

EXPANSÃO ÓTIMA DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE
DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS E TÉCNICAS DE PLANOS CORTANTES

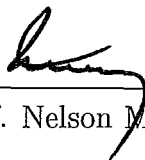
SILVIO BINATO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

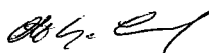
Aprovada por:



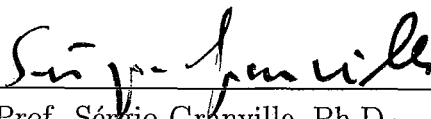
Prof. Paulo Roberto Oliveira, Ph.D.



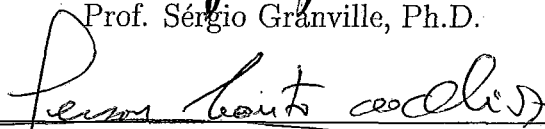
Prof. Nelson Maculan, Ph.D.



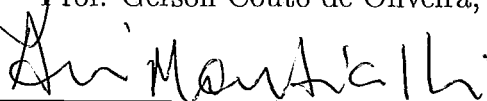
Prof. Mário Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.



Prof. Sérgio Granville, Ph.D.



Prof. Gerson Couto de Oliveira, D.Sc.



Prof. Alcir José Monticelli, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2000

BINATO, SILVIO

Expansão Ótima de Sistemas de Transmissão Através de Decomposição de Benders e Técnicas de Planos Cortantes [Rio de Janeiro] 2000

XVI, 207 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2000)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Planejamento Ótimo da Expansão de Sistemas de Transmissão de Potência
2. Decomposição de Benders
3. Otimização Discreta

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*A meus pais, Roberto (in memoriam) e Vaneza.
A Priscilla, Beatriz e Lucila.*

Agradecimentos

A todos os amigos e colegas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho de tese e especialmente,

- ao meu amigo e orientador Mário Veiga pela dedicação, incentivo e paciência na orientação prestada a mim durante o desenvolvimento deste trabalho;
- aos amigos e orientadores Sérgio Granville e Gerson Couto pelas sugestões, orientações e incentivos dispensados;
- ao Professor e orientador Paulo Roberto Oliveira pelo incentivo e sugestões;
- ao Professor Nelson Maculan pelas sugestões e reuniões de discussão;
- aos grandes amigos Ayru, Maria Cândida e Sagrilo, que sempre incentivaram e “cobraram” a finalização deste trabalho;
- ao CEPTEL, que na figura do coordenador da área de sistemas Nelson Martins e do coordenador do programa de operação elétrica João Carlos Mello, disponibilizou os recursos necessários à realização desta tese;
- aos amigos Joari, Sergio Porto, Roberto, Simone, Gilberto, Luiz Correa, Hermínio, Flavio, Varrichio, Anderson, Ricardo, Nicholas, Zulmar, Lujan, Albert, Maria Elvira, Fernanda, Damázio, entre muitos outros, pela paciência e compreensão dispensadas durante todos estes anos;
- a Professora Leontina M. G. Pinto pelo apoio e incentivo dispensados desde minha tese de Mestrado;
- aos amigos Geraldo Veiga e Mauricio Resende pelo incentivo e atenção conferidas a mim durante a realização deste trabalho;

- a secretaria do departamento de sistemas da Coppe/UFRJ, em especial a Solange e Cláudia que sempre me ajudaram em questões burocráticas;
- a minha família, em especial minha mãe Vaneza, meus dois irmãos Alexandre e Marcelo, minha esposa Lucila e minhas duas filhas Priscilla e Beatriz.

o meu sincero obrigado!

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc)

EXPANSÃO ÓTIMA DE SISTEMAS DE TRANSMISSÃO ATRAVÉS DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS E TÉCNICAS DE PLANOS CORTANTES

Silvio Binato

Abril/2000

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Sérgio Granville

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta tese apresenta um novo algoritmo de decomposição de Benders para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão de potência. Na formulação deste problema é usado um modelo linear (0 – 1) misto, que garante que a solução obtida é o plano ótimo de expansão para o sistema de transmissão. Problemas numéricos causados pela utilização de valores grandes para a constante disjuntiva associada a esta formulação, são minimizados ou mesmo eliminados como resultados de uma análise em que valores mínimos para esta constante são determinados. Com o objetivo de melhorar a convergência do algoritmo de Benders, desenvolvemos a utilização de cortes de Gomory e cortes de Benders obtidos de relaxações do problema *Escravo*. É também proposta uma nova heurística para ser aplicada na solução do problema *Mestre* com potencial para produzir grandes economias de tempo de processamento. Resultados numéricos são apresentados em problemas reais de planejamento da expansão da rede de transmissão com sistemas brasileiros.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OPTIMAL POWER TRANSMISSION EXPANSION PLANNING BY BENDERS
DECOMPOSITION AND CUTTING PLANES TECHNIQUES

Silvio Binato

April/2000

Advisors: Paulo Roberto Oliveira

Sérgio Granville

Department: Computer and System Engineering

In this thesis we present a new Benders decomposition approach in order to solve power transmission network expansion problems. In the formulation of this problem it is used a linear (0 – 1) mixed model which guarantee that the optimal solution obtained is the global optimal expansion plan. Numeric instabilities caused by a large value for the disjunctive constante associated to this formulation are minimized or, even eliminated, based on an analysis in which minimum values for this parameter are determined. To improve the convergence properties of the decomposition approach, we developed the uses of Gomory and relaxed Benders cuts within the Benders decomposition scheme, i.e. traditional Benders cuts are still used. In order to reduce the CPU time, we developed a new heuristic approach to be to check the convergence of the *Master* subproblem solved each Benders iteration. Results using real-world power transmission expansion planning problems, derived from the Brazilian transmission systems are used to illustrate the applications of this new approach.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Objetivo da Tese	3
1.2	Principais Contribuições desta Tese	4
1.3	Revisão Bibliográfica	5
1.4	Organização da Tese	10
1.5	Notação	12
2	O Problema Estático de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão de Potência	13
2.1	Introdução	13
2.2	Formulação do Problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão	14
2.2.1	O Modelo não-Linear Inteiro	17
2.2.2	O Modelo Linear (0 – 1) Disjuntivo	18
2.2.3	O Modelo Híbrido	21
2.2.4	O Modelo de Transporte	22
2.2.5	Exemplos	24
2.3	Conclusões	33
3	Decomposição de Benders	40
3.1	Introdução	40

3.2	Decomposição de Benders - Dedução Teórica	40
3.2.1	O Algoritmo de Decomposição de Benders	46
3.3	Um Novo Critério para Convergência do Problema <i>Mestre</i>	53
3.4	Conclusões	57
4	Decomposição de Benders no Problema de Planejamento de Expansão de Redes de Transmissão	59
4.1	Introdução	59
4.2	O Modelo Clássico	61
4.3	A Decomposição Hierárquica de Romero	65
4.4	O Modelo Linear (0 – 1) Disjuntivo	69
4.5	Conclusões	84
5	Cortes de Gomory em Decomposição de Benders	87
5.1	Introdução	87
5.2	Cortes de Gomory	87
5.2.1	Cortes de Gomory “Lifted”	88
5.3	Cortes de Gomory em Decomposição de Benders	93
5.3.1	Cortes de Gomory para o problema <i>Mestre</i>	93
5.3.2	Cortes de Gomory Benders Decompostos	98
5.4	Inclusão dos Cortes de Gomory no Modelo de Decomposição de Benders para o Problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão	103
5.4.1	Cortes de Gomory para o Problema Mestre de Benders no Problema de Planejamento de Redes de Transmissão	104
5.4.2	Cortes de Gomory Benders Decompostos para o Problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão	105
5.5	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	111

6	A Implementação Computacional	113
6.1	Introdução	113
6.2	Estratégias Utilizadas	113
6.2.1	Cortes de Benders para o Modelo de Transportes	117
6.2.2	Cortes de Benders para o Modelo Híbrido	122
6.2.3	Restrições Especiais	123
6.2.4	Conjunto de Soluções Elite \mathcal{ES}	125
6.3	Descrição da Implementação Computacional	126
6.4	Conclusões	131
7	Resultados Computacionais	133
7.1	Introdução	133
7.2	O Caso Teste	133
7.2.1	Caso 1 – Redespacho dos Geradores Permitido	134
7.2.2	Caso 2 – Despacho dos Geradores Fixo	145
7.3	Conclusões	150
8	Metaheurística GRASP para o Problema de Planejamento de Ex-	
	pansão de Redes de Transmissão	151
8.1	Introdução	151
8.2	Revisão de GRASP	152
8.2.1	A Fase de Construção	153
8.2.2	Fase de Busca Local	157
8.3	GRASP no Problema de Planejamento de Expansão de Redes de	
	Transmissão	159
8.3.1	Fase de Construção	160
8.3.2	Fase de Busca Local	163
8.4	Resultados Computacionais	167

8.4.1	O Caso Teste – Sistema Equivalente da Região Sudeste Brasileira	168
8.4.2	Resultados do GRASP	169
8.4.3	Resultados da Decomposição de Benders	171
8.5	Conclusões	172
9	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros	174
A	Congruência	185
B	Caminho Mínimo em um Grafo	186
B.1	Introdução	186
B.2	O Algoritmo de Dijkstra	187
C	Dados dos Sistemas de Transmissão Utilizados	188
C.1	Sistema Equivalente da Região Sul Brasileira	188
C.2	Sistema Equivalente da Região Sudeste Brasileiro	193
D	Restrições Especiais	205
D.0.1	Caso Equivalente da Região Sul Brasileira	205
D.0.2	Caso Equivalente da Região Sudeste Brasileira	207

Lista de Figuras

2.1	Sistema teste de Garver.	24
2.2	Sistema teste de Garver modificado.	26
2.3	Custo de operação \times investimento – Modelo não linear – Vista 1.	28
2.4	Custo de operação \times investimento – Modelo não linear – Vista 2.	29
2.5	Custo total \times investimento – Modelo não linear – Vista 1.	30
2.6	Custo total \times investimento – Modelo não linear – Vista 2.	31
2.7	Custo de operação \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 1.	32
2.8	Custo de operação \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 2.	33
2.9	Custo total \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 1.	34
2.10	Custo total \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 2.	35
2.11	Custo de Operação \times investimento – Modelo híbrido.	36
2.12	Custo total \times investimento – Modelo híbrido.	37
2.13	Custo de Operação \times investimento – Modelo de transporte.	38
2.14	Custo total \times investimento – Modelo de transporte.	39
3.1	Algoritmo de Geoffrion para problema <i>Mestre</i> de viabilidade.	56
4.1	Não convexidades – problemas para métodos de planos cortantes.	65
4.2	Modelo de decomposição hierárquica.	66
4.3	Modelo de decomposição hierárquica – não convexidade.	70
4.4	Exemplos de barra, inicialmente, isoladas da rede elétrica.	80

4.5	Conexões possíveis da barra 6 ao sistema no caso modificado de Garver.	82
4.6	Custo de operação \times investimento – $\mathcal{M} = 234$.	83
4.7	Custo de operação \times investimento – $\mathcal{M} = 1000$.	84
4.8	Custo de operação \times investimento – $\mathcal{M} = 100$.	85
5.1	Representação geométrica da região de viabilidade do Dual do problema <i>Escravo</i> .	110
5.2	Interpretação geométrica do processo de decomposição de Benders.	111
5.3	Representação geométrica da região de viabilidade do Dual do problema <i>Escravo</i> com cortes de Gomory Benders decompostos.	111
6.1	Conexão de um caminho de circuitos candidatos.	124
6.2	Conexão de uma barra inicialmente isolada.	124
6.3	Pseudo-código da função <code>MainBenders()</code> .	127
6.4	Pseudo-código da função <code>MainSlave()</code> .	128
6.5	Pseudo-código da função <code>MainMaster()</code> .	130
6.6	Pseudo-código da função <code>MainGomory()</code> .	132
7.1	Sistema reduzido da região Sul brasileira.	135
8.1	GRASP, descrição genérica.	153
8.2	Fase de Construção, descrição genérica.	156
8.3	Fase de Busca Local, descrição genérica.	159
8.4	Fase de Construção para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.	164
8.5	Sistema exemplo de 3–barras.	165
8.6	Grafo \mathcal{G} para o sistema exemplo com 3-barras.	166
8.7	O sistema equivalente da região Sudeste brasileira.	168
B.1	Algoritmo de Dijkstra para obter o caminho mínimo em um grafo.	187

Lista de Tabelas

2.1	Sistema teste de Garver - dados das barras.	24
2.2	Sistema teste de Garver - dados dos circuitos.	25
7.1	Plano ótimo de expansão do sistema de transmissão – Caso 1	136
7.2	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. Benders tradicional.	137
7.3	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. Benders com heurística de parada do problema <i>Mestre</i>	139
7.4	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. <i>Mestre</i> heurístico e \mathcal{M}_{ij} ajustável.	141
7.5	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. <i>Mestre</i> heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite e cortes de Gomory.	142
7.6	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. <i>Mestre</i> heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite, cortes de Gomory e Cortes de Benders para relaxações do problema <i>Escravo</i>	143
7.7	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. <i>Mestre</i> heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite e Cortes de Benders para relaxações do problema <i>Escravo</i>	144
7.8	Plano ótimo de expansão do sistema de transmissão – Caso 2	145
7.9	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. <i>Mestre</i> heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite, e Cortes de Benders para relaxações do problema <i>Escravo</i>	147

7.10	Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. <i>Mestre</i> heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite, cortes de Gomory e Cortes de Benders para relaxações do problema <i>Escravo</i>	148
8.1	Dados dos Circuitos.	165
8.2	Dados das barras.	166
8.3	Descrição das “rodadas” do GRASP.	169
8.4	Resultados do GRASP (custo de investimento) com o sistema equiv- alente da região Sudeste brasileira.	169
8.5	Circuitos adicionados para a solução de custo US\$ 422×10^6	170
8.6	Circuitos adicionados para a solução de custo US\$ 424×10^6	170
8.7	Circuitos adicionados para a solução de custo de US\$ 430×10^6	170
8.8	Resultados do caso reduzido da região Sudeste brasileira.	173
C.1	Sistema equiv. da região sul brasileira. Dados das barras.	188
C.1	continuação.	189
C.2	Sistema equiv. da região sul brasileira. Dados dos circuitos existentes.	189
C.2	continuação.	190
C.2	continuação.	191
C.3	Sistema equiv. da região sul brasileira. Dados dos circuitos candidatos.	191
C.3	continuação.	192
C.3	continuação.	193
C.4	Sistema equiv. da região sudeste brasileira. Dados das barras.	193
C.4	continuação.	194
C.4	continuação.	195

C.5 Sistema equiv. da região sudeste brasileira. dados dos circuitos existentes.	195
C.5 continuação.	196
C.5 continuação.	197
C.5 continuação.	198
C.5 continuação.	199
C.6 Sistema equiv. da região sudeste brasileira. Dados dos circuitos candidatos.	199
C.6 continuação.	200
C.6 continuação.	201
C.6 continuação.	202
C.6 continuação.	203
C.7 Sistema equiv. da região sudeste brasileira. Conjunto reduzido de circuitos candidatos.	203
C.7 continuação.	204

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O sistema elétrico vem sendo modificado em sua estrutura a nível mundial, passando de uma organização centralizada para um esquema descentralizado. O principal objetivo que se busca com esta reorganização é um aumento da eficiência dos agentes participantes do setor (entre outros: agentes de geração, agentes de transmissão, agentes de distribuição).

Na organização centralizada as tarefas de planejamento da expansão do sistema elétrico são desenvolvidas de uma maneira integrada, o que garante a minimização dos custos, otimizando a solução do processo de planejamento. Na estrutura descentralizada - novo cenário para o setor elétrico - estas atividades são executadas de forma individualizada, isto é, cada agente do setor elétrico é responsável por determinar onde e quando seus próprios investimentos serão realizados. Contudo, ainda visando garantir a otimização dos recursos disponíveis e garantir a minimização dos custos para os consumidores, as tarefas tradicionais de planejamento da expansão do sistema elétrico deverão ser executadas, por uma organização independente, na figura de um plano de referência. Isto garante um vasto campo para aplicação das técnicas descritas nesta tese, que são aplicadas para a solução de problemas de planejamento da expansão de sistemas de transmissão de potência.

Este problema se origina das mudanças necessárias no sistema elétrico face ao crescimento da demanda de energia com o passar dos anos. Para tanto, novos geradores devem ser construídos com o objetivo de satisfazer as novas necessidades de carga do sistema. Idealmente, poderíamos construir as novas unidades geradoras sob medida para o suprimento das novas necessidades dos mercados consumidores. Contudo, quase sempre não é possível, ou mesmo não econômico, construir as novas

unidades geradoras próximas aos centros consumidores, de forma que estes são construídos em lugares distantes. Com isto, torna-se necessário a construção de novos circuitos de transmissão com a finalidade de transmitir a potência elétrica produzida nestas usinas.

As decisões do processo de planejamento estão associadas à seleção das melhores unidades geradoras, das melhores rotas de transmissão e da melhor malha para a distribuição da energia produzida nas unidades geradoras. Este processo de decisão dá origem a um problema de otimização de grande porte que deve ser solucionado pelos engenheiros de planejamento. É necessário desenvolver estratégias e técnicas que assegurem que as decisões tomadas durante o processo de planejamento são as decisões ótimas ou estão, economicamente, próximas da decisão ótima. O objetivo é planejar o sistema elétrico futuro minimizando os custos de investimento e operação, atendendo aos novos requisitos de carga e a critérios de confiabilidade pré-estabelecidos. O processo, brevemente descrito acima, é conhecido como “planejamento da expansão do sistema elétrico de potência”.

Este processo de planejamento se constitui em um problema extremamente complexo que não pode ser solucionado sem que sejam feitas simplificações. Uma destas simplificações consiste em dividir o problema de planejamento da expansão em relação aos seus principais agentes, ou seja: o planejamento do parque gerador (que considera uma estimativa para os custos de expansão da transmissão), o planejamento da rede de transmissão (que considera como conhecido o plano, ou estratégia, de geração) e, finalmente, o planejamento da rede de distribuição. Cada uma destas etapas do planejamento modela a rede de potência para seus próprios propósitos.

A etapa que estamos interessados nesta tese é o planejamento da expansão da rede de transmissão nos horizontes de médio e/ou longo prazo (por exemplo, 5 anos ou mais). Este problema consiste em minimizar os custos de investimentos em novos equipamentos de transmissão (tais como: novas linhas, novos transformadores etc.) e de operação do sistema de forma a atender os novos requisitos de mercado com qualidade e confiabilidade.

1.1 Objetivo da Tese

O objetivo desta tese é analisar o comportamento do método de decomposição de Benders [7] aplicado ao problema de planejamento de expansão de redes de transmissão formulado como um problema de programação linear (0 – 1) mista.

A formulação linear (0 – 1) mista para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão é possível fazendo-se uso de uma formulação disjuntiva para representação de uma determinada classe de restrições do problema. Esta formulação foi, independentemente, proposta nos trabalhos [38, 68, 73] para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, e em [19] para um problema correlato (chaveamento ótimo de circuitos).

A maior dificuldade para utilização do modelo linear disjuntivo está relacionada ao valor numérico (muito grande) para a constante disjuntiva, um parâmetro utilizado para “liberar” as restrições disjuntivas sob certas condições. O valor numérico grande da constante disjuntiva faz com que as “informações” contidas nos cortes de Benders sejam pouco eficientes. Para exemplificar, suponha que em uma dada iteração do método de decomposição de Benders um determinado circuito candidato que tem uma forte indicação para ser adicionado é selecionado para ser construído na resolução do problema *Mestre*. Então, na iteração subsequente (ou nas próximas iterações) este mesmo circuito candidato teria um (ou mais) corte(s) de Benders cuja informação não indica sua construção. Isto faz com que o método de decomposição de Benders leve muitas iterações para convergir para a solução ótima.

Para resolver este problema de mal condicionamento dos cortes de Benders estamos propondo uma heurística para ser aplicada em conjunto com o modelo linear disjuntivo. Nesta, as primeiras iterações do método de decomposição de Benders são processadas com valores numéricos pequenos para a constante disjuntiva. O valor deste parâmetro aumenta, progressivamente, com as iterações do método de decomposição de Benders, até um valor final que garante a otimalidade da solução. Com isto, os cortes de Benders produzidos são mais representativos, evitando os problemas de perda de eficiência das informações encontrados quando o método de decomposição de Benders “puro” é considerado.

Vamos mostrar também que os cortes de Benders produzidos para a solução

do(s) problema(s) modificado(s) podem ser completamente re-aproveitados (sendo necessário apenas um pequeno ajuste nos coeficientes dos cortes) na solução do problema original, ou seja, mudanças no valor numérico da constante disjuntiva não invalidam os cortes de Benders já produzidos quando a constante disjuntiva tinha outro valor.

Uma estratégia para acelerar a convergência do método de decomposição de Benders é a inclusão de outras restrições (ou cortes). Nesta linha, vamos propor a inclusão de cortes de Gomory [34] em conjunto com cortes de Benders em um método de decomposição de Benders. Vamos mostrar que existem pelo menos duas formas para considerar cortes de Gomory em decomposição de Benders: na primeira, os cortes de Gomory são calculados para o problema *Mestre* que é um problema de programação linear (0 – 1) mista. A segunda forma consiste em um “novo” tipo de corte, denominados nesta tese de corte de Gomory Benders-decomposto, que devido sua construção necessita ser decomposto em conjunto com as restrições do problema original pelo modelo de decomposição de Benders. Sendo assim, ao invés destes cortes serem incluídos nos problemas *Mestre*, eles serão considerados no problema *Escravo*. Vamos mostrar que a utilização de cortes de Gomory Benders-decompostos não trazem problemas teóricos para a convergência do método de decomposição de Benders.

Além da utilização dos cortes de Gomory em decomposição de Benders, vamos propor uma importante modificação no método de decomposição de Benders, mais especificamente no critério para convergência do problema *Mestre*. Tal modificação permite uma substancial economia no tempo de processamento, visto que em se tratando da solução de problemas de programação linear inteira mista, a maior parte do tempo de processamento gasto deve-se às soluções do problema *Mestre* da decomposição de Benders.

1.2 Principais Contribuições desta Tese

As principais contribuições desta tese de doutorado podem ser resumidas nos seguintes pontos:

- Um novo critério para determinar a convergência do problema *Mestre* no pro-

cesso de decomposição de Benders;

- O desenvolvimento teórico de um valor mínimo para a constante disjuntiva, um parâmetro necessário para a representação de algumas restrições do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão;
- A utilização de cortes de Gomory em decomposição de Benders;
- A utilização de cortes de Benders calculados a partir de relaxações do problema *Escravo* em conjunto com os cortes de Benders tradicionais.

1.3 Revisão Bibliográfica

Por um longo tempo, a disponibilidade de softwares para resolver o planejamento de longo prazo da expansão de redes de transmissão estava restrita a ferramentas de análises, tais como fluxos de potência.

Um dos primeiros trabalhos propostos para a solução deste problema é datado de 1970 [29]. Garver formulou o problema como um problema de fluxo de potência e usou algoritmos de programação linear para identificar as rotas mais diretas entre os geradores e as cargas. Todos os candidatos a adição poderiam transportar potência mas eram penalizados para favorecer o fluxo nos circuitos existentes. As adições eram realizadas nos circuitos mais sobrecarregado e um novo fluxo de carga linearizado é computado.

Kaltenbatch et alii [45], também no ano de 1970, propuseram combinar programação linear com programação dinâmica. Programação linear era usada para encontrar o mínimo incremento da capacidade da rede para atender as variações de demanda e geração nas barras do sistema. Após, programação dinâmica era utilizada para achar a melhor sequência de investimentos (contínuos) para o período de planejamento. Este trabalho é o pioneiro para problemas de planejamento de expansão de redes de transmissão considerando múltiplos estágios.

Um algoritmo “puro” de programação dinâmica foi proposto por Dusonchet e El-Abiad em 1973 [20]. Esta proposta parecia contornar as dificuldades em obter a solução ótima dos trabalhos anteriores. Contudo, devido aos altos recursos computacionais requeridos, resultado do formalismo da programação dinâmica, simplificações

ou relaxações de importantes restrições eram necessárias em aplicações práticas.

Tendo em vista as desvantagens da programação dinâmica foi proposto em 1973 por Gonzaga [36] um algoritmo de busca em grafos. Este algoritmo, uma versão de algoritmo A^* , procura encontrar um caminho de custo mínimo em grafos de expansão utilizando heurísticas para reduzir o número de alternativas a serem analisadas. Com base em tal algoritmo foi implementado um programa computacional, Tânia, que foi muito utilizado na solução de problemas de planejamento da expansão de redes com sistemas Brasileiros.

O conceito de rede adjunta combinada com o modelo de fluxo linearizado foi a proposta de Fischl e Puntel [23]. Este trabalho procurava pela variação contínua das susceptâncias dos circuitos que minimiza o custo de reforços na rede de transmissão. Posteriormente, um procedimento heurístico chamado método do vizinho mais próximo seria utilizado para obter os valores discretos das susceptâncias dos circuitos.

A primeira proposta de algoritmos do tipo “Branch-and-Bound” para este problema é devida a Lee et alii [50] em 1974. Contudo, assim como nos métodos de programação dinâmica, a utilização de algoritmos combinatórios tipo “Branch-and-Bound” fica restrita a aplicações a sistemas de pequeno porte face aos recursos computacionais exigidos.

Em 1979, Monticelli et alii [52] propuseram o uso de ferramentas interativas para o planejamento da transmissão. Para ordenar as possibilidades de adições era utilizado o índice de “Mínimo Esforço”, que consiste de uma análise de sensibilidade em relação as susceptâncias dos circuitos em um problema de otimização correlato cujo resultado é idêntico ao modelo de fluxo de carga linearizado.

O uso de análise de sensibilidade no problema de planejamento da rede de transmissão foi inicialmente proposta pelo trabalho de De Champs et alii [18]. Eles utilizaram análise de sensibilidade em relação as susceptâncias a partir de um problema de programação linear cujas restrições são as equações do modelo de fluxo de carga linearizado em conjunto com limites de transporte nos circuitos e de capacidade nos geradores. O objetivo do problema era obter o mínimo corte de carga necessário para eliminar todas as violações operacionais na rede elétrica. O uso de análise de sensibilidade também foi proposto por Pereira et alii [58].

Em 1981, Bennon et alii [8] utilizaram análise de sensibilidade com relação às susceptância dos circuitos em conjunto com o modelo linearizado de fluxo de potência, com o objetivo de determinar o caminho mais efetivo para a minimização um índice de performance do sistema. Um fator de coerência, que relaciona mudanças em um fluxo em relação a alterações na capacidade de um circuito, é utilizado para determinar o “vetor de eficiência” que serve para escolher o caminho mais efetivo para reforço na rede de transmissão.

Em 1984, Villasana [73] propôs duas diferentes metodologias para serem aplicadas ao planejamento da expansão de redes de transmissão. A primeira foi formulada combinando o modelo de fluxo de carga linearizado com um modelo de Transporte. Enquanto o modelo linearizado calcula o fluxo de potência para os circuitos existentes, o modelo de Transporte era utilizado para computar o fluxo “sobrecarregado”. Este trabalho consistia de um aperfeiçoamento do trabalho proposto por Garver [29]. O segundo trabalho utilizava uma formulação linear inteiramente mista.

O uso de esquemas de decomposição para este problema teve início com o trabalho de Pereira [57]. Naquele trabalho, um esquema de decomposição de Benders [7] foi aplicado para decompor o problema global de planejamento de redes em dois subproblemas: um de investimento, que tem por objetivo propor um plano de expansão; e outro de operação, que deve analisar o plano proposto e expressar as restrições operacionais em termos das variáveis de investimento através de restrições lineares chamadas de cortes de Benders. Esta nova restrição deve ser adicionada ao subproblema de investimento e novas iterações de Benders são repetidas até a obtenção da convergência. O modelo adotado para formular o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão é não linear e não convexo, o que pode trazer sérias dificuldades para métodos de cortes como o algoritmo de decomposição de Benders. A aplicação de métodos de planos cortantes a um problema não linear e não convexo pode não ser bem sucedida pois os cortes produzidos podem excluir partes da região de viabilidade do problema, inclusive a região que contém a solução ótima.

Com o objetivo de contornar esta deficiência do método de decomposição de Benders em relação ao modelo não linear e não convexo, foi proposto na tese de mestrado de Romero [62, 65] uma metodologia de decomposição hierárquica com-

posta por três fases distintas. Na primeira fase o problema de planejamento deve ser solucionado por decomposição de Benders considerando somente o modelo de transporte para o subproblema de operação. Além disso as integralidades das variáveis de investimento deveriam ser relaxadas. Na segunda fase o modelo do subproblema de operação deve ser trocado por um modelo Híbrido (mais apurado) que consiste do modelo de fluxo de potência linearizado para os circuitos existentes e um modelo de transporte para computar o fluxo nos circuitos planejados. Finalmente, na terceira fase deste trabalho, o modelo de carga linearizado era utilizado para o cálculo do fluxo de carga em todos os circuitos da rede de transmissão. O subproblema de investimento considera as variáveis de investimento discretas e utiliza um algoritmo especializado de enumeração implícita desenvolvido em 1993 na tese de doutorado de Romero [63, 66].

Em 1990, Pinto et alii [60] usaram o esquema de decomposição de Benders combinado com um algoritmo de enumeração implícita. Com o objetivo de reduzir o esforço computacional, que pode ser muito grande, eles utilizaram duas técnicas: redução por inviabilidade e por custo.

Outro método de decomposição proposto para o problema de planejamento, foi proposto por Levi et alii [44] em 1991. Este trabalho propôs dividir o problema de planejamento em dois problemas menores, um tratando somente com questões de investimento e outro considerando somente problemas relacionados à operação. O problema de investimento foi especificado como um problema de fluxo de custo mínimo em rede. Este problema era decomposto novamente em dois subproblemas, o primeiro para computar o fluxo inicial que utiliza um algoritmo de programação linear para calcular o mínimo corte de carga. O segundo subproblema utilizava o modelo de rede marginal para obter o fluxo de carga “sobrecarregado”.

Em 1994, Bayona et alii [5] propuseram uma metodologia heurística que toma vantagem da decomposição natural do problema em subproblemas de operação e investimento. O subproblema de investimento era solucionado utilizando-se um procedimento heurístico de busca em árvore iniciada a partir de uma solução viável obtida por outros modelos. As variáveis de investimento (ramos da árvore de busca) poderiam ser classificadas de três maneiras: as variáveis questionáveis (circuitos incluídos na solução viável inicial mas que o usuário pensa não pertencer ao plano ótimo), as variáveis atrativas (circuitos que o usuário pensa pertencer ao planeja-

mento ótimo) e as variáveis congeladas (circuitos que não serão testados no processo de busca). Esta classificação das variáveis já consiste de um critério de truncamento utilizado por este trabalho com o objetivo de redução do tempo computacional. Os outros critérios utilizados eram limites na profundidade e na largura do processo de busca na árvore, limite no número de resoluções do subproblema de operação e limite no número de “passos errados” do processo de busca na árvore.

Em 1995, Binato e Oliveira [10] propuseram um método de busca, “backward-forward” para o problema de planejamento de expansão de redes de transmissão multi-estágio. Neste método são definidos passos para uma análise de planejamento a dois estágios: o passo “backward”, que consiste de um planejamento retornando no tempo buscando antecipações de circuitos já definidos para o segundo anos e e no passo “forward”, que faz uma análise no sentido correto do tempo. Utilizando, de uma maneira organizada, estes dois passos o método explora a região de viabilidade do problema em busca de economias de escala quando são considerados vários estágios durante o horizonte de planejamento.

Também em 1995, Oliveira et alii [54] utilizaram um esquema de decomposição hierárquica, mas composto por duas fases ao invés de três fases como no trabalho de Romero. A primeira fase, da mesma forma que no trabalho de Romero, considera somente o modelo de Transporte, porém não relaxa a integralidade das variáveis de investimento, enquanto que a segunda fase é igual à terceira do trabalho de Romero. A maior diferença entre estes dois trabalhos não vem da decomposição hierárquica utilizada e sim da maneira como o subproblema de investimento era solucionado. Enquanto que o trabalho anterior resolvia o subproblema de investimento até obter a solução ótima utilizando um algoritmo de enumeração implícita especializado, neste trabalho, utiliza um algoritmo de “branch and bound” com o objetivo de achar somente a primeira solução viável. Com isso, é possível se obter considerável redução do esforço computacional.

A utilização de métodos de busca mais elaborados, denominados de meta-heurísticas, para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão teve início com o trabalho de Romero, Galelo e Monticelli que propuseram um método de Recozimento Simulado (“Simulated Annealing”) [64], que posteriormente foi paralelizado [27]. A qualidade dos resultados publicados nestes dois artigos mostraram que tais métodos tem um excelente potencial para este problema.

Mais tarde, outras metaheurísticas também foram propostas, veja por exemplo: GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) [12], Busca Tabu híbrida (“Hybrid Tabu Search”) [28], Busca Tabu [55], Algoritmos Genéticos (“Extended Genetic Algorithms”) [26], Algoritmos Genéticos Híbridos (“Hybrid Genetic Algorithm”) [14].

Em 1999, Tsamasphyrou, Renaud e Carpentier [72] utilizaram o mesmo modelo linear, com restrições disjuntivas, utilizado nesta tese em um método de decomposição de Benders. Eles mostraram que para um valor para a constante disjuntiva, $\mathcal{M} \leq \infty$, o modelo linear produz os mesmos resultados da formulação do problema de expansão de redes de transmissão. Eles identificaram que quanto menor for o valor numérico para a constante disjuntiva melhor é a convergência do método de decomposição.

É claro que esta revisão bibliográfica não inclui todos os trabalhos relacionados com planejamento a longo prazo da expansão de redes de transmissão. Peço desculpas a todos os autores cujos trabalhos não foram relacionados acima.

1.4 Organização da Tese

Esta tese está organizada da seguinte maneira:

O capítulo 2 ilustra o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão de potência. Serão apresentadas as formulações que geralmente são utilizadas para representar este problema, assim como a formulação que será utilizada nesta tese.

O capítulo 3 mostra uma revisão do método de decomposição de Benders [7]. Também serão ilustrados novos desenvolvimentos realizados neste modelo de decomposição que proporcionam melhorias do algoritmo em relação ao tempo computacional.

O capítulo 4 ilustra a aplicação do modelo de decomposição de Benders ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão de potência. Neste capítulo serão ilustrados detalhes da implementação da decomposição de Benders para a solução do problema abordado nesta tese. Vamos ilustrar uma melhoria significativa no valor “teórico” necessário para garantir a otimalidade da solução

fornecida pelo método de decomposição de Benders. No final, também ilustraremos o comportamento do modelo linear disjuntivo em relação ao valor numérico utilizado para a constante de disjunção através de exemplos.

O capítulo 5 apresenta uma revisão da teoria relacionada a cortes de Gomory [34] e discute a implementação de um método de planos cortantes utilizando cortes de Benders e cortes de Gomory e o mesmo esquema de decomposição utilizado no método de decomposição de Benders.

No capítulo 6 vamos fazer uma descrição das principais funções que compõem o modelo de decomposição de Benders para o planejamento da expansão de redes de transmissão implementado nesta tese. Além disso, também vamos ilustrar as estratégias que foram utilizadas para aumentar a eficiência na solução dos problemas *Mestre* da decomposição de Benders.

O capítulo 7 mostra a aplicação do método proposto a um caso real de planejamento da expansão de redes de transmissão com o sistema equivalente da região Sul brasileira. Este sistema vem sendo muito utilizado para ilustrar novas aplicações para ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, veja por exemplo [12, 58, 40, 39, 27, 28, 25, 26, 24, 38, 55, 57, 64, 65, 66, 63, 69].

O capítulo 8 ilustra um novo método heurístico, GRAS – “Greedy Adaptive Search Procedure”, aplicado para solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão. Este método heurístico, classificado como um metaheurística, tem se mostrado bastante efetivo na obtenção de soluções de excelente qualidade para problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão. O custo destas soluções podem ser de grande ajuda para algoritmos combinatórios pois esses fornecem um limite superior para o custo da solução ótima do problema, reduzindo o tempo de processamento requerido para a convergência desses métodos. Além disso, podemos também fazer uso de outras informações fornecidas por métodos heurísticos possibilitando a aplicação de métodos de decomposição em casos de maior porte.

O capítulo 9 descreve as principais conclusões e algumas perspectivas futuras deste trabalho de tese de doutorado.

Esta tese de doutorado foi escrita em \LaTeX e três referências foram muito importantes na confecção deste texto, [47, 37, 41].

1.5 Notação

Nesta tese utilizaremos a seguinte notação:

$A, B \dots$	letras maiúsculas para representar matrizes.
$x, y \dots$	letras minúsculas para representar vetores (coluna).
A^t, x^t	representa o operador de transposição, aplicado à matrizes ou a vetores.
$[x]$	representa uma matriz diagonal cuja diagonal é o vetor x .
I	representa uma matriz identidade na dimensão apropriada.
e	é um vetor cujas componentes são unitárias.
\mathcal{C}, \mathcal{E} etc.	letras “caligráficas” são utilizadas para representar conjuntos.
$\bar{\mathcal{C}}$	representa o conjunto complemento do conjunto \mathcal{C} .
$ \mathcal{C} $	representa a cardinalidade do conjunto \mathcal{C} .

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA ESTÁTICO DE PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos apresentar o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão de potência. Este problema consiste em determinar o plano de expansão mais econômico da rede de transmissão para um determinado ano futuro. Os dados para este problema são a previsão de carga futura bem como o despacho dos geradores para atender ao mercado. Além disso, são necessários dados para a rede existente, também chamada de rede básica, e dados para os novos circuitos que podem ser adicionados à rede básica. Note que a rede básica não tem capacidade suficiente para o atendimento do mercado futuro.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira. A seção 2.2 ilustra a formulação do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão utilizando dois modelos distintos: inicialmente o modelo mais utilizado (denominado de modelo tradicional nesta tese) que é um problema de programação não-linear inteira mista e, o modelo linear (0 – 1) disjuntivo – um problema de programação linear inteira mista – que será utilizado nesta tese. Além disso, vamos tentar mostrar, com um exemplo, as dificuldades para a solução deste problema quando da utilização da formulação não linear. Da mesma forma, vamos ilustrar, com o mesmo exemplo, a

formulação disjuntiva. Finalmente, conclusões serão apresentadas na secção 2.3.

2.2 Formulação do Problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão

Sejam \mathcal{N} o conjunto de barras da rede elétrica, \mathcal{E} o conjunto de circuitos existentes, e \mathcal{C} o conjunto dos circuitos candidatos, o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\text{Minimize } z = \sum_{ij \in \mathcal{E}} c_{Iij} x_{ij} \quad (2.1a)$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in \Omega_i^0} f_{ij}^0 + \sum_{j \in \Omega_i^1} f_{ij}^1 + g_i = d_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2.1b)$$

$$f_{ij}^0 - \gamma_{ij}^0 (\theta_i - \theta_j) = 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \quad (2.1c)$$

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1 (\theta_i - \theta_j) = 0, \quad \text{se } x_{ij} = 1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{C} \quad (2.1d)$$

$$-x_{ij} \bar{f}_{ij}^1 \leq f_{ij}^1 \leq x_{ij} \bar{f}_{ij}^1, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{C} \quad (2.1e)$$

$$0 \leq g_i \leq \bar{g}_i, \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (2.1f)$$

$$\bar{f}_{ij}^0 \leq f_{ij}^0 \leq \bar{f}_{ij}^0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{E} \quad (2.1g)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{C} \quad (2.1h)$$

onde: c_{Iij} é o custo de investimento associado a decisão de construção do circuito candidato, x_{ij} , entre as barras $i - j$. f_{ij}^0 e f_{ij}^1 são, respectivamente, os fluxos de potência nos circuitos existentes e candidatos $i - j$, g_i e d_i são a geração de potência ativa injetada e a demanda (carga ativa) a ser atendida na barra i , respectivamente. γ_{ij}^0 e γ_{ij}^1 são, respectivamente, as susceptâncias dos circuitos existente e candidato entre as barras $i - j$, e θ_i é o ângulo da tensão na barra i . Finalmente, \bar{f}_{ij} é a capacidade de carregamento do circuito ij e \bar{g}_i é a capacidade de geração do gerador conectado à barra i .

A função objetivo do problema (2.1) corresponde a minimização da soma dos custos de investimento para a construção de novos equipamentos de transmissão (linhas, transformadores etc.). É importante ressaltar que a função objetivo deste problema também deveria considerar a minimização dos custos de perdas para a

transmissão de potência pelo sistema de transmissão. Contudo, para tal, teríamos que incluir um termo quadrático na função objetivo, o que dificultaria ainda mais a solução do problema.

As restrições (2.1b), (2.1c) e (2.1d) correspondem às leis de Kirchoff do modelo de fluxo linearizado para o sistema de transmissão. Note que as restrições correspondentes à segunda lei de Kirchoff sobre os circuitos candidatos devem existir somente para aqueles que venham a ser adicionados à rede elétrica. Na formulação apresentada anteriormente, esta restrição está condicionada ao valor da variável x , isto é, a restrição (2.1d) existe para o circuito $i - j$ se $x_{ij} = 1$ - circuito adicionado e não existe se $x_{ij} = 0$ - circuito não adicionado.

As restrições (2.1f), (2.1g) e (2.1e) representam, respectivamente, os limites de capacidade de geração nas usinas do sistema e limites de transporte de potência para os circuitos (tanto os existentes como os candidatos) do sistema de transmissão. As restrições (2.1h) representam a integridade para as variáveis de decisão (variáveis de planejamento da expansão).

A formulação do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão pode ser colocada na forma matricial da seguinte forma:

$$\text{Minimize } z = c^t x \tag{2.2a}$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g = d \tag{2.2b}$$

$$(f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta) = 0 \tag{2.2c}$$

$$[x](f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta) = 0 \tag{2.2d}$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \tag{2.2e}$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \tag{2.2f}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \tag{2.2g}$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \tag{2.2h}$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \tag{2.2i}$$

onde S_0 e S_1 são matrizes incidência circuito-barra para as redes existentes e candidatas, respectivamente. O elementos destas matrizes são 1 quando o circuito $i - j$

está conectado à barra i , -1 quando o circuito $i - j$ está conectado à barra j e, 0 caso contrário. x é o vetor cujas componentes são x_{ij} , g é formado por g_i e assim por diante. Note que a “descontinuidade” do modelo para a segunda lei de Kirchoff (2.1d) é representado pela multiplicação da matriz de decisões de investimento pela restrição da segunda lei de Kirchoff no problema (2.2). Assim, quando a i -ésima componente do vetor x , x_i é igual a 0, a restrição não é válida e, se $x_i = 1$ a restrição é válida.

Implementações computacionais para tratar deste problema frequentemente consideram uma variável adicional para resolver os problemas de inviabilidade. Tal variável, o “corte de carga” associado a cada barra de carga do sistema, pode ser vista como uma geração fictícia, torna o problema *sempre* viável pois, em último caso, pode-se cortar a carga das barras e obter um sistema de transmissão viável. Inserindo as variáveis de corte de carga o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão passa a ser representado por:

$$\text{Minimize } z = c_1^t x + c_0^t r \quad (2.3a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (2.3b)$$

$$(f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta) = 0 \quad (2.3c)$$

$$[x](f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta) = 0 \quad (2.3d)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (2.3e)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (2.3f)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.3g)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (2.3h)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (2.3i)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (2.3j)$$

onde c_0^t representa o vetor do custo do corte de carga nas barras, r é o vetor do montante de carga cortado. As restrições (2.3h) restringem o corte a carga própria de cada uma das barras do sistema. Nesta trabalho de tese sempre adotaremos a formulação que considera o corte de carga nas barras sendo que o seu custo será sempre ajustado de maneira a obter um plano de expansão para o sistema de transmissão

no qual o corte de carga seja nulo.

São duas as grandes dificuldades para a solução do problema (2.1). A primeira está relacionada ao modelo do problema ou, mais especificamente, a como representar as restrições (2.1d), que devem existir somente se o circuito candidato for construído e, caso contrário, estas restrições não devem estar “ativas”. A segunda dificuldade está relacionada às decisões de investimento que requerem a utilização de algoritmos combinatórios.

Duas formas já foram propostas para representar as restrições (2.1d). A primeira consiste em utilizar um modelo não linear-inteiro, conforme será visto a seguir. A segunda forma, de modelar as restrições (2.1d) é a utilização de um modelo disjuntivo, proposto inicialmente em [38, 68, 73], será visto na seqüência.

2.2.1 O Modelo não-Linear Inteiro

Um maneira simples de representar a restrição condicional (2.1d) é utilizar uma equação não linear da seguinte forma:

$$f_{ij}^1 - x_{ij}\gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) = 0, \forall i, j \in \mathcal{E} \quad (2.4)$$

A igualdade entre (2.4) e (2.1d) pode ser facilmente verificada. Quando o valor de x_{ij} em (2.4) é 1, ou seja, quando decide-se construir o circuito candidato $i - j$, o fluxo de potência no circuito $i - j$ é calculado por:

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) = 0,$$

que é idêntico ao obtido pela restrição (2.1d).

Caso contrário, ou seja, quando $x_{ij} = 0$, $f_{ij} = 0$, também igual ao obtido no modelo (2.1), pois

$$-x_{ij}\bar{f}_{ij}^1 \leq f_{ij}^1 \leq x_{ij}\bar{f}_{ij}^1,$$

assegura que $f_{ij} = 0$.

Substituindo a restrição não linear (2.4) pela restrição (2.1c) do modelo para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, obtemos a seguinte formulação, não linear, para este problema,

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (2.5a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (2.5b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (2.5c)$$

$$f^1 - [x][\gamma^1] S_1 \theta = 0 \quad (2.5d)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (2.5e)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (2.5f)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.5g)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (2.5h)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (2.5i)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|\mathcal{C}|} \quad (2.5j)$$

A formulação não linear insere uma dificuldade a mais para a solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão, devido às não linearidades no termo quadrático $[x][\gamma^1] S_1 \theta$.

2.2.2 O Modelo Linear (0 – 1) Disjuntivo

Outra forma para representar as restrições da segunda lei de Kirchoff é a utilização de uma formulação disjuntiva da seguinte forma:

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1 (\theta_i - \theta_j) \leq \mathcal{M}(1 - x_{ij}) \forall i, j \in \mathcal{C} \quad (2.6a)$$

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1 (\theta_i - \theta_j) \geq -\mathcal{M}(1 - x_{ij}) \forall i, j \in \mathcal{C} \quad (2.6b)$$

A igualdade entre as restrições (2.6a)–(2.6b) e a restrição (2.1d) pode ser facilmente verificada para $\mathcal{M} = \infty$, veja a proposição a seguir.

