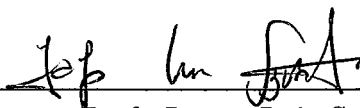


GRAFOS CLIQUE DE ARESTAS

Márcia Rosana Cerioli

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

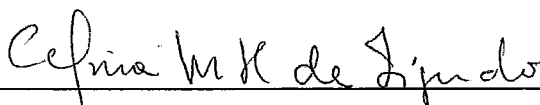
Aprovada por:



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



Prof. Paulo Cezar Pinto Carvalho, Ph.D.



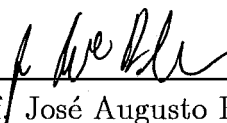
Profª. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



Prof. João Meidanis, Ph.D.



Prof. Oscar Porto, D.Sc.



Prof. José Augusto Ramos Soares, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 1999

CERIOLI, MÁRCIA ROSANA

Grafos Clique de Arestas [Rio de Janeiro]

1999

VI, 68 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 1999)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1 - Teoria de Grafos 2 - Operadores
3 - Clique de Arestas 4 - Classes de Grafos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

GRAFOS CLIQUE DE ARESTAS

Márcia Rosana Cerioli

Dezembro/1999

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *grafo clique de arestas de G* , denotado $K_e(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a E e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $K_e(G)$ se e somente se os extremos das arestas correspondentes em G estão em uma mesma clique. Um grafo G é *grafo clique de arestas* se existe um grafo H tal que $G = K_e(H)$.

Examinamos, neste trabalho, tanto o operador clique de arestas quanto a classe de grafos por ele definida. Estudamos as propriedades básicas do operador e sua dinâmica. Apresentamos uma caracterização da classe dos grafos clique de arestas e investigamos sua relação com a classe dos grafos clique. Também estudamos problemas de caracterização associados a aplicação do operador clique de arestas a algumas classes de grafos. Finalmente, definimos e reconhecemos em tempo polinomial a classe dos grafos aresta-Helly.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

EDGE CLIQUE GRAPHS

Márcia Rosana Cerioli

December/1999

Advisor: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Computing and Systems Engineering

The edge clique graph $K_e(G)$ of a graph G is the one whose vertices correspond to the edges of G and where two vertices of $K_e(G)$ are adjacent whenever the ends of the corresponding edges of G are in a common clique. A graph G is an edge clique graph if there is a graph H such that $G = K_e(G)$.

We examine both the edge clique operator and the class of edge clique graphs. We consider some basic properties of the edge clique operator and its dynamics. We present a characterization of edge clique graphs and investigate the relationship between edge clique graphs and clique graphs. We also study the application of the operator to some special classes of graphs. Finally, we consider the edge-Helly graphs and give a polynomial algorithm to recognize them.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Definições	3
1.2	Grafos clique	6
2	Propriedades Básicas	8
2.1	Definição e exemplos	9
2.2	Propriedade da Preservação de Cliques	10
2.3	Propriedade dos Números Triangulares	13
2.4	Grafos sem tetraedros	15
2.5	Caminhos e componentes	16
2.6	Operações e subgrafos	18
2.7	Número de interseção	20
3	Dinâmica	22
3.1	Grafos fixos e periódicos	23
3.2	Maior clique e mortalidade	23
3.3	Número de cliques maximais	24
3.4	Conexidade	24
3.5	Diâmetro	26
4	Classes de Grafos	29
4.1	Classes clique-de-arestas-fechadas	31
4.2	Grafos estrelados	34
4.3	Grafos estrelados de limiar	39
4.4	Grafos partilhados e grafos de limiar	42
5	Caracterização	47

5.1	Rotulações e caracterização	47
6	Grafos Aresta-Helly	52
6.1	Grafos 2-clique	52
6.2	Grafos aresta-Helly	55
6.3	K_4 -coberturas Helly em arestas	59
7	Conclusões	64
	Referências Bibliográficas	66

Capítulo 1

Introdução

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *grafo clique de arestas de G* , denotado $K_e(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a E e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $K_e(G)$ se e somente se os extremos das arestas correspondentes em G são, dois a dois, iguais ou adjacentes. Um grafo G é *grafo clique de arestas* se existe um grafo H tal que $G = K_e(H)$. Na Figura 1.1, temos um grafo G e seu grafo clique de arestas, $K_e(G)$.

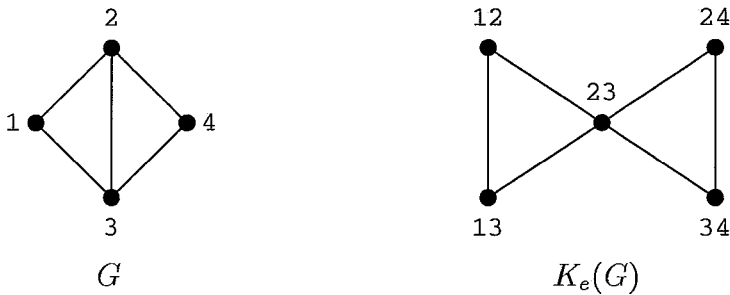


Figura 1.1: Grafo e seu grafo clique de arestas.

Grafos clique de arestas foram definidos e primeiramente estudados por Albertson e Collins, em 1984 [2], embora tenham sido implicitamente utilizados por Kou, Stockmeyer e Wong, em 1978 [17]. Outros trabalhos sobre o assunto foram feitos por Raychaudhuri [24, 25] e por Chartrand, Kapoor, McKee e Saba [11]. Coletâneas em que este operador aparece foram feitas por Prisner [22, 23] e [3] é uma coletânea exclusivamente dedicada a este operador.

A definição do grafo clique de arestas descreve uma maneira de se construir um grafo, a partir de um grafo dado. Formalmente, podemos considerá-la sob dois aspectos: como um operador sobre a classe de todos os grafos ou como a própria classe dos grafos que são obtidos segundo a construção definida.

Neste trabalho, ambos os aspectos são enfocados e, além de uma revisão de conceitos e resultados encontrados na literatura, apresentamos nossos próprios resultados, em um tratamento uniforme. Deste modo, cada capítulo aborda um aspecto da teoria dos operadores em grafos ou do estudo das classes de grafos definidas por operadores, contendo as definições necessárias e referentes ao particular aspecto enfocado.

Até o momento, os principais resultados sobre o operador e a classe dos grafos clique de arestas eram os seguintes: a determinação de relações entre parâmetros de um dado grafo e os de seu grafo clique de arestas, em particular, o estudo dos parâmetros: tamanho da menor cobertura de vértices por cliques, tamanho da menor cobertura de arestas por cliques, tamanho da maior clique e número cromático, e de questões associadas a estes parâmetros, tais como número de interseção [24] e perfeição [2]; exemplos de classes de grafos tais que a aplicação do operador clique de arestas fornece grafos na mesma classe [2, 11, 24, 25]; e um algoritmo de tempo exponencial, com o objetivo de reconhecer grafos clique de arestas [11].

Além de um tratamento uniforme e apresentação das principais propriedades que estavam implícitas nos trabalhos anteriores, a estes resultados viemos juntar os seguintes: um estudo detalhado da aplicação iterada do operador; novos exemplos de classes tais que a aplicação do operador clique de arestas fornece grafos na mesma classe; a caracterização de algumas classes de grafos cujos grafos clique de arestas pertencem a uma classe especificada; a caracterização de quais grafos pertencentes a certas classes de grafos são grafos clique de arestas; uma caracterização geral dos grafos clique de arestas; e, finalmente, condições que um grafo deve satisfazer para que seu grafo clique de arestas seja um grafo clique.

Alguns resultados obtidos durante a elaboração desta tese foram apresentados em congressos [4, 5, 9, 10] e publicados como relatórios técnicos [6, 7, 8].

Este texto está organizado do seguinte modo: na seção a seguir são relacionadas algumas definições básicas de teoria de grafos. A Seção 1.2 é destinada à classe dos grafos clique e sua relação com a classe dos grafos clique de arestas.

No Capítulo 2, apresentamos algumas propriedades básicas do operador

clique de arestas e da classe de grafos por ele definida. Estas propriedades servirão como base para os resultados dos capítulos seguintes. Também neste capítulo, na Seção 2.7, apresentamos o resultado de Kou, Stockmeyer e Wong [17], onde o operador K_e pela primeira vez foi utilizado.

No Capítulo 3 são apresentados os resultados sobre a dinâmica do operador clique de arestas, isto é, o estudo referente a sua aplicação iterada. No Capítulo 4 são apresentadas as classes de grafos para as quais são estudadas tanto as aplicações direta e inversa do operador clique de arestas quanto a aplicação do operador restrita à classe. Em especial, são tratadas as classes dos grafos estrelados e estrelados de limiar. O problema da caracterização de grafos clique de arestas é tratado no Capítulo 5. A relação do operador clique de arestas com o operador 2-clique, bem como a classe dos grafos aresta-Helly são tratados no Capítulo 6. Neste capítulo também são apresentadas condições para que o grafo clique de arestas de um grafo dado seja um grafo clique. Finalmente, no Capítulo 7 concluímos com propostas para futuras pesquisas.

1.1 Definições

Nesta seção são apresentadas as definições gerais de teoria de grafos que serão adotadas ao longo do texto. As definições que são utilizadas somente em uma dada seção ou capítulo são definidos naquela seção ou capítulo.

Um *grafo* G é um conjunto finito $V(G)$ de *vértices* e um conjunto $E(G)$ de pares não ordenados de vértices distintos, chamados *arestas*. Se $|V(G)| = 1$, G é chamado *trivial*. Para alguns propósitos é conveniente reconhecer o grafo *nulo*, denotado \emptyset , como o que não tem vértices nem arestas.

Um vértice u é *adjacente* a um vértice v em G se $\{u, v\}$ é uma aresta de G . Na maioria dos casos, denotamos uma aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv . O conjunto dos vértices adjacentes a u é denotado $N_G(u)$ e denotamos por $N_G[u]$ o conjunto $N_G(u) \cup \{u\}$. Um vértice u de G é *isolado* quando $N_G(u) = \emptyset$ e é *universal* quando $N_G[u] = V(G)$. Uma aresta $e = uv$ é *incidente* aos vértices u e v , que são os *extremos* de e . Em geral, quando o grafo a que estamos nos referindo for claro no contexto, os subscritos serão omitidos.

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existe uma bijeção ϕ de $V(G)$ em $V(H)$

tal que a aresta $uv \in E(G)$ se e somente se $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. A função ϕ é um *isomorfismo* de G em H . Como é usual, não distinguiremos grafos isomorfos, isto é, no caso de G e H serem isomorfos, escreveremos simplesmente $G = H$.

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G , denotado $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se, neste caso, $V(H) = V(G)$, H é *subgrafo gerador* de G . Se G é um grafo e $S \subseteq V(G)$, então o *subgrafo induzido* por S é o subgrafo H de G , tal que $V(H) = S$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em S . O subgrafo induzido por S é denotado $G[S]$. Se existe S tal que $H = G[S]$, então H é um *subgrafo induzido* de G , denotado $H \leq G$, caso contrário, dizemos que G é *sem* H .

Se G é um grafo, o *complemento* de G , denotado \overline{G} é o grafo onde $V(\overline{G}) = V(G)$ e para todos $u, v \in V(G)$, tais que $u \neq v$, $uv \in E(\overline{G})$ se e somente se $uv \notin E(G)$.

Sejam G e H dois grafos. Definimos a *interseção* de G com H , denotada $G \cap H$, como o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cap V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cap E(H)$. Se $G \cap H = \emptyset$, definimos a *união* de G com H , denotada $G \cup H$, como o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H)$. Neste caso, definimos também a *combinação* de G com H , denotada $G * H$, como o grafo com conjunto de vértices $V(G) \cup V(H)$ e conjunto de arestas $E(G) \cup E(H) \cup \{uv : u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$. Em particular, se H é o grafo trivial com $V(H) = \{x\}$, a combinação de G com H é denotada $G * \{x\}$. É fácil ver que, para todos os grafos G e H , $\overline{G \cup H} = \overline{G} * \overline{H}$ e, equivalentemente, $\overline{G * H} = \overline{G} \cup \overline{H}$.

Um *caminho*, $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, entre v_0 e v_k , é uma seqüência finita e não vazia de vértices distintos, tal que para todo i , $1 \leq i \leq k$, os vértices v_{i-1} e v_i são adjacentes. O *comprimento* de P , denotado $|P|$, é k . Uma seqüência de vértices (v_0, v_1, \dots, v_k) , $k > 2$, é um *ciclo* se $v_0 = v_k$ e $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ é um caminho. Uma aresta $e = uv$ é uma *corda* de um ciclo C se u e v são vértices não consecutivos de C . A *distância* $d(u, v)$ entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é o comprimento de um menor caminho entre u e v em G . Se não existe um caminho entre u e v , então $d(u, v)$ é considerada infinita. O *diâmetro* de G é o valor $\text{diam}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V(G)\}$.

Um grafo G é *conexo* se, para todo par de vértices distintos u, v em G , existe um caminho entre u e v . Um *componente conexo* de G é um subgrafo conexo maximal de G . Um grafo G é *desconexo*, se não for conexo.

Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Um subgrafo de uma árvore que também é uma árvore é chamado *subárvore*. Uma *estrela* é uma árvore que possui um vértice universal.

O grafo que consiste de um caminho com n vértices é denotado P_n , o que consiste de um ciclo com n vértices é denotado C_n , enquanto que N_n denota o grafo com n vértices e nenhuma aresta. Em particular, $P_0 = C_0 = N_0 = \emptyset$.

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. O grafo completo com n vértices, é denotado K_n . Em particular, $K_0 = \emptyset$. O grafo K_3 também é chamado de *triângulo* e o grafo K_4 é chamado de *tetraedro*.

Um conjunto de vértices $S \subseteq V(G)$ é uma *clique* se $G[S]$ é um grafo completo. Em particular, se $N[v]$ é uma clique, então v é um vértice *simplicial*. Uma *clique maximal* é uma clique que não está contida propriamente em nenhuma outra. O conjunto S é *estável* se S em \overline{G} é uma clique. A família das cliques maximais de G é denotada por $\mathcal{M}(G)$ enquanto que $q(G)$ denota o número de cliques maximais de G , isto é, $q(G) = |\mathcal{M}(G)|$. O número de vértices de uma maior clique de G é denotado por $\omega(G)$. O *número cromático* de G , denotado $\chi(G)$, é o tamanho da menor partição de $V(G)$ em conjuntos estáveis. Um grafo G é *bom* se $\chi(G) = \omega(G)$ e é *cobom* se \overline{G} é bom.

Dada $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_p\}$ uma família de subconjuntos de vértices em um grafo G , dizemos que \mathcal{C} é uma *cobertura de vértices* de G se para todo $v \in V$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $v \in C_i$ e dizemos que \mathcal{C} é uma *cobertura de arestas* de G se para todo $uv \in E(G)$, existe $C_i \in \mathcal{C}$ tal que $u, v \in C_i$. Denotamos por $\theta(G)$ o tamanho da menor cobertura de vértices por cliques maximais e por $\theta_e(G)$ o tamanho da menor cobertura de arestas por cliques maximais de G .

Um grafo G é um *grafo de interseção* se é possível atribuir a cada vértice $v \in V$ um conjunto $S(v)$, de forma que para cada par de vértices u e v , temos $uv \in E(G)$ se e somente se $S(u) \cap S(v) \neq \emptyset$. Chamamos uma tal família $\mathcal{F} = \{S(v) : v \in V\}$ de *modelo de interseção* de G . E denotamos

$$S = \bigcup_{v \in V} S(v).$$

Dada uma família de conjuntos $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$, dizemos que \mathcal{F} *satisfaz a propriedade Helly* quando para todos $J \subseteq I$ e $i, j \in J$, se $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, então $\bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset$. Isto é, \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly quando para cada subfamília \mathcal{F}' de \mathcal{F} , se \mathcal{F}' é formada por conjuntos que se interseptam dois a dois, então os elementos de \mathcal{F}' têm um elemento em comum.

1.2 Grafos clique

Nesta seção revisamos a definição e algumas propriedades dos grafos clique. Em particular apresentamos uma possível relação desta classe com a classe dos grafos clique de arestas.

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *grafo clique de G* , denotado $K(G)$, é o grafo de interseção de $\mathcal{M}(G)$, a família das cliques maximais de G . Um grafo G é *grafo clique* se existe um grafo H tal que $G = K(H)$.

Em 1971, Roberts e Spencer apresentaram uma caracterização dos grafos clique.

Teorema 1.2.1 (Roberts e Spencer [26]) *Um grafo G é grafo clique se e somente se existe uma família \mathcal{C} de cliques de G , que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) \mathcal{C} é uma cobertura de arestas de G ;
- (ii) \mathcal{C} satisfaz a propriedade Helly.

O Teorema de Roberts e Spencer fornece um critério para verificar se um dado grafo G é ou não um grafo clique. Para isto basta testar se alguma família de conjuntos de vértices de G satisfaz as condições enunciadas. Cada uma das condições pode ser testada em tempo polinomial, mas como um grafo possui um número exponencial de subfamílias de subconjuntos de vértices, esta caracterização não fornece um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos clique. Um dos principais problemas em aberto no estudo dos grafos clique é o de encontrar uma boa caracterização para esta classe.

A relação entre a classe dos grafos clique e a dos clique de arestas foi abordada em [11]. Neste artigo aparece a afirmação de que todo grafo clique de

arestas é grafo clique. Posteriormente, Albertson [1] relatou que Prisner encontrou um erro na prova apresentada em [11] e estabeleceu como um problema em aberto resolver a seguinte conjectura:

Conjectura 1.2.1 *Todo grafo clique de arestas é grafo clique.*

Neste texto apresentamos alguns resultados que mostram que para classes restritas de grafos a Conjectura 1.2.1 é verdadeira. Neste sentido, o seguinte resultado será útil:

Teorema 1.2.2 ([26]) *Se $\omega(G) \leq 3$, então G é grafo clique se e somente se G não tem o grafo da figura abaixo como subgrafo.*

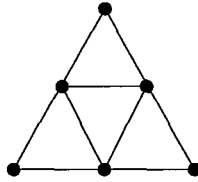


Figura 1.2: Grafo proibido para grafo clique com $\omega(G) \leq 3$.

Capítulo 2

Propriedades Básicas

Neste capítulo são apresentadas as propriedades básicas do operador clique de arestas e da classe de grafos por ele definida. Alguns destes resultados já se encontravam na literatura enquanto que outros são, pela primeira vez, aqui sistematizados. Em particular, as Propriedades da Preservação de Cliques e dos Números Triangulares foram freqüentemente utilizadas e referidas a [2], embora não tivessem uma prova detalhada.

Na Seção 2.1 definimos e apresentamos alguns exemplos de grafos clique de arestas. Na Seção 2.2 provamos a Propriedade da Preservação de Cliques, que estabelece uma correspondência entre as cliques maximais de um grafo e as de seu grafo clique de arestas. Na Seção 2.3 provamos a Propriedade dos Números Triangulares que estabelece que a correspondência dada pela Propriedade da Preservação de Cliques também relaciona a cardinalidade das cliques consideradas, o que fornece uma condição necessária para que um dado grafo seja clique de arestas. Na Seção 2.4 estudamos os grafos clique de arestas que possuem uma estrutura bastante simples. Também existe uma correspondência entre certas seqüências de arestas de um grafo e os caminhos de seu grafo clique de arestas. Este é o assunto estudado na Seção 2.5, enquanto que na Seção 2.6 estudamos a relação do operador K_e com as operações \cup , \cap e $*$ sobre grafos e as relações \subseteq e \leq entre grafos. Finalmente, na Seção 2.7 apresentamos o resultado de Kou, Stockmeyer e Wong, onde o operador clique de arestas foi implicitamente utilizado, pela primeira vez.

