista de adjacência ordenada  $\vec{Adj}(v) = (w, t, s)$ , nós substituímos  $v$  por um *Supervértice Horário*  $N_v$  (Figura 4.8a), se  $v$  é um vértice na partição  $V_1(B)$  e um *Supervértice Anti-horário*  $N_v$  (Figura 4.8b), se  $v$  é um vértice na partição  $V_2(B)$ . A ordenação dos supervértices no sentido horário e antihorário, como será visto a seguir, possibilitará a definição algorítmica de  $G$  em função das listas de adjacências ordenadas dos vértices de grau três de  $G^*$ .

Para cada aresta  $(v, w) \in E(B)$ , nós definimos o seguinte conjunto de arestas:

$$E_{vw} = \{(v_{w,s}, w_{v,s}) \mid s \in \{1, 2, \dots, 2^p n + 6m\}\}.$$

Para cada aresta  $(v, w) \in E(G^*)$  onde  $v$  tem grau 2 em  $G^*$ , nós definimos o seguinte conjunto de arestas:

$$E_{vw} = \{(v, w_{v,1})\}, \text{ se } w \text{ tem grau 3, ou}$$

$$E_{vw} = \{(v, w)\}, \text{ se } w \text{ tem grau 2.}$$

A construção da instância de SN é completada fazendo  $k = 2^p n + 5m$  e  $G = (V(G), E(G))$  onde

$$V(G) = \left( \bigcup_{\substack{v \in V(G^*) \\ d(v)=3}} V(N_v) \right) \cup \{v \in V(G^*) \mid d(v) = 2\}$$

e

$$E(G) = \left( \bigcup_{\substack{v \in V(G^*) \\ d(v)=3}} E(N_v) \right) \cup \left( \bigcup_{(u,v) \in E(G^*)} E_{uv} \right).$$

A Figura 4.9 mostra um exemplo da construção de uma instância  $(G, k)$  de SN.

**Complexidade da construção de  $G$ .**

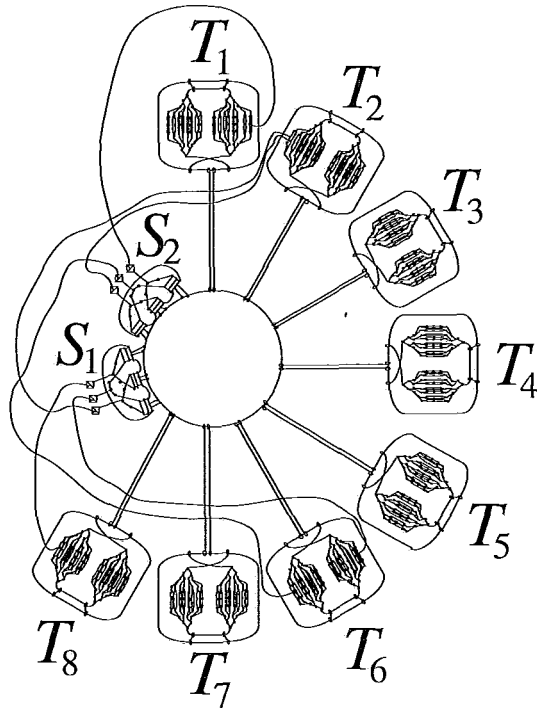


Figura 4.9: O grafo  $G$  e o inteiro  $k = 2^p n + 5m = 138$ , uma instância de SN obtida a partir de uma instância de 3SAT na qual  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_8\}$  e  $C = \{(\bar{u}_2, \bar{u}_6, u_8), (\bar{u}_2, u_6, u_1)\}$ .

É fácil ver que a construção de  $G$  pode ser feita em tempo polinomial no tamanho da instância  $I$  de 3SAT. Como  $G^*$  pode ser construído em tempo polinomial no tamanho de  $I$  e o tamanho de  $G^*$  é  $O((m^2 n)^2)$  nós temos que  $G$  pode ser construído em tempo  $O((2^p n)^2 (m^2 n)^2)$ .

**Afirmção 4.5.1** *Existe um desenho  $D(G)$  para  $G$  tal que:*

- (i) *Para todo  $v \in V(B)$ , nenhuma aresta de  $N_v$  pertence a um cruzamento;*
- (ii) *Para toda aresta  $(u, v) \in E(B)$ , não existe cruzamento entre qualquer par de arestas ligando vértices de  $N_u$  a vértices de  $N_v$ .*

**Prova:** Considere os supervértices  $N_v$ 's correspondentes aos vértices de grau 3 nas Figuras 4.6c e 4.7. As arestas do tipo  $(v_{v,1}, w_{v,1})$  serão consideradas com uma linha contínua, as arestas do tipo  $(v_{v,2^p n + 6m}, w_{v,2^p n + 6m})$  deverão ser consideradas desenhadas com uma linha tracejada e as arestas  $(v_{v,s}, w_{v,s})$  com  $1 < s < 2^p n + 6m$  são

consideradas desenhadas na região sem vértices limitada pelas arestas  $(v_{v,1}, w_{v,1})$  e  $(v_{v,2^p n+6m}, w_{v,2^p n+6m})$ . Estes subgrafos de  $G$  correspondentes aos subgrafos de  $G^*$  definidos pelas Figuras 4.6c e 4.7 são ligados para formar  $D(G)$  como na Figura 4.9.

□

Considere o desenho para um grafo  $N_v$  definido pela Figura 4.8. Nós definimos o  $1$ -*meridiano* de  $N_v$  como o maior ciclo contido na região exterior do desenho de  $N_v$ . Recursivamente, para  $i = 1, 2, \dots, 2^p n + 6m - 1$  nós removemos os vértices da região exterior (vértices do  $i$ -meridiano mais vértices pendentes) obtendo um novo desenho e definindo o  $(i + 1)$ -*meridiano* como o maior ciclo contido na região exterior deste desenho. Observe que pela construção, se  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^p n + 6m\}$ , então o  $i$ -meridiano e o  $j$ -meridiano são disjuntos em vértices.

**Afirmção 4.5.2** *Se  $G'$  é obtido a partir de  $G$  por um conjunto  $Z$  de splittings, onde  $|Z| \leq k$ , então existe um subgrafo  $B_c$  de  $G'$  contrátil a  $B$  (lembre que  $B$  é o subgrafo induzido pelos vértices de grau 3 de  $G^*$ ), tal que  $B_c$  contém um meridiano de  $N_v$  como subgrafo para todo  $v \in B$ .*

**Prova:** Considere uma aresta  $(u, v)$  de  $B$  e o desenho do subgrafo de  $G$  induzido pelos vértices  $V(N_u) \cup V(N_v)$  na Figura 4.10. Porque  $G'$  é obtido a partir de  $G$  por um conjunto  $Z$  de *splittings* com  $|Z| \leq k < 2^p n + 6m$  e existem  $2^p n + 6m$  meridianos disjuntos em vértices em cada um dos  $N_u$  e  $N_v$ , então existem  $q, s \in \{1, 2, \dots, 2^p n + 6m - 1, 2^p n + 6m\}$ , tais que os vértices do  $q$ -meridiano de  $N_u$  e do  $s$ -meridiano de  $N_v$  não estão em  $Z$ . Considere  $u_{v,j}$ , para algum  $j \in \{1, 2, \dots, 2^p n + 6m\}$ , um vértice na região exterior de  $N_u$  adjacente ao vértice  $v_{u,j}$  de  $N_v$ . É fácil ver que existe um caminho com  $3(2^p n + 6m) - 1$  vértices, sem vértices em  $Z$ , ligando  $u_{v,j}$  a um vértice na região mais interior de  $N_u$ . Sejam  $P$  e  $Q$  dois caminhos com  $3(2^p n + 6m) - 1$  vértices ligando respectivamente os vértices  $u_{v,j'}$  e  $u_{v,j}$ ,  $j' < j$ ,  $j' \in \{1, 2, \dots, 2^p n + 6m\}$  a

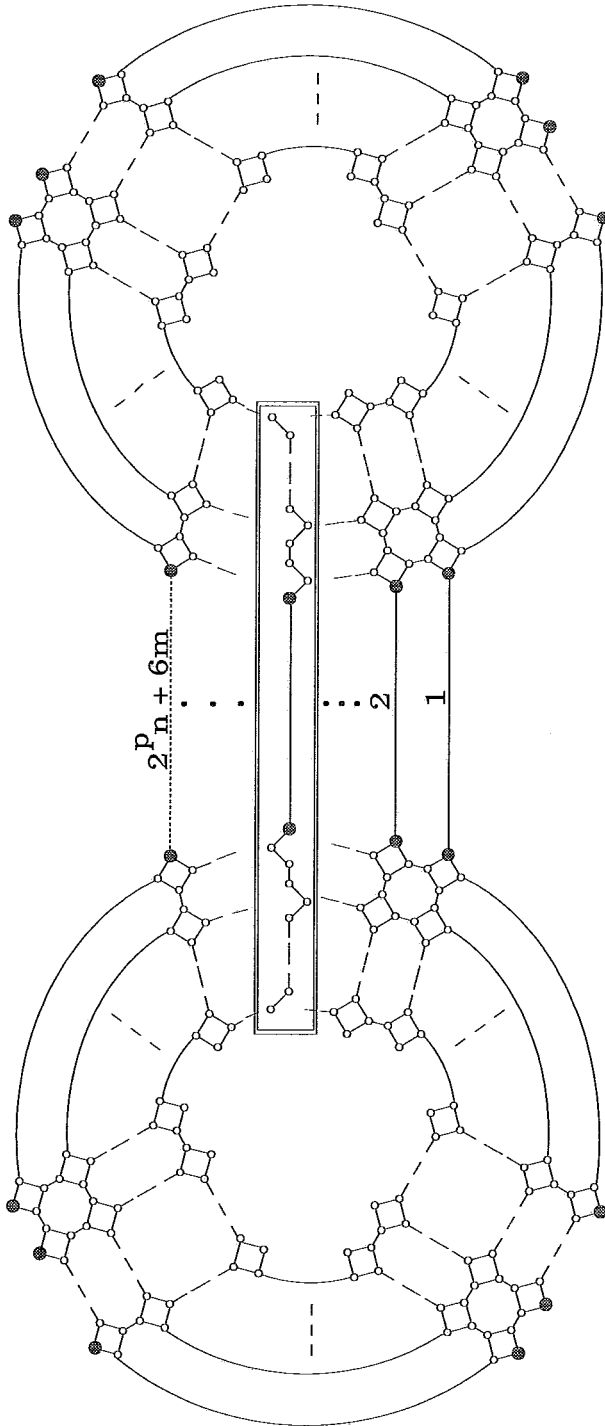


Figura 4.10: Um caminho com  $2(3(2^p n + 6m) - 1)$  vértices ligando um vértice na região mais interior de  $N_u$  a um vértice na região mais interior de  $N_v$ .