Proposição 2.1 *As restrições disjuntivas (2.6a)–(2.6b) são equivalentes a restrição (2.1d) do modelo do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão quando \mathcal{M} é um número positivo muito grande.*

PROVA. Vamos dividir a prova em duas etapas, quando o circuito candidato ij é adicionado ($x_{ij} = 1$) e quando ele não é considerado no plano ótimo de expansão da rede de transmissão ($x_{ij} = 0$).

- Suponha que $x_{ij} = 1$. Então obtemos

$$\begin{aligned} f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) &\leq 0 \\ f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) &\geq 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) = 0,$$

que é idêntica a restrição (2.1d) para $x_{ij} = 1$.

- Suponha o contrário, ou seja, que $x_{ij} = 0$. Substituindo obtemos

$$\begin{aligned} -\gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) &\leq \mathcal{M} \quad \forall i, j \in \mathcal{C} \\ -\gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) &\geq -\mathcal{M} \quad \forall i, j \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

pois como o circuito candidato ij não foi adicionado $f_{ij} = 0$. Como \mathcal{M} é um número positivo muito grande ($\mathcal{M} \approx \infty$), as restrições (2.6a)–(2.6b) nunca estarão no limite e, portanto, podem ser relaxadas, completando a demonstração da equivalência entre os modelos. ■

Substituindo as restrições (2.1c) do problema (2.1) pelas restrições do modelo disjuntivo (2.6a)–(2.6b) obtemos o seguinte problema de programação para representar o problema de planejamento de expansão de redes de transmissão:

$$\text{Minimize } z = c_1^t x + c_O^t r \quad (2.7a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (2.7b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (2.7c)$$

$$f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta \leq \mathcal{M}(1 - x) \quad (2.7d)$$

$$f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta \geq -\mathcal{M}(1 - x) \quad (2.7e)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (2.7f)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (2.7g)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.7h)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (2.7i)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (2.7j)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (2.7k)$$

A representação do problema de planejamento de expansão de redes de transmissão através do modelo linear (0 – 1) disjuntivo foi proposta, independentemente em [38, 68, 73].

As maiores dificuldades para solução do problema (2.7), desconsiderando que se trata de um problema que exige a utilização de algoritmos combinatórios, são devidas às restrições disjuntivas, as quais, requerem um valor numérico muito grande para a constante disjuntiva \mathcal{M} , o que trás problemas numéricos na solução do problema.

Em [40] os seguintes comentários foram feitos sobre a formulação disjuntiva:

- O problema de programação resultante quando utiliza-se a formulação disjuntiva para o problema de expansão de redes de transmissão é um problema de programação linear (0 – 1) mista. Isto garante que a solução ótima discreta obtida é a solução ótima do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.

2.2.3 O Modelo Híbrido

O modelo híbrido consiste em uma relaxação do modelo completo do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, (2.3), onde o conjunto de restrições correspondentes à segunda lei de Kirchoff é modelado somente para os circuitos existentes, isto é, esta restrição não faz parte da formulação do problema sobre os circuitos candidatos à serem adicionados a rede elétrica. Esta formulação foi inicialmente considerada em modelos de planejamento da expansão de redes proposto por Villasana [73]. O modelo híbrido, conforme definido acima, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (2.8a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (2.8b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (2.8c)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (2.8d)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (2.8e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.8f)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (2.8g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (2.8h)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (2.8i)$$

Note que a única diferença entre os problemas (2.3) e (2.8) é que o modelo híbrido não considera a restrição (2.3d).

Em [40] os seguintes pontos foram comentados a respeito do modelo híbrido:

- O modelo híbrido é um problema de programação linear (0 – 1) mista cuja solução é relativamente mais simples que a solução do problema completo. A relaxação contínua do modelo híbrido é um problema de programação linear.
- Tendo em vista que o modelo híbrido é uma relaxação do problema completo, sua solução será a solução ótima do problema completo se for uma solução

viável naquele problema.

- O modelo híbrido é igual ao modelo completo para a solução inicial, isto é, quando nenhum circuito foi, ainda, adicionado à rede existente.
- Existem relações interessantes entre o modelo modelo híbrido e o modelo linear disjuntivo, apresentado na seção 2.2.2. Por exemplo. a utilização de uma constante disjuntiva $\mathcal{M} = \infty$ faz com que as restrições que representam a segunda lei de Kirchoff nos circuitos candidatos estarão no limite somente para valores de investimento muito próximos a 1. Em outras palavras, ao relaxar a restrição de integralidade da variável de investimento, x , o modelo linear disjuntivo fica idêntico ao modelo híbrido.
- Como desvantagem, a qualidade da solução obtida pode não ser satisfatória visto que a formulação híbrida é uma relaxação do problema completo, logo, a solução obtida será, possivelmente, uma solução inviável para o problema completo.

2.2.4 O Modelo de Transporte

O modelo de transporte, proposto com grande sucesso por Garver em 1970 [29], é uma relaxação do modelo híbrido e, por consequência, também uma relaxação do modelo completo. O grande sucesso desta formulação se deve ao ineditismo em relação a métodos para solução de problemas de planejamento de expansão de redes. Nesta formulação, somente a primeira lei de Kirchoff é considerada, logo o problema pode ser escrito como:

$$\text{Minimize } z = c_1^t x + c_0^t r \quad (2.9a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (2.9b)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1]x \leq 0 \quad (2.9c)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1]x \geq 0 \quad (2.9d)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.9e)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (2.9f)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (2.9g)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (2.9h)$$

Em [40] as seguintes características foram apontadas em relação ao modelo de transportes:

- O modelo de transportes é um problema de programação linear (0 – 1) mista cuja solução é, relativamente, mais simples que a solução do modelo híbrido. A relaxação contínua do modelo de transporte é um problema de programação linear com estrutura de redes portanto, pode ser facilmente solucionada.
- Tendo em vista que o modelo de transporte é uma relaxação do modelo híbrido, sua solução será a solução ótima para a problema híbrido se for uma solução viável naquele problema.
- Uma desvantagem da utilização desta formulação está relacionada, novamente, com a qualidade da solução obtida. A não representação da segunda lei de Kirchoff faz com que os circuitos possam “rotear” o fluxo de potência e conseqüentemente o modelo é otimista, resultando em poucos investimentos em novos circuitos.

A seguir, vamos tentar ilustrar, através de um exemplo didático, as principais dificuldades para a solução de problemas de planejamento de expansão de redes de transmissão.

2.2.5 Exemplos

Nesta seção vamos ilustrar a região de viabilidade (em relação à relaxação contínua) dos problemas de planejamento de expansão de redes de transmissão para todos os modelos apresentados nas seções anteriores. Para fazer esta representação vamos considerar um sistema bastante conhecido na literatura – o sistema teste utilizado por Garver em [29] – cuja configuração inicial está representada na figura 2.1 a seguir. As linhas cheias representam os circuitos existentes, enquanto que as linhas tracejadas os circuitos candidatos à adição. Os dados para o sistema teste de Garver estão descritos nas tabelas 2.1 (dados de barras) e 2.2 (dados de circuitos existentes e circuitos candidatos a serem adicionados).

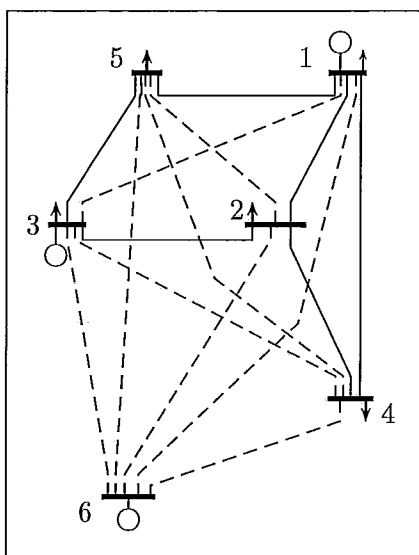


Figura 2.1: Sistema teste de Garver.

Barra	Lim.Ger. (MW)	Carga (MW)
1	150	80
2	0.	240
3	360	40
4	0.	160
5	0.	240
6	600	0.

Tabela 2.1: Sistema teste de Garver - dados das barras.

Circuito	Custo (\$)	Reatância (Ω)	Lim. Transmissão (MW)
1-2	40	0.40	100
1-3	38	0.38	100
1-4	60	0.60	80
1-5	20	0.20	100
1-6	68	0.68	70
2-3	20	0.20	100
2-4	40	0.40	100
2-5	31	0.31	100
2-6	30	0.30	100
3-4	59	0.59	82
3-5	20	0.20	100
3-6	48	0.48	100
4-5	63	0.63	75
4-6	30	0.30	100
5-6	61	0.61	78

Tabela 2.2: Sistema teste de Garver - dados dos circuitos.

A solução ótima para o problema de planejamento da expansão, quando é permitido o redespacho dos geradores disponíveis, foi obtida, pela primeira vez, na tese de mestrado de Romero [62] e, consiste da adição de quatro circuitos: um circuito conectando as barras 3 – 5 e mais três circuitos entre as barras 4 – 6.

Com o objetivo de ilustrar as dificuldades para a solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão vamos considerar uma versão modificada para o sistema teste de Garver, na qual somente é possível adicionar novos circuitos entre as barras 2 – 6 e 4 – 6, e que as decisões de investimento não são discretas, mas sim variáveis contínuas. Além disso, vamos considerar que existem dois circuitos entre as barras 3 – 5 ao invés de somente um como no caso original. Fazendo estas alterações no caso original de Garver obtemos o sistema representada na figura 2.2, cuja solução ótima discreta, segundo o trabalho de Romero, é a construção de três novos circuitos entre as barras 4 – 6, visto que a adição do segundo circuito entre as barras 3 – 5 já foi considerada.

A estratégia para ilustrar a região de viabilidade para cada um dos modelos descritos anteriormente será fixar o investimento (que agora é uma variável contínua) e resolver o problema obtido quando x é fixo. Note que para todos os modelos apresentados, quando x é conhecido a priori o problema resultante é um problema

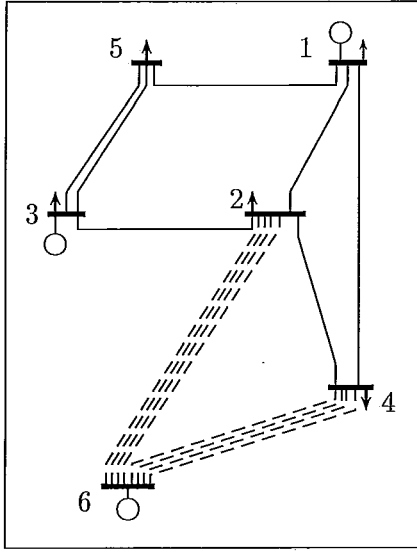


Figura 2.2: Sistema teste de Garver modificado.

de programação linear. Por exemplo, quando utilizamos o modelo não linear, o seguinte problema de programação linear é obtido:

$$\text{Minimize } z_0 = c_0^t r \quad (2.10a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f_0 + S_1^t f_1 + g + r = d \quad (2.10b)$$

$$f_0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (2.10c)$$

$$f_1 - [\hat{x}] [\gamma^1] S_1 \theta = 0 \quad (2.10d)$$

$$-[\hat{x}] \bar{f}^1 \leq f^1 \leq [\hat{x}] \bar{f}^1 \quad (2.10e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (2.10f)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (2.10g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (2.10h)$$

onde \hat{x} representa o plano de expansão para a rede de transmissão.

Para o caso do modelo híbrido basta eliminar o conjunto de restrições que representa a segunda lei de Kirchoff nos circuitos candidatos, (2.10d). No caso do modelo de transportes, além de eliminar as restrições (2.10d), é necessário ainda remover o conjunto de restrições (2.10c), que representam a segunda lei de Kirchoff nos circuitos da rede existente. Já no caso do modelo linear (0 – 1) disjuntivo, devemos

substituir as restrições (2.10d), pelas restrições disjuntivas, (2.7d) e (2.7e), que para $x = \hat{x}$ ficam,

$$f^1 - [\gamma^1]S_1\theta \leq \mathcal{M}(1 - \hat{x}) \quad (2.11a)$$

$$f^1 - [\gamma^1]S_1\theta \geq -\mathcal{M}(1 - \hat{x}) \quad (2.11b)$$

O resultado do programa linear obtido quando x está fixado em um determinado valor será utilizado para ilustrar a região de viabilidade do problema, que será obtida variando o valor fixado da variável x para os dois circuitos candidatos (2 – 6 e 4 – 6) desde o valor 0 (nenhum circuito adicionado) até o valor 4 (adição de quatro circuitos em paralelo). O passo de variação para cada um dos dois circuitos candidatos é de 0.05. O custo de operação (ou custo do corte de carga) é, $c_O = 1.0$.

Nos casos dos modelos não linear, híbrido e de transportes, calcular o custo de operação e o custo total é simples e direto, ou seja, basta substituir x pelo valor do investimento e resolver o problema linear resultante. Isto ocorre porque, para estes casos, o investimento pode ser modelado por uma variável inteira, ao invés de uma variável (0 – 1). No caso do modelo linear disjuntivo é necessário modelar quatro circuitos candidatos separadamente (em paralelo) e fazer com que eles sejam construídos segundo uma ordem pré-estabelecida.

As figuras 2.3 e 2.4, na seqüência, ilustram, em duas diferentes vistas, como fica o custo de operação mínimo no sistema teste de Garver modificado em relação aos investimentos nos circuitos candidatos 2 – 6 e 4 – 6 quando utilizamos o modelo não linear para formulação do problema.

Inicialmente, podemos observar a presença de não linearidades severas. Na figura 2.3, por exemplo, pode-se ver que o sistema modificado de Garver é viável quando consideramos a adição de 3 circuitos candidatos 4 – 6 e nenhuma adição no caminho 2 – 6. Entretanto, se considerarmos a adição de um “delta” do circuito candidato 2 – 6 em conjunto com os 3 circuitos candidatos 4 – 6, o sistema resultante não é mais viável. Não convexidades deste tipo trazem grandes dificuldades para métodos de planos de cortes (tais como o método de decomposição de Benders) visto que os planos gerados (cortes de Benders) podem, eventualmente, cortar partes da região viável, eliminando a solução ótima.

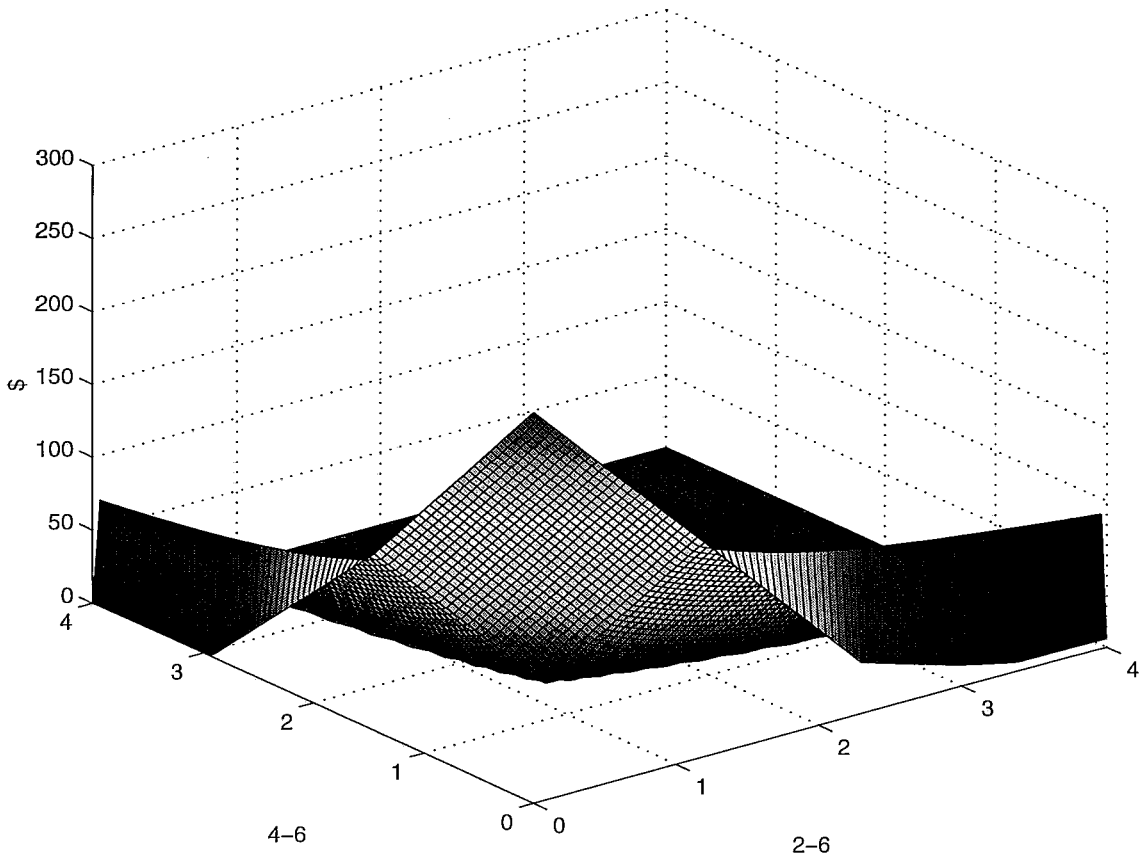


Figura 2.3: Custo de operação \times investimento – Modelo não linear – Vista 1.

Note também que se forem realizados investimentos somente no caminho 2 – 6 não obtemos um plano de expansão viável (com corte de carga nulo). Situação contrária é obtida quando são considerados investimentos apenas no caminho 4 – 6, inclusive a solução ótima discreta para este sistema é a construção de mais três circuitos no caminho 4 – 6, visto que a adição do circuito 3 – 5 já foi considerada.

Nas figuras 2.5 e 2.6 ilustram a variação do custo total (função objetivo do problema (2.5) em função dos investimentos nos circuitos 2 – 6 e 4 – 6.

A solução ótima contínua é obtida quando se constrói 1.2 do circuito 2 – 6 e 1.45 do circuito 4 – 6 com custo total igual a \$99.50, já computando o custo da construção do circuito 3 – 5 (de \$20.0), o qual foi suposto ser um circuito existente neste exemplo.

Utilizando o mesmo procedimento quando o modelo linear (0 – 1) disjuntivo é utilizado para representar o problema de planejamento da expansão de redes de

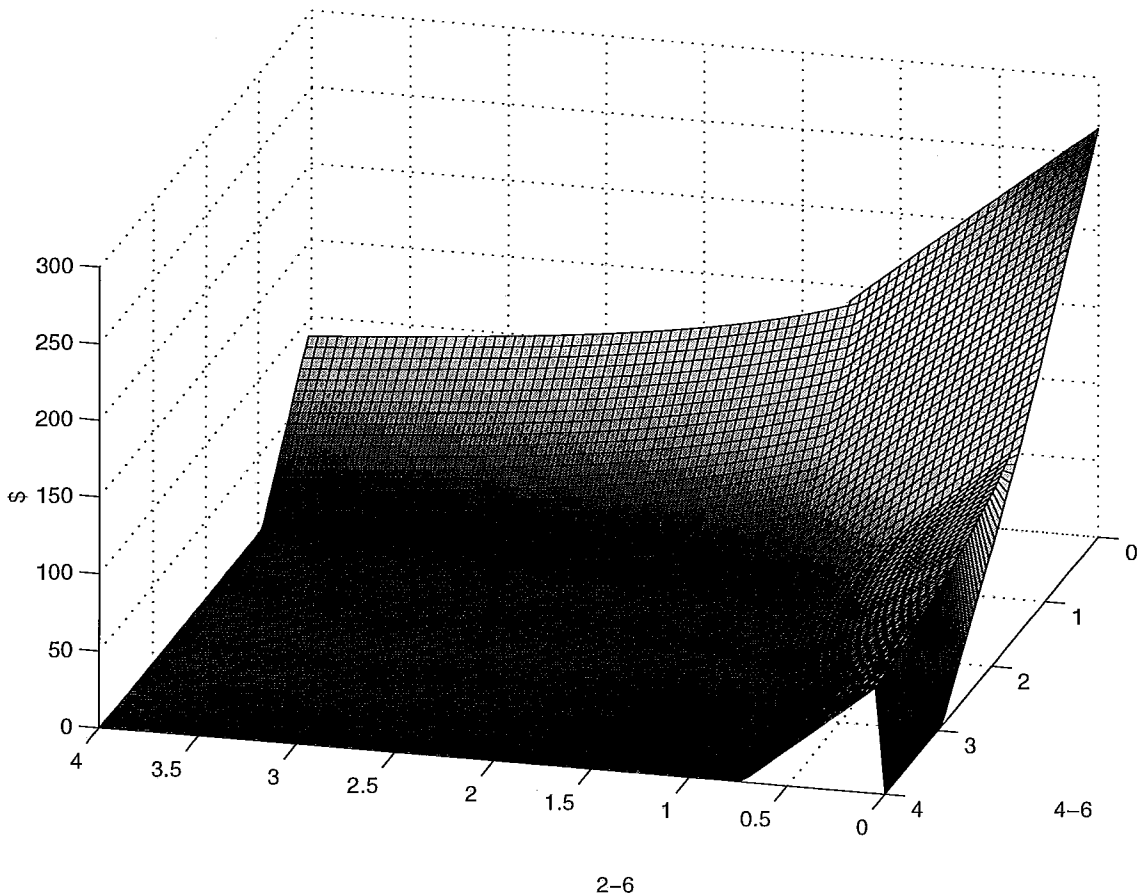


Figura 2.4: Custo de operação \times investimento – Modelo não linear – Vista 2.

transmissão, obtemos as figuras 2.7 e 2.8. O valor utilizado para a constante de disjunção no modelo linear disjuntivo, \mathcal{M} é constante para todos os circuitos da rede candidata e igual a 1000.0. Este valor já é grande o suficiente para garantir que nenhuma das restrições disjuntivas estarão no limite para circuitos candidatos que não forem adicionados à rede elétrica na solução ótima.

Note que o aspecto da região é completamente diferente do caso com a formulação não linear. Observe que as não linearidades que existiam no modelo anterior foram removidas, por exemplo veja na figura 2.8 que quando consideramos a adição de 3 circuitos candidatos entre as barras 4 – 6 o sistema é viável e, continua sendo viável ao adicionarmos um “delta” do circuito candidato 2 – 6, ao contrário do caso do modelo não linear.

Observa-se também que quando as variáveis de investimento 2 – 6 e 4 – 6 assumem valores discretos, existem “dentes” que podem ser confundidos com outras

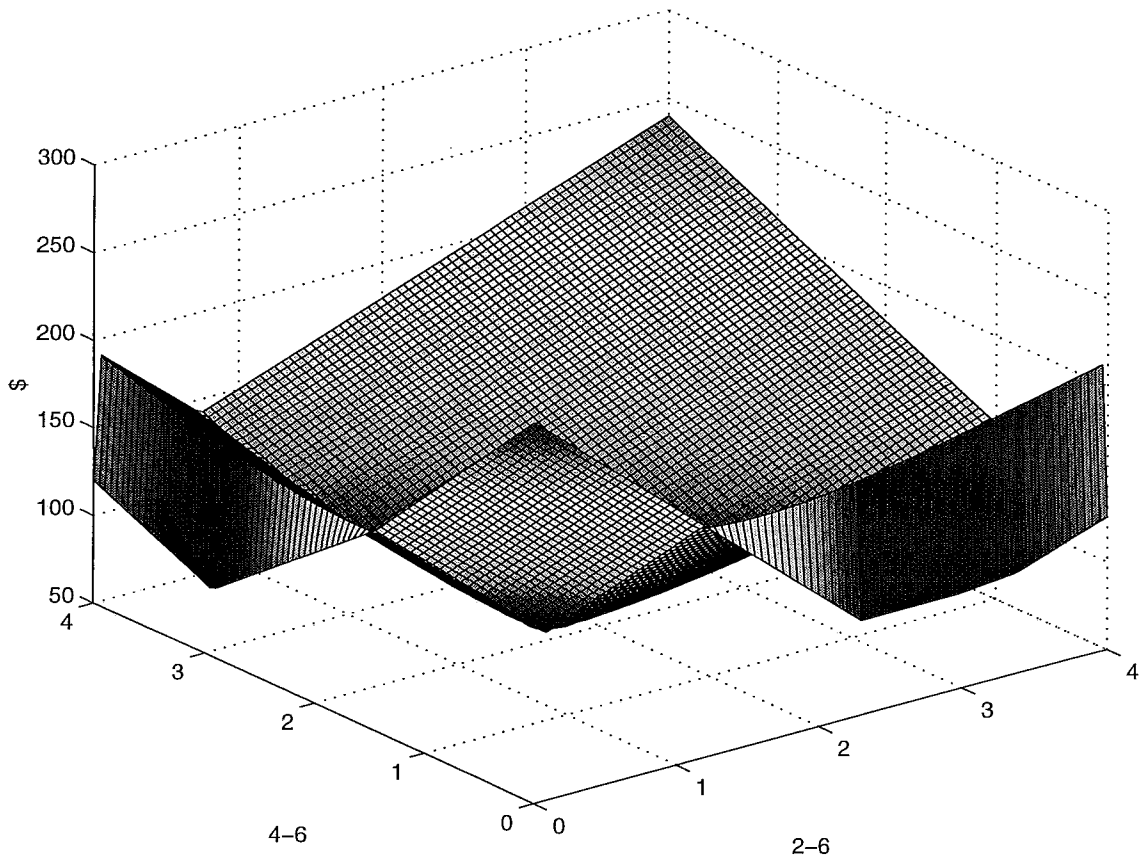


Figura 2.5: Custo total \times investimento – Modelo não linear – Vista 1.

não linearidades. Contudo, o modelo linear (0 – 1) disjuntivo é válido somente para valores discretos restritos ao intervalo $[0, 1]$. No caso deste exemplo teríamos, para este modelo, não somente 2 mas sim 8 variáveis e nesta dimensão a região de viabilidade seria completamente linear. A representação da região de viabilidade da relaxação contínua do modelo linear (0 – 1) disjuntivo foi realizada somente com o objetivo de ilustrar as diferenças e semelhanças marcantes, que pode ser facilmente identificadas nas figuras, deste modelo em relação ao não linear apresentado anteriormente e, como veremos na seqüência, aos modelos híbrido e de transportes.

É interessante observar também que, analisando somente os pontos em que os investimentos assumem valores discretos (0, 1, 2 etc.) o valor do custo de operação é exatamente o mesmo, visto que os dois modelos são equivalentes quando x assume valores (0 – 1).

Finalmente, as figuras 2.9 e 2.10 ilustram o comportamento do custo total de

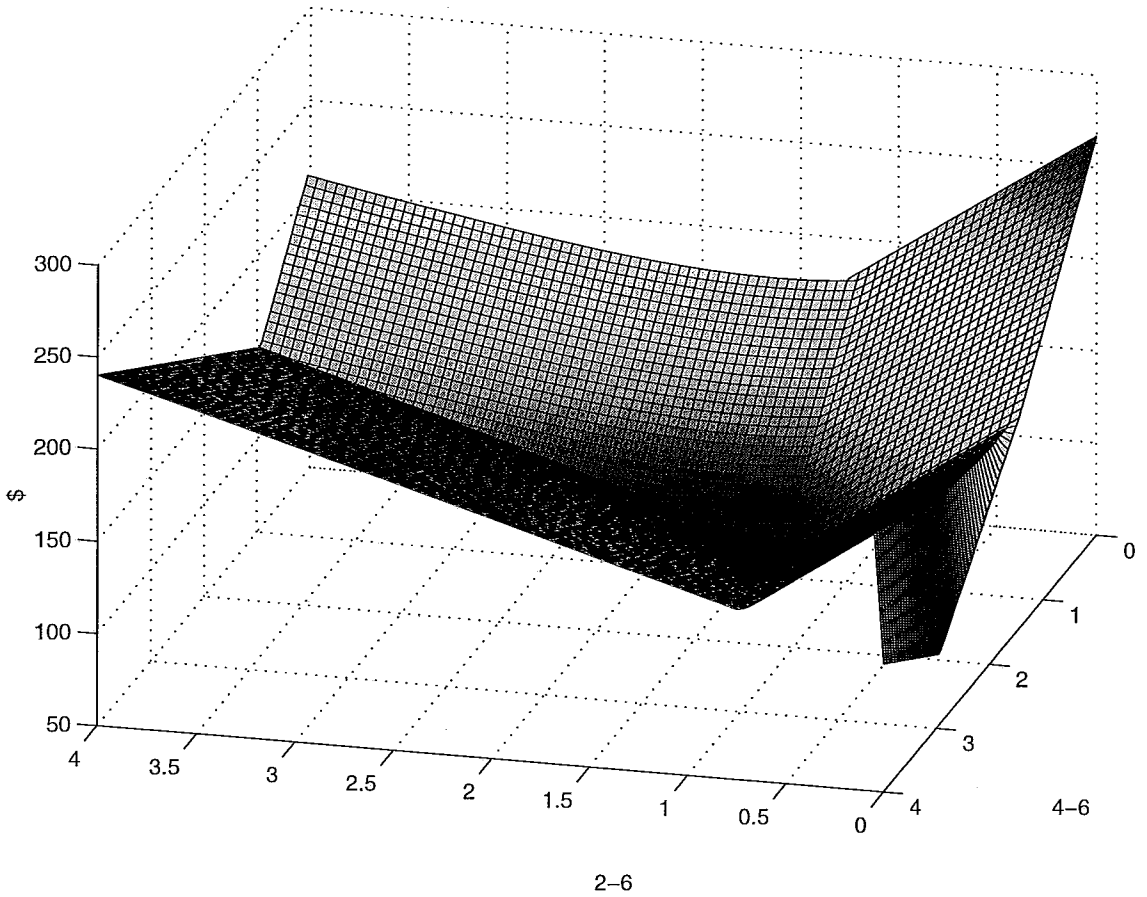


Figura 2.6: Custo total \times investimento – Modelo não linear – Vista 2.

investimento quando o modelo disjuntivo é considerado.

A solução ótima, quando é permitido que os investimentos sejam contínuos é dada por $x_{26} = 1.20$ e $x_{46} = 1.45$ com custo igual a \$99.5. É interessante observar que a solução ótima contínua para o modelo linear disjuntivo é igual à solução do modelo não linear. Entretanto, não existe nenhuma razão para que isto venha a acontecer sendo somente uma coincidência.

As curvas 2.11 e 2.12 ilustram respectivamente a variação do custo de operação e do custo total (investimento e operação) quando utilizamos o modelo híbrido para representar o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.

Note que o modelo híbrido é bastante semelhante ao modelo linear disjuntivo. Mais especificamente, note que o modelo híbrido somente difere do modelo linear disjuntivo nos pontos onde o investimento é igual a (0–1). Isto é um comportamento

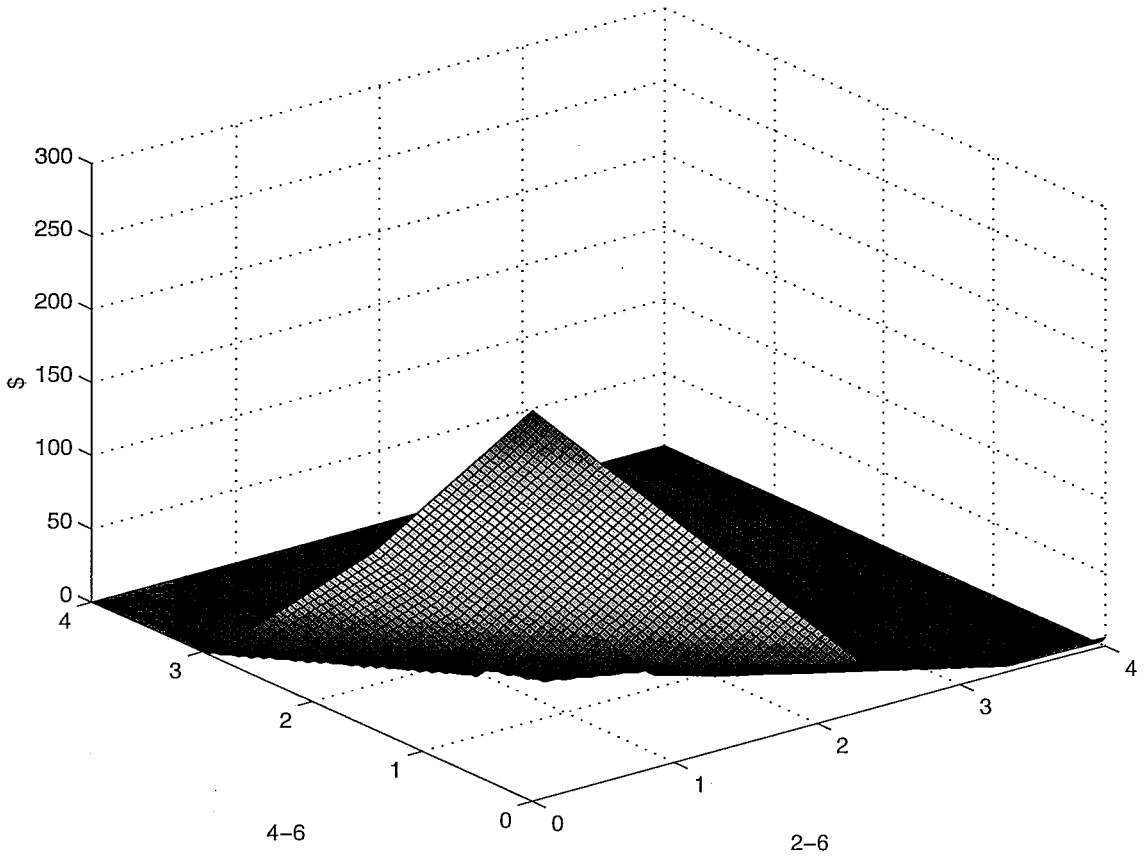


Figura 2.7: Custo de operação \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 1.

esperado já que quando $x_{ij} \neq 1$ as restrições disjuntivas para representação da segunda lei de Kirchoff estão livres, ou seja, estão relaxadas, da mesma forma que no modelo híbrido.

Utilizando o modelo de transporte e o mesmo procedimento descrito anteriormente obtemos as curvas das figuras 2.13 e 2.14 representando a variação do custo de operação e do custo total em função dos investimentos nos circuitos candidatos 2 – 6 e 4 – 6.

Note que a curva para o custo de operação é uma envoltória para a mesma curva obtida para os modelos híbrido e modelo linear disjuntivo. Isto ocorre porque o modelo de transportes é uma relaxação do modelo híbrido que, por sua vez, é também uma relaxação do modelo linear disjuntivo.

Com relação ao custo total, vale a pena ilustrar que a solução ótima contínua para o modelo de transportes também tem custo igual a \$99.5 mas com várias

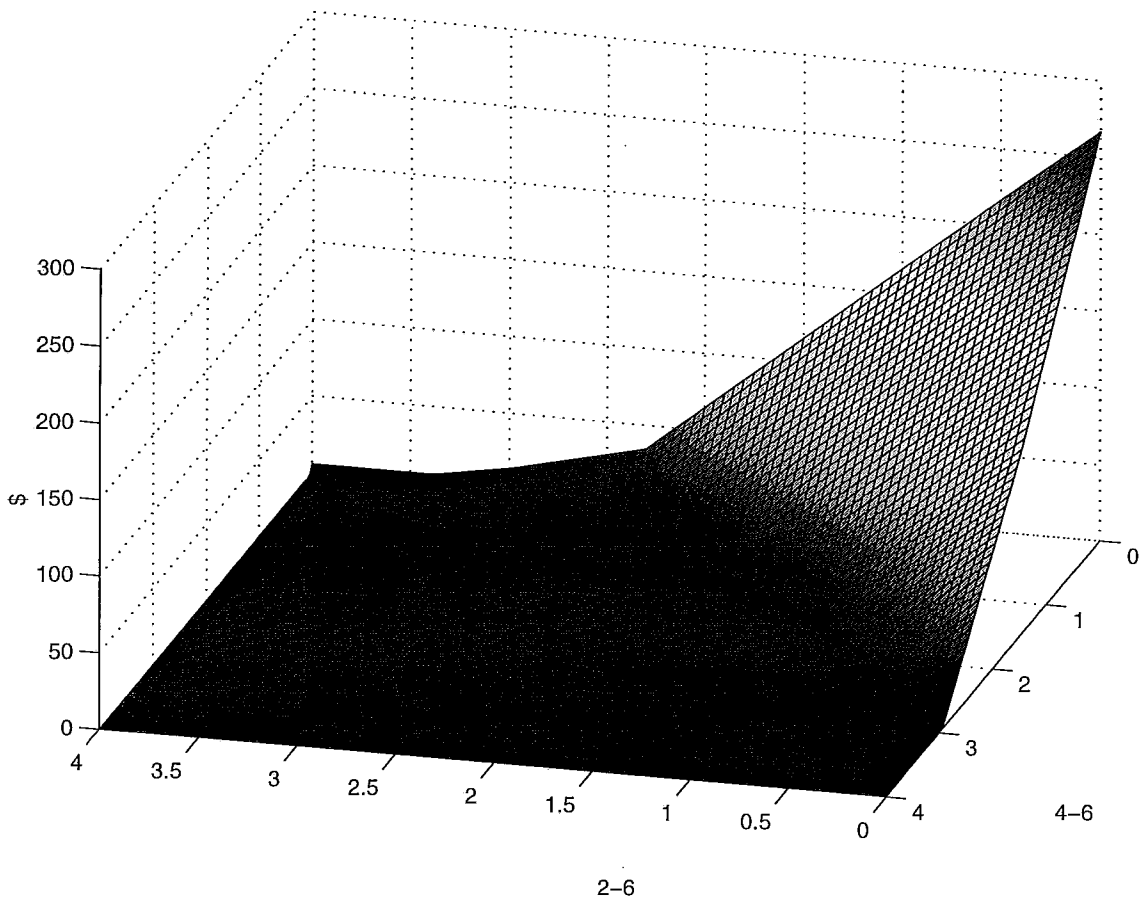


Figura 2.8: Custo de operação \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 2.

soluções, por exemplo $x_{26} = 0$, $x_{46} = 2.65$ como também a mesma solução obtida anteriormente, $x_{26} = 1.2$, $x_{46} = 1.45$.

2.3 Conclusões

Neste capítulo apresentamos as formulações conhecidas para representar o problema de expansão de redes de transmissão. Além disso, discutimos com base em um exemplo utilizando o sistema teste de Garver modificado, representado na figura 2.2, a forma para a região de de viabilidade associada a cada uma das formulações, ilustrando algumas equivalências e diferenças entre elas.

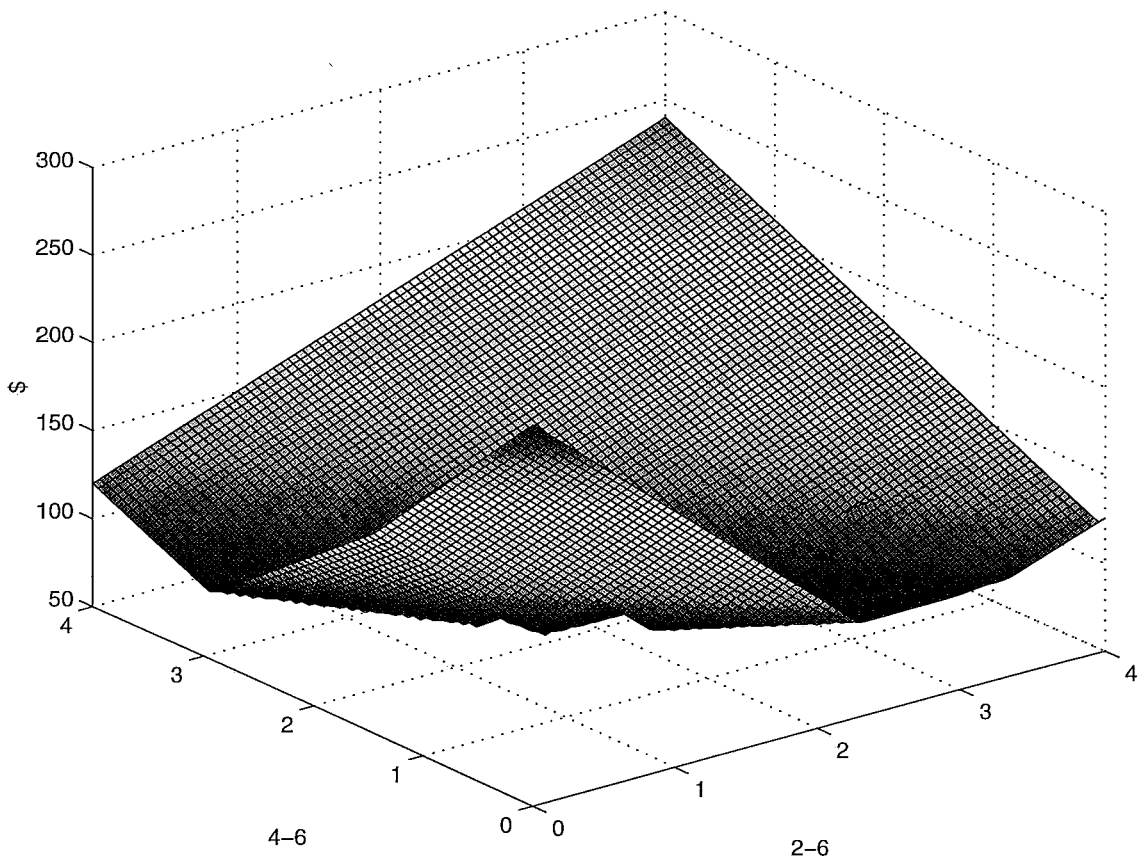


Figura 2.9: Custo total \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 1.

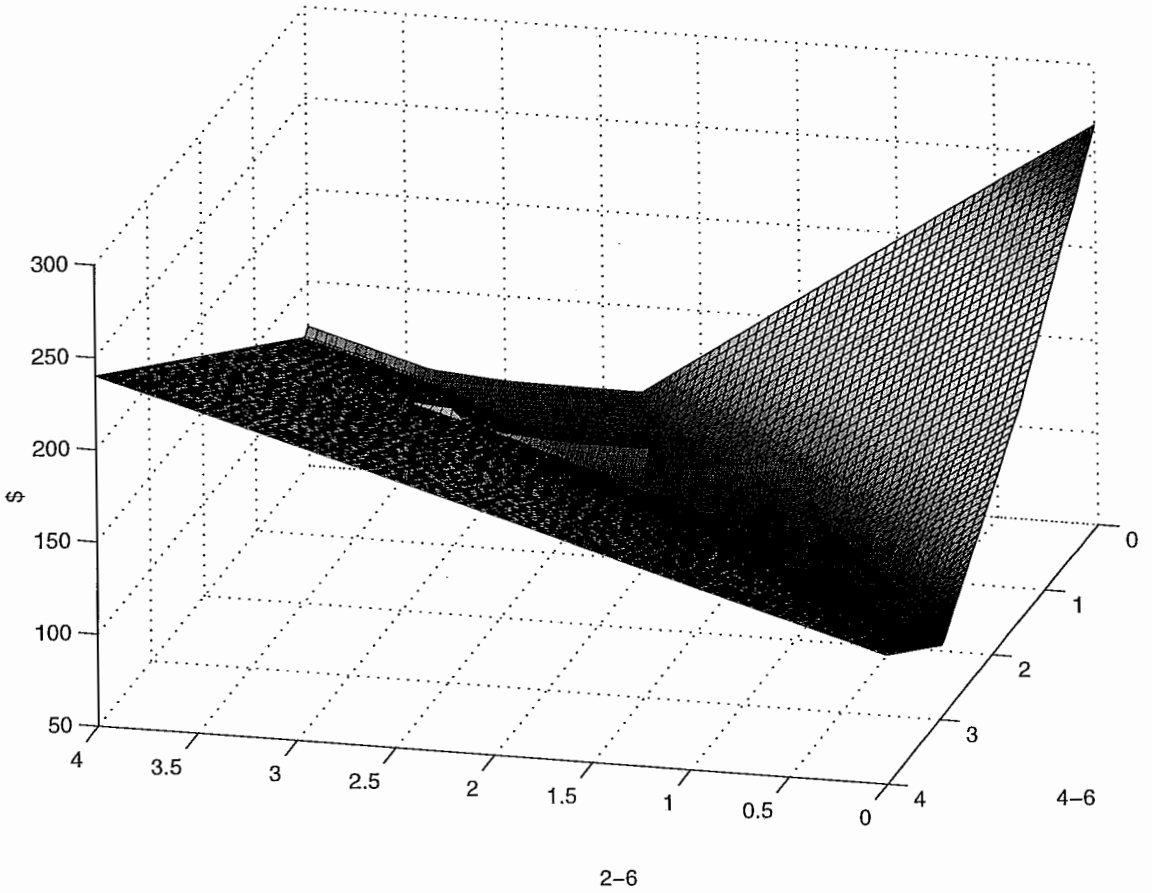


Figura 2.10: Custo total \times investimento – Modelo linear disjuntivo – Vista 2.