2.1 Definição e exemplos

Dado um grafo $G = (V, E)$, o *grafo clique de arestas de G* , denotado $K_e(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a E e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $K_e(G)$ se e somente se os extremos das arestas correspondentes estão em uma mesma clique de G . Um grafo G é *grafo clique de arestas* se existe um grafo H tal que $G = K_e(H)$. Na Figura 2.1, temos um grafo G e seu grafo clique de arestas, $K_e(G)$.

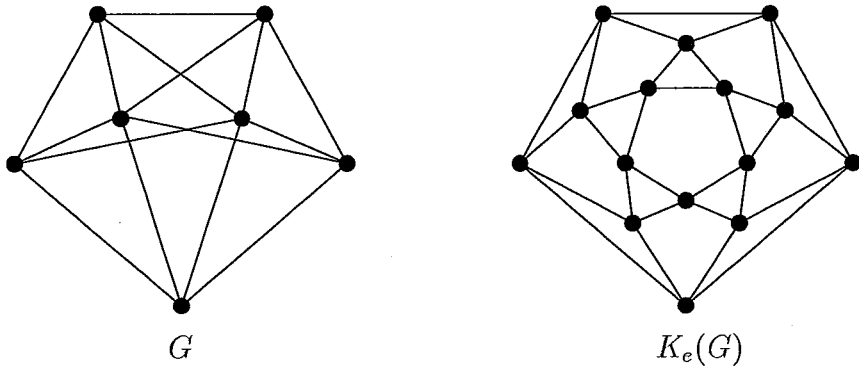


Figura 2.1: Grafo e seu grafo clique de arestas.

Dado um grafo G com n vértices e m arestas, o grafo $K_e(G)$ tem m vértices e pode ser construído em tempo $O(m^2)$. De fato, para cada par de arestas de G , podemos verificar se elas são adjacentes em $K_e(G)$ testando se estão em um mesmo triângulo ou tetraedro de G . Isto é, testando se seus extremos são, dois a dois, iguais ou adjacentes e isto pode ser feito em tempo constante.

Assim, K_e é um operador entre grafos que pode ser utilizado como uma transformação polinomial. Nas Seções 2.7 e 6.2 apresentamos dois usos do operador K_e neste contexto. Um, devido a Kou, Stockmeyer e Wong, mostrando que um certo problema é NP-difícil e o outro, mostrando que uma certa classe de grafos pode ser reconhecida em tempo polinomial.

Quando $G = K_e(H)$ dizemos que H é uma *raiz* de G , pelo operador clique de arestas. Assim, um grafo é clique de arestas se e somente se possui uma raiz.

Nem todo grafo é clique de arestas. Basta considerar o grafo K_2 , por exemplo.

Na Figura 2.2 temos dois grafos que são raízes do mesmo grafo clique de

arestas G . Este é o menor grafo que tem esta propriedade. Outro exemplo pode ser encontrado em [11].

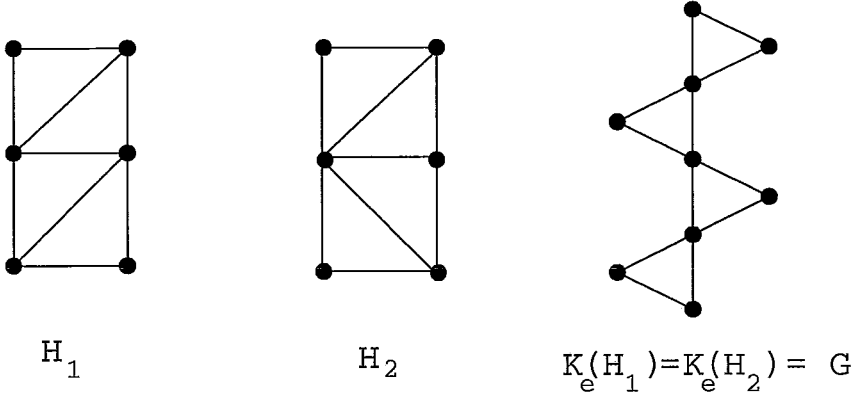


Figura 2.2: Grafos com o mesmo grafo clique de arestas.

Vejamos agora a aplicação do operador K_e em algumas classes triviais de grafos.

Em primeiro lugar, como é feito usualmente no estudo de operadores, $K_e(\emptyset) = \emptyset$. Decorre diretamente da definição que $K_e(P_n) = N_{n-1}$, onde $n \geq 1$, $K_e(C_3) = C_3$ e $K_e(C_n) = N_n$, se $n > 3$. Também temos que se G é um grafo com m arestas e sem triângulos induzidos, então $K_e(G) = N_m$.

Observe que como vértices isolados não são incidentes a nenhuma aresta, eles não influem na construção do grafo clique de arestas. Ou seja, se $G' = G \cup N_k$, então $K_e(G') = K_e(G)$.

Em relação ao grafo completo K_n , temos que $K_e(K_n)$ tem $\binom{n}{2}$ vértices e como todas as arestas de K_n têm seus extremos em uma mesma clique, os vértices de $K_e(K_n)$ são dois a dois adjacentes. Assim, $K_e(K_n) = K_{\binom{n}{2}}$.

Este fato ilustra o comportamento de K_e em relação às cliques de um grafo conforme veremos nas duas próximas seções.

2.2 Propriedade da Preservação de Cliques

Um conjunto de arestas com ambos os extremos em uma mesma clique em G corresponde a um conjunto de vértices dois a dois adjacentes em $K_e(G)$ e vice-versa. Assim, uma clique com pelos menos dois vértices em G dá origem a uma clique em $K_e(G)$. Por outro lado, uma clique maximal de $K_e(G)$ dá

origem a uma clique maximal de G . Temos, então, uma correspondência entre as cliques maximais de G e as de $K_e(G)$. Assim, ambos os grafos têm a mesma quantidade de cliques maximais, quando G não tem vértices isolados. Estas observações são formalizadas nos resultados a seguir.

No que segue, todos os grafos considerados são conexos e têm, pelo menos, dois vértices.

Seja S um conjunto de vértices de G com pelo menos dois elementos. Definimos $k_e(S)$ como o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em S . Assim, k_e é uma função que associa conjuntos de vértices de G a conjuntos de vértices de $K_e(G)$. Observe que para cada $S \subseteq V(G)$, $k_e(S) = V(K_e(G[S]))$.

Lema 2.2.1 *Se S é clique de G , então $k_e(S)$ é clique de $K_e(G)$. E, se $k_e(S)$ é clique de $K_e(G)$, então existe $S' \subseteq V(G)$ tal que S' é clique de G e $k_e(S') = k_e(S)$.*

Prova: Seja S uma clique de G . Por definição, existe n tal que $G[S] = K_n$. Assim, $K_e(G[S]) = K_{\binom{n}{2}}$, isto é, $V(K_e(G[S]))$ é uma clique de $K_e(G)$. Como $k_e(S) = V(K_e(G[S]))$, temos que $k_e(S)$ é uma clique de $K_e(G)$.

Suponha agora que $k_e(S)$ é clique de $K_e(G)$. Seja $S' \subseteq V(G)$ tal que para todo $u \in V(G)$, $u \in S'$ se e somente se existe $v \in V(G)$ tal que $uv \in k_e(S)$.

Vamos provar que S' é clique. Sejam $u_1, u_2 \in S'$, tais que $u_1 \neq u_2$. Logo, existem $v_1, v_2 \in V(G)$ tais que $u_1v_1, u_2v_2 \in k_e(S)$. Como $k_e(S)$ é clique de $K_e(G)$, os vértices u_1, v_1, u_2, v_2 são, dois a dois, iguais ou adjacentes em G . Portanto, u_1 e u_2 são adjacentes e S' é clique de G .

Resta provar que $k_e(S') = k_e(S)$. Se $uv \in k_e(S)$, então pela definição de S' temos que $u, v \in S'$. Como S' é clique, temos $uv \in k_e(S')$. Assim, $k_e(S) \subseteq k_e(S')$. Se $uv \in k_e(S')$, temos que $u, v \in S'$ e $uv \in E(G)$. Logo, existem $x, y \in V(G)$ tais que $ux \in k_e(S)$ e $vy \in k_e(S)$. Portanto, $u, v \in S$ e $uv \in k_e(S)$. Assim, $k_e(S') \subseteq k_e(S)$. ■

Lema 2.2.2 *S é clique maximal de G se e somente se $k_e(S)$ é clique maximal de $K_e(G)$.*

Prova: Resta provar a maximalidade.

(\Rightarrow) Seja S uma clique maximal de G e suponha que existe C uma clique de $K_e(G)$ que contenha propriamente $k_e(S)$. Seja uv um vértice de $C \setminus k_e(S)$.

Como $|S| \geq 2$, considere $x, y \in S$, onde $x \neq y$. Como S é clique, $xy \in E(G)$ e portanto, $xy \in k_e(S)$. Como C é clique e $k_e(S) \subset C$, temos que xy e uv são adjacentes em $K_e(G)$.

Assim, x, y, u e v estão em um mesmo triângulo ou tetraedro de G . Observe também que, como $uv \notin k_e(S)$, um dos vértices, digamos u não pertence a S .

Como x e y são vértices arbitrários de S , temos que $C' = S \cup \{u\}$ é uma clique de G que contém S propriamente, uma contradição.

(\Leftarrow) Suponha que $k_e(S)$ é uma clique maximal de G e que existe $C \subseteq V(G)$, tal que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ está contido propriamente em C . Seja v um vértice de $C \setminus S$.

Como C é clique, os vértices v, v_1, v_2, \dots, v_p são dois a dois adjacentes em G . Como $v \notin S$, $vv_1, vv_2, \dots, vv_p \notin k_e(S)$. Assim, em $K_e(G)$, temos que $\{vv_1, vv_2, \dots, vv_p\} \cup \{v_i v_j : 1 \leq i \neq j \leq p\} = C'$ é uma clique que contém $k_e(S)$ propriamente, contradizendo a maximalidade de $k_e(S)$. ■

Os Lemas 2.2.1 e 2.2.2 garantem que k_e é uma função que associa cliques maximais de G a cliques maximais de $K_e(G)$. Vamos agora mostrar que, neste caso, k_e é uma bijeção.

Lema 2.2.3 *Se S_1, S_2 são cliques maximais de G e $k_e(S_1) = k_e(S_2)$, então $S_1 = S_2$.*

Prova: Sejam S_1, S_2 cliques maximais de G tais que $k_e(S_1) = k_e(S_2)$. Considere $u \in S_1$.

Como $|S_1| \geq 2$, existe $v \neq u$, tal que $v \in S_1$. Como $uv \in E(G)$, temos que $uv \in k_e(S_1)$. Logo, $uv \in k_e(S_2)$ e temos $u, v \in S_2$. Assim, $u \in S_2$ e $S_1 \subseteq S_2$.

Analogamente, podemos provar que $S_2 \subseteq S_1$. ■

Lema 2.2.4 *Se S é uma clique maximal de $K_e(G)$, então existe uma clique maximal S' de G , tal que $k_e(S') = S$.*

Prova: Seja S uma clique maximal de $K_e(G)$. Para cada $s \in S$, existem v_i e v_j , vértices distintos de G , tais que $s = v_i v_j$ é uma aresta de G .

Seja $S' = \{v_i \in V(G) : \text{existe } v_j \in V(G) \text{ e } v_i v_j \in S\}$. Por construção, $k_e(S') = S$ e, pelo Lema 2.2.2, S' é clique maximal de G . ■

Finalmente, os lemas anteriores têm como consequência uma das principais propriedades do operador clique de arestas.

Teorema 2.2.1 (Propriedade da Preservação de Cliques) *Existe uma bijeção entre as cliques maximais de G e as de $K_e(G)$.*

Corolário 2.2.1 *Se G não tem vértices isolados, então $q(G) = q(K_e(G))$.*

Um fato que será utilizado posteriormente é que, como em um grafo há uma correspondência entre cliques e subgrafos completos temos, pelo Lema 2.2.1, que a uma família de subgrafos completos de G está associada uma família de cliques de $K_e(G)$.

2.3 Propriedade dos Números Triangulares

Além de estabelecer uma correspondência entre as cliques maximais de um grafo e as de seu grafo clique de arestas, a função k_e também estabelece uma relação entre os tamanhos das cliques.

Lembramos que um número da forma $\binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ é chamado de *número triangular*. Assim, os números triangulares são 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Lema 2.3.1 *Se S é uma clique de G e $|S| = p$, então $|k_e(S)| = \binom{p}{2}$.*

Prova: Basta observar que $G[S]$ tem $\binom{p}{2}$ arestas. ■

A função k_e também estabelece uma relação entre as interseções das cliques.

Lema 2.3.2 *Se S_1 e S_2 são cliques de G , então $k_e(S_1 \cap S_2) = k_e(S_1) \cap k_e(S_2)$.*

Prova: Sejam S_1 e S_2 cliques de G .

Se $e \in k_e(S_1 \cap S_2)$, existem u e v , vértices distintos de G , tais que $u, v \in S_1 \cap S_2$ e $e = uv \in E(G)$. Assim, $u, v \in S_1$ e $u, v \in S_2$. Como $e = uv$, temos que $e \in k_e(S_1)$ e $e \in k_e(S_2)$.

Se $e \in k_e(S_1) \cap k_e(S_2)$, existem u e v , vértices distintos de G , tais que $u, v \in S_1$, $u, v \in S_2$ e $e = uv \in E(G)$. Assim, $u, v \in S_1 \cap S_2$. Como $e = uv$, temos que $e \in k_e(S_1 \cap S_2)$. ■

Juntando as afirmações acima, temos outra propriedade fundamental do operador clique de arestas.

Teorema 2.3.1 (Propriedade dos Números Triangulares) *As cliques maximais e as interseções de cliques maximais em um grafo clique de arestas têm tamanho igual a um número triangular.*

Prova: Seja $G = K_e(H)$ um grafo clique de arestas.

Se S é uma clique maximal de G , pelo Lema 2.2.4, existe uma clique maximal S' de H com, digamos, p elementos, tal que $k_e(S') = S$. Assim, pelo Lema 2.3.1, S tem $\binom{p}{2}$ elementos.

Se $S \subseteq V(G)$ é tal que $S = M_1 \cap \dots \cap M_s$, onde M_1, \dots, M_s são cliques maximais de G , pelo Lema 2.2.4, existem M'_1, \dots, M'_s , cliques maximais de H , tais que $k_e(M'_i) = M_i, 1 \leq i \leq s$. Pelo Lema 2.3.2, temos $M_1 \cap \dots \cap M_s = k_e(M'_1) \cap \dots \cap k_e(M'_s) = k_e(M'_1 \cap \dots \cap M'_s)$. Como $M'_1 \cap \dots \cap M'_s$ é uma clique de H com, digamos, p elementos, pelo Lema 2.3.1, $S = k_e(M'_1 \cap \dots \cap M'_s)$ tem $\binom{p}{2}$ elementos. ■

Assim, se G tem uma clique maximal de tamanho p , então $K_e(G)$ tem uma clique maximal de tamanho $\binom{p}{2}$, e vice-versa. Conseqüentemente, as cliques maximais de um grafo clique de arestas têm tamanho igual a um número triangular, o que fornece uma condição necessária para que um grafo seja clique de arestas.

Dizemos que um grafo *satisfaz à Propriedade dos Números Triangulares* quando suas cliques maximais e interseções de cliques maximais têm tamanho igual a um número triangular.

Vamos agora exemplificar o uso desta condição aplicando-a diretamente a algumas classes triviais de grafos.

Corolário 2.3.1 *O grafo K_n é clique de arestas se e somente se n é um número triangular.*

Corolário 2.3.2 *A menos do grafo trivial, nenhuma árvore é grafo clique de arestas.*

Corolário 2.3.3 *Nenhum $C_n, n \geq 4$, é grafo clique de arestas.*

No entanto, satisfazer a Propriedade dos Números Triangulares não é suficiente para que um grafo seja um grafo clique de arestas. Na Figura 2.3 temos um exemplo de tal situação, dado em [11]. Este é o grafo com menor número de cliques maximais que é um contra-exemplo para a recíproca da Propriedade dos Números Triangulares.

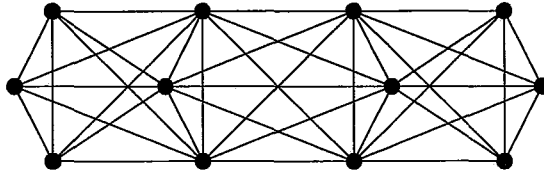


Figura 2.3: Grafo que não é clique de arestas de nenhum grafo.

No Capítulo 4, descrevemos uma classe de grafos para a qual a Propriedade dos Números Triangulares fornece uma condição necessária e suficiente para que um dado grafo, pertencente a esta classe, seja um grafo clique de arestas.

2.4 Grafos sem tetraedros

Um grafo G sem tetraedros tem $\omega(G) \leq 3$. Nas Figuras 1.1 e 2.1 temos exemplos de grafos nesta situação.

Nesta seção, mostramos que a Propriedade dos Números Triangulares não é suficiente para que grafos pertencentes a esta classe sejam grafos clique de arestas, e que a Conjectura 1.2.1 é verdadeira, neste caso.

Como G é tal que $\omega(G) \leq 3$, e G não tem vértices isolados, as cliques maximais de G têm 2 ou 3 vértices e, pela Propriedade dos Números Triangulares, as cliques maximais e as interseções de cliques maximais de $K_e(G)$ têm $\binom{2}{2} = 1$ ou $\binom{3}{2} = 3$ vértices. Como as cliques maximais de tamanho 1 são vértices isolados, a parte não trivial de $K_e(G)$ é formada por triângulos cujas interseções têm somente um vértice. Isto é, dois triângulos de $K_e(G)$ não possuem uma aresta em comum. O que implica que $K_e(G)$ também é sem tetraedros.

Na Figura 2.4, temos um grafo G que satisfaz a Propriedade dos Números Triangulares, não tem um tetraedro como subgrafo induzido, porém não é um grafo clique de arestas. De fato, se G tivesse uma raiz H , por definição, H teria 9 arestas e, pela Propriedade da Preservação de Cliques, 5 triângulos, o que é impossível.

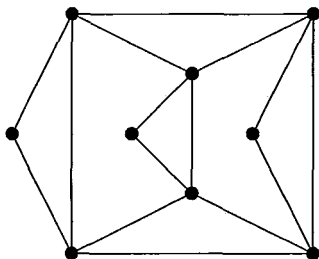


Figura 2.4: Grafo que também não é clique de arestas de nenhum grafo.

Finalmente, para concluir que a Conjectura 1.2.1 é verdadeira para grafos sem tetraedros, basta observar que como o grafo da Figura 1.2 possui triângulos com arestas em comum, ele não pode ser subgrafo de nenhum grafo clique de arestas sem tetraedros. Logo, pelo Teorema 1.2.2, temos o seguinte.

Teorema 2.4.1 *Se $\omega(G) \leq 3$, então $K_e(G)$ é grafo clique.*

Na Seção 6.3, abordaremos o caso em que $\omega(G) = 4$.