um vértice na região mais interior de  $N_u$ , então o fato que  $|V(P)| = |V(Q)| = 3(2^p n + 6m) - 1$  implica que  $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$ . Assim, existem  $2^p n + 6m$  caminhos com  $2(3(2^p n + 6m) - 1)$  vértices, dois a dois disjuntos em vértices, ligando um vértice da região mais interior de  $N_u$  a um vértice na região mais interior de  $N_v$ . Observe também que, se  $(u, v)$  e  $(u, w)$  são arestas de  $B$ , e se  $P$  e  $Q$  são caminhos com  $2(3(2^p n + 6m) - 1)$  vértices consistindo de vértices de  $G$ , respectivamente ligando um vértice da região mais interior de  $N_u$  a um vértice na região mais interior de  $N_v$  e ligando um vértice da região mais interior de  $N_u$  a um vértice na região mais interior de  $N_w$ , então  $P$  e  $Q$  são também disjuntos em vértices. Como  $G'$  é obtido a partir de  $G$  por um conjunto  $Z$  de *splittings* e  $|Z| \leq k = 2^p n + 5m < 2^p n + 6m$ , para cada aresta  $(u, v) \in E(B)$ , existe um caminho com  $2(3(2^p n + 6m) - 1)$  vértices ligando um vértice da região mais interior de  $N_u$  a um vértice na região mais interior de  $N_v$  que não contém vértices em  $Z$ .

Assim, nós construímos um grafo contrátil a  $B$  como um subgrafo de  $G'$  por adicionar para cada vértice  $u$  de  $B$  os vértices correspondentes no meridiano  $N_u$  em  $G'$  sem vértices em  $Z$  e para cada par  $u, v$  de vértices adjacentes de  $B$  um caminho, sem vértices em  $Z$ , com  $2(3(2^p n + 6m) - 1)$  vértices ligando um vértice na região mais interior de  $N_u$  a um vértice na região mais interior de  $N_v$ .  $\square$

A partir de agora nós nos referimos aos subgrafos de  $G$  correspondentes aos subgrafos  $T_i, R_{u_i}, R_{\bar{u}_i}$  e  $S_j$  de  $G^*$  dizendo, respectivamente,  $T_i, R_{u_i}, R_{\bar{u}_i}$  e  $S_j$ .

Resta mostrar que  $C$  é satisfável se e somente se  $\sigma(G) \leq k$ .

- Se  $\sigma(G) \leq k$ , então  $C$  é satisfável.

Suponha  $\sigma(G) \leq k$ . Então existe  $H$  um grafo planar obtido a partir de  $G$  por um conjunto  $Z$  de *splittings*, tal que  $|Z| \leq k$ .

Pela Afirmação 4.5.2,  $H$  tem um subgrafo contrátil a  $B$ . Seja  $i$  um índice fixado  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . De maneira a fazer  $T_i$  planar,  $Z$  tem que admitir um

subconjunto com  $2^p$  *splittings* nos vértices pretos de  $T_i$  ou nos supervértices  $N_v$  com vértices adjacentes a algum vértice preto de  $T_i$ . Seja  $L_i$  um dos subgrafos do par  $R_{u_i}, R_{\bar{u}_i}$  que contém  $2^p$  *splittings* de  $Z$ . Nós denotamos por  $Z_i$  o subconjunto de *splittings* de  $Z$  no grafo  $L_i$ . Uma atribuição de verdade para  $U$  pode ser obtida fazendo  $u_i = T$  se e somente se  $L_i = R_{u_i}$ . Note que esta atribuição pode ser obtida em tempo polinomial no tamanho de  $G$ , isto é no tamanho da instância de 3SAT.

Nós provamos a seguir que de fato esta atribuição de verdade satisfaz  $C$ . Ou seja, que para cada cláusula  $c_j$  existe no mínimo um de seus literais com valor  $T$ .

Para isso, considere a cláusula  $c_j = (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee x_{i_3})$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . A estes três literais correspondem três subgrafos  $N_{b_j[1]}, N_{b_j[2]}$  e  $N_{b_j[3]}$  de  $S_j$  cada um tendo vértices adjacentes, respectivamente a vértices de  $N_{x_{i_1}[f_1]}, N_{x_{i_2}[f_2]}$  e  $N_{x_{i_3}[f_3]}$ , que são por sua vez, subgrafos de  $T_{i_1}, T_{i_2}$  e  $T_{i_3}$ . É suficiente provar que existe um  $s \in \{1, 2, 3\}$  tal que  $N_{x_{i_s}[f_s]}$  é subgrafo de  $L_{i_s}$ . Considere o grafo  $G'$  obtido a partir de  $G$  através do conjunto de *splittings*  $\cup_{i=1}^n Z_i$ . Vamos chamar de  $R'_{x_{i_s}}$  o grafo obtido a partir de  $R_{x_{i_s}}$  através de  $\cup_{i=1}^n Z_i$ . Seja  $v_{i_s}$ ,  $s \in \{1, 2, 3\}$  um vértice fixado em um meridiano de  $N_{x_{i_s}[f_s]}$  sem vértices em  $Z$ . Nós temos que precisamente uma das propriedades seguintes acontece:

- **Propriedade 1** Para todo  $s \in \{1, 2, 3\}$ , existe um caminho em  $G'$  por vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[1]}$  sem vértices em  $Z$  e existe um caminho em  $G'$  por vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[2]}$  sem vértices em  $Z$ . Neste caso, pelo Lema 4.1,  $c_j$  requer no mínimo mais seis *splittings* adicionais em  $Z \setminus \cup_{i=1}^n Z_i$ .
- **Propriedade 2** Para todo  $s \in \{1, 2, 3\}$ , existe um caminho em  $G'$  por

vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[1]}$  sem vértices em  $Z$  ou a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[2]}$ . E para algum  $s \in \{1, 2, 3\}$ , não existe um caminho em  $G'$  por vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[1]}$  sem vértices em  $Z$ , ou não existe outro caminho em  $G'$  por vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[2]}$ . Neste caso, pelo Lema 4.3, a cláusula  $c_j$  requer no mínimo cinco *splittings* adicionais em  $Z \setminus \bigcup_{i=1}^n Z_i$ .

– **Propriedade 3** Para algum  $s \in \{1, 2, 3\}$ , não existe um caminho em  $G'$  por vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[1]}$  e não existe um caminho em  $G'$  por vértices em  $R'_{x_{i_s}}$  ligando  $v_{i_s}$  a um vértice em um meridiano de  $N_{r_{x_{i_s}}[2]}$ . Neste caso, pelo Lema 4.4,  $c_j$  requer no mínimo  $5 - l$  *splittings* adicionais em  $Z \setminus \bigcup_{i=1}^n Z_i$ , onde  $l$  é número de elementos no conjunto  $\{1, 2, 3\}$  satisfazendo a Propriedade 3. Mas, isso significa que pelo menos  $2^p n + l$  *splittings* foram feitos em  $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ . Como  $c_j$  requer  $5 - l$  *splittings* adicionais em  $Z \setminus \bigcup_{i=1}^n Z_i$ , cada cláusula satisfazendo esta propriedade indica que existem  $l$  *splittings* adicionais em  $\bigcup_{i=1}^n Z_i$ .

Seja  $t_i$  o número de cláusulas de  $C$  satisfazendo a Propriedade  $i$ . Como, as Propriedades 1, 2 e 3 implicam que  $t_1 + t_2 + t_3 = m$  e  $k \geq 2^p n + 6t_1 + 5(t_2 + t_3)$ . E como  $k = 2^p n + 5m$ , nós temos que  $t_1 = 0$ . Assim, existe no mínimo um subgrafo  $N_{x_{i_s}[l_s]}$  subgrafo de  $L_i$ , como requerido.  $\square$

- Se  $C$  é satisfatível, então  $\sigma(G) \leq k$ .

Uma vez dada uma atribuição de verdade para  $U$  que satisfaz  $C$  nós vamos construir um conjunto  $Z$  de *splittings* que obtém um grafo planar a partir de  $G$ . Considere uma atribuição de verdade para  $U$  que satisfaz  $C$ . Para cada

uma das variáveis  $u_1, u_2, \dots, u_n$  de  $U$ , se a variável  $u_i$  é verdadeira, então adicione para  $Z$  as  $2^p$  folhas de uma das árvores binárias completas de  $R_{u_i}$ , senão adicione para  $Z$  as  $2^p$  folhas de uma das árvores binárias completas de  $R_{\bar{u}_i}$ . Seja  $G'$  o grafo resultante destes  $2^p n$  *splittings*. Considere  $D(G)$ , o desenho para  $G$  definido pela Afirmação 4.5.1. Considere  $D(G')$  obtido de  $D(G)$  tal que os desenhos correspondentes de cada  $T_i$  sejam planares. Assim, os cruzamentos restantes ocorrem nas arestas dos  $S_j$ 's e nas arestas ligando vértices de algum  $N_v$  em  $S_j$  a vértices fora de  $S_j$ . Como existe um literal verdadeiro em cada cláusula, é possível definir em tempo polinomial um conjunto correspondente de cinco *splittings* para cada  $S_j$ , tal que o grafo resultante não tenha cruzamentos nas arestas dos correspondentes  $S_j$ 's. Neste desenho plano, os grafos  $K_{3,3} \setminus \{e\}$  de cada  $S_j$  ficam localizados em alguma região plana do correspondente  $S_j$  ou em alguma região plana do correspondente  $T_i$ , como define o Lema 4.3. E assim, um grafo planar é obtido a partir de  $G$  com um conjunto de *splittings* com exatamente  $2^p n + 5m$  *splittings*.  $\square$

Nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13, consideramos um exemplo com a instância satisfatível de 3SAT  $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{(u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3)\})$ .