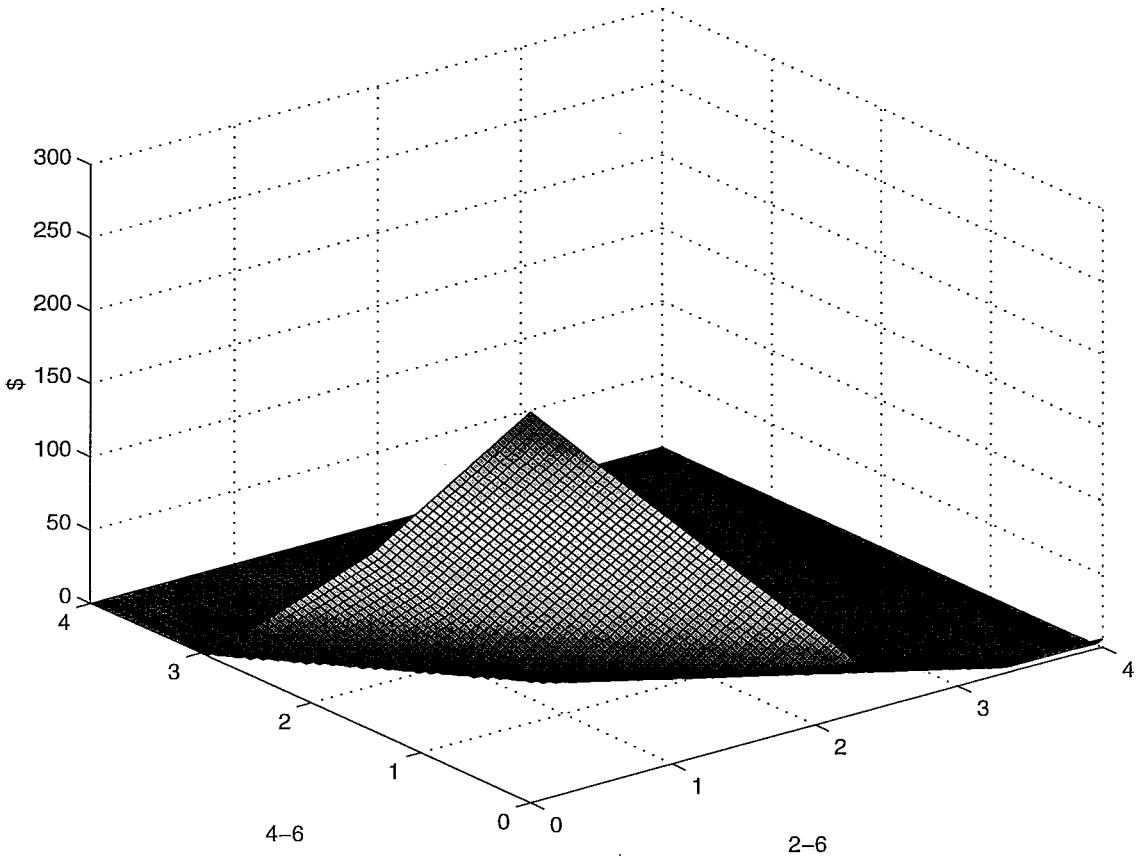


Figura 2.11: Custo de Operação \times investimento – Modelo híbrido.

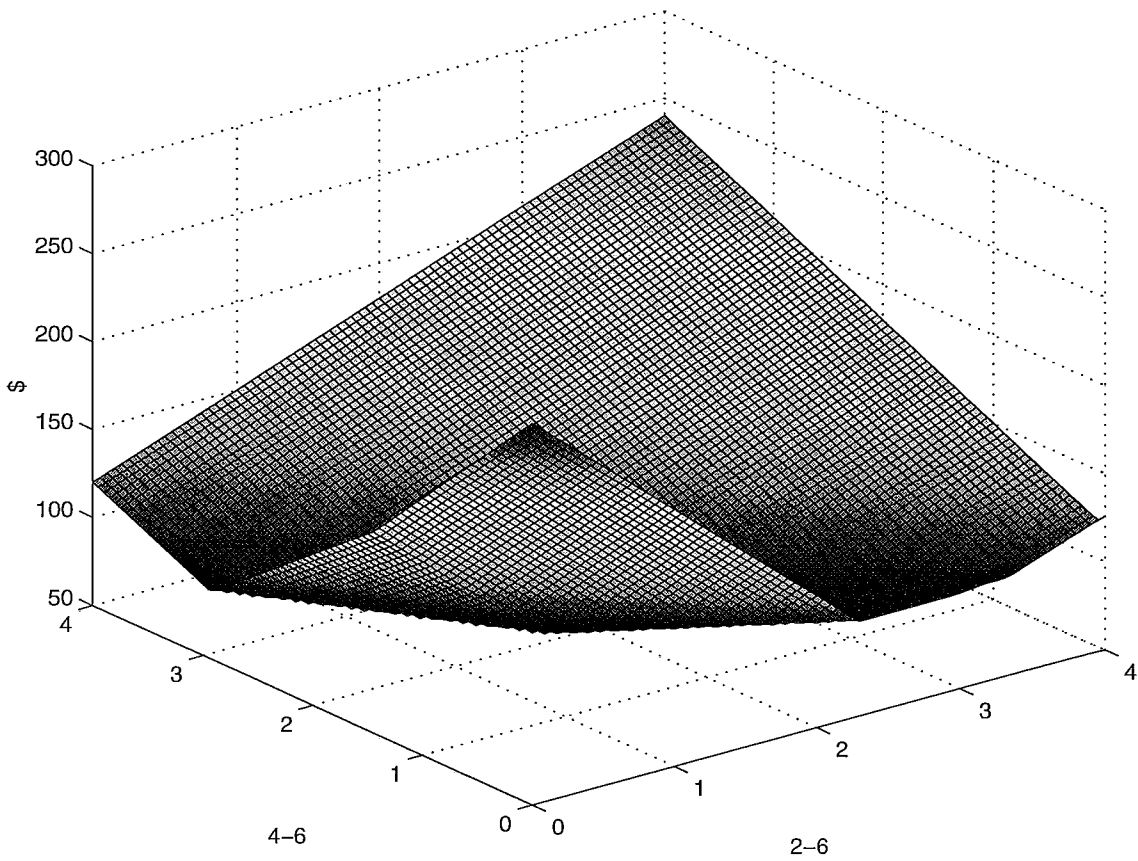


Figura 2.12: Custo total \times investimento – Modelo híbrido.

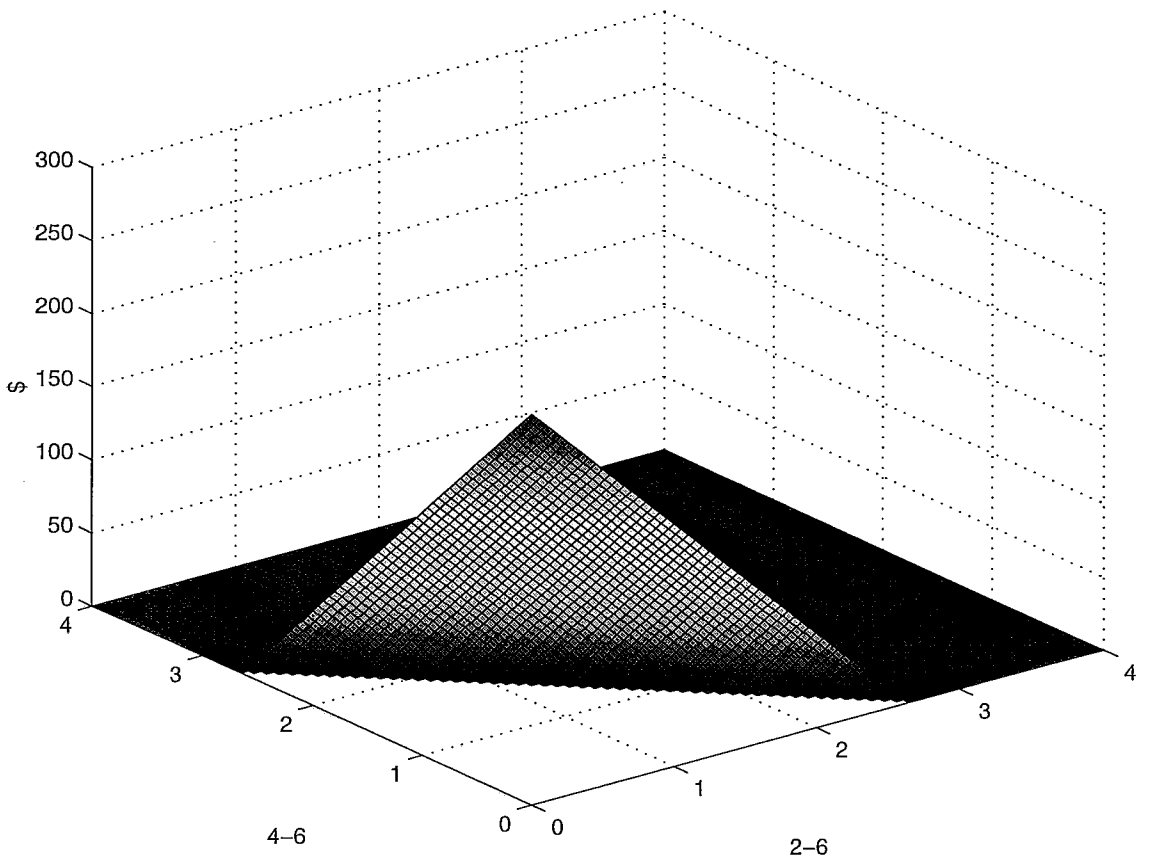


Figura 2.13: Custo de Operação \times investimento – Modelo de transporte.

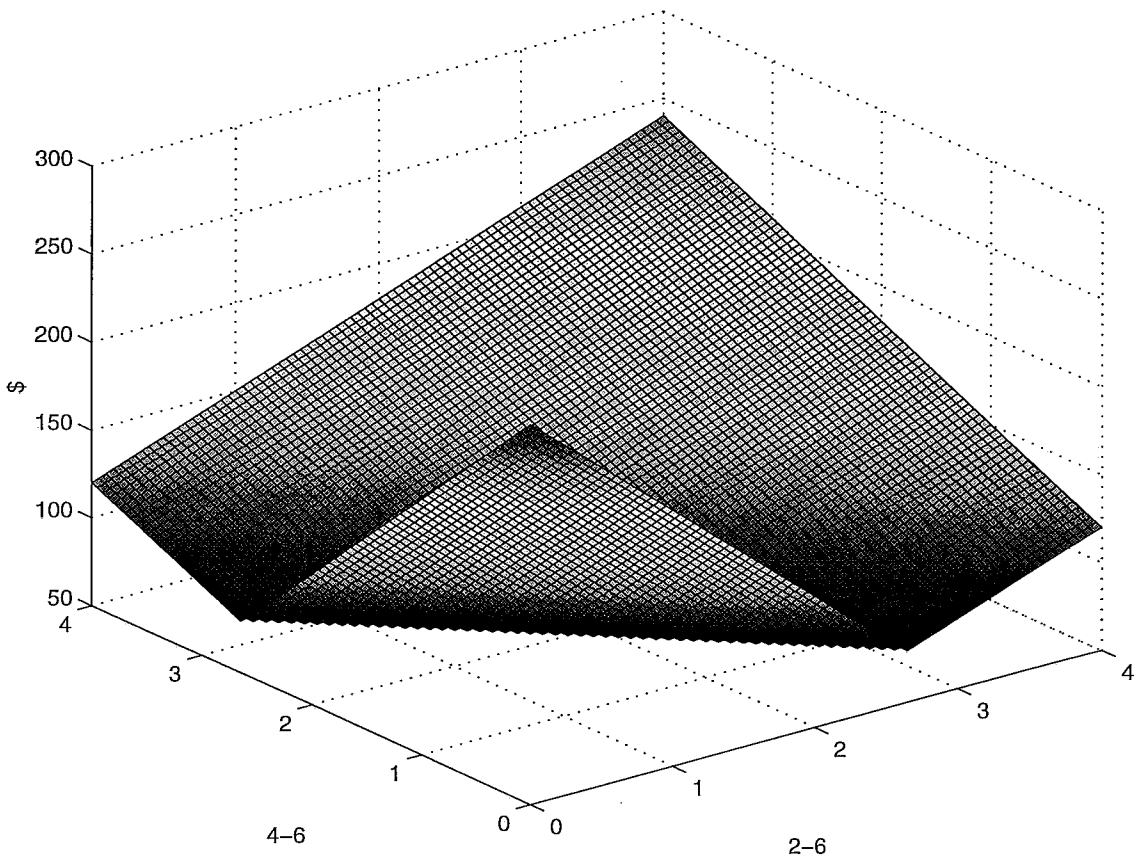


Figura 2.14: Custo total \times investimento – Modelo de transporte.

CAPÍTULO 3

DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

3.1 Introdução

O principal objetivo para a concepção de técnicas de decomposição matemática é conseguir resolver problemas “muito complicados”, ou muito grandes, através da solução repetida de uma série de problemas mais fáceis, ou menores. Um exemplo é a decomposição de Benders [7], na qual um problema de programação linear inteira mista é decomposto em uma série de subproblemas menores, um denominado de *Mestre* (um problema de programação linear inteira mista), e outro chamado de *Escravo* (um problema de programação linear).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: a seguir vamos ilustrar a dedução do modelo de decomposição de Benders. O objetivo de tal dedução é fornecer o suporte teórico necessário para a introdução de um novo conceito relacionados à solução do problema *Mestre* da decomposição de Benders que possibilita ganhos substanciais (tempo de processamento) na utilização deste método para solução de problema de programação linear inteira mista. Finalmente, a seção 3.4 resume algumas das conclusões apresentadas neste capítulo.

3.2 Decomposição de Benders - Dedução Teórica

A teoria de decomposição de Benders é um tópico que já foi bastante estudado pela comunidade científica. Vários são os artigos, tutoriais e capítulos de livros sobre este assunto, entre diversas referências posso citar por exemplo [42, 71, 51, 67, 53, 6]

Nesta tese vamos seguir a apresentação da decomposição de Benders utilizada no livro [49].

Para ilustrar a decomposição de Benders considere o seguinte problema de programação linear (0 – 1) mista:

$$\text{Minimize } z = c^t x + d^t y \quad (3.1a)$$

sujeito a :

$$Ax \geq b \quad (3.1b)$$

$$Ex + Fy \geq h \quad (3.1c)$$

$$x \in \{0, 1\}^n, y \geq 0, \quad (3.1d)$$

onde x e c são vetores em n e, y e d vetores em s . As matrizes A , E , e F têm dimensão (m,n) , (p,n) , e (p,s) , respectivamente, e b e h são vetores em m e p .

Definindo um conjunto S como sendo:

$$S = \{x \mid Ax \geq b; x \in \{0, 1\}^n\}, \quad (3.2)$$

podemos reescrever o problema (3.1) como:

$$\text{Minimize } z = c^t x + d^t y \quad (3.3a)$$

$$\text{sujeito a : } Ex + Fy \geq h$$

$$x \in S, y \geq 0, \quad (3.3b)$$

que é a forma utilizada na grande maioria dos trabalhos da literatura onde o método de decomposição de Benders é descrito.

A idéia do princípio de decomposição (Benders) consiste em tentar resolver o problema em duas etapas, ou seja: fixe um valor para as variáveis x e resolva o problema linear resultante para obter y . Melhore o valor para as variáveis x etc. É claro que, somente valores de x para os quais existe y satisfazendo as restrições devem ser considerados, ou seja: x deve pertencer ao conjunto:

$$\mathcal{R} = \{x \mid \exists y \geq 0 \mid Fy \geq h - Ex; x \in S\}. \quad (3.4)$$

Valores de x que pertencem ao conjunto \mathcal{R} são denominados de *valores viáveis para x* . Se o conjunto \mathcal{R} é vazio, então o problema (3.1) é inviável, pois $\nexists y \mid Fy \geq (h - Ex)$ para $\forall x \mid x \in S$.

Para formular um conjunto explícito de restrições que determinam o conjunto \mathcal{R} , utilizamos o Lema de Farkas:

Lema 3.1 (Lemma de Farkas) *Existe um vetor $x \geq 0$ satisfazendo $Bx = a \Leftrightarrow a^t u \geq 0 \forall u \mid B^t u \geq 0$.*

PROVA. Ver demonstração em [49]. ■

O sistema de equações associado a (3.4) quando x está fixo pode ser escrito como:

$$Fy - s = h - Ex \quad (3.5)$$

$$y, s \geq 0, \quad (3.6)$$

onde, s é um vetor de variáveis de folga para transformar as restrições de desigualdade (3.1c) em restrições de igualdade.

Aplicando o Lema 3.1 ao sistema anterior verifica-se que o sistema tem solução para um dado x se, e somente se:

$$(h - Ex)^t u_1 \geq 0,$$

para todo u_1 satisfazendo:

$$F^t u_1 \geq 0, u_1 \leq 0.$$

Fazendo:

$$\lambda = -u_1,$$

podemos escrever que:

$$F^t \lambda \leq 0, \lambda \geq 0, \quad (3.7)$$

e que:

$$(h - Ex)^t \lambda \leq 0. \quad (3.8)$$

Note que o cone definido por:

$$\mathcal{C} = \{\lambda \mid F^t \lambda \leq 0 \text{ e } \lambda \geq 0\}, \quad (3.9)$$

é poliédrico, ou seja, tem um número finito de geradores. Portanto, existem vetores $\lambda_i^c; i = 1, \dots, n^c$; tal que qualquer elemento $\lambda \in \mathcal{C}$ pode ser escrito por:

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n^c} \alpha_i \lambda_i^c \right); \alpha_i \geq 0. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.8) temos que:

$$\sum_{i=1}^{n^c} \alpha_i [(h - Ex)^t \lambda_i^c] \leq 0, \quad (3.11)$$

que somente é válido para $\alpha_i \geq 0$ se, e somente se:

$$(h - Ex)^t \lambda_i^c \leq 0 \quad i = 1, \dots, n^c. \quad (3.12)$$

Portanto, o vetor x será viável se, e somente se, x satisfaz o sistema finito de restrições dado por (3.12). O conjunto \mathcal{R} , definido em (3.4), pode, então, ser redefinido para:

$$\mathcal{R} = \{x \mid (h - Ex)^t \lambda_i^c \leq 0, i = 1, \dots, n^c; ex \in S\}. \quad (3.13)$$

O problema (3.1) pode ser re-escrito como:

$$\min_{x \in \mathcal{R}} \left\{ c^t x + \min \left\{ d^t y \mid Fy \geq h - Ex, y \geq 0 \right\} \right\}, \quad (3.14)$$

o qual corresponde a percepção inicial de que ele pode ser resolvido por um algoritmo de dois estágios. Para um x fixo, o problema interno de minimização de (3.14) é:

$$\text{Minimize } d^t y \quad (3.15a)$$

sujeito a :

$$Fy \geq h - Ex \quad (3.15b)$$

$$y \geq 0, \quad (3.15c)$$

e o problema Dual deste é:

$$\text{Maximize } (h - Ex)^t \lambda \quad (3.16a)$$

sujeito a :

$$F^t \lambda \leq d \quad (3.16b)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (3.16c)$$

Da teoria da dualidade em programação linear sabe-se que o valor dos problemas (3.15) e (3.16) se equivalem na solução ótima, ou seja:

$$d^t \bar{y} = (h - Ex)^t \bar{\lambda},$$

onde, \bar{y} e $\bar{\lambda}$ são as soluções ótimas para os problemas Primal e Dual, respectivamente. Substituindo o problema dual em (3.14) obtém-se:

$$\min_{x \in \mathcal{R}} \left\{ c^t x + \max \left\{ (h - Ex)^t \lambda \mid F^t \lambda \leq d, \lambda \geq 0 \right\} \right\}. \quad (3.17)$$

Note que as restrições do problema Dual (3.16) definem um conjunto poliédrico

$$\mathcal{P} = \left\{ \lambda \mid \begin{array}{l} F^t \lambda \leq d \\ \lambda \geq 0 \end{array} \right\}, \quad (3.18)$$

que é independente do valor de x e que λ_i^c , conforme definido em (3.10), são as arestas. Além disso, o número de vértices deste conjunto é finito: $\lambda_i^p, i = 1, \dots, n^p$.

Assumindo que o problema (3.1) é viável e que \mathcal{P} é limitado, então o problema (3.17) é equivalente a:

$$\min_{x \in \mathcal{R}} \left\{ c^t x + \max_{i=1, \dots, n^p} \{ (h - Ex)^t \lambda_i^p \} \right\}, \quad (3.19)$$

que, por outro lado, é equivalente ao seguinte problema de programação linear (0–1) mista:

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (3.20a)$$

sujeito a :

$$\alpha \geq (h - Ex)^t \lambda_i^p, i = 1, \dots, n^p \quad (3.20b)$$

$$x \in \mathcal{R}. \quad (3.20c)$$

Ainda, utilizando a caracterização do conjunto \mathcal{R} dada em (3.13), o problema (3.20a) é equivalente a:

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (3.21a)$$

sujeito a :

$$\alpha \geq (h - Ex)^t \lambda_i^p, i = 1, \dots, n^p \quad (3.21b)$$

$$(h - Ex)^t \lambda_i^c \leq 0, i = 1, \dots, n^c \quad (3.21c)$$

$$x \in S. \quad (3.21d)$$

Definindo G o conjunto de restrições do problema (3.21):

$$G = \left\{ (x, \alpha) \mid \left[\begin{array}{l} \alpha \geq (h - Ex)^t \lambda_i^P, i = 1, \dots, n^P \\ (h - Ex)^t \lambda_i^C \leq 0, i = 1, \dots, n^C \\ x \in S, \end{array} \right] \right\} \quad (3.22)$$

o problema (3.21) pode ser reescrito como:

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (3.23a)$$

sujeito a :

$$(x, \alpha) \text{ in } G \quad (3.23b)$$

A seguir, apresentaremos o algoritmo de decomposição de Benders [7].

3.2.1 O Algoritmo de Decomposição de Benders

Para desenvolvermos o algoritmo de Benders em detalhe algumas suposições e lemas são necessários:

Suposição 3.1 *O conjunto S , definido em (3.2), é fechado e limitado.*

Esta suposição é verdadeira para a grande maioria das aplicações práticas. Caso contrário, a maneira de contornar é incluir limites superiores e inferiores fictícios para as variáveis x , os quais devem ser grandes o suficiente para não estarem ativos na solução ótima. No nosso caso, como estamos formulando o problema de expansão de redes de transmissão como um problema de programação (0 – 1), esta suposição pode ser facilmente obtida adicionando limites,

$$0 \leq x_i \leq 1, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

para todas as variáveis x .

O seguinte lema é necessário para futuros desenvolvimentos:

Lema 3.2 *Considerando a suposição 3.1, se o problema (3.21) é viável, então $c^t x + \alpha$ não tem limite inferior finito em G se, e somente se, \mathcal{P} , dado por (3.18), for vazio.*

PROVA. Veja referência [49] ■

Considere, agora, uma versão modificada (relaxada) para o problema (3.21), no qual somente um subconjunto das restrições que definem o conjunto G estão incluídas.

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (3.24a)$$

sujeito a :

$$\alpha \geq (h - Ex)^t \lambda_i^P, i = 1, \dots, n^P \quad (3.24b)$$

$$(h - Ex)^t \lambda_i^C \leq 0, i = 1, \dots, n^C \quad (3.24c)$$

$$x \in S \quad (3.24d)$$

onde n^P e n^C definem um subconjunto para as restrições do problema completo (3.21).

Faça ainda G' representar o subconjunto das restrições do problema relaxado (3.24), de tal forma que pode-se dizer que:

$$G' \supseteq G \quad (3.25)$$

ou seja, a solução ótima para o problema (3.24) será também a solução ótima do problema (3.21) se, e somente se, pertencer ao conjunto G . Da mesma forma, seja (x^*, α^*) a solução ótima para o problema relaxado (3.24), esta também será a solução ótima para o problema (3.21) se, e somente se, (x^*, α^*) satisfaz,

$$\alpha^* \geq (h - Ex^*)^t \lambda_i^P, i = 1, \dots, n^P \quad (3.26a)$$

$$(h - Ex^*)^t \lambda_i^C \leq 0, i = 1, \dots, n^C \quad (3.26b)$$

$$x^* \in S. \quad (3.26c)$$

Entretanto, todas as restrições que definem o conjunto G , descritas acima, não estão disponíveis, explicitamente. Então, vamos considerar agora como encontrar a restrição mais violada de (3.26a) ou uma restrição do conjunto restrição (3.26b) que não seja atendida. Ela será dada por:

$$\max_{1 \leq i \leq n^{\mathcal{P}}} \{((h - Ex^*)^t \lambda_i^{\mathcal{P}})\}, \quad (3.27)$$

que é equivalente a:

$$\text{Maximize}(h - Ex^*)^t \lambda^{\mathcal{P}} \quad (3.28a)$$

sujeito a :

$$\lambda^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}, \quad (3.28b)$$

que é, exatamente, o problema dual (3.16), quando se considerando $x = x^*$. Dado que α^* é finito (por suposição) e que,

$$\min\{\alpha \mid (x, \alpha) \in G\} \geq \alpha^* \quad (3.29)$$

então pelo Lema 3.2, \mathcal{P} é não vazio. Portanto, o problema ou tem solução ótima finita ou é ilimitado. No caso de o problema ser ilimitado, a função objetivo tende para ∞ pela aresta, $\lambda_i^{\mathcal{P}} + \beta \lambda_i^{\mathcal{C}}$, $\beta \geq 0$. Neste caso:

$$(h - Ex^*)^t \lambda_i^{\mathcal{C}} > 0, \text{ para algum } i. \quad (3.30)$$

Isto implica que, pelo menos, uma restrição do conjunto (3.26b) está violada. Portanto, ambos os conjuntos de restrições (3.26a)– (3.26b) estarão atendidos se, e somente se:

$$\max\{(h - Ex^*)^t \lambda^{\mathcal{P}} \mid \lambda^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}\} \leq \alpha^*. \quad (3.31)$$

Contudo, note que para o conjunto de restrições (3.26a) pelo menos uma restrição deve estar ativa (no limite), caso contrário α poderia ainda ser reduzido. Portanto, se (3.31) é válido, o será como uma igualdade, fazendo com que o seguinte teste de otimalidade possa ser definido:

Teorema 3.1 (Teste de Otimalidade) *A solução ótima (x^*, α^*) do problema relaxado (3.24), é também a solução ótima para o problema completo (3.21) se, e somente se:*

$$\max\{(h - Ex^*)^t \lambda^{\mathcal{P}} \mid \lambda^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}\} = \alpha^*. \quad (3.32)$$

Caso o teste de otimalidade, (3.32), falhe, então alguma restrição do conjunto de restrições (3.26a)– (3.26b) não está sendo atendida. Logo,

$$\max\{(h - Ex^*)^t \lambda^{\mathcal{P}} \mid \lambda^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}\} > \alpha^*,$$

e se o máximo não é obtido em um ponto extremo $\lambda^{\mathcal{P}}$ do poliedro \mathcal{P} , então:

$$(h - Ex^*)^t \lambda^{\mathcal{P}} > \alpha^*.$$

Isto significa, nos termos do problema (3.21), que esta nova restrição, que foi gerada a partir do ponto extremo $\lambda^{\mathcal{P}}$ do poliedro \mathcal{P} , não está sendo satisfeita pela solução do problema relaxado, (x^*, α^*) . Logo, o problema relaxado deve ser redefinido para considerar tal restrição violada e assim por diante.

Se, ao contrário, o problema linear (3.28) é ilimitado, então temos, respectivamente, um ponto extremo e uma aresta de \mathcal{P} , $\lambda^{\mathcal{P}}$, $\lambda^{\mathcal{C}}$ tal que $(b - Ex^*)^t \lambda$ tende para ∞ ao longo do seguinte seguimento de reta:

$$u = \lambda^{\mathcal{P}} + \alpha \lambda^{\mathcal{C}}, \alpha \geq 0.$$

Para isto acontecer, $\lambda^{\mathcal{C}}$ deve ser tal que:

$$(b - Ex^*)^t \lambda^{\mathcal{C}} > 0 \quad (3.33)$$

Logo, um novo corte (restrição) da forma da restrição (3.33) deve ser adicionado ao problema relaxado (3.24).

Convergência Finita do Método de Decomposição de Benders

A convergência finita do método de decomposição de Benders é uma consequência direta do fato de que o número de restrições do problema decomposto é finito.

Teorema 3.2 (Convergência Finita) *O algoritmo de Benders termina em um número finito de iterações ou com a informação de que o problema original (3.1) é inviável ou ilimitado, ou com a solução ótima deste problema.*

PROVA. O problema (3.24) tem um número finito de restrições. Caso o teste de otimalidade não seja satisfeito, uma ou mais restrições serão adicionadas ao problema relaxado (3.24). Portanto, em um número finito de iterações ou o teste de otimalidade será satisfeito, ou o conjunto completo das restrições do problema (3.24) será gerado. Neste caso, o teste de otimalidade será atendido na próxima iteração. ■

Limites e Convergência

Uma característica atraente do método de decomposição de Benders é o fato de se dispor de limites superior e inferior para o valor da solução ótima do problema. Ambos estes limites convergem para o valor ótimo quando a otimalidade é obtida.

Seja $\{(x^k, y^k)\}$ o conjunto de soluções viáveis geradas para o problema completo. Então o limite superior para o valor ótimo da função objetivo é dado por:

$$z_{SUP} = \min_{k=1, \dots, K} c^t x^k + d^t y^k.$$

Por outro lado, o limite inferior surge do fato que novas restrições devem ser, continuamente, adicionadas ao problema *Mestre* (3.24). Portanto, sendo z^k a solução ótima do problema *Mestre* na k -ésima iteração, então podemos dizer que:

$$z^1 \leq \dots \leq z^k \leq z^{k+1}$$

Daí, a partir das equações anteriores, podemos concluir que o conjunto de limites para a k -ésima iteração é dado por:

$$z_{INF} = z^{k-1} \leq \min \{c^t x + \alpha \mid (x, \alpha) \in G'\} \leq z_{SUP} = \min_{j=1, \dots, k-1} c^t x^j + d^t y^j$$

Note que o teste de otimalidade, definido na equação (3.32) significa, simplesmente, que os limites superior e inferior são iguais.

Resumindo, o algoritmo de decomposição de Benders pode ser colocado como ilustrado a seguir.

- 1 **Inicialização:** Faça $\epsilon =$ Tolerância para convergência, $k = 0$.
- 2 **Solução do problema *Mestre*:** O algoritmo de decomposição de Benders inicia com a solução do problema *Mestre*, que é uma versão relaxada do problema completo, representado a seguir:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } z = c^t x + \alpha \\ & \text{sujeito a :} \\ & Ax \geq b \\ & \alpha + \lambda_i^{P^t} E x \geq \lambda_i^{P^t} h, i = 1, \dots, n^{P'} \\ & \lambda_i^{C^t} E x \geq \lambda_i^{C^t} h, i = 1, \dots, n^{C'} \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

Note que nas primeiras iterações, quando não existem cortes de Benders ($n^{P'} = n^{C'} = 0$) ou mesmo quando o número de cortes é pequeno, pode acontecer que o problema *Mestre* (3.34) seja ilimitado. Nestes casos, escolhe-se, arbitrariamente, como solução para o problema *Mestre* uma solução viável qualquer, isto é $\hat{x}^k = \{x \mid Ax \geq b, x \in \{0, 1\}^n\}$.

Faça \hat{x}^k e $\hat{\alpha}^k$ ser a solução para o problema *Mestre* (3.34), e $z_{INF} = c^t \hat{x}^k + \hat{\alpha}^k$ ser o limite inferior para o valor da solução ótima do problema original.

- 3 **Solução do problema *Escravo*:** O problema *Escravo* corresponde ao problema obtido quando $x = \hat{x}^k$, ou seja:

$$\text{Minimize } d^t y \quad (3.35a)$$

sujeito a :

$$Fy \geq h - E\hat{x}^k \quad (3.35b)$$

$$y \geq 0. \quad (3.35c)$$

Resolva o problema Dual do problema *Escravo*, colocado a seguir:

$$\text{Maximize } (h - E\hat{x}^k)^t \lambda \quad (3.36a)$$

sujeito a :

$$F^t \lambda \leq d \quad (3.36b)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (3.36c)$$

Se o problema Dual for inviável então, o problema completo é ilimitado, **pare**. Por outro lado, se o problema Dual for ilimitado o problema Primal será inviável. Então faça \hat{y}^k e $\hat{\lambda}^k$ serem as soluções ótimas Primal e Dual para o seguinte problema,

$$\text{Minimize } e^t s$$

sujeito a :

$$Fy - s \geq h - E\hat{x}^k$$

$$y \geq 0,$$

onde s é um vetor que quantifica as inviabilidades do problema Primal. Vá para 5.

Caso contrário, faça \hat{y}^k e $\hat{\lambda}^k$ serem, respectivamente, as soluções ótimas para os problemas *Escravo* Primal e Dual. Neste caso, atualize o limite superior para o valor da solução ótima do problema original fazendo, $z_{SUP}(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{j=1, \dots, k} \{c^t \hat{x}^j + d^t \hat{y}^j\}$

4 **Teste de otimalidade:** Se $GAP = z_{SUP} - z_{INF} \leq \epsilon$ então, z_{SUP} , \bar{x} e \bar{y} são, respectivamente, o valor e a solução ótima para o problema original.

5 **Corte de Benders:** Se o problema Dual do **passo 3** tem solução ilimitada, então o método calcule um corte de viabilidade da seguinte forma:

$$\lambda^{k^t} Ex \geq \lambda^{k^t} b.$$

Adicione o corte de viabilidade ao problema *Mestre* (3.34).

Caso contrário, calcule um corte de otimalidade da seguinte forma:

$$\alpha + \lambda^{k^t} Ex \geq \lambda^{k^t} h$$

Adicione esta restrição ao problema *Mestre* (3.34).

6 Incremente o contador de iterações, $k = k + 1$, e retorne ao **passo 2**.

3.3 Um Novo Critério para Convergência do Problema *Mestre*

O método de decomposição de Benders ilustrado nas seções anteriores requer, a cada iteração, a solução ótima de um problema de programação inteira para obtenção de um novo limite inferior de custo (problemas de minimização) para o problema que está sendo resolvido. No entanto, esta necessidade pode ser relaxada se não for necessário a obtenção de tal limite inferior.

Geoffrion propôs em [31] uma variante para um método de decomposição de Benders para o problema “Multicommodity Distribution System Design”. Nesta versão o problema *Mestre* ao invés de ser um problema de programação linear inteira mista era um problema linear inteiro misto de viabilidade. A principal motivação para tal variante, segundo o próprio Geoffrion, é que, nas primeiras iterações, o problema *Mestre* tem muito pouca informação a respeito dos custos de transporte. O problema de viabilidade associado ao *Mestre* é:

$$Ache(x, \alpha) \text{ tal que :} \quad (3.38a)$$

$$c^t x + \alpha \leq z_{SUP} - \epsilon \quad (3.38b)$$

$$Ax \geq b \quad (3.38c)$$

$$\alpha \geq (h - Ex)^t \lambda_i^P, i = 1, \dots, n^{P'} \quad (3.38d)$$

$$(h - Ex)^t \lambda_i^C \leq 0, i = 1, \dots, n^{C'} \quad (3.38e)$$

$$x \in \{0, 1\}^n, \quad (3.38f)$$

que, segundo Geoffrion, é mais simples e rápido para ser resolvido do que o problema *Mestre* tradicional.

Comparando o problema de viabilidade de Geoffrion (3.38) com o problema *Mestre* tradicional (3.34), constatamos que os dois problema contém as mesmas restrições, com exceção da restrição (3.38b), que não é representada no problema *Mestre* tradicional. A função desta restrição na heurística de Geoffrion é forçar a solução do problema de viabilidade (3.38) no sentido da otimalidade, isto é, forçando a obtenção sempre de soluções viáveis melhores a cada iteração. Para isto, o lado direito desta restrição (3.38b) deve ser atualizado sempre que um novo limite superior para o valor da função objetivo do problema original, z_{SUP} , for obtido.

A implicação, em termos teóricos desta variante para a decomposição de Benders é que a solução do problema *Mestre*, agora um problema de viabilidade, não é mais um limite inferior, z_{INF} , para o valor da função objetivo do problema original. Isto faz com que o critério de convergência para a decomposição de Benders tenha de ser modificado pois não é mais possível o cálculo do *GAP* de convergência. O critério de convergência da heurística de Geoffrion foi modificado para: pare o processo de decomposição de Benders quando o problema de viabilidade de Geoffrion for inviável, isto é, quando não existe nenhuma solução viável com relação às restrições (3.38c)–(3.38f) com valor para a função objetivo inferior a $z_{SUP} - \epsilon$. Neste caso, a solução ótima para o problema será a última solução viável obtida, isto é, a solução viável de menor valor para a função objetivo.

O grande problema da heurística de Geoffrion é que pode-se perder muito tempo (talvez mais tempo do que aquele economizado ao trocar o problema *Mestre* tradicional pelo problema de viabilidade de Geoffrion) para provar que a última solução

viável é a solução ótima pois, para isto, é necessário a solução de vários problemas de viabilidade mais a solução ótima de um problema de programação linear inteira mista inviável que requer uma enumeração muito grande da árvore de busca.

Nesta tese de doutorado vamos propor um novo procedimento para a solução do problema *Mestre* que é “mais flexível” do que a heurística de Geoffrion. Este procedimento será descrito a seguir.

Teorema 3.3 *A solução do problema Mestre da decomposição de Benders pode parar em uma solução viável se o custo desta solução for menor ou igual ao limite inferior conhecido somado à tolerância de convergência do modelo de decomposição de Benders.*

PROVA. Inicialmente, note que a solução ótima produzida utilizando o método de decomposição de Benders é ϵ -ótima, isto é, seja z^* , x^* e y^* o valor e a solução ϵ -ótima, produzida por um método de Benders, respectivamente, então:

$$z_{INF} \leq z^* = c^t x^* + d^t y^* \leq z_{INF} + \epsilon \quad (3.39)$$

Logo, podemos dizer que todas as soluções viáveis em relação às restrições do problema *Mestre*, cujo valor da função objetivo, $z \in [z_{INF}, z_{INF} + \epsilon)$, isto é z satisfaz o critério de convergência do método de decomposição de Benders são, igualmente, ϵ -ótimas.

Daí, suponha que em uma iteração qualquer, digamos na iteração k , obtemos uma solução viável $z^k \in [z_{INF}, z_{INF} + \epsilon)$ para o problema *Mestre*. É fácil ver que esta solução não produz um novo limite inferior de custo para o problema visto que não é, necessariamente, a solução ótima para o problema *Mestre*. Contudo, podemos parar a solução do problema *Mestre*, dado que esta solução pertence ao intervalo das ϵ -ótimas soluções. ■

A solução z^k será a solução ótima se, e somente se, o critério de convergência da decomposição de Benders for satisfeito, isto é:

$$z_{INF} + \epsilon \geq z_{SUP} \quad (3.40)$$

```

função Geoffrion ( Tol )

1    $\epsilon = \infty$ ;
2   enquanto  $\epsilon \leq Tol$  faça
3     Benders( $\epsilon$ );
4      $\epsilon = \epsilon - Tol$ 
5   fim faça

fim Geoffrion.

```

Figura 3.1: Algoritmo de Geoffrion para problema *Mestre* de viabilidade.

Por outro lado, esta solução viável para o problema *Mestre* será um limite inferior de custo se for a solução ótima para o problema *Mestre*.

A adoção de tal heurística no método de decomposição de Benders para problemas de programação linear inteira mista pode trazer grandes economias no tempo de processamento necessário, visto que para estes problemas, uma grande parte do tempo computacional gasto é utilizado para provar a otimalidade da solução, ou seja, fechar o *GAP* de “integralidade”. No capítulo 7 vamos ilustrar o potencial da aplicação desta heurística para um modelo de decomposição de Benders para o problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão.

É importante ressaltar que se uma pequena modificação for feita na heurística proposta nesta tese, obtemos a heurística de Geoffrion. Para ilustrar esta equivalência considere a seguinte proposição:

Proposição 3.1 *A heurística para solução do problema Mestre de Benders proposta nesta tese, teorema 3.3, é idêntica à heurística de Geoffrion se fizermos uma modificação na tolerância de convergência, conforme descrito no algoritmo ilustrado na figura 3.1, onde Tol é uma tolerância para detecção de zero ou um número muito pequeno.*

PROVA. Vamos dividir a prova em duas etapas:

1. Para a primeira iteração:

Considerando, inicialmente, a primeira iteração se a tolerância de convergência do método de decomposição de Benders é ∞ e conhecemos um limite inferior qualquer para o problema, utilizando o teorema 3.3 é fácil ver que o problema

Mestre pára na primeira solução viável visto que esta solução é uma solução ϵ -ótima para o método de decomposição de Benders.

2. Para uma iteração k qualquer:

Suponha agora que a iteração k está sendo processada. Logo, pelo descrito no algoritmo da proposição 3.1 a tolerância de convergência é igual a $\epsilon^k = \epsilon^{k-1} - Tol$. Logo, a primeira solução viável com custo menor que $\epsilon^{k-1} - Tol$ será uma solução ϵ^k -ótima para o método de decomposição de Benders. No caso da heurística de Geoffrion, o problema *Mestre* pára na primeira solução viável com custo menor do que a restrição (3.38b), que por construção da heurística apresentada na proposição (3.1) é o mesmo ponto, completando a demonstração. ■

3.4 Conclusões

Neste capítulo apresentamos a dedução da teoria do método de decomposição de Benders para problemas de programação linear (0 – 1) mista.

Além disso, propomos um novo critério para parada do problema *Mestre* da decomposição de Benders que, sob certas condições, não requer a prova de otimalidade para um problema de programação linear (0 – 1) mista, proporcionando uma economia considerável no tempo de processamento.

Mostramos que este novo critério de parada para o problema *Mestre* é equivalente à heurística de Geoffrion quando utilizado em uma seqüência de soluções do problema por um método de decomposição de Benders com um ajuste da tolerância de convergência.

Um importante ponto a ser salientado foi colocado por M. Balinski [1], “Já que a sucessão de problemas relaxados (Problema *Mestre*) diferem um do outro pela adição de uma ou duas restrições, um método de planos cortantes para a solução do problema relaxado, tal como o método de Gomory [34] pode ser eficiente”. No capítulo 5 vamos desenvolver um método de decomposição de Benders que utiliza, além dos cortes de Benders, cortes de Gomory para o problema *Mestre* melhorando

a convergência do método de decomposição de Benders para a solução ótima.

CAPÍTULO 4

DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS NO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos ilustrar a aplicação da decomposição de Benders ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão utilizando o modelo linear (0 – 1) disjuntivo. Além disso, vamos ilustrar as principais aplicações já realizadas da decomposição de Benders a este problema.

A primeira vez que Benders foi aplicado para solução deste problema foi na tese de doutorado de M. Pereira, referência [57]. Neste trabalho, o modelo de decomposição de Benders foi aplicado ao modelo clássico, não linear. Seguindo o trabalho desenvolvido nesta tese, M. Pereira e S. Granville, apresentaram em um relatório técnico para a Universidade de Stanford, referência [40], uma análise da aplicação de decomposição de Benders a este problema, apontando as principais dificuldades e possíveis soluções. Neste relatório, o problema da não convexidade do modelo não linear foi extensamente analisado e apontado como uma das principais dificuldades para a aplicação de decomposição de Benders a este problema.

Outra importante referência de decomposição de Benders aplicada para este problema são as teses de mestrado e doutorado de R. Romero, [62, 63]. Nestas, propõe-se, para contornar o problema das não convexidades do modelo não-linear,

o uso de um modelo de decomposição hierárquica, na qual o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão é formulado por três diferentes modelos: o modelo de Transportes (fase ou nível hierárquico I), o modelo híbrido (nível hierárquico II) e o modelo completo (não linear) no nível hierárquico III.

Somente para facilitar a leitura deste capítulo, vamos colocar a formulação para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, já representado pelo problema (2.3).

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (4.1a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.1b)$$

$$(f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta) = 0 \quad (4.1c)$$

$$[x](f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta) = 0 \quad (4.1d)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (4.1e)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (4.1f)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.1g)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.1h)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.1i)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (4.1j)$$

A organização deste capítulo está da seguinte forma: a seção 4.2 apresenta uma breve descrição da aplicação do modelo de decomposição de Benders utilizando o modelo clássico (não-linear). A seção 4.3 ilustra o modelo de decomposição hierárquica proposto por Romero. A aplicação de decomposição de Benders com a formulação linear (0 – 1) disjuntiva é apresentada na seção 4.4. Finalmente, a seção 4.5 faz um sumário do que foi apresentado neste capítulo.

4.2 O Modelo Clássico

O problema de planejamento da expansão de redes de transmissão pode ser formulado como um problema de programação não-linear (0 – 1) mista da seguinte forma:

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (4.2a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.2b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (4.2c)$$

$$f^1 - [x][\gamma^1] S_1 \theta = 0 \quad (4.2d)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (4.2e)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (4.2f)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.2g)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.2h)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.2i)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|}. \quad (4.2j)$$

A aplicação do modelo de decomposição de Benders a problemas não-lineares é uma proposta de Geoffrion, veja referência [30]. No caso do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, antes de aplicarmos o modelo de decomposição de Benders é necessário separar as variáveis do problema *Mestre* (variáveis de investimento) das do problema *Escravo* (variáveis de operação). Note que o acoplamento acontece na restrição (4.2d), na qual há o produto de $[x]$ por θ . Contudo, é possível re-escrever esta restrição de uma forma separável, da seguinte forma:

$$\frac{f_{ij}^1}{\theta_i - \theta_j} - x_{ij} \gamma_{ij}^1 = 0, \quad (4.3)$$

ou, colocando na forma matricial:

$$\frac{f^1}{S_1\theta} - [\gamma]x = 0, \quad (4.4)$$

onde $\frac{f^1}{S_1\theta}$ representa a divisão componente a componente dos vetores f^1 e $S^1\theta$. Substituindo a equação (4.4) no problema (4.2) obtemos o seguinte problema de programação não linear (0 – 1) mista:

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (4.5a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.5b)$$

$$f^0 - [\gamma^0]S_0\theta = 0 \quad (4.5c)$$

$$\frac{f^1}{S_1\theta} - [\gamma^1]x = 0 \quad (4.5d)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1]x \leq 0 \quad (4.5e)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1]x \geq 0 \quad (4.5f)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.5g)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.5h)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.5i)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|}. \quad (4.5j)$$

Suponha que em uma dada iteração do modelo de decomposição de Benders, por exemplo na k -ésima iteração, obtemos \hat{x}^k como solução tentativa do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Fixando $x = \hat{x}^k$ no problema (4.5), obtemos o seguinte problema de operação,

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \quad (4.6a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.6b)$$

$$f^0 - [\gamma^0]S_0\theta = 0 \quad (4.6c)$$

$$\frac{f^1}{S_1\theta} = [\gamma^1]\hat{x}^k \quad (4.6d)$$

$$-[\bar{f}^1]\hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1]\hat{x}^k \quad (4.6e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.6f)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.6g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0, \quad (4.6h)$$

que, por sua vez, é equivalente ao seguinte problema de programação linear:

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \quad (4.7a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.7b)$$

$$f^0 - [\gamma^0]S_0\theta = 0 \quad (4.7c)$$

$$f^1 - [\hat{x}^k][\gamma^1]S_1\theta = 0 \quad (4.7d)$$

$$-[\bar{f}^1]\hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1]\hat{x}^k \quad (4.7e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.7f)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.7g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0. \quad (4.7h)$$

Resolvido o problema de programação linear (4.7) podemos calcular cortes de Benders, que podem ser representados por:

$$\alpha + \pi^{kt} E (x - \hat{x}^k) \geq z_O^k, \quad (4.8)$$

onde k é o índice das iterações do método de decomposição de Benders, π^k , \hat{x}^k e z_O^k são respectivamente, o vetor de variáveis duais para o problema de operação (4.7), o vetor solução ótimo do problema *Mestre* e o valor ótimo da função objetivo do problema de operação, todos obtidos na k -ésima iteração. E é a matriz que acopla as restrições de investimento com as de operação e é dada por:

$$E^t = [0 \quad 0 \quad [\gamma^1]S_1\theta \quad [\bar{f}^1] \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

e π^k é o vetor de variáveis Duais do problema (4.6) na k -ésima iteração, definido por:

$$\pi^{k,t} = \left[\pi_d^{k,t} \quad \pi_{\gamma^0}^{k,t} \quad \pi_{\gamma^1}^{k,t} \quad \pi_{f^1}^{k,t} \quad \pi_g^{k,t} \quad \pi_r^{k,t} \quad \pi_{f^0}^{k,t} \right],$$

Substituindo E e π^k conforme definido acima, obtemos a seguinte expressão para os cortes de Benders:

$$\alpha + \left(\pi_{\gamma^1}^k [\gamma^1] S_1 \theta + \pi_{f^1}^k [\bar{f}^1] \right) (x - \hat{x}^k) \geq z_O^k,$$

onde, $\pi_{\gamma^1}^k$ é o vetor de sensibilidade do problema (4.6) em relação a variações em $[\gamma^1]x^k$ e $\pi_{f^1}^k$ é o vetor de variáveis duais associadas às restrições (4.6e).