2.5 Caminhos e componentes

O grafo clique de arestas de um grafo conexo nem sempre é conexo. Basta considerar, por exemplo, o grafo P_3 . Nesta seção, caracterizamos os grafos G para os quais $K_e(G)$ é conexo. Consideramos, principalmente, uma relação existente entre certas seqüências de arestas de G e as seqüências de vértices associadas a elas em $K_e(G)$. Esta relação decorre diretamente do fato que duas arestas têm extremos em uma mesma clique de G se e somente se os vértices correspondentes são adjacentes em $K_e(G)$.

Lema 2.5.1 *Uma seqüência de arestas (e_1, e_2, \dots, e_k) é tal que $e_i e_{i+1}$, $1 \leq i < k$, têm extremos em uma mesma clique de G se e somente se (e_1, e_2, \dots, e_k) é um caminho em $K_e(G)$.*

Um *componente em arestas* de um grafo G é um subgrafo maximal (não necessariamente induzido) G_1 de G , tal que para cada par de arestas e, f de G_1 , existe uma seqüência de arestas e_1, \dots, e_k também de G_1 , onde $e_1 = e$, $e_k = f$ e e_i, e_{i+1} têm extremos em uma mesma clique de G . Um componente em arestas que consiste de um único vértice é chamado *trivial*. Dizemos que G é *conexo em arestas* quando tem no máximo um componente em arestas não trivial. Observe que o conjunto dos componentes em arestas não triviais de G formam uma partição das arestas de G .

O teorema abaixo caracteriza os grafos cujo grafo clique de arestas é conexo.

Teorema 2.5.1 *Um grafo G é conexo em arestas se e somente se $K_e(G)$ é conexo.*

Prova: Seja $H = K_e(G)$.

(\Rightarrow) Seja G um grafo conexo em arestas. Se G consiste somente de componentes triviais não há nada a ser provado. Caso contrário, considere o único componente em arestas não trivial G_1 de G , e desconsidere os triviais. Seja H_1 o subgrafo de H induzido pelo subconjunto de vértices de $V(H)$ correspondente às arestas de G_1 . Como G_1 é conexo em arestas, pelo Lema 2.5.1, para qualquer par de vértices e e f de H_1 , existe um caminho entre e e f em H . Assim, H_1 é conexo. Como $H = H_1$, H é conexo.

(\Leftarrow) Suponha que H é conexo e que G não é conexo em arestas. Sejam G_1 e G_2 dois componentes em arestas não triviais, distintos, de G . Sejam H_1 e H_2 os subgrafos de H induzidos pelos subconjuntos de $V(H)$ correspondentes às arestas de G_1 e G_2 , respectivamente. Temos que nenhum vértice de H_1 tem um adjacente em H que não pertence a H_1 pois, caso contrário, G_1 não seria um componente em arestas de G . O mesmo vale para H_2 . Assim, H é desconexo, uma contradição. Logo, G é conexo em arestas. ■

Como conseqüência deste teorema e do fato que componentes em arestas não triviais formam uma partição das arestas de G , temos que existe uma correspondência entre os componentes em arestas de G e os componentes conexos de $K_e(G)$, de forma que se G_1, \dots, G_t são componentes em arestas de G , então

$K_e(G_1), \dots, K_e(G_t)$ são os componentes conexos de $K_e(G)$, e vice-versa.

Teorema 2.5.2 G_1, \dots, G_t são os componentes em arestas não triviais de um grafo G se e somente se $K_e(G_1), \dots, K_e(G_t)$ são os componentes conexos de $K_e(G)$.

2.6 Operações e subgrafos

Nesta seção estudamos a relação do operador K_e com as operações \cap , \cup e $*$ sobre grafos e as relações \subseteq e \leq entre grafos. Alguns destes resultados podem ser utilizados como ferramentas na caracterização de grafos clique de arestas e outros dão informação sobre os grafos clique de arestas em termos de seus subgrafos ou subgrafos induzidos.

Teorema 2.6.1 $K_e(G \cap H) = K_e(G) \cap K_e(H)$.

Prova: Os grafos considerados têm o mesmo conjunto de vértices. De fato, e é um vértice de $K_e(G \cap H)$ se e somente se e é uma aresta de $G \cap H$ se e somente se e é uma aresta tanto de G quanto de H se e somente se e é um vértice tanto de $K_e(G)$ quanto de $K_e(H)$, isto é, e é um vértice de $K_e(G) \cap K_e(H)$.

O mesmo ocorre com o conjunto de arestas. De fato, ef é uma aresta de $K_e(G \cap H)$ se e somente se e e f são arestas cujos extremos estão em uma mesma clique de $G \cap H$ se e somente se os extremos de e e f estão em uma mesma clique de G que também é de H se e somente se ef é uma aresta tanto de $K_e(G)$ quanto de $K_e(H)$, ou seja, de $K_e(G) \cap K_e(H)$. ■

Teorema 2.6.2 $K_e(G \cup H) = K_e(G) \cup K_e(H)$.

Prova: Os grafos considerados têm o mesmo conjunto de vértices. De fato, e é um vértice de $K_e(G \cup H)$ se e somente se e é uma aresta de $G \cup H$ se e somente se e é uma aresta de G ou de H se e somente se e é um vértice de $K_e(G)$ ou de $K_e(H)$ se e somente se e é um vértice de $K_e(G) \cup K_e(H)$.

O mesmo ocorre com o conjunto de arestas. De fato, ef é uma aresta de $K_e(G \cup H)$ se e somente se e e f são arestas cujos extremos estão em uma mesma clique de $G \cup H$. Como $G \cap H = \emptyset$, isto só acontece se e somente se e

e e f têm extremos em uma mesma clique de G ou (exclusivo) em uma mesma clique de H . Isto acontece, se e somente se ef é uma aresta de $K_e(G)$ ou ef é uma aresta de $K_e(H)$, isto é, de $K_e(G) \cup K_e(H)$. ■

Decorre deste teorema que, no estudo da classe dos grafos clique de arestas, podemos considerar apenas grafos conexos, isto é, um grafo desconexo é clique de arestas se e somente se cada um dos seus componentes conexos é um grafo clique de arestas.

Nem sempre $K_e(G * H) = K_e(G) * K_e(H)$. De fato, tomando $G = K_2$ e $H = K_1$, temos que $K_e(G * H) = K_e(K_3) = K_3$ mas $K_e(G) * K_e(H) = K_1 * \emptyset = K_1$.

Teorema 2.6.3 *Se $G \subseteq H$, então $K_e(G) \subseteq K_e(H)$.*

Prova: Se e é um vértice de $K_e(G)$, temos que e é uma aresta de G . Portanto, e é uma aresta de H , ou seja, um vértice de $K_e(H)$.

Se ef é uma aresta de $K_e(G)$, temos que e e f são arestas cujos extremos estão em uma mesma clique de G . Logo, e e f são arestas cujos extremos estão em uma mesma clique de H , ou seja, ef é uma aresta de $K_e(H)$. ■

Teorema 2.6.4 *Se $G \leq H$, então $K_e(G) \leq K_e(H)$.*

Prova: Resta provar apenas que se e e f são vértices não adjacentes em $K_e(G)$, então também não o são em $K_e(H)$.

Sejam e e f vértices de $K_e(G)$ tais que $ef \notin E(K_e(G))$. Portanto, os extremos de e e f não estão em uma mesma clique de G e como $G \leq H$, não podem estar em uma mesma clique de H . Assim, e e f são vértices não adjacentes de $K_e(H)$. ■

Teorema 2.6.5 *$G \leq K_e(G * \{x\})$.*

Prova: Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Considere o conjunto $S = \{v_1x, \dots, v_nx\}$ de vértices de $K_e(G * \{x\})$.

É claro que existe uma correspondência entre S e $V(G)$. Além disso, $v_i x$ e $v_j x$ são adjacentes em $K_e(G * \{x\})$ se e somente se as arestas $v_i x$ e $v_j x$ têm

extremos em uma mesma clique de G se e somente se, $v_i x$ e $v_j x$ estão em um mesmo triângulo de G se e somente se $v_i v_j$ é uma aresta de G . Assim, o subgrafo induzido por S em $K_e(G * \{x\})$ é G . ■

Teorema 2.6.6 $K_e(G) \leq K_e(G * \{x\})$.

Prova: Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Considere o conjunto $S = E(G)$ de vértices de $K_e(G * \{x\})$.

É claro que existe uma correspondência entre S e $V(K_e(G))$. Além disso, $e, f \in S$ são adjacentes em $K_e(G * \{x\})$ se e somente se os extremos das arestas e e f estão em uma mesma clique de G se e somente se, e e f são vértices adjacentes em $K_e(G)$. Assim, o subgrafo induzido por $S = E(G)$ em $K_e(G * \{x\})$ é $K_e(G)$. ■

Conseqüentemente, para todo grafo G , o grafo $K_e(G * \{x\})$ possui tanto uma cópia de G quanto uma de $K_e(G)$ e estas cópias são disjuntas. De uma maneira geral, o grafo $K_e(G * N_k)$ possui k cópias de G e uma cópia de $K_e(G)$ e estas cópias são disjuntas. Na figura abaixo temos um exemplo desta situação, em que $G = C_5$ e $k = 2$.

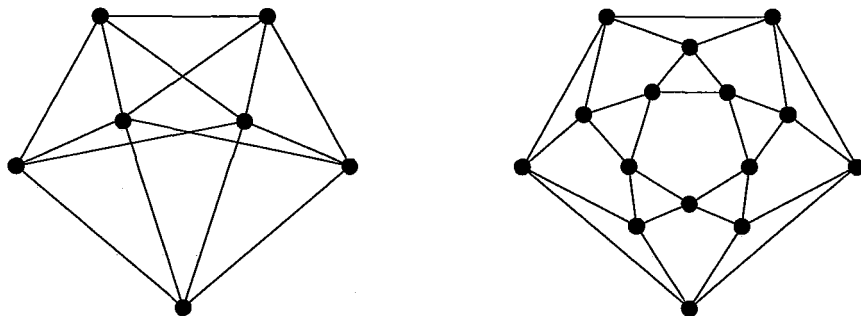


Figura 2.5: O grafo $C_5 * N_2$ e seu clique de arestas.

2.7 Número de interseção

É sabido que todo grafo é grafo de interseção [19]. O *número de interseção* de um grafo G , denotado $i(G)$, é a cardinalidade de um menor conjunto S , tal que G tem um modelo de interseção formado por subconjuntos de S .

O seguinte resultado foi estabelecido por vários autores. Temos a seguir a prova encontrada em [24].

Teorema 2.7.1 *Para todo grafo sem vértices isolados G , $i(G) = \theta_e(G)$.*

Prova:

Seja $\mathcal{F} = \{S(v) : v \in V\}$ um modelo de interseção de G para o qual $|S|$ seja mínimo, isto é, $S = \{1, 2, \dots, i(G)\}$. Seja $V_j = \{v : j \in S(v)\}$, para todo $j \in S$. Claramente, $V_1, V_2, \dots, V_{i(G)}$ cobrem as arestas de G e são cliques. Considere C_i uma clique maximal que contém V_i , $1 \leq i \leq i(G)$. Como $C_1, C_2, \dots, C_{i(G)}$ é uma cobertura de arestas por cliques maximais, temos que $\theta_e(G) \leq i(G)$.

Seja $\{C_1, \dots, C_{\theta_e(G)}\}$ uma cobertura mínima de arestas por cliques maximais de G . Seja $S(v) = \{j : v \in C_j\}$. Como G não tem vértices isolados, $\{S(v) : v \in V\}$ é um modelo de interseção de G e, portanto $i(G) \leq \theta_e(G)$. ■

Como consequência da Propriedade da Preservação de Cliques, para todo grafo sem vértices isolados G , $\theta_e(G) = \theta(K_e(G))$. Logo, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.7.1 *Para todo grafo sem vértices isolados G , $i(G) = \theta(K_e(G))$.*

Kou, Stockmeyer e Wong, em 1978 [17], mostraram que o problema de determinar $i(G)$ é NP-difícil, usando esta relação e o fato que determinar $\theta(G)$ para um grafo arbitrário G é NP-difícil.

Capítulo 3

Dinâmica

A *dinâmica de grafos* é o estudo da aplicação iterada dos operadores à classe de todos os grafos. A aplicação iterada de um operador é definida recursivamente e, em particular, para o operador K_e por $K_e^r(G) = K_e(K_e^{r-1}(G))$ com $K_e^1(G) = K_e(G)$ e $K_e^0(G) = G$.

No livro *Graph Dynamics*, Prisner [22] apresenta uma coletânea dos operadores em grafos e suas propriedades, tentando dar um tratamento uniforme aos resultados e terminologia no assunto. Além de apresentar resultados de sua própria autoria, ele faz um levantamento de todos os resultados que até então haviam sido publicados, tanto referentes a operadores específicos quanto a princípios gerais que podem ser aplicados a família de operadores.

Em [22] o operador K_e é denotado $\Phi_{2,4}$ pois é um dos elementos da família dos operadores $\Phi_{k,m}$, onde dado G , o grafo $\Phi_{k,m}(G)$ tem como vértices todos os subgrafos completos com k elementos de G e dois tais subgrafos são adjacentes em $\Phi_{k,m}(G)$ se são subgrafos de um mesmo subgrafo completo de G com no máximo m vértices.

Albertson e Collins [2] estudaram a aplicação iterada do operador clique de arestas no contexto dos grafos bons e cobons. Provaram que existe um inteiro m tal que $K_e^r(G)$ é tanto bom quanto cobom, para todo $r \geq m$. Em [3], estes resultados são tratados com algumas melhorias.

Neste capítulo, apresentamos um estudo da dinâmica do operador clique de arestas, usando a terminologia de [22]. Cada seção contém as definições dos problemas a serem tratados e as soluções, referentes ao operador clique de arestas. Como veremos, as questões relacionadas à dinâmica deste operador,

na maioria dos casos, têm solução simples.

3.1 Grafos fixos e periódicos

Dizemos que um grafo G é *fixo* se $K_e(G) = G$, isto é, se G é um ponto fixo de K_e .

Quanto ao problema da caracterização de grafos fixos, temos que $K_e(K_3) = K_3$ e, pela Propriedade dos Números Triangulares, este é o único grafo conexo fixo pelo operador clique de arestas. De um modo geral, os únicos grafos fixos pelo operador clique de arestas são os grafos em que cada um dos seus componentes conexos é um triângulo.

A periodicidade é a caracterização dos grafos G tais que $K_e^r(G) = G$ para algum natural r . Tais grafos são chamados de *periódicos* e o menor tal r é o *período* de G .

É claro que os grafos fixos têm período 1. E, como as cliques de $K_e(G)$ e as de G tem tamanhos relacionados pela Propriedade dos Números Triangulares, os únicos grafos periódicos são os fixos.

3.2 Maior clique e mortalidade

Mortalidade é a caracterização dos grafos G tais que $K_e^r(G) = \emptyset$, para algum r .

Já vimos que se $\omega(G) = 1$, isto é, se $G = N_k$, então $K_e(G) = \emptyset$. Por outro lado, se $\omega(G) = 2$, então $K_e(G) = N_k$, com $k > 0$, isto é, G é formado por k componentes em arestas que são arestas e, possivelmente alguns vértices isolados. Logo, $K_e^2(G) = \emptyset$. Assim, se $\omega(G) \leq 2$, então $K_e^r(G) = \emptyset$, para todo $r \geq 2$. De uma forma geral,

$$\omega(K_e(G)) = \binom{\omega(G)}{2}$$

pois, se C é uma clique de G com $\omega(G)$ elementos, então pelas Propriedades da Preservação de Cliques e dos Números Triangulares, em $K_e(G)$ a clique correspondente a C tem $\binom{\omega(G)}{2}$ elementos e, não existe em $K_e(G)$ uma clique com mais do que $\binom{\omega(G)}{2}$ vértices pois, caso contrário, a clique correspondente

a ela em G teria mais do que $\omega(G)$ elementos. Assim,

$$\omega(K_e^r(G)) = \binom{\omega(K_e^{r-1}(G))}{2}.$$

Conseqüentemente, no caso em que $\omega(G) \geq 3$, o grafo $K_e^r(G)$ não será o grafo nulo, para nenhum r .

3.3 Número de cliques maximais

Um parâmetro que é quase um invariante pela aplicação de K_e é o número de cliques maximais.

De fato, dado um grafo G sem vértices isolados, pela Propriedade da Preservação de Cliques $q(G) = q(K_e(G))$. Se G tem p vértices isolados, então $q(G) = q(G' \cup N_p) = q(G') + p$, e, neste caso, $q(G) = q(K_e(G)) + p$. Se G tem p vértices isolados e t componentes em arestas que são arestas, então $K_e(G) = G' \cup N_t$. Assim, $q(K_e(G)) = q(G) - p$ e $q(K_e^2(G)) = q(K_e(G)) - t$. Portanto, $q(K_e^2(G)) = q(K_e(G)) - t - p$. Pela Propriedade da Preservação de Cliques, como $K_e^r(G)$ não terá vértices isolados quando $r \geq 3$, temos que $q(K_e^r(G)) = q(K_e^{r-1}(G))$.

3.4 Conexidade

É o estudo da relação conexo/desconexo entre um grafo e seu grafo clique de arestas iterado.

Vamos considerar somente grafos G tais que nem G nem $K_e(G)$ têm vértices isolados.

Pelo Teorema 2.6.2, se G é desconexo, então $K_e(G)$ é desconexo e, portanto, $K_e^r(G)$ é desconexo, para todo r .

Se G é conexo mas tem mais de um componente em arestas, então pelo Teorema 2.5.2, $K_e(G)$ é desconexo e, neste caso, $K_e^r(G)$ é desconexo, para $r \geq 1$.

Por outro lado, se G tem apenas um componente em arestas, $K_e(G)$ também será conexo e analogamente, pode ter um ou mais componentes em arestas. Se tem mais de um, $K_e^2(G)$ é desconexo e $K_e^r(G)$ é desconexo, para

$r \geq 2$. Caso contrário, $K_e^2(G)$ é conexo e não tem interseções de cliques de tamanho 1 ou 2. O teorema a seguir trata deste caso.

Teorema 3.4.1 *Se G não tem cliques maximais e nem interseções de cliques maximais de tamanho menor do que três, então $G \leq K_e(G)$.*

Prova: Sejam C_1, \dots, C_q as cliques maximais de G e C'_1, \dots, C'_q as cliques maximais correspondentes de $K_e(G)$.

Particione $V(G)$ em, no máximo, $2^q - 1$ conjuntos, definindo, para todo subconjunto não vazio X de $\{1, 2, \dots, q\}$, o conjunto $C(X)$ como o conjunto dos vértices de G que estão exatamente nas cliques maximais de G cujos índices estão em X .

De forma análoga, particione $V(K_e(G))$ nos conjuntos $C'(X)$.

Os seguintes fatos são verdadeiros para todos $X, Y \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$ e decorrem imediatamente da definição:

Fato 1: $C(X) = \emptyset$ se e somente se $C'(X) = \emptyset$.

Fato 2: $|C(X)| \leq |C'(X)|$

Fato 3: Se $X \neq Y$, $u \in C(X)$ e $v \in C(Y)$, então $uv \in E(G)$ se e somente se para todos $x \in C(X)$ e $y \in C(Y)$, $xy \in E(G)$.

Pelo Fato 2, para cada $X \subseteq \{1, 2, \dots, q\}$, escolha $|C(X)|$ elementos em $C'(X)$, para corresponder aos vértices de $C(X)$.

