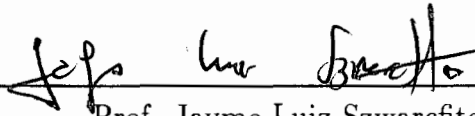


CLASSES DE GRAFOS CLIQUE-INVERSOS

Fábio Protti

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

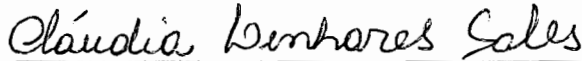
Aprovada por:



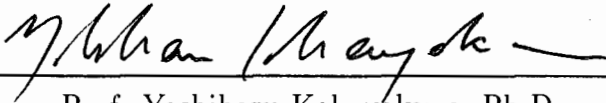
Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D  
(Presidente)



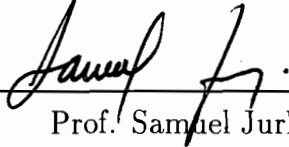
Prof<sup>a</sup>. Célia Picinin de Mello, D.Sc.



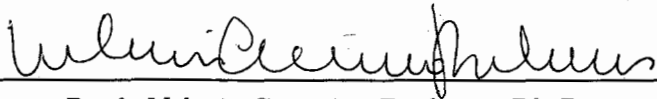
Prof<sup>a</sup>. Cláudia Linhares Sales, Docteur.



Prof. Yoshiharu Kohayakawa, Ph.D.



Prof. Samuel Jurkiewicz, Docteur.



Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

DEZEMBRO DE 1998

PROTTI, FÁBIO

Classes de Grafos Clique-inversos [Rio de Janeiro] 1998

XIII, 118 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1998)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

- 1 - Teoria dos grafos
- 2 - Cliques maximais
- 3 - Grafos clique
- 4 - Grafos clique-inversos
- 5 - Caracterizações de classes de grafos
- 6 - Algoritmos polinomiais
- 7 - Problemas NP e Co-NP completos

I. COPPE/UFRJ    II. Título (série)

*Para Alê*

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador e amigo Jayme, porque sem ele nada contido neste trabalho teria sido realizado.

Agradeço aos meus familiares, amigos e amigas, porque sem o seu carinho e estímulo nada na minha vida teria sido realizado.

Agradeço a Deus por ter colocado todas estas pessoas ao meu lado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

## Classes de Grafos Clique-inversos

Fábio Protti

Dezembro/1998

Orientador : Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Uma clique maximal é um subconjunto de vértices de um grafo completamente conectados entre si por arestas de tal modo que não existe mais nenhum outro vértice do grafo que esteja conectado a todos os vértices do subconjunto. Dado um grafo  $G$ , o grafo de interseção das cliques maximais de  $G$  é o *grafo clique*  $K(G)$  de  $G$ . Denominamos  $K$  como o *operador clique*. O objetivo desta tese é considerar o seguinte problema: fixada uma classe  $\mathcal{C}$  de grafos, que propriedades possui a classe constituída pela imagem inversa de  $\mathcal{C}$  pelo operador clique ? Esta nova classe é denominada *classe dos grafos clique-inversos dos grafos em  $\mathcal{C}$* . Entre os resultados desta tese, caracterizamos grafos clique-inversos de: grafos com tamanho máximo de clique três, grafos livres de triângulos, grafos bipartidos, grafos bipartidos cordais e árvores. O reconhecimento destas classes pode ser feito em tempo polinomial. Mostramos que, para  $k$  fixo, o problema de decidir se  $K(G)$  tem uma clique de tamanho maior ou igual a  $k$  pode ser resolvido em tempo polinomial. Tratamos também de classes de grafos clique-inversos onde o problema de reconhecer se um dado grafo  $G$  pertence a uma destas classes é NP-difícil. Provamos que os problemas de reconhecimento das classes a seguir são Co-NP-completos: grafos clique-inversos de grafos cordais, co-cordais, de partição, co-bipartidos, co-bipartidos-cordais, de intervalo, de co-intervalo, de comparabilidade, de co-comparabilidade, de permutação, livres de TA e bloco. Mostramos também que os problemas de decidir o número cromático e o número de estabilidade de  $K(G)$  são NP-completos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## Classes of Clique-inverse Graphs

Fábio Protti

December, 1998

Thesis Supervisor : Jayme Luiz Szwarcfiter

Department : Computing and Systems Engineering

A maximal clique is a subset of vertices of a graph in such a way that they are completely connected by edges and there is no other vertex of the graph connected to every vertex of the subset. Given a graph  $G$ , the intersection graph of the maximal cliques of  $G$  is the *clique graph*  $K(G)$  of  $G$ . We call  $K$  the *clique operator*. The purpose of this thesis is to consider the following problem: given a class  $\mathcal{C}$  of graphs, which properties has the class formed by the inverse image of  $\mathcal{C}$  via the clique operator ? This new class is called the *class of clique-inverse graphs of the graphs belonging to  $\mathcal{C}$* . Some of the results of this thesis are described in what follows. We characterize clique-inverse graphs of: graphs with maximum clique size three, triangle-free graphs, bipartite graphs, chordal bipartite graphs and trees. These classes can be recognized in polynomial time. We show that, for a fixed  $k$ , the problem of deciding whether  $K(G)$  has a clique of size at least  $k$  can be solved in polynomial time. We also consider classes of clique-inverse graphs such that the problem of recognizing whether a given graph  $G$  belongs to one of them is NP-hard. We prove that the recognition problem for the following classes is Co-NP-complete: clique-inverse graphs of chordal, co-chordal, split, co-bipartite, co-chordal-bipartite, interval, co-interval, comparability, co-comparability, permutation, AT-free, and block graphs. We also show that the problems of deciding the chromatic number and the stability number of  $K(G)$  are NP-complete.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Definições e notações básicas . . . . .	5
1.1.1	Grafos . . . . .	5
1.1.2	Classes especiais de grafos . . . . .	9
1.1.3	Classes de complexidade . . . . .	13
1.1.4	Grafos clique . . . . .	15
1.1.5	Grafos clique-inversos . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>20</b>
2.1	Grafos clique . . . . .	20
2.2	Classes de grafos clique . . . . .	21
2.3	Grafos clique-inversos de grafos completos . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Classes com reconhecimento polinomial</b>	<b>26</b>

3.1	Alguns resultados preliminares . . . . .	27
3.2	Grafos clique-inversos de grafos com tamanho máximo de clique três . . . . .	46
3.2.1	Variações da classe $K^{-1}(LIVRE DE K_4)$ . . . . .	48
3.3	Grafos clique-inversos de grafos livres de triângulos . . . . .	50
3.4	Grafos clique-inversos de grafos bipartidos . . . . .	52
3.5	Grafos clique-inversos de grafos bipartidos cordais . . . . .	56
3.6	Grafos clique-inversos de árvores . . . . .	60
3.7	Relações de continência . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Classes com reconhecimento (Co-)NP-completo</b>	<b>65</b>
4.1	Um resultado preliminar . . . . .	66
4.2	Grafos clique-inversos de grafos cordais . . . . .	68
4.3	Grafos clique-inversos de grafos co-cordais . . . . .	71
4.4	Grafos clique-inversos de grafos de partição . . . . .	73
4.5	Grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos . . . . .	74
4.6	Grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos-cordais . . . . .	76
4.7	Grafos clique-inversos de grafos de intervalo . . . . .	77
4.8	Grafos clique-inversos de grafos de co-intervalo . . . . .	79
4.9	Grafos clique-inversos de grafos de comparabilidade . . . . .	82



4.10 Grafos clique-inversos de grafos de co-comparabilidade . . . . .	86
4.11 Grafos clique-inversos de grafos de permutação . . . . .	92
4.12 Grafos clique-inversos de grafos livres de TA . . . . .	93
4.13 Grafos clique-inversos de grafos bloco . . . . .	94
4.14 Grafos clique-inversos de grafos $k$ -cromáticos . . . . .	95
4.15 Grafos clique-inversos de grafos com $\alpha(G) \geq k$ . . . . .	101
<b>5 Conclusões</b>	<b>105</b>

# Lista de Figuras

1.1	Exemplo de grafo bloco. . . . .	12
1.2	Grafo $G$ e seu grafo clique $K(G)$ . . . . .	17
2.1	Grafos $\overline{Q}_3$ (esquerda) e $\overline{Q}_5$ (direita). . . . .	25
2.2	Grafo $Q'_3$ . . . . .	25
3.1	4-leque (esquerda), 4-roda (centro) e $K_{1,3}$ (direita). . . . .	28
3.2	Regiões de interseção entre as cliques $M_1, M_2$ e $M_3$ . . . . .	29
3.3	Caso 1 do Lema 3.1. . . . .	29
3.4	Caso 2 do Lema 3.1. . . . .	30
3.5	Caso 3 do Lema 3.1. . . . .	30
3.6	Caso 4 do Lema 3.1. . . . .	31
3.7	Caso 5 do Lema 3.1. . . . .	31
3.8	Da esquerda para a direita: grafos $H_0, H_1, H_2, H_3$ . . . . .	33

3.9	Grafos minimais (em vértices) com 4 cliques maximais e um vértice universal . . . . .	35
3.10	Caso 1.1 do Teorema 3.5. . . . .	37
3.11	Caso 1.1.2 do Teorema 3.5. . . . .	37
3.12	Caso 1.1.3 do Teorema 3.5. . . . .	38
3.13	Caso 1.1.3.4 do Teorema 3.5. . . . .	38
3.14	Caso 1.2 do Teorema 3.5. . . . .	39
3.15	Caso 1.2.2 do Teorema 3.5. . . . .	40
3.16	Caso 1.2.4 do Teorema 3.5. . . . .	40
3.17	Caso 2.1 do Teorema 3.5. . . . .	41
3.18	Caso 2.2.1.1 do Teorema 3.5. . . . .	42
3.19	Caso 2.2.1.1.6 do Teorema 3.5. . . . .	43
3.20	Caso 2.2.1.2 do Teorema 3.5. . . . .	44
3.21	Subgrafos proibidos para $K^{-1}(\text{LIVRE DE TRIÂNGULOS})$ . . . . .	51
3.22	Subgrafos proibidos para $K^{-1}(\text{BIPARTIDO})$ . . . . .	52
3.23	Situação do Caso 2, para $p = 2$ . . . . .	53
3.24	O ciclo $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ admite uma divisão par. . . . .	57
3.25	Subgrafos proibidos para $K^{-1}(\text{ÁRVORE})$ . . . . .	62
3.26	Relações de continência entre classes. . . . .	64

4.1	Grafos $P_5$ (a), $\overline{P_5}$ (b), $C_5$ (c) e $\overline{C_5}$ (d). . . . .	67
4.2	O grafo clique da pirâmide é um grafo cordal. . . . .	69
4.3	Se $H$ não é clique-completo, $K(G)$ não é cordal. . . . .	71
4.4	Se $H$ não é clique-completo, $\overline{K(G)}$ não é cordal. . . . .	73
4.5	Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe $K^{-1}(INTERVALO)$ . . . . .	78
4.6	Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe $K^{-1}(CO - INTERVALO)$ . . . . .	81
4.7	(a) Se $H$ não é clique-completo, $\overline{K(G)}$ não é grafo de intervalo; (b) Grafo $\overline{C_6}$ (subgrafo induzido de $K(G)$ ). . . . .	82
4.8	Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe $K^{-1}(COMPARABILIDADE)$ . . . . .	84
4.9	Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe $K^{-1}(CO - COMPARABILIDADE)$ . . . . .	87
4.10	Se $H$ não é clique-completo (a), então $K(G)$ contém como subgrafo induzido o grafo $T$ (b). . . . .	90
4.11	$\overline{K(G)}$ é um grafo de comparabilidade. . . . .	91
4.12	Grafo $H$ da transformação de 3-SAT para 3-COLOR. . . . .	98
4.13	Grafo $G$ da transformação de 3-SAT para o problema “ $\chi(K(G)) \leq 3?$ ” . . . . .	100
4.14	Grafo $H$ da transformação de 3-SAT para CONJUNTO INDEPENDENTE. . . . .	103

4.15 Grafo $G$ da transformação de SAT para o problema “ $\alpha(K(G)) \geq k$ ?” . . . . .	104
5.1 Um grafo minimal sem vértices universais com cinco cliques maximais que se interceptam duas a duas. . . . .	108

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de operadores em grafos tem recebido uma atenção crescente nos últimos anos. De um modo geral, podemos considerar um operador como uma função  $op$  que, dado um grafo  $G$ , gera um novo grafo  $op(G)$  de acordo com algumas regras pré-estabelecidas. Por exemplo,  $op$  pode seguir regras do tipo: “dado  $G$ , remover os vértices de grau um em  $G$ ”, ou “dado  $G$ , construir o grafo clique  $K(G)$  de  $G$ ” (a definição de  $K(G)$  será fornecida adiante). Devemos observar que estas regras devem estar bem definidas, para determinar univocamente o grafo resultante a partir de qualquer grafo do domínio do operador.

Dada a importância que os operadores em grafos têm tanto em auxiliar desenvolvimentos teóricos como em modelar aplicações reais, um grande número deles surgiu dentro dos mais variados contextos na Teoria dos Grafos, e alguns adquiriram tal importância que estabeleceram linhas de pesquisa próprias e bem desenvolvidas, como por exemplo os grafos linha e os grafos clique. Recentemente, E. Prisner [25] lançou um livro que relaciona praticamente todos os operadores já mencionados na literatura, com suas respectivas propriedades. A aplicação iterativa de um operador a partir de um grafo inicial  $G$ , gerando a seqüência  $op(G), op(op(G)), \dots$ , levou à adoção do termo *dinâmica de grafos* (*graph dynamics*) para designar de modo geral o estudo

das propriedades que tais grafos “*op*-iterativos” apresentam.

Dentre os vários tipos de operadores, um merece especial atenção pelo modo natural com que aparece em vários problemas. Poderíamos designar os operadores deste tipo como *operadores de interseção*, dado que os grafos gerados por eles são grafos de interseção. O *grafo de interseção* de uma família  $F$  de conjuntos é o grafo obtido tomando um vértice representante para cada conjunto da família, e incluindo uma aresta entre dois destes vértices se e somente se os conjuntos correspondentes se interceptam. Observe que quando os conjuntos desta família  $F$  estão relacionados com um dado grafo  $G$ , o grafo de interseção obtido corresponde à aplicação de um operador bem definido sobre  $G$ . Como exemplos, podemos citar:

- se  $F$  é o conjunto das arestas de um grafo  $G$ , então o grafo de interseção de  $F$  é o grafo linha  $L(G)$  de  $G$  ( $L$  é chamado *operador linha*);
- se  $F$  é o conjunto das cliques maximais de um grafo  $G$ , então o grafo de interseção de  $F$  é o grafo clique  $K(G)$  de  $G$  ( $K$  é chamado *operador clique*).

O problema central desta tese, descrito adiante, baseia-se no operador clique. Uma clique maximal é um subconjunto de vértices completamente conectados entre si por arestas de tal modo que não existe mais nenhum outro vértice que esteja conectado a todos os vértices da clique (isto é, a clique não pode incorporar mais nenhum vértice do grafo). O número de cliques maximais de um grafo  $G$  pode ser exponencial em relação ao tamanho de  $G$ , o que mostra que obter o grafo clique de um dado grafo não é uma tarefa fácil do ponto de vista de complexidade de tempo. No entanto, muitas classes de grafos apresentam um número polinomial de cliques maximais, como os grafos cordais e os bipartidos. Para estas classes, pode-se construir  $K(G)$  em tempo polinomial e verificar suas propriedades.

Uma vertente de pesquisa que tem sido explorada no estudo dos grafos clique é justamente caracterizar os grafos clique de certas classes de grafos.

Por exemplo, grafos clique de grafos livres de triângulos [17], grafos cordais e grafos de caminho [38], grafos de intervalo e de indiferença [18] e grafos  $DV$  e  $RDV$  [27] já foram caracterizados. Para estas classes de grafos clique existem algoritmos polinomiais de reconhecimento.

O objetivo desta tese é estudar uma variação do problema citado no parágrafo anterior. Trata-se de fixar uma classe de grafos e analisar a imagem inversa pelo operador clique desta classe de grafos. Por exemplo, fixada a classe dos grafos bipartidos, queremos caracterizar a classe de todos os grafos cujos grafos clique são bipartidos. Os grafos desta nova classe serão designados por *grafos clique-inversos de grafos bipartidos*. Ou, em notação sucinta, designaremos o conjunto destes grafos por  $K^{-1}(BIPARTIDO)$ .

O primeiro (e, tanto quanto sabemos, único) trabalho sobre este tipo de problema trata dos grafos clique-inversos dos grafos completos (ou *grafos clique-completos* [22]). Neste trabalho, caracteriza-se os grafos clique-completos minimais sem vértices universais (uma vez que todo grafo com um vértice universal é trivialmente clique-completo). Também se mostra que o problema de reconhecer se um dado grafo é clique-completo é Co-NP-completo.

Algumas considerações devem ser feitas com relação ao problema central desta tese. Em primeiro lugar, ao fixar uma classe  $C$  de grafos com o objetivo de encontrar sua imagem inversa, pode se dar o caso de que  $C$  inclua grafos que não são grafos clique de nenhum grafo (existem grafos que não são imagem pelo operador clique de nenhum grafo). Portanto, ao tentarmos resolver este problema, estamos implicitamente tentando encontrar a imagem inversa dos grafos na intersecção de  $C$  com a classe dos grafos clique.

Outra consideração importante refere-se ao fato de o operador clique apresentar a seguinte propriedade: se  $H$  é um grafo clique, então existem infinitos grafos cujos grafos clique são isomorfos a  $H$ . Assim, se  $K(C_1) = C_2$  (isto é, se  $C_2$  é a classe dos grafos clique dos grafos na classe  $C_1$ ), em muitos casos existem também grafos que não pertencem a  $C_1$  cujos grafos clique pertencem



a  $C_2$ . Isto é, a inclusão  $C_1 \subseteq K^{-1}(C_2)$  muitas vezes é própria.

Passamos agora a descrever a nossa contribuição e como este trabalho está distribuído.

No presente capítulo, além da introdução e da localização dos tópicos da tese, apresentamos as definições básicas, as notações e os conceitos que utilizaremos ao longo do texto.

No Capítulo 2, fornecemos um breve histórico sobre os grafos clique e mostramos os principais resultados conhecidos sobre classes de grafos clique e sobre grafos clique-completos.

No Capítulo 3, caracterizamos algumas classes de grafos clique-inversos cujo reconhecimento pode ser feito em tempo polinomial. Inicialmente introduzimos duas classes: grafos cujos grafos clique contém  $K_3$  ou  $K_4$ . As caracterizações fornecidas para estas classes são o resultado principal deste capítulo (Teoremas 3.2 e 3.6). A seguir, como corolários, fornecemos caracterizações para grafos clique-inversos de: grafos com tamanho máximo de clique três, grafos livres de triângulos, grafos bipartidos, grafos bipartidos cordais e árvores. Variações da classe dos grafos clique-inversos de grafos com tamanho máximo de clique três também são abordadas. Por exemplo, discutimos brevemente a seguinte generalização: dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , qual a complexidade da questão “ $\omega(K(G)) \leq k$ ?” Analisamos também o reconhecimento das classes  $K^{-1}(k - \text{REGULAR})$  (grafos clique-inversos de grafos  $k$ -regulares, para  $k$  fixo) e  $K^{-1}(\text{CIRCUNFERÊNCIA } 3)$  (grafos clique-inversos de grafos com circunferência três).

No Capítulo 4, tratamos de classes de grafos clique-inversos onde o problema de reconhecer se um dado grafo  $G$  pertence a uma destas classes é NP-completo ou Co-NP-completo. Provamos que os problemas de reconhecimento das classes a seguir são Co-NP-completos: grafos clique-inversos de grafos cordais, co-cordais, de partição, co-bipartidos, co-bipartidos-cordais, de intervalo, de co-intervalo, de comparabilidade, de co-comparabilidade, de

permutação, livres de TA e bloco. Para estas classes, as provas de pertinência a Co-NP baseiam-se no Lema 4.1. Mostramos também que os seguintes problemas são NP-completos:

- Dados  $G$  grafo conexo e  $k$  número inteiro (menor ou igual ao número de cliques maximais de  $G$ ),  $\chi(K(G)) \leq k$  ?
- Dados  $G$  um grafo conexo e  $k$  um número inteiro tal que  $1 \leq k \leq \frac{1}{2}|VG|$ ,  $\alpha(K(G)) \geq k$  ?

No Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões, onde resumimos os resultados da tese e indicamos linhas futuras de investigação.

Os trabalhos produzidos durante o período do curso de doutorado foram frutos de qualificações com professores da COPPE-Sistemas. Veja [31, 32, 30, 33, 29, 28].

## 1.1 Definições e notações básicas

Vamos agora estabelecer as definições e notações que serão utilizadas ao longo da tese.

### 1.1.1 Grafos

Um *grafo*  $G$  consiste num conjunto finito não vazio de *vértices* e num conjunto de pares não ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*. Denotamos os conjuntos de vértices e arestas de  $G$  por  $VG$  e  $EG$ , respectivamente.

Uma variação da definição acima corresponde aos *grafos direcionados* ou *digrafos* nos quais o conjunto  $EG$  é formado por pares ordenados.

Um grafo  $G$  é dito *trivial* se  $|VG| = 1$ .

Um vértice  $v$  é *adjacente* a outro vértice  $w$  em  $G$  se  $\{v, w\} \in EG$ . Neste caso, dizemos também que  $v$  e  $w$  são *vizinhos* ou estão *ligados* em  $G$ , e que a aresta  $e = \{v, w\}$  é *incidente* a  $v$  e  $w$ , ou que tem *extremos*  $v$  e  $w$ . Denotamos por  $N(v)$  o conjunto de vértices ligados a  $v$  em  $G$ , e por  $N[v]$  o conjunto  $N(v) \cup \{v\}$ ; tais conjuntos são chamados *vizinhança aberta* e *vizinhança fechada* de  $v$ , respectivamente. Um vértice é dito *universal* quando  $N(v) = VG - \{v\}$ . Um vértice  $w$  é *dominado por* um vértice  $v$  se  $N[w] \subseteq N[v]$ ; neste caso, também dizemos que  $v$  *domina*  $w$ . Dois vértices  $v$  e  $w$  são *gêmeos* quando  $N[v] = N[w]$ .

O *grau* de um vértice  $v$  é a cardinalidade do conjunto  $N(v)$ .

O *tamanho* de um grafo  $G$  é igual a  $|VG| + |EG|$ .

O *complemento* de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo que tem o mesmo conjunto de vértices de  $G$  e tal que dois vértices são vizinhos em  $\overline{G}$  se e somente se não são vizinhos em  $G$ .

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $VH \subseteq VG$  e  $EH \subseteq EG$ . Dado um conjunto de vértices  $X \subseteq VG$ ,  $X \neq \emptyset$ , o *subgrafo induzido* por  $X$ , denotado por  $G[X]$ , é o subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $VH = X$  e  $EH$  é o conjunto das arestas que têm ambos os extremos em  $X$ .

Dois grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* quando existe uma bijeção entre  $VG$  e  $VH$  que preserva adjacência. Nesse caso, escrevemos  $G = H$ .

Um *caminho* num grafo  $G$  é uma sequência  $P = v_1 v_2 \dots v_k$  onde os  $v_i$ 's são vértices (dois a dois distintos), e  $\{v_i, v_{i+1}\} \in EG$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ . Uma *corda* em  $P$  é uma aresta que liga dois vértices não consecutivos de  $P$ . Um *caminho induzido* é um caminho sem cordas. Denotamos por  $P_k$  o caminho induzido por  $k$  vértices.

Um *circuito* num grafo  $G$  é uma sequência  $C = v_1 v_2 \dots v_k$  de vértices

(não necessariamente distintos), onde  $v_1 = v_k$  e  $\{v_i, v_{i+1}\} \in EG$ ,  $1 \leq i \leq k - 1$ . O circuito é dito *par* se  $k - 1$  é par, caso contrário o circuito é dito *ímpar*.

Um *ciclo* num grafo  $G$  é uma sequência  $C = v_1v_2 \dots v_kv_{k+1}$  onde  $v_1v_2 \dots v_k$  é um caminho,  $v_1 = v_{k+1}$  e  $k \geq 3$ . O número  $k$  é o *comprimento* de  $C$ . O ciclo é dito *par* se  $k$  é par, caso contrário o ciclo é dito *ímpar*. Uma *corda* em  $C$  é qualquer corda do caminho  $v_1v_2 \dots v_k$ . A corda é dita *ímpar* se a distância em  $C$  entre os vértices que ela une é ímpar. Um ciclo é um *ciclo induzido* se não possui cordas. Denotamos por  $C_k$  o ciclo induzido por  $k$  vértices. O grafo  $C_3$  é também chamado *triângulo*. Dizemos que um grafo  $G$  possui *circunferência*  $k$  se o comprimento máximo entre os ciclos de  $G$  é igual a  $k$ .

Pode-se mostrar facilmente que um grafo  $G$  contém um circuito ímpar se e somente  $G$  contém um ciclo ímpar.

Uma *corda triangular* num ciclo  $C = v_1v_2 \dots v_kv_{k+1}$  é uma aresta que liga dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  do ciclo tais que  $j = i + 2$ ,  $1 \leq i \leq k - 2$ .

Um conjunto  $S$  é *maximal (minimal)* em relação a uma determinada propriedade  $P$  se  $S$  satisfaz  $P$ , e todo conjunto  $S'$  que contém propriamente  $S$  (que está contido propriamente em  $S$ ) não satisfaz  $P$ .

Um grafo  $G$  é *conexo* se para todo par de vértices distintos  $v$  e  $w$  de  $G$  existe um caminho de  $v$  a  $w$ . Caso contrário,  $G$  é dito *desconexo*. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo maximal conexo de  $G$ . Se  $H_1$  e  $H_2$  são componentes conexas distintas de um grafo desconexo  $G$ , dizemos que os grafos formados por  $H_1$  e  $H_2$  são *isolados* um do outro. Em princípio, todos os grafos desta tese são conexos, a menos de menção explícita em contrário quando for o caso.

Uma *árvore geradora* de um grafo  $G$  é um subgrafo sem ciclos de  $G$  onde existe exatamente um caminho entre cada par de vértices em  $VG$ .

Um grafo  $G$  é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de  $G$  são adjacentes. Denotamos por  $K_n$  o grafo completo com  $n$  vértices. Denotamos por  $K_n - e$  o grafo completo de  $n$  vértices do qual uma aresta foi retirada.

Dado um grafo  $G$ , um *corte* de vértices de  $G$  é um subconjunto minimal de vértices  $S \subseteq VG$  cuja remoção de  $G$  o desconecta ou o transforma no grafo trivial. Isto é,  $G - S$  é desconexo ou trivial, e para todo subconjunto próprio  $S' \subseteq S$ ,  $G - S'$  é conexo e não trivial.

Dados um grafo  $G$  e um vértice  $v$  de  $G$ , dizemos que  $v$  é uma *articulação* se  $G - v$  é um grafo desconexo. Um grafo é *biconexo em vértices* se e somente se não possuir articulações. Denominam-se *componentes biconexas do grafo*  $G$  aos subgrafos maximais de  $G$  que sejam biconexos em vértices ou isomorfos a  $K_2$ . Cada componente biconexo é também chamado *bloco* do grafo. É fácil ver que se  $G$  é um grafo biconexo em vértices, então  $G$  possui um único bloco, que coincide com o próprio  $G$ . Além disso, dado um grafo  $G$  qualquer, cada aresta de  $G$  pertence a exatamente um bloco, e um vértice  $v$  de  $G$  é articulação se e somente se  $v$  pertence a mais de um bloco do grafo.

Um conjunto de vértices  $M$  de um grafo  $G$  é uma *clique* ou *conjunto completo* se  $G[M]$  é um grafo completo. A clique  $M$  é *maximal* se para qualquer clique  $M'$  tal que  $M \subseteq M'$ , temos  $M = M'$ . Duas cliques  $M$  e  $M'$  são *disjuntas* se  $M \cap M' = \emptyset$ . Se  $M \cap M' \neq \emptyset$ , diremos que  $M$  *intercepta*  $M'$ , e vice-versa. Se uma aresta  $e = \{v, w\}$  é tal que  $v$  e  $w$  pertencem a uma clique  $M$ , dizemos que  $e$  *está contida* em  $M$ . Uma aresta  $e$  é chamada *multiclique* se  $e$  está contida em pelo menos duas cliques maximais distintas. Um vértice  $v$  é chamado *simplicial* se  $v$  pertence a apenas uma clique maximal de  $G$ , ou, equivalentemente, se  $N[v]$  é uma clique. Um parâmetro bastante estudado de um grafo  $G$  é o seu *tamanho de clique máxima*  $\omega(G)$ , definido como a cardinalidade de uma clique de tamanho máximo em  $G$ .

Um conjunto de vértices  $I$  de um grafo  $G$  é uma *conjunto independente* se  $G[I]$  é um grafo sem arestas. O conjunto independente  $I$  é *maximal* se para qualquer conjunto independente  $I'$  tal que  $I \subseteq I'$ , temos  $I = I'$ . Outro

parâmetro bastante estudado de um grafo  $G$  é o seu *número de estabilidade*  $\alpha(G)$ , definido como a cardinalidade de um conjunto independente de tamanho máximo em  $G$ .

Uma *coloração* de um grafo  $G$  é uma partição de  $VG$  onde cada classe da partição é um conjunto independente. Uma  $k$ -*coloração* é uma partição de  $VG$  em  $k$  classes. Se  $G$  admite uma  $k$ -coloração, dizemos que  $G$  é  $k$ -*cromático*. O *número cromático* de  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , é o menor  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração de  $G$ .

### 1.1.2 Classes especiais de grafos

O *grafo de interseção* de uma família  $F$  de conjuntos é o grafo obtido tomando um vértice representante para cada conjunto da família, e incluindo uma aresta entre dois destes vértices se e somente se os conjuntos correspondentes se interceptam. Vale a pena observar que qualquer grafo é um grafo de interseção.

Um grafo  $G$  é uma *árvore* se  $G$  é conexo e não possui ciclos. Uma *árvore enraizada* é uma árvore na qual foi escolhido um vértice como *especial*. Este vértice é denominado *raiz* da árvore. Um subgrafo conexo de uma árvore é dito *subárvore*.

Um grafo  $G$  é  $r$ -regular se todos os vértices de  $G$  têm grau  $r$ , e é *livre de triângulos* se  $G$  não contém  $C_3$  como subgrafo.

Um grafo  $G = (V, E)$  é *bipartido* se  $V$  pode ser particionado em dois conjuntos  $X$  e  $Y$  ( $X \cup Y = V$  e  $X \cap Y = \emptyset$ ), tais que toda aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . Em particular,  $G$  é *bipartido completo* se todo vértice de  $X$  é adjacente a todo vértice de  $Y$ . Denotamos por  $K_{m,n}$  o grafo bipartido completo onde  $|X| = m$  e  $|Y| = n$  ( $m, n \geq 1$ ).

Pode-se mostrar que  $G$  é bipartido se e somente se  $G$  não contém um

circuito (ou ciclo) ímpar. Para uma demonstração deste fato, veja [36].

Um grafo  $G$  é *co-bipartido* se  $\overline{G}$  é um grafo bipartido.

Um grafo  $G$  é *cordal* se  $G$  não contém  $C_k$  como subgrafo induzido, para  $k \geq 4$ . Pode-se mostrar facilmente que todo ciclo em um grafo cordal possui pelo menos uma corda triangular. Um grafo  $G$  é *fortemente cordal* se é cordal e todo ciclo de comprimento par em  $G$  de tamanho mínimo seis tem uma corda *ímpar*. Um grafo  $G$  é chamado *ptolomaico* se é (fortemente) cordal e não contém um vértice  $w$  e um caminho induzido com quatro vértices  $t, u, v, x$  tal que  $w$  é adjacente a  $t, u, v$  e  $x$ .

Um grafo  $G$  é *co-cordal* se  $\overline{G}$  é cordal, e é *de partição* ou *split* quando tanto  $G$  como  $\overline{G}$  são cordais. Equivalentemente,  $G$  é de partição quando é conexo e seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto independente. Para informações detalhadas sobre grafos cordais e grafos de partição, veja por exemplo [10].

Um *grafo estrela* é um grafo com um vértice universal.

Um grafo  $G$  é *bipartido cordal* se  $G$  é bipartido e não contém  $C_k$  como subgrafo induzido para  $k \geq 6$ . Portanto,  $G$  pode admitir apenas  $C_4$  como subgrafo induzido. Uma boa referência sobre grafos bipartidos cordais é [14].

Um grafo  $G$  é *co-bipartido-cordal* se  $\overline{G}$  é bipartido cordal.