Considerando os K -primeiros cortes de Benders já calculados, o seguinte problema de programação linear (0-1) representa o problema *Mestre* da decomposição de Benders para a iteração $K + 1$,

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + \alpha \tag{4.9a}$$

sujeito a :

$$\alpha + \left(+\pi_{\gamma^1}^k [\gamma^1] + \pi_{f^1}^k [\bar{f}^1] \right) (x - \hat{x}^k) \geq z_O^k, \quad k = 1, \dots, K \tag{4.9b}$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \tag{4.9c}$$

Contudo, note que o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, como formulado anteriormente, é um problema de programação não-linear (0-1) mista. A região de viabilidade da relaxação contínua deste problema é não-linear, não convexa o que pode trazer problema para métodos de planos cortantes.

Para ilustrar, suponha que a região de viabilidade da relaxação contínua de uma instância qualquer deste problema está representada na figura 4.1.

Note que os cortes de Benders cortam a região de viabilidade do problema, eliminando a solução ótima global e fazendo com que o método de decomposição de Benders convirja para um ponto que é um ótimo local.

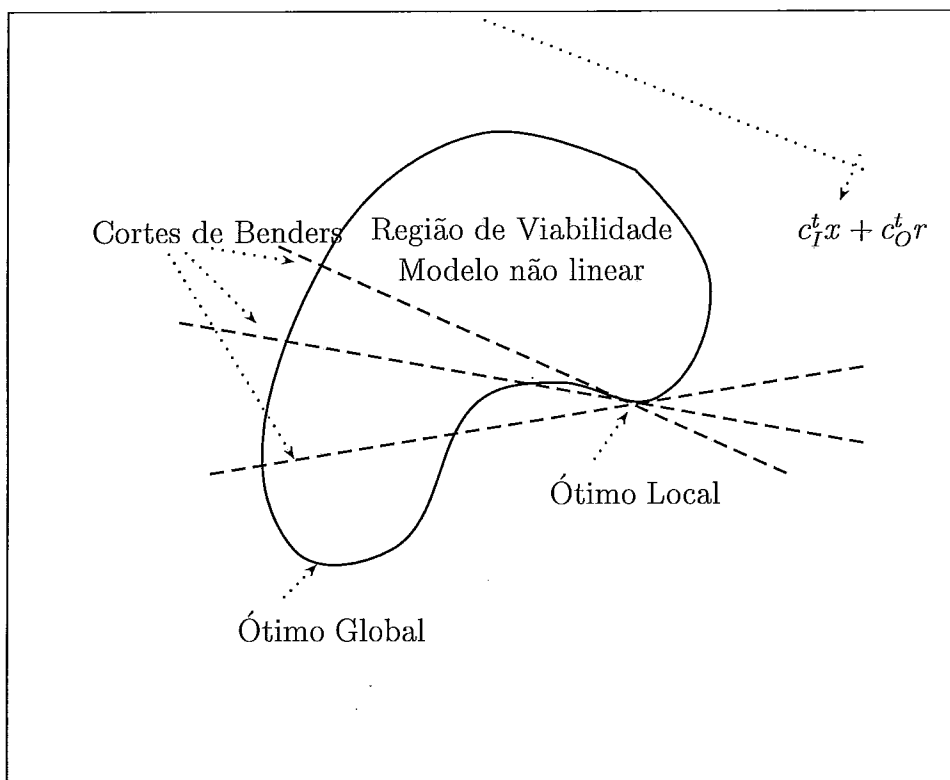


Figura 4.1: Não convexidades – problemas para métodos de planos cortantes.

Uma proposta interessante para tentar resolver os problemas de não convexidade da região de viabilidade da relaxação contínua é a decomposição hierárquica, proposta nas teses de mestrado e doutorado de Romero [62, 63] e descrita a seguir.

4.3 A Decomposição Hierárquica de Romero

A idéia básica do modelo de decomposição hierárquico proposto por Romero é a utilização de modelos relaxados, ou níveis hierárquicos, para representação do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Desta forma, o modelo de decomposição de Benders foi dividido em de três fases ou três níveis hierárquicos que utilizam diferentes formulações para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Na primeira fase, a rede de transmissão é formulada pelo modelo de transportes, transformando o problema antes não linear em um problema linear inteiro misto. Além disso, as restrições de “integralidade” das variáveis de decisão também são relaxadas. O segundo nível hierárquico de representação consiste em utilizar o modelo Híbrido que, como o modelo de Transportes, garante

a otimalidade da solução pois o problema de programação resultante é linear (restrições de “integralidade” das variáveis de decisão continuam relaxadas). O terceiro e último nível de representação do problema utilizado (fase III), utiliza o modelo completo de fluxo de potência linearizado e respeita às restrições de integralidade das variáveis de decisão. A figura 4.2 utiliza o mesmo exemplo da figura anterior, 4.1, para mostrar como foi idealizado e como “funciona”, o modelo hierárquico de decomposição proposto por Romero.

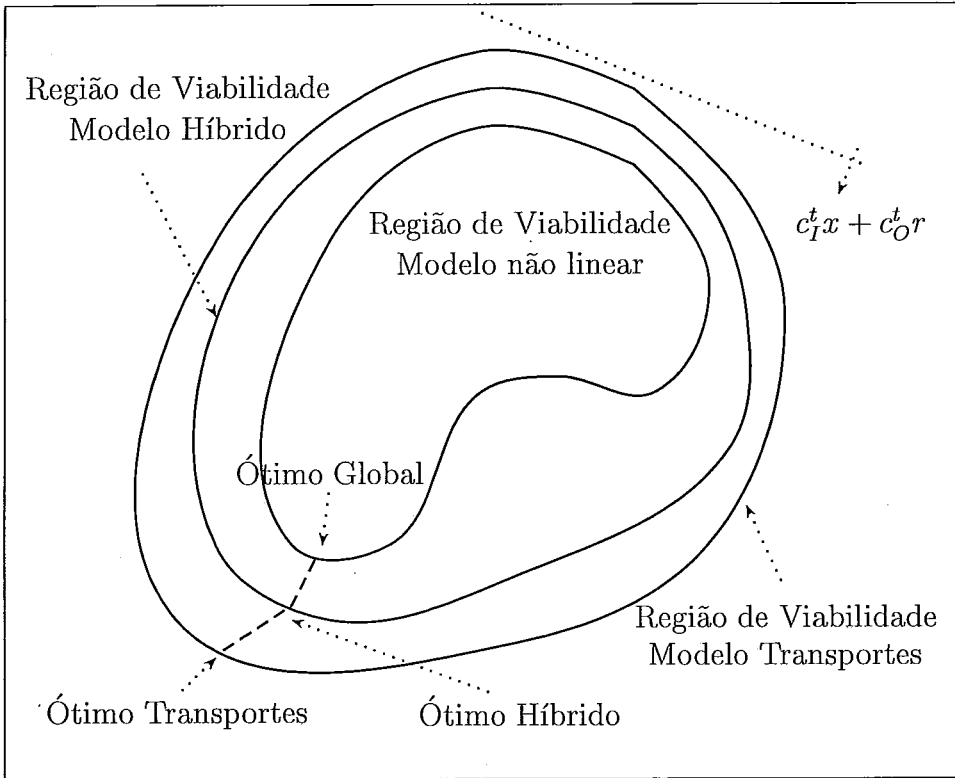


Figura 4.2: Modelo de decomposição hierárquica.

A relaxação contínua do modelo de Transportes (2.9), escrito a seguir, é utilizada para modelar o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão na fase I.

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (4.10a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.10b)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1]x \leq 0 \quad (4.10c)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1]x \geq 0 \quad (4.10d)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.10e)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.10f)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.10g)$$

$$0 \leq x \leq 1. \quad (4.10h)$$

Para uma iteração qualquer do modelo de decomposição de Benders, k , suponha que \hat{x}^k é a solução do problema *Mestre*. Então, fixando-se as variáveis de decisão x em \hat{x} , obtemos o seguinte problema de programação linear como o problema *Escravo* da decomposição de Benders:

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \quad (4.11a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.11b)$$

$$-[\bar{f}^1]\hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1]\hat{x}^k \quad (4.11c)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.11d)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.11e)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0. \quad (4.11f)$$

Resolvido o problema *Escravo* pode-se construir cortes de Benders para o modelo de Transportes da seguinte forma:

$$\alpha + \pi_{f^1}^k [\bar{f}^1] (x - \hat{x}^k) \geq z_O^k, \quad (4.12)$$

onde k é o índice das iterações do método de decomposição de Benders, $\pi_{f^1}^k$ e z_O^k são, respectivamente, o vetor de variáveis duais relacionadas às restrições (4.11c) e o valor ótimo da função objetivo do problema de operação (4.11).

Obtida a convergência no primeiro nível hierárquico, o modelo de representação da rede no problema de planejamento da expansão de redes de transmissão deve

ser trocado para o modelo Híbrido, representado a seguir, no qual as restrições de “integralidade” ainda são relaxadas.

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (4.13a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.13b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (4.13c)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (4.13d)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (4.13e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.13f)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.13g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.13h)$$

$$0 \leq x \leq 1. \quad (4.13i)$$

Para obter o problema *Escravo* fixamos as variáveis de decisão na solução do problema *Mestre* para, por exemplo, a k -ésima iteração, isto é $x = \hat{x}^k$, obtendo o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \quad (4.14a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.14b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (4.14c)$$

$$-[\bar{f}^1] \hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1] \hat{x}^k \quad (4.14d)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.14e)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.14f)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.14g)$$

Note que as restrições de acoplamento entre as variáveis de investimento e as variáveis de operação no modelo Híbrido são, exatamente, as mesmas do modelo

de Transportes. A mudança de um modelo para o outro consiste da inclusão das restrições (4.13c) que modificam somente o problema *Escravo* da decomposição de Benders. Como conseqüência, os cortes de Benders para este modelo terão a mesma forma daqueles escritos para o modelo de Transportes, ou seja,

$$\alpha + \pi_{f1}^k [\bar{f}^1] (x - \hat{x}^k) \geq z_O^k. \quad (4.15)$$

Observe que, a representação do problema varia nos níveis hierárquicos com a inclusão de certas restrições, ou seja, quanto mais relaxado é o problema menor é o seu nível hierárquico. Isto faz com que todos os cortes de Benders produzidos para um determinado nível hierárquico possam ser reutilizados na solução do problema nível hierárquico seguinte.

Finalmente, o terceiro nível hierárquico representa o problema pelo modelo clássico, não linear, não convexo, descrito na seção 4.2. A diferença é que quando o problema *Mestre* recebe os cortes provenientes do modelo não linear e não convexo, já tem (muita) informação dos modelos relaxados, que o “guiam” na direção da solução ótima global.

É intuitivo que a utilização do modelo hierárquico de decomposição cumpre com seu objetivo, que é o de tentar evitar que a solução ótima “global” seja excluída por algum corte gerado durante o processo. Entretanto, teoricamente não é possível garantir que a solução fornecida pelo modelo hierárquico de decomposição seja a solução ótima do problema de planejamento de expansão de redes de transmissão, visto que o modelo utilizado é, ainda, um modelo não linear e não convexo. A figura 4.3 ilustra, utilizando o mesmo caso anterior – modificações foram consideradas somente nas regiões dos problemas de transporte e híbrido – que o modelo de decomposição hierárquica pode convergir, ainda, para algum ótimo local.

4.4 O Modelo Linear (0 – 1) Disjuntivo

A formulação linear (0 – 1) disjuntiva para o problema de planejamento de redes de transmissão consiste em representar o problema de expansão pelo seguinte problema de programação linear (0 – 1) mista:

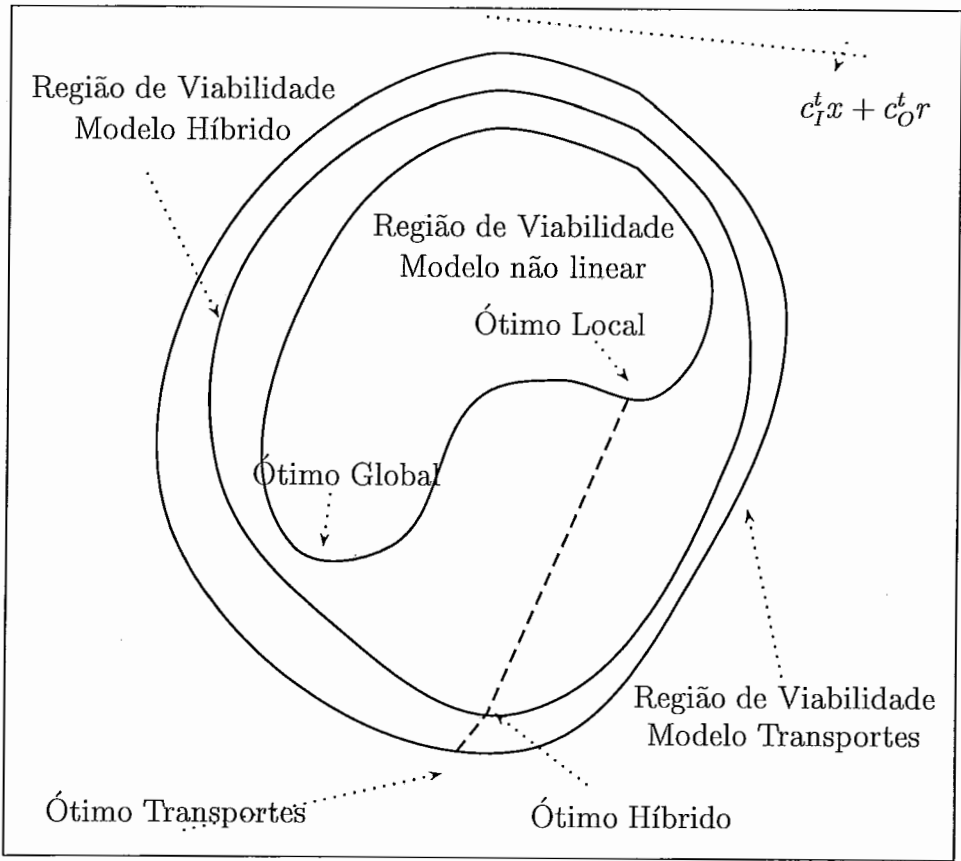


Figura 4.3: Modelo de decomposição hierárquica – não convexidade.

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (4.16a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.16b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (4.16c)$$

$$f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta \leq \mathcal{M}(e - x) \quad (4.16d)$$

$$f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta \geq -\mathcal{M}(e - x) \quad (4.16e)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (4.16f)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (4.16g)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.16h)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (4.16i)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.16j)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (4.16k)$$

Aplicando decomposição de Benders ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão de potência, (4.16), obtemos o seguinte problema de programação linear (0 – 1) mista como problema *Mestre* de Benders para a iteração $K + 1$:

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + \alpha \quad (4.17a)$$

sujeito a :

$$\alpha + \pi^{k^t} E x \geq \pi^{k^t} h, \quad k = 1, \dots, K \quad (4.17b)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|c|}, \quad (4.17c)$$

onde, $\alpha + \pi^{k^t} E x \geq \pi^{k^t} h$ são os cortes de Benders calculados nas iterações $k = 1, \dots, K$, E e h são, respectivamente, uma matriz e um vetor definidos da seguinte maneira:

$$E^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mp \mathcal{M} & \pm [\bar{f}^1] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$h^t = \begin{bmatrix} d^t & 0 & \pm e^t \mathcal{M} & 0 & 0 & \bar{g}^t & d^t & \mp \bar{f}^0 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

e o vetor π^k , dado por:

$$\pi^{k^t} = \left[\pi_d^{k^t} \quad \pi_{K^0}^{k^t} \quad \pi_{\mathcal{M}}^{k^t} \quad \pi_{f^1}^{k^t} \quad \pi_g^{k^t} \quad \pi_r^{k^t} \quad \pi_{f^0}^{k^t} \right], \quad (4.20)$$

é a solução Dual do seguinte problema de programação linear (também conhecido como problema *Escravo* da decomposição de Benders):

$$\text{Minimize } z_s = c_o^t r \quad (4.21a)$$

sujeito a:

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (4.21b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (4.21c)$$

$$-\mathcal{M}(e - \hat{x}^k) \leq f^1 - [\gamma^1] S_1 \theta \leq \mathcal{M}(e - \hat{x}^k) \quad (4.21d)$$

$$-[\bar{f}^1] \hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1] \hat{x}^k \quad (4.21e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (4.21f)$$

$$0 \leq r \leq d, \quad (4.21g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (4.21h)$$

onde \hat{x}^k é a solução do problema *Mestre* da decomposição de Benders (4.17) na k -ésima iteração e π_d , π_{K^0} , $\pi_{\mathcal{M}}$, π_{f^1} , π_g , π_r e π_{f^0} são, respectivamente, as variáveis duais associadas às restrições (4.21b), (4.21c), (4.21d), (4.21e), (4.21f), (4.21g) e (4.21h).

Substituindo E , h e π^k conforme as equações (4.18), (4.19) e (4.20), obtemos a seguinte expressão para os cortes de Benders:

$$\alpha + \left(\pi_{\mathcal{M}}^{k,t} \mathcal{M} + \pi_{f^1}^{k,t} [\bar{f}^1] \right) x \geq RHS^k, \quad (4.22)$$

onde,

$$RHS^k = \pi_d^{k,t} d + \pi_g^{k,t} \bar{g} + \pi_r^{k,t} d + \pi_{f^0}^{k,t} \bar{f}^0 + \pi_{\mathcal{M}}^{k,t} \mathcal{M} e.$$

Contudo, a simples utilização do modelo de decomposição de Benders, conforme descrito anteriormente, não traz resultados computacionais satisfatórios. A razão para este fraco desempenho computacional é o valor numérico grande para a constante disjuntiva \mathcal{M} . Isto faz com que os cortes de Benders tenham coeficientes de valor numérico elevado para as variáveis de investimento, dificultando a convergência da decomposição de Benders.

Uma alternativa, que será explorada nesta tese, é utilizar para o cálculo de cortes de Benders um valor numérico pequeno para a constante disjuntiva. Este valor

numérico seria ajustado com o decorrer das iterações do método de decomposição para um valor correto. O teorema 4.1 garante que todos os cortes de Benders calculados para valores diferentes (pequenos) para a constante disjuntiva, \mathcal{M} , podem ser utilizados quando o valor da constante disjuntiva é alterado mediante alterações nos seus coeficientes.

Teorema 4.1 *Mediante algumas alterações nos seus coeficientes, os cortes de Benders anteriormente gerados podem ser reaproveitados após mudanças no valor numérico da constante disjuntiva \mathcal{M} .*

PROVA. Considere o seguinte problema de programação linear (0 – 1) mista:

$$\text{Minimize } z = c^t x + d^t y \tag{4.23a}$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \tag{4.23b}$$

$$Ex + Fy \geq h. \tag{4.23c}$$

$$x \in \{0, 1\}^n, y \geq 0$$

Este problema pode, perfeitamente, representar o problema de investimento anterior. Para isto faça x ser as variáveis de decisão (investimento) e y as de operação da rede de transmissão.

Aplicar Benders ao problema (4.23) significa, conforme apresentado no capítulo 3, decompô-lo em um problema de dois estágios: no primeiro estágio é calculada uma solução para as variáveis x ; enquanto o problema do segundo estágio implementa as variáveis x e calcula uma função para representar o comportamento das variáveis y em função das decisões x . Fazendo isto, obtemos o seguinte problema de programação, que é equivalente ao problema (4.23), veja demonstração apresentada no capítulo 3.

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (4.24a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (4.24b)$$

$$\alpha + \pi^{k^t} E x \geq \pi^{k^t} h \quad \text{para } i = 1, \dots, |\Omega|, \quad (4.24c)$$

onde $\pi^k, k = 1, \dots, |\Omega|$ são os vértices da região de viabilidade do problema Dual do problema *Escravo*,

$$\text{Maximize } (h - E x)^t \lambda \quad (4.25a)$$

sujeito a :

$$F^t \pi \leq d \quad (4.25b)$$

$$\pi \geq 0. \quad (4.25c)$$

Modificações na constante disjuntiva \mathcal{M} correspondem a modificações nos valores, tanto da matriz E como no vetor h (ver equações (4.18) e (4.19)). Contudo, a região de viabilidade do Dual do problema *Escravo* (4.25) é independente de E e de h , ou seja, os vértices da região de viabilidade Dual, que são utilizados pelo algoritmo de decomposição de Benders para a construção da função $\alpha(x)$, representando o comportamento das variáveis de operação y em função das variáveis de investimento x , são independentes do valor numérico da constante disjuntiva \mathcal{M} .

Finalmente, uma leitura atenta do capítulo (3) mostra que a equivalência entre os problemas (4.23) e (4.24) não se deve ao fato de que π^k é a solução ótima Dual do problema *Escravo* e sim que π^k é uma solução Dual viável, ou seja, um vértice da região de viabilidade do problema (4.25), Ω definida por:

$$\Omega = \{ \pi \mid F^t \pi \leq d, \pi \geq 0 \}.$$

Logo, as variáveis duais $\pi \in \Omega$, obtidas quando são utilizados valores quaisquer tanto para E como para h são variáveis duais válidas para a construção de cortes de Benders. Entretanto, note que os coeficientes dos cortes de Benders dependem do

valor numérico de E ou h . Portanto, quando modificamos os valores de E ou de h será necessário um ajuste nos cortes de Benders como ilustrado a seguir. Suponha que o corte de Benders representado a seguir foi obtido quando $\mathcal{M} = \mathcal{M}^1$,

$$\alpha - \left(\overbrace{\pi_{\mathcal{M}}^k}^{c_x^{\mathcal{M}}} \mathcal{M}^1 + \overbrace{\pi_{f^1}^k}^{c_x^{f^1}} [\bar{f}^1] \right) x \geq RHS^k,$$

onde,

$$RHS^k = \pi_d^{k^t} d + \pi_g^{k^t} \bar{g} + \pi_r^{k^t} d + \pi_{f^0}^{k^t} \bar{f}^0 + \overbrace{\pi_{\mathcal{M}}^k}^{RHS^{\mathcal{M}}} \mathcal{M}^1 e.$$

Para continuar válido após a modificação do valor da constante disjuntiva para \mathcal{M}^2 , devemos recalcular a parte dos coeficientes do corte que depende do valor de \mathcal{M} ($c_x^{\mathcal{M}}$), assim como parte do RHS ($RHS^{\mathcal{M}}$), da seguinte forma:

$$c_x^{\mathcal{M}} = \frac{c_x^{\mathcal{M}} \mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^1} \tag{4.26}$$

e

$$RHS^{\mathcal{M}} = \frac{RHS^{\mathcal{M}} \mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^1} \tag{4.27}$$

Os coeficientes $c_x^{f^1}$ assim como o restante de RHS^k não se alteram para modificações no valor da constante disjuntiva \mathcal{M} .

Fazendo esta atualização em todos os cortes de Benders podemos reutilizá-los, independente do valor para a constante disjuntiva \mathcal{M} , completando a demonstração. ■

Note que quanto menor o valor para a constante disjuntiva \mathcal{M} mais restrito será o problema. O teorema seguinte garante este resultado.

Teorema 4.2 *O valor ótimo da função objetivo do problema de planejamento de expansão de redes de transmissão utilizando o modelo linear (0 – 1) disjuntivo com $\mathcal{M} = \mathcal{M}^1 \leq \mathcal{M}^2$ é maior ou igual do que quando $\mathcal{M} = \mathcal{M}^2$.*

PROVA. Sejam \mathcal{M}^1 e \mathcal{M}^2 dois valores para a constante disjuntiva tal que $\mathcal{M}^1 \leq \mathcal{M}^2$. Suponha que z^1, x^1 seja o valor da solução e a solução ótima para o problema com \mathcal{M}^1 . É fácil ver que x^1 é uma solução viável para o problema com \mathcal{M}^2 pois o valor da constante disjuntiva aumentou, “liberando” ainda mais as restrições (4.16d) e (4.16e). Entretanto, não podemos garantir que x^1 seja a solução ótima do problema com \mathcal{M}^2 , pois estando as restrições (4.16d) e (4.16e) mais “folgadas”, poderão existir outras soluções viáveis de menor custo do que a solução x^1 mas que não eram soluções viáveis para o caso $\mathcal{M} = \mathcal{M}^1$, completando a demonstração. ■

Bom, até agora mostramos que os cortes de Benders podem ser, facilmente, corrigidos para mudanças numéricas no valor da constante disjuntiva e que o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão é mais restrito quanto menor for o valor numérico para a constante disjuntiva. Contudo, não fizemos nenhum desenvolvimento acerca do valor mínimo para a constante disjuntiva que ainda garanta a equivalência entre as formulações linear (0 – 1) disjuntiva e o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão propriamente dito. Este tópico foi estudado, inicialmente, no trabalho [72], onde o seguinte teorema foi colocado:

Teorema 4.3 (P. Tsamasphyrou, A. Renaud, P. Carpentier) *Para $\mathcal{M} \geq \overline{\mathcal{M}} = \sum_{k,l \in \mathcal{E}} \overline{f}^0 + \sum_{k,l \in \mathcal{C}} \overline{f}^1 \leq \infty$ e $x \in \{0,1\}^n$ às restrições (2.6a) e (2.6b) são idênticas as restrições (2.1d) do problema de planejamento de expansão de redes de transmissão, (2.1).*

PROVA. Ver referência [72]. ■

Entretanto, o valor numérico proposto no teorema 4.3 para a constante disjuntiva \mathcal{M} é, ainda, um valor numérico muito grande e que, na prática, nunca é atingido. O objetivo então passa a ser obter uma significativa redução para o valor da constante disjuntiva \mathcal{M} , o que foi conseguido pelo resultado ilustrado no teorema 4.4 proposto a seguir.

Teorema 4.4 *O valor da constante disjuntiva \mathcal{M} para um dado circuito candidato ij entre duas barras existentes (não isoladas) de uma rede elétrica interconectada (não isolada) pode ser definido de acordo com:*

$$\mathcal{M}_{ij} \geq \begin{cases} \frac{\gamma_{ij}^1}{\gamma_{ij}^0} \bar{f}_{ij}^0 & \text{se } \exists ij \in \mathcal{E} \\ \gamma_{ij}^1 C_{\min} & \text{se } \nexists ij \in \mathcal{E} \end{cases} \quad (4.28)$$

onde \mathcal{E} representa o conjunto com todas as linhas existentes e C_{\min} é caminho mínimo entre as barras terminais i e j , em que o custo do caminho é dado por $\frac{\gamma_{ij}^1}{\gamma_{ij}^0} \bar{f}_{ij}^0$. Este problema pode ser formulado por,

$$\text{Minimize } C_{\min} = \sum_{kl \in \mathcal{E}} \frac{\bar{f}_{kl}^0}{\gamma_{kl}^0} x_{kl},$$

sujeito a :

$$\sum_{k \in \Omega_v} x_{vk} - \sum_{l \in \Omega_v} x_{lv} = \begin{cases} 1 & \text{se } v = i; \\ -1 & \text{se } v = j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.29a)$$

$$x_{kl} \in \{0, 1\}, \quad k, l \in \mathcal{E}, \quad (4.29b)$$

onde $\Omega_v, v \in \mathcal{N}$ é o conjunto de nós que estão conectados diretamente ao nó v .

PROVA. Chame de ij um determinado circuito candidato. As equações do modelo linear (0–1) disjuntivo relacionadas ao circuito candidato ij são as seguintes:

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) \leq \mathcal{M}_{ij}(1 - x_{ij}) \quad (4.30a)$$

$$f_{ij}^1 - \gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) \geq -\mathcal{M}_{ij}(1 - x_{ij}) \quad (4.30b)$$

$$f_{ij}^1 - \bar{f}_{ij}^1 x_{ij} \leq 0 \quad (4.30c)$$

$$f_{ij}^1 + \bar{f}_{ij}^1 x_{ij} \geq 0. \quad (4.30d)$$

Vimos, anteriormente, que quando o circuito candidato ij é construído, a constante disjuntiva \mathcal{M} não tem efeito algum sobre o modelo. Então vamos nos concentrar no caso oposto, ou seja, quando o circuito candidato ij não está construído, ou seja, quando $x_{ij} = 0$. Substituindo $x_{ij} = 0$ nas restrições de limite de fluxo dos circuitos candidatos, (4.30c) e (4.30d), obtemos que,

$$f_{ij}^1 \leq 0$$

$$f_{ij}^1 \geq 0,$$

ou seja que $f_{ij} = 0$. Substituindo $f_{ij} = 0$ nas restrições disjuntivas (4.30a) e (4.30b) e lembrando que $x_{ij} = 0$ (circuito candidato ij não está construído) obtemos,

$$-\gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) \leq \mathcal{M}_{ij} \quad (4.31a)$$

$$-\gamma_{ij}^1(\theta_i - \theta_j) \geq -\mathcal{M}_{ij}. \quad (4.31b)$$

Estas são as restrições que, conforme visto anteriormente, “inserir” um limite sobre a abertura angular entre as barras i e j . O valor de \mathcal{M}_{ij} deve ser tal que este limite nunca seja alcançado, pois se for, fará com que novos investimentos sejam necessários para atender esta restrição, conforme visto no teorema 4.2. Contudo, estes investimentos não são, realmente, necessários e foram considerados somente para que o “limite implícito” sobre as aberturas angulares fosse atendido.

Inicialmente vamos analisar o caso em que o circuito candidatos ij é uma duplicação de algum circuito já existente na rede básica, ou seja, quando $\exists ij \in \mathcal{E}$. Neste caso, as restrições do modelo linear (0 – 1) disjuntivo sobre este circuito ij da rede existente são as seguintes:

$$f_{ij}^0 - \gamma_{ij}^0(\theta_i - \theta_j) = 0 \quad (4.32a)$$

$$-\bar{f}_{ij}^0 \leq f_{ij}^0 \leq \bar{f}_{ij}^0. \quad (4.32b)$$

Pela equação (4.32a) sabemos que o fluxo de potência no circuito existente ij pode ser calculado por, $f_{ij}^0 = \gamma_{ij}^0(\theta_i - \theta_j)$. Substituindo f_{ij}^0 na restrição (4.32b), obtemos,

$$-\frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0} \leq (\theta_i - \theta_j) \leq \frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0},$$

que também é um limite imposto pela rede existente sobre a abertura angular entre as barras terminais do circuito candidato ij .

Neste caso basta definir \mathcal{M}_{ij} por:

$$\mathcal{M}_{ij} \geq \gamma_{ij}^1 \frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0}.$$

Por outro lado, se $(\theta_i - \theta_j)$ for considerado em (4.31b), temos que:

$$\mathcal{M}_{ij} \geq \gamma_{ij}^1 \frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0},$$

que é o mesmo limite inferior para \mathcal{M}_{ij} obtido anteriormente.

Portanto, podemos concluir, a primeira parte deste teorema, que quando o circuito ij é um circuito candidato duplicação de um circuito da rede existente, a constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} pode ser ajustada em um valor que é função das características $(\gamma_{ij}^0$ e $\bar{f}_{ij}^0)$ do circuito existente e do próprio circuito candidato (γ_{ij}^1) .

Vamos agora analisar o caso em que o circuito candidato ij não é uma duplicação de algum circuito existente. Como supomos que as barras terminais do circuito candidato ij são barras existentes de uma rede interconectada então, existe pelo menos uma seqüência de circuitos existentes (caminho de circuitos) que já conectam estas barras. Faça $\mathcal{P}_{ij} = \{ij_1, ij_2, j_2, \dots, ij_p\}$ ser um caminho (conjunto) de circuitos existentes que conectem as barras ij . Então, da mesma forma que quando o circuito candidato ij é uma duplicação de um circuito existente, existe um limite, já existente, sobre a abertura angular entre as barras terminais do circuito candidato ij . Contudo, este limite não é dado por somente um circuito existente e sim por um conjunto de circuitos existentes. Portanto, podemos dizer que:

$$- \sum_{kl \in \mathcal{P}_{ij}} \left(\frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0} \right) \leq (\theta_i - \theta_j) \leq \sum_{kl \in \mathcal{P}_{ij}} \left(\frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0} \right)$$

Logo, o problema passa a ser como encontrar o caminho \mathcal{P} de circuitos existentes que conecte as barras terminais ij do circuito candidato em questão, ou, mais especificamente, como obter o menor limite associado a todos os possíveis caminhos \mathcal{P}_{ij} conectando das barras i e j . É fácil ver que este problema corresponde a um problema de busca de caminho mínimo em um grafo, no qual o custo de cada ramo do grafo é dado por $\frac{\bar{f}_{ij}^0}{\gamma_{ij}^0}$.

Logo, ao resolvermos o problema de caminho mínimo,

$$\text{Minimize } C_{min} = \sum_{kl \in \mathcal{E}} \frac{\bar{f}_{kl}^0}{\gamma_{kl}^0} x_{kl},$$

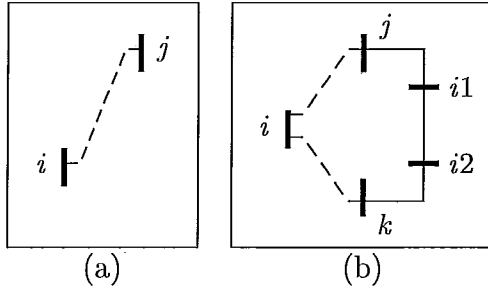


Figura 4.4: Exemplos de barra, inicialmente, isoladas da rede elétrica.

sujeito a :

$$\sum_{k \in \Omega_v} x_{vk} - \sum_{l \in \Omega_v} x_{lv} = \begin{cases} 1 & \text{se } v = i; \\ -1 & \text{se } v = j; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.33a)$$

$$x_{kl} \in \{0, 1\}, \quad k, l \in \mathcal{E}, \quad (4.33b)$$

estaremos calculando o menor limite, imposto pela rede existente (rede básica), para a abertura angular entre as barras i e j e, seguindo o mesmo raciocínio utilizado anteriormente, se substituirmos este limite, C_{min} , para $\theta_i - \theta_j$ em (4.31a) e (4.31b), obtemos que,

$$\mathcal{M}_{ij} \geq \gamma_{ij}^1 C_{min},$$

completando a demonstração do teorema. ■

O problema do caminho mínimo (4.29) pode ser resolvido, eficientemente, por um algoritmo de Dijkstra, veja apêndice B.

Uma questão ainda não analisada é o ajuste do valor de \mathcal{M} para circuitos que conectem barras inicialmente isoladas da rede elétrica. Vamos dividir esta análise em três casos distintos: i – uma barra isolada com somente um circuito para sua conexão ao sistema interconectado (figura 4.4-(a)); ii – uma barra isolada com duas possibilidades para sua conexão (figura 4.4-(b)); e, iii – o caso geral no qual uma barra isolada tem p possibilidades de conexão ao sistema existente.

O primeiro caso é muito simples pois a diferença angular entre as barras ij é nula no caso $x_{ij} = 0$. Então, fazendo $\mathcal{M}_{ij} \geq 0$ garantimos que as restrições disjuntivas associadas a este circuito não restringirão a abertura angular entre estas barras garantindo a otimalidade da solução obtida.

Para obter \mathcal{M}_{ij} no segundo caso, devemos calcular o problema de caminho mínimo (4.29) para as barras pertencentes a rede existente, na figura 4.4-(b), jk . Faça C_{min}^{jk} ser o valor do caminho mínimo entre as barras jk . Não podemos fazer simplesmente $\mathcal{M}_{ij} \geq C_{min}^{jk}$ porque não podemos garantir que, na solução ótima, $x_{ik} = 0$. Então, para garantir que \mathcal{M}_{ij} é independente do valor de x_{ik} , devemos supor que $x_{ik} = 1$ (ou seja que o circuito candidato ik foi adicionado) o que modifica o limite imposto pela rede existente sobre a abertura angular entre as barras ij para:

$$-C_{min}^{jk} - \frac{\bar{f}_{ik}^1}{\gamma_{ik}^1} \leq (\theta_i - \theta_j) \leq C_{min}^{jk} + \frac{\bar{f}_{ik}^1}{\gamma_{ik}^1},$$

e o valor da constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} pode ser,

$$\mathcal{M}_{ij} \geq \gamma_{ij}^1 \left(C_{min}^{jk} + \frac{\bar{f}_{ik}^1}{\gamma_{ik}^1} \right).$$

No caso geral, isto é, quando existem diversas maneiras para conectar a barra isolada i à rede existente, é necessário o cálculo do caminho de máximo custo (onde o custo de cada ramo do grafo formado pela rede elétrica é dado por $\frac{f_{kl}^1}{\gamma_{kl}^1}$) que conecta a barra i à rede existente. A partir daí, fazendo C_{max}^{ik} ser o custo associado ao caminho máximo e sendo k a barra de conexão da rede existente para a barra isolada i , o valor da constante disjuntiva pode ser,

$$\mathcal{M}_{ij} \geq \gamma_{ij}^1 \left(C_{min}^{jk} + C_{max}^{ki} \right).$$

onde C_{min}^{jk} é o caminho mínimo entre as barras da rede existente j e k . Um algoritmo eficiente para o cálculo do caminho máximo (C_{max}^{ik}) é um tema que ainda está em desenvolvimento.

Nos casos práticos de planejamento da expansão analisados nesta tese, para determinar o caminho máximo e ajustar o valor da constante disjuntiva nestes casos o valor do caminho máximo foi calculado fazendo-se a enumeração de todos os caminhos possíveis para a conexão das barras isoladas.

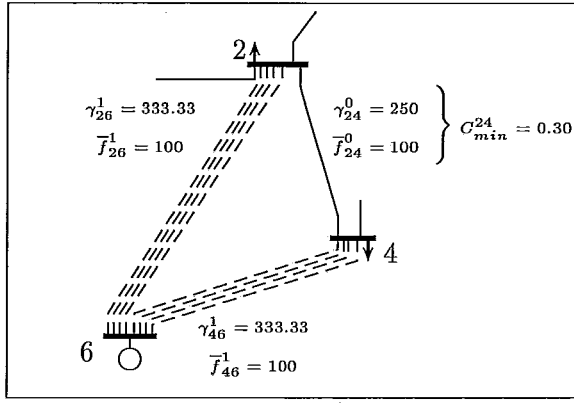


Figura 4.5: Conexões possíveis da barra 6 ao sistema no caso modificado de Garver.

Exemplos

Nesta seção vamos mostrar o comportamento da região de viabilidade do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão – modelo linear (0 – 1) disjuntivo para diferentes valores da constante disjuntiva \mathcal{M} .

O sistema elétrico utilizado é o sistema teste modificado de Garver, que já foi ilustrado no capítulo 2 (seção 2.2.5) e os valores escolhidos para a constante disjuntiva \mathcal{M} foram os seguintes: $\mathcal{M}^1 = 234$, $\mathcal{M}^2 = 1000$, $\mathcal{M}^3 = 100$.

O valor $\mathcal{M} = 234$ é resultado da aplicação da análise descrita na seção anterior para escolha do valor de \mathcal{M} para circuitos candidatos cujas barras terminais estão inicialmente isoladas do sistema interconectado. A título de ilustração, vamos apresentar a seguir como foi determinado o valor de $\mathcal{M}_{26} = \mathcal{M}_{46} = 234$.

Considere inicialmente o cálculo da constante disjuntiva para o circuito candidato $ij = 26$. Como a barra 6 está isolada (na rede inicial) é necessário determinar os pontos possíveis de conexão desta barra ao sistema, neste caso as barras 2 e 4 conforme ilustrado na figura 4.5. A figura 4.5 também mostra os dados relevantes para esta análise.

O caminho mínimo entre as barras 2 e 4, resultado do problema (4.29), tem custo igual a $C_{min}^{24} = \frac{\bar{f}^0}{\gamma^0} = \frac{100.0}{250.0} = 0.40$ e é formado somente pelo circuito existente 24. Então, conforme descrito na seção anterior, o valor da constante disjuntiva deve ser $\mathcal{M}_{ij} \geq \gamma_{ij}^1 \left(C_{min}^{jk} + \frac{\bar{f}_{jk}^0}{\gamma_{jk}^1} \right) = 333.33 \left(0.40 + \frac{100}{333.33} \right) = 233.33$. Logo, o valor de $\mathcal{M} = 234$ neste caso.

Considerando $\mathcal{M} = 234$ ou 1000 a solução ótima discreta deste caso de planejamento é a mesma solução reportada no capítulo 2, seção 2.2.5, ou seja $x_{26} = 0$ e $x_{46} = 3$. A figure 4.6 ilustra a variação do custo do corte de carga do sistema teste de Garver modificado em relação aos investimentos nos circuitos candidatos 2 – 6 e 4 – 6 quando utilizamos no modelo linear (0 – 1) disjuntivo o valor de 234 para a constante disjuntiva \mathcal{M} .

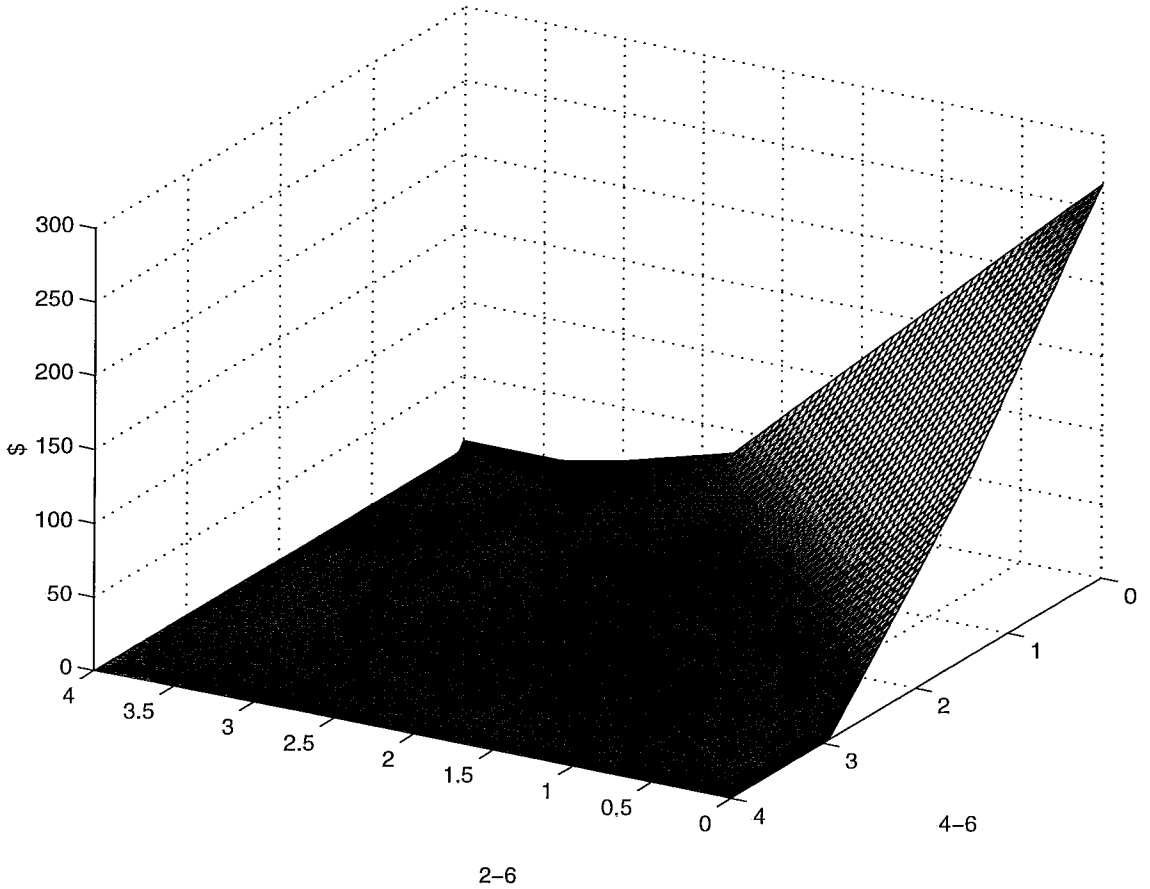


Figura 4.6: Custo de operação \times investimento – $\mathcal{M} = 234$.

A figura 4.7 mostra a variação do custo do corte de carga quando $\mathcal{M} = 1000$. Observe que as inclinações com que o custo de corte de carga tende para zero com respeito aos investimentos são diferentes para os dois casos. Isto mostra que as derivadas também são diferentes. Em particular, podemos dizer que a inclinação é mais suave quando a constante disjuntiva assume o menor valor.

