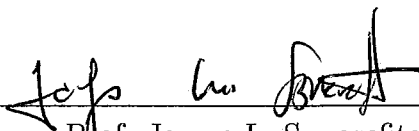


SOBRE CONJUNTOS INDEPENDENTES MAXIMAIS DE UM GRAFO

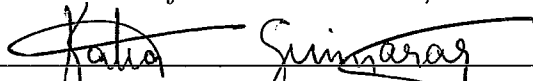
Rommel Melgaço Barbosa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



Prof. Jayme L. Szwarcfiter, Ph.D.



Prof. Kátia Guimarães, Ph.D.



Prof. Bert Hartnell, Ph.D.



Prof. Nelson Maculan, D.Sc.



Prof. Fábio Protti, D.Sc.



Prof. José Plínio de Oliveira Santos, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1999

BARBOSA, ROMMEL MELGAÇO

Sobre conjuntos independentes maximais
de um grafo [Rio de Janeiro] 1999

X, 68 pp., 29.7 cm, (COPPE/UFRJ,
D.Sc., Engenharia de Sistemas e
Computação, 1999)

Tese – Universidade Federal do Rio de Ja-
neiro, COPPE

1 – Conjuntos independentes

2 – Grafos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE CONJUNTOS INDEPENDENTES MAXIMAIS DE UM GRAFO

Rommel Melgaço Barbosa

Dezembro/1999

Orientador: Jayme L. Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho caracterizamos grafos Z_m -bem-cobertos para as classes de grafos livres de $K_{1,3}$, cordais, simpliciais e arco-circulares. É dada uma caracterização de grafos quase Z_m -bem-cobertos. Caracterizamos grafos simpliciais em $M(2)$ e propriedades para grafos nas classes $M(t)$ e $I(t)$. Resultados e construções de grafos 1- Z_m -bem-cobertos e fortemente Z_m -bem-cobertos são também descritos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

On maximal independent sets in a graph

Rommel Melgaço Barbosa

December/1999

Advisor: Jayme L. Szwarcfiter

Department: Computing and Systems Engineering

In this work, we describe characterizations of Z_m -well-covered graphs for $K_{1,3}$ -free, chordal, simplicial and circular-arc graphs. A characterization of almost Z_m -well-covered graphs is also given. We formulate characterizations of simplicial graphs in $M(2)$ and properties of graphs in $M(t)$ and $I(t)$. Results and construction of 1- Z_m -well-covered graphs and strongly Z_m -well-covered graphs are also given.

Para meus pais

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador professor Jayme Szwarcfiter, pela orientação e por sempre ter incentivado e acreditado na minha forma de trabalho.

Ao professor Bert Hartnell por ter me recebido em Halifax. Pelas críticas e sugestões dadas por ele e também pelos auxílios financeiros conseguidos para que eu participasse de vários congressos. Estendo esse agradecimento a todos do departamento de matemática e computação da Saint Mary's University, Canadá, e em especial ao professor Art Finbow pela atenção dada durante a minha permanência em Halifax.

Agradeço aos professores Mark Ellingham e Mike Plummer por terem me recebido na Vanderbilt University por dois anos e pelas sugestões dadas.

Agradeço a todos da área de grafos da COPPE e em especial a professora Sula de cujo curso saiu a idéia para o tema aqui desenvolvido.

Agradeço aos meus colegas da UFMT, que me concederam licença para que eu pudesse me dedicar integralmente a este trabalho.

Finalmente, quero agradecer e dedicar este trabalho a Suzanne Franks, cujo amor, carinho, dedicação, estímulo e companhia constantes, foram fundamentais para que eu desenvolvesse esse trabalho durante os dois anos que estive em Nashville.

Índice

1	Introdução	1
2	Notação e resultados preliminares	5
3	Grafos quase Z_m-bem-cobertos	15
3.1	Introdução	15
3.2	Grafos de quase paridade	16
4	Grafos livres de $K_{1,3}$, cordais, simpliciais e arco-circulares Z_m-bem-cobertos	21
4.1	Introdução	21
4.2	Grafos livres de $K_{1,3}$ de paridade	23
4.3	Grafos simpliciais, cordais e arco-circulares Z_m -bem-cobertos .	25
4.4	Uma aplicação para centro de grafos	32
5	As classes de grafos $M(t)$ e $I(t)$	36
5.1	Introdução	36
5.2	A classe $I(t)$	37

5.3	Grafos simpliciais em $M(2)$	39
5.4	Grafos t-emparelháveis	41
6	Grafos 1-Z_m-bem-cobertos e grafos fortemente Z_m-bem-cobertos	44
6.1	Introdução	44
6.2	Resultados	45
7	Produtos de grafos Z_m-bem-cobertos e construção de grafos fortemente Z_m-bem-cobertos	54
7.1	Introdução	54
7.2	Produto lexicográfico	56
7.3	Corona de Grafos	61
8	Conclusões	63

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de um grafo bipartido bem-coberto	9
2.2	Exemplo de um grafo bipartido com emparelhamento perfeito que não satisfaz P	9
2.3	O ciclo C_n	9
2.4	Exemplo de um grafo com dois ciclos básicos	10
2.5	Grafos com cintura ≥ 5 bem-cobertos	11
2.6	Grafo sem C_4 e C_5 bem-coberto	11
2.7	Grafos 4-conexos, livres de $K_{1,3}$, planares e bem-cobertos . . .	13
3.1	Grafos minimalmente não bem-cobertos	16
3.2	Os Conjuntos I_1 , I_2 e I	18
4.1	Os Conjuntos I_1 , I_2 e os vértices de I_3 , representados por retângulos.	24
4.2	Um grafo Z_2 -bem-coberto tendo vértices que não pertencem a nenhum simplex.	26
4.3	Os conjuntos $N[v]$, S_1 , W e Y	30
4.4	Caso 1 do Teorema 4.10	31

4.5	Caso 2 do Teorema 4.10	31
4.6	Grafo arco-circular Z_m -bem-coberto	33
5.1	Um grafo cordal em $M(2)$	40
5.2	Um grafo em $E(t)$	43
5.3	Emparelhamento maximal de menor tamanho	43
5.4	Emparelhamento perfeito	43
6.1	Um grafo simplicial $1-Z_2$ -bem-coberto	47
6.2	Um grafo simplicial	48
6.3	Um grafo G com uma aresta m -crítica	50
6.4	O octaedro	53
6.5	Um grafo planar fortemente Z_2 -bem-coberto	53
7.1	Um grafo Z_3 -bem-coberto com cintura 6	55
7.2	$\text{Ho}\{G_i\}$ é Z_3 -bem-coberto	57
7.3	Um grafo fortemente Z_2 -bem-coberto	59
7.4	Uma família de grafos fortemente Z_m -bem-cobertos	59

Capítulo 1

Introdução

Karp [27] mostrou que o problema de determinação do número de independência para grafos, em geral, é NP-completo. É importante então, estudar classes de grafos para as quais a determinação deste parâmetro tenha complexidade polinomial.

Um grafo G é **bem-coberto** se todo conjunto independente maximal de vértices em G tiver a mesma cardinalidade. A classe dos grafos bem-cobertos é uma das classes para a qual o número de independência pode ser calculado de maneira mais simples. De fato, para essa classe, basta utilizarmos o algoritmo guloso para determinarmos um conjunto independente maximal que, nesta classe, também será máximo.

A questão agora é: Podemos reconhecer se um grafo é bem-coberto em tempo polinomial?

A propriedade de não ser bem-coberto está em NP. De fato, basta exibirmos dois conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes.

Chvátal e Slater [16], e Sankaranarayana e Stewart [38] provaram que a propriedade de não ser bem-coberto é NP-completo.

Caro, Sebö e Tarsi [14] mostraram que mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos continua Co-NP-completo.

Staples [39] define um grafo G como sendo **1-bem-coberto** se ele for bem-coberto e para qualquer $v \in V(G)$, o grafo $G \setminus v$ também for bem-coberto. Grafos 1-bem-cobertos sem C_4 foram caracterizados em [23]. Pinter [30] define um grafo G como sendo **fortemente bem-coberto** se ele for bem-coberto e $G \setminus e$ também for bem coberto, para qualquer $e \in E(G)$.

Finbow e Hartnell [19] definem um grafo de **paridade** G como sendo um grafo G em que todos conjuntos independentes maximais de vértices em G têm a mesma paridade. De uma maneira geral, um grafo G é dito ser Z_m -**bem-coberto** se $|I| \equiv |J| \pmod{m}$, $\forall I, J$ conjuntos independentes maximais de vértices em G . Portanto grafos Z_m -bem-cobertos são uma extensão natural da classe dos grafos bem-cobertos.

Definimos grafos **1- Z_m -bem-cobertos** como sendo grafos Z_m -bem-cobertos G , tais que $G \setminus v$ é também Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$. Um grafo G é **fortemente Z_m -bem-coberto** se ele for Z_m -bem-coberto e $G \setminus e$ for também Z_m -bem-coberto, $\forall e \in E(G)$. Em [1] mostramos várias propriedades sobre estas classes.

Para algumas classes de grafos foram obtidas caracterizações que permitem o reconhecimento de grafos bem-cobertos em tempo polinomial. Porém o reconhecimento polinomial de grafos Z_m -bem-cobertos só era conhecido para a classe dos grafos com cintura > 5 [13, 19]. Em [2] caracterizamos grafos livres de $K_{1,3}$ Z_m -bem-cobertos e em [4] caracterizamos os grafos cordais, simpliciais e arco-circulares Z_m -bem-cobertos. Em [6] apresentamos uma aplicação em centro de grafos, que é generalizada aqui.

A classe $M(t)$ é a classe dos grafos tendo t tamanhos distintos de conjuntos independentes maximais. Caro [11] mostrou que o reconhecimento de grafos na classe $M(t)$, mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ é Co-NP-completo. Finbow, Hartnell e Whitehead [22] caracterizaram grafos de cintura maior ou igual a 8 com exatamente 2 tamanhos de conjuntos independentes maximais, isto é, em $M(2)$. Em [3] caracterizamos grafos simpliciais em $M(2)$. Também definimos a classe $I(t)$ como sendo os grafos em $M(t)$ em que os tamanhos dos conjuntos independentes maximais são consecutivos, isto é, da forma $r, r + 1, \dots, r + (t - 1)$, para algum $r \in \mathbb{N}$. No mesmo artigo, mostramos que $I(t) = M(t)$, para grafos livres de $K_{1,3}$.

Definimos um grafo G como sendo **quase bem-coberto** se ele não for bem-coberto, mas $G \setminus v$ for bem-coberto, $\forall v \in V(G)$. Em [5] conjecturamos que $K_{1,2}$ seja o único grafo quase bem-coberto. Um grafo G é **quase Z_m -**

bem-coberto se ele não for Z_m -bem-coberto, mas $G \setminus v$ for Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$. Em [2] caracterizamos os grafos quase Z_m -bem-cobertos. Como consequência, mostramos que a nossa conjectura em [5] era correta.

Uma questão natural é saber se é possível construir grafos 1- Z_m -bem-cobertos que não sejam 1-bem-cobertos e grafos fortemente Z_m -bem-cobertos que não sejam fortemente bem-cobertos. Mostramos aqui como construir grafos com tais propriedades.

No capítulo 2, introduzimos a notação utilizada neste trabalho e alguns resultados conhecidos para grafos bem-cobertos.

No capítulo 3, damos uma caracterização completa dos grafos quase Z_m -bem-cobertos, isto é, grafos que não são Z_m -bem-cobertos, mas cuja retirada de qualquer vértice o torna Z_m -bem-coberto.

No capítulo 4, apresentamos caracterizações de grafos Z_m -bem-cobertos para a classe dos grafos livres de $K_{1,3}$, cordais, simpliciais e arco-circulares. Apresentamos também uma aplicação dos resultados obtidos, mostrando que dado qualquer grafo G é sempre possível encontrar um supergrafo H Z_m -bem-coberto e tal que $C(G) = H$.

No capítulo 5, mostramos que para grafos livres de $K_{1,3}$ $I(t) = M(t)$, caracterizamos grafos simpliciais em $M(2)$ e apresentamos algumas condições suficientes para que grafos cordais estejam em $I(2)$. Introduzimos o conceito de grafos t-emparelháveis e mostramos alguns resultados básicos para esta classe de grafos.

No capítulo 6, apresentamos algumas propriedades de grafos 1- Z_m -bem-cobertos e fortemente Z_m -bem-cobertos.

No capítulo 7, apresentamos algumas propriedades sobre produtos de grafos Z_m -bem-cobertos e maneiras de se obter grafos fortemente Z_m -bem-cobertos que não sejam fortemente bem-cobertos.

No capítulo 8, deixamos várias questões e conjecturas para estudos e desenvolvimento posteriores para a área.

Parte dos resultados que aparecem aqui foram apresentados por nós nas seguintes conferências:

“Algumas Questões Sobre Grafos Cordais Bem-cobertos”, XX CNMAC, Gramado, Setembro, 1997 . Co-autoria com Sulamita Klein.

“Uma Nota Sobre Centro de Grafos e Grafos Bem-cobertos”. ELIO, Chile, Novembro, 1997. Co-autoria com Sulamita Klein.

“Some results about parity graphs and almost parity graphs” , 21th Midwestern conference on combinatorics, cryptography and computing- Indiana State University, Terre Haute, USA, October, 1997. Com Bert Hartnell.

“Some problems based on the relative sizes of the maximal independent sets in a graph”. Com Bert Hartnell. 29th Southeastern international conference on combinatorics, graph theory and computing- Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida, USA, March 1998.

“Characterization of Z_m -well-covered graphs for some classes of graphs”. Com Bert Hartnell. 5th Czech-Slovak International Symposium on Combinatorics, Graph Theory, Algorithms and Applications- Charles University, Prague, Czech Republic, July 1998.

“On 1- Z_m -well-covered and strongly Z_m -well-covered graphs”. 30th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing- Florida Atlantic University, Boca Raton, Florida, USA, March 1999.

Capítulo 2

Notação e resultados preliminares

A notação utilizada aqui segue a mesma usada em [7, 41]. Alguns dos resultados apresentados neste capítulo são também discutidos em [24, 33]. Nosso objetivo aqui é apresentar a notação e definições que serão utilizadas nos outros capítulos.

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Indicamos por $V(G)$ o conjunto dos vértices de G e por $E(G)$ o conjunto das arestas de G . Dados $u, v \in V(G)$, indicamos por $u \sim v$ quando u for adjacente a v . Um conjunto I de vértices é dito ser independente se quaisquer dois elementos de I não forem unidos por uma aresta. Um conjunto independente de vértices I é dito ser maximal, se não existir outro conjunto independente J que contenha propriamente I . O tamanho do maior conjunto independente do grafo G , denotado por $\alpha(G)$, é chamado de número de independência de G . Uma aresta $e \in E(G)$ é dita ser **crítica** se $\alpha(G \setminus e) \geq \alpha(G)$. Um **emparelhamento** no grafo G é um subconjunto M de $E(G)$ tal que quaisquer duas arestas em M não possuem vértice em comum. Um emparelhamento M é dito ser maximal se não existir outro emparelhamento M^* que contenha propriamente M . Um emparelhamento máximo é um emparelhamento de maior cardinalidade em G . Um emparelhamento é **perfeito** quando todos os vértices do grafo G forem incidentes a uma aresta do emparelhamento. Um grafo G é **equiemparelhável** se todo emparelhamento maximal de G tiver o mesmo tamanho.

Embora seja fácil determinar um emparelhamento máximo em qualquer

grafo G , o mesmo não ocorre para determinar o número de independência de um grafo.

Karp [27] mostrou que o problema de determinação do número de independência para grafos, em geral, é NP-completo. É importante então, estudar classes de grafos para as quais a determinação deste parâmetro tenha complexidade polinomial.

Indicamos por $N(v)$ o conjunto dos vértices adjacentes a v em G , e por $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. O grafo complemento do grafo G , indicado por \overline{G} , é o grafo tendo como vértices o conjunto $V(\overline{G}) = V(G)$ e $u \sim v$ em $V(\overline{G})$ sempre que $u \not\sim v$ em G . Dado $v \in V(G)$ definimos o grau de v , e indicamos por $gr(v)$, ao número de arestas incidentes ao vértice v .