Um grafo  $G$  é um *grafo de comparabilidade* se a cada aresta  $\{v, w\}$  de  $G$  podemos associar um par ordenado  $(v, w)$  ou  $(w, v)$  de modo que se  $(x, y)$  e  $(y, z)$  são pares ordenados, então  $e = \{x, z\} \in EG$  e o par ordenado associado a  $e$  é  $(x, z)$ . Um famoso resultado de Gallai [7] estabelece que um grafo é de comparabilidade se e somente se ele não admite como subgrafo induzido nenhum dos grafos pertencentes a uma certa família de grafos, denominada *família de Gallai*.

Um grafo  $G$  é um *grafo de co-comparabilidade* se  $\overline{G}$  é um grafo de com-

parabilidade, e é um *grafo de permutação* se tanto  $G$  como  $\overline{G}$  são grafos de comparabilidade. Em [10], grafos de comparabilidade, co-comparabilidade e permutação são tratados em extensão.

Um grafo  $G$  é um *grafo de intervalo* se seus vértices podem ser associados a intervalos da reta de modo que dois intervalos se interceptam se e somente se os vértices correspondentes são adjacentes. Em outras palavras, um grafo de intervalo é o grafo de interseção de intervalos de um conjunto linearmente ordenado. Quando todos os intervalos têm o mesmo comprimento, dizemos que o grafo é um *grafo de indiferença*. Pode-se mostrar que  $G$  é um grafo de intervalo se e somente se  $G$  é cordal e de co-comparabilidade (veja por exemplo [10]).

Um grafo  $G$  é um *grafo de co-intervalo* se  $\overline{G}$  é um grafo de intervalo.

Passamos agora a definir os *grafos AT-free* ou *livres de triplas asteroidais* (*livres de TA*). Para isto, necessitamos do seguinte conceito: dado um grafo  $H$ , um conjunto independente formado por três vértices distintos  $u, v$  e  $w$  de  $VH$  é uma *tripla asteroidal* (TA) se entre cada par de vértices do conjunto existe um caminho que evita a vizinhança do vértice remanescente. Um grafo  $G$  que não contenha triplas asteroidais é pois chamado *grafo livre de TA*. Todo grafo de co-comparabilidade é livre de TA [11], e um grafo  $G$  é de intervalo se e somente se  $G$  é cordal e livre de TA [21].

Um grafo  $G$  é dito  *$i$ -seccionado* se dadas duas cliques maximais distintas quaisquer  $M_1$  e  $M_2$  de  $G$ , tem-se  $|M_1 \cap M_2| \leq i$ . É fácil ver que os grafos 1-seccionados são exatamente os grafos que não possuem arestas multiclique.

Um grafo é dito *dominó* quando cada um de seus vértices pertence no máximo a duas cliques maximais. Uma boa referência sobre os dominós é [20].

Um grafo é dito *grafo bloco* quando cada um de seus componentes biconexos for uma clique. Veja a Figura 1.1, onde as articulações estão assi-



naladas com “\*”).

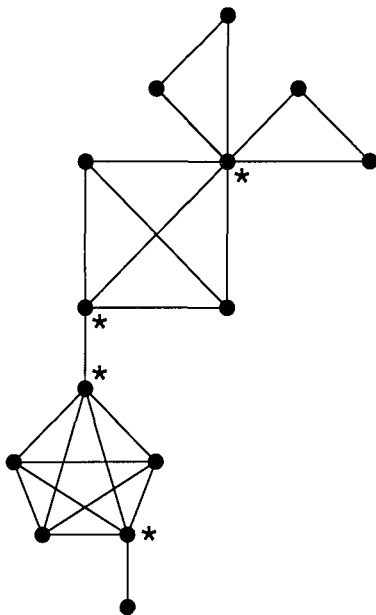


Figura 1.1: Exemplo de grafo bloco.

O teorema a seguir será de utilidade em capítulos posteriores. É um resultado simples que apresentamos sem demonstração.

**Teorema 1.1** (Harary e Prins [15]) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $G$  é um grafo bloco;
- (ii)  $G$  não contém como subgrafo induzido  $C_k$  ( $k > 3$ ) e  $K_4 - e$ ;
- (iii)  $G$  é cordal sem arestas multiclique. □

Um *grafo de caminho* é o grafo de interseção de caminhos em uma árvore. Quando a árvore não é direcionada, dizemos que se trata de um grafo de caminho *não direcionado*, que denotamos por grafo  $UV$  (*undirected vertex path graph*). Os grafos de interseção de caminhos em árvores direcionadas ou direcionadas enraizadas são chamados respectivamente grafos  $DV$  (*directed vertex path graph*) e  $RDV$  (*rooted directed vertex path graph*).

Dizemos que uma família de conjuntos possui a *propriedade de Helly* quando qualquer coleção de conjuntos  $C_i$  que se interceptem dois a dois possui interseção não vazia, i.e.  $\cap C_i \neq \emptyset$ . Um grafo cujas cliques maximais satisfazem a propriedade de Helly é dito *clique-Helly*. Um grafo  $G$  cujos discos satisfazem a propriedade de Helly é dito *disk-Helly*, onde um *disco* de raio  $r$  em torno de um vértice  $v$  é o conjunto de vértices de  $G$  cujas distâncias a  $v$  valem no máximo  $r$  (*distância* entre dois vértices é o comprimento do menor caminho de um a outro).

Muitas vezes, por simplicidade e clareza, utilizaremos letras maiúsculas para designar uma classe de grafos: por *INTERVALO*, por exemplo, entende-se o conjunto de todos os grafos de intervalo.

### 1.1.3 Classes de complexidade

Um problema algorítmico  $\pi(D, Q)$  consiste de um conjunto  $D$  de todas as possíveis entradas para o problema, chamado *conjunto de instâncias*, e de uma *questão*  $Q$  sobre estas instâncias. Resolver um problema algorítmico é desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta à questão do problema.

Um problema é dito de *decisão* quando a questão exige uma resposta do tipo SIM ou NÃO. Como exemplo, seja  $\pi$  o seguinte problema: “Dado um grafo  $G$ , reconhecer se  $G$  é um grafo cordal.” O conjunto de instâncias de  $\pi$  é obviamente o conjunto de todos os grafos. O problema  $\pi$  pode ser assim esquematizado:

Instância genérica de  $\pi$ : um grafo  $G$ .

Questão:  $G$  é cordal?

Fica evidente que o problema  $\pi$  acima é um problema de decisão, em particular *problema de reconhecimento*. Resolver  $\pi$  significa elaborar um algoritmo de reconhecimento de grafos cordais.

Dizemos que um algoritmo é *polinomial* quando sua complexidade de tempo (medida do número de passos que o algoritmo efetua) é uma função polinomial no tamanho da sua entrada. Os problemas de decisão para os quais existem algoritmos polinomiais constituem a classe P. Tais problemas são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é *não-determinístico polinomial* quando qualquer instância que produz resposta SIM possui um *certificado* sucinto, isto é, uma comprovação de que a resposta é de fato SIM verificável em tempo polinomial no tamanho da instância. Esta classe de problemas de decisão é a classe NP.

A classe Co-NP é formada pelos problemas que possuem um certificado sucinto para as instâncias que produzem NÃO.

Sejam  $\pi_1(D_1, Q_1)$  e  $\pi_2(D_2, Q_2)$  dois problemas de decisão. Uma *transformação* ou *redução polinomial* de  $\pi_1$  em  $\pi_2$  é uma função  $f : D_1 \rightarrow D_2$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- $f$  pode ser computada em tempo polinomial;
- para toda instância  $I \in D_1$ , tem-se que  $I$  produz resposta SIM para  $\pi_1$  se e somente se  $f(I)$  produz resposta SIM para  $\pi_2$ .

Um problema de decisão  $\pi$  pertence à classe *NP-completo* quando as seguintes condições são satisfeitas:

- $\pi \in \text{NP}$ ;
- para todo problema  $\pi' \in \text{NP}$  existe uma transformação polinomial de  $\pi'$  em  $\pi$ .

Um problema pertencente à classe NP-completo é chamado *NP-completo*. Para provar que um certo problema  $\pi$  é NP-completo, basta mostrar que

$\pi \in \text{NP}$  e que existe uma transformação de um problema NP-completo  $\pi'$  em  $\pi$ .

Analogamente, prova-se que um problema de decisão  $\pi$  pertence à classe *Co-NP-completo* (e, neste caso,  $\pi$  é dito *Co-NP-completo*) quando  $\pi \in \text{Co-NP}$  e existe um problema  $\pi'$  (Co-)NP-completo tal que:

- se  $\pi'$  é NP-completo, existe uma função  $f$  computável em tempo polinomial tal que para toda instância  $I'$  de  $\pi'$ , tem-se que  $I'$  produz SIM para  $\pi'$  se e somente se  $I = f(I')$  produz NÃO para  $\pi$ ;
- se  $\pi'$  é Co-NP-completo, existe uma função  $f$  computável em tempo polinomial tal que para toda instância  $I'$  de  $\pi'$ , tem-se que  $I'$  produz NÃO para  $\pi'$  se e somente se  $I = f(I')$  produz NÃO para  $\pi$ .

Como fonte de referências para esta seção, indicamos [8].

### 1.1.4 Grafos clique

Seja  $G$  um grafo. O *grafo clique de  $G$* , denotado por  $K(G)$ , é o grafo cujos vértices correspondem às cliques maximais de  $G$ , e dois vértices de  $K(G)$  são adjacentes se e somente se as correspondentes cliques maximais de  $G$  se interceptam. O grafo clique de  $G$ , portanto, é o grafo de intersecção das cliques maximais de  $G$ .

Se  $H$  é o grafo clique de  $G$ , escrevemos  $H = K(G)$ .

Pode-se também denotar um grafo  $G$  por  $K^0(G)$ , e denotar por  $K^i(G)$  o grafo  $K(K^{i-1}(G))$ ,  $i \geq 1$ . Referimo-nos a  $K$  como o *operador clique*.

Observe que, dado um grafo  $G$ ,  $K(G)$  existe e é único a menos de isomorfismo. No entanto, dado um grafo  $H$ , pode não existir nenhum grafo  $G$  tal

que  $H$  seja grafo clique de  $G$ . Caso exista um grafo  $G$  tal que  $H = K(G)$ , dizemos simplesmente que  $H$  é um *grafo clique*.

Outra observação interessante é que podem existir dois grafos não isomorfos  $G_1$  e  $G_2$  tais que  $K(G_1) = K(G_2)$ .

Um grafo  $G$  é (*clique*) *convergente* quando existe um inteiro  $n$  tal que  $K^n(G)$  é o grafo trivial. Neste caso, dizemos que  $G$  é *n-convergente*.

Muitas vezes, por simplicidade, nos referimos a estruturas de  $K(G)$  através das cliques maximais de  $G$ , já que existe uma correspondência biunívoca entre vértices de  $K(G)$  e cliques maximais de  $G$ . Por exemplo, sejam  $M_1, M_2, \dots, M_k$  cliques maximais de  $G$ . Podemos então nos referir ao vértice  $M_i$  de  $K(G)$ , ou ao *caminho*  $M_1M_2 \dots M_k$  em  $K(G)$ , etc.

Seja  $C$  um conjunto de grafos. Denotamos por  $K(C)$  o conjunto dos grafos  $H$  para os quais existe ao menos um grafo  $G \in C$  tal que  $H = K(G)$ . Por exemplo, seja  $C$  o conjunto de todos os grafos cordais. Então,  $K(C)$  é o conjunto dos *grafos clique de grafos cordais*. É usual escrever  $K(\text{CORDAL})$  para denotar a classe dos grafos clique dos grafos cordais,  $K(\text{INTERVALO})$  para denotar a classe dos grafos clique dos grafos de intervalo etc.

Se  $C_1$  e  $C_2$  são conjuntos de grafos tais que  $C_1 \subseteq C_2$ , então é claro que  $K(C_1) \subseteq K(C_2)$ .

Sejam  $C, F$  classes de grafos. Quando escrevemos  $K(C) = F$ , estamos dizendo que:

- dado um grafo  $G$  em  $C$ , temos que  $K(G)$  pertence a  $F$ ;
- além disso, dado um grafo  $H$  em  $F$ , existe pelo menos um grafo  $G$  em  $C$  tal que  $H = K(G)$ .

Por exemplo, quando escrevemos

## $K(\text{CORDAL}) = \text{ÁRVORE EXPANDIDA}$

estamos dizendo que o grafo clique de um grafo cordal é uma árvore expandida, e que toda árvore expandida é o grafo clique de um grafo cordal (para a definição de árvore expandida e para a comprovação deste resultado, veja [38]). Um modo sucinto de descrever este tipo de caracterização é: “Dado um grafo  $G$ ,  $G$  é o grafo clique de um grafo cordal se e somente se  $G$  é uma árvore expandida”.

Dadas duas classes de grafos  $C$  e  $F$ , observe que um resultado do tipo  $K(C) = F$  não impede que possa existir um grafo  $G \notin C$  tal que  $K(G) \in F$ . Isso se deve ao fato de o operador clique não ser injetor. Por exemplo, o grafo clique do grafo  $G$  na Figura 1.2 é também o grafo clique de  $C_4$ .

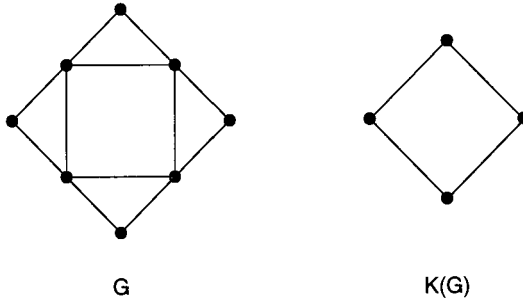


Figura 1.2: Grafo  $G$  e seu grafo clique  $K(G)$ .

Dizemos que uma classe  $C$  de grafos é *fechada sob o operador clique* ou *clique-fechada* se  $K(C) \subseteq C$ . Se porventura  $K(C) = C$ , então dizemos que  $C$  é *clique-fixa*. Observe que também pode ser o caso de existir  $G \notin C$  tal que  $K(G) \in C$ .

### 1.1.5 Grafos clique-inversos

Sejam  $G$  e  $H$  grafos. Dizemos que  $G$  é um *grafo clique-inverso de  $H$*  se  $K(G) = H$ . Denotamos por  $K^{-1}(H)$  o conjunto de todos os grafos  $G$  tais

que  $K(G) = H$ . Este conjunto é chamado *conjunto dos grafos clique-inversos de  $H$* . Assim, se  $G$  é clique-inverso de  $H$ , então  $G \in K^{-1}(H)$ .

Observe que todo grafo  $G$  é clique-inverso de algum grafo  $H$ : basta tomar  $H = K(G)$ .

Obviamente, se  $H$  não é um grafo clique, temos que  $K^{-1}(H) = \emptyset$ . Por outro lado, se  $H$  é um grafo clique, o conjunto  $K^{-1}(H)$  contém infinitos grafos.

Seja  $C$  um conjunto de grafos. Denotamos por  $K^{-1}(C)$  o conjunto dos grafos  $G$  para os quais existe um grafo  $H$  em  $C$  tal que  $H = K(G)$ . Em outras palavras,  $K^{-1}(C)$  é o conjunto dos grafos  $G$  tais que  $K(G) \in C$ . Ou ainda,  $K^{-1}(C)$  é o conjunto dos grafos clique-inversos dos grafos em  $C$ .

Se  $C_1$  e  $C_2$  são conjuntos de grafos tais que  $C_1 \subseteq C_2$ , então é fácil ver que  $K^{-1}(C_1) \subseteq K^{-1}(C_2)$ .

Seja  $W$  o conjunto de todos os grafos que são grafos clique. Então, é claro que se  $C$  é um conjunto qualquer de grafos, temos  $K^{-1}(C) = K^{-1}(C \cap W)$ .

Seja  $C$ , por exemplo, o conjunto de todos os grafos cordais. Então,  $K^{-1}(C)$  é o conjunto dos *grafos clique-inversos de grafos cordais*. Nesta tese escreveremos  $K^{-1}(CORDAL)$  para denotar a classe dos grafos clique-inversos dos grafos cordais,  $K^{-1}(INTERVALO)$  para denotar a classe dos grafos clique-inversos dos grafos de intervalo etc. Em outras palavras,  $K^{-1}(CORDAL)$  é a classe dos grafos  $G$  tais que  $K(G)$  é um grafo cordal.

Sejam  $C, F$  classes de grafos. Quando escrevemos  $K^{-1}(C) = F$ , estamos dizendo que:

- dado  $G \in F$ , tem-se que  $K(G) \in C$ ;
- além disso, dado  $G$  tal que  $K(G) \in C$ , tem-se que  $G \in F$ .

Por exemplo, quando escrevemos (veja Teorema 3.34)

$$K^{-1}(\text{ÁRVORE}) = \text{DOMINÓ} \cap \text{CORDAL}$$

estamos dizendo que se  $G$  é um grafo clique-inverso de uma árvore, então  $G$  é um dominó cordal, e vice-versa. De modo sucinto: “ $G \in K^{-1}(\text{ÁRVORE})$  se e somente se  $G \in \text{DOMINÓ} \cap \text{CORDAL}$ .” Observe que esta caracterização é diferente das caracterizações do tipo  $K(C) = F$ . Aqui, o grafo  $G$  está “fixo” no enunciado do teorema: “ $G$  é clique-inverso de um grafo na classe  $C$  se e somente se  $G$  está na classe  $F$  (ou possui certas propriedades)”. Lá, para mostrar que  $K(C) = F$ , é necessário, dado  $H \in F$ , *construir* um novo grafo  $G \in C$  tal que  $K(G) = H$  (além de, é claro, mostrar que se  $G \in C$ , então  $K(G) \in F$ ).

Em [4], a classe  $K^{-1}(\text{CORDAL})$  é referenciada como a classe dos grafos *clique-cordais*. Em [22, 23], a classe  $K^{-1}(\text{COMPLETO})$  é referenciada como a classe dos grafos *clique-completos*.



# Capítulo 2

## Preliminares

Este capítulo se inicia com um breve histórico sobre os grafos clique. Depois, apresentaremos os resultados mais importantes sobre classes de grafos clique, ou seja, caracterizações de classes da forma  $K(C)$ , onde  $C$  é uma classe dada. Finalmente, trataremos do primeiro resultado conhecido sobre grafos clique-inversos: uma caracterização para a classe  $K^{-1}(COMPLETO)$ .

### 2.1 Grafos clique

Em 1968 foi publicada a primeira caracterização dos grafos clique. Esta caracterização era parcial: consistia numa condição suficiente para que um grafo pertencesse a esta classe.

**Teorema 2.1** (Hamelink [13]) *Se a família das cliques maximais de um grafo  $G$  satisfaz a propriedade de Helly, então  $G$  é um grafo clique.*  $\square$

Em outras palavras, o teorema acima estabelece uma inclusão própria de classes:  $CLIQUE-HELLY \subseteq CLIQUE$ . Uma caracterização completa foi

publicada em 1971. Ela está baseada numa família de conjuntos completos de vértices (não necessariamente maximais) com certas propriedades:

**Teorema 2.2** (Roberts e Spencer [34]) *Um grafo  $G$  é um grafo clique se e somente se existe uma família  $\mathcal{F}$  de conjuntos completos de vértices tal que  $\mathcal{F}$  satisfaz a propriedade de Helly e  $\mathcal{F}$  cobre  $EG$  (isto é, se  $\{u, v\} \in EG$ , então existe ao menos um conjunto em  $\mathcal{F}$  que contém  $u$  e  $v$ ).*  $\square$

A caracterização acima não é algorítmica, pois não fornece uma técnica para encontrar uma família  $\mathcal{F}$  satisfazendo aquelas propriedades. O reconhecimento dos grafos clique é um problema pertencente a NP. Contudo, a determinação de sua complexidade (ser ou não NP-completo) ainda é um problema não resolvido. Sabe-se, porém, que o problema de reconhecer grafos clique-Helly é polinomial (Szwarcfiter [37]).

## 2.2 Classes de grafos clique

O primeiro resultado sobre classes de grafos clique que apresentaremos estabelece algumas classes clique-fixas:

**Teorema 2.3** (Bandelt e Prisner [2]) *As classes de grafos clique-Helly, disk-Helly, fortemente cordais, ptolomaicos, bloco e 1-seccionados são clique-fixas.*

Para um grafo clique-Helly  $G$ , vale especificamente a seguinte propriedade:  $K^2(G) \subseteq G$ . É o que diz um conhecido resultado de Escalante, que será utilizado mais adiante nesta dissertação.

**Teorema 2.4** (Escalante [6]) *Seja  $G$  um grafo clique-Helly. Inicialmente remova, caso existam, certos vértices dominados em  $G$  de forma a obter um*

subgrafo maximal  $G'$  induzido em  $G$  que não contém nenhum par de vértices gêmeos. Então, pela remoção dos vértices dominados em  $G'$ , obtemos um grafo isomorfo a  $K^2(G)$ .  $\square$

Outros resultados são enunciados a seguir.

**Teorema 2.5** (Hedetniemi e Slater [17])  $K(\text{ÁRVORE}) = \text{BLOCO}$ .  $\square$

**Teorema 2.6** (Hedman [18])  $K(\text{INTERVALO}) = K(\text{INDIFERENÇA}) = \text{INDIFERENÇA}$ .  $\square$

**Lema 2.7**  $K(\text{SPLIT}) = \text{ESTRELA}$ .  $\square$

Em [17], caracteriza-se também os grafos clique dos grafos bipartidos e dos grafos livres de triângulos. No próximo capítulo exibiremos estas caracterizações em termos de classes de grafos clique-inversos.

Um resultado mais recente caracteriza os grafos clique dos grafos cordais, que são exatamente as *árvores expandidas*. Um grafo  $G$  é uma árvore expandida quando  $G$  admite uma árvore geradora  $T_G$  tal que para cada aresta  $\{v, w\} \in EG$ , os vértices do caminho de  $v$  a  $w$  em  $T_G$  formam uma clique em  $G$ . A caracterização dos grafos clique dos grafos cordais estende-se aos grafos de caminho conexos não direcionados. Vale a pena observar que as árvores expandidas correspondem aos *grafos dualmente cordais*, estudados por Brandstädt *et alii* [4], e também aos *grafos árvore-clique* (Gutierrez [12]). Esta classe pode ser reconhecida em tempo polinomial.

**Teorema 2.8** (Bornstein e Szwarcfiter [38])  $K(\text{CORDAL}) = K(\text{UV}) = \text{ÁRVORE EXPANDIDA}$ .  $\square$

Recentemente, Prisner e Szwarcfiter [27] caracterizaram  $K(\text{DV})$  e  $K(\text{RDV})$ . As caracterizações utilizam os conceitos de *grafos dualmente DV* e *grafos dualmente RDV*. Um grafo dualmente DV (dualmente RDV) é um grafo  $G$  que admite uma árvore geradora direcionada (direcionada enraizada)  $T$  tal que, para cada aresta  $\{u, v\} \in EG$ ,  $T$  contém um caminho direcionado de  $u$  a  $v$  ou de  $v$  a  $u$ , e os vértices deste caminho formam uma clique (não necessariamente maximal) em  $G$ .

**Teorema 2.9** (Prisner e Szwarcfiter [27])

$K(\text{DV}) = \text{DUALMENTE DV}$ ,  $K(\text{RDV}) = \text{DUALMENTE RDV}$ ,  
 $K(\text{DUALMENTE DV}) = \text{DV}$ ,  $K(\text{DUALMENTE RDV}) = \text{RDV}$ .  $\square$

## 2.3 Grafos clique-inversos de grafos completos

A primeira caracterização conhecida sobre classes de grafos clique-inversos foi estabelecida em [22]. Neste trabalho, apresenta-se uma caracterização para a classe dos grafos clique-inversos dos grafos completos (denominados na ocasião *grafos clique-completos*). Esta classe é constituída pelos grafos cujos grafos clique são completos. Inicialmente, mostra-se que o reconhecimento da classe é um problema intratável.

**Teorema 2.10** (Lucchesi, Mello e Szwarcfiter [22]) *O problema de reconhecimento dos grafos clique-completos é Co-NP-Completo.*  $\square$

O problema está trivialmente em Co-NP, pois um certificado para um grafo  $G$  não ser clique-completo é simplesmente um par de cliques maximais disjuntas de  $G$ . A prova da NP-dificuldade utiliza uma transformação a partir do problema SATISFABILIDADE (veja [8]).

Apresentaremos agora uma caracterização para os grafos clique-completos sem vértices universais e *críticos*, conforme explicamos a seguir. Observe que, se  $G$  tem um vértice universal  $v$  (propriedade que pode ser testada em tempo polinomial), então  $K(G)$  é trivialmente completo, pois todas as cliques maximais de  $G$  compartilham o vértice  $v$ . Por isso, a caracterização trata apenas de grafos sem vértices universais. Além do mais, um grafo  $G$  é *crítico* se para cada subgrafo induzido próprio  $H$  de  $G$ , ou  $H$  contém um vértice universal ou  $H$  não é clique-completo.

Definamos o grafo  $Q_n$  para cada inteiro  $n \geq 3$ :

- $VQ_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
- $Q_n[\{v_1, \dots, v_n\}] \simeq \overline{C_n}$
- Para cada  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $N[u_i] = VQ_n - v_i$

A Figura 2.1 exibe dois membros da família  $\{Q_n\}_{n \geq 3}$ . Observe que  $Q_n$  ( $n = 3, 5, 7, 9 \dots$ ) é clique-completo e sem vértices universais. Quando  $n$  é par, existem cliques maximais disjuntas em  $Q_n$ .

A caracterização é fornecida em termos dos grafos  $Q_3, Q_5, Q_7, \dots$ :

**Teorema 2.11** (Lucchesi, Mello e Szwarcfiter [22]) *Um grafo  $G$  sem vértices universais é clique-completo e crítico se e somente se  $G$  é isomorfo a  $Q_{2p+1}$ , para algum inteiro positivo  $p$ .  $\square$*

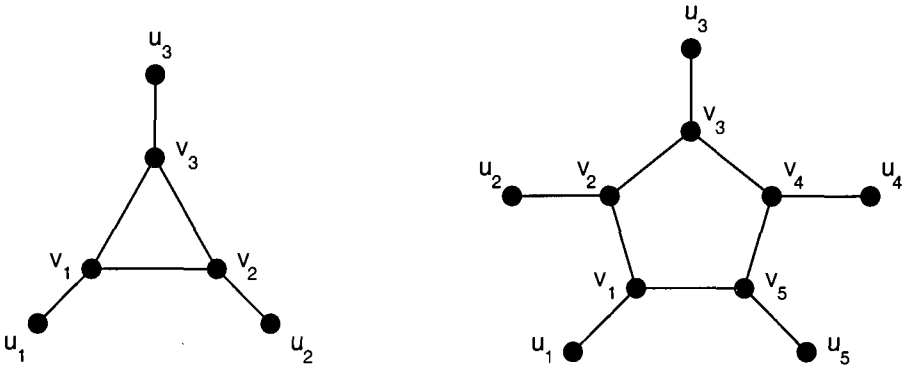


Figura 2.1: Grafos  $\overline{Q}_3$  (esquerda) e  $\overline{Q}_5$  (direita).

Como corolários, temos:

**Corolário 2.12** *Um grafo  $G$  clique-completo sem vértices universais contém um subgrafo induzido isomorfo a  $Q_{2p+1}$ , para algum inteiro positivo  $p$ .  $\square$*

**Corolário 2.13** *Um grafo  $G$  clique-completo sem vértices universais contém um subgrafo induzido isomorfo a  $Q_3$  ou  $Q'_3$  (veja a figura a seguir).  $\square$*

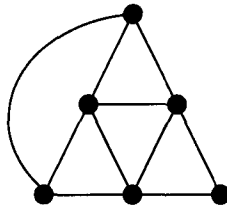


Figura 2.2: Grafo  $Q'_3$ .

# Capítulo 3

## Classes com reconhecimento polinomial

Neste capítulo estudaremos algumas classes de grafos clique-inversos tais que é possível reconhecer se um dado grafo pertence a uma destas classes em tempo polinomial. As caracterizações que fornecemos para algumas delas nem sempre serão aproveitadas para algoritmos polinomiais de reconhecimento (por exemplo,  $K^{-1}(\text{BIPARTIDO})$  e  $K^{-1}(\text{BIPARTIDO CORDAL})$ ). Neste caso, os algoritmos de reconhecimento estão baseados no fato de que os grafos destas classes possuem “poucas” cliques maximais (isto é, um número polinomialmente limitado de cliques em relação aos seus tamanhos). Para outras, no entanto, a caracterização conduzirá imediatamente a um algoritmo (caso de  $K^{-1}(\text{LIVRE DE TRIÂNGULOS})$  e  $K^{-1}(\text{ÁRVORE})$ ).

Caracterizaremos inicialmente os grafos clique-inversos dos grafos que contêm  $K_3$  e  $K_4$ . Estas caracterizações são apresentadas da seguinte maneira:  $K(G)$  contém  $K_3$  ( $K_4$ ) se e somente se  $G$  contém como subgrafo induzido algum grafo dentre uma lista de grafos. No caso dos grafos clique-inversos dos grafos que contêm  $K_4$ , estudamos duas possibilidades: as quatro cliques maximais de  $G$  que induzem  $K_4$  em  $K(G)$  podem ou não ter um vértice em comum. Estas duas possibilidades levam a análises bastante diferentes

para obter a caracterização. No final, elas são combinadas em um resultado unificado.

Como corolários (nem sempre diretos) destes resultados iniciais, caracterizaremos os grafos clique-inversos de: grafos com tamanho de clique máxima três ( $K^{-1}(LIVRE DE K_4)$ ), grafos livres de triângulos, grafos bipartidos, grafos bipartidos cordais e árvores.

Variações da classe  $K^{-1}(LIVRE DE K_4)$  também são abordadas. Por exemplo, discutiremos brevemente a seguinte generalização: dado um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ , qual a complexidade da questão “ $\omega(K(G)) \leq k$ ?” Analisaremos também o reconhecimento das classes  $K^{-1}(k - REGULAR)$  (grafos clique-inversos de grafos  $k$ -regulares, para  $k$  fixo) e  $K^{-1}(CIRCUNFERÊNCIA 3)$  (grafos clique-inversos de grafos com circunferência três).

Embora o objetivo desta tese não seja caracterizar classes de grafos clique, apresentaremos neste capítulo uma caracterização para  $K(BIPARTIDO CORDAL)$ , para mostrar o paralelismo deste resultado com outros já conhecidos ( $K(ÁRVORE)$ ,  $K(BIPARTIDO)$  e  $K(LIVRE DE TRIÂNGULOS)$ ).

Dedicaremos uma seção às relações de continência entre classes de grafos clique e classes de grafos clique-inversos apresentadas neste capítulo. Quase todas as classes deste capítulo estão contidas em  $K^{-1}(LIVRE DE K_4)$ . Isto, como veremos, gera uma interessante hierarquia de classes de grafos clique e de grafos clique-inversos.

### 3.1 Alguns resultados preliminares

O objetivo desta seção é caracterizar os grafos  $G$  tais que  $K(G)$  contém  $K_3$  ou  $K_4$ . Formularemos estas caracterizações através de uma lista de subgrafos



induzidos, da seguinte maneira: “ $K(G)$  contém  $K_3$  (ou  $K_4$ ) se e somente se  $G$  contém como subgrafo induzido algum dentre os seguintes grafos:...” . Estas caracterizações preliminares serão muito úteis para caracterizar as demais classes deste capítulo.

A Figura 3.1 exhibe os grafos 4-leque, 4-roda e  $K_{1,3}$ , que comparecem no enunciado do primeiro lema desta seção.

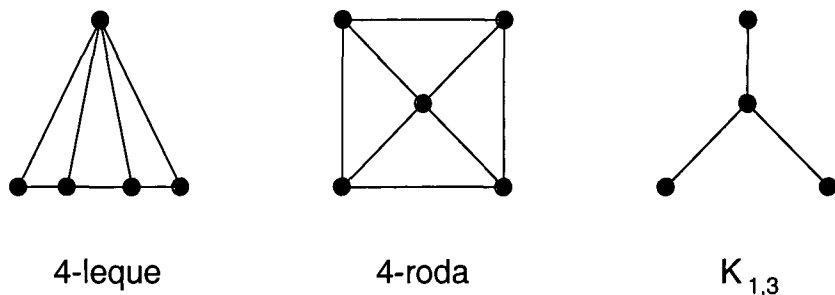


Figura 3.1: 4-leque (esquerda), 4-roda (centro) e  $K_{1,3}$  (direita).