Vamos agora mostrar que o subgrafo induzido em $K_e(G)$ pelos vértices escolhidos acima é G . De fato:

Sejam u e v vértices de G e u' e v' seus correspondentes em $K_e(G)$. Considere $u \in C(X)$, $v \in C(Y)$. Conseqüentemente, $u' \in C'(X)$ e $v' \in C'(Y)$.

Se $uv \in E(G)$, então existe pelo menos uma clique C_i de G que contém tanto u quanto v e, portanto, $i \in X \cap Y$. Em $K_e(G)$, a clique C'_i contém $C'(X)$ e $C'(Y)$. Logo, u' e v' pertencem a C'_i e $u'v' \in E(K_e(G))$.

Se $uv \notin E(G)$, então não existe uma clique em G que contém tanto u quanto v e, portanto, $X \cap Y = \emptyset$. Assim, se $u'v' \in E(K_e(G))$, existiria pelo menos uma clique C'_i de $K_e(G)$ que conteria tanto u' quanto v' e, portanto, $i \in X \cap Y$, uma contradição. ■

Podemos também mostrar que, sob as hipóteses do teorema, todos os

vértices de $K_e(G)$ ou estão na cópia de G ou são adjacentes a algum vértice da cópia de G . De fato, se e é um vértice de $K_e(G)$, então existe X tal que $e \in C'(X)$. Logo, os extremos de e pertencem a $C(X)$ e, portanto, $C(X) \neq \emptyset$. Assim, existe um vértice de $C'(X)$ na cópia de G . Como $C'(X)$ é clique, e está na cópia de G ou é adjacente a um vértice na cópia de G .

Aplicando os resultados acima ao grafo $K_e^2(G)$, temos que $K_e^2(G) \leq K_e^3(G)$, e $K_e^3(G)$ é conexo. Indutivamente, temos que $K_e^r(G)$ é conexo, para todo r .

3.5 Diâmetro

Para vários operadores ϕ , em grafos, é conhecido que, para um grafo conexo G , o grafo $\phi(G)$ é conexo com diâmetro entre $diam(G) - 1$ e $diam(G) + 1$ [23].

Nesta seção, mostramos que o diâmetro de um grafo clique de arestas não tem este comportamento.

Como já foi observado na Seção 3.4, o grafo clique de arestas de um grafo conexo pode não ser conexo.

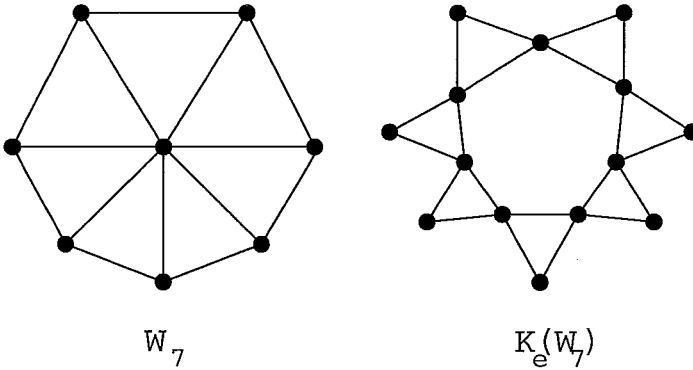


Figura 3.1: Grafo e seu grafo clique de arestas.

Mostramos agora, uma família de grafos em que $diam(G) = 2$ mas $diam(K_e(G)) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, onde n é um número arbitrário. Na Figura 3.1, temos um exemplar desta família com $n = 7$, isto é, $diam(G) = 2$ e $diam(K_e(G)) = 4$. Em geral, dado n , $n \geq 4$, basta considerar o grafo $W_n = C_n * K_1$, chamado *roda com n raios*. Este exemplo mostra que o diâmetro de um grafo clique de arestas pode ser arbitrariamente grande comparado ao diâmetro de uma de suas raízes.

Como exemplo em que o diâmetro se mantém sob a aplicação do operador

K_e , considere a família dos grafos completos. De fato, basta observar que $diam(K_n) = 1$, para todo $n \geq 2$, e o clique de arestas de um grafo completo também é completo.

De uma maneira geral, o comportamento do diâmetro de um grafo em relação ao operador clique de arestas depende da estrutura do grafo.

Se o grafo G é desconexo, seu diâmetro é infinito mas, se $G = H \cup N_k$ onde H é um grafo conexo, $K_e(G) = K_e(H)$ e o diâmetro de $K_e(G)$ é finito. Porém, se G tiver mais de um componente conexo não trivial, $K_e(G)$ tem diâmetro infinito.

Se o grafo G for conexo, mas tiver um só vértice, $K_e(G) = \emptyset$. Se G tiver exatamente dois vértices, $G = K_2$ e $K_e(G) = K_1$. Assim, $diam(G) = 1$ e $diam(K_e(G)) = 0$. Este é o único caso de grafo conexo em que o diâmetro diminui. De fato, o teorema a seguir mostra que o diâmetro de um grafo clique de arestas com um número suficiente de vértices não é menor que o diâmetro do grafo original.

Teorema 3.5.1 ([4]) *Se G é um grafo conexo com pelo menos três vértices, então $diam(K_e(G)) \geq diam(G)$.*

Prova: Considere que $diam(G) = d$.

Se $K_e(G)$ é desconexo, então $diam(K_e(G))$ é maior que o de G , dado que é infinito.

Se $d = 1$, então G é um grafo completo e $K_e(G)$ também é um grafo completo. Assim, $diam(K_e(G)) = 1$.

Quando $d > 1$ e $K_e(G)$ é conexo, suponha por absurdo que $diam(K_e(G)) < d$. Sejam u e v dois vértices quaisquer de G . Considere P um caminho de comprimento mínimo entre u e v em G . Se $|P| = 1$, então a distância entre u e v em G é 1 e, portanto, menor que d . Se $|P| > 1$, seja e a primeira e f a última aresta de P . Em $K_e(G)$, e e f são vértices. Como $K_e(G)$ é conexo, existe um caminho de comprimento mínimo entre e e f em $K_e(G)$. Seja $e = u_0v_0, u_1v_1, \dots, u_kv_k = f$ este caminho. Como $diam(K_e(G)) < d$, temos que $k < d$. Pelo Lema 2.5.1, em G , $u_0v_0, u_1v_1, \dots, u_kv_k$ são arestas com a propriedade que os vértices $u_i, v_i, u_{i+1}, v_{i+1}$ são iguais ou adjacentes,

$0 \leq i < k$. Logo $u = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, v_k = v$, é uma seqüência de vértices de forma que u_i e u_{i+1} ou são iguais ou são adjacentes, $0 \leq i < k$. Logo, existe em G um caminho de u a v de comprimento menor que d . Assim, a distância entre qualquer par de vértices de G é menor que d , e portanto $\text{diam}(G) < d$, uma contradição. ■

Capítulo 4

Classes de Grafos

Neste capítulo, estudamos a aplicação do operador clique de arestas sobre algumas classes de grafos. Alguns problemas surgem naturalmente quando consideramos uma subclasse \mathcal{C} da classe de todos os grafos \mathcal{G} e um operador ϕ . Dentre estes, neste trabalho tratamos dos problemas de caracterização das classes $K_e(\mathcal{C}) = \{K_e(G) : G \in \mathcal{C}\}$, dos grafos clique de arestas dos grafos de \mathcal{C} ; $K_e^{-1}(\mathcal{C}) = \{G \in \mathcal{G} : K_e(G) \in \mathcal{C}\}$, dos grafos cujos grafos clique de arestas pertencem a \mathcal{C} ; e da classe $K_e(\mathcal{G}) \cap \mathcal{C}$, dos grafos de \mathcal{C} que são clique de arestas. Nenhum resultado relativo a estes problemas era, até então, conhecido.

Outro problema que será tratado é o de determinar se a classe \mathcal{C} é fechada sob o operador K_e , ou seja, se $K_e(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}$. Neste caso, dizemos que a classe é *clique-de-arestas-fechada*. Algumas classes clique-de-arestas-fechadas já eram conhecidas e, neste capítulo, apresentamos outros exemplos deste tipo de classe.

Um problema que naturalmente se coloca quando \mathcal{C} é uma classe fechada é o de determinar se \mathcal{C} é uma *classe fixa*, ou seja, se $K_e(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. No caso das classes aqui consideradas, este problema tem solução trivial. De fato, como o grafo completo com dois vértices não é grafo clique de arestas de nenhum grafo, temos que qualquer classe de grafos que possua o grafo K_2 como elemento, não é fixa sob o operador K_e . Como K_2 é um grafo em todas as classes consideradas neste capítulo, nenhuma delas é fixa.

Na seção a seguir revisamos a literatura, de forma a compilar as classes de grafos fechadas sob o operador K_e . Uma revisão mais detalhada pode ser encontrada em [3].

As seções seguintes são destinadas às classes de grafos estrelados, estrelados de limiar, partilhados e de limiar, com um estudo dos problemas de caracterização relacionados à aplicação do operador K_e em cada uma delas. As relações de inclusão entre estas classes de grafos são ilustradas no diagrama a seguir.

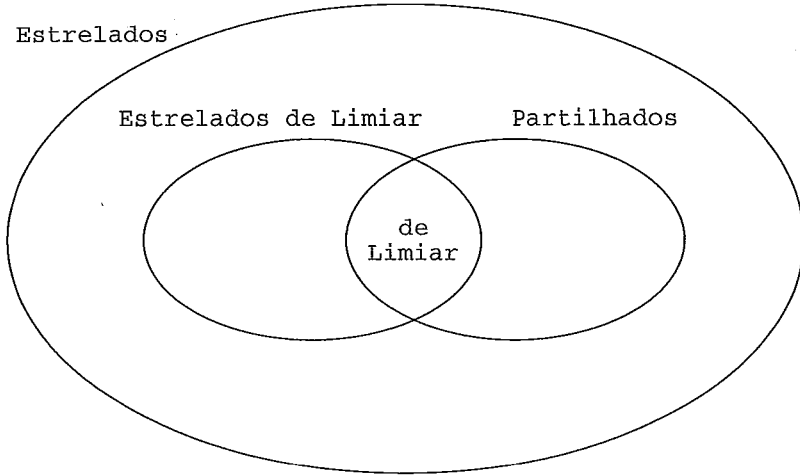


Figura 4.1: Diagrama de inclusão das classes de grafos.

A classe dos grafos estrelados (*starlike graphs*) é considerada na Seção 4.2, onde caracterizamos os grafos cujos grafos clique de arestas são estrelados, provamos que esta classe é clique-de-arestas-fechada e mostramos que, neste caso, as outras duas classes associadas aos problemas de caracterização são iguais. A Seção 4.3 trata da classe dos grafos estrelados de limiar (*starlike-threshold graphs*), onde também caracterizamos os grafos cujos grafos clique de arestas são estrelados de limiar, provamos que esta classe é clique-de-arestas-fechada, mostramos que, neste caso, as outras duas classes também são iguais e provamos que a Propriedade dos Números Triangulares é suficiente para que um grafo estrelado de limiar seja clique de arestas. Finalmente, na última seção, tratamos da classe dos grafos partilhados (*split graphs*) e da classe dos grafos de limiar (*threshold graphs*). Nestes casos, os grafos clique de arestas que estão em cada classe são os mesmos e têm uma estrutura bastante simples. Os grafos cujos grafos cliques de arestas estão em alguma destas classes também são os mesmos e também são bastante simples. Além disso, nenhuma delas é clique-de-arestas-fechada.

4.1 Classes clique-de-arestas-fechadas

O primeiro exemplo de classe de grafos clique-de-arestas-fechada foi dado por Albertson e Collins, no artigo pioneiro sobre o operador K_e [2]. Posteriormente outros resultados deste tipo foram obtidos por Raychaudhuri [24, 25] e por Chartrand et al. [11].

Nesta seção revisamos estes resultados. Uma revisão mais detalhada pode ser encontrada em [3].

Grafos bons

Baseados no fato que $\binom{\omega(G)}{2} = \omega(K_e(G)) \leq \chi(K_e(G)) \leq \binom{\chi(G)}{2}$, Albertson e Collins [2] provaram que a classe dos grafos bons é clique-de-arestas-fechada.

Grafos planares

Um grafo G é *planar* se pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas.

A classe dos grafos planares não é clique-de-arestas-fechada. Porém Albertson e Collins [2] provaram que, se G é planar e $\omega(G) \leq 3$, então $K_e(G)$ é planar.

Grafos cordais

Um grafo G é *cordal* se todo ciclo em G com pelo menos quatro vértices tem uma corda.

Existem três provas de que a classe dos grafos cordais é clique-de-arestas-fechada.

A primeira, de Albertson e Collins [2], é baseada no fato de que todo grafo cordal que não é completo tem um corte clique.

A segunda prova é de Raychaudhuri [24], e é baseada no esquema de eliminação perfeita de um grafo cordal G , que produz diretamente um esquema de eliminação perfeita no grafo $K_e(G)$, dado pelas arestas de G .

A terceira, também de Raychaudhuri [25], é baseada no fato de que os grafos cordais são grafos de interseção Helly e é consequência de um teorema geral descrito posteriormente, nesta seção.

Grafos fortemente cordais

Um grafo G é *fortemente cordal* se existe um esquema de eliminação forte de G , onde um *esquema de eliminação forte* de um grafo G é uma ordem $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de $V(G)$, tal que se $v_i < v_j$ e $v_k < v_l$ em σ e $v_k, v_l \in N[v_i]$ e $v_k \in N[v_j]$, então $v_l \in N[v_j]$.

Um grafo é fortemente cordal se e somente se existe uma permutação das linhas e colunas de sua matriz de incidência clique por vértice, que não contém a submatriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Raychaudhuri [24], usando a caracterização acima, provou que a classe dos grafos fortemente cordais é clique-de-arestas-fechada.

Grafos de intervalo

Um grafo G é *de intervalo* se é o grafo de interseção de uma família de intervalos sobre a reta real.

O fato que a classe dos grafos de intervalo é clique-de-arestas-fechada também segue do teorema geral sobre grafos de interseção Helly.

Independentemente, este resultado também foi provado por Chartrand et al.[11], pela construção do modelo de interseção do grafo.

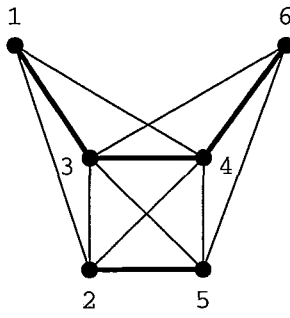
Grafos de indiferença

Um grafo G é *de indiferença* se G é o grafo de interseção de uma família de intervalos de comprimento unitário sobre a reta real. Decorre da definição que todo grafo de indiferença é grafo de intervalo. Roberts provou que um grafo de intervalo é de indiferença se e somente se não possui $K_{1,3}$.

A classe dos grafos de indiferença não é fechada sob o operador clique de arestas. Na Figura 4.2 temos um grafo de indiferença G com $\omega(G) = 4$. Este grafo tem exatamente três cliques maximais, a saber: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ e $\{3, 4, 5, 6\}$. Observamos que as arestas 34, 13, 25 e 46 formam um $K_{1,3}$ em $K_e(G)$.

Porém, temos que:

Teorema 4.1.1 ([3]) *Se G é de indiferença e $\omega(G) \leq 3$, então $K_e(G)$ é de indiferença e $\omega(K_e(G)) \leq 3$.*



G

Figura 4.2: Grafo de indiferença com grafo clique de arestas não de indiferença.

Grafos linha

Dado um grafo G , o *grafo linha* de G , denotado $L(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a E e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $L(G)$ se e somente se as arestas correspondentes em G têm um extremo em comum. Um grafo G é *grafo linha* se existe um grafo H tal que $G = L(H)$.

São conhecidas duas provas de que a classe dos grafos linha é clique-de-arestas-fechada: a de Chartrand et al. [11] e a de Raychaudhuri [25], ambas de 1991. A primeira faz uso de um operador chamado *STP* enquanto que a segunda constrói o modelo de linha para o grafo $K_e(G)$. Ambas exibem o grafo H tal que $L(H) = K_e(G)$, quando G é um grafo linha.

Grafos de interseção Helly

Suponha que G é um grafo de interseção com modelo de interseção $\mathcal{S} = \{S(v_1), \dots, S(v_n)\}$, tal que $\mathcal{S} \subseteq D$, onde D é uma família onde todos os elementos possuem uma estrutura especificada. Por exemplo, D pode ser a família de todos os intervalos da reta real, ou ainda, todas as cliques de um grafo. Denotamos $S(xy) = S(x) \cap S(y)$ quando $S(x) \cap S(y) \neq \emptyset$, isto é, quando xy for uma aresta de G . Considere $\mathcal{S}' = \{S(xy) : xy \in E(G)\}$.

Teorema 4.1.2 ([25]) *Seja G um grafo de interseção. Se existe um modelo de interseção $\mathcal{S} = \{S(v) : v \in V\}$ de G com $\mathcal{S} \subseteq D$, satisfazendo*

- (i) $S(xy) \in D$, para toda $xy \in E(G)$;
- (ii) \mathcal{S} satisfaz a propriedade Helly;

então \mathcal{S}' é um modelo de interseção de $K_e(G)$. Isto é, $K_e(G)$ é um grafo de interseção de conjuntos pertencentes a D .

Usando o Teorema 4.1.2 podemos provar que várias classes de grafos de interseção são clique-de-arestas-fechadas, somente provando que elas satisfazem às condições (i) e (ii). Tal abordagem foi utilizada por Raychaudhuri em [25], para mostrar que a classe dos grafos cordais e a classe dos grafos com *boxicity* n são clique-de-arestas-fechadas, onde a *boxicity* de um grafo G é a dimensão do menor espaço euclidiano onde G pode ser representado como grafo de interseção de retângulos generalizados com todos os lados paralelos aos eixos coordenados. Um grafo é de intervalo se e somente se sua *boxicity* é 0 ou 1.

Outras classes de grafos nas quais o Teorema 4.1.2 também pode ser aplicado são as classes dos grafos de caminho: UV, DV e RDV. Onde um grafo é UV se é grafo de interseção de uma família de caminhos em uma árvore, um grafo é DV se é grafo de interseção de uma família de caminhos direcionados em uma árvore direcionada, enquanto que um grafo é RDV se é grafo de interseção de uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada.

Pode-se provar facilmente que qualquer família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly e, interseção de caminhos em árvore também é um caminho. Assim, temos que as classes de grafos de caminho também são clique-de-arestas-fechadas.

Nas seções seguintes temos mais dois exemplos de classes de grafos que são clique-de-arestas-fechadas.

4.2 Grafos estrelados

Nesta seção, estudamos os problemas de caracterização relacionados a classe dos grafos estrelados e a aplicação do operador clique de arestas.

Um grafo G é *estrelado* se existe uma partição C, D_1, \dots, D_s dos seus vértices, tal que C é uma clique maximal e, para todo $u \in D_i, v \in D_j$, com $i \neq j$ temos que $uv \notin E(G)$, enquanto que se $i = j$, então $N[u] = N[v]$. Neste caso, C, D_1, \dots, D_s é chamada uma *partição estrelada* de G .

Segue da definição que cada D_i é uma clique contida em exatamente uma

clique maximal C_i , e $D_i = C_i \setminus C$. Segue também que D_i é o conjunto dos vértices simpliciais de C_i .

