

APLICAÇÕES DA TEORIA ESPECTRAL EM ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS

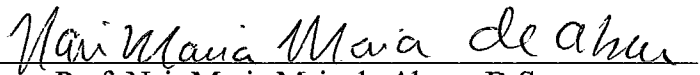
Patrícia Erthal de Moraes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

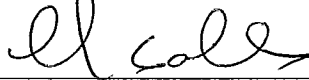
Aprovada por:



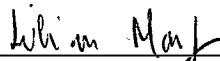
Prof. Paulo Roberto Oliveira, D.Ing.



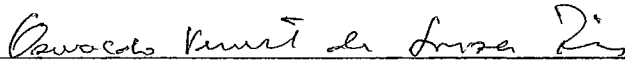
Prof. Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.



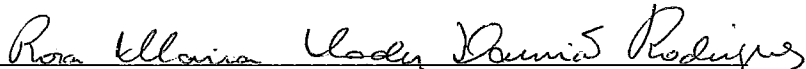
Prof. Cláudia Linhares Sales, Dr.



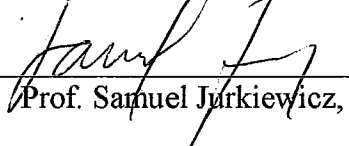
Prof. Lilian Markenzon, D.Sc.



Prof. Oswaldo Vernet de Souza Pires, D.Sc.



Prof. Rosa Maria Nader Damiano Rodrigues, D.Sc.



Prof. Samuel Jurkiewicz, Dr.Math.

MORAES, PATRÍCIA ERTHAL DE

Aplicações da Teoria Espectral em Algumas  
Classes de Grafos [Rio de Janeiro] 2000  
VI, 104p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2000)  
Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Grafos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Ao meu pai.

## AGRADECIMENTOS

À minha orientadora Nair Maria Maia de Abreu, sempre incansável, pelo seu incentivo, boas idéias, confiança e muito pela sua amizade.

Aos professores Paulo Roberto Oliveira, Cláudia Linhares Sales, Lilian Markenzon, Oswaldo Vernet de Souza Pires, Rosa Maria Nader Damião Rodrigues e Samuel Jurkiewicz, pela leitura cuidadosa deste trabalho e pelas críticas que tanto ajudaram a aperfeiçoá-lo.

À amiga Rosa Maria Nader Damião Rodrigues, pelo incentivo em todos esses anos que nos conhecemos.

À minha mãe, pelo seu amor.

A Ricardo, pelo seu cuidado, carinho e exemplo de perseverança.

A meu filho Bernardo, pelos momentos alegres que vivemos juntos.

À Ni, por cuidar de Bernardo com tanto carinho.

À Christine, Marina, Cristina e Carla, pela amizade e apoio sempre presentes.

Ao amigo Dr. Ivo Kellis, que tanto me lembra o quanto é preciso avançar, sempre.

À toda minha família e amigos, obrigada.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## APLICAÇÕES DA TEORIA ESPECTRAL EM ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS

Patrícia Erthal de Moraes

Março/2000

Orientadores: Nair Maria Maia de Abreu

Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Os coeficientes do polinômio característicos de um grafo são determinados em função da contagem dos seus subgrafos elementares. São conhecidos os coeficientes dos seus quatro primeiros termos, que correspondem a aqueles de mais altos graus no polinômio. Neste trabalho, determinamos uma expressão algébrica para os quinto e sexto termos do polinômio característico de um grafo em função da determinação de subgrafos elementares especiais, que chamamos  $k$ -emparelhamentos. Introduzimos, aqui também, uma família nova de grafos, os cardigrafos, onde cada elemento é um grafo que possui cardinalidade de arestas dada em função do seu número de vértices. Esta família contém importantes classes de grafos, como os regulares, planares maximais, periplanares maximais(mops), árvores,  $k$ -árvores, etc...Estabelecemos propriedades para os cardigrafos que generalizam resultados conhecidos da literatura e determinamos aí uma subfamília, os grafos de densidade homogênea. Relacionamos estes grafos com os maxregulares e provamos que os seus índices tendem para o grau médio do grafo, à medida que o número de vértices aumenta.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## APPLICATIONS OF THE SPECTRAL THEORY IN SOME CLASSES OF GRAPHS

Patrícia Erthal de Moraes

March/2000

Advisors: Nair Maria Maia de Abreu

Paulo Roberto de Oliveira

Department: Computing and Systems Engineering

The coefficients of the characteristic polynomial of a graph  $G$  are determined in terms of the counting of its elementary subgraphs. The four first terms of the coefficients of this polynomial, corresponding to its highest degrees, are already known. In this work, an algebraic expression to the fifth and sixth terms of the characteristic polynomial has been determined viewing the stabilizing of special elementary subgraphs which are called  $k$ -matching. This work also introduces a family of new graphs, the cardigraphs, where each element has its number of vertices given in function of its number of edges. This family has important classes of graphs such as the trees, the regular graphs, the maximal outerplanar graphs (mops), the maximal planar graphs, etc. Properties that generalize well-known results of the literature have been established and a subfamily, graphs of homogeneous density, has been determined. These graphs have been associated with the maxregular graphs and it is proved that their indices tend to the medium degree of the graph, as its number of vertices grows.

# ÍNDICE DOS CAPÍTULOS

## I Introdução

I.1	Apresentação da tese .....	1
I.2	Conceitos e resultados preliminares .....	2
I.2.1	Grafos .....	3
I.2.2	Classes especiais de grafos .....	8
I.2.3	Álgebra Linear: autovalores e autovetores .....	21

## II Teoria Espectral dos Grafos

II.1	Introdução .....	26
II.2	O espectro de um grafo .....	27
II.3	O polinômio característico de um grafo .....	30
II.4	Propriedades espectrais de algumas classes de grafos .....	35
II.5	Autovetores e autoespaços de um grafo .....	38
II.6	Ângulos de um grafo .....	40
II.7	O índice de um grafo .....	43

## III Ciclos e Emparelhamentos

III.1	Introdução .....	48
III.2	Emparelhamentos em um grafo .....	48
III.3	Contagem para 2-emparelhamentos em um grafo .....	51

III.4	Tipo de um grafo e emparelhamentos .....	56
III.5	Emparelhamentos e teoria espectral .....	63

**IV Maxregularidade e Equilibradores de um Grafo**

IV.1	Introdução .....	72
IV.2	Grafos $(n,r)$ -maxregulares .....	72
IV.3	Equilibradores em grafos .....	75

**V Cardigrafos e Grafos com Densidade Homogênea**

V.1	Introdução .....	78
V.2	Conjuntos cardigrafos .....	78
V.3	Grafos com densidade homogênea .....	86
V.4	Índices em grafos com densidade homogênea .....	95

**VI Conclusão .....** 101

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....** 103



# Capítulo I

## Introdução

### I.1 Apresentação da tese

A fundamentação da Teoria Espectral dos Grafos foi iniciada por volta de 1950 com uma série de resultados publicados por um número considerável de matemáticos. A maioria desses trabalhos abordam a relação entre a teoria espectral e as propriedades estruturais de um grafo. Por outro lado, outra origem deve-se à química quântica. Hückel, em 1931 produziu um modelo teórico a partir de moléculas de hidrocarbonetos não saturados, que somente, por volta dos anos 50, com a formalização da teoria espectral dos grafos, é que matemáticos puderam fazer a ligação entre essas áreas de estudo. Em seu modelo, Hückel representa os níveis de energia de certos elétrons por autovalores de um grafo.

Resultados da teoria espectral indicam a tentativa dos matemáticos de caracterizar os grafos por meio de seu espectro. Apesar da tentativa frustrada, mesmo certos grafos simples não isomorfos têm o mesmo espectro, a pesquisa em teoria espectral não perdeu o fôlego, haja visto número de referências bibliográficas (mais de 300) apresentadas em (CVETKOVIĆ et al., 1980) e uma publicação do mais recente livro sobre o assunto, devido a CVETKOVIĆ, ROWLINSON e SIMIĆ (1997).

Esta tese se desenvolve apresentando neste capítulo os principais resultados em teoria dos grafos e álgebra linear necessários à compreensão do texto. No capítulo II reunimos importantes resultados, que nos serviram como pré-requisitos para as contribuições aqui apresentadas. Todo grafo pode ser decomposto em subgrafos elementares. Desta forma,

os coeficientes do polinômio característico de um grafo são determinados pela contagem desses subgrafos que o contêm. Trata-se, portanto, de um árduo problema combinatório. São conhecidos os quatro primeiros coeficientes do polinômio característico de  $G$ , isto é, aqueles correspondentes aos primeiros termos de mais altos graus. O primeiro é sempre unitário, o segundo, notado por  $a_1$ , é sempre nulo, o terceiro, notado  $a_2$ , é o simétrico do número de arestas de  $G$  e o quarto,  $a_3$ , é o simétrico do dobro do número de triângulos de  $G$ . No capítulo III, apresentamos contribuições para o cálculo do quinto e do sexto coeficientes do polinômio característico de um grafo, a partir da contagem de subgrafos elementares especiais que chamamos  $k$ -emparelhamentos.

A segunda parte da tese é composta pelos quarto e quinto capítulos. A princípio, a nossa intenção era simplesmente aplicar a teoria espectral e as contribuições por nós desenvolvidas na primeira parte da tese, em algumas classes de grafos, tais como árvores, grafos periplanares maximais(mops), grafos planares maximais e etc. A partir daí, observamos que em tais classes o número de arestas era função do número de vértices dos grafos a elas pertinentes. Construímos, então, a formalização de uma família de grafos, que chamamos cardigrafos, contendo diversas classes conhecidas, inclusive as acima citadas. Determinamos, aí, os grafos com densidade homogênea, que são grafos “quase regulares”. Para eles provamos resultados com relação ao seu maior autovalor, conhecido como índice. Fizemos, também, uma relação entre os grafos com densidade homogênea e os maxregulares, estes recentemente introduzidos por RODRIGUES (1997). Finalmente, as conclusões são apresentadas no último capítulo.

## **I.2 Conceitos e Resultados Preliminares**

A teoria espectral dos grafos procura obter propriedades estruturais de um grafo a partir do estudo dos autovalores da sua matriz de adjacência e vice-versa. Assim, para que este trabalho se torne o mais auto contido possível, apresentamos neste item os principais resultados da teoria dos grafos e de álgebra linear necessários à compreensão do desenvolvimento desta tese.

## I.2.1 Grafos

Um *grafo*  $G$  consiste de um par ordenado de conjuntos,  $(V,E)$ , tais que  $V$  é um subconjunto dos números naturais e  $E = \{\{x, y\} / x, y \in V ; x \neq y\}$ . Os elementos de  $V$  são os *vértices* do grafo e os elementos de  $E$  são as *arestas* de  $G$ .

O número de vértices de um grafo é sua *ordem*, notada por  $|G| = n$ , e o número de arestas é seu *tamanho*,  $|E| = m$ . Grafos são ditos *finitos* ou *infinitos* de acordo com sua ordem. Os grafos considerados nesse trabalho são finitos.

Dois vértices,  $x$  e  $y$ , são *adjacentes* quando  $\{x, y\} \in E$ . Nesse caso  $x$  e  $y$  são os extremos da referida aresta. Uma aresta  $e = \{x, y\}$  é usualmente notada como  $xy$ . Duas arestas são *adjacentes* ou *incidentes* se possuem um extremo em comum. Se todos os vértices de um grafo são dois a dois adjacentes, então  $G$  é dito *completo* e é notado por  $K_n$ .

Um conjunto de vértices (arestas) não adjacentes dois a dois é chamado *independente*.

O conjunto de adjacência de  $v \in V$  é o conjunto  $\text{Adj}(v)$  formado pelos vértices de  $V$  que são adjacentes a  $v$ . O grau de  $v$ ,  $d(v)$ , é a cardinalidade desse conjunto. O número  $\delta(G) = \min \{d(v), v \in V\}$  é chamado *grau mínimo* de  $G$  e o número  $\Delta(G) = \max \{d(v), v \in V\}$ , *grau máximo* de  $G$ . Se todos os vértices de  $G$  possuem o mesmo grau  $r$ , então o grafo é dito *r-regular*, ou simplesmente, *regular*.

O número  $d(G) = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v)$  é o *grau médio* de  $G$ . É claro que temos

$$\delta(v) \leq d(G) \leq \Delta(v).$$

O grau de uma aresta  $e = \{x, y\}$  é definido como  $\text{grau}(e) := d(x) + d(y) - 2$ .

Seja  $Y \subseteq V(G)$ , para  $i, 1 \leq i \leq \Delta$ , chamamos de *frequência do grau  $i$*  em  $Y$  a quantidade de vértices de  $Y$  que possuem grau igual a  $i$ . Esse número será denotado por  $w_Y(i)$ . Assim,  $w_Y(i) = |\{v \in Y \mid d(v) = i \text{ em } G\}|$ . Se  $Y = V(G)$ , o notaremos, simplesmente, por  $w(i)$ , ou quando for necessário destacarmos o grafo  $G$ ,  $w_G(i)$ .

A *matriz de adjacência* de  $G$ , denotada por  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  é tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \text{ é adjacente a } v_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A *matriz de incidência* de  $G$  é notada por  $B = (b_{ij})_{n \times m}$  e definida como

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } v_i \in e_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sejam  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$ . Dizemos que  $G$  e  $G'$  são *isomorfos* se existe uma bijeção  $\phi: V \rightarrow V'$  para a qual,  $xy \in E \Leftrightarrow \phi(x)\phi(y) \in E'$  e  $G$  e  $G'$  são *homeomorfos* se cada um é obtido através do outro por uma seqüência de subdivisões de arestas.

Seja  $G' = (V', E')$  um grafo. Se  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$  então  $G'$  é um *subgrafo* de  $G$ . Se, além disso,  $G'$  contém todas as arestas  $xy \in E$  com  $x, y \in V'$ , então  $G'$  é um *subgrafo induzido* de  $G$ .

Dizemos que um subgrafo  $G'$  de  $G$  é *maximal* com relação a uma propriedade  $P$  quando qualquer outro subgrafo de  $G$  que contenha propriamente  $G'$  não satisfaz  $P$ .

Um subgrafo completo maximal de  $G$  é uma *clique* de  $G$ . Um vértice é *simplicial* em  $G$ , se o subgrafo induzido pelo seu conjunto de adjacência em  $G$  é um grafo completo. Um 2-vértice é um vértice simplicial de grau dois.

Dados  $G_1$  e  $G_2$  grafos,  $G_i = (V_i, E_i)$ , com  $V_i \cap V_j = \emptyset$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ , a *soma direta*  $G_1 + G_2$  dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo dado por  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ . O *produto completo*  $G_1 \nabla G_2$  dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  é o grafo obtido a partir de  $G_1 + G_2$ , ligando cada vértice de  $G_1$ , a cada vértice de  $G_2$ .

Para  $v \in V(G)$ , o grafo  $G - \{v\}$  é tal que seu conjunto de vértices é  $V(G) - \{v\}$  e seu conjunto de arestas é obtido eliminando de  $E(G)$  todas as arestas incidentes a  $v$ . Os grafos  $G + \{v, w\}$  e  $G - \{v, w\}$ ,  $v, w \in V(G)$ , possuem os conjuntos de vértices dados por  $V(G)$  e os de arestas dados por  $E(G) \cup \{v, w\}$  e  $E(G) - \{v, w\}$ , respectivamente.

Um *percurso de comprimento k* em um grafo  $G$  é uma seqüência de vértices, não necessariamente distintos,  $x_0 x_1 x_2 \dots x_{k-1} x_k$ , tal que para cada  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, k$ ,  $\{x_{i-1}, x_i\} \in E(G)$ . Se  $x_k = x_0$ , então o percurso é *fechado*.

Um *caminho* é um percurso onde nenhum vértice pode ser repetido. O número de arestas de um caminho é seu comprimento, e um caminho de comprimento  $k$  é denotado  $P_k$ .

Se  $P = x_0 x_1 x_2 \dots x_{k-1}$  é um caminho e  $k \geq 3$ , então o grafo  $C := P + \{x_{k-1}, x_0\}$  é chamado *ciclo*. O comprimento do ciclo é o seu número de vértices (ou arestas). Um ciclo de comprimento  $k$  é um *k-ciclo* e é denotado por  $C_k$ . Um triângulo é um ciclo de comprimento três.

Dado um ciclo, qualquer aresta que ligue dois de seus vértices e que não pertença ao ciclo é chamada uma *corda* do ciclo.

O *grau de um ciclo*  $C = x_0 x_1 \dots x_{k-1} x_0$  é definido como  $\text{grau}(C) := d(x_0) + d(x_1) + \dots + d(x_{k-1}) - 2k$ .

O ciclo de menor comprimento em um grafo  $G$  é chamado *cintura* de  $G$  e o seu comprimento é notado por  $g(G)$ .

Podemos contar o número de percursos em um grafo (BIGGS, 1993) usando a sua matriz de adjacência:

**Teorema 1.1:** Se  $A$  é a matriz de adjacência de um grafo, então a  $(i, j)$  entrada da matriz  $A^k$ , denotada por  $a_{ij}^{(k)}$ , é igual ao número de percursos de comprimento  $k$ , que partem do vértice  $i$  e terminam no vértice  $j$ .

A *distância*  $d_G(x, y)$  em  $G$  de dois vértices  $x, y$  é o comprimento do menor caminho em  $G$ , ligando  $x$  a  $y$ . A maior distância entre dois vértices de  $G$  é o *diâmetro* de  $G$ .

Um grafo  $G$  é dito *conexo* se cada dois de seus vértices podem ser ligados por um caminho em  $G$ . Caso contrário  $G$  é dito ser *desconexo*. Uma *componente* de um grafo é um subgrafo conexo maximal.

A conectividade de um grafo conexo  $G$ , denotada  $k(G)$ , é o menor número de vértices que, ao serem retirados de  $G$ , o torna desconexo. Um grafo  $G$  é  $p$ -conexo se  $k(G) \geq p$ . Em particular,  $G$  é biconexo se  $k(G) \geq 2$ .

Uma coloração de vértices de um grafo  $G = (V, E)$  é uma aplicação  $c: V \rightarrow S$  tal que  $c(v) \neq c(w)$  se  $v$  é adjacente a  $w$ . Se  $|c(V)| = k$ , dizemos que  $G$  possui uma  $k$ -coloração. Os elementos de  $S$  são chamados de cores. O menor inteiro  $k$  tal que  $G$  possui uma  $k$ -coloração é o *número cromático* de  $G$ , e é denotado por  $\gamma(G)$ . Se  $\gamma(G) = k$ , então dizemos que  $G$  é  $k$ -cromático.

O *grafo de linha* de um grafo  $G$ , é o grafo  $L(G)$ , tal que o seu conjunto de vértices é formado pelas arestas de  $G$  e dois de seus vértices são adjacentes, se as arestas correspondentes são incidentes em  $G$ .

O *complemento* de  $G$  é o grafo  $\overline{G}$ , cujo conjunto de vértices é o mesmo de  $G$  e o de arestas é  $\overline{E}$ .

Um grafo  $G = (V,E)$  é *k-partido* se  $V$  admite uma partição em  $k$  classes tal que cada aresta possui seus extremos em classes distintas e os vértices, numa mesma classe, são não adjacentes. Grafos 2-partidos são chamados *bipartidos*.

Um grafo  $k$ -partido, tal que quaisquer dois vértices em classes distintas são adjacentes é chamado *k-partido completo* ou *completo multipartido*. Se, nesse caso, cada classe  $V_i$  contém exatamente  $n_i$  vértices,  $1 \leq i \leq k$ , o grafo é denotado  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . O grafo  $K_{1, n}$  é chamado *estrela*.

Grafos bipartidos não possuem ciclos ímpares. Na verdade, tal propriedade é uma caracterização para esses grafos (DIESTEL, 1997), como mostra a proposição a seguir:

**Proposição 1.1:** Um grafo é bipartido se e somente se não contém ciclos ímpares.

Um grafo é chamado *cordal* se qualquer ciclo de comprimento maior que três possui uma corda. Na figura 1.3,  $G_1$  é cordal, enquanto  $G_2$  não o é, pois o ciclo  $abcd$  não possui corda.

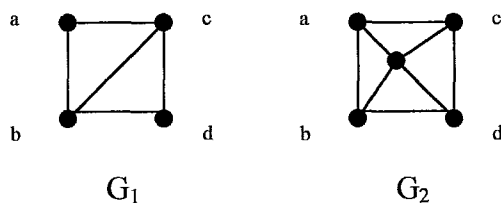


figura 1.1:  $G_1$  é grafo cordal;  $G_2$ , não cordal.

## I.2.2 . Classes especiais de grafos

Nessa seção faremos um estudo de algumas famílias de grafos que aparecerão com mais frequência nesse trabalho. As árvores, os grafos elementares, os planares, os periplanares maximais (mops) e as  $k$ -árvores são as principais delas. Apresentaremos as definições e relacionaremos algumas propriedades a respeito dessas famílias.

Um grafo conexo que não possui ciclos é chamado *árvore*. Um grafo cujas componentes são árvores é chamado *floresta*. Na figura 1.2, temos uma árvore com 6 vértices.

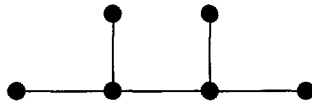


figura 1.2: uma árvore

Uma caracterização para as árvores é dada pelos conhecidos resultados (DIESTEL, 1997):

**Teorema 1.2:** As seguintes afirmações são equivalentes :

- (i)  $T$  é uma árvore ;
- (ii) quaisquer dois vértices de  $T$  são ligados por um único caminho;
- (iii)  $T-e$  é desconexo para qualquer aresta  $e \in G$  ;
- (iv) para  $x, y \in V(T)$ , vértices não adjacentes,  $T+xy$  contém um único ciclo.

**Corolário 1.1** :Um grafo conexo com  $n$  vértices é uma árvore, se e somente se, possui  $n-1$  arestas.



Um grafo é dito *elementar* se suas componentes conexas são ciclos ou  $K_2$ . O grafo da figura 1.3 é elementar, com 7 vértices e três componentes conexas.

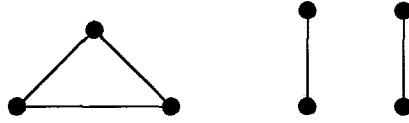


figura 1.3: um grafo elementar

O *posto* de um grafo  $G$  é definido por  $r(G) = n - c$ , onde  $c$  é o número de componentes conexas de  $G$ , e o *co-posto* de  $G$  é  $s(G) = m - n + c$ . Observamos que  $r(G)$  e  $s(G)$  coincidem com o posto e o co-posto da matriz de incidência de  $G$ , respectivamente, como pode ser encontrado em [BIGGS,1993].

O *co-posto* de um grafo elementar pode ser obtido usando a próxima proposição, que provaremos a seguir.

**Proposição 1.2** Se  $G$  é um grafo elementar então o seu co-posto é dado pelo número de ciclos de  $G$ .

*Prova:* Seja  $G$  um grafo elementar. Assim,  $G$  possui  $p$  componentes que são ciclos e  $q$  componentes que são arestas. Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_p$  os ciclos de  $G$  de comprimento  $L_i$  para  $i, 1 \leq i \leq p$ . Desse modo,

$$c = p + q, \tag{1.1}$$

$$n = L_1 + L_2 + \dots + L_p + 2q \quad \text{e} \tag{1.2}$$

$$m = L_1 + L_2 + \dots + L_p + q, \tag{1.3}$$

onde  $c$  é o número de componentes de  $G$ ,  $n$ , o número de vértices e  $m$ , o de arestas de  $G$ .

O co-posto de  $G$  é dado por

$$s(G) = m - n + c \tag{1.4}$$

Substituindo as equações (1.1), (1.2) e (1.3) em (1.4), temos

$$s(G) = p. \quad \blacklozenge$$

Um  $k$ -emparelhamento é um grafo elementar cujas  $k$  componentes são isomorfas a  $K_2$ . Na figura 1.4, mostramos um 3-emparelhamento.