**Lema 3.1** *Sejam  $G$  um grafo e  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  cliques maximais distintas de  $G$  que se interceptam duas a duas. Então,  $G$  contém como subgrafo induzido algum dentre os seguintes grafos: 4-leque, 4-roda,  $K_{1,3}$ .*

**Demonstração.** Definamos  $R_{123} = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ ,  $R_1 = M_1 - M_2 - M_3$ ,  $R_2 = M_2 - M_1 - M_3$ ,  $R_3 = M_3 - M_1 - M_2$ ,  $R_{12} = (M_1 \cap M_2) - M_3$ ,  $R_{13} = (M_1 \cap M_3) - M_2$  e  $R_{23} = (M_2 \cap M_3) - M_1$ . Denominemos *região* a cada um destes subconjuntos assim definidos. Veja a Figura 3.2. Vamos dividir a demonstração em 5 casos.

Caso 1:  $R_{123} \neq \emptyset$ ,  $R_{12} = R_{13} = R_{23} = \emptyset$ .

Seja  $u \in R_{123}$ . Tome  $u_1 \in R_1$ ,  $u_2 \in R_2$  não adjacente a  $u_1$ , e  $u_3 \in R_3$  não adjacente a  $u_1$  (existem  $u_2$  e  $u_3$  nestas condições, caso contrário  $M_2$  e  $M_3$  não seriam maximais).

Se  $u_3$  não é adjacente a  $u_2$ , então  $u, u_1, u_2$  e  $u_3$  induzem  $K_{1,3}$  (Figura 3.3a). Se  $u_3$  é adjacente a  $u_2$ , tome  $u'_3 \in R_3$  não adjacente a  $u_2$  (existe  $u'_3$

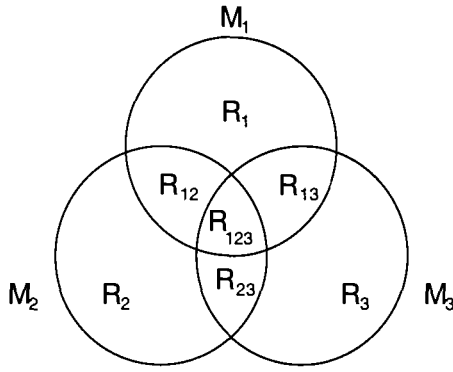


Figura 3.2: Regiões de interseção entre as cliques  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ .

nestas condições, caso contrário  $M_3$  não seria maximal). Se  $u'_3$  é adjacente a  $u_1$ , então  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u'_3$  induzem um 4-leque (Figura 3.3b). Se  $u'_3$  não é adjacente a  $u_1$ , então  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u'_3$  induzem  $K_{1,3}$  (Figura 3.3c).

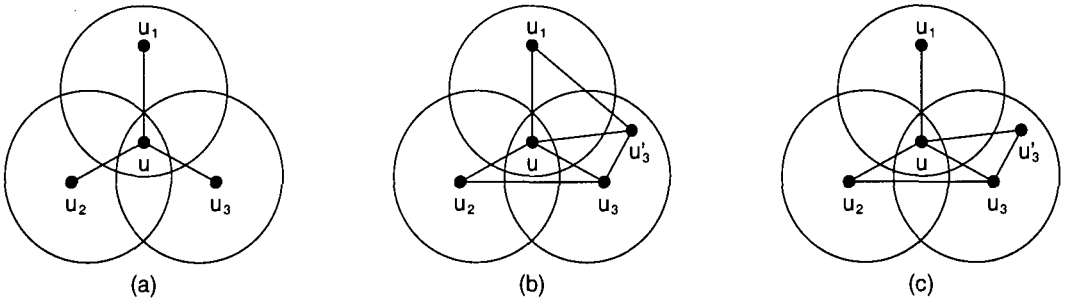


Figura 3.3: Caso 1 do Lema 3.1.

Caso 2:  $R_{123} \neq \emptyset$ ,  $R_{12} \neq \emptyset$ ,  $R_{13} = R_{23} = \emptyset$ .

Sejam  $u \in R_{123}$  e  $u_{12} \in R_{12}$ . Tome  $u_1 \in R_1$ ,  $u_2 \in R_2$  não adjacente a  $u_1$ , e  $u_3 \in R_3$  não adjacente a  $u_{12}$  (existem  $u_2$  e  $u_3$  nestas condições, caso contrário  $M_2$  e  $M_3$  não seriam maximais).

Se  $u_3$  não é adjacente a  $u_1$  nem a  $u_2$ , então  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  induzem  $K_{1,3}$  (Figura 3.4a). Se  $u_3$  é adjacente a  $u_1$  mas não a  $u_2$  (ou adjacente a  $u_2$  mas não a  $u_1$ ), então  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_{12}$ ,  $u_2$  e  $u_3$  induzem um 4-leque (Figura 3.4b). Se  $u_3$  é adjacente a  $u_1$  e a  $u_2$ , então  $u$ ,  $u_1$ ,  $u_{12}$ ,  $u_2$  e  $u_3$  induzem uma 4-roda (Figura 3.4c).

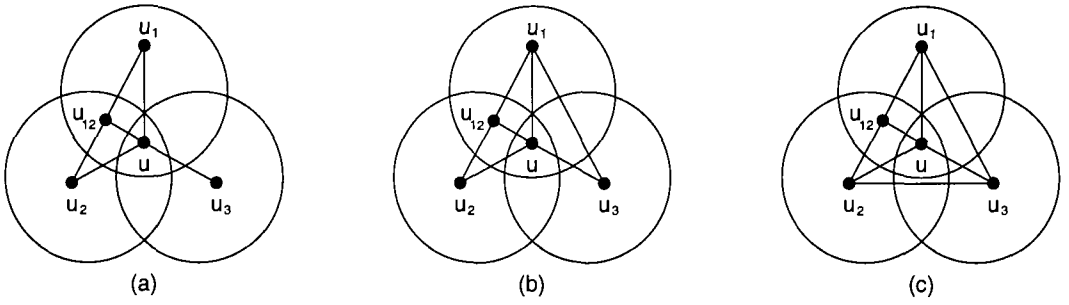


Figura 3.4: Caso 2 do Lema 3.1.

Caso 3:  $R_{123} \neq \emptyset$ ,  $R_{12} \neq \emptyset$ ,  $R_{13} \neq \emptyset$ ,  $R_{23} = \emptyset$ .

Sejam  $u \in R_{123}$ ,  $u_{12} \in R_{12}$  e  $u_{13} \in R_{13}$ . Tome  $u_2 \in R_2$  não adjacente a  $u_{13}$ , e  $u_3 \in R_3$  não adjacente a  $u_{12}$  (existem  $u_2$  e  $u_3$  nestas condições, caso contrário  $M_2$  e  $M_3$  não seriam maximais).

Se  $u_2$  não é adjacente a  $u_3$ , então  $u$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{13}$ ,  $u_2$  e  $u_3$  induzem um 4-leque (Figura 3.5a). Se  $u_2$  é adjacente a  $u_3$ , então  $u$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{13}$ ,  $u_2$  e  $u_3$  induzem uma 4-roda (Figura 3.5b).

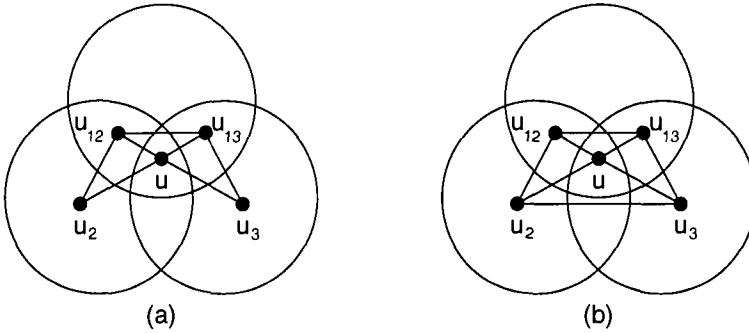


Figura 3.5: Caso 3 do Lema 3.1.

Caso 4:  $R_{123} \neq \emptyset$ ,  $R_{12} \neq \emptyset$ ,  $R_{13} \neq \emptyset$ ,  $R_{23} \neq \emptyset$ .

Sejam  $u \in R_{123}$ ,  $u_{12} \in R_{12}$ ,  $u_{13} \in R_{13}$  e  $u_{23} \in R_{23}$ . Tome  $u_2 \in R_2$  não adjacente a  $u_{13}$ , e  $u_3 \in R_3$  não adjacente a  $u_{12}$  (existem  $u_2$  e  $u_3$  nestas condições, caso contrário  $M_2$  e  $M_3$  não seriam maximais).

Este sub-caso na verdade se reduz ao anterior. Se  $u_2$  não é adjacente a

$u_3$ , então  $u, u_{12}, u_{13}, u_2$  e  $u_3$  induzem um 4-leque (Figura 3.6a). Se  $u_2$  é adjacente a  $u_3$ , então  $u, u_{12}, u_{13}, u_2$  e  $u_3$  induzem uma 4-roda (Figura 3.6b).

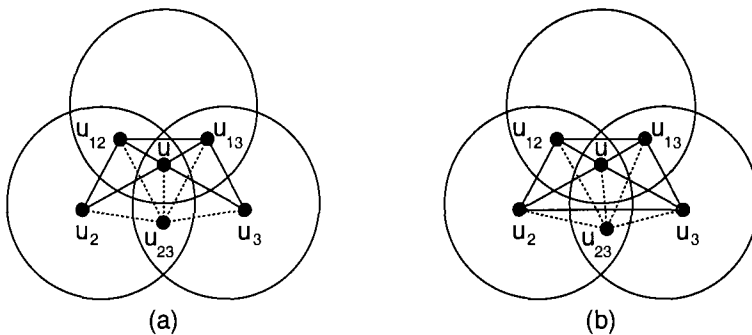


Figura 3.6: Caso 4 do Lema 3.1.

Caso 5:  $R_{123} = \emptyset$ .

Nesse caso,  $R_{12}, R_{13}$  e  $R_{23}$  são conjuntos não vazios. Sejam pois  $u_{12} \in R_{12}$ ,  $u_{13} \in R_{13}$  e  $u_{23} \in R_{23}$ . Tome  $u_1 \in R_1$  não adjacente a  $u_{23}$ , e  $u_2 \in R_2$  não adjacente a  $u_{13}$  (existem  $u_1$  e  $u_2$  nestas condições, caso contrário  $M_1$  e  $M_2$  não seriam maximais).

Se  $u_1$  não é adjacente a  $u_2$ , então  $u_1, u_{12}, u_{13}, u_2$  e  $u_{23}$  induzem um 4-leque (Figura 3.7a). Se  $u_1$  é adjacente a  $u_2$ , então  $u_1, u_{12}, u_{13}, u_2$  e  $u_{23}$  induzem uma 4-roda (Figura 3.7b).

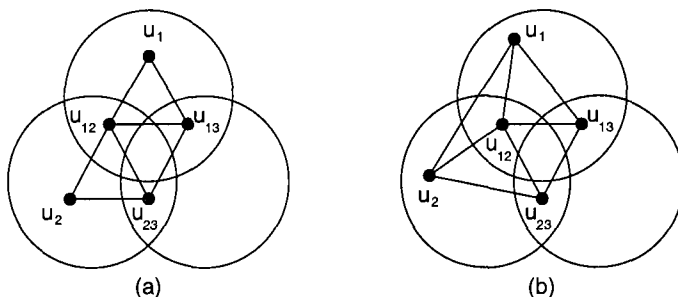


Figura 3.7: Caso 5 do Lema 3.1.

Em todos os casos desta demonstração, obtivemos sempre no final um dos grafos do enunciado como subgrafo induzido de  $G$ . Fica então provado o lema.  $\square$

É claro que se um grafo  $G$  contém um 4-leque, uma 4-roda ou  $K_{1,3}$  como subgrafo induzido, então  $G$  contém três cliques maximais que se interceptam duas a duas. Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 3.2** *Seja  $G$  um grafo. Então,  $K(G)$  contém um triângulo se e somente se  $G$  contém um 4-leque, uma 4-roda ou  $K_{1,3}$  como subgrafo induzido.* □

Em outras palavras, o teorema acima caracteriza a classe dos grafos clique-inversos de grafos que contêm  $K_3$ . Hamelink [13] provou que um grafo com três cliques maximais é clique-completo se e somente se possui um vértice universal. Pode-se ver o teorema anterior como uma ampliação deste resultado.

Observe que as regiões  $R_S$  do Lema 3.1, para  $S \in 2^{\{1,2,3\}} - \emptyset$ , constituem uma decomposição do conjunto de vértices  $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ , de forma que:

$$\bigcup_{S \subseteq \{1,2,3\}} R_S = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \quad \text{e} \quad R_S \cap R_{S'} = \emptyset \quad \text{para } S \neq S'.$$

Note que algumas regiões  $R_S$  podem ser conjuntos vazios, isto é, esta decomposição não chega a ser uma partição em sentido estrito.

Podemos generalizar a definição desta decomposição para um conjunto com  $k \geq 1$  cliques maximais: sejam  $G$  um grafo e  $C = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  um conjunto de cliques maximais de  $G$ . Para  $S \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ , definamos

$$R_S^C = \bigcap_{i \in S} M_i - \bigcup_{j \notin S} M_j,$$

onde  $j \notin S$  significa  $j \in \{1, 2, \dots, k\} - S$ .

Notemos que, pela definição,  $R_S^C$  denota o conjunto dos vértices em  $V' = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$  que, dentre as cliques em  $C$ , pertencem somente àquelas cujos índices estão no conjunto  $S$ . Por simplicidade, como fizemos no Lema 3.1, escrevemos  $R_{ijkl\dots}$  para denotar a região  $R_{\{i,j,k,l,\dots\}}^C$  (a menção ao conjunto  $C$  fica subentendida).

Se  $|S| = 1$ , dizemos que  $R_S$  é uma *região monoclique*.

Observe que cada região  $R_S$  induz uma clique. Além do mais, para  $v \in R_S$  e  $u \in R_T$  com  $S \cap T \neq \emptyset$ , temos que  $v$  e  $u$  são vizinhos. Isto é, existe uma clique em  $C$  que contém ambos.

Quando  $C$  é o conjunto de *todas* as cliques maximais de  $G$ , a decomposição acima é denominada *partição clique* de  $G$ . Esta denominação é de Hamelink. É fácil ver neste caso que se  $v \in R_i$ , isto é,  $S = \{i\}$  é um conjunto unitário, então  $v$  é um vértice simplicial de  $G$ .

Demonstraremos agora outro resultado útil, que é uma pequena ampliação de um resultado que se encontra em [23]. No enunciado, uma *pirâmide estendida* é qualquer um dentre os grafos  $H_0, H_1, H_2$  e  $H_3$ , mostrados na Figura 3.8. O grafo  $H_0$  é conhecido como *grafo de Hajós*, e é também chamado simplesmente *pirâmide*. Recordando a Seção 2.3, observe que  $H_0 = Q_3$  e  $H_1 = Q'_3$ .

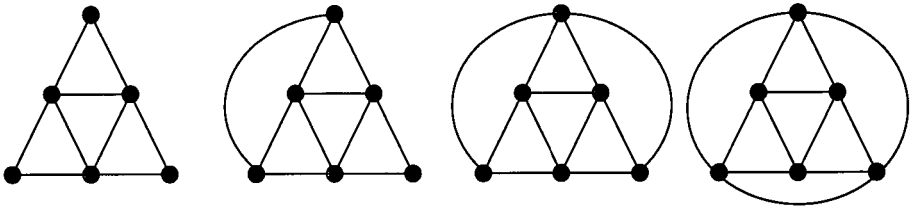


Figura 3.8: Da esquerda para a direita: grafos  $H_0, H_1, H_2, H_3$ .

**Lema 3.3** *Seja  $G$  um grafo e  $C$  uma coleção de cliques maximais de  $G$  que se interceptam duas a duas. Então, uma dentre as condições seguintes ocorre: (i) as cliques em  $C$  têm um vértice em comum; (ii)  $G$  contém uma pirâmide estendida como subgrafo induzido.*

**Demonstração.** Suponhamos que (i) não ocorra. Seja  $\mathcal{B}$  uma sub-coleção minimal de  $\mathcal{C}$  tal que as cliques em  $\mathcal{B}$  não têm um vértice em comum. Escrevamos  $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  ( $k \geq 3$ ). Considere as regiões  $R_S$ ,  $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ , relativas a  $\mathcal{B}$ . Seja  $S_i$  o conjunto de índices  $\{1, \dots, k\} - \{i\}$ . Pela minimalidade de  $\mathcal{B}$ ,  $R_{S_i} \neq \emptyset$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Seja  $v_i \in R_{S_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Observe que  $M = \{v_i, 1 \leq i \leq k\}$  é uma clique. Sabemos que se  $v \in R_S$  e  $u \in R_T$  com  $S \cap T \neq \emptyset$ , temos que  $v$  e  $u$  são vizinhos. Logo,  $v_i$  é adjacente a  $w$  para qualquer  $w \in \cup_{M \in \mathcal{C}} M$  que não pertença a  $R_i$ . Como  $v_i$  não é comum a todas as cliques em  $\mathcal{C}$ , existe  $w_i \in R_i$  não adjacente a  $v_i$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Como  $w_i$  é adjacente a  $v_j$  para todo  $j \neq i$ , segue que o subgrafo  $H$  induzido pelos vértices  $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$  é uma pirâmide estendida. Este subgrafo existe, pois  $k \geq 3$ . As relações de adjacência entre  $w_1, w_2$  e  $w_3$  determinam que tipo de pirâmide é o subgrafo  $H$ . Se  $w_1, w_2$  e  $w_3$  induzem um conjunto independente, então  $H = H_0$ . Se  $w_1, w_2$  e  $w_3$  induzem  $K_2$  mais um vértice isolado, então  $H = H_1$ . Se  $w_1, w_2$  e  $w_3$  induzem  $P_3$ , então  $H = H_2$ . Se  $w_1, w_2$  e  $w_3$  induzem um triângulo, então  $H = H_3$ .  $\square$

Uma consequência interessante do lema anterior é o resultado a seguir, que estabelece condições necessárias e suficientes para que, dado  $G$ ,  $K(G)$  possua uma clique de tamanho quatro.

**Teorema 3.4** *Seja  $G$  um grafo. Então,  $K(G)$  contém  $K_4$  se e somente se  $G$  contém  $H_0$  como subgrafo induzido ou  $G$  possui um vértice que pertence a quatro cliques maximais distintas.*

**Demonstração.** É claro que se  $G$  contém uma pirâmide como subgrafo induzido ou  $G$  possui um vértice que pertence simultaneamente a quatro cliques maximais distintas, então  $K(G)$  contém  $K_4$ . Inversamente, suponha que  $K(G)$  contenha  $K_4$ , e sejam  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  cliques maximais de  $G$  que se interceptam duas a duas. Pelo Lema 3.3,  $G$  contém um vértice comum às cliques  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  ou  $G$  contém uma pirâmide estendida como

subgrafo induzido. Como em cada um dos grafos  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  existe pelo menos um vértice pertencendo a quatro cliques maximais, segue o lema.  $\square$

Queremos agora refinar a caracterização do teorema anterior, para estabelecer um resultado do tipo “ $K(G)$  contém  $K_4$  se e somente se  $G$  contém como subgrafo induzido algum dentre os seguintes grafos...”. Precisamos então saber quais são os grafos minimais (em vértices) que caracterizam a existência de quatro cliques maximais com um vértice comum. A Figura 3.9 exibe as oito maneiras possíveis disto ocorrer.

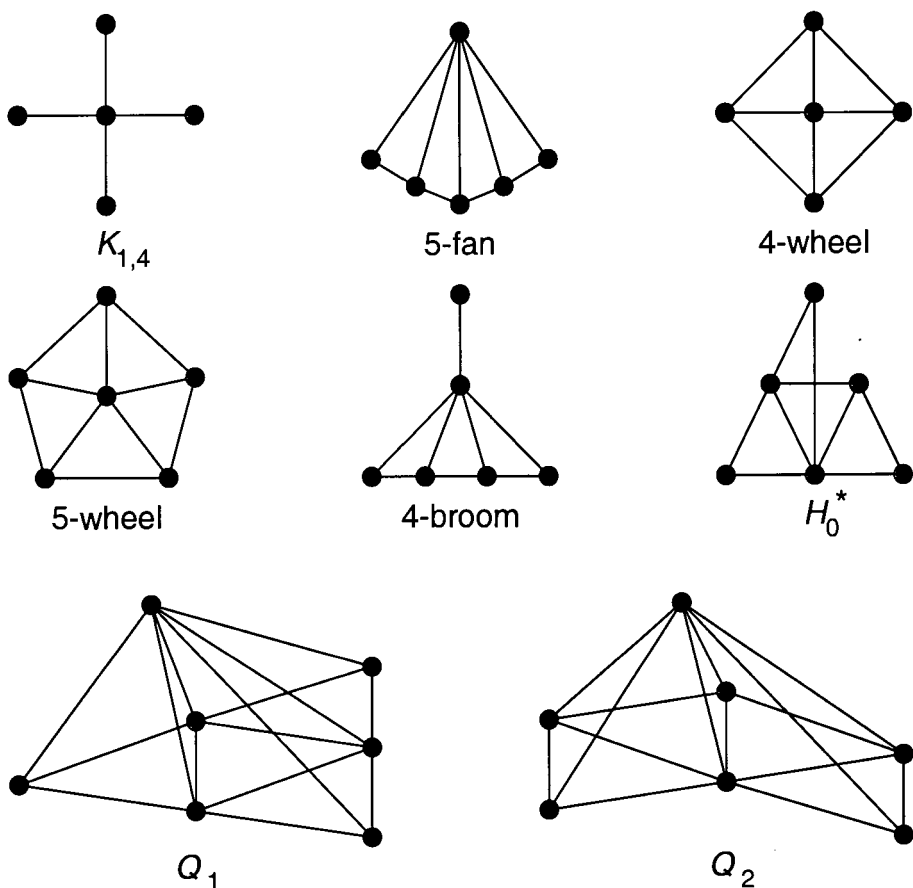


Figura 3.9: Grafos minimais (em vértices) com 4 cliques maximais e um vértice universal

A retirada de qualquer vértice de um grafo  $G$  da Figura 3.9 faz com que  $G$  ou deixe de ter quatro cliques maximais ou deixe de ter um vértice universal.



Os grafos  $Q_1$  e  $Q_2$  apresentam quatro cliques maximais de tamanho quatro cada um. Note que  $Q_1$  é obtido acrescentando-se um vértice universal a  $H_0$ . Os grafos 5-leque, 4-roda e  $H_0^*$  apresentam quatro cliques maximais de tamanho três cada um. A 5-roda é derivada do 5-leque acrescentando uma aresta entre os vértices de grau dois. A 4-vassoura apresenta uma clique de tamanho dois e três de tamanho três. O grafo  $K_{1,4}$  apresenta quatro cliques de tamanho dois.

**Teorema 3.5** *Um grafo  $G$  possui um vértice que pertence a quatro cliques maximais de  $G$  se e somente se  $G$  possui como subgrafo induzido algum dentre os grafos da Figura 3.9.*

**Demonstração.** Por um lado, é claro que se  $G$  apresenta algum dos oito grafos da Figura 3.9 como subgrafo induzido, então  $G$  possui um vértice que pertence a quatro cliques maximais. Por outro lado, seja  $v \in VG$  tal que  $v$  pertença às cliques maximais  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  de  $G$ . Como  $v$  pertence a  $M_1, M_2$  e  $M_3$ , pelo Lema 3.1  $G$  contém como subgrafo induzido uma 4-roda, um 4-leque ou  $K_{1,3}$ . Se  $G$  contém uma 4-roda, não há mais o que demonstrar. Dividamos agora a demonstração nos dois casos remanescentes. Dados dois vértices  $v$  e  $w$ , utilizaremos a notação  $v \sim w$  para dizer que  $v$  e  $w$  são vizinhos, e  $v \not\sim w$  para dizer que não são.

Caso 1:  $G$  contém  $H = K_{1,3}$  induzido. Nesse caso,  $v$  é o vértice de grau três em  $H$ . Sejam  $v_1, v_2$  e  $v_3$  os vértices de grau um em  $H$ , supondo  $v_i \in M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Observe que no máximo um vértice dentre  $v_1, v_2$  e  $v_3$  pode pertencer a  $M_4$ . Analisemos os dois casos possíveis.

Caso 1.1:  $v_1, v_2$  e  $v_3$  não pertencem a  $M_4$ . Seja um novo vértice  $v_4 \in M_4$  tal que  $v_4 \not\sim v_1$  (tal vértice existe, pois  $v_1 \notin M_4$ ). Temos que  $v_4 \sim v$ . Analisemos os sub-casos referentes a  $v_4$ , conforme a Figura 3.10 (nesta e nas demais figuras que ilustram esta demonstração, as linhas pontilhadas indicam as relações de adjacência a serem definidas). Há três subcasos.

Caso 1.1.1:  $v_4 \not\sim v_2, v_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}] = K_{1,4}$ .

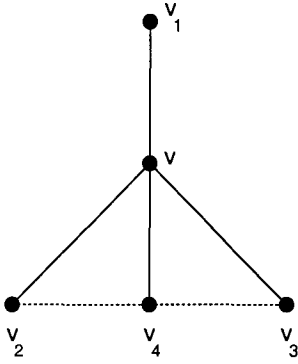


Figura 3.10: Caso 1.1 do Teorema 3.5.

Caso 1.1.2:  $v_4$  é adjacente a apenas um dentre  $v_2$  e  $v_3$ . Suponha  $v_4 \sim v_2, v_4 \not\sim v_3$ . Como  $v_2 \notin M_4$ , seja um novo vértice  $v'_4 \in M_4$  tal que  $v'_4 \not\sim v_2$ . Temos que  $v'_4 \sim v_4$  e  $v'_4 \sim v$ . A Figura 3.11 mostra a situação, onde resta analisar as relações de adjacência de  $v'_4$  com  $v_1$  e  $v_3$ . São quatro sub-casos.

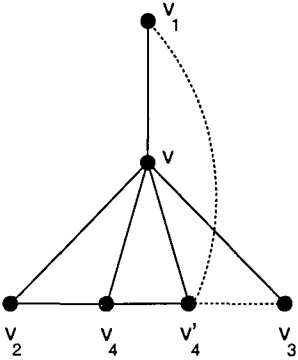


Figura 3.11: Caso 1.1.2 do Teorema 3.5.

Caso 1.1.2.1:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v'_4\}] = K_{1,4}$ .

Caso 1.1.2.2:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v'_4\}]$  é uma 4-vassoura.

Caso 1.1.2.3:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \sim v_3$ . Análogo ao Caso 1.1.2.2.

Caso 1.1.2.4:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v'_4\}] = H_0^*$ . Isto encerra a análise do Caso 1.1.2 referente a  $v'_4$ .

Caso 1.1.3:  $v_4 \sim v_2, v_4 \sim v_3$ . Como  $v_2 \notin M_4$ , seja novamente um novo vértice  $v'_4 \in M_4$  tal que  $v'_4 \not\sim v_2$ . Temos que  $v'_4 \sim v_4$  e  $v'_4 \sim v$ . Analisemos os quatro sub-casos referentes a esta nova situação para  $v'_4$ , conforme a Figura 3.12.

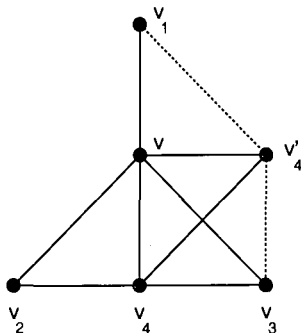


Figura 3.12: Caso 1.1.3 do Teorema 3.5.

Caso 1.1.3.1:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v'_4\}] = K_{1,4}$ .

Caso 1.1.3.2:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v'_4\}] = H_0^*$ .

Caso 1.1.3.3:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \sim v_3$ . Observe que  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v'_4\}]$  é isomorfo ao grafo  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}]$  do Caso 1.1.2. Este caso reduz-se àquele.

Caso 1.1.3.4:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \sim v_3$ . Nesta situação identifica-se apenas três cliques maximais. Como  $v_3 \sim v'_4, v_3 \sim v_4, v_3 \sim v$  e  $v_3 \notin M_4$ , devemos tomar um novo  $v''_4 \in M_4$  tal que  $v''_4 \not\sim v_3$  e analisar mais quatro sub-casos. Note que  $v''_4$  é adjacente a  $v'_4, v_4$  e  $v$ . Veja a Figura 3.13.

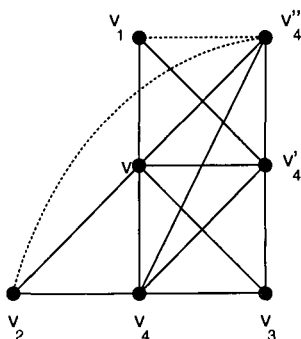


Figura 3.13: Caso 1.1.3.4 do Teorema 3.5.

Caso 1.1.3.4.1:  $v_4'' \not\sim v_1, v_4'' \not\sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4''\}] = K_{1,4}$ .

Caso 1.1.3.4.2:  $v_4'' \not\sim v_1, v_4'' \sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4', v_4''\}] = H_0^*$ .

Caso 1.1.3.4.3:  $v_4'' \sim v_1, v_4'' \not\sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_4''\}] = H_0^*$ .

Caso 1.1.3.4.4:  $v_4'' \sim v_1, v_4'' \sim v_2$ . Neste caso, temos quatro cliques maximais de tamanho quatro:  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v_4', v_4''\}]$  é o grafo  $Q_1$ . Isto encerra a análise do Caso 1.1.3.4 referente a  $v_4''$ . Encerram-se também o Caso 1.1.3 (referente à inclusão de  $v_4'$ ) e o Caso 1.1 (referente à inclusão de  $v_4$ ).

Caso 1.2: um vértice dentre  $v_1, v_2$  e  $v_3$  pertence a  $M_4$ . Suponhamos  $v_2 \in M_4$ . É claro que  $M_4$  possui um novo vértice  $v_4$  distinto de  $v_1, v_2$  e  $v_3$ . Além disto, podemos escolher  $v_4$  de forma que  $v_4 \notin M_2$ . Como  $v_2 \sim v_4$ , temos então apenas que verificar as relações de adjacência de  $v_4$  com  $v_1$  e  $v_3$ , conforme a Figura 3.14. São quatro sub-casos.

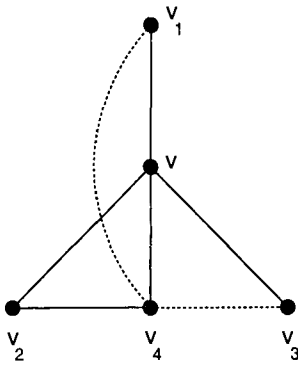


Figura 3.14: Caso 1.2 do Teorema 3.5.

Caso 1.2.1:  $v_4 \not\sim v_1, v_4 \not\sim v_3$ . Observe que  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4\}]$  é isomorfo ao grafo induzido pelos mesmos vértices no Caso 1.1.2. A diferença é que, aqui,  $v_4 \notin M_2$ , e no Caso 1.1.2,  $v_2 \notin M_4$ . Este caso reduz-se àquele.

Caso 1.2.2:  $v_4 \not\sim v_1, v_4 \sim v_3$ . Tomando um novo  $v_2' \in M_2$  não adjacente a  $v_4$ , temos mais quatro sub-casos. É claro que  $v_2' \sim v_2$ . Veja a Figura 3.15.

Caso 1.2.2.1:  $v_2' \not\sim v_1, v_2' \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_2', v_3, v_4\}]$  é uma 4-

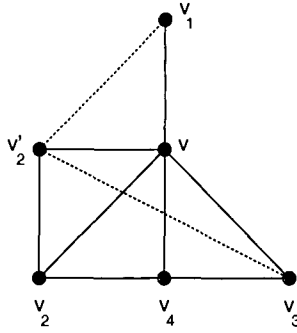


Figura 3.15: Caso 1.2.2 do Teorema 3.5.

vassoura.

Caso 1.2.2.2:  $v'_2 \not\sim v_1, v'_2 \sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_2, v'_2, v_3, v_4\}]$  é uma 4-roda.

Caso 1.2.2.3:  $v'_2 \sim v_1, v'_2 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v'_2, v_3, v_4\}]$  é um 5-leque.

Caso 1.2.2.4:  $v'_2 \sim v_1, v'_2 \sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_2, v'_2, v_3, v_4\}]$  é uma 4-roda. Isto encerra o Caso 1.2.2.

Caso 1.2.3:  $v_4 \sim v_1, v_4 \not\sim v_3$ . Análogo ao Caso 1.2.2.

Caso 1.2.4:  $v_4 \sim v_1, v_4 \sim v_3$ . Tomando novamente um novo  $v'_2 \in M_2$  adjacente a  $v_2$  e não adjacente a  $v_4$ , temos os últimos quatro sub-casos antes de passarmos ao Caso 2. Veja a Figura 3.16.

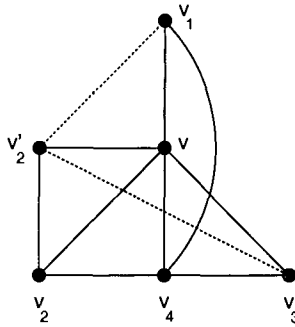


Figura 3.16: Caso 1.2.4 do Teorema 3.5.

