

MAXIMIZAÇÃO DE FLUXO EM GRAFOS COM LIMITES INFERIORES POSITIVOS

André Luiz da Silva Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



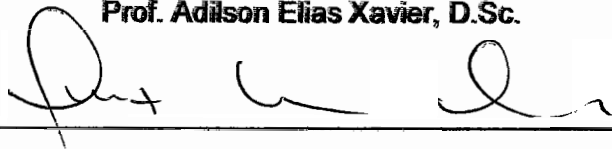
Prof. Claudio Thomás Bornstein, Dr. Rer. Nat.



Prof. Abílio Pereira de Lucena Filho, Ph.D.



Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.



Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1999

RIBEIRO, ANDRÉ LUIZ DA SILVA

Maximização de fluxo em grafos com limites inferiores positivos [Rio de Janeiro] 1999

VI, 51 p. 29,7 cm, (COPPE/UFRJ, M.Sc., ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO, 1999)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 – Fluxo Máximo 2 – Fluxo em rede 3 - Fluxo.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à Deus por ter me dado forças para enfrentar todos os obstáculos que surgiram no decorrer deste trabalho.

A minha esposa Aurelir por ter me compreendido e me ajudado nos momentos mais difíceis.

Ao professor Cláudio Bornstein pelo seu apoio, sua dedicação, compreensão e suas valiosas contribuições dispensadas a este trabalho.

Aos amigos André, Luciane e Ana Lucia que me acompanharam e me apoiaram desde o início.

A todos aqueles que de alguma forma colaboraram com este trabalho em especial à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

MAXIMIZAÇÃO DE FLUXO EM GRAFOS COM LIMITES INFERIORES POSITIVOS

André Luiz da Silva Ribeiro

Dezembro/1999

Orientador: Claudio T. Bornstein

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação.

Analisa-se problemas de maximização de fluxo em grafos com limites inferiores positivos. É implementado o Algoritmo das Duas Fases. A primeira fase consiste em determinar um fluxo viável. Isto é feito transformando o grafo original em um grafo equivalente com limite inferior l_{ij} nulo e aplicando a este o algoritmo tradicional. São analisadas condições que permitem uma simplificação do grafo equivalente. Estas condições permitem dispensar a segunda fase na qual se gera o fluxo máximo a partir do fluxo viável. Assim, conseguimos gerar o fluxo máximo com uma única fase.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MAXIMIZATION OF NETWORK FLOW WITH POSITIVE LOWER BOUNDS

André Luiz da Silva Ribeiro

December/1999

Advisor: Claudio T. Bornstein

Department: Systems Engineering and Computing

We examine maximum flow problems with positive lower bounds. The two-phase algorithm is implemented. The first phase determines a feasible flow. We transform the given graph in an equivalent graph with lower bounds $l_{ij} = 0$. Conditions are examined which result in a more simple equivalent graph. These conditions allow us to abstain from using the second phase where a maximum flow is generated starting from a feasible flow. Thus, we get a maximum flow in a one phase algorithm.

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1) Introdução | 1 |
| 1.1) Objetivos..... | 1 |
| 1.2) Estrutura do trabalho..... | 3 |
| 2) Apresentação do problema e a simbologia utilizada | 5 |
| 2.1) Definição..... | 5 |
| 2.2) O problema de fluxo máximo com limites inferiores nulos..... | 6 |
| 2.2.1) Grafo residual..... | 6 |
| 2.2.2) Algoritmo genérico de aumento de fluxo..... | 7 |
| 3) Algoritmo das duas fases | 11 |
| 3.1) Determinação de um fluxo máximo a partir de um fluxo viável (Fase 2)..... | 11 |
| 3.2) Determinação de um fluxo viável (Fase 1)..... | 11 |
| 3.3) Algoritmo das duas fases (A2F)..... | 16 |
| 4) Algoritmo de uma fase | 27 |
| 4.1) Condições iniciais..... | 30 |
| 4.2) Limite inferior de v | 30 |
| 4.3) Condições para $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$ | 31 |
| 4.3.1) Fluxograma para $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$ | 34 |
| 4.3.2) Discussão e interpretação dos testes..... | 34 |
| 4.4) Algoritmo A1F..... | 38 |
| 4.5) Exemplo..... | 39 |
| 4.6) Condições de otimalidade..... | 42 |
| 5) Implementações dos algoritmos | 47 |
| 6) Conclusão | 50 |
| Apêndice | 56 |
| Bibliografia | 57 |

1) INTRODUÇÃO

1.1) OBJETIVOS

Neste trabalho, consideraremos problemas de fluxo máximo com limites inferiores não-negativos ($l_{ij} \geq 0$) sobre os arcos de fluxos de um grafo $G = (N, A)$, onde N é o conjunto enumerável dos $n = |N|$ nós e A é o conjunto dos $m = |A|$ pares (i, j) de N (arcos ou ramos). Nosso objetivo principal é maximizar o fluxo v de um nó fonte s , até um nó sumidouro t , que satisfaça as capacidades dos arcos e as restrições de balanço de massa sobre todos os nós exceto nos nós s e t . Portanto, a seguinte formulação modela este problema:

Maximizar v

sujeito a

$$\sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{para } i = s \\ 0 & \text{para } i \in N - \{s, t\} \\ -v & \text{para } i = t \end{cases}$$
$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \text{ para cada } (i, j) \in A.$$

onde,

$x_{ij} \Rightarrow$ fluxo no arco (i, j)

$u_{ij} \Rightarrow$ capacidade máxima no arco (i, j)

$l_{ij} \Rightarrow$ capacidade mínima no arco (i, j)

$v \Rightarrow$ valor do fluxo no grafo

Para resolvermos este problema, temos em AHUJA et al. [1] página 191 o algoritmo das duas fases. A primeira fase determina um fluxo viável, e a segunda fase determina o fluxo máximo. A determinação de um fluxo viável para este problema P , não é tão trivial quanto à determinação de um fluxo viável para o problema de fluxo máximo com limites inferiores nulos. Assim, para determinarmos um fluxo viável em P , temos (veja AHUJA et al. [1]) uma adaptação de um algoritmo apresentado por FORD e FULKERSON [2], onde através de uma mudança de variáveis, criamos um novo problema auxiliar P' com limites inferiores nulos. Uma apresentação detalhada deste algoritmo será feita no capítulo 3. Segue-se uma idéia geral. Começamos

fazendo uma transformação do grafo original G em um novo grafo equivalente com limites inferiores nulos ($l_{ij} = 0$), isto é, dado o seguinte problema:

$$P = \begin{cases} \text{Maximizar } v \\ \text{sejeito a} \\ \sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{para } i = s \\ 0 & \text{para } i \in N - \{s, t\} \\ -v & \text{para } i = t \end{cases} \\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \end{cases}$$

Fazemos P' um problema tal que $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$, então temos:

$$P' = \begin{cases} \text{Maximizar } v \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{j|(i,j) \in A} x'_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x'_{ji} = b(i) \quad \forall i \in N \\ l'_{ij} \leq x'_{ij} \leq u'_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \end{cases}$$

onde, $l'_{ij} = 0$, $u'_{ij} = u_{ij} - l_{ij}$ e

$$b(i) = \begin{cases} v + \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}, & \text{para } i = s \\ \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}, & \text{para } i \in N - \{s, t\} \\ -v + \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}, & \text{para } i = t \end{cases}$$

A dificuldade intrínseca ao P' é que em função da mudança de variáveis, não temos mais garantido o equilíbrio de fluxo nos nós de G , isto é, o fluxo que entra em cada nó $i \neq s$ e t de G não é igual ao fluxo que sai, o que torna difícil a aplicação dos algoritmos de aumento de fluxo cuja característica principal é manter os fluxos equilibrados.

Para resolver este problema, criamos novos nós artificiais s^* e t^* que passam a ser fonte e sumidouro do grafo. Para cada nó $i / b(i) > 0$, criamos um novo arco artificial (s^*, i) tal que $0 \leq x'_{s^*i} \leq b(i)$. E para cada nó $i / b(i) < 0$, criamos um novo arco artificial (i, t^*) tal que $0 \leq x'_{it^*} \leq -b(i)$. Se $b(i) = 0$, nenhum arco novo é criado.

Surgem no entanto dificuldades adicionais nos nós $i = s$ e t pois nestes nós os excessos não podem ser calculados devido ao desconhecimento do valor de v . Pior, nem tampouco é possível saber a priori o sinal dos excessos, isto é, se $b(s) > 0$ ou $b(s) < 0$. Assim, não se sabe se o arco a ser criado para s é do tipo (s^*, s) ou (s, t^*) . A mesma dúvida se aplica ao nó t . O algoritmo tradicional resolve este problema criando um arco de retorno (t, s) .

O objetivo do presente trabalho foi verificar em que condições podemos dispensar o arco de retorno (t, s) , ou seja, examinar casos especiais, em que é possível determinar o sinal dos excessos nos nós s e t , permitindo portanto a determinação de arcos (s^*, s) e (t, t^*) . A seguir maximizamos o fluxo de s^* a t^* . A vantagem deste enfoque é que para estes casos, como será mostrado, a segunda fase não mais é necessária, ou seja, o fluxo viável obtido na primeira fase é um fluxo máximo. A verificação das condições acima citadas é feita em $O(n)$, não afetando portanto a complexidade do algoritmo.

1.2) ESTRUTURA DO TRABALHO

Antes de falarmos desta estrutura, ressaltamos que além das pesquisas bibliográficas, também foram feitas pesquisas via e-mail e via carta, onde vários pesquisadores, nesta área, foram contactados. (veja: KISHIMOTO [7], GAUTIER [8], SCUTELLA [9], HARTVIGSEN [10] e NAGAMOCHI [11]). Todos sem exceção citaram AHUJA et al. [1] como referência para resolver o nosso problema de fluxo máximo com limites inferiores não-negativos.

Neste capítulo, apresentamos o problema a ser resolvido e a simbologia utilizada no texto. Já no capítulo 2, falamos sobre algumas suposições que temos que considerar, e fazemos um breve resumo sobre como se resolve o problema de fluxo máximo para limites inferiores nulos.

No capítulo 3, apresentamos o algoritmo tradicional das duas fases que resolve o problema proposto. Por conveniência, consideramos a segunda fase antes da primeira. Assim, em 3.1 apresentamos a determinação de um fluxo máximo a partir de um fluxo viável e em 3.2 a determinação de um fluxo viável.

No capítulo 4, é apresentada a nossa contribuição para o problema. Apresentamos o algoritmo de uma fase que resolve o problema proposto. Primeiramente, em 4.1 estabelecemos condições iniciais relativas ao desequilíbrio dos nós s e t que permitem a criação de um arco (s^*, s) e um arco (t, t^*) . Em 4.2, determinamos um limite inferior para o valor do fluxo no grafo e em 4.3 garantimos

condições para o desequilíbrio no nó s ser positivo e o do nó t ser negativo, para que fique bem definida a inclusão dos dois novos arcos (s^*,s) e (t,t^*) . Finalmente em 4.4 apresentamos o novo algoritmo e em 4.5 um exemplo resolvido. Em 4.6, apresentamos algumas propriedades.

No capítulo 5 implementamos os dois algoritmos apresentando alguns resultados, e no capítulo 6 tiramos as conclusões.

2) APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA E SIMBOLOGIA UTILIZADA

2.1) DEFINIÇÃO

Partimos do problema P definido na seção 1.1. Antes de falarmos sobre como resolver este problema, temos que levar em consideração algumas suposições, tais como:

- a) G é um digrafo;
- b) $l_{ij}, u_{ij} \geq 0$ e inteiros;
- c) Não existe caminho de s à t com capacidade ∞ e
- d) $(i, j) \in A \Rightarrow (j, i) \in A$.

Um caso particular deste problema, é quando temos limite inferior nulo ($l_{ij} = 0$). Evidentemente o problema de fluxo máximo com limites inferiores nulos sempre tem uma solução viável (fluxo zero). O problema com limites inferiores não-negativos, pode ou não ter uma solução viável. Por exemplo, considere o problema de fluxo máximo dado na figura 2.1. Este problema não tem uma solução viável, porque o arco $(1,2)$ deve transportar no mínimo 6 unidades de fluxo para o nó 2 e o arco $(2,3)$ pode transportar no máximo 5 unidades de fluxo. Portanto, nunca conseguimos satisfazer a restrição de balanço de massa do nó 2.

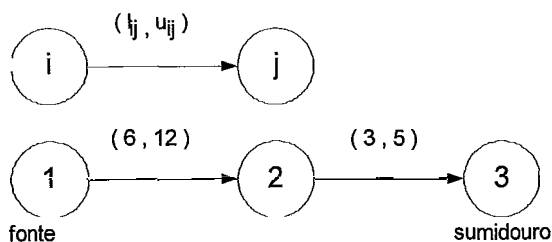


Figura 2.1

Problema de fluxo máximo,
onde não existe solução viável

Como ilustrado neste exemplo, um algoritmo de fluxo máximo para problemas com limites inferiores não-negativos tem dois objetivos: (I) determinar se o problema tem ou não solução viável, e (II) se tiver, encontrar o fluxo máximo. Existem vários algoritmos que tem estas finalidades. O mais conhecido é o algoritmo das duas fases (veja AHUJA et al. [1], página 191). A primeira fase determina se existe um fluxo viável ou não, e a segunda fase converte um fluxo viável em um fluxo máximo. Mais

adiante veremos que o problema em cada fase se reduz essencialmente em resolver um problema de fluxo máximo com limites inferiores nulos. Consequentemente é possível resolver um problema de fluxo máximo com limites inferiores não-negativos resolvendo dois problemas de fluxo máximo, cada um com limites inferiores nulos.

A seguir faremos um breve resumo do algoritmo de fluxo máximo com limites inferiores nulos ($l_{ij} = 0$).

2.2) O PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO COM LIMITES INFERIORES NULOS

Seja um problema P definido na seção 1.1, com limites inferiores nulos ($l_{ij} = 0$). Denominaremos o vetor $x = \{x_{ij}\}$, de fluxo, e o valor correspondendo à variável v de valor do fluxo.

FORD e FULKERSON [3] e ELIAS et al. [4] resolvem este problema utilizando o Algoritmo Genérico de Aumento de Fluxo, cuja complexidade é $O(nmU)$, onde $U = \max(u_{ij} \mid (i, j) \in A)$. Antes de apresentarmos este algoritmo, vejamos o conceito de um grafo residual, uma vez que a maioria dos algoritmos de fluxo máximo trabalha com grafos residuais.

2.2.1) GRAFO RESIDUAL

Em AHUJA et al.[1], é definido o grafo residual e discutidas várias de suas propriedades. Seja um grafo $G = (N, A)$ e um fluxo x em G . As capacidades residuais r_{ij} e r_{ji} de um arco $(i, j) \in A$ são os fluxos máximos adicionais que podem ser mandados usando os arcos (i, j) e (j, i) . Dado um fluxo x_{ij} , a capacidade residual r_{ij} tem dois componentes: (I) $u_{ij} - x_{ij}$, a capacidade adicional do arco (i, j) , e (II) o contrafluxo relativo ao arco (j, i) . Consequentemente, $r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji}$. Chamaremos o grafo consistindo de arcos com capacidades residuais positivas com relação ao fluxo x de grafo residual $G(x)$ de G .

Exemplo de um grafo residual.

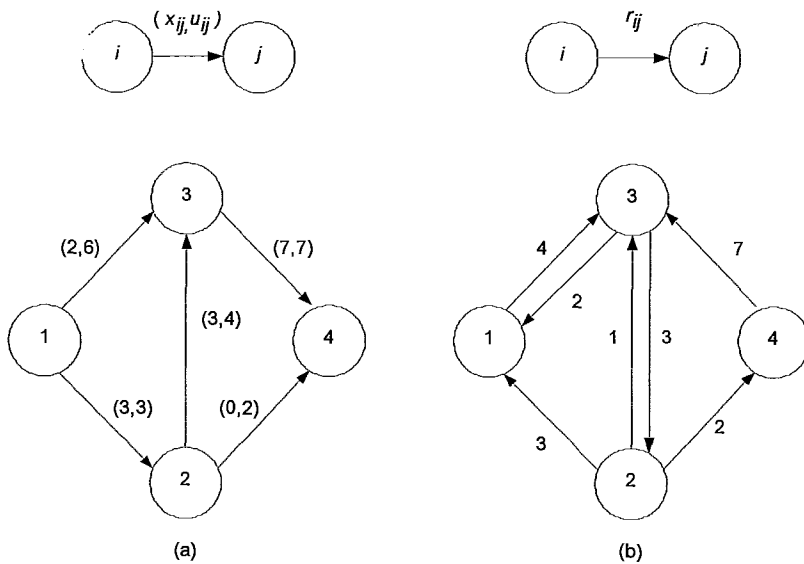


Figura 2.2

A figura (2.2), ilustra um grafo residual, onde: (a) representa o grafo original G com um fluxo x e (b) representa o grafo residual $G(x)$.

2.2.2) ALGORITMO GENÉRICO DE AUMENTO DE FLUXO

Seja o digrafo $G = (N, A)$.

Passo 1: Determinar o fluxo inicial viável tal que x_{ij} seja inteiro. Por exemplo $x = 0, v = 0$.

Passo 2: Construa o grafo residual $G(x) = (N, A')$ em que a cada arco $(i, j) \in A'$ associa-se um número r_{ij} que representa a alteração possível do fluxo x_{ij} , onde

$$r_{ij} = u_{ij} - x_{ij} + x_{ji} > 0.$$

Passo 3: Dois casos são possíveis:

3.1) Em $G(x)$ existe um caminho φ de s a t . Neste caso mandamos o máximo correspondente ao "gargalo" δ , onde

$$\delta = \min\{r_{ij} / (i, j) \in \varphi\}.$$

Modificamos os fluxos dos arcos $(i, j) \in \varphi$ da seguinte maneira:

$$x_{ij} = x_{ij} + \delta \text{ se } x_{ij} > 0 \quad \text{ou} \quad x_{ij} = x_{ji} = 0$$

e

$$x_{ji} = x_{ji} - \delta \quad \text{se } x_{ji} > 0.$$

Para os demais arcos $(i, j) \notin \mathcal{E}$ fazemos $x_{ij} = x_{ij}$.

Fazemos $v = v + \delta$.

Volte ao Passo 2.