Com o valor $\mathcal{M} = 100$, podemos ver na figura 4.8, que a solução ótima deste problema ($x_{26} = 0$ e $x_{46} = 3$) é inviável. Além disso, note que a forma da figura,

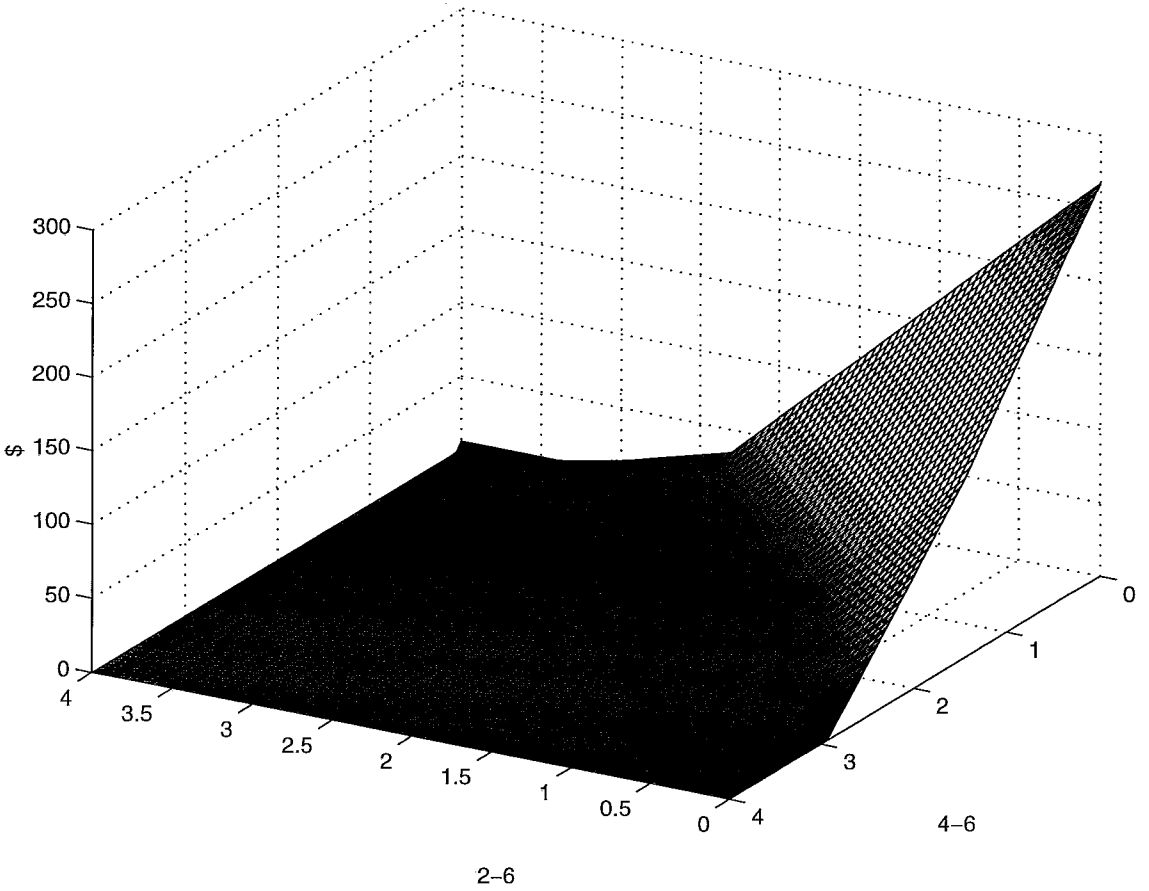


Figura 4.7: Custo de operação \times investimento – $\mathcal{M} = 1000$.

neste caso, é muito diferente das anteriores, indicando uma mudança significativa nas derivadas do custo do corte de carga em relação aos investimentos e, por consequência, nos coeficientes dos cortes de Benders. Tais mudanças, da mesma forma que quando o valor da constante disjuntiva \mathcal{M} foi reduzido de 1000 para 234, fazem com que as derivadas sejam mais bem comportadas, garantindo, assim, um melhor comportamento do método de decomposição de Benders, como ilustrado no capítulo 7.

4.5 Conclusões

Neste trabalho apresentamos a aplicação do modelo de decomposição de Benders para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão de potência. Tradicionalmente, este problema tem sido formulado por um modelo não-linear (não

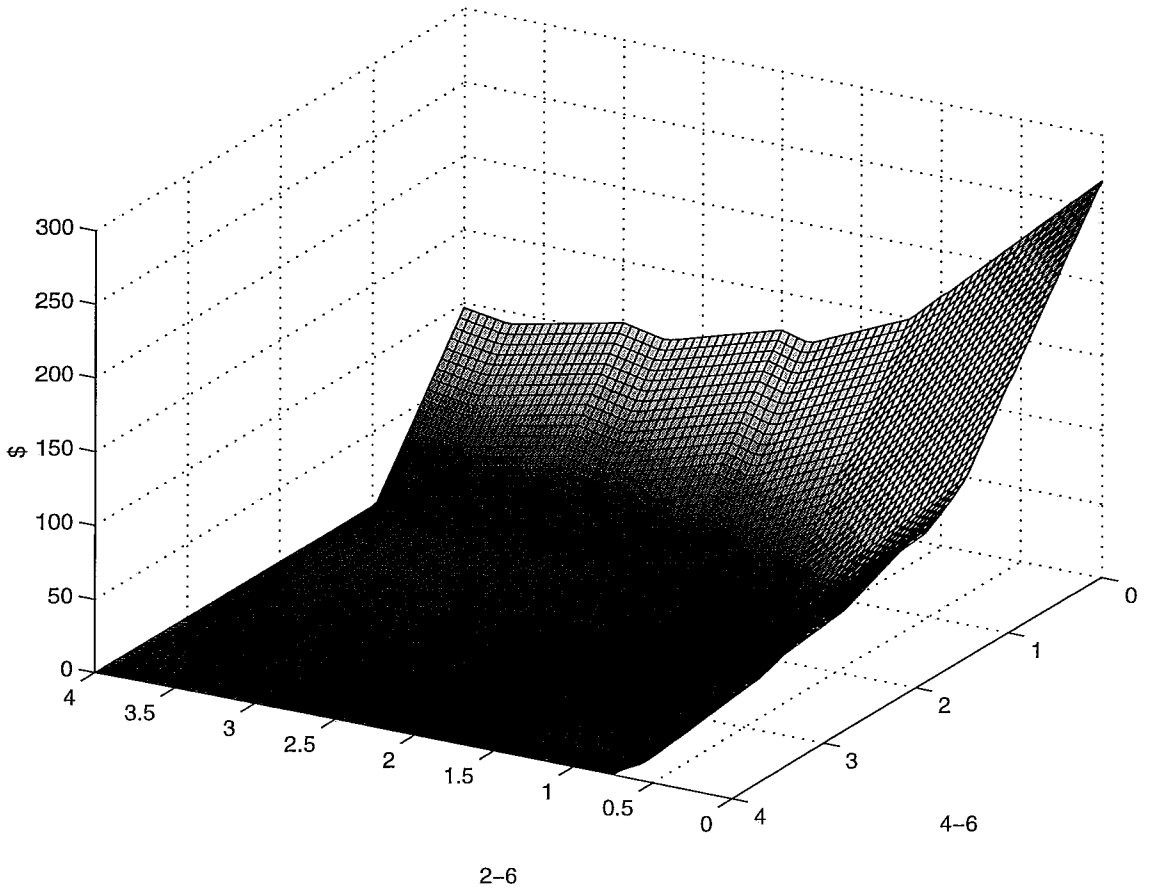


Figura 4.8: Custo de operação \times investimento – $\mathcal{M} = 100$.

convexo), o que traz dificuldades para a obtenção da solução ótima.

Nesta tese estudamos a aplicação do modelo linear (0 – 1) disjuntivo. Uma das dificuldades para a aplicação desta formulação ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão é que, valores numéricos grandes para a constante disjuntiva provocam instabilidade numérica nos cortes de Benders, trazendo problemas de convergência para o processo de decomposição.

Uma possível alternativa é utilizar um esquema iterativo para variar o valor da constante disjuntiva de forma a melhorar o condicionamento numérico dos cortes de Benders gerados durante o processo de decomposição. Mostramos que tal esquema não traz conseqüências negativas para a convergência (prova teórica) do método de decomposição de Benders, e ainda (ilustrado com um exemplo de um caso real de planejamento da expansão de redes) é muito benéfico para a obtenção da solução ótima, visto que está foi obtida, no caso exemplo utilizado, com uma significativa

redução tanto no número de iterações como também no tempo computacional gasto.

Além do esquema iterativo de variação do valor da constante disjuntiva, propomos uma significativa melhora no valor mínimo conhecido para esta constante (teorema 4.4) que garante a otimalidade da solução obtida pela decomposição de Benders, visto que este valor garante a equivalência da formulação linear (0 – 1) disjuntiva, problema (4.16), e o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, problema (4.1).

CAPÍTULO 5

CORTES DE GOMORY EM DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar uma proposta para incluir cortes de Gomory [34] em um modelo de decomposição de Benders [7] para a solução de problemas de programação linear (0-1) mista. Uma aplicação de tais cortes em um modelo de decomposição de Benders para problema de planejamento da expansão de redes de transmissão de potência será apresentada e discutida.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: a seção 5.2 ilustra os cortes de Gomory, que serão utilizados em conjunto com os cortes de Benders, e mostra como eles podem ser calculados. Na seqüência, seção 5.3, vamos mostrar como incluir cortes de Gomory no modelo de decomposição de Benders de uma forma geral. A seção 5.4 mostra como calcular e incluir estes cortes para um modelo de decomposição de Benders que considera o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Finalmente, a seção 5.5 mostra algumas conclusões sobre este trabalho, assim como, novas linhas de atuação futura.

5.2 Cortes de Gomory

No final da década de 50 e início da de 60, R. Gomory [33, 34, 35] propôs, para solucionar problemas de programação inteira, o uso de planos de cortes, reduzindo a solução de problemas de programação inteira à solução de uma seqüência de pro-

blemas lineares. Após um entusiasmo inicial com esta idéia, a comunidade científica ficou cética, devido ao seu baixo desempenho computacional deste método.

A segunda classe de métodos para programação linear-inteira mista são os métodos de “Branch-and-Bound”, originários a partir dos trabalhos de Land e Doig [48] para programas inteiros mistos e Balas [1] para programas (0 – 1) puros. Os métodos do tipo “Branch-and-Bound” são enumerativos visto que solucionam os problemas a partir de uma enumeração de soluções viáveis. Basicamente, tais métodos dividem a região viável do problema, definida pela sua relaxação linear, em pequenas sub-regiões estruturadas como uma árvore de busca do “Branch-and-Bound”, que é explorada na fase de enumeração.

Mais recentemente, os métodos de planos cortantes tem sido combinados com os métodos de “Branch-and-Bound”, dando origem aos métodos denominados “Branch-and-Cut” [56]. Para viabilizar tais métodos é necessário um procedimento de “lift” que consiste em generalizar os cortes produzidos em um determinado nó da árvore de busca do “Branch-and-Bound” para toda a árvore de busca.

A seguir vamos ilustrar uma forma de obter cortes de Gomory globalmente válidos para problemas de programação linear (0 – 1) mista.

5.2.1 Cortes de Gomory “Lifted”

Considere o seguinte problema de programação linear (0 – 1) mista:

$$\text{Minimize } c^t x \tag{5.1a}$$

sujeito a:

$$Ax = b \tag{5.1b}$$

$$x \geq 0 \tag{5.1c}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, p, \tag{5.1d}$$

onde as primeiras p variáveis x_i estão restritas aos valores (0 – 1) enquanto que as demais são contínuas.

Em [3], cortes de Gomory foram estudados em um contexto de “Branch-and-Cut”. Nesse trabalho, Balas et alii mostraram ser possível, através de um procedi-

mento simples de “lift”, fazer com que os cortes de Gomory gerados a partir de um nó da árvore de enumeração do “Branch-and-Bound” sejam válidos globalmente, isto é, válidos para toda a árvore, no caso de problemas de programação linear (0 – 1) mista.

Para ilustrar faça $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in \{1, \dots, p\}$ serem os conjuntos dos índices das variáveis fixadas em 0 e 1, respectivamente. Lembre que em geral um corte gerado em um dado nó $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ da árvore de busca é válido somente para todos os outros nós onde as variáveis que estão em $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ permanecem com seus valores fixos.

Faça $LP(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ ser o problema relaxado do problema (5.1) em um dado nó da árvore de busca $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, ou seja,

$$\text{Minimize } c^t x \quad (5.2a)$$

sujeito a:

$$Ax = b \quad (5.2b)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.2c)$$

$$x_i = 0, \quad i \in \mathcal{F}_0 \quad (5.2d)$$

$$x_i = 1, \quad i \in \mathcal{F}_1. \quad (5.2e)$$

Utilizando o complemento das variáveis x_j para $j \in \mathcal{F}_1$, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\mathcal{F}_1 = \emptyset$. Por outro lado, “pivotando” as variáveis de folga básicas iguais a zero, podemos assumir também, sem perda de generalidade, que $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{J}$. Considere que a solução básica ótima para a relaxação linear $LP(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 = \emptyset)$ é dada por:

$$\bar{x}_i = \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \bar{a}_{ij}(-x_j) \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (5.3a)$$

$$\bar{x}_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J} \quad (5.3b)$$

$$\bar{x}_k = 0, \quad \forall k \in \mathcal{F}_0, \quad (5.3c)$$

onde \mathcal{I} e \mathcal{J} denotam os conjuntos de variáveis básicas e não-básicas, respectivamente.

O teorema a seguir, devido a Balas et alii [3], garante que cortes de Gomory, calculados conforme dado a seguir, são válidos para toda a árvore de busca do

problema de programação linear (0 – 1) mista.

Teorema 5.1 (E. Balas, S. Ceria, G. Cornuéjols, N. Natraj [3]) *Para $i \in \mathcal{I}$, $i \leq p$ a restrição inteira-mista de Gomory,*

$$\sigma^t x \geq 1, \quad (5.4)$$

elimina a solução contínua \bar{x} da relaxação linear $LP(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ e é válida para toda a árvore de busca do problema de programação linear (0 – 1) mista, onde σ é dado por:

$$\sigma_j = \begin{cases} \min\left(\frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}_{i0}}, \frac{1-\bar{f}_{ij}}{1-\bar{f}_{i0}}\right) & \text{se } j \in \mathcal{J}, j \leq p \\ \max\left(\frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{f}_{i0}}, \frac{-\bar{a}_{ij}}{1-\bar{f}_{i0}}\right) & \text{se } j \in \mathcal{J}, j \geq p + 1 \\ 0 & \text{se } j \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.5)$$

e \bar{f}_{ij} a parte fracionária de \bar{a}_{ij} .

PROVA. Precisamos introduzir alguma notação a mais: sejam $\mathcal{J}_1 = \{j \in \mathcal{J} \mid j \leq p\}$, ou seja, \mathcal{J}_1 é o conjunto das variáveis não básicas restritas a valores (0 – 1); $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$, logo \mathcal{J}_2 é o conjunto das variáveis não básicas que são contínuas; $\mathcal{J}_1^+ = \{j \in \mathcal{J}_1 \mid \bar{f}_{ij} < \bar{f}_{i0}\}$; $\mathcal{J}_1^- = \mathcal{J}_1 \setminus \mathcal{J}_1^+$; $\mathcal{J}_2^+ = \{j \in \mathcal{J}_2 \mid \bar{a}_{ij} > 0\}$; $\mathcal{J}_2^- = \mathcal{J}_2 \setminus \mathcal{J}_2^+$;

Suponha, inicialmente, que $\mathcal{F}_0 = \emptyset$. Neste caso, os cortes de Gomory podem ser derivados em três passos:

1. Considere \bar{x} a solução para a relaxação linear $LP(\mathcal{F}_0 = \emptyset, \mathcal{F}_1 = \emptyset)$, conforme dado em (5.3). Substituindo os conjuntos \mathcal{J}_1^+ , \mathcal{J}_1^- , \mathcal{J}_2 , podemos escrever que:

$$\bar{x}_i = \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{a}_{ij}(-x_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} -\bar{a}_{ij}(-x_j) + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \bar{a}_{ij}(-x_j) \quad (5.6)$$

Considerando, em (5.6), que $\bar{a}_{ij} = \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor + \bar{f}_{ij}$ e que $-\bar{a}_{ij} = \lfloor -\bar{a}_{ij} \rfloor + 1 - \bar{f}_{ij}$, obtemos,

$$\begin{aligned} \bar{x}_i = \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} [\bar{a}_{ij}](-x_j) + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{f}_{ij}(-x_j) - \\ - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} [-\bar{a}_{ij}](-x_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} (1 - \bar{f}_{ij})(-x_j) + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \bar{a}_{ij}(-x_j) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Daí, chegamos a seguinte congruência¹:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} [\bar{a}_{ij}](-x_j) + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{f}_{ij}(-x_j) - \\ - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} [-\bar{a}_{ij}](-x_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} (1 - \bar{f}_{ij})(-x_j) + \\ + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \bar{a}_{ij}(-x_j) \equiv 0 \pmod{1}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Como, $\sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} [\bar{a}_{ij}](-x_j)$ e $\sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} [-\bar{a}_{ij}](-x_j)$ são inteiros, ou seja, $\equiv 0 \pmod{1}$, podem ser removidos da congruência, que fica dada por:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{f}_{ij}(-x_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} (1 - \bar{f}_{ij})(-x_j) + \\ + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \bar{a}_{ij}(-x_j) \equiv 0 \pmod{1}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Como $\bar{a}_{i0} > 0$, podemos adicionar $-\bar{a}_{i0} \equiv 0 \pmod{1}$, para reduzir \bar{a}_{i0} a sua parte fracionária, obtendo:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{f}_{ij}(-x_j) - \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} (1 - \bar{f}_{ij})(-x_j) + \\ + \sum_{j \in \mathcal{J}_2} \bar{a}_{ij}(-x_j) \equiv 0 \pmod{1}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

que pode ainda ser reescrito para,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{f}_{ij}x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} (\bar{f}_{ij} - 1)x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^+} \bar{a}_{ij}x_j + \\ + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^-} \bar{a}_{ij}x_j \equiv \bar{f}_{i0} \pmod{1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

¹Algumas definições e propriedades sobre congruência utilizadas para a derivação dos cortes de Gomory foram incluídas no apêndice A.

2. Suponha que $\bar{f}_{i0} > 0$. Então, para que seja diferente de \bar{f}_{i0} por uma quantidade inteira, deverá ser igual a \bar{f}_{i0} , $1 + \bar{f}_{i0}$, $2 + \bar{f}_{i0}$ etc.; portanto, a seguinte desigualdade é válida,

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \bar{f}_{ij} x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^+} \bar{a}_{ij} x_j \geq \bar{f}_{i0}. \quad (5.12)$$

Por outro lado, suponha que, $\bar{f}_{i0} < 0$, então, deverá ser igual a $-1 + \bar{f}_{i0}$, $-2 + \bar{f}_{i0}$, etc.; resultando na seguinte desigualdade,

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} (\bar{f}_{ij} - 1) x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^-} \bar{a}_{ij} x_j \leq \bar{f}_{i0} - 1. \quad (5.13)$$

3. Multiplicando (5.13) por -1 e dividindo cada desigualdade pelo seu respectivo lado direito resulta em:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_1^+} \frac{\bar{f}_{ij}}{\bar{f}_{i0}} x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^+} \frac{\bar{a}_{ij}}{\bar{f}_{i0}} x_j \geq 1, \quad (5.14)$$

e,

$$\sum_{j \in \mathcal{J}_1^-} \frac{(1 - \bar{f}_{ij})}{(1 - \bar{f}_{i0})} x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}_2^-} \frac{(-\bar{a}_{ij})}{(1 - \bar{f}_{i0})} x_j \geq 1. \quad (5.15)$$

Somando-se os termos do lado esquerdo das desigualdades (5.14) e (5.15) obtemos a desigualdade de Gomory $\sigma^t x \geq 1$ onde o vetor σ é calculado segundo (5.5).

Agora, falta remover a suposição inicial feita, de que $\mathcal{F}_0 = \emptyset$. Neste caso, a congruência do primeiro passo é derivada a partir do fato que a parte inteira dos coeficientes, multiplicada com inteiros, adicionada a um inteiro, permanece válida. A disjunção entre (5.12) e (5.13) no segundo passo é válida porque os termos do lado esquerdo de (5.12) são todos não-negativos, enquanto que os termos do lado esquerdo de (5.13) são todos não-positivos e, isto permanece para o caso se $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.

Finalmente, as multiplicações envolvidas no terceiro passo, claramente, não são afetadas pelo fato que $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$. Portanto, a desigualdade $\sigma^t x \geq 1$ é válida, completando a demonstração do Teorema 5.1. ■

Esta prova sobre a validade dos cortes de Gomory (5.4) é devida a Balas et alii, referência [3].

5.3 Cortes de Gomory em Decomposição de Benders

O objetivo de inclusão de cortes de Gomory no método de decomposição de Benders é fazer com que a convergência do método de decomposição para a solução ótima seja acelerada. Conforme visto anteriormente, a decomposição de Benders resolve, a cada iteração, uma relaxação do problema original, o subproblema *Mestre*, e um programa linear, o subproblema *Escravo*, cujo objetivo é gerar uma nova restrição que deve ser incorporada ao problema *Mestre*. Com a inclusão dos cortes de Gomory, procuramos enriquecer a representação da região de viabilidade do problema original no subproblema *Mestre*, obtendo assim uma melhora da convergência para a solução ótima.

Existem, basicamente, duas formas para implementar cortes de Gomory em conjunto com o modelo de decomposição de Benders. A primeira considera cortes de Gomory calculados a partir do problema *Mestre* da decomposição de Benders. Neste caso, como veremos na seqüência, o cálculo dos cortes de Gomory não implicam em custo computacional adicional, visto que os mesmos podem ser obtidos quando da solução do próprio problema *Mestre*. A segunda forma considera cortes de Gomory para uma relaxação linear do problema original o que requer a solução de mais um problema de programação linear.

5.3.1 Cortes de Gomory para o problema *Mestre*

Considere, inicialmente, o problema *Mestre* da decomposição de Benders que para a iteração $K + 1$ pode ser representado por,

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.16a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (5.16b)$$

$$\alpha + \pi^{k^t} E x \geq \pi^{k^t} h \quad k = 1, \dots, K \quad (5.16c)$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \quad (5.16d)$$

Para facilitar a notação, faça Π ser igual a

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pi^{1^t} \\ \pi^{2^t} \\ \vdots \\ \pi^{k^t} \\ \vdots \\ \pi^{K^t} \end{pmatrix}.$$

Substituindo Π na restrição (5.16c), obtemos:

$$\alpha + \Pi E x \geq \Pi h.$$

O cálculo de cortes de Gomory para o problema *Mestre* é direto e pode ser feito quando da solução deste problema por um método de “Branch-and-Cut” por exemplo. Contudo, esta tese de doutorado não tem como um dos seus objetivos a implementação de um método de “Branch-and-Bound” especializado e sim, verificar a utilização de cortes de Gomory em conjunto com cortes de Benders. Desta forma, vamos solucionar um novo problema de programação linear após a solução do problema *Mestre* de Benders. Entretanto, é importante ressaltar que, implementar o cálculo dos cortes de Gomory durante a solução do problema *Mestre* não implica em custo computacional adicional, o que não será o caso da estratégia adotada para ilustrar a utilização de cortes de Gomory em decomposição de Benders proposta nesta tese.

Note também que se os cortes de Gomory fossem calculados durante o processo de solução do problema *Mestre* da iteração k , eles já tem influência sobre a solução deste problema e não, somente sobre os problemas *Mestre* das iterações subseqüentes, como foi implementado neste trabalho de tese.

Sejam, $V = \{1, 2, \dots, n\}$ o conjunto com os índices para todas as variáveis restritas a valores $(0-1)$; $V_M \subset V$ um subconjunto de V escolhido arbitrariamente, que contém os índices das variáveis $(0-1)$ que continuarão fixadas no novo problema nos valores obtidos na solução do problema *Mestre* da decomposição de Benders; $V_M \supset V_M^1 = \{i, | x_i = 1\}$ e $V_M \supset V_M^0 = \{i, | x_i = 0\}$ dois subconjuntos com os índices das variáveis que estão em V_M e continuarão fixadas em 1, ou 0, respectivamente. Note que $V_M = V_M^0 \cup V_M^1$. Então, o seguinte problema de programação linear permite o cálculo de cortes de Gomory para o problema *Mestre* da decomposição de Benders,

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.17a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (5.17b)$$

$$\alpha + \Pi E x \geq \Pi h \quad (5.17c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.17d)$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in V_M^0 \quad (5.17e)$$

$$x_j = 1 \quad \forall j \in V_M^1. \quad (5.17f)$$

Note que, dependendo de como for escolhido o conjunto V_M , o problema (5.19) corresponde a um nó da árvore de “Branch-and-Bound” que foi explorado quando da solução do problema do problema *Mestre* da k -ésima iteração no método de decomposição de Benders.

Definindo,

$$\bar{x}_j^1 = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in V_M^1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (5.18)$$

podemos eliminar as variáveis previamente fixadas em 1, obtendo o seguinte problema,

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.19a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b - A\bar{x}^1 \quad (5.19b)$$

$$\alpha + \Pi E x \geq \Pi h - \Pi E \bar{x}^1 \quad (5.19c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.19d)$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in V_M, \quad (5.19e)$$

que considerando a inclusão de variáveis de folga s_1 e s_2 nas restrições (5.19b) e (5.19c), fica sendo,

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.20a)$$

sujeito a:

$$Ax - s_1 = b - A\bar{x}^1 \quad (5.20b)$$

$$\alpha + \Pi E x - s_2 = \Pi h - \Pi E \bar{x}^1 \quad (5.20c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.20d)$$

$$s_1, s_2 \geq 0 \quad (5.20e)$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in V_M. \quad (5.20f)$$

Redefinindo c , A , x e b no problema (5.2) da seguinte forma,

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A & -I & 0 \\ e & \Pi E & 0 & -I \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ x \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix},$$

e,

$$b = \begin{pmatrix} b - A\bar{x}^1 \\ \Pi h - \Pi E\bar{x}^1 \end{pmatrix},$$

obtemos o problema (5.20).

Assim, calcular os coeficientes dos cortes de Gomory para o problema *Mestre* de Benders reduz-se à análise apresentada na seção anterior. Utilizando os conjuntos \mathcal{I} e \mathcal{J} para representar as variáveis básicas e não básicas, podemos escrever a solução ótima do problema linear (5.20) da seguinte forma:

$$\bar{x}_i \begin{cases} = \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \bar{a}_{ij}(-x_j) & \forall i \in \mathcal{I} \\ \geq 0 & \forall i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J} \\ = 0 & \forall k \in \mathcal{F}_0. \end{cases}$$

Logo, podemos calcular os coeficientes dos cortes de Gomory para o problema *Mestre* por

$$\sigma_{x_j} = \begin{cases} \min\left(\frac{\bar{f}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{1-\bar{f}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & \text{se } (j \in \mathcal{X}) \in \mathcal{J}, \\ 0 & \text{se } (j \in \mathcal{X}) \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\sigma_{s_j} = \begin{cases} \max\left(\frac{\bar{a}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-\bar{a}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & \text{se } (j \in \mathcal{S}) \in \mathcal{J}, \\ 0 & \text{se } (j \in \mathcal{S}) \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.23)$$

onde \mathcal{X} e \mathcal{S} representam, respectivamente, os conjuntos com os índices das variáveis x e s .

Como α é irrestrito, $\alpha \in \mathcal{I}$ por definição, logo temos que $\sigma_\alpha = 0$. Podemos também substituir as variáveis de folga s_1 e s_2 em função das variáveis originais do problema, obtendo o seguinte corte de Gomory,

$$\left(\sigma_x^t + \sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t\right) x + \sigma_{s_2}^t e\alpha \geq 1 + \sigma_{s_1}^t b + \sigma_{s_2}^t \Pi h - \left(\sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t \Pi E\right) \bar{x}^1, \quad (5.24)$$

que deverá ser incluída no problema *Mestre* da decomposição de Benders da próxima iteração.

Na seqüência vamos ilustrar como obter cortes de Gomory considerando todas as variáveis do problema, ou seja, x e y ao invés de somente as variáveis x . Além disso, vamos discutir as implicações deste método sobre o modelo de decomposição de Benders.

5.3.2 Cortes de Gomory Benders Decompostos

O objetivo agora é obter cortes de Gomory que considerem todas as variáveis do problema. Para atender a este objetivo vamos propor um outro problema de programação linear que deve ser solucionado para o cálculo de tais cortes. Tal problema linear pode ser representado, utilizando as mesmos conjunto V_M^0 e V_M^1 definidos anteriormente, como,

$$\text{Minimize } c^t x + d^t y \quad (5.25a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (5.25b)$$

$$Ex + Fy \geq h \quad (5.25c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.25d)$$

$$x_j = 1 \quad \forall j \in V_M^1, \quad (5.25e)$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in V_M^0, \quad (5.25f)$$

$$y \geq 0. \quad (5.25g)$$

Eliminando as variáveis $x \in V_M^1$ previamente fixadas em 1, obtemos,

$$\text{Minimize } c^t x + d^t y \quad (5.26a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b - A\bar{x}^1 \quad (5.26b)$$

$$Ex + Fy \geq h - E\bar{x}^1 \quad (5.26c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.26d)$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in V_M, \quad (5.26e)$$

$$y \geq 0, \quad (5.26f)$$

onde \bar{x}^1 é definido de acordo com a equação (5.18).

Buscando a identidade com o problema (5.2) inserimos variáveis de folga s_1 e s_2 para representar as desigualdades (5.26b) e (5.26c) como igualdades e obter o seguinte problema de programação linear,

$$\text{Minimize } c^t x + d^t y \quad (5.27a)$$

sujeito a:

$$Ax - s_1 = b - A\bar{x}^1 \quad (5.27b)$$

$$Ex + Fy - s_2 = h - \bar{x}^1 \quad (5.27c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.27d)$$

$$x_j = 0 \quad \forall j \in V_M, \quad (5.27e)$$

$$y, s_1, s_2 \geq 0. \quad (5.27f)$$

Assim, redefinindo c , x , A e b da seguinte forma:

$$c = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} A & 0 & -I & 0 \\ E & F & 0 & -I \end{pmatrix},$$

e,

$$b = \begin{pmatrix} b - A\bar{x}^1 \\ h - E\bar{x}^1 \end{pmatrix},$$

obtemos a identidade com o problema (5.2).

Da mesma forma que o caso apresentado na seção anterior, o cálculo dos coeficientes dos cortes de Gomory se reduzem a análise apresentada na seção 5.2.1, ou seja, sejam \mathcal{I} e \mathcal{J} os conjuntos das variáveis básicas e não básicas na solução ótima do problema (5.27). Esta solução pode ser representada por:

$$\bar{x}_i \begin{cases} = \bar{a}_{i0} + \sum_{j \in \mathcal{J}} \bar{a}_{ij}(-x_j) & \forall i \in \mathcal{I} \\ \geq 0, & \forall i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J} \\ = 0, & \forall k \in \mathcal{F}_0. \end{cases}$$

Os coeficientes dos cortes de Gomory podem, então, serem calculados por,

$$\sigma_{xj} = \begin{cases} \min\left(\frac{\bar{f}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{1-\bar{f}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & \text{se } (j \in \mathcal{X}) \in \mathcal{J}, \\ 0 & \text{se } (j \in \mathcal{X}) \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.29)$$

$$\sigma_{yj} = \begin{cases} \max\left(\frac{\bar{a}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-\bar{a}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & \text{se } (j \in \mathcal{Y}) \in \mathcal{J}, \\ 0 & \text{se } (j \in \mathcal{Y}) \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\sigma_{s_1j} = \begin{cases} \max\left(\frac{\bar{a}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-\bar{a}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & \text{se } (j \in \mathcal{S}_1) \in \mathcal{J}, \\ 0 & \text{se } (j \in \mathcal{S}_1) \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.31)$$

e,

$$\sigma_{s_2j} = \begin{cases} \max\left(\frac{\bar{a}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-\bar{a}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & \text{se } (j \in \mathcal{S}_2) \in \mathcal{J}, \\ 0 & \text{se } (j \in \mathcal{S}_2) \in \mathcal{I}, \end{cases} \quad (5.32)$$

onde \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 , são os conjuntos com os índices das variáveis x , y , s_1 e s_2 , respectivamente.

Eliminando as variáveis de folga s_1 e s_2 obtemos o seguinte corte de Gomory,

$$\left(\sigma_x^t + \sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t E\right) x + \left(\sigma_y^t + \sigma_{s_2}^t F\right) y \geq 1 + \sigma_{s_1}^t b + \sigma_{s_2}^t h. \quad (5.33)$$

O problema agora passa a ser como incluir o corte, (5.33), no modelo de decomposição de Benders. Não podemos incluí-lo diretamente no próximo problema *Mestre*, como foi feito anteriormente, pois o problema *Mestre* considera somente as variáveis x , e o corte de Gomory ora apresentado, tem coeficientes não nulos tanto para x como também para y .

O que podemos fazer é decompor os cortes de Gomory (5.33) da mesma forma com que as restrições de acoplamento $Ex + Fy \geq h$ foram decompostas, ou seja, substitua, na k -ésima iteração do modelo de decomposição de Benders, a solução do problema *Mestre* ($x = \hat{x}^k$) no corte de Gomory (5.33) para obter a restrição

$$\left(\sigma_y^t + \sigma_{s_2}^t F\right) y \geq 1 + \sigma_{s_1}^t b + \sigma_{s_2}^t h - \left(\sigma_x^t + \sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t E\right) \hat{x}^k, \quad (5.34)$$

que deve ser incluída no problema *Escravo* do modelo de decomposição de Benders. Considerando o corte de Gomory (5.34), o problema *Escravo* passa a ser representado pelo seguinte problema de programação linear,

$$\text{Minimize } d^t y \quad (5.35a)$$

sujeito a:

$$Fy \geq h - E\hat{x}^k, \quad (5.35b)$$

$$\left(\sigma_y^t + \sigma_{s_2}^t F\right) y \geq 1 + \sigma_{s_1}^t b + \sigma_{s_2}^t h - \left(\sigma_x^t + \sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t E\right) \hat{x}^k \quad (5.35c)$$

$$y \geq 0$$

Observe que, ao contrário das modificações nos valores numéricos da matriz E e do vetor h – veja capítulo 5, a inclusão de cortes de Gomory para o problema original, conforme apresentado nesta seção, no problema *Escravo* de Benders modificam a região de viabilidade do problema Dual deste, que é a base para a convergência do método de decomposição de Benders, veja capítulo 3. Entretanto, tal alteração não inviabiliza os cortes de Benders, como será demonstrado pelo teorema a seguir.

Teorema 5.2 *O modelo de decomposição de Benders considerando a inclusão de cortes de Gomory Benders decompostos, dados pela equação (5.33), além dos cortes de Benders tradicionais, tem convergência finita para a solução ótima do problema.*

PROVA. Dado que o modelo proposto utiliza os cortes de Benders tradicionais, sua convergência para a solução ótima é garantida pelo método de decomposição de Benders se a solução ótima não for excluída por algum corte de Gomory Benders decomposto. Vamos mostrar então, que os cortes de Gomory Benders decompostos não eliminam a solução ótima do problema original.

Para isto, considere o problema *Esclavo* do modelo de decomposição de Benders, problema (3.15), será re-escrito a seguir somente para facilitar a compreensão,

$$\text{Minimize } d^t y \quad (5.36a)$$

sujeito a :

$$Fy \geq h - E\hat{x}^k \quad (5.36b)$$

$$y \geq 0, \quad (5.36c)$$

cujo problema Dual é dado por,

$$\text{Maximize } (h - E\hat{x}^k)^t \pi \quad (5.37a)$$

sujeito a:

$$F^t \pi \leq d \quad (5.37b)$$

$$\pi \geq 0.$$

A inclusão de um corte de Gomory, de acordo com a equação (5.33), requer uma decomposição que modifica o problema *Esclavo* de Benders para o problema representado em (5.35), cujo Dual é:

$$\text{Maximize } (h - E\hat{x}^k)^t \pi + \left(1 + \sigma_{s_1}^t b + \sigma_{s_2}^t h - (\sigma_x^t + \sigma_{s_1}^t + \sigma_{s_2}^t) \hat{x}^k\right) \lambda \quad (5.38a)$$

sujeito a:

$$F^t \pi + \sigma_y^t \lambda \leq d \quad (5.38b)$$

$$\pi, \lambda \geq 0 \quad (5.38c)$$

onde π e λ são as variáveis Duais associadas às restrições (5.35b) e (5.35c), respectivamente.

O que estamos interessados em provar é que $\forall \pi$ solução básica do problema (5.38), é também solução viável de (5.37). Note que, de (5.38b) podemos dizer que:

$$F^t \pi \leq d - \sigma_y^t \lambda \quad (5.39)$$

Portanto, para que $\forall \pi$, solução do sistema (5.39), seja também solução viável para o problema (5.37) basta mostrar que $\sigma_y^t \lambda \geq 0$. Como sabemos que $\lambda \geq 0$ (por construção do problema Dual), precisamos mostrar somente que $\sigma_y \geq 0$. Ora, σ_y é calculado pela equação (5.30)

$$\sigma_{y_j} = \begin{cases} \max\left(\frac{\bar{a}_{ij}}{f_{i0}}, \frac{-\bar{a}_{ij}}{1-f_{i0}}\right) & j \in \mathcal{J}, j \geq p+1 \\ 0 & j \in \mathcal{I} \end{cases} \quad (5.40)$$

que também garante, por construção, que $\sigma_y \geq 0$, completando a demonstração. ■

A seguir vamos verificar como incluir os cortes de Gomory em um modelo de decomposição de Benders para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.

5.4 Inclusão dos Cortes de Gomory no Modelo de Decomposição de Benders para o Problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão

Conforme discutidos nas seções anteriores podemos considerar cortes de Gomory em decomposição de Benders de duas formas: cortes de Gomory para o problema *Mestre* da decomposição de Benders e cortes de Gomory Benders decompostos. No caso dos problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão isto não é diferente. Logo, vamos iniciar esta seção ilustrando os cortes de Gomory para o problema *Mestre* da decomposição de Benders aplicada ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão e, em seguida, apresentar os cortes de Gomory Benders decompostos para o mesmo problema.

5.4.1 Cortes de Gomory para o Problema Mestre de Benders no Problema de Planejamento de Redes de Transmissão

O problema *Mestre* do modelo de decomposição de Benders aplicado para a solução de problema de planejamento da expansão de redes de transmissão pode ser colocado da seguinte forma:

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.41a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (5.41b)$$

$$\alpha + \underbrace{\left(\pi_{\mathcal{M}}^k \mathcal{M} + \pi_{f^1}^k [\bar{f}^1] \right)}_{Cf_x^k} x \geq \underbrace{\left(\pi_d^{k^t} d + \pi_{\mathcal{M}}^k \mathcal{M} e + \pi_{f^0}^k \bar{f}^0 + \pi_g^k \bar{g} + \pi_r^k d \right)}_{RHS^k} \quad k = 1, \dots, K \quad (5.41c)$$

$$x \in \{0, 1\}^n \quad (5.41d)$$

Utilizando os conjuntos V_M , V_M^0 e V_M^1 , e eliminando as variáveis $x_j \mid j \in V_M^1$ do problema, obtemos,

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.42a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b - A\bar{x}^1 \quad (5.42b)$$

$$\alpha + Cf_x^k x \geq RHS^k - Cf_x^k \bar{x}^1 \quad k = 1, \dots, K \quad (5.42c)$$

$$0 \leq x \leq 1 \quad (5.42d)$$

$$x_j = 0, \quad \forall j \in V_M \quad (5.42e)$$

onde \bar{x}^1 foi definido em (5.18).

Procedendo exatamente da mesma forma com que foi apresentado na seção anterior, ou seja, colocando as variáveis de folga s_1 e s_2 nas restrições (5.42b) e (5.42c), escrevendo o “tableau” da solução ótima e calculando os coeficientes dos cortes de Gomory, $\sigma^t x \geq 1$, obtemos,

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x^t + \sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t \left(\pi_{\mathcal{M}}^k {}^t \mathcal{M} + \pi_{f_1}^k {}^t [\bar{f}^1] \right) \right) x + \sigma_{s_2}^t e \alpha \geq \\ & 1 + \sigma_{s_1}^t b + \sigma_{s_2}^t RHS^k - \left(\sigma_{s_1}^t A + \sigma_{s_2}^t \left(\pi_{\mathcal{M}}^k {}^t \mathcal{M} + \pi_{f_1}^k {}^t [\bar{f}^1] \right) \right) \bar{x}^1, \end{aligned} \quad (5.43)$$

um novo corte de Gomory, que deve ser incluído no próximo problema *Mestre* do modelo de decomposição de Benders, que passa a ser representado por:

$$\text{Minimize } c^t x + \alpha \quad (5.44a)$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \quad (5.44b)$$

$$\alpha + \left(\pi_{\mathcal{M}}^k {}^t \mathcal{M} + \pi_{f_1}^k {}^t [\bar{f}^1] \right) x \geq RHS^k \quad k = 1, \dots, K \quad (5.44c)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_x^{gt} + \sigma_{s_1}^g {}^t A + \sigma_{s_2}^g {}^t \left(\pi_{\mathcal{M}}^k {}^t \mathcal{M} + \pi_{f_1}^k {}^t [\bar{f}^1] \right) \right) x + \sigma_{s_2}^g {}^t e \alpha \geq \\ & 1 + \sigma_{s_1}^g {}^t b + \sigma_{s_2}^g {}^t RHS^k - \left(\sigma_{s_1}^g {}^t A + \sigma_{s_2}^g {}^t \left(\pi_{\mathcal{M}}^k {}^t \mathcal{M} + \pi_{f_1}^k {}^t [\bar{f}^1] \right) \right) \bar{x}^1, \end{aligned} \quad (5.44d)$$

$$x \in \{0, 1\}^n, \quad (5.44e)$$

onde k é o contador de iterações do modelo de decomposição de Benders.

A seguir vamos apresentar a inclusão de cortes de Gomory Benders decompostos para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.

5.4.2 Cortes de Gomory Benders Decompostos para o Problema de Planejamento da Expansão de Redes de Transmissão

Nesta seção vamos apresentar o cálculo dos cortes de Gomory para o problema original, ou seja, o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, representado a seguir,

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (5.45a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (5.45b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (5.45c)$$

$$f^1 - [\gamma^1]S_1\theta \leq \mathcal{M}(e - x) \quad (5.45d)$$

$$f^1 - [\gamma^1]S_1\theta \geq -\mathcal{M}(e - x) \quad (5.45e)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1]x \leq 0 \quad (5.45f)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1]x \geq 0 \quad (5.45g)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (5.45h)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (5.45i)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (5.45j)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|C|} \quad (5.45k)$$

Fixando as variáveis pertencentes ao conjunto V_M , definido anteriormente, nos valores obtidos na solução do problema *Mestre*, $x = \hat{x}^K$, e relaxando a “integralidade” das outras variáveis $(0-1)$ não pertencentes ao conjunto V_M obtemos o seguinte problema de programação linear,

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (5.46a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (5.46b)$$

$$f^0 - [\gamma^0]S_0\theta = 0 \quad (5.46c)$$

$$f^1 - [\gamma^1]S_1\theta \leq \mathcal{M}(e - x - \bar{x}^1) \quad (5.46d)$$

$$f^1 - [\gamma^1]S_1\theta \geq -\mathcal{M}(e - x - \bar{x}^1) \quad (5.46e)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1]x \leq [\bar{f}^1]\bar{x}^1 \quad (5.46f)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1]x \geq -[\bar{f}^1]\bar{x}^1 \quad (5.46g)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (5.46h)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (5.46i)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (5.46j)$$

$$x_j = 0, \forall j \in V_M, \quad (5.46k)$$

onde \bar{x}^1 foi definido em (5.18).

Seguindo o mesmo procedimento apresentado nas seções anteriores, vamos colocar o problema (5.46) na forma do problema (5.2) para calcular os cortes de Gomory.

Logo, será necessário inserir variáveis de folga nas restrições (5.46d), (5.46e), (5.46h), (5.46i), (5.46j), (5.46f), (5.46g) e (5.46k), e redefinir c , A , x e b do problema (5.2) de acordo com o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão (5.46) da seguinte forma:

$$c = \begin{pmatrix} c_I \\ 0 \\ c_O \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ g \\ r \\ f^0 \\ f^1 \\ \theta \\ s_1 \\ \vdots \\ s_8 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & I & S_0^t & S_1^t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & -[\gamma^0]S_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{M} & 0 & 0 & 0 & I & -[\gamma^1]S_1 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{M} & 0 & 0 & 0 & I & -[\gamma^1]S_1 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -[\bar{f}^1] & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -[\bar{f}^1] & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix},$$

e,

$$b = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \mathcal{M}(e - \bar{x}^1) \\ -\mathcal{M}(e - \bar{x}^1) \\ [\bar{f}^1] \bar{x}^1 \\ -[\bar{f}^1] \bar{x}^1 \\ \bar{g} \\ d \\ \bar{f}^0 \\ -\bar{f}^0 \end{pmatrix}.$$

Note que f^0 , f^1 e θ são variáveis livres, assim como α é no problema *Mestre*. Logo, os coeficientes do corte de Gomory associados a estas variáveis serão nulos. Já os coeficientes do corte de Gomory para as outras variáveis podem ser calculados a partir do “tableau” na solução ótima para o problema de programação linear (5.46) que, após eliminarmos as variáveis de folga s_1, \dots, s_8 fica sendo igual a,

$$\begin{aligned} & (\sigma_x^t - \sigma_{s_1}^t \mathcal{M} - \sigma_{s_2}^t \mathcal{M} + \sigma_{s_3}^t [\bar{f}^1] + \sigma_{s_4}^t [\bar{f}^1]) x + (\sigma_g^t - \sigma_{s_5}^t) g + (\sigma_r^t - \sigma_{s_6}^t) r + \\ & + (-\sigma_{s_7}^t + \sigma_{s_8}^t) f^0 + (-\sigma_{s_1}^t + \sigma_{s_2}^t - \sigma_{s_3}^t + \sigma_{s_4}^t) f^1 + (-\sigma_{s_1}^t [\gamma^1] + \sigma_{s_2}^t [\gamma^1]) \theta \geq \\ & \geq 1 - \sigma_{s_1}^t \mathcal{M} e - \sigma_{s_2}^t \mathcal{M} e - \sigma_{s_5}^t \mathcal{M} \bar{g} - \sigma_{s_6}^t \mathcal{M} d - \sigma_{s_7}^t \mathcal{M} \bar{f}^0 - \sigma_{s_8}^t \mathcal{M} \bar{f}^0 \quad (5.47) \end{aligned}$$

Na próxima iteração ($K+1$) do modelo de decomposição de Benders, os cortes de Gomory, calculados a partir da equação (5.47), devem ser decompostos e incluídos no problema *Escravo*, considerando $x = \hat{x}^{K+1}$ como solução para o problema *Mestre*. A influência destes cortes somente será considerada no problema *Mestre*, que é uma relaxação do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, quando do cálculo dos cortes de Benders a partir do problema *Escravo* que inclui os cortes de Gomory ora apresentados.

Até este momento a aplicação dos cortes de Gomory Benders decompostos com o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão não obteve os resultados esperados.