**Corolário 4.6** *3SAT é NP-completo quando restrito a grafos cúbicos.*

**Prova:** Uma prova é obtida como no Teorema 4.5 por uma modificação local no grafo  $G$  no Teorema 4.5 como segue. Considere o grafo auxiliar  $C_v$  na Figura 4.14(a). Para cada vértice  $v$  de grau 2 em  $G$ , nós adicionamos para  $G$  uma cópia de  $C_v$ , onde  $w_v$  é o vértice de  $C_v$  adjacente a  $v$ , como mostrado na Figura 4.14(b).  $\square$

Nós terminamos este capítulo com uma primeira aplicação da NP-completude do problema SPLITTING NUMBER que engloba um resultado de Liu e Geldmacher [30] onde eles provaram que os seguintes problemas de decisão são NP-completos:



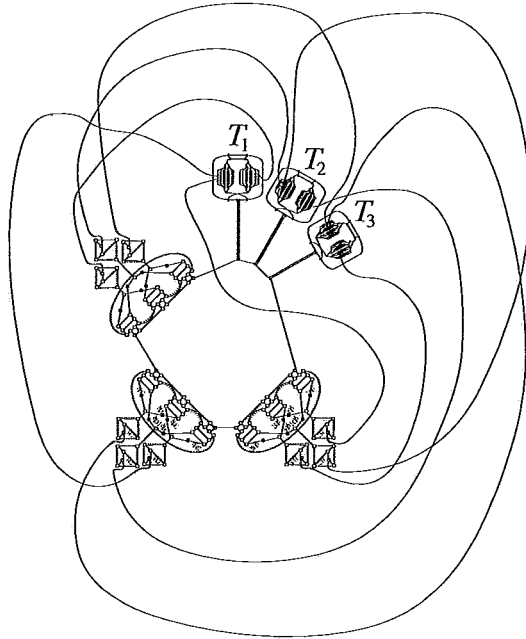


Figura 4.11: Instância de SN  $G, k = 2^43 + 5.3$  correspondente a instância de 3SAT  $I = (U, C) = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{(u_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, u_2, \bar{u}_3), (\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_3)\})$ .

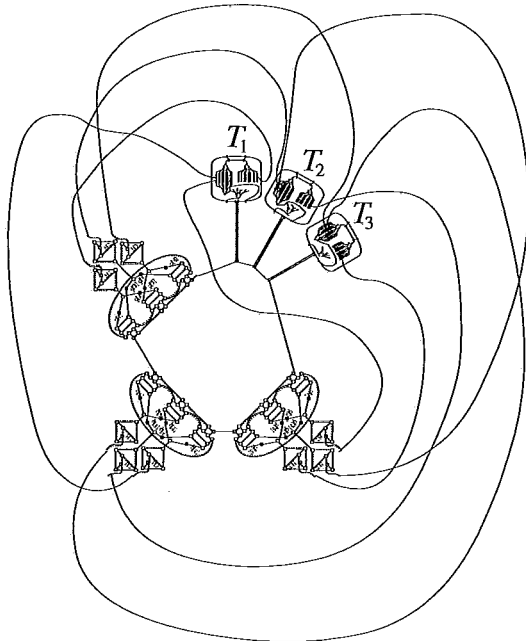


Figura 4.12: Grafo obtido a partir de  $G$  com um conjunto de  $2^43$  *splittings* definido através da atribuição de verdade  $u_1 = u_2 = u_3 = T$ .

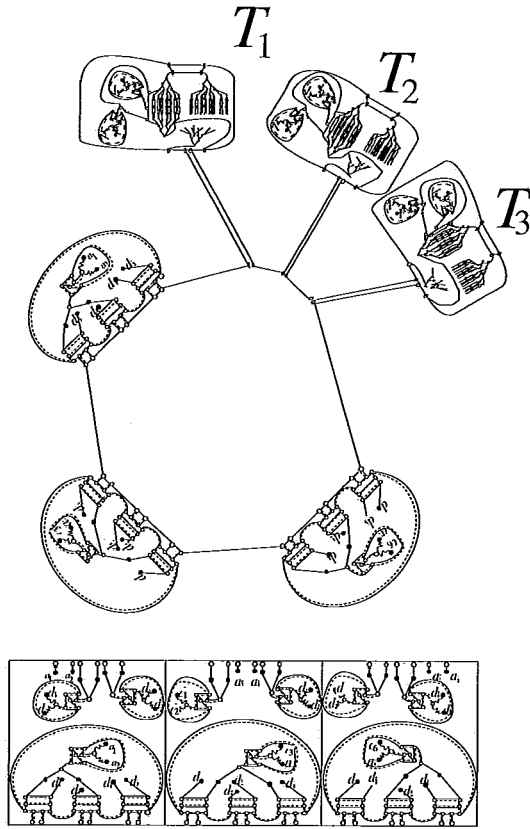


Figura 4.13: Grafo plano obtido a partir de  $G$  com um conjunto de  $2^{43}+5.3$  *splittings*.

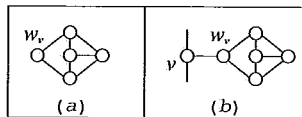


Figura 4.14: Grafo auxiliar para o Corolário 4.6.

### SUBGRAFO PLANAR (PS)

INSTÂNCIA: Grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k \leq |E(G)|$ .

OBJETIVO: Existe um subconjunto  $E' \subset E$  com  $|E'| \geq k$ , tal que  $G' = (V, E')$  é planar?

### REMOÇÃO DE ARESTAS (RA)

INSTÂNCIA: Grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k \leq |E(G)|$ .

OBJETIVO: Existe um subconjunto  $E' \subset E$  com  $|E'| \leq k$ , tal que  $G' = (V, E \setminus E')$  é planar?

Liu e Geldmacher provaram que estes problemas são NP-completos, mas não se sabia se estes problemas são também NP-completos quando restritos a grafos cúbicos. Como nossa prova de que SPLITTING NUMBER é NP-completo é válida para grafos cúbicos, nós usamos esta versão de SPLITTING NUMBER para provar que SUBGRAFO PLANAR e REMOÇÃO DE ARESTAS restritos a grafos cúbicos são também NP-completos. Assim, nós passamos a formalmente definir estes dois problemas.

### SPLITTING NUMBER PARA GRAFOS CÚBICOS (SN $\Delta$ 3)

INSTÂNCIA: Grafo cúbico  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k > 0$ .

OBJETIVO: Existe um conjunto de  $k$  ou menos *splittings* que obtém um grafo planar a partir de  $G$ ?

### SUBGRAFO PLANAR PARA GRAFOS CÚBICOS (PS $\Delta$ 3)

INSTÂNCIA: Grafo cúbico  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k \leq |E(G)|$ .

OBJETIVO: Existe um subconjunto  $E' \subset E$  com  $|E'| \geq k$  tal que  $G' = (V, E')$  é planar?

### REMOÇÃO DE ARESTAS PARA GRAFOS CÚBICOS (RA $\Delta$ 3)

INSTÂNCIA: Grafo cúbico  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k \leq |E(G)|$ .

OBJETIVO: Existe um subconjunto  $E' \subset E$  com  $|E'| \leq k$  tal que  $G' = (V, E \setminus E')$  é planar?

Nós agora vamos demonstrar um resultado da Tese de Doutorado de Mendonça [32] que usaremos para mostrar que  $\text{RA}\Delta 3$  e  $\text{PS}\Delta 3$  são problemas de decisão NP-completos.

**Teorema 4.7** (Mendonça [32]) *Se  $G$  é um grafo cúbico, então  $\sigma(G) = \kappa(G)$ .*

**Prova:** Primeiro de tudo observe que qualquer *splitting* em um grafo de grau máximo 3 produz uma ou duas folhas. Além disso, um cruzamento em uma aresta incidente a uma folha sempre pode ser removido considerando um desenho diferente no plano. Assim, se  $L$  é o conjunto de folhas de um grafo  $G$ , então  $G$  tem o mesmo *splitting number* que  $G \setminus L$ .

Considere um grafo cúbico  $G$ . Nós começamos por assumir que existe um conjunto  $Z$  de *splittings*,  $|Z| = k$ , que obtém um grafo planar  $H$  a partir de  $G$ . Nós definimos um subconjunto  $L$  de  $E(H)$ ,  $|L| \leq |Z|$ , tal que  $L$  é obtido a partir de  $Z$  por adicionar para  $L$  a aresta incidente a uma folha obtida em cada *splitting* de  $Z$ . Por construção,  $G' = (V(G), E(G) \setminus L)$  é um grafo planar com  $|L| \leq k$ , ou seja, temos que  $\sigma(G) \geq \kappa(G)$ .

Por outro lado, suponha que existe um subconjunto  $E' \subset E(G)$  de arestas de tamanho  $|E'| = k'$ , tal que  $G' = (V(G), E(G) \setminus E')$  é um grafo planar. Nós vamos mostrar que neste caso  $\sigma(G) \leq k'$ . Nós podemos preprocessar  $E'$  em tempo polinomial no tamanho de  $G$  de forma a remover de  $E'$  uma das arestas para cada tripla de arestas de  $E'$  incidentes ao mesmo vértice, chamamos de  $E''$  o conjunto das arestas que restarem em  $E'$  após essa remoção. Por construção,  $|E''|$  é menor ou igual que  $|E'|$ , e  $G'' = (V(G), E(G) \setminus E'')$  é um grafo planar. Para ver isso, note que a remoção de duas arestas incidentes a um mesmo vértice de grau 3, obtém uma folha incidente a terceira aresta, e portanto a remoção de três arestas é redundante em  $E'$  para obter um grafo planar a partir de  $G$ . Nós construímos agora um conjunto  $Z$  de *splittings*, em tempo polinomial no tamanho de  $G$ , que obtém um grafo planar a partir de  $G$

com  $|Z| \leq k'$ . O algoritmo que constrói  $Z$ , é o seguinte: para cada aresta  $(u, v)$  de  $E''$  faça um *splitting* em  $v$  nos vértices  $v_1$  e  $v_2$ , tal que  $viz(v_1) = \{u\}$ . A corretude deste algoritmo está justamente no fato que,  $G$  é cúbico e o grafo  $G''' = (V(G), E''')$  é uma coleção de vértices isolados, caminhos e ciclos e que por isso, os *splittings* de  $Z$  são definidos somente em vértices de grau maior ou igual que 2. O conjunto  $Z$  de *splittings* transforma todas as arestas de  $E''$ , em arestas incidentes a folhas no grafo resultante. Assim,  $\sigma(G) \leq |E''| \leq |E'| \leq k'$ , o que significa que  $\sigma(G) \leq \kappa(G)$ .  $\square$

**Corolário 4.8**  $RA\Delta 3$  é  $NP$ -completo.

**Prova:**  $RA\Delta 3$  está em  $NP$  porque  $RA$  está em  $NP$ . Considere a redução polinomial da instância  $I = (U, C)$  de 3SAT para a instância  $G, k$  de  $SN\Delta 3$  do Corolário 4.6. Decorre do Corolário 4.6 e de Teorema 4.7 que  $I$  é satisfatível se e somente se  $\kappa(G) \leq k$ . O que permite usar a mesma redução do Corolário 4.6 que leva uma instância qualquer de 3SAT para  $G, k$  uma instância de  $RA\Delta 3$ , para mostrar que  $RA\Delta 3$  é  $NP$ -completo.