3.2) Em $G(x)$ não existe caminho de s a t . Logo $x^* = x$ é solução ótima, pare.

A seguir falaremos sobre a otimalidade deste algoritmo. Dada uma partição de N em S e $\bar{S} = N - S$ (veja GONÇALVES [5]), o corte $[S, \bar{S}]$ é um conjunto de arcos (i, j) tal que uma extremidade pertence a S e a outra a \bar{S} . Daqui por diante nos restringiremos a cortes $s-t$, isto é, $s \in S$ e $t \in \bar{S}$. Dado um corte $[S, \bar{S}]$, temos os seguintes arcos:

arco (i, j) tal que $i \in S$ e $j \in \bar{S}$ é chamado arco de incremento;

arco (i, j) tal que $i \in \bar{S}$ e $j \in S$ é chamado arco de decréscimo.

Portanto, podemos escrever o corte $[S, \bar{S}] = (S, \bar{S}) \cup (\bar{S}, S)$, onde (S, \bar{S}) é o conjunto dos arcos de incremento e (\bar{S}, S) é o conjunto dos arcos de decréscimo. Chamaremos

$$u[S, \bar{S}] = \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} u_{ij}$$

capacidade do corte e

$$r[S, \bar{S}] = \sum_{(i,j) \in (\bar{S}, S)} r_{ij}$$

capacidade residual do corte. Assim corte mínimo implica corte de capacidade $u[S, \bar{S}]$ mínima. No grafo residual só existem arcos com $r_{ij} > 0$.

A seguir apresentaremos um corolário e dois teoremas importantes que garantem a otimalidade deste algoritmo (veja AHUJA et al. [1]). São eles:

Teorema 2.1: $v \leq u[S, \bar{S}] \quad \forall v$ viável e $\forall (S, \bar{S})$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade seja $S \subset N$ tal que $s \in S$ e $t \notin S$ e seja \bar{S} seu complementar ($\bar{S} = N - S$).

Somando as equações de balanço de fluxo para todos os nós de S , temos

$$\sum_{i \in S} \left(\sum_{j | (i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j | (j,i) \in A} x_{ji} \right) = v.$$

Ora, $A = (S, S) \cup (S, \bar{S}) \cup (\bar{S}, S) \cup (\bar{S}, \bar{S})$. Assim

$$\sum_{i,j \in (S,S)} x_{ij} + \sum_{i,j \in (S,\bar{S})} x_{ij} - \sum_{i,j \in (\bar{S},S)} x_{ij} - \sum_{i,j \in (\bar{S},\bar{S})} x_{ij} = v \Rightarrow \sum_{i,j \in (S,\bar{S})} x_{ij} - \sum_{i,j \in (\bar{S},S)} x_{ij} = v.$$

Tomando um limite superior para x_{ij} ($x_{ij} = u_{ij}$) no primeiro termo e um limite inferior para x_{ij} ($x_{ij} = 0$) no segundo termo temos um limite superior para v . Isto é,

$$u[S, \bar{S}] = \sum_{i,j \in (S,\bar{S})} u_{ij} \geq v. \quad \square$$

Corolário 2.1: Se $u[S^*, \bar{S}^*] = v^*$ então v^* é máximo e $u[S^*, \bar{S}^*]$ é mínimo.

Teorema 2.2: A regra de parada (3.2) implica na definição de um corte $[S^*, \bar{S}^*]$ tal que $u[S^*, \bar{S}^*] = v^*$. Com isso temos garantida a otimalidade do algoritmo.

Demonstração:

Seja S^* o conjunto de nós atingidos a partir de s por algum caminho de $G(x)$. Como foi aplicada a regra de parada do algoritmo temos que $t \notin S^*$. Logo $t \in \bar{S}^* = N - S^*$.

Os seguintes casos podem ser considerados:

a) $(i, j) \in (S^*, \bar{S}^*) \Rightarrow x_{ij}^* = u_{ij}^*$ porque se $x_{ij}^* < u_{ij}^*$ então $r_{ij}^* = u_{ij}^* - x_{ij}^* + x_{ji}^* > 0$ então $j \in S^*$ o que é absurdo.

b) $(i, j) \in (\bar{S}^*, S^*) \Rightarrow x_{ij}^* = 0$ porque se $x_{ij}^* > 0$ então $r_{ji}^* = u_{ji}^* - x_{ji}^* + x_{ij}^* > 0$ então $i \in S^*$ o que é absurdo.

Usando o resultado do Teorema 2.1

$$\sum_{(i,j) \in (S,S)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\bar{S},\bar{S})} x_{ij} = v.$$

Se este resultado é válido para qualquer corte, então é valido para o corte $[S^*, \bar{S}^*]$.

Atribuímos os valores caracterizados pelos casos (a) e (b)

$$\sum_{(i,j) \in (S^*, S^*)} u_{ij} - 0 = v^*.$$

Assim, temos $u[S^*, \overline{S^*}] = v^*$. Pelo corolário temos que o fluxo v é máximo e $u[S^*, \overline{S^*}]$ é mínima. □

Uma vez demonstrado este teorema, temos garantida a otimalidade do algoritmo genérico de aumento de fluxo.

Para o problema de maximização de fluxo com limites inferiores positivos podemos generalizar a definição de capacidade de fluxo de um corte $[S, \overline{S}]$ escrevendo:

$$u[S, \overline{S}] = \sum_{(i,j) \in (S, \overline{S})} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\overline{S}, S)} l_{ij}.$$

O Teorema de Fluxo Máximo / Corte Mínimo pode também ser generalizado para o problema de maximização de fluxo com limites inferiores positivos (veja Ahuja et al.[1]).

3) O ALGORITMO DAS DUAS FASES

Como vimos anteriormente, o algoritmo das duas fases primeiro determina se existe um fluxo viável ou não, e depois converte um fluxo viável em um fluxo máximo. Faremos a seguir uma recapitulação deste algoritmo (veja AHUJA et al. [1]). Por conveniência, consideraremos a segunda fase antes da primeira.

3.1) DETERMINAÇÃO DE UM FLUXO MÁXIMO A PARTIR DE UM FLUXO VIÁVEL (FASE 2)

O algoritmo é idêntico ao algoritmo com limite inferior nulo. A única diferença é que a capacidade residual r_{ij} é calculada da seguinte maneira:

$$r_{ij} = (u_{ij} - x_{ij}) + (x_{ji} - l_{ji})$$

A diferença está no termo $(x_{ji} - l_{ji})$ ao invés de só x_{ji} . A razão é que o fluxo no arco (i, j) não pode ser incrementado de x_{ji} , pois como agora existe limite inferior e $l_{ji} \leq x_{ji}$, o incremento de fluxo possível no arco (i, j) é tão somente $(x_{ji} - l_{ji})$. Uma vez calculado r_{ij} prosseguimos de forma idêntica ao que foi apresentado no algoritmo da seção 2.2.2.

3.2) DETERMINAÇÃO DE UM FLUXO VIÁVEL (FASE 1)

Existem duas maneiras de se resolver este problema:

(a) Transformação de um grafo original G em um grafo G^* equivalente com limite inferior nulo ($l_{ij} = 0$).

(b) Atendimento dos limites inferiores de fluxo através de incrementos ao longo de ciclos.

Aqui, somente consideraremos o caso (a).

Para maior clareza e comodidade repetimos aqui a transformação feita no capítulo 1, visando gerar um grafo equivalente com limites inferiores nulos ($l_{ij} = 0$).

Seja

$$P = \begin{cases} \text{Maximizar } v \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji} = \begin{cases} v & \text{para } i = s \\ 0 & \text{para } i \in N - \{s, t\} \\ -v & \text{para } i = t \end{cases} \\ l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \end{cases} \quad (3.1)$$

Fazemos P' um problema tal que $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$, então temos:

$$P' = \begin{cases} \text{Maximizar } v \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{j|(i,j) \in A} x'_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A} x'_{ji} = b(i) \quad \forall i \in N \\ 0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \end{cases} \quad (3.2)$$

onde,

$$b(i) = \begin{cases} v + \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}, & \text{para } i = s \\ \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}, & \text{para } i \in N - \{s, t\} \\ -v + \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}, & \text{para } i = t \end{cases} \quad (3.3)$$

É fácil mostrar que $\sum_{i \in N} b(i) = 0$. Basta ver que se somarmos (3.3) temos

$$\sum_{i \in N} b(i) = v - v + \sum_{i \in N} \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{i \in N} \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}.$$

Mas $\sum_{i \in N} \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} = \sum_{i \in N} \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij} = \sum_{(i,j) \in A} l_{ij}$. Logo $\sum_{i \in N} b(i) = 0$.

Portanto $\sum_{i|b(i) \geq 0} b(i) = \sum_{i|b(i) \leq 0} b(i)$. Este fato será importante para o desenvolvimento do método.

A única dificuldade com P' é que de uma maneira geral não temos mais garantido o equilíbrio do fluxo nos nós $i \neq s$ e t , o que torna difícil a aplicação dos algoritmos de aumento de fluxo cuja característica principal é justamente manter os

fluxos equilibrados. Para superar este tipo de problema, fazemos uma nova transformação, isto é, criamos dois novos nós s^* e t^* . Para cada nó $i / b(i) > 0$, criamos um novo arco artificial (s^*, i) tal que $0 \leq x'_{s^*i} \leq b(i)$. E para cada nó $i / b(i) < 0$, criamos um novo arco artificial (i, t^*) tal que $0 \leq x'_{it^*} \leq -b(i)$. Se $b(i) = 0$, nenhum arco novo é criado.

Vejamos agora o que fazer com os nós s e t . Cabe lembrar que as expressões para $b(s)$ e $b(t)$ contém a incógnita ν , sendo assim impossível calcular os seus valores e portanto determinar o sinal de $b(s)$ e $b(t)$. É com intuito de resolver este problema criado pelo desequilíbrio de fluxo nos nós s e t , que acrescentamos um arco (t, s) que chamamos de arco de retorno de fluxo (veja Ahuja et al. [1], página 193). Este arco visa neutralizar o efeito de ν permitindo, agora sim, calcularmos o sinal de $b(s)$ e $b(t)$ e possibilitando decidir se s / t deve ser ligado a s^* ou t^* .

O novo grafo, incluindo arcos artificiais $(s^*, i) / b(i) > 0$, arcos artificiais $(i, t^*) / b(i) < 0$ e o arco de retorno (t, s) é denominado **GRAFO TRANSFORMADO**. Denominemos este grafo de $G^* = (N^*, A^*)$, onde

$$N^* = N \cup \{s^*, t^*\} \text{ e}$$

$$A^* = A \cup \{(t, s)\} \cup \{(s^*, i) \mid \forall i \in N / b(i) > 0\} \cup \{(i, t^*) \mid \forall i \in N / b(i) < 0\}.$$

A figura 3.1 apresenta um exemplo de um grafo transformado.

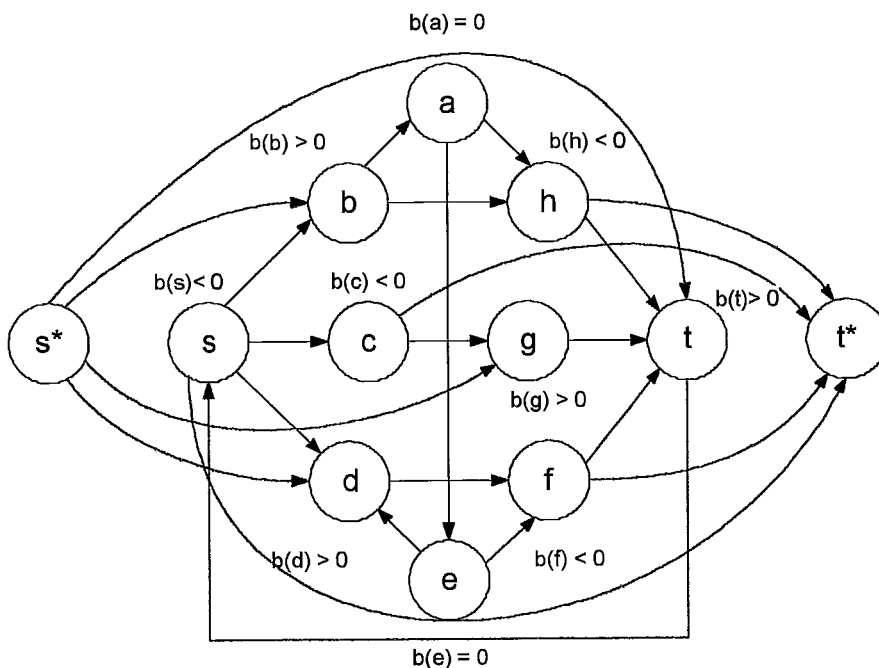


Figura 3.1

Exemplo do grafo G^* com arcos artificiais em azul, e o arco (t, s) de retorno em vermelho.

Assim, temos que resolver o seguinte problema $P2F$ para este novo grafo G^* :

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } v' \\
 & \text{sujeito a} \\
 & \sum_{j|(i,j) \in A^*} x'_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A^*} x'_{ji} = \begin{cases} v' & \text{para } i = s^* \\ 0 & \text{para } i \in N \\ -v' & \text{para } i = t^* \end{cases} \\
 P2F . = & \left\{ \begin{aligned} & 0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\ & 0 \leq x'_{ts} \leq +\infty \\ & 0 \leq x'_{s^*i} \leq b(i) \quad \forall i \in N / b(i) > 0 \\ & 0 \leq x'_{it^*} \leq -b(i) \quad \forall i \in N / b(i) < 0 \end{aligned} \right. \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

onde, $b(i) = \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}$.

A partir de agora utilizaremos l'_{ij} como limites inferiores e u'_{ij} como limites superiores dos arcos $(i, j) \in A^*$ desse modelo.

Para efeito de implementação não convém utilizarmos o valor ∞ como limite superior de fluxo para x'_{ts} . Utilizaremos os seguintes limites para o arco (t, s) :

$$0 \leq x'_{ts} \leq \sum_{j|(s,j) \in A} u_{sj} + 1.$$

O limite superior é calculado supondo-se que todos os limites superiores dos arcos que saem do nó s no grafo original G são atingidos, e somamos um, para que este novo limite não afete a escolha do corte mínimo.

Após todas estas mudanças, nós teremos agora que maximizar o fluxo do novo nó fonte s^* ao novo nó sumidouro t^* . Uma vez encontrado o fluxo máximo x'^* para o grafo G^* , se os limites superiores dos arcos (s^*, i) e (i, t^*) são atingidos, teremos um fluxo viável quando retornarmos ao grafo original G . Caso estes limites superiores não sejam atingidos, não vamos conseguir satisfazer a capacidade dos arcos $(i, j) \in A$ quando retornarmos ao grafo original G .

Maximizamos o fluxo, aplicando qualquer algoritmo que trabalhe com limites inferiores nulos. Seja x'^* o fluxo máximo. Caso

$$\left. \begin{aligned} x'_{s^*i} &= b(i) \quad \forall (s^*, i) \in A^* \\ x'_{it^*} &= -b(i) \quad \forall (i, t^*) \in A^* \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ou, o que é equivalente à ter:

$$\sum_{(s^*, i) \in A^*} x'_{s^*i} = \sum_{i|b(i)>0} b(i) = \sum_{(i, t^*) \in A^*} x'_{it^*} = \sum_{i|b(i)<0} -b(i).$$

Então, dado um fluxo máximo x'^* tal que as condições (3.5) são satisfeitas é possível encontrar um fluxo que satisfaz a (3.1) fazendo a transformação inversa $x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$. Por outro lado, dado um fluxo satisfazendo a (3.1) é possível encontrar um fluxo satisfazendo a (3.4) ao qual é possível fazer corresponder um fluxo que é máximo para G^* , satisfazendo as condições (3.5) acima (veja Ahuja et al.[1]). Assim:

x é um fluxo viável para $G \Leftrightarrow x'^*$ é um fluxo máximo para G^* , satisfazendo (3.5)

A seguir resumimos o algoritmo de duas fases para limites inferiores não negativos.

3.3) ALGORITMO DAS 2 FASES (A2F)

Este algoritmo resolve qualquer problema de fluxo máximo com limite inferior $l_{ij} \geq 0$ sobre os arcos, acrescentando um arco de retorno (t, s) .

FASE 1

Passo 1: Transformamos o grafo original em uma circulação, adicionando o arco (t, s) com limites $(0, \sum_{j|(s,j) \in A} u_{sj} + 1)$.

Passo 2: Calculamos os valores $b(i) = \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij} \quad \forall i \in N$.

Passo 3: Construímos um novo grafo G^* com dois nós s^* e t^* criando arcos (s^*, i) se $b(i) > 0$ e arcos (i, t^*) se $b(i) < 0$. Se $b(i) = 0$ nenhum arco novo para i é criado. Os limites (l'_{ij}, u'_{ij}) são:

$(0, b(i))$ para os arcos (s^*, i) ;

$(0, -b(i))$ para os arcos (i, t^*) ;

$(0, u_{ij} - l_{ij})$ para os arcos $(i, j) \in A$.

Utilizando o algoritmo genérico de aumento de fluxos (seção 2.2.2) ou outro algoritmo qualquer, maximizamos o fluxo x'^* de s^* a t^* .

Passo 4: Dois casos são possíveis:

a) Se $\forall i$ tal que $(s^*, i) \in A^*$ temos $x'_{s^*i} = b(i)$ e $\forall i$ tal que $(i, t^*) \in A^*$ temos $x'_{it^*} = -b(i) \Rightarrow$ Passo 5.

b) Em caso contrário, o problema original não tem solução viável.

Passo 5: Volte ao grafo original G eliminando os arcos (s^*, i) e (i, t^*) . Elimine também o arco (t, s) de retorno de fluxo. Para os demais arcos faça $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$. x é um fluxo viável para o grafo original G .

FASE 2

Passo 6: Uma vez encontrado um fluxo viável para o grafo original G , passamos à Fase 2 (veja seção 3.1).

Como veremos no primeiro exemplo a seguir, acrescentando o arco de retorno de fluxo, não necessariamente temos $b(s) > 0$ e $b(t) < 0$. Assim s pode estar ligado a t^* e t a s^* .