Dados $v \in V(G)$, e $S \subseteq V(G)$, dizemos que v **domina** o conjunto S , se v for adjacente a todo vértice de S . Dados $u, v \in V(G)$, dizemos que o vértice v domina o vértice u quando $u \sim v$.

Um grafo G é **bem-coberto** se todo conjunto independente maximal de vértices em G tiver mesma cardinalidade. Os grafos bem-cobertos foram introduzidos por Plummer [32]. A classe dos grafos bem-cobertos é uma das classes para a qual o número de independência pode ser calculado de maneira mais simples. De fato, para essa classe, basta utilizarmos o algoritmo guloso para determinarmos um conjunto independente maximal que também será máximo.

A questão agora é: Podemos reconhecer se um grafo é bem-coberto em tempo polinomial?

A propriedade de não ser bem-coberto está em NP. De fato, basta exibirmos dois conjuntos independentes maximais de tamanhos diferentes.

Chvátal e Slater [16], e Sankaranarayana e Stewart [38] provaram que a propriedade de não ser bem-coberto é NP-completo.

Caro, Sebö e Tarsi [14] mostraram que mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos continua Co-NP-completo.

Staples [39, 40] define um grafo G como sendo **1-bem-coberto** se ele for bem-coberto e para qualquer $v \in V(G)$, o grafo $G \setminus v$ também for bem-

coberto. Pinter [30, 31] define um grafo G como sendo **fortemente bem-coberto** se ele for bem-coberto e $G \setminus e$ também for bem coberto, para qualquer $e \in E(G)$.

Finbow e Hartnell [19] definem um grafo de **paridade** G como sendo um grafo G em que todos conjuntos independentes maximais de vértices em G têm a mesma paridade. De uma maneira geral, um grafo G é dito ser Z_m -**bem-coberto** se $|I| \equiv |J| \pmod{m}$, $\forall I, J$ conjuntos independentes maximais de vértices em G . Portanto grafos Z_m -bem-cobertos são uma extensão natural da classe dos grafos bem-cobertos.

Definimos grafos **1- Z_m -bem-cobertos** como sendo grafos Z_m -bem-cobertos G , tais que $G \setminus v$ é também Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$. Um grafo G é fortemente Z_m -bem-coberto se ele for Z_m -bem-coberto e $G \setminus e$ for também Z_m -bem-coberto, $\forall e \in E(G)$.

Uma **clique** em um grafo G é um subgrafo completo maximal de G .

Um vértice v de um grafo é dito ser **simplicial** se o grafo gerado por $N[v]$ for uma clique.

Uma clique de um grafo G tendo pelo menos um vértice simplicial é denominado um **simplex** do grafo.

Um grafo G é um grafo **simplicial** se todo vértice de G for simplicial or for adjacente a um vértice simplicial.

Um grafo G é **cordal** se todo ciclo de comprimento maior ou igual a 4 tiver uma corda.

Para algumas classes de grafos foram obtidas caracterizações que permitem o reconhecimento de grafos bem-cobertos em tempo polinomial. Passamos a descrever agora algumas dessas caracterizações.

A primeira caracterização para grafos bipartidos foi obtida por Ravindra [36]. Sejam G um grafo bipartido, $xy = e \in E(G)$, e G_e o grafo induzido por $N(x) \cup N(y)$.

Teorema 2.1 G é bem-coberto se e somente se G contém emparelhamento perfeito F tal que $\forall e \in F$, G_e é um grafo bipartido completo.

Observamos que a caracterização acima não conduz a algoritmo polinomial, pois teríamos que encontrar todos os emparelhamentos perfeitos do grafo.

Favaron [17] caracterizou grafos **muito bem-cobertos**, isto é, grafos bem-cobertos onde $\alpha(G) = |V| \setminus 2$.

Suponhamos que um grafo G tenha um emparelhamento perfeito F . Dizemos que o emparelhamento $F = \{a_1b_1, \dots, a_nb_n\}$ **satisfaz a propriedade P** se:

(a) $\forall a_i b_i \in F, \nexists w \in V(G)$ tal que $w \sim a_i$ e $w \sim b_i$.

(b) $\forall a_i b_i \in F$, não existe conjunto independente de dois vértices $\{u, v\} \subseteq V(G)$ que satisfaça $u \sim a_i$ e $v \sim b_i$.

Teorema 2.2 *Para qualquer grafo G as seguintes condições são equivalentes:*

i) G é muito bem-coberto.

ii) Existe um emparelhamento perfeito em G que satisfaz P .

iii) G contém pelo menos um emparelhamento perfeito em G e todo emparelhamento perfeito de G satisfaz P .

Por exemplo, no grafo da figura 2.1, $F = \{(1, 4); (2, 3); (5, 6)\}$ satisfaz a condição (ii) do teorema, portanto G é bem-coberto.

Já para o grafo da figura 2.2, $F = \{(1, 2); (3, 4); (5, 6)\}$ é um emparelhamento perfeito que não satisfaz a condição b) da propriedade P . De fato, $\{2, 5\}$ é um conjunto independente tal que $2 \sim 3$ e $5 \sim 4$, e $\{3, 4\} \in F$. Portanto este grafo não é bem-coberto.

O teorema acima fornece um algoritmo polinomial para reconhecimento de grafos bipartidos bem-cobertos.

Um resultado bastante útil para mostrar que um grafo não é bem-coberto foi provado em [10]:

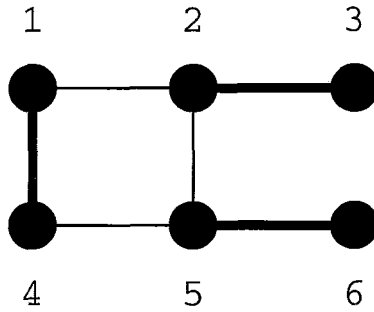


Figura 2.1: Exemplo de um grafo bipartido bem-coberto



Figura 2.2: Exemplo de um grafo bipartido com emparelhamento perfeito que não satisfaz P

Teorema 2.3 *Seja G um grafo. Se G for bem-coberto, então $G \setminus N[S]$ é bem-coberto, $\forall S$, onde S é um conjunto independente em $V(G)$.*

Como aplicação deste resultado, mostraremos que C_n não é bem-coberto para $n \geq 8$. Sejam $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ os vértices de um ciclo como mostrado na figura 2.3. Então, se $n \geq 8$, o conjunto $\{1, 7\}$ é independente e $G \setminus N[S]$ contém o $P_3 = \{3, 4, 5\}$ que não é bem-coberto, portanto C_n não é bem-coberto para $n \geq 8$.

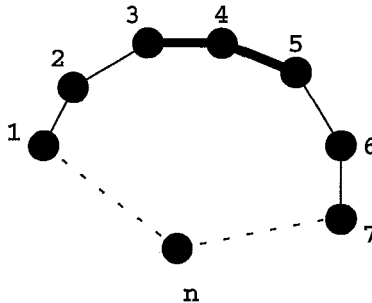


Figura 2.3: O ciclo C_n

A **cintura** de um grafo G é definido como sendo o comprimento do menor ciclo do grafo.

Uma aresta **pendente** em um grafo G é uma aresta possuindo um vértice de grau 1 em uma das extremidades.

Finbow, Hartnell [18] estudaram grafos bem-cobertos conforme a cintura do grafo.

Teorema 2.4 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 8. Então G é bem-coberto, se e somente se, suas arestas pendentes formarem um emparelhamento perfeito em G .*

Posteriormente, os mesmos autores juntamente com Nowakowski conseguem caracterizar grafos com cintura maior ou igual a 5 bem-cobertos [20].

Definição 2.5 *Um ciclo C_5 de um grafo é dito **básico** se C_5 não contiver dois vértices adjacentes de grau maior ou igual a 3. Denotaremos estes ciclos por CC_5 .*

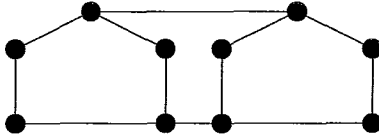


Figura 2.4: Exemplo de um grafo com dois ciclos básicos

Definição 2.6 *Em um grafo G , sejam $C(G) = \{v \in V(G) : v \in CC_5\}$, $P(G) = \{v \in V(G) : v \text{ é incidente a uma aresta pendente de } G\}$. Dizemos que G pertence a classe PC se $V(G) = P(G) \cup C(G)$, com $P(G) \cap C(G) = \emptyset$, o subgrafo induzido por $P(G)$ for um emparelhamento.*

Teorema 2.7 *Seja G um grafo com cintura pelo menos 5. Então G é bem-coberto, se e somente se, G pertencer a classe PC ou G for K_1 , C_7 ou um dos quatro grafos mostrados na figura 2.5.*

Finbow, Hartnell e Nowakowski [21] caracterizaram grafos que possam ter C_3 , mas sem C_4 e C_5 , bem-cobertos:

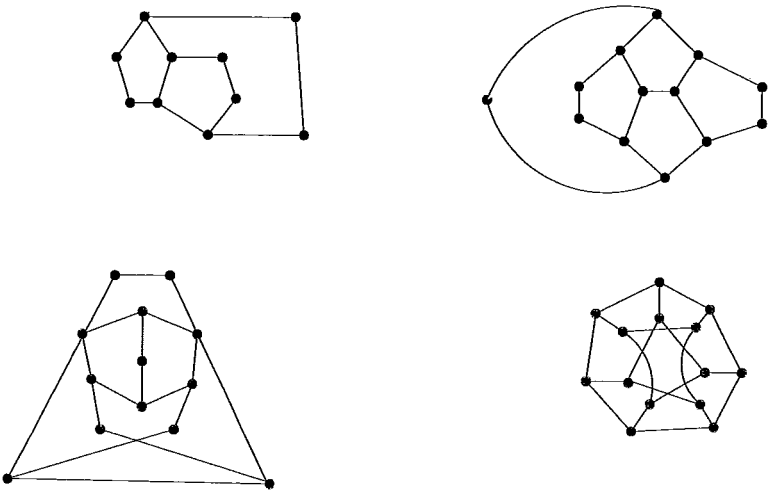


Figura 2.5: Grafos com cintura ≥ 5 bem-cobertos

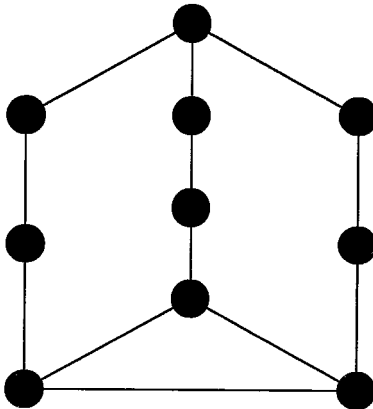


Figura 2.6: Grafo sem C_4 e C_5 bem-coberto

Teorema 2.8 *G é um grafo bem-coberto não contendo C_4 e C_5 , se e somente se, G for C_7 , o grafo da figura 2.6 ou for um grafo simplicial, em que cada vértice pertence a apenas um simplex com 2 ou 3 vértices.*

Grafos livres de $K_{1,3}$ bem-cobertos com algumas propriedades adicionais (4-conexos e 4-regulares, ou 4-conexos e planares), foram caracterizados por Hartnell e Plummer [25] no teorema abaixo:

Teorema 2.9 *Existem exatamente 5 grafos 4-conexos, livres de $K_{1,3}$ e planares bem-cobertos. Eles são os grafos mostrados na figura 2.7.*

Tankus e Tarsi [42] mostraram que grafos livres de $K_{1,3}$ bem-cobertos podem ser reconhecidos em tempo polinomial. A idéia deles foi utilizar o método desenvolvido por Lovász e Plummer [29] para reduzir um grafo G a um grafo $G^* = L(H)$, daí encontrar o grafo H , verificar em seguida se ele é equiemparelhável usando o resultado de Lesk, Plummer, Pulleyblank [28].

Um grafo **cúbico** é um grafo em que todos os seus vértices têm grau 3.

Grafos 3-conexos, cúbicos e planares bem-cobertos foram caracterizados por Campbell [8] e Campbell e Plummer [10]. Eles mostraram que existem apenas 4 grafos satisfazendo estas condições. Posteriormente Ellingham, Campbell e Royle [9] caracterizaram grafos cúbicos bem-cobertos em geral. Grafos com grau máximo igual a 3 bem-cobertos foram caracterizados por Ramey [35].

Algumas subclasses de grafos cordais (grafos de intervalo, grafos bloco, etc) foram caracterizadas em [43]. Posteriormente, uma caracterização geral, para grafos cordais bem-cobertos foi obtida em [34]. Uma questão natural seria saber se grafos perfeitos bem-cobertos podem ser reconhecidos em tempo polinomial. Um grafo G é fracamente cordal se todo ciclo de comprimento maior que 4 em G e \overline{G} tiver uma corda. Hayward [26] mostrou que os grafos fracamente cordais são perfeitos. Sankaranarayana [37], provou que o reconhecimento de grafos bem-cobertos perfeitos é Co-NP-completo. Para provar isto, ele mostrou que o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos é Co-NP-completo para a classe dos grafos fracamente cordais.

Finbow, Hartnell e Whitehead [22] caracterizaram grafos de cintura maior ou igual a 8 com exatamente 2 tamanhos de conjuntos independentes máximos, esta classe de grafos foi definida por $M(2)$. Em geral, a classe $M(t)$

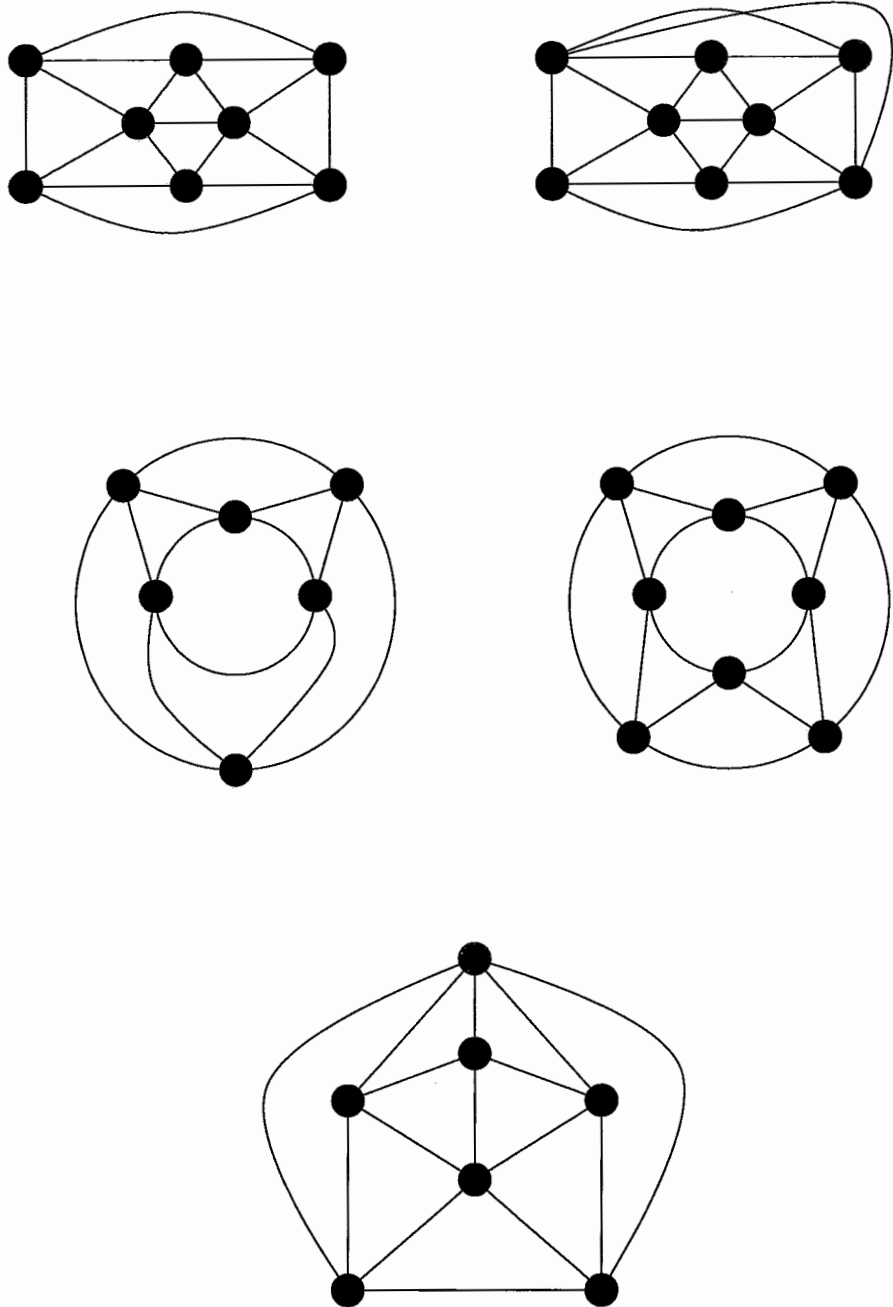


Figura 2.7: Grafos 4-conexos, livres de $K_{1,3}$, planares e bem-cobertos

é a classe dos grafos tendo t tamanhos distintos de conjuntos independentes maximais. Caro [11] mostrou que o reconhecimento de grafos na classe $M(t)$, mesmo para grafos livres de $K_{1,4}$ é Co-NP-completo.