**Corolário 4.9**  $PS\Delta 3$  é  $NP$ -completo.

**Prova:** Analogamente, consideramos a mesma redução polinomial do Corolário 4.6 que leva uma instância qualquer de 3SAT para  $G, k$  uma instância de  $SN\Delta 3$ , consideramos também a instância  $G, E(G) - k$  uma instância de  $PS\Delta 3$ . Do Corolário 4.8 temos que  $I$  é satisfatível se e somente se  $\kappa(G) \leq k$  se e somente se  $Opt_{PS\Delta 3}(G) \geq E(G) - k$ . O que conclui que  $PS\Delta 3$  é  $NP$ -completo.  $\square$

## Capítulo 5

# Sobre a não aproximabilidade para SPLITTING NUMBER e REMOÇÃO DE ARESTAS

Uma importante frente de trabalho em Ciência da Computação é o estabelecimento de Esquemas de Aproximação em Tempo Polinomial (PTAS) para um problema fixado de otimização NP-difícil, ou o estabelecimento da inexistência de um PTAS assumindo  $P \neq NP$ .

Assim, existem muitos problemas de otimização como MÍNIMO CICLO DO CAIXEIRO VIAJANTE [16] ((MINTSP) ciclo hamiltoniano de peso mínimo em um grafo completo com pesos nas arestas) e 3SATISFABILIDADE MÁXIMA [3] ((MAX3SAT) número máximo de cláusulas satisfeitas entre todas as possíveis atribuições de verdade em uma instância de 3SAT) que não admitem um PTAS sob a hipótese que  $P \neq NP$ . E existem problemas de otimização como MOCHILA [16] que admitem um PTAS.

Nós estamos interessados em analisar este aspecto para as versões de otimização de SPLITTING NUMBER, REMOÇÃO DE ARESTAS e SUBGRAFO PLANAR. A seguir, essas versões são formalmente introduzidas. Nós chamamos de SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO (MAXPS) o problema de otimização consistido de um grafo  $G = (V, E)$  com o objetivo de obter um subconjunto máximo  $E'$  de  $E$ , tal que  $G' = (V, E')$  é planar. O problema de otimização complementar a SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO

é denominado REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA (MINRA) que consiste de um grafo  $G = (V, E)$  com o objetivo de obter um subconjunto mínimo  $E'$  de  $E$ , tal que  $G' = (V, E \setminus E')$  é planar. Nós chamamos de SPLITTING NUMBER MÍNIMO (MINSN) o problema de otimização consistido de um grafo  $G = (V, E)$  com o objetivo de determinar um conjunto mínimo de *splittings*  $Z$ , tal que  $Z$  obtém um grafo resultante planar  $G'$  a partir de  $G$ .

Em 1991, Papadimitriou e Yannakakis em [33] relatam que eles estavam procurando uma maneira mais eficiente para exibir problemas de otimização que não admitem Esquema de Aproximação em Tempo Polinomial (PTAS). A estratégia traçada por estes autores em [33], consiste em inicialmente definir uma subclasse de NP chamada SNP, com seus respectivos problemas de otimização em outra classe chamada MAX SNP. Eles demonstraram que vários problemas clássicos de otimização são completos na classe MAX SNP sob uma espécie de redução chamada L-redução (Redução Linear). Eles também demonstraram que a transformação L-redução é transitiva e que, se algum problema MAX SNP-completo admite um PTAS, então todo problema em MAX SNP admite um PTAS. Em 1992, Arora, Lund, Montwani e Szegedy [3] mostraram que MAX3SAT, um problema MAX SNP-completo [33], não possui PTAS a menos que  $P=NP$ . Dessa forma, para mostrar que um problema de otimização desejado não admite um PTAS assumindo que  $P \neq NP$ , é suficiente exibir uma L-redução de um problema completo ou difícil na classe MAX SNP para o problema de otimização desejado.

Călinescu, Fernandes, Finkler e Karloff [6] mostraram em 1996 que SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO e REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA para grafos em geral são problemas MAX SNP-difícil. Os autores exibiram duas L-reduções a partir de  $TSP_4(1, 2)$  um problema MAX SNP-difícil [34], uma L-redução para SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO e uma L-redução para REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA. Observamos que em [6] não fica estabelecido que SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO ou REMOÇÃO

DE ARESTAS MÍNIMA são MAX SNP–difícil quando restringimos a entrada para grafos cúbicos.

Neste capítulo, nós mostramos que ambos SPLITTING NUMBER MÍNIMO restrito a grafos cúbicos (MINSN $\Delta$ 3) e REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA restrito a grafos cúbicos (MINRA $\Delta$ 3) são problemas de otimização MAX SNP–difícil, o que implica que cada um deles não admite um PTAS, a menos que P=NP.

Nossa estratégia para chegar a este resultado consiste em exibir uma L–redução de MAX3SAT $_3$ , um problema MAX SNP–completo [33], para SPLITTING NUMBER MÍNIMO restrito a grafos cúbicos. Mostramos assim que SPLITTING NUMBER MÍNIMO restrito a grafos cúbicos é MAX SNP–difícil. Em seguida, exibimos outra L–redução de SPLITTING NUMBER MÍNIMO restrito a grafos cúbicos, para REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA restrito a grafos cúbicos.

Na próxima seção, fazemos algumas considerações sobre o problema 3SAT. Na seção seguinte exibimos as duas L–reduções.

## 5.1 A respeito de 3SAT

Nós definimos o problema de decisão 3SAT $_3$  consistido por um conjunto de variáveis lógicas  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  e um conjunto de cláusulas  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ , onde para todo  $c \in C$ ,  $|c| \leq 3$ , e cada variável de  $u \in U$  ocorre no máximo três vezes nas cláusulas de  $C$ , ou como a literal  $u$  ou como sua negação  $\bar{u}$ , com o objetivo de decidir a questão: “ $C$  é satisfatível?”. Este problema é conhecido ser NP–completo [16].

Daqui por diante, nós vamos assumir que o problema de decisão 3SAT $_3$  possui somente instâncias  $I = (U, C)$ ,  $|U| = n$ ,  $|C| = m$ , onde cada variável de  $U$  ocorre pelo menos em uma cláusula de  $C$ . Isto pode ser assumido porque nós podemos preprocessar  $C$  em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , a saber em tempo  $O(nm)$ , de forma a remover de  $U$  as variáveis que não ocorrem em nenhuma cláusula de  $C$ .



Papadimitriou e Yannakakis definiram em 1991 [33] uma subclasse de NP chamada *STRICT NP* (*SNP*) formada por problemas NP que podem ser expressos como  $\exists T \forall \bar{x} \psi(\bar{x}, G, T)$ , onde  $T$  e  $G$  são estruturas,  $\bar{x}$  é um vetor e  $\psi$  é uma sentença lógica de primeira ordem livre de quantificadores. Por exemplo, 3SAT está em SNP porque nós podemos considerar uma instância  $I = (U, C)$  de 3SAT consistida de uma partição para  $C$  dada por  $(C_0, C_1, C_2, C_3)$  (correspondente a  $G$ ), onde para cada  $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $C_j$  contém todas as cláusulas (correspondentes aos vetores) com  $j$  literais negativos, tal que  $(x_1, x_2, x_3) \in C_j$  significa que  $(x_1, x_2, x_3)$  tem  $x_1, x_2, \dots, x_j$  como literais aparecendo negativamente, e  $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_3$  como literais aparecendo positivamente. Então, 3SAT é definido pelo problema de decisão de verificar se

$$\begin{aligned} \exists T \forall (x_1, x_2, x_3) [ & ((x_1, x_2, x_3) \in C_0 \rightarrow x_1 \in T \vee x_2 \in T \vee x_3 \in T) \wedge \\ & ((x_1, x_2, x_3) \in C_1 \rightarrow x_1 \notin T \vee x_2 \in T \vee x_3 \in T) \wedge \\ & ((x_1, x_2, x_3) \in C_2 \rightarrow x_1 \notin T \vee x_2 \notin T \vee x_3 \in T) \wedge \\ & ((x_1, x_2, x_3) \in C_3 \rightarrow x_1 \notin T \vee x_2 \notin T \vee x_3 \notin T)]. \end{aligned}$$

A pergunta correspondente à sentença acima é: Existe uma atribuição de verdade  $T$ , tal que o conjunto de cláusulas  $C$  é satisfeito?

Seja  $\Pi$  um problema em SNP definido por  $\Pi = \exists T \forall \bar{x} \psi(\bar{x}, G, T)$ . O problema de otimização de encontrar  $T$  que maximiza (respectivamente minimiza) o número de vetores  $\bar{x}$  satisfazendo  $\psi(\bar{x}, G, T)$  é chamado MAX $\Pi$  (respectivamente MIN $\Pi$ ), e este problema de otimização é dito ser um problema em *MAX SNP*. Papadimitriou e Yannakakis provaram [33] que vários problemas, entre eles MAX3SAT e MAX3SAT<sub>3</sub> são problemas de otimização MAX SNP-completos com respeito a uma transformação chamada L-redução, que nós definimos a seguir.