Exemplo 3.3.1

Seja $G = (N, A)$ o seguinte grafo:

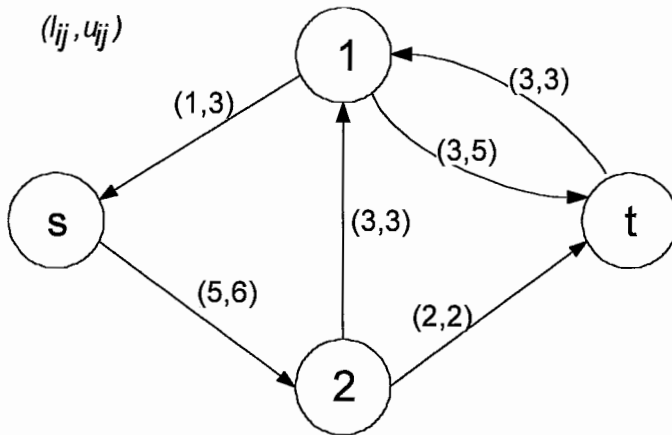


figura 3.2
grafo original $G=(N,A)$

FASE 1

Acrescentamos o arco (t,s) com $l'_{ts} = 0$ e $u'_{ts} = 7$. Para cada nó i colocamos em vermelho o valor de $b(i)$ (veja figura 3.3).

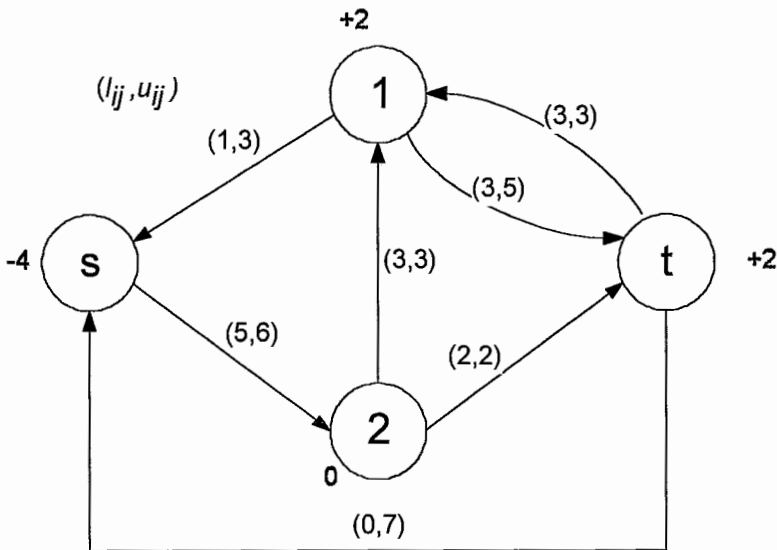


figura 3.3
Grafo original G já com o arco de retorno (t,s) e os valores $b(i)$.

Construimos o grafo modificado $G^* = (N^*, A^*)$ de acordo com o Passo 3 (veja figura 3.4).

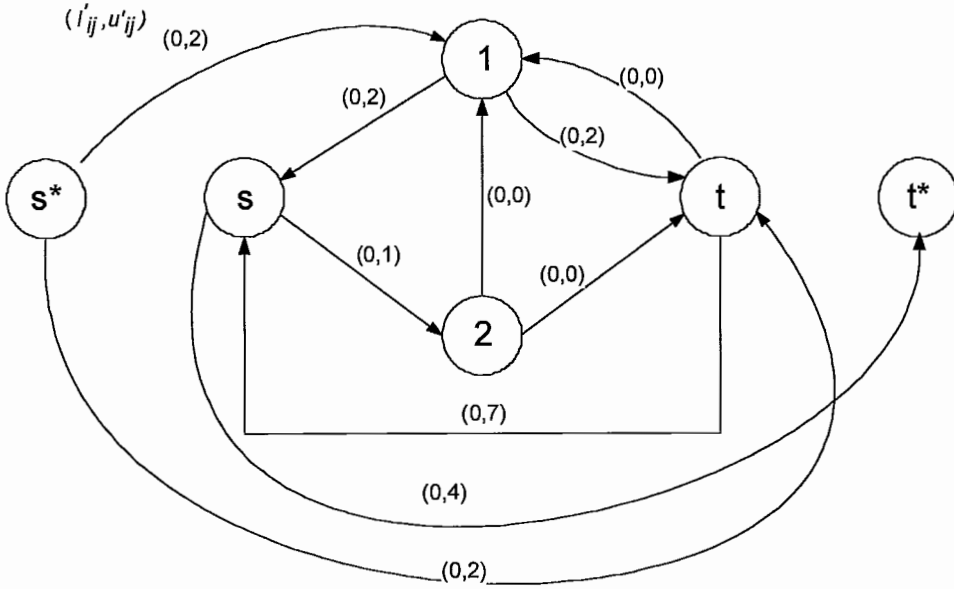


Figura 3.4
Grafo modificado G^*

A seguir maximizamos o fluxo, utilizando por exemplo o algoritmo genérico de aumento de fluxo com limites inferiores nulos (veja seção 2.2.2). Temos como resultado x'^* (veja figura 3.5).

$$(l'_{ij}, x'_{ij}, u'_{ij})$$

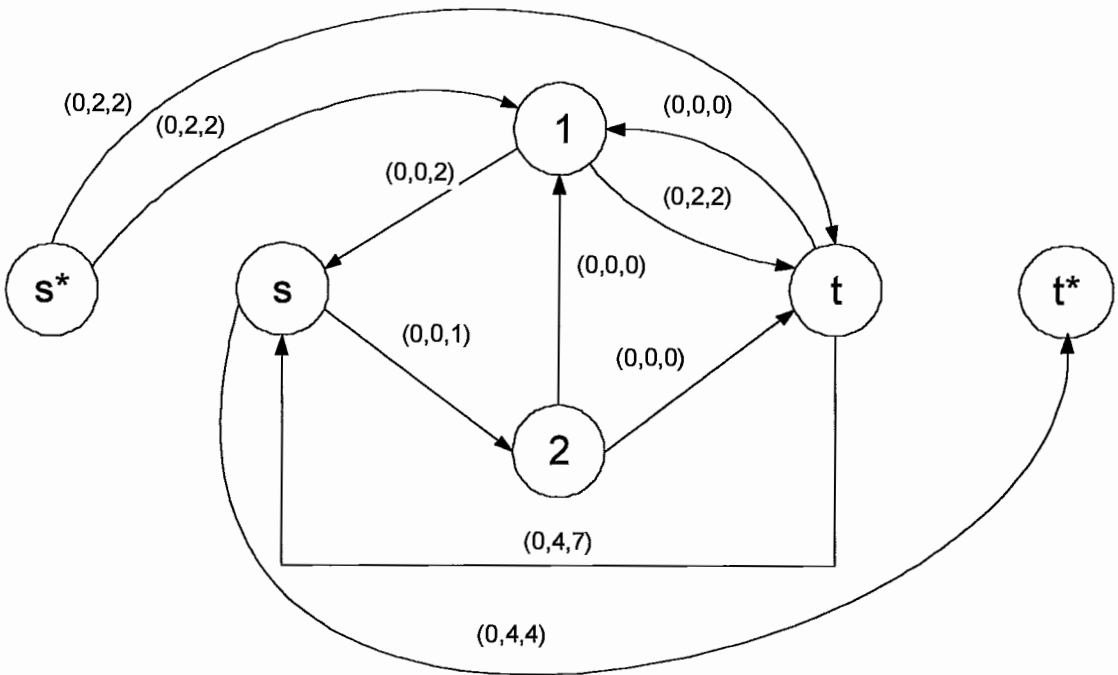


Figura 3.5

Grafo modificado G^* com limites inferiores l'_{ij} ,

fluxo x'_{ij} e limites superiores u'_{ij}

Como as condições (a) do Passo 4 foram satisfeitas, voltamos ao grafo original G eliminando os arcos (s^*, i) e (i, t^*) . Eliminamos também o arco (t, s) de retorno de fluxo. Para os demais arcos faça $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$. No grafo abaixo temos representados os valores x_{ij} .

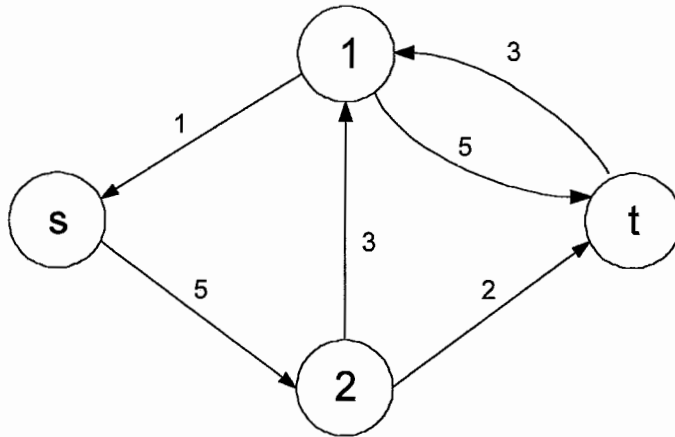


Figura 3.6
Grafo original G com o fluxo viável,

FASE 2

Passando à Fase 2 (veja seção 3.1) verificamos que esse fluxo viável na verdade é máximo.

Exemplo 3.3.2

A seguir, veremos outro exemplo onde no final da primeira fase o fluxo viável não é fluxo máximo do problema original.

Seja $G = (N, A)$ o seguinte grafo:

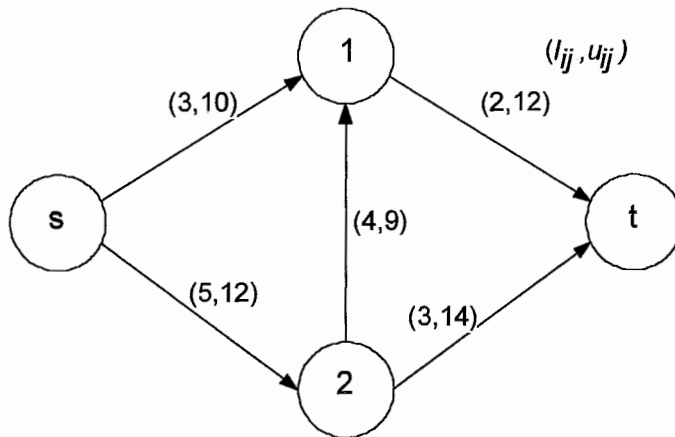


figura 3.7
Grafo original G .

FASE 1

Acrescentamos o arco (t,s) com $l'_{ts}=0$ e $u'_{ts}=23$. Para cada nó i colocamos em vermelho o valor de $b(i)$ (veja figura 3.8).

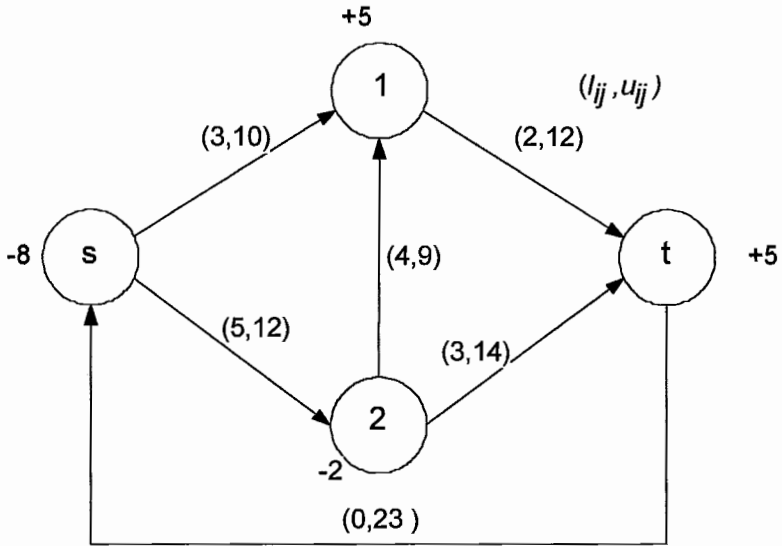


figura 3.8

Grafo original G já com o arco de retorno (t,s) e os valores $b(i)$.

Construímos o grafo modificado $G^*=(N^*,A^*)$ de acordo com o Passo 3 (veja figura 3.9).

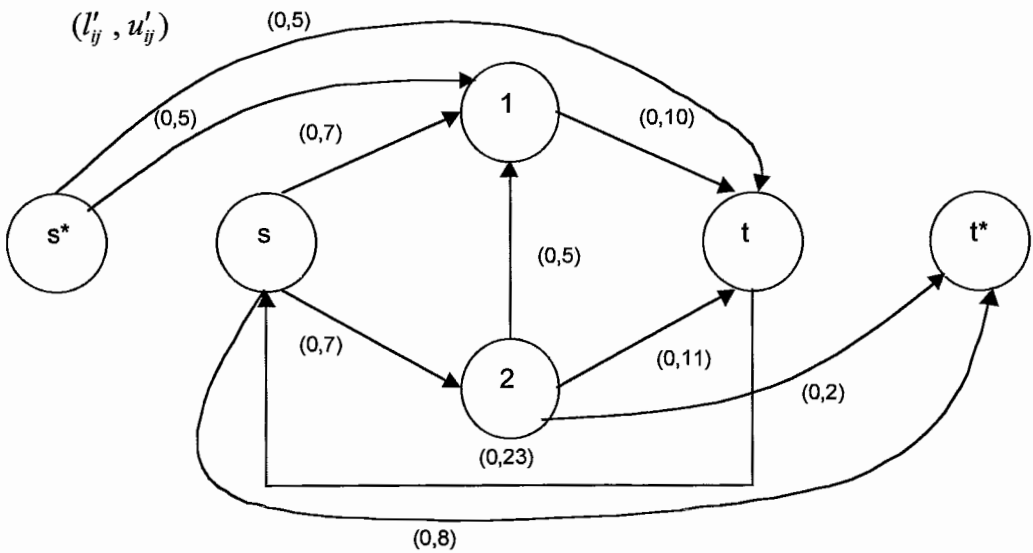


Figura 3.9

Grafo modificado G^*

A seguir maximizamos o fluxo, utilizando por exemplo o algoritmo genérico de aumento de fluxo com limites inferiores nulos (veja seção 2.2.2). Abaixo estão representados as iterações da primeira fase. O caminho escolhido em cada iteração está marcado em linha mais grossa.

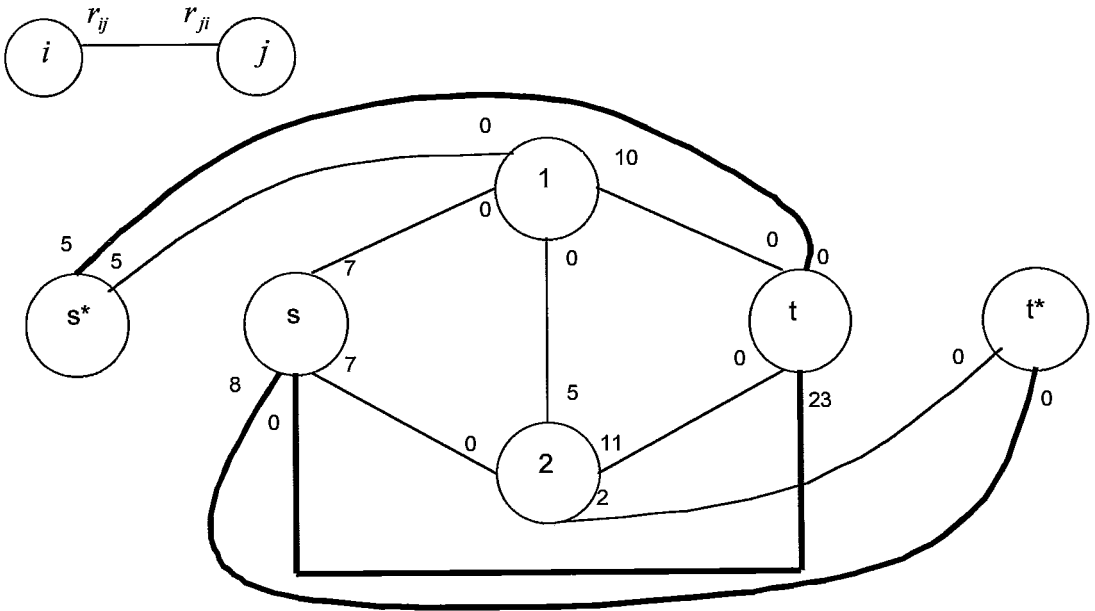


Figura 3.10

Iteração 1.1

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 5$ e $v = 5$.

Caminho escolhido: $s^* - t - s - t^*$.

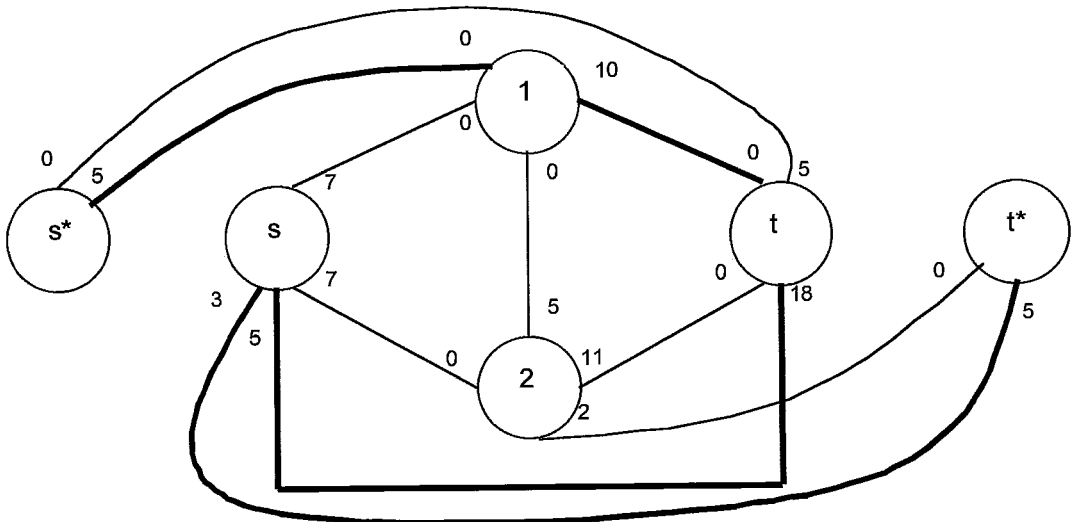


Figura 3.11

Iteração 1.2

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 3$ e $v = 5 + 3 = 8$.