Capítulo 3

Grafos quase Z_m -bem-cobertos

3.1 Introdução

Iniciamos este capítulo com algumas propriedades básicas sobre grafos minimalmente não bem-cobertos. Estes resultados estão provados em [12, 35]. Em seguida, definimos e caracterizamos grafos quase Z_m -bem-cobertos.

Definição 3.1 [35] *Um grafo G é minimalmente não bem-coberto se G não for bem coberto mas $G \setminus N[v]$ for bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

Teorema 3.2 [35] *Seja G um grafo minimalmente não bem-coberto com grau máximo Δ , então G contém no máximo $2\Delta - 1$ vértices.*

Corolário 3.3 *O conjunto dos grafos com grau máximo Δ contém um número finito de grafos minimalmente não bem-cobertos.*

Ramey [35] mostra que existem apenas 4 grafos minimalmente não bem-cobertos com $\Delta = 3$. São os grafos ilustrados na figura 3.1.

Existem 14 com $\Delta = 4$ e 43 com $\Delta = 5$.

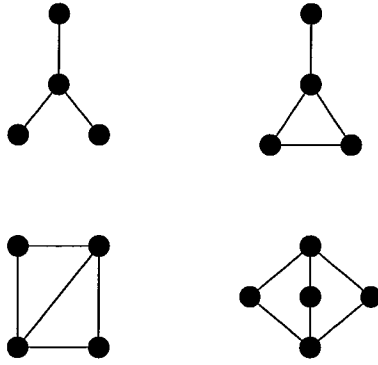


Figura 3.1: Grafos minimalmente não bem-cobertos

Teorema 3.4 [35] *Seja Δ fixo. Para o conjunto dos grafos com grau máximo Δ , existe um algoritmo linear para determinar se um grafo é bem-coberto.*

Embora o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos seja Co-NP-completo, podemos reconhecer grafos bem-cobertos com grau máximo limitado em tempo linear.

3.2 Grafos de quase paridade

Introduzimos um conceito similar a minimalmente não bem coberto e 1-bem-coberto.

Definição 3.5 *Um grafo G é um grafo quase bem-coberto se ele não for bem-coberto, mas $G \setminus \{v\}$ é bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

Definição 3.6 *Um grafo G é um grafo de quase paridade se G não for um grafo de paridade mas $G \setminus \{v\}$ for um grafo de paridade.*

Daremos aqui uma caracterização completa dos grafos de quase paridade e mostraremos que $K_{1,2}$ é o único grafo quase bem-coberto.

Inicialmente mostraremos que um grafo de quase paridade deve ser bipartido. O teorema 3.8 fornece uma caracterização completa dos grafos nesta família.

Lema 3.7 *Sejam G um grafo de quase paridade e I_1 e I_2 dois conjuntos independentes maximais de G de diferentes paridades. Então:*

1) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, e

2) $G = I_1 \cup I_2$.

Demonstração:

1) Suponha $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, e seja $|I_1| < |I_2|$.

$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists g \in I_1$ e $g \in I_2$. Seja $h \in N(g)$, então $h \notin I_1$ e $h \notin I_2$. Portanto I_1 e I_2 são conjuntos independentes maximais em $G \setminus \{h\}$ com paridades diferentes, contradição.

2) $G \subseteq I_1 \cup I_2$.

Suponha que exista um vértice g tal que $g \in V(G)$, mas $g \notin I_1$ e $g \notin I_2$. Existem vértices adjacentes a g que estão em I_1 e I_2 . Então os conjuntos I_1 e I_2 são conjuntos independentes maximais em $G \setminus \{g\}$ com paridades diferentes, contradição. \square

Teorema 3.8 *G é um grafo de quase paridade se e somente se $G = K_{r,s}$, com $r \equiv s + 1 \pmod{2}$.*

Demonstração:

1) É fácil ver que os grafos $K_{r,s}$ com $r \equiv s + 1 \pmod{2}$ são grafos de quase paridade.

2) Seja G um grafo de quase paridade. Pelo lema 3.7, G deve ser bipartido. Suponha que G não seja completo. Sejam I_1 e I_2 conjuntos independentes

maximais de paridades diferentes em G . Pelo lema 3.7, $G = I_1 \cup I_2$. Como G não é completo, deve existir um vértice $v \in I_1$, tal que v não é adjacente a todos os vértices de I_2 .

Seja $I = \{v\} \cup (\overline{N(v)} \cap I_2)$, $I \subseteq I_3$, com I_3 maximal e independente. Então temos:

- a) $I_1 \cap I_3 \supset \{v\}$, então I_1 e I_2 devem ter mesma paridade (pelo lema 3.7).
- b) $I_2 \cap I_3 \supset \overline{N(v)} \cap I_2 \neq \emptyset$, então I_2 e I_3 devem ter mesma paridade.

Portanto I_1 e I_2 têm mesma paridade, o que é uma contradição. □

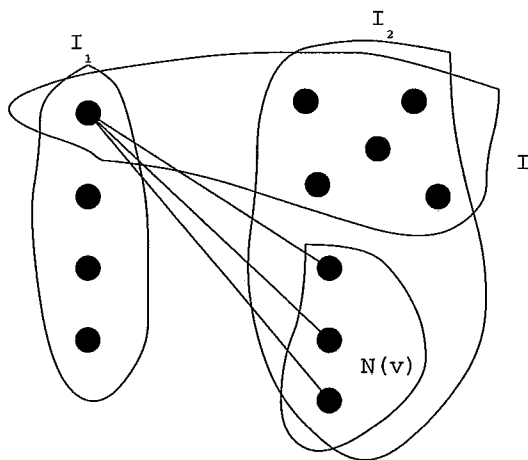


Figura 3.2: Os Conjuntos I_1 , I_2 e I .

Corolário 3.9 *O grafo $G = K_{1,2}$ é o único grafo quase bem-coberto.*

Demonstração:

Inicialmente mostraremos que a classe dos grafos quase bem-cobertos está contida na classe dos grafos de quase paridade. Suponha que exista um grafo quase bem-coberto que não seja de quase paridade. Então uma das duas seguintes possibilidades deve ocorrer:

- 1) G é um grafo de paridade e não bem-coberto. Então existem dois conjuntos independentes maximais I_1 e I_2 de mesma paridade com $|I_1| < |I_2|$.

Mas removendo um vértice $i \in I_2 \setminus I_1$, obteremos o conjunto $I_2 \setminus \{i\} \subseteq I$, com I maximal e independente o que implica $|I| > |I_1|$. Então $G \setminus \{i\}$ não é bem-coberto, contradição.

2) G não é um grafo de paridade, mas $\exists g \in G$ tal que $G \setminus \{g\}$ não é um grafo de paridade. Então $G \setminus \{g\}$ não é bem-coberto. Contradição.

Portanto os grafos quase bem-cobertos estão na família $K_{r,s}$, com $r \equiv s+1 \pmod{2}$.

a) Os grafos $K_{1,s}$ não são quase bem-cobertos para $s > 3$.

b) Suponha que exista um grafo $G = K_{r,s}$, $r \geq 2$, $s \geq r$, $r \equiv s+1 \pmod{2}$, quase bem-coberto, então quando removemos um vértice do conjunto I_r , teremos um conjunto independente maximal de cardinalidade $(r-1)$ e um outro com cardinalidade s , com $(r-1) < s$, e o grafo resultante não é bem coberto, contradição. \square

Definição 3.10 *Um grafo H é quase Z_m -bem-coberto se ele não for Z_m -bem-coberto mas $H \setminus \{x\}$ for Z_m -bem-coberto para todo $x \in V(H)$.*

Teorema 3.11 *Os grafos da forma $K_{1,l,m+2}$, para $l = 0, 1, 2, \dots$ são os únicos grafos quase Z_m -bem-cobertos, para $m \geq 3$.*

Demonstração:

Utilizando os mesmos argumentos da demonstração do lema 3.7, podemos provar que um grafo quase Z_m -bem-coberto deve ser bipartido e usando a idéia de 2 do teorema 3.8, que ele também deve ser completo. Agora, se H é um grafo quase Z_m -bem-coberto, sejam I_1 e I_2 dois conjuntos independentes maximais de $V(H)$, com $|I_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$. Consideremos agora os seguintes casos:

1) $|I_1|$ e $|I_2|$ são maiores que 1. Sem perda de generalidade, seja $|I_1| < |I_2|$, então $|I_2| - |I_1| = mr + k$, com $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq (m-1)$. Então se

$1 \leq k \leq (m-2)$, quando removermos um vértice de I_1 , teremos um conjunto independente maximal J_1 , com $|J_1| = |I_1| - 1$, e $|I_2| - |J_1| = mr + (k + 1)$. Se $k = m - 1$, quando removermos um vértice de I_2 , teremos um conjunto independente maximal J_2 , com $|J_2| = |I_2| - 1$, e $|J_2| - |I_1| = mr + (k - 1)$. Portanto, não existe grafo quase Z_m -bem-coberto para este caso.

2) $|I_1| = 1$ ou $|I_2| = 1$. Neste caso, os grafos são da forma $K_{1,p}$, onde $p - 1 \not\equiv 0 \pmod{m}$, $(p - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{m}$, então $p = ml + 2$, $l \in \mathbb{N}$. \square

Capítulo 4

Grafos livres de $K_{1,3}$, cordais, simpliciais e arco-circulares Z_m -bem-cobertos

4.1 Introdução

Caro, Sebö e Tarsi [14], mostraram que o reconhecimento de grafos bem-cobertos é Co-NP-completo mesmo para grafos que são livres de $K_{1,4}$, uma pergunta natural é saber a natureza desse problema para grafos livres de $K_{1,3}$.

Tankus e Tarsi [42] provaram recentemente que o problema de reconhecimento de grafos bem-cobertos é polinomial para a classe dos grafos livres de $K_{1,3}$.

Mostraremos em 4.2 que se um grafo livre de $K_{1,3}$ for Z_m -bem-coberto, então ele deve ser bem-coberto.

Em 4.3 mostramos uma condição suficiente para que um grafo dado seja Z_m -bem-coberto. Esta condição não é necessária, em geral, para que um grafo seja Z_m -bem-coberto. Mostraremos, porém, que para grafos simpliciais ela é necessária. Em seguida mostramos que um grafo cordal Z_m -bem-coberto, deve necessariamente ser simplicial. Apresentamos também uma caracterização para grafos arco-circulares Z_m -bem-cobertos.

Encerramos este capítulo com uma aplicação para centro de grafos. Mostramos que para qualquer grafo G dado, é sempre possível obter um grafo H Z_m -bem-coberto tendo G como centro.

Inicialmente faremos uma breve descrição da idéia de Tankus e Tarsi.

Teorema 4.1 *Existe um algoritmo polinomial para decidir se um dado grafo é equiemparelhável.*

Um emparelhamento em um grafo G pode ser visto como um conjunto independente de vértices em um grafo-linha. Portanto, dado um grafo H , se existir um grafo G tal que $H \simeq L(G)$, então:

Proposição 4.2 *H é bem coberto se e somente se G for equiemparelhável.*

O problema é que nem sempre existe um grafo G nestas condições. Um dos subgrafos proibidos para que isto ocorra é exatamente o grafo $K_{1,3}$, isto é, se H contiver $K_{1,3}$ como subgrafo induzido, então ele não é grafo linha de nenhum grafo.

Lovaász e Plummer [29] apresentam um algoritmo para construir um conjunto independente máximo de vértices de um grafo livre de $K_{1,3}$ G . O algoritmo deles é baseado na seguinte idéia:

1) G é transformado em um grafo G^* , o qual é o grafo linha de um grafo H .

2) O grafo H é construído e um conjunto independente máximo de G^* é encontrado por um algoritmo de emparelhamento máximo aplicado a H .

A maneira como G^* é obtido de G permite estabelecer a forma como o tamanho de um conjunto independente máximo é alterado de G para G^* . Desta forma, uma vez que um conjunto independente máximo de G^* é encontrado, ele pode ser estendido a um conjunto independente máximo de G .

O problema agora é garantir que G^* é bem-coberto se e somente se G for bem-coberto, e daí aplicar o algoritmo em H para decidir se um dado grafo é equiemparelhável.

Tankus e Tarsi [42] mostram que G^* é o último termo de uma sequência $\{G_0 = G, G_1, \dots, G^*\}$ de grafos livres de $K_{1,3}$, cada um obtido de seu predecessor, até que um grafo linha G^* é obtido, e além disso, se G_i for bem-coberto G_{i+1} será bem-coberto. Eles desenvolvem um algoritmo polinomial para checar o grafo G_i e retornar alguma das seguintes condições:

- 1) G_i não é bem-coberto, ou
- 2) G_i é bem coberto se e somente se G_{i+1} é bem-coberto.

Este procedimento é executado antes de cada passo da construção. Se ocorrer 1 sempre, então concluímos que G não é bem-coberto. Caso contrário, o grafo G^* é testado como descrito acima. Dessa maneira, eles conseguem provar o seguinte resultado:

Teorema 4.3 [42] *Existe um algoritmo polinomial para decidir se um grafo livre de $K_{1,3}$ é bem-coberto.*

4.2 Grafos livres de $K_{1,3}$ de paridade

Provaremos agora, que os grafos bem-cobertos são os únicos grafos livres de $K_{1,3}$ de paridade.

Teorema 4.4 *Se G for um grafo livre de $K_{1,3}$ de paridade, então G é bem-coberto.*

Demonstração:

Suponha que exista um grafo livre de $K_{1,3}$ G , que seja de paridade, mas não seja bem-coberto. Então existem conjuntos independentes maximais I_1 e I_2 de diferentes tamanhos em G , digamos $|I_1| < |I_2|$.

Sejam J_1 e J_2 os seguintes conjuntos:

$$J_1 = I_1 \setminus (I_1 \cap I_2), \text{ e}$$

$$J_2 = I_2 \setminus (I_1 \cap I_2).$$

1) Agora considere o subgrafo H induzido por $J_1 \cup J_2$. H é um grafo bipartido e livre de $K_{1,3}$, então H pode ter apenas caminhos de comprimentos pares ou ímpares, ou ciclos pares.

2) Como $|J_1| < |J_2|$, H deve ter pelo menos um caminho de comprimento par P com um vértice a mais em J_2 que em J_1 .

Seja I_3 o conjunto: $I_3 = (I_1 \setminus (P \cap I_1)) \cup (P \cap I_2)$.

Inicialmente observe que $|I_3| = |I_1| + 1$, e I_3 é também independente.

Se I_3 não fosse maximal, existiria um vértice w adjacente a um vértice de $P \cap I_1$, mas não adjacente a qualquer vértice de $I_1 \setminus (P \cap I_1)$ nem a qualquer vértice de $P \cap I_2$. Mas como G é livre de $K_{1,3}$, isto não é possível. Portanto I_3 é um conjunto independente maximal, contradizendo o fato de G ser um grafo de paridade. \square

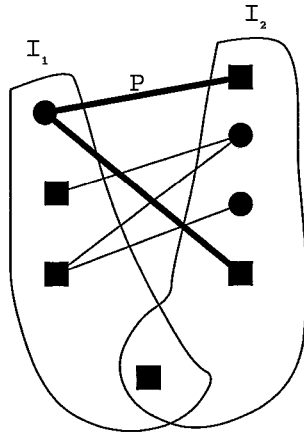


Figura 4.1: Os Conjuntos I_1 , I_2 e os vértices de I_3 , representados por retângulos.