Os grafos estrelados foram introduzidos por Gustedt [15] como os grafos de interseção de subárvores de uma estrela. Uma caracterização por subgrafos proibidos para esta classe de grafos é dada em [7, 10].

A seguinte classe de grafos fornece a caracterização da imagem inversa dos grafos estrelados, pelo operador K_e .

Seja G um grafo e G_1, \dots, G_t seus componentes em arestas, $t \geq 1$. Dizemos que G é um *grafo estrelado generalizado* quando um dos componentes, digamos G_1 , é estrelado, enquanto G_2, \dots, G_t são grafos completos.

Teorema 4.2.1 *Seja $H = K_e(G)$. Então G é um grafo estrelado generalizado se e somente se H é um grafo estrelado.*

Prova: Seja $H = K_e(G)$.

(\Rightarrow) Seja G um grafo estrelado generalizado e G_1, \dots, G_t seus componentes em arestas, $t \geq 1$, onde G_1 é um grafo estrelado e G_2, \dots, G_t são grafos completos. Sem perda de generalidade assumamos que G não tem vértices isolados. Seja C, D_1, \dots, D_s uma partição estrelada de G_1 , e C, C_1, \dots, C_s suas cliques maximais correspondentes. Pelo Teorema 2.5.2, considere $H_1 = K_e(G_1)$. Pela Propriedade da Preservação de Cliques, H_1 tem $s + 1$ cliques maximais C', C'_1, \dots, C'_s , e os vértices de C'_i são as arestas de G_1 que têm ambos os extremos em C_i , $1 \leq i \leq s$. Similarmente para C' . Defina $D'_i = C'_i \setminus C'$. Vamos mostrar que C', D'_1, \dots, D'_s é uma partição estrelada de H_1 .

Observe que os vértices de D'_i são as arestas de G_1 que possuem ao menos um extremo em D_i .

A seguir, vamos mostrar que C', D'_1, \dots, D'_s é uma partição de $V(H_1)$. Considere as interseções destes conjuntos. Claramente, $C' \cap D'_i = \emptyset$, por definição. Suponha que $D'_i \cap D'_j \neq \emptyset$, onde $i \neq j$, e seja $e \in V(H_1)$ um vértice desta interseção. Pela observação acima, e é uma aresta de G_1 tendo ao menos um extremo em D_i e ao menos um extremo em D_j . A existência de uma tal aresta contradiz o fato de C, D_1, \dots, D_s ser uma partição estrelada de G_1 . Conseqüentemente, C', D'_1, \dots, D'_s é realmente uma partição de $V(H_1)$.

Resta mostrar que a partição é estrelada. Seja $e \in D'_i$ e $f \in D'_j$. Então e é uma aresta de G_1 com ao menos um extremo em D_i , enquanto f tem ao menos um extremo em D_j . Se $i \neq j$, como G_1 é estrelado, não existe clique de G_1 contendo os extremos de ambas as arestas e e f . Deste modo o par ef não é uma aresta de H_1 . Agora, se $i = j$, considere $z \in N_{H_1}[e]$. Se $z \in C'_i$, então $z \in N_{H_1}[f]$. Quando $z \notin C'_i$, como $ez \in E(H_1)$, existe C'_k , tal que $e, z \in C'_k$. Claramente, $i \neq k$. Deste modo, $e \in C'_i \cap C'_k$. Como $e \notin C'$, segue que $e \in D'_i \cap D'_k$, contradizendo o fato de C', D'_1, \dots, D'_s ser uma partição. Deste modo o caso $z \notin C'_i$ não ocorre, o que implica que $N_{H_1}[e] \subseteq N_{H_1}[f]$. De maneira análoga, conclui-se que $N_{H_1}[e] \subseteq N_{H_1}[f]$. Conseqüentemente, $N_{H_1}[e] = N_{H_1}[f]$ e, por definição, H_1 é um grafo estrelado com partição C', D'_1, \dots, D'_s .

Finalmente, considere os outros componentes em arestas de G . Como G_2, \dots, G_t são componentes em arestas de G , pelo Teorema 2.5.2, temos que $H_i = K_e(G_i)$ e H_2, \dots, H_t são componentes conexos de H . Além disso, como G_i é completo, H_i também é completo. Assim, assumindo que $D'_{s+i} = V(H_{i+1})$, $1 \leq i \leq t-1$, segue que H é estrelado pois $C', D'_1, \dots, D'_s, D'_{s+1}, \dots, D'_{s+t-1}$ é uma partição estrelada de H .

(\Leftarrow) Suponha que H é um grafo estrelado. O objetivo é provar que G é um grafo estrelado generalizado. Sejam H_1, \dots, H_t os componentes conexos de H . Pelo Teorema 2.5.2, o grafo G é formado pelos componentes em arestas G_1, \dots, G_t , onde $H_i = K_e(G_i)$, com a possível adição de alguns vértices isolados. Como H é estrelado, no máximo um dos componentes conexos, digamos H_1 , não é um grafo completo. Considere H_1 e G_1 . Seja C', D'_1, \dots, D'_s uma partição estrelada de H_1 e C', C'_1, \dots, C'_s as cliques maximais correspondentes. Pela Propriedade da Preservação de Cliques, G_1 tem exatamente $s+1$ cliques maximais C, C_1, \dots, C_s , correspondentes a C', C'_1, \dots, C'_s , respectivamente. Defina $D_i = C_i \setminus C$, $1 \leq i \leq s$. Os seguintes fatos serão úteis para provar que C, D_1, \dots, D_s é uma partição estrelada de G_1 .

Fato 1: $u, v \in C_i \cap C_j$, $u \neq v$ e $i \neq j \Rightarrow u, v \in C$.

Como $u \neq v$ e $u, v \in C_i \cap C_j$, temos que a aresta uv de G_1 é um vértice de H_1 que pertence a C'_i e C'_j . Como H_1 é estrelado e $i \neq j$, $C'_i \cap C'_j \subseteq C'$. Assim, uv é um vértice de C' , o que implica que $u, v \in C$.

Fato 2: $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ e $i \neq j \Rightarrow C \cap C_i \cap C_j = \emptyset$.

Seja $i \neq j$ e $u \in D_i \cap D_j$. Suponha que existe $v \in C \cap C_i \cap C_j$. Então $u \neq v$, pois $u \notin C$. Além disso, temos que $u, v \in C_i \cap C_j$. Aplicando o Fato 1, concluímos que $u, v \in C$, contradizendo $u \notin C$. Consequentemente, nenhum tal vértice v pode existir.

Fato 3: $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, $C \cap C_i \neq \emptyset$ e $i \neq j \Rightarrow C \cap C_j = \emptyset$.

Seja $i \neq j$, $u \in D_i \cap D_j$ e $x \in C \cap C_i$. Suponha que existe $y \in C \cap C_j$. Pelo Fato 2, $x \notin C_j$. Assim x, y e u são vértices mutuamente adjacentes de G_1 . Isto é, xu e yu são vértices adjacentes de H_1 . Note que xu é um vértice de D'_i , pois $x, u \in C_i$ e $u \notin C$. Analogamente, yu está em D'_j . Como C', D'_1, \dots, D'_s é uma partição estrelada de H_1 , $D'_i \cap D'_j = \emptyset$, e assim xu e yu não possuem extremos em uma mesma clique de G_1 , uma contradição. Assim, não pode existir nenhum vértice em $C \cap C_j$.

Fato 4: $C \cap C_i \neq \emptyset$.

Suponha que $C \cap C_i = \emptyset$, para algum i . Como H_1 é o grafo clique de arestas de G_1 , $C' \cap C'_i = \emptyset$. Como H_1 é estrelado, isto implica que H_1 é desconexo, uma contradição. Assim, $C \cap C_i \neq \emptyset$.

O seguinte argumento mostra que C, D_1, \dots, D_s é uma partição de $V(G_1)$. Recordamos que $C \cap D_i = \emptyset$, por definição. Suponha que existem i e j , tais que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ e $i \neq j$. Pelo Fato 3, ou $C \cap C_i = \emptyset$ ou $C \cap C_j = \emptyset$, contradizendo o Fato 4. Deste modo, C, D_1, \dots, D_s é realmente uma partição de $V(G_1)$.

Considere agora um par de vértices distintos $u, v \in V(G_1)$, tais que $u \in D_i$ e $v \in D_j$. Suponha que $i \neq j$ e $uv \in E(G_1)$. Conseqüentemente, u e v pertencem a uma clique maximal C_k . Como $u, v \notin C$, segue que $u, v \in D_k$. Se $k = i$, então $D_j \cap D_k \neq \emptyset$. Se $k \neq i$, também temos que $D_j \cap D_k \neq \emptyset$. Mas qualquer uma destas situações contradiz o fato de C, D_1, \dots, D_s ser uma partição de $V(G_1)$. Deste modo $uv \notin E(G_1)$. Considere a segunda alternativa $i = j$, e considere $z \in N_{G_1}[u]$. Se $z \in C_i$, então $z \in N_{G_1}[v]$. Quando $z \notin C_i$, como $uz \in E(G_1)$, existe C_k , tal que $u, z \in C_k$. Claramente, $i \neq k$. Deste modo $u \in C_i \cap C_k$. Como $u \notin C$, segue que $u \in D_i \cap D_k$, contradizendo o fato de que C, D_1, \dots, D_s é uma partição. Deste modo a situação $z \notin C_i$ não ocorre, implicando que $N_{G_1}[u] \subseteq N_{G_1}[v]$. Analogamente, prova-se que

$N_{G_1}[v] \subseteq N_{G_1}[u]$. Conseqüentemente, $N_{G_1}[u] = N_{G_1}[v]$, implicando que G_1 é um grafo estrelado com partição C, D_1, \dots, D_s .

Finalmente, considere os outros componentes conexos H_2, \dots, H_t de H . Cada um é um grafo completo. Deste modo, pelo Teorema 2.5.2, G_2, \dots, G_t são os componentes em arestas de G e também são grafos completos. Conseqüentemente, G é um grafo estrelado generalizado. ■

Como conseqüência deste teorema temos que a classe dos grafos estrelados e a dos estrelados generalizados são clique-de-arestas-fechadas.

Corolário 4.2.1 *Seja $H = K_e(G)$. Se G é estrelado, H também é. Se H é estrelado e conexo, então G é estrelado.*

No entanto, um grafo estrelado conexo pode ter mais de uma raiz conexa. De fato, na figura a seguir temos um exemplo de dois grafos estrelados conexos distintos que são raízes do mesmo grafo estrelado conexo.

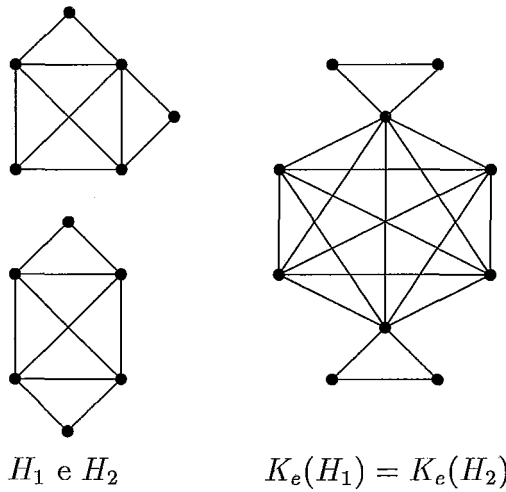


Figura 4.3: Grafo estrelado conexo com duas raízes

Outra conseqüência do Teorema 4.2.1 é que se H é um grafo estrelado que é um grafo clique de arestas, então existe um grafo estrelado G tal que $K_e(G) = H$, isto é, quando \mathcal{C} é a classe dos grafos estrelados, temos que $K_e(\mathcal{C}) = K_e(\mathcal{G}) \cap \mathcal{C}$.

Corolário 4.2.2 *Um grafo é clique de arestas de um grafo estrelado se e somente se é um grafo estrelado e é clique de arestas.*

4.3 Grafos estrelados de limiar

Nesta seção, estudamos os problemas de caracterização relacionados a classe dos grafos estrelados de limiar e a aplicação do operador clique de arestas.

Um *grafo estrelado de limiar* é um grafo estrelado G cujas cliques maximais admitem uma ordenação C, C_1, \dots, C_s , de modo que $C \cap C_i \subseteq C \cap C_{i+1}$. Tomando $D_i = C_i \setminus C$, a partição C, D_1, \dots, D_s é uma partição estrelada especial de G , chamada *partição estrelada de limiar*.

Grafos estrelados de limiar surgiram naturalmente no estudo de grafos clique de arestas, sendo uma classe de grafos para a qual a Propriedade dos Números Triangulares fornece uma condição suficiente para que grafos nesta classe sejam clique de arestas. Eles também são os grafos clique de arestas dos grafos de limiar. Uma caracterização por subgrafos proibidos para a classe dos grafos estrelados de limiar é dada em [7].

A seguinte classe de grafos é similar àquela definida na seção anterior, para grafos estrelados e fornece a caracterização da imagem inversa dos grafos estrelados de limiar, pelo operador K_e .

Seja G um grafo e G_1, \dots, G_t seus componentes em arestas, $t \geq 1$. Dizemos que G é um *grafo estrelado de limiar generalizado* se um dos componentes, digamos G_1 , é estrelado de limiar enquanto os outros são grafos completos.

Teorema 4.3.1 *Seja $H = K_e(G)$. Então G é um grafo estrelado de limiar generalizado se e somente se H é um grafo estrelado de limiar.*

Prova: Seja $H = K_e(G)$.

(\Rightarrow) Seja G um grafo estrelado de limiar generalizado, G_1, \dots, G_t seus componentes em arestas não triviais, e assumamos que G não possui componentes triviais. Assim, podemos considerar que G_1 é um grafo estrelado de limiar e G_2, \dots, G_t são grafos completos. Pelo Teorema 2.5.2, temos que H_1, \dots, H_t são os componentes conexos de H , onde $H_i = K_e(G_i)$. Vamos provar que H é um grafo estrelado de limiar.

Seja C, D_1, \dots, D_s uma partição estrelada de limiar de G_1 , com cliques maximais C, C_1, \dots, C_s , onde $D_i = C_i \setminus C$ e $C \cap C_1 \subseteq \dots \subseteq C \cap C_s$. Pelo

Teorema 4.2.1, H_1 é um grafo estrelado com partição estrelada C', D'_1, \dots, D'_s e cliques maximais C', C'_1, \dots, C'_s , onde $D'_i = C'_i \setminus C'$. Resta mostrar que $C' \cap C'_i \subseteq C' \cap C'_{i+1}$. Seja $e \in C' \cap C'_i$. Então e é uma aresta de G_1 , que possui ambos os extremos em $C \cap C_i$. Como $C \cap C_i \subseteq C \cap C_{i+1}$, a aresta e tem ambos os extremos também em $C \cap C_{i+1}$. Conseqüentemente, $e \in C' \cap C'_{i+1}$ e, portanto, G_1 é um grafo estrelado de limiar.

Como os outros componentes em arestas G_2, \dots, G_t são grafos completos, H_2, \dots, H_t também são grafos completos e são disjuntos. Assumindo que $D'_{s+i} = V(H_{i+1})$, $1 \leq i \leq t-1$, segue que H é estrelado de limiar, pois $C', D'_{s+1}, \dots, D'_{s+t-1}, D'_1, \dots, D'_s$ é uma partição estrelada de limiar de H .

(\Leftarrow) Seja H um grafo estrelado de limiar e H_1, \dots, H_t seus componentes conexos, onde H_2, \dots, H_t são grafos completos. Denote por C', D'_1, \dots, D'_s uma partição estrelada de limiar de H_1 , e por C', C'_1, \dots, C'_s suas cliques maximais correspondentes. Então G consiste de componentes em arestas não triviais G_1, \dots, G_t com possivelmente um número arbitrário de vértices isolados. Pelo Teorema 4.2.1, G_1 é um grafo estrelado enquanto que G_2, \dots, G_t são subgrafos completos de G . Seja C, D_1, \dots, D_s a partição estrelada de G_1 , correspondente a de H_1 , e C, C_1, \dots, C_s suas cliques maximais, onde $D_i = C_i \setminus C$. Resta provar que $C \cap C_i \subseteq C \cap C_{i+1}$. Como H_1 é conexo, temos que $|C' \cap C'_i| \geq 1$, implicando que $|C \cap C_i| \geq 2$. Escolha, arbitrariamente, um par de vértices distintos $u, v \in C \cap C_i$. Então, uv é uma aresta de G_1 com ambos os extremos em $C \cap C_i$. Conseqüentemente, H_1 contém o vértice $uv \in C' \cap C'_i$. Como H_1 é estrelado de limiar, segue que $uv \in C' \cap C'_{i+1}$. Isto significa que uv é uma aresta de G_1 que tem ambos os extremos em $C \cap C_{i+1}$. Isto é, $u, v \in C \cap C_{i+1}$, o que mostra que $C \cap C_i \subseteq C \cap C_{i+1}$. Deste modo, C, D_1, \dots, D_s é uma partição estrelada de limiar de G_1 . Como H_2, \dots, H_t são grafos completos, seus componentes em arestas correspondentes, G_2, \dots, G_t , também são. Assim, G é um grafo estrelado de limiar generalizado. ■

Como conseqüência deste teorema, temos que a classe dos grafos estrelados de limiar é clique-de-arestas-fechada.

Corolário 4.3.1 *Seja $H = K_c(G)$. Se G é um grafo estrelado de limiar, H*

também é. Se H é um grafo estrelado de limiar conexo, então G é um grafo estrelado de limiar.

Analogamente ao caso dos grafos estrelados, outra consequência do Teorema 4.3.1 é que se H é um grafo estrelado de limiar que é um grafo clique de arestas, então existe um grafo estrelado de limiar G , tal que $K_e(G) = H$, isto é, quando \mathcal{C} é a classe dos grafos estrelados de limiar, também temos que $K_e(\mathcal{C}) = K_e(\mathcal{G}) \cap \mathcal{C}$.

Corolário 4.3.2 *Um grafo é clique de arestas de um grafo estrelado de limiar se e somente se é um grafo estrelado de limiar e clique de arestas.*

A seguir, descrevemos exatamente que grafos estrelados de limiar são grafos clique de arestas. Em particular, mostramos que satisfazer a Propriedade dos Números Triangulares é suficiente na classe dos grafos estrelados de limiar.

Teorema 4.3.2 *Seja H um grafo estrelado de limiar. Então H é um grafo clique de arestas se e somente se suas cliques maximais e interseções de cliques maximais têm um número triangular de elementos.*

Prova: Basta provar a suficiência. Por hipótese, H é um grafo estrelado de limiar no qual todas as cliques maximais e interseções de cliques maximais têm um número triangular de elementos. Sem perda de generalidade, assumamos que H é conexo. Vamos mostrar que existe um grafo (estrelado de limiar) G , tal que $H = K_e(G)$.

Seja C', D'_1, \dots, D'_s uma partição estrelada de limiar de H e C', C'_1, \dots, C'_s as cliques maximais correspondentes. Como C', C'_1, \dots, C'_s e $C' \cap C'_i$ são cliques que possuem um número triangular de elementos, existem inteiros positivos c, c_i, n_i satisfazendo $|C'| = \binom{c}{2}$, $|C'_i| = \binom{c_i}{2}$, $|C' \cap C'_i| = \binom{n_i}{2}$, $1 \leq i \leq s$. Observe que um grafo estrelado de limiar é unicamente determinado pelos números s , $|C|$, $|C_i|$ e $|C \cap C_i|$, $1 \leq i \leq s$. Vamos construir G , descrevendo uma partição de vértices C, D_1, \dots, D_s que é uma partição estrelada de limiar de G . As cliques maximais correspondentes serão C, C_1, \dots, C_s , onde $D_i = C_i \setminus C$.