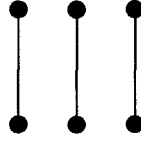


figura 1.4: 3-emparelhamento

Dizemos que um grafo  $G$  é *imersível* numa superfície  $S$  se existe uma representação de  $G$  desenhada sobre  $S$ , tal que duas arestas não se interceptem fora das extremidades. Nesse caso, dizemos que  $G$  está *imerso* em  $S$ .

Um grafo é *planar* quando pode ser imerso num plano. Quando representamos  $G$  por uma imersão no plano, chamamos tal representação de *plana*.

Na figura 1.5, mostramos duas representações de  $K_4$ : uma não plana e a outra, plana. Desse modo,  $K_4$  é um grafo planar

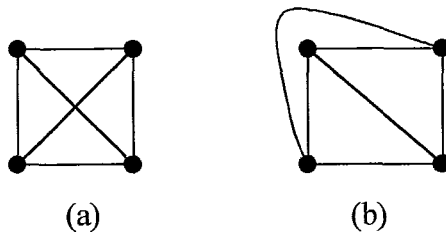


figura 1.5: (a) uma representação não plana e (b), plana, do mesmo grafo

Um grafo é *planar maximal* se a inclusão de qualquer aresta ao grafo acarreta a perda da planaridade.

Numa representação plana de um grafo planar as arestas determinam regiões do plano chamadas *faces*. A face que não é limitada por arestas de  $G$  é chamada face externa.

Convencionaremos aqui, que sempre que nos referirmos a uma representação de um grafo planar, estaremos nos referindo à sua representação plana.

Usando a fórmula de Euler, temos a seguinte relação entre os números de faces, de vértices e de arestas de um grafo planar, cuja prova pode ser encontrada em (JURKIEWICZ, 1990).

**Teorema 1.3** (Fórmula de Euler): Seja  $G$  um grafo planar conexo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e  $f$  faces. Então,  $n-m+f = 2$ .

Concluimos, usando o teorema 1.2, que o número de faces de um grafo planar não depende da representação plana do grafo. Além disso, como consequência direta da Fórmula de Euler, temos o seguinte teorema (JURKIEWICZ, 1990):

**Teorema 1.4** : Seja  $G$  um grafo planar com  $n$  vértices e  $m$  arestas, onde cada face possui  $t$  arestas,  $t \geq 3$ , então

$$m = \frac{t \cdot (n - 2)}{t - 2}.$$

Num grafo planar maximal todas as faces possuem três arestas. Caso contrário, se existisse uma face não triangular então poderíamos acrescentar uma aresta interna a essa face, sem que o grafo perdesse a planaridade. Isso contrariaria o fato de o grafo ser maximal. Assim, a seguinte proposição é uma consequência imediata da observação acima e do teorema 1.3.

**Proposição 1.3** Seja  $G$  um grafo planar maximal. Então  $m = 3n-6$  e, se  $G$  é apenas planar, então  $m \leq 3n-6$ .

Como decorrência, também, do teorema 1.4 temos o seguinte resultado para grafos planares que não possuem triângulos.

**Proposição 1.4:** Seja  $G$  um grafo planar sem triângulos então  $m \leq 2n - 4$ .

A partir das proposições 1.3 e 1.4 concluímos que os grafos  $K_5$  e  $K_{3,3}$  não são planares. Na verdade, Kuratowski mostrou que esse fato é uma caracterização para os grafos planares (DIESTEL, 1997):

**Teorema 1.5 :** Um grafo é planar se e somente se , não contém um subgrafo homeomorfo a  $K_5$  ou a  $K_{3,3}$ .

Os resultados que apresentaremos a seguir são baseados no trabalho de JURKIEWICZ (1990)

**Corolário 1.2:** Num grafo planar, existe, pelo menos, um vértice de grau menor ou igual a 5.

Prova: Temos que  $2m = \sum_{i=1}^{\Delta} d(v_i) = \sum_{i=1}^{\Delta} iw(i)$  e  $n = \sum_{i=1}^{\Delta} w(i)$ . Pela proposição 1.3,

segue que  $2m \leq 6n - 12$ , assim,  $6 \sum_{i=1}^{\Delta} w(i) - \sum_{i=1}^{\Delta} iw(i) \geq 12$ . Portanto,  $\sum_{i=1}^{\Delta} (6 - i)w(i) \geq 12$ .

Logo,

$$5w(1) + 4w(2) + 3w(3) + 2w(4) + w(5) \geq 12 - \sum_{i=6}^{\Delta} (6 - i)w(i) \geq 12. \quad (1.5)$$

Então existe pelo menos  $1 \leq i \leq 5$  tal que  $w(i) \neq 0$ . Desse modo, existe pelo menos um vértice de grau menor ou igual a 5. ♦

**Corolário 1.3:** Num grafo planar, 2-conexo, com  $n > 3$ , existem, pelo menos, 3 vértices de graus iguais ou menores que 5.

Prova: Como o grafo é 2-conexo, então usando (1.5), temos

$$4w(2)+3w(3)+2w(4)+w(5) \geq 12. \quad (1.6)$$

A desigualdade (1.6) só se verifica se o número de vértices de grau menor ou igual a 5 for maior ou igual a 3. ♦

De modo análogo, usando a desigualdade (1.5), podemos mostrar os seguintes corolários:

**Corolário 1.5:** Num grafo planar, 3-conexo, com  $n > 4$ ,  
Existem, pelo menos, 4 vértices de graus iguais ou menores que 5.

**Corolário 1.6:** Num grafo planar, 4-conexo, com  $n > 6$ ,  
Existem, pelo menos, 6 vértices de graus iguais ou menores que 5.

**Corolário 1.7:** Num grafo planar, 5-conexo, com  $n > 12$ ,  
Existem, pelo menos, 12 vértices de graus iguais ou menores que 5.

Um grafo planar é *periplanar* (*outerplanar*) se possui uma representação plana, tal que uma de suas faces contém todos os seus vértices. Em geral, representamos o grafo de modo que a face exterior contenha todos os seus vértices.

Na figura 1.6, temos um grafo periplanar e três de suas representações planas. Em (c), todos os vértices estão na face exterior.

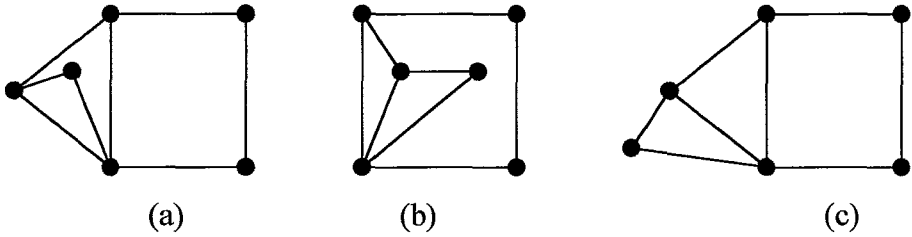


figura 1.6: representações planas de um mesmo grafo periplanar

Vimos que o número de arestas de um grafo planar é limitado superiormente, em função do número de vértices do grafo, por  $3n-6$ . Temos um resultado semelhante para os grafos periplanares encontrado em [RODRIGUES, (1997)], como veremos a seguir.

**Teorema 1.6:** Se  $G$  é um grafo periplanar, com  $n \geq 2$  vértices e  $m$  arestas, então  $m \leq 2n-3$ .

Essa desigualdade nos possibilita obter resultados semelhantes aos dos corolários: 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6. A prova se dá de maneira análoga.

**Corolário 1.8:** Num grafo periplanar, com  $n \geq 2$  vértices, existem, pelo menos, 2 vértices de graus menores ou iguais que 3.

**Corolário 1.9:** Num grafo periplanar biconexo, com  $n \geq 3$  vértices, existem, pelo menos, 3 vértices cujos graus são menores ou iguais que 3.

**Corolário 1.10:** Num grafo periplanar biconexo, com exatamente 2 vértices de graus iguais a 2, existem, pelo menos, 2 vértices de graus iguais a 3.

O seguinte resultado, obtido por TRUSCZYNSKI (1984), nos dá informação sobre a seqüência de graus de um grafo periplanar.

**Teorema 1.7:** Sejam  $G$  um grafo periplanar, com  $n \geq 3$  vértices e

$$[d_1, d_2, \dots, d_n] \text{ seqüência de graus de } G. \text{ Então, } \sum_{i=1}^n d_i^2 \leq n^2 + 7n - 18.$$

A igualdade só se verifica para o grafo da figura 1.7 ou para o grafo  $G$ , tal que  $G = K_1 \vee P_{n-1}$ , onde  $P_{n-1}$  é um caminho com  $n-1$  vértices.

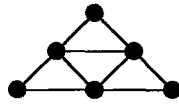


figura 1.7

Um grafo é periplanar maximal se o acréscimo de qualquer aresta ao grafo faz com que ele deixe de ser periplanar. Para simplificar chamaremos tais grafos de *mops*, devido ao termo em inglês, Maximal Outerplanar Graph.

O próximo teorema relaciona alguns resultados sobre os grafos periplanares maximais ou mops, tendo como referência a tese de doutorado de RODRIGUES (1997):

**Teorema 1.8:** Seja  $G$  um mop, com  $n \geq 3$  vértices.

Então,

- (i)  $G$  é um triângulo ou  $G$  possui pelo menos dois 2-vértices,
- (ii)  $G$  é biconexo,
- (iii)  $G$  é hamiltoniano e
- (iv)  $G$  possui  $(n-2)$  faces internas triangulares.

Num mop, chamamos de *triângulo interno* a face interior cujas arestas não pertencem ao ciclo hamiltoniano. Alguns mops não possuem triângulos internos, como por exemplo  $K_1 \nabla P_{n-1}$ , onde  $P_{n-1}$  é um caminho com  $n-1$  vértices,  $n > 2$ .

Usando o teorema 1.8 (iv) podemos determinar o número de arestas de um grafo planar maximal, como mostra o próximo teorema.

**Teorema 1.9:** Seja  $G$  um grafo periplanar maximal, com  $n \geq 2$  vértices e  $m$  arestas.

$$\text{Então, } m = 2n - 3.$$

Em RODRIGUES (1997), vimos que todo mop, a menos do grafo trivial e de  $K_2$ , pode ser obtido de forma recursiva incluindo em cada etapa um 2-vértice, tomando-se como subgrafo completo  $K_2$  uma aresta do ciclo hamiltoniano. Assim, um mop, com  $n \geq 3$ , pode ser definido pela seguinte recursão:

- (i) O grafo  $K_3$  é um mop;
- (ii) Um mop, com  $n+1$  vértices, pode ser obtido de algum mop  $G$ , com  $n$  vértices, pela inclusão de um novo vértice adjacente a dois vértices consecutivos sobre o ciclo hamiltoniano de  $G$

Na figura 1.8, mostramos a cadeia de geração de mops até 6 vértices.

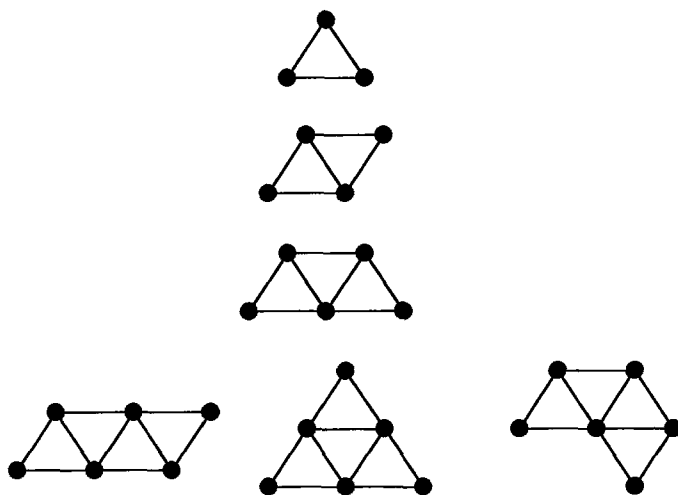


figura 1.8: mops até 6 vértices



Nessa forma de gerar os mops, observamos que, conforme a repetição sistemática da maneira de inserir o 2-vértice, formamos diversas subfamílias de mops. Algumas dessas subfamílias nos servirão como exemplos para ilustrar parte da teoria desenvolvida nesse trabalho. Tais subfamílias são denominadas “leque”, “serpentina”, e “coroa” e foram estudadas por RODRIGUES (1997), sendo que esta já havia sido abordada anteriormente por JUSTEL (1996).

- (i) **Grafo Leque:** Para  $3 \leq n \leq 5$ , o leque está bem determinado, a menos de isomorfismo, pela unicidade dos mops. Para  $n \geq 5$ , um leque, com  $n+1$  vértices, é obtido a partir de outro, com  $n$  vértices, inserindo o 2-vértice, com arestas incidentes ao vértice de maior grau e a um de seus vizinhos no ciclo hamiltoniano.

Podemos observar, que o grafo leque com  $n$  vértices, notado  $L_n$ , é exatamente o já definido produto completo  $K_1 \nabla P_{n-1}$ .

Dado um grafo leque  $L_n$ , uma seqüência de seus graus é  $[n-1, 2, 2, 3, 3, \dots, 3]$ , onde  $w(3) = n-3$ . O grafo  $L_7$  está representado na figura 1.9.

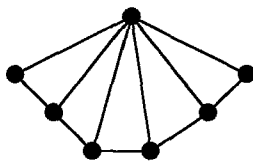


figura 1.9: o grafo leque  $L_7$

- (ii) **Grafo Serpentina:** Os grafos serpentina,  $S_n$ , podem ser obtidos, de forma recursiva, da seguinte maneira: Para  $n$ ,  $3 \leq n \leq 5$ , o serpentina está bem determinado, a menos de isomorfismo, pela unicidade dos mops. Para  $n > 5$ , um serpentina com  $n+1$  vértices é obtido a partir de outro com  $n$  vértices, inserindo o 2-vértice a um de grau 2 e a seu vizinho de menor grau no ciclo hamiltoniano.

CVETKOVIĆ e ROWLINSON (1990) se referem aos grafos serpentinados,  $S_n$ , como  $P_n^2$ , o grafo obtido a partir de  $P_n$ , quando inserimos arestas entre quaisquer vértices, cuja distância seja igual a 2.

Uma seqüência de graus de  $S_n$  é dada por  $[2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots, 4]$ , onde  $w(4) = n-4$ . Na figura 1.10 exibimos o grafo  $S_7$ .

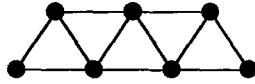


figura 1.10: o grafo serpentina  $S_7$ .

(iii) **Grafo Coroa:** Para  $k \geq 1$ , podemos obter os grafos coroas,  $C_k$ , da seguinte maneira recursiva: O coroa 1,  $C_1$ , é obtido inserindo-se 2-vértices em cada aresta do triângulo. Para  $k \geq 2$ ,  $C_k$  é obtido a partir de  $C_{k-1}$ , quando inserimos 2-vértices em cada aresta do seu ciclo hamiltoniano. Por construção, cada grafo coroa  $C_k$  possui  $n = 3 \cdot 2^k$  vértices e cada um deles possui grau  $i$ , par, com  $i = 2, 4, \dots, 2k, 2k+2$ . A freqüência desses graus é dada por  $w(2) = 3 \cdot 2^{k-1}$ ;  $w(4) = 3 \cdot 2^{k-2}$ ; .....;  $w(2k) = 3$ ;  $w(2k+2) = 3$ . Na figura 1.11, representamos o grafo  $C_2$ .

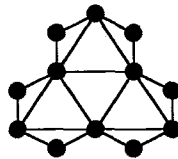


figura 1.11: o grafo coroa  $C_2$

A maneira como os mops são gerados nos permite determinar o número de seus 4-ciclos, como podemos verificar com a propriedade abaixo:

**Propriedade 1.1:** Em um mop com  $n > 3$  vértices, o número de 4-ciclos é dado por

$$c_4 = n - 3.$$

Prova: Provaremos por indução sobre  $n$ . Para  $n=4$ , claramente,  $c_4=1=4-3$ . Suponhamos que para todo mop com  $n$  vértices, tenhamos  $c_4=n-3$ . Seja  $H'$  um mop com  $n+1$  vértices. Assim,  $H'$  é obtido a partir de um mop  $H$ , com  $n$  vértices, pela inserção de um 2-vértice numa aresta  $e=uv$  do ciclo hamiltoniano. Chamemos de  $x$  o referido 2-vértice. Seja o triângulo  $uvw$  a única face interna de  $H$  que contem  $e$ . Desse modo,  $xuvw$  é o único quatro ciclo de  $H$  que não pertence a  $H'$ . Portanto,  $c_4(H')=c_4(H)+1=(n+1)-3$ . ♦

Com a propriedade acima, concluímos que todos os mops, num determinado nível, possuem a mesma quantidade de 4-ciclos. Isto já não acontece para os 5-ciclos. Basta verificar que o grafo serpentina  $S_6$  possui dois 5-ciclos, enquanto o grafo coroa  $C_1$  possui três. No entanto, se considerarmos somente os mops serpentinas e leques, podemos mostrar que esse número é o mesmo, como a seguir.

**Propriedade 1.2:** Sejam  $S_n$  o mop serpentina e  $L_n$  o mop leque com  $n>4$  vértices.

O número de 5-ciclos de  $S_n$  e de  $L_n$  é dado por  $c_5=n-4$ .

Prova: Em  $S_n$  (ou  $L_n$ ), rotulemos cada uma de suas faces por 1 a  $(n-2)$ , de modo que as duas faces que contem os vértices de graus iguais a 2 recebam 1 e  $(n-2)$ . Cada 5-ciclo de  $S_n$  (ou  $L_n$ ) é formado por 3 faces justapostas. Portanto, as faces 1,2,3; 2,3,4;...e  $(n-4)(n-3)(n-2)$  formam os 5-ciclos de  $S_n$  (ou  $L_n$ ). Assim, para estes grafos, temos  $c_5=n-4$ . ♦

Concluiremos essa seção definindo as  $k$ -árvores, para  $k \geq 5$ . Verificaremos que esse conceito generaliza o conceito de árvore. Na verdade, uma árvore é exatamente uma 1-árvore. Basear-mos-emos no trabalho de JUSTEL e MARKENZON (1999).

Uma  $k$ -árvore ou é um grafo completo de  $k$  vértices ou um grafo que contém um vértice cujo conjunto de adjacência induz um grafo completo de  $k$  vértices e cuja remoção resulta numa  $k$ -árvore. Portanto, tal vértice deve ser simplicial de grau  $k$ .

Temos uma definição recursiva para o conceito de  $k$ -árvores: comece por um grafo completo com  $k$  vértices; este grafo é uma  $k$ -árvore. Escolha uma  $k$ -clique  $Q$  na  $k$ -árvore já existente; acrescente um vértice e faça-o adjacente a todos os vértices de  $Q$ .

O seguinte teorema é válido para as  $k$ -árvores.

**Teorema 1.10 :** Se  $G$  é uma  $k$ -árvore com  $n$  vértices

$$\text{então o seu número de arestas é dado por } m = kn - \frac{1}{2}k(k+1).$$

Comparando a definição recursiva dada para um mop com a de uma 2-árvore, concluímos que os mops formam uma subclasse dentro das 2-árvores. Nos mops, a 2-clique escolhida deve estar no ciclo hamiltoniano. Já nas 2-árvores, tal exigência é relaxada. Por exemplo, numa 2-árvore, se a aresta escolhida como 2-clique fizer parte de um triângulo interno então não obteremos um mop, como é mostrado na figura 1.12.

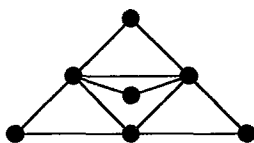


figura 1.12: uma 2-árvore que não é um mop.

Algumas 3-árvores são grafos planares maximais, por isso são chamados *grafos planares 3-árvores*. Temos uma caracterização para essa subfamília de 3-árvores, que será apresentada no próximo teorema, devido a JUSTEL e MARKENZON(1999).

**Teorema 1.11:**  $G$  é um grafo planar 3-árvore, se e somente se, contém pelo menos 3 vértices, é cordal e planar maximal.

Finalmente no item que se segue apresentaremos conceitos básicos de Álgebra Linear, no que se refere a teoria espectral, para permitir que este texto se torne o mais autocontido possível.

### I.2.3 Álgebra linear : autovalores e autovetores

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . O polinômio  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  é chamado *polinômio característico de  $A$* . Naturalmente trata-se de um polinômio de grau igual à ordem da matriz que o define. Suas raízes são os *autovalores* de  $A$ .

Assim, os autovalores de  $A$  são os escalares  $\lambda$ , para os quais  $Ax = \lambda x$  possui solução não nula. As soluções não nulas correspondentes são os *autovetores  $x$  de  $A$  associados a  $\lambda$* .

Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz  $A$ . O conjunto formado pelos autovetores de  $A$ , associados a  $\lambda$ , e o vetor nulo é chamado *auto espaço de  $\lambda$* , e denotado por  $\xi(\lambda)$ . Assim,  $\xi(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$ . A dimensão do auto espaço  $\xi(\lambda)$  é chamada *multiplicidade geométrica de  $\lambda$* .

Os resultados que apresentaremos nesta seção são baseados no livro de NOBLE e DANIEL (1986). Quando utilizarmos outras fontes de consulta, estas serão mencionadas no texto.

**Proposição 1.5:** O polinômio característico de uma matriz  $A$  de ordem  $n$  possui grau  $n$ , isto é,  $p(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ . Existem  $n$  autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  associados a  $A$  e os seguintes coeficientes do polinômio característico satisfazem:

$$a_0 = 1, a_1 = \text{traço}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \text{ e } a_n = \det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

Os autovalores de uma matriz não são necessariamente distintos. O número de vezes que um autovalor  $\lambda_i$  aparece como raiz do polinômio característico chama-se *multiplicidade algébrica de  $\lambda_i$*  e a denotamos  $m_i, 1 \leq i \leq n$ .

**Proposição 1.6:** Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Uma matriz  $A$  é dita *simétrica* se  $A^T = A$ . Se  $A$  é uma matriz simétrica com entradas reais, podem-se mostrar os seguintes resultados:

**Proposição 1.7:** Seja  $A$  uma matriz simétrica e real. Se  $\lambda$  é um de seus autovalores então a multiplicidade algébrica de  $\lambda$  coincide com sua multiplicidade geométrica.

**Proposição 1.8 :** Seja  $A$  uma matriz simétrica e real então seus autovalores são reais.

Dizemos que dois vetores  $u$  e  $v$  em  $\mathbb{R}^n$  são *ortogonais* quando  $u^T v = 0$ . Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  é *ortogonal* quando um par qualquer de seus vetores é ortogonal. Se além disso, cada vetor do conjunto satisfaz  $\|v\| = \sqrt{v^T v} = 1$ , então dizemos que  $S$  é *ortonormal*.

Uma matriz real é chamada *ortogonal* se  $A^T A = A A^T = I$ . Pode-se mostrar que se  $A$  é uma matriz ortogonal então tanto suas linhas quanto suas colunas formam um conjunto ortonormal. Observamos que  $A^{-1} = A^T$ , se  $A$  é ortogonal.

**Proposição 1.9:** Se  $A$  é uma matriz simétrica e real então existe uma matriz ortogonal,  $U_{n \times n}$ , tal que  $U^T A U$  é uma matriz diagonal  $D$ , onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , para  $\lambda_i$  autovalor de  $A$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Desse modo, a matriz  $U$ , referida acima, é tal que suas colunas são os autovetores que formam uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n)$ , onde  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é uma base de autovetores ortonormais de  $\mathbb{R}^n$ . Como  $U^{-1} = U^T$ , temos que

$$A = UDU^T \tag{1.7}$$

A *decomposição espectral* de  $A$  é dada por

$$A = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_k P_k, \tag{1.8}$$

onde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  são os autovalores distintos de  $A$  e  $P_i$  representa a projeção ortogonal de  $\mathbb{R}^n$  em  $\xi(\mu_i)$ , com respeito à base canônica de  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Para  $i$  fixo,  $1 \leq i \leq n$ , se  $\xi(\mu_i)$  possui  $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$  como base ortonormal então temos

$$P_i = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T + \dots + x_d x_d^T. \tag{1.9}$$

Além do mais,

$$P_i^2 = P_i = P_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{e} \quad P_i P_j = 0, \quad i \neq j.$$

Dizemos que uma matriz real é não negativa se suas entradas são não negativas. Do mesmo modo, um vetor em  $\mathbb{R}^n$  é não negativo se suas componentes são não negativas.