Sejam  $A$  e  $B$  dois problemas de otimização. Nós dizemos que  $A$   $L$ -reduz para  $B$ , ou que existe uma  $L$ -redução a partir de  $A$  para  $B$ , se existem dois algoritmos  $f$  e  $g$ , e constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que para cada instância  $I$  de  $A$ ,  $f$  e  $g$  sejam cada um algoritmos tempo polinomiais no tamanho de  $I$  e

- O algoritmo  $f$  produz uma instância  $I' = f(I)$  de  $B$ , tal que a solução ótima de  $I$  e de  $I'$ , de custos denotados respectivamente, por  $Opt_A(I)$  e  $Opt_B(I')$  satisfazem  $Opt_B(I') \leq \alpha Opt_A(I)$ , e
- Dada qualquer solução viável de  $I'$  com custo  $c'$ , o algoritmo  $g$  produz uma solução viável de  $I$  com custo  $c$  tal que  $|c - Opt_A(I)| \leq \beta |c' - Opt_B(I')|$ .

Vamos agora apresentar e demonstrar os dois teoremas mais importantes deste artigo de Papadimitriou e Yannakakis a respeito do funcionamento das  $L$ -reduções.

**Teorema 5.1** (Papadimitriou e Yannakakis [33]) *Sejam três problemas de otimização  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Se  $A$   $L$ -reduz para  $B$  e  $B$   $L$ -reduz para  $C$ , então  $A$   $L$ -reduz para  $C$ .*

**Prova:** Com as hipóteses deste teorema, nós vamos exibir uma  $L$ -redução de  $A$  para  $C$ . Sejam  $\alpha_{AB}, \beta_{AB}, f_{AB}$  e  $g_{AB}$  as constantes e algoritmos correspondentes a  $L$ -redução de  $A$  para  $B$  e  $\alpha_{BC}, \beta_{BC}, f_{BC}$  e  $g_{BC}$  as constantes e algoritmos correspondentes a  $L$ -redução de  $B$  para  $C$ . Dada uma instância  $I$  do problema  $A$ , considere a instância  $I' = f_{AB}(I)$  para o problema  $B$  produzida em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , e a instância  $I'' = f_{BC}(f_{AB}(I)) = f_{BC}(I')$  para o problema  $C$  produzida em tempo polinomial no tamanho de  $I'$  (veja que  $I'$  tem tamanho polinomial no tamanho de  $I$ , e assim  $I''$  é produzida a partir de  $I$  em tempo polinomial no tamanho de  $I$ ). Pela definição de  $L$ -redução:

$$Opt_B(I') \leq \alpha_{AB} Opt_A(I) \text{ e } Opt_C(I'') \leq \alpha_{BC} Opt_B(I').$$

Então temos,

$Opt_C(I'') \leq \alpha_{BC} Opt_B(I') \leq \alpha_{AB} \alpha_{BC} Opt_A(I)$ , o que conclui a primeira parte da L-redução de  $A$  para  $C$ .

Uma vez dada uma solução viável para  $I''$  de custo  $c_C$ , o algoritmo  $g_{BC}$  obtém, em tempo polinomial no tamanho de  $I'$ , uma solução viável para  $I'$  de custo  $c_B = g_{BC}(c_C)$  a partir de  $c_C$ . E o algoritmo  $g_{AB}$  obtém, em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , uma solução viável para  $I$  de custo  $c_A = g_{AB}(g_{BC}(c_C)) = g_{AB}(c_B)$  a partir de  $c_B$ , com  $I'$  tendo tamanho polinomial no tamanho de  $I$ . Ou seja,  $c_A$  é obtido a partir de  $c_C$  em tempo polinomial no tamanho de  $I$ . De novo pela definição de L-redução:

$$|c_A - Opt_A(I)| \leq \beta_1 |c_B - Opt_B(I')|, \text{ e}$$

$$|c_B - Opt_B(I')| \leq \beta_2 |c_C - Opt_C(I'')|.$$

Compondo as duas inequações, vem que:

$$|c_A - Opt_A(I)| \leq \beta_1 \beta_2 |c_C - Opt_C(I'')|. \square$$

Quando construíram a teoria das L-reduções [33], Papadimitriou e Yannakakis descrevem que estavam interessados em uma formalização que facilitasse a classificação dos problemas que não possuem PTAS a menos que  $P=NP$ . O próximo resultado explica o relacionamento das L-reduções com a classificação destes problemas que não possuem PTAS a menos que  $P=NP$ . Papadimitriou e Yannakakis provaram [33] que se  $A$  L-reduz para  $B$  e existe um PTAS para  $B$  então existe um PTAS para  $A$ . Decorre deste teorema, do fato que MAX3SAT é MAX SNP-completo [33] e de que Arora, Lund, Montwani e Szegedy [3] provaram que não existe PTAS para MAX3SAT a não ser que  $P=NP$ ; que nenhum problema completo ou difícil para MAX SNP, sobre a transformação L-redução, possui PTAS a não ser que  $P=NP$ . Nós apresentamos este resultado a seguir.

**Teorema 5.2** (Papadimitriou e Yannakakis [33]) *Se  $A$  L-reduz para  $B$  com constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$ , e existe um algoritmo para  $B$  com erro relativo  $\epsilon$ , então existe um algoritmo para  $A$  com erro  $\alpha\beta\epsilon$ .*

**Prova:** Sejam  $\alpha, \beta, f$  e  $g$  as constantes e os algoritmos correspondentes a L-redução de  $A$  para  $B$ . Seja  $I$  uma instância de  $A$  e  $I' = f(I)$  uma instância de  $B$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , seja  $c_B$  o custo da solução viável do algoritmo para  $I'$  e  $g_{AB}(c_B) = c_A$  o custo da solução viável para  $I$ , obtida em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , a partir da solução viável para  $I'$ .

Então temos,

$$\frac{|Opt_B(I') - c_B|}{|Opt_B(I')|} \leq \epsilon.$$

Como pela definição da L-redução de  $A$  para  $B$

$$Opt_B(I') \leq \alpha Opt_A(I) \text{ e } |Opt_A(I) - c_A| \leq \beta |Opt_B(I') - c_B|.$$

Nós temos que,

$$\frac{|Opt_A(I) - c_A|}{|\alpha\beta Opt_A(I)|} \leq \frac{|Opt_A(I) - c_A|}{|\beta Opt_B(I')|} \leq \frac{|Opt_B(I') - c_B|}{|Opt_B(I')|} \leq \epsilon.$$

Que conclui,

$$\frac{|Opt_A(I) - c_A|}{|Opt_A(I)|} \leq \alpha\beta\epsilon.$$

Como queríamos provar. □

Uma decorrência deste lema é que se  $A$  L-reduz para  $B$  e  $B$  possui um PTAS com erro  $\frac{\epsilon}{\alpha\beta}$  então  $A$  possui um PTAS com erro  $\epsilon$ .

Sabemos que  $\text{MAX3SAT}_3$  é MAX SNP-completo [33]. Nós vamos L-reduzir  $\text{MAX3SAT}_3$  para SPLITTING NUMBER MÍNIMO restrito a grafos cúbicos. Para isso, nós primeiro provamos o lema a seguir. Este lema mostra que a solução ótima e o número de cláusulas de uma instância de  $\text{MAX3SAT}_3$  são funções  $\Theta(n)$ .

**Lema 5.3** *Se  $I = (U, C)$  é uma instância de  $\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}$  com  $|U| = n$  e  $|C| = m$ , então  $\lceil \frac{n}{3} \rceil \leq m \leq 3n$  e  $\text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}}(I) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , em outras palavras,  $m = \Theta(n) = \text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}}(I)$ .*

**Prova:** Considere  $I = (U, C)$  uma instância de  $\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}$  com  $|U| = n$  e  $|C| = m$ .

Nós temos que  $m$  atinge seu valor mínimo com respeito a  $n$  se todas as cláusulas tem tamanho exatamente três e cada variável de  $U$  ocorre o número mínimo de vezes em  $C$  que é 1, e neste caso  $m = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Por outro lado,  $m$  é máximo se cada cláusula de  $C$  tem exatamente um literal e cada variável de  $U$  ocorre o número máximo de vezes em  $C$  que é 3, e neste caso  $m = 3n$ . Isto conclui a primeira parte da demonstração.

Dada uma instância  $I = (U, C)$  de  $\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}$ , nós vamos exibir uma atribuição de verdade para  $U$  onde  $\text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}}(I) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , isto é, para esta atribuição de verdade, o conjunto de cláusulas  $C$  possui no mínimo  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  cláusulas satisfeitas. Nós exibimos esta atribuição de verdade para  $U$  da seguinte maneira. Para cada variável  $u_i \in U, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , faça  $u_i = T$ , se e somente se o literal  $u_i$  ocorre mais vezes que o literal  $\bar{u}_i$  em  $C$ . Observe que esta atribuição de verdade pode ser dada em tempo polinomial no tamanho de  $I$ . Nós vamos mostrar que para cada grupo com três variáveis de  $U$  pelo menos uma cláusula adicional em  $C$  é satisfeita. Para ver isso, considere  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os literais de  $U$  que recebem valor de verdade  $T$ , e defina como *coincidência* de  $I$  o número de cláusulas de  $C$  que possuem pelo menos um literal em  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ou seja, o número de cláusulas que contenham pelo menos um literal verdadeiro. Sabendo que pela definição da atribuição da verdade para  $U$  cada um dos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ocorre pelo menos uma vez em alguma cláusula de  $C$  e que cada cláusula de  $C$  tem tamanho máximo três nós temos que no mínimo  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  cláusulas de  $C$  contém pelo menos um literal em  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Isto é, a coincidência de  $I$  é maior ou igual a  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Assim, esta atribuição de verdade para  $U$ , possui pelo menos  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  cláusulas satisfeitas. Isto é,  $\text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_{\frac{2}{3}}}(I) \geq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , o que resolve a.

segunda parte. Ou seja,  $m = \Theta(n) = Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I)$ . □

Passamos agora a nossa  $L$ -redução de  $\text{MAX3SAT}_3$  para  $\text{MINSN}\Delta 3$ .