Nas experiências computacionais realizadas as variáveis duais do problema *Escravo* associadas aos cortes de Gomory tinham valor nulo e, por conseqüência, os

cortes de Benders eram sempre iguais aos cortes de Benders tradicionais. Tal observação sugere que seja necessário a pesquisa e desenvolvimento de um algoritmo para fortalecimento destes cortes antes deles serem incluídos no problema *Escravo*.

Uma outra questão muito interessante sobre estas restrições, que também não foi explorada neste trabalho de tese de doutorado, relaciona-se a interpretação geométrica da decomposição de Benders. Para analisarmos esta questão suponha um problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } c_1x_1 + d_1y_1 + d_2y_2 \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & a_{11}x_1 \geq b_1 \\
 & e_{11}x_1 + f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + f_{13}y_3 \geq h_1 \\
 & e_{21}x_1 + f_{21}y_1 + f_{22}y_2 + f_{23}y_3 \geq h_2 \\
 & x_1 \in \{0, 1\} \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Aplicando decomposição de Benders ao problema anterior, obtemos o seguinte problema *Escravo*,

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize } d_1y_1 + d_2y_2 + d_3y_3 \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & f_{11}y_1 + f_{12}y_2 + f_{13}y_3 \geq h_1 - e_{11}\hat{x}_1 \\
 & f_{21}y_1 + f_{22}y_2 + f_{23}y_3 \geq h_2 - e_{21}\hat{x}_1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

onde \hat{x}_1 é o valor de x_1 para o problema *Mestre*. O Dual do problema *Escravo* é

$$\text{Maximize } (h_1 - e_{11}\hat{x}_1)\pi_1 + (h_2 - e_{21}\hat{x}_1)\pi_2$$

sujeito a:

$$f_{11}\pi_1 + f_{21}\pi_2 \leq d_1$$

$$f_{12}\pi_1 + f_{22}\pi_2 \leq d_2$$

$$f_{13}\pi_1 + f_{23}\pi_2 \leq d_3$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0.$$

A região de viabilidade do Dual do problema *Escravo* está representada na figura 5.1.

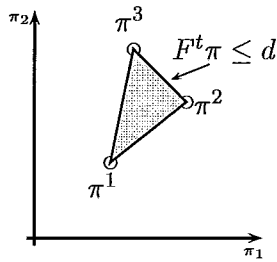


Figura 5.1: Representação geométrica da região de viabilidade do Dual do problema *Escravo*.

O método de decomposição de Benders utiliza os pontos extremos do poliedro \mathcal{P} , definido pelas restrições $F^t\pi \leq d$, para construir uma função convexa representando o comportamento das variáveis y face às decisões x do problema *Mestre*. Geometricamente, esta função convexa pode ser vista como representado na figura 5.2.

Quando consideramos de cortes de Gomory Benders decompostos o problema *Escravo* é modificado para incluir esta nova restrição. Conforme visto anteriormente, o Dual do problema *Escravo* também se modifica, pela inclusão de uma nova variável (Dual) associada ao corte de Gomory ora incluído no problema *Escravo*. Logo, geometricamente é como se aumentássemos a dimensão do espaço Dual, em nosso exemplo bidimensional se transformaria em tridimensional, conforme mostrado a figura 5.3.

Tendo em vista estas implicações e resultados preliminares vamos deixar a implementação dos cortes de Benders decompostos para trabalhos futuros.

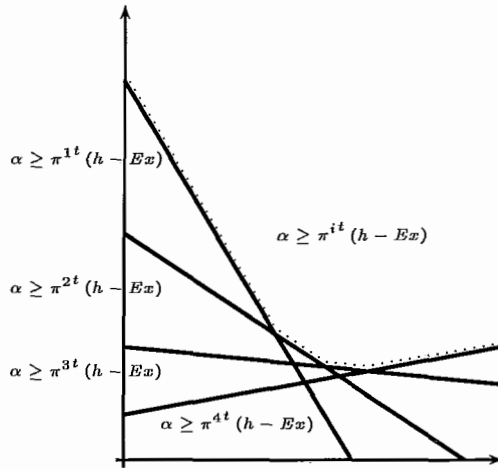


Figura 5.2: Interpretação geométrica do processo de decomposição de Benders.

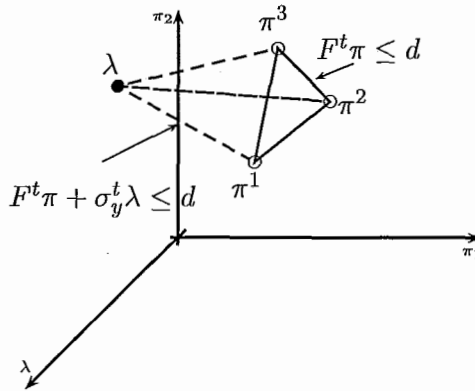


Figura 5.3: Representação geométrica da região de viabilidade do Dual do problema *Escravo* com cortes de Gomory Benders decompostos.

5.5 Conclusões e Desenvolvimentos Futuros

Uma proposta para inclusão de cortes de Gomory em conjunto com cortes tradicionais utilizados em um algoritmo de decomposição de Benders foi desenvolvido neste capítulo. Utilizando uma formulação geral de um problema de programação linear (0 – 1) mista, foram discutidas questões teóricas para a implementação desta proposta.

Vimos que são duas as possibilidades para considerar cortes de Gomory na decomposição de Benders. A primeira é a inclusão de cortes de Gomory calculados para o problema *Mestre* de Benders, que é um problema de programação linear (0 – 1)

mista. A segunda forma, é o cálculo de cortes de Gomory Benders decompostos. Esta nomenclatura foi relacionada a estes cortes visto que eles, após calculados, necessitam ser decompostos para serem incluídos no processo de Benders.

A aplicação dos cortes de Gomory Benders decompostos é um assunto que merece ainda muito estudo para ser concluído. Uma das questões que precisam ser estudadas relaciona-se ao aumento do número de variáveis do problema *Escravo*. Estudos com estes cortes serão deixados para trabalhos futuros.

Além dos cortes Benders decompostos, também deixamos para pesquisa futura o fortalecimento dos cortes de Gomory, sejam eles para o problema *Mestre* ou não. Com relação a este tópico em particular, já há um trabalho na literatura, [16], que analisa cortes de Gomory “liftados” em um algoritmo de “Branch-and-Cut” para problemas de programação linear (0 – 1) mista. Portanto, além da aplicação destas técnicas aos cortes de Gomory para o problema *Mestre*, que é direta, é necessário verificar as implicações teóricas para aplicação a cortes de Gomory Benders decompostos.

CAPÍTULO 6

A IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

6.1 Introdução

Neste capítulo vamos ilustrar os principais detalhes do programa computacional implementando o modelo de decomposição de Benders desenvolvido nesta tese para solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão. Sabe-se, do capítulo 3, que o problema *Mestre* é, por si só, um problema de difícil solução. Para ajudar na solução deste problema utilizamos algumas estratégias que também são descritas neste capítulo.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: A seção 6.2 ilustra as principais estratégias utilizadas para a solução dos problemas *Mestre*. A seção 6.3 descreve os principais pontos da implementação computacional desenvolvida nesta tese para solução de problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Finalmente, algumas conclusões são apresentadas na seção 6.4.

6.2 Estratégias Utilizadas

A metodologia clássica de decomposição de Benders quando aplicada a solução de problemas de programação linear (0 – 1) mista resolve, a cada iteração, um problema de programação linear (0 – 1) mista menor (e mais fácil) do que o problema original, o problema *Mestre*. A diferença entre os problemas *Mestre* da k -ésima e da $k + 1$ -ésima iteração é a inclusão de uma restrição, o corte de Benders. Contudo, seria desejável, se possível, considerar a inclusão de outros cortes (restrições) no problema *Mestre* de Benders acerca das restrições do problema *Escravo*, ou sub-

problema de operação. Estes “outros” cortes poderiam ajudar, significativamente, na convergência do processo de decomposição.

O programa computacional desenvolvido nesta tese considera, além dos cortes de Benders gerados a partir do problema *Escravo* formulado pelo modelo linear disjuntivo, cortes de Benders produzidos por problemas que são relaxações do problema *Escravo*, como por exemplo o problema de operação formulado pelo modelo de transportes ou pelo modelo híbrido. A utilização destes cortes não traz conseqüências negativas em relação a convergência do processo de decomposição de Benders, como será demonstrado pelo teorema a seguir.

Teorema 6.1 *Um algoritmo de decomposição de Benders que utilize, além dos cortes de Benders tradicionais, cortes de Benders obtidos a partir de relaxações do problema *Escravo*, converge para a solução ótima do problema.*

PROVA. Para mostrar que um algoritmo que utilize, além dos cortes de Benders tradicionais, cortes de Benders calculados a partir de relaxações do problema *Escravo* converge para a solução ótima, basta mostrar que esta solução não será excluída por algum dos cortes gerados a partir dos problemas relaxados, visto que a utilização dos cortes de Benders tradicionais já produz uma seqüência convergente para a solução ótima, veja capítulo 3.

Para ilustrar que os cortes de Benders calculados a partir de relaxações do problema *Escravo* não excluem a solução ótima, considere um problema de programação da seguinte forma:

$$\text{Minimize } z = c^t x + d^t y \tag{6.1a}$$

sujeito a:

$$Ax \geq b \tag{6.1b}$$

$$E_1 x + F_1 y \geq h_1 \tag{6.1c}$$

$$E_2 x + F_2 y \geq h_2 \tag{6.1d}$$

$$x \in \{0, 1\}^n$$

$$y \geq 0.$$

Se aplicarmos o método de decomposição de Benders ao problema (6.1) de acordo com o que foi discutido no capítulo 3, obtemos o seguinte problema de programação como problema *Escravo* de Benders,

$$\text{Minimize } z = d^t y \quad (6.2a)$$

sujeito a:

$$F_1 y \geq h_1 - E_1 \hat{x}^k \quad (6.2b)$$

$$F_2 y \geq h_2 - E_2 \hat{x}^k \quad (6.2c)$$

$$y \geq 0,$$

onde \hat{x}^k é a solução do problema *Mestre* na k -ésima iteração. O problema Dual de (6.2), do qual obtemos as variáveis duais para construção dos cortes de Benders, pode ser colocado como

$$\text{Maximize } z_D = (h_1 - E_1 \hat{x}^k)^t \pi_1 + (h_2 - E_2 \hat{x}^k)^t \pi_2 \quad (6.3a)$$

sujeito a:

$$F_1^t \pi_1 + F_2^t \pi_2 \leq d \quad (6.3b)$$

$$\pi_1, \pi_2 \geq 0.$$

Considere agora uma relaxação do problema *Escravo* (6.2), por exemplo o problema obtido relaxando-se as restrições $F_2 y \geq h_2 - E_2 \hat{x}^k$, representado a seguir,

$$\text{Minimize } z = d^t y \quad (6.4a)$$

sujeito a:

$$F_1 y \geq h_1 - E_1 \hat{x}^k \quad (6.4b)$$

$$y \geq 0.$$

O problema Dual do problema (6.4) pode ser representado por:

$$\text{Maximize } z_D = (h_1 - E_1 \hat{x}^k)^t \pi_1 \quad (6.5a)$$

sujeito a:

$$F_1^t \pi^t \leq d \quad (6.5b)$$

$$\pi \geq 0.$$

Para garantir que os cortes de Benders produzidos a partir de alguma relaxação do do problema *Escravo*, (6.5), não eliminam a solução ótima, basta mostrar que as soluções Duais do modelo relaxado são também soluções Duais viáveis para o problema Dual do problema *Escravo* completo (6.3). Nesta linha, suponha que o conjunto \mathcal{V} é formado por todas as soluções Duais viáveis para o problema (6.5), ou seja,

$$\mathcal{V} = \{ \pi^i \mid F_1^t \pi^i \leq d, \pi^i \geq 0 \}.$$

Portanto, o que queremos mostrar é que,

$$\text{para } \forall \pi^i \in \mathcal{V} \exists \pi_2^i \geq 0 \mid F_1^t \pi^i + F_2^t \pi_2^i \leq d. \quad (6.6)$$

É fácil ver que para $\pi_2 = 0$ a condição necessária (6.6), para que $\forall \pi^i \in \mathcal{V}$ seja solução Dual viável do problema (6.3), está satisfeita, completando a demonstração. ■

A utilização de cortes de Benders para os modelos de transportes e híbrido no contexto da decomposição de Benders aplicada à solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão já foi realizada no modelo hierárquico proposto na tese de Romero, referências [62, 63]. Cortes de Benders para o modelo de transportes também foram utilizados em [54]. Contudo, em ambos trabalhos, a cada iteração do processo de decomposição somente um corte de Benders era calculado e acrescentado ao problema *Mestre*, seja este calculado a partir do problema *Escravo*, do modelo de transportes ou do modelo híbrido. Neste trabalho o que estamos fazendo de diferente é tirar proveito do fato que a solução do problema

Escravo é (muito mais) fácil do que a solução do problema *Mestre* para calcular um número maior de cortes de Benders a cada iteração do processo de decomposição, fazendo assim uma melhor representação da função que descreve o problema de segundo estágio no problema *Mestre*. A seguir vamos discutir o cálculo dos cortes de Benders para os modelos de transportes e híbrido.

6.2.1 Cortes de Benders para o Modelo de Transportes

Suponha que para a k -ésima iteração do modelo de decomposição de Benders, \hat{x}^k seja a solução do problema *Mestre*. Fixando-se a variável de investimento, x na solução do problema *Mestre*, \hat{x}^k , o problema *Escravo* formulado pelo modelo de transportes fica sendo,

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \tag{6.7a}$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \tag{6.7b}$$

$$-[\bar{f}^1] \hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1] \hat{x}^k \tag{6.7c}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \tag{6.7d}$$

$$0 \leq r \leq d \tag{6.7e}$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \tag{6.7f}$$

Resolvido o problema do modelo de Transportes (6.7) podemos calcular o seguinte corte de Benders,

$$\alpha + \pi_{f^1}^k {}^t[\bar{f}^1]x \geq \pi_d^k {}^t d + \pi_g^k {}^t \bar{g} + \pi_r^k {}^t d + \pi_{f^0}^k {}^t \bar{f}^0 \tag{6.8}$$

onde k é o índice das iterações do método de decomposição de Benders, π_d^k , $\pi_{f^1}^k$, π_g^k , π_r^k , e $\pi_{f^0}^k$ são, respectivamente, o vetor de variáveis duais relacionadas às restrições (6.7b), (6.7c), (6.7d), (6.7e) e (6.7f).

Esta nova restrição, (6.8), deverá ser incluída, em conjunto com os cortes calculados para o problema *Escravo* formulado pelo modelo linear disjuntivo, (4.22)

– veja capítulo 4, no problema *Mestre* da próxima iteração, $k + 1$, do processo de decomposição.

O Modelo de Transportes e o Método de Cerca

O método de Cerca é uma heurística desenvolvida nas primeiras pesquisas sobre problemas de planejamento [4]. Em linhas gerais, o método de Cerca separa o sistema elétrico em áreas de carga (ou de geração) “cercando” (ou agrupando) barras do sistema nas quais o somatório da carga é maior (ou menor) do que o somatório da geração. Através de uma metodologia heurística, o método de Cerca identifica a principal área, de carga ou de geração, que pode ser aquela com maior “estrangulamento” do sistema de transmissão, e determina quais circuitos devam ser construídos para as áreas vizinhas de forma a eliminar estes estrangulamentos que impossibilitam ou o atendimento da carga ou o escoamento da geração desta área. Utilizando-se repetidas cercas, o método elimina, iterativamente, todas as deficiências de transporte de potência no sistema de transmissão.

Foi proposto na tese de doutorado de Romero [63], como uma idéia alternativa para melhorar o desempenho do método de decomposição de Benders, a utilização de um método do tipo do método de Cerca para gerar restrições de excesso ou falta de capacidade de potência em uma área qualquer do sistema. Estas restrições seriam incluídas no problema *Mestre* da decomposição de Benders. Vamos mostrar a seguir que a utilização do método de Cerca para produzir estas restrições é, essencialmente, equivalente a utilização dos cortes de Benders gerados a partir do modelo de Transportes.

Proposição 6.1 *Os cortes de Benders gerados a partir do modelo de Transportes ou estão contidos no conjunto de restrições obtidos com um método de Cerca modificado para geração de restrições ou são combinações convexas destas restrições.*

PROVA. Vamos supor que temos um conjunto \mathcal{V} que contém todos os cortes válidos gerados por um método de Cerca. É claro que a enumeração de todas as cercas em um sistema de transmissão, mesmo de médio porte, não é possível pois o número de cercas cresce exponencialmente com o número de barras. Entretanto, somente estamos interessados em mostrar que os cortes de Benders para o modelo

de Transportes são um subconjunto de \mathcal{V} , logo supor a existência do conjunto \mathcal{V} não é muito forte.

Agora vamos nos concentrar no modelo de Transportes, representado pelo problema (6.7). A solução ótima deste problema pode ser caracterizada da seguinte forma:

1. O valor da solução ótima é nulo, isto é, $z_O = c_O^t r = 0$. Neste caso, podemos dizer que os fluxos nos circuitos estão todos “dentro” dos limites \bar{f} e, por conseqüência, os vetores das variáveis Duais associado às restrições do problema (6.7) são nulos, fazendo com que não seja possível a gerar cortes de Benders.
2. O valor da solução ótima é diferente de zero, isto é, como $c_O \geq 0$ por definição, temos $z_O = c_O^t r > 0$. Daí, podemos afirmar que existe pelo menos um nó da rede, por exemplo o nó l , em que $r_l > 0$. Vamos supor, inicialmente, que só existe um nó, l , no qual $r_l > 0$. Posteriormente, vamos remover esta hipótese. Podemos afirmar também que existe um grupo de circuitos que estão no limite de carregamento, impedindo um aumento no fornecimento de fluxo para o nó l que apresenta um corte de demanda. Este grupo de circuitos no limite de carregamento definem uma região imaginária do sistema de transmissão que delimita (ou cerca) duas regiões, uma deficitária e outra com excesso de geração, dado que o total de geração é igual ao total de carga.

O valor da variável Dual, $\pi_{\bar{f}}$, associada às restrições de limite de carregamento para os circuitos que delimitam as regiões imaginárias será igual ao custo do corte de demanda no nó l , pois se o limite de carregamento for aumentado de 1 unidade, c_{Ol} será a economia causada no sistema.

Por outro lado, as variáveis Duais associadas às restrições de atendimento ao mercado, π_d , e ao limite de geração, π_g , para as barras pertencentes a região imaginária de deficit de geração, terão sinais opostos e valor também igual ao custo do corte de demanda no nó l , pela mesma razão descrita acima. Já a variável Dual π_r será igual a 0. No caso da outra região, com excesso de capacidade de geração, as variáveis Duais π_d , π_g e π_r são todas iguais a 0, pelo mesmo raciocínio apresentado anteriormente.

Então, chamando de Σ o conjunto dos circuitos que estão no limite de carregamento na solução ótima do problema de Transportes, e de Ω o conjunto das barras pertencentes ao interior desta região, o corte de Benders gerado pode ser expresso por:

$$\alpha + c_{Ol} \sum_{ij \in \Sigma} \bar{f}_{ij} x_{ij} \geq c_{Ol} \sum_{j \in \Omega} (d - \bar{g})$$

Supondo que $\alpha = 0$ na solução ótima do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, ou seja, a inexistência de cortes de carga no plano ótimo de expansão, obtemos a seguinte restrição,

$$\sum_{ij \in \Sigma} \bar{f}_{ij} x_{ij} \geq \sum_{j \in \Omega} (d - \bar{g})$$

que consiste, exatamente, na restrição que poderia ser gerada por um método de Cerca (neste caso a cerca Σ), representando que a capacidade de transporte do sistema de transmissão para uma área imaginária qualquer deve ser maior ou igual que a capacidade de geração (ou de carga) desta área do sistema elétrico.

Para completarmos a demonstração falta somente remover a hipótese de que apenas uma barra, no caso anterior a barra l tem corte de carga maior do que zero. Assim, considere que várias áreas no sistema de transmissão estão ou com excesso ou com deficit de geração. Associada a cada uma destas áreas imaginárias teremos um grupo de circuitos “cercando” a região em questão. Tais circuitos terão variáveis Duais associadas às restrições de limite de capacidade iguais ao custo de corte de carga da barra “marginal” de cada uma das áreas fictícias. Faça Ω_l ser o conjunto das barras pertencentes a região fictícia l ordenado pelo custo do corte de carga de cada uma das barras, isto é, $\Omega_l = \{i, j, \dots, m_l, \dots, |\Omega_l| \mid c_{Oi} \leq c_{Oj} \leq \dots \leq c_{Om_l} \leq c_{O|\Omega_l|}\}$. A solução ótima do problema de transporte (6.7) corta a carga desta região sempre do menor custo para o maior custo, até que a carga remanescente da região seja igual a capacidade de transporte dos circuitos que definem a “cerca”. A barra marginal, m_l , é a última barra desta região que ainda teve sua carga cortada.

Faça \bar{c}_l ser o custo do corte de carga da barra marginal. Então, conforme mencionado anteriormente, as variáveis Duais, $\pi_{\bar{f}} = \bar{c}_l$.

A variáveis Duais associadas às restrições de atendimento a carga, π_d , serão calculadas por:

$$\pi_{di} = \begin{cases} \bar{c}_l & \text{se } i \geq m_l \text{ e } i \in \Omega_l; \\ c_{O_i} & \text{se } i < m_l \text{ e } i \in \Omega_l, \end{cases}$$

Por outro lado, as variáveis Duais associadas às restrições de capacidade de geração, π_g , serão iguais a $-\bar{c}_l$. Já as variáveis Duais, π_r , que no caso anterior eram nulas, agora são calculadas por:

$$\pi_{ri} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \geq m_l \text{ e } i \in \Omega_l; \\ -\bar{c}_l + c_{O_i} & \text{se } i < m_l \text{ e } i \in \Omega_l. \end{cases}$$

Portanto, o corte de Benders será dado por:

$$\alpha + \sum_{l=1}^{|R|} \left(\bar{c}_l \sum_{ij \in \Sigma_l} (\bar{f}_{ij} x_{ij}) \right) \geq \sum_{l=1}^{|R|} \left(\bar{c}_l \sum_{\substack{i \in \Omega_l \\ i \geq m_l}} d_i + \sum_{\substack{i \in \Omega_l \\ i < m_l}} c_{O_i} d_i - \sum_{\substack{i \in \Omega_l \\ i < m_l}} (c_{O_i} - \bar{c}_l) d_i - \sum_{i \in \Omega_l} \bar{c}_l \bar{g}_i \right),$$

onde $|R|$ representa o número de regiões com restrição de transporte no sistema, Σ_l o conjunto dos circuitos que definem a l -ésima região fictícia com deficit de geração e Ω_l o conjunto das barras ordenadas pelo custo do corte de carga pertencentes a l -ésima região com deficit de geração.

Rearranjando os termos do lado esquerdo do corte de Benders representado anteriormente obtemos,

$$\alpha + \sum_{l=1}^{|r|} \left(\bar{c}_l \sum_{ij \in \Sigma} (\bar{f}_{ij} x_{ij}) \right) \geq \sum_{l=1}^{|r|} \left(\bar{c}_l \sum_{i \in \Omega_l} (d_i - \bar{g}_i) \right).$$

Fazendo, $\alpha = 0$ na solução ótima, é fácil ver que o corte de Benders, produzido pelo modelo de transportes, é uma combinação linear, pelo custo de corte de

carga das “barras marginais” das áreas imaginárias do sistema, dos cortes obtidos a partir de um método de “Cerca”, completando a demonstração. ■

A seguir vamos verificar como são gerados os cortes de Benders a partir de um problema *Escravo* formulado pelo modelo Híbrido.

6.2.2 Cortes de Benders para o Modelo Híbrido

O modelo Híbrido consiste na relaxação das restrições disjuntivas, que correspondem a segunda lei de Kirchoff sobre os circuitos candidatos. Portanto, sendo $x = \hat{x}^k$ a solução do problema *Mestre* para a k -ésima iteração, o problema *Escravo*, formulado pelo modelo Híbrido pode ser representado da seguinte forma:

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \tag{6.9a}$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \tag{6.9b}$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \tag{6.9c}$$

$$-[\bar{f}^1] \hat{x}^k \leq f^1 \leq [\bar{f}^1] \hat{x}^k \tag{6.9d}$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \tag{6.9e}$$

$$0 \leq r \leq d \tag{6.9f}$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \tag{6.9g}$$

Note que o problema de programação linear (6.9) difere do problema linear do modelo de Transportes (6.7) somente pela inclusão das restrições correspondentes a segunda lei de Kirchoff para os circuitos da rede existente. Isto faz com que seja interessante a utilização, para a solução do problema (6.9), de um algoritmo Dual Simplex, que já inicia da solução Dual ótima obtida para o problema do modelo de Transportes.

Resolvido o problema linear (6.9) podemos calcular o seguinte corte de Benders,

$$\alpha + \pi_{f_1}^k [f^{-1}]x \geq \pi_d^k d + \pi_g^k \bar{g} + \pi_r^k d + \pi_{f_0}^k f^0 \quad (6.10)$$

onde k é o índice das iterações do método de decomposição de Benders, $\pi_{f_1}^k$, π_d^k , π_g^k , π_r^k , e $\pi_{f_0}^k$ são, respectivamente, o vetor de variáveis duais relacionadas às restrições (6.9d), (6.9b), (6.9e), (6.9f) e (6.9g).

Assim como no caso anterior, a nova restrição obtida pelo corte de Benders para o modelo Híbrido deverá ser incluída, no conjunto de cortes de Benders que será considerado na solução do problema *Mestre* da iteração $k + 1$.

6.2.3 Restrições Especiais

O objetivo de representar restrições especiais é fornecer ao programa informações sobre o sistema de transmissão que a metodologia de decomposição de Benders tem dificuldade, ou não consegue, resolver satisfatoriamente. Por exemplo, suponha que para conectar uma determinada barra de geração a outra barra de carga seja necessário a adição de dois ou mais circuitos candidatos em série pois eles conectam barras que estão isoladas da rede existente. Então, não faz nenhum sentido para o programa de decomposição tentar a adição de qualquer um destes circuitos candidatos separadamente e tão pouco em subgrupos. Somente a adição de todo o caminho é que deveria ser considerada pois só assim haveria o transporte de energia neste caminho. Problemas como este trazem grande dificuldade para métodos de decomposição de Benders, que podem levar muitas iterações até que os cortes de Benders “aprendam” que o caminho deve ser adicionado como um todo.

Uma maneira para tentar solucionar tais problemas é considerar uma restrição que “amarre” a decisão de adição de um circuito candidato a do outro, ou seja, uma restrição que só permita a adição dos caminho como um todo. Para exemplificar vamos considerar o exemplo do figura 6.1 onde a barra k é conectada à barra l por dois de circuitos candidatos em série ki e il .

Para amarrar a decisão de adição ou não associada às variáveis binárias x_{ki} e x_{il} basta considerar as seguintes restrições:

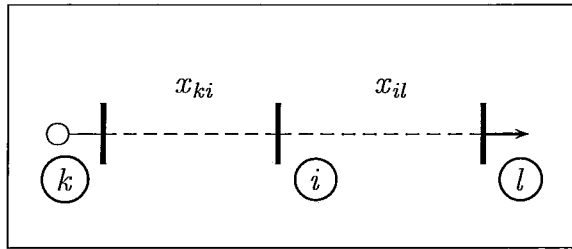


Figura 6.1: Conexão de um caminho de circuitos candidatos.

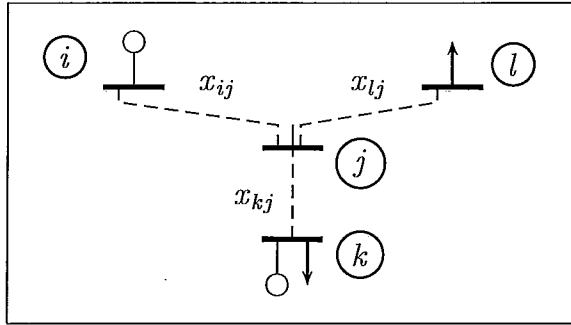


Figura 6.2: Conexão de uma barra inicialmente isolada.

$$x_{ki} - x_{il} \leq 0$$

$$x_{il} - x_{ki} \leq 0,$$

que não será possível que na solução do problema *Mestre* estas variáveis tenham valores diferentes entre elas. Restrições especiais para a adição de caminhos em série, como os casos de transformadores e circuitos, também foram consideradas em [63].

Podemos também melhorar a informação com relação a conexão de barras que estão inicialmente isoladas do sistema interligado mas que, ao contrário do caso anterior, tenham várias opções para esta conexão. Para ilustrar considere um caso simples em que a barra isolada pode ser conectada ao sistema interligado por três opções diferentes, conforme ilustrado na figura 6.2.

Note que como a barra j é uma barra isolada sem qualquer geração ou carga (de passagem) sua conexão ao sistema interligado só fará sentido com a ligação de um caminho passando pela barra j , na figura, $x_{ij} + x_{kj}$ ou $x_{ij} + x_{lj}$ ou $x_{lj} + x_{kj}$. Para representar os caminhos alternativos podemos considerar as seguintes restrições:

$$x_{ij} - x_{kj} - x_{lj} \leq 0$$

$$x_{lj} - x_{ij} - x_{kj} \leq 0$$

$$x_{kj} - x_{lj} - x_{ij} \leq 0.$$

Na apêndice D estão ilustradas todas as restrições especiais utilizadas nos casos de planejamento da expansão de sistemas de transmissão utilizados nesta tese.

6.2.4 Conjunto de Soluções Elite \mathcal{ES}

O problema *Mestre* da decomposição de Benders para o planejamento da expansão de redes de transmissão é um problema de programação linear (0 – 1) mista. Sua resolução é o ponto chave para a aplicação com sucesso de Benders a problemas discretos, visto que a maior parte dos requisitos computacionais necessários são devido a este problema.

A aplicação do algoritmo de “Branch-and-Bound” para a solução do problema *Mestre* com base na heurística apresentada no capítulo 3, ou seja, com o objetivo de encontrar uma solução viável cujo valor da função objetivo seja inferior a $z_{INF} + TolConv$, revelou uma característica particular que pode ser aproveitada para melhorar a eficiência da resolução deste problema: soluções viáveis para o problema *Mestre* da k -ésima iteração são também soluções viáveis, ou ótimas, para os problemas *Mestre* das iterações subseqüentes.

Tal comportamento sugere a implementação de um conjunto de soluções elite para guardar as melhores soluções viáveis para o k -ésimo problema *Mestre* e testá-las para os problemas *Mestre* das iterações subseqüentes. Caso na resolução do problema *Mestre* da iteração $k+1$ uma determinada solução pertencente ao conjunto elite de soluções, por exemplo $(\hat{x}, \hat{\alpha})$, seja viável, seu custo, calculado por $c_1^t \hat{x} + \hat{\alpha}$, deve ser fornecido como um limite superior para o valor da função objetivo para o método de “Branch-and-Bound”, aumentando a eficiência da resolução do problema *Mestre*. Este comportamento já havia sido identificado por Romero [63] que também utilizou um esquema equivalente ao descrito acima.

Contudo, observe que como a solução ótima obtida por métodos de decomposição de Benders é uma solução ϵ -ótima, onde $\epsilon \leq TolConv$, e já temos (do conjunto de

soluções elite) uma solução cujo valor da função objetivo é $c_I^t \hat{x} + \hat{\alpha}$, não estamos interessados em obter outras soluções viáveis cujo valor da função objetivo é, somente, menor do que este limite superior. Ao contrário, o que queremos é que o método de “Branch-and-Bound” nos forneça uma solução viável que faça com que a solução elite $(\hat{x}, \hat{\alpha}) \in \mathcal{ES}$ não seja mais uma solução candidata a ϵ -ótima no processo de decomposição. Para isto, o limite superior que deve ser fornecido ao algoritmo de “Branch-and-Bound” deve ser $(c_I^t \hat{x} + \hat{\alpha}) - TolConv$. Só assim a solução do conjunto elite não será mais candidata a solução ϵ -ótima do processo de decomposição.

Note que, caso não exista nenhuma solução viável com custo inferior a $c_I^t \hat{x} + \hat{\alpha} - TolConv$, o novo limite inferior, z_{INF} , deve ser ajustado em função da solução do conjunto de solução elite da seguinte forma: $z_{INF} = c_I^t \hat{x} + \hat{\alpha} - TolConv$.

6.3 Descrição da Implementação Computacional

A implementação computacional desenvolvida para verificação dos conceitos apresentados nesta tese de doutorado consiste em, basicamente, quatro módulos: uma função que gerencia o processo de decomposição de Benders (`MainBenders()`), uma função que toma conta da geração dos cortes de Benders (`MainSlave()`), uma função que gera os cortes de Gomory (`MainGomory()`) a partir da solução do problema *Mestre* que é administrado pela função `MainMaster()`. A seguir, vamos descrever cada uma destas funções.

O primeiro módulo é uma função que gerencia todo o processo de decomposição, solução e convergência do processo de decomposição de Benders. Além de tomar conta dos limites (superiores e inferiores) e do *GAP* para convergência, esta função chama os módulos geradores dos cortes de Benders, dos cortes de Gomory e a função que soluciona o problema *Mestre* da decomposição de Benders.

A figura 6.3 ilustra o pseudo-código do módulo `MainBenders`, onde *TolConv*, *k* e *GAP* são, respectivamente, a tolerância de convergência, o contador de iterações e o *GAP* para convergência na *k*-ésima iteração. *BC* representa um conjunto contendo todos os cortes de Benders (calculados na função `MainSlave()`), enquanto que *G* é um conjunto que armazena todos os cortes de Gomory para o problema *Mestre* (que são calculados na função `MainGomory()`). *ES* é o conjunto de soluções elite para o

função MainBenders (*TolConv*)

```
1   $k = 0; z_{INF} = 0; z_{SUP} = \infty;$ 
2   $\mathcal{ES} = \emptyset; \mathcal{B} = \emptyset; \mathcal{G} = \emptyset;$ 
3   $GAP = z_{SUP} - z_{INF};$ 
4  enquanto  $GAP \geq TolConv$  faça
5     $(\hat{x}^k, \hat{\alpha}^k) = \text{MainMestre}( z_{INF}, TolConv, \mathcal{B}, \mathcal{G}, \mathcal{ES} );$ 
6     $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \text{MainSlave}(\hat{x}^k);$ 
7    se  $\mathcal{M}_{ij} < \mathcal{M}_{ij}^{max}, \forall ij \in \mathcal{C}$ 
8      Atualize  $\mathcal{M}_{ij}, \forall ij \in \mathcal{C};$ 
9      Recompute  $\mathcal{B}$  para o novo  $\mathcal{M}_{ij};$ 
10   senão
11      $z_{INF} = c_I^t \hat{x}^k + \alpha^k;$ 
12      $z_{SUP} = \min_{j=1, \dots, k} (c_I^t \hat{x}^j + c_O^t \hat{r}^j);$ 
13      $GAP = z_{SUP} - z_{INF};$ 
14      $\mathcal{G} = \mathcal{G} \cup \text{MainGomory}(\hat{x}^k);$ 
15   fim se
16    $k = k + 1;$ 
17 fim faça
fim MainBenders.
```

Figura 6.3: Pseudo-código da função MainBenders().

problema *Mestre* ordenado pelo custo $(c_I^t x + \alpha \mid (x, \alpha) \in \mathcal{ES})$ do menor para o maior. $\mathcal{M}_{ij}, \forall ij \in \mathcal{C}$ são os valores para a constante disjuntiva para cada um dos circuitos candidatos. \hat{x}^k e $\hat{\alpha}^k$ são as soluções do problema *Mestre* na k -ésima iteração. z_{INF} e z_{SUP} são as estimativas inferiores e superiores para o valor da função objetivo do problema em questão.

O passo 8, **Atualize** $\mathcal{M}_{ij}, \forall ij \in \mathcal{C}$, consiste, somente, do aumento da constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} segundo um incremento fixo informado pelo usuário como parâmetro de entrada seguido da verificação se o valor da constante disjuntiva já está de acordo com o valor máximo \mathcal{M}_{ij}^{max} , calculado para cada circuito candidato conforme definido na equação (4.28) do teorema 4.4.

O passo 9, **Recompute** \mathcal{B} **para novo** \mathcal{M}_{ij} , consiste da atualização dos coeficientes dos cortes de Benders calculados até a k -ésima iteração face a mudança no valor da constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} , passo 5. Os novos valores para os coeficientes são obtidos de acordo com as equações (4.26) e (4.27) apresentada no teorema 4.1, veja capítulo 4.

```
função MainSlave (  $\hat{x}^k$  )
```

```
1  Monta problema de transportes (6.7);  
2  Soluciona problema de transportes (6.7);  
3   $\mathcal{B.T} = \mathcal{B.T} \cup (6.8)$ ;  
4  Monta problema híbrido (6.9);  
5  Soluciona problema híbrido (6.9);  
6   $\mathcal{B.H} = \mathcal{B.H} \cup (6.10)$ ;  
7  Monta problema linear disjuntivo (4.21);  
8  Soluciona problema linear disjuntivo (4.21);  
9   $\mathcal{B.D} = \mathcal{B.D} \cup (4.22)$ ;  
10 retorna( $\mathcal{B}$ )
```

```
fim MainSlave.
```

Figura 6.4: Pseudo-código da função MainSlave().

O passo 6, $\mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \text{MainSlave}(\hat{x}^k)$, chama a função geradora dos cortes de Benders. Esta função está ilustrada na figura 6.4 resolve uma seqüência de três problemas de programação linear: o primeiro considera o modelo de transportes, o segundo o modelo híbrido e, finalmente, o último o modelo linear disjuntivo. Note que, como os três modelos se diferem uns dos outros pela adição de determinado grupo de restrições, a utilização de um algoritmo Dual Simplex para a solução dos dois últimos problemas é bastante eficiente. Para solução destes problemas de programação linear utilizamos o pacote CPLEX versão 3.0, [17]. Para cada um dos problemas lineares resolvidos, obtemos um conjunto de variáveis Duais e um novo corte de Benders associado que será adicionado ao conjunto de cortes de Benders \mathcal{B} , utilizado na solução do problema *Mestre*. Na figura 6.4, $\mathcal{B.T}$, $\mathcal{B.H}$ e $\mathcal{B.D}$ representam, respectivamente, os conjuntos dos cortes de Benders calculados a partir do modelo de transportes, do modelo híbrido e do modelo linear disjuntivo.

O passo 5 da figura 6.3, consiste na solução do problema *Mestre* que é um problema de programação linear (0 – 1) mista. A solução deste problema é feita utilizando um algoritmo de “Branch-and-Bound”, também disponível no pacote de otimização CPLEX [17]. A figura 6.5 ilustra o pseudo-código da função MainMaster(). Os passos iniciais da função MainMaster(), 2–10, correspondem a utilização das soluções pertencentes ao conjunto de soluções elite (\mathcal{ES}) com o objetivo de inicializar o procedimento de “Branch-and-Bound” com um bom limite superior para acelerar o processo. Então, o conjunto de soluções é percorrido e a viabilidade de cada uma

das soluções deste conjunto é testada. Caso uma solução seja inviável, ela deve ser imediatamente removida do conjunto \mathcal{ES} (passo 7), pois sendo o problema *Mestre* da k -ésima iteração uma relaxação dos problemas das iterações posteriores, esta solução será inviável para os problemas *Mestre* seguintes. Por outro lado, caso exista em \mathcal{ES} uma solução viável, ela será candidata a solução do problema *Mestre* da k -ésima iteração e seu custo, $c^t \hat{x} + \hat{\alpha}$, será utilizado no método de “Branch-and-Bound” como um limite superior para a solução ótima.

Segundo desenvolvimento proposto nesta tese de doutorado, teorema 3.3, o problema *Mestre* pode parar em uma solução viável (sem prova de otimalidade) desde que o custo desta solução seja inferior a $z_{INF} + TolConv$. Na figura 6.5, o pseudocódigo ilustrado entre os passos 11–21, utiliza o algoritmo de “Branch-and-Bound” do CPLEX para procurar por uma solução viável que atenda ao critério discutido acima.

Se alguma solução, por exemplo (x, α) , for obtida no passo 12 e não satisfaz o critério de parada do passo 11 então, (x, α) é utilizado para atualizar a solução candidata à solução do problema *Mestre*, como também será incluída no conjunto \mathcal{ES} para ser utilizada nas iterações subsequentes. A operação de inserção no conjunto elite de soluções, \mathcal{ES} , é representada por $\bar{\cup}$ pois não é simplesmente uma operação de inserção já que o tamanho máximo deste conjunto é limitado. Então, caso \mathcal{ES} esteja completo, a solução de maior custo de investimento pertencente ao conjunto deve ser excluída para que a solução corrente (x, α) seja incluída.

Caso não exista nenhuma solução que satisfaça o critério de parada do passo 11, a solução candidata obtida $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ é a solução ótima do problema *Mestre*, e deve ser utilizada como um novo limite inferior, z_{INF} , no processo de convergência do modelo de decomposição de Benders, passo 18.

Por outro lado, se o critério de parada do passo 11 for atendido, isto é, se o custo da solução candidata $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ satisfaz $c^t \hat{x} + \hat{\alpha} \leq z_{INF} + TolConv$, novos cortes (Benders e Gomory) devem ser gerados para a solução $(\hat{x}, \hat{\alpha})$. Entretanto, não é possível garantir que esta solução $c^t \hat{x} + \hat{\alpha}$ seja um novo limite inferior para o valor da solução ótima do problema, visto que ela não é a solução ótima do problema *Mestre*.

No passo 14 da figura 6.3, um função para calcula dos cortes de Gomory para o

função MainMaster(z_{INF} , $TolConv$, B , \mathcal{G} , \mathcal{ES})

```
1  Monta problema Mestre utilizando  $B \cup \mathcal{G}$ ;  
2  para  $i = 1, \dots, |\mathcal{ES}|$  faça  
3    se  $\mathcal{ES}(i)$  é viável no problema Mestre;  
4       $(\hat{x}, \hat{\alpha}) = \mathcal{ES}(i)$ ;  
5       $UB = c_1^t \hat{x} + \hat{\alpha}$ ;  
6    senão  
7       $\mathcal{ES} = \mathcal{ES} \setminus \mathcal{ES}(i)$ ;  
8       $UB = \infty$ ;  
9    fim se  
10  fim para  
11  enquanto  $(c_1^t \hat{x} + \hat{\alpha} > z_{INF} + TolConv)$  faça  
12    Ache  $(x, \alpha)$  viável no problema Mestre  
13    tal que  $c_1^t x + \alpha < UB$ ;  
14    se  $\exists (x, \alpha)$ ;  
15       $(\hat{x}, \hat{\alpha}) = (x, \alpha)$ ;  
16       $UB = c_1^t \hat{x} + \hat{\alpha}$ ;  
17       $\mathcal{ES} = \mathcal{ES} \cup (\hat{x}, \hat{\alpha})$ ;  
18    senão  
19       $z_{INF} = c_1^t \hat{x} + \hat{\alpha}$ ;  
20      retorna  $(\hat{x}, \hat{\alpha})$   
21    fim se  
22  fim faça  
23  retorna  $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ 
```

fim MainMaster.

Figura 6.5: Pseudo-código da função MainMaster().

problema *Mestre* é chamada. Lembre que o cálculo de tais cortes pode ser realizado em conjunto com um método de “Branch-and-Bound” especializado e que desta maneira não acarretaria em aumento do esforço computacional. Entretanto, como já dito no capítulo 5, não é objetivo desta tese propor um método de “Branch-and-Cut” e sim verificar o efeito da utilização de cortes de Gomory em conjunto com cortes de Benders. Para isto, a função `MainGomory()` utiliza o mesmo problema *Mestre* montado na função `MainMaster()`, relaxando as restrições de “integralidade” das variáveis de investimento, x , que tenham sido “adicionadas” na solução do problema *Mestre*, isto é, $\hat{x}^k = 1$, e mantendo fixas em zero as variáveis de investimento não consideradas na solução do problema *Mestre* da k -ésima iteração. Feitas estas alterações, o problema resultante é um problema de programação linear, que quando resolvido permite que sejam calculados cortes de Gomory segundo equação (5.43) que devem ser adicionados ao conjunto \mathcal{G} que será utilizado para definir os problemas *Mestre* das iterações subseqüentes.

O número de cortes de Gomory que podem ser calculados por cada solução do problema linear obtido do problema *Mestre* não é constante e depende do número de variáveis básicas com valores fracionários. Neste trabalho limitamos o número máximo de cortes de Gomory por cada iteração do método de decomposição de Benders a 10 cortes. Entretanto, o “correto” seria identificar os cortes mais promissores, implementando um conjunto de cortes (ou pool). A identificação de cortes potencialmente bons é um assunto de grande interesse, com relação a cortes de Gomory veja por exemplo [2], e será um tópico a ser explorado no futuro. A figura 6.6 ilustra o pseudo-código da função `MainGomory()` para o cálculo dos cortes de Gomory a partir do problema *Mestre*.

6.4 Conclusões

Mostramos, neste capítulo que é possível a geração de cortes de Benders a partir de relaxações do problema *Escravo*. Isto posto, propomos para a solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão, a utilização de cortes de Benders gerados a partir dos modelos de transportes e híbrido (relaxações do problema *Escravo*) em conjunto com os cortes de Benders tradicionais calculados pelo problema *Escravo*, que neste trabalho é formulado pelo modelo linear disjuntivo, e

```

função MainGomory(  $\hat{x}$  )
1  Leia problema Mestre ;
2  para  $i \in \{j \mid \hat{x}_j = 0\}$  faça
3     $x_i = 0$ ;
4  senão
5    Relaxe  $x_i \in \{0,1\}$  fazendo  $0 \leq x_i \leq 1$ ;
6  fim faça
7  Soluciona problema linear resultante;
8  para  $i \in \mathcal{I} \mid x_i \notin \{0,1\}$  faça
9     $\mathcal{G} = \mathcal{G} \cup (5.43)$ ;
10 fim faça
11 retorna ( $\mathcal{G}$ );

fim MainGomory.

```

Figura 6.6: Pseudo-código da função MainGomory().

com os cortes de Gomory para o problema *Mestre*.

Mostramos também, que os cortes gerados a partir do problema formulado pelo modelo de transportes correspondem a, essencialmente, utilizarmos um método de Cerca modificado para geração de restrições de falta ou excesso de capacidade de potência em áreas do sistema de transmissão. Contudo, é importante ressaltar que, embora os cortes de Benders obtidos do modelo de transportes sejam equivalentes aos cortes que seriam obtidos a partir de um método do tipo Cerca, a utilização deste método com o objetivo de computar, previamente, um grande número de cortes para considerá-los nos problemas *Mestre* já desde a primeira iteração do processo de decomposição pode trazer bons resultados em termos de economia do tempo de processamento.