Os teoremas 1.12, 1.13 e 1.14 que enunciaremos a seguir, devidos a GANTMACHER (1977), aplicam-se a matrizes não negativas e tratam do maior autovalor dessas matrizes. Esse autovalor, conhecido como *índice*, tem sido um importante objeto de estudo em teoria espectral dos grafos. Por isso dedicaremos a ele um tópico especial contendo os principais resultados encontrados na literatura. Para os índices, no capítulo V apresentaremos contribuições originais.

**Teorema 1.12:** Toda matriz não negativa possui um autovalor não negativo  $r$ , tal que o módulo de qualquer outro autovalor é não superior a  $r$ . Associado a esse autovalor máximo, existe, pelo menos um autovetor não negativo.

Uma matriz obtida trocando-se as posições relativas de algumas linhas da matriz identidade é chamada de *matriz de permutação*.

Uma matriz  $A$  é dita *reduzível* se existe uma matriz de permutação  $P$  tal que a matriz  $P^{-1}AP$  é da forma  $\begin{pmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{pmatrix}$ , onde  $X$  e  $Z$  são matrizes quadradas. Caso contrário,  $A$  é chamada *irreduzível*.

Os próximos dois teoremas dizem respeito a propriedades das matrizes irreduzíveis possuírem, pelo menos, um autovalor de multiplicidade algébrica unitária, que são chamados de *simples*. Além disso, tais autovalores são os índices das referidas matrizes.

**Teorema 1.13:** Uma matriz irreduzível não negativa  $A$  possui um autovalor positivo  $r$  que é uma raiz simples do polinômio característico de  $A$ . O módulo de qualquer outro autovalor de  $A$  é menor que  $r$ . Associado a esse máximo autovalor existe, pelo menos, um autovetor positivo.

Como recíproca do teorema 1.13, temos o seguinte teorema:

**Teorema 1.13:** Se o máximo autovalor  $r$  de uma matriz não negativa  $A$  é simples e se existe um autovetor positivo associado a  $r$  em  $A$  e  $A^T$ , então  $A$  é irreduzível.



O *Quociente de Rayleigh* de uma matriz,  $A$ , simétrica, real e quadrada de ordem  $n$  é a expressão da forma

$$\rho(y) = \frac{y^T A y}{y^T y}, \quad (1.10)$$

onde  $y$  é um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^n$ .

Temos que o maior autovalor de uma matriz real e simétrica é o valor máximo do quociente de Rayleigh, como mostra a proposição abaixo encontrada em (NOBLE e DANIEL, 1986).

**Proposição 1.10:** Sejam  $A$  uma matriz simétrica, real e de ordem  $n$  e  $\mu_1$  e  $\mu_n$  o maior e o menor autovalor de  $A$ , respectivamente. Então,  $\mu_n \leq \rho(y) \leq \mu_1$ . Além disso, se  $x_1$  e  $x_n$  são os autovetores ortonormalizados de  $A$ , associados a  $\mu_1$  e a  $\mu_n$ , respectivamente, então

$$\mu_1 = \max_{y \neq 0} \rho(y) = \rho(x_1) \text{ e}$$

$$\mu_n = \min_{y \neq 0} \rho(y) = \rho(x_n).$$

## Capítulo II

### Teoria espectral dos grafos

#### II.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo fornecer os pré-requisitos básicos necessários à compreensão da Teoria Espectral dos Grafos. Baseados no trabalho de CVETKOVIĆ, DOOB E SACHS (1980) e BIGGS(1993), desenvolvemos as seções II.2 e II.3, onde apresentamos definições e relacionamos alguns resultados conhecidos desde o início da pesquisa em teoria espectral dos grafos até os anos 80. Em particular, na seção II.3, fazemos um estudo mais detalhado sobre o polinômio característico de um grafo, visto que alguns de seus coeficientes serão objeto de análise dessa dissertação. Como algumas famílias de grafos possuem propriedades espectrais interessantes, relacionamos algumas delas na seção II.4. Os autovetores e os auto espaços de um grafo são abordados em II.5. Baseamo-nos no livro recente de CVETKOVIĆ, ROWLINSON E SÍMIC (1997), “ Eigenvalues of graphs”. Nesse texto, os autores destacam a importância da busca de invariantes algébricos em grafos, já que o espectro, por si só, não é suficiente como instrumento de caracterização de grafos. Por essa razão, eles introduzem o conceito de ângulos de um grafo, assunto do qual trataremos em II.6. Finalmente, na seção seguinte, apresentamos o conceito de índice de um grafo. Trata-se do maior autovalor associado ao grafo. A literatura reúne uma série de resultados importantes a esse respeito. Nesta tese apresentamos uma contribuição sobre índices numa família particular de grafos.

## II.2 O espectro de um grafo

Seja  $G = (V, E)$  um grafo onde  $V$  é o conjunto de vértices de  $G$  e  $E$  é o conjunto de arestas de  $G$ ,  $|V| = n$ ,  $|E| = m$ . Seja  $A$  a matriz de adjacência de  $G$ .

Dizemos que  $\lambda$  é um *autovalor* de  $G$ , se  $\lambda$  é um autovalor da sua matriz de adjacência  $A$ , e que o polinômio característico de  $A$ ,  $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$  é o *polinômio característico de  $G$* , notado  $p_G(\lambda)$ .

Sendo  $G$  um grafo não direcionado, o traço de  $A$  é igual a zero. Desse modo, usando a proposição 1.5 temos que a matriz  $A$  possui, necessariamente, autovalores positivos e negativos, sendo, portanto uma matriz indefinida. Porém, como vimos na proposição 1.8, sendo  $A$  simétrica e real, os seus autovalores são números reais.

Chamamos de *espectro de um grafo  $G$* ,  $\text{Spec } G$ , o conjunto dos autovalores de  $G$ , com as suas respectivas multiplicidades.

Se  $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_s$  são os autovalores distintos de  $G$  e  $m_i$ , a multiplicidade de  $\mu_i$ ,

$$1 \leq i \leq s, \text{ então escrevemos } \text{Spec } G = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ m_1 & m_2 & \dots & m_s \end{pmatrix}.$$

Como conseqüência temos  $\sum_{i=1}^s m_i = n$  e  $\sum_{i=1}^s m_i \mu_i = 0$ .

É comum notarmos o menor autovalor de um grafo  $G$  por  $\mu_{\min}(G)$  e o maior, por  $\mu_{\max}(G)$ . Sendo que o último recebe o nome de *índice do grafo  $G$* , e também pode ser notado por  $\text{ind}(G)$ . Na seção II.7, faremos um estudo mais detalhado a respeito dos índices de  $G$ .

Seja  $G$  o ciclo  $C_4$ , como representado na figura 2.1. O polinômio característico de  $C_4$  é  $p_G(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4)$  e seu espectro,  $\text{Spec } G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Notemos que  $\text{ind}(C_4) = 2$ .

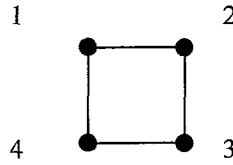


figura 2.1 :  $C_4$

No caso do exemplo dado na figura 2.1, podemos concluir que  $\mu=0$  é um dos autovalores de  $C_4$ , sem necessariamente determinar o seu polinômio característico, como mostra a propriedade 2.1, cujo resultado pode ser encontrado em (BIGGS, 1993).

**Propriedade 2.1:** Seja  $G = (V,E)$  um grafo, com vértices,  $v_i$  e  $v_j$ , não adjacentes, mas com mesmos conjuntos de adjacência. Tem-se então que  $G$  possui um autovalor nulo.

Notemos que os vértices 1 e 3, da figura 2.1, satisfazem as exigências da propriedade 2.1, e portanto,  $\mu=0$  é um autovalor de  $G$ .

Grafos que possuem o mesmo espectro são chamados *coespectrais*.

COLLATZ e SINOGOWITZ(1957) mostram que dois grafos não isomorfos podem ter o mesmo espectro. Desse modo, concluímos que o espectro de um grafo não caracteriza o grafo. Na figura 2.2 temos duas árvores, não isomorfas, com o mesmo espectro.

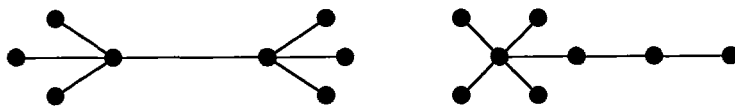


figura 2.2: dois grafos não isomorfos e coespectrais.

É comum denotarmos o termo “*par de grafos coespectrais não isomorfos*” por *PING*.

Entre os grafos conexos com no máximo cinco vértices não existem *PINGs*. Já para seis vértices, podemos determinar um *PING*, como mostra a figura 2.3.

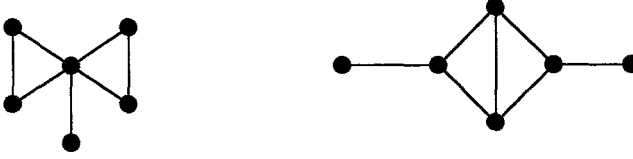


figura 2.3: grafos conexos coespectrais

No entanto, sem a hipótese de conexidade, existe um *PING* com cinco vértices, dado na figura 2.4. Nela, um dos grafos é conexo e o outro não. Portanto, concluímos, também, que o espectro não determina se o grafo é conexo.



figura 2.4: grafos coespectrais

Felizmente, a matriz de adjacência de um grafo nos dá informação sobre a sua conexidade, como nos diz a próxima proposição, devida a LINT(1992).

**Proposição 2.1:** Seja  $A$  a matriz de adjacência de um grafo  $G$ .

$G$  é conexo se e somente se  $A$  é irredutível.

### II.3 O Polinômio característico de um grafo

Os coeficientes do polinômio característico de um grafo  $G$  se relacionam diretamente com sua estrutura. Com a proposição a seguir (BIGGS, 1993), já podemos observar essa ligação. Verificaremos que o número de arestas e o número de triângulos podem ser obtidos facilmente através do polinômio característico.

**Proposição 2.2:** Sejam  $G = (V,E)$  um grafo e

$p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$  o polinômio característico, então

(i)  $a_1 = 0$  ;

(ii)  $a_2 = -|E|$  ;

(iii)  $a_3 = -2.t$ , onde  $t$  é o número de triângulos em  $G$ .

Observando a proposição 2.1, somos levados a inferir um resultado semelhante para  $a_4$  que envolva um cálculo direto com o número de 4 - ciclos em  $G$ .

Infelizmente, a determinação de  $a_4$  e dos demais coeficientes  $a_n, n > 4$ , não é tão direta quanto esperávamos que fosse. Para determiná-los, precisamos da definição de posto e co-posto de um grafo e, também, da contagem de seus subgrafos elementares, apresentados em I.2.2. BIGGS (1993) mostra o seguinte resultado:

**Teorema 2.1** Sejam  $p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$  o polinômio característico de um grafo  $G$ ,  $E_i$  o conjunto de todos os subgrafos elementares de  $G$  com  $i$  vértices,  $s(\Lambda)$  e  $r(\Lambda)$  o posto e o co-posto de  $\Lambda \in E_i$ , respectivamente. Se  $1 \leq i \leq n$ , então

$$(-1)^i a_i = \sum_{\Lambda \in E_i} (-1)^{s(\Lambda)} 2^{r(\Lambda)} .$$

Pode acontecer que, para um determinado  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , o grafo não possua subgrafos elementares com  $i$  vértices. Nesse caso,  $a_i = 0$ .

Usando o teorema 2.1, até poderíamos determinar o polinômio característico de  $G$  sem o cálculo do determinante, usando somente a estrutura do grafo. No entanto, na maioria das vezes, a contagem de subgrafos elementares não é trivial, mesmo quando o número de vértices é pequeno. No capítulo III, apresentaremos uma contagem para certos casos de subgrafos elementares e faremos um estudo sobre os coeficientes  $a_4$  e  $a_5$  do polinômio característico, que será a primeira, das nossas contribuições mais significativas.

A proposição 2.2, apresentada anteriormente pode ser provada aplicando-se o teorema 2.1. Como não existe subgrafo elementar com apenas um único vértice então, pelo teorema 2.1,  $a_1=0$ . Os subgrafos elementares com 2 vértices são as arestas do grafo. Como o posto de uma aresta é igual a 1 e o co-posto é zero então, pelo teorema 2.1,  $(-1)^2 a_2 = \sum_{\Lambda \in E_2} (-1)^1 2^0 = -|E|$  então  $a_2 = -|E|$ . Do mesmo modo, os

subgrafos elementares com 3 vértices são os triângulos. O posto e o co-posto de um triângulo são, respectivamente, 2 e 1. Assim, pelo teorema 2.1,  $(-1)^3 a_3 = \sum_{\Lambda \in E_3} (-1)^2 2^1 = 2t$  então  $a_3 = -2t$ , onde  $t$  é o número de triângulos de  $G$ .

A partir do teorema 2.1, vamos obter uma fórmula para  $a_4$  e  $a_5$ . Os subgrafos elementares com 4 vértices são os 2-emparelhamentos, definidos em 1.2.2, e os 4-ciclos. O posto e o co-posto de um 2-emparelhamento são, respectivamente, 2 e 0 e os de um 4-ciclo são 3 e 1. Chamamos de  $\varepsilon_2$  o número de 2-emparelhamentos em um grafo e  $c_4$  o número de 4-ciclos. Daí então,  $(-1)^4 a_4 = (-1)^2 2^0 \varepsilon_2 + (-1)^3 2^1 c_4$ . Logo,

$$a_4 = \varepsilon_2 - 2c_4. \quad (2.1)$$

Um subgrafo elementar com 5 vértices é um 5-ciclo ou o grafo  $H$  obtido pela soma direta de um triângulo com uma aresta. Um 5-ciclo tem posto e co-posto iguais a 4 e 1, respectivamente. Já  $H$  possui posto igual a 3 e co-posto igual a 1. Sendo  $c_5$ , o número de 5-ciclos e  $f_5$ , o de grafos isomorfos a  $H$ , então

$$(-1)^5 a_5 = (-1)^4 2c_5 + (-1)^3 2f_5. \quad (2.2)$$

e

$$a_5 = 2.(f_5 - c_5). \tag{2.3}$$

Para o grafo  $G$  da figura 2.5, temos diretamente da proposição 2.2 que  $a_1=0$ ,  $a_2=-7$  e  $a_3=-4$ . Vamos, agora, determinar  $a_4$ . Por (2.1), temos que calcular  $c_4$  e  $\varepsilon_2$ . Em  $G$ , temos três 4-ciclos: 5234, 1234 e 1254 e oito 2-emparelhamentos: 12 e 34; 12 e 45; 14 e 23; 14 e 25; 15 e 23; 15 e 34; 23 e 45; 25 e 34. Assim  $c_4=3$  e  $\varepsilon_2=8$ . Usando (2.1), temos  $a_4=2$ . Para determinar  $a_5$ , temos que calcular  $c_5$  e  $f_5$ . Em  $G$ , temos dois 5-ciclos: 12345, 14325 e dois subgrafos isomorfos a  $H$ : 125+34 e 145+23. Assim,  $c_5=2$  e  $f_5 = 2$ . Aplicando (2.3),  $a_5=0$ . Desse modo,  $p_G(\lambda)=\lambda^5-7\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda$ .

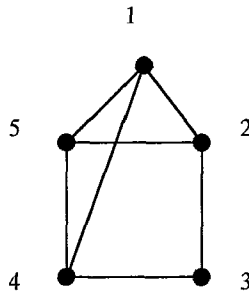


figura 2.5: grafo com  $p_G(\lambda)=\lambda^5-7\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda$

Seja  $G$  um grafo com um número  $n$  par de vértice. Chamamos de *1-fator* de  $G$  todos os subgrafos elementares de  $G$  com  $n$  vértices onde cada componente conexa é isomorfa a  $K_2$ . Desse modo, cada 1-fator de  $G$  é um emparelhamento completo de  $G$ .

Na figura 2.6 mostramos um exemplo de um 1-fator do 4-ciclo.

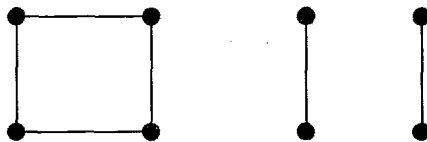


figura 2.6: grafo  $C_4$  e um de seus 1-fatores

Dizemos que um grafo é 1-fatorável se ele possui um 1-fator.



Nem todo grafo com um número par de vértices é 1-fatorável, como mostra a figura 2.7.

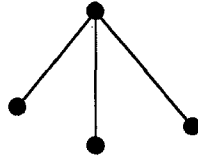


figura 2.7: grafo não 1-fatorável

Usando o conceito de 1-fator de um grafo, algumas informações sobre o termo independente do seu polinômio característico podem ser obtidas.

**Proposição 2.3:** Sejam  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $a_n$  o termo independente do polinômio característico de  $G$ . Se  $G$  é não 1-fatorável então  $a_n$  é par.

Prova: Seja  $E_n$  o conjunto de subgrafos elementares de  $G$  com  $n$  vértices. Se  $E_n = \emptyset$  então  $a_n = 0$ , portanto um número par. Caso contrário, seja  $\Lambda \in E_n$  um subgrafo elementar com  $n$  vértices. Como  $G$  não é 1-fatorável, temos que uma das componentes de  $\Lambda$  é um ciclo. Desse modo, pela proposição 1.2, seu co-posto é diferente de zero, o que, pelo teorema 2.1, implica que sua contribuição para o coeficiente  $a_n$  é um número par. Tomando todos os subgrafos elementares com  $n$  vértices, temos que  $a_n$  é par. ♦

Como consequência imediata da proposição 2.3, temos o seguinte corolário.

**Corolário 2.1:** Sejam  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $a_n$  o termo independente do polinômio característico de  $G$ . Se  $n$  é ímpar então  $a_n$  é par.

Prova: Sendo  $n$  ímpar então  $G$  é não 1-fatorável, aplicando a proposição 2.3 temos que  $a_n$  é par. ♦

Notemos que nada é possível afirmar sobre a paridade de  $a_n$  para o caso em que  $n$  é par. Na figura 2.8 temos dois grafos,  $G_1$  e  $G_2$ , com um número par de vértices, como  $G_1$  é não fatorável então, pela proposição 2.3,  $a_n$  é par. Já no caso de  $G_2$ , temos que este possui como único subgrafo elementar com  $n$  vértices um 1-fator. Assim, usando o teorema 2.1, a contribuição desse subgrafo para o cálculo de  $a_n$  é 1 ou  $-1$ , logo,  $a_n$  é ímpar.

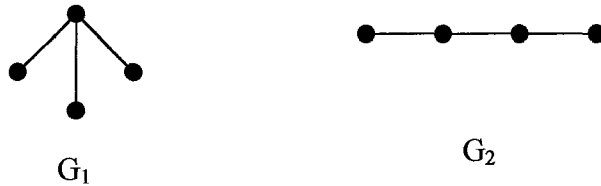


figura 2.8: grafos com termos independentes de paridades distintas

Os coeficientes do polinômio característico nos dão informação a respeito dos ciclos ímpares em um grafo, como mostra CVETKOVIĆ et al. (1980):

**Proposição 2.3:** O comprimento  $L$  do menor ciclo ímpar em  $G$  é igual ao índice do primeiro coeficiente ímpar não nulo do polinômio característico.

Além disso, a quantidade dos ciclos de comprimento  $L$  em  $G$  é  $\frac{-a_L}{2}$ .

Como consequência imediata desta proposição, temos que se o grafo  $G$  é uma árvore  $T$ , então todos os coeficientes de índice ímpares são nulos em  $p_T(\lambda)$ , já que  $T$  não contém ciclos. Além disso, como os subgrafos elementares de  $T$  com  $i$  vértices são emparelhamentos de  $\frac{i}{2}$  arestas,  $i$  par, temos que, pelo teorema 2.1,

$$a_i = q_i (-1)^{i/2},$$

onde  $q_i$  é o número de modos de selecionar  $\frac{i}{2}$  arestas não adjacentes em  $T$ .

## II.4 Propriedades espectrais de algumas classes de grafos

Algumas classes de grafos possuem importantes propriedades espectrais. Muitas delas caracterizam o grafo, como poderemos verificar ao longo desta seção.

Os grafos  $r$ -regulares, como já definimos anteriormente, são aqueles cujos vértices possuem o mesmo grau  $r$ . BIGGS (1993) mostra que, para esta classe de grafos, o maior autovalor coincide com o grau  $r$ :

**Teorema 2.2:** Seja  $G$  um grafo  $r$ -regular, então:

- (i)  $r$  é um autovalor de  $G$ ;
- (ii) Se  $G$  é conexo então a multiplicidade de  $r$  é igual a 1.
- (iii)  $|\lambda| \leq r$ , para todo  $\lambda$  autovalor de  $G$ .

A próxima proposição encontrada em [CVETKOVIĆ et al., 1980] generaliza o item (ii) do teorema 2.2.

**Proposição 2.5:** O número de componentes de um grafo regular  $G$  é igual à multiplicidade de seu índice.

Vimos em II.2.1 que o espectro de um grafo não determina a sua conexidade, pois podemos ter dois grafos coespectrais, um sendo conexo e o outro não. Já com os grafos regulares isso não pode acontecer, pois dado o seu espectro podemos determinar se o grafo é regular, como mostraremos a seguir, com um resultado de CVETKOVIĆ et al. (1980):

**Teorema 2.3:** Sejam  $\lambda_1=r>\lambda_2>\dots>\lambda_n$  os autovalores de um grafo  $G$ .

$$G \text{ é } r\text{-regular se e somente se } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = r.$$

CVETKOVIĆ et al.(1980) mostram que a partir do espectro de um grafo regular podemos determinar o número de seus ciclos com um dado comprimento:

**Teorema 2.4:** Seja  $G$  um grafo  $r$ -regular de cintura  $g(G)$  e polinômio característico  $p_G(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n$ . Seja  $h \leq n$ ,  $h < 2g(G)$ , então o número de  $h$ -ciclos em  $G$ ,  $c_h$ , é determinado por  $r$  e pelos coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_h$  de  $p_G(\lambda)$ .

Consideremos, agora, os grafos bipartidos. Um resultado de BIGGS (1993) mostra que seus espectros são simétricos em relação à origem:

**Proposição 2.6:** Seja  $G$  um grafo bipartido. Se  $\lambda$  é um autovalor qualquer de  $G$ , então  $-\lambda$  é, também, um autovalor de  $G$ .

Na verdade, LINT(1992) mostra que essa propriedade caracteriza os grafos bipartidos conexos.

**Proposição 2.7:** Seja  $\lambda$  o índice de um grafo  $G$  conexo, então  $G$  é bipartido se, e somente se,  $-\lambda$  é um autovalor de  $G$ .

Vamos, agora, usando a proposição 2.6, obter o espectro de um grafo bipartido completo,  $K_{a,b}$ . Para isso, ordenemos os vértices de  $K_{a,b}$  de modo que a sua matriz de adjacência,  $A$ , seja dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J^T & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $J$  é a matriz  $a \times b$  com todas as entradas iguais a 1. Como o posto de  $A$  é igual a 2, então concluímos que zero é um autovalor de  $K_{a,b}$  com multiplicidade  $a+b-2$ . Logo, pela

proposição 2.6,  $p_{K_{a,b}}(\lambda) = \lambda^{a+b-2}(\lambda - \lambda_1)(\lambda + \lambda_1)$ , para algum  $\lambda_1 > 0$ . Desse modo,  $p_{K_{a,b}}(\lambda) = \lambda^{a+b} - \lambda_1^2 \lambda^{a+b-2}$ . Vimos na proposição 2.2 que  $\lambda_1^2$  é o número de arestas de  $K_{a,b}$ . Portanto,  $\lambda_1 = \sqrt{ab}$ . Assim, o espectro de  $K_{a,b}$  é

$$\text{Spec } K_{a,b} = \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & 0 & -\sqrt{ab} \\ 1 & a+b-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com isso, mostramos a propriedade 2.2.