Caso 1.2.4.1:  $v'_2 \not\sim v_1, v'_2 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v'_2, v_3, v_4\}] = H_0^*$ .

Caso 1.2.4.2:  $v'_2 \not\sim v_1, v'_2 \sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_2, v'_2, v_3, v_4\}]$  é uma 4-roda.

Caso 1.2.4.3:  $v'_2 \sim v_1, v'_2 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v'_2, v_4\}]$  é uma 4-roda.

Caso 1.2.4.4:  $v'_2 \sim v_1, v'_2 \sim v_3$ . Novamente,  $G[\{v, v_1, v_2, v'_2, v_4\}]$  é uma 4-roda. Isto encerra o Caso 1.2.4. Encerram-se também o Caso 1.2 e o Caso 1.

Caso 2:  $G$  contém um 4-leque  $H$  como subgrafo induzido. Nesse caso,  $v$  é o vértice de grau quatro em  $H$ . Sejam  $v_1$  e  $v'_1$  os vértices de grau três em  $H$  ( $v_1, v'_1 \in M_1$ ). Podemos dividir a demonstração em dois casos:

Caso 2.1: pelo menos um dentre  $v_1$  e  $v'_1$  pertence a exatamente uma clique maximal dentre  $M_1, M_2$  e  $M_3$ . Suponha que  $v_1$  seja tal vértice. Sejam  $v_2$  e  $v_3$  os vértices de grau dois em  $H$  ( $v_2 \in M_2$  e  $v_3 \in M_3$ ). Suponha  $v_1 \sim v_2$  e  $v'_1 \sim v_3$ . Configura-se então a seguinte situação:  $v$  pertence a  $M_1, M_2$  e  $M_3$ ;  $v_1$  pertence a  $M_1$ , mas não a  $M_2$  nem a  $M_3$ ;  $v'_1$  pertence a  $M_1$  e talvez a  $M_3$ , mas não pertence a  $M_2$ ;  $v_2$  pertence a  $M_2$ , mas não a  $M_1$  nem a  $M_3$ ;  $v_3$  pertence a  $M_3$ , mas não a  $M_1$  nem a  $M_2$ . Como  $v_1 \sim v_2$  e  $v_1 \notin M_2$ , existe um novo vértice  $v'_2 \in M_2$  que não é adjacente a  $v_1$ . É claro que  $v'_2 \sim v$  e  $v'_2 \sim v_2$ , de acordo com a Figura 3.17. Verifiquemos as relações de adjacência entre  $v'_2$  e os vértices  $v'_1$  e  $v_3$ . Se  $v'_2 \sim v'_1$ , então  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v'_2\}]$  é uma 4-roda. Se  $v'_2 \not\sim v'_1$  e  $v'_2 \not\sim v_3$ , então  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3\}]$  é um 5-leque. Se  $v'_2 \not\sim v'_1$  e  $v'_2 \sim v_3$ , então  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v'_2, v_3\}]$  é uma 5-roda. Isto encerra o Caso 2.1.

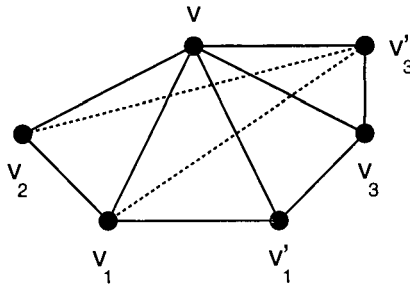


Figura 3.17: Caso 2.1 do Teorema 3.5.

Caso 2.2:  $v_1$  e  $v'_1$  pertencem ambos a exatamente duas cliques maximais dentre  $M_1, M_2$  e  $M_3$ . Sejam  $v_2$  e  $v_3$  os vértices de grau dois em  $H$  ( $v_2 \in M_2$

e  $v_3 \in M_3$ ). Suponha  $v_1 \sim v_2$  e  $v'_1 \sim v_3$ . Configura-se então a seguinte situação:  $v$  pertence a  $M_1, M_2$  e  $M_3$ ;  $v_1$  pertence a  $M_1$  e  $M_2$ , mas não a  $M_3$ ;  $v'_1$  pertence a  $M_1$  e  $M_3$ , mas não a  $M_2$ ;  $v_2$  pertence a  $M_2$ , mas não a  $M_1$  nem a  $M_3$ ;  $v_3$  pertence a  $M_3$ , mas não a  $M_1$  nem a  $M_2$ . Temos dois sub-casos. Note que  $v_2$  e  $v_3$  não podem ambos pertencer a  $M_4$ . Temos portanto dois sub-casos.

Caso 2.2.1:  $v_2, v_3 \notin M_4$ . Neste caso,  $v_1$  e  $v'_1$  podem ou não pertencer a  $M_4$ . Temos mais dois sub-casos.

Caso 2.2.1.1: pelo menos um dentre  $v_1$  e  $v'_1$  não pertence a  $M_4$ . Suponha  $v_1 \notin M_4$ . Então existe um novo vértice  $v_4 \in M_4$  não adjacente a  $v_1$ , conforme a Figura 3.18. As relações de adjacência de  $v_4$  com  $v'_1, v_2$  e  $v_3$  determinam oito sub-casos.

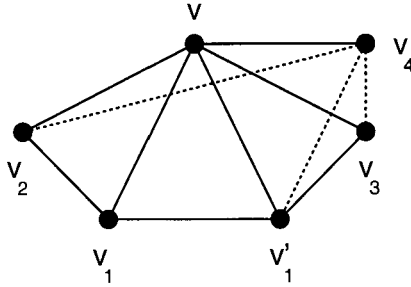


Figura 3.18: Caso 2.2.1.1 do Teorema 3.5.

Caso 2.2.1.1.1:  $v_4 \not\sim v'_1, v_4 \not\sim v_2, v_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v_4\}]$  é uma 4-vassoura.

Caso 2.2.1.1.2:  $v_4 \not\sim v'_1, v_4 \not\sim v_2, v_4 \sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v_4\}]$  é um 5-leque.

Caso 2.2.1.1.3:  $v_4 \not\sim v'_1, v_4 \sim v_2, v_4 \not\sim v_3$ . Novamente,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v_4\}]$  é um 5-leque.

Caso 2.2.1.1.4:  $v_4 \not\sim v'_1, v_4 \sim v_2, v_4 \sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v_4\}]$  é uma 5-roda.

Caso 2.2.1.1.5:  $v_4 \sim v'_1, v_4 \not\sim v_2, v_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v_4\}]$  é o grafo  $H_0^*$ .

Caso 2.2.1.1.6:  $v_4 \sim v'_1, v_4 \not\sim v_2, v_4 \sim v_3$ . Nesta situação identifica-se apenas três cliques maximais. Como  $v_1, v_2, v_3 \notin M_4$ , existe um novo vértice  $v'_4$  não adjacente a  $v_3$ . Verifiquemos as relações de adjacência de  $v'_4$  com  $v_1, v'_1$  e  $v_2$ . Veja a Figura 3.19.

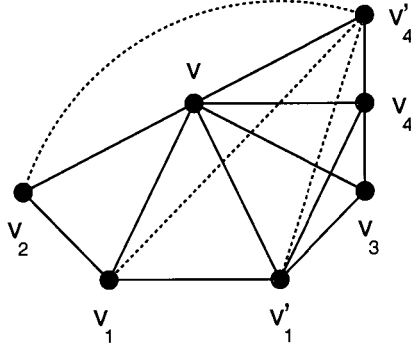


Figura 3.19: Caso 2.2.1.1.6 do Teorema 3.5.

Caso 2.2.1.1.6.1:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \not\sim v'_1, v'_4 \not\sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_4, v'_4\}]$  é um 5-leque.

Caso 2.2.1.1.6.2:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \not\sim v'_1, v'_4 \sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_4, v'_4\}]$  é uma 5-roda.

Caso 2.2.1.1.6.3:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \sim v'_1, v'_4 \not\sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v'_4\}]$  é o grafo  $H_0^*$ .

Caso 2.2.1.1.6.4:  $v'_4 \not\sim v_1, v'_4 \sim v'_1, v'_4 \sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v'_4\}]$  é uma 4-roda.

Caso 2.2.1.1.6.5:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \not\sim v'_1, v'_4 \not\sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_4, v'_4\}]$  é uma 4-roda.

Caso 2.2.1.1.6.6:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \not\sim v'_1, v'_4 \sim v_2$ . Novamente,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_4, v'_4\}]$  é uma 4-roda.



Caso 2.2.1.1.6.7:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \sim v'_1, v'_4 \not\sim v_2$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_2, v_3, v_4, v'_4\}]$  é um 5-leque.

Caso 2.2.1.1.6.8:  $v'_4 \sim v_1, v'_4 \sim v'_1, v'_4 \sim v_2$ . Neste caso, temos quatro cliques maximais de tamanho quatro cada uma:  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_3, v_4, v'_4\}]$  é o grafo  $Q_2$ . Isto encerra o Caso 2.2.1.1.6.

Caso 2.2.1.1.7:  $v_4 \sim v'_1, v_4 \sim v_2, v_4 \not\sim v_3$ . Então,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_4\}]$  é uma 4-roda.

Caso 2.2.1.1.8:  $v_4 \sim v'_1, v_4 \sim v_2, v_4 \sim v_3$ . Novamente,  $G[\{v, v_1, v'_1, v_2, v_4\}]$  é uma 4-roda. Isto encerra o Caso 2.2.1.1.

Caso 2.2.1.2:  $v_1, v'_1 \in M_4$ . Existem então novos  $v''_1 \in M_1$  e  $v_4 \in M_4$  tais que  $v''_1 \not\sim v_4$ . Estes dois vértices existem porque é necessário distinguir a clique  $M_1$  da clique  $M_4$ . Observe que  $v''_1$  e  $v_4$  são vizinhos de  $v, v_1$  e  $v'_1$ . Veja a Figura 3.20. As relações de adjacência entre  $v''_1, v_4$  e os vértices restantes ( $v_2$  e  $v_3$ ) determinam cinco sub-casos.

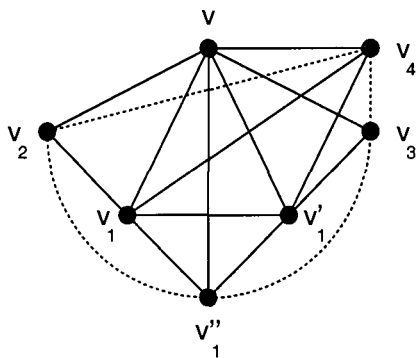


Figura 3.20: Caso 2.2.1.2 do Teorema 3.5.

Caso 2.2.1.2.1:  $v''_1, v_4, v_2$  e  $v_3$  induzem um conjunto independente. Então,  $G[\{v, v''_1, v_2, v_3, v_4\}] = K_{1,4}$ .

Caso 2.2.1.2.2:  $v''_1, v_4, v_2$  e  $v_3$  induzem um grafo com apenas uma aresta  $e$ . Então,  $G[\{v, w, v''_1, v_2, v_3, v_4\}] = H_0^*$ , onde  $w = v'_1$  se  $e$  incide sobre  $v_2$ , e  $w = v_1$  se  $e$  incide sobre  $v_3$ .

Caso 2.2.1.2.3:  $v_1'', v_4, v_2$  e  $v_3$  induzem  $H = P_3$  mais um vértice isolado  $w$  tal que  $w = v_1''$  ou  $w = v_4$ . Então,  $G[\{v, v_1, v_1', v_1'', v_2, v_3, v_4\}] = Q_1$ .

Caso 2.2.1.2.4:  $v_1'', v_4, v_2$  e  $v_3$  induzem  $2P_2$  (duas arestas sem vértices comuns). Então,  $G[\{v, v_1, v_1', v_1'', v_2, v_3, v_4\}] = Q_2$ .

Caso 2.2.1.2.5:  $v_1'', v_4, v_2$  e  $v_3$  induzem um grafo  $H$  onde existe um caminho de  $v_1''$  a  $v_4$ . Neste caso,  $G[\{v, v_1, v_1'', v_3, v_4\}]$  é uma 4-roda se existe um caminho de  $v_1''$  a  $v_4$  que passa por  $v_3$ . De forma análoga,  $G[\{v, v_1', v_1'', v_2, v_4\}]$  é uma 4-roda se existe um caminho de  $v_1''$  a  $v_4$  que passa por  $v_2$ . Isto encerra o Caso 2.2.1.2, e também o Caso 2.2.1.

Caso 2.2.2: um dentre  $v_2$  e  $v_3$  pertence a  $M_4$ . Suponha  $v_3 \in M_4$ . Logo,  $v_1 \notin M_4$ . Configura-se assim a seguinte situação:  $v$  pertence a  $M_1, M_2$  e  $M_4$ ;  $v_1$  pertence a  $M_1$  e  $M_2$ , mas não a  $M_4$ ;  $v_2$  pertence a  $M_2$ , mas não a  $M_1$  nem a  $M_4$ ;  $v_3$  pertence a  $M_4$ , mas não a  $M_1$  nem a  $M_2$ ;  $v_1'$  pertence a  $M_1$ , e não pertence a  $M_2$ . Como  $v_1'$  pode ou não pertencer a  $M_4$ , temos dois sub-casos.

Caso 2.2.2.1:  $v_1' \notin M_4$ . Observe que se repete a situação do Caso 2.1, com a clique  $M_4$  no lugar da clique  $M_3$ . Este caso portanto reduz-se àquele.

Caso 2.2.2.2:  $v_1' \in M_4$ . Temos então que  $v, v_1'$  e  $v_3$  pertencem a  $M_3$  e  $M_4$  simultaneamente. Como neste caso  $v_1$  e  $v_2$  não pertencem a  $M_3$  nem a  $M_4$ , existe um novo vértice  $v_4' \in M_4$  tal que  $v_4' \notin M_3$ . Tomando o grafo induzido pelos vértices  $v, v_1, v_1', v_2$  e  $v_4'$ , repete-se a situação do Caso 2.2.1.1 com  $M_4$  no lugar de  $M_3$  e  $v_4'$  no lugar de  $v_3$ . Este caso portanto reduz-se àquele. Encerram-se o Caso 2.2.2, o Caso 2.2 e o Caso 2.

Em qualquer dos casos apresentados, obtivemos no final um dos grafos da Figura 3.9 como subgrafo induzido, e portanto o teorema está provado.

□

Como  $H_0$  é obtido de  $Q_1$  removendo-se o vértice universal de  $Q_1$ , pode-se

unir os resultados dos Teoremas 3.4 e 3.5 da seguinte maneira:

**Teorema 3.6** *Seja  $G$  um grafo. Então,  $K(G)$  contém  $K_4$  se e somente se  $G$  contém como subgrafo induzido algum dentre os seguintes grafos:  $H_0$ ,  $K_{1,4}$ , 4-vassoura,  $H_0^*$ , 4-roda, 5-roda, 5-leque,  $Q_2$ .*  $\square$

Com o resultado acima, fica caracterizada a classe dos grafos clique-inversos dos grafos que contêm  $K_4$ .

## 3.2 Grafos clique-inversos de grafos com tamanho máximo de clique três

**Definição 3.7** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo com tamanho máximo de clique três se  $\omega(K(G)) \leq 3$ .*

Denotamos esta classe  $K^{-1}(LIVRE DE K_4)$ . Como nem todo grafo pertencente a  $LIVRE DE K_4$  é um grafo clique, temos que

$$K^{-1}(LIVRE DE K_4) = K^{-1}(LIVRE DE K_4 \cap CLIQUE),$$

onde  $CLIQUE$  é a classe dos grafos clique.

Uma caracterização para  $K^{-1}(LIVRE DE K_4)$  é consequência direta do Teorema 3.6. Como  $\omega(K(G)) \leq 3$  se e somente se  $K(G)$  não contém  $K_4$ , esta caracterização é por subgrafos proibidos:

**Corolário 3.8** *Seja  $G$  um grafo. Então,  $G \in K^{-1}(LIVRE DE K_4)$  se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum dentre os seguintes grafos:  $H_0$ ,  $K_{1,4}$ , 4-vassoura,  $H_0^*$ , 4-roda, 5-roda, 5-leque,  $Q_1$ ,  $Q_2$ .*  $\square$

Como os grafos do enunciado acima possuem no máximo sete vértices cada um, decidir se  $\omega(K(G)) \leq 3$  pode ser feito em tempo  $O(|VG|^7)$ . Portanto:

**Corolário 3.9** *O reconhecimento da classe  $K^{-1}(\text{LIVRE DE } K_4)$  pode ser feito em tempo polinomial.* □

Existem outras duas maneiras de comprovar que este reconhecimento é polinomial:

**Observação 3.10** Se  $\omega(K(G)) \leq 3$ , então cada vértice de  $G$  pertence no máximo a 3 cliques maximais. Logo,  $G$  possui no máximo  $3|VG|$  cliques maximais. Em Johnson *et al.* [19] apresenta-se um algoritmo que gera todos os conjuntos independentes maximais (em ordem lexicográfica) com atraso  $O(n^3)$  (isto é, a cada  $O(n^3)$  passos um novo conjunto é gerado, onde  $n = |VG|$ ). Aplicando este algoritmo a  $\overline{G}$ , podemos verificar que  $G$  possui no máximo  $3|VG|$  cliques maximais em tempo  $O(|VG|^4)$ . A seguir, tomando as  $O(|VG|)$  cliques geradas pelo algoritmo, podemos construir  $K(G)$  em tempo  $O(|VG|^4)$ , pois basta realizar  $O(|VG|^2)$  testes de interseção entre cliques maximais de  $G$  onde cada teste requer tempo  $O(|VG|^2)$ . Finalmente, podemos verificar se  $\omega(K(G)) \leq 3$  em tempo  $O(|VG|^4)$  tomando grupos de quatro vértices em  $K(G)$  ( $K(G)$  tem tamanho polinomialmente relacionado com o tamanho de  $G$ ). Isto conduz a um algoritmo de tempo total  $O(|VG|^4)$ .

**Observação 3.11** Em [1] e [26] provou-se que um grafo  $G$  sem subgrafos induzidos isomorfos a  $\overline{pK_2}$  (isto é, ao complemento de  $p$  arestas duas a duas sem vértices comuns) contém no máximo  $|VG|^{2(p-1)}$  cliques maximais. Observe que, para  $p = 3$ ,  $\overline{3K_2} = H_3$ . Observe também que se  $\omega(K(G)) \leq 3$ , então  $G$  não pode conter  $H_3$  como subgrafo induzido (pois  $H_3$  contém uma 4-roda como subgrafo induzido). Logo, se  $\omega(K(G)) \leq 3$ ,  $G$  contém no máximo  $|VG|^{2(3-1)} = |VG|^4$  cliques maximais. Embora este limitante superior para o

número de cliques maximais de  $G$  não seja tão justo quanto o da observação anterior, podemos argumentar, de modo alternativo, com a mesma técnica ali descrita para concluir a validade do Corolário 3.9.

### 3.2.1 Variações da classe $K^{-1}(\text{LIVRE DE } K_4)$

Seja  $k$  um número inteiro fixo *a priori*. Dado um grafo  $G$ , observe que se  $\omega(K(G)) \leq k$ , então  $G$  possui no máximo  $k|VG|$  cliques maximais. O raciocínio aqui empregado é o mesmo da Observação 3.10. Seguindo com este raciocínio, podemos concluir:

**Corolário 3.12** *Seja  $k$  um número inteiro fixo a priori. Dado um grafo  $G$ , o problema de decidir se  $\omega(K(G)) \leq k$  pertence a  $P$ .* □

Obviamente, o problema complementar também pode ser resolvido em tempo polinomial, pois a resposta de um é SIM se e somente se a resposta do outro é NÃO. Logo:

**Corolário 3.13** *Seja  $k$  um número inteiro fixo a priori. Dado um grafo  $G$ , o problema de decidir se  $K(G)$  possui uma clique de tamanho maior ou igual a  $k$  pertence a  $P$ .* □

Vale a pena agora observar o seguinte: se  $k$  não é um número fixo (isto é, se  $k$  faz parte da entrada do problema), então a técnica da Observação 3.10 não conduz a um algoritmo de reconhecimento polinomial, pois, na entrada,  $k$  pode ser codificado utilizando  $\log k$  bits, e a complexidade final do algoritmo - que depende de  $k$  - é exponencial em  $\log k$ . Além disso, não se pode garantir que  $k$  guarde uma relação polinomial com o tamanho de  $G$ , pois o número

de cliques maximais de um grafo pode ser exponencial em relação ao seu tamanho [24], e portanto o valor  $\omega(K(G))$  pode ser exponencial no tamanho de  $G$ . Isto é,  $k$  pode ser exponencial em relação a  $|VG|$ .

Outra variação interessante deste tipo de problema é o reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos  $k$ -regulares.

**Definição 3.14** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo  $k$ -regular se  $K(G)$  é um grafo  $k$ -regular.*

Para o reconhecimento da classe  $K^{-1}(k - \text{REGULAR})$  ( $k$  fixo), podemos novamente empregar a técnica da Observação 3.10, pois o lema simples, a seguir, mostra que esta classe de grafos possui um número polinomialmente limitado de cliques maximais.

**Lema 3.15** *Seja  $G$  um grafo clique-inverso de um grafo  $k$ -regular. Então,  $G$  possui no máximo  $(k + 1) \cdot |VG|$  cliques maximais.*

**Demonstração.** Observe que cada vértice  $v$  de  $G$  pode pertencer no máximo a  $k + 1$  cliques maximais, caso contrário as cliques maximais de  $G$  que contêm  $v$  corresponderiam a um subgrafo completo de tamanho mínimo  $k + 2$  em  $K(G)$ , uma contradição. Segue-se então o lema.  $\square$

Podemos então enunciar:

**Corolário 3.16** *Seja  $k$  um número inteiro fixo a priori. Dado um grafo  $G$ , o problema de decidir se  $G$  é clique-inverso de um grafo  $k$ -regular pertence a  $P$ .*  $\square$

Vale aqui a mesma ressalva feita anteriormente: se  $k$  faz parte da entrada do problema, a técnica da Observação 3.10 conduz a um algoritmo de reconhecimento pseudo-polinomial. O grau de  $K(G)$  pode ser exponencial em relação ao tamanho de  $G$ , e portanto  $k$  não guarda necessariamente uma relação polinomial com o tamanho de  $G$ .

Encerrando esta sub-seção, analisaremos o reconhecimento da classe  $K^{-1}(\text{CIRCUNFERÊNCIA } 3)$  (grafos clique-inversos de grafos com circunferência três).

**Definição 3.17** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo com circunferência três se todo ciclo em  $K(G)$  tem comprimento no máximo três.*

Note que  $\text{CIRCUNFERÊNCIA } 3 = \text{BLOCO} \cap \text{LIVRE DE } K_4$ . Isto é, esta classe consiste nos grafos bloco cujos blocos são triângulos ou grafos isomorfos a  $K_2$ . Logo,  $\text{CIRCUNFERÊNCIA } 3 \subseteq \text{LIVRE DE } K_4$ , donde qualquer grafo  $G$  com circunferência três possui no máximo  $3|VG|$  cliques maximais. Assim:

**Corolário 3.18** *A classe  $K^{-1}(\text{CIRCUNFERÊNCIA } 3)$  pode ser reconhecida em tempo polinomial.* □

### 3.3 Grafos clique-inversos de grafos livres de triângulos

**Definição 3.19** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo livre de triângulos se  $K(G)$  é livre de triângulos.*

Como consequência direta do Teorema 3.2, temos uma caracterização desta classe por subgrafos proibidos (veja a Figura 3.21).

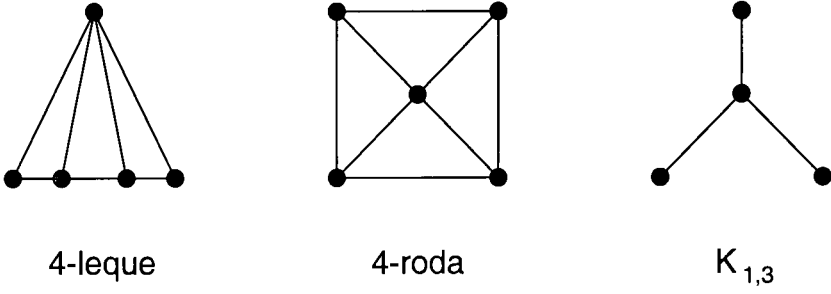


Figura 3.21: Subgrafos proibidos para  $K^{-1}(\text{LIVRE DE TRIÂNGULOS})$ .

**Corolário 3.20** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo livre de triângulos se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum dentre os seguintes grafos: 4-leque, 4-roda e  $K_{1,3}$ .*  $\square$

Como os subgrafos proibidos da caracterização acima têm no máximo cinco vértices, temos:

**Corolário 3.21** *Dado um grafo  $G$ , pode-se decidir em tempo  $O(|VG|^5)$  se  $G$  é clique-inverso de um grafo livre de triângulos.*  $\square$

Os grafos livres de triângulos são clique-Helly. Logo, pelo Teorema 2.4:

$$K(\text{LIVRE TRIÂNG.}) \subseteq K^{-1}(\text{LIVRE TRIÂNG.}).$$

Mais precisamente, Hedetniemi e Slater [17] mostraram que

$$K(\text{LIVRE TRIÂNG.}) = K^{-1}(\text{LIVRE TRIÂNG.}) \cap 1\text{-SECCIONADO}.$$

Pode-se mostrar facilmente que a classe 1 – SECCIONADO consiste exatamente nos grafos que não contêm  $K_4 - e$  como subgrafo induzido. Assim,



como ambas as classes do lado direito da igualdade podem ser reconhecidas em tempo polinomial, segue que o reconhecimento de grafos clique de grafos livres de triângulos também pode ser feito em tempo polinomial.

### 3.4 Grafos clique-inversos de grafos bipartidos

**Definição 3.22** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo bipartido se  $K(G)$  é bipartido.*

Apresentaremos uma caracterização desta classe por subgrafos proibidos (veja a Figura 3.22).

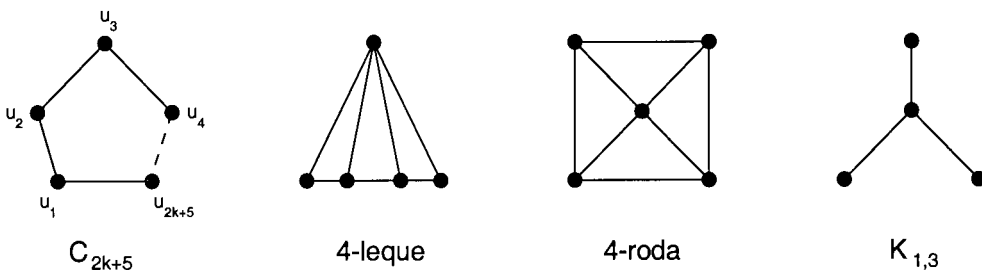


Figura 3.22: Subgrafos proibidos para  $K^{-1}(BIPARTIDO)$ .

**Teorema 3.23** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo bipartido se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum dentre os seguintes grafos:  $C_{2k+5}$  ( $k \geq 0$ ), 4-leque, 4-roda e  $K_{1,3}$ .*

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ): Se  $G$  contém  $C_{2k+5}$  induzido, então existem  $2k + 5$  cliques maximais em  $G$  tais que cada aresta de  $C_{2k+5}$  está contida em uma e apenas uma destas cliques. É fácil ver que o subgrafo induzido por estas cliques em  $K(G)$  contém um ciclo ímpar, uma contradição. Se  $G$  contém um 4-leque induzido,

uma 4-roda induzida ou  $K_{1,3}$  induzido, então  $K(G)$  não é livre de triângulo (Teorema 3.20), donde  $K(G)$  não é bipartido - outra contradição.

( $\Leftarrow$ ): Suponha por absurdo que  $G$  não seja um grafo clique-inverso de um grafo bipartido. Então, existe um ciclo induzido ímpar  $C = M_1 M_2 \dots M_{2p+1} M_1$  em  $K(G)$ . Escolha  $C$  para o qual  $p$  é mínimo. Analisemos 2 casos possíveis.

Caso 1:  $p = 1$ . Nesse caso, temos a situação do Lema 3.1. Isto implica que  $G$  contém 4-leque, 4-roda ou  $K_{1,3}$ , uma contradição.

Caso 2:  $p > 1$ . É a situação exposta na Figura 3.23 (para  $p = 2$ ). Temos  $u_i \in M_i \cap M_{i+1}$ , para  $i \in \{1, \dots, 2p + 1\}$  (índices tomados em módulo). Note que cada  $u_i$  não pode pertencer a mais nenhuma clique maximal em  $G$  além de  $M_i$  e  $M_{i+1}$ . Caso contrário, existiriam 3 cliques maximais contendo  $u_i$ , e portanto existiria um triângulo em  $K(G)$  (contradição, pois o ciclo  $C = M_1 M_2 \dots M_{2p+1} M_1$  foi tomado para  $p > 1$  mínimo). Logo, não podem existir cordas no circuito  $C_G = u_1 u_2 \dots u_{2p+1} u_1$ , pois a existência de uma corda implicaria a existência de uma nova clique maximal  $M$  contendo algum  $u_i$ . Portanto, o grafo induzido pelos vértices do circuito  $C_G$  é isomorfo a um ciclo induzido ímpar de comprimento mínimo 5, contradição.  $\square$

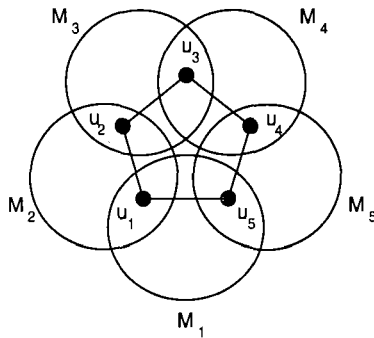


Figura 3.23: Situação do Caso 2, para  $p = 2$ .

Passamos agora a tratar do reconhecimento da classe dos grafos clique-inversos dos bipartidos. A caracterização fornecida pelo teorema anterior

não conduz diretamente a um algoritmo polinomial. Porém, dado um grafo  $G$ , pode-se reconhecer que  $G$  pertence a esta classe em tempo  $O(|VG|^4)$ . O argumento segue novamente a Observação 3.10. Na verdade, se  $G$  pertence a  $K^{-1}(BIPARTIDO)$ , pode-se conseguir um limitante superior bastante justo para o número de cliques maximais de  $G$ , conforme o próximo lema.

**Lema 3.24** *Se  $G$  é um grafo clique-inverso de um grafo bipartido, então  $G$  possui no máximo  $|VG|$  cliques maximais.*

**Demonstração.** Suponhamos  $G$  conexo. Sabemos que as cliques maximais de  $G$  podem ser particionadas em duas coleções de cliques  $\hat{D} = \{D_1, \dots, D_r\}$  e  $\hat{E} = \{E_1, \dots, E_s\}$  tais que as cliques em  $\hat{D}$  (em  $\hat{E}$ ) são duas a duas disjuntas. Além disso, qualquer uma das cliques maximais de  $G$  tem cardinalidade mínima 2. Logo,

$$2r \leq \sum_{i=1}^r |D_i| \leq |VG| \quad \text{e} \quad 2s \leq \sum_{j=1}^s |E_j| \leq |VG|.$$

Somando as duas desigualdades e dividindo por 2, obtemos  $r + s \leq |VG|$ , que é o que queríamos provar. O resultado se estende facilmente no caso de  $G$  ser um grafo desconexo. □

**Corolário 3.25** *Dado um grafo  $G$ , pode-se decidir em tempo  $O(|VG|^4)$  se  $G$  é clique-inverso de um grafo bipartido.* □

Como  $BIPARTIDO \subseteq CLIQUE - HELLY$ , vale também a inclusão  $K(BIPARTIDO) \subseteq K^{-1}(BIPARTIDO)$  (Teorema 2.4). Isto pode ser comprovado alternativamente pela caracterização da classe dos grafos clique de grafos bipartidos fornecida em [17].

**Teorema 3.26** (Hedetniemi e Slater [17]) *Um grafo  $G$  é o grafo clique de um grafo bipartido se e somente se  $K(G)$  é bipartido e  $|D \cap E| \leq 1$ , para quaisquer duas cliques maximais distintas  $D$  e  $E$  de  $G$ .*  $\square$

Em outras palavras, vale para os bipartidos um resultado análogo ao dos grafos livres de triângulos. O Teorema 3.26 diz que

$$K(\text{BIPARTIDO}) = K^{-1}(\text{BIPARTIDO}) \cap 1 - \text{SECCIONADO}.$$

Portanto, o reconhecimento de grafos clique de grafos bipartidos pode ser feito em tempo polinomial.

Outra caracterização de  $K(\text{BIPARTIDO})$  se encontra em [16]. É uma caracterização por subgrafos proibidos, que pode ser demonstrada como um corolário simples do Teorema 3.23.