Inicialmente, defina C como uma clique de cardinalidade c . Em seguida, defina $n_0 = 0$, $C_0 = \emptyset$ e para $1 \leq i \leq s$, construa C_i como segue. Defina

$C \cap C_i = (C \cap C_{i-1}) \cup C_i^*$, onde $C_i^* \subseteq C \setminus C_{i-1}$ e $|C_i^*| = n_i - n_{i-1}$. Agora, defina uma clique D_i consistindo de $c_i - n_i$ vértices novos. Finalmente, para cada par de vértices $u, v \in V(G)$, tal que $u \in C \cap C_i$ e $v \in D_i$, inclua em G a aresta uv . Conseqüentemente, C_i é uma clique maximal formada por c_i vértices. A construção de G está completa.

Note que a construção acima requer a existência de uma clique $C_i^* \subseteq C \setminus C_{i-1}$, possivelmente vazia, de cardinalidade $|C_i^*| = n_i - n_{i-1}$. Entretanto isto está assegurado pelo seguinte fato. Como a partição C', D'_1, \dots, D'_s é estrelada de limiar, $C' \cap C'_{i-1} \subseteq C' \cap C'_i$ e deste modo $n_{i-1} \leq n_i$. Como $|C \cap C_{i-1}| = n_{i-1}$ e $c > n_i$ segue que existe $C_i^* \subseteq C$, como requerido. Conseqüentemente, C é uma clique maximal e a construção de $C \cap C_i$ é bem sucedida. Também a de D_i , pois $c_i > n_i$. Como n_i é um inteiro positivo, G não tem vértices isolados.

Claramente, G é um grafo estrelado, com partição estrelada C, D_1, \dots, D_s . Além disso, $C \cap C_{i-1} \subseteq C \cap C_i$. Assim, G é um grafo estrelado de limiar. Resta mostrar que $H = K_e(G)$. Seja H'' o grafo clique de arestas de G . Pelo Teorema 4.3.1, H'' é um grafo estrelado de limiar com partição correspondente C'', D''_1, \dots, D''_s e cliques maximais C'', C''_1, \dots, C''_s , onde $D''_i = C''_i \setminus C''$ e $C'' \cap C''_{i-1} \subseteq C'' \cap C''_i$. Como $|C| = c$, temos $|C''| = \binom{c}{2}$. Considere cada clique maximal C''_i de H'' . Segue das definições de $C \cap C_i$ and C_i que $|C'' \cap C''_i| = \binom{n_i}{2}$ e $|C''_i| = \binom{c_i}{2}$. Comparando H e H'' concluímos que ambos coincidem. Conseqüentemente, H é um grafo clique de arestas. ■

Como conseqüência deste teorema temos que, ao contrário dos grafos estrelados, um grafo estrelado de limiar conexo tem apenas uma raiz conexa.

O Teorema 4.3.2 não pode ser estendido para grafos estrelados. Basta observar que o grafo da Figura 2.3, que é um exemplo de grafo que satisfaz a Propriedade dos Números Triangulares mas não é um grafo clique de arestas, é um grafo estrelado.

4.4 Grafos partilhados e grafos de limiar

Nesta seção, estudamos os problemas de caracterização relacionados tanto a classe dos grafos partilhados quanto a dos grafos de limiar, e a aplicação do

operador clique de arestas.

Um *grafo partilhado* é um grafo cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique e um conjunto estável.

Segue da definição que se G é um grafo partilhado, então ele é um grafo estrelado com partição estrelada C, D_1, \dots, D_s , tal que $|D_i| = 1, 1 \leq i \leq s$.

Os grafos partilhados foram definidos por Földes e Hammer [13] e têm sido intensivamente estudados [14, 18].

A classe dos grafos partilhados não é clique-de-arestas-fechada. Basta tomar como exemplo o grafo da Figura 1.1.

Para estudar a classe obtida pela aplicação de K_e na classe dos grafos partilhados, necessitamos das classes de grafos definidas a seguir.

Seja G um grafo e G_1, \dots, G_t seus componentes em arestas, $t \geq 1$. Dizemos que G é um *grafo partilhado generalizado* se um dos seus componentes, digamos G_1 , é partilhado, enquanto os outros consistem de uma única aresta.

Seja G um grafo estrelado com partição estrelada C, D_1, \dots, D_s e cliques maximais C, C_1, \dots, C_s , onde $D_i = C_i \setminus C$. Dizemos que G é *singular* se $|C \cap C_i| = \binom{|D_i|}{2}, 1 \leq i \leq s$.

Teorema 4.4.1 *Seja $H = K_e(G)$. Então G é um grafo partilhado generalizado se e somente se H é um grafo estrelado singular.*

Prova: Seja $H = K_e(G)$.

(\Rightarrow) Seja G um grafo partilhado generalizado com componentes em arestas G_1, \dots, G_t . Assuma que G não tem vértices isolados e que cada um dos componentes G_2, \dots, G_t consiste de uma única aresta. Seja C, D_1, \dots, D_s uma partição estrelada de G_1 e C, C_1, \dots, C_s suas cliques maximais, com $D_i = C_i \setminus C$. Além disso, $|D_i| = 1$.

Seja $H_1 = K_e(G_1)$. Pelo Teorema 4.2.1, o grafo H_1 é estrelado. Seja C', D'_1, \dots, D'_s a partição estrelada correspondente de H_1 e C', C'_1, \dots, C'_s suas cliques maximais. Vamos mostrar que H_1 é singular. Como $|D_i| = 1$ e denotando $D_i = \{v_i\}$, temos $N(v_i) = C \cap C_i \neq \emptyset$, pois G_1 é conexo. Deste modo, D'_i é formado pelo conjunto de arestas de G_1 que são incidentes a v_i . Assim, $|D'_i| = |C \cap C_i|$. Por outro lado, pela Propriedade dos Números Triangulares,

$|C' \cap C'_i| = \binom{|C \cap C_i|}{2}$. Conseqüentemente, $|C' \cap C'_i| = \binom{|D'_i|}{2}$ o que implica que H_1 é singular. Deste modo, H is singular, pois cada H_i é um grafo trivial.

(\Leftarrow) Seja H um grafo estrelado singular e H_1, \dots, H_t os componentes conexos de H . Pelo Teorema 2.5.2, o grafo G é formado pelos componentes em arestas não triviais G_1, \dots, G_t , onde $H_i = K_e(G_i)$. Pelo Teorema 4.2.1, um destes componentes, digamos G_1 , é estrelado, enquanto os restantes são subgrafos completos de G . Sejam C, D_1, \dots, D_s e C', D'_1, \dots, D'_s partições estreladas correspondentes de G_1 e H_1 , respectivamente, com C, C_1, \dots, C_s e C', C'_1, \dots, C'_s as cliques maximais destes grafos. Vamos mostrar que G_1 é um grafo partilhado.

Sabemos que $C' \cap C'_i \neq \emptyset$, pois de outro modo H_1 seria desconexo, uma contradição. Como H_1 é singular, $|C' \cap C'_i| = \binom{|D'_i|}{2}$. Como $|C' \cap C'_i| = \binom{|C \cap C_i|}{2}$ e $|C' \cap C'_i| > 0$ segue que $|D'_i| = |C \cap C_i|$. Como $|D'_i| = \binom{|D_i|}{2} + |D_i||C \cap C_i|$, concluímos que $|D_i| = 1$. Conseqüentemente, G_1 é um grafo partilhado.

Finalmente, considere os outros componentes em arestas, G_2, \dots, G_t , que são grafos completos. Logo, temos que cada um dos componentes conexos H_2, \dots, H_t é um grafo completo. Isto é, tomando $D'_{s+i} = V(H_{i+1})$, temos que $C', D'_1, \dots, D'_s, D'_{s+1}, \dots, D'_{s+t-1}$ é uma partição estrelada de H , satisfazendo $C' \cap C'_j = \emptyset$, para $j > s$. Como H é singular, $|C' \cap C'_j| = \binom{|D'_j|}{2}$. Isto implica que $|D'_j| = 1$, isto é, D'_j é um vértice isolado. Conseqüentemente, cada um dos componentes conexos H_2, \dots, H_t é um grafo trivial, o que implica que cada um dos componentes G_2, \dots, G_t é um componente em arestas com dois vértices. Assim, G é um grafo partilhado generalizado. ■

Corolário 4.4.1 *Seja $H = K_e(G)$. Se G é um grafo partilhado, então H é um grafo estrelado singular. Se H é um grafo estrelado singular conexo, então G é um grafo partilhado.*

A seguir, vamos caracterizar os grafos partilhados que são grafos clique de arestas. Na verdade, temos que estes grafos possuem uma estrutura bastante simples.

Teorema 4.4.2 *Seja H um grafo partilhado. Então H é um grafo clique de*

arestas se e somente se existem um número triangular t e um natural c , tais que $H = K_t \cup N_c$.

Prova: Seja H um grafo partilhado que é um grafo clique de arestas. Então os vértices de H podem ser particionados em uma clique C e um conjunto estável I . Como H é um grafo clique de arestas, C é uma clique com um número triangular de vértices. Suponha, por absurdo, que $|I| \geq 1$ e I não é uma coleção de vértices isolados. Conseqüentemente, existe $v \in I$, tal que $N_H(v) \neq \emptyset$. Claramente, $N_H[v]$ é uma clique maximal de H , enquanto que $N_H(v)$ é uma interseção de cliques maximais. Estas condições implicam que tanto $N_H(v)$ quanto $N_H[v]$ tem um número triangular de vértices. Como eles diferem em apenas um vértice, temos apenas duas possibilidades: $|N_H(v)| = 0$ ou $|N_H(v)| = 1$. A primeira alternativa não ocorre porque $N_H(v) \neq \emptyset$. No segundo caso, $|N_H(v)| = 1$ e v tem um único vértice adjacente $w \in C$. Isto implica que os vértices v e w formam uma clique maximal de tamanho dois, que não é um número triangular. Assim, H não é um grafo clique de arestas, uma contradição. Conseqüentemente, H consiste de uma clique com um número triangular de vértices e um número arbitrário de vértices isolados.

A recíproca é imediata. ■

O problema de caracterizar os grafos cujo grafo clique de arestas é partilhado também tem uma solução simples. A saber, esta classe é formada pelos grafos que possuem no máximo um componente em arestas que é completo e os outros consistindo de um único vértice ou uma única aresta.

Finalmente, vamos considerar os problemas de caracterização relacionados a classe dos grafos de limiar e a aplicação do operador clique de arestas.

Um *grafo de limiar* é um grafo estrelado de limiar com partição estrelada de limiar C, D_1, \dots, D_s , tal que $|D_i| = 1$.

Os grafos de limiar foram introduzidos por Chvátal e Hammer [12] e têm sido intensivamente estudados [14, 18].

A seguinte caracterização dos grafos de limiar em termos dos grafos estrelados e partilhados será útil.

Teorema 4.4.3 ([12]) *Um grafo G é um grafo de limiar se e somente se G é um grafo estrelado de limiar e também um grafo partilhado.*

Segue do teorema acima que os grafos clique de arestas dos grafos de limiar podem ser descritos pela combinação dos resultados correspondentes para grafos estrelados de limiar e partilhados, com as devidas modificações.

A definição a seguir é similar àquela para o caso dos grafos partilhados.

Um grafo com componentes em arestas G_1, \dots, G_t é um *grafo de limiar generalizado* se um de seus componentes, digamos G_1 , é um grafo de limiar e os outros consistem de uma única aresta.

Teorema 4.4.4 *Seja $H = K_e(G)$. Então G é um grafo de limiar generalizado se e somente se H é um grafo estrelado de limiar singular.*

Prova: Conseqüência dos Teoremas 4.4.3, 4.3.1 e 4.4.1. ■

Corolário 4.4.2 *Seja $H = K_e(G)$. Se G é um grafo de limiar, então H é um grafo estrelado de limiar singular. Se H é um grafo estrelado de limiar singular conexo, então G é um grafo de limiar.*

Capítulo 5

Caracterização

Os grafos clique de arestas não admitem uma caracterização por subgrafos proibidos pois é sempre possível exibir um grafo clique de arestas que possui um dado grafo G como subgrafo induzido. De fato, o grafo $K_e(G * \{x\})$ é clique de arestas e, pelo Teorema 2.6.5, possui G como subgrafo induzido.

Desde o artigo pioneiro de Albertson e Collins [2], sobre grafos clique de arestas, a questão de encontrar uma caracterização para esta classe de grafos tem sido citada como uma questão relevante a ser respondida [22]. Neste capítulo, descrevemos uma caracterização dos grafos clique de arestas.

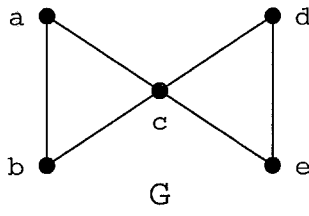
A única outra caracterização existente para esta classe de grafos, é devida a Chartrand et al. [11], e é feita através de um algoritmo exponencial de reconhecimento, cujo primeiro passo consiste em testar se o grafo dado satisfaz a Propriedade dos Números Triangulares. Nossa caracterização é alternativa mas também deixa em aberto a questão do reconhecimento polinomial desta classe de grafos.

Como observado na Seção 2.6, para caracterizar os grafos clique de arestas basta caracterizar os grafos conexos. Assim, neste capítulo, todos os grafos considerados são conexos.

5.1 Rotulações e caracterização

Uma k -rotulação de um grafo G é uma atribuição de um conjunto não vazio $\ell(v) \subseteq \{1, \dots, n\}$ a cada vértice $v \in V(G)$, de modo que $|\ell(v)| = k$ e todos os conjuntos de rótulos $\ell(v)$ são distintos.

A Figura 5.1 mostra um grafo G e uma 2-rotulação de G .



$$\ell(a) = \{1, 2\}, \ell(b) = \{2, 3\}, \ell(c) = \{1, 3\}, \ell(d) = \{1, 4\}, \ell(e) = \{2, 4\}.$$

Figura 5.1: Um grafo e uma 2-rotulação.

Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$, seja $\ell(S)$ o subconjunto dos números naturais i em $\{1, \dots, n\}$, tais que $i \in \ell(v)$, para algum $v \in S$, isto é, $\ell(S) = \cup\{\ell(v) : v \in S\}$.

Um conjunto S de vértices que possui um número triangular de elementos é *fortemente triangular*, com respeito a uma k -rotulação ℓ de G , se $|S| = \binom{\ell(S)}{2}$.

No exemplo da Figura 5.1, tomando $A = \{a, c, d\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{c, d, e\}$, temos que $\ell(A) = \ell(C) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\ell(B) = \{1, 2, 3\}$. Todos os conjuntos A, B e C têm um número triangular de elementos mas somente B é fortemente triangular (com respeito a ℓ). Assim, C é uma clique maximal de G que não é fortemente triangular, enquanto que $D = \{a, d, e\}$ é um conjunto fortemente triangular, que não é uma clique.

Neste texto, consideramos somente 1 e 2-rotulações. As seguintes propriedades serão úteis e decorrem imediatamente da definição.

Lema 5.1.1 *Se ℓ é uma 1-rotulação de um grafo G , então para todo conjunto $S \subseteq V(G)$, $|S| = |\ell(S)|$.*

Lema 5.1.2 *Se ℓ é uma 2-rotulação de um grafo G , e S é um conjunto fortemente triangular de G , com respeito a ℓ , então para todo $\{i, j\} \subseteq \ell(S)$, existe um vértice $v \in S$ tal que $\ell(v) = \{i, j\}$.*

O teorema a seguir caracteriza grafos clique de arestas em termos de 2-rotulações especiais.

Teorema 5.1.1 *Um grafo H é um grafo clique de arestas se e somente se admite uma 2-rotulação tal que todo conjunto $S \subseteq V(H)$, satisfaz:*

- (1) *Se S é uma clique maximal, então S é fortemente triangular;*
- (2) *Se S é fortemente triangular, então S é uma clique.*

Prova: (\Rightarrow) Seja H um grafo clique de arestas. Por hipótese, existe um grafo G tal que $H = K_e(G)$. Seja $|V(G)| = n$ e considere uma 1-rotulação arbitrária g de G , tal que $g(V(G)) = \{1, \dots, n\}$. Defina uma 2-rotulação h de H , como segue. Para cada aresta $uv \in E(G)$, o rótulo do vértice $uv \in V(H)$ é definido como $h(uv) = g(u) \cup g(v)$. Como g é uma 1-rotulação de G e $H = K_e(G)$ temos que h é realmente uma 2-rotulação de H e, além disso, $h(V(H)) \subseteq \{1, \dots, n\}$. Além do mais, $h(V(H)) = \{1, \dots, n\}$ se G não tem vértices isolados. Seja $S \subseteq V(H)$ e considere os seguintes casos:

Suponha que S é uma clique maximal de H . Pela Propriedade da Preservação de Cliques, existe uma correspondência entre as cliques maximais de H e as de G . Seja S' a clique maximal de G , correspondente a S . Conseqüentemente, $|S| = \binom{|S'|}{2}$ e, pela definição de h , $g(S') = h(S)$. Por outro lado, pelo Lema 5.1.1, $|S'| = |g(S')|$. Assim,

$$|S| = \binom{|S'|}{2} = \binom{|g(S')|}{2} = \binom{|h(S)|}{2},$$

ou seja, S é fortemente triangular.

Suponha que S é fortemente triangular (com respeito a h). Logo, $|S| = \binom{|h(S)|}{2}$. Pelo Lema 5.1.2, cada par de elementos distintos de $h(S)$ é o conjunto de rótulos de algum vértice de S . Considere um subconjunto de vértices S' de G tal que $g(S') = h(S)$. Note que cada conjunto de rótulos $\{i, j\} \subseteq h(S)$ corresponde a uma aresta $uv \in E(G)$, de modo que $u, v \in S'$, $g(u) = \{i\}$ e $g(v) = \{j\}$. Desta maneira, S' é uma clique e, conseqüentemente, S é uma clique e (2) é verdadeiro.

(\Leftarrow) Suponha que H é um grafo que admite uma 2-rotulação h , de modo que todo conjunto $S \subseteq V(H)$ satisfaz as condições (1) e (2) do teorema. Temos que provar que H é um grafo clique de arestas. Abaixo, descrevemos como construir um grafo conveniente G e mostramos que $H = K_e(G)$.

Assuma, sem perda de generalidade, que $h(V(H)) = \{1, 2, \dots, n\}$. Defina um grafo G , juntamente com uma 1-rotulação g de G , da maneira a seguir. Para cada $i \in h(V(H))$, G contém um vértice e seu rótulo em g é $\{i\}$. Para cada vértice de $V(H)$, cujo rótulo é $\{i, j\}$, G contém uma aresta incidente ao par de vértices cujos rótulos em g são $\{i\}$ e $\{j\}$. A descrição de G está

completa. Mostramos agora que $H = K_e(G)$.

Claramente, a construção de G assegura que existe uma correspondência entre as arestas de G e os vértices de H .

Sejam e e f duas arestas distintas de G , cujos extremos pertencem a uma mesma clique C . Temos que provar que os vértices correspondentes e e f em H são adjacentes.