**Propriedade 2.2:** O espectro do grafo  $K_{a,b}$  é dado por

$$\text{Spec } K_{a,b} = \begin{pmatrix} \sqrt{ab} & 0 & -\sqrt{ab} \\ 1 & a+b-2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Relacionaremos algumas propriedades do espectro do grafo de linha de um grafo  $G$ ,  $L(G)$ .

Mostraremos que todos os autovalores de  $L(G)$  são maiores ou iguais a  $-2$ . Vale observar que tal propriedade não caracteriza os grafos de linha. Por exemplo,  $-\sqrt{3}$  e  $-2$  são autovalores de  $K_{1,3}$  e de  $K_{1,4}$ , respectivamente, e no entanto esses grafos não são grafos de linha. Além do mais, podemos caracterizar todos os grafos de linha que possuem  $-2$  como autovalor mínimo, a partir de um resultado de CVETKOVIĆ et al. (1980):

**Teorema 2.5:**  $\lambda_{\min}(L(G)) \geq -2$ , para todo grafo  $G$ .

A igualdade ocorre se e somente se  $G$  contém um ciclo par ou dois ciclos ímpares na mesma componente conexa.

BIGGS (1993) mostra que se o grafo  $G$  é regular então o polinômio característico de  $L(G)$  pode ser determinado a partir do polinômio característico de  $G$ . Em outras palavras, o espectro de  $G$  determina o de  $L(G)$ , no caso de regularidade.

**Teorema 2.6:** Seja  $G$  um grafo  $k$ -regular, com  $n$  vértices e  $m$  arestas, então

$$p_{L(G)}(\lambda) = (\lambda + 2)^{m-n} p_G(\lambda - k + 2).$$

## II.5 Autovetores e auto espaços de um grafo

Os resultados desta seção estão baseados em CVETKOVIĆ and al. (1997).

Sejam  $\lambda$  um autovalor de um grafo  $G$  e  $A$ , sua matriz de adjacência.

Os vetores  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , tais que  $Ax = \lambda x$  são chamados *autovetores* de  $G$  com relação ao autovalor  $\lambda$ . O conjunto  $\xi(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$  é chamado *auto espaço* de  $G$  associado a  $\lambda$ .

Um grafo é completamente determinado por seus autovalores e autovetores, como verificaremos a seguir:

**Teorema 2.7 :** Qualquer grafo é determinado por seus autovalores e por sua base correspondente de autovetores ortonormais.

Prova: Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os autovalores de  $G$  e  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  uma base ortonormal de autovetores associados. Definindo  $U$  como a matriz  $n \times n$  onde cada coluna é o autovetor  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , temos por (1.7), que  $A = UDU^T$ , onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  e  $A$  é a matriz de adjacência de  $G$ . Desse modo, conhecendo os autovalores e uma base de autovetores ortonormais associados podemos determinar o grafo  $G$ . ♦

Algumas propriedades dos grafos podem ser obtidas usando somente seus autovetores, senão vejamos:

**Teorema 2.8 :** Um grafo  $G$  é regular se e somente se sua matriz de adjacência possui um autovetor cujas componentes são todas iguais a 1.

Combinando os resultados da proposição 2.1 com os teoremas 1.13 e 1.14, demonstramos o resultado a seguir.

**Teorema 2.9 :** Um grafo é conexo se e somente se seu índice é um autovalor simples e o autovetor associado é positivo.

Prova:. Como  $G$  é conexo então pela proposição 2.1,  $A$  é uma matriz irredutível .Desse modo, aplicando o teorema 1.12, temos que  $G$  possui um único autovetor positivo associado ao seu índice. Reciprocamente, aplicando o teorema 1.13,temos que  $A$  é uma matriz irredutível. Portanto,  $G$  é conexo. ♦

O único autovetor positivo, associado ao índice de um grafo conexo, é chamado *autovetor principal* do grafo.

Seja  $G$  um grafo com matriz de adjacência  $A$ . Podemos usar os autovalores e autovetores para contar os percursos em  $G$ . No teorema 1.1, vimos que a entrada  $(i,j)$  da matriz  $A^k$ ,  $a_{ij}^{(k)}$ , é igual ao número de percursos de comprimento  $k$  que partem do vértice  $i$  e terminam no vértice  $j$ .

Se  $U = (u_{ij})$  é a matriz ortogonal, descrita na proposição 1.16, formada por autovetores de  $G$ , então, de acordo com (1.7), temos que  $A^k = UD^kU^T$ . Assim,

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{s=1}^n u_{si} u_{sj} \lambda_s^k .$$

Desse modo, temos o seguinte teorema:

**Teorema 2.10 :** O número  $N_k$  de todos os percursos de tamanho  $k$  em um grafo  $G$  é

$$\text{dado por } N_k = \sum_{s=1}^n C_s \lambda_s^k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \text{ onde } C_s = \left( \sum_{i=1}^n u_{si} \right)^2.$$

## II.6 Ângulos de um grafo

O fato de um grafo ser reconstruível a partir de seus autovalores e autovetores indica o papel importante do estudo dos auto espaços de um grafo. Apesar de o conjunto de autovalores não ser um invariante algébrico, temos que os auto espaços são invariantes, em relação a uma permutação dos vértices de  $G$ . Mais explicitamente, sejam  $G$  e  $G'$  grafos coespectrais com matrizes de adjacência  $A$  e  $A'$ , respectivamente. Temos que  $G$  e  $G'$  são isomorfos, se e somente se, existe uma matriz de permutação  $P$  tal que  $\xi_{PA}(\mu) = \xi_A(\mu)$ ,  $\mu$  autovalor de  $A$  (ou  $A'$ ).

Desse modo, estudando os auto espaços de um grafo, procuramos seus atributos geométricos, cujas formulações não dependam da rotulação dada aos vértices. Um exemplo de tais atributos são os ângulos de um grafo, que definiremos a seguir.

Seja  $s$  o número de autovalores distintos de um grafo  $G$ . Consideremos  $P_i$  a matriz de projeção ortogonal de  $R^n$  sobre  $\xi(\mu_i)$ ,  $1 \leq i \leq s$ , e  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $R^n$ . Seja  $\beta_{ij}$  o ângulo entre  $\xi(\mu_i)$  e  $e_j$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Os *ângulos de um grafo* são definidos como  $\alpha_{ij} = \cos \beta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq s$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Como  $P_i$  representa a matriz de projeção ortogonal de  $R^n$  sobre  $\xi(\mu_i)$  então, por definição,

$$\alpha_{ij} = \|P_i e_j\|, \quad 1 \leq i \leq s, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.4)$$

A matriz  $s \times n$  cuja entrada  $(i,j)$  é o ângulo  $\alpha_{ij}$  é chamada *matriz ângulo* de  $G$ .



Para cada  $1 \leq i \leq s$ , a sua  $i$ -ésima linha é chamada seqüência de ângulos para o autovalor  $\mu_i$ .

A proposição que apresentaremos a seguir nos dá uma expressão para os ângulos de  $G$  em termos de seus autovetores.

**Proposição 2.8:** Sejam  $G$  um grafo e  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$  os autovalores distintos de  $G$ .

Para  $1 \leq i \leq s$ , seja  $\{x_1, x_2, \dots, x_{d_i}\}$  uma base ortonormal de  $\xi(\mu_i)$ ,

então os ângulos de  $G$  são dados por

$$\alpha_{ij} = \left( \sum_{h=1}^{d_i} x_{hj}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

onde  $x_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn})^T$ ,  $1 \leq h \leq d_i$ .

Prova: Por (2.4),  $\alpha_{ij} = \|P_i e_j\|$  então  $\alpha_{ij}^2 = \|P_i e_j\|^2$ . Usando a expressão para  $P_i$  dada em

$$(1.9), \text{ temos } \alpha_{ij}^2 = e_j^T (x_1 x_1^T + x_2 x_2^T + \dots + x_{d_i} x_{d_i}^T) e_j = \sum_{h=1}^{d_i} (e_j^T x_h)^2 = \sum_{h=1}^{d_i} x_{hj}^2. \quad \blacklozenge$$

A seguintes propriedades são válidas para os ângulos de um grafo:

**Propriedade 2.3:** Tem-se  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 = \dim \xi(\mu_i)$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

**Propriedade 2.4:** Tem-se  $\sum_{i=1}^s \alpha_{ij}^2 = 1$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

O  $k$ -ésimo *momento espectral* de  $G$  é a soma  $s_k$  das  $k$ -ésimas potências dos autovalores

de  $G$ , isto é, se  $\xi(\mu_i)$  possui dimensão igual a  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , então  $s_k = \sum_{i=1}^s q_i \mu_i^k$ .

Usando a propriedade 2.3, como  $q_i = \dim \xi(u_i)$  temos o seguinte corolário:

**Corolário 2.2:** O  $k$ -ésimo momento espectral é dado por  $s_k = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \mu_i^k$ .

Podemos relacionar o número de percursos fechados em  $G$  com o seu momento espectral.

**Proposição 2.9** Em um grafo  $G$ , o número de percursos fechados de tamanho  $k$  é dado pelo  $k$ -ésimo momento espectral de  $G$ .

Prova: Pelo teorema 1.1, temos que  $a_{jj}^{(k)}$  é o número de percursos fechados de comprimento  $k$  que começam e terminam no vértice  $j$ . Assim,  $\sum_{j=1}^n a_{jj}^{(k)}$  é o total de percursos de comprimento  $k$  em  $G$ . Mas, por definição  $\sum_{j=1}^n a_{jj}^{(k)} = \text{traço}(A^k) = \sum_{i=1}^s q_i \mu_i^k = s_k$ . ♦

**Proposição 2.10** O número  $c_3$  de triângulos em um grafo é dado por  $c_3 = \frac{s_3}{6}$ .

Prova: Temos que em um grafo a única representação gráfica de um percurso fechado de comprimento três é um 3-ciclo. Como em cada 3-ciclo podemos obter 6 percursos fechados distintos, então o resultado da proposição segue facilmente. ♦

Vimos, na seção II.2, que em um grafo  $G$  o número de triângulos,  $c_3$ , é igual a  $-\frac{a_3}{2}$ , onde  $a_3$  é o coeficiente de  $\lambda^{n-3}$  no polinômio característico de  $G$ . Portanto, o espectro de um grafo determina  $c_3$ . Quando o grafo é regular, o número de ciclos, também, é determinado através do espectro (seção II.4). Mas, estes dois casos são, na verdade, uma exceção. Por exemplo, na figura 2.4, vimos que  $C_4 + K_1$  e  $K_{1,4}$  são grafos

coespectrais não isomorfos, enquanto que  $C_4+K_1$  possui um único ciclo de tamanho 4, e  $K_{1,4}$  não possui ciclos. Em geral, para determinar o número de ciclos de comprimentos maiores ou iguais a 4, em um grafo não regular, precisamos conhecer, além do espectro, o seus ângulos. Os teoremas 2.11 e 2.13 nos dão as fórmulas para o cálculo do número de 4-ciclos e de 5-ciclos, respectivamente, em função do espectro e dos ângulos do grafo e podem ser encontrados em [CVETKOVIĆ et al (1997)].

**Teorema 2.11** O número  $c_4$  de 4-ciclos em um grafo é dado por

$$c_4 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \mu_i^2 (\mu_i^2 + 1 - 2 \sum_{h=1}^s \alpha_{hj}^2 \mu_h^2).$$

Temos a seguinte formulação equivalente para o teorema 2.11:

**Teorema 2.12:** Seja  $s_4$  o quarto momento espectral de um grafo  $G$ , cuja seqüência de graus é dada por  $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

Então, o número de 4-ciclos de  $G$  é dado por

$$c_4 = \frac{s_4 + \sum d_i - 2 \sum d_i^2}{8}.$$

**Teorema 2.13** O número  $c_5$  de 5-ciclos em um grafo é dado por

$$c_5 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 \mu_i^3 (\mu_i^2 + 5 - 5 \sum_{h=1}^s \alpha_{hj}^2 \mu_h^2).$$

## II.7 O índice de um grafo

Na seção II.2, chamamos *índice de um grafo*  $G$ , o seu maior autovalor e o notamos por  $\text{ind}(G)$ . Nesta seção apresentaremos diversos resultados da literatura sobre os índices, baseados no trabalho de CVETKOVIĆ e ROWLINSON (1990), onde é reunido tudo

que é conhecido sobre o assunto desde o início da teoria espectral até o princípio dos anos 90. A partir daí, podem-se consultar resultados mais recentes em CVETKOVIĆ et al (1997). Aqui abordaremos três aspectos: apresentaremos algumas desigualdades para os índices, falaremos sobre família de grafos cujos índices são limitados e mostraremos alguns resultados a respeito da ordenação de grafos pelos seus índices.

Usando a teoria de matrizes, podemos mostrar o seguinte e importante resultado obtido por COLLATZ e SINOGOWITZ (1956).

**Teorema 2.14**      Sejam  $d(G)$  a média dos graus e  $\text{ind}(G)$  o índice de um grafo  $G$ .

Então,  $\delta \leq d(G) \leq \text{ind}(G) \leq \Delta$ .

A igualdade ocorre se  $G$  é um grafo regular.

O teorema 2.15 nos dá limites para o índice de um grafo. O primeiro é devido a Hofmeister, o segundo a Nosal, o terceiro a Wilf e o quarto a Yuan. Para a prova consulte CVETKOVIĆ e ROWLINSON (1990).

**Teorema 2.14:** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e grau máximo  $\Delta$ .

Seja  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  a seqüência de graus de  $G$ , então

$$(i) \quad \text{ind}(G) \geq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n}};$$

$$(ii) \quad \text{ind}(G) \geq \sqrt{\Delta};$$

$$(iii) \quad \text{ind}(G) \leq \sqrt{2m(1 - \frac{1}{n})};$$

$$(iv) \quad \text{ind}(G) \leq \sqrt{2m - n + 1}. \text{ A igualdade ocorre se e somente se } G \text{ é a estrela } K_{1,n-1} \text{ ou o grafo completo } K_n.$$

Alguns resultados da literatura relacionam o índice com número cromático de um grafo  $G$ ,  $\gamma(G)$ , como mostraremos a seguir. A primeira desigualdade deve-se a Wilf e a segunda a Cvetković.

**Teorema 2.16:** Se  $\gamma(G)$  é o número cromático de um grafo  $G$  com  $n$  vértices, então

- (i)  $\gamma(G) \leq 1 + \text{ind}(G)$ ;
- (ii)  $\gamma(G) \geq \frac{n}{n - \text{ind}(G)}$ .

Algumas classes de grafos podem ser obtidas se predeterminarmos um limite superior para os seus índices. O teorema a seguir, devido a SMITH (1970), nos dá uma classificação para os grafos cujos índices são menores ou iguais a dois.

**Teorema 2.17** Os grafos conexos cujos índices são menores ou iguais a 2 são exatamente os subgrafos induzidos dos grafos apresentados na figura 2.8.

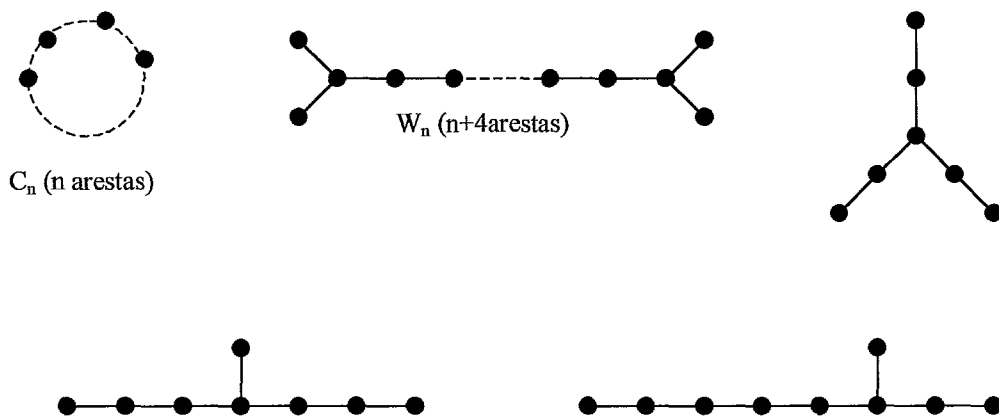


figura 2.8

CVETKOVIĆ e ROWLINSON (1990) classificam os grafos conexos cujos índices são limitados superiormente por  $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ . A partir de um resultado de HOFFMAN (1972)

pode-se mostrar que, a menos dos ciclos, os grafos conexos com índices menores ou iguais a  $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$  são as árvores.

Dizemos que um número real  $\lambda$  é um *ponto limite* para índices de grafos se existe uma seqüência de grafos  $G_n$ , cada um com  $n$  vértices e com índices distintos, tal que  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind}(G_n)$ . HOFFMAN (1972) mostra que se  $H_m$  é um grafo que consiste de um  $m$ -ciclo com uma aresta pendente então  $\text{ind}(H_m) \rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ . Portanto,  $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$  é um exemplo de ponto limite.

A ordenação de grafos pelos seus índices consiste em determinar, numa família de grafos com um mesmo número de vértices, aqueles que possuem o menor e o maior índices. Este estudo foi proposto por COLLATZ e SINOGOWITZ (1956) a partir do estudo de índices das árvores. Em (CVETKOVIĆ e ROWLINSON, 1990) encontramos um vasto estudo sobre ordenação de grafos, do qual selecionamos alguns resultados por tratarem de classes de grafos que particularmente nos interessam. Neste trabalho de tese determinamos a família dos cardígrafos onde nela desenvolvemos um estudo semelhante.

Os resultados que enunciaremos a seguir versam sobre a ordenação de grafos pelos índices nas classes das árvores, dos grafos unicíclicos e dos mops.

**Teorema 2.18:** Entre as árvores com  $n$  vértices,  $n > 1$ , a estrela  $K_{1,n-1}$  é a única com maior índice e o caminho  $P_n$  é o único com menor índice.

Seja  $K_{1,n-1}^+$  o grafo obtido a partir de  $K_{1,n-1}$  quando acrescentamos uma aresta. O seguinte teorema é válido para a classe dos grafos unicíclicos.

**Teorema 2.19:** Entre os grafos unicíclicos com  $n$  vértices, o grafo  $K_{1,n-1}^+$  é o único com maior índice e o ciclo  $C_n$  é o único com menor índice.

Uma questão aberta com relação aos índices diz respeito aos mops. Trabalhos computacionais têm sugerido que, entre os mops, o grafo leque  $L_n$  sozinho possui o maior índice e o grafo serpentina  $S_n$  possui o menor índice. Com base nessa conjectura e impondo condições aos mops, ROWLINSON (1990) provou o seguinte teorema:

**Teorema 2.20:** Seja  $\wp_n, n \geq 4$ , a classe dos grafos periplanares maximais com  $n$  vértices e sem triângulos internos. Então  $L_n$  é o único grafo em  $\wp_n$  com máximo índice e  $S_n$  é o único grafo em  $\wp_n$  com índice mínimo.

## Capítulo III

### Emparelhamentos e Teoria Espectral dos Grafos

#### III.1 Introdução

Vimos que os coeficientes do polinômio característico de um grafo estão intimamente relacionados com os seus subgrafos elementares, que são obtidos pela soma direta de ciclos e de grafos  $K_2$ . A primeira contribuição desta tese aparece na seção III.2 com o desenvolvimento do estudo de um caso de subgrafo elementar, aqui chamado  $k$ -emparelhamento. Na seção seguinte enunciamos e demonstramos um resultado que nos dá a contagem de 2-emparelhamentos em um grafo qualquer. Em III.3, introduzimos a definição de tipo de um grafo e, a partir dela, apresentamos uma contagem para os 3-emparelhamentos de um grafo. Finalmente, na última seção, aplicamos estes resultados no cálculo do quarto e quinto coeficientes do polinômio característico de  $G$ . Além disso, para algumas famílias de grafos, mostramos expressões algébricas que permitem o cálculo direto desses coeficientes.

#### III.2 Emparelhamentos em um grafo

Como vimos na seção I.2.2, chamamos de  $k$ -emparelhamento o grafo  $G$  com  $2k$  vértices e  $k$  arestas não adjacentes, para  $k \geq 2$ . Na verdade,  $G$  é um  $k$ -emparelhamento, se e somente se,  $G$  é desconexo, com  $k$  componentes isomorfas a  $K_2$ . Os vértices de um emparelhamento são ditos extremos do emparelhamento. Na figura 3.1, mostramos uma representação de um  $k$ -emparelhamento.



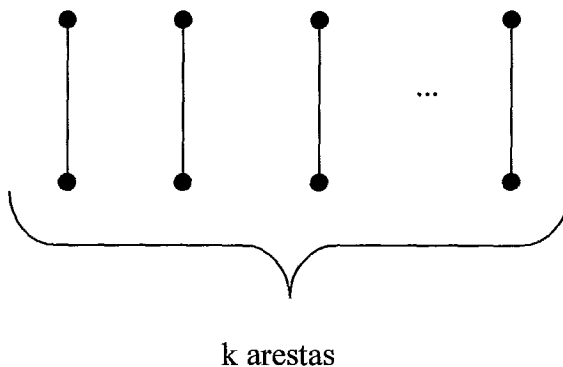


figura 3.1: um  $k$ -emparelhamento

Em particular, um 2-emparelhamento é um grafo com 4 vértices e duas arestas disjuntas

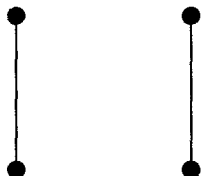


figura 3.2: 2-emparelhamento

Dizemos que  $H$  é um  $k$ -emparelhamento de  $G$  se  $H$  é um subgrafo de  $G$  e ele próprio é, também, um  $k$ -emparelhamento.

No teorema 2.1, vimos que a contagem de subgrafos elementares de um grafo  $G$  desempenha um papel fundamental na determinação dos coeficientes do seu polinômio característico. Sendo um  $k$ -emparelhamento um grafo elementar com  $2k$  vértices, cabe aqui, fazer um estudo a respeito do número desses subgrafos de  $G$ , para obter algumas informações a respeito do coeficiente  $a_{2k}$  do polinômio característico de  $G$ . Chamamos *número de  $k$ -emparelhamentos* de  $G$  a quantidade de subgrafos de  $G$  que são  $k$ -emparelhamentos e o notamos por  $\varepsilon_k(G)$ .

O resultado que apresentaremos, a seguir, relaciona, de forma natural, o número de  $k$ -emparelhamentos de  $G$  com o de  $k$ -cliques em  $\overline{L(G)}$ , complementar do seu grafo de linha.

**Proposição 3.1:** Seja  $G$  um grafo com  $m$  arestas .

O número de  $k$ -emparelhamentos em  $G$ ,  $k \leq m$ , é dado pelo número de  $k$ -cliques em  $\overline{L(G)}$ .

Prova: Mostraremos que a cada  $k$ -emparelhamento de  $G$  podemos associar, de maneira única, uma  $k$ -clique no complementar do grafo de linha de  $G$ , e vice-versa. Seja  $H$  um  $k$ -emparelhamento em  $G$ . Associado a  $H$ , existe em  $L(G)$  um conjunto independente com  $k$  vértices, digamos  $V'$ . Portanto, em  $\overline{L(G)}$ ,  $V'$  é uma  $k$ -clique. A recíproca se segue pelo mesmo argumento. ♦

É interessante destacar que a proposição 3.1 determina a contagem dos 2-emparelhamentos em  $G$ ,  $\varepsilon_2(G)$ , pelo número de arestas no complementar do seu grafo de linha  $\overline{L(G)}$ , dado que estes números são iguais. Analogamente, o número de 3-emparelhamentos em  $G$ ,  $\varepsilon_3(G)$ , é o número de triângulos em  $\overline{L(G)}$ .

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices. Mostraremos que a seqüência de números  $\varepsilon_k(G)$ ,  $2 \leq k \leq \frac{n}{2}$ , é uma seqüência decrescente, ou seja, dado um grafo  $G$ , o número de  $(k-1)$ -emparelhamentos é maior que o número de  $k$ -emparelhamentos em  $G$ ,  $k \geq 3$ . Desse modo, para  $\varepsilon_2(G) \leq C_{n,2}$  e  $k \leq \frac{n}{2}$ , tem-se:

$$\varepsilon_2(G) \geq \varepsilon_3(G) \geq \varepsilon_4(G) \geq \dots \geq \varepsilon_{k-1}(G) \geq \varepsilon_k(G) \geq 0, \quad (3.1)$$

**Propriedade 3.1:** Dado um grafo  $G$ , o número de  $(k-1)$ -cliques de  $G$  é maior que o número de  $k$ -cliques de  $G$ ,  $k \geq 3$ .