**Teorema 3.27** (Hedetniemi [16]) *Um grafo  $G$  é grafo clique de um grafo bipartido se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido  $C_{2k+5}$  ( $k \geq 0$ ),  $K_4 - e$  ou  $K_{1,3}$ .*

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ): Se  $G$  contém  $C_{2k+5}$  ou  $K_{1,3}$  induzidos, então  $G$  não pertence a  $K^{-1}(\text{BIPARTIDO})$ , donde  $G$  não pertence a  $K(\text{BIPARTIDO})$ . Se  $G$  contém  $K_4 - e$  induzido, então existem duas cliques maximais cuja intersecção tem cardinalidade maior que um, uma contradição.

( $\Leftarrow$ ): Como  $G$  não contém  $K_4 - e$  induzido, então é claro que  $G$  não contém um 4-leque induzido nem uma 4-roda induzida. Como  $G$  também não contém  $C_{2k+5}$  ou  $K_{1,3}$  induzidos, segue (pelo Teorema 3.23) que  $K(G)$  é

bipartido. Além disso, temos que  $|D \cap E| \leq 1$  para quaisquer duas cliques maximais distintas  $D$  e  $E$  em  $G$ . Caso contrário,  $G$  teria  $K_4 - e$  como subgrafo induzido. Logo,  $G$  de fato é grafo clique de um grafo bipartido.  $\square$

Encerramos esta seção observando que se  $H$  é de fato o grafo clique de um grafo bipartido, pode-se construir  $G$  bipartido tal que  $H = K(G)$  em tempo polinomial.

### 3.5 Grafos clique-inversos de grafos bipartidos cordais

A classe dos grafos bipartidos cordais tem sido muito estudada e várias caracterizações para a mesma já foram propostas. A noção de cordalidade para grafos bipartidos está fortemente relacionada com a noção de cordalidade forte. Existem para esta classe algoritmos de reconhecimento rápidos, e também interessantes aplicações em projeto de bancos de dados relacionais. Para uma breve resenha sobre os grafos bipartidos cordais, indicamos [3].

**Definição 3.28** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo bipartido cordal se  $K(G)$  é um grafo bipartido cordal.*

Para caracterizar a classe dos grafos clique-inversos dos grafos bipartidos cordais, necessitamos de uma definição prévia. Seja  $C = v_1 v_2 \dots v_k v_1$  ( $k \geq 4$ ) um ciclo num grafo  $G$ . Dizemos que  $C$  admite uma divisão par se existe um vértice  $w$  de  $G$  não pertencente ao ciclo  $C$  tal que  $w$  é adjacente a dois pares de vértices consecutivos  $v_i, v_{i+1}$  e  $v_j, v_{j+1}$  (onde  $1 \leq i < j \leq k$ ,  $i$  e  $j$  não são consecutivos, o valor  $j + 1$  é tomado em módulo e  $j - (i + 1)$  é par). Note que  $w$  forma dois triângulos ( $G[w, v_i, v_{i+1}]$  e  $G[w, v_j, v_{j+1}]$ ) que não possuem aresta em comum. Veja a Figura 3.24.

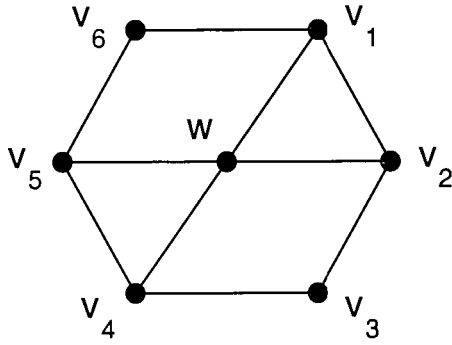


Figura 3.24: O ciclo  $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$  admite uma divisão par.

Estamos agora em condições de enunciar uma caracterização para a classe  $K^{-1}(\text{BIPARTIDO CORDAL})$  em termos da classe  $K^{-1}(\text{BIPARTIDO})$ :

**Teorema 3.29** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo bipartido cordal se e somente se  $G \in K^{-1}(\text{BIPARTIDO})$  e todo ciclo induzido par em  $G$  de tamanho maior ou igual a seis admite uma divisão par.*

### Demonstração.

( $\Rightarrow$ ): Suponha que  $K(G)$  seja bipartido cordal. Então, é claro que  $K(G)$  é bipartido, donde  $G \in K^{-1}(\text{BIPARTIDO})$ . Seja agora  $C = v_1v_2 \dots v_{2k}v_1$  um subgrafo induzido de  $G$  da forma  $C_{2k}$  ( $k \geq 3$ ). Seja  $M_i$  clique maximal de  $G$  que contém a aresta  $\{v_i, v_{i+1}\}$  ( $1 \leq i \leq 2k$ , índice tomado em módulo). Então, é claro que  $M_1M_2 \dots M_{2k}M_1$  é um ciclo em  $K(G)$ . Suponha agora por absurdo que  $C$  não admita divisão par. Então,  $M_i \cap M_j = \emptyset$  para índices  $i$  e  $j$  não consecutivos tais que  $1 \leq i < j \leq 2k$  e  $j - (i + 1)$  é par. Como também vale  $M_i \cap M_j = \emptyset$  para índices  $i$  e  $j$  não consecutivos tais que  $1 \leq i < j \leq 2k$  e  $j - (i + 1)$  é ímpar (caso contrário  $K(G)$  teria um ciclo ímpar, o que é impossível, já que  $K(G)$  é bipartido), segue que  $M_1M_2 \dots M_{2k}M_1$  é um ciclo induzido em  $K(G)$  para  $k \geq 3$ . Isto é uma contradição.

( $\Leftarrow$ ): Por hipótese,  $K(G)$  é bipartido. Vamos agora mostrar que  $K(G)$  não possui subgrafo induzido a  $C_{2k}$  para  $k \geq 3$ . Suponha por absurdo que

$C = M_1 M_2 \dots M_{2k} M_1$  seja um ciclo induzido em  $K(G)$  para  $k \geq 3$ . Então, existe um ciclo  $C_G = v_1 v_2 \dots v_{2k} v_1$  em  $G$  tal que a aresta  $\{v_i, v_{i+1}\}$  está contida na clique  $M_i$ , para  $1 \leq i \leq 2k$  ( $i$  tomado em módulo). Por hipótese,  $C_G$  admite uma divisão par. Seja então  $w \in VG$  tal que  $w$  é adjacente a  $v_i, v_{i+1}, v_j$  e  $v_{j+1}$  (onde  $1 \leq i < j < 2k$ ,  $i$  e  $j$  não são consecutivos,  $j + 1$  é tomado em módulo e  $j - (i + 1)$  é par). Observe que  $v_i$  pertence às cliques  $M_{i-1}$  e  $M_i$ . Como  $v_i$  não pode pertencer a mais do que duas cliques maximais (caso contrário  $K(G)$  conteria um triângulo), e como  $w, v_i$  e  $v_{i+1}$  pertencem a uma mesma clique maximal, segue que  $w \in M_{i-1}$  ou  $w \in M_i$ . Da mesma forma,  $w \in M_{j-1}$  ou  $w \in M_j$ . Logo, uma das cliques do conjunto  $\{M_{i-1}, M_i\}$  intercepta alguma clique do conjunto  $\{M_{j-1}, M_j\}$ . Como  $i$  e  $j$  não são consecutivos e  $j - (i + 1)$  é par, segue que  $j - i \geq 3$ . Isto é, existem duas cliques não consecutivas no ciclo  $C = M_1 M_2 \dots M_{2k} M_1$  que se interceptam. Isto é uma contradição, pois  $C$  por suposição é induzido.  $\square$

Apresentamos a seguir um algoritmo polinomial de reconhecimento da classe  $K^{-1}(BIPARTIDO\ CORDAL)$  que não está diretamente baseado na caracterização do teorema anterior. Dado um grafo  $G$ , o algoritmo testa se  $G \in K^{-1}(BIPARTIDO)$ , mas não testa a admissibilidade de divisões pares em subgrafos induzidos da forma  $C_{2k}$  ( $k \geq 3$ ). A idéia do algoritmo é construir  $K(G)$  e verificar se  $K(G)$  é bipartido cordal.

**Teorema 3.30** *Dado um grafo  $G$ , o problema de decidir se  $G$  é clique-inverso de um grafo bipartido cordal pertence a  $P$ .*

**Demonstração.** O algoritmo descrito a seguir decide se  $G$  pertence a  $K^{-1}(BIPARTIDO\ CORDAL)$ . Dado  $G$ , em primeiro lugar testamos se  $K(G)$  é um grafo bipartido. Pelo Teorema 3.25, esta tarefa pode ser executada em tempo polinomial através da construção de  $K(G)$ . Caso a resposta deste teste seja ‘não’, então o algoritmo devolve ‘não’ como resposta, pois se  $K(G)$  não é bipartido então é claro que também não é bipartido cordal.

Caso a resposta do teste seja ‘sim’, então faz-se um teste adicional sobre  $K(G)$  para verificar se este é bipartido cordal. Por [14], sabe-se que esta tarefa pode ser executada eficientemente em tempo polinomial no tamanho de  $K(G)$ . Como o Lema 3.24 diz que o tamanho de  $K(G)$  é polinomial no tamanho de  $G$ , segue-se o teorema.  $\square$

Vamos agora provar que vale também para os bipartidos cordais a igualdade

$$K(\text{BIP. CORDAL}) = K^{-1}(\text{BIP. CORDAL}) \cap 1 - \text{SECCIONADO}.$$

**Teorema 3.31** *Um grafo  $G$  é o grafo clique de um grafo bipartido cordal se e somente se  $K(G)$  é bipartido cordal e  $|D \cap E| \leq 1$ , para quaisquer duas cliques maximais distintas  $D$  e  $E$  de  $G$ .*

### Demonstração.

( $\Rightarrow$ ): Seja  $H$  um grafo bipartido cordal tal que  $G = K(H)$ . Então,  $G$  é o grafo clique de um grafo bipartido. Logo, pelo Teorema 3.26,  $K(G)$  é bipartido e  $|D \cap E| \leq 1$ , para quaisquer duas cliques maximais distintas  $D$  e  $E$  de  $G$ . Resta mostrar que  $K(G)$  não possui  $C_{2k}$  ( $k \geq 3$ ) como subgrafo induzido. Como  $H$  é clique-Helly,  $K^2(H) = K(G)$  é um subgrafo induzido de  $H$  (Teorema 2.4). Assim,  $K(G)$  não pode conter o ciclo  $C_{2k}$  ( $k \geq 3$ ) como subgrafo induzido, caso contrário  $H$  também contém este ciclo como subgrafo induzido (uma contradição, pois  $H$  é bipartido cordal).

( $\Leftarrow$ ): Seja  $G$  um grafo tal que  $K(G)$  é bipartido cordal e  $|D \cap E| \leq 1$ , para quaisquer duas cliques maximais distintas  $D$  e  $E$  de  $G$ . Então,  $K(G)$  é bipartido. Logo, pelo Teorema 3.26,  $G$  é grafo clique de um grafo bipartido  $H$ . Vamos mostrar que  $H$  é bipartido cordal. Suponha por absurdo que  $H$  possua como subgrafo induzido um ciclo  $C_H = v_1 v_2 \dots v_{2k} v_1$  ( $k \geq 3$ ) sem cordas. Como  $H$  é bipartido,  $M_i = \{v_i, v_{i+1}\}$  ( $1 \leq i \leq 2k$ , tomado em



módulo) é uma clique maximal de  $H$ . Logo,  $C = M_1M_2 \dots M_{2k}M_1$  é um ciclo em  $G = K(H)$ . O ciclo  $C$  não possui cordas, pois se  $M_i$  interceptar  $M_j$  para  $i$  e  $j$  não consecutivos, então ou  $|M_i| > 2$  ou  $|M_j| > 2$  (contradição). Como  $G \in K^{-1}(\text{BIPARTIDO CORDAL})$ , segue pelo Teorema 3.29 que  $C$  tem uma 4-divisão par. Seja pois  $M \in VG$ ,  $M \notin \{M_1, \dots, M_{2k}\}$ , tal que  $M$  intercepta  $M_i, M_{i+1}, M_j$  e  $M_{j+1}$  (onde  $1 \leq i < j < 2k$ ,  $i$  e  $j$  não são consecutivos,  $j + 1$  é tomado em módulo e  $j - (i + 1)$  é par). Como  $|M| = 2$  (pois  $M$  é clique maximal de  $H$  e  $H$  é bipartido), segue que  $M = \{v_{i+1}, v_{j+1}\}$ . Isto é,  $M$  corresponde a uma aresta ligando dois vértices não consecutivos no ciclo  $C_H$ . Mas isto é uma contradição, pois por suposição  $C_H$  é ciclo induzido.  $\square$

Como consequência do Teorema 3.31, temos:

**Corolário 3.32** *A classe  $K(\text{BIPARTIDO CORDAL})$  possui algoritmo de reconhecimento polinomial.*

## 3.6 Grafos clique-inversos de árvores

**Definição 3.33** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de uma árvore se  $K(G)$  é uma árvore.*

Os grafos clique-inversos de árvores correspondem exatamente aos dominós cordais.

**Teorema 3.34** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de uma árvore se e somente se  $G$  é cordal e cada vértice de  $G$  pertence no máximo a duas cliques maximais.*

**Demonstração.**

( $\Rightarrow$ ): Suponha que  $G$  não seja cordal. Seja  $v_1v_2 \dots v_kv_1$  um ciclo induzido em  $G$  com  $k \geq 4$ . Então, existem  $k$  cliques maximais distintas  $M_1, M_2, \dots, M_k$  em  $G$  onde  $M_i$  contém a aresta  $\{v_i, v_{i+1}\}$  e  $M_i$  intercepta  $M_{i+1}$  (índices tomados em módulo). Portanto,  $M_1M_2 \dots M_kM_1$  é um ciclo de comprimento mínimo quatro em  $K(G)$ , uma contradição.

Suponha agora que  $G$  possua um vértice que pertença a pelo menos três cliques maximais de  $G$ . Então, é fácil ver que estas cliques correspondem a um ciclo de comprimento mínimo três em  $K(G)$ , outra contradição.

( $\Leftarrow$ ): Suponha que  $K(G)$  não seja uma árvore. Seja  $M_1M_2 \dots M_kM_1$  um ciclo em  $K(G)$ . Temos dois casos possíveis:

Caso 1:  $k = 3$ . Seja  $R = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ . É claro que  $R = \emptyset$ , pois por hipótese cada vértice de  $G$  pertence no máximo a duas cliques maximais. Sejam  $v_{12} \in M_1 \cap M_2$ ,  $v_{13} \in M_1 \cap M_3$  e  $v_{23} \in M_2 \cap M_3$ . Observemos que  $v_{12}$ ,  $v_{13}$  e  $v_{23}$  formam um triângulo em  $G$ . Logo existe uma quarta clique  $M$  contendo estes vértices, distinta de  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ . Mas isto é uma contradição, pois nesse caso, por exemplo,  $v_{12}$  pertence a  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M$ , contrariando a hipótese.

Caso 2:  $k > 3$ . Seja  $v_i \in M_i \cap M_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq k$ , índices tomados em módulo). Então,  $C = v_1v_2 \dots v_kv_1$  é um ciclo em  $G$  (estes vértices são distintos, caso contrário haveria um vértice pertencendo a mais de duas cliques maximais de  $G$ ). Como  $G$  é cordal,  $C$  tem uma corda triangular  $\{v_j, v_{j+2}\}$ . Os vértices  $v_j$ ,  $v_{j+1}$  e  $v_{j+2}$  formam um triângulo em  $G$ , donde existe uma nova clique  $M$  distinta de  $M_1, M_2, \dots, M_k$  contendo estes três vértices (se alguma clique  $M_i$  contivesse estes três vértices, haveria um vértice pertencendo a mais de duas cliques maximais de  $G$ ). Novamente, temos uma contradição:  $v_j$ , por exemplo, pertence a  $M_j$ ,  $M_{j+1}$  e  $M$ . □

Uma caracterização alternativa para  $K^{-1}(\text{ÁRVORE})$  é por subgrafos proibidos. Veja a Figura 3.25.

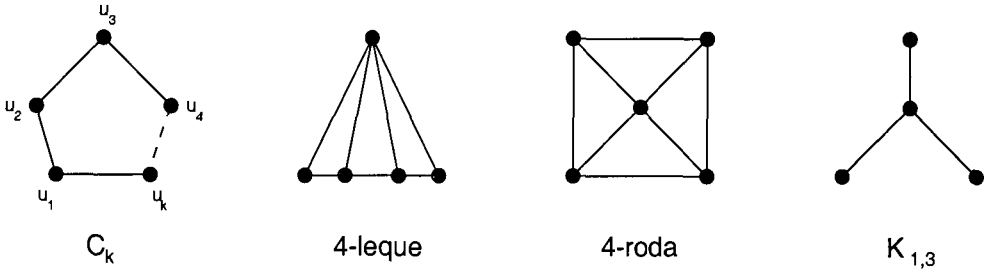


Figura 3.25: Subgrafos proibidos para  $K^{-1}(\text{ÁRVORE})$ .

**Corolário 3.35** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de uma árvore se e somente se  $G$  não contém como subgrafo induzido nenhum dos seguintes grafos:  $C_k$  ( $k \geq 4$ ),  $K_{1,3}$ , 4-leque, 4-roda.*

**Demonstração.** Se  $G \in K^{-1}(\text{ÁRVORE})$ , então  $G$  é clique-inverso de um grafo livre de triângulos, donde pelo Corolário 3.20  $G$  não contém como subgrafo induzido  $K_{1,3}$ , 4-leque e 4-roda. Além disso, pelo Teorema 3.34,  $G$  não contém  $C_k$  ( $k \geq 4$ ), donde segue a primeira parte. Inversamente, se  $G$  não contém  $C_k$  ( $k \geq 4$ ),  $K_{1,3}$ , 4-leque e 4-roda, então  $G$  é cordal e  $K(G)$  não contém triângulo, isto é, cada vértice de  $G$  pertence no máximo a duas cliques maximais. Logo,  $G$  é um dominó cordal, donde pelo Teorema 3.34  $G$  é clique-inverso de uma árvore.  $\square$

O resultado  $K^{-1}(\text{ÁRVORE}) = \text{DOMINÓ} \cap \text{CORDAL}$  leva diretamente a um algoritmo polinomial para reconhecer os grafos clique-inversos de árvores:

**Teorema 3.36** *Dado um grafo  $G$ , o problema de decidir se  $G$  é clique-inverso de uma árvore pertence a  $P$ .*

**Demonstração.** A caracterização fornecida pelo Teorema 3.34 fornece um algoritmo simples para testar se  $G$  é clique-inverso de uma árvore. Em

primeiro lugar, verifica-se se  $G$  é cordal, um teste bem conhecido e de complexidade polinomial [35]. A seguir, verifica-se se cada vértice de  $G$  pertence a no máximo 2 cliques maximais. Este segundo teste pode ser facilmente executado em tempo  $O(|VG|^3)$  por vértice [19], resultando na complexidade final  $O(|VG|^4)$ .  $\square$

Em [17] prova-se também que

$$K(\text{ÁRVORE}) = K^{-1}(\text{ÁRVORE}) \cap 1 - \text{SECCIONADO}.$$

Além disso, pelo Teorema 1.1, é fácil ver que  $K(\text{ÁRVORE}) = \text{BLOCO}$ . Assim, os grafos clique de árvores também podem ser reconhecidos em tempo polinomial.

### 3.7 Relações de continência

A figura a seguir mostra relações de continência entre as classes mais importantes apresentadas neste capítulo. Uma seta orientada da classe  $A$  para a classe  $B$  indica que  $A$  está contida propriamente em  $B$ . Para  $F = \text{ÁRVORE}, \text{BIPARTIDO CORDAL}, \text{BIPARTIDO}, \text{LIVRE DE TRIÂNGULOS}$  vale  $K(F) = K^{-1}(F) \cap 1 - \text{SECCIONADO}$ , daí as setas horizontais. As demais setas são consequências do fato de que se  $A \subseteq B$ , então  $K(A) \subseteq K(B)$  e  $K^{-1}(A) \subseteq K^{-1}(B)$ . A classe  $K^{-1}(\text{BLOCO})$  será discutida no próximo capítulo. O reconhecimento desta classe é um problema Co-NP-completo.

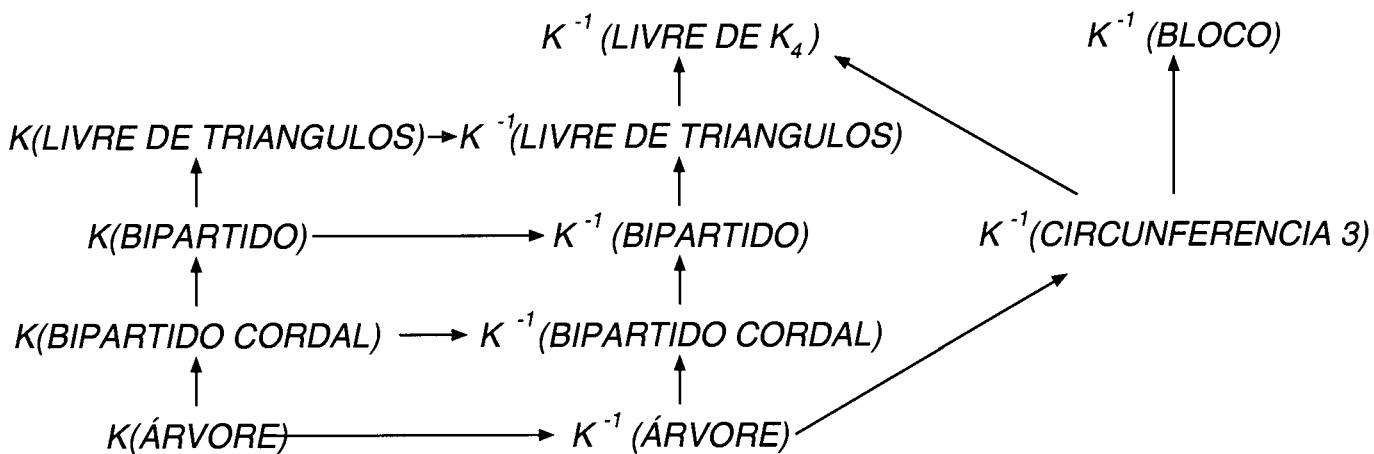


Figura 3.26: Relações de continência entre classes.

# Capítulo 4

## Classes com reconhecimento (Co-)NP-completo

Trataremos agora de classes de grafos clique-inversos onde o problema de reconhecer se um dado grafo  $G$  pertence a uma destas classes é NP-completo ou Co-NP-completo. Os problemas de reconhecimento apresentados neste capítulo apresentam uma característica comum: as provas de que pertencem a NP ou a Co-NP se baseiam no fato de que, no certificado, o número de cliques maximais é polinomialmente limitado no tamanho de  $G$ . Isso garante que a verificação da validade do certificado pode ser feita em tempo polinomial.

As provas de completude para os problemas em Co-NP utilizam transformações a partir do problema de reconhecimento de grafos clique-completos, que é Co-NP-completo [22]. Algumas são bastante simples e diretas.

As provas de completude para os problemas em NP utilizam transformações a partir do problema 3-SAT (veja [8]). A técnica empregada consiste em estender transformações conhecidas, construindo um grafo clique-inverso do grafo que tinha sido gerado na transformação.

Neste capítulo mostramos que os problemas de reconhecimento das classes

a seguir são Co-NP-completos: grafos clique-inversos de grafos cordais, co-cordais, de partição, co-bipartidos, co-bipartidos-cordais, de intervalo, de co-intervalo, de comparabilidade, de co-comparabilidade, de permutação, livres de TA e bloco. Mostramos também que os seguintes problemas são NP-completos:

- Dados  $G$  grafo conexo e  $k$  número inteiro (menor ou igual ao número de cliques maximais de  $G$ ),  $\chi(K(G)) \leq k$  ?
- Dados  $G$  um grafo conexo e  $k$  um número inteiro tal que  $1 \leq k \leq \frac{1}{2}|VG|$ ,  $\alpha(K(G)) \geq k$  ?

De modo distinto ao do capítulo anterior, não nos preocupamos aqui em fornecer caracterizações para as classes apresentadas neste capítulo, já que tais caracterizações, uma vez encontradas, não podem conduzir a algoritmos polinomiais de reconhecimento (a menos que  $P = NP$ ). Isto não quer dizer que não exista motivação teórica para buscar tais caracterizações, pois elas sempre podem conduzir a relações interessantes com classes já existentes.

## 4.1 Um resultado preliminar

O lema a seguir será de grande utilidade para a comprovação da validade de certificados para a maioria dos problemas deste capítulo. Em poucas palavras, ele estabelece que se  $K(G)$  possui certos subgrafos induzidos, então as cliques maximais de  $G$  correspondentes a estes subgrafos são em número polinomial em relação ao tamanho de  $G$ . A Figura 4.1 exhibe os grafos  $P_k$ ,  $\overline{P}_k$ ,  $C_k$  e  $\overline{C}_k$  (para  $k = 5$ ), que compõem o enunciado do Lema 4.1.

**Lema 4.1** *Seja  $G$  um grafo conexo. Sejam  $M_1, M_2, \dots, M_k$  ( $k \geq 3$ ) cliques maximais de  $G$ , e sejam  $w_1, w_2, \dots, w_k$  os vértices correspondentes a estas cliques em  $K(G)$ , respectivamente. Se  $w_1, w_2, \dots, w_k$  induzem algum dentre os grafos  $P_k, \overline{P}_k, C_k$  e  $\overline{C}_k$ , então  $k = O(|VG|)$ .*

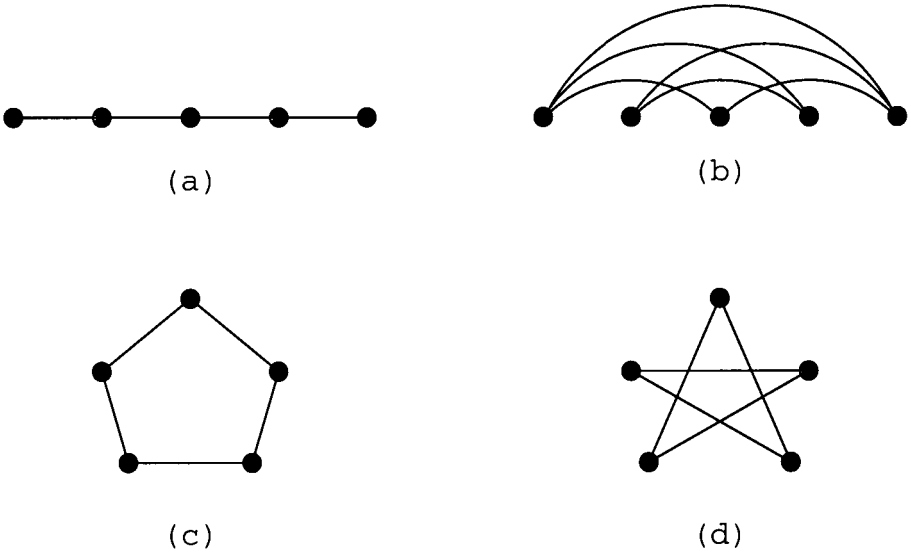


Figura 4.1: Grafos  $P_5$  (a),  $\overline{P_5}$  (b),  $C_5$  (c) e  $\overline{C_5}$  (d).

**Demonstração.** Vamos dividir a demonstração nos 4 casos possíveis.

$$(i) K(G)[w_1, \dots, w_k] = P_k$$

Neste caso, temos  $M_i \cap M_j \neq \emptyset$  para  $j - i = 1$  e  $M_i \cap M_j = \emptyset$  para  $j - i > 1$  ( $1 \leq i < j \leq k$ ). Seja pois  $v_i \in M_i \cap M_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq k - 1$ ). Então, todos os  $v_i$ 's devem ser distintos, caso contrário duas cliques de índices não consecutivos se interceptariam (contradição). Logo,  $k - 1 \leq |VG|$ , isto é,  $k = O(|VG|)$ .

$$(ii) K(G)[w_1, \dots, w_k] = C_k$$

Neste caso,  $K(G)[w_1, \dots, w_{k-1}] = P_{k-1}$ , donde pelo caso (i)  $k - 1$  é  $O(|VG|)$ , isto é,  $k = O(|VG|)$ .

$$(iii) K(G)[w_1, \dots, w_k] = \overline{C_k}$$

Neste caso, a clique  $M_i$  intercepta todas as cliques do conjunto  $C = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$ , exceto  $M_{i-1}$  e  $M_{i+1}$  (índices tomados em módulo). Observemos que: (i) cada vértice de  $G$  pode pertencer no máximo a  $\lfloor k/2 \rfloor$



cliques do conjunto  $C$ , caso contrário existiriam duas cliques com índices consecutivos contendo um mesmo vértice (e, portanto, se interceptariam, o que é uma contradição); (ii) o número de intersecções entre cliques do conjunto  $C$  é  $k(k-1)/2 - k = (k^2 - 3k)/2$ . Por (i), cada vértice pertence no máximo a  $\lfloor k/2 \rfloor$  intersecções entre cliques do conjunto  $C$ , e este número de intersecções é limitado pelo valor  $\lfloor k/2 \rfloor |VG|$ . Logo, por (ii), temos que  $(k^2 - 3k)/2 \leq \lfloor k/2 \rfloor |VG|$ , donde  $k = O(|VG|)$ .

$$(iv) K(G)[w_1, \dots, w_k] = \overline{P_k}$$

Observe que o grafo  $\overline{P_k}$  é subgrafo induzido de  $\overline{C_{k+1}}$ . Assim, se  $K(G)$  contiver  $\overline{C_{k+1}}$  como subgrafo induzido, segue pelo caso (iii) que  $k+1$  é  $O(|VG|)$ , donde  $k = O(|VG|)$ . Se  $K(G)$  não contiver  $\overline{C_{k+1}}$  como subgrafo induzido, suponha sem perda de generalidade que  $w_1, w_2, \dots, w_k$  comparam em  $\overline{P_k}$  “nesta ordem” (isto é,  $w_1$  está ligado a  $w_3 \dots w_k$ ,  $w_2$  está ligado a  $w_4 \dots w_k$  etc.) Suponha também s.p.g. que  $k$  é par. Construamos um grafo  $G'$  a partir de  $G$ , acrescentando a  $G$  um triângulo formado por três novos vértices  $x, y$  e  $z$  de modo que  $x$  esteja ligado a todos os vértices pertencentes às cliques com índices pares do conjunto  $C = \{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  (excetuando-se  $M_k$ ), e  $y$  esteja ligado a todos os vértices pertencentes às cliques com índices ímpares (excetuando-se  $M_1$ ). Observe que  $M = \{x, y, z\}, M_1, M_2 \cup \{x\}, M_3 \cup \{y\}, \dots, M_{k-1} \cup \{y\}, M_k$  são cliques maximais em  $G'$ . Observe também que estas cliques induzem em  $K(G')$  o grafo  $\overline{C_{k+1}}$ . Logo, pelo item (iii),  $k+1$  é  $O(|VG'|)$ . Como  $|VG'| = |VG| + 3$ , segue que  $k = O(|VG|)$ .  $\square$

## 4.2 Grafos clique-inversos de grafos cordais

**Definição 4.2** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo cordal se  $K(G)$  é cordal.*

Esta classe também se encontra sob o nome de *grafos clique-cordais* [4]. Sabe-se que o grafo clique de uma árvore expandida é um grafo cordal, donde conclui-se que as árvores expandidas pertencem a  $K^{-1}(CORDAL)$ . No entanto, a pirâmide não é uma árvore expandida e seu grafo clique também é cordal (veja a Figura 4.2), o que mostra que a inclusão das árvores expandidas em  $K^{-1}(CORDAL)$  é própria.

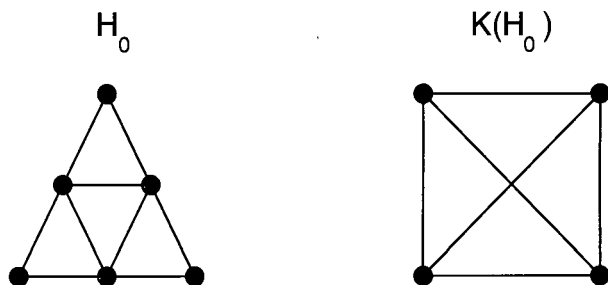


Figura 4.2: O grafo clique da pirâmide é um grafo cordal.

O próximo teorema é uma primeira tentativa de caracterização para a classe  $K^{-1}(CORDAL)$ . Ele estabelece uma condição necessária e suficiente para que  $K(G)$  seja cordal em termos de ciclos de  $G$  onde cada aresta pertence a uma clique maximal distinta de  $G$ . Este resultado, na verdade, não revela muito a respeito da estrutura dos grafos em  $K^{-1}(CORDAL)$ , pois é uma simples colocação da definição de cordalidade para  $K(G)$ .