CAPÍTULO 7

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

7.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é ilustrar os resultados obtidos pelo método de decomposição de Benders proposto para solução de problemas de planejamento da expansão de redes de transmissão. Para isto, a seção 7.2 descreve o sistema utilizado nos testes, enumera os testes realizados e ilustra resultados obtidos. Finalmente, algumas conclusões são apresentadas na seção 7.3.

O ambiente computacional utilizado para o processamento dos casos testes é uma workstation SUN-Ultra 2, rodando Solaris. O programa computacional desenvolvido nesta tese foi implementado em linguagem C e compilado pelo compilador gcc 2.8 considerando otimização plena (-O2). Os tempos de CPU reportados nesta seção foram obtidos fazendo uso da rotina `etime()` do sistema operacional.

7.2 O Caso Teste

O sistema teste que será utilizado para ilustrar os desenvolvimentos realizados nesta tese de doutorado é um caso real de planejamento da expansão do sistema de transmissão formado pela rede reduzida da região Sul brasileira. Esta rede de transmissão é formada por 46 barras e 66 circuitos existentes (237 circuitos candidatos) e está representada na figura 7.1, onde linhas cheias representam os circuitos da rede existente enquanto que os circuitos candidatos a adição, que correspondem a duplicações de todos os circuitos existentes mais novas faixas de passagem, são representados por linhas tracejadas. Todos os dados relevantes para este estudo

de planejamento da expansão deste sistema de transmissão podem ser obtidos no apêndice C, tabelas C.1 (dados das barras), C.2 (circuitos existentes) e C.3 (dados dos circuitos candidatos). Tanto nos dados dos circuitos existentes como também para os circuitos candidatos a adição foi considerada uma tolerância para sobrecarga de 1% do valor do limite de carregamento de cada circuito. O custo unitário do corte de carga c_O é, para todas as barras deste sistema, igual a 1.0 US\$/MW. Este sistema de transmissão foi inicialmente proposto em [52] e vem sendo muito utilizado desde então para ilustrar resultados de novos métodos para o planejamento da expansão de redes de transmissão.

Vamos considerar dois casos para ilustrar os resultados da aplicação do algoritmo de decomposição de Benders desenvolvido. A primeira instância (ou **Caso 1**) corresponde ao caso no qual o redespacho dos geradores é permitido, ou seja, é possível variar a geração das barras até o limite máximo de geração (fornecido na tabela C.1) para diminuir (ou mesmo eliminar) as inviabilidades do sistema de transmissão. O segundo caso (ou **Caso 2**) corresponde ao problema de planejamento de expansão da rede de transmissão no qual a geração nas barras não pode ser modificada de um valor dado (coluna geração atual na tabela C.1).

7.2.1 Caso 1 – Redespacho dos Geradores Permitido

Com relação ao **Caso 1** vamos aplicar os conceitos desenvolvidos nesta tese em etapas com o objetivo de verificar o impacto de cada uma das propostas sobre os resultados. Os seguintes pontos serão verificados:

- 1 Decomposição de Benders tradicional para o problema de planejamento da expansão de redes formulado pelo modelo linear (0 – 1) disjuntivo utilizando um valor fixo e muito grande para a constante disjuntiva \mathcal{M} em todos os circuitos candidatos.
- 2 Decomposição de Benders utilizando a heurística de parada do problema *Mestre*, desenvolvida no capítulo 3. Tal estratégia também utiliza um conjunto de soluções elite durante a solução do problema *Mestre* para determinar um limite superior para o valor da solução deste problema.
- 3 Variação do valor da constante disjuntiva \mathcal{M} e cálculo do valor mínimo deste

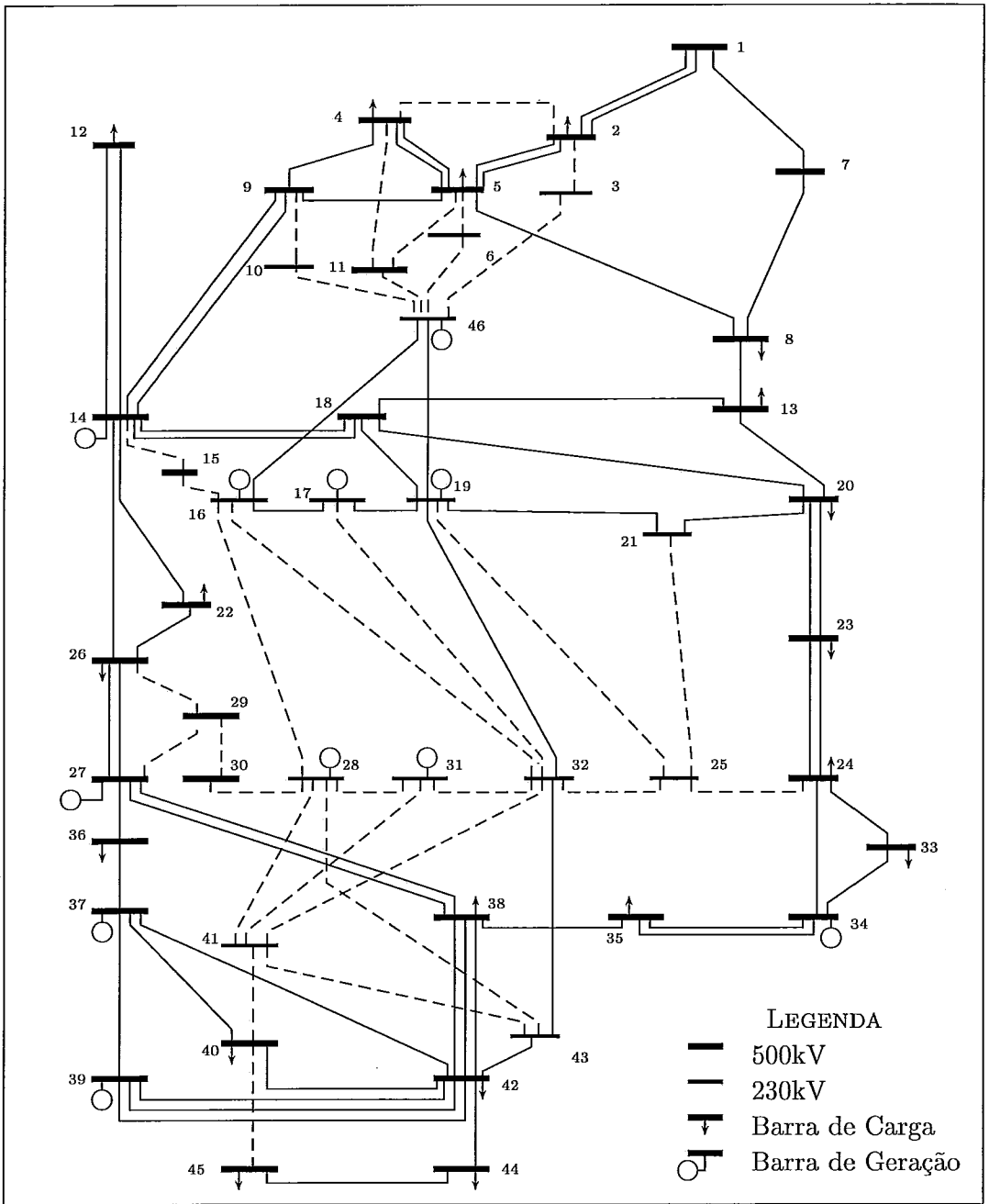


Figura 7.1: Sistema reduzido da região Sul brasileira.

Tabela 7.1: Plano ótimo de expansão do sistema de transmissão – **Caso 1**.

13-20	20-23	46-6	20-21
20-21	42-43	5-6	5-6

parâmetro para cada circuito candidato em particular, conforme desenvolvimento apresentado no capítulo 4.

- 4 Cortes de Gomory para o problema *Mestre* em conjunto com os cortes de Benders. A utilização destes cortes foi apresentada no capítulo 5.
- 5 Cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo* – problema de transportes e problema híbrido, conforme descrito nas seções 6.2.2 e 6.2.2 deste capítulo.

A solução obtida em todos os testes para o **Caso 1** tem custo de expansão igual a US\$ 70.2×10^6 , e corresponde a mesma solução publicada na tese de doutorado de Romero [63]. O conjunto de circuitos candidatos adicionados ao plano de expansão para esta solução está representado na tabela 7.1.

Inicialmente, aplicamos o método de decomposição de Benders tradicional ao modelo linear (0 – 1) disjuntivo utilizando um valor numérico fixo e muito grande ($\mathcal{M} = 10000$). Os resultados, ilustrados na tabela 7.2, onde a primeira coluna representa o contador do número de iterações, a segunda coluna o valor do custo de investimento associado ao plano de expansão (x), a terceira coluna o valor do limite inferior para o valor da solução ótima, z_{INF} . A quarta coluna representa o valor da função objetivo do problema *Escravo*, c_{or}^t , a quinta coluna o valor do limite superior para o valor da solução ótima, z_{SUP} , enquanto que o valor do $GAP = z_{SUP} - z_{INF}$ de convergência é representado na coluna seguinte. Finalmente, as duas últimas colunas representam o tempo de CPU gasto, em média até a iteração representada na linha, para a solução do problema *Escravo* e do problema *Mestre*.

O processo de decomposição de Benders converge para a solução ótima do **Caso 1** em 36 iterações. O tempo total de processamento, para todas as 36 iterações foi de aproximadamente 270 segundos (10s para o problema *Escravo* e 260s para a solução do problema *Mestre*).

Tabela 7.2: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira.
Benders tradicional.

It.	$c_{I^x}^t$	z_{INF}	$c_{O^r}^t$	z_{SUP}	GAP	Tempo CPU	
#	10 ⁶ US\$					<i>Escr</i>	<i>Mest</i>
0	30.3	30.3	1419.2	1449.5	1419.2	0.26	0.11
1	41.0	41.0	980.8	1021.9	980.8	0.52	0.51
2	48.6	48.6	462.1	510.8	462.1	0.41	0.42
3	51.1	51.1	382.8	434.0	382.8	0.37	0.47
4	52.1	52.1	400.3	434.0	381.9	0.35	0.55
5	53.1	53.1	403.9	434.0	380.8	0.34	0.66
6	54.0	54.0	1755.2	434.0	380.0	0.32	0.70
7	54.7	54.7	709.0	434.0	379.2	0.31	0.72
8	56.0	56.0	378.3	434.0	378.0	0.31	0.75
9	56.1	56.1	2302.7	434.0	377.9	0.30	0.77
10	56.6	56.6	989.8	434.0	377.3	0.30	0.79
11	56.8	56.8	149.2	206.0	149.2	0.29	0.81
12	59.3	59.3	712.2	206.0	146.7	0.29	0.88
13	60.1	60.1	941.5	206.0	145.8	0.29	0.95
14	61.3	61.3	1094.1	206.0	144.6	0.29	1.04
15	62.5	62.5	1133.5	206.0	143.5	0.29	1.19
16	63.1	63.1	26.3	89.3	26.3	0.29	1.37
17	63.2	63.2	396.2	89.3	26.1	0.29	1.51
18	63.7	63.7	539.9	89.3	25.7	0.29	1.68
19	63.8	63.8	949.5	89.3	25.5	0.29	1.85
20	64.2	64.2	980.3	89.3	25.1	0.29	2.04
21	64.6	64.6	596.0	89.3	24.7	0.29	2.29
22	64.3	65.3	1356.6	89.3	24.0	0.29	2.52
23	65.5	65.5	1015.0	89.3	23.9	0.28	2.65
24	66.1	66.1	450.0	89.3	23.2	0.28	2.83
25	66.2	66.2	1138.0	89.3	23.2	0.28	3.00
26	67.4	67.4	90.7	89.3	21.9	0.28	3.33
27	67.9	67.9	2086.4	89.3	21.4	0.28	3.67
28	68.1	68.1	1124.7	89.3	21.2	0.28	4.01
29	68.8	68.8	2156.1	89.3	20.5	0.28	4.43
30	69.6	69.6	1128.3	89.3	19.7	0.28	4.88
31	69.7	69.7	315.9	89.3	19.7	0.28	5.29
32	69.7	69.7	623.2	89.3	19.7	0.28	5.71
33	69.8	69.8	504.8	89.3	19.6	0.28	6.09
34	69.8	69.8	726.9	89.3	19.6	0.28	6.46
35	70.0	70.0	1823.2	89.3	19.4	0.28	6.84
36	70.2	70.2	0.0	70.2	0.0	0.28	7.21

O primeiro resultado, obtido nesta tese de doutorado, a ser verificado com um caso real de planejamento refere-se a nova heurística para “parada” do problema *Mestre*, apresentada no teorema 3.3 no capítulo 3. Além disso, como a resolução do problema *Mestre* será realizada buscando-se por soluções viáveis com custo inferior a $z_{INF} + TolConv$, vamos utilizar também o conjunto de soluções elite descrito anteriormente. Os resultados são ilustrados na tabela 7.3 que apresenta as seguintes modificações em relação a tabela 7.2 (caso anterior): a inclusão na primeira coluna do “status” da solução do problema *Mestre*, onde “O” significa solução ótima e “V” solução viável com custo inferior a $z_{INF} + TolConv$ e do “status” da solução do problema *Mestre* em relação ao conjunto de soluções elite, onde “E” significa que a solução desta iteração do problema *Mestre* foi obtida, diretamente, do conjunto de soluções elite. Além disso, a sétima coluna informa o número de soluções pertencentes ao conjunto de soluções elite em cada iteração do processo de decomposição.

A primeira observação é que, para um grande número de iterações (13 do total de 33), a solução do problema *Mestre* foi interrompida com uma solução viável. É interessante destacar também que o número de total iterações para convergência do processo de decomposição diminuiu (de 36 no caso anterior para 33 neste caso). Contudo, tal comportamento não era esperado, visto que os cortes de Benders são calculados para soluções viáveis do problema *Mestre* ao invés de soluções ótimas e parece ser somente uma coincidência. Observa-se também uma significativa redução do tempo de CPU necessário para a solução dos problemas *Mestre*. O tempo médio por iteração, reportado na última coluna da tabela 7.3, foi reduzido de 7.2s caso anterior, para 4.6s quando é utilizada a heurística para parada do problema *Mestre*. Em relação ao tempo total, isto significa uma redução do tempo de CPU de aproximadamente 41% (260s para 152s). O tempo total do CPU utilizado para todo o processo de decomposição de Benders foi de aproximadamente 158.30s.

A seguir vamos verificar o comportamento do cálculo de um valor mínimo para a constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} para cada um dos circuitos candidatos, conforme apresentado no capítulo 4. Os resultados para o **Caso 1** estão ilustrados na tabela 7.4. Além de utilizarmos os valores mínimos para a constante disjuntiva \mathcal{M} , vamos utilizar também, nas primeiras iterações, valores inferiores ao mínimo, ajustando os cortes de Benders para variações no valor da constante disjuntiva \mathcal{M} de acordo com o que foi apresentado e discutido no capítulo 4. O esquema de inicialização e variação

Tabela 7.3: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira.
 Benders com heurística de parada do problema *Mestre*.

It.St.El.	$c_7^t x$	z_{INF}	$c_0^t r$	z_{SUP}	GAP	$ \mathcal{E}S $	Tempo CPU	
#	10^6 US\$						<i>Escl</i>	<i>Mest</i>
0 O	30.3	30.3	1419.2	1449.5	1419.2	3	0.26	0.12
1 O	41.0	41.0	980.8	1021.9	980.8	3	0.52	0.54
2 O	48.6	48.6	462.1	510.8	462.1	4	0.40	0.43
3 O	51.1	51.1	382.8	434.0	382.8	4	0.37	0.50
4 V	52.1	51.1	400.3	434.0	382.8	4	0.35	0.49
5 O E	54.0	53.0	1755.2	434.0	381.0	3	0.33	0.71
6 V	53.3	53.0	369.0	422.3	369.3	4	0.32	0.68
7 V	53.1	53.0	403.9	422.3	369.3	4	0.31	0.63
8 O E	54.7	53.7	709.0	422.3	368.5	3	0.30	0.67
9 O E	57.0	56.0	396.4	422.3	366.3	2	0.30	0.72
10 V	56.8	56.0	149.2	206.0	150.0	2	0.29	0.68
11 O	58.4	58.4	2301.5	206.0	147.6	12	0.29	0.79
12 O E	60.1	59.1	941.5	206.0	146.8	11	0.29	0.89
13 V	59.3	59.1	712.2	206.0	146.8	10	0.29	0.96
14 O E	61.3	60.3	1094.1	206.0	145.6	9	0.28	1.08
15 O E	62.2	61.2	378.3	206.0	144.7	8	0.28	1.23
16 O E	63.1	62.1	26.3	89.3	27.3	7	0.28	1.40
17 V	62.5	62.1	1133.5	89.3	27.3	9	0.28	1.40
18 O E	63.8	62.8	949.5	89.3	26.5	8	0.28	1.60
19 V	62.9	62.8	945.4	89.3	26.5	9	0.28	1.59
20 O	63.7	63.7	539.9	89.3	25.7	9	0.28	1.81
21 V E	64.2	63.7	980.3	89.3	25.7	9	0.28	1.73
22 O E	65.5	64.5	1015.0	89.3	24.9	8	0.28	2.04
23 V	65.4	64.5	596.2	89.3	24.9	10	0.28	2.21
24 O E	66.1	65.1	450.0	89.3	24.2	9	0.28	2.54
25 O E	66.2	65.2	1138.0	89.3	24.2	8	0.28	2.87
26 V	65.6	65.2	1355.0	89.3	24.2	9	0.28	3.09
27 O	67.4	67.4	90.7	89.3	21.9	9	0.28	3.37
28 V E	68.1	67.4	1124.7	89.3	21.9	8	0.28	3.25
29 O E	68.9	67.9	2060.2	89.3	21.4	7	0.28	3.58
30 V	68.8	67.9	2156.1	89.3	21.4	7	0.28	3.85
31 O E	70.0	69.0	1823.2	89.3	20.4	6	0.28	4.24
32 V	69.8	69.0	504.8	89.3	20.4	7	0.28	4.20
33 O E	70.2	69.2	0.0	70.2	1.0	6	0.28	4.61

dos valores numéricos para a constante disjuntiva é muito simples: especifica-se um valor inicial ($\mathcal{M}^i = 1000$), um incremento por iteração ($\Delta\mathcal{M} = 1000$) e um valor final ($\mathcal{M}^f = 10000$) para a constante disjuntiva \mathcal{M} . Desta forma, podemos calcular em que iteração o valor da constante disjuntiva terá convergido para o valor final pré-especificado, neste caso na iteração 9. Mantendo a iteração de convergência fixa para todos os circuitos da rede, pode-se determinar novos valores iniciais (\mathcal{M}_{ij}^i) e de variação ($\Delta\mathcal{M}_{ij}$) para cada um dos circuitos candidatos, de forma que na iteração fixada, os valores da constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} sejam os valores mínimos para \mathcal{M}_{ij} . A cada iteração do processo de decomposição de Benders o valor para a constante disjuntiva $\mathcal{M}, \forall ij \in \mathcal{C}$ é atualizado fazendo-se:

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_{ij} + \Delta\mathcal{M}_{ij}, \forall ij \in \mathcal{C}.$$

Sobre o processo de convergência da decomposição de Benders, constata-se uma nova redução, tanto no número de iterações (23 contra 33 do caso anterior) como também no tempo de CPU utilizado, de 4.6s em média para 3.5s, ou de 152s para 81.4, aproximadamente 46%. Ocorreu também uma redução no número de problemas *Mestre* interrompidos com soluções viáveis com custo inferior a $z_{INF} + TolConv$, de 13 para 4 problemas. Além da redução do número de iterações para convergência, também este fato sugere que os cortes de Benders calculados utilizando-se um valor mínimo para a constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} representam melhor o problema de operação do sistema de transmissão.

A inclusão de cortes de Gomory calculados para o problema *Mestre* foi considerada nos resultados mostrados na tabela 7.5, que difere da tabela anterior somente pela inclusão da sétima coluna para representar o número de cortes de Gomory calculados até a iteração de cada linha.

Observe que nas primeiras 9 iterações do processo de decomposição não são calculados cortes de Gomory. Isto é decorrente da variação do valor numérico da constante disjuntiva \mathcal{M} , que para valores inferiores ao valor mínimo caracteriza o problema como mais restrito em relação ao problema original, impedindo que sejam calculados cortes de Gomory. Portanto, até a iteração na qual a constante disjuntiva assume o valor mínimo o processo de convergência deve ser igual ao do caso anterior.

Tabela 7.4: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira.
Mestre heurístico e \mathcal{M}_{ij} ajustável.

It.St.El.	$c_I^t x$	z_{INF}	$c_O^t r$	z_{SUP}	GAP	$ \mathcal{ES} $	Tempo CPU	
#	10 ⁶ US\$						<i>Escl</i>	<i>Mest</i>
0 O	30.3	30.3	1968.1	1998.4	1968.1	3	0.30	0.12
1 O	51.4	51.4	1968.6	1998.4	1947.0	5	0.59	0.48
2 O	45.0	45.0	404.5	449.5	404.5	5	0.46	0.50
3 O	46.6	46.6	719.6	449.5	402.9	6	0.41	0.49
4 O	48.6	48.6	767.1	449.5	400.8	4	0.37	0.48
5 O	54.9	54.9	461.9	449.5	394.5	6	0.36	0.75
6 O	56.8	56.8	149.2	206.0	149.2	6	0.34	1.13
7 O	53.6	53.6	994.2	206.0	152.4	6	0.33	1.35
8 O	57.9	57.9	969.6	206.0	148.0	5	0.33	1.43
9 O	59.3	59.3	596.0	206.0	146.6	7	0.32	1.63
10 O	54.0	54.0	1755.2	206.0	152.0	8	0.31	1.64
11 O E	60.7	59.7	1267.7	206.0	146.3	6	0.31	2.09
12 O	61.7	61.7	328.2	206.0	144.2	5	0.31	2.32
13 O E	63.1	62.1	26.3	89.3	27.3	4	0.31	2.56
14 V	62.2	62.1	378.3	89.3	27.3	5	0.31	2.46
15 V	62.4	62.1	2104.0	89.3	27.3	6	0.30	2.52
16 O E	63.2	62.2	396.2	89.3	27.1	5	0.30	2.70
17 O E	64.9	63.9	1162.5	89.3	25.5	4	0.30	3.07
18 O	65.1	65.1	674.2	89.3	24.2	4	0.30	3.15
19 O	66.8	66.8	1294.6	89.3	22.5	4	0.29	3.22
20 V	67.7	66.8	706.7	89.3	22.5	6	0.29	3.17
21 O E	67.9	66.9	1016.7	89.3	22.5	5	0.29	3.22
22 V	67.4	66.9	90.7	89.3	22.5	6	0.29	3.35
23 O E	70.2	69.2	0.0	70.2	1.0	4	0.29	3.54

Tabela 7.5: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira.
Mestre heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite e cortes de Gomory.

It.St.El.	$c_r^t x$	z_{INF}	$c_o^t r$	z_{SUP}	GAP	$ G $	$ \mathcal{ES} $	Tempo CPU	
	10 ⁶ US\$					#		<i>Escr</i>	<i>Mest</i>
0 O	30.3	30.3	1968.1	1998.4	1968.1	0	3	0.30	0.12
1 O	51.4	51.4	1968.6	1998.4	1947.0	0	5	0.59	0.48
2 O	45.0	45.0	404.5	449.5	404.5	0	5	0.46	0.50
3 O	46.6	46.6	719.6	449.5	402.9	0	6	0.41	0.49
4 O	48.6	48.6	767.1	449.5	400.8	0	4	0.38	0.48
5 O	54.9	54.9	461.9	449.5	394.5	0	6	0.36	0.74
6 O	56.8	56.8	149.2	206.0	149.2	0	6	0.34	1.13
7 O	53.6	53.6	994.2	206.0	152.4	0	6	0.33	1.35
8 O	57.9	57.9	969.6	206.0	148.0	0	5	0.33	1.43
9 O	59.3	59.3	596.0	206.0	146.6	0	7	0.32	1.63
10 O	54.0	54.0	1755.2	206.0	152.0	3	8	0.37	1.64
11 O E	60.7	59.7	1267.7	206.0	146.3	11	6	0.43	2.00
12 O	61.7	61.7	328.2	206.0	144.2	22	5	0.51	2.30
13 O E	63.1	62.1	26.3	89.3	27.3	26	4	0.58	2.59
14 O	62.4	62.4	2104.0	89.3	26.9	29	5	0.64	2.79
15 O E	64.0	63.0	1196.6	89.3	26.4	33	5	0.72	3.20
16 O	65.4	65.4	671.0	89.3	23.9	37	7	0.80	3.72
17 O E	66.8	65.8	1294.6	89.3	23.5	42	6	0.86	3.77
18 O	68.1	68.1	1124.7	89.3	21.2	45	6	0.93	3.91
19 O E	69.8	68.8	504.8	89.3	20.6	46	5	0.97	4.19
20 V	69.8	68.8	726.9	89.3	20.6	47	6	1.01	4.13
21 O	70.2	70.2	0.0	70.2	0.0	52	6	1.08	4.44

Tabela 7.6: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. *Mestre* heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite, cortes de Gomory e Cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo*.

It.St.El.	$c_7^t x$	z_{INF}	c_{Or}^t	z_{SUP}	GAP	Cortes	$ \mathcal{ES} $	Tempo CPU	
#	10^6 US\$					$\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{G}$		<i>Escr</i>	<i>Mest</i>
0 O	30.3	30.3	1968.1	1998.4	1968.1	1, 1, 1, 0	3	0.41	0.12
1 O	53.1	53.1	1100.7	1153.8	1100.7	2, 2, 2, 0	5	0.87	0.75
2 O	54.9	54.9	461.9	516.8	461.9	3, 3, 3, 0	4	0.65	1.01
3 O	55.6	55.6	350.3	405.9	350.3	3, 4, 4, 0	3	0.57	0.95
4 O	57.9	57.9	969.6	405.9	348.0	4, 5, 5, 0	3	0.54	1.00
5 O	63.1	63.1	26.3	89.3	26.3	4, 5, 6, 0	4	0.52	1.11
6 O E	65.6	64.6	338.6	89.3	24.8	5, 6, 7, 0	4	0.50	1.21
7 O	65.1	65.1	111.0	89.3	24.2	5, 7, 8, 0	3	0.49	1.33
8 O E	67.4	66.4	361.4	89.3	23.0	6, 8, 9, 0	2	0.48	1.46
9 O	70.1	70.1	737.4	89.3	19.2	7, 9, 10, 0	7	0.47	1.84
10 O E	70.2	69.2	0.0	70.2	1.0	7, 9, 10, 7	6	0.48	1.95

A partir da nona iteração, quando o valor da constante disjuntiva \mathcal{M} já convergiu para o valor mínimo, até a convergência final do processo de decomposição foram calculados 44 cortes de Gomory para o problema *Mestre*. Observou-se uma nova redução no número total de iterações para convergência (21 contra 23), mas um aumento do tempo de processamento para resolução do problema *Mestre* de 81.4s para 93.2s (14%). Este aumento do tempo total de processamento do problema *Mestre* é devido ao aumento do número de restrições deste problema e a uma redução pouco expressiva no número total de iterações para convergência. O aumento do tempo de processamento para cálculo do problema *Escravo* – coluna 9 na tabela 7.5 – deve-se ao cálculo dos cortes de Gomory.

Finalmente, vamos considerar a inclusão dos cortes de Benders, obtidos a partir dos problemas de transportes e híbrido em conjunto com os cortes de Benders tradicionais e os cortes de Gomory para o problema *Mestre*. A tabela 7.6 ilustra os resultados obtidos para o **Caso 1**, onde na colunas 7 representa-se, respectivamente, o número de cortes de Benders calculados a partir do modelo de transportes, do modelo híbrido e do modelo linear disjuntivo, e o número de cortes de Gomory para o problema *Mestre*.

A inclusão dos cortes de Benders para os problemas de transportes e híbrido significou uma grande redução tanto no número de iterações (10 contra 21) como

Tabela 7.7: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. *Mestre* heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite e Cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo*.

It.St.El.	$c_I^t x$	z_{INF}	$c_O^t r$	z_{SUP}	GAP	Cortes	$ \mathcal{ES} $	Tempo CPU	
#	10 ⁶ US\$					$\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$		<i>Escr</i>	<i>Mest</i>
0 O I	30.3	30.3	1968.1	1998.4	1968.1	1, 1, 1	3	0.41	0.12
1 O I	53.1	53.1	1100.7	1153.8	1100.7	2, 2, 2	5	0.87	0.75
2 O I	54.9	54.9	461.9	516.8	461.9	3, 3, 3	4	0.65	1.01
3 O I	55.6	55.6	350.3	405.9	350.3	3, 4, 4	3	0.57	0.95
4 O I	57.9	57.9	969.6	405.9	348.0	4, 5, 5	3	0.54	1.00
5 O I	63.1	63.1	26.3	89.3	26.3	4, 5, 6	4	0.52	1.11
6 O E	65.6	64.6	338.6	89.3	24.8	5, 6, 7	4	0.50	1.21
7 O I	65.1	65.1	111.0	89.3	24.2	5, 7, 8	3	0.49	1.33
8 O E	67.4	66.4	361.4	89.3	23.0	6, 8, 9	2	0.48	1.46
9 O I	70.1	70.1	737.4	89.3	19.2	7, 9,10	7	0.47	1.84
10 O E	70.2	69.2	0.0	70.2	1.0	7, 9,10	6	0.46	1.93

também do tempo de CPU gasto para todo o processo de convergência da decomposição de Benders (24.2s contra 115.9s) para este caso exemplo. Observe que em nenhuma iterações o problema *Mestre* foi interrompido sem a solução ótima, o que sugere que a função do segundo estágio (problema de operação) está sendo bem representada pelos cortes de Benders. Esta melhor representação deve-se, é claro, a inclusão dos cortes de Benders para os modelos de transportes e híbrido, os quais introduzem informações mais ricas para determinados grupos de restrições do problema.

Note que como os cortes de Gomory são calculados a partir da nona iteração, neste caso, somente 9 cortes foram calculados. Para verificar a influência destes cortes de Gomory somente na última iteração, vamos repetir o mesmo teste anterior sem considerá-los, isto é, considerando cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo* mas sem o cálculo dos cortes de Gomory. O resultado está representado na tabela 7.7.

Observe que os cortes de Gomory para o problema *Mestre* não auxiliaram no processo de convergência. Além disso, o cálculo destes cortes provocou um pequeno aumento do tempo de CPU utilizado, de 23.93s (sem Gomory) para 24.2s quando os cortes de Gomory são calculados.

Tabela 7.8: Plano ótimo de expansão do sistema de transmissão – **Caso 2**.

26–29	26–29	26–29	19–25
46–6	31–32	28–30	20–21
42–43	42–43	24–25	24–25
29–30	29–30	5–6	5–6

Comentários acerca dos resultados obtidos

Com base nos resultados publicados até este ponto, não podemos sugerir como uma boa estratégia a utilização de cortes de Gomory para o problema *Mestre*. Em um primeiro teste conseguimos uma redução do número de iterações para convergência do processo de decomposição de Benders mas o tempo total de processamento aumentou face ao aumento do número de restrições do problema *Mestre*. No segundo teste os cortes de Gomory calculados não tiveram nenhum impacto sobre o processo de convergência, exceção ao aumento do tempo de processamento para solução do problema *Mestre*. Vamos retornar a esta questão nos resultados obtidos para o **Caso 2**.

Por outro lado, todos os outros conceitos testados acarretaram em benefícios na solução do problema do **Caso 1**, a saber: a nova heurística de parada para o problema *Mestre*, a utilização de um valor “mínimo” para a constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} calculado sob-medida para cada circuito candidato a adição e, principalmente, a utilização de cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo*.

7.2.2 Caso 2 – Despacho dos Geradores Fixo

A solução ótima obtida (adição de 16 circuitos) pelo método de decomposição de Benders para este problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão tem custo igual a US\$ 154.4×10^6 . Esta solução é igual a solução publicada na tese de Romero [63] e está representada na tabela 7.8.

Inicialmente vamos considerar o caso utilizando os cortes de Benders obtidos a partir dos problemas de transportes e híbrido, a heurística de parada do problema *Mestre* e o cálculo dos valores mínimos para a constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} mas sem considerar a inclusão de cortes de Gomory calculados para o problema *Mestre*.

Tendo em vista que este caso de planejamento da expansão de sistemas de transmissão é mais “complicado” do que o caso anterior, vamos modificar os dados para atualização da constante disjuntiva \mathcal{M}_{ij} afim de obter uma convergência para o valor mínimo de \mathcal{M} com um maior número de iterações. Desta forma, mais cortes de Benders serão calculados com valores pequenos para \mathcal{M} fazendo com que estes cortes representem melhor as restrições disjuntivas. Para isto vamos especificar um valor inicial para a constante disjuntiva ($\mathcal{M}^i = 500$), um incremento por iteração ($\Delta\mathcal{M} = 500$) e um valor final, que é o mesmo do caso anterior, ($\mathcal{M}^f = 10000$). Com estes dados e o mesmo esquema de atualização definido anteriormente, o valor numérico para \mathcal{M} converge para o valor mínimo na iteração 18.

A tabela 7.9 ilustra partes do relatório de convergência do processo de decomposição de Benders que levou 127 iterações até obter a solução ótima. O tempo total de processamento foi de aproximadamente 4.3 horas. Note que para as primeiras iterações do processo de decomposição de Benders a evolução do limite inferior é razoável (53.3 US\$ na primeira iteração para 134.6 US\$ na iteração 30), mas a partir da trigésima iteração o processo de convergência da decomposição de Benders passa a ser mais lento, piorando ainda mais a partir da iteração 50. Observe que esta redução da taxa de convergência coincide com a inexistência de novos cortes de Benders para o modelo de transportes (convergência deste modelo), isto é, a taxa de convergência é razoável quando são inseridos novos cortes de Benders calculados para o modelo de transportes e sofrível quando o valor da solução do modelo de transportes é nula. Este fato sugere que os cortes de Benders calculados para os modelo híbrido e linear disjuntivo não esta representando de maneira adequada as restrições correspondentes a segunda lei de Kirchoff do problema de operação.

Também uma consequência desta evolução lenta do limite inferior z_{INF} , é o fato de que para um grande número de iterações o problema *Mestre* foi interrompido com uma solução viável (91 do total de 127 iterações). Por outro lado, é importante ressaltar que, em tais situações, a utilização da heurística para determinar a convergência do problema *Mestre* traz grande benefícios em termos de economia do tempo de processamento.

Vamos verificar a seguir como fica a resolução deste problema quando, além das estratégias utilizadas do caso anterior, considera-se a inclusão de cortes de Gomory calculados para o problema *Mestre*. Os resultados estão ilustrados na tabela 7.10.

Tabela 7.9: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira. *Mestre* heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite, e Cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo*.

It. St.El.	$c_T^t x$	z_{INF}	$c_O^t r$	z_{SUP}	GAP	Cortes	$ \mathcal{ES} $	Tempo CPU	
#	10^6 US\$					$\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$		<i>Escr</i>	<i>Mest</i>
0 O	53.3	53.3	2872.4	2925.7	2872.4	1, 1, 1	1	0.43	0.11
1 O	89.1	89.1	2410.8	2499.9	2410.8	2, 2, 2	4	0.91	0.79
2 O	86.1	86.1	1223.8	1310.0	1223.8	3, 3, 3	4	0.68	0.60
3 O	96.2	96.2	920.7	1016.9	920.7	4, 4, 4	5	0.60	0.66
...									
25 O E	133.3	132.3	853.6	589.0	456.7	26, 26, 26	4	0.44	8.19
26 V	132.1	132.3	651.6	589.0	456.7	27, 27, 27	7	0.45	8.63
27 V	132.4	132.3	381.0	513.4	381.1	28, 28, 28	8	0.44	8.82
28 V	133.3	132.3	281.9	415.2	282.9	29, 29, 29	8	0.44	8.88
29 O E	135.6	134.6	819.6	415.2	280.6	30, 30, 30	7	0.44	9.71
30 V	134.5	134.6	819.1	415.2	280.6	31, 31, 31	7	0.44	10.02
...									
46 V	141.2	142.1	568.8	415.2	273.1	41, 46, 47	11	0.44	18.06
47 V	142.4	142.1	653.4	415.2	273.1	42, 47, 48	11	0.44	18.51
48 O E	144.2	143.4	515.5	415.2	271.9	43, 48, 49	10	0.44	20.17
49 V	142.4	143.4	298.2	415.2	271.9	44, 49, 50	10	0.44	19.87
50 V	143.6	143.4	483.2	415.2	271.9	45, 50, 51	10	0.43	19.76
...									
69 V	146.3	146.8	493.4	415.2	268.4	50, 65, 70	3	0.43	31.74
70 V	147.3	146.8	845.9	415.2	268.4	51, 66, 71	3	0.43	33.79
71 V	147.4	146.8	466.4	415.2	268.4	51, 67, 72	3	0.43	33.46
72 V	147.3	146.8	419.7	415.2	268.4	51, 68, 73	3	0.43	34.13
73 V	144.6	146.8	464.5	415.2	268.4	51, 69, 74	3	0.43	37.76
74 O E	149.8	148.8	327.7	415.2	266.5	51, 70, 75	2	0.43	41.59
...									
115 V	152.4	152.2	615.7	264.5	112.3	58,100,116	5	0.43	102.97
116 V	152.4	152.2	350.3	264.5	112.3	58,100,117	5	0.43	104.61
117 V	150.5	152.2	468.8	264.5	112.3	58,101,118	5	0.43	106.63
118 V	152.1	152.2	423.5	264.5	112.3	58,102,119	5	0.43	109.20
119 V	152.3	152.2	465.2	264.5	112.3	58,103,120	5	0.43	114.21
120 V	153.1	152.2	455.4	264.5	112.3	58,104,121	4	0.43	113.98
121 V	153.1	152.2	422.4	264.5	112.3	58,104,122	5	0.43	114.29
122 V	153.0	152.2	522.1	264.5	112.3	58,105,123	4	0.43	114.64
123 V	152.7	152.2	345.8	264.5	112.3	58,106,124	7	0.43	118.48
124 O E	154.5	153.5	461.9	264.5	111.0	58,107,125	6	0.43	124.00
125 V E	153.6	153.5	27.1	180.7	27.3	58,107,126	5	0.43	123.02
126 V E	154.1	153.5	542.4	180.7	27.3	59,108,127	4	0.43	122.06
127 V	154.4	153.5	0.0	154.4	0.9	59,108,127	4	0.43	121.42

Tabela 7.10: Resultados do caso com o sistema equivalente da região Sul brasileira.

Mestre heurístico, \mathcal{M}_{ij} ajustável, soluções elite, cortes de Gomory e Cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo*.

It.St.El.	$c_1^t x$	z_{INF}	$c_0^t r$	z_{SUP}	GAP	Cortes	$ \mathcal{ES} $	Tempo CPU	
#	10^6 US\$					$\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{G}$		<i>Escr</i>	<i>Mest</i>
0 O	53.3	53.3	2872.4	2925.7	2872.4	1, 1, 1, 0	1	0.43	0.11
1 O	89.1	89.1	2410.8	2499.9	2410.8	2, 2, 2, 0	4	0.90	0.79
2 O	86.1	86.1	1223.8	1310.0	1223.8	3, 3, 3, 0	4	0.68	0.60
3 O	96.2	96.2	920.7	1016.9	920.7	4, 4, 4, 0	4	0.59	0.69
...									
25 O	132.1	132.1	651.6	414.3	282.2	26,26,26, 39	9	0.53	7.73
26 O	133.6	133.6	414.0	414.3	280.7	27,27,27, 45	9	0.55	7.91
27 O	134.9	134.9	889.2	414.3	279.4	28,28,28, 48	3	0.56	8.23
28 O	136.6	136.6	703.9	414.3	277.7	29,29,29, 50	4	0.57	8.52
29 V E	136.9	136.6	541.0	414.3	277.7	30,30,30, 54	3	0.58	8.24
30 V E	137.3	136.6	498.2	414.3	277.7	30,31,31, 57	2	0.60	7.99
...									
46 V	145.4	144.8	441.7	414.3	269.5	39,46,47,118	5	0.80	13.36
47 O E	147.1	146.1	465.0	414.3	268.2	39,47,48,120	4	0.81	14.32
48 V	146.5	146.1	476.8	414.3	268.2	40,48,49,122	4	0.82	14.32
49 O	147.6	147.6	414.9	414.3	266.7	40,49,50,124	6	0.83	15.37
50 V E	147.9	147.6	339.0	414.3	266.7	40,49,51,129	5	0.84	15.08
...									
62 V	150.7	150.3	380.3	414.3	264.0	43,59,63,168	5	0.99	27.25
63 O E	152.4	151.4	841.3	414.3	262.9	44,60,64,170	4	1.00	29.52
64 V E	151.8	151.4	317.1	414.3	262.9	44,61,65,175	3	1.02	29.08
65 V	151.6	151.4	856.1	414.3	262.9	45,62,66,178	4	1.03	29.85
66 V	152.1	151.4	134.9	287.1	135.7	45,63,67,182	6	1.04	30.79
67 V	151.6	151.4	207.0	287.1	135.7	45,64,68,186	5	1.05	32.00
68 O	152.6	152.6	777.7	287.1	134.5	46,65,69,189	4	1.07	33.46
69 V	153.4	152.6	251.1	287.1	134.5	46,65,70,192	4	1.08	33.33
70 V	153.1	152.6	455.4	287.1	134.5	46,66,71,197	5	1.09	33.63
71 V	153.3	152.6	122.7	275.9	123.3	46,66,72,204	5	1.11	34.56
72 V	153.4	152.6	490.7	275.9	123.3	46,66,73,209	5	1.12	35.20
73 O E	154.6	153.6	27.1	181.7	28.1	46,66,74,214	4	1.13	36.44
74 V	154.4	153.6	0.0	154.4	0.8	46,66,74,218	4	1.14	36.16

Para as primeiras iterações a evolução do processo de convergência é a mesma, visto que os cortes de Gomory somente são calculados a partir da décima oitava iteração. Contudo, podemos verificar que com a inclusão dos cortes de Gomory não se observa uma redução tão acentuada no processo de convergência do método de Benders, que neste caso obteve a solução ótima com 74 iterações (uma redução de 53 iterações em relação ao caso anterior). O tempo total de CPU utilizado neste caso foi de aproximadamente 0.80 hora, que é muito menor (cerca de 80%) do que o tempo utilizado no caso anterior. Esta redução do tempo de CPU está ligada a redução do número de iterações do processo de decomposição.

Observe que, mesmo que a utilização dos cortes de Gomory para o problema *Mestre* ajudaram muito no processo de convergência da decomposição, ainda assim a solução de um grande número de problemas *Mestre* foi interrompida com uma solução viável com custo inferior a $z_{INF} + TolConv$ (35/75 problemas), fazendo uso da heurística de parada proposta nesta tese.

Comentários acerca dos resultados obtidos

Com relação aos resultados obtidos para o **Caso 2** que não permite o redespacho dos geradores do sistema elétrico, podemos concluir que a utilização dos cortes de Gomory calculados para o problema *Mestre* é importante e pode resultar em uma grande economia de tempo de processamento em casos de difícil solução. Em tais circunstâncias, reduzir o número de problemas *Mestre* a serem resolvidos pode ser a diferença entre resolver ou não o problema.

É importante ressaltar também a grande importância dos outros conceitos desenvolvidos nesta tese. Por exemplo, a não utilização de um valor mínimo em conjunto com o ajuste nas iterações iniciais) para a constante disjuntiva \mathcal{M} , mesmo com o cálculo e utilização de cortes de Gomory para o problema *Mestre*, faz com que sejam necessárias 135 iterações (e 4.6 horas de processamento) para a convergência para a solução ótima. Não considerar a heurística de parada para a determinação da convergência do problema *Mestre* faz com que o processo de decomposição convirja para a solução ótima em 76 iterações mas aumenta o tempo de processamento total para 1.35 hora (ao invés de 0.8 hora como no caso anterior). E, finalmente, não considerar cortes de Benders para relaxações do problema *Escravo*, no caso os problemas

de transporte e híbrido, neste caso, faz com que o processo de decomposição pare, sem a solução ótima, por falta de memória após o processamento de 350 iterações e tempo de CPU na ordem de 4 dias.

7.3 Conclusões

Neste capítulo apresentados os resultados obtidos pelo modelo de decomposição de Benders desenvolvido nesta tese considerando um sistema de transmissão real, o sistema reduzido da região Sul brasileira. Este sistema de transmissão vem sendo muito utilizado para ilustrar novos métodos para o planejamento da expansão de redes. Da mesma forma que em [63], duas instâncias com este sistema foram consideradas para ilustrar os resultados: a primeira permite que os geradores modifiquem o seu ponto de operação, enquanto que o segundo caso considera um despacho pré-determinado. Os resultados obtidos comprovam a otimalidade das soluções publicadas em [63].

Com relação aos conceitos desenvolvidos nesta tese de doutorado, os resultados comprovaram a eficiência da heurística de parada para o problema *Mestre*, a importância do cálculo de um valor mínimo para a constante disjuntiva $M_{ij} \forall ij \in \mathcal{C}$, a eficiência dos cortes de Gomory e da utilização dos cortes de Benders calculados a partir de relaxações do problema *Escravo* em conjunto com os cortes de Benders tradicionais.

CAPÍTULO 8

METAHEURÍSTICA GRASP PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DE EXPANSÃO DE REDES DE TRANSMISSÃO

8.1 Introdução

Neste capítulo vamos apresentar uma abordagem heurística para a solução do problema de planejamento da expansão de redes de transmissão baseada em um método denominado GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure). Este método se classifica como uma Metaheurística, que são métodos de busca que combinam métodos heurísticos e tem se mostrado muito efetivos na solução de problemas difíceis de grande porte, tal como o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Exemplos de Metaheurísticas são os métodos de Busca Tabu [32], Recozimento Simulado [46], Algoritmos Genéticos [43], GRASP [21] etc.