Prova: Seja  $t_{k-1}(G)$ , o número de  $(k-1)$ -cliques e  $t_k(G)$ , o número de  $k$ -cliques de  $G$ . Mostraremos, usando indução sobre  $t_k(G)$ , que  $t_{k-1}(G) \geq t_k(G)$ . Se  $t_k(G)=1$ , então  $t_{k-1}(G) \geq k \geq t_k(G)$ . Suponhamos, que  $t_{k-1}(G) \geq t_k(G)$ , para  $t_k(G)=n-1, n > 1$ . Seja  $t_k(G)=n$ . Consideremos  $K$  uma  $k$ -clique de  $G$  tal que existe, em  $K$ , uma aresta,  $e$ , que não é aresta de nenhuma outra  $k$ -clique de  $G$ . Seja  $G' = G - \{e\}$ . Assim,  $t_k(G') = t_k(G) - 1 = n - 1$ . Como em  $K$ , temos um número  $k-2$  de  $(k-1)$ -cliques, contendo  $e$  como aresta então  $t_{k-1}(G') = t_{k-1}(G) - k + 2$ . Pela hipótese de indução,  $t_{k-1}(G') \geq t_k(G')$  então  $t_{k-1}(G) \geq t_k(G) + k - 3$ . Logo,  $t_{k-1}(G) \geq t_k(G)$ , para  $k \geq 3$ . ♦

**Proposição 3.2:** Em qualquer grafo  $G$ , para  $k \geq 3$ ,  $\epsilon_{k-1}(G) \geq \epsilon_k(G)$ .

Prova: Segue-se da proposição 3.1 e da propriedade 3.1. ♦

### III.3 Contagem para 2-emparelhamentos em um grafo

Podemos, a partir de um grafo qualquer, determinar todos os seus subgrafos que são 2-emparelhamentos.

Na figura 3.3, temos todos os 2-emparelhamentos do grafo completo  $K_4$ , dados por:  $(1,2)$  e  $(4,3)$ ;  $(1,4)$  e  $(2,3)$ ;  $(1,3)$  e  $(2,4)$ .

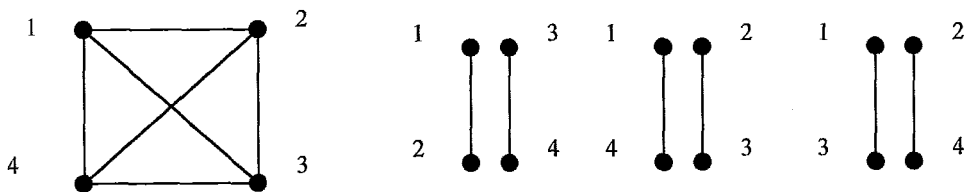


figura 3.3:  $K_4$  e seus 2-emparelhamentos

Assim, o grafo  $K_4$  possui 3 subgrafos que são 2-emparelhamentos, ou seja,  $\epsilon_2(K_4)=3$ .

Mostraremos, a seguir, que se conhecermos a seqüência de graus de um grafo  $G$ , poderemos obter  $\varepsilon_2(G)$ , sem necessariamente determinarmos todos os seus 2-emparelhamentos.

**Teorema 3.1:** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas, cuja seqüência de graus é dada por  $d=(d_1,d_2,\dots,d_n)$ . Então o número de 2-emparelhamentos é

$$\varepsilon_2(G) = \frac{m^2 + m - \sum_{i=1}^n d_i^2}{2}$$

Prova: Sejam  $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  o conjunto de vértices de  $G$  e  $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  o conjunto das arestas de  $G$ . Notamos por  $d_i$ , o grau do vértice  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Seja  $e=v_i v_j \in E(G)$  tal que seu grau é dado por  $\text{grau}(e)=d_i+d_j-2$ . Para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , seja

$$E_i = \{(e, e_i) \mid \{e, e_i\} \text{ é um 2-emparelhamento em } G\}.$$

Notemos que se  $\{e_i, e_j\}$  é um 2-emparelhamento de  $G$  então  $(e_j, e_i) \in E_i \cap E_j$ . Assim,

$$\varepsilon_2 = \frac{|E_1| + |E_2| + \dots + |E_m|}{2}. \quad (3.2)$$

Para  $1 \leq q \leq m$ , temos que  $|E_q|$  é o número de todos os 2-emparelhamentos de  $G$  que contem  $e_q$ . Claramente, as únicas arestas de  $G$  que não formam 2-emparelhamentos com  $e_q$  são a própria  $e$  e as incidentes a esta. Logo,

$$|E_q| = (m-1) - \text{grau}(e_q) = m+1 - (d_i+d_j). \quad (3.3)$$

Substituindo a expressão acima em (3.2), temos

$$\varepsilon_2 = \frac{\sum_{e=v_i v_j \in E} (m+1 - (d_i + d_j))}{2}. \quad (3.4)$$

Assim,

$$\varepsilon_2 = \frac{m^2 + m - \sum_{e=v_i v_j \in E} (d_i + d_j)}{2} \quad (3.5)$$

Mas,

$$\sum_{e=v_i v_j \in E} (d_i + d_j) = t_1 d_1 + t_2 d_2 + \dots + t_n d_n.$$

Como  $t_i$  é exatamente o número de vezes que  $v_i$  aparece como extremo de arestas de  $G$  então  $t_i$  é o grau de  $v_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Assim,

$$\sum_{e=v_i v_j \in E} (d_i + d_j) = \sum_{q=1}^n d_q^2, \quad (3.6)$$

resultando em

$$\varepsilon_2 = \frac{m^2 + m - \sum_{q=1}^m d_q^2}{2}. \blacklozenge$$

O corolário a seguir é uma aplicação imediata do Teorema 3.1 e nos dá o número de 2-emparelhamento nos grafos  $r$ -regulares em função de  $n$  e  $r$ .

**Corolário 3.1:** Se  $G$  é um grafo  $r$ -regular então o número de 2-emparelhamentos de  $G$  é dado por

$$\varepsilon_2(G) = \frac{n^2 r^2 - 4nr^2 + 2nr}{8}.$$

Na expressão de  $\varepsilon_2(G)$  dada no teorema 3.1, se substituirmos o número de arestas de  $G$  pela metade da soma dos graus de seus vértices, temos

$$\varepsilon_2(G) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2 - 4\sum_{i=1}^n d_i^2 + 2\sum_{i=1}^n d_i}{8}. \quad (3.7)$$

Podemos determinar uma fórmula para  $\varepsilon_2$ , para as classes de grafos cujas seqüências de graus possuem uma lei de formação conhecida. Como por exemplo:

**(i) Os mops serpentinis  $S_n$ ,  $n \geq 4$ :**

Esses grafos possuem seqüências de graus dadas por  $d = (2, 2, 3, 3, \underbrace{4, 4, \dots, 4}_{n-4})$

Assim,  $\sum_{i=1}^n d_i^2 = 16n - 38$  e aplicando o teorema 3.1 para  $m = 2n - 3$ , segue que

$$\varepsilon_2(S_n) = 2n^2 - 13n + 22 \quad (3.8)$$

**(ii) Os mops leques  $L_n$ ,  $n \geq 3$ :**

Nesses casos,  $d = (2, 2, \underbrace{3, 3, \dots, 3}_{n-3}, n-1)$ .

Então,  $\sum_{i=1}^n d_i^2 = n^2 + 7n - 18$ . Pelo teorema 3.1, temos

$$\varepsilon_2(L_n) = \frac{3n^2 - 17n + 24}{2} = \frac{(n-3)(3n-8)}{2} \quad (3.9)$$

**(iii) Os ciclos  $C_n$ ,  $n \geq 3$ :**

Do corolário 3.1, temos

$$\varepsilon_2(C_n) = \frac{n(n-3)}{2}. \quad (3.10)$$

**(iv) Os caminhos  $P_n$ ,  $n \geq 2$ :**

Como, nesse caso,  $d = (1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-2}, 1)$ ,

temos  $\sum_{i=1}^n d_i^2 = 4n-6$ . Como  $m=n-1$ , do teorema 3.1, temos

$$\varepsilon_2(P_n) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}. \quad (3.11)$$

**(v) Os grafos completos  $K_n$ ,  $n \geq 3$ .**

Usando o corolário 3.1, para  $r=n-1$ , temos

$$\varepsilon_2(K_n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} \quad (3.12)$$

**Proposição 3.3:** Seja  $G$  um mop com  $n$  vértices então

o número de 2-emparelhamentos de  $G$  satisfaz

$$\varepsilon_2(G) \geq \frac{3n^2 - 17n + 24}{2}. \text{ Para } n \geq 3, \text{ se } G \text{ é o grafo leque } L_n, \text{ então}$$

a igualdade é válida.

Prova: Vimos, no teorema 1.6 que a seqüência de graus de um mop satisfaz a desigualdade  $\sum_{i=1}^n d_i^2 \leq n^2 + 7n - 18$ . Além disso, num mop, o número de arestas é  $m = 2n - 3$ .

Daí e do teorema 3.1 temos o resultado da proposição. ♦

Seja  $G$  um grafo. Apresentaremos, no próximo item, uma classificação para os 2-emparelhamentos de  $G$ , que nos permitirá introduzir o conceito de *tipo* do grafo  $G$ .

### III.4 Tipo de um grafo e emparelhamentos

Seja  $H$  um 2-emparelhamento de  $G$ . Dizemos que :

(i)  $H$  é do tipo 0, se o subgrafo induzido por  $H$  em  $G$ ,  $H_G$ , é formado somente por duas arestas disjuntas;

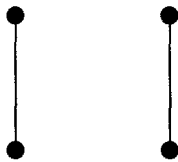


figura 3.5: um 2-emparelhamento do tipo 0

(ii)  $H$  é do tipo 1, se  $H_G$  é um grafo conexo com 3 arestas;

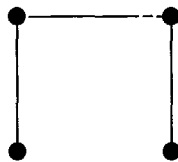


figura 3.6: um 2-emparelhamento do tipo 1



(iii) *H é do tipo 2*, se  $H_G$  é um grafo conexo com 4 arestas;

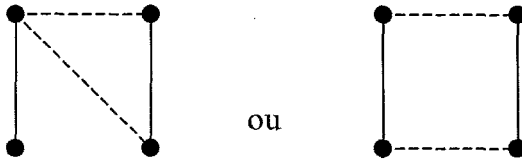


figura 3.7: um 2-emparelhamentos do tipo 2

(iv) *H é do tipo 3*, se  $H_G$  possui 5 arestas;

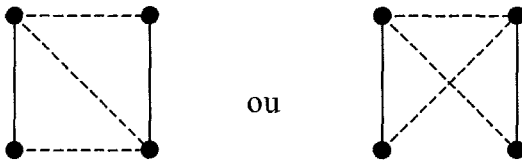


figura 3.8: um 2-emparelhamentos do tipo 3

(v) *H é do tipo 4*, se  $H_G$  é o grafo completo  $K_4$ . Nesse caso,  $H_G$  possui 6 arestas.

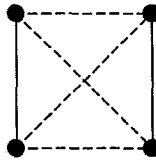


figura 3.9 2-emparelhamento do tipo 4

Em geral, se  $H$  é um 2-emparelhamento do tipo  $i$  em  $G$ , então  $H_G$  possui  $(i+2)$  arestas,  $0 \leq i \leq 4$ . Nesse caso, notamos  $\tau(H) = i$ ,  $0 \leq i \leq 4$ .

Chamamos *tipo de um grafo  $G$* , e notamos  $T(G)$ , o seguinte somatório

$$T(G) = \sum_{H \text{ um 2-emparelhamento de } G} \tau(H) \quad (3.13)$$

A determinação do tipo de um grafo não é um cálculo trivial, pois é necessário o conhecimento de todos os 2-emparelhamentos do grafo. No entanto, podemos determiná-lo para alguns casos mais simples.

Por exemplo, se  $G$  é um caminho  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , cada 2-emparelhamento pode ser do tipo 0 ou do tipo 1. Observando, que exatamente  $(n-3)$  arestas formam 2-emparelhamentos do tipo 1, temos que

$$T(P_n) = (n-3). \quad (3.14)$$

A figura 3.10 mostra todos os 2-emparelhamentos do tipo 1 em  $P_n$ .



figura 3.10: 2-emparelhamentos do tipo 1:  $(e_1, e_3)$ ,  $(e_2, e_4)$ , ...,  $(e_{n-3}, e_{n-1})$ .

Se  $G$  é um ciclo  $C_n$ , temos que considerar dois casos:  $n=4$  ou  $n>4$ . Se  $n=4$ , então

$$T(C_4) = 4. \quad (3.15)$$

Se  $n > 4$ , então cada 2-emparelhamento é do tipo 0 ou 1. Como exatamente  $n$  deles são do tipo 1, então

$$T(C_n) = n, \quad n > 4. \quad (3.16)$$

Nos grafos completos  $K_n$ , todo 2-emparelhamento possui tipo 4. Assim,  $T(K_n) = 4\epsilon_2(K_n)$ .

Usando (3.15), temos

$$T(K_n) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}. \quad (3.17)$$

Vamos, agora, fazer um estudo sobre o número de 3-emparelhamentos em um grafo. Para determiná-lo usaremos o conceito de tipo de um grafo.

**Teorema 3.2:** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas, cuja seqüência de graus é dada por  $d=(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Se  $A$  é a sua matriz de adjacência, então o número de 3-emparelhamentos de  $G$  é dado por

$$\epsilon_3(G) = \frac{(m+2)\epsilon_2(G) - (m+1)\sum_{i=1}^n (d_i^2) + \sum_{i=1}^n (d_i^3) + d^T A d + T(G)}{3}.$$

Prova: Seja  $H$  o conjunto de todos os 2-emparelhamentos de  $G$ . Rotulemos cada elemento de  $H$  por  $H_u, 1 \leq u \leq \epsilon_2$ . Para cada  $H_u \in H$ , seja

$$F_u = \{H_u + e \mid e \in E(G), H_u + e \text{ é um 3-emparelhamento em } G\}.$$

Desse modo,

$$\epsilon_3(G) = \frac{\sum_{u=1}^{\epsilon_2} |F_u|}{3}. \quad (3.18)$$

Consideremos  $H_u = (e, e')$ ,  $e = v_i v_j$ ,  $e' = v_q v_k$ , para  $u$ , tal que  $1 \leq u \leq \epsilon_2$ . Seja  $v_p \in V(G)$ ,  $p \neq i, j, q, k$ . Temos que  $H_u$  pode formar 3-emparelhamentos com todas as arestas incidentes em  $v_p$ , não adjacentes a  $e$  ou a  $e'$ , com  $d_p - \eta(v_p)$  arestas, onde  $\eta(v_p)$  é o número de arestas incidentes a  $v_p$  que são adjacentes a  $e$  ou a  $e'$ . Assim,

$$|F_u| = \frac{\sum_{p \neq i, j, q, k} (d_p - \eta(v_p))}{2}. \quad (3.19)$$

Lembrando que o grau de uma aresta é a soma dos graus dos vértices adjacentes à aresta menos dois, temos

$$\sum_{p \neq i, j, q, k} \eta(v_p) = \text{grau}(e) + \text{grau}(e') - 2\tau(H_u), \quad (3.20)$$

onde  $\tau(H_u)$  é o tipo de  $H_u$ . Portanto,

$$|F_u| = \frac{\sum_{p \neq i, j, q, k} d_p}{2} - \frac{(\text{grau}(e) + \text{grau}(e') - 2\tau(H_u))}{2}. \quad (3.21)$$

Fazendo  $\sum_{p \neq i, j, q, k} d_p = \sum_{ip=1}^n d_p - d_i - d_j - d_q - d_k = 2m - d_i - d_j - d_q - d_k$ , temos

$$|F_u| = m - (d_i + d_j + d_q + d_k) + 2 + \tau(H_u). \quad (3.22)$$

Substituindo em (3.18),

$$\varepsilon_3(G) = \frac{\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} |F_u|}{3} = \frac{\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (m - (d_i + d_j + d_q + d_k) + 2) + \sum_{u=1}^{\varepsilon_2} \tau(H_u)}{3} \quad (3.23)$$

Como  $\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} \tau(H_u) = T(G)$ , então

$$\varepsilon_3(G) = \frac{(m+2)\varepsilon_2 - \sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) + T(G)}{3}. \quad (3.24)$$

Mostraremos que

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = (m+1) \sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{i=1}^n d_i^3 - d^T A d. \quad (3.25)$$

De fato,

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = \sum_{p=1}^n t_p d_p, \quad (3.26)$$

se  $t_p$  é o número de vezes que  $v_p$  é um extremo de um 2-emparelhamento de  $G$ . Sejam  $e_1, e_2, \dots, e_{d_p}$  as arestas adjacentes a  $v_p$ . Assim,  $|E_1| + |E_2| + \dots + |E_{d_p}| = t_p$  onde  $|E_q|$  é o número de 2-emparelhamentos que contem  $e_q$ ,  $1 \leq q \leq d_p$ . Logo,

$$t_p = \sum_{\substack{e_q \text{ é adjacente} \\ \text{a } v_p}} |E_q|. \quad (3.27)$$

Assim,

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = \sum_{p=1}^n \left( \sum_{\substack{e_q \text{ é adjacente} \\ \text{a } v_p}} |E_q| \right) d_p. \quad (3.28)$$

Para  $1 \leq q \leq m$ , seja  $e_q = v_x v_y$ ,  $1 \leq x, y \leq n$ . Desse modo, em (3.31),  $|E_q|$  é uma parcela do coeficiente de  $d_x$  e de  $d_y$ . Portanto, colocando  $|E_q|$  em evidência, temos

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = \sum_{q=1}^m (d_x + d_y) |E_q|, \text{ onde } e_q = v_x v_y.$$

Usando (3.3) temos que  $|E_q| = m+1 - (d_x + d_y)$ . Assim,

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = \sum_{q=1}^m \left( (m+1)(d_x + d_y) - (d_x + d_y)^2 \right). \quad (3.29)$$

De (3.7) segue-se

$$\sum_{q=1}^m (d_x + d_y) = \sum_{p=1}^n d_p^2. \quad (3.30)$$

Desse modo,

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = (m+1) \sum_{p=1}^n d_p^2 - \sum_{q=1}^m (d_x + d_y)^2. \quad (3.31)$$

Mas,

$$\sum_{q=1}^m (d_x + d_y)^2 = \sum_{q=1}^m (d_x^2 + d_y^2) + 2 \sum_{q=1}^m d_x d_y . \quad (3.32)$$

Pelo mesmo argumento usado para mostrar (3.6), temos

$$\sum_{q=1}^m (d_x^2 + d_y^2) = \sum_{p=1}^n d_p^3 . \quad (3.33)$$

Observando que

$$2 \sum_{q=1}^m d_x d_y = 2 \sum_{\substack{v_x \text{ é} \\ \text{adjacente} \\ \text{a } v_y}} d_x d_y = d^T \text{Ad} ,$$

então

$$\sum_{u=1}^{\varepsilon_2} (d_i + d_j + d_q + d_k) = (m+1) \sum_{p=1}^n d_p^2 - \sum_{p=1}^n d_p^3 - d^T \text{Ad} . \quad (3.34)$$

Desse modo, completamos a prova,

$$\varepsilon_3(G) = \frac{(m+2)\varepsilon_2 - (m+1) \sum_{i=1}^n d_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^3 + d^T \text{Ad} + T(G)}{3} . \blacklozenge$$

Para ilustrar o teorema 3.2, vamos determinar o número de 3-emparelhamentos de  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , como na figura 3.11.



figura 3.11: um caminho  $P_n$

Nesse caso, temos  $m=n-1$ ;  $\sum d_i^2=2(2n-3)$ ;  $\epsilon_2(P_n)=\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ . Além disso, temos

$\sum d_i^3=2(4n-7)$ ,  $d^T Ad=8(n-2)$  e  $T(P_n)=(n-3)$ . Usando a teorema 3.2, temos

$$\epsilon_3(P_n)=\frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6}. \quad (3.35)$$

### III.5 Emparelhamentos e teoria espectral

Vimos que, para obter os coeficientes dos índices pares do polinômio característico de um grafo, precisamos da contagem de seus emparelhamentos. Em particular, mostraremos, no teorema a seguir, que no caso das árvores, essa contagem é suficiente para a determinação do seu polinômio característico.

**Teorema 3.3:** Seja  $T$  uma árvore com  $n$  vértices e  $p_T(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ , seu polinômio característico. Então:

$$a_{2k-1}=0, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

$$a_{2k}=(-1)^k \epsilon_k(T), \quad 2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Prova: Sendo uma árvore,  $T$  não possui subgrafos elementares com número ímpar de vértices. Logo, usando o teorema 2.1, temos que os coeficientes de índices ímpares são nulos, ou seja  $a_{2k-1}=0$ . Vamos, agora, obter os coeficientes  $a_{2k}$ . Desse modo, precisamos determinar todos os subgrafos elementares de  $T$  com  $2k$  vértices. Nas árvores esses subgrafos são exatamente os  $k$ -emparelhamentos. Sabemos que o posto de um  $k$ -emparelhamento é  $k$  e o seu co-posto é zero então, pelo teorema 2.1, segue que  $a_{2k}=(-1)^k \epsilon_k(T)$ . ♦

A seguir, aplicaremos o teorema 3.3 para determinar o polinômio característico da árvore apresentada na figura 3.12.

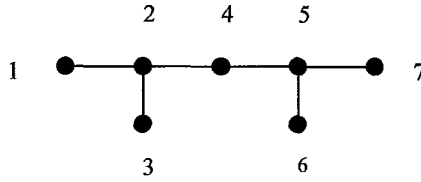


figura 3.12: árvore T

Pelo teorema 3.3, temos que  $p_T(\lambda) = \lambda^7 + a_2\lambda^5 + a_4\lambda^3 + a_6\lambda$ . Usando a proposição 2.2, temos que  $a_2 = -6$ . Como acabamos de verificar,  $a_4 = \epsilon_2$  e  $a_6 = -\epsilon_3$ . Aplicando o teorema 3.1, temos  $\epsilon_2 = 8$ . Podemos verificar que T não possui 3-emparelhamentos logo;  $\epsilon_3 = 0$ . Assim,  $p_T(\lambda) = \lambda^7 - 6\lambda^5 + 8\lambda^3$ .

No teorema 3.1, apresentamos uma fórmula algébrica para determinar o número de 2-emparelhamentos no grafo. Vamos utilizá-la, no teorema 3.4. Este resultado é uma contribuição à teoria espectral dos grafos, pois nos permite obter informações a respeito do coeficiente  $a_4$  do polinômio característico de um grafo G, desde que possamos contar o número de seus 4-ciclos.

**Teorema 3.4:** Seja G um grafo com n vértices e m arestas, cuja seqüência de graus é  $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ . Seja  $c_4$  o número de 4-ciclos de G então

$$a_4 = \frac{m^2 + m - 4c_4 - \sum_{i=1}^n d_i^2}{2}.$$

Prova: Por (2.1), temos que  $a_4 = \epsilon_2(G) - 2c_4$ , onde  $c_4$  é o número de 4-ciclos de G. Pelo

teorema 3.1, temos  $\epsilon_2(G) = \frac{m^2 + m - \sum_{i=1}^n d_i^2}{2}$ . Assim, segue que



$$a_4 = \frac{m^2 + m - 4c_4 - \sum_{i=1}^n d_i^2}{2}. \blacklozenge$$

Notemos que, como consequência imediata de (2.1),  $\varepsilon_2(G)$  é uma cota superior para o coeficiente  $a_4$ .