**Teorema 4.3** *Seja  $G$  um grafo conexo. Então,  $K(G)$  é cordal se e somente se para todo ciclo em  $G$  formado por arestas  $e_1e_2 \dots e_k$  ( $k \geq 4$ ) tal que cada  $e_i$  está contida numa clique maximal distinta  $M_i$  de  $G$ , existem dois índices não consecutivos  $r$  e  $s$  entre 1 e  $k$  tais que  $M_r$  e  $M_s$  se interceptam.*

**Demonstração.**

( $\Leftarrow$ ): Suponha por absurdo que  $K(G)$  não seja cordal. Então existe um ciclo sem cordas  $C = M_1M_2 \dots M_kM_1$  ( $k \geq 4$ ) em  $K(G)$ . Seja  $v_i \in M_i \cap M_{i+1}$  ( $v_i \in VG$ , índices tomados em módulo). É claro que os  $v_i$ 's são distintos, caso contrário haveria cordas no ciclo  $C$  em  $K(G)$ . Considere agora o ciclo

$C_G$  em  $G$  formado pelas arestas  $e_1e_2\dots e_k$  onde  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$  ( $1 \leq i \leq k$ , tomado em módulo). Observe que  $e_i \subseteq M_i$ . Além disso, para  $r \neq s$ , vale  $M_r \cap M_s = \emptyset$  se e somente se  $M_r$  e  $M_s$  são cliques não consecutivas em  $C$ . Portanto, a existência de  $C_G$  implica uma contradição.

( $\Rightarrow$ ): Seja  $C_G$  um ciclo qualquer em  $G$  com arestas  $e_1e_2\dots e_k$  ( $k \geq 4$ ), e sejam  $M_1, M_2, \dots, M_k$  cliques maximais distintas de  $G$  tais que  $e_i \subseteq M_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Para  $i$  entre 1 e  $k$  tomado em módulo, escrevamos  $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ . Observe que  $v_i$  é compartilhado pelas cliques  $M_i$  e  $M_{i+1}$ . Logo,  $C = M_1M_2\dots M_kM_1$  é um ciclo em  $K(G)$ . Como  $K(G)$  é cordal, existem  $r$  e  $s$  entre 1 e  $k$  não consecutivos tais que  $M_r \cap M_s \neq \emptyset$ .  $\square$

O próximo teorema estabelece que o problema de reconhecer se um grafo pertence a  $K^{-1}(\text{CORDAL})$  é Co-NP-completo. Dado um grafo  $G$ , um certificado que comprova que  $K(G)$  não é cordal é formado por um número polinomial de cliques maximais de  $G$ , donde o problema está em Co-NP. A prova da NP-dificuldade (“NP-hardness”) utiliza o fato de que o reconhecimento de grafos clique-completos é Co-NP-completo (Teorema 2.10).

**Teorema 4.4** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos cordais é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado para comprovar que  $K(G)$  não é cordal consiste de um conjunto  $C$  de cliques maximais distintas  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $G$  ( $k \geq 4$ ) tais que  $M_i$  intercepta apenas as cliques  $M_{i-1}$  e  $M_{i+1}$  (índices tomados em módulo). Este é de fato um certificado válido, pois os vértices em  $K(G)$  correspondentes a estas cliques induzem  $C_k$ . Como  $k = O(|VG|)$  pelo Lema 4.1, pode-se facilmente verificar em tempo polinomial a validade do certificado, uma vez que testar se duas cliques maximais se interceptam requer tempo  $O(|VG|^2)$ . Portanto, o problema de reconhecer grafos clique-inversos de grafos cordais pertence a Co-NP.

Para provar a NP-dificuldade do problema, faremos uma transformação a partir do problema de reconhecimento de grafos clique-completos (Lucchesi, Mello e Szwarcfiter [22]), que é Co-NP-completo. Dado um grafo  $H$  instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos, construímos em tempo polinomial no tamanho de  $H$  um grafo  $G$ , instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos cordais, formado por duas cópias  $H_1$  e  $H_2$  de  $H$  onde cada vértice de  $H_1$  está ligado a todos os vértices de  $H_2$ . Vamos mostrar que  $H$  não é clique-completo se e somente se  $K(G)$  não é cordal. Se  $H$  não é clique-completo, existem  $M'$  e  $M''$  cliques maximais de  $H$  tais que  $M' \cap M'' = \emptyset$ . Sejam pois  $M'_1, M''_1 \in H_1$  e  $M'_2, M''_2 \in H_2$  tais que  $M'_1$  e  $M''_1$  correspondem a  $M'$ , e  $M'_2$  e  $M''_2$  correspondem a  $M''$ . Observe no desenho esquemático da Figura 4.3 que  $M'_1 \cup M'_2$ ,  $M'_1 \cup M''_2$ ,  $M''_1 \cup M'_2$  e  $M''_1 \cup M''_2$  são cliques maximais de  $G$  que induzem um ciclo de comprimento quatro sem cordas em  $K(G)$ , donde  $K(G)$  não é cordal. Por outro lado, se  $H$  é clique-completo, então  $G$  também o é, isto é,  $K(G)$  é um grafo completo. Logo,  $K(G)$  é cordal.  $\square$

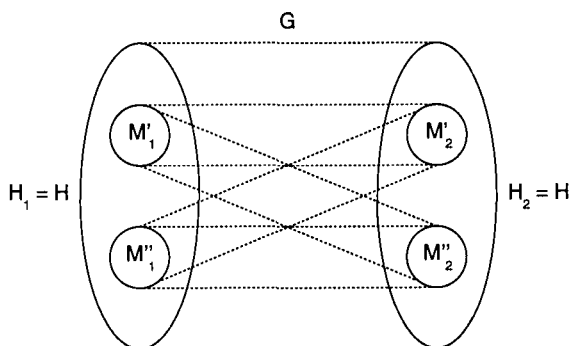


Figura 4.3: Se  $H$  não é clique-completo,  $K(G)$  não é cordal.

### 4.3 Grafos clique-inversos de grafos co-cordais

**Definição 4.5** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo co-cordal se  $\overline{K(G)}$  é cordal.*

Utilizando uma demonstração semelhante à da seção anterior, pode-se mostrar também que o reconhecimento de  $K^{-1}(CO - CORDAL)$  é Co-NP-completo. Dado um grafo  $G$ , um certificado que comprova que  $K(G)$  não é co-cordal (ou, equivalentemente, que  $\overline{K(G)}$  não é cordal) é formado por um número polinomial de cliques maximais de  $G$ , e portanto pode ser verificado em tempo polinomial. Isto é, saber se  $\overline{K(G)}$  não é cordal é um problema pertencente a Co-NP. A prova da NP-dificuldade é uma variação da prova apresentada na seção anterior. Dado um grafo  $H$ , instância para o reconhecimento de grafos clique-completos, constrói-se em tempo polinomial um grafo  $G$  tal que  $H$  é clique-completo se e somente se  $\overline{K(G)}$  não é cordal.

**Teorema 4.6** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos co-cordais é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que evidencie que  $\overline{K(G)}$  não é cordal é um conjunto  $C$  de cliques maximais distintas  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $G$  ( $k \geq 4$ ) tais que  $M_i$  intercepta todas as cliques do conjunto, exceto  $M_{i-1}$  e  $M_{i+1}$  (índices tomados em módulo). Este é de fato um certificado válido, pois os vértices em  $K(G)$  correspondentes a estas cliques induzem  $\overline{C_k}$ . Pelo Lema 4.1,  $k = O(|VG|)$ , e portanto o certificado pode ser verificado em tempo polinomial. Conclui-se assim que o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos co-cordais pertence a Co-NP.

A prova da NP-dificuldade consiste numa redução a partir do problema de reconhecimento de grafos clique-completos [22]. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Construamos  $G$ , instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos co-cordais, da maneira a seguir. Sejam  $H_1$  e  $H_2$  duas cópias de  $H$ , e  $u$  e  $v$  dois novos vértices tais que  $u$  e  $v$  estão ligados a todos os vértices de  $H_1$  e  $H_2$ , mas não estão ligados entre si. Definamos  $G$  como o grafo formado pelos vértices  $u$  e  $v$  ligados a  $H_1$  e  $H_2$  do modo descrito. Vamos mostrar que  $H$  não é clique-completo se e somente se  $\overline{K(G)}$  não é cordal. Se  $H$  não é clique completo, então existem duas cliques maximais disjuntas  $M'$  e  $M''$  em

$H$ . Sejam  $M'_1, M''_1 \in H_1$  e  $M'_2, M''_2 \in H_2$  tais que  $M'_1$  e  $M'_2$  correspondem a  $M'$ , e  $M''_1$  e  $M''_2$  correspondem a  $M''$ . Observe no desenho esquemático da Figura 4.4 que, em  $G$ ,  $\{u\} \cup M'_1$  e  $\{u\} \cup M'_2$  são cliques maximais que se interceptam. O mesmo vale para  $\{v\} \cup M''_1$  e  $\{v\} \cup M''_2$ . Além disso,  $\{u\} \cup M'_1$  tem intersecção nula tanto com  $\{v\} \cup M''_1$  como com  $\{v\} \cup M''_2$ . O mesmo vale para  $\{u\} \cup M'_2$  com relação a  $\{v\} \cup M''_1$  e  $\{v\} \cup M''_2$ . Logo, estas quatro cliques induzem um ciclo de comprimento quatro sem cordas em  $\overline{K(G)}$ , donde  $\overline{K(G)}$  não é cordal. Inversamente, se  $H$  é clique-completo, então  $G$  também o é. Logo,  $\overline{K(G)}$  é um grafo sem arestas, e portanto cordal.  $\square$

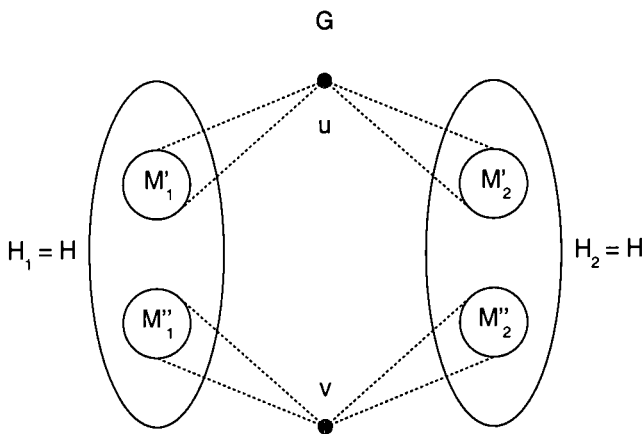


Figura 4.4: Se  $H$  não é clique-completo,  $\overline{K(G)}$  não é cordal.

## 4.4 Grafos clique-inversos de grafos de partição

**Definição 4.7** Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo de partição se  $K(G)$  é um grafo de partição.

Como um corolário dos resultados das duas seções anteriores, pode-se concluir que o reconhecimento de  $K^{-1}(\text{PARTIÇÃO})$  é Co-NP-completo. Dado

$G$ , observe que qualquer certificado que comprova que  $K(G)$  ou  $\overline{K(G)}$  não é cordal também comprova que  $K(G)$  não é de partição.

**Teorema 4.8** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de partição é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Qualquer um dos certificados apresentados nas duas seções anteriores (Teoremas 4.4 e 4.6) - que comprovam ou que  $K(G)$  não é cordal ou que  $\overline{K(G)}$  não é cordal - também comprova que  $K(G)$  não é de partição. Logo, o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de partição pertence a Co-NP.

A redução para a prova da NP-dificuldade utiliza a mesma construção do Teorema 4.4. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Seja  $G$  o grafo formado por duas cópias  $H_1$  e  $H_2$  de  $H$  onde cada vértice de  $H_1$  está ligado a todos os vértices de  $H_2$ . Já sabemos que se  $H$  não é clique-completo, então  $K(G)$  não é cordal, donde  $K(G)$  não é um grafo de partição. Inversamente, se  $H$  é clique-completo, então  $K(G)$  é um grafo completo e  $\overline{K(G)}$  é um grafo sem arestas. Portanto,  $K(G)$  e  $\overline{K(G)}$  são grafos cordais, donde  $K(G)$  é um grafo de partição.  $\square$

## 4.5 Grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos

**Definição 4.9** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo co-bipartido se  $\overline{K(G)}$  é um grafo bipartido.*

Embora seja possível saber se um grafo pertence a  $K^{-1}(BIPARTIDO)$  em tempo polinomial (como vimos no capítulo anterior), veremos que saber

se um grafo pertence a  $K^{-1}(CO - BIPARTIDO)$  é um problema Co-NP-completo.

**Teorema 4.10** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que evidencie que  $\overline{K(G)}$  não é bipartido é um conjunto de cliques maximais distintas  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $G$  ( $k$  ímpar e maior ou igual a três) tais que  $M_i$  intercepta todas as cliques do conjunto, exceto  $M_{i-1}$  e  $M_{i+1}$  (índices tomados em módulo). Este é de fato um certificado válido, pois os vértices em  $K(G)$  correspondentes a estas cliques induzem  $\overline{C_k}$  para  $k$  ímpar e maior ou igual a três. Pelo Lema 4.1,  $k = O(|VG|)$ . Portanto, o certificado pode de fato ser verificado em tempo polinomial no tamanho de  $G$ , donde o problema de reconhecer grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos pertence a Co-NP.

A prova da NP-dificuldade do problema consiste numa transformação a partir do problema de reconhecimento de grafos clique-completos [22]. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Construamos um grafo  $G$  que consiste exatamente em duas cópias de  $H$ , sem vértices ou arestas adicionais ( $G$  é portanto desconexo). Vamos agora mostrar que  $H$  não é clique-completo se e somente se  $\overline{K(G)}$  não é bipartido. Se  $H$  não é clique-completo, então existem duas cliques maximais disjuntas em  $H$ . Logo, por construção, existem quatro cliques maximais disjuntas em  $G$ , donde  $K(G)$  contém um conjunto independente de tamanho quatro. Isto implica que  $\overline{K(G)}$  contém  $K_4$  induzido, e portanto não é bipartido. Para a demonstração da segunda parte, vamos mostrar que se  $H$  é clique-completo, então  $\overline{K(G)}$  é bipartido. É claro que se  $H$  é clique-completo, então  $K(G)$  consiste em dois grafos completos idênticos e isolados um do outro. Portanto,  $\overline{K(G)}$  é um grafo bipartido (mais precisamente, bipartido completo). □



## 4.6 Grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos-cordais

**Definição 4.11** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo co-bipartido-cordal se  $\overline{K(G)}$  é bipartido cordal.*

Vimos no capítulo anterior que  $K^{-1}(BIPARTIDO\ CORDAL)$  é uma classe que apresenta algoritmo de reconhecimento polinomial. Seguindo a motivação da seção anterior, mostraremos que o reconhecimento da classe  $K^{-1}(CO - BIPARTIDO - CORDAL)$  é Co-NP-completo.

**Teorema 4.12** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos-cordais é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprova que  $\overline{K(G)}$  não é bipartido cordal é um conjunto  $C$  de cliques maximais distintas  $M_1, M_2, \dots, M_k$  de  $G$  ( $k = 3$  ou  $k \geq 5$ ) tais que  $M_i$  intercepta todas as cliques do conjunto, exceto  $M_{i-1}$  e  $M_{i+1}$  (índices tomados em módulo). Este é de fato um certificado válido, pois os vértices em  $\overline{K(G)}$  correspondentes a estas cliques induzem  $C_3$  ou  $C_k$  para  $k \geq 5$ . Pelo Lema 4.1,  $k = O(|VG|)$ , donde o certificado pode ser verificado em tempo polinomial. Conclui-se assim que o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos co-bipartidos-cordais pertence a Co-NP.

A prova da NP-dificuldade consiste na mesma redução do Teorema 4.10: seja  $G$  um grafo que consiste exatamente em duas cópias de  $H$ , sem vértices ou arestas adicionais. Já sabemos que se  $H$  não é clique-completo, então  $\overline{K(G)}$  não é bipartido. Logo,  $\overline{K(G)}$  não é bipartido cordal. Por outro lado, se  $H$  é clique-completo, então  $\overline{K(G)}$  é um grafo bipartido completo, donde  $\overline{K(G)}$  é bipartido cordal. □

## 4.7 Grafos clique-inversos de grafos de intervalo

**Definição 4.13** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo de intervalo se  $K(G)$  é um grafo de intervalo.*

Sabemos que a classe dos grafos de intervalo possui uma caracterização por subgrafos proibidos [21]. Isto é, um grafo *não* é de intervalo se e somente se ele *possui* como subgrafo induzido algum dos grafos da lista de proibidos. Portanto, se um grafo  $G$  possui certas cliques maximais que se interceptam de uma forma tal que em  $K(G)$  os vértices correspondentes a estas cliques induzem algum dos grafos da lista de proibidos, então  $K(G)$  não é um grafo de intervalo. Este fato dá uma indicação de que o problema de saber se  $K(G)$  é um grafo de intervalo é Co-NP-completo, pois as cliques maximais de  $G$  em questão formam um certificado para a resposta NÃO. Como veremos no teorema a seguir, o número de cliques neste certificado é polinomial no tamanho de  $G$ , o que mostra que ele pode ser verificado em tempo polinomial. A prova da NP-dificuldade que completa a demonstração do teorema é simples.

**Teorema 4.14** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de intervalo é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprove que  $K(G)$  não é um grafo de intervalo é um conjunto de cliques maximais de  $G$  que se interceptam de acordo com algum dos cinco esquemas apresentados na Figura 4.5 (pontos representam cliques maximais de  $G$ , e ligações entre pontos representam intersecções não nulas entre cliques).

Se  $K(G)$  contém como subgrafo induzido algum dos grafos da Figura 4.5, então  $K(G)$  não é um grafo de intervalo, e vice-versa [21]. Isto é,  $G$  não é clique-inverso de um grafo de intervalo. Observemos agora que os

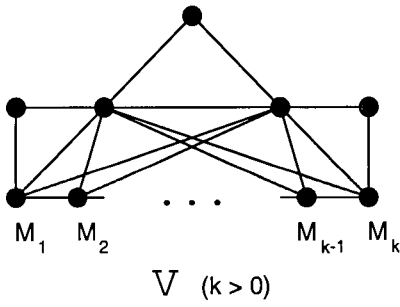
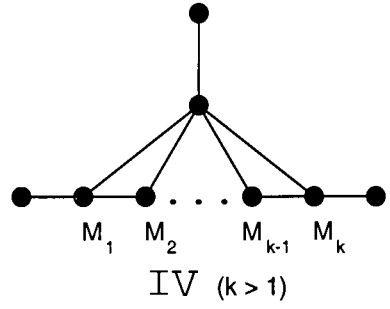
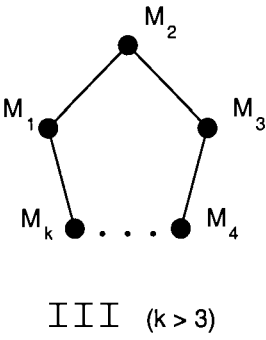
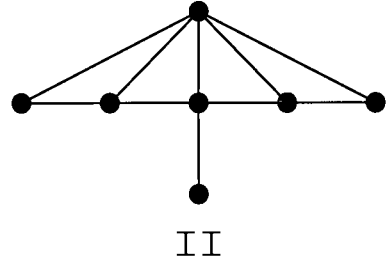
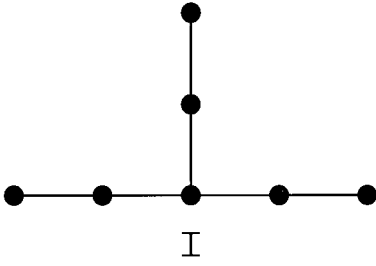


Figura 4.5: Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe  $K^{-1}(INTERVALO)$ .

certificados III, IV e V indicam que  $K(G)$  contém  $P_k$  induzido (não há cordas nos caminhos  $M_1M_2 \dots M_k$  em  $K(G)$ ). Logo, pelo Lema 4.1,  $k = O(|VG|)$ . Isto é, os certificados III, IV e V contêm  $O(|VG|)$  cliques maximais cada um. Como as quantidades de cliques nos certificados I e II são fixas, conclui-se que qualquer que seja o certificado apresentado para comprovar que  $K(G)$  não é um grafo de intervalo, este contém  $O(|VG|)$  cliques maximais, e portanto pode ser verificado em tempo polinomial no tamanho de  $G$ . Logo, o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de intervalo pertence a Co-NP.

Para mostrar a NP-dificuldade, faremos novamente uma redução a partir do problema de reconhecimento de grafos clique-completos [22]. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Construimos o mesmo grafo  $G$  da demonstração do Teorema 4.4. Recordemos que se  $H$  não é clique-completo, então  $K(G)$  não é cordal, donde  $K(G)$  não é de intervalo. Por outro lado, se  $H$  é clique-completo, então  $K(G)$  é completo, donde  $K(G)$  é de intervalo.  $\square$

## 4.8 Grafos clique-inversos de grafos de co-intervalo

**Definição 4.15** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo de co-intervalo se  $\overline{K(G)}$  é um grafo de intervalo.*

No próximo teorema mostraremos que o reconhecimento da classe  $K^{-1}(CO - INTERVALO)$  é Co-NP-completo. A demonstração é semelhante à da seção anterior. Observe que um grafo  $H$  não é de co-intervalo se e somente se seu complemento  $\overline{H}$  possui como subgrafo induzido algum dos grafos da lista de proibidos para a classe  $INTERVALO$ . Assim, dado um grafo  $G$ ,  $K(G)$  não é de co-intervalo se e somente se  $G$  possui certas cliques

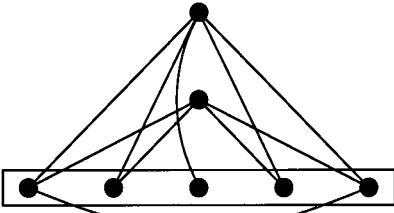
maximais que se interceptam de tal modo que os vértices correspondentes a estas cliques em  $\overline{K(G)}$  induzem algum dos grafos da lista de proibidos para a classe *INTERVALO*.

**Teorema 4.16** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de co-intervalo é Co-NP-completo.*

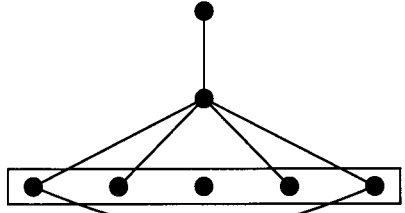
**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprove que  $\overline{K(G)}$  não é um grafo de intervalo é um conjunto de cliques maximais de  $G$  que se interceptam de acordo com algum dos cinco esquemas apresentados na Figura 4.6, onde uma barra envolvendo  $k$  pontos representa o grafo  $\overline{C_k}$ . Na verdade, estes esquemas correspondem exatamente aos complementos dos grafos apresentados na Figura 4.5. Se  $K(G)$  contém como subgrafo induzido algum dos grafos da Figura 4.6, então  $\overline{K(G)}$  contém como subgrafo induzido algum dentre os grafos da Figura 4.5, donde  $\overline{K(G)}$  não é um grafo de intervalo [21]. Isto é,  $G$  não é clique-inverso de um grafo de co-intervalo.

Observe que os certificados IV' e V' indicam que  $K(G)$  contém  $\overline{P_k}$  induzido (os vértices correspondentes às cliques  $M_1, M_2, \dots, M_k$  induzem  $\overline{P_k}$  em  $K(G)$ ). Além do mais, o certificado III' indica que  $K(G)$  contém  $\overline{C_k}$  induzido. Pelo Lema 4.1,  $k = O(|VG|)$ , donde estes três certificados contêm  $O(|VG|)$  cliques maximais cada um. Como os números de cliques nos certificados I' e II' são fixos, concluímos que qualquer que seja o certificado apresentado para comprovar que  $\overline{K(G)}$  não é um grafo de co-intervalo, este contém  $O(|VG|)$  cliques maximais, e portanto pode ser verificado em tempo polinomial no tamanho de  $G$ . Logo, o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de co-intervalo pertence a Co-NP.

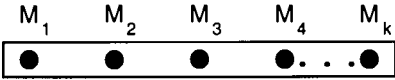
A redução para a prova da NP-dificuldade é feita novamente a partir do problema de reconhecimento de grafos clique-completos [22]. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Seja  $G$  o grafo formado por duas cópias  $H_1$  e  $H_2$  de  $H$  e um vértice adicional  $u$ , onde cada vértice de  $H_1$  está ligado a  $u$  e a todos os



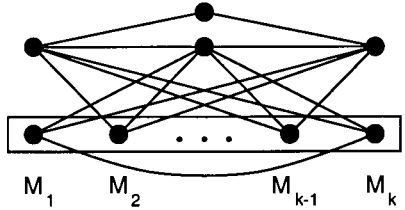
I'



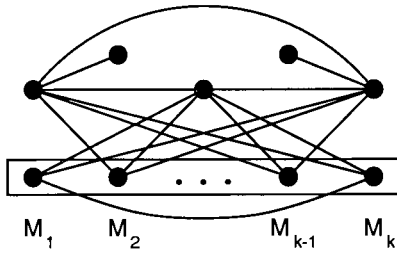
II'



III' ( $k > 3$ )



IV' ( $k > 1$ )



V' ( $k > 0$ )

Figura 4.6: Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe  $K^{-1}(CO - INTERVALO)$ .

vértices de  $H_2$ . Vamos mostrar que  $H$  não é clique-completo se e somente se  $\overline{K(G)}$  não é um grafo de intervalo. Se  $H$  não é clique-completo, existem  $M'$  e  $M''$  cliques maximais de  $H$  tais que  $M' \cap M'' = \emptyset$ . Sejam pois  $M'_1, M''_1 \in H_1$  e  $M'_2, M''_2 \in H_2$  tais que  $M'_1$  e  $M'_2$  correspondem a  $M'$ , e  $M''_1$  e  $M''_2$  correspondem a  $M''$ . Observe no desenho esquemático da Figura 4.7(a) que  $M'_1 \cup M'_2$ ,  $M'_1 \cup M''_2$ ,  $M''_1 \cup M'_2$ ,  $M''_1 \cup M''_2$ ,  $\{u\} \cup M'_1$  e  $\{u\} \cup M''_1$  são cliques maximais de  $G$  que induzem em  $K(G)$  o grafo  $\overline{C_6}$  (veja a Figura 4.7(b)). Como  $\overline{C_6}$  pertence à família de Gallai [7],  $K(G)$  não é um grafo de comparabilidade, donde  $\overline{K(G)}$  não é de co-comparabilidade, e portanto não é de intervalo. Inversamente, se  $H$  é clique-completo, então  $G$  também o é, isto é,  $K(G)$  é um grafo completo. Logo,  $\overline{K(G)}$  é um grafo sem arestas, e portanto é de intervalo.  $\square$

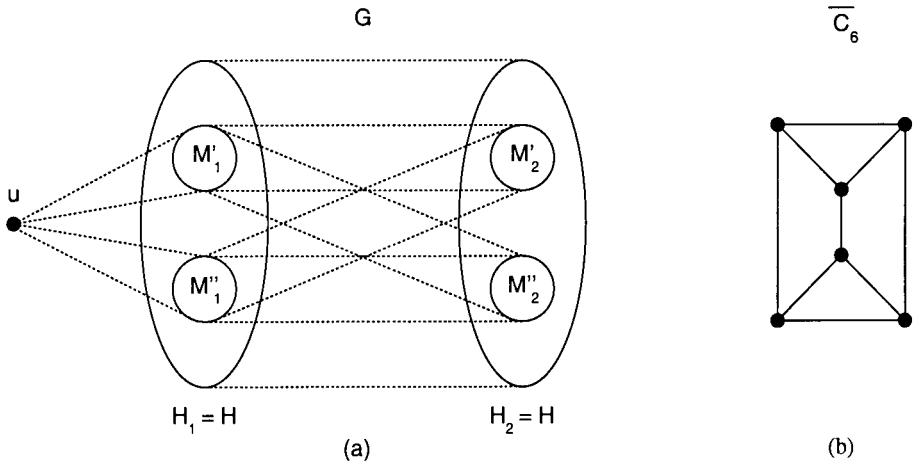


Figura 4.7: (a) Se  $H$  não é clique-completo,  $\overline{K(G)}$  não é grafo de intervalo; (b) Grafo  $\overline{C_6}$  (subgrafo induzido de  $K(G)$ ).

## 4.9 Grafos clique-inversos de grafos de comparabilidade

**Definição 4.17** Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo de comparabilidade se  $K(G)$  é um grafo de comparabilidade.

A classe dos grafos de comparabilidade também apresenta caracterização por uma lista de subgrafos induzidos proibidos. Esta lista é conhecida como *família de Gallai* [7]. Assim, a demonstração de que o reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de comparabilidade é Co-NP-completo segue a mesma estrutura das duas seções anteriores.

**Teorema 4.18** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de comparabilidade é Co-NP-completo.*

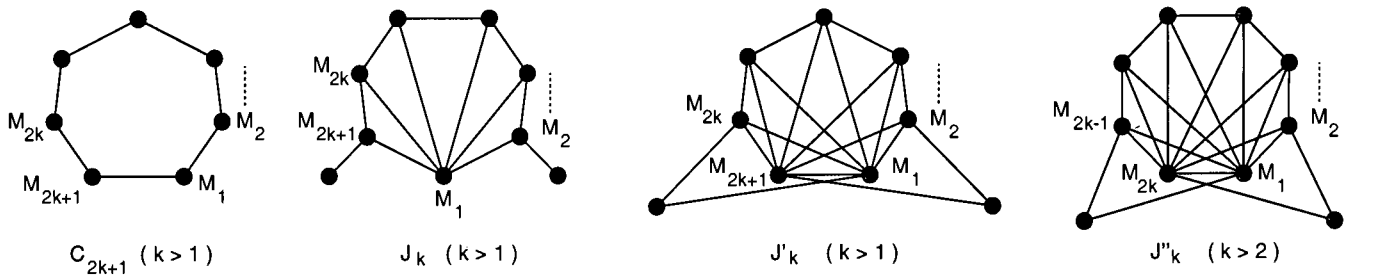
**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprove que  $K(G)$  não é um grafo de comparabilidade é um conjunto de cliques maximais de  $G$  que se interceptam de acordo com algum dos esquemas apresentados na Figura 4.8(a) (onde os pontos representam cliques maximais de  $G$ , e as ligações entre pontos representam intersecções não nulas entre cliques) ou na Figura 4.8(b) (onde, agora, cada ligação tracejada representa uma intersecção vazia entre duas cliques, e uma ausência de ligação entre dois pontos representa uma intersecção não vazia entre as duas cliques correspondentes). Se  $K(G)$  contém como subgrafo induzido algum dos grafos da Figura 4.8(a) ou o complemento de algum dos grafos da Figura 4.8(b) (considerando que as arestas são exatamente as linhas tracejadas), então  $K(G)$  não é um grafo de comparabilidade, de acordo com a caracterização de Gallai [7].

Vamos agora mostrar, caso a caso, que os certificados que comprovam que  $K(G)$  não é de comparabilidade possuem todos um número polinomial de cliques maximais, sendo portanto verificáveis em tempo polinomial no tamanho de  $G$ .