Caminho escolhido: $s^* - 1 - t - s - t^*$.

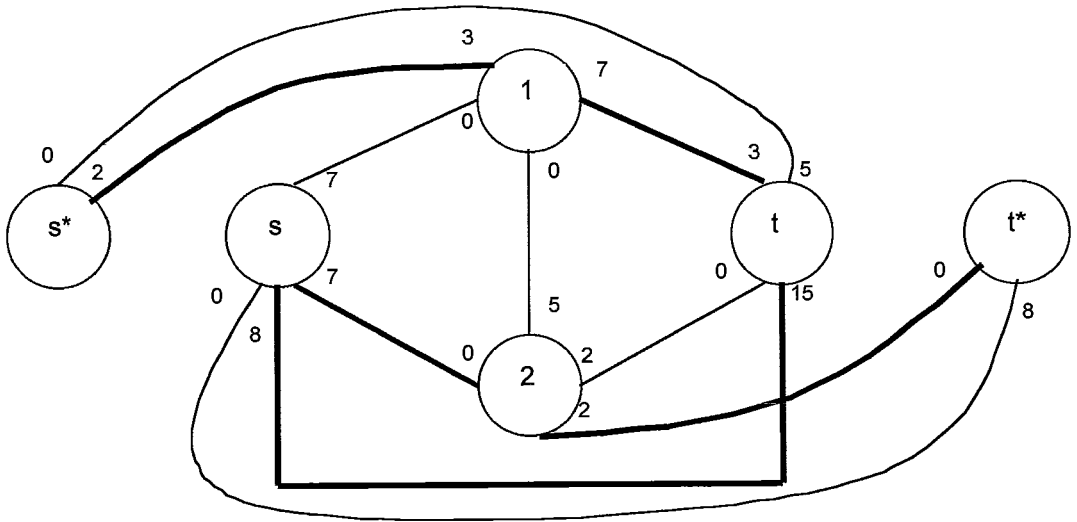


Figura 3.12

Iteração 1.3

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 2$ e $v = 8 + 2 = 10$.

Caminho escolhido: $s^* - 1 - t - s - 2 - t^*$.

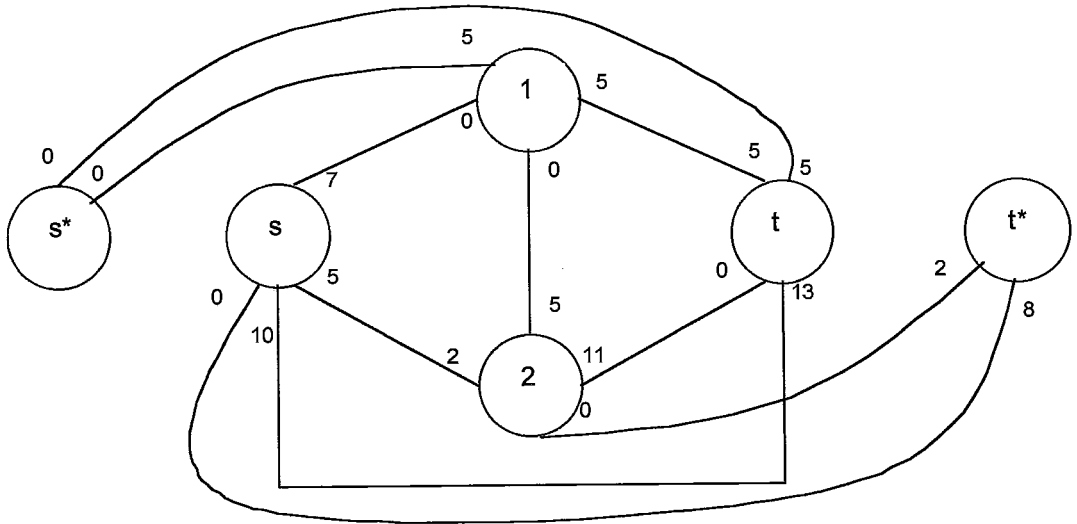


Figura 3.13

Iteração 1.4

Ultimo Grafo Residual $G(x)$ onde não existe caminho de s^* a t^* .

Como não existe mais caminho, temos como resultado x'^* (veja figura 3.14).

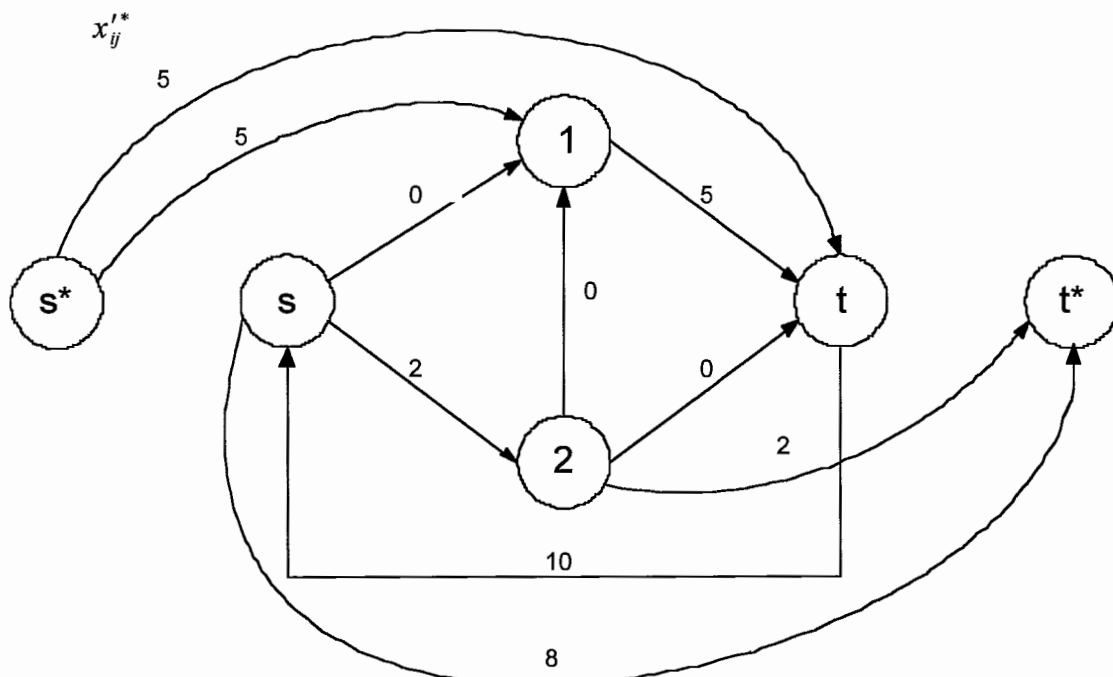


Figura 3.14

Grafo modificado G^* com fluxo x'_{ij}^* .

Como as condições (a) do Passo 4 foram satisfeitas, voltamos ao grafo original G eliminando os arcos (s^*, i) e (i, t^*) . Eliminamos também o arco (t, s) de retorno de fluxo. Para os demais arcos faça $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$. No grafo abaixo temos representados os valores x_{ij}, l_{ij} e u_{ij} .

(l_{ij}, x_{ij}, u_{ij})

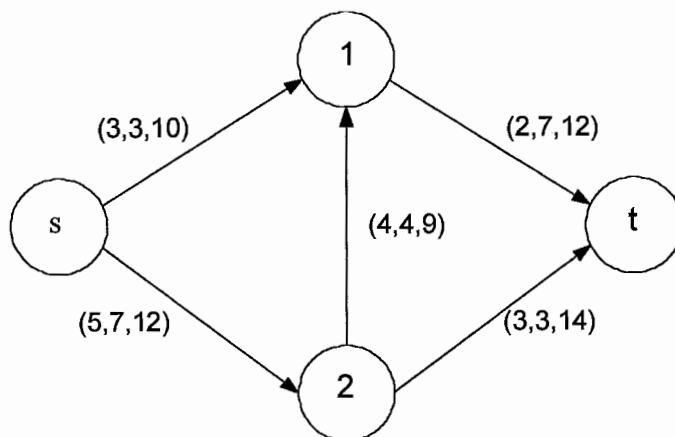


Figura 3.15

Grafo original G com um fluxo viável

$v = 10$.

FASE 2

Uma vez encontrado um fluxo viável para o grafo original G , passamos à Fase 2 (seção 3.1). No grafo abaixo estão representadas as iterações da segunda fase.

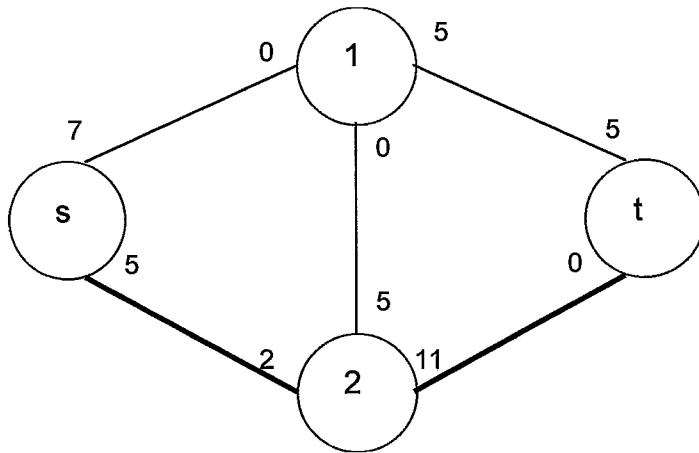
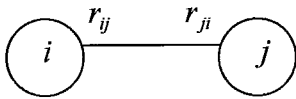


Figura 3.16

Iteração 2.1

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 5$ e $v = 10 + 5 = 15$.

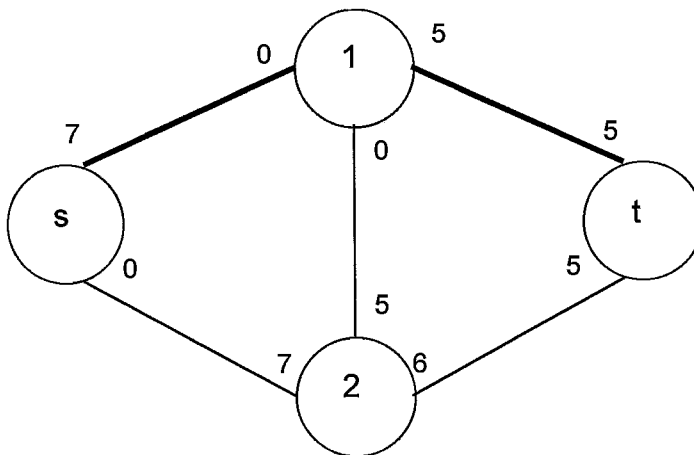


Figura 3.17

Iteração 2.2

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 5$ e $v = 15 + 5 = 20$.

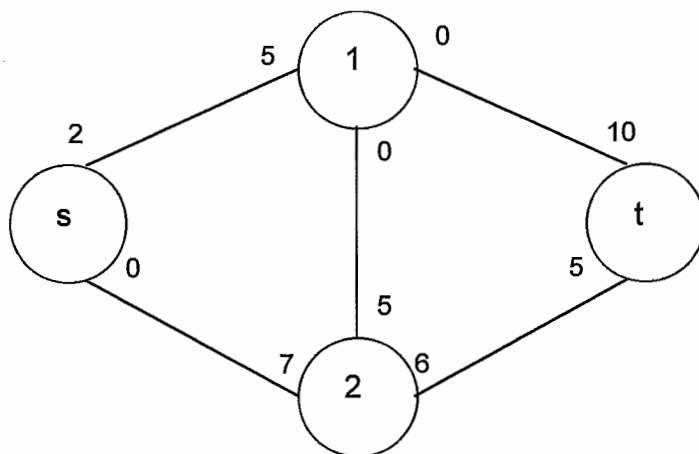


Figura 3.18

Iteração 2.3

Último Grafo Residual $G(x)$ onde não existe caminho de s a t .

Como não existe mais caminho, representamos no grafo abaixo os valores x_{ij}^* , que representam o fluxo máximo.

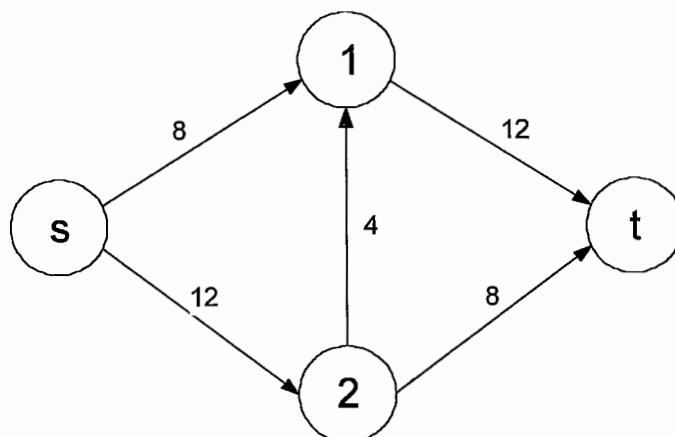


Figura 3.19

Grafo original G com um fluxo máximo

$v = 20$.

4) ALGORITMO DE UMA FASE

É interessante examinar se a partir de grafo G , é possível criar um novo grafo G^{**} tal que a partir do fluxo máximo definido para G^{**} seja possível encontrar não um fluxo viável para G , mas um fluxo máximo. É com este intuito que faremos as modificações.

Ao invés de primeiro acrescentar o arco de retorno (t,s) para só então calcular $b(s)$ e $b(t)$ e a partir daí concluir sobre possíveis arcos entre s, t e s^* e t^* , acrescentaremos diretamente os arcos (s^*,s) e (t,t^*) evitando o arco de retorno. Este procedimento pressupõe $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$. Assim, temos um novo grafo $G^{**} = (N^*, A^{**})$, onde

$$A^{**} = A \cup \{(s^*, i) \forall i \in A / b(i) > 0\} \cup \{(i, t^*) \forall i \in N / b(i) < 0\}.$$

A figura 4.1 ilustra a idéia:

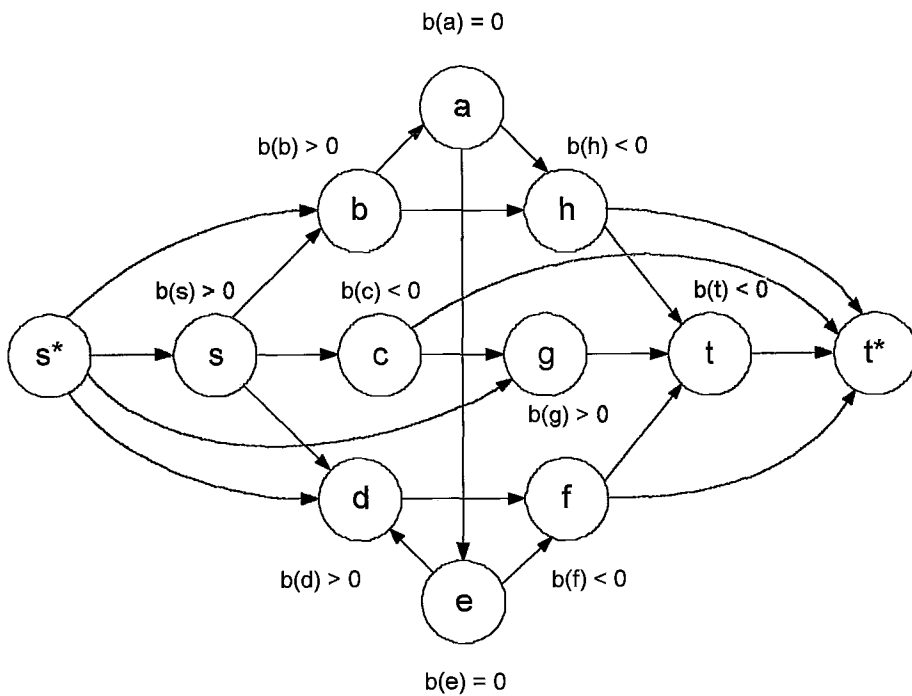


Figura 4.1

Exemplo do grafo G^{**} com arcos artificiais em azul e arcos (s^*, s) e (t, t^*) em vermelho.

Consequentemente temos que resolver o seguinte problema $P1F$:

$$P1F . = . \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } v' \\ \text{sujeito a} \\ \sum_{j|(i,j) \in A^{**}} x'_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in A^{**}} x'_{ji} = \begin{cases} v', \text{ para } i = s^* \\ 0, \text{ para } i \in N \\ -v', \text{ para } i = t^* \end{cases} \\ 0 \leq x'_{ij} \leq u_{ij} - l_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \\ 0 \leq x'_{s^*s} \leq +\infty \\ 0 \leq x'_{tt^*} \leq +\infty \\ 0 \leq x'_{s^*i} \leq b(i) \quad \forall i \in N - \{s, t\} / b(i) > 0 \\ 0 \leq x'_{it^*} \leq -b(i) \quad \forall i \in N - \{s, t\} / b(i) < 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

$$\text{onde, } b(i) = \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}.$$

Assim como no modelo 3.4, utilizaremos respectivamente l'_{ij} e u'_{ij} como limites inferiores e superiores, dos arcos $(i, j) \in A^{**}$ desse modelo.

A seguir, faremos uma observação com respeito aos limites superiores de x'_{s^*s} e x'_{tt^*} . A primeira vista poderia parecer que, à semelhança dos demais arcos (s^*, i) e (i, t^*) , o limite superior deveria ser $b(s)$ e $b(t)$, isto é, que deveríamos ter

$$\begin{aligned} 0 \leq x'_{s^*s} &\leq b(s) \\ 0 \leq x'_{tt^*} &\leq -b(t) \end{aligned}$$

e que ao maximizarmos o modelo (4.1) o limite superior deveria ser atingido para que tivéssemos uma solução viável do problema original. Acontece que

$$\begin{aligned} b(s) &= v + \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} \\ b(t) &= -v + \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \end{aligned}$$

Devido a incógnita v é difícil fixar a priori os valores de $b(s)$ e $b(t)$. Além disso, como veremos na seção 4.6, não precisamos atingir o limite superior para os arcos (s^*, s) e (t, t^*) para garantir a otimalidade do algoritmo. La mostraremos que o corte mínimo detectado inclui sempre os arcos (s^*, i) e (i, t^*) mas não inclui os arcos (s^*, s) e (t, t^*) . Assim podemos fazer

$$\begin{aligned} 0 \leq x'_{s^*s} &\leq \infty \\ 0 \leq x'_{tt^*} &\leq \infty \end{aligned}$$

Temos, no entanto:

$$x'_{s^*s} = \sum_{j \in A} x'_{sj} \leq \sum_{j \in A} x_{sj} \leq \sum_{j \in A} u_{sj} \quad \text{e} \quad (4.2)$$

$$x'_{tt^*} = \sum_{j \in A} x'_{jt} \leq \sum_{j \in A} x_{jt} \leq \sum_{j \in A} u_{jt}. \quad (4.3)$$

Assim, de (4.2) e (4.3) temos:

$$0 \leq x'_{s^*s}, x'_{tt^*} \leq \max \left\{ \sum_{j \in A} u_{sj}, \sum_{j \in A} u_{jt} \right\}.$$

Para que esses limites não sejam atingidos, fazemos:

$$u'_{s^*s} = u'_{tt^*} = \max \left\{ \sum_{j \in A} u_{sj}, \sum_{j \in A} u_{jt} \right\} + 1.$$

Veremos a importância desta escolha na seção 4.6.