O objetivo de discutir tais métodos pode parecer um tanto fora do escopo principal da tese que consiste de decomposição de Benders para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, contudo, conforme discutido no capítulo anterior, métodos heurísticos efetivos em obter a solução ótima de problemas difíceis, mesmo que não possam provar a otimalidade desta solução, podem ser de grande ajuda para métodos enumerativos (como Branch-and-Bound) utilizados para a solução do problema *Mestre* nesta tese. Duas podem ser as contribuições importantes de tais métodos, um limite superior para o valor da função objetivo e

a própria solução heurística que pode ser utilizada como uma maneira de escolha das variáveis (“branching”) nos métodos enumerativos. Outra possível utilização das soluções heurísticas (mas não menos importante) é que podemos “filtrar” os circuitos candidatos, reduzindo assim as dimensões do problema a ser resolvido.

GRASP é um processo iterativo que tem duas fases associadas com cada iteração: uma fase de construção, onde uma solução viável é construída por um procedimento “guloso” aleatório e, uma fase de busca local, que busca por um mínimo local pertencente a uma dada vizinhança a partir da solução obtida pela fase de construção. A melhor solução, considerando todas as iterações do GRASP é mantida como a resposta para o problema.

Este capítulo este organizado da seguinte forma: A seção 8.2 apresenta uma revisão dos conceitos principais da metaheurística GRASP. A seção 8.3 descreve em detalhe a aplicação de GRASP para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Na seção 8.4 ilustramos alguns resultados computacionais obtidos na aplicação de GRASP aos casos exemplos utilizados nesta tese. Além disso, vamos utilizar os resultados obtidos pela metaheurística GRASP em um caso de planejamento da expansão de redes de transmissão com o sistema equivalente da região Sudeste brasileira para construir um caso reduzido (número de circuitos candidatos) e aplicar o método de decomposição de Benders proposto nesta tese. Finalmente, algumas conclusões e possíveis novos desenvolvimentos são apontados na seção 8.5.

8.2 Revisão de GRASP

Nesta seção, será descrita uma breve descrição dos conceitos gerais associados a metaheurística GRASP. Uma descrição completa destes conceitos pode ser obtida em [22].

GRASP é uma técnica iterativa heurística temperada com escolha aleatória e busca local composta por duas fases, uma fase de construção e uma fase de busca local. Um pseudo código genérico de GRASP é ilustrado pela figura 8.1.

Na figura 8.1, \mathcal{X} e \mathcal{X}^* são, respectivamente, uma solução viável para o problema e a melhor solução obtida até uma dada iteração k . As principais funções da


```

função GRASP()
1   LeDados();
2    $\mathcal{X}^* \leftarrow \emptyset$ ;
3   faça  $k = 1, \dots, MaxIter$ 
4    $\mathcal{X} \leftarrow \text{ConstructGreedyRandSolution}()$ ;
5   se  $\mathcal{X} \neq \emptyset$ 
6      $\mathcal{X} \leftarrow \text{LocalSearch}(\mathcal{X})$ ;
7      $\mathcal{X}^* \leftarrow \text{UpdateSolution}(\mathcal{X})$ ;
8   fim se ;
9   fim faça ;
10  retorna  $\mathcal{X}^*$ 
fim GRASP;

```

Figura 8.1: GRASP, descrição genérica.

metaheurística GRASP são os procedimentos `ConstructGreedyRandSolution()` – passo 4 – fase de construção, onde uma solução viável é, iterativamente, construída, e `LocalSearch()` – passo 6 – fase de busca local, onde se busca por uma solução mínima local que esteja dentro de uma vizinhança pré-determinada da solução obtida na fase de construção. O passo 7 – `UpdateSolution` corresponde, simplesmente a comparar o custo da solução obtida na k -ésima iteração com o custo da melhor solução obtida até então e, se a solução corrente é melhor, atualizar a melhor solução até então. A seguir cada uma das fases da metaheurística GRASP será apresentada.

8.2.1 A Fase de Construção

Para ilustrar a fase de construção vamos utilizar um problema geral de programação (0 – 1), conforme representado a seguir:

$$\text{Minimize } z = c^t x \tag{8.1a}$$

sujeito a :

$$Ax \geq b \tag{8.1b}$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \tag{8.1c}$$

O primeiro passo é inicializar uma solução tentativa fazendo $\mathcal{X} = \{\emptyset\}$, onde o conjunto \mathcal{X} é formado pelos índices das variáveis que tem valor igual a 1 na solução tentativa, isto é

$$\mathcal{X} = \{i \mid \text{se } x_i = 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Em seguida devemos escolher uma variável, x_j , para ser adicionada à solução tentativa \mathcal{X} . A escolha desta j -ésima variável deve ser feita a partir de uma função de mérito que, a rigor, é uma função “gulosa” medindo o benefício em termos da função objetivo do problema da adição de cada uma das suas variáveis isoladamente, isto é, podemos dizer que a função de avaliação, ou de mérito, utilizada para escolher qual variável vai ser adicionada é,

$$h(x) \propto \frac{\partial z}{\partial x}$$

A fase de construção utiliza a função de mérito $h(x)$, definida anteriormente, em um algoritmo iterativo, onde uma variável é adicionada à solução tentativa por vez, isto é, $\mathcal{X} = \mathcal{X} + \{j\}$. A função de mérito, $h(x)$, deve se adaptar às variações ocorridas no vetor x (solução tentativa) de forma a refletir corretamente as adições já realizadas.

Um método “guloso” puro constrói uma solução viável para um problema exatamente desta forma e, dependendo da complexidade do problema, métodos gulosos podem, inclusive, obter a solução ótima deste. Por exemplo, o método Simplex para solução de problema de programação linear, em que a escolha da variável para entrar na base é sempre aquela que trás o melhor benefício para a função objetivo do problema, é um método guloso que fornece a solução ótima. Entretanto, no caso de problemas de programação discretos, métodos “gulosos”, geralmente, não são capazes de encontrar a solução ótima.

Logo, uma possível alternativa seria inserir nestes uma característica aleatória e executá-los várias vezes, produzindo várias soluções viáveis para o problema, mantendo a melhor delas como solução final. É, exatamente, desta forma que GRASP trabalha.

A fase de construção do GRASP seleciona a j -ésima variável a partir de um conjunto composto pelas variáveis de melhor índice de mérito, $h(x)$, que ainda não tenham sido adicionadas ao conjunto \mathcal{X} . A este conjunto de variáveis candidatas

a entrar no conjunto \mathcal{X} dá-se o nome de lista de candidatos restrita (ou *RCL*). Formalmente, podemos definir a *RCL* da seguinte forma: faça,

$$h^{max} = \max_{i \in \mathcal{X}} h(x_i),$$

e

$$h^{min} = \min_{i \in \bar{\mathcal{X}}} h(x_i) \geq 0,$$

serem os valores máximos e mínimos para a função de mérito $h(x)$, onde $\bar{\mathcal{X}}$ é o complemento do conjunto \mathcal{X} em relação a \mathcal{C} , ou seja, o conjunto das variáveis que ainda não foram adicionadas. Então, a *RCL* será formada por todas aquelas variáveis cujo índice de mérito estiver no intervalo $[h^{min}, h^{max} + \alpha(h^{max} - h^{min})]$, ou seja,

$$RCL = \{i \in \bar{\mathcal{X}} \mid h^{min} \leq h(x_i) \leq h^{max} + \alpha(h^{max} - h^{min})\},$$

onde α é um parâmetro ($0 \leq \alpha \leq 1$) fornecido pelo usuário que, a rigor, determina o tamanho da lista restrita de candidatos.

Na abordagem clássica da metaheurística GRASP a próxima variável a ser adicionada ao conjunto \mathcal{X} é selecionada aleatoriamente da lista restrita de variáveis candidatas. Entretanto, outras funções de probabilidade podem ser consideradas.

Em [15] foi apresentado um estudo utilizando um procedimento “guloso” aleatório (sem busca local) utilizando diferentes funções de distribuição de probabilidade para escolher a j -ésima variável a ser adicionada. Além da função aleatória que associa igual chance de seleção para todos os elementos da *RCL*, foram apresentados resultados para as funções de distribuição de probabilidade linear ($b_i = 1/r_i$), exponencial ($b_i = \exp^{-r_i}$), logarítmica ($b_i = \log^{-1}(r_i + 1)$) e polinomial de ordem o ($b_i = r_i^{-o}$), onde r_i corresponde a ordem da i -ésima variável na lista restrita de candidatos *RCL* ordenada segundo o índice de mérito $h(x)$. Finalmente, a probabilidade de escolha da i -ésima variável é calculada por:

$$p_i = \frac{b_i}{\sum_{k \in RCL} b_k} \tag{8.2}$$

```

função ConstructGreedyRandSolution()
1    $\mathcal{X} \leftarrow \emptyset$ ;
2   repita
3     Construa  $RCL$  de acordo com (8.2.1);
4      $j \leftarrow \text{SAMP}(RCL)$ ;
5      $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cup j$ ;
6   até obter uma solução ou Falhar;
7   se Falha
8      $\mathcal{X} \leftarrow \emptyset$ ;
9   fim se
10  retorne  $\mathcal{X}$ 
fim ConstructionGreedyRandomSolution;

```

Figura 8.2: Fase de Construção, descrição genérica.

Naquele estudo, a função de distribuição linear apresentou os melhores resultados. Posteriormente, esta questão foi novamente estudada em um GRASP para o problema de escalonamento de tarefas (Job-Shop Scheduling), referência [9], e para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, [11]. Nestes dois estudos, também a função de distribuição linear é que obteve os melhores resultados.

Toda vez em que o conjunto solução tentativa \mathcal{X} muda (ou seja quando uma nova variável é adicionada a ele), é necessário verificar se a solução \mathcal{X} é viável para o conjunto de restrições do problema (8.1). Caso \mathcal{X} seja viável para o problema, a fase de construção está encerrada, retornando com a solução viável obtida para ser processada pela fase de busca local.

A Figura 8.2 ilustra um procedimento geral para a fase de construção. A função $\text{SAMP}(RCL)$ consiste, simplesmente, em selecionar (por sorteio) uma variável do conjunto RCL utilizando as probabilidades calculadas em (8.2) com base em alguma função de distribuição de probabilidade pré-selecionada.

Métodos heurísticos, como o método GRASP, requerem a escolha e definição de alguns parâmetros antes da execução do programa. Um exemplo é o parâmetros α que controla o tamanho da lista restrita de candidatos (RCL) na fase de construção. Um escolha errada deste parâmetro pode trazer sérios impactos na solução obtida pela método. A idéia básica do GRASP reativo é auto ajustar, iterativamente, os parâmetros necessários para a execução do método de acordo com a qualidade das soluções previamente obtidas.

GRASP reativo foi inicialmente proposto em [61] para o problemas de alocação. A seguir vamos descrever, brevemente, a implementação de GRASP reativo que será utilizada no planejamento da expansão de redes de transmissão.

Faça \mathcal{A} ser um conjunto de tamanho m de valores pré-definidos para o parâmetro α . A utilização de valores diferentes para α pode levar o resultado da fase de construção para soluções que nunca seriam visitadas no caso de ser utilizado um valor fixo para α . Então, faça p_i ser a probabilidade de seleção de um determinado valor para α , isto é,

$$p_i = \mathcal{P}(\alpha = \{\bar{\alpha} \in \mathcal{A}\}),$$

onde \mathcal{P} é o operador de probabilidade. Inicialmente, a probabilidade para seleção de um determinado valor do conjunto \mathcal{A} para o parâmetro α é igual para todos os elementos do conjunto, isto é $p_i = 1/m, i = 1, \dots, m$. Com o objetivo de atualizar a distribuição de probabilidade p , computamos a média dos valores das soluções obtidas pelo método GRASP durante as últimas k iterações. Denote por $avg_i, i = 1, \dots, m$ este valor médio. Então, calculamos

$$q_i = \left(\frac{v^*}{avg_i} \right)^\delta, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.3)$$

onde v^* é a melhor solução obtida até a iteração corrente pelo método GRASP. Após uma etapa de normalização,

$$p_i = \frac{q_i}{\sum_{j=1}^m q_j}. \quad (8.4)$$

obtemos os valores de probabilidade, p_i , associados aos elementos do conjunto \mathcal{A} que serão utilizados para dirigir a escolha do valor do parâmetro α nas próximas k iterações do método GRASP. O expoente δ é utilizado para atenuar os valores atualizados das probabilidades.

8.2.2 Fase de Busca Local

Como na fase de construção utilizamos um algoritmo “guloso” aleatório, não podemos garantir que a solução obtida nesta fase seja um ótimo local, pois ela é o

resultado da aplicação de um critério “míope”. Daí, pode ser uma idéia interessante, aplicar um procedimento de busca local para tentar melhorar cada uma das soluções obtidas pela fase de construção. Em linhas gerais, o algoritmo de busca local trabalha em um esquema de trocas, isto é, trocando a solução corrente por uma melhor (isto é, também viável e de menor custo) dentro de uma vizinhança da solução corrente. O algoritmo de busca local para quando não existe mais nenhuma solução melhor do que a solução corrente pertencente à vizinhança dada desta solução. A vizinhança é estabelecida com base no número de diferenças entre duas soluções. Por exemplo, sejam x' e x'' duas soluções diferentes para o problema (8.1) e $\text{Diff}(a, b)$ uma função que compara duas soluções quaisquer a e b , e retorna o número de diferenças entre elas. Então, dizemos que x'' pertence a vizinhança 2 de x' se $\text{Diff}(x', x'') \leq 4$.

No exemplo do problema (8.1), considere uma estrutura de vizinhança, $N(x)$, conforme definido acima, para uma dada solução viável \bar{x} . Então, concluímos que uma solução \bar{x} será uma solução ótima local na vizinhança $N(\bar{x})$ se, e somente se, nesta vizinhança não existir nenhuma outra solução melhor do que a solução \bar{x} , ou seja,

$$\bar{x} = \min_{x \in N(\bar{x})} (8.1) \Leftrightarrow \nexists x' \in N(\bar{x}) \mid c^t x' < c^t \bar{x}.$$

O procedimento de busca local, ilustrado de maneira genérica na figura 8.3, percorre a vizinhança da solução obtida na fase de construção a procura de melhoramentos e, em caso de sucesso, isto é, encontrando uma solução também viável porém com um custo $c^t x$ menor que o da solução corrente, torna esta solução a solução corrente e, reinicializa o procedimento de busca local.

Note que o procedimento de busca local pode requerer esforço computacional exponencial para terminar. Entretanto, boas soluções iniciais, estruturas de dados especializadas e implementações cuidadosas podem melhorar muito o esforço computacional requerido.

```

função LocalSearch( $s$ )
1   Construa  $N(s)$  para  $s$ ;
3   Ache  $y \in N(s) \mid Ay \geq b \wedge c^t y < c^t s$ ;
4   se  $\exists y$ 
5     LocalSearch( $y$ );
6   fim se
8   retorne  $s$ 
fim LocalSearch;

```

Figura 8.3: Fase de Busca Local, descrição genérica.

8.3 GRASP no Problema de Planejamento de Expansão de Redes de Transmissão

Nesta seção vamos particularizar os procedimentos da fase de construção e da busca local para o problema de planejamento da expansão da rede de transmissão que, conforme visto no capítulo 2, pode ser formulado como um problema de programação da seguinte forma:

$$\text{Minimize } z = c_I^t x + c_O^t r \quad (8.5a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (8.5b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (8.5c)$$

$$f^1 - [x][\gamma^1] S_1 \theta = 0 \quad (8.5d)$$

$$f^1 - [\bar{f}^1] x \leq 0 \quad (8.5e)$$

$$f^1 + [\bar{f}^1] x \geq 0 \quad (8.5f)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (8.5g)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (8.5h)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (8.5i)$$

$$x \in \{0, 1\}^{|\mathcal{C}|} \quad (8.5j)$$

Sejam, ainda, \mathcal{N} , \mathcal{E} e \mathcal{C} os conjuntos das barras (nós), dos circuitos (ramos) existentes e dos circuitos (ramos) candidatos a adição, respectivamente. O primeiro

ponto a ser apresentado é a fase de construção.

8.3.1 Fase de Construção

A fase de construção da metaheurística GRASP consiste de um procedimento iterativo que irá construir uma solução viável para o problema (8.5) adicionando uma variável, ou seja, um novo circuito candidato à rede existente, a cada iteração desta fase. A fase de construção para quando a solução tentativa, que está sendo construída iterativamente, é uma solução viável para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, ou seja, quando o sistema elétrico considerando todos os circuitos existentes mais aqueles que já foram construídos é capaz de atender a carga (as violações operacionais foram eliminadas).

Note que, considerar uma solução tentativa para o problema consiste em testar um plano de expansão da rede de transmissão, verificando sua viabilidade no problema (8.5). Seja \hat{x} o plano de expansão tentativo e \mathcal{X} o conjunto com os índices das variáveis x (circuitos candidatos) adicionadas no plano de expansão, a viabilidade do plano de expansão pode ser verificado substituindo \hat{x} no problema (8.5) ou seja, resolvendo o seguinte problema de programação linear,

$$\text{Minimize } z_O = c_O^t r \quad (8.6a)$$

sujeito a :

$$S_0^t f^0 + S_1^t f^1 + g + r = d \quad (8.6b)$$

$$f^0 - [\gamma^0] S_0 \theta = 0 \quad (8.6c)$$

$$f^1 - [\hat{x}][\gamma^1] S_1 \theta = 0 \quad (8.6d)$$

$$-[\bar{f}^1] \hat{x} \leq f^1 \leq [\bar{f}^1] \hat{x} \quad (8.6e)$$

$$0 \leq g \leq \bar{g} \quad (8.6f)$$

$$0 \leq r \leq d \quad (8.6g)$$

$$-\bar{f}^0 \leq f^0 \leq \bar{f}^0 \quad (8.6h)$$

O problema (8.6) corresponde a um problema de operação (linear) onde o objetivo é cortar o mínimo de carga do sistema para atender as restrições (8.6b)–(8.6d)

e os limites (8.6f)–(8.6e). Este problema de programação linear pode ser eficientemente solucionado por um algoritmo Dual Simplex especializado que utiliza técnicas de base reduzida e limites superiores [70].

Resolvido o problema de programação linear (8.6), obtemos como subproduto os multiplicadores de Lagrange associados com cada uma de suas restrições. Estes multiplicadores (variáveis duais), π_d , π_g , π_r , π_{f^0} e π_{f^1} , avaliam o impacto na função objetivo (mínimo corte de carga) em função de variações marginais no lado direito de cada uma das restrições (8.6b) e limites (8.6f)–(8.6e).

Em particular, estamos interessados nos multiplicadores associados à adição de um circuito candidato a rede elétrica, ou seja $\pi_{x_{ij}}$ para o circuito candidato ij . Note que a adição do circuito candidato ij altera o problema (8.6) na susceptância γ_{ij}^1 – restrição (8.6d), e no limite de carregamento \bar{f}_{ij}^1 – restrição (8.6e) do circuito candidato ij . Logo, o multiplicador $\pi_{x_{ij}}$ é calculado por:

$$\pi_{x_{ij}} = \frac{\partial z_O}{\partial \gamma_{ij}^1} + \frac{\partial z_O}{\partial \bar{f}_{ij}^1}. \quad (8.7)$$

O valor de $\frac{\partial z_O}{\partial \bar{f}_{ij}^1}$ é obtido diretamente a partir da solução do problema de programação linear (8.6e) e corresponde ao multiplicador de Lagrange $\pi_{f_{ij}^1}$ associado à restrição de limite de carregamento no circuito candidato ij . Já o valor do outro termo $\pi_{\gamma_{ij}^1} = \frac{\partial z_O}{\partial \gamma_{ij}^1}$, que corresponde à variação na função objetivo z_O em função de modificações marginal na susceptância do circuito ij , foram deduzidos em [18, 57] e podem ser calculados por:

$$\pi_{\gamma_{ij}^1} = (\pi_{d_i} - \pi_{d_j}) (\theta_i - \theta_j). \quad (8.8)$$

Neste ponto temos uma medida que relaciona a adição dos circuitos candidatos com a medida de inviabilidade de um plano de expansão, o corte de carga. O que falta para conseguirmos um índice de mérito para a construção da lista restrita de candidatos que é a base da fase de construção da metaheurística GRASP é considerar o custo de investimento de cada circuito candidato. Desta forma, vamos definir o índice de mérito utilizando o índice de viabilidade, $\pi_{x_{ij}}$ eq. (8.7), dividido pelo custo de cada circuito candidato, ou seja,

$$h_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi_{x_{ij}}}{c_{T_{ij}}} & \text{se } ij \notin \mathcal{X} \\ 0 & \text{se } ij \in \mathcal{X} \end{cases} \quad (8.9)$$

Agora, já estamos aptos a construir a *RCL*. Utilizando as mesmas definições da seção anterior, a *RCL* no GRASP para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão é dada por,

$$RCL = \{ij \in \bar{\mathcal{X}} \mid h^{min} \leq h(x_i) \leq h^{max} + \alpha(h^{max} - h^{min})\}, \quad (8.10)$$

onde $\bar{\mathcal{X}}$ é o complemento de \mathcal{X} em relação a \mathcal{C} .

Conforme definido na seção anterior, o próximo circuito candidatos a ser adicionado à rede elétrica é escolhido da *RCL* utilizando uma função de distribuição de probabilidade pré-selecionada. Resultados publicados com GRASP para o planejamento da expansão de redes de transmissão [11, 13] indicam que a função distribuição de probabilidade linear é a que um melhor comportamento para este problema.

Escolhido o circuito a ser adicionado, digamos o circuito ij , este deve ser incluído no vetor de solução tentativa, isto é, $\hat{x} = \hat{x} + x^{ij}$, onde x^{ij} é um vetor nulo com exceção da posição ij onde é igual a 1.

Para verificar a viabilidade da solução tentativa \hat{x} um novo programa linear (8.6) deve ser resolvido considerando o novo plano tentativo \hat{x} . Caso a solução deste problema seja satisfatória, isto é $z_0 = 0$, a fase de construção encontrou uma solução viável para o problema.

Neste ponto, seguindo a teoria tradicional da metaheurística GRASP deveríamos seguir para a fase de busca local. Entretanto, visto que esta solução é construída a partir de um critério essencialmente “guloso”, ela pode conter muitos circuitos candidatos cuja adição não é mais necessária. Estes circuitos podem ser removidos da solução (ou plano) tentativa trazendo benefícios pois reduzem o valor do custo total de investimento a ser minimizado. Então, antes de seguir para a fase de busca local vamos eliminar do plano de expansão tentativo estes circuitos candidatos redundantes. Para isto, monte uma lista ordenada pelo custo de investimento de todos os circuitos candidatos previamente adicionados (do maior custo para o menor) e tente, para cada circuito candidato desta lista, sua remoção do plano de expansão.

Sempre que a remoção de algum circuito não leva a um sistema de transmissão com violações a remoção é aceita e este circuito candidato é, definitivamente, retirado do plano de expansão tentativo.

O procedimento de remoção, exemplificado acima, é recursivo, isto é, sempre que um circuito é removido o procedimento deve ser reinicializado pois os circuitos candidatos já analisados são, novamente, candidatos a serem removidos. Note que, este procedimento de remoção pode ser classificado como uma busca local. Entretanto, por conveniência e clareza preferimos colocar este procedimento no encerramento da fase de construção.

A figura 8.4 apresenta a fase de construção do GRASP para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.

8.3.2 Fase de Busca Local

A fase de busca local da metaheurística GRASP tem por objetivo encontrar um mínimo local dado uma vizinhança pré-estabelecida. Como a esta etapa inicia a busca pelo mínimo local a partir da solução fornecida pela fase de construção, que é um procedimento de construção de uma solução com base em um algoritmo “guloso” aleatório, a diversidade das soluções garante a obtenção de mínimos locais diferentes.

A implementação da fase de busca local para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão apresentada nesta tese é baseada em trocas entre circuitos candidatos pertencentes ao plano de expansão tentativo com aqueles não considerados nesse plano. Assim, a vizinhança pré-estabelecida pode ser de magnitude 1 : 1, trocar um circuito candidato do plano de expansão por outro que não está no plano, 2 : 1, 2 : 2 etc. É importante ressaltar que o esforço computacional necessário cresce exponencialmente com o aumento da vizinhança a ser explorada nesta fase.

Com o objetivo de ilustrar com mais detalhe a fase de busca local da metaheurística GRASP, considere um sistema teste simples composto por 3 barras e representado na figura 8.5, cujos dados relevantes são dados nas tabelas 8.2 (dados de barras) e 8.1 (dados dos circuitos).

Suponha, sem perda de generalidade, que a solução obtida pela fase de cons-

```

função ConstructionPhase()
1    $\hat{x} \leftarrow 0$ ;
    /* Construa a solução viável */;
2   enquanto  $z_0 > 0.0$  faça
3     Resolva o problema (8.6) para  $\hat{x}$ ;
4     Calcule  $h_{ij}$  de acordo com (8.9);
5     Monte a RCL conforme (8.10);
6     se  $RCL = \emptyset$ 
7       retorne(NULL);
8     senão
9        $(ij) \leftarrow \text{SAMP}(RCL)$ ;
10       $\hat{x}_{(ij)} = 1$ ;
11    fim se;
12  fim faça;
    /* Elimine as adições redundantes */;
13  REMOVE = TRUE;
14  enquanto REMOVE = TRUE faça
15    REMOVE = FALSE;
16    para  $ij \in \hat{x}_{ij} = 1$  faça
17       $\hat{x}_{ij} = 0$ ;
18      Resolva o problema (8.6) para  $\hat{x}$ ;
19      se  $z_0 > 0.0$ 
20        faça  $\hat{x}_{ij} = 1$ ;
21      senão
20        REMOVE = TRUE;
21      fim se
22    fim faça
23  fim faça
25  retorne ( $\hat{x}$ )
fim ConstructionPhase;

```

Figura 8.4: Fase de Construção para o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão.

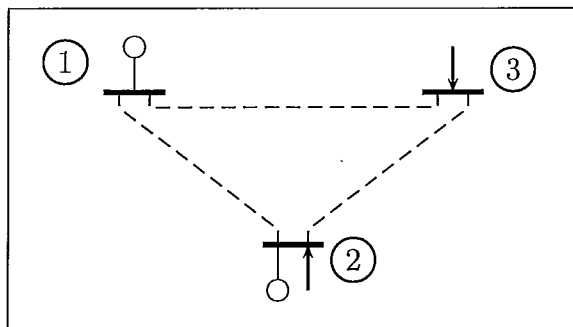


Figura 8.5: Sistema exemplo de 3–barras.

Circuito	Custo (\$)	Reatância (Ω)	Lim. Transmissão (MW)
1 – 2	10	0.10	100
1 – 3	15	0.15	100
2 – 3	10	0.10	100

Tabela 8.1: Dados dos Circuitos.

trução resulta da adição dos circuitos 1 – 2 e 2 – 3 (o primeiro e o terceiro circuitos candidatos). Representando esta solução em um vetor (plano de expansão tentativo), obtemos $\hat{x}^t = [101]$. O custo de investimento do plano de expansão \hat{x} é igual a \$20.

Antes de prosseguirmos, vamos introduzir conceitos que definem a estrutura de vizinhança a ser explorada e os movimentos que serão realizados para a exploração desta vizinhança. Considere um grafo $\mathcal{G}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ não orientado onde \mathcal{N} é o conjunto de nós que é formado por todas as possíveis configurações do sistema de transmissão (configurações viáveis e inviáveis), e \mathcal{A} é o conjunto de arcos que representam trocas 1 : 0 ou 0 : 1, ou seja, adições ou retiradas de circuitos candidatos que levam de um nó para outro, ou seja de uma configuração do sistema de transmissão para outra.

A Figura 8.6 ilustra o grafo \mathcal{G} para o sistema exemplo de 3 barras representado na figura 8.5, onde o nó [000] corresponde a configuração onde nenhuma linha é adicionada e o nó [111] a configuração onde todas as linhas estão adicionadas. Suponha que, em uma dada iteração da metaheurística GRASP a solução obtida pela fase de construção resulta no plano de expansão tentativo \hat{x} representado no grafo \mathcal{G} pelo nó [101].

Suponha ainda que a vizinhança que será explorada pela fase de busca local do GRASP é igual a 1, ou seja serão tentadas trocas 1 : 1 (um circuito candidato

Barra	Geração (MW)	Carga (MW)
1	200	0
2	100	100
3	0	100

Tabela 8.2: Dados das barras.

adicionado por um circuito candidato não adicionado). Portanto, inicialmente removemos um circuito candidato da solução obtida pela fase de construção \hat{x} (isto corresponde a movimentos para os nós 100 e 001 do grafo \mathcal{G} da figura 8.6), para em seguida adicionarmos um circuito candidato, para cada um dos movimentos feitos anteriormente, o que corresponde a novos movimentos para os nós 110 e 011, indicados na figura 8.6 como sendo o conjunto vizinhança $N(\hat{x})$ da solução da fase de construção \hat{x} .

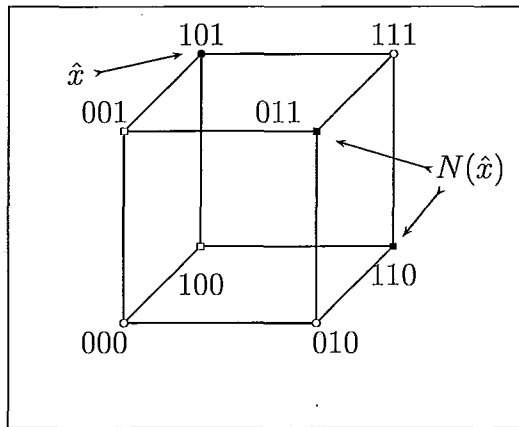


Figura 8.6: Grafo \mathcal{G} para o sistema exemplo com 3-barras.

É interessante assinalar que, para a vizinhança igual a 1, os movimentos do procedimento de busca local não são para os nós imediatamente vizinhos, e sim para os nós vizinhos destes. Isto é uma consequência do procedimento de eliminação dos circuitos candidatos redundantes, implementado na fase de construção, que corresponde, na análise apresentada para a fase de busca local, a movimentos $1 : 0$, ou seja, somente é retirado o circuito candidato redundante do plano de expansão tentativo. Portanto, os nós 100 e 001, que foram utilizados somente para alcançar os nós 011 e 110 $\in N(\hat{x})$, já foram analisados na fase de construção da metaheurística GRASP, e são com certeza soluções são inviáveis ($z_0 > 0$).

Também é interessante colocar que, como o número de nós a serem explorados no procedimento de busca local cresce exponencialmente com o número de candidatos, são necessários procedimentos de amostragem da vizinhança conforme discutido a seguir.

O tamanho da vizinhança $N(x)$ a ser explorado pela fase de busca local, na implementação proposta neste tese, tem um limite máximo. Então, a idéia é tentar analisar as soluções vizinhas que sejam, potencialmente, “boas” no sentido de viabilidade. Lembre que ao explorar a vizinhança de uma solução viável não é possível identificar, a priori, quais dos vizinhos são também viáveis. Isto somente pode ser verificado após a solução do problema de programação linear (8.6). Contudo, utilizando os multiplicadores de Lagrange do problema (8.6) podemos pré-selecionar as soluções que são potencialmente “boas” para serem exploradas.

8.4 Resultados Computacionais

Nesta seção vamos apresentar os resultados obtidos pela metaheurística GRASP para o sistema da região sudeste brasileira. Este caso de planejamento é maior e mais complicado do que o caso com o sistema da região sul brasileira utilizado no capítulo 7 para ilustrar o método de decomposição de Benders desenvolvido nesta tese. Estas dificuldades adicionais deste caso de planejamento fazem com que a aplicação direta do método de decomposição de Benders não ache a solução ótima devido a falta de recursos computacionais para solução do problema *Mestre*. Então, a partir dos resultados obtidos pela metaheurística GRASP, o número de circuitos candidatos do caso teste é reduzido para permitir a utilização do método de decomposição de Benders.

O ambiente computacional utilizado para o processamento dos casos de planejamento com a metaheurística GRASP é o mesmo utilizado anteriormente, ou seja, uma workstation SUN-Ultra 2, rodando Solaris com 128 Mbytes de memória.

8.4.1 O Caso Teste – Sistema Equivalente da Região Sudeste Brasileira

Este caso de planejamento é composto por uma rede inicial formada por 79 barras e 155 circuitos e por 429 (3×143) variáveis binárias, cada uma correspondendo a um circuito candidatos que pode ser adicionada à rede existente. A figura 8.7 ilustra este sistema de transmissão onde, linhas cheias representam a rede existente enquanto que linhas tracejadas as novas faixas de passagem. Duplicações de circuitos existentes não estão representadas na figura.

Todos os dados relevantes para a execução dos testes publicados a seguir podem ser obtidos no apêndice C, tabelas C.4 (dados de barras), C.5 (dados dos circuitos existentes) e C.6 (dados dos circuitos candidatos). Da mesma forma que no caso anterior com o sistema equivalente da região sul brasileira, consideramos nestes estudos uma tolerância para detecção de sobrecarga (circuitos existentes e candidatos) igual a 1% do valor do limite de carregamento de cada um dos circuitos.

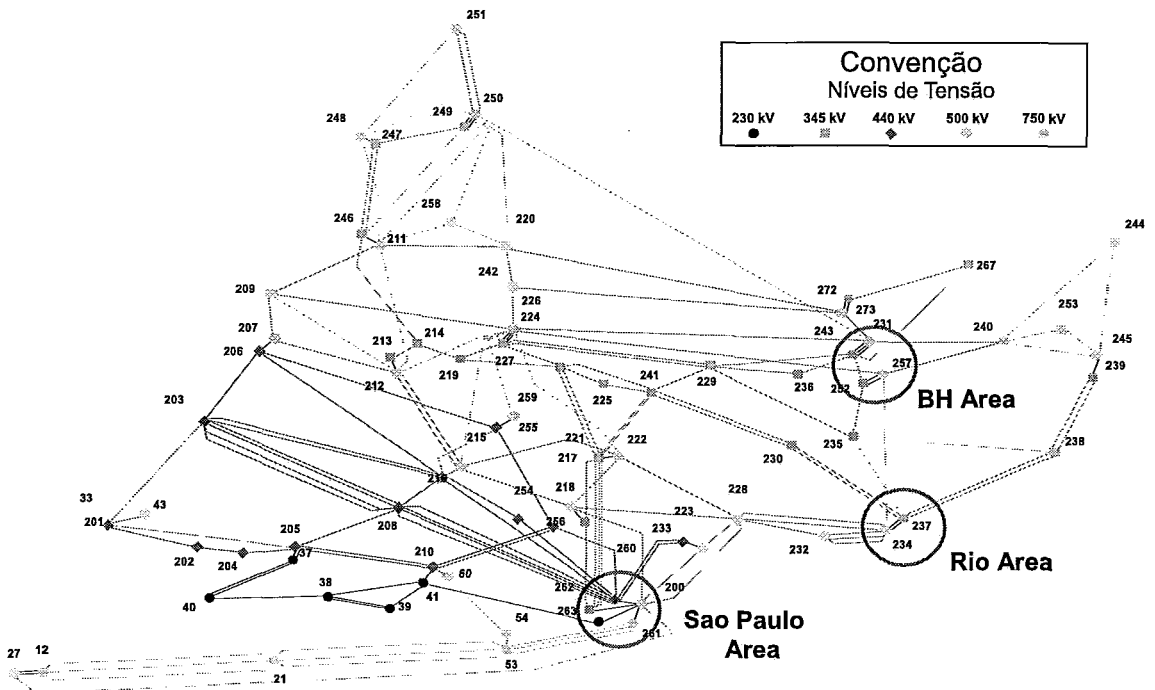


Figura 8.7: O sistema equivalente da região Sudeste brasileira.

8.4.2 Resultados do GRASP

Com o objetivo de verificar o efeito dos diferentes parâmetros deste método, bem como de gerar diferentes soluções que serão combinadas para a aplicação do modelo de decomposição de Benders, foram realizadas várias execuções da metaheurística GRASP com este estudo de planejamento da expansão.

A tabela 8.3 classifica os casos que serão processados pela metaheurística GRASP. Para cada um dos casos da tabela 8.3, executamos a metaheurística GRASP 5 vezes, considerando a variação no valor da semente utilizada no gerador de números aleatórios.

Tabela 8.3: Descrição das “rodadas” do GRASP.

Caso	Função de probabilidade	α
0	Linear	Reativo $\delta = 5$
1	Aleat.	Reativo $\delta = 5$
2	Linear	Reativo $\delta = 1$
3	Aleat.	Reativo $\delta = 1$
4	Linear	Fixo 0.75
5	Aleat.	Fixo 0.75
6	Linear	Fixo 0.50
7	Aleat.	Fixo 0.50

Tabela 8.4: Resultados do GRASP (custo de investimento) com o sistema equivalente da região Sudeste brasileira.

Caso	Média (5 rodadas)	Melhor Solução
0	427.2	422
1	427.6	424
2	428.4	422
3	428.8	424
4	430	430
5	430	430
6	470	470
7	470	470

Com relação a variação dos parâmetros da metaheurística GRASP os seguinte

Tabela 8.5: Circuitos adicionados para a solução de custo US\$ 422×10^6 .

207-206	207-209	210-41	210-41
211-246	216-215	220-242	220-242
220-250	221-224	224-227	224-227
226-227	226-242	226-242	226-259
234-237	244-245	245-239	245-253
249-250	250-251	255-259	255-259

comentários são válidos: A melhor solução foi obtida somente 2 vezes e sempre utilizando o ajuste reativo para a escolha do parâmetro α . No que concerne as utilização de diferentes funções de probabilidade, foram testadas as funções aleatória e linear e, dentre estas duas funções, observamos um melhor comportamento da função de probabilidade linear.

Cada “rodada” da metaheurística GRASP consumiu, aproximadamente, 45 minutos de tempo de CPU. Note que além da solução com custo de US\$ 422×10^6 , duas outras soluções obtidas, ilustradas nas tabelas 8.6 e 8.7, são de boa qualidade (diferença nos custos de investimentos inferiores a 5%).

Tabela 8.6: Circuitos adicionados para a solução de custo US\$ 424×10^6 .

204-205	207-206	207-209	209-211
210-41	210-41	214-219	214-246
216-215	220-242	221-224	224-227
226-242	226-259	234-237	244-245
245-239	245-253	248-247	248-247
248-250	249-250	250-251	255-259

Tabela 8.7: Circuitos adicionados para a solução de custo de US\$ 430×10^6 .

204-205	37-205	38-40	39-41
207-206	207-209	209-211	214-219
214-246	216-215	220-242	221-224
224-227	226-242	226-259	234-237
244-245	245-239	245-253	248-247
248-247	248-250	249-250	250-251
255-259			

Estas três soluções serão utilizadas para gerar um novo caso de planejamento da expansão de redes de transmissão (visto que o número de circuitos candidatos será reduzido) que será utilizado na próxima seção com os resultados obtidos no modelo de decomposição de Benders. O conjunto reduzido de candidatos para este caso reduzido também está representado no apêndice C, tabela C.7 (conjunto reduzido de circuitos candidatos).

8.4.3 Resultados da Decomposição de Benders

O caso com número de circuitos candidatos reduzidos tem uma complexidade muito menor do que o caso original, permitindo a aplicação do algoritmo de decomposição de Benders. No caso original com o sistema da região sudeste brasileira, a aplicação da decomposição de Benders falha por falha por falta de recursos computacionais na solução do problema *Mestre*.

A tabela 8.8 ilustra parte do relatório de convergência produzido pelo algoritmo de decomposição de Benders. Na primeira coluna, além do número da iteração da decomposição de Benders está representado o “status” da solução do problema *Mestre*, onde “O” representa solução ótima e “V” solução viável com custo no intervalo definido por $z_{INF} + TolConv$. As colunas 2–5 representam, respectivamente, o limite inferior para o valor da função objetivo do problema z_{INF} , o valor da função objetivo do problema *Escravo* (que corresponde às inviabilidade do sistema de transmissão), o limite superior para o valor da função objetivo do problema z_{SUP} e o *GAP* para convergência do processo de decomposição de Benders. As colunas 6–8 representam o número de cortes de Benders do modelo de transportes (T), do modelo híbrido (H), do modelo linear disjuntivo LD enquanto que a coluna 9 representa o número de cortes de Gomory para o problema *Mestre*. Finalmente, as colunas 10–11 representam o tempo médio de CPU pelo número de iterações.

A solução ótima obtida, para este caso com o número de candidatos reduzidos, foi igual a solução obtida pela metaheurística GRASP, e tem um custo total de investimento igual a 422×10^6 US\$. O número total de iterações foi de 95, e 193 cortes de Benders foram construídos (18 utilizando o modelo de transportes, 80 calculados a partir do modelo híbrido e 95 gerados a partir do modelo linear disjuntivo). Além disso, 201 cortes de Gomory para o problema *Mestre* foram construídos durante o

processo de decomposição. O tempo de CPU utilizado para processar todas as 95 iterações foi de, aproximadamente, 670 segundos (49 s para a solução do problema *Escravo* e 620 s para a solução do problema *Mestre*).

8.5 Conclusões

Neste capítulo apresentamos uma metaheurística – GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) – aplicada ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Para ilustrar os resultados deste método heurístico utilizamos um caso teste de planejamento da expansão de redes de transmissão – o caso com o sistema equivalente da região Sudeste brasileira – que é maior e mais complicado do que o caso equivalente da região Sul brasileira, analisado no capítulo 7.

A partir dos resultados obtidos pela metaheurística GRASP, montamos um novo caso de planejamento com o sistema da região sudeste brasileira, no qual o número de circuitos candidatos a adição foi, significativamente, reduzido, limitando-se aos circuitos pertencentes às melhores soluções obtidas pela metaheurística GRASP.

Com o objetivo de verificar a otimalidade da solução dentre às soluções obtidas pela metaheurística, este caso com o número de circuitos candidatos reduzido foi processado pelo método de decomposição de Benders proposto nesta tese. Os resultados mostraram que, dentre o conjunto de soluções obtidas pela metaheurística GRASP, não existe nenhuma solução melhor do que a solução obtida.

Tabela 8.8: Resultados do caso reduzido da região Sudeste brasileira.

It.St.	$c_I^t x + \alpha$	$c_O^t r$	$c_I^t x + c_O^t r$	GAP	Cortes	Tempo CPU	
#	10^6 US\$				$\mathcal{T}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{G}$	$Escr$	$Mest$
55 V	401	6098	624	222	17,56,56, 50	0.42	2.22
56 O	404	583	624	219	17,57,57, 50	0.42	2.32
57 V	404	3224	624	219	17,58,58, 52	0.42	2.42
58 V	404	7176	624	219	17,59,59, 52	0.42	2.53
59 O	406	8756	624	217	17,60,60, 57	0.43	2.63
60 O	406	314	624	217	17,61,61, 62	0.43	2.73
61 V	406	3059	624	217	17,62,62, 62	0.43	2.83
62 V	406	46	451	44	17,63,63, 67	0.43	2.92
63 V	406	5313	451	44	17,64,64, 67	0.43	3.02
64 O	408	3992	451	43	17,65,65, 70	0.44	3.13
65 V	408	4986	451	43	17,66,66, 70	0.44	3.23
66 V	408	4754	451	43	17,67,67, 75	0.44	3.32
67 O	409	7546	451	42	17,68,68, 75	0.44	3.43
68 V	409	3869	451	42	17,68,69, 77	0.45	3.53
69 O	410	2163	451	41	17,68,70, 82	0.45	3.63
70 V	410	2226	451	41	17,69,71, 87	0.45	3.64
71 O	412	5810	451	39	17,70,72, 92	0.45	3.76
72 V	412	4204	451	39	17,71,73, 97	0.45	3.89
73 V	412	63	451	39	17,71,74,102	0.46	4.02
74 O	413	5303	451	38	17,72,75,107	0.46	4.16
75 V	413	3836	451	38	17,72,76,112	0.46	4.29
76 V	413	9273	451	38	18,73,77,113	0.46	4.44
77 O	414	1933	451	37	18,73,78,118	0.47	4.58
78 V	414	73	451	37	18,73,79,123	0.47	4.65
79 V	414	4162	451	37	18,74,80,128	0.47	4.79
80 V	414	3776	451	37	18,74,81,133	0.47	4.92
81 O	416	1055	451	35	18,75,82,138	0.48	5.07
82 V	416	3240	451	35	18,76,83,143	0.48	5.21
83 V	416	1515	451	35	18,76,84,148	0.48	5.35
84 O	417	32	449	32	18,76,85,153	0.48	5.49
85 V	417	2520	449	32	18,76,86,158	0.49	5.61
86 V	417	124	449	32	18,76,87,163	0.49	5.71
87 O	417	1418	449	32	18,77,88,165	0.49	5.85
88 O	419	3636	449	30	18,77,89,166	0.49	6.01
89 V	419	1426	449	30	18,78,90,171	0.50	6.06
90 V	419	208	449	30	18,78,91,176	0.50	6.12
91 V	419	1252	449	30	18,78,92,181	0.50	6.20
92 V	419	1202	449	30	18,78,93,186	0.51	6.35
93 O	420	3713	449	29	18,79,94,191	0.51	6.41
94 V	420	2990	449	29	18,80,95,196	0.51	6.44
95 O	422	0	422	0	18,80,95,201	0.51	6.51

CAPÍTULO 9

CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Este capítulo tem por objetivo sintetizar os principais conclusões sobre os resultados obtidos nesta tese de doutorado bem como apresentar recomendações para pesquisas e investigações de trabalhos futuros.

Neste trabalho, foi desenvolvido uma aplicação computacional utilizando a decomposição de Benders para resolver problemas estáticos de planejamento da expansão de redes de transmissão para um horizonte de médio a longo prazo. Para formular o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão, utilizamos um modelo linear $(0 - 1)$ disjuntivo que, ao contrário do modelo não-linear (não convexo) tradicional, assegura que a solução ótima obtida pelo método de decomposição é o plano ótimo de expansão da rede de transmissão.

Com relação a desenvolvimentos teóricos, quatro pontos merecem um destaque especial:

- A nova heurística para convergência do problema *Mestre*;
- O cálculo de cortes de Gomory, tanto para o problema *Mestre* como também os cortes de Gomory Benders decompostos;
- O cálculo de valores sob-medida para a constante disjuntiva da formulação linear $(0 - 1)$ mista para representar o problema de planejamento da expansão de redes de transmissão;

- A utilização dos cortes de Benders calculados a partir de relaxações do problema *Escravo* em conjunto com os cortes de Benders tradicionais.

A nova heurística para determinar a convergência do problema *Mestre* da decomposição de Benders, que é um problema de programação linear (0 – 1) mista e, portanto, um problema de difícil resolução, resultou em grandes economias em termos do tempo computacional gasto, como ilustrados pelos casos testes apresentados.

Vimos que a utilização de cortes de Gomory em decomposição de Benders pode ser realizada de duas formas distintas: *i*– cortes de Gomory