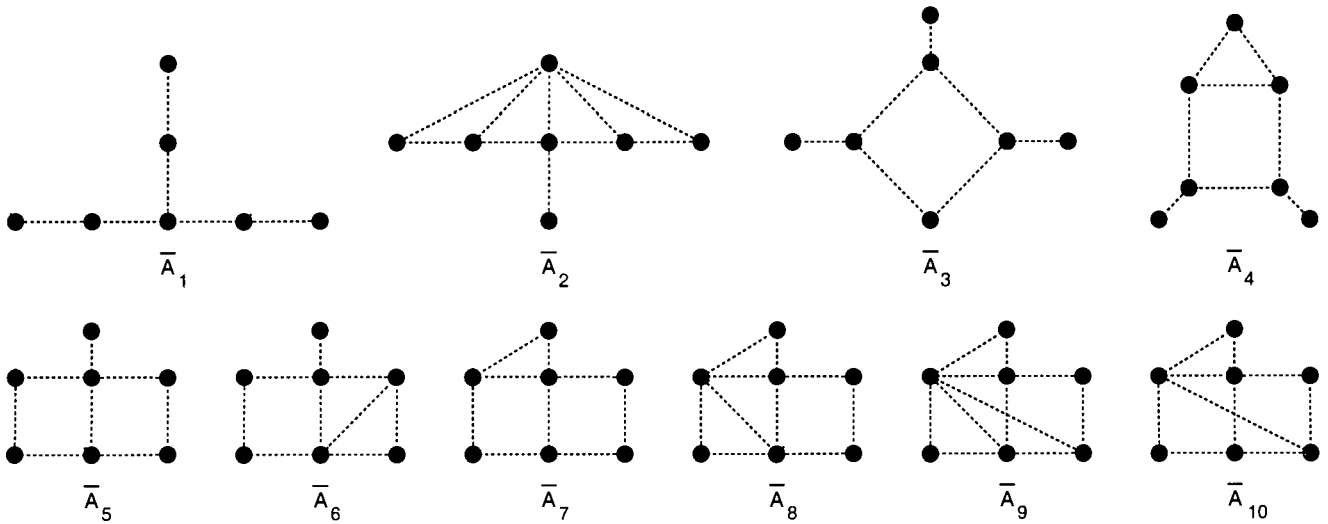
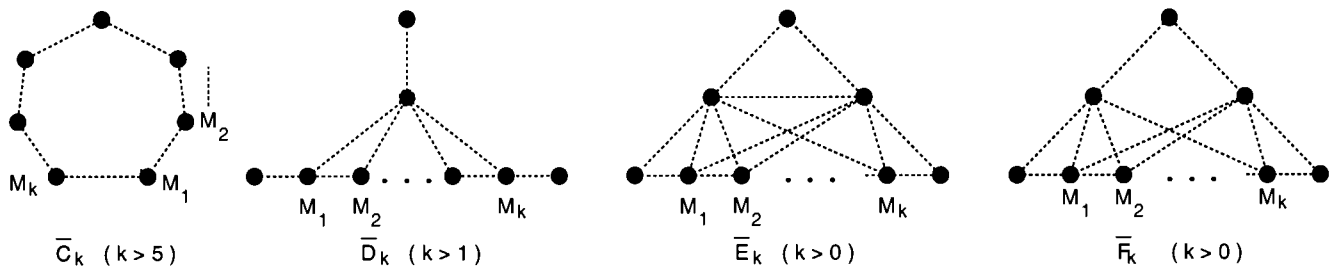
$C_{2k+1}$ : este certificado também comprova que  $K(G)$  não é cordal; logo (veja demonstração do Teorema 4.4), possui um número polinomial de cliques maximais.

$J_k$ : os vértices correspondentes às cliques  $M_2, \dots, M_{2k}, M_{2k+1}$  induzem um caminho sem cordas em  $K(G)$ ; logo, pelo Lema 4.1, este certificado possui um número polinomial de cliques maximais.





(a)



(b)

Figura 4.8: Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe  $K^{-1}(COMPARABILIDADE)$ .

$J'_k$ : os vértices correspondentes às cliques  $M_2, \dots, M_{2k}$  induzem um caminho sem cordas em  $K(G)$ , como no caso anterior.

$J''_k$ : os vértices correspondentes às cliques  $M_2, \dots, M_{2k-1}$  induzem um caminho sem cordas em  $K(G)$ , como nos dois casos anteriores.

$\overline{C}_k$ : este certificado também comprova que  $K(G)$  não é co-cordal; logo (veja demonstração do Teorema 4.6), possui um número polinomial de cliques maximais.

$\overline{D}_k, \overline{E}_k, \overline{F}_k$ : nestes certificados, os vértices correspondentes às cliques  $M_1, M_2, \dots, M_k$  induzem em  $K(G)$  o complemento de um caminho sem cordas; logo (Lema 4.1), estes certificados possuem um número polinomial de cliques maximais.

$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_{10}$ : nestes certificados o número de cliques é fixo, e portanto polinomial.

Assim, podemos concluir que o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de comparabilidade pertence a Co-NP.

Finalmente, a redução para a prova da NP-dificuldade utiliza a mesma construção do Teorema 4.6. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Seja  $G$  o grafo formado por duas cópias  $H_1$  e  $H_2$  de  $H$  e um vértice adicional  $u$ , onde cada vértice de  $H_1$  está ligado a  $u$  e a todos os vértices de  $H_2$ . Já sabemos que se  $H$  não é clique-completo, então  $K(G)$  não é um grafo de comparabilidade. Inversamente, se  $H$  é clique-completo, então  $K(G)$  é um grafo completo, e portanto de comparabilidade.  $\square$

## 4.10 Grafos clique-inversos de grafos de co-comparabilidade

**Definição 4.19** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo de co-comparabilidade se  $\overline{K(G)}$  é um grafo de comparabilidade.*

Para demonstrarmos que o problema de reconhecimento da classe  $K^{-1}(CO - COMPARABILIDADE)$  é Co-NP-completo, utilizaremos uma argumentação análoga àquela feita para  $K^{-1}(CO - INTERVALO)$ : dado um grafo  $G$ ,  $K(G)$  não é de co-comparabilidade se e somente se  $G$  possui certas cliques maximais que se interceptam de tal modo que os vértices correspondentes a estas cliques em  $\overline{K(G)}$  induzem algum dos grafos da lista de proibidos para a classe  $COMPARABILIDADE$ .

**Teorema 4.20** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de co-comparabilidade é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprove que  $\overline{K(G)}$  não é um grafo de comparabilidade é um conjunto de cliques maximais de  $G$  que se interceptam de acordo com algum dos esquemas apresentados na Figura 4.9(a) (onde os pontos representam cliques maximais de  $G$ , cada ligação tracejada representa uma interseção vazia entre duas cliques, e uma ausência de ligação entre dois pontos representa uma interseção não vazia entre as duas cliques correspondentes) ou na Figura 4.9(b) (onde, agora, as ligações entre pontos representam intersecções não nulas entre cliques). Se  $K(G)$  contém como subgrafo induzido algum dos grafos da Figura 4.9(b) ou o complemento de algum dos grafos da Figura 4.9(a) (considerando que as arestas são exatamente as linhas tracejadas), então  $\overline{K(G)}$  não é um grafo de comparabilidade [7], isto é,  $K(G)$  não é um grafo de co-comparabilidade.

Vamos agora mostrar, como na seção anterior, que os certificados que comprovam que  $\overline{K(G)}$  não é de comparabilidade possuem todos um número

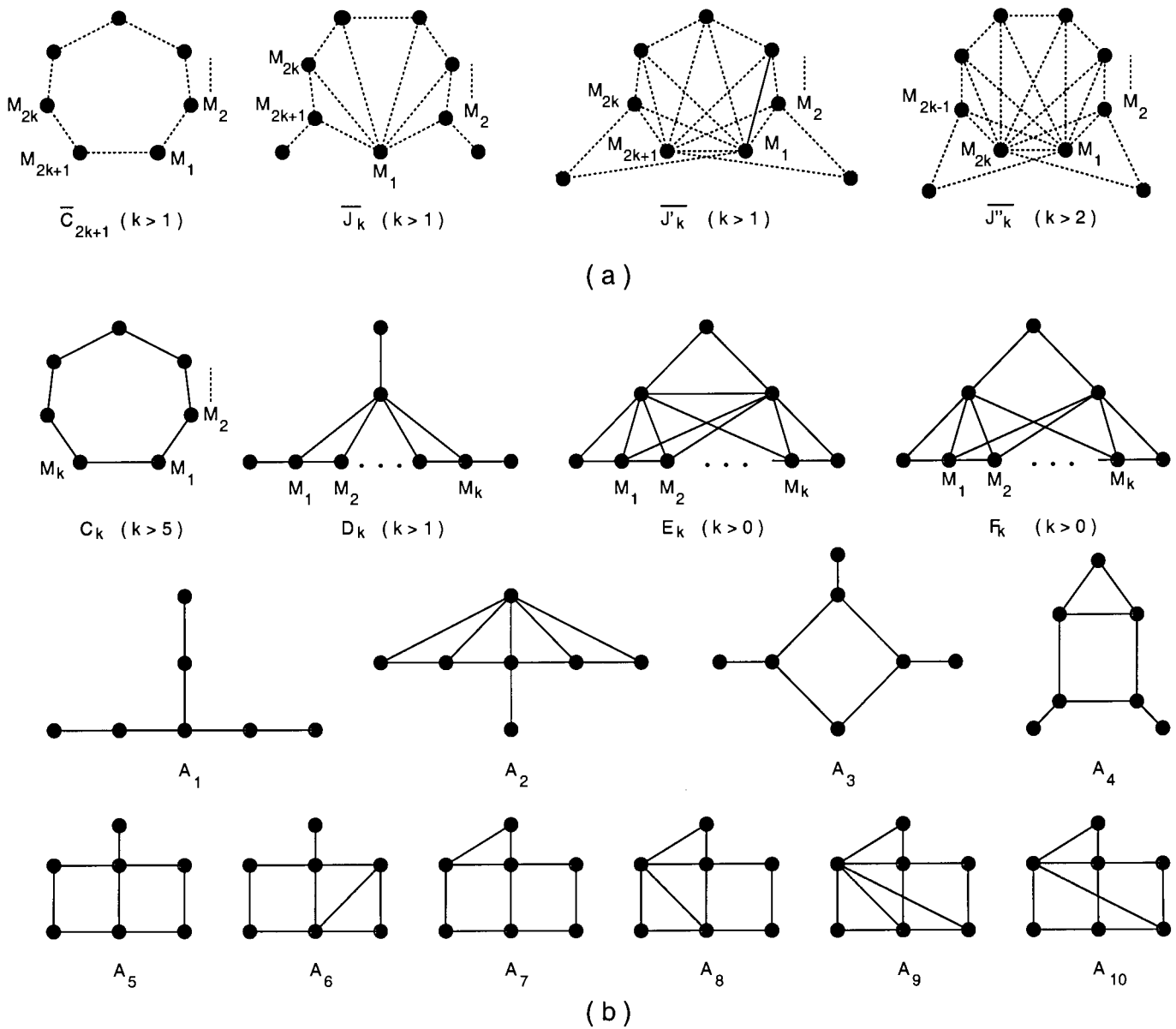


Figura 4.9: Certificados que comprovam que um grafo não pertence à classe  $K^{-1}(CO-COMPARABILIDADE)$ .

polinomial de cliques maximais, sendo portanto verificáveis em tempo polinomial no tamanho de  $G$ .

$\overline{C_{2k+1}}$ : este certificado também comprova que  $K(G)$  não é co-cordal; logo (veja demonstração do Teorema 4.6), possui um número polinomial de cliques maximais.

$\overline{J_k}$ : os vértices correspondentes às cliques  $M_2, \dots, M_{2k}, M_{2k+1}$  induzem o complemento de um caminho sem cordas em  $K(G)$ ; logo (Lema 4.1), este certificado possui um número polinomial de cliques maximais.

$\overline{J'_k}$ : os vértices correspondentes às cliques  $M_2, \dots, M_{2k}$  induzem o complemento de um caminho sem cordas em  $K(G)$ , como no caso anterior.

$\overline{J''_k}$ : os vértices correspondentes às cliques  $M_2, \dots, M_{2k-1}$  induzem o complemento de um caminho sem cordas em  $K(G)$ , como nos dois casos anteriores.

$C_k$ : este certificado também comprova que  $K(G)$  não é cordal; logo (veja demonstração do Teorema 4.4), possui um número polinomial de cliques maximais.

$D_k, E_k, F_k$ : nestes certificados, os vértices correspondentes às cliques  $M_1, M_2, \dots, M_k$  induzem em  $K(G)$  um caminho sem cordas; logo (Lema 4.1), estes certificados possuem um número polinomial de cliques maximais.

$A_1, A_2, \dots, A_{10}$ : nestes certificados o número de cliques é fixo, e portanto polinomial.

Assim, podemos concluir que o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de co-comparabilidade pertence a Co-NP.

A prova da NP-dificuldade do problema utiliza uma redução mais elaborada do que as dos problemas anteriores. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos [22]. Construamos

$G$ , instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de co-comparabilidade, do modo descrito a seguir. O conjunto de vértices de  $G$  é dado por:

$$VG = VH \cup \{w, r, s\} \cup \{x_{uv} \mid u, v \text{ não são vizinhos em } H\}.$$

O conjunto de arestas de  $G$  é dado por:

$$EG = \{ \{u, v\} \mid u, v \in VH, \{u, v\} \in EH \}$$

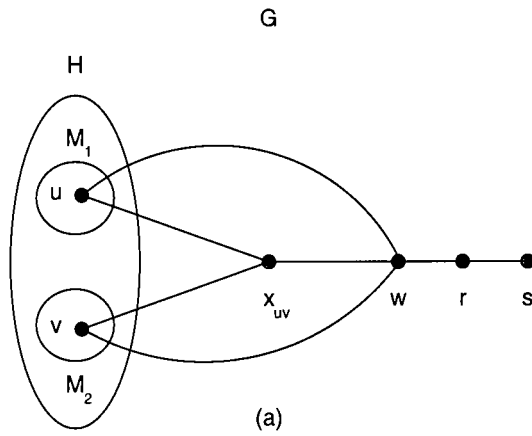
$$\cup \{ \{u, x_{uv}\}, \{v, x_{uv}\}, \{w, x_{uv}\}, \{u, w\}, \{v, w\} \mid u, v \text{ não são vizinhos em } H \}$$

$$\cup \{w, r\} \cup \{r, s\}.$$

Vamos agora mostrar que  $H$  não é clique-completo se e somente se  $\overline{K(G)}$  não é de comparabilidade. Se  $H$  não é clique-completo, então existem duas cliques maximais disjuntas  $M_1$  e  $M_2$  em  $H$ . Logo, existem  $u \in M_1$  e  $v \in M_2$  tais que  $u$  não é adjacente a  $v$ . Observe no desenho esquemático da Figura 4.10(a) que  $M_1, M_2, \{u, w, x_{uv}\}, \{v, w, x_{uv}\}, \{w, r\}$  e  $\{r, s\}$  são cliques maximais de  $G$  que induzem em  $K(G)$  o grafo  $T$  da Figura 4.10(b). Portanto,  $\overline{K(G)}$  contém  $\overline{T}$  como subgrafo induzido. Como  $\overline{T}$  pertence à família de Gallai,  $\overline{K(G)}$  não é de comparabilidade [7].

Por outro lado, suponha que  $H$  seja clique completo. Observe que  $G$  tem quatro conjuntos de cliques maximais: (i) o conjunto  $M_H$  formado pelas cliques maximais de  $G$  idênticas às de  $H$ ; (ii) o conjunto  $M_w$  formado pelas cliques da forma  $\{ \{u, w, x_{uv}\} \mid u, v \text{ não são vizinhos em } H \}$ ; (iii) a clique  $M_{wr} = \{w, r\}$ ; (iv) a clique  $M_{rs} = \{r, s\}$ . As cliques em (i) induzem em  $\overline{K(G)}$  um conjunto independente, pois  $H$  é clique-completo. As cliques em (ii) e (iii) compartilham o vértice  $w$ , e portanto também induzem em  $\overline{K(G)}$  um conjunto independente. Logo, as arestas de  $\overline{K(G)}$  são dos seguintes tipos:

(a) arestas da forma  $\{M, M'\}$  para  $M \in M_H$  e  $M' \in M_w$  tais que  $M \cap M' = \emptyset$ ;



T (subgrafo induzido de  $K(G)$ )

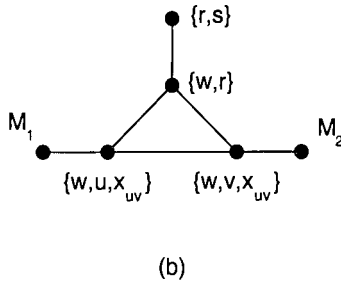


Figura 4.10: Se  $H$  não é clique-completo (a), então  $K(G)$  contém como subgrafo induzido o grafo  $T$  (b).

(b) arestas da forma  $\{M, M_{wr}\}$  para  $M \in M_H$ ;

(c) arestas da forma  $\{M, M_{rs}\}$  para  $M \in M_H$ ;

(d) arestas da forma  $\{M', M_{rs}\}$  para  $M' \in M_w$ .

Observe que existe a aresta  $\{M, M_{wr}\}$  (do tipo (b)) e a aresta  $\{M, M_{rs}\}$  (do tipo (c)) para toda clique  $M \in M_H$ . Existe também a aresta  $\{M', M_{rs}\}$  para toda clique  $M' \in M_w$ . Precisamos mostrar que  $\overline{K(G)}$  é um grafo de comparabilidade. Para isso, basta orientar suas arestas do seguinte modo: para arestas do tipo (a), orientar de  $M \in M_H$  para  $M' \in M_w$ ; para arestas do tipo (b), orientar de  $M \in M_H$  para  $M_{wr}$ ; para arestas dos tipos (c) e (d), orientar para  $M_{rs}$ . Veja o desenho esquemático da Figura 4.11. Para verificar que esta orientação é de fato transitiva, basta observar que, se existem as arestas  $\{M, M'\}$  e  $\{M', M_{rs}\}$  (dos tipos (a) e (d), respectivamente), existe também a aresta  $\{M, M_{rs}\}$  (do tipo (c)). Portanto,  $\overline{K(G)}$  é de comparabilidade. □

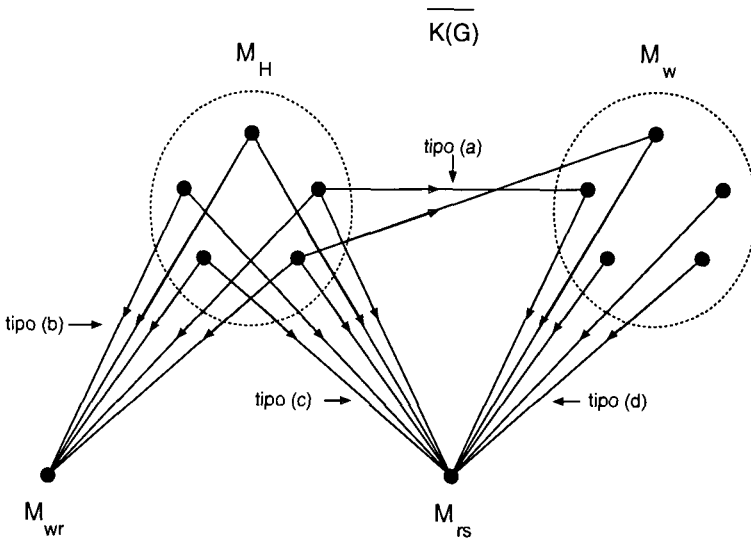


Figura 4.11:  $\overline{K(G)}$  é um grafo de comparabilidade.



## 4.11 Grafos clique-inversos de grafos de permutação

**Definição 4.21** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo de permutação se  $K(G)$  é um grafo de permutação.*

De modo análogo à demonstração feita para  $K^{-1}(\text{PARTIÇÃO})$ , o reconhecimento de  $K^{-1}(\text{PERMUTAÇÃO})$  é Co-NP-completo: qualquer certificado que comprova que  $K(G)$  ou  $\overline{K(G)}$  não é de comparabilidade também comprova que  $K(G)$  não é de permutação.

**Teorema 4.22** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de permutação é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Qualquer um dos certificados apresentados nas duas seções anteriores (Teoremas 4.18 e 4.20) - que comprovam ou que  $K(G)$  não é de comparabilidade ou que  $\overline{K(G)}$  não é de comparabilidade - também comprova que  $K(G)$  não é de permutação. Logo, o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos de permutação pertence a Co-NP.

A redução para a prova da NP-dificuldade utiliza a mesma construção do Teorema 4.6. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Seja  $G$  o grafo formado por duas cópias  $H_1$  e  $H_2$  de  $H$  e um vértice adicional  $u$ , onde cada vértice de  $H_1$  está ligado a  $u$  e a todos os vértices de  $H_2$ . Já sabemos que se  $H$  não é clique-completo, então  $K(G)$  não é um grafo de comparabilidade, donde  $K(G)$  não é de permutação. Inversamente, se  $H$  é clique-completo, então  $K(G)$  é um grafo completo e  $\overline{K(G)}$  é um grafo sem arestas. Portanto,  $K(G)$  e  $\overline{K(G)}$  são grafos de comparabilidade, donde  $K(G)$  é de permutação.  $\square$

## 4.12 Grafos clique-inversos de grafos livres de TA

**Definição 4.23** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo livre de TA se  $K(G)$  é um grafo livre de TA.*

Os grafos livres de TA têm despertado grande interesse pelas relações que guardam com outras classes importantes (*INTERVALO*, *CO – COMPARABILIDADE* etc.). Muitos trabalhos que analisam a estrutura dos grafos livres de TA têm surgido, e alguns problemas conhecidos apresentam algoritmos polinomiais quando restritos a esta classe. No próximo teorema, mostramos que o problema de reconhecimento da classe  $K^{-1}(\text{LIVRE DE TA})$  também é Co-NP-completo.

**Teorema 4.24** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos livres de TA é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprova que  $K(G)$  não é livre de TA é formado por três cliques maximais  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  de  $G$  mutuamente disjuntas e três conjuntos de cliques maximais  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  e  $C_{23}$  de  $G$  onde:

- (i)  $M_i$  e  $M_j$  pertencem a  $C_{ij}$ ;
- (ii) as cliques em  $C_{ij}$  são todas disjuntas de  $M_k$  ( $k \neq i, j$ );
- (iii) os vértices correspondentes às cliques em  $C_{ij}$  induzem um caminho em  $K(G)$ .

De fato, este é um certificado válido, pois as cliques  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  correspondem a uma tripla asteroidal em  $K(G)$ . Além do mais, pode-se verificar em tempo polinomial que as cliques dadas satisfazem as condições (i), (ii) e (iii), uma vez que podemos tomar estas cliques de modo que os caminhos do item (iii) sejam induzidos (forçando a que haja um número polinomial de

cliques nos conjuntos  $C_{ij}$ , de acordo com o Lema 4.1). Portanto, o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos livres de TA pertence a Co-NP.

Para a prova da NP-dificuldade, utilizamos a mesma redução do Teorema 4.20: seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Construíamos  $G$ , instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos livres de TA, do modo descrito a seguir:

$$VG = VH \cup \{w, r, s\} \cup \{x_{uv} \mid u, v \text{ não são vizinhos em } H\}.$$

$$EG = \{ \{u, v\} \mid u, v \in VH, \{u, v\} \in EH \}$$

$$\cup \{ \{u, x_{uv}\}, \{v, x_{uv}\}, \{w, x_{uv}\}, \{u, w\}, \{v, w\} \mid u, v \text{ não são vizinhos em } H \}$$

$$\cup \{w, r\} \cup \{r, s\}.$$

Sabemos que, se  $H$  não é clique-completo, então  $K(G)$  contém como subgrafo induzido o grafo  $T$  da Figura 4.10(b). Mas, em  $T$ , os vértices de grau um constituem uma tripla asteroidal [5]. Logo,  $K(G)$  não é livre de TA. Por outro lado, se  $H$  é clique-completo, sabemos que  $K(G)$  é um grafo de co-comparabilidade. Portanto,  $K(G)$  é livre de TA (os grafos livres de TA contêm propriamente os grafos de co-comparabilidade [5]).  $\square$

## 4.13 Grafos clique-inversos de grafos bloco

**Definição 4.25** *Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo bloco se  $K(G)$  é um grafo bloco.*

Apresentamos a seguir o último problema de reconhecimento Co-NP-completo desta seção.

**Teorema 4.26** *O problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos bloco é Co-NP-completo.*

**Demonstração.** Seja  $G$  um grafo. Um certificado que comprova que  $K(G)$  não é um grafo bloco, pelo Teorema 1.1(ii), é um conjunto de cliques maximais de  $G$  que se interceptam de acordo com os esquemas representados pelos grafos  $C_k$  ( $k > 3$ ) ou  $K_4 - e$ , onde vértices representam cliques e arestas representam intersecções não nulas entre cliques. Em qualquer caso, pode-se verificar em tempo polinomial que as cliques dadas se inter-relacionam de acordo com o esquema proposto pelo certificado, já que este contém um número polinomial de cliques (veja as demonstrações de teoremas anteriores). Assim, o problema de reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos bloco pertence a Co-NP.

A prova da NP-dificuldade utiliza a mesma redução do Teorema 4.4. Seja  $H$  um grafo, instância para o problema de reconhecimento de grafos clique-completos. Seja  $G$  o grafo formado por duas cópias  $H_1$  e  $H_2$  de  $H$  onde cada vértice de  $H_1$  está ligado a todos os vértices de  $H_2$ . Já sabemos que se  $H$  não é clique-completo, então  $K(G)$  não é um grafo cordal, donde pelo Teorema 1.1(iii)  $K(G)$  não é um grafo bloco. Inversamente, se  $H$  é clique-completo, então  $K(G)$  é um grafo completo e, portanto, um grafo bloco.  $\square$

## 4.14 Grafos clique-inversos de grafos $k$ -cromáticos

O objetivo desta seção é ampliar o problema de reconhecimento apresentado na seção 3.4. Lá, mostramos que o reconhecimento da classe  $K^{-1}(BIPARTIDO)$  (isto é, dos grafos  $G$  tais que  $K(G)$  é 2-cromático) pode ser feito em tempo polinomial. O resultado principal desta seção diz que o reconhecimento de grafos clique-inversos de grafos 3-cromáticos (ou

tripartidos) é NP-completo. Daí vem uma generalização direta para  $k$  qualquer.

**Definição 4.27** Um grafo  $G$  é clique-inverso de um grafo  $k$ -cromático se  $\chi(K(G)) \leq k$ .

O lema a seguir é uma generalização natural do Lema 3.24. Ele estabelece que existe um limite superior para o número de cliques maximais de um grafo  $G$  em função do número cromático de  $K(G)$ . Utilizaremos este lema para provar que o problema de reconhecer grafos clique-inversos de grafos 3-cromáticos pertence a NP.

**Lema 4.28** Seja  $G$  um grafo conexo tal que  $\chi(K(G)) = k$ . Então,  $G$  possui no máximo  $\frac{k}{2}|VG|$  cliques maximais.

**Demonstração.** Como  $\chi(K(G)) = k$ , as cliques maximais de  $G$  podem ser particionadas em  $k$  coleções de cliques  $C_1, \dots, C_k$  tais que as cliques maximais da coleção  $C_i$  são mutuamente disjuntas ( $1 \leq i \leq k$ ). Seja  $r_i = |C_i|$ , e suponha  $C_i = \{M_1^i, \dots, M_{r_i}^i\}$ . Vamos mostrar que  $r = \sum_{i=1}^k r_i \leq \frac{k}{2}|VG|$ . Para cada  $i$ , temos  $2r_i \leq \sum_{j=1}^{r_i} |M_j^i|$ , pois cada clique maximal de  $G$  tem tamanho mínimo dois. Por outro lado,  $\sum_{j=1}^{r_i} |M_j^i| \leq |VG|$ , pois as cliques em  $C_i$  são mutuamente disjuntas. Portanto,  $2r_i \leq |VG|$ , para  $1 \leq i \leq k$ , donde somando estas  $k$  desigualdades vem  $r \leq \frac{k}{2}|VG|$ .  $\square$

**Teorema 4.29** Seja  $G$  um grafo conexo. Então, o problema de decidir se  $\chi(K(G)) \leq 3$  é NP-completo.

**Demonstração.** Dado um grafo conexo  $G$ , um certificado que comprova que  $\chi(K(G)) \leq 3$  consiste no conjunto de cliques maximais de  $G$  juntamente

com uma função que associa a cada clique uma cor de tal forma que: (i) a função usa 3 cores ou menos para mapear as cliques; (ii) cliques que se interceptam recebem cores distintas. É fácil ver que este certificado pode ser verificado em tempo polinomial no tamanho de  $G$ , uma vez que pelo lema anterior o número de cliques maximais de  $G$  é limitado por  $\frac{3}{2}|VG|$ . Logo, o problema de decidir se  $\chi(K(G)) \leq 3$  pertence a NP.

Para provar a NP-dificuldade do problema, estenderemos a transformação do problema 3-SAT ao problema 3-COLORABILIDADE DE GRAFOS (3-COLOR) descrita em [9]. Vamos inicialmente descrever como transformar uma instância de 3-SAT numa instância de 3-COLOR. Seja  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$  um conjunto de cláusulas nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Assumimos que cada cláusula contém exatamente três literais distintos. Escrevemos  $C_i = (a_i \vee b_i \vee c_i)$ , onde  $\{a_i, b_i, c_i\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ . Construimos um grafo  $H$  que é 3-colorível se e somente se  $C$  é satisfatível (veja [8]). O conjunto de vértices de  $H$  é dado por:

$$VH = \{v_1, v_2, v_3\} \cup \{x_i, \overline{x_i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_{ij} | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 6\}.$$

O conjunto de arestas de  $H$  é dado por:

$$\begin{aligned} EH = & \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}\} \cup \{\{x_i, \overline{x_i}\} | 1 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{\{v_3, x_i\}, \{v_3, \overline{x_i}\} | 1 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{\{a_i, y_{i1}\}, \{b_i, y_{i2}\}, \{c_i, y_{i3}\} | 1 \leq i \leq p\} \\ & \cup \{\{v_2, y_{i6}\}, \{v_3, y_{i6}\} | 1 \leq i \leq p\} \\ & \cup \{\{y_{i1}, y_{i2}\}, \{y_{i1}, y_{i4}\}, \{y_{i2}, y_{i4}\} | 1 \leq i \leq p\} \\ & \cup \{\{y_{i3}, y_{i5}\}, \{y_{i3}, y_{i6}\}, \{y_{i5}, y_{i6}\} | 1 \leq i \leq p\} \\ & \cup \{\{y_{i4}, y_{i5}\} | 1 \leq i \leq p\}. \end{aligned}$$

Como exemplo, o grafo  $H$  na Figura 4.12 é o grafo obtido a partir do conjunto de cláusulas  $C = \{(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1), (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\}$ .

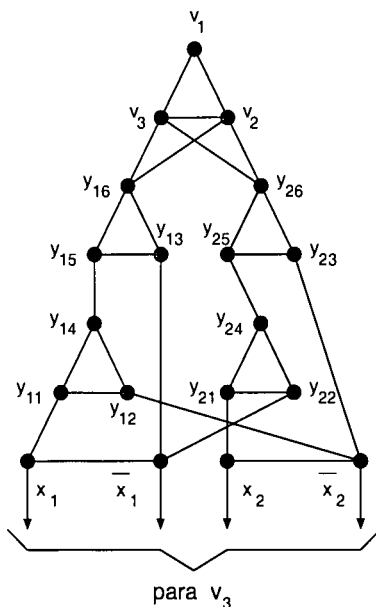


Figura 4.12: Grafo  $H$  da transformação de 3-SAT para 3-COLOR.

Construiremos agora em tempo polinomial um grafo  $G$  a partir de  $H$  tal que  $H = K(G)$ . O conjunto de vértices de  $G$  é dado por:

$$VG = \{u_i | 1 \leq i \leq p + 1\} \cup \{w_1, w_2\} \cup \{w_{i3}, q_i, \bar{q}_i | 1 \leq i \leq n\} \\ \cup \{z_{ij} | 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq 7\}.$$

Para definir o conjunto de arestas de  $G$ , necessitamos previamente das definições a seguir. Seja  $R_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) o conjunto de vértices de  $G$  construído da seguinte forma: se  $y_{jk}$  está ligado a  $x_i$  em  $H$  (para  $k, j$  e  $i$  tais que  $1 \leq k \leq p, j \in \{1, 2, 3\}$  e  $1 \leq i \leq n$ ), então  $z_{jk} \in R_i$ . Analogamente, seja  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) o conjunto de vértices de  $G$  tal que se  $y_{jk}$  está ligado a  $\bar{x}_i$  em  $H$ , então  $z_{jk} \in R_i$ .

Agora podemos definir o conjunto de arestas de  $G$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
EG = & \{\{u_i, u_j\} | 1 \leq i < j \leq p+1\} \cup \{w_1, u_{p+1}\} \\
& \cup \{\{w_2, u_i\} | 1 \leq i \leq p\} \\
& \cup \{\{w_{i3}, q_i\} | 1 \leq i \leq n\} \\
& \cup \{\{w_{i3}, \bar{q}_i\} | 1 \leq i \leq n\} \\
& \cup \{\{w_{i3}, w_{j3}\} | 1 \leq i < j \leq n\} \\
& \cup \{\{w_{i3}, u_j\} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\} \\
& \cup \{\{z_{i6}, u_i\} | 1 \leq i \leq p\} \\
& \cup \{\{z_{i1}, z_{i3}\}, \{z_{i2}, z_{i3}\}, \{z_{i3}, z_{i4}\} | 1 \leq i \leq p\} \\
& \cup \{\{z_{i4}, z_{i6}\}, \{z_{i5}, z_{i6}\} | 1 \leq i \leq p\} \\
& \cup \{\{w_{i3}, r\}, \{q_i, r\} | 1 \leq i \leq n, r \in R_i\} \\
& \cup \{\{w_{i3}, s\}, \{\bar{q}_i, s\} | 1 \leq i \leq n, s \in S_i\} \\
& \cup \{\{r_1, r_2\} | r_1, r_2 \in R_i, 1 \leq i \leq n\} \\
& \cup \{\{s_1, s_2\} | s_1, s_2 \in S_i, 1 \leq i \leq n\}.
\end{aligned}$$

Na Figura 4.13 vemos o grafo  $G$  obtido a partir do grafo  $H$  da figura anterior. Observe que  $R_1 = \{z_{11}\}$ ,  $R_2 = \{z_{21}\}$ ,  $S_1 = \{z_{13}, z_{22}\}$  e  $S_2 = \{z_{12}, z_{23}\}$ .