Examinemos agora a relação entre x'_{s^*s} e $b(s)$, com a finalidade de um melhor entendimento. As equações de equilíbrio de fluxo para o grafo G^{**} nos permite escrever:

$$\sum_{j \in A} x'_{js} + x'_{s^*s} = \sum_{j \in A} x'_{sj},$$

ou seja,

$$x'_{s^*s} = \sum_{j \in A} x'_{sj} - \sum_{j \in A} x'_{js}.$$

Fazendo a substituição $x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$ temos

$$x'_{s^*s} = \sum_{j \in A} x_{sj} - \sum_{j \in A} x_{js} + \sum_{j \in A} l_{js} - \sum_{j \in A} l_{sj}.$$

De acordo com (3.1) temos:

$$x'_{s^*s} = v + \sum_{j \in A} l_{js} - \sum_{j \in A} l_{sj} = b(s).$$

Teremos portanto sempre $x'_{s^*s} = b(s)$. A expressão acima pode também ser escrita:

$$v = x'_{s^*s} - \left(\sum_{j \in A} l_{js} - \sum_{j \in A} l_{sj} \right).$$

Como a expressão entre parêntesis é constante, maximizamos v ao maximizar x'_{s^*s} . É isto que o algoritmo faz. Raciocínio semelhante ao acima, pode ser feito examinando a relação entre x'_{tt^*} e $b(t)$.

Examinaremos a seguir as condições em que $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$.

4.1) CONDIÇÕES INICIAIS

Procuramos condições para saber se $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$. Assumimos $v \geq 0$.

Basta ver que o caso $v \leq 0$ implica em um fluxo de t a s . Como estamos querendo gerar fluxos de s a t , trata-se de um caso patológico que vamos excluir. Temos:

1) Casos que garantem $b(s) \geq 0$, onde $b(s) = v + \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj}$.

1.1) $\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} \geq 0 \Rightarrow \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} \geq \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj}$. Este caso independe de v , pois sempre temos $v \geq 0$.

1.2) $\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} < 0$. Temos que:

$$b(s) \geq 0 \Leftrightarrow v + \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} \geq 0 \Leftrightarrow v \geq \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js}.$$

2) Casos que garantem $b(t) \leq 0$, onde $b(t) = -v + \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj}$.

2.1) $\sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \leq 0 \Rightarrow \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} \leq \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj}$. Este caso independe de v , pois sempre temos $-v \leq 0$.

2.2) $\sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} > 0$. Temos que:

$$b(t) \leq 0 \Leftrightarrow -v + \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \leq 0 \Leftrightarrow v \geq \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj}.$$

Como podemos observar, os casos (1.2) e (2.2) dependem de um limite inferior de v .

4.2) LIMITE INFERIOR DE v

Vejamos condições sobre v para garantir o obedecimento às condições (1.2) e (2.2).

De (3.1), temos que :

$$v = \sum_{j|(s,j) \in A} x_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} x_{js}.$$

Substituindo x_{sj} por l_{sj} no primeiro somatório , e x_{js} por u_{js} no segundo somatório, temos $\sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js} \leq v$. Como $v \geq 0$ temos:

$$\max \left\{ 0, \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js} \right\} \leq v. \quad (4.4)$$

Repetindo o mesmo procedimento acima para o nó t , temos :

$$\max \left\{ 0, \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} u_{tj} \right\} \leq v. \quad (4.5)$$

Reunindo (4.4) e (4.5),

$$\max \left\{ 0, \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js}, \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} u_{tj} \right\} \leq v. \quad (4.6)$$

O que implica em um limite inferior para v .

4.3) CONDIÇÕES PARA $b(s) \geq 0$ E $b(t) \leq 0$.

Consideremos os casos 1.1, 1.2, 2.1 e 2.2 além da equação (4.6). Assim temos quatro testes, que são:

I) O caso 1.1 com o caso 2.1 implica em:

$$\boxed{\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,t) \in A} l_{sj} \geq 0 \text{ e } \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,i) \in A} l_{tj} \leq 0.}$$

Trata-se de um caso com aparentemente pouca aplicação prática, pois dificilmente trabalharemos com fluxos predominantemente entrando em s e saindo de t no grafo original G .

É no entanto possível encontrarmos aplicação para casos por exemplo em que limites inferiores positivos de fluxo são impostos somente para os arcos que entram em s e saem de t . Para os arcos que saem de s e entram em t os limites inferiores seriam nulos. Cabe também lembrar que neste caso não existe qualquer restrição quanto aos limites superiores de fluxo.

II) O caso 1.1 com o caso 2.2 implica em:

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} \geq 0 \text{ e } \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} > 0.$$

De acordo com 2.2 é necessário que tenhamos

$$v \geq \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} . \quad (4.7)$$

Por outro lado, temos pela equação (4.6) $v \geq \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} u_{tj}$. Então para que (4.7)

ocorra, é necessário que:

$$\sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} u_{tj} \geq \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \Rightarrow - \sum_{j|(t,j) \in A} u_{tj} \geq - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \Rightarrow \sum_{j|(t,j) \in A} u_{tj} \leq \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj}$$

Ora, como $\forall(t,j) u_{tj} \geq l_{tj}$ temos necessariamente que ter:

$$\forall(t,j) u_{tj} = l_{tj}.$$

Então, para esse teste se aplicar basta verificarmos:

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} \geq 0, \quad \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} > 0 \text{ e } u_{tj} = l_{tj} \quad \forall(t,j).$$

Trata-se de um caso com aparentemente pouca aplicação prática, pois dificilmente trabalharemos com fluxos mínimos predominantemente entrando em s no grafo original G .

Além disso, a condição $u_{tj} = l_{tj} \quad \forall(t,j) \in A$ implica em definir os fluxos saindo de t . Um caso em que esta última condição pode ter interesse prático é o caso $u_{tj} = l_{tj} = 0$, isto é, obrigamos a serem nulos os fluxos saindo de t .

III) O caso 1.2 com o caso 2.1, implica em:

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} < 0 \text{ e } \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \leq 0.$$

De acordo com 1.2 é necessário que tenhamos

$$v \geq \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, temos pela equação (4.6) $v \geq \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js}$. Então para que (4.8)

ocorra, é necessário que:

$$\sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js} \geq \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} \Rightarrow - \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js} \geq - \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} \Rightarrow \sum_{j|(j,s) \in A} u_{js} \leq \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js}.$$

Ora, como $\forall(j,s) u_{js} \geq l_{js}$ temos necessariamente que ter:

$$\forall(j,s) u_{js} = l_{js}$$

Então, para esse teste se aplicar basta verificarmos:

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} < 0, \quad u_{js} = l_{js} \quad \forall(j,s) \text{ e } \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} \leq 0$$

Trata-se também de um caso com aparentemente pouca aplicação prática, pois dificilmente trabalharemos com fluxos mínimos predominantemente saindo de t no grafo original G .

Assim como no teste II, a condição $u_{js} = l_{js} \forall (j, s) \in A$ implica em definir os fluxos entrando em s . Um caso em que esta última condição pode ter interesse prático é o caso $u_{js} = l_{js} = 0$, isto é, obrigamos a serem nulos os fluxos entrando em s .

IV) O caso 1.2 com o caso 2.2, implica em:

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} < 0 \text{ e } \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} > 0.$$

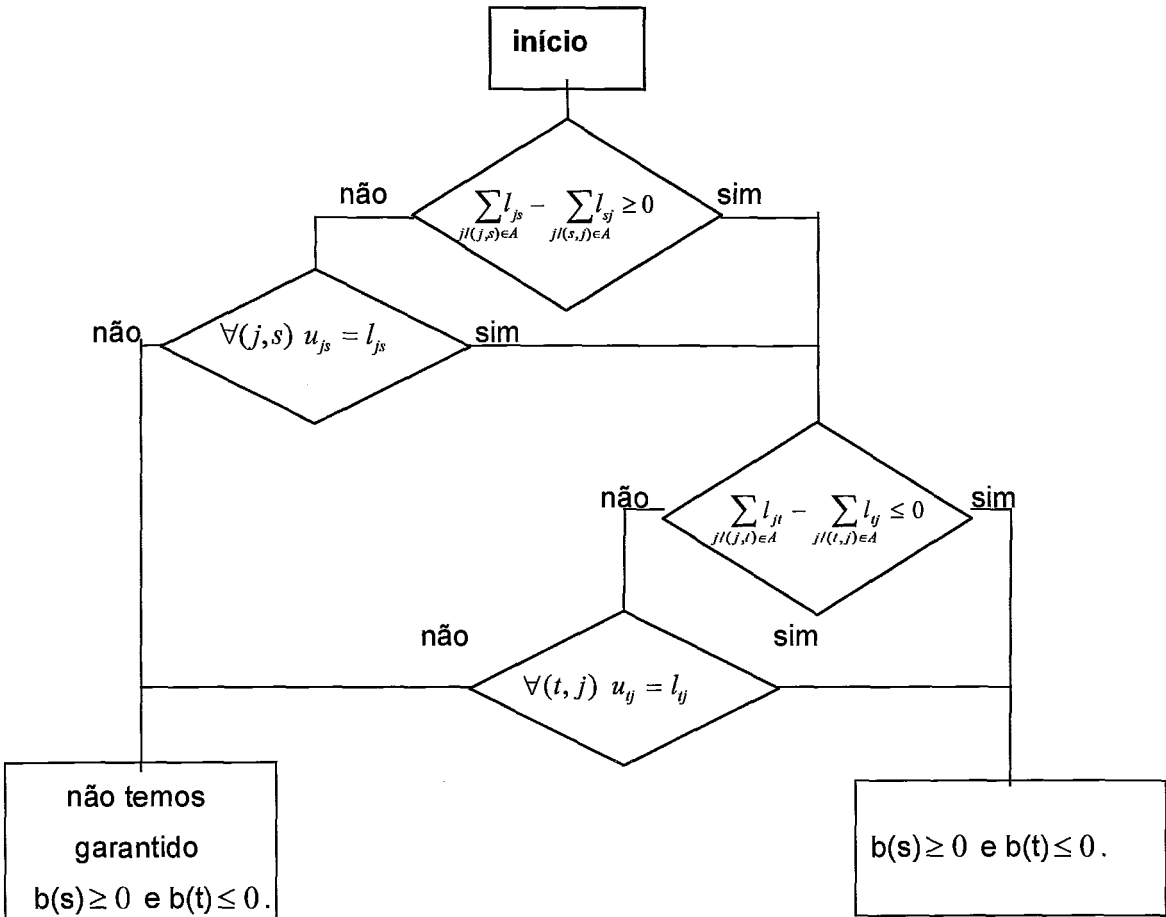
De acordo com 2.2 e 1.2 é necessário que tenhamos $v \geq \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj}$ e $v \geq \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} - \sum_{j|(j,s) \in A} l_{js}$ respectivamente. Então, como esses dois casos já foram estudados anteriormente nos testes II e III, podemos afirmar com certeza que para esse teste se aplicar basta verificarmos:

| |
|---|
| $\sum_{j (j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j (s,j) \in A} l_{sj} < 0, u_{js} = l_{js} \forall (j, s), \sum_{j (j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j (t,j) \in A} l_{tj} > 0 \text{ e } u_{tj} = l_{tj} \forall (t, j).$ |
|---|

Segundo os comentários feitos nos testes II e III, o interesse prático está vinculado ao caso $u_{tj} = l_{tj} = 0$ e $u_{js} = l_{js} = 0$.

4.3.1) FLUXOGRAMA PARA $b(s) \geq 0$ E $b(t) \leq 0$

O fluxograma abaixo resume os testes I, II, III, IV.



4.3.2) DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO DOS TESTES

Faremos uma breve discussão e interpretação dos testes I, II, III e IV, vistos anteriormente no capítulo 4.3.

Exemplo 4.3.2.1. No grafo da figura 4.2 temos a validade do teste I, onde

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} = 4 \text{ e } \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{jy} = -1.$$

Veja que neste caso, temos um arco entrando em s e um arco saindo de t .

Podemos observar que, para que o teste I aconteça, a soma dos fluxos mínimos dos arcos entrando em s tem que ser maior do que a soma dos fluxos mínimos saindo de s o que representa uma situação de possivelmente pouco interesse prático. Algo semelhante pode ser dito a respeito do nó t . Como no entanto nenhuma restrição é imposta aos limites superiores, podemos ter um fluxo viável de

valor positivo indo de s a t . Neste exemplo o fluxo máximo eqüivale a $v=1$ com $x_{s2} = 7, x_{1s} = 6, x_{2t} = 7$ e $x_{t1} = 6$.

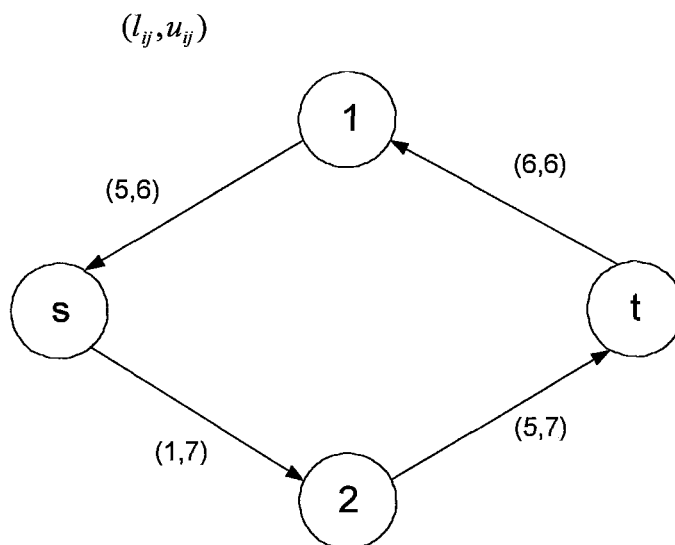


Figura 4.2
Exemplo de grafo cujo
teste I é válido.

Exemplo 4.3.2.2. No grafo da figura 4.3 temos a validade do teste II, onde

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} = 2, \quad \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} = 3 \text{ e } \forall (t,j) \quad u_{tj} = l_{tj} = 0.$$

temos um arco entrando em s .

Da mesma forma que no exemplo 4.3.2.1, a soma dos fluxos mínimos dos arcos entrando em s é maior do que a soma dos fluxos mínimos saindo de s . Neste sentido, valem as observações feitas no exemplo 4.3.2.1. O fluxo máximo eqüivale a $v=3$ com $x_{s2} = 8, x_{1s} = 5, x_{2t} = 1, x_{21} = 7$ e $x_{1t} = 2$.

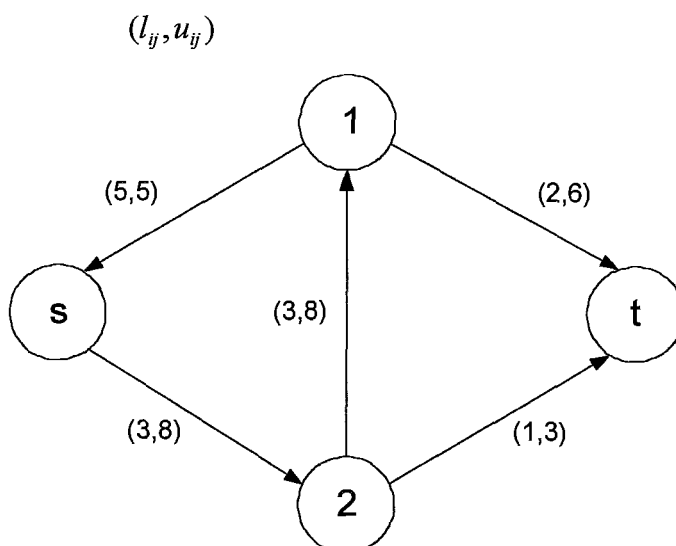


Figura 4.3

Exemplo de grafo cujo teste II é válido.

Exemplo 4.3.2.3. No grafo da figura 4.4 temos a validade do teste III, onde

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} = -3, \forall (j,s) \quad u_{js} = l_{js} = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} = -1.$$

Veja que neste caso, temos um arco saindo de t .

Da mesma forma que no exemplo 4.3.2.1, a soma dos fluxos mínimos dos arcos saindo de t é maior do que a soma dos fluxos mínimos entrando em t o que também representa uma situação de possivelmente pouco interesse prático. Como no entanto nenhuma restrição é imposta aos limites superiores, podemos ter um fluxo viável de valor positivo indo de s a t . Neste exemplo o fluxo máximo equivale a $v = 3$ com $x_{s2} = 2, x_{s1} = 1, x_{2t} = 9, x_{12} = 7$ e $x_{t1} = 6$.

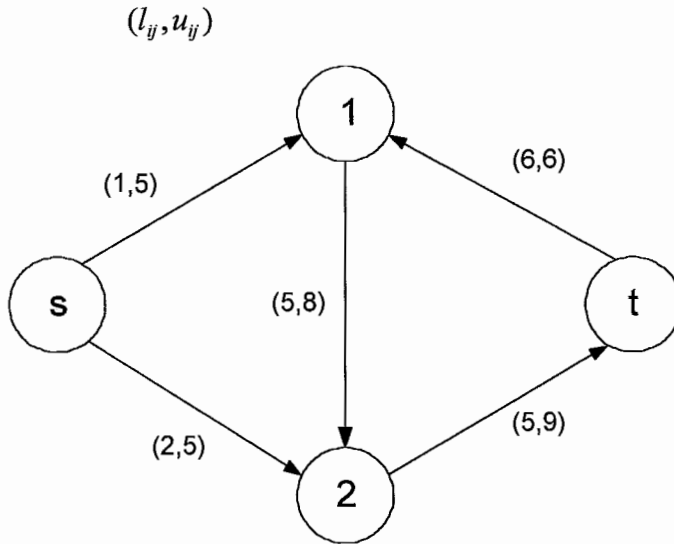


Figura 4.4
Exemplo de grafo cujo
teste III é válido.