No teorema 2.12 obtivemos uma expressão para  $c_4$  em função do 4º -momento espectral do grafo. Desse modo, combinando esse resultado com o do teorema 3.1, mostramos o seguinte teorema 3.5:

**Teorema 3.5:** Sejam  $G$  um grafo com  $m$  arestas e  $s_4$ , o 4º -momento espectral de  $G$ .

Então o coeficiente de  $\lambda^{n-4}$  no polinômio característico é dado por

$$a_4 = \frac{1}{4}(2m^2 - s_4).$$

Na propriedade 2.1 vimos que se  $G$  é um mop então  $c_4 = n-3$ , para  $n \geq 4$ . Logo, por (2.2) para os mops, temos

$$a_4 = \varepsilon_2(G) - 2n + 6. \quad (3.36)$$

Desse modo, usando a proposição 3.3, podemos obter uma cota inferior para o coeficiente  $a_4$  do polinômio característico de um mop, como mostra a proposição 3.4.

**Proposição 3.4** Seja  $G$  um mop, então o coeficiente de  $\lambda^{n-4}$  do seu polinômio

$$\text{característico satisfaz } a_4 \geq \frac{3n^2 - 21n + 36}{2}.$$

$$\text{Se } G \text{ é o mop leque } L_n \text{ então } a_4 = \frac{3n^2 - 21n + 36}{2}.$$

Para algumas classes de grafos em que conhecemos o número de seus 4-ciclos, podemos obter, usando (2.2), uma expressão para o coeficiente  $a_4$ . Por exemplo:

**(i) as árvores:**

Vimos no teorema 3.3, que no caso das árvores,  $a_4$  é dado pelo número de 2-emparelhamentos. Assim, se  $G$  é uma árvore então

$$a_4 = \varepsilon_2(G) = \frac{n^2 - n - \sum_{i=1}^n d_i}{2}.$$

**(ii) os mops:**

Se  $G$  é um mop com  $n$  vértices então por (3.36), temos

$$a_4 = \varepsilon_2(G) - 2n + 6 = \frac{4n^2 - 14n + 18 - \sum_{i=1}^n d_i}{2}.$$

**(iii) os mops serpentinhas  $S_n$ :**

Se  $G$  é o mop serpentina  $S_n$ , então usando (3.8) e (3.36), temos  $a_4 = 2n^2 - 15n + 28$

**(iv) os mops leques  $L_n$ :**

Se  $G$  é o mop leque  $L_n$ , então por (3.19) e (3.36), temos  $a_4 = \frac{3n^2 - 21n + 36}{2}$ .

**(v) os caminhos  $P_n$ :**

Se  $G$  é um caminho  $P_n$  então usando (3.11) e o teorema 3.3, temos  $a_4 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ .

**(vi) os grafos unicíclicos:**

Se  $G$  é um grafo unicíclico então  $a_4 = \varepsilon_2(G)$ , se  $G$  não possui ciclo de tamanho 4, ou  $a_4 = \varepsilon_2(G) - 2$ , caso contrário.

**(vii) os ciclos  $C_n$**

Se  $G$  é um ciclo  $C_n$ , temos por (3.10), que para  $n > 4$ ,  $a_4 = \frac{n(n-3)}{2}$ . Para  $n=4$  temos  $c_4=1$  e  $\varepsilon_2=2$ , resultando em  $a_4=0$ .

Seja  $G$  um grafo. Vamos, agora, fazer um estudo sobre o coeficiente  $a_5$  do polinômio característico de  $G$ . Vimos em (2.3) que  $a_5 = 2(f_5 - c_5)$ , onde  $f_5$  é a quantidade de subgrafos de  $G$  isomorfos ao grafo  $G_1$  da figura 3.12 e  $c_5$  é o número de 5-ciclos de  $G$ .

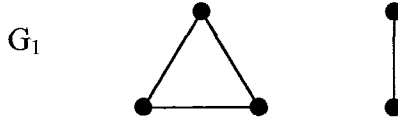


figura 3.12: grafo elementar com 5 vértices

Apresentaremos, a seguir, a proposição 3.5 que nos dá uma fórmula para o cálculo de  $f_5$ . A demonstração desse resultado foi feita usando um raciocínio análogo ao usado na demonstração do teorema 3.1.

**Proposição 3.5:** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e  $c_3$  triângulos.

Para  $1 \leq i \leq n$ , seja  $t_i$ , o número de triângulos de  $G$ , tal que  $v_i$ , de grau  $d_i$ , é

um de seus vértices. Então,  $f_5 = (m+3)c_3 - \sum_{i=1}^n t_i d_i$ .

Prova: Sejam  $C_1, C_2, \dots, C_{c_3}$  os triângulos de  $G$ . Para  $1 \leq q \leq c_3$ , seja  $F_q$  o conjunto de todos os subgrafos de  $G$  que são soma direta de  $C_q$  com uma aresta de  $G$ . Assim,  $F_q = \{C_q + e \mid e \in E(G) \text{ e } C_q + e \text{ é isomorfo a } G_1\}$ . Desse modo,

$$f_5 = \sum_{q=1}^{c_3} |F_q|. \quad (3.37)$$

Para  $1 \leq q \leq c_3$ , seja  $C_q$  o triângulo cujos vértices são  $v_i$ ,  $v_j$  e  $v_k$ . Temos que  $|F_q|$  é o número de subgrafos de  $G$  que são isomorfos a  $G_1$ , e que contém  $C_q$  como uma de suas componentes.

Podemos verificar que  $C_q$  forma subgrafos isomorfos a  $G_1$  com todas as arestas de  $G$ , exceto as incidentes aos vértices  $v_i$ ,  $v_j$  e  $v_k$  e as que formam o ciclo  $C_q$ . Portanto, usando a definição de grau de um ciclo, temos

$$|F_q| = (m-3) - \text{grau}(C_q) = m+3 - (d_i + d_j + d_k). \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.37), temos

$$f_5 = (m+3)c_3 - \sum_{q=1}^{c_3} (d_i + d_j + d_k). \quad (3.39)$$

Observemos que  $\sum_{q=1}^{c_3} (d_i + d_j + d_k) = \sum_{i=1}^n t_i d_i$ , onde  $t_i$  é o número de triângulos com vértice

$v_i$ . Assim, chegamos ao resultado proposto,  $f_5 = (m+3)c_3 - \sum_{i=1}^n t_i d_i$ . ♦

Como aplicação da proposição 3.5, vejamos o grafo da figura 3.13

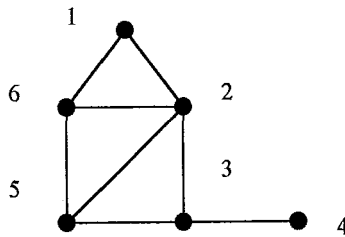


figura 3.13: aplicação da proposição 3.5

Neste grafo  $c_3=3, m=8, n=6, t_1=1, t_2=3, t_3=1, t_4=0, t_5=2, t_6=2, d_1=2, d_2=4, d_3=3, d_4=1, d_5=3$  e  $d_6=3$ . Assim,  $f_5=7$ .

Dependendo da estrutura do grafo, o cálculo de  $f_5$ , dado na proposição 3.5 pode se tornar simples. Por exemplo, no caso dos:

**grafos leques  $L_n$**

Consideremos o grafo  $L_n$ , dado na figura 3.14.

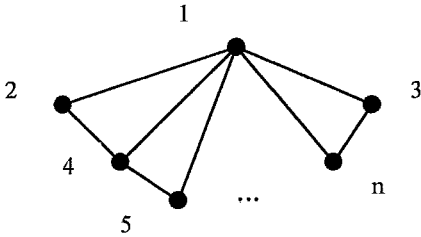


figura 3.14

Sendo um mop,  $L_n$  possui  $m=2n-3$  arestas e  $c_3=n-2$  triângulos. O vértice 1 é um dos vértices de todos os seus triângulos, então  $t_1=n-2$ . Os vértices 2 e 3 pertencem, cada um, a exatamente um triângulo, assim  $t_2=t_3=1$ . Já cada um dos vértices, 4, 5,...,n, são vértices de dois triângulos então  $t_4=t_5=...=t_n=2$ . Logo, sendo sua seqüência de graus dada por  $d=(n-1,2,2,3,3,...,3)$ , temos

$$f_5(L_n)=(n-3)(n-4). \tag{3.40}$$

**grafos serpentinias  $S_n$**

Consideremos o grafo serpentina  $S_n$ , da figura 3.15.

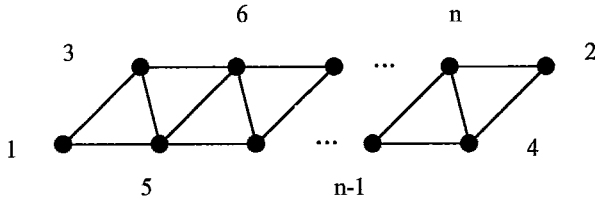


figura 3.15

Em  $S_n$ , os vértices 1 e 2 pertencem, cada um, a um triângulo, então  $t_1=t_2=1$ , 3 e 4 são vértices de 2 triângulos, assim  $t_3=t_4=2$ , os demais vértices pertencem a 3 triângulos então  $t_5=t_6=\dots=t_n=3$ . Como  $m=2n-3$ ,  $c_3=n-2$  e sua seqüência de graus é para  $n \geq 5$ ,  $d=(2,2,3,3,4,4,\dots,4)$ , temos

$$f_5(S_n)=2(n-4)^2 . \quad (3.41)$$

No teorema 1.1, vimos que num grafo  $G$ , o total de percursos fechados de comprimento  $k$  contendo o vértice  $v_i$ , para  $i, 1 \leq i \leq n$ , é dado pela entrada  $a_{ii}^{(k)}$  da matriz  $A^k$ , onde  $A$  é a matriz de adjacência de  $G$ . Temos que, em qualquer grafo, os percursos fechados de comprimento 3 são os triângulos. Desse modo, o número  $t_i$ , definido na proposição 3.5, é dado, exatamente, por  $a_{ii}^{(3)}$ . Assim, usando o resultado desta proposição, temos a seguinte expressão equivalente para  $f_5$ :

$$f_5=(m+3)c_3-\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(3)}d_i . \quad (3.42)$$

Podemos obter uma fórmula para calcular o coeficiente  $a_5$  do polinômio característico de um grafo, em função do número de seus triângulos e de seus 5-ciclos, como mostra o resultado a seguir:

**Teorema 3.6:** Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas,  $c_3$  triângulos e  $c_5$ , 5-ciclos. Para  $i, 1 \leq i \leq n$ , seja  $t_i$  o número de triângulos de  $G$  tal que  $v_i$  é um de seus vértices de grau  $d_i$ .

Então, o coeficiente de  $\lambda^{n-5}$  do polinômio característico de  $G$  é dado por:

$$a_5=2(m+3)c_3-2c_5-2\sum_{i=1}^n t_i d_i .$$

Prova: Segue imediatamente de (2.3) e da proposição 3.5. ♦

Aplicando a propriedade 1.2, temos que nos mops serpentinadas  $S_n$  e leques  $L_n$ , o número de 5-ciclos, para  $n \geq 5$ , é igual a  $(n-4)$ . Assim, usando (2.3), (3.40) e (3.41) temos as seguintes expressões para o coeficiente  $a_5$ , nessas classes de grafos.

(i) para os grafos serpentinas  $S_n$ ,

$$a_5=4(n-4)(n-5). \quad (3.43)$$

(ii) para os grafos leques  $L_n$ ,

$$a_5=2(n-4)(n-5). \quad (3.44)$$

## Capítulo IV

### Maxregularidade e Equilibradores

#### IV.1: Introdução

Revisamos, neste capítulo, os conceitos de maxregularidade e equilibradores de um grafo, introduzidos por RODRIGUES (1997) e desenvolvidos por RODRIGUES, ABREU E MARKEZON (1999). Estes conceitos são utilizados no capítulo V, quando aplicados a uma classe de grafos aqui introduzida e denominada cardigrafo.

#### IV.2: Grafos $(n,r)$ -Maxregulares

Sejam  $P$  um conjunto de propriedades que definem uma classe de grafos,  $G$  um grafo com  $n$  vértices que satisfaz  $P$  e consideremos ainda,  $r \leq n-1$ . Dizemos que  $G$  é  $(n,r)$ -maxregular se  $G$  possui o maior número de vértices de grau  $r$ , entre todos os grafos de ordem  $n$  que satisfazem  $P$ . Ou seja, se  $\mathfrak{F}_P$  é a família dos grafos que satisfazem  $P$  então  $G$  é  $(n,r)$ -maxregular se  $w_G(r) = \max\{w_{G'}(r) \mid G' \text{ é um grafo de ordem } n \text{ em } \mathfrak{F}_P\}$ .

Podemos observar que o conceito de maxregularidade é uma generalização do conceito de regularidade, pois tomando-se  $P$  o conjunto vazio então  $\mathfrak{F}_P$  abrange todos os grafos, logo um grafo com  $n$  vértices  $r$ -regular é, também,  $(n,r)$ -maxregular.



Considerando os mops com 6 vértices, como na figura 4.1, temos que o grafo coroa  $C_1$  é um exemplo de grafo  $(6,4)$ -maxregular e, também, de  $(6,2)$ -maxregular. Já o grafo leque  $L_6$  é  $(6,3)$ -maxregular.

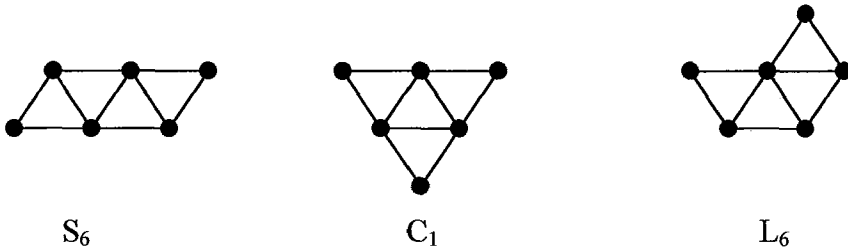


figura 4.1: mops com 6 vértices

Seja  $G$  o grafo ilustrado na figura 4.2. Temos que  $G$  é planar maximal com 14 vértices e  $w_G(6)=10$ . Mostraremos que  $G$  é  $(14,6)$ -maxregular na família dos grafos planares maximais. Primeiro, observamos que não existe grafo planar maximal 6-regular, pois nesse caso teríamos  $3n$  arestas, o que contradiz o fato de um grafo planar maximal possuir  $(3n-6)$  arestas. Por outro lado, vimos, no corolário 1.5, que um grafo planar 3-conexo, com mais de 4 vértices, possui pelo menos 4 vértices com graus menores ou iguais que 5. Portanto, se  $H$  é um grafo planar maximal com 14 vértices então

$w_H(6) \leq \sum_{i=1}^{13} w_H(i) \leq 10$ . Como  $w_G(6)=10$ , concluímos que  $G$  é  $(14,6)$ -maxregular.

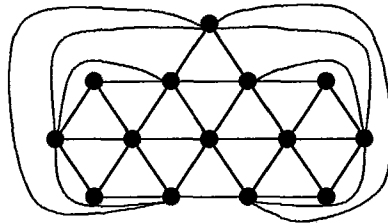


figura 4.2: grafo planar maximal  $(14,6)$ -maxregular

Se considerarmos  $\mathfrak{T}_P$  a família das árvores, claramente, os caminhos  $P_n$  são grafos  $(n,2)$ -maxregulares,  $n > 2$ .

Vimos no exemplo dado pela figura 4.1 que o grafo leque  $L_6$  é (6,3)-maxregular. Verificaremos com a proposição 4.1 que tal fato não é um caso isolado, isto é, todo leque  $L_n$  é um grafo (n,3)-maxregular na família dos mops. Na verdade, RODRIGUES (1997) mostrou que a recíproca, também, é verdadeira, ou seja se  $G$  é um mop (n,3)-maxregular então  $G$  é o grafo leque  $L_n$ .

**Proposição 4.1:** Seja  $L_n$  o mop leque com  $n > 4$  vértices, então  $L_n$  é (n,3)-maxregular.

Prova: Em  $L_n$  temos  $w(2)=2$ ,  $w(n-1)=1$  e  $w(3)=n-3$ ,  $n > 4$ . Suponhamos que  $L_n$  não seja (n,3)-maxregular então existe um mop  $H_n$  tal que  $w_{H_n}(3) > w_{L_n}(3) = n-3$ . Assim,

$w_{H_n}(3) \geq n-2$ . Sendo  $H_n$  um mop,  $w_{H_n}(2) \geq 2$ . Portanto,  $w_{H_n}(3) = n-2$  e  $w_{H_n}(2) = 2$ . Como  $H_n$  possui, exatamente, (n-2) vértices de graus iguais a 3 e 2 vértices de graus dois então  $\sum_{v \in H_n} d(v) = 3n-2$ ,  $n > 4$ , o que é absurdo, pois em todo mop o somatório de seus graus é

igual a  $(4n-6)$ . ♦

Também, no exemplo da figura 4.1, vimos que o grafo coroa  $C_1$  é (6,4)-maxregular. Verificaremos que tal fato só ocorre no nível 6, ou seja, mostraremos na proposição 4.2, que se  $n \neq 6$  então os mops serpentinhas  $S_n$  são grafos (n,4)-maxregulares. Além disso, RODRIGUES (1997) caracteriza os grafos  $S_n$ ,  $n > 6$ , por essa propriedade.

**Proposição 4.2:** Seja  $S_n$  o mop serpentina com  $n \geq 5$  vértices,  $n \neq 6$ , então  $S_n$  é (n,4)-maxregular.

Prova: Suponhamos que  $S_n$  não seja (n,4)-maxregular então existe um mop  $H_n$  tal que  $w_{H_n}(4) > w_{S_n}(4) = n-4$ . Assim,  $w_{H_n}(4) \geq n-3$ . Se  $w_{H_n}(4) = n-3$  então a soma dos três vértices restantes é igual a  $4n-6-4(n-3) = 6$ . Como  $w_{H_n}(2) \geq 2$ , temos que esses três vértices possuem graus iguais a 2. Desse modo, os vértices de  $H_n$  possuem graus iguais a 4 ou 2, o que é absurdo, pois em [RODRIGUES (1997)] vê-se que o único mop com essas características é o grafo coroa  $C_1$ . ♦

Apresentaremos, agora, o conceito de equilibradores em grafos.

### IV.3 Equilibradores em grafos

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices cuja média dos graus de seus vértices é dada por  $d(G)$ . Chamamos *grau médio* de  $G$  o maior inteiro que contem a média dos graus e o notamos por  $\mu$ . Desse modo,  $\mu = \lceil d(G) \rceil$ .

Sendo  $\omega(i)$  o número de vértices de grau  $i$  em  $G$ , então a soma dos graus de  $G$  é dada por

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} i\omega(i) = 2m. \quad (4.1)$$

Como  $d(G) = \frac{T}{n}$  e  $nd(G) \leq \mu n$ , temos que

$$T = \mu n - h, \quad 0 \leq h < n, \quad (4.2)$$

onde  $h$  é chamado de *gap* do grafo  $G$ .

Para algumas famílias de grafos, os valores de  $\mu$  e de  $h$  são conhecidos: nas árvores,  $\mu=2$  e  $h=2$ ; nos mops,  $\mu=4$  e  $h=6$ ; nos planares maximais,  $\mu=6$  e  $h=12$ . No grafo da figura 4.3 vemos que  $d(G)=3,25$ ;  $\mu=4$ ;  $T=26$  e  $h=6$ .

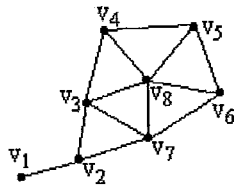


figura. 4.3: Grafo com grau médio 4 e média dos graus 3,25.

Dizemos que um vértice  $v$  de  $G$  é *equilibrado* se o seu grau é exatamente o grau médio  $\mu$ . Todo vértice de  $G$  tal que seu grau seja maior que o grau médio é chamado de *vértice*

*superior* e caso seja menor, de *vértice inferior*. Notaremos por  $Q, S, I$ , os conjuntos dos vértices equilibrados, superiores e inferiores, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} S &= \{ v \in V(G) \mid d(v) > \mu \}; \\ Q &= \{ v \in V(G) \mid d(v) = \mu \}; \\ I &= \{ v \in V(G) \mid d(v) < \mu \}. \end{aligned}$$

Desse modo,  $n = |S| + |Q| + |I|$ .

Suponhamos que  $S$ , o conjunto dos vértices superiores, seja não vazio. Se existe  $Y \neq \emptyset$ ,  $Y \subset I$  tal que

$$\frac{\sum_{v \in Y} d(v) + \sum_{u \in S} d(u)}{|Y| + |S|} = \mu, \quad (4.3)$$

então dizemos que  $S$  determina um equilibrador. O conjunto  $Y$ , notado  $EQ$ , é chamado *conjunto equilibrador* do grafo  $G$ .

Associado a um conjunto  $EQ$ , temos o conjunto dos vértices não-equilibradores definido como  $N = I - EQ$ .

Vale observar que dado um grafo  $G$ , o conjunto  $EQ$  nem sempre é único. No grafo da figura 4.3, temos  $Q = \{v_3, v_7\}$ ;  $S = \{v_8\}$  e  $I = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_6\}$ . Desse modo, podemos ter para  $EQ$ , tanto  $\{v_2\}$  ou  $\{v_4\}$  ou  $\{v_5\}$  ou  $\{v_6\}$ .

Se todos os vértices de  $G$  possuem graus menores ou iguais ao grau médio então  $S = \emptyset$ ,  $EQ = \emptyset$  e  $N = I$ . Nesse caso,  $n = |N| + |Q|$ .

O teorema que enunciaremos a seguir nos dá uma condição necessária e suficiente para  $S \neq \emptyset$  determinar um equilibrador. Sua prova pode ser encontrada em RODRIGUES, ABREU e MARKENZON (1999).

**Teorema 4.1:** Sejam  $G$  um grafo tal que  $S \neq \emptyset$ ,  $\mu$  o grau médio e  $h$  o gap de  $G$ .

$S$  determina um equilibrador se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{\mu-1} (\mu - i)\omega_N(i) = h.$$

Podemos mostrar que se  $S \neq \emptyset$  então a condição de suficiência do teorema 4.1 é sempre satisfeita. Desse modo, em todo grafo com  $S \neq \emptyset$  sempre teremos um conjunto equilibrador. Assim, temos o seguinte teorema, também com prova em [RODRIGUES, ABREU e MARKENZON, (1999)]:

**Teorema 4.2:**  $S \neq \emptyset$  sempre determina um equilibrador.

O corolário a seguir segue imediatamente dos teoremas 4.1 e 4.2:

**Corolário 4.2:** Sejam  $G$  um grafo tal que  $S \neq \emptyset$ ,  $\mu$  o grau médio e  $h$  o gap de  $G$ .

Então 
$$\sum_{i=1}^{\mu-1} (\mu - i)\omega_N(i) = h.$$

## Capítulo V

### Cardigrafos e Grafos com Densidade Homogênea

#### V.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos uma nova classe de grafos, os cardigrafos, onde cada grafo que a ela pertence possui o número de arestas dado em função do número de vértices. Importantes famílias de grafos pertencem a essa classe, como por exemplo: os mops, as árvores, os planares maximais, os regulares, as  $k$ -árvores, etc. Estabelecemos propriedades para os cardigrafos que generalizam resultados conhecidos da literatura. Determinamos, nos cardigrafos, os grafos com densidade homogênea. Relações entre esses grafos e maxregularidade são apresentadas. Também, verificamos que grafos com densidade homogênea são “quase” regulares de graus iguais ao grau médio,  $\mu$ . Com o estudo dos índices dos grafos com densidade homogênea mostramos que, à medida que o número de vértices aumenta, os índices de tais grafos convergem para  $\mu$ .

#### V.2 Conjuntos Cardigrafos

Sejam  $a \in \mathbb{Q}_+$ ,  $b \in \mathbb{Z}_+$ , tal que  $2a \in \mathbb{N}^*$ , e  $A_{\#} = \{x \in \mathbb{N} : ax - b \in \mathbb{N}^*\}$ . Se existir um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $(an - b)$  arestas, chamaremos a função

$$\begin{aligned} \#_{a,b}: A_{\#} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto an - b \end{aligned}$$

de *função cardinal de arestas com respeito a G*. Quando não houver dúvidas quanto aos parâmetros  $a$  e  $b$ , estes serão omitidos como sub-índices na notação da função e escreveremos simplesmente,  $\#(n)$ .