Utilizando as mesmas idéias do teorema acima, podemos provar o seguinte resultado geral:

Teorema 4.5 *Se G for um grafo livre de $K_{1,3}$ Z_m -bem-coberto, então G é bem-coberto.*

Neste ponto, podemos verificar que dado um grafo G , livre de $K_{1,r}$ e Z_2 -bem-coberto, o problema de decidir se ele é bem-coberto é Co-NP-completo para $r > 6$, conforme o resultado de Caro [11] e polinomial para $r < 4$, porém não se sabe a natureza deste problema para $3 < r < 7$.

Concluimos observando que o resultado acima não é verdadeiro para grafos livres de $K_{1,r}$, para $r > 3$, pois $K_{1,3}$ é um grafo de paridade e não é bem-coberto.

4.3 Grafos simpliciais, cordais e arco-circulares Z_m -bem-cobertos

Definição 4.6 *Um grafo G é um grafo arco circular se ele for o grafo intersecção de arcos em um círculo.*

Em [34] é dado uma caracterização de grafos cordais, simpliciais e arco circulares bem-cobertos. Daremos aqui uma caracterização de grafos Z_m -bem-cobertos para aquelas classes de grafos.

Inicialmente, mostraremos uma condição suficiente para que um grafo seja Z_m -bem-coberto.

Teorema 4.7 *Seja G um grafo qualquer. Se para cada $g \in V(G)$, $\exists l \in N$, tal que g pertence a exatamente $(ml + 1)$ simplexos, então G é Z_m -bem-coberto.*

Demonstração:

Suponha que existam dois conjuntos independentes máximos, A_1, B_1 em G com $|A_1| \not\equiv |B_1| \pmod{2}$. Suponha $|A_1| \equiv r \pmod{m}$ e $|B_1| \equiv s \pmod{m}$.

Sejam $A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{mp+r}\}$ e $B_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_{mq+s}\}$.

Como para cada vértice v , $\exists l \in N$, tal que v pertence a $(ml+1)$ simplexos,

$a_i \in (mn_i + 1)$ simplexos, para $i = 1, \dots, mp + r$, e

$b_i \in (mh_i + 1)$ simplexos, para $i = 1, \dots, mq + s$.

Observe que para cada simplex $S \in G$, existem exatamente um $a_i \in A_1$ e um $b_j \in B_1$ tais que $a_i \in S$ e $b_j \in S$. Se para um dado S , existisse um $b_j \notin S$, poderíamos escolher $s \in S$, s simplicial, e $B_1 \cup \{s\}$ seria independente. S não pode ter mais que um vértice de B_1 porque S é uma clique e estes dois vértices seriam adjacentes.

Seja α o número de simplexos de G . Pela observação acima:

$$\alpha = (mn_1 + 1) + (mn_2 + 1) + \dots + (mn_{mp+r} + 1) = m(n_1 + n_2 + \dots + n_{mp+r}) + (mp + r)$$

$$\alpha = (mh_1 + 1) + (mh_2 + 1) + \dots + (mh_{mq+s} + 1) = m(h_1 + h_2 + \dots + h_{mq+s}) + (mq + s), \text{ então } s \equiv r \pmod{m}.$$

Mas isto é uma contradição. □

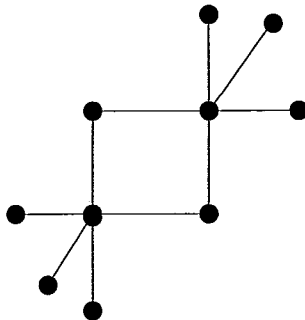


Figura 4.2: Um grafo Z_2 -bem-coberto tendo vértices que não pertencem a nenhum simplex.

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. Por exemplo, o grafo da figura 4.2 é um grafo Z_2 -bem-coberto no qual existem dois vértices que não pertencem a nenhum simplex.

Mostraremos agora que se o grafo for simplicial então a recíproca do teorema 4.7 é verdadeira.

Teorema 4.8 *Se G é um grafo Z_m -bem-coberto e simplicial, então para cada vértice $g \in V(G)$, $\exists l \in N$ tal que g pertence a exatamente $(ml+1)$ simplexes.*

Demonstração:

Suponha que algum vértice v pertença a exatamente $ml + p$ simplexes, digamos $S_1, S_2, \dots, S_{ml+p}$ para algum $l \in N$, com $1 < p \leq m$.

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_{ml+p}$ vértices simpliciais nos simplexes $S_1, S_2, \dots, S_{ml+p}$, respectivamente.

Estendemos $\{v\}$ a um conjunto independente maximal I .

Observe que $x_1, x_2, \dots, x_{ml+p} \notin I$. Agora, considere

$I_1 = I \setminus \{v\} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{ml+p}\}$, então

$|I| \not\equiv |I_1| \pmod{m}$, contradição. □

Nos teoremas que seguem, usaremos o lema abaixo que é provado em [13].

Lema 4.9 *Se G é um grafo Z_m -bem-coberto então $G \setminus N[v]$ e $G \setminus N[S]$ também são Z_m -bem-cobertos, $\forall v \in V(G)$ e qualquer conjunto independente S de G .*

Demonstração:

Se $G \setminus N[S]$ não fosse Z_m -bem-coberto, então existiriam conjuntos independentes maximais I_1, I_2 em $V(G \setminus N[S])$ tais que $|I_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$. Mas então $I_1 \cup S$ e $I_2 \cup S$ seriam conjuntos independentes maximais em $V(G)$ com $|I_1 \cup S| \not\equiv |I_2 \cup S| \pmod{m}$, contradição. □

Teorema 4.10 *Se G é cordal e Z_m -bem-coberto então G é simplicial.*

Demonstração:

Suponha que exista um grafo G que seja cordal, Z_m -bem-coberto mas não simplicial. Seja G minimal com estas propriedades. Como G é cordal, ele tem pelo menos, um vértice simplicial v . Também devido ao lema anterior $G \setminus N[v]$ é Z_m -bem-coberto. Então $S = G \setminus N[v]$ é um grafo Z_m -bem-coberto e cordal, e devido à minimalidade de G , S deve ser um grafo simplicial. Como G não é simplicial, deve existir um simplex S_1 de S que não é um simplex de G . Seja $X = \{s_1, s_2, \dots, s_p\}$ o conjunto dos vértices simpliciais de S_1 em S . Portanto em G os vértices de X têm vizinhos em $N(v)$. Mostraremos agora que existe pelo menos um vértice v_0 em $N(v)$ que domina os vértices em X , mas não domina todos os vértices em S_1 . Inicialmente, observe que se todo vértice em $N(v)$ dominasse S_1 , S_1 seria simplicial em G , contradição. Seja $N^*(v)$ o conjunto dos vértices de $N(v)$ que são adjacentes a pelo menos um vértice de X mas não a todos os vértices de S_1 . Então cada vértice de X deve ser dominado por, pelo menos, um vértice de $N^*(v)$. Se $g_1, g_2 \in N^*(v)$ são tais que g_1 domina $X_1 \subset X$ e g_2 domina $X_2 \subset X$ com $X_1 \neq X_2$, podemos tomar $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ onde g_1, g_2, x_2, x_1 é um C_4 , então ou g_1 domina x_2 ou g_2 domina x_1 . Procedendo desta forma, deveremos ter pelo menos um vértice $v_0 \in N(v)$ que domina X mas não S_1 . Agora, seja W o conjunto $W = S_1 \setminus N(v_0)$. Seja Y o conjunto dos vértices adjacentes a vértices em W , que não estão em W , e que estão em $S \setminus N(v_0)$. Observe que todo vértice de W tem um vizinho em Y , pois nenhum vértice de W é simplicial em G . Seja $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ um conjunto independente maximal em Y que domina W . Este conjunto sempre existe, de fato, se existissem $k_1, k_2 \in K$ tais que $k_1 \sim k_2$, existiria $\alpha_1 \in W$ tal que k_1 dominaria α_1 e $\alpha_2 \in W$ tal que k_2 dominaria α_2 , então $\alpha_1, \alpha_2, k_2, k_1$ seria um C_4 , logo ou k_1 dominaria α_2 ou k_2 dominaria α_1 . Observe que v_0 não é adjacente a nenhum elemento de K . Estenda $\{v_0\} \cup \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ a um conjunto independente maximal I_1 em G . Seja $\{v_0, k_1, k_2, \dots, k_n, r_1, r_2, \dots, r_j\}$ este conjunto. Então $|I_1| = 1 + j + n$. Veja figura 4.3

Agora, considere os seguintes casos:

1) Existe um vértice $w \in W$ adjacente a vértices simpliciais em S (além daqueles em S_1). Então w deve pertencer a ml simplexos ($\neq S_1$) em S , digamos T_1, \dots, T_{ml} . Agora, substitua os elementos em $K \cap (T_1 \cup \dots \cup T_{ml})$ por w e também todo outro elemento em K , que não seja simplicial em S , por seus vértices simpliciais adjacentes (um em cada simplex). Então cada

elemento não simplicial k_i será substituído por $ml_i + 1$ vértices. Chame este novo conjunto de K^* . Então $I_2 = \{v_0\} \cup K^* \cup \{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ é um conjunto independente maximal em G . Tendo substituído ml vértices simpliciais em K por w , e observando que cada um dos outros $n - ml$ vértices em K ($t_1, t_2, \dots, t_{n-ml}$) contribuem com 1 ou $ml^* + 1$ vértices para I_2 , vemos que I_2 tem cardinalidade $1 + j + 1 + (ml_1 + 1) + (ml_2 + 1) + \dots + (ml_{n-ml} + 1) = 1 + j + 1 + m(l_1 + \dots + l_{n-ml}) + (n - ml)1 = 1 + j + mL + (n - ml)1 + 1 = 1 + j + n + m(L - l) + 1 = 1 + j + mL^* + n + 1$. Então $|I_2| - |I_1| = mL^* + 1$, e G não é Z_m -bem-coberto, veja figura 4.4.

2) Não existe vértice $w \in W$ adjacente a vértices simpliciais em S (além daqueles em S_1). Substitua um vértice em K , digamos k_t , por um de seus vizinhos em W e por seus vizinhos independentes e simpliciais em S . Substitua todo outro vértice k_i em K por seus $(ml_i + 1)$ vizinhos simpliciais e independentes em S . Substitua todos outros elementos $k_i \in K$ por seus $ml_i + 1$ vértices simpliciais em S . Denomine este novo conjunto por K^* . Então $I_2 = \{v_0\} \cup K^* \cup \{r_1, r_2, \dots, r_j\}$ é um conjunto independente maximal em G . I_2 tem cardinalidade $1 + j + (ml_1 + 1) + (ml_2 + 1) + \dots + \{(ml_t + 1) + 1\} + \dots + (ml_n + 1) = 1 + j + m(l_1 + \dots + l_n) + n + 1$. Então $|I_2| - |I_1| = m(l_1 + \dots + l_n) + 1$, e G não é Z_m -bem-coberto, veja figura 4.5. \square

Como observado em [34] se G for um grafo arco circular, $G \setminus N[v]$ é um grafo de intervalo para qualquer $v \in V(G)$. Podemos facilmente observar que o grafo bipartido completo $K_{2,3}$ não é subgrafo induzido de nenhum grafo arco circular. Agora, daremos também uma caracterização de grafos arco circulares Z_m -bem-cobertos.

Teorema 4.11 *Seja G um grafo arco circular que não seja completo. $G \setminus N[v]$ é um grafo Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$ se e somente se G é Z_m -bem-coberto.*

Demonstração:

(\Leftarrow) Lema 1.

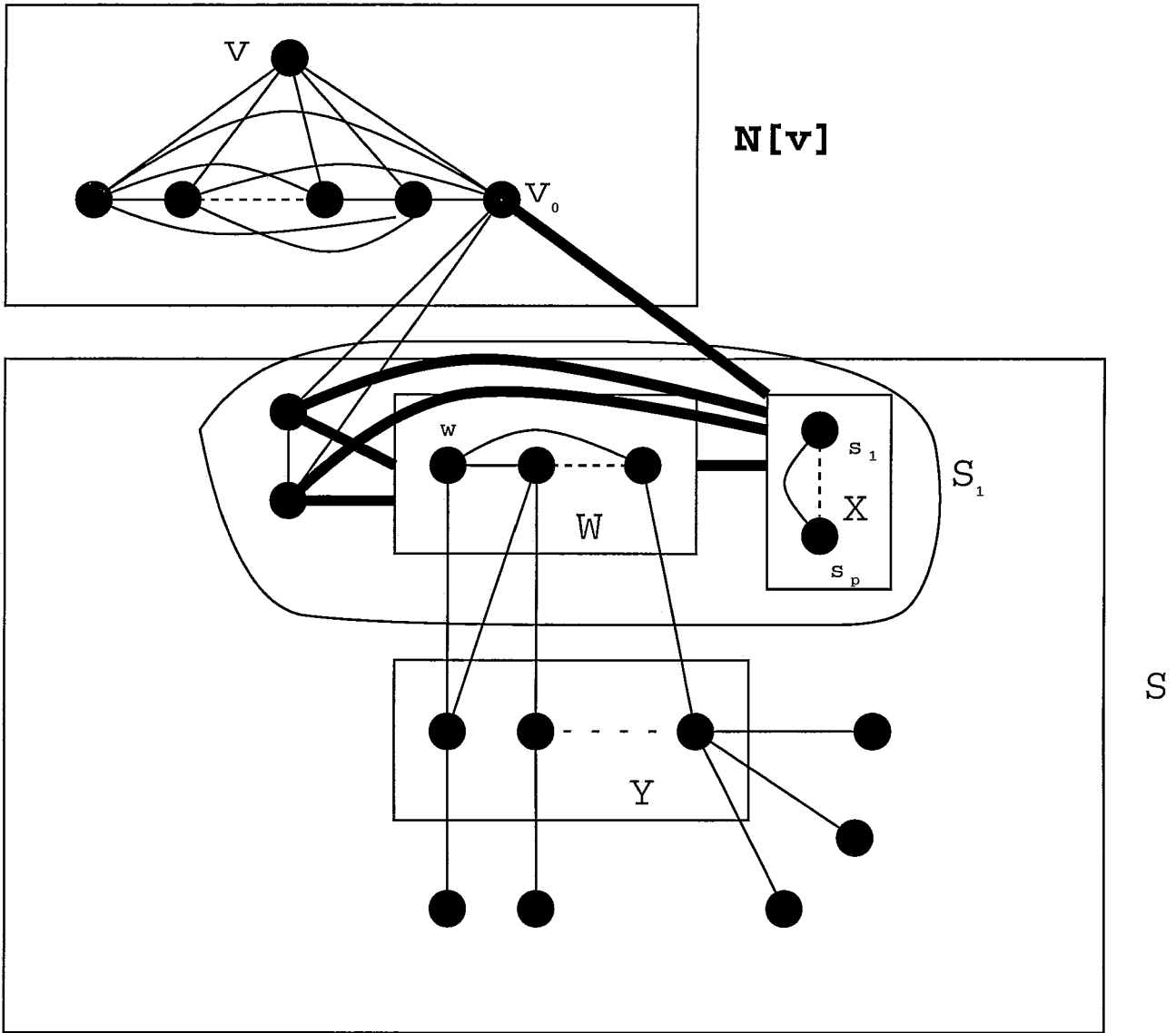


Figura 4.3: Os conjuntos $N[v], S_1, W$ e Y .