Exemplo 4.3.2.4. No exemplo da figura 4.5 temos a validade do teste IV, onde

$$\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} = -7, \quad u_{js} = l_{js} = 0 \quad \forall (j,s), \quad \sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} = 11 \quad \text{e}$$

$u_{tj} = l_{tj} = 0 \quad \forall (t,j)$. Veja que neste caso, não temos arcos entrando em s nem saindo de t .

Assim, aparentemente este teste IV é o que mais se aplica. Neste exemplo o fluxo máximo equivale a $v = 22$ com $x_{s1} = 10, x_{s2} = 12, x_{1t} = 10$ e $x_{2t} = 12$.

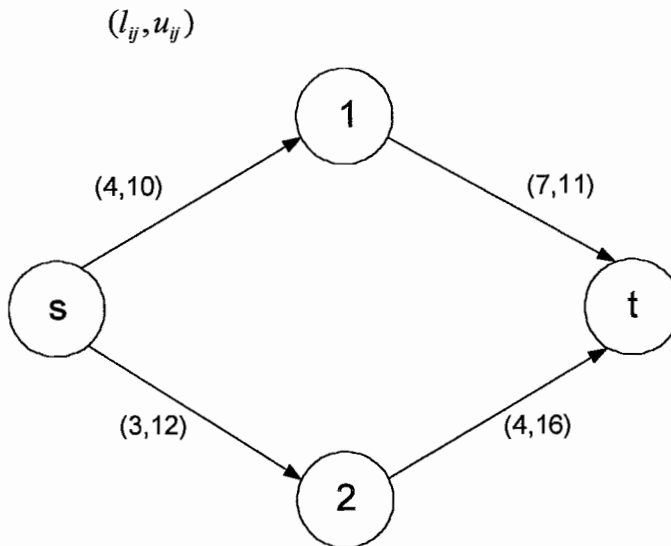


Figura 4.5
Exemplo de grafo cujo
teste IV é válido.

4.4) ALGORITMO (A1F)

Apresentamos a seguir o algoritmo de uma fase (A1F) para o caso $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$. Adicionados os arcos (s, s^*) e (t^*, t) procedemos à maximização do fluxo de s^* a t^* em $G^{**} = (N^*, A^{**})$. Caso o fluxo x'^* obtido seja tal que $x'_{s^*i} = b(i)$ e $x'_{it^*} = b(i)$ para $i \in N - \{s, t\}$ então conforme mostraremos na seção 4.6 o fluxo não só é viável para o problema original como é máximo.

Passo 1: Fazemos um estudo sobre o sinal de $b(s)$ e $b(t)$ para saber se $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$. Para isto, temos que verificar se o grafo $G = (N, A)$ do problema, satisfaz um dos quatro testes citados anteriormente na seção 4.3. Dois casos são possíveis:

1.1) Se tivermos sucesso, isto é, se $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$ vamos ao Passo 2.

1.2) Caso contrário Pare! Este grafo não pode ser resolvido por este algoritmo.

Passo 2: Calcular os valores $b(i) = \sum_{j/(j,i) \in A} l_{ji} - \sum_{j/(i,j) \in A} l_{ij}$, $\forall i \in N - \{s, t\}$.

Passo 3: Construir um novo grafo G^{**} com dois nós s^* e t^* criando os arcos (s^*, s) , (t, t^*) , arcos (s^*, i) se $b(i) > 0$ e arcos (i, t^*) se $b(i) < 0$. Se $b(i) = 0$ nenhum arco novo para i é criado. Os limites (l'_{ij}, u'_{ij}) são:

$$\left(0, \max \left\{ \sum_{j/(s,j) \in A} u_{sj}, \sum_{j/(j,t) \in A} u_{jt} \right\} + 1 \right) \text{ para os arcos } (s^*, s) \text{ e } (t, t^*);$$

$$(0, b(i)) \text{ para os arcos } (s^*, i);$$

$$(0, -b(i)) \text{ para os arcos } (i, t^*) \text{ e}$$

$$(0, u_{ij} - l_{ij}) \text{ para os arcos } (i, j) \text{ para } i \neq s^* \text{ e } j \neq t^*.$$

Passo 4: Utilizar o Algoritmo Genérico implementado para limites inferiores nulos ou outro algoritmo qualquer, para maximizar o fluxo x'^* de s^* a t^* .

Passo 5: Dois casos são possíveis:

5.1) Se $\forall i \in N$, $i \neq s$, tal que $(s^*, i) \in A^{**}$ temos $x'_{s^*i} = b(i)$ e $\forall i \in N$, $i \neq t$, tal que $(i, t^*) \in A^{**}$ temos $x'_{it^*} = -b(i) \Rightarrow$ Passo 6.

5.2) Em caso contrário, o problema original não tem solução viável.

Passo 6: Volte ao grafo original G eliminando os arcos (s^*, i) e $(i, t^*) \quad \forall i \in N$.

Para os demais arcos faça $x_{ij}^* = x_{ij}' + l_{ij}$. x^* é um fluxo máximo para o grafo original G .

4.5) EXEMPLO

Aplicamos a seguir o algoritmo da seção anterior ao grafo da figura 4.6:

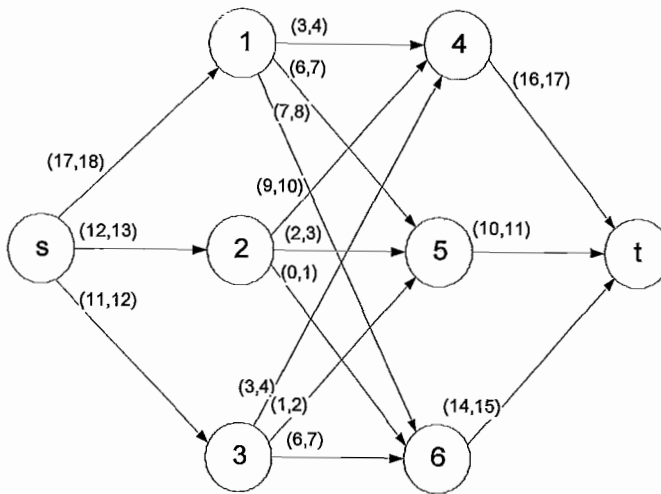


Figura 4.6

Grafo original com limites

(l_{ij}, u_{ij}) sobre os arcos.

Solução:

Começamos com o Passo 1 fazendo um estudo sobre o sinal de $b(s)$ e $b(t)$ para saber se $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$. Como $\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} = -40 < 0$,

$\forall (j,s) \quad u_{js} = l_{js} = 0 \quad \forall j$, $\sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} = 40 > 0$ e $\forall (t,j) \quad u_{tj} = l_{tj} = 0 \quad \forall j$, temos

$b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$, pois satisfazemos as condições do teste IV. Assim, como o estudo de $b(s)$ e $b(t)$ foi bem sucedido, continuamos com o Passo 2 do algoritmo A1F.

Calculamos os $b(i) \quad \forall i, i \neq s, t$ e construímos um novo grafo G^{**} .

Como já sabemos que $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$, criamos um arco artificial (s^*, s) onde $0 \leq x'_{s^*s} \leq \sum_{j|(s,j) \in A} u_{sj} + 1 = 44$ e um arco (t, t^*) onde $0 \leq x'_{tt^*} \leq \sum_{j|(s,j) \in A} u_{sj} + 1 = 44$ respectivamente.

- $b(1) = 1 > 0$, criamos um novo arco $(s^*, 1)$ tal que $0 \leq x'_{s^*1} \leq 1$;
- $b(2) = 1 > 0$, criamos um novo arco $(s^*, 2)$ tal que $0 \leq x'_{s^*2} \leq 1$;
- $b(3) = 1 > 0$, criamos um novo arco $(s^*, 3)$ tal que $0 \leq x'_{s^*3} \leq 1$;
- $b(4) = -1 < 0$, criamos um novo arco $(4, t^*)$ tal que $0 \leq x'_{4t^*} \leq 1$;
- $b(5) = -1 < 0$, criamos um novo arco $(5, t^*)$ tal que $0 \leq x'_{5t^*} \leq 1$ e
- $b(6) = -1 < 0$, criamos um novo arco $(6, t^*)$ tal que $0 \leq x'_{6t^*} \leq 1$.

De acordo com o Passo 3, obtemos o seguinte grafo G^{**} :

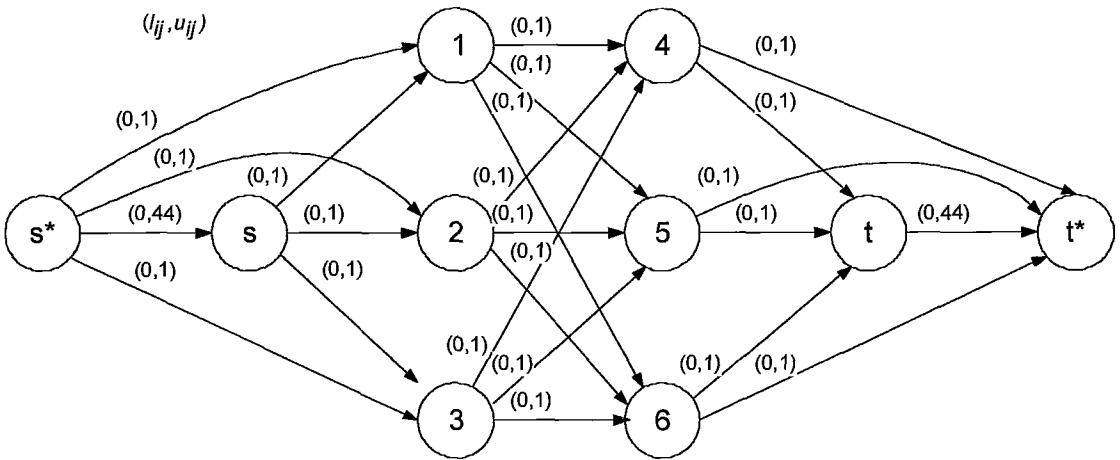


Figura 4.7
Grafo G^{**} com os arcos artificiais e os arcos (s^*, s) e (t, t^*) .

Aplicamos o algoritmo tradicional para limites inferiores nulos, que nos fornecerá um fluxo máximo $x' *$ de s^* a t^* , para o grafo G^{**} .

Obtemos os seguintes fluxos:

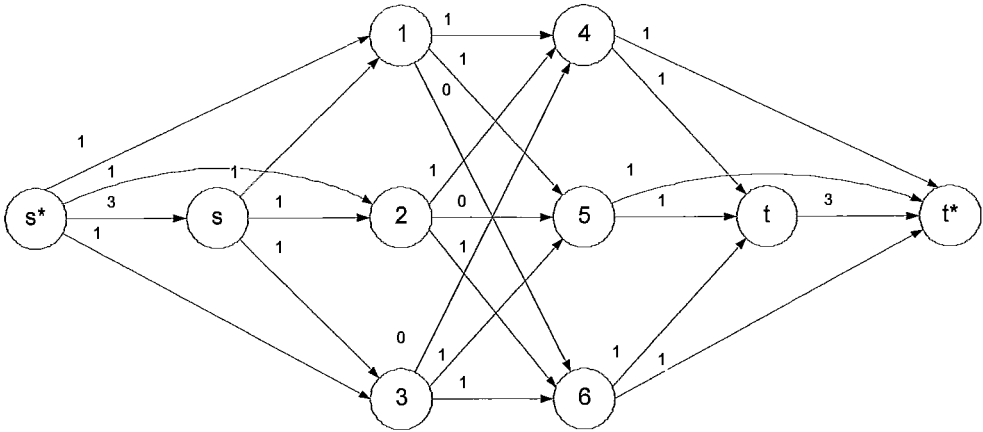


Figura 4.8

Fluxo máximo do grafo G^{**}

onde, o valor do fluxo máximo de s^* a t^* é 6.

Como $x'_{s^*i} = b(i)$ e $x'_{it^*} = -b(i), \forall i \in N, i \neq s, t$, podemos passar ao Passo 6 voltando ao grafo original G e eliminando os arcos (s^*, i) e (i, t^*) . Fazemos $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$ obtendo um fluxo viável x para o grafo original $G = (N, A)$:

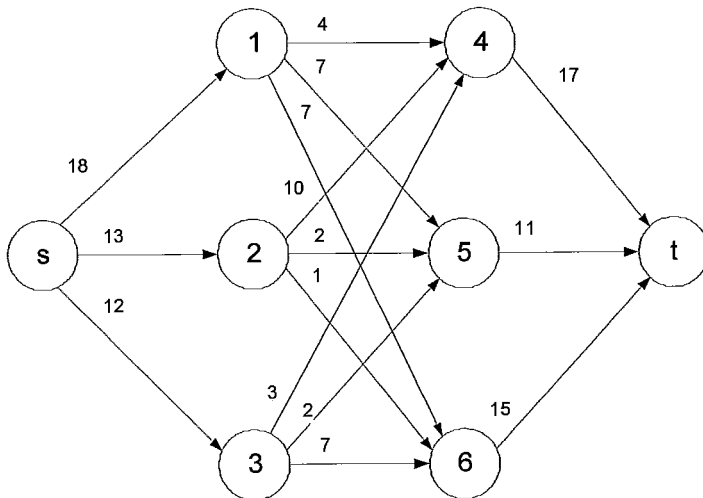


Figura 4.9

Fluxo máximo do grafo G .

Este fluxo é fluxo máximo de $G = (N, A)$.

4.6) TEOREMA

Mostraremos a seguir que o fluxo gerado pelo algoritmo A1F além de ser viável é máximo para o problema dado.

Teorema 4.6.1: O fluxo x^* determinado pelo ALGORITMO A1F no Passo 6, é máximo para $G = (N, A)$.

Demonstração:

O ALGORITMO A1F (seção 4.4) utiliza no Passo 4 um algoritmo tradicional para maximização do fluxo x'^* de s^* a t^* em G^{**} . Supomos a otimalidade deste algoritmo demonstrada, de modo que temos (veja Teorema 2.2), associado a x'^* , um corte mínimo $[S^*, \bar{S}^*]$ tal que $s^* \in S^*$ e $t^* \in \bar{S}^*$.

Mostraremos a seguir que assim como é possível associar a x'^* um fluxo x^* pelo Passo 6 de A1F, é também possível associar a $[S^*, \bar{S}^*]$ um corte $[S, \bar{S}]$ tal que a capacidade do corte $u(S, \bar{S}) = v$, onde x e $[S, \bar{S}]$ referem-se ao grafo original G e v é o valor do fluxo x . Ora, pelo Teorema 2.2, tal fluxo é máximo.

Como vimos no Passo 6 de A1F, $G = (N, A)$ é obtido de $G^{**} = (N^*, A^{**})$ fazendo-se $N = N^* - \{s^*, t^*\}$ e eliminando-se os arcos artificiais (s^*, i) e $(i, t^*) \forall i \in N$. Seja $S = S^* - \{s^*\}$ e $\bar{S} = \bar{S}^* - \{t^*\}$. Demonstraremos em (1) que $[S, \bar{S}]$ é um corte $s-t$ em G . Em (2) mostraremos que $u(S, \bar{S}) = v$, completando assim a demonstração.

(1) $[S^*, \bar{S}^*]$ em $G^* \Rightarrow [S, \bar{S}]$ em G

Na seção 2.2.2 vimos que $[S^*, \bar{S}^*]$ é um corte $s-t$ em $G = (N, A)$ se S^*, \bar{S}^* for uma partição de N tal que $s^* \in S^*$ e $t^* \in \bar{S}^*$. Para mostrar que $s \in S$ e $t \in \bar{S}$ basta mostrar que $s \in S^*$, $t \in \bar{S}^*$. Para mostrar que $s \in S^*$ basta mostrar que $r_{s^*s} > 0$ no último grafo residual gerado no Passo 4, pois isto significa que existe arco (s^*, s) neste grafo. Ora, a existência de caminhos de s^* a i , significa $i \in S^*$. Portanto se existe arco (s^*, s) no último grafo residual gerado no Passo 4 então $s \in S^*$. Para mostrar que $r_{s^*s} > 0$ basta mostrar que

$$r_{s^*s} = u'_{s^*s} - x'_{s^*s} + x'_{ss^*} \geq u'_{s^*s} - x'_{s^*s} > 0.$$

Basta portanto mostrar que $x'_{s^*s} < u'_{s^*s}$. Mas, escrevendo a equação de equilíbrio de fluxo em (4.1) para o nó s , temos:

$$\sum_{j/(s,j) \in A^{**}} x'_{sj} - \sum_{j/(j,s) \in A^{**}} x'_{js} = 0.$$

Considerando a definição de A^{**} esta equação pode ser rescrita:

$$\sum_{j/(s,j) \in A} x'_{sj} - x'_{s^*s} - \sum_{j/(j,s) \in A} x'_{js} = 0.$$

Podemos escrever então:

$$x'_{s^*s} = \sum_{j/(s,j) \in A} x'_{sj} - \sum_{j/(j,s) \in A} x'_{js} \leq \sum_{j/(s,j) \in A} x'_{sj} \leq \sum_{j/(s,j) \in A} (u_{sj} - l_{sj}) \leq \sum_{j/(s,j) \in A} u_{sj}.$$

Por outro lado, temos:

$$u'_{s^*s} = \max \left\{ \sum_{j/(s,j) \in A} u_{sj}, \sum_{j/(j,t) \in A} u_{jt} \right\} + 1 > \sum_{j/(s,j) \in A} u_{sj}.$$

Como consequência das duas expressões acima segue $x'_{s^*s} < u'_{s^*s}$. De forma semelhante é possível mostrar que $t \in \bar{S}$, demonstrando que $x'_{tt^*} < u'_{tt^*}$.