Um *cardigrafo*  $(a,b)$  de nível  $n$  é o conjunto dos grafos conexos com  $n$  vértices e  $\#_{a,b}(n)$  arestas. Notamos tal conjunto por  $X_n(\#_{a,b})$ .

Para  $a=1$  e  $b=1$ , a função cardinal de arestas é  $\#(n)=n-1$ ,  $n \geq 1$ , e o cardigrafo  $X_n(\#_{1,1})$  é exatamente o conjunto das árvores.

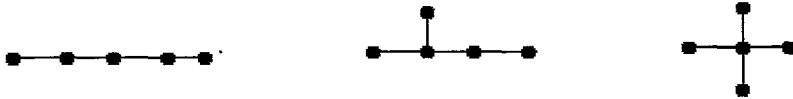


figura 5.1:árvores em  $X_5(\#_{1,1})$

Para  $a=2$  e  $b=3$ , a função cardinal de arestas é  $\#(n)=2n-3$ ,  $n \geq 2$ , e o cardigrafo  $X_n(\#_{2,3})$  contem a família dos mops com  $n$  vértices.

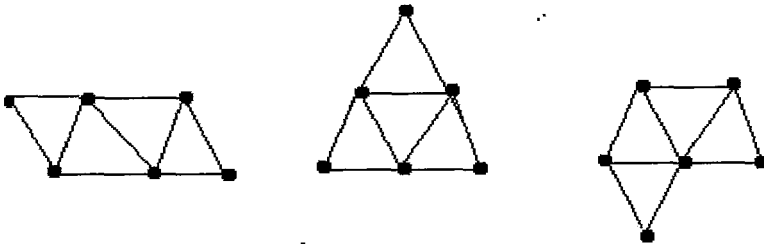


figura 5.2:mops em  $X_6(\#_{2,3})$

Nem todo grafo em  $X_n(\#_{2,3})$  é um mop, como mostra a figura 5.3.

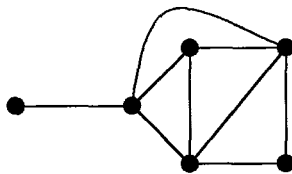


figura 5.3:grafo em  $X_6(\#_{2,3})$  que não é um mop.

Para a função cardinal de arestas dada por  $\#(n)=3n-6$ , temos como cardigrafo o conjunto  $X_n(\#_{3,6})$  que contém a família dos grafos planares maximais com  $n$  vértices .



figura 5.4: grafos planares maximais em  $X_5(\#_{3,6})$

Para  $a=1$ ,  $b=0$ , a função cardinal de arestas é  $\#(n)=n$  e o cardigrafo  $X_n(\#_{1,0})$  é exatamente o conjunto dos grafos conexos unicíclicos.

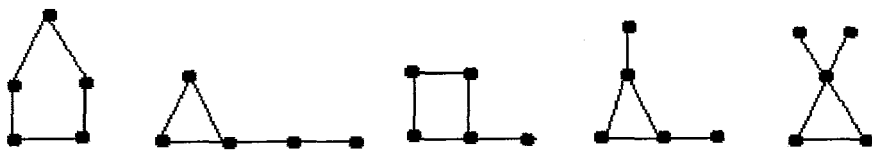


figura 5.5: grafos em  $X_5(\#_{1,0})$

Para  $a=\frac{r}{2}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r \geq 2$  e  $b=0$ , temos  $\#(n)=\frac{r}{2}n$ . Neste caso,  $X_n(\#_{\frac{r}{2},0})$  contém o conjunto dos grafos  $r$ -regulares com  $n$  vértices, sendo  $nr$  um número par e  $n \in \mathbb{N}$ .

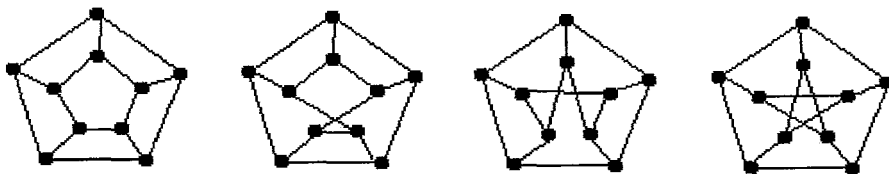


figura 5.6:  $r=3$ , grafos conexos 3-regulares em  $X_{10}(\#_{\frac{3}{2},0})$ .

Consideremos, agora, o conjunto formado pelas  $k$ -árvores, definidas na seção I.2.2. Como, pelo teorema 1.10, toda  $k$ -árvore com  $n$  vértices possui  $m=kn - \frac{1}{2}k(k+1)$  arestas, então



essa classe de grafos é um subconjunto do cardigrafo  $(k, \frac{1}{2}k(k+1))$ , que será chamado de  $k$ -cardigrafo.

Desse modo, o 1-cardigrafo é o conjunto  $X_n(\#_{1,1})$ , das árvores com  $n$  vértices. O 2-cardigrafo é o conjunto  $X_n(\#_{2,3})$ , que contém os mops, e o 3-cardigrafo, o conjunto  $X_n(\#_{3,6})$ .

Como verificamos pela figura 1.11 nem todo 2-árvore é um mop. Assim, o 2-cardigrafo  $X_n(\#_{2,3})$  contém os mops como subconjunto próprio.

Para uma determinada função cardinal de arestas  $\#_{a,b}$ , quando variamos  $n$ , obtemos diversos conjuntos  $X_n(\#_{a,b})$ , chamados cardigrafos  $(a,b)$  de nível  $n$ , que são famílias de grafos com um mesmo número  $n$  de vértices e com um número de arestas, determinado por  $\#_{a,b}$ . Reunindo todas essas famílias, formamos a categoria  $X_{\#} = \{X_n(\#) : n \in A_{\#}\}$ , que chamaremos simplesmente de *cardigrafos*. Desta forma, os cardigrafos de nível  $n$  determinam uma partição na categoria dos cardigrafos. Com é natural, dizemos então que um grafo  $G$ , nessa categoria, está no nível  $n$ , se  $G \in X_n(\#)$ .

Agora relembremos alguns conceitos sobre equilibradores, apresentados no capítulo IV, para derivarmos alguns resultados envolvendo cardigrafos e grafos de densidade homogênea, que serão definidos na próxima seção.

**Lema 5.1:** Sejam  $\mu$  o grau médio,  $h$  o gap de um grafo  $G$  e

$X_n(\#_{a,b})$  um cardigrafo de nível  $n$ .

Em qualquer grafo de  $X_n(\#_{a,b})$ , tem-se que  $\mu=2a$  e  $h=2b$ .

Prova: De fato, em (4.2), vimos que a soma dos graus é dada por  $T=\mu n-h$ , tal que  $0 \leq h \leq n$ . Assim para  $G \in X_n(\#_{a,b})$ ,  $T=2na-2b$  e conseqüentemente,  $\mu=2a$  e  $h=2b$ . ♦

Os conjuntos  $S=\{v \in V(G) \mid d(v) > 2a\}$ ,  $Q=\{v \in V(G) \mid d(v) = 2a\}$ ,  $EQ$  e  $N=\{v \in V(G) \mid d(v) < 2a \text{ e } v \notin EQ(S)\}$  particionam o conjunto dos vértices de  $G$ . Como foi visto na seção IV.2, eles, respectivamente, correspondem aos *vértices superiores* (vértices de grau acima do valor médio), aos *equilibrados* (vértices de grau igual ao valor médio), aos *equilibradores* e finalmente, aos vértices não-equilibradores (esses últimos de graus inferiores ao grau médio).

A seguinte proposição é uma generalização do corolário 4.2, para o caso em que  $S=\emptyset$ . Verificaremos que tal proposição é muito importante, pois implicará alguns resultados.

**Proposição 5.1:** Se  $G$  é um grafo em  $X_n(\#_{a,b})$  então

$$\sum_{i=1}^{2a-1} (2a-i)w_N(i) = 2b.$$

Prova: Se o conjunto  $S=\{v \in V(G) \mid d(v) > 2a\} \neq \emptyset$ , então pelo corolário 4.2

$$\sum_{i=1}^{2a-1} (2a-i)w_N(i) = 2b. \text{ Caso contrário, para } v \in V(G), d(v) \leq 2a \text{ e } EQ(S) = \emptyset. \text{ Logo,}$$

$$n = |N| + |Q|. \tag{5.1}$$

Temos que a soma dos graus dos vértices de  $G$  é  $\sum_{i=1}^{2a} iw(i) = 2na - 2b$ . Então,

$$2b = 2an - \sum_{i=1}^{2a} iw(i). \tag{5.2}$$

Substituindo (5.1) na equação (5.2), segue-se que

$$2b = 2a(|N| + |Q|) - \sum_{i=1}^{2a} iw(i). \tag{5.3}$$

Como  $\sum_{i=1}^{2a} iw(i) = 2a|Q| + \sum_{i=1}^{2a-1} iw_N(i)$ , então

$$2b=2a |N| - \sum_{i=1}^{2a-1} iw_N(i). \quad (5.4)$$

Substituindo  $|N| = \sum_{i=1}^{2a-1} w_N(i)$  em (5.4), tem-se

$$2b = \sum_{i=1}^{2a-1} (2a-i)w_N(i). \quad \blacklozenge$$

Como conseqüência da proposição 5.1 temos os seguintes corolários:

**Corolário 5.1:** Seja  $X_n(\#_{a,b})$  um cardigrafo onde  $b \neq 0$ .

Se  $G$  é um grafo em  $X_n(\#_{a,b})$ , então existe pelo menos um vértice em  $N \subset V(G)$  com grau menor ou igual a  $(2a-1)$ , conseqüentemente,  $N \neq \emptyset$ .

Prova: Pela proposição 5.1 temos  $\sum_{i=1}^{2a-1} (2a-i)w_N(i) = 2b$ . Sendo  $b \neq 0$ , então

$(2a-1)w_N(1) + (2a-2)w_N(2) + \dots + w_N(2a-1) \neq 0$ . Mas,  $(2a-i)w_N(i) \geq 0$ , para  $1 \leq i \leq 2a-1$ . Logo, existe  $1 \leq i \leq 2a-1$  tal que  $(2a-i)w_N(i) > 0$ . Conseqüentemente,  $w_N(i) > 0$ . Assim, existe pelo menos um vértice de  $G$  em  $N$ , com grau menor ou igual a  $2a-1$ .  $\blacklozenge$

**Corolário 5.2:** Seja  $X_n(\#_{a,b})$  um cardigrafo com  $b \neq 0$ .

Se  $G$  é um grafo com  $n > 2b$  vértices,  $(2a-1)$ -conexo em  $X_n(\#_{a,b})$ , então existem pelo menos  $2b$  vértices, todos com o mesmo grau e iguais a  $(2a-1)$  em  $G$ .

Prova: Seja  $G$  um grafo  $(2a-1)$ -conexo em  $X_n(\#_{a,b})$ . Desse modo,  $w_N(i) = 0$ , para  $1 \leq i \leq 2a-2$ . Portanto, usando a proposição 5.1, temos  $w_N(2a-1) = 2b$ . Como  $b \neq 0$ , então existem pelo menos  $2b$  vértices em  $G$  com graus iguais a  $(2a-1)$ .  $\blacklozenge$

Observemos que os corolários 5.1 e 5.2 generalizam os resultados já conhecidos sobre grafos planares, apresentados nos corolários 1.2 e 1.7, respectivamente.

O seguinte corolário estabelece um limite para a cardinalidade do conjunto dos vértices não-equilibradores de todo grafo em um cardigrafo de nível  $n$ .

**Corolário 5.3:** Seja  $G$  um grafo no cardigrafo  $X_n(\#_{a,b})$ . Um conjunto  $N$ , dos vértices não-equilibradores de  $G$  tem, no máximo,  $2b$  elementos.

Prova: Pela proposição 5.1, temos que

$$\sum_{i=1}^{2a-1} (2a-i)w_N(i)=2b.$$

Seja  $i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq 2a-1$ , como  $w_N(i) \leq (2a-i)w_N(i)$  então,

$$\sum_{i=1}^{2a-1} w_N(i) \leq \sum_{i=1}^{2a-1} (2a-i)w_N(i)=2b.$$

Assim,

$$|N| \leq 2b. \blacklozenge$$

Vamos, agora, mostrar um resultado semelhante aos dos corolários acima para os  $k$ -cardigrafos.

**Proposição 5.2:** Seja  $G$  um grafo  $k$ -conexo, num  $k$ -cardigrafo de nível  $n$ , com  $n > k+1$ .

Então, existem, no mínimo,  $(k+1)$  vértices em  $G$ , com graus menores ou iguais a  $(2k-1)$ .

Prova: No  $k$ -cardigrafo,  $b = \frac{1}{2}k(k+1)$  é diferente de zero. Do corolário 5.1, temos que existe pelo menos um vértice de  $G$  com grau menor ou igual a  $(2k-1)$ . Mostraremos que  $G$  possui mais de  $k$  vértices com graus menores ou iguais a  $(2k-1)$ . Para isso, vamos supor,

por absurdo, que  $G$  possua, exatamente,  $k$  vértices com graus menores ou iguais a  $(2k-1)$ .

Assim,

$$\sum_{i=1}^{2k-1} w(i) = k. \quad (5.5)$$

Sendo  $G$  um grafo  $k$ -conexo temos

$$w(i) = 0, \text{ para } i = 1, \dots, k-1. \quad (5.6)$$

Logo, (5.5) se reduz a

$$\sum_{i=k}^{2k-1} w(i) = k \quad (5.7)$$

Seja  $S_k = \sum_{i=k}^{2k-1} (2k-i)w(i)$ . Como num  $k$ -cardigrafo temos  $a=k$ , então, usando a proposição

5.1 e (5.6), temos

$$S_k \geq k(k+1). \quad (5.8)$$

Por outro lado, se  $k \leq i \leq 2k-1$  então  $2k-i \leq k$ . Assim,  $S_k \leq k \sum_{i=k}^{2k-1} w(i)$  e, conseqüentemente, por (5.7), temos  $S_k \leq k^2$ , o que contradiz (5.8). Daí,  $G$  possui pelo menos  $(k+1)$  vértices com graus menores ou iguais a  $(2k-1)$ . ♦

Mostraremos, na próxima proposição, que à medida que o valor de  $n$  cresce, o valor da média dos graus dos vértices de  $G_n$  em  $X_n(\#_{a,b})$  se aproxima de  $2a$ .

**Proposição 5.3:** Seja  $G_n$  um grafo em  $X_n(\#_{a,b})$  e  $d(G_n)$ , a média dos graus de seus vértices. Tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(G_n) = 2a$ .

Prova: Seja  $G_n \in X_n(\#_{a,b})$ . Como  $d(G_n)$  é a média dos graus de  $G_n$ , então para  $v_i \in V(G_n)$ ,

$$d(G_n) = \frac{\sum_{i=1}^n d(v_i)}{n}. \quad (5.9)$$

Mas, como  $G_n$  pertence a um cardigrafo de nível  $n$ , o seu total de arestas é  $m = an - b$  e

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2na - 2b. \text{ Daí e de (5.9), segue que } d(G_n) = 2a - \frac{2b}{n}. \text{ Assim, } \lim_{n \rightarrow \infty} d(G_n) = 2a. \blacklozenge$$

Usando a proposição 5.3, concluímos que, para  $n$  suficientemente grande, podemos ter as seguintes alternativas, a respeito dos graus dos vértices de  $G_n$  em  $X_n(\#_{a,b})$ :

- (i)  $d(v) \leq 2a, \forall v \in V(G_n)$ ;
- (ii) existem  $v, u \in V(G_n)$  tais que  $d(v) < 2a$  e  $d(u) > 2a$ .

O caso em que, para todo  $v \in V(G)$ ,  $d(v) > 2a$ , não pode acontecer, pois o conjunto  $S$  dos vértices superiores seria não vazio, o que, pelo teorema 4.2, implicaria a existência de um conjunto equilibrador não vazio, portanto, existiria em  $G$  vértices com graus abaixo do grau médio  $\mu = 2a$ , contrariando o fato de todos os vértices do grafo possuírem graus maiores que  $2a$ . Na próxima seção, faremos um estudo a respeito dos grafos que satisfazem a alternativa (i).

### V 3 Grafos com Densidade Homogênea

Vamos, agora, apresentar o conceito de *densidade homogênea*. Seja  $\#_{a,b}$  uma função cardinal de arestas e para  $n \in A_{\#}$ ,  $X_n(\#_{a,b})$ , o cardigrafo de nível  $n$ . Para  $n \geq 2a + 1$ , dizemos que um grafo  $G_n$  é de *densidade homogênea* em  $X_n(\#_{a,b})$ , se o seu grau máximo,  $\Delta(G_n)$ , é igual a  $2a$ .

O subconjunto do cardigrafo  $X_n(\#_{a,b})$ ,  $D_{\#}(n) = \{G_n \in X_n(\#_{a,b}) \mid \Delta(G_n) = 2a\}$  é chamado de *conjunto dos grafos de densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$* . A categoria dos grafos de densidade homogênea é dada então por  $D_{\#} = \{D_{\#}(n) \mid n \geq 2a+1\}$ . Uma vez que em  $D_{\#}$ , o grau máximo independe de  $G$ , este será notado, simplesmente por  $\Delta_{\#}$ .

A seguir, exibiremos uma família com densidade homogênea, para cada uma das funções  $\#_{a,b}$ , apresentadas anteriormente no item 5.2.

Temos que  $X_n(\#_{1,1})$  é o conjunto das árvores com  $n$  vértices. Como  $\Delta_{\#} = 2$ , os grafos com densidade homogênea em  $X_n(\#_{1,1})$  são os caminhos,  $P_n$ , com  $n$  vértices para  $n \geq 3$ , ou seja,  $D_{\#}(n) = \{P_n\}$ .



figura 5.7:  $P_5$ , grafo com densidade homogênea em  $X_5(\#_{1,1})$ .

Já vimos que  $X_n(\#_{2,3})$  contém o conjunto dos mops com  $n$  vértices. Desta forma,  $\Delta_{\#} = 4$  e portanto, os grafos serpentinas,  $S_n$ , são grafos com densidade homogênea em  $X_n(\#_{2,3})$ ,  $n \geq 5$ . Observemos que para  $n=6$ ,  $D_{\#}(6)$  contém os grafos serpentina  $S_6$  e também o coroa  $C_1$ .

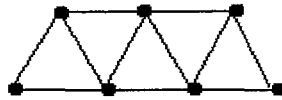


figura 5.8:  $S_6$ , mop com densidade homogênea em  $X_6(\#_{2,3})$

O cardigrafo  $X_n(\#_{3,6})$  contém os grafos planares maximais, com  $n$  vértices. Nele, temos  $\Delta_{\#} = 6$ . Na figura 5.9, apresentamos um grafo com densidade homogênea nesse conjunto.

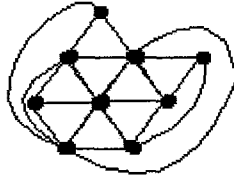


figura 5.9: grafo com densidade homogênea em  $X_9(\#_{3,6})$

Se  $\#(n)=n$ ,  $X_n(\#_{1,0})$  é formado pelos grafos conexos com um único ciclo. Neste caso,  $\Delta_{\#}=2$  e nesta classe, os grafos com densidade homogênea são os ciclos,  $C_n$ ,  $n \geq 3$ . Portanto,  $D_{\#}(n)=\{C_n\}$ .

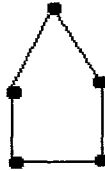


figura 5.10:  $C_5$  é grafo com densidade homogênea em  $X_5(\#_{1,0})$

Por fim, em  $X_n(\#)$ , tal que a função cardinal de arestas é  $\#(n)=\frac{r}{2}n$ , todo grafo  $G$   $r$ -regular é de densidade homogênea, uma vez que,  $\Delta(G)=r=\Delta_{\#}$ . Assim, tem-se que  $D_{\#}=\{G / G \text{ é um grafo } r\text{-regular em } X_n(\#)\}$ .

Observando os grafos com densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$ , verificamos que, à medida que  $n$  cresce, o número de vértices com grau igual a  $2a$  também cresce. Na verdade, mostraremos que, para  $n$  suficientemente grande, se  $G_n$  possui densidade homogênea, então, a menos de um número finito de vértices,  $d(v)=2a$ ,  $v \in G_n$ , ou seja,  $G_n$  é “quase” regular de grau  $2a$ . Para demonstrarmos esse resultado utilizaremos o corolário 5.3.



**Teorema 5.1:** Se  $G_n$  é um grafo com densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{G_n}(2a) = \infty.$$

Prova: Como  $G_n$  possui densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$  então  $n = |N| + |Q|$ . Pelo corolário 5.3,  $|N| \leq 2b$ . Se  $n > 2b$  então existe  $k_n > 0$  tal que  $n = 2b + k_n$ . Assim, pelo menos  $k_n$  vértices em  $G_n$  tem seus graus iguais a  $2a$ , ou seja,  $w_{G_n}(2a) > k_n$ . Como  $k_n = n - 2b$  então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{G_n}(2a) = \infty. \quad \blacklozenge$$

Seja  $\#_{a,b}$  uma função cardinal de arestas e  $X \subseteq D_{\#}(n)$ . Dizemos que um grafo  $G \in X$  possui *densidade homogênea minimal* em  $X$  se, para qualquer  $G' \in X$ ,  $w_G(2a) \leq w_{G'}(2a)$ .

Analogamente, um grafo  $G \in X$  possui *densidade homogênea maximal* em  $X$  se, para  $G' \in X$ ,  $w_G(2a) \geq w_{G'}(2a)$ .

Como exemplo, tomemos a função cardinal de arestas  $\#_{3,6}(n) = 3n - 6$  e os conjuntos  $X = \{G^1, G^2, G^3, G^4\} \subset D_{\#}(12)$  e  $Y = \{G^5, G^6, G^7\} \subset D_{\#}(8)$ , cujos elementos são os grafos ilustrados, respectivamente, nas figuras 5.11, 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 e 5.17.

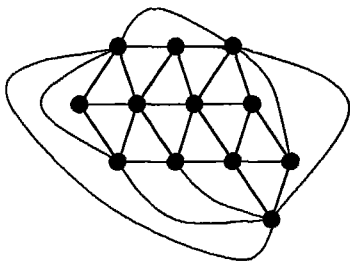


figura 5.11:  $G^1$

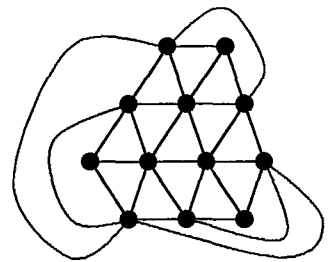


figura 5.12:  $G^2$

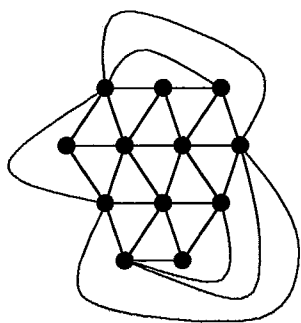


figura 5.13:  $G^3$

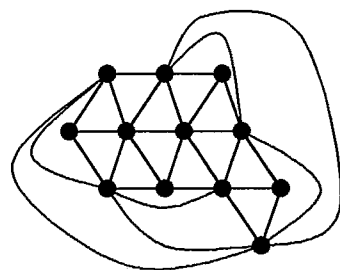


figura 5.14:  $G^4$

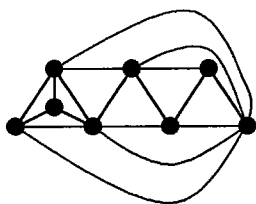


figura 5.15:  $G^5$

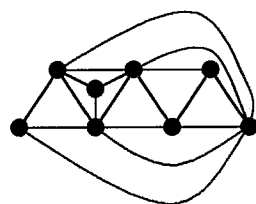


figura 5.16:  $G^6$

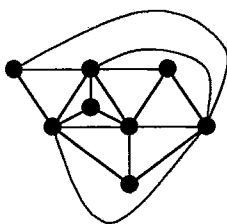


figura 5.17:  $G^7$

A tabela 5.1 relaciona os grafos  $G^i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ , com os seus números de vértices de graus iguais a 6.