## 5.2 SPLITTING NUMBER MÍNIMO e REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA são problemas em MAX SNP–difícil

### 5.2.1 MINSN $\Delta 3$ é MAX SNP–difícil

Para mostrar que  $\text{MAX3SAT}_3$   $L$ -reduz para  $\text{MINSN}\Delta 3$ , é necessário exibir um par de algoritmos  $f$  e  $g$  e duas constantes positivas  $\alpha$  e  $\beta$  que satisfazem: Dada uma instância  $I = (U, C)$  de  $\text{MAX3SAT}_3$  o algoritmo  $f$  em tempo polinomial no tamanho de  $I$  produz uma instância  $G = (V, E)$  a partir de  $I$  onde  $G$  é uma instância de  $\text{MINSN}\Delta 3$  e além disso  $Opt_{\text{MINSN}\Delta 3}(G) \leq \alpha Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I)$  e uma vez dada uma solução viável para  $G$  de custo  $c'$ , o algoritmo  $g$  em tempo polinomial no tamanho de  $I$  produz uma solução viável para  $I$  de custo  $c$  tal que  $|Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) - c| \leq \beta |Opt_{\text{MINSN}\Delta 3}(G) - c'|$ .

Nós vamos primeiro definir o algoritmo  $f$  que, dada uma instância  $I$  de  $\text{MAX3SAT}_3$  obtém, em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , uma instância  $G$  de  $\text{MINSN}\Delta 3$ . Depois nós mostramos um lema que relaciona os valores de ótimos para  $I$  e para  $G$ . Em seguida, passamos a prova da  $L$ -redução propriamente dita.

#### Construção de $f$ .

Considere a transformação do Capítulo 4 que obtém o grafo  $G$  a partir da instância  $I$  de  $3\text{SAT}$ . Nós fazemos uma pequena modificação nesta transformação de modo que ela ainda fique bem definida para uma instância  $I$  de  $3\text{SAT}_3$  e obtenha uma nova instância  $G$  de  $\text{SN}\Delta 3$ . Esta modificação consiste em substituir o grafo  $T_i$  na Figura 4.6, usado na construção de  $G^*$ , pelo grafo  $T_i^4$  definido pela Figura 5.1. É fácil entender esta modificação, porque o tamanho do subgrafo  $T_i$  de  $G^*$  é de ordem

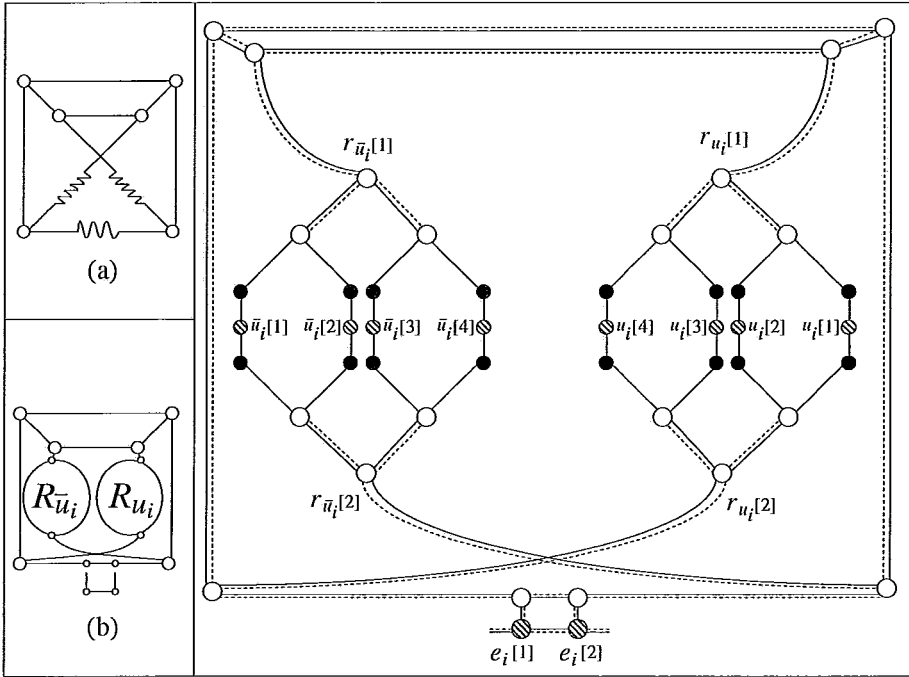


Figura 5.1: O grafo  $T_i^4$ .

$m$  devido a um literal em uma instância de 3SAT poder ocorrer no máximo  $3m$  vezes, enquanto que um literal em uma instância de  $\text{MAX3SAT}_3$  pode ocorrer no máximo três vezes o que compatibiliza a construção do novo grafo  $G$ . Nós consideramos até o final do Capítulo 5 toda a nomenclatura correspondente ao Capítulo 4 adaptada a esta modificação. Para a conveniência do leitor, tornamos a lembrar que a única coisa que muda em  $G$  é que no lugar de  $T_i$  está  $T_i^4$  na construção de  $G^*$ . Assim, consideramos  $f$  como sendo a transformação polinomial no tamanho de  $I$  do Capítulo 4, assim modificada, que uma vez dada uma instância  $I$  de  $\text{MAX3SAT}_3$  obtém, em tempo polinomial no tamanho de  $I$ , o grafo  $G$  como instância de  $\text{MINSN}\Delta_3$ . Isto conclui a descrição de  $f$ .

**Lema 5.4** *Se  $I = (U, C)$  é uma instância de  $\text{MAX3SAT}_3$  com  $|U| = n$  e  $|C| = m$  e  $f(I) = G$ , então  $\text{Opt}_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) = 4n + 5\text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_3}(I) + 6(m - \text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_3}(I))$ .*

**Prova:** Considere uma atribuição de verdade para  $I$  que obtém o valor

$Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I)$  como ótimo de  $I$ . Pelos Lemas 4.1 e 4.3 e pela definição de  $G$ , existe uma solução viável  $Z$  para  $G$ , isto é um conjunto de *splittings*  $Z$ , onde  $|Z| = 4n + 5Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) + 6(m - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I))$ , fazendo 4 *splittings* em cada  $T_i^{\bar{4}}$  (ou 4 *splittings* nas 4 folhas de uma das duas árvores binárias completas de  $R_{u_i}$  se  $u_i = T$ , ou 4 *splittings* nas 4 folhas de uma das duas árvores binárias completas de  $R_{\bar{u}_i}$  se  $u_i = F$ ). Fazendo ainda 5 *splittings* em cada  $S_j$  correspondente a cada cláusula satisfeita, e fazendo 6 *splittings* em cada  $S_j$  correspondente a cada cláusula não satisfeita. Como  $\text{MINSN}\Delta_3$  é um problema de minimização,  $Opt_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) \leq 4n + 5Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) + 6(m - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I))$ . Suponha que  $Z'$  é outra solução viável para  $G$  que obtém um grafo planar  $G'$  a partir de  $G$ , onde  $|Z'| \leq |Z|$ . Observe que pela definição de  $Z'$ , acontece que  $|Z'| \leq |Z| \leq 4n + 6m = 4n + m + 5m \leq 4n + 3n + 5m = 7n + 5m < 8n + 5m$  e porque  $3 \leq p$  temos que,  $8n + 5m \leq 2^p n + 5m$ . Daí pela Afirmação 4.5.2, existe um subgrafo de  $G'$  contrátil a  $B_c$ . Então para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , pela definição de  $T_i^{\bar{4}}$ , cada grafo  $T_i^{\bar{4}}$  requer quatro *splittings* ou nos vértices de  $R_{u_i}$  ou nos vértices de  $R_{\bar{u}_i}$  em  $Z'$ . Agora, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , seja  $L_i$  um entre os grafos  $R_{u_i}$  ou  $R_{\bar{u}_i}$  que contém pelo menos quatro *splittings* em  $Z'$ . Este conjunto de *splittings* nos vértices dos  $L_i$ 's define uma atribuição de verdade para  $\text{MAX3SAT}_3$ , onde digamos exatamente  $c$  cláusulas de  $C$  sejam satisfeitas. Considere  $Z''$  o subconjunto de  $Z'$  constituído pelos *splittings* de  $Z'$  nos vértices dos grafos  $L_i$ 's (nós lembramos que  $|Z''| \geq 4n$ ). Pelos Lemas 4.1 e 4.4, pela definição de  $G$  e de  $Z'$ , no mínimo  $5c + 6(m - c)$  *splittings* adicionais são requeridos em  $Z'$ . Mas, olhando para este número, vem que  $5c + 6(m - c) = 6m - c \geq 6m - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) = 6m + 5Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) - 6Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) = 5Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) + 6(m - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I))$ . O que conclui que  $|Z'| = |Z|$ , isto é,  $Z$  é de fato, uma solução ótima para  $G$ . □

**Teorema 5.5**  $\text{MINSN}\Delta_3$  é  $\text{MAX SNP}$ -difícil.



**Prova:** Nós vamos exibir uma L-redução de  $\text{MAX3SAT}_3$  para  $\text{MINSN}\Delta_3$ . Nós vamos considerar o correspondente algoritmo  $f$  descrito no início desta seção. A propriedade chave para esta demonstração é que dada uma instância  $I = (U, C)$  de  $\text{MAX3SAT}_3$  e uma atribuição de verdade para  $U$  onde exatamente  $c$  cláusulas de  $C$  são satisfeitas, é sempre possível obter em tempo polinomial no tamanho de  $I$  um conjunto  $Z''$  de *splittings*, uma solução viável para  $G = f(I)$ , de tamanho  $|Z''| = 4n + 5c + 6(m - c)$ , fazendo 4 *splittings* em cada  $T_i^4$ , 5 por cada cláusula satisfeita e 6 por cada cláusula não satisfeita. Em particular,  $|Z''| \leq 4n + 6m$ .

Começamos desta forma, por mostrar que dada  $I$  uma instância de  $\text{MAX3SAT}_3$  e  $f(I) = G$ , existe uma constante inteira positiva  $\alpha$  que atende a  $\text{Opt}_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) \leq \alpha \text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_3}(I)$ . De fato,  $\text{Opt}_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) \leq 4n + 6m \leq 4n + 6 \times 3n = 4n + 18n = 22n = 66 \frac{n}{3} \leq 66 \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq 66 \text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_3}(I)$ . Respectivamente, usando a existência da solução viável  $Z''$  e duas vezes o Lema 5.3. Isto permite escolher  $\alpha = 66$ .

Vamos agora a segunda e mais difícil parte desta L-redução. Vamos começar por construir  $g$ .