Observemos na tabela a seguir que existe uma correspondência direta entre as cliques maximais de  $G$  e os vértices de  $H$ , de forma que duas cliques de  $G$  se interceptam se e somente se os correspondentes vértices em  $H$  são adjacentes.



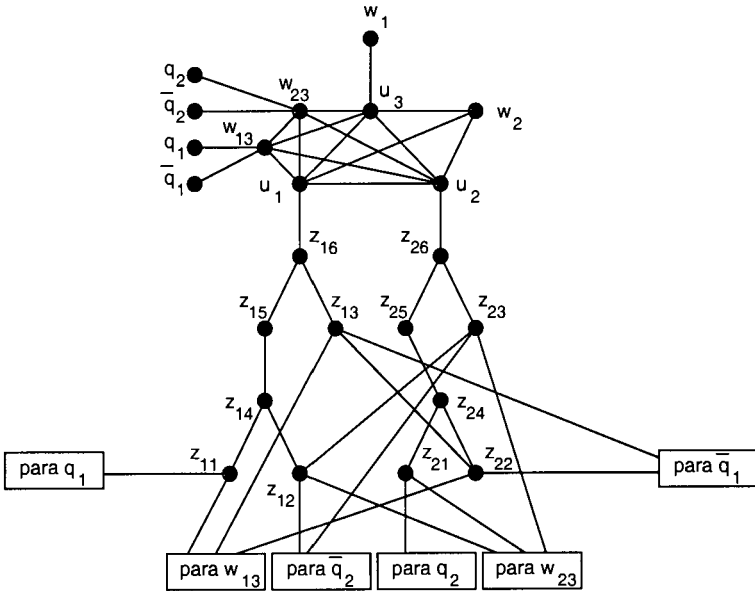


Figura 4.13: Grafo  $G$  da transformação de 3-SAT para o problema “ $\chi(K(G)) \leq 3$ ?”

Cliques maximais de $G$	Vértices de $H$
$\{w_1, u_{p+1}\}$	$v_1$
$\{w_2, u_1, \dots, u_{p+1}\}$	$v_2$
$\{w_{13}, \dots, w_{n3}, u_1, \dots, u_{p+1}\}$	$v_3$
$\{z_{i6}, u_i\}$	$y_{i6}$
$\{z_{i5}, z_{i6}\}$	$y_{i5}$
$\{z_{i3}, z_{i6}\}$	$y_{i3}$
$\{z_{i4}, z_{i5}\}$	$y_{i4}$
$\{z_{i2}, z_{i4}\}$	$y_{i2}$
$\{z_{i1}, z_{i4}\}$	$y_{i1}$
$\{q_i, w_{i3}\} \cup R_i$	$x_i$
$\{\bar{q}_i, w_{i3}\} \cup S_i$	$\bar{x}_i$

Concluimos portanto que, de fato,  $H = K(G)$ , donde  $H$  é 3-colorível se e somente se  $K(G)$  é 3-colorível. Logo,  $C$  é satisfatível se e somente se  $K(G)$  é 3-colorível. Isto é, dado um conjunto  $C$  de cláusulas, o que fizemos foi construir um grafo  $G$  em tempo polinomial no tamanho de  $C$  tal que  $C$  é satisfatível se e somente se  $K(G)$  é 3-colorível. Logo, o problema de decidir se  $\chi(K(G)) \leq 3$  é NP-completo. □

Como corolário do teorema anterior, temos:

**Corolário 4.30** *Sejam  $G$  um grafo conexo e  $k$  um número inteiro, menor ou igual ao número de cliques maximais de  $G$ . Então, o problema de decidir se  $\chi(K(G)) \leq k$  é NP-completo.*  $\square$

## 4.15 Grafos clique-inversos de grafos com $\alpha(G) \geq k$

Nesta seção estudaremos o problema de, dados um grafo  $G$  e um número inteiro  $k$ , saber se  $\alpha(K(G)) \geq k$ , isto é, se  $K(G)$  possui um conjunto independente de tamanho maior ou igual a  $k$ .

Inicialmente, vamos mostrar que o número de estabilidade de  $K(G)$  é sempre “pequeno”:

**Lema 4.31** *Seja  $G$  um grafo conexo. Então,  $\alpha(K(G)) \leq \frac{1}{2}|VG|$ .*

**Demonstração.** Se  $M_1, M_2, \dots, M_k$  são cliques maximais de  $G$  mutuamente disjuntas (isto é, correspondentes a um conjunto independente em  $K(G)$ ), então cada vértice de  $G$  pertence no máximo a um conjunto  $M_i$ . Como  $|M_i| \geq 2$ , segue que  $k$  pode atingir no máximo o valor  $\frac{1}{2}|VG|$ , donde segue o lema.  $\square$

Apresentamos a seguir o resultado principal desta seção: dados  $G$  e  $k$ , decidir se  $G$  é o grafo clique-inverso de um grafo com número de estabilidade maior ou igual a  $k$  é um problema NP-completo.

**Teorema 4.32** *Sejam  $G$  um grafo conexo e  $k$  um número inteiro tal que  $1 \leq k \leq \frac{1}{2}|VG|$ . Então, o problema de decidir se  $\alpha(K(G)) \geq k$  é NP-completo.*

**Demonstração.** Um certificado para comprovar que  $\alpha(K(G)) \geq k$  consiste num conjunto  $\{M_1, M_2, \dots, M_k\}$  de cliques maximais de  $G$  mutuamente disjuntas. Como sabemos que  $k$  vale no máximo  $\frac{1}{2}|VG|$  (Lema 4.31), segue que a verificação do certificado pode ser feita em tempo polinomial. Portanto, o problema de decidir se  $\alpha(K(G)) \geq k$  pertence a NP.

Para provar a NP-dificuldade do problema, estenderemos a transformação do problema 3-SAT ao problema CONJUNTO INDEPENDENTE descrita em [9]. Vamos inicialmente descrever como transformar uma instância de 3-SAT numa instância de CONJUNTO INDEPENDENTE. Seja  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$  um conjunto de cláusulas nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Assumimos que cada cláusula contém exatamente três literais distintos. Escrevemos  $C_i = (a_i \vee b_i \vee c_i)$ , onde  $\{a_i, b_i, c_i\} \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}\}$ . Construimos um grafo  $H$  que apresenta um conjunto independente de tamanho maior ou igual a  $k = n + m$  se e somente se  $C$  é satisfatível (veja [8]). O conjunto de vértices de  $H$  é dado por:

$$VH = \{x_i, \overline{x_i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{C_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}.$$

O conjunto de arestas de  $H$  é dado por:

$$EH = \{\{x_i, \overline{x_i}\} | 1 \leq i \leq n\}$$

$$\cup \{\{C_{i1}, C_{i2}\}, \{C_{i1}, C_{i3}\}, \{C_{i2}, C_{i3}\} | 1 \leq i \leq m\}$$

$$\cup \{\{a_i, C_{i1}\}, \{b_i, C_{i2}\}, \{c_i, C_{i3}\} | 1 \leq i \leq m\}.$$

Como exemplo, o grafo  $H$  na Figura 4.14 é o grafo obtido a partir do conjunto de cláusulas  $C = \{\{x_1, \overline{x_3}, \overline{x_4}\}, \{\overline{x_1}, x_2, \overline{x_4}\}\}$ . Aqui,  $k = n + m = 4 + 2 = 6$ .

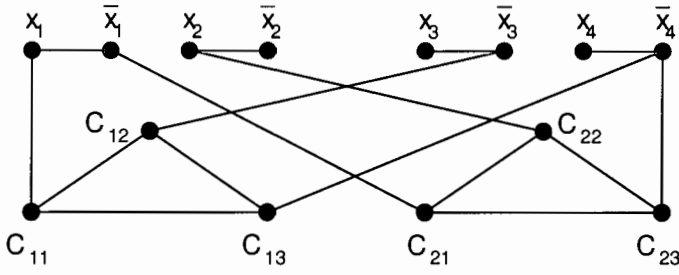


Figura 4.14: Grafo  $H$  da transformação de 3-SAT para CONJUNTO INDEPENDENTE.

Construiremos agora em tempo polinomial um grafo  $G$  a partir de  $H$  tal que  $H = K(G)$ . O conjunto de vértices de  $G$  é dado por:

$$VG = \{y_i | 1 \leq i \leq m\} \cup \{w_i, u_i, \bar{u}_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\}.$$

Para definir o conjunto de arestas de  $G$ , necessitamos previamente das definições a seguir. Seja  $R_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) o conjunto de vértices de  $G$  construído da seguinte forma: se  $C_{jk}$  está ligado a  $x_i$  em  $H$  (para  $k, j$  e  $i$  tais que  $1 \leq j \leq m, k \in \{1, 2, 3\}$  e  $1 \leq i \leq n$ ), então  $z_{jk} \in R_i$ . Analogamente, seja  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) o conjunto de vértices de  $G$  tal que: se  $C_{jk}$  está ligado a  $\bar{x}_i$  em  $H$ , então  $z_{jk} \in S_i$ .

Definimos agora o conjunto de arestas de  $G$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} EG = & \{\{y_i, z_{ij}\} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3\} \\ & \cup \{\{w_i, r\}, \{u_i, r\} | 1 \leq i \leq n, r \in R_i\} \\ & \cup \{\{w_i, s\}, \{\bar{u}_i, s\} | 1 \leq i \leq n, s \in S_i\} \\ & \cup \{\{w_i, u_i\}, \{w_i, \bar{u}_i\} | 1 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{\{r_1, r_2\} | r_1, r_2 \in R_i, 1 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{\{s_1, s_2\} | s_1, s_2 \in S_i, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Na Figura 4.15 vemos o grafo  $G$  obtido a partir do grafo  $H$  da figura anterior. Observe que  $R_1 = \{z_{11}\}$ ,  $R_2 = \{z_{22}\}$ ,  $R_3 = R_4 = \emptyset$ ,  $S_1 = \{z_{21}\}$ ,  $S_2 = \emptyset$ ,  $S_3 = \{z_{12}\}$  e  $S_4 = \{z_{13}, z_{23}\}$ .

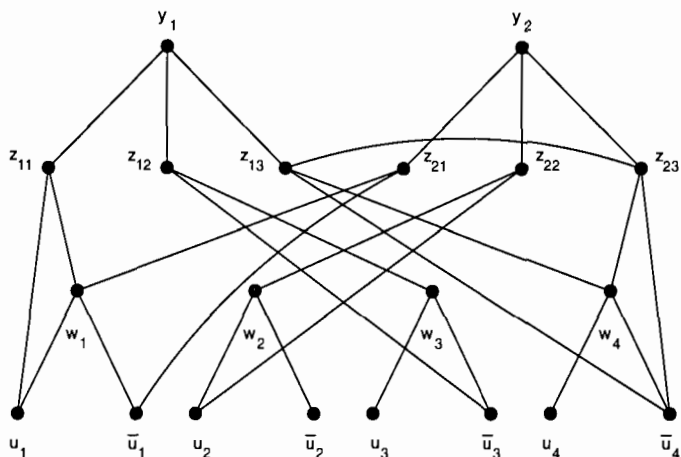


Figura 4.15: Grafo  $G$  da transformação de SAT para o problema “ $\alpha(K(G)) \geq k$ ?”.

Observemos na tabela a seguir que existe uma correspondência direta entre as cliques maximais de  $G$  e os vértices de  $H$ , de forma que duas cliques de  $G$  se interceptam se e somente se os correspondentes vértices em  $H$  são adjacentes.

Cliques maximais de $G$	Vértices de $H$
$\{y_i, z_{ij}\}$	$C_{ij}$
$\{w_i, u_i\} \cup R_i$	$x_i$
$\{w_i, \bar{u}_i\} \cup S_i$	$\bar{x}_i$

Concluimos portanto que, de fato,  $H = K(G)$ , donde  $H$  tem um conjunto independente de tamanho mínimo  $n + m$  se e somente se  $K(G)$  tem. Logo,  $C$  é satisfatível se e somente se  $K(G)$  tem um conjunto independente de tamanho mínimo  $n + m$ . Isto é, dado um conjunto  $C$  de  $m$  cláusulas sobre  $n$  variáveis, o que fizemos foi construir um grafo  $G$  em tempo polinomial no tamanho de  $C$  tal que  $C$  é satisfatível se e somente se  $K(G)$  tem um conjunto independente de tamanho mínimo  $k = n + m$ . Logo, o problema de decidir se  $\alpha(K(G)) \geq k$  é NP-completo.  $\square$

# Capítulo 5

## Conclusões

Enumeramos a seguir algumas contribuições desta tese, e algumas linhas de investigação futura.

No Capítulo 3, apresentamos classes de grafos clique-inversos cujo reconhecimento pode ser feito em tempo polinomial.

Inicialmente, caracterizamos os grafos cujos grafos clique contêm um triângulo, mostrando que  $K(G)$  contém um triângulo se e somente  $G$  contém  $K_{1,3}$ , 4-leque ou 4-roda. A demonstração analisa os casos possíveis em que três cliques maximais se interceptam duas a duas.

A seguir, ampliamos este resultado para grafos cujos grafos clique contêm  $K_4$ . Vimos que existem duas frentes a tratar ao tentarmos resolver este problema. Na primeira, as quatro cliques maximais de  $G$  que correspondem a  $K_4$  em  $K(G)$  não possuem nenhum vértice em comum; neste caso, mostramos que  $G$  contém necessariamente como subgrafo induzido alguma pirâmide estendida. No segundo caso, as quatro cliques maximais de  $G$  que correspondem a  $K_4$  em  $K(G)$  possuem (pelo menos) um vértice em comum; neste caso, mostramos que  $G$  contém necessariamente como subgrafo induzido algum grafo pertencente a uma família finita com oito grafos. Unindo os dois resultados, chegamos a uma família com nove grafos tal que  $K(G)$  contém  $K_4$

se e somente  $G$  contém como subgrafo induzido algum membro desta família.

Neste ponto, podemos apontar uma linha de investigação interessante. Conjecturamos ser possível ampliar a técnica descrita no parágrafo anterior para, fixado  $k \geq 3$ , afirmar que existe uma família finita  $\mathcal{F}_k$  com  $f(k)$  grafos (onde  $f$  é uma função dos naturais maiores ou iguais a três) tal que um grafo  $G$  possui  $k$  cliques maximais com um vértice em comum se e somente se  $G$  contém algum grafo da família  $\mathcal{F}_k$ . Os grafos pertencentes a  $\mathcal{F}_k$  seriam justamente os grafos minimais (em vértices) com a propriedade de possuírem (pelo menos)  $k$  cliques maximais com um vértice em comum. Assim,  $\mathcal{F}_3$  seria formada pelos grafos  $K_{1,3}$ , 4-leque e 4-roda, e  $\mathcal{F}_4$  seria formada pelos oito grafos da Figura 3.9.

Associando a  $\mathcal{F}_k$  o valor  $g(k) = \max\{|VG|\}_{G \in \mathcal{F}_k}$  (isto é,  $g(k)$  corresponderia à cardinalidade máxima de um conjunto de vértices de um grafo em  $\mathcal{F}_k$ ), acreditamos que o valor  $g(k)$  apresentaria um crescimento polinomial. Já o valor  $f(k)$  muito provavelmente cresceria exponencialmente.

A discussão dos dois parágrafos anteriores resume-se pois na seguinte conjectura:

**Conjectura 1.** Para  $k \geq 3$ , existe uma família finita  $\mathcal{F}_k$  de grafos tal que um grafo  $G$  possui  $k$  cliques maximais com um vértice em comum se e somente se  $G$  contém algum grafo da família  $\mathcal{F}_k$ .

Quando  $k$  cliques maximais se interceptam duas a duas mas não possuem vértice em comum, conjecturamos que existe outra família finita de grafos que caracteriza (não completamente) esta nova situação. Já sabemos (Teorema 2.12) que um grafo clique-completo sem vértices universais contém um subgrafo induzido isomorfo a  $Q_{2p+1}$ , para algum inteiro positivo  $p$ . Seja  $\alpha_n$  o número de cliques maximais de  $Q_n$ . Observe que se  $G$  é um grafo clique-completo sem vértices universais com exatamente  $k$  cliques maximais, temos que  $G$  contém como subgrafo induzido algum grafo da lista  $Q_3, Q_5, \dots, Q_n$ , onde  $n$  é o maior inteiro ímpar para o qual  $\alpha_n \leq k$ . Por outro lado, se  $G$

contém  $Q_n$  como subgrafo induzido para algum  $n$ , então  $G$  possui pelo menos  $\alpha_n$  cliques maximais distintas que se interceptam duas a duas.

Para cada  $n \geq 3$ , seja  $E_n$  o conjunto das arestas do ciclo  $v_1v_2 \dots v_nv_1$  de  $\overline{Q_n}$ . Denominemos estas arestas como *abas*. É claro que  $Q_n$  não possui abas. Definamos para cada  $n \geq 3$  a família de grafos  $\mathcal{Q}_n$  da seguinte forma:

$$\mathcal{Q}_n = \{Q_n \cup E \mid E \subseteq \mathcal{P}(E_n)\},$$

onde  $\mathcal{P}(E_n)$  é o conjunto das partes de  $E_n$  e  $Q_n \cup E$  é o grafo obtido ao acrescentarmos a  $Q_n$  as abas do conjunto  $E$ . Em outras palavras,  $\mathcal{Q}_n$  é a família finita formada por todos os grafos que podem ser obtidos de  $Q_n$  pelo acréscimo de abas. É claro que  $Q_n \in \mathcal{Q}_n$  (basta tomar  $E = \emptyset$ ).

Estamos agora em condições de formular outra conjectura. Afirmamos acima que um grafo clique-completo  $G$  sem vértices universais com exatamente  $k$  cliques maximais contém como subgrafo induzido algum grafo da lista  $Q_3, Q_5, \dots, Q_n$ , onde  $n$  é o maior inteiro ímpar para o qual  $\alpha_n \leq k$ . Fazendo uma analogia com este resultado, formulamos a seguinte conjectura:

**Conjectura 2.** Se  $G$  é um grafo que possui  $k$  cliques maximais que se interceptam duas a duas sem vértice em comum, então  $G$  contém como subgrafo induzido algum grafo do conjunto  $Q_3 \cup Q_5 \cup \dots \cup Q_n$ , onde  $n$  é o maior inteiro ímpar para o qual  $\alpha_n \leq k$ .

As Conjecturas 1 e 2 estão formuladas com o objetivo de caracterizar completamente a situação onde  $k$  cliques maximais se interceptam duas a duas. Em outras palavras, procuramos uma caracterização do tipo “ $K(G)$  contém uma clique de tamanho  $k$  se e somente se  $G$  contém como subgrafo induzido algum grafo de uma lista finita de grafos”. Esta lista deve conter os grafos de  $\mathcal{F}_k$ . Para uma caracterização completa, devemos incluir nesta lista grafos minimais (em vértices) sem vértices universais derivados dos grafos nas famílias  $\mathcal{Q}_n$ . O grafo na Figura 5.1, por exemplo, é minimal sem vértices



universais com cinco cliques maximais que se interceptam duas a duas, e não pertence a nenhuma família  $\mathcal{Q}_n$ . Ele é derivado de  $Q_3$ .

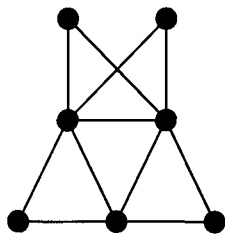


Figura 5.1: Um grafo minimal sem vértices universais com cinco cliques maximais que se interceptam duas a duas.

Mas, independentemente desta caracterização, sabemos que a questão “ $K(G)$  contém uma clique de tamanho maior ou igual a  $k$ ?” pode ser resolvida em tempo polinomial (assumindo que  $k$  esteja fixado e não faça parte da entrada do problema). Foi o que discutimos na Seção 3.2.1. Quando  $k$  faz parte da entrada do problema, conjecturamos que este problema seja NP-completo, pois assim ocorre quando analisamos outros problemas correlatos no Capítulo 4 (veja discussão adiante).

Continuando com algumas contribuições desta tese, ainda no Capítulo 3 vimos como utilizar as caracterizações dos grafos clique-inversos dos grafos que contêm  $K_3$  ou  $K_4$  para caracterizar grafos clique-inversos de: grafos com tamanho máximo de clique três, grafos livres de triângulos, grafos bipartidos, grafos bipartidos cordais e árvores. Com exceção dos grafos clique-inversos dos grafos bipartidos cordais, apresentamos sempre caracterizações por subgrafos proibidos. Os algoritmos polinomiais de reconhecimento para estas classes ora podem se basear nos subgrafos proibidos ora na propriedade de que os grafos nestas classes possuem “poucas” cliques maximais. Mostramos também que as classes  $K^{-1}(k-REGULAR)$  (grafos clique-inversos de grafos  $k$ -regulares, para  $k$  fixo) e  $K^{-1}(CIRCUNFERÊNCIA\ 3)$  (grafos clique-inversos de grafos com circunferência três) possuem algoritmos polinomiais de reconhecimento.

Como subproduto da caracterização de  $K^{-1}(BIPARTIDO\ CORDAL)$ ,

apresentamos uma caracterização para  $K(BIPARTIDO\ CORDAL)$ . Notamos que quando  $C$  era uma classe de grafos clique-Helly com tamanho máximo de clique três, valia  $K(C) = K^{-1}(C) \cap 1 - SECCIONADO$ . Conjecturamos que isto seja verdade para qualquer classe de grafos clique-Helly com tamanho máximo de clique três, e não só para as apresentadas nesta tese.

Passando ao Capítulo 4, discutimos classes de grafos clique-inversos onde o problema de reconhecer se um dado grafo  $G$  pertence a uma destas classes é NP-completo ou Co-NP-completo.

Inicialmente, mostramos que se  $K(G)$  possui certos subgrafos induzidos  $(P_k, \overline{P_k}, C_k$  e  $\overline{C_k})$ , então as cliques maximais de  $G$  correspondentes aos vértices destes subgrafos são em número da ordem do número de vértices de  $G$ . Este resultado mostrou-se necessário para provar que a maioria das classes apresentadas no Capítulo 4 pertencia a Co-NP.

A seguir, mostramos que os problemas de reconhecimento das seguintes classes são Co-NP-completos: grafos clique-inversos de grafos cordais, co-cordais, de partição, co-bipartidos, co-bipartidos-cordais, de intervalo, de co-intervalo, de comparabilidade, de co-comparabilidade, de permutação, livres de TA e bloco. Para as provas de completude, utilizamos o resultado do Teorema 2.10.

Uma continuação natural do trabalho apresentado no Capítulo 4 é caracterizar as classes ali presentes. Embora tais caracterizações não possam conduzir a algoritmos polinomiais de reconhecimento (a menos que  $P=NP$ ), sempre serão úteis pelas relações que tais classes guardam com outras já bem estudadas. Particularmente interessante é a procura de uma caracterização para a classe  $K^{-1}(CORDAL)$ , que já foi citada na literatura como a classe dos grafos clique-cordais.

Finalmente, vimos que os seguintes problemas são NP-completos:

- Dados  $G$  grafo conexo e  $k$  número inteiro (menor ou igual ao número de cliques maximais de  $G$ ),  $\chi(K(G)) \leq k$  ?
- Dados  $G$  um grafo conexo e  $k$  um número inteiro tal que  $1 \leq k \leq \frac{1}{2}|VG|$ ,  $\alpha(K(G)) \geq k$  ?

As provas de NP-dificuldade para os problemas acima utilizaram transformações a partir do problema 3-SAT. Um passo natural a ser dado é verificar se os seguintes problemas também são NP-completos:

- Dados  $G$  grafo conexo e  $k$  número inteiro positivo,  $\omega(K(G)) \geq k$  ?
- Dados  $G$  grafo conexo e  $k$  número inteiro positivo,  $K(G)$  apresenta uma cobertura por cliques de tamanho menor ou igual a  $k$  ?

# Referências Bibliográficas

- [1] E. BALAS and C. S. YU. On graphs with polynomially solvable maximum-weight clique problem. *Networks*, 19:247–253, 1989.
- [2] H.-J. BANDELT and E. PRISNER. Clique graphs and Helly graphs. *J. Comb. Theory, Series B*, 51:34–45, 1991.
- [3] A. BRANDSTÄDT. Special graph classes - a survey (revised version). Technical Report SM - DU - 199, Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität Duisburg Gesamthochschule, Germany, abril 1993.
- [4] A. BRANDSTÄDT, F. F. DRAGAN, V. D. CHEPOI, and V. I. VOLOSHIN. Dually chordal graphs. In *Proceedings of the 19th International Workshop on Graph Theoretic Concepts on Computer Science, Lecture Notes on Computer Science 790*, pages 237–251. Springer-Verlag, 1994.
- [5] D. G. CORNEIL, S. OLARIU, and L. STEWART. Asteroidal triple-free graphs. Technical Report 262/92, Dept. of Computer Science, Univ. of Toronto, Ontario, Canada, junho 1992.
- [6] F. ESCALANTE. Über iterierte clique-graphen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 39:59–68, 1973.
- [7] T. GALLAI. Transitive orienterbare graphen. *Acta Math. Sci. Hung.*, 18:25–66, 1967.

- [8] M. R. GAREY and D. S. JOHNSON. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, New York, 1979.
- [9] M. R. GAREY, D. S. JOHNSON, and L. STOCKMEYER. Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1:237–267, 1976.
- [10] M. C. GOLUMBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [11] M. C. GOLUMBIC, C. L. MONMA, and W. T. TROTTER. Tolerance graphs. *Discrete Appl. Math.*, 9:157–170, 1984.
- [12] M. GUTIERREZ. Tree-clique graphs. In J. L. Szwarcfiter, editor, *Workshop Internacional de Combinatória, ProComb*, pages 7–26, Rio de Janeiro, outubro/96. Estudos e Comunicações do IM, UFRJ.
- [13] R. C. HAMELINK. A partial characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 5:192–197, 1968.
- [14] P. L. HAMMER, F. MAFFRAY, and M. PREISSMANN. A characterization of chordal bipartite graphs. Technical Report 16-89, Rutgers Center for Operations Research, New Brunswick, New Jersey 08903, abril 1989.
- [15] F. HARARY and G. PRINS. The block-cutpoint-tree of a graph. *Publ. Math. Debrecer*, 13:103–107, 1967.
- [16] S. HEDETNIEMI. Graphs of  $(0,1)$ -matrices. In M. Capobianco, J. B. Frechen, and M. Krolík, editors, *Recent Trends in Graph Theory*, pages 157–172, Berlim, 1971. Springer-Verlag.
- [17] S. T. HEDETNIEMI and P. J. SLATER. Line graphs of triangleless graphs and iterated clique graphs. *Lecture Notes in Mathematics*, 303:139–147, 1972.

- [18] B. HEDMAN. Clique graphs of time graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 37:270–278, 1984.
- [19] D. S. JOHNSON, M. YANNAKAKIS, and C. H. PAPADIMITRIOU. On generating all maximal independent sets. *Information Processing Letters*, 27:119–123, 1988.
- [20] T. KLOKS, D. KRATSCH, and H. MÜLLER. Dominoes. Technical Report 94/12, Dept. of Mathematics and Computing Science, Eindhoven Univ. of Technology, Eindhoven, Holanda, março 1994.
- [21] C. G. LEKKERKERKER and J. C. BOLAND. Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, 51:45–64, 1962.
- [22] C. L. LUCCHESI, C. P. MELLO, and J. L. SZWARCFITER. On clique-complete graphs. *Discrete Mathematics*, 183:247–254, 1998.
- [23] C. P. MELLO. *Sobre Grafos Clique-Completo*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1992.
- [24] J. W. MOON and L. MOSER. On cliques in graphs. *Israel J. Math.*, 3:23–28, 1965.
- [25] E. PRISNER. *Graph Dynamics*. Pitman Research Notes in Mathematics 338, Longman, 1995.
- [26] E. PRISNER. Graphs with few cliques. In Y. Alavi and A. Schwenk, editors, *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the 7th Quadrennial International Conference on the Theory and Applications*, pages 945–956. John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [27] E. PRISNER and J. L. SZWARCFITER. Recognizing clique graphs of directed and rooted path graphs. *Discrete App. Math.*, a ser publicado.
- [28] F. PROTTI. On the complexity of recognizing some classes of clique-inverse graphs (abstract). *IX Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*, Buenos Aires, Argentina, a ser publicado.

- [29] F. PROTTI. Grafos clique-bipartidos (resumo). *V Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional*, PUC/RJ, a ser publicado.
- [30] F. PROTTI, F. M. G. FRANÇA, and J. L. SZWARCFITER. A distributed implementation of the clique graph operator. Technical Report ES-444/97, COPPE-Sistemas, Universidade Federal do Rio de Janeiro, agosto 1997.
- [31] F. PROTTI, F. M. G. FRANÇA, and J. L. SZWARCFITER. On computing all maximal cliques distributedly. *IV Symposium on Solving Irregularly Structured Problems in Parallel. Lecture Notes in Computer Science*, 1253:37–48, 1997.
- [32] F. PROTTI and G. ZAVERUCHA. Recognizing classes of logic programs. *IV Workshop on Logic, Language, Information and Computation. Logic Journal of the IGPL*, 6:913–915, 1997.
- [33] F. PROTTI and G. ZAVERUCHA. On the relations between acceptable programs and stratifiable classes. *XIV Brazilian Symposium on Artificial Intelligence. Lecture Notes in Artificial Intelligence*, a ser publicado.
- [34] F. S. ROBERTS and J. H. SPENCER. A characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 10:102–108, 1971.
- [35] D. J. ROSE, R. E. TARJAN, and G. S. LUEKER. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs. *SIAM J. Comput.*, 5:266–283, 1976.
- [36] J. L. SZWARCFITER. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, Rio de Janeiro, 1986.
- [37] J. L. SZWARCFITER. Recognizing clique-helly graphs. *Ars Combinatoria*, 45:29–32, 1997.
- [38] J. L. SZWARCFITER and C. F. BORNSTEIN. Clique graphs of chordal and path graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 7(2):331–336, 1994.

# Glossário de Classes de Grafos

árvore, 9

  enraizada, 9

  expandida, 22

  geradora, 7

caminho induzido, 6

ciclo induzido, 7

clique, 8

clique maximal, 8

complemento (de um grafo), 6

conjunto independente, 8

digrafo, 5

dominó, 11

grafo, 5

  biconexo em vértices, 8

  bipartido, 9

  bipartido completo, 9

  bipartido cordal, 10

  bloco, 11

  clique, 15

    de uma árvore, 63

    de um grafo bipartido, 55

    de um grafo bipartido cordal, 59



grafo (cont.)

grafo clique (cont.)

de um grafo cordal, 22

de um grafo de intervalo, 16

clique-árvore, 22

clique-completo, 23

clique convergente, 16

clique-cordal, 19

clique-Helly, 13

clique-inverso, 17

de uma árvore, 61

de um grafo bipartido, 52

de um grafo bipartido cordal, 57

de um grafo bloco, 94

de um grafo co-bipartido, 74

de um grafo co-bipartido-cordal, 76

de um grafo co-cordal, 71

de um grafo com circunferência três, 50

de um grafo com  $\alpha(G) \geq k$ , 101

de um grafo cordal, 68

de um grafo de co-comparabilidade, 86

de um grafo de co-intervalo, 79

de um grafo de comparabilidade, 82

de um grafo de intervalo, 77

de um grafo de partição, 73

de um grafo de permutação, 92

de um grafo  $k$ -cromático, 95

de um grafo  $k$ -regular, 49

de um grafo livre de  $K_4$ , 47

de um grafo livre de TA, 93

de um grafo livre de triângulos, 51

grafo (cont.)

- co-bipartido, 10
- co-bipartido cordal, 10
- co-cordal, 10
- completo, 7
- conexo, 7
- cordal, 10
- de caminho, 12
- de caminho não direcionado (grafo UV), 12
- de circunferência  $k$ , 7
- de co-comparabilidade, 10
- de co-intervalo, 11
- de comparabilidade, 10
- de indiferença, 11
- de interseção, 9
- de intervalo, 11
- de partição (split), 10
- de permutação, 10
- desconexo, 7
- direcionado, 5
- disk-Helly, 13
- dualmente cordal, 22
- dualmente DV, 23
- dualmente RDV, 23
- DV, 12
- estrela, 10
- fortemente cordal, 10
- $i$ -seccionado, 11
- isolado (grafos isolados), 7
- isomorfo (grafos isomorfos), 6
- $k$ -cromático, 9

livre de TA, 11  
livre de triângulo, 9  
 $n$ -convergente, 16  
ptolomaico, 10  
RDV, 12  
regular, 9  
trivial, 5

subárvore, 9  
subgrafo, 6  
    induzido, 6

triângulo, 7