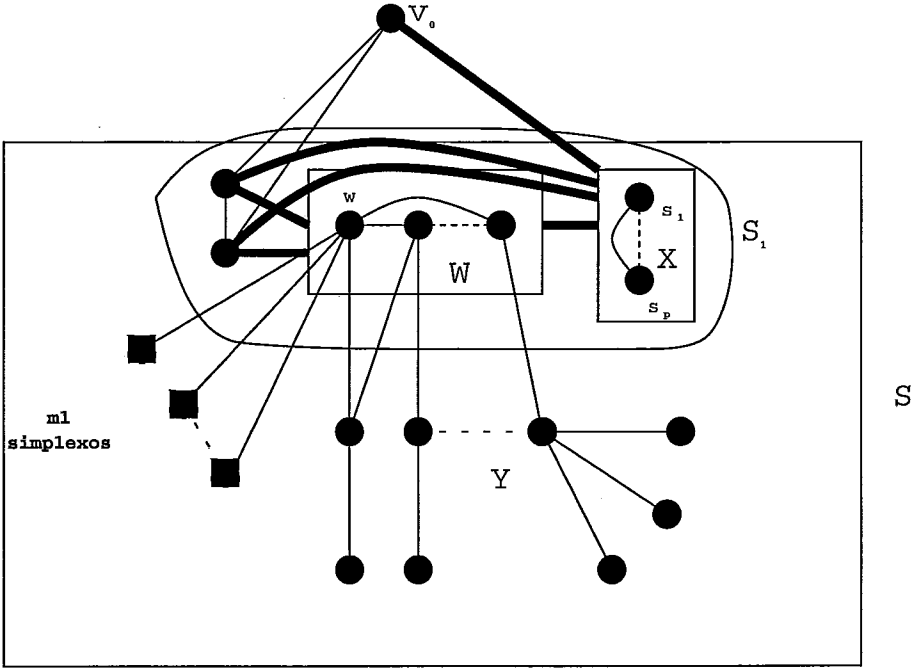


Figura 4.4: Caso 1 do Teorema 4.10

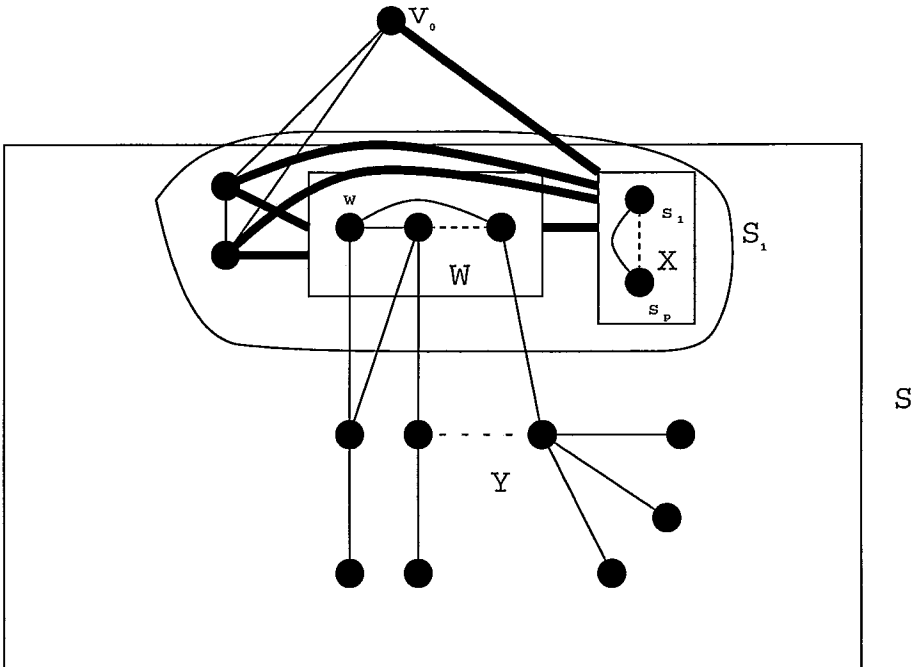


Figura 4.5: Caso 2 do Teorema 4.10

(\implies) Suponha que exista um grafo arco circular G , tal que $G \setminus N[v]$ é um grafo Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$, mas G não seja um grafo Z_m -bem-coberto. Sejam I_1, I_2 dois conjuntos independentes maximais em $V(G)$ com $|I_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$, então:

1) $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Suponha $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$, e seja $|I_1| < |I_2|$. $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \implies \exists g \in I_1$ e $g \in I_2$. Não existe vértice em $N(g)$ pertencente a I_1 nem a I_2 . Então $I_1 \setminus \{g\}$ e $I_2 \setminus \{g\}$ são conjuntos independentes maximais em $G \setminus N[g]$ com $|I_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$, contradição.

2) O subgrafo H gerado por $I_1 \cup I_2$ é completo. Suponha que H não seja completo. Sejam I_1 e I_2 conjuntos independentes maximais em H com $|I_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$. Como H não é completo, deve existir um vértice $v \in I_1$, tal que v não é adjacente a todos os vértices de I_2 . Seja $I = \{v\} \cup (\overline{N(v)} \cap I_2)$, $I \subseteq I_3$, com I_3 maximal e independente. Agora,

a) $I_1 \cap I_3 \supset \{v\}$, então $|I_1| \equiv |I_3| \pmod{m}$ (por 1).

b) $I_2 \cap I_3 \supset \overline{N(v)} \cap I_2 \neq \emptyset$, então $|I_2| \equiv |I_3| \pmod{m}$.

Então $|I_1| \equiv |I_2| \pmod{m}$, o que é uma contradição. Então H deve ser completo. Logo G contem $K_{2,3}$ como subgrafo, contradição. \square

O grafo da figura 4.6 é um exemplo de grafo arco-circular Z_m -bem-coberto.

4.4 Uma aplicação para centro de grafos

Agora, faremos uma aplicação do teorema 4.7 para centro de grafos. Uma versão para grafos bem-cobertos destes resultados aparece em [6].

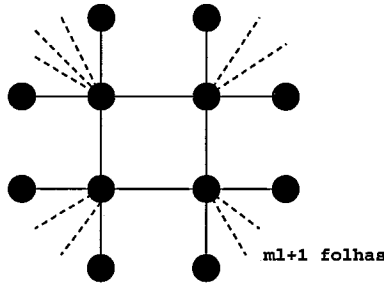


Figura 4.6: Grafo arco-circular Z_m -bem-coberto

Definição 4.12 *Seja G um grafo. A **excentricidade** de um vértice $v \in V(G)$ é definida por $e(v) = \max_{x \in V(G)} d(v, x)$, onde $d(v, x)$ é o comprimento do menor caminho de v a x .*

Definição 4.13 *Um vértice $u \in V(G)$ pertence ao centro de G se $e(u) = \min_{v \in V(G)} e(v)$.*

Definição 4.14 *O **grafo centro** de G , denotado por $C(G)$, é o subgrafo induzido pelos vértices do centro de G .*

Definição 4.15 *Uma classe de grafos Π é **centro-fechada** quando para qualquer grafo $H \in \Pi$, existir um grafo $G \in \Pi$ tal que $H \simeq C(G)$.*

Algumas classes de grafos centro-fechadas conhecidas são as dos grafos linha e dos grafos C_4 -livres.

Definição 4.16 *Uma classe de grafos Ω é **centro-completa** se para qualquer grafo H dado, existir um grafo $G \in \Omega$ tal que $C(G) \simeq H$.*

Proposição 4.17 *Para qualquer grafo H , existe um grafo G tal que, $C(G) \simeq H$.*

Uma forma de se construir um grafo G com a propriedade acima é descrito em [6].

Proposição 4.18 [15] *A classe dos grafos cordais não é centro-completa.*

Mostraremos agora que a classe dos grafos Z_m -bem-cobertos é centro completa.

Definição 4.19 *Dado um grafo G , definimos o grafo **m-estendido** de G , denotado por G' , como sendo o grafo construído da seguinte forma: Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$*

$$V(G') = V(G) \cup \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1\} \cup \dots \cup \{v_1^m, v_2^m, \dots, v_n^m\}$$

$$E(G') =$$

$$E(G) \cup \{(v_1, v_1^1), \dots, (v_1, v_1^m), (v_2, v_2^1), \dots, (v_2, v_2^m), \dots, (v_n, v_n^1), \dots, (v_n, v_n^m)\}$$

Proposição 4.20 *Para qualquer grafo G , o grafo estendido G' de G é Z_m -bem-coberto.*

Demonstração:

O grafo G' é simplicial, com cada vértice pertencendo a $ml + 1$ simplexes, portanto pelo teorema 4.7 ele é Z_m -bem-coberto. \square

Lema 4.21 *Para qualquer grafo G , $C(G) = C(G')$, onde G' é o grafo estendido de G .*

Teorema 4.22 *Para quaisquer grafo H e $m \in \mathbb{N}$ dados, existe um grafo G , Z_m -bem-coberto, tal que $C(G) \simeq H$.*

Demonstração:

Segue da proposição 4.17, que existe um grafo A tal que $C(A) \simeq H$.

Seja A' o grafo estendido de A . Pela proposição 4.20, A' é Z_m -bem-coberto. Tomemos $G = A'$, então pelo lema 4.21, $C(G) = C(A)$. Logo $C(G) \simeq H$. \square

Capítulo 5

As classes de grafos $M(t)$ e $I(t)$

5.1 Introdução

Definição 5.1 *Um grafo G pertence à classe $M(t)$ se G tem exatamente t tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais.*

Caro [11] mostrou que o reconhecimento de grafos na classe $M(t)$ é Co-NP-completo. Finbow, Hartnell e Whitehead [22] deram uma caracterização de grafos com cintura ≥ 8 pertencentes á classe $M(2)$.

Neste capítulo definiremos a classe de grafos $I(t)$ como sendo a classe de grafos em $M(t)$ onde os tamanhos dos conjuntos independentes maximais são números consecutivos.

Dado um grafo $G \in M(t)$ não se sabe a natureza do problema de decidir se G pertence a $I(t)$, porém, mostraremos que para grafos livres de $K_{1,3}$ $M(t) = I(t)$.

Daremos também uma caracterização completa de grafos simpliciais em $M(2)$ e uma condição suficiente para que um grafo cordal conexo pertença a $I(2)$.

Encerramos o capítulo aplicando alguns dos resultados para grafos t-emparelháveis.

5.2 A classe $I(t)$

Definição 5.2 Um grafo G pertence a classe $I(t)$ se G tem exatamente t tamanhos diferentes de conjuntos independentes maximais com tamanhos $r, r + 1, \dots, r + (t - 1)$, para algum $r \in \mathbb{N}$.

Inicialmente, mostraremos que para qualquer $t \in \mathbb{N}$, a classe $I(t)$ não é vazia.

Proposição 5.3 Para qualquer $t \in \mathbb{N}$, $I(t) \neq \emptyset$.

Demonstração:

Dado $t \in \mathbb{N}$, seja G um grafo qualquer com $\alpha(G) = t - 1$. Seja H o grafo obtido de G adicionando duas folhas a cada vértice de G . Afirmamos que H pertence a $I(t)$. Inicialmente observe que o maior conjunto independente de vértices possível inclui todas as folhas (e portanto nenhum vértice de G), ao passo que o menor conjunto independente maximal de H , seria um que incluísse o máximo possível de vértices de G (em particular $t - 1$). Então observe que existem conjuntos independentes de vértices em G , digamos I_k , de qualquer tamanho k , com $t - 1 \geq k \geq 0$. Podemos então estender cada conjunto I_k a um conjunto independente maximal em H tomando duas folhas de todos os outros vértices em G que não estejam em I_k . \square

Por exemplo, seja $G = K_{1,t-1}$, $\alpha(G) = t - 1$.

A construção acima também estabelece o seguinte resultado:

Corolário 5.4 Um grafo G pertencente a $I(t)$ não tem subgrafos proibidos.

Agora, daremos também uma condição suficiente para um grafo não pertencer a $I(t)$.

Proposição 5.5 *Se um grafo G tiver um vértice com 3 ou mais folhas adjacentes, então G não pode pertencer a $I(t)$.*

Demonstração:

Se $v \in V(G)$ tiver três ou mais folhas adjacentes, seja N o maior conjunto independente maximal contendo v . Removendo v de N e incluindo as folhas adjacentes a v , teremos um outro conjunto independente M . Estendendo, se necessário, M ao menor conjunto independente maximal contendo M . Mas então existe uma diferença de pelo menos 2 nos tamanhos de conjuntos independentes maximais de G , contradição. \square

Teorema 5.6 *Se G for livre de $K_{1,3}$, e $G \in M(t)$, então $G \in I(t)$.*

Demonstração:

Seja G um grafo livre de $K_{1,3}$. Suponhamos $G \in M(t) \setminus I(t)$. Suponha que G não seja bem-coberto. Então existem conjuntos independentes maximais I_1, I_2 em G com $|I_2| > |I_1| + 1$, e tais que, não existe conjunto independente maximal $|I|$ com $|I_1| < |I| < |I_2|$. Sejam J_1, J_2 os seguintes conjuntos:

$$J_1 = I_1 \setminus (I_1 \cap I_2)$$

$$J_2 = I_2 \setminus (I_1 \cap I_2),$$

1) Considere agora, o subgrafo H induzido por $J_1 \cup J_2$. $H = \langle J_1 \cup J_2 \rangle$ é um grafo bipartido, então H tem apenas caminhos pares, ímpares e ciclos pares.

2) Como $|J_1| < |J_2|$, H deve ter, pelo menos, um caminho par P com um vértice a mais em J_2 que em J_1 .

Seja I_3 o conjunto: $I_3 = (I_1 \setminus (P \cap I_1)) \cup (P \cap I_2)$

Se I_3 não fosse maximal, então existiria um vértice w adjacente a um vértice de $P \cap I_1$, mas não adjacente a nenhum vértice de $I_1 \setminus (P \cap I_1)$ e nem a nenhum vértice de $P \cap I_2$. Mas como G é livre de $K_{1,3}$, isto não é possível. Portanto I_3 é um conjunto independente maximal, contradizendo o fato que G não tem conjunto independente maximal de tamanho entre $|I_1|$ and $|I_2|$.

□

O resultado não é verdadeiro se trocarmos a condição de ser livre de $K_{1,3}$ por livre de $K_{1,4}$. Por exemplo, $K_{1,3}$ é um grafo livre de $K_{1,4}$, pertencente a $M(2) \setminus I(2)$.

5.3 Grafos simpliciais em $M(2)$

Daremos agora uma caracterização completa dos grafos simpliciais em $M(2)$.

Teorema 5.7 *Um grafo simplicial G pertence a $M(2)$ se e somente se os vértices de G puderem ser particionados em dois conjuntos não vazios A e Q tais que os vértices de A pertencem a exatamente um simplex e aqueles em Q a exatamente $k > 1$ simplexes, onde os vértices de Q formam uma clique.*

Demonstração:

(\implies) Suponha que G seja simplicial com a propriedade que seus vértices possam ser particionados em dois conjuntos não vazios A e Q satisfazendo a hipótese. Ou um conjunto independente maximal não tem vértices de Q e portanto exatamente um vértice simplicial de cada simplex que inclui um vértice de Q e um vértice de cada um dos outros simplexes (se houver algum) ou ele tem exatamente um vértice de Q e portanto um vértice simplicial de todos os simplexes, exceto k deles, que inclui um vértice de Q e um vértice de cada um dos outros simplexes. Portanto G pertence a $M(2)$.

(\Leftarrow) Considere um grafo simplicial em $M(2)$. Observe que se existissem vértices, digamos x e y , que pertencessem a exatamente k_1 e k_2 simplexos, respectivamente, onde $1 < k_1 < k_2$, então G teria, pelo menos 3 tamanhos de conjuntos independentes maximais. Em particular, forme S_1 tomando um vértice simplicial de cada simplex, construa S_2 tomando x e um vértice simplicial de cada simplex diferente dos k_1 simplexos que contêm x , e S_3 tomando y e um vértice simplicial de cada simplex diferente dos k_2 simplexos que contêm y . Segue que todo vértice de G pertence ou a 1 ou a $k > 1$ simplexos (note que se nenhum vértice pertencesse a mais de um simplex, G seria bem-coberto), então ambas condições devem ocorrer. Finalmente, se existissem dois vértices, digamos u e v , tais que ambos pertencessem a k simplexos mas u e v não fossem adjacentes, então G não pertenceria a $M(2)$. Isto segue construindo conjuntos independentes maximais S_1 (um vértice simplicial de cada simplex), S_2 (u e um vértice simplicial de cada simplex diferente dos k contendo u) e S_3 (tomando u e v e um vértice simplicial de cada simplex não contendo u ou v). Portanto os vértices pertencentes a k simplexos devem formar uma clique. \square

Não podemos retirar a condição no teorema anterior que o grafo seja simplicial. Também não podemos substituir simplicial por cordal, como mostrado na figura 5.1.