Denote por S o conjunto das arestas de G que possuem ambos os extremos em C . Denote por S' o conjunto de vértices de H correspondentes às arestas de S . Claramente, $|S'| = |S| = \binom{|C|}{2}$. Além disso, $g(C) = h(S')$ e, pelo Lema 5.1.1, $|g(C)| = |C|$. Deste modo, $|S'| = \binom{|h(S')|}{2}$, isto é, S' é fortemente triangular. Aplicando (2), concluímos que S' é uma clique de H . Como $e, f \in S'$, concluímos que e e f são vértices adjacentes em H .

Finalmente, considere dois vértices adjacentes e e f de H . Resta provar que as arestas correspondentes e e f têm extremos em uma mesma clique em G . Denote por S' uma clique maximal de H que contenha tanto e quanto f . Seja S o conjunto das arestas de G , correspondentes a $S' \subseteq V(H)$. Denote por $C \subseteq V(G)$ o conjunto dos extremos das arestas de S . Então $h(S') = g(C)$ e $|S'| = |S|$. Como S' é uma clique maximal, aplicando (1), temos que $|S'| = \binom{|h(S')|}{2}$ e concluímos que $|S| = \binom{|g(C)|}{2}$. Pelo Lema 5.1.1, $|g(C)| = |C|$ e, conseqüentemente, $|S| = \binom{|C|}{2}$. Isto é, cada par de vertices $u, v \in C$, é uma aresta de S . Assim, C é uma clique e, portanto, e e $f \in E(G)$ têm extremos em uma mesma clique de G . ■

Uma 2-rotulação ℓ é boa se satisfaz as condições (1) e (2) do Teorema 5.1.1.

A 2-rotulação dada na Figura 5.1 não é boa, dado que, por exemplo, o conjunto $D = \{a, d, e\}$ não satisfaz a condição (2). Mas o grafo G admite uma 2-rotulação boa. Como exemplo considere a rotulação abaixo:

$$\ell'(a) = \{1, 2\}, \ell'(b) = \{2, 3\}, \ell'(c) = \{1, 3\}, \ell'(d) = \{1, 4\}, \ell'(e) = \{3, 4\}.$$

Como conseqüência do Teorema 5.1.1, o problema do reconhecimento dos grafos clique de arestas consiste em determinar se o grafo admite ou não uma rotulação boa. Não sabemos se este problema pode ser resolvido em tempo polinomial. Porém, dada uma 2-rotulação ℓ de um grafo H podemos determi-

nar se ela é ou não boa de maneira eficiente. De fato, dados H e ℓ , construa o grafo G , 1-rotulado, conforme é feito na prova do teorema. Em seguida, construa o grafo $K_e(G)$, 2-rotulado. Finalmente, verifique se H é ou não igual a $K_e(G)$. Que este procedimento pode ser executado em tempo polinomial é uma consequência de que podemos construir G , $K_e(G)$ e verificar se dois grafos rotulados com o mesmo conjunto de vértices têm o mesmo conjunto de arestas, em tempo polinomial.

Capítulo 6

Grafos Aresta-Helly

Neste capítulo são estudadas as relações entre a classe dos grafos clique e a dos 2-clique e também entre a dos grafos Helly e a dos aresta-Helly. Em ambos os casos, o operador clique de arestas é utilizado como uma transformação entre grafos mostrando, no primeiro caso, que as classes consideradas coincidem e, no segundo, que elas estão relacionadas polinomialmente.

Além disso, no caso especial em que a maior clique do grafo tem tamanho quatro são estabelecidos alguns resultados referentes a Conjectura 1.2.1.

6.1 Grafos 2-clique

Uma aparente variação da idéia de grafo clique é obtida quando se considera o grafo de interseção das cliques maximais impondo-se que as cliques se interseptom em pelo menos dois vértices.

Dado um grafo $G = (V, E)$, o grafo *2-clique de G* , denotado $K_2(G)$, é o grafo com conjunto de vértices igual a $\mathcal{M}(G)$ e tal que existe uma aresta entre dois vértices de $K_2(G)$ se e somente se as cliques correspondentes em G têm pelo menos 2 vértices em comum. Um grafo G é *2-clique* se existe um grafo H tal que $G = K_2(H)$. Na Figura 6.1, temos um grafo G , seu grafo clique e seu grafo 2-clique. Decorre da definição que, para todo grafo G , o grafo $K_2(G)$ é subgrafo gerador de $K(G)$.

Nesta seção, baseados em resultados apresentados em [20] e [22], mostramos que as classes dos grafos clique e 2-clique coincidem. Para isto estabelecemos algumas relações entre os operadores clique, 2-clique e clique de arestas.

O teorema a seguir, foi enunciado sem prova por McKee [20].

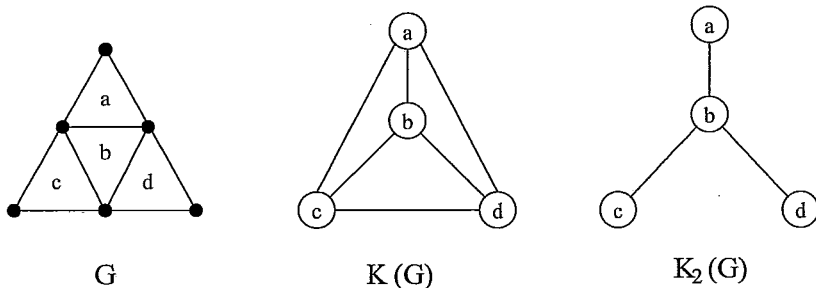


Figura 6.1: Grafo, seu grafo clique e seu grafo 2-clique.

Teorema 6.1.1 *Para todo grafo G sem vértices isolados, $K_2(G) = K(K_e(G))$.*

Prova: Seja G um grafo sem vértices isolados e considere que $K_2(G) = H$. Vamos mostrar que $H = K(K_e(G))$. Para isto basta observar que os vértices de $H = K_2(G)$ são as cliques maximais de G e, os vértices de $K(K_e(G))$ são as cliques maximais de $K_e(G)$ que, por sua vez, estão em correspondência, pela Propriedade da Preservação de Cliques, com as cliques maximais de G . Logo, há uma bijeção dos vértices de $K_2(G)$ nos vértices de $K(K_e(G))$.

Sejam u e v dois vértices adjacentes em $K_2(G)$. Então, M_u e M_v , as cliques maximais correspondentes a eles em G são tais que $|M_u \cap M_v| \geq 2$. Logo M'_u e M'_v , as cliques maximais correspondentes a M_u e M_v em $K_e(G)$, têm pelo menos um vértice em comum e $M'_u \cap M'_v \neq \emptyset$. Logo, os vértices correspondentes a u e v em $K(K_e(G))$ são adjacentes.

Reciprocamente, se M'_u e M'_v são cliques maximais em $K_e(G)$ com interseção não vazia, as cliques maximais correspondentes M_u e M_v em G têm pelo menos dois vértices em comum e M_u e M_v corresponderão a vértices adjacentes em $K_2(G)$. ■

Corolário 6.1.1 ([20]) *Todo grafo 2-clique é grafo clique.*

Prova: Seja G um grafo 2-clique. Logo existe um grafo H tal que $G = K_2(H)$.

Se H não tem vértices isolados, pelo Teorema 6.1.1, $K_2(H) = K(K_e(H))$ e, portanto $G = K(K_e(H))$.

Se H tem vértices isolados, v_1, \dots, v_m , considere H' o grafo obtido de H retirando-se estes vértices. Construa $K_e(H')$. Acrescente a $K_e(H')$ os vértices

v_1, \dots, v_m obtendo o grafo G' . Segue do fato que os operadores K e K_2 preservam vértices isolados que $G = K(G')$.

Portanto, em ambos os casos, G é grafo clique. ■

Na Figura 6.2, temos o mesmo grafo da Figura 6.1, seu grafo clique de arestas e o grafo clique do seu grafo clique de arestas.

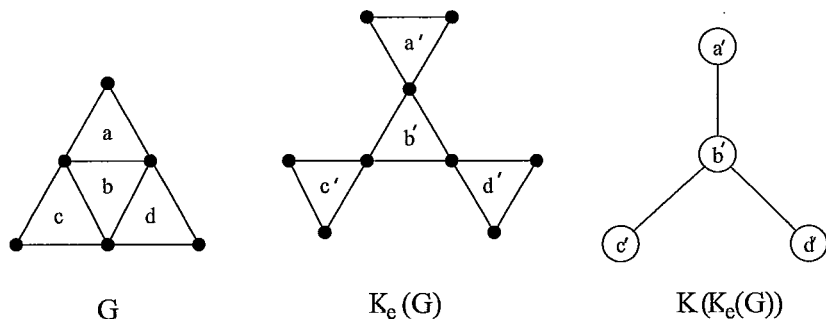


Figura 6.2: Grafo, seu grafo clique de arestas e o grafo clique do clique de arestas.

Teorema 6.1.2 ([22]) *Para todo grafo G , $K(G) = K_2(G * \{x\})$.*

Prova: Seja G um grafo qualquer e considere G' a combinação de G com o grafo trivial cujo único vértice é x , isto é, $G' = G * \{x\}$. Obviamente, M é uma clique maximal em G se e somente se $M' = M \cup \{x\}$ é uma clique maximal em G' . Logo, existe uma correspondência entre as cliques maximais de G e as de G' .

Sejam u e v dois vértices adjacentes em $K(G)$. Então, M_u e M_v , as cliques maximais correspondentes a eles em G são tais que $|M_u \cap M_v| \geq 1$. Logo M'_u e M'_v , as cliques maximais correspondentes a M_u e M_v em G' são tais que $|M'_u \cap M'_v| \geq 2$. Logo, os vértices u e v em $K_2(G')$ são adjacentes.

Reciprocamente, se M'_u e M'_v são cliques maximais em G' tais que $|M'_u \cap M'_v| \geq 2$, as cliques maximais M_u e M_v correspondentes a M'_u e M'_v em G têm interseção não vazia e, os vértices u e v em $K(G)$ são adjacentes. ■

Corolário 6.1.2 ([22]) *Todo grafo clique é grafo 2-clique.*

Decorre dos Corolários 6.1.1 e 6.1.2 que as classes de grafos clique e 2-clique coincidem. E também que todo grafo clique tem, entre suas infinitas raízes, uma que é clique de arestas. A Figura 6.3 resume estas observações.

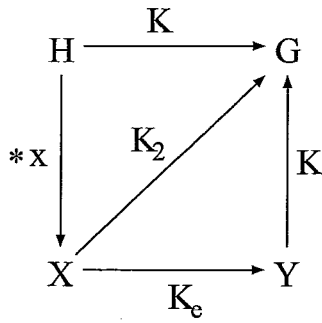


Figura 6.3: Relação entre os operadores clique, 2-clique e clique de arestas.

Observamos que a Conjectura 1.2.1, neste contexto, se resume em determinar se a classe dos grafos clique é clique-de-arestas-fechada.

6.2 Grafos aresta-Helly

Um grafo é *Helly* se a família de suas cliques maximais satisfaz a propriedade Helly. Todo grafo que possui um vértice universal é Helly.

Em 1968, Hamelink [16] provou que todo grafo Helly é grafo clique. Dado um grafo Helly G , usando o método de Hamelink pode-se efetivamente construir um grafo H , tal que $K(H) = G$. Porém a condição da família de cliques maximais satisfazer a propriedade Helly não é necessária para que um grafo seja clique. Na Figura 6.4, os grafos H e G são tais que $K(H) = G$ mas as cliques maximais $\{a, b, c, d\}$, $\{b, e, f, g\}$ e $\{d, g, h, i\}$ de G se interseptam duas a duas e não possuem um vértice em comum. Em 1997, Szwarcfiter [27] provou que os grafos Helly podem ser reconhecidos em tempo polinomial.

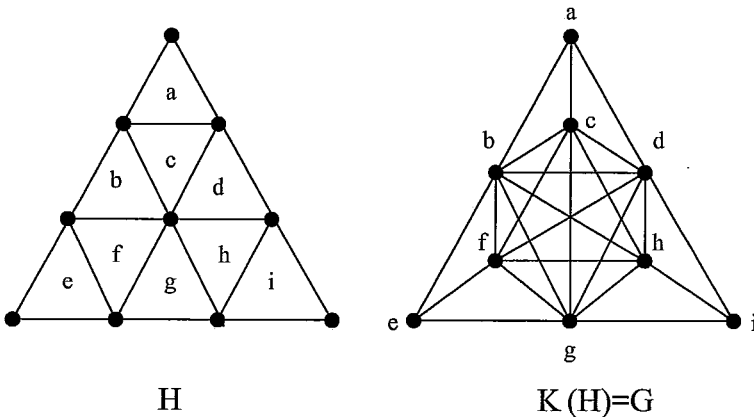


Figura 6.4: Grafo e seu grafo clique que não é Helly.

Nesta seção vamos estudar uma variação da idéia de grafo Helly considerando que, na verificação da propriedade Helly, as interseções das cliques devam ter mais de um elemento.

Uma família \mathcal{F} de conjuntos *satisfaz a propriedade Helly para dois elementos* se para toda subfamília \mathcal{F}' de \mathcal{F} , formada por conjuntos que se interseptam dois a dois em pelo menos dois elementos, existem dois elementos que estão em todos os conjuntos de \mathcal{F}' .

Se \mathcal{F} é uma família de cliques, \mathcal{F} *satisfaz a propriedade Helly em arestas* quando \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly para dois elementos. Se \mathcal{F} é uma família de grafos, \mathcal{F} *satisfaz a propriedade Helly em arestas* quando \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly e a interseção é considerada nos conjuntos de arestas.

Um grafo é *aresta-Helly* se sua família de cliques maximais satisfaz a propriedade Helly em arestas. Todo grafo que possui dois vértices universais é aresta-Helly. Mas, nem todo grafo aresta-Helly possui vértice universal. De fato, o grafo G da Figura 6.4 é aresta-Helly, dado que não possui três cliques maximais que se interseptam duas a duas em dois elementos, mas não possui vértice universal.

Vamos agora considerar as relações entre as classes de grafos clique, Helly e aresta-Helly.

Na Figura 6.5, temos o grafo P , que não é aresta-Helly, dado que os grafos induzidos pelas cliques maximais $\{a, b, c, d\}$, $\{a, d, e, f\}$ e $\{a, b, f, g\}$ têm, dois a dois, uma aresta em comum mas não existe uma aresta que está em todos os três grafos.

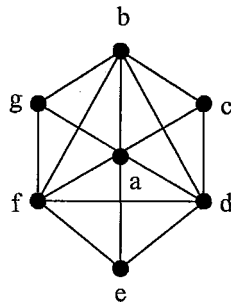


Figura 6.5: Grafo P , que não é aresta-Helly.

Como o grafo P possui um vértice universal, P é Helly. Assim, nem todo

grafo Helly é aresta-Helly. Por outro lado, o grafo G da Figura 6.1 não é Helly, dado que as cliques maximais a , c e d têm, duas a duas, um vértice em comum e não existe um vértice que está em todas as três cliques, mas é aresta-Helly, pois as únicas famílias de cliques maximais que contém cliques que se interseptom duas a duas têm no máximo duas cliques. Portanto, nem todo grafo aresta-Helly é Helly.

Além disso, como G não é grafo clique, dado que qualquer família de cliques de G que cobre as arestas deve conter as cliques a , c e d como elementos, e estas formam uma subfamília que não satisfaz a propriedade Helly, temos que nem todo grafo aresta-Helly é clique, e nem 2-clique. Por outro lado, o grafo da Figura 6.6 é grafo clique mas não é aresta-Helly, dado que possui as cliques maximais $\{b, c, d, e\}$, $\{b, e, g, h\}$ e $\{d, e, i, h\}$, e também não é Helly, dado que possui as cliques maximais $\{a, b, c, d\}$, $\{b, f, g, h\}$ e $\{d, h, i, j\}$. Assim, nem todo grafo clique é aresta-Helly ou Helly.

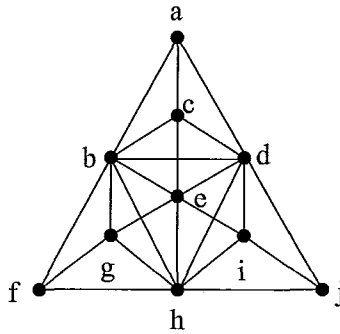


Figura 6.6: Grafo clique mas não aresta-Helly.

A Figura 6.7 resume estas observações.

Embora sejam incomparáveis, as classes dos grafos aresta-Helly e Helly estão relacionadas pelo operador clique de arestas.

Teorema 6.2.1 *Um grafo G é aresta-Helly se e somente se $K_e(G)$ é Helly.*

Prova: (\Rightarrow) Seja \mathcal{C}' uma família de cliques maximais de $K_e(G)$ que se interseptom duas a duas. Pela Propriedade da Preservação de Cliques, as cliques maximais da família \mathcal{C} correspondente a \mathcal{C}' em G têm, duas a duas, dois vértices em comum.

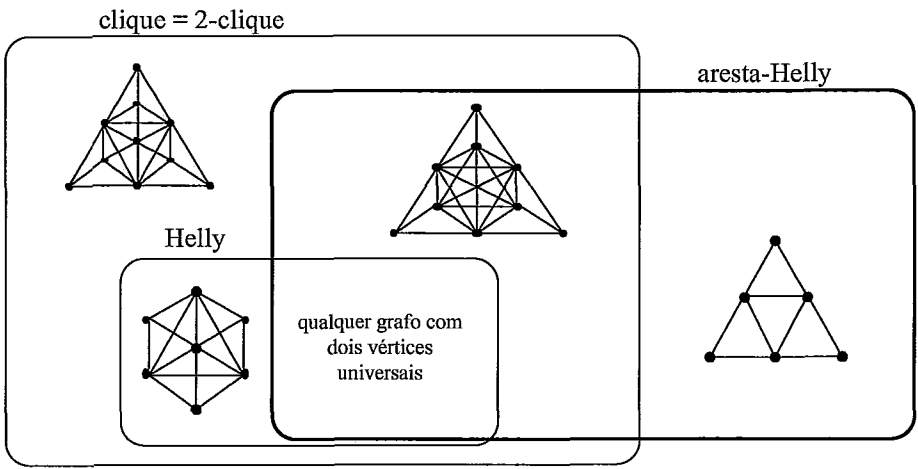


Figura 6.7: Diagrama das classes clique, Helly e aresta-Helly.

Como G é aresta-Helly, existe uma aresta a de G cujos extremos pertencem a todas as cliques de \mathcal{C} . Em $K_e(G)$, a é um vértice que, pela Propriedade da Preservação de Cliques, está em todas as cliques de \mathcal{C}' e, portanto, $K_e(G)$ é Helly.

(\Leftarrow) Seja \mathcal{C} uma família de cliques maximais de G que se interseptom duas a duas em dois elementos. Pela Propriedade da Preservação de Cliques, as cliques maximais da família \mathcal{C}' correspondente a \mathcal{C} em $K_e(G)$ têm, duas a duas, um vértice em comum.