	G	$w_G(6)$
X	$G^1$	5
	$G^2$	6
	$G^3$	6
	$G^4$	7
Y	$G^5$	2
	$G^6$	3
	$G^7$	4

tabela 5.1: freqüência de graus 6 em  $G^i$

Pela tabela 5.1,  $G^4$  possui densidade homogênea maximal e  $G^1$ , minimal, em X. Já no conjunto Y,  $G^7$  possui densidade homogênea maximal e  $G^5$ , minimal.

É claro que, se G é um grafo  $(n,2a)$ -maxregular com densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$  então G possui densidade homogênea maximal em  $D_{\#}(n)$ .

Nos cardigrafos apresentados nos exemplos da seção 5.2 observamos a seguinte relação entre os conceitos de densidade homogênea e maxregularidade. Em  $X_n(\#_{1,1})$ , os grafos com densidade homogênea são os caminhos  $P_n$ ,  $n \geq 3$ , que também são os grafos  $(n,2)$ -maxregulares; o mesmo ocorre em  $X_n(\#_{1,0})$ . Aí, os ciclos  $C_n$  são os de densidade homogênea e, ao mesmo tempo, os grafos  $(n,2)$ -maxregulares; ídem para o cardigrafo  $X_n(\#_{2,3})$ . Neste, se  $n=6$ , o grafo coroa  $C_1$  possui densidade homogênea e também é  $(6,4)$ -maxregular; já, se  $n > 6$ , os mops serpentinhas  $S_n$  são de densidade homogênea e também, os únicos  $(n,4)$ -maxregulares, nesta família.

Esta análise se torna mais difícil à medida que os cardigrafos se tornam conjuntos mais complexos. É o que acontece com o cardigrafo  $X_n(\#_{3,6})$ , que contém a classe dos grafos planares maximais. Nele, não conhecemos, a priori, uma família com densidade homogênea maximal. No entanto, apresentaremos a seguir algumas condições de suficiência, para

alguns grafos planares maximais serem, tanto de densidade homogênea maximal, quanto  $(n,6)$ -maxregular.

**Propriedade 5.1:** Seja  $G$  um grafo planar maximal em  $X_n(\#_{3,6})$  tal que  $w_G(6)=n-4$ .

Então,  $G$  é um grafo com densidade homogênea em  $X_n(\#_{3,6})$ .

Prova: Suponhamos por absurdo que  $G$  não seja um grafo com densidade homogênea. Neste caso,  $S \neq \emptyset$  e  $|S| + |EQ| + |N| = 4$ . Como  $|S| \geq 1$ , então  $|EQ| + |N| \leq 3$ . Temos, pelos teorema 4.2 e corolário 5.1, que  $EQ \neq \emptyset$  e  $N \neq \emptyset$ . Assim, podemos ter três possibilidades para as cardinalidades desses conjuntos:

- (i)  $|EQ| = 1$  e  $|N| = 2$ ;
- (ii)  $|EQ| = 2$  e  $|N| = 1$  e
- (iii)  $|EQ| = 1$  e  $|N| = 1$ .

Pela proposição 5.1 em  $X_n(\#_{3,6})$  temos

$$3w_N(3) + 2w_N(4) + w_N(5) = 12. \quad (5.10)$$

Consideremos o caso (i): Neste,  $|N| = 2$  e então,  $w_N(3) + w_N(4) + w_N(5) = 2$ , que é incompatível com a equação (5.10); de maneira análoga, considerando os casos (ii) e (iii), temos,  $w_N(3) + w_N(4) + w_N(5) = 1$ , que, também, é incompatível com (5.10). Assim, mostramos que  $G$  é um grafo com densidade homogênea. ♦

**Propriedade 5.2:** Seja  $G$  um grafo planar maximal em  $X_n(\#_{3,6})$  tal que  $w_G(6)=n-4$ .

Então  $G$  é  $(n,6)$ -maxregular.

Prova: Seja  $H$  um grafo planar maximal com  $n$  vértices, então  $H$  é  $p$ -conexo, para  $p \in \{3,4,5\}$ . Assim, pelo corolário 1.5, temos que  $w_H(5) + w_H(4) + w_H(3) \geq 4$ . Como

$n = \sum_{i=3}^{n-1} w_H(i) \geq \sum_{i=3}^6 w_H(i) \geq w_H(6) + 4$  então,  $w_H(6) \leq n - 4$ . Por hipótese,  $G$  é planar maximal com  $w(6) = n - 4$ . Daí,  $G$  é  $(n, 6)$ -maxregular em  $X_n(\#_{3,6})$ . ♦

Juntando os resultados das propriedades 5.1 e 5.2, o seguinte corolário segue imediatamente

**Corolário 5.4:** Se  $G$  é um grafo planar maximal com  $w(6) = n - 4$  então  $G$  possui densidade homogênea maximal e ao mesmo tempo é  $(n, 6)$ -maxregular.

A propriedade a seguir nos dá a representação de um grafo planar maximal com exatamente  $(n - 4)$  vértices de grau 6, isto é,  $w(6) = n - 4$ .

**Propriedade 5.3:** Seja  $G$  um grafo planar maximal tal que  $w(6) = n - 4$  então, os demais vértices de  $G$  possuem graus iguais a 3, ou seja,  $w(3) = 4$  e  $w(i) = 0$ ,  $i \neq 3$ ,  $i < 6$ .

Prova: Pela propriedade 5.1,  $G$  possui densidade homogênea, então

$$w(3) + w(4) + w(5) = 4. \quad (5.11)$$

Além disso, usando (5.10), temos

$$3w_N(3) + 2w_N(4) + w_N(5) = 12. \quad (5.12)$$

Resolvendo o sistema dado pelas equações inteiras (5.11) e (5.12), determinamos os valores para  $w(4) = 8 - 2w(3)$  e  $w(5) = -4 + w(3)$ . Como  $w(4) \geq 0$  e  $w(5) \geq 0$ , concluímos que  $w(3) = 4$ ,  $w(4) = 0$  e  $w(5) = 0$ . ♦

A figura 5.18 mostra um exemplo de um grafo planar maximal com densidade homogênea maximal em  $X_8(\#_{3,-6})$  e  $(8,6)$ -maxregular.

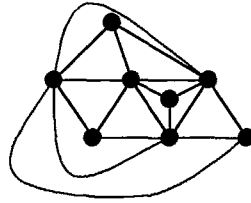


figura 5.18: grafo com densidade homogênea maximal em  $X_8(\#_{3,-6})$

Com a Proposição 5.4, a seguir, generalizamos os resultados obtidos com as propriedades 5.1 e 5.2.

**Proposição 5.4:** Seja  $G$  um grafo  $k$ -conexo num  $k$ -cardigrafo de nível  $n$  em que  $w(2k)=n-(k+1)$ . Então  $G$  é  $(n,2k)$ -maxregular e possui densidade homogênea neste cardigrafo.

Prova: Mostraremos primeiro a  $(n,2k)$ -maxregularidade de  $G$ . Pela proposição 5.2, se  $G'$  é um grafo no  $k$ -cardigrafo então  $G'$  possui pelo menos  $(k+1)$  vértices com graus menores ou iguais a  $(2k-1)$ , então  $|I| \geq k+1$ . Como  $n = |I| + |Q| + |S| \geq k+1 + |Q|$ , temos  $|Q| \leq n - (k+1)$ . Logo,  $w_{G'}(2q) \leq n - (k+1)$ , para  $G'$  no  $k$ -cardigrafo. Mas, como  $w_G(2k) = n - (k+1)$  então  $G$  é  $(n,2k)$ -maxregular. Agora, mostraremos que  $G$  possui densidade homogênea. Suponhamos, por absurdo, que  $G$  não seja um grafo com densidade homogênea. Desse modo,  $|S| \neq \emptyset$  e  $|EQ| \neq \emptyset$ . Como  $n = |N| + |EQ| + |Q| + |S|$  e  $|Q| = n - (k+1)$  então

$$|S| + |EQ| + |N| = k+1. \quad (5.13)$$

Pela proposição 5.2, temos que  $|N|+|EQ|\geq k+1$ . Como  $|S|\geq 1$  então  $|S|+|EQ|+|N|>k+1$ , o que contradiz a equação (5.13). Logo,  $G$  possui densidade homogênea. ♦

As observações feitas acima levam nos a inferir a possibilidade da equivalência dos conceitos de maxregularidade e densidade homogênea maximal em qualquer cardigrafo. No caso geral dos cardigrafos, não nos parece fácil demonstrar este fato, em virtude, de que em todas as situações em que provamos a densidade homogênea maximal e a maxregularidade, tínhamos informações específicas da família cardigrafo, em questão.

#### V.4 Índices em grafos com densidade homogênea

Vimos, na seção II.7 que o índice de um grafo corresponde ao seu maior autovalor. Pelo teorema 5.1, um grafo, com número de vértices suficientemente grande com densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$  é “quase regular” de grau  $2a$ , no sentido de que, para todo grafo com densidade homogênea em  $X_n(\#_{a,b})$ , o número de vértices, cujos graus diferem de  $2a$ , não ultrapassa um determinado valor, que independe do grafo. Sabemos, também, pelo teorema 2.2, que o índice de um grafo regular coincide com o seu grau. O teorema 5.2, a seguir, é uma extensão desse resultado, para os grafos com densidade homogênea.

**Teorema 5.2:** Sejam  $\#_{a,b}$  uma função cardinal de aresta,  $G_n$  um grafo em  $D_\#(n)$  e  $\text{ind}(G_n)$ , o seu índice.

Tem-se que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind}(G_n) = 2a$ .

Prova: Seja  $G_n$  um grafo em  $D_\#$ . Temos que, pelo teorema 2.13,  $d(G_n) \leq \text{ind}(G_n) \leq \Delta(G_n) = 2a$ .

Mas,  $d(G_n) = 2a + \frac{2b}{n}$ , e então  $2a + \frac{2b}{n} \leq \text{ind}(G_n) \leq 2a$ . Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{ind}(G_n) = 2a. \blacklozenge$$

Para os grafos  $G^i$ ,  $1 \leq i \leq 7$ , dados nas figuras 5.12 a 5.18, apresentaremos a tabela 5.2, que os relacionam com seus índices e com suas frequências de grau 6. Para obter os índices utilizamos o software Maple Realease V.

	G	Ind(G)	$w_G(6)$
X	$G^1$	5,172	5
	$G^2$	5,268	6
	$G^3$	5,241	6
	$G^4$	5,282	7
Y	$G^5$	4,740	2
	$G^6$	4,799	3
	$G^7$	4,850	4

tabela 5.2: índice x frequência de graus

Pela tabela 5.2, verificamos que, quanto maior é o número de vértices de graus iguais a 6, maior é o índice desse grafo. Notemos, também, que quando os grafos possuem o mesmo número de vértices de graus iguais a 6, como é o caso de  $G_2$  e  $G_3$ , nada podemos garantir a respeito de seus índices. No caso geral, se existir um grafo  $2a$ -regular em  $X_n(\#_{a,b})$ , este será o grafo com densidade homogênea maximal em  $X_n(\#_{a,b})$ , além de possuir o índice máximo em  $D_{\#}(n)$ . Desse modo, nos parece bastante razoável que em  $D_{\#}(n)$ , quanto maior é a frequência de vértices com graus igual a  $2a$ , maior é o índice do grafo.

Também, com relação aos índices verificamos, baseados em alguns resultados da literatura que apresentamos na seção II.7, a seguinte relação:



- (i) o caminho  $P_n$  possui o menor índice entre as árvores com  $n$  vértices;
- (ii) o ciclo  $C_n$  possui o menor índice entre os grafos unicíclicos com  $n$  vértices;
- (iii) o grafo serpentina  $S_n$  é o de menor índice entre os grafos periplanares que não possuem triângulos internos,

Assim, no cardigrafo  $X_n(\#_{1,1})$ , o grafo com menor índice corresponde ao de densidade homogênea, o mesmo acontecendo nos cardigrafos  $X_n(\#_{1,0})$  e  $X_n(\#_{2,3})$ . Nesse último, apesar da restrição apresentada em (iii), resultados computacionais indicam que os grafos serpentinados  $S_n$  são os que possuem os menores índices entre os periplanares com  $n$  vértices.

Na tabela 5.4, relacionamos alguns grafos em  $X_{12}(\#_{3,6})$ , representados nas figuras 5.19 a 5.28, com os seus respectivos índices. Observamos nestes casos, que o menor índice corresponde ao de um grafo com densidade homogênea minimal. Vale notar que, nesses exemplos, consideramos somente grafos, onde pelo menos um de seus vértices possui grau maior ou igual ao grau médio 6.

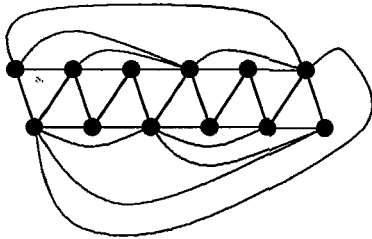


figura 5.19:  $G^1$

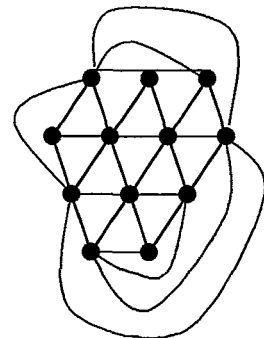


figura 5.20:  $G^2$

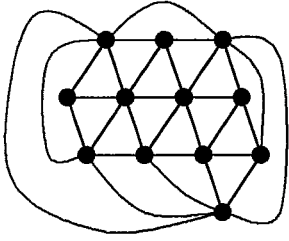


figura 5.21:  $G^3$

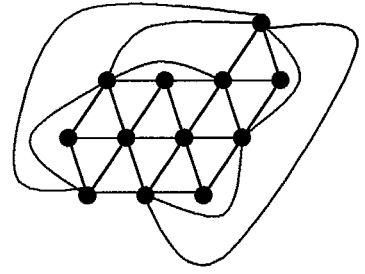


figura 5.22:  $G^4$

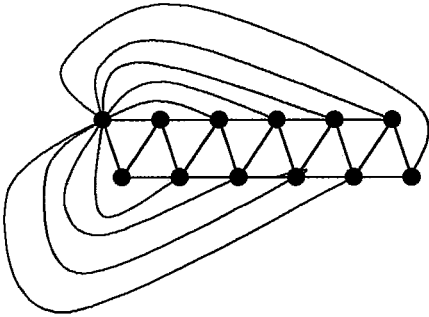


figura 5.23:  $G^5$

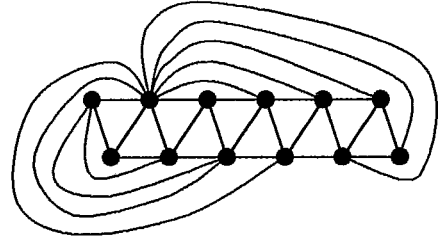


figura 5.24:  $G^6$

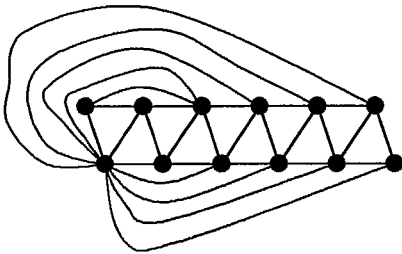


figura 5.25:  $G^7$

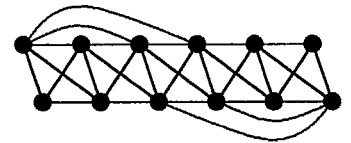


figura 5.26:  $G^8$

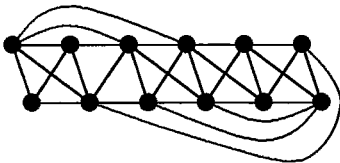


figura 5.27:  $G^9$

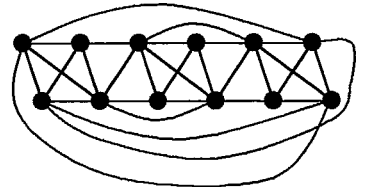


figura 5.28:  $G^{10}$

Grafo	Propriedade	Índice
$G^1$	Planar maximal	5,2054
$G^2$	Planar maximal Densidade homogênea com $w(6)=6$	5,2410
$G^3$	Planar maximal Densidade homogênea com $w(6)=5$	5,1723
$G^4$	Planar maximal Densidade homogênea com $w(6)=7$	5,2821
$G^5$	Planar maximal	5,6219
$G^6$	Planar maximal	5,5845
$G^7$	Planar maximal	5,6066
$G^8$	Densidade homogênea com $w(6)=4$	5,2448
$G^9$	Densidade homogênea com $w(6)=4$	5,1923
$G^{10}$	Densidade homogênea com $w(6)=4$	5,111

tabela 5.3:menores índices x densidade homogênea minimal

Notemos que  $G^8$ ,  $G^9$  e  $G^{10}$  são grafos em  $X_{12}(\#_{3,6})$  que não são planares maximais.

Com base em todas essas observações propomos a seguinte conjectura:

**Conjectura 5.1:** Seja  $D_{\#}(n)$  o conjunto dos grafos com densidade homogênea no cardigrafo  $X_n(\#_{a,b})$ . Então, para  $n$  suficientemente grande,

(i) existe  $G \in D_{\#}(n)$ , um grafo com densidade homogênea minimal, tal que  $\text{ind}(G) = \min\{\text{ind}(H) \mid H \in D_{\#}(n)\}$ .

(ii) existe  $G \in D_{\#}(n)$ , um grafo com densidade homogênea minimal, tal que  $\text{ind}(G) = \min\{\text{ind}(H) \mid H \in X_n(\#_{a,b})\}$ .

## Capítulo VI

### Conclusão

Um resultado conhecido em teoria espectral dos grafos diz respeito a determinação dos coeficientes do polinômio característico de um grafo  $G$ , em função da contagem de seus subgrafos elementares. Sabe-se da literatura que o coeficiente  $a_2$ , de  $\lambda^{n-2}$ , no polinômio característico, é o simétrico do número de arestas de  $G$  e, que  $a_3$ , coeficiente de  $\lambda^{n-3}$ , é o simétrico do dobro do número de triângulos de  $G$ . A partir daí, a obtenção dos demais coeficientes se torna um problema combinatório difícil, pois requer a determinação de todos os subgrafos elementares de  $G$  com uma determinada ordem, o que não é nada trivial, mesmo para grafos simples.

Neste trabalho, apresentamos nossa contribuição para a determinação dos coeficientes  $a_4$  e  $a_5$  do polinômio característico, a partir da contagem de subgrafos elementares especiais, que denominamos  $k$ -emparelhamentos. Em particular, no teorema 3.1, apresentamos e demonstramos um resultado que nos dá a contagem de 2-emparelhamentos em um grafo, sem a prévia determinação destes. A partir desse teorema, obtivemos expressões algébricas para os coeficientes  $a_4$  e  $a_5$ , encontrados nos teoremas 3.4 e 3.5. Em decorrência disso para alguns casos particulares de grafos, tais como: os caminhos, os grafos regulares, os grafos periplanares maximais (mops) serpentinas e leques, pudemos obter com facilidade os coeficientes  $a_4$  e  $a_5$ .

Introduzimos o conceito de cardigrafo, que é uma família de grafos cujos números de arestas são dados em função dos números de vértices. Esta família abrange várias classes conhecidas de grafos, como as árvores, os mops, os grafos planares maximais, as  $k$ -árvores, etc. Para os cardigrafos, mostramos nos corolários 5.1 e 5.2 uma generalização de resultados conhecidos sobre grafos planares. Aplicamos o conceito de

equilibradores e de maxregularidade, introduzidos e desenvolvidos por RODRIGUES(1997) e RODRIGUES, ABREU e MARKENZON(1999). Com isso, mostramos que em todo grafo em um cardígrafo possui grau médio  $\mu$  constante.

Nos cardígrafos, determinamos a subfamília dos grafos com densidade homogênea. Com o teorema 5.1, mostramos que grafos com densidade homogênea são grafos “quase” regulares de grau  $\mu$ , no sentido de que a cardinalidade do conjunto dos vértices com graus diferentes de  $\mu$  tem um limitante independente dos parâmetros do grafo; portanto quase todos os seus vértices possuem o mesmo grau  $\mu$ . Para um grafo regular, sabemos, pelo teorema 2.2, que o seu índice é dado exatamente pelo seu grau. No teorema 5.2, mostramos que o índice de um grafo com densidade homogênea converge para  $\mu$ , à medida que se aumenta o número de vértices desse grafo. Nesse sentido, temos que o teorema 5.2 é uma generalização do teorema 2.2.

CVETKOVIC' e ROWLINSON (1997) fazem um vasto estudo a respeito da ordenação de grafos pelos seus índices, que consiste em determinar, numa família de grafos, aqueles com menores e maiores índices. Fizemos, nos cardígrafos, um estudo semelhante. Investigações computacionais sugerem que, nessa família, um grafo com densidade homogênea é o que possui o menor índice. Este resultado foi demonstrado em [CVETKOVIC' e ROWLINSON, 1997] para os casos particulares das árvores, dos grafos conexos unicíclicos e de uma subfamília dos mops. Com base nas nossas observações computacionais e nos resultados da literatura, propomos a conjectura 5.1: “Na família dos cardígrafos, existe sempre um grafo de densidade homogênea com índice mínimo”.

Provar tal conjectura e estudar nos cardígrafos os grafos que possuem índices máximos nos parece um desafio interessante para pesquisas futuras.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BIGGS, N., 1993, *Algebraic Graph Theory*. 2 ed. Great Britain, Cambridge-University Press.
- CVETKOVIĆ, D.; DOOB, M.; SACHS, H., *Spectra of Graphs*. 1 ed. New York, Academic Press.
- CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON, P., 1990, "The Largest Eigenvalue of a Graph: A Survey", *Linear and Multilinear Algebra*, v. 28, pp. 3-33.
- CVETKOVIĆ, D.; ROWLINSON; SIMIĆ, S., 1997, *Eigenspaces of Graphs*. 1 ed. United Kingdom, Cambridge-University Press.
- DIESTEL, R., 1997, *Graph Theory*. 1 ed. New York, Springer-Verlag.
- GANTMACHER, F. R., 1977, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, vol.1, New York.
- HOFFMAN, A. J., 1972, "On limit Points on Spectral Radii of Non-Negative Symmetric Integral Matrices", *Lecture Notes Math.* 303, pp. 165-172.
- JURKIEWICZ, S., 1990, *Ciclos Hamiltonianos em Grafos Planares*. Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- JUSTEL, C. M., 1996, *Grafos Periplanares Maximais: Caracterização e Reconhecimento*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- JUSTEL, C. M.; MARKENZON, L., 1999, *Lexicographic Breadth First Search and K-Trees*, Relatório Técnico 036/DE9, IME-RJ, Fevereiro.

LINT, V. 1992, *A Course in Combinatorics*, 1 ed, Great Britain, University Press, Cambridge.

NOBLE, B.; DANIEL, J. W., 1986, *Algebra Linear Aplicada*, 2 ed. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil.

RODRIGUES, R. M. N. D., ABREU; N. M. M.; MARKENZON, 1999, “Maxregularity and Maximal Outerplanar Graphs”, In: *Discrete Mathematics, Eletronic Notes in Discrete Mathematics, vol. 3, 6<sup>th</sup>-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, The Netherlands, ISSN 0169-2690, May.

RODRIGUES, R. M. N. D., 1997, *Grafos Periplanares Maximais: Seqüência de Graus Hamiltonianas e Maxregularidade*. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

RODRIGUES, R. M. N. D., ABREU; N. M. M.; MARKENZON, L., 1999, “Equilibradores em Grafos”, In: *XXXI SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, pp. 948-952, Juiz de Fora, MG, Brasil, Outubro.

ROWLINSON, P., 1990, “On the Index of Certain Outerplanar Graphs”, *Ars Combinatoria 29c*, pp. 271-275.

SMITH, J. H., 1970, “Some Properties of the Spectrum of a Graph”, *Combinatorial Structures and Their Applications*, pp. 403-406.

TRUSCZYNSKI, M., 1984, “Note on Vertex Degrees of Planar Graphs”, *J. of Graph Theory*, vol.8, pp 171-176.