### Construção de $g$ .

Considere agora  $Z'$  uma solução viável para  $G$ , de custo  $z' = |Z'|$ , que obtém um grafo planar  $G'$  a partir de  $G$ . Nós vamos mostrar que existe um algoritmo  $h$  que roda em tempo polinomial no tamanho de  $I$  e que obtém uma outra solução viável  $Z$  para  $G$  de custo  $c' = |Z|$ , tão boa ou melhor que  $Z'$ , isto é  $|Z'| \geq |Z|$ . O que implicará em  $|\text{Opt}_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) - c'| \leq |\text{Opt}_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) - z'|$ . Mostramos a seguir, que a partir deste conjunto  $Z$  existe um algoritmo  $r$  que roda em tempo polinomial no tamanho de  $I$  e obtém a partir de  $Z$  uma atribuição de verdade para  $U$ , uma solução viável para  $I$ , com custo  $c$ . Nós definimos o algoritmo  $g$  como a composição dos algoritmos  $h$  com  $r$ , tal que  $g(Z') = r(h(Z'))$  é uma solução viável para  $I$  que mostraremos que satisfaz  $|\text{Opt}_{\text{MAX3SAT}_3}(I) - c| = |\text{Opt}_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) - c'|$ , completando a construção da L-redução.

## Construção de $h$

Com respeito a  $Z'$ , vamos estudar dois casos:

- $|Z'| \geq 2^p n + 6m$ .

Neste caso,  $|Z'| \geq 2^p n + 6m > 4n + 6m \geq |Z''| = 4n + 5c + 6(m - c)$ . Assim, nós fazemos  $Z = Z''$ , tal que  $Z''$  é a solução viável para  $G$  obtida por uma atribuição de verdade qualquer para  $U$  onde exatamente  $c$  cláusulas são satisfeitas.

- $|Z'| < 2^p n + 6m$ .

Neste caso, existe um subgrafo  $B_c$  de  $G'$ . Seja  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  e sejam  $R'_{u_i}$  e  $R'_{\bar{u}_i}$  respectivamente, os grafos resultantes a partir de  $R_{u_i}$  e de  $R_{\bar{u}_i}$  através de  $Z'$ .

Como  $G'$  é planar, então pela definição de  $T_i^4$  e pela existência de  $B_c$ , cada grafo  $T_i^4$  requer em  $Z'$ , no mínimo quatro *splittings* ou nos vértices de  $R_{u_i}$  ou nos vértices de  $R_{\bar{u}_i}$ . Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  seja  $L_i$  um dos grafos  $R_{u_i}$  ou  $R_{\bar{u}_i}$  que contém pelo menos quatro *splittings* em  $Z'$ . Este conjunto de *splittings* nos vértices dos  $L_i$ 's define uma atribuição de verdade para  $U$ , onde digamos exatamente  $c$  cláusulas de  $C$  sejam satisfeitas. Com esta atribuição, nós obtemos um conjunto de *splittings*  $Z''$ , onde  $Z''$  é uma solução viável para  $G$  e  $|Z''| = 4n + 5c + 6(m - c)$ . Mais ainda, pelos Lemas 4.1 e 4.4 acontece que  $|Z'| \geq |Z''|$ . De novo nós fazemos  $Z = Z''$ .

Isto completa a construção do algoritmo  $h$ .

## Construção de $r$

Observe que em cada caso,  $Z$  define uma atribuição de verdade para  $U$  de custo  $c$ , o número de cláusulas satisfeitas de  $C$  pela atribuição de verdade original, fazendo a variável  $u_i = T$  se e somente se existem pelo menos quatro *splittings* de  $Z$  em  $R_{u_i}$ . Observe que a atribuição de verdade original para  $U$  de custo  $c$  pode ser obtida a

partir da solução viável  $Z$  para  $G$  de custo  $c' = 4n + 5c + 6(m - c)$ , em tempo polinomial no tamanho de  $G$ , isto é, em tempo polinomial no tamanho de  $I$ .

Isto completa a construção de  $r$ .

E assim, nós definimos o algoritmo  $g = r(h(Z'))$  da L-redução. O que completa a construção de  $g$ .

Então temos que

$$\begin{aligned}
|Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) - c| &= |c - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I)| = \\
&= | - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) - 5c + 6c | = \\
&= |4n + 5Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I) + 6(m - Opt_{\text{MAX3SAT}_3}(I)) - 4n - 5c - 6(m - c)| = \\
&= |Opt_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) - c'| \leq |Opt_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) - z'|.
\end{aligned}$$

E assim, completamos a L-redução de  $\text{MAX3SAT}_3$  para  $\text{MINSN}\Delta_3$  escolhendo  $\beta = 1$ . □

### 5.2.2 MINRA $\Delta_3$ é MAX SNP-difícil

**Corolário 5.6** *MINRA $\Delta_3$  é MAX SNP-difícil.*

**Prova:** Considere um grafo cúbico  $G$ , uma instância de  $\text{MINSN}\Delta_3$ . Seja o algoritmo  $f$  a identidade. Pelo Corolário 4.6 nós sabemos que  $\sigma(G) = Opt_{\text{MINSN}\Delta_3}(G) = Opt_{\text{MINRA}\Delta_3}(G) = \kappa(G)$ . Considere agora uma solução viável para REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA de  $G$  com custo  $c'$ , isto é, um subconjunto de arestas de  $G$  cuja remoção produz um grafo planar. Novamente, pelo Corolário 4.6 uma solução viável para SPLITTING NUMBER MÍNIMO de  $G$ , isto é, um conjunto de *splittings* que obtém

um grafo planar a partir de  $G$  com tamanho  $c \leq c'$ , pode ser gerado em tempo polinomial no tamanho de  $G$  que é o algoritmo  $g$  para esta L-redução. Daí,

$$Opt_{\text{MINRA}\Delta 3}(G) = Opt_{\text{MINSN}\Delta 3}(G) = 1 \cdot Opt_{\text{MINSN}\Delta 3}(G).$$

Que permite escolher  $\alpha = 1$ .

Nós temos também que

$$|Opt_{\text{MINSN}}(I) - c| \leq |Opt_{\text{MINRA}}(I) - c'|.$$

Que permite escolher  $\beta = 1$ . Isto completa a L-redução de  $\text{MINSN}\Delta 3$  para  $\text{MINRA}\Delta 3$ . □

# Capítulo 6

## Conclusões

Concluimos esta tese, discutindo algumas possibilidades de trabalhos futuros bem como algumas decorrências e conjecturas a respeito do trabalho desenvolvido.

Foi apresentado uma demonstração para a igualdade  $\sigma(Q_4) = 4$ . Foi usado este resultado para mostrar que  $\sigma(Q_n) \geq 2^{n-2}$  com  $n \geq 4$  é um limite inferior para o *splitting number* do  $n$ -cubo.

Foi verificada a validade da Conjectura de Guy e Erdős para o *crossing number* do  $n$ -cubo  $\nu(Q_n) \leq \frac{5}{32}4^n - \lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor 2^{n-2}$  quando  $n = 6, 7$  e  $8$ . Foi deduzido o limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo  $\nu(Q_n) \leq \frac{165}{1024}4^n - \frac{2n^2-11n+34}{2}2^{n-2}$  com  $n \geq 7$ .

Foi demonstrado que SPLITTING NUMBER, REMOÇÃO DE ARESTAS e SUBGRAFO PLANAR são problemas de decisão NP-completos quando restritos a grafos cúbicos.

Finalmente, foi mostrado que SPLITTING NUMBER MÍNIMO e REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA são problemas de otimização MAX SNP-difíceis quando restritos a grafos cúbicos.

A respeito do *splitting number* do  $n$ -cubo, já começamos a estudar alguns resultados do professor Candido Xavier Ferreira de Mendonça Neto sobre limitantes superiores para o *splitting number* dos 5- e 6-cubos. Pretendemos generalizar estes limitantes superiores para um  $n$ -cubo qualquer. Pretendemos também, melhorar o quanto possível nosso limite inferior de  $2^{n-2}$  para o *splitting number* do  $n$ -cubo.

Sabemos que nosso limite superior para o *crossing number* do  $n$ -cubo não é ótimo. Porque já fizemos um desenho para o 9-cubo com número de cruzamentos estritamente inferior que a imagem de 9 pela nossa fórmula, porém estritamente superior que a imagem de 9 pela conjectura de Guy e Erdős. A idéia é tentar ainda outra técnica de desenhos que ainda reduza o quanto possível o número de cruzamentos.

Um fato interessante nos Capítulos 4 e 5 é que todos os resultados de complexidade restritos a grafos cúbicos são válidos para grafos livres de subdivisão de  $K_5$ , porque uma subdivisão de  $K_5$  admite cinco vértices de grau quatro. Isto, para nós foi um resultado surpreendente, pois só as subdivisões de  $K_{3,3}$  são suficientes para estabelecer a dificuldade do problema.

A respeito do Capítulo 4. Apesar de como observado por Garey e Johnson [17], tanto SKEWNESS quanto CROSSING NUMBER para um valor fixado de  $k$ , tornarem-se problemas de complexidade polinomial, o fato que o número de todos os possíveis *splittings* em um único vértice  $v$  de um grafo  $G$  ser de ordem  $\Omega(2^{|V(G)|})$  pode sugerir que mesmo para um valor fixado de  $k$ , decidir se um dado grafo  $G$  possui *splitting number* menor ou igual a  $k$  não seja um problema polinomial. Na versão original desta Tese, nós conjecturamos que este problema seria NP-completo. Durante o período entre a entrega para a banca e a defesa da tese, tomamos contato com o resultado de Robertson e Seymour [36] que se uma classe de grafos é *minor closed* (Para todo grafo  $G$  na classe se  $H$  é minor de  $G$ , então  $H$  pertence a classe), então o reconhecimento desta classe é polinomial. Estamos trabalhando dessa forma na formalização do resultado de que a classe dos grafos que possuem *splitting number* menor ou igual a um certo  $k$  fixado é *minor closed*, para dessa forma, mostrar que decidir se dado um grafo  $G$  é o  $\sigma(G) \leq k$ ? é um problema polinomial, o que contrariaria nossa conjectura original.