Como $K_e(G)$ é Helly, existe um vértice a de $K_e(G)$ que pertence a todas as cliques de \mathcal{C}' . Em G , a é uma aresta que, pela Propriedade da Preservação de Cliques, tem ambos os extremos em todas as cliques de \mathcal{C} e, portanto, G é aresta-Helly. ■

Como consequência do Teorema 6.2.1 temos um algoritmo polinomial para reconhecer grafos aresta-Helly. De fato, dado um grafo G , para decidir se G é aresta-Helly, basta construir $K_e(G)$ e aplicar o algoritmo de Szwarcfiter [27] para verificar se $K_e(G)$ é Helly. Dado um grafo G com n vértices, m arestas e t triângulos, o grafo $K_e(G)$ tem m vértices, $m' = O(m^2)$ arestas e $t' = O(m^3)$ triângulos. Como a complexidade do algoritmo para testar se um grafo G é Helly é $O((n + t)m)$, a complexidade para testar se G é aresta-Helly é $O((m + t')m')$.

Observamos que nem a classe dos grafos Helly e nem a dos aresta-Helly

são clique-de-arestas-fechadas.

6.3 K_4 -coberturas Helly em arestas

Uma abordagem para resolver a Conjetura 1.2.1 é encontrar condições sobre G para que $K_e(G)$ seja grafo clique e mostrar que todo grafo satisfaz estas condições. Nesta seção apresentamos uma condição suficiente sobre um grafo G para que seu grafo clique de arestas seja um grafo clique e consideramos detalhadamente esta condição no caso em que $\omega(G) = 4$. A condição é dada em função da propriedade Helly em arestas e da cobertura do tipo definido a seguir.

Uma família de subgrafos completos de um grafo G é uma K_4 -cobertura de G se para todo subgrafo completo H de G com no máximo quatro vértices, existe um elemento B da família tal que H é subgrafo de B .

Para todo grafo G , a família dos grafos induzidos pelas cliques maximais de G é uma K_4 -cobertura.

Teorema 6.3.1 *Se existe uma K_4 -cobertura do grafo G que satisfaz a propriedade Helly em arestas, então $K_e(G)$ é grafo clique.*

Prova: Seja \mathcal{B} uma K_4 -cobertura de G que satisfaz a propriedade Helly em arestas e seja \mathcal{B}' a família de cliques de $K_e(G)$, associada a \mathcal{B} . Pelo Teorema de Roberts e Spencer, para provar que $K_e(G)$ é grafo clique basta mostrar que \mathcal{B}' cobre as arestas de $K_e(G)$ e satisfaz a propriedade Helly.

Seja ab uma aresta de $K_e(G)$. Em G , a e b são arestas cujos extremos estão em uma mesma clique. Seja H o subgrafo completo de G induzido pelos extremos de a e b . Como H tem no máximo quatro vértices, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que H é subgrafo de B . Seja B' a clique correspondente a B em $K_e(G)$. Por construção, a e b são vértices de B' . Assim, temos que B' cobre a aresta ab .

Seja \mathcal{D}' uma subfamília de \mathcal{B}' cujos elementos possuem, dois a dois, interseção não vazia. Seja \mathcal{D} a subfamília de \mathcal{B} , correspondente a \mathcal{D}' . Como os elementos de \mathcal{D}' possuem dois a dois um vértice em comum, os elementos de \mathcal{D} possuem, dois a dois, uma aresta em comum. Por hipótese, \mathcal{B} satisfaz a propriedade Helly em arestas, logo existe uma aresta a de G que pertence

a todos os elementos de \mathcal{D} . Em $K_e(G)$, a é um vértice que está em todos os elementos de \mathcal{D} . Assim, \mathcal{B}' satisfaz a propriedade Helly. ■

Observamos que nem todo grafo possui uma K_4 -cobertura que satisfaz a propriedade Helly em arestas. Em particular, existem grafos que não possuem tais coberturas e cujos grafos clique de arestas são grafos clique. Na verdade, a recíproca do Teorema 6.3.1 não é verdadeira. Por exemplo, o grafo G , ilustrado na Figura 6.8, é grafo clique de H e é clique de arestas do grafo P , da Figura 6.5. O grafo P é a única raiz sem vértices isolados, pelo operador clique de arestas, de G mas P não possui uma K_4 -cobertura que satisfaz a propriedade Helly em arestas. De fato, toda K_4 -cobertura de P deve conter os grafos induzidos pelas cliques $\{a, b, c, d\}$, $\{a, d, e, f\}$ e $\{a, b, f, g\}$ como elementos, mas estes formam uma subfamília que não satisfaz a propriedade Helly em arestas.

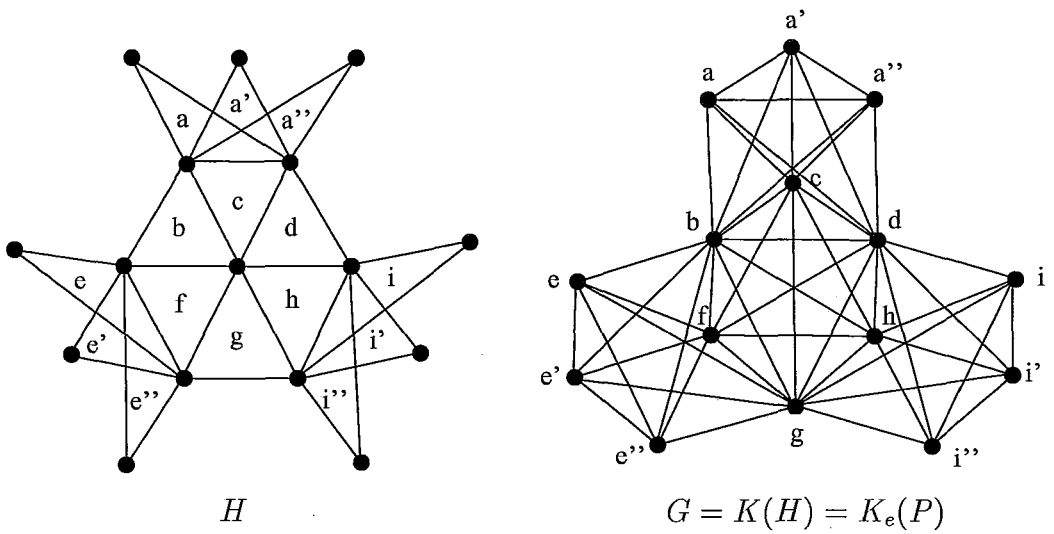


Figura 6.8: Grafo clique que é clique de arestas do grafo P .

Não sabemos se é possível testar a hipótese do Teorema 6.3.1 em tempo polinomial. O problema recai no fato de que, para encontrar uma família de subgrafos completos de G que é uma K_4 -cobertura que satisfaz a propriedade Helly em arestas, pode ser necessário examinar todas as famílias de subgrafos completos de G , e o conjunto dessas famílias contém o dos grafos induzidos pelas cliques maximais de G . É do conhecimento geral que um grafo pode conter um número exponencial de cliques maximais [21].

No entanto, no caso dos grafos cuja maior clique tem exatamente quatro

vértices, temos duas condições necessárias e suficientes que conduzem a algoritmos polinomiais para testar se um grafo satisfaz a hipótese do Teorema 6.3.1.

Teorema 6.3.2 *Seja G um grafo tal que $\omega(G) = 4$. Existe uma K_4 -cobertura de G que satisfaz a propriedade Helly em arestas se e somente se G é aresta-Helly.*

Prova: (\Rightarrow) Como $\omega(G) = 4$, toda K_4 -cobertura de G sem elementos comparáveis por inclusão é exatamente a família dos subgrafos induzidos pelas cliques maximais de G .

(\Leftarrow) Vale para todo grafo aresta-Helly pois basta considerar a família de subgrafos induzidos pelas cliques maximais de G . ■

Teorema 6.3.3 *Seja G um grafo tal que $\omega(G) = 4$. Existe uma K_4 -cobertura de G que satisfaz a propriedade Helly em arestas se e somente se P não é subgrafo de G .*

Prova: Vamos provar que P é subgrafo de G se e somente se não existe uma K_4 -cobertura de G que satisfaz a propriedade Helly em arestas.

(\Rightarrow) Como $\omega(G) = 4$, toda K_4 -cobertura de G deve conter cada K_4 de G como elemento. Se P é subgrafo de G , os subgrafos induzidos pelas cliques $\{a, b, c, d\}$, $\{a, d, e, f\}$ e $\{a, b, f, g\}$ de P , cf. Figura 6.5, devem ser elementos de toda K_4 -cobertura de G . Assim, nenhuma K_4 -cobertura de G satisfaz a propriedade Helly em arestas.

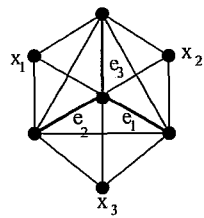
(\Leftarrow) Suponhamos que G não possui uma K_4 -cobertura que satisfaz a propriedade Helly em arestas. Seja \mathcal{C} a família dos subgrafos de G induzidos pelas cliques maximais de G . Como \mathcal{C} é uma K_4 -cobertura de G , \mathcal{C} não satisfaz a propriedade Helly em arestas. Seja $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ uma família minimal em relação a não satisfazer a propriedade Helly em arestas. Assim, \mathcal{C}' tem pelo menos três grafos completos maximais C_1 , C_2 e C_3 . Sejam $\mathcal{C}'_i = \mathcal{C}' \setminus \{C_i\}$. Como cada \mathcal{C}'_i satisfaz a propriedade Helly em arestas, podemos tomar as arestas $e_1 \in E(C_2) \cap E(C_3)$, $e_2 \in E(C_1) \cap E(C_3)$ e $e_3 \in E(C_1) \cap E(C_2)$, tais que $e_i \notin E(C_i)$.

Como tanto e_1 quanto e_2 são arestas de C_3 , tanto e_1 quanto e_3 são arestas de C_2 e tanto e_2 quanto e_3 são arestas de C_1 , os extremos de e_1 , e_2 e e_3 são, dois a dois, iguais ou adjacentes e como $\omega(G) = 4$, definem no máximo quatro vértices. Assim, a menos de isomorfismo, temos apenas três casos para um subgrafo H , gerado por e_1 , e_2 e e_3 .

Caso 1: $H \simeq K_3$. Neste caso, como e_2 e e_3 estão em C_1 , a aresta e_1 tem ambos os extremos em C_1 , uma contradição.

Caso 2: $H \simeq P_3$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $P_3 = (e_1, e_2, e_3)$. Neste caso, o extremo comum a e_1 e a e_2 está em $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ e o extremo comum a e_2 e a e_3 também está em $C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Assim, e_2 tem ambos os extremos em C_2 , uma contradição.

Caso 3: $H \simeq K_{1,3}$. Neste caso, e_1 , e_2 e e_3 induzem um K_4 em G .



Como C_1 , C_2 e C_3 são maximais, existem vértices x_1 , x_2 e x_3 que não são extremos nem de e_1 , nem de e_2 e nem de e_3 , tais que $x_i \in C_i$. O subgrafo gerado por e_1 , e_2 , e_3 , x_1 , x_2 e x_3 contém o grafo P . ■

Como $\omega(G) = 4$, o fato de G não ter um subgrafo isomorfo a P é equivalente a G não ter nenhum subgrafo isomorfo a um dos grafos da Figura 6.9 como subgrafo induzido.

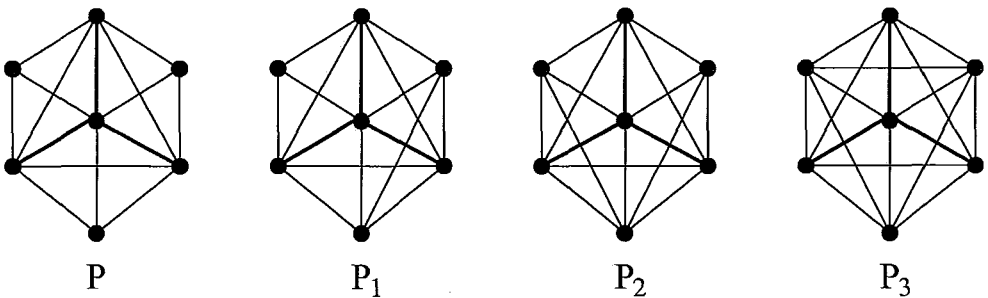


Figura 6.9: Possibilidades para o caso $H \simeq K_{1,3}$.

Assim, temos:

Corolário 6.3.1 *Se $\omega(G) = 4$, então as seguintes afirmações são equivalentes.*

- (i) *Existe uma K_4 -cobertura de G que satisfaz a propriedade Helly em arestas;*
- (ii) *G é aresta-Helly;*

(iii) P não é subgrafo de G ;

(iv) G não tem P, P_1, P_2 nem P_3 como subgrafo induzido.

Como consequência do Teorema 2.4.1, do Teorema 6.3.1 e do Corolário acima, temos que:

Corolário 6.3.2 *Se $\omega(G) \leq 4$ e P não é subgrafo de G , então $K_e(G)$ é grafo clique.*

Capítulo 7

Conclusões

Neste capítulo, revisamos os problemas em aberto presentes no texto, como forma de sugerir direções para pesquisas futuras no assunto.

No Capítulo 3 apresentamos resultados referentes à aplicação iterada do operador clique de arestas. Segundo os resultados obtidos, a dinâmica deste operador não é complicada. Mas permanece ainda a questão proposta em [2] de estudar a dinâmica dos operadores $\phi_{k,m}$, que são uma generalização do clique de arestas e, além de relacionar as dinâmicas destes operadores, estender os outros resultados aqui apresentados aos operadores $\phi_{k,m}$.

No Capítulo 4 revisamos os resultados referentes às classes de grafos clique-de-arestas-fechadas e resolvemos problemas de caracterização relativos à aplicação do clique de arestas a quatro classes de grafos: a dos grafos estrelados, a dos estrelados de limiar, a dos partilhados e a dos grafos de limiar. Para cada classe descrevemos uma classe de grafos que contém os grafos clique de arestas dos grafos que pertencem a classe dada. Também, em cada caso, caracterizamos os grafos cujos grafos clique de arestas pertencem à classe dada e descrevemos quais grafos estrelados de limiar, partilhados e de limiar são grafos clique de arestas. Alguns problemas em aberto, referentes ao tema deste capítulo, são o de determinar outras classes de grafos que são clique-de-arestas fechadas, em particular, determinar se a classe dos grafos clique é clique-de-arestas-fechada. O de caracterizar quais grafos estrelados são grafos clique de arestas. E o de resolver os problemas de caracterização associados a aplicação do operador clique de arestas a outras classes de grafos.

No Capítulo 5 descrevemos uma caracterização para os grafos clique de

arestas, baseada no conceito de 2-rotulação. Apesar de sabermos verificar de maneira eficiente se uma dada 2-rotulação é boa, não conhecemos um algoritmo eficiente para o problema de decidir se um dado grafo admite ou não uma 2-rotulação boa. Permanece em aberto o problema do reconhecimento dos grafos clique de arestas.

No Capítulo 6 definimos a classe dos grafos aresta-Helly e mostramos que ela pode ser reconhecida em tempo polinomial. Também neste capítulo, estudamos a questão de se estabelecer relações entre a classe dos grafos clique e a dos grafos clique de arestas. Conjectura-se que a classe dos grafos clique de arestas é uma subclasse da dos grafos clique. Nossos resultados implicam que um possível contra-exemplo para esta conjectura deve ter pelo menos uma clique com seis vértices.

Referências Bibliográficas

- [1] M.O. ALBERTSON. Signed-review # 05170. *Mathematical Reviews*, **92**, 1992.
- [2] M.O. ALBERTSON E K.L. COLLINS. Duality and perfection for edges in cliques. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, **36** p. 298–309, 1984.
- [3] M.R. CERIOLI. Grafos clique de arestas. Relatório Técnico 438, COPPE - Sistemas, UFRJ – Rio de Janeiro, 1997.
- [4] M.R. CERIOLI E J.L. SZWARCFITER. Diâmetros de grafos clique de arestas. In *XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, páginas 415–416. SBMAC, 1997.
- [5] M.R. CERIOLI E J.L. SZWARCFITER. Grafos clique de arestas de grafos estrelados. In *XXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, página 158. SBMAC, 1998.
- [6] M.R. CERIOLI E J.L. SZWARCFITER. A characterization of edge clique graphs. Relatório Técnico 510, COPPE - Sistemas, UFRJ – Rio de Janeiro, 1999.
- [7] M.R. CERIOLI E J.L. SZWARCFITER. Characterizing intersection graphs of substars of a star by forbidden subgraphs. Relatório Técnico 33, Núcleo de Computação Eletrônica, UFRJ - Rio de Janeiro, 1999.
- [8] M.R. CERIOLI E J.L. SZWARCFITER. Edge clique graphs and some classes of chordal graphs. Relatório Técnico 21, Núcleo de Computação Eletrônica, UFRJ – Rio de Janeiro, 1999.

- [9] M.R. CERIOLO E J.L. SZWARCFITER. Edge clique graphs of some classes of chordal graphs. In *Thirtieth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, página 11, 1999.
- [10] M.R. CERIOLO E J.L. SZWARCFITER. Uma caracterização de grafos estrelados. In *XXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, página 169. SBMAC, 1999.
- [11] G. CHARTRAND, S.F. KAPOOR, T.A. MCKEE, E F. SABA. Edge-clique graphs. *Graphs and Combinatorics*, **7** p. 253–264, 1991.
- [12] V. CHVÁTAL E P.L. HAMMER. Aggregation of inequalities in integer programming. In P.L. Hammer, E.L. Johnson, B.H. Korte, e G.L. Nemhauser, editores, *Studies in Integer Programming*, volume 1 de *Annals of Discrete Mathematics*, páginas 145–162. North-Holland, 1977.
- [13] S. FÖLDES E P.L. HAMMER. Split graphs. In F. Hoffman et al., editor, *Proceedings 8th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, páginas 311–315. Louisiana State Univ., 1977.
- [14] M.C. GOLUMBIC. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. New York, Academic Press, 1980.
- [15] J. GUSTEDT. On the pathwidth of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **45** p. 233–248, 1993.
- [16] R.C. HAMELINK. A partial characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, **5** p. 192–197, 1968.
- [17] L.T. KOU, L.J. STOCKMEYER, E C.K. WONG. Covering edges by cliques with regard to keyword conflicts and intersection graphs. *Communications of the ACM*, **21** p. 135–139, 1978.
- [18] N.V.R. MAHADEV E U.N. PELED. *Threshold Graphs and Related Topics*, volume 56 de *Annals of Discrete Mathematics*. Elsevier, North-Holland, 1995.

- [19] E. MARCZEWSKI. Sur deux propriétés des classes d'ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, **33** p. 303–307, 1945.
- [20] T.A. MCKEE. Clique multigraphs. In Y. Alavi, F.R.K. Chung, R.L. Graham, e D.F. Hsu, editores, *Second International Conference in Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications*, páginas 371–379. SIAM, 1991.
- [21] J.W. MOON E L. MOSER. On cliques in graphs. *Israel Journal of Mathematics*, **3** p. 23–28, 1965.
- [22] E. PRISNER. *Graph Dynamics*, volume 338 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Essex, Longman, 1995.
- [23] E. PRISNER. Line graphs and generalizations – a survey. *Congressus Numerantium*, **116** p. 193–229, 1996.
- [24] A. RAYCHAUDHURI. Intersection number and edge clique graphs of chordal and strongly chordal graphs. *Congressus Numerantium*, **67** p. 197–204, 1988.
- [25] A. RAYCHAUDHURI. Edge clique graphs of some important classes of graphs. *Ars Combinatoria*, **32** p. 269–278, 1991.
- [26] F.S. ROBERTS E J.H. SPENCER. A characterization of clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, **10** p. 102–108, 1971.
- [27] J.L. SZWARCFITER. Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Combinatoria*, **45** p. 29–32, 1997.