Mostremos agora que S, \bar{S} é uma partição de N , ou seja, basta mostrar que $S, \bar{S} \neq \emptyset$, $S \cap \bar{S} = \emptyset$ e $S \cup \bar{S} = N$. Mas $S, \bar{S} \neq \emptyset$ segue de $s \in S$ e $t \in \bar{S}$. Além disso $S \cap \bar{S} = \emptyset$ segue de $S^* \cap \bar{S}^* = \emptyset$ pois S^*, \bar{S}^* é uma partição de N^* . Finalmente temos (veja Corolário A1 Apêndice A) :

$$S \cup \bar{S} = (S^* - \{s^*\}) \cup (\bar{S}^* - \{t^*\}) = (S^* \cup \bar{S}^*) - \{s^*, t^*\} = N^* - \{s^*, t^*\} = N.$$

Temos portanto que $[S, \bar{S}]$ é um corte $s - t$ em G . Passemos agora à segunda parte da demonstração.

$$(2) \quad u(S, \bar{S}) = v$$

A demonstração segue o raciocínio desenvolvido na generalização do Teorema 2.2 para fluxos com limites inferiores positivos (veja seção 6.7, página 193, Ahuja [1]). Lá, mostra-se que $(i, j) \in (S^*, \bar{S}^*) \Rightarrow x'_{ij} = u'_{ij}$ e $(i, j) \in (\bar{S}^*, S^*) \Rightarrow x'_{ij} = l'_{ij}$.

Passamos a examinar estes dois casos:

$$2.1) \quad (i, j) \in (S^*, \bar{S}^*) \Rightarrow x'_{ij} = u'_{ij}$$

Se $(i, j) \in (S, \bar{S})$ então $(i, j) \in (S^*, \bar{S}^*)$. Segue então $x'_{ij} = u'_{ij} = u_{ij} - l_{ij}$.

Substituindo $x_{ij}^* = x'_{ij} + l_{ij}$ temos: $x_{ij}^* - l_{ij} = u_{ij} - l_{ij}$. Concluímos portanto que

$$(i, j) \in (S, S) \Rightarrow x_{ij}^* = l'_{ij} \quad (4.9)$$

$$2.2) \quad (i, j) \in (\bar{S}^*, S^*) \Rightarrow x'_{ij} = l'_{ij}$$

Se $(i, j) \in (\bar{S}, S)$, então $(i, j) \in (\bar{S}^*, S^*)$. Segue então $x_{ij}^* = l'_{ij} = 0$.

Substituindo $x_{ij}^* = x'_{ij} + l_{ij}$ temos $x_{ij}^* - l_{ij} = 0$. Concluimos portanto que

$$(i, j) \in (\bar{S}, S) \Rightarrow x_{ij}^* = l_{ij} \quad (4.10)$$

Por outro lado, o fato de termos gerado como solução viável x^* no Passo 6 de A1F, isto é, o fato de terem sido obedecidos as condições do Passo 5.1, nos garante o obedecimento das restrições de equilíbrio de fluxo para o problema P (veja (3.1)). Somando estas equações para todos os nós de S temos:

$$\sum_{i \in S} \left(\sum_{j | (i,j) \in A} x_{ij}^* - \sum_{j | (j,i) \in A} x_{ji}^* \right) = \sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} x_{ij}^* - \sum_{(j,i) \in (\bar{S}, S)} x_{ji}^* = v^* \quad (4.11)$$

Substituindo (4.9), (4.10) em (4.11) temos:

$$\sum_{(i,j) \in (S, \bar{S})} u_{ij} - \sum_{(i,j) \in (S, S)} l_{ij} = u[S, \bar{S}] = v^*$$

o que, pelo corolário (2.1) garante que x^* é o fluxo máximo de G .

■

A seguir ilustraremos graficamente porque o corte gerado por A2F no final da primeira fase nem sempre corresponde a um corte mínimo para o grafo original.

Na figura 4.10 representamos o grafo G^* ao qual foi aplicado A2F. Em vermelho temos o arco (t, s) cuja capacidade de fluxo é muito grande, isto é, $u_{ts} > x'_{ts}$. Logo $r_{ts} > 0$. Se $x'_{ts} > 0$ então $r_{st} > 0$. Se $r_{ts} > 0$ e $r_{st} > 0$ no final da primeira fase, então nenhum corte mínimo no final da primeira fase poderá conter os arcos (s, t) e (t, s) . Poderemos então ter um corte do tipo apresentado em azul. Tal corte só contém arcos artificiais, isto é, uma vez eliminados os arcos artificiais não resulta corte no grafo dado G .

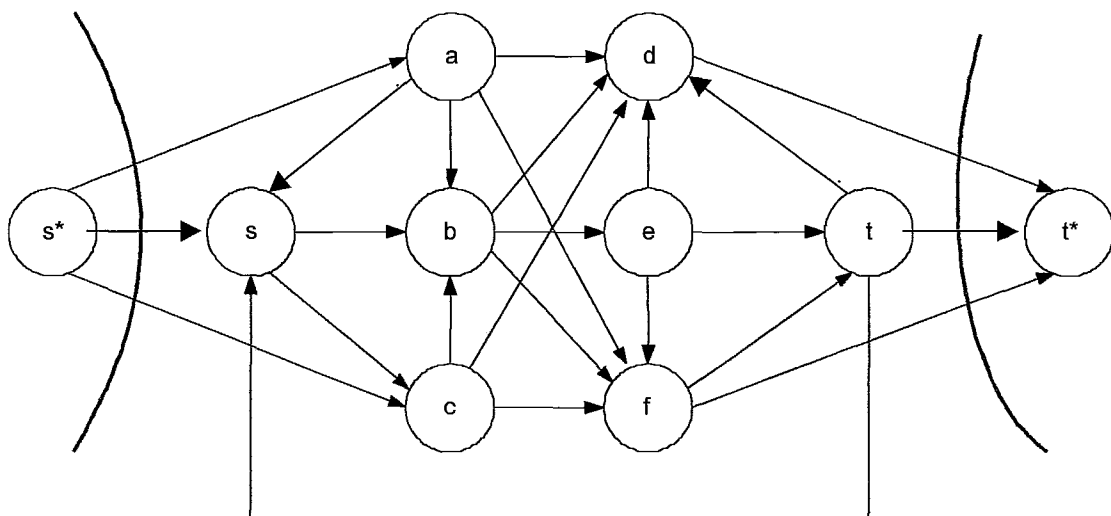


Figura 4.10

Grafo modificado G^* com possíveis cortes mínimos no final da primeira fase representados em azul..

Por outro lado, a aplicação de A1F resulta em situação oposta. Na figura 4.11 vemos o grafo modificado G^{**} que implica na utilização de A1F. Novamente em vermelho temos os arcos cuja capacidade de fluxo é muito grande. Temos $u_{s^*s} > x'_{s^*s}$ e $u_{tt^*} > x'_{tt^*}$, "forçando" os cortes a abrangerem também arcos do grafo dado G (corte azul na figura 4.11). Uma vez eliminados os arcos artificiais tais cortes de G^{**} serão também cortes de G .

De uma maneira aproximada e intuitiva podemos dizer que os arcos vermelhos "afugentam" os cortes. Em G^* (figura 4.10) o resultado é que os cortes acabam por se situar em uma região "indesejável" dominada por arcos artificiais. Daí a necessidade da Segunda fase. Em G^{**} (figura 4.11) os cortes acabam por se situar em região "desejável", dominada pelos arcos do grafo dado. O resultado é a identificação de um corte definitivo.

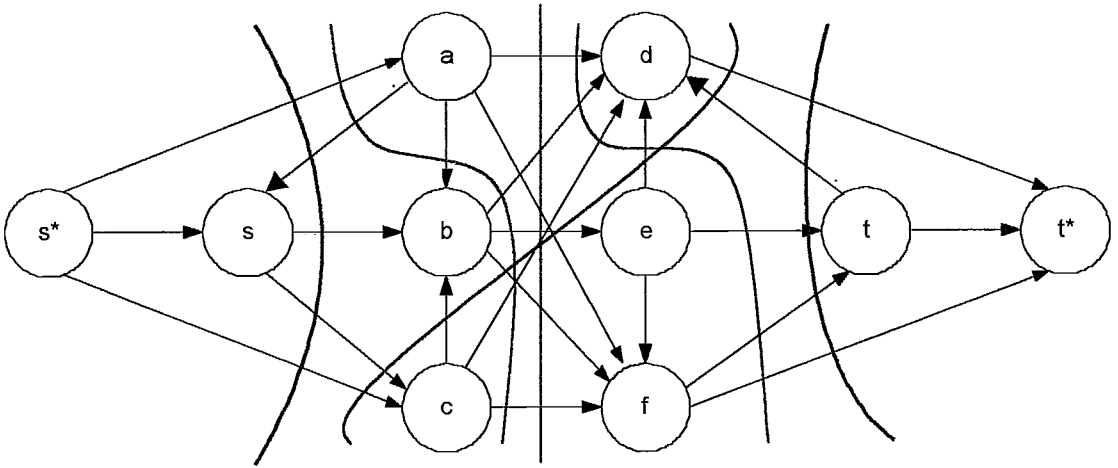


Figura 4.11

Grafo modificado G^{**} com possíveis cortes mínimos representados em azul.

5) AS IMPLEMENTAÇÕES DOS ALGORITMOS E ALGUNS RESULTADOS

Antes de apresentarmos os resultados obtidos pelos Algoritmo das Duas Fases (A2F) e o Algoritmo de Uma Fase (A1F), comentaremos as implementações.

Primeiramente, vale lembrar que a complexidade de A1F e A2F é a mesma, porque ambos utilizam Ford Fulkerson (FF) que é de complexidade $O(nmU)$.

A linguagem de programação utilizada na implementação foi o Pascal, e a máquina foi um PC – Pentium – S – 166 MHZ. Algumas vantagens na implementação do Algoritmo de Uma Fase com arcos (s^*,s) e (t,t^*) foram significativas com relação a implementação do Algoritmo das Duas Fases com arco (t,s) de retorno, uma vez que o Algoritmo de Uma Fase roda FF apenas uma vez para obter o fluxo máximo e o Algoritmo das Duas Fases tem que rodar sempre duas vezes, mesmo quando conseguimos um fluxo máximo na primeira fase (veja o exemplo 3.3.1).

Além disso, temos uma estrutura mais simplificada, isto é, o número de sub-rotinas que o A1F utiliza é menor que o número de sub-rotinas que o A2F utiliza.

Para obter os resultados computacionais, tivemos que implementar um gerador de grafos aleatórios. Para essa geração dos grafos, precisamos fornecer: o número de nós, um intervalo de valores para a escolha dos limites inferiores l_{ij} e um intervalo para a escolha dos limites superiores u_{ij} .

Uma das maiores dificuldades encontradas, foi gerar um grafo que possuísse uma solução viável. Abaixo apresentamos exemplos de dois casos de inviabilidade:

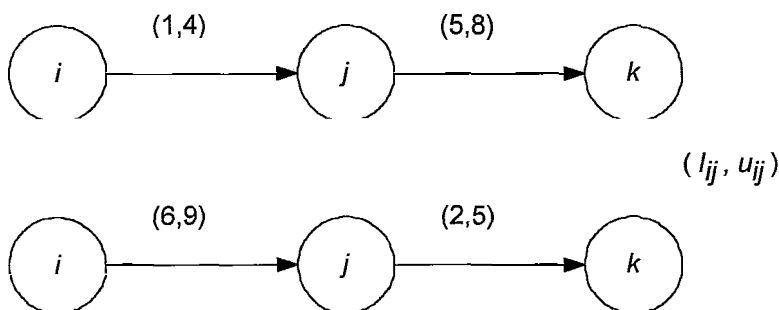


Figura 5.1
Exemplos de grafos com
desbalanceamento no nó j .

Nestes exemplos, podemos ver claramente que no nó j , não é satisfeita a equação de balanço de fluxo. Assim, tivemos que gerar valores aleatórios que satisfizessem as duas restrições:

$$\sum_{j|(j,i) \in A} u_{ji} \geq \sum_{k|(i,k) \in A} l_{ik} \text{ e } \sum_{j|(j,i) \in A} l_{ji} \leq \sum_{k|(i,k) \in A} u_{ik}.$$

Os limites inferiores l_{ij} pertencem ao intervalo [0 ; 10] e os limites superiores pertencem ao intervalo [0 ; 20]. Utilizando esse gerador de grafos aleatórios, geramos um total de 50 grafos.

Para que fosse possível identificar qual dos dois algoritmos leva menos tempo para calcular o fluxo máximo nestes grafos, colocamos um relógio no início e fim de cada algoritmo implementado (veja a tabela abaixo).

| Número de nós | Fluxo máximo | Tempo (em centésimo de segundos) | | |
|---------------|--------------|-----------------------------------|-------------|--------------------|
| | | A1F (T1) | A2F (T2) | $\frac{T2-T1}{T1}$ |
| 40 | 15582 | 6 | 11 | 0,8 |
| 40 | 15622 | 5 | 11 | 1,2 |
| 40 | 13263 | 5 | 11 | 1,2 |
| 40 | 16518 | 5 | 11 | 1,2 |
| 40 | 12969 | 5 | 11 | 1,2 |
| 40 | 16175 | 6 | 11 | 0,8 |
| 40 | 16339 | 6 | 11 | 0,8 |
| 40 | 13791 | 6 | 11 | 0,8 |
| 40 | 15157 | 17 | 22 | 0,3 |
| 40 | 15216 | 5 | 11 | 1,2 |
| 45 | 16672 | 5 | 11 | 1,2 |
| 45 | 15793 | 6 | 11 | 0,8 |
| 45 | 17177 | 11 | 11 | 0 |
| 45 | 17526 | 6 | 11 | 0,8 |
| 45 | 17270 | 6 | 11 | 0,8 |
| 45 | 17819 | 11 | 11 | 0 |
| 45 | 16257 | 22 | 33 | 0,5 |
| 45 | 15260 | 22 | 27 | 0,2 |
| 45 | 14684 | 22 | 28 | 0,3 |
| 45 | 16455 | 16 | 28 | 0,8 |
| 50 | 19020 | 11 | 16 | 0,5 |
| 50 | 18146 | 11 | 11 | 0 |
| 50 | 15903 | 11 | 11 | 0 |
| 50 | 16663 | 22 | 33 | 0,5 |
| 50 | 15748 | 11 | 11 | 0 |
| 50 | 18123 | 11 | 17 | 0,5 |
| 50 | 18613 | 11 | 17 | 0,5 |
| 50 | 18132 | 17 | 17 | 0 |
| 50 | 19388 | 11 | 16 | 0,5 |
| 55 | 21061 | 11 | 16 | 0,5 |
| 55 | 20640 | 16 | 16 | 0 |
| 55 | 18304 | 11 | 16 | 0,5 |
| 55 | 20817 | 17 | 22 | 0,3 |
| 55 | 23308 | 16 | 22 | 0,4 |
| 55 | 24110 | 16 | 22 | 0,4 |

| Número de nós | Fluxo máximo | Tempo (centésimo de segundos) | | |
|---------------|--------------|-------------------------------|-------------|--------------------|
| | | A1F (T1) | A2F (T2) | $\frac{T2-T1}{T1}$ |
| 55 | 19441 | 33 | 44 | 0,3 |
| 55 | 16482 | 22 | 38 | 0,7 |
| 55 | 22028 | 27 | 44 | 0,6 |
| 55 | 20104 | 33 | 39 | 0,2 |
| 60 | 20876 | 16 | 22 | 0,4 |
| 60 | 19404 | 16 | 22 | 0,4 |
| 60 | 21949 | 22 | 22 | 0 |
| 60 | 22416 | 16 | 22 | 0,4 |
| 60 | 23328 | 38 | 49 | 0,3 |
| 60 | 23616 | 33 | 39 | 0,2 |
| 60 | 22878 | 33 | 44 | 0,3 |
| 60 | 24745 | 33 | 44 | 0,3 |
| 60 | 21083 | 16 | 22 | 0,4 |
| 60 | 25647 | 16 | 27 | 0,7 |

Quadro 5.1

Comparação dos tempos gastos por A1F e A2F.

6) CONCLUSÃO

Para o problema de maximização de fluxo em grafos com limites inferiores positivos, conseguimos verificar em que condições podemos dispensar o arco de retorno (t,s) , ou seja, examinamos casos especiais, em que é possível determinar o sinal dos excessos nos nós s e t , permitindo a determinação de arcos (s^*,s) e (t,t^*) . A vantagem deste enfoque é que para estes casos, a segunda fase do algoritmo tradicional não é mais necessária, ou seja, o fluxo viável obtido na primeira fase é um fluxo máximo. A verificação das condições acima citadas é feita em $O(n)$, não afetando portanto a complexidade do algoritmo. A seguir, comentaremos os resultados do quadro 5.1.

O quadro 5.2 sintetiza os resultados do quadro 5.1 dando a média de $\frac{T2 - T1}{T1}$ para cada classe de problema.

| Número de nós | Média das diferenças relativas dos tempos |
|---------------|---|
| 40 | 0,95 |
| 45 | 0,54 |
| 50 | 0,25 |
| 55 | 0,39 |
| 60 | 0,34 |

Quadro 5.2.

Medias para cada tipo de problema.

Examinando o quadro 5.2 verificamos que a diferença relativa entre os tempos de A2F e A1F diminui à medida que aumenta o tamanho do problema. Isto era de se esperar pois a economia ocasionada por A1F implica em um número aproximadamente "fixo" de operações que se "dilui" a medida que cresce o problema. Mais precisamente poderíamos dizer que a diferença entre A2F e A1F com relação ao número de operações atinge termos de menor grau e ordem que perdem em relevância à medida que o problema aumenta. Por outro lado, a inexistência do arco (t,s) faz com que com A1F seja maximizado o fluxo de s a t o que não necessariamente ocorre na primeira fase de A2F. Um avaliação mais precisa deste fato exigia um maior número de testes computacionais.

Outra vantagem de A1F é a maior simplicidade do programa que possui um número menor de subrotinas. Ao dispensar não só o arco (t, s) como também a segunda fase, A1F tem uma estrutura mais simples. O algoritmo A2F mesmo encontrando o fluxo máximo de s a t na primeira fase, precisa da segunda fase, com todo o incomodo que isto representa em termos de número de operações, mudança de variáveis, etc., para fazer esta verificação.