A respeito das  $L$ -reduções. Apesar de termos conseguido um resultado de não

aproximabilidade ótimo, com respeito ao grau máximo para os vértices de um grafo, para SPLITTING NUMBER MÍNIMO e para REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA não conseguimos um resultado similar para SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO. O problema encontrado foi que dado um grafo cúbico  $G$  com  $n$  vértices, o número de arestas em  $G$  é  $\frac{3n}{2}$ . Uma árvore geradora para  $G$  tem  $(n - 1)$  arestas e uma árvore é sempre planar, em particular uma árvore é periplanar. Porque uma árvore é periplanar, quando nós adicionamos uma aresta em uma árvore, nós fechamos um ciclo ainda obtendo um grafo planar. Portanto, o valor de ótimo para SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO em um grafo cúbico é de pelo menos  $n$ . Isso implica que o valor ótimo de SPLITTING NUMBER MÍNIMO e para REMOÇÃO DE ARESTAS MÍNIMA é no máximo  $\frac{n}{2}$ . Assim, em nossas tentativas de L-reduzir MINSN $\Delta_3$  ou MINRA $\Delta_3$  para MAXPS $\Delta_3$ , não foi possível encontrar um limitante inferior nem para  $Opt_{MINSN\Delta_3}(G)$  nem para  $Opt_{MINRA\Delta_3}(G)$ , correspondentes ao termo da direita, que fosse linearmente maior ou igual ao termo da esquerda  $Opt_{MAXPS\Delta_3}(G)$  para a primeira parte da L-redução. Acreditamos, por isso, que uma eventual transformação deste tipo, não deve funcionar para mostrar que SUBGRAFO PLANAR MÁXIMO é MAX SNP-difícil restrito a grafos cúbicos. Nossa transformação do Capítulo 4, igualmente, recai no mesmo problema da alta ordem do ótimo de MAXPS $\Delta_3$  em relação ao ótimo de MAX3SAT ou de MAX3SAT $\bar{3}$ . Neste ponto, ainda não temos idéia de um bom caminho para este resultado. Porém, ainda existe muita coisa já produzida sobre L-reduções na literatura que nós ainda não tivemos oportunidade de estudar, e assim, ainda podemos encontrar um bom caminho para pesquisar neste sentido. Estamos começando estes estudos.

Durante o período do doutorado, um aspecto ainda não apreciado da L-redução foi observado pelo professor Felipe Maia Galvão França e acreditamos que mereça ser mencionado. É uma idéia que trabalha na segunda parte da L-redução, a saber,  $|Opt_{\Pi}(I) - c| \leq \beta |Opt_{\Pi'}(I') - c'|$ . Observe que quanto mais próximo de zero é o

termo da direita, então mais próximo de zero é o termo da esquerda. Considere  $\Pi$  um problema que estamos interessados em otimizar e  $\Pi'$  um problema que sabemos otimizar com algum algoritmo que pode ser genético, neuronal e etc. Considere agora uma L-redução de  $\Pi$  para  $\Pi'$  com os correspondentes algoritmos e constantes dados por  $f, g, \alpha$  e  $\beta$ . Seja  $I$  uma instância para  $\Pi$  e  $I' = f(I)$  uma instância para  $\Pi'$ . Então a otimização para  $I'$ , acarreta em uma otimização também para  $I$ . A idéia original do professor Felipe era usar uma L-redução de MINTSP para MAXCONCORRÊNCIA a fim de otimizar MINTSP. Pretendemos continuar trabalhando nesta idéia e neste problema.



# Referências Bibliográficas

- [1] M. S. Anderson, R. B. Richter, and P. Rodney. The crossing number of  $C_6 \times C_6$ . *Congressus Numerantium*, 118:97–107, 1996.
- [2] M. S. Anderson, R. B. Richter, and P. Rodney. The crossing number of  $C_7 \times C_7$ . In *Proc. of the 28th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Boca Raton, Florida, USA, 1997*.
- [3] S. Arora, C. Lund, R. Montwani, and M. Szegedy. Proof verification and hardness of approximation problems. In *Proc. of the 33rd IEEE Symp. on Foundations of Computer Science*, pages 14–23, 1992.
- [4] R. J. Cimikowski. Graph planarization and skewness. *Congressus Numerantium*, 88:21–32, 1992.
- [5] S. A. Cook. Proof verification and hardness of approximation problems. In *Proc. of the 3rd. ACM Symposium on Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York*, pages 151–158, 1971.
- [6] G. Călinescu, C. G. Fernandes, U. Finkler, and H. Karloff. A better approximation algorithm for finding planar subgraphs. In *Proc. of the Annual Symposium on Discrete Algorithms'96, Association for Computing Machinery, SIAM*, pages 16–25, 1996.
- [7] A. M. Dean and R. B. Richter. The crossing number of  $C_4 \times C_4$ . *J. of Graph Theory*, 19:125–129, 1995.

- [8] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides IMPA, 1988.
- [9] P. Eades and C. F. X. Mendonça. Heuristics for planarization by vertex splitting. In *Proc. of the International Workshop on Graph Drawing, GD'93, Paris, France*, pages 83–85, 1993.
- [10] P. Eades and C. F. X. Mendonça. Vertex splitting and tension-free layout. In *Proc. of Annual Graph Drawing, GD'96, Lecture Notes in Computer Science*, volume 1027, pages 202–211, 1996.
- [11] R. B. Eggleton and R. P. Guy. The crossing number of the  $n$ -cube. *Amer. Math. Soc. Notices*, 17:757, 1970.
- [12] P. Erdős and R. P. Guy. Crossing number problems. *American Mathematical Monthly*, 80:52–58, 1973.
- [13] L. Faria and C. M. H. Figueiredo. On the Eggleton and Guy conjectured upper bound for the crossing number of the  $n$ -cube. *Math. Slovaca* (To appear).
- [14] L. Faria, C. M. H. Figueiredo, and C. F. X. Mendonça. Splitting number is NP-complete. In *Proc. of the 24rd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'98), Smolenice-Castle Slovak Republic, Lecture Notes in Computer Science* (To appear). Available at <http://www.cos.ufrj.br/relatorios/reltec97/es44397.ps.gz>, 1997.
- [15] L. Faria, C. M. H. Figueiredo, and C. F. X. Mendonça. The splitting number of the 4-cube. In *Proc. of the Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'98), Campinas-SP, Brazil, Lecture Notes in Computer Science*, volume 1380, 1998.
- [16] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, NY, USA, 1979.

- [17] M. R. Garey and D. S. Johnson. Crossing number is NP-complete. *J. Algebraic and Discrete Methods, SIAM*, 4:312–316, 1983.
- [18] R. P. Guy. Latest results on crossing numbers. In *Proc. Recent Trends in Graph theory, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, Berlin*, pages 143–156, 1971.
- [19] F. Harary, J. P. Hayes, and Horng-Jyh Wu. A survey of the theory of hypercube graphs. *Computers and Mathematics with Applications*, 15:277–289, 1988.
- [20] F. Harary, P. C. Kainen, and A. J. Schwenk. Toroidal graphs with arbitrarily high crossing number. *Nanta Math.*, 1:58–67, 1973.
- [21] N. Hartfield, B. Jackson, and G. Ringel. The splitting number of the complete graph. *Graphs and Combinatorics*, 1:311–329, 1985.
- [22] M. I. Heath. Hypercube multicomputers. In *Proc. of the 2-nd Conference on Hypercube Multicomputers, SIAM*, 1987.
- [23] J. E. Hopcroft and R.E. Tarjan. Efficient planarity testing. *J. ACM*, 21:549–568, 1974.
- [24] B. Jackson and G. Ringel. The splitting number of complete bipartite graphs. *Arch. Math.*, 42:178–184, 1984.
- [25] D. J. Kleitman. The crossing number of  $K_{5,n}$ . *J. Combinatorial Theory*, 9:315–323, 1971.
- [26] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15:271–283, 1930.

- [27] F. T. Leighton. New lower bound techniques for VLSI. In *Proc. of the 22nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society Long Beach CA*, volume 42, pages 1–12, 1981.
- [28] A. Liebers. *Methods for Planarizing Graphs*. A Survey and Annotated Bibliography, Available at <ftp://ftp.informatik.uni-konstanz.de/pub/preprints/1996/preprint-012.ps.Z>, 1996.
- [29] E. L. Lima. *Um curso de Análise*, volume 1. Projeto Euclides IMPA, 1981.
- [30] P. C. Liu and R. C. Geldmacher. On the deletion of nonplanar edges of a graph. *Congressus Numerantium*, 24:727–738, 1979.
- [31] T. Madej. Bounds for the crossing number of the  $n$ -cube. *J. of Graph Theory*, 15:81–97, 1991.
- [32] C. F. X. Mendonça. *A Layout System for Information System Diagrams*. Ph.D. thesis, University of Queensland, Australia, 1994.
- [33] C. Papadimitriou and M. Yannakakis. Optimization, approximation, and complexity classes. *J. of Computer and System Sciences*, 43:425–440, 1991.
- [34] C. Papadimitriou and M. Yannakakis. The traveling salesman problem with distances one and two. *Mathematics of Operations Research*, 18:1–11, 1993.
- [35] R. D. Ringeisen and L. W. Beineke. The crossing number of  $C_3 \times C_n$ . *J. of Combinatorial Theory*, 24:134–136, 1978.
- [36] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XIII. the disjoint paths problem. *J. of Combinatorial Theory Ser. B*, 63:65–110, 1995.
- [37] O. Sýkora and I. Vrto. On the crossing number of hypercubes and cube connected cycles. *BIT*, 33:232–237, 1993.

- [38] Zarankiewicz. On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fund. Math.*, 41:137–145, 1954.

# Apêndice

Artigos produzidos durante o período do curso de doutorado:

L. Faria, C. M. H. Figueiredo e C. F. X. Mendonça, The splitting number of the 4-cube. In *Proc. of the Latin American Symposium on Theoretical Informatics (LATIN'98)*, *Lecture Notes in Computer Science*, **1380**, 1998.

F. M. G. França e L. Faria, Optimal Mapping of Neighbourhood-Constrained Systems. In *Proc. of the International Workshop on Irregularly Structured Problems (IRREGULAR'95)*, *Lecture Notes in Computer Science*, **980**, 1995.

L. Faria e C. M. H. Figueiredo, On the Eggleton and Guy conjectured upper bound for the crossing number of the  $n$ -cube. *Math. Slovaca* (To appear).

L. Faria, C. M. H. Figueiredo e C. F. X. Mendonça, Splitting number is NP-Complete. In *Proc. of the 24rd International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'98)*, *Lecture Notes in Computer Science* (To appear). Available at <http://www.cos.ufrj.br/relatorios/reltec97/es44397.ps.gz>.