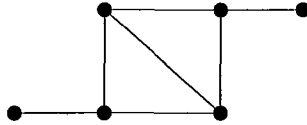


Figura 5.1: Um grafo cordal em $M(2)$

Corolário 5.8 *Um grafo simplicial G pertence a $I(2)$ se e somente se os vértices de G puderem ser particionados em dois conjuntos não vazios A e Q tais que os vértices em A pertençam a exatamente um simplex e aqueles em Q a exatamente $k = 2$ simplexos, onde os vértices de Q formam uma clique.*

Teorema 5.9 *Seja G um grafo cordal conexo. Se g pertencer a exatamente um simplex, $\forall g \in V(G) \setminus Q$, tal que Q é uma clique na qual todo vértice de Q não pertence a nenhum simplex, então $G \in I(2)$.*

Demonstração:

Suponha que G tenha n simplexos. Se Q é uma clique na qual todo vértice não pertence a nenhum simplex, então seja I_1 um conjunto independente em $G \setminus Q$ tal que ele cubra o número máximo de vértices de Q . Então,

1) Se ele cobrir todo vértice de Q , então teremos um conjunto independente maximal de tamanho n .

2) Se existir um vértice $z \in Q$, tal que ele não seja adjacente a nenhum vértice em I_1 , então existe um vértice $y \in V(G) \setminus Q$, tal que z é adjacente a y . Mas como I_1 é um conjunto independente que cobre o número máximo de vértices em Q , existe $x \in I_1$, tal que x não é adjacente a y . Mas então, seja t qualquer vértice em Q adjacente a x , então x, t, z, y é um C_4 , e t deve ser adjacente a y (pois o grafo é cordal). Então $I_2 = (I_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ cobre mais elementos em Q que em I_1 , contradição. Portanto observamos que existem conjuntos independentes maximais de apenas 2 tamanhos, n e $n + 1$. \square

A recíproca do teorema acima não é verdadeira. $K_{1,2}$ pertence a $I(2)$, mas ele tem um vértice pertencente a dois simplexos.

Problema 5.10 *Como são os grafos livres de $K_{1,3}$ em $I(t)$?*

5.4 Grafos t -emparelháveis

Definição 5.11 *Um grafo G é t -emparelhável se G tiver exatamente t tamanhos diferentes de emparelhamentos maximais. Dizemos que G pertence à classe $E(t)$.*

Inicialmente, mostraremos que se $G \in E(t)$, então todos os emparelhamentos devem ter tamanhos em uma sequência consecutiva, isto é similar à definição da classe $I(t)$. Para o caso de emparelhamentos não pode ocorrer

algo semelhante a classe $M(t)$ estudada neste capítulo. Este resultado pode ser mostrado usando o teorema de Berge para caminhos aumentantes. A demonstração que faremos é uma aplicação dos resultados de 5.2. Em seguida daremos uma maneira de, dado qualquer $t \in N$, construir um grafo em $E(t)$.

Utilizando o teorema 5.6, provamos o seguinte resultado:

Teorema 5.12 *Se G tiver emparelhamentos maximais de tamanhos t e $t+i$, ele deve possuir emparelhamentos maximais de tamanho t' , $\forall t', t < t' < t+i$.*

Demonstração:

Se G é um grafo com emparelhamentos maximais t e $t+i$ e não tiver emparelhamento maximal de tamanho t' para algum $t < t' < t+i$, então $L(G)$ seria um grafo livre de $K_{1,3}$ em $M(t) \setminus I(t)$, contradição. \square

Com base no teorema acima, a primeira idéia para tentar decidir se um grafo $G \in E(t)$, seria encontrar um emparelhamento máximo em G , o que é fácil, e depois encontrar um emparelhamento maximal mínimo, o que é, em geral difícil. Este problema é NP-completo para grafos bipartidos, cúbicos e planares [45]. A única classe de grafos para a qual se conhece algoritmo polinomial para encontrar o tamanho do emparelhamento maximal mínimo é a classe das árvores [45].

Teorema 5.13 *Para $\forall t \in N$, existe um grafo planar $G \in E(t)$.*

Demonstração:

Mostraremos que o grafo abaixo pertence a $E(t+1)$, onde t é o número de C_4 's no grafo abaixo:

O emparelhamento de menor tamanho é obtido tomando-se as arestas que não estejam nos C_4 . De fato, se retirarmos qualquer aresta deste emparelhamento, poderemos incluir outras 2 (uma de cada C_4 , vizinho a esta

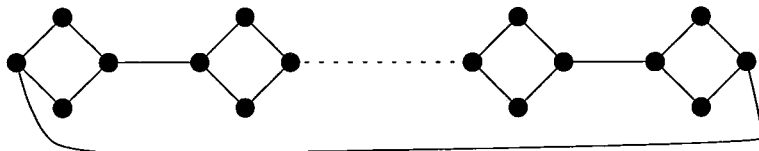


Figura 5.2: Um grafo em $E(t)$

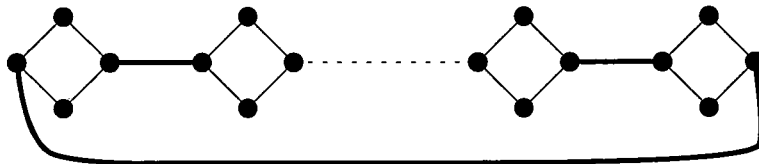


Figura 5.3: Emparelhamento maximal de menor tamanho

aresta) e teríamos um emparelhamento maior. Este menor emparelhamento tem tamanho t .

O grafo tem um emparelhamento perfeito de tamanho $2t$.

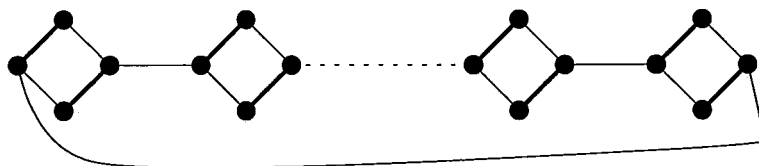


Figura 5.4: Emparelhamento perfeito

Portanto, usando o teorema anterior, $G \in E(t + 1)$.

Capítulo 6

Grafos $1-Z_m$ -bem-cobertos e grafos fortemente Z_m -bem-cobertos

6.1 Introdução

Definição 6.1 *Um grafo G é $1-Z_m$ -bem-coberto quando ele for Z_m -bem-coberto e $G \setminus v$ for também Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

Definição 6.2 *Um grafo G é fortemente Z_m -bem-coberto quando ele for Z_m -bem-coberto e $G \setminus e$ for também Z_m -bem-coberto, $\forall e \in E(G)$.*

Neste capítulo mostraremos alguns resultados sobre estas duas classes de grafos. Dentre outros resultados, provaremos uma condição suficiente para que um grafo seja $1-Z_m$ -bem-coberto. Mostraremos que esta condição também será necessária para que grafos cordais sejam $1-Z_m$ -bem-cobertos. Caracterizaremos os grafos cordais e simpliciais fortemente Z_m -bem-cobertos. Caracterizaremos os grafos que são simultaneamente fortemente Z_m -bem-cobertos e $1-Z_m$ -bem-cobertos. Finalmente mostraremos que grafos $1-Z_m$ -bem-cobertos possuem grau mínimo pelo menos 2.

6.2 Resultados

Lema 6.3 *Se G é Z_m -bem-coberto, então $\alpha(G) \equiv \alpha(G \setminus N[v]) + 1 \pmod{m}$.*

Demonstração:

Seja I um conjunto independente maximal em $G \setminus N[v]$, com $|I| = \alpha(G \setminus N[v])$. $I \cup \{v\}$ é um conjunto independente maximal em G , e como G é um grafo Z_m -bem-coberto $\alpha(G) \equiv (|I \cup \{v\}|) + 1 \pmod{m}$. \square

Teorema 6.4 *Se G for um grafo 1- Z_m -bem-coberto, então $G \setminus N[v]$ é 1- Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

Demonstração:

Como G é um grafo 1- Z_m -bem-coberto, $G \setminus v$ e $G \setminus N[v]$ são também Z_m -bem-cobertos. Suponha agora que exista $w \in V(G)$ tal que $(G \setminus N[v]) \setminus w$ não seja Z_m -bem-coberto. Então, existem conjuntos independentes maximais I_1, I_2 em $(G \setminus N[v]) \setminus w$ tais que $|I_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$. Neste caso, $I_1 \cup \{v\}$ e $I_2 \cup \{v\}$ seriam conjuntos independentes maximais em $G \setminus w$ (observe que $G \setminus w$ é um grafo Z_m -bem-coberto para todo $w \in V(G)$), com $|I_1 \cup \{v\}| \not\equiv |I_2 \cup \{v\}| \pmod{m}$, contradição. \square

Teorema 6.5 *Se G é um grafo fortemente Z_m -bem-coberto, então $G \setminus N[v]$ é fortemente Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$.*

Demonstração:

G fortemente Z_m -bem-coberto $\Rightarrow G$ é Z_m -bem-coberto $\Rightarrow G \setminus N[v]$ é Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G)$. Então temos apenas que provar que $(G \setminus N[v]) \setminus e$ é Z_m -bem-coberto, $\forall v \in V(G), e \in E(G)$.

Suponha que $\exists v \in V(G), e \in E(G)$ tais que $(G \setminus N[v]) \setminus e$ não seja Z_m -bem-coberto. Então $\exists I, J$ conjuntos independentes maximais em $(G \setminus N[v]) \setminus e$ tais que $|I| \not\equiv |J| \pmod{m}$, mas então $I \cup \{v\}, J \cup \{v\}$ seriam conjuntos independentes maximais em $G \setminus e$ com $|I| \not\equiv |J| \pmod{m}$, uma contradição pois G é fortemente Z_m -bem-coberto. \square

Agora, daremos uma condição suficiente para um grafo ser 1- Z_m -bem-coberto.

Teorema 6.6 *Dado um grafo G , se todo vértice de G pertencer a exatamente $ml + 1$ simplexos e cada simplex tiver mais de um vértice simplicial, então G é um grafo 1- Z_m -bem-coberto.*

Demonstração:

Observe que se todo simplex tiver mais que um vértice simplicial, então quando retirarmos um vértice v de qualquer simplex S , $S \setminus \{v\}$ será também um simplex. Portanto todo vértice de $G \setminus \{g\}$ pertencerá a $ml + 1$ simplexos e pelo teorema 4.8 $G \setminus \{g\}$ é Z_m -bem-coberto. \square

Esta condição não é necessária para grafos em geral, como mostrado no exemplo da figura 6.1. Para grafos cordais esta condição é também necessária.

Teorema 6.7 *Se G for um grafo cordal 1- Z_m -bem-coberto, então todo vértice de G deve pertencer a exatamente $ml + 1$ simplexos e cada simplex tem mais de um vértice simplicial.*

Demonstração:

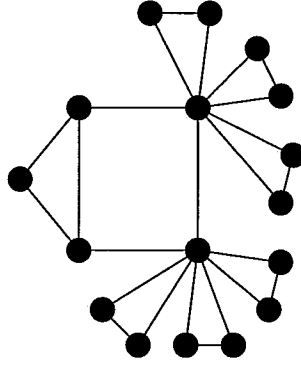


Figura 6.1: Um grafo simplicial $1-Z_2$ -bem-coberto

Como G é Z_m -bem-coberto, todo vértice $g \in V(G)$ pertence a $ml + 1$ simplexos. Suponha que exista um vértice $g \in V(G)$ e um simplex S tais que $g \in S$ e S tem apenas um vértice simplicial s . Então quando retirarmos o vértice s de G , o grafo $G \setminus \{s\}$ permanece cordal, mas g pertencerá a ml simplexos em $G \setminus \{s\}$, então $G \setminus \{s\}$ não é Z_m -bem-coberto, contradição. \square

Corolário 6.8 K_1 e K_2 são as únicas árvores (conexas) $1-Z_m$ -bem-cobertas.

Demonstração:

K_1 e K_2 são grafos $1-Z_m$ -bem-cobertos. Toda árvore é um grafo cordal, então pelo teorema 6.7, todo vértice deve pertencer a $(ml + 1)$ simplexos, cada um possuindo mais de um vértice simplicial, então o grafo deve possuir triângulos e, portanto, não pode ser uma árvore. \square

Provaremos depois, Teorema 6.18, um resultado mais geral, isto é, mostraremos que não existem vértices de grau 1 em todo grafo $1-Z_m$ -bem-coberto com pelo menos 3 vértices.

Lema 6.9 *Seja G um grafo cordal e s_1 um vértice simplicial de G . Então $G \setminus (s_1, g)$ é também cordal, $\forall g$ adjacente a s_1 .*

Demonstração:

Suponha que existam $s_1, g \in V(G)$, s_1 simplicial, tal que $G \setminus (s_1, g)$ não seja cordal. Então existe um $C_4 = s_1 a g b$, mas neste caso, como a não é adjacente a b , s_1 não seria um vértice simplicial em G , contradição. \square

O resultado acima não é válido para grafos simpliciais, como mostrado na figura 6.2

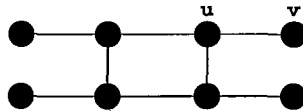


Figura 6.2: Um grafo simplicial

Proposição 6.10 K_1 e K_2 são os únicos grafos cordais conexos fortemente Z_m -bem-cobertos.

Demonstração:

K_1 e K_2 são fortemente Z_m -bem-cobertos. Suponha que exista $G \neq K_1, K_2$, cordal e fortemente Z_m -bem-coberto. Seja S_1 um simplex de G , e $s_1 \in S_1$, um vértice simplicial. Seja g um vértice adjacente a s_1 em G . Pelo lema 6.9 $G \setminus (g, s_1)$ é cordal, e s_1 é também simplicial em $G \setminus e$. Temos que considerar os seguinte casos:

1) g não é um vértice simplicial em $G \setminus e$. Neste caso, quando retirarmos e , g não pertencerá a S_1 e g não pertencerá a nenhum simplex em $G \setminus e$ ou pertencerá a ml simplexes.

2) g é simplicial em $G \setminus e$. Neste caso, existe $h \in N(g) \cap N(s_1)$ e $h \in (ml + 2)$ simplexes em $G \setminus e$. \square

Proposição 6.11 K_1 e K_2 são os únicos grafos conexos simpliciais fortemente Z_m -bem-cobertos.

Demonstração:

Seja G um grafo simplicial fortemente Z_m -bem-coberto, $G \neq K_1, K_2$. Seja S um simplex em G e s um de seus vértices simpliciais. Seja $g \in N(s)$, então podemos ter os seguintes casos:

1) g pertence apenas ao simplex S . Seja $x \in N(s) \cap N(g)$. Seja I_1 o conjunto independente maximal em $V \setminus (s, g)$ construído com x e com os vértices simpliciais não adjacentes a x . Seja I_2 o conjunto independente maximal em $V \setminus (s, g)$ construído com s, g e com os vértices simpliciais não adjacentes nem a s e nem a g . Então $|I_1| = |I_2| - 1$, e $G \setminus e$ não é Z_m -bem-coberto.

2) g pertence ao simplex S e a outros ml simplexes. Neste caso, quando retirarmos a aresta (s, g) de G , $G \setminus (s, g)$ continua simplicial e g pertence a ml simplexes em $G \setminus e$, então $G \setminus e$ não pode ser Z_m -bem-coberto. \square

Lema 6.12 Se G , $G \neq K_2$, for um grafo Z_m -bem-coberto e e uma aresta crítica em G , então $G \setminus e$ não é Z_m -bem-coberto.