Certamente a classe de problemas para a qual podemos utilizar A1F é bastante ampla. Verificamos que para grafos onde os fluxos só podem sair e não entrar no fonte s e, inversamente, só podem entrar e não sair do sumidouro t , A1F pode ser usado.

Para uma melhor compreensão sobre estas conclusões, aplicaremos o A1F para o mesmo exemplo ao qual foi aplicado o A2F na seção 3.3.

Exemplo 6.1

Aplicamos a seguir o A1F ao grafo da figura 6.1 do exemplo 3.3.2:

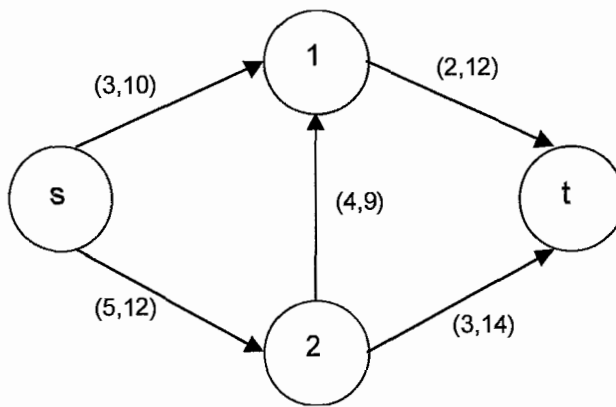


Figura 6.1
Grafo original com limites
 (l_{ij}, u_{ij}) sobre os arcos.

Começamos com o Passo 1 fazendo um estudo sobre o sinal de $b(s)$ e $b(t)$ para saber se $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$. Como $\sum_{j|(j,s) \in A} l_{js} - \sum_{j|(s,j) \in A} l_{sj} = -8 < 0$, $\forall (j, s) \ u_{js} = l_{js} = 0 \ \forall j$, $\sum_{j|(j,t) \in A} l_{jt} - \sum_{j|(t,j) \in A} l_{tj} = 5 > 0$ e $\forall (t, j) \ u_{tj} = l_{tj} = 0 \ \forall j$, temos $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$, pois satisfazemos as condições do teste IV (seção 4.3). Assim, como o estudo de $b(s)$ e $b(t)$ foi bem sucedido, continuamos com o Passo 2 do algoritmo A1F.

Calculamos os $b(i) \ \forall i, i \neq s, t$ e construímos um novo grafo G^{**} .

Como já sabemos que $b(s) \geq 0$ e $b(t) \leq 0$, criamos um arco artificial (s^*, s) onde $0 \leq x'_{s^*s} \leq \sum_{j|(j,t) \in A} u_{jt} + 1 = 27$ e um arco (t, t^*) onde $0 \leq x'_{tt^*} \leq \sum_{j|(j,t) \in A} u_{jt} + 1 = 27$ respectivamente.

$b(1) = 5 > 0$, criamos um novo arco $(s^*, 1)$ tal que $0 \leq x'_{s^*1} \leq 5$;

$b(2) = -2 < 0$, criamos um novo arco $(2, t^*)$ tal que $0 \leq x'_{2t^*} \leq 2$.

De acordo com o Passo 3, obtemos o seguinte grafo G^{**} :

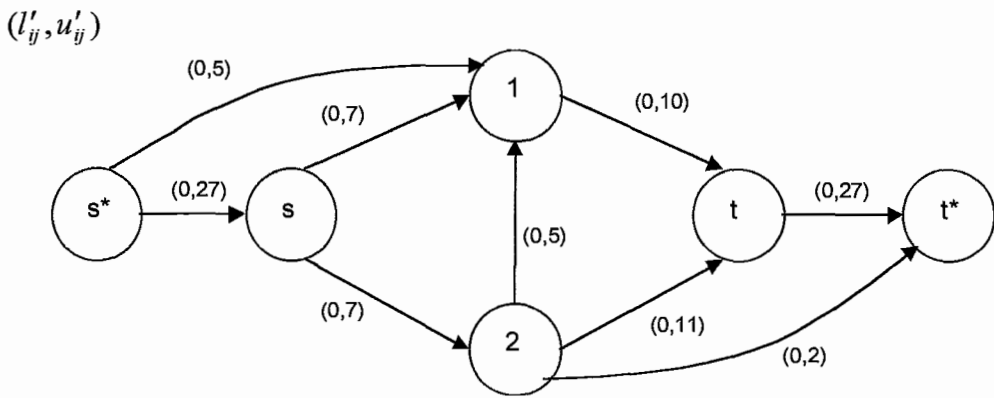


Figura 6.2

Grafo G^{**} com os arcos artificiais e os arcos (s^*, s) e (t, t^*) .

Aplicamos o algoritmo tradicional para limites inferiores nulos, maximizando o fluxo de s^* a t^* , para o grafo G^{**} . Temos as seguintes iterações onde caminhos \wp de s^* a t^* , constam como linha mais grossa. δ é o gargalo que corresponde ao fluxo máximo de \wp (veja seção 2.2.2).

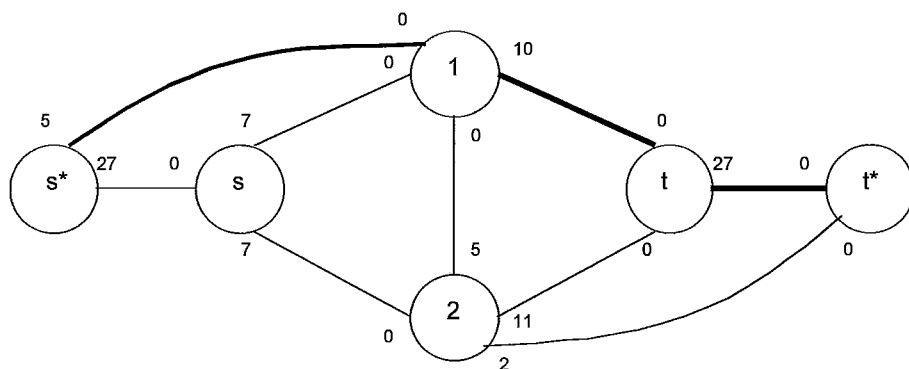
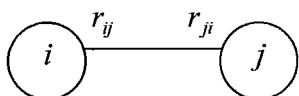


Figura 6.3

Iteração 1

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 5$ e $v = 5$.

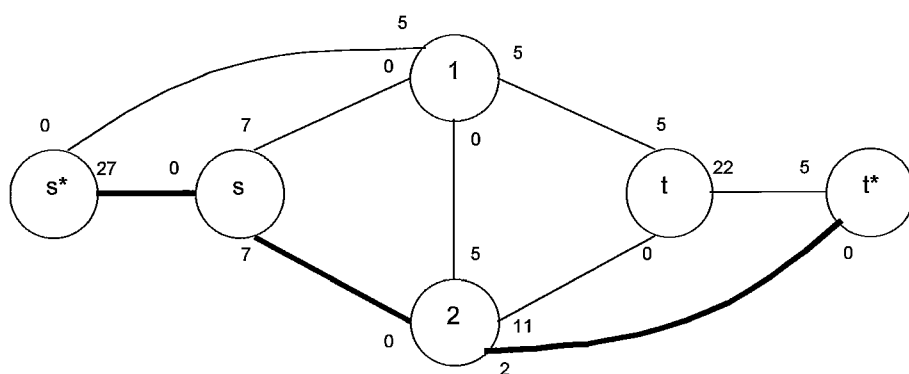


Figura 6.4

Iteração 2

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 2$ e $v = 5 + 2 = 7$.

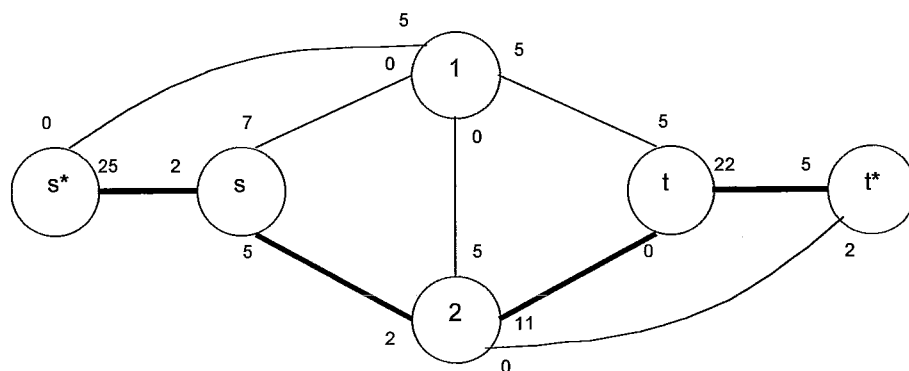


Figura 6.5

Iteração 3

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 5$ e $v = 7 + 5 = 12$.

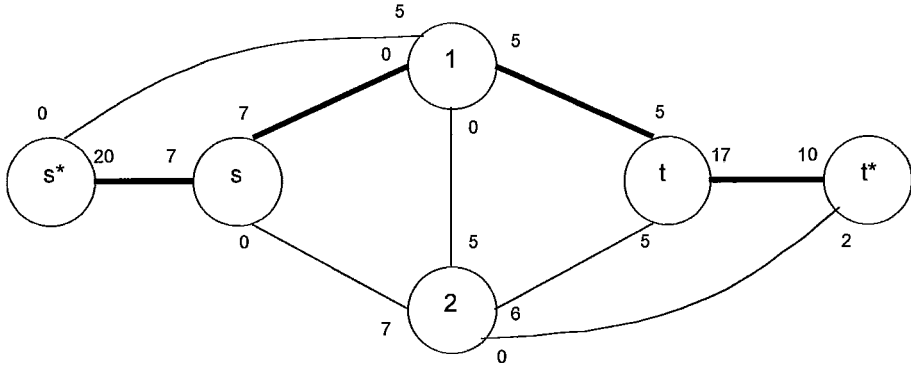


Figura 6.6
Iteração 4

Grafo Residual $G(x)$ com $\delta = 5$ e $v = 12 + 5 = 17$.

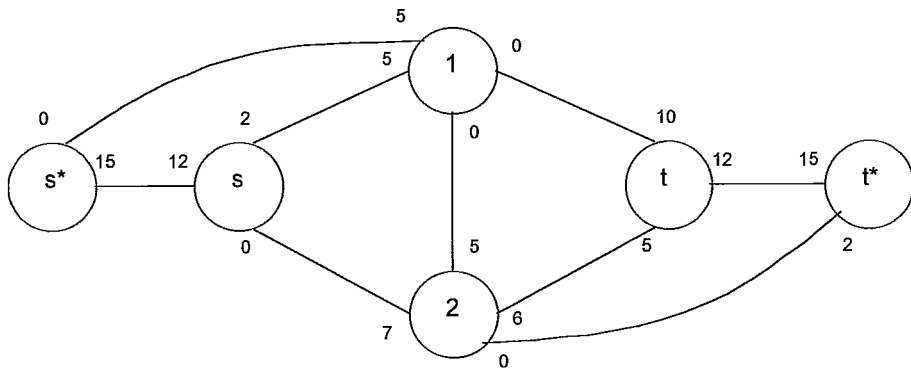


Figura 6.7
Iteração 5

Ultimo Grafo Residual $G(x)$ onde não existe caminho de s^* a t^* .

Mostraremos a seguir o fluxo máximo x'^* de s^* a t^* , para o grafo G^{**} .

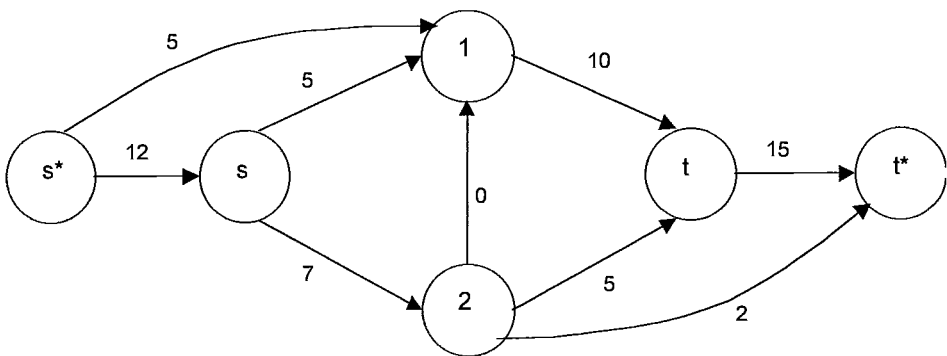


Figura 6.8
Fluxo máximo do grafo G^{**} .

onde, o valor do fluxo máximo de s^* a t^* é 17.

Como $x'_{s^*i} = b(i)$ e $x'_{it^*} = -b(i)$, $\forall i \in N$, $i \neq s, t$, podemos passar ao Passo 6 voltando ao grafo original G e eliminando os arcos (s^*, i) e (i, t^*) . Fazemos $x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$ obtendo um fluxo viável x para o grafo original $G = (N, A)$:

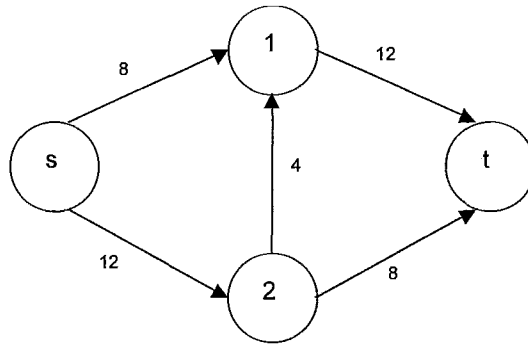


Figura 6.9

Grafo original G com fluxo máximo ($v = 20$).

Este fluxo é fluxo máximo de $G = (N, A)$.

É interessante observar que o A2F (capítulo 3) levou 4 iterações na primeira fase e 3 na segunda, enquanto o A1F gasta um total de 5 iterações. Temos portanto que para este exemplo, o A2F necessita 2 iterações a mais do que o A1F. Este fato mostra que o A1F não só é de estrutura computacional mais simples como também pode resultar em um número menor de iterações para se obter a solução ótima.

APÊNDICE

APÊNDICE A

De MONTEIRO [6] enunciamos as seguintes propriedades:

Quaisquer que sejam as partes A, B e C de U, tem-se

$$P1) A - B = A \cap \bar{B}$$

$$P2) A \cap B = B \cap A \text{ e } A \cup B = B \cup A \text{ (propriedades comutativas);}$$

$$P3) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \text{ e}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \text{ (propriedades associativa);}$$

$$P4) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ e}$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ (propriedades distributivas);}$$

$$P5) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ e } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ (leis de dualidade).}$$

Teorema A: Dadas as partes A, B, C e D de U, tal que $B \subset A$ e $D \subset C$, então $(A - B) \cup (C - D) = (A \cup C) - (D \cup B)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (C - D) & \stackrel{P1}{=} (A \cap \bar{B}) \cup (C \cap \bar{D}) \stackrel{P4}{=} \\ & = [(A \cap \bar{B}) \cup C] \cap [(A \cap \bar{B}) \cup \bar{D}] \stackrel{P2 \text{ e } P4}{=} \\ & = [(C \cup A) \cap (C \cup \bar{B})] \cap [(\bar{D} \cup A) \cap (\bar{D} \cup \bar{B})]. \end{aligned}$$

Ora, $(C \cup \bar{B}) = \bar{B}$ pois $C \subset \bar{B}$ e $[(\bar{D} \cup A) = \bar{D}]$ pois $A \subset \bar{D}$. Assim

$$(A - B) \cup (C - D) = [(C \cup A) \cap \bar{B}] \cap [\bar{D} \cap (\bar{D} \cup \bar{B})].$$

Ora, $\bar{D} \cap (\bar{D} \cup \bar{B}) = \bar{D}$ pois $\bar{D} \subset (\bar{D} \cup \bar{B})$. Assim

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (C - D) & = [(C \cup A) \cap \bar{B}] \cap \bar{D} \stackrel{P3}{=} (C \cup A) \cap (\bar{B} \cap \bar{D}) \stackrel{P2}{=} \\ & = (A \cup C) \cap (\bar{D} \cap \bar{B}) \stackrel{P5}{=} (A \cup C) \cap \overline{(D \cup B)} \stackrel{P1}{=} (A \cup C) - (D \cup B) \end{aligned}$$

■

Corolário A1: Sejam S^* e \bar{S}^* dois conjuntos, tal que $s^* \in S^*$ e $t^* \in \bar{S}^*$.

Então $(S^* - \{s^*\}) \cup (\bar{S}^* - \{t^*\}) = (S^* \cup \bar{S}^*) - \{s^*, t^*\}$.

Demonstração:

Segue imediatamente do Teorema A acima.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AHUJA, R.K., MAGNANTI, T.L., ORLIN, J.B., *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. 3 ed. New Jersey, Prentice Hall, 1993.
- [2] FORD, L.R., FULKERSON, D.R., *Flows in Networks*. Princeton University Press. Princeton. NJ., 1962.
- [3] FORD, L.R., FULKERSON, D.R., "Maximal Flow through a Network", *Canadian Journal of Mathematics* v.8, pp. 399-404, 1956.
- [4] ELIAS, P., FEINSTEIN, A., SHANNON C.E., "Note on Maximun Flow through a Network", *IRE Transactions on Information Theory* IT-2, pp.117-119, 1956.
- [5] GONÇALVES, A., *Introdução à Álgebra*. 1 ed. Rio de Janeiro. Gráfica Editora Hamburg Ltda, 1979.
- [6] MONTEIRO, L.H., JACY, "Elementos da Álgebra", *Livros Técnicos e Científicos*. Editora S.A. 1974.
- [7] KISHIMOTO, W., Tamagawa University, 6-1-1 Tamagawagakuen, Machida-shi Tokyo, 194, Japan, e-mail wkishi@eng.tamagawa.ac.jp de 10/05/97.
- [8] GAUTIER, A., Université Laval, Québec, P.Q., Canada, e-mail antoine.gautier@fsa.ulaval.ca de 08/04/97.
- [9] SCUTELLA, M.G, e-mail scut@di.unipi.it de 07/04/97.
- [10] HARTVIGSEN, D., University of Notre Dame, in 46556-5641, U.S.A., e-mail dhartvig@wood.helios.nd.edu em 20/04/97.
- [11] NAGAMOCHI, H., Faculty of Engineering, Kyoto, 606-01, Japan, e-mail hirochi@cs.newcastle.edu.au de 27/04/97.