Demonstração:

Seja $e = (u, v)$. Como $G \neq K_2$, existe $x \in V(G)$, com $x \sim u$ e $x \neq v$. Como G é Z_m -bem-coberto, existe um conjunto independente maximal I_1 tal que $|I_1| \equiv \alpha(G) \pmod{m}$, e $x \in I_1$. Como e é uma aresta crítica em G , $\alpha(G \setminus e) = \alpha(G) + 1$. Mas I_1 é também um conjunto independente maximal em $G \setminus e$, então $|I_1| \equiv \alpha(G \setminus e)$, portanto $\alpha(G) \equiv |I_1| \equiv \alpha(G \setminus e) \pmod{m}$, contradição. \square

Staples [39] provou o seguinte resultado:

Teorema 6.13 *Se G for um grafo bem-coberto e $u \in V(G)$ é tal que $G \setminus u$ é também bem-coberto, então existe um vértice v adjacente a u tal que (u, v) é uma aresta crítica.*

Este resultado não é válido, em geral, para grafos Z_m -bem-cobertos. O grafo da figura 6.3 é um grafo de paridade no qual $G \setminus u$ é também de paridade. Observe que $\alpha(G) = \alpha(G \setminus (u, v))$, $\forall v \in N(u)$, mas não existe aresta crítica e em G tal que e seja incidente a u .

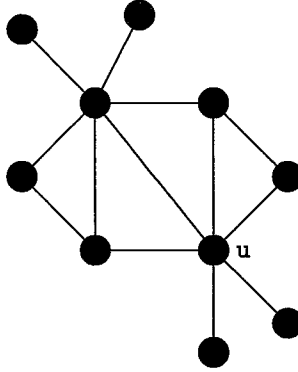


Figura 6.3: Um grafo G com uma aresta m -crítica

Definição 6.14 *Dado um grafo G , uma aresta e em G é dita ser **m -crítica** se existir um conjunto independente maximal de vértices em $G \setminus e$ tal que $|I| \not\equiv \alpha(G) \pmod{m}$.*

Observe que toda aresta crítica é uma aresta m -crítica. Podemos provar agora o seguinte resultado:

Teorema 6.15 *Se G for um grafo Z_m -bem-coberto e $u \in V(G)$ for tal que é também Z_m -bem-coberto, então existe um vértice v adjacente a u tal que (u, v) é uma aresta m -crítica.*

Demonstração:

Estenda $\{u\}$ a um conjunto independente maximal I_1 em G , então $|I_1| \equiv \alpha(G) \pmod{m}$. Também temos $\alpha(G \setminus u) = \alpha(G)$ (caso contrário, existiria um conjunto independente maximal I em $G \setminus u$ com $|I| > \alpha(G)$, e I seria também um conjunto independente maximal em G).

Portanto $(I_1 \setminus u)$ não é um conjunto independente maximal em $G \setminus u$. Por hipótese, $G \setminus u$ é um grafo Z_m -bem-coberto, então existe um conjunto independente maximal I_2 em $(G \setminus u)$ tal que $(I_1 \setminus u) \subset I_2$.

$$|I_1 \setminus u| \equiv \alpha(G) - 1 = \alpha(G \setminus u) - 1, \text{ portanto}$$

$$I_2 = (I_1 \setminus u) \cup \{v_1, v_2, \dots, v_{km+1}\}, v_i \in G \setminus u.$$

Se $v_i \not\sim u, \forall i = 1, \dots, km + 1$, então $I_2 \cup \{u\} = I_1 \cup \{v_i\}$ é independente em G e $I_1 \subset I_2 \cup \{u\}$, uma contradição porque I_1 é maximal em G .

Portanto devemos ter $v_i \sim u$. Então $I^* = I_1 \cup \{v_i\}$ é um conjunto independente maximal em $G \setminus e$ com $|I_1 \cup \{v_i\}| \equiv \alpha(G) + 1 \pmod{m}$, e portanto, (u, v) é uma aresta m -crítica. \square

Lema 6.16 *Se $G, G \neq K_2$, for um grafo Z_m -bem-coberto e e for uma aresta crítica, então $G \setminus e$ não é Z_m -bem-coberto.*

Demonstração:

Seja $e = (u, v)$ uma aresta m -crítica em G , então existe um conjunto independente maximal I em $G \setminus e$ tal que $|I| \not\equiv \alpha(G) \pmod{m}$. Seja $x \sim u$, e $x \neq v$. Estenda x a um conjunto independente maximal I_1 em G . Como G é Z_m -bem-coberto $|I_1| \equiv \alpha(G) \pmod{m}$. I_1 é também um conjunto independente maximal em $G \setminus e$, portanto $|I_1| \not\equiv |I| \pmod{m}$, logo $G \setminus e$ não é Z_m -bem-coberto. \square

Teorema 6.17 K_1 e K_2 são os únicos grafos conexos que são fortemente Z_m -bem-cobertos e 1- Z_m -bem-cobertos.

Demonstração:

Pelo Teorema 6.15, se G for 1- Z_m -bem-coberto, G deve ter uma aresta m -crítica, mas pelo Lema 6.16, se e for uma aresta crítica, então $G \setminus e$ não é um grafo Z_m -bem-coberto, portanto não existem outros grafos, além de K_1 e K_2 que estejam simultaneamente nas duas classes. \square

Teorema 6.18 Se G for um grafo 1- Z_m -bem-coberto, então $\delta \geq 2$.

Demonstração:

Suponha que G tenha uma folha x . Mostraremos que $G \setminus \{x\}$ não é Z_m -bem-coberto. Seja v o único vértice em G adjacente a x . Como G é Z_m -bem-coberto, existem conjuntos independentes maximais I_1, I_2 em $V(G)$ tais que $x \in I_1$, $v \in I_2$ e $|I_1| \equiv |I_2| \pmod{m}$. Mas, $J_1 = I_1 \setminus \{x\}$ e I_2 são também conjuntos independentes maximais em $G \setminus \{x\}$, mas $|J_1| \not\equiv |I_2| \pmod{m}$, portanto G não seria 1- Z_m -bem-coberto, contradição. \square

Pinter [30] caracterizou grafos planares fortemente bem-cobertos com o seguinte teorema:

Teorema 6.19 Os únicos grafos planares fortemente bem-cobertos são K_1, K_2, C_4 e o octaedro (ver figura 6.4).

Isto não é verdade para grafos fortemente Z_2 -bem-cobertos, como mostra a figura 6.5.

No próximo capítulo mostraremos uma maneira de, para qualquer m dado, construir infinitos grafos planares fortemente Z_m -bem-cobertos.

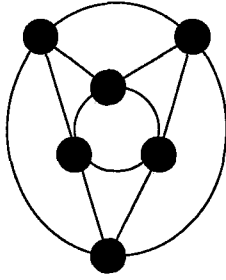


Figura 6.4: O octaedro

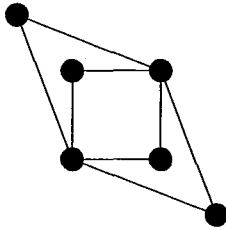


Figura 6.5: Um grafo planar fortemente Z_2 -bem-coberto

Capítulo 7

Produtos de grafos Z_m -bem-cobertos e construção de grafos fortemente Z_m -bem-cobertos

7.1 Introdução

No que segue, necessitaremos da caracterização de Caro e Hartnell [13] de grafos com cintura > 5 Z_m -bem-cobertos.

Uma **folha** é um vértice de grau 1 em um grafo. Um **talo** é um vértice adjacente a uma folha. Um **arbusto** é um subgrafo induzido por um talo e suas folhas.

Dizemos que os vértices x e y em G são conectados por uma 2-ponte se existirem vértices u e v em $V(G)$ tais que $\text{grau}(u)=\text{grau}(v)=2$, $N(u) = \{x, v\}$ e $N(v) = \{u, y\}$.

Teorema 7.1 [13] *Seja G um grafo conexo de cintura > 5 . Então G é Z_m -bem-coberto se e somente se $G = K_1, C_7$, ou G consiste de uma união finita de arbustos, cada um com talo x_i , onde cada talo tem $r_i m + 1$ folhas, e onde para cada i e j , uma e apenas uma das seguintes condições ocorre:*

1) x_i e x_j são unidos por uma aresta, e qualquer outro caminho, caso exista, unindo x_i e x_j deve incluir, pelo menos, um talo diferente de x_i e x_j .

2) x_i e x_j são conectados a k m 2-pontes e qualquer outro caminho unindo x_i e x_j deve incluir uma outra talo além de x_i e x_j .

3) Todo caminho unindo x_i e x_j contém, pelo menos, um talo além de x_i e x_j .

Um exemplo de um grafo Z_3 -bem-coberto com cintura 6 é o grafo da figura 7.1.

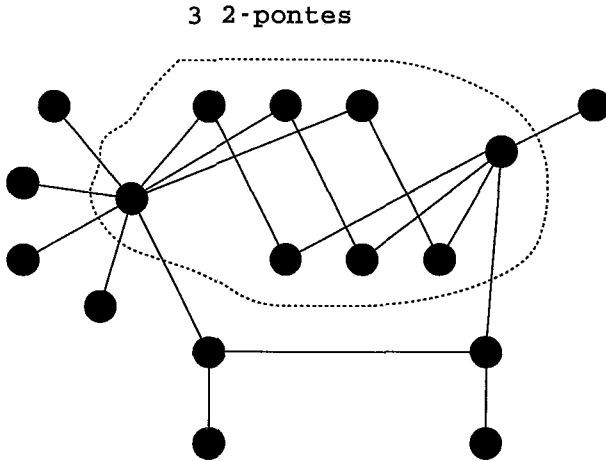


Figura 7.1: Um grafo Z_3 -bem-coberto com cintura 6

Pinter [30] mostrou uma série de resultados para grafos fortemente bem-cobertos, que não são válidos para grafos fortemente Z_m -bem-cobertos. Ele mostrou que grafos fortemente bem-cobertos têm grau mínimo ≥ 4 . Isto não é válido, em geral, para grafos fortemente Z_m -bem-cobertos, conforme mostrado na figura 7.3. Ele também provou que para grafos fortemente bem-cobertos vale a seguinte desigualdade: $gr(v) \leq |V(G)| - 2\alpha(G) + 2$, $\forall v \in V(G)$. O mesmo exemplo citado acima mostra que isto não vale para grafos fortemente Z_m -bem-cobertos.

7.2 Produto lexicográfico

Definição 7.2 Dado um grafo H e uma família $\{G_1, G_2, \dots, G_{|V(H)|}\}$ de grafos não vazios indexados pelos vértices de H , o **produto lexicográfico** $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ de G e $\{G_1, G_2, \dots, G_{|V(H)|}\}$ é o grafo tendo como vértices o conjunto $\cup_{v \in V(H)} \{[v, u] : u \in V(G_v)\} = \cup_{v \in V(H)} \{v\} \times V(G_v)$, e dois vértices $[v_1, v_2]$ e $[u_1, u_2]$ são adjacentes quando a aresta $[[v_1, u_1] \in E(H)]$ ou $[v_1 = u_1$ e $[v_2, u_2] \in E(G_{v_i})]$.

Observe que estamos usando a notação $[u, v]$ para vértices em GoH , isto para não confundir com a notação (u, v) para a aresta ligando os vértices u e v .

Definição 7.3 Dado $S \subset V(Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|}))$, definimos $X_H(S) = \{x \in V(H) : \exists y \in V(G_x) \text{ com } [x, y] \in S\}$ e $X_{G_x}(S) = \{y \in V(G_x) : [x, y] \in S\}$, $\forall x \in X_H(S)$.

Topp e Volkmann [44] provaram o seguinte resultado:

Proposição 7.4 Dado $S \subset V(Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|}))$, S é um conjunto independente maximal em $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ se e somente se $X_H(S)$ for um conjunto independente maximal em H , e para todo $v \in X_H(S)$, o conjunto $X_{G_v}(S)$ for um conjunto independente maximal em G_v .

Se H for um grafo Z_m -bem-coberto e G for Z_n -bem-coberto, nem sempre é verdade que HoG seja Z_n -bem-coberto.

H não precisa ser necessariamente Z_m -bem-coberto para que tenhamos $Ho\{G_i\}$ Z_m -bem-coberto como mostrado na figura 7.2. Na verdade, mostraremos no teorema 7.5 condições sobre H e $\{G_i\}$ para que $Ho\{G_i\}$ seja Z_m -bem-coberto.

Em [44] uma versão do seguinte teorema para grafos bem-cobertos é provado . Estendemos o resultado para grafos Z_m -bem-cobertos.

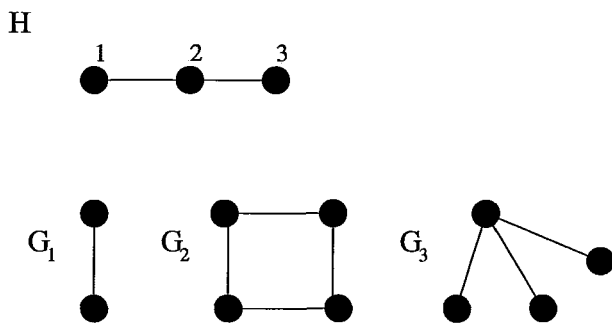


Figura 7.2: $Ho\{G_i\}$ é Z_3 -bem-coberto

Teorema 7.5 *Seja H um grafo e $\{G_1, G_2, \dots, G_{|V(H)|}\}$ uma família de grafos não-vazios. Então o produto lexicográfico $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ é um grafo Z_m -bem-coberto se e somente se H e $\{G_1, G_2, \dots, G_{|V(H)|}\}$ satisfizerem as seguintes condições:*

(1) G_i é Z_m -bem-coberto para $i = 1, \dots, |V(H)|$,

(2) $\sum_{v \in I} \alpha(G_v) \equiv \sum_{u \in J} \alpha(G_u) \pmod{m}$, para quaisquer dois conjuntos independentes maximais I e J de H .

Demonstração:

(\implies) Suponha $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ Z_m -bem-coberto e que exista G_{v_0} que não seja Z_m -bem-coberto. Então G_{v_0} tem dois conjuntos independentes maximais I_{v_0} e J_{v_0} tais que $|I_{v_0}| \not\equiv |J_{v_0}| \pmod{m}$. Estenda $\{v_0\}$ a um conjunto independente maximal L em $V(H)$. Para qualquer $v \in L \setminus \{v_0\}$, seja I_v um conjunto independente maximal em G_v . Como $|I_{v_0}| \not\equiv |J_{v_0}| \pmod{m}$, a proposição 7.4 afirma que $A = \cup_{v \in L \setminus \{v_0\}} \{[v, x] : x \in I_v\} \cup \{[v_0, y] : y \in I_{v_0}\}$ e $B = \cup_{v \in L \setminus \{v_0\}} \{[v, x] : x \in I_v\} \cup \{[v_0, t] : t \in J_{v_0}\}$ são conjuntos independentes maximais em $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ tais que $|A| \not\equiv |B| \pmod{m}$. Então $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ não seria Z_m -bem-coberto, contradição. Então G_i deve ser Z_m -bem-coberto para todo $i = 1, 2, \dots, |V(H)|$.

Sejam I e J dois conjuntos independentes maximais em H . Provaremos que $\sum_{v \in I} \alpha(G_v) = \sum_{v \in J} \alpha(G_v) \pmod{m}$. Seja R_v um conjunto independente maximal em G_v , para $v \in I \cup J$. Então, $S = \sum_{v \in I} \{[v, x] : x \in R_v\}$ e $S' = \sum_{v \in J} \{[v, x] : x \in R_v\}$ são conjuntos independentes maximais em

$Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$. Então $|S| \equiv |S'| \pmod{m}$. Mas, $|\{v, x\} : x \in R_v| = |R_v| \equiv \alpha(G_v) \pmod{m}$, e como $\{[v, x] : x \in R_v\} \cap \{[u, x] : x \in R_u\} = \emptyset$, $\forall u, v \in I \cup J$, segue que $\sum_{v \in I} \alpha(G_v) \equiv |S| \equiv |S'| \equiv \sum_{v \in J} \alpha(G_v) \pmod{m}$.

(\Leftarrow) Seja I um conjunto independente maximal em $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$. Pela proposição 7.4 $X_H(I)$ é um conjunto independente maximal em H e $X_{G_v}(I)$ é um conjunto independente maximal em G_v para todo $v \in X_H(I)$. Como $I = \sum_{v \in X_H(I)} \{[v, x] : x \in X_{G_v}(I)\}$ e $|X_{G_v}(I)| \equiv \alpha(G_v) \pmod{m}$, temos $|I| = \sum_{v \in X_H(I)} |\{[v, x] : x \in X_{G_v}(I)\}| = \sum_{v \in X_H(I)} |X_{G_v}(I)| = \sum_{v \in X_H(I)} \alpha(G_v)$. Então pela condição (2) quaisquer dois conjuntos independentes maximais em $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ são congruentes \pmod{m} e portanto $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ é Z_m -bem-coberto. \square

Corolário 7.6 *Se H for Z_m -bem-coberto e $\{G_i\}$, $i = 1, \dots, |V(H)|$, for uma família de grafos bem-cobertos com $\alpha(G_i) \equiv \alpha(G_j) \pmod{m}$, $\forall i, j$, então $Ho(G_1, \dots, G_{|V(H)|})$ é Z_m -bem-coberto.*

Em [30, 31] é provado que um grafo fortemente bem-coberto com mais de 4 vértices tem grau mínimo pelo menos 4 e deve ser 3-conexo. Isto não é verdadeiro para grafos fortemente Z_m -bem-cobertos conforme mostrado na figura 7.3.

Usando os teoremas 4.8 e 7.5, podemos facilmente construir grafos fortemente Z_m -bem-cobertos para qualquer m dado.

Teorema 7.7 *Os grafos da forma $(K_{1,ml+1}) \circ 2K_1$ são fortemente Z_m -bem-cobertos.*

Demonstração:

É fácil ver que este grafo tem conjuntos independentes maximais apenas de tamanhos 2 e $2(ml) + 2$. Veja figura 7.4.

Corolário 7.8 *Para qualquer m dado, existem infinitos grafos fortemente Z_m -bem-cobertos planares.*

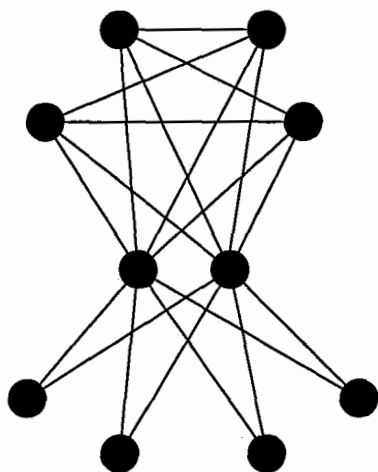


Figura 7.3: Um grafo fortemente Z_2 -bem-coberto

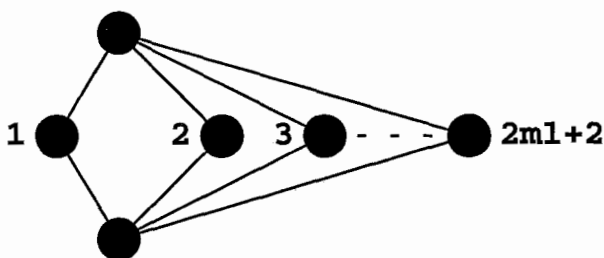


Figura 7.4: Uma família de grafos fortemente Z_m -bem-cobertos

Corolário 7.9 *Para qualquer m dado, existem infinitos grafos fortemente Z_m -bem-cobertos com cintura 4.*

Mostraremos agora, que grafos 1- Z_m -bem-cobertos devem possuir cintura < 6 .

Teorema 7.10 *Se G for um grafo 1- Z_m -bem-coberto, então cintura $G \leq 5$, $\forall m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração:

Seja G um grafo Z_m -bem-coberto com cintura ≥ 6 . Pelo teorema 7.1, G é uma união finita de arbustos. Seja B_i um desses arbustos e v_i sua talo. Agora, remova uma folha x do arbusto B_i . Provaremos que $G \setminus x$ não é um grafo Z_m -bem-coberto. Seja S um conjunto independente em $G \setminus x$ tal que S tenha uma folha de cada arbusto diferente de B_i . Então $G \setminus N[S]$ é um grafo da forma $K_{1,ml}$, ou G é um grafo com v_i e ml vértices unidos a v_i tal que existam exatamente uma folha adjacente a cada um dos ml vértices dentre os ml vértices acima. Em ambos os casos, o grafo $G \setminus N[S]$ não é Z_m -bem-coberto, portanto G não é Z_m -bem-coberto. \square

Uma outra maneira de provar o teorema acima é utilizando o teorema 6.18.

Segunda demonstração do teorema 7.10:

Pelo teorema 7.1, um grafo Z_m -bem-coberto com cintura ≥ 6 deve ter folhas, mas pelo teorema 6.18 um grafo 1- Z_m -bem-coberto não pode ter folhas, portanto não existe grafo 1- Z_m -bem-coberto com cintura ≥ 6 . \square

Mostraremos agora que o mesmo não pode ocorrer com grafos fortemente Z_m -bem-cobertos:

Teorema 7.11 *Não existem grafos fortemente Z_m -bem-cobertos com cintura ≥ 6 , além dos grafos K_1 e K_2 .*

Demonstração:

Isto decorre imediatamente do teorema 7.1.

Não temos conhecimento de exemplos de grafos fortemente Z_m -bem-cobertos e nem de $1-Z_m$ -bem-cobertos com cintura 5. Isto nos leva a conjecturar que não existem grafos com esta propriedade.

Também não temos exemplos de grafos $1-Z_m$ -bem-cobertos e não 1 -bem-cobertos com cintura 4. Isto também nos leva a conjecturar que se um grafo com cintura 4 for $1-Z_m$ -bem-coberto, então ele deve ser 1 -bem-coberto.

7.3 Corona de Grafos

Dado um grafo G e uma família $\{H_v : v \in V(G)\}$ de grafos indexados pelos vértices de G , o corona $Go\{H_v\}$ é a união disjunta de G e H_v , $v \in V(G)$, com arestas adicionais unindo cada vértice v de G a todos vértices de H_v .

Em [44] o seguinte teorema é provado:

Teorema 7.12 *Sejam G um grafo, e $\{H_v : v \in V(G)\}$ uma família de grafos não-vazios indexados pelos vértices de G . Então o corona $Go\{H_v\}$ é um grafo bem-coberto, se e somente se $\{H_v\}$ consistir de grafos completos.*

Inicialmente, daremos uma outra demonstração de que a condição é suficiente. Esta demonstração também serve para provar uma condição suficiente para grafos Z_m -bem-cobertos.

(\Leftarrow) Se todo grafo da família $\{H_v\}$ for completo, então o grafo $Ho\{H_v\}$ será simplicial com cada vértice pertencendo a exatamente um simplex, portanto $Ho\{H_v\}$ é bem-coberto.

Com a mesma idéia acima é possível provarmos o seguinte resultado:

Teorema 7.13 *Dado um grafo G , e uma família $\{H_v\}$ de grafos não vazios indexados pelos vértices de G , tais que cada grafo H_v seja a união de $ml + 1$ grafos completos, $m, l \in \mathbb{N}$, então o grafo $G \circ \{H_v\}$ é Z_m -bem-coberto.*

A condição não é necessária. $H = K_1$, $G_v = K_{1,3}$ é Z_2 -bem-coberto.

Capítulo 8

Conclusões

Até o momento, a única classe em que havia caracterização de grafos Z_m -bem-cobertos era para a classe dos grafos com cintura pelo menos 6. Neste nosso trabalho, caracterizamos grafos Z_m -bem-cobertos para as classes de grafos $K_{1,3}$ -livres, simpliciais, cordais e arco-circulares. Estamos, no momento, finalizando a caracterização de grafos cúbicos Z_m -bem-cobertos. Um outro problema é obter a caracterização de grafos bipartidos Z_m -bem-cobertos, para a qual, como mencionado no capítulo 2, existe caracterização de grafos bem-cobertos.

No capítulo 4 observamos que não existem muitos resultados conhecidos para grafos nas classes $M(2)$ e $I(2)$. Até o momento, só havia caracterização para grafos com cintura ≥ 8 em $M(2)$. Conseguimos aqui uma caracterização de grafos simpliciais em $M(2)$, além de estabelecer condições suficientes para que grafos cordais estejam em $I(2)$. Um próximo passo seria então, tentar estabelecer condições necessárias para que grafos cordais estejam em $I(2)$. Uma outra etapa de trabalho, seria estabelecer condições necessárias e suficientes para que grafos cordais e simpliciais estejam em $M(3)$ e $I(3)$. Também não se sabe a natureza do problema de dado um grafo em $M(2)$, saber se ele pertence ou não a $I(2)$. O teorema 5.6 estabelece que para grafos $K_{1,3}$ -livres temos $M(t) = I(t)$. Para outras classes de grafos não há resultados conhecidos. Uma idéia natural é tentar responder a esta pergunta para outras classes de grafos.

Sobre grafos 1- Z_m -bem-cobertos e fortemente Z_m -bem-cobertos, uma questão ainda não respondida é sobre como construir grafos com cintura

5 em cada uma dessas classes. Provamos não haver grafos com cintura > 5 $1-Z_m$ -bem-cobertos, bem como não há grafos fortemente Z_m -bem-cobertos com cintura > 5 . Mostramos maneiras de se construir grafos fortemente Z_m -bem-cobertos com cintura 4, mas não temos uma maneira de construir grafos $1-Z_m$ -bem-cobertos com cintura 4. Isto nos leva a fazer as seguintes conjecturas:

1) Não existe grafo $1-Z_m$ -bem-coberto (não 1 -bem-coberto) com cintura 4.

2) Não existe grafo fortemente Z_m -bem-coberto com cintura 5.

Dentre outros, destacamos os seguintes problemas para estudos no futuro:

1) Caracterização de grafos bipartidos Z_m -bem-cobertos.

2) Caracterização de grafos com cintura 5 Z_m -bem-cobertos.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Barbosa. On 1- z_m -well-covered graphs and strongly z_m -well-covered graphs. *Ars Combinatoria*, to appear.
- [2] R. Barbosa and B. Hartnell. Almost parity graphs and claw-free parity graphs. *Journal of Comb. Math. and Comb. Comp.*, 27:117–122, 1998.
- [3] R. Barbosa and B. Hartnell. Some problems based on the relative sizes of maximal independent sets in a graph. *Congressus Numerantium*, 131:115–121, 1998.
- [4] R. Barbosa and B. Hartnell. Characterization of z_m -well-covered graphs for some classes of graphs. *Discrete Mathematics*, to appear.
- [5] R. Barbosa and S. Klein. Algumas questões sobre grafos cordais bem-cobertos. In *XX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC)*, pages 556–557, Gramado, Brasil, 1997.
- [6] R. Barbosa and S. Klein. Uma nota sobre centro de grafos e grafos bem-cobertos. In *IX Congresso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa*, pages 104–107, Concepción, Chile, 1997.
- [7] Bondy and Murty. *Graph theory with applications*. Macmillan Press Ltd, London, 1976.
- [8] S.R. Campbell. *Some results on cubic well-covered graphs*. PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN, May 1987.
- [9] S.R. Campbell, M.N. Ellingham, and G.F. Royle. A characterisation of well-covered cubic graphs. *Journal of Comb. Math. and Comb. Comp.*, 13:193–212, 1993.
- [10] S.R. Campbell and M.D. Plummer. On well-covered 3-polytopes. *Ars Combin.*, 25-A:215–242, 1988.

- [11] Y. Caro. Subdivisions, parity and well-covered graphs. *J. Graph Theory*, 25:85–94, 1997.
- [12] Y. Caro, M.N. Ellingham, and J.E. Ramey. Local structure when all maximal independent sets have equal weight. *SIAM J. Discrete Math.*, 11(4):644–654, 1998.
- [13] Y. Caro and B. Hartnell. A characterization of z_m -well-covered graphs of girth 6 or more. *J. Graph Theory*, to appear.
- [14] Y. Caro, A. Sebo, and M. Tarsi. Recognizing greedy structures. *J. Algorithms*, 20:137–156, 1996.
- [15] V.D. Chepoi. Centers of triangulated graphs. *Math. Notes*, 43:82–86, 1988.
- [16] V. Chvátal and P.J. Slater. A note on well-covered graphs, quo vadis, graph theory? *Ann. Discrete Math.*, 55:179–182, 1993.
- [17] O. Favaron. Very well covered graphs. *Discrete Math.*, 42(2-3):177–187, 1982.
- [18] A. Finbow and B. Hartnell. A game related to covering by stars. *Ars Combinatoria*, 16-A:189–198, 1983.
- [19] A. Finbow and B. Hartnell. A characterization of parity graphs containing no cycle of order five or less. *Ars Combin.*, 40:227–234, 1995.
- [20] A. Finbow, B. Hartnell, and R.J. Nowakowski. A characterization of well-covered graphs of girth 5 or greater. *J. Combin. Theory Ser. B*, 57(1):44–68, 1993.
- [21] A. Finbow, B. Hartnell, and R.J. Nowakowski. A characterization of well-covered graphs that contain neither 4 nor 5-cycles. *J. Graph Theory*, 18(7):713–721, 1994.
- [22] A. Finbow, B. Hartnell, and C. Whitehead. A characterization of graphs of girth eight or more with exactly two sizes of maximal independent sets. *Discrete Math.*, 125:153–167, 1995.
- [23] B. Hartnell. A characterization of the 1-well-covered graphs with no 4-cycles. *Submitted*.
- [24] B. Hartnell. Well-covered graphs. *Journal Comb. Math. Comb. Comp.*, 29:107–115, 1999.

- [25] B. Hartnell and M.D. Plummer. On 4-connected claw-free well-covered graphs. *Discrete Applied Math.*, 64:57–65, 1996.
- [26] R.B. Hayward. Weakly triangulated graphs. *J. Combin. Theory B*, 39:200–209, 1985.
- [27] R.M. Karp. Complexity of computer computations. In R.E. Miller and J.W. Thatcher, editors, *Reducibility among combinatorial problems*, pages 85–103, New York, 1972. Plenum Press.
- [28] M. Lesk, M.D. Plummer, and W.R. Pulleyblank. Equimatchable graphs. In B. Bollobás, editor, *Graph Theory and Combinatorics*, pages 239–254, London, 1984. Academic Press.
- [29] L. Lovász and M.D. Plummer. *Matching Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [30] M.R. Pinter. *W_2 graphs and strongly well-covered graphs: two well-covered graph subclasses*. PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN, August 1991.
- [31] M.R. Pinter. Strongly well-covered graphs. *Discrete Math*, 132:231–246, 1994.
- [32] M.D. Plummer. Some covering concepts in graphs. *J. Combin. Theory*, 8:91–98, 1970.
- [33] M.D. Plummer. Well-covered graphs: a survey. *Quaestiones Math.*, 16:253–287, 1993.
- [34] E. Prisner, J. Topp, and P.D. Vestergaard. Well-covered simplicial, chordal and circular arc graphs. *J. Graph Theory*, 21:113–119, 1996.
- [35] J.E. Ramey. *Well-covered graphs with maximum degree three and minimal non-well-covered graphs*. PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN, March 1994.
- [36] G. Ravindra. Well-covered graphs. *J. Combin. Inform. System Sci.*, 2:20–21, 1977.
- [37] R.S. Sankaranarayana. *Well-covered graphs: some new sub-classes and complexity results*. PhD thesis, University of Alberta, Edmonton, Spring 1994.
- [38] R.S. Sankaranarayana and L.K. Stewart. Complexity results for well-covered graphs. *Networks*, 22:247–262, 1992.

- [39] J.A.W. Staples. *On some subclasses of well-covered graphs*. PhD thesis, Vanderbilt University, Nashville, TN, August 1975.
- [40] J.A.W. Staples. On some subclasses of well-covered graphs. *J. Graph Theory*, 3(2):197–204, 1979.
- [41] J. L. Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, Rio de Janeiro, 1986.
- [42] D. Tankus and M. Tarsi. Well-covered claw-free graphs. *J. Combin. Theory B*, 66:293–302, 1996.
- [43] J. Topp and L. Volkmann. Well covered and well dominated block graphs and unicyclic graphs. *Math. Pannonica*, 1\2:55–66, 1990.
- [44] J. Topp and L. Volkmann. On the well coveredness of products of graphs. *Ars Combinatoria*, 33:199–215, 1992.
- [45] M. Yannakakis and F. Gavril. Edge dominating sets in graphs. *SIAM J. Appl. Math.*, 38:364–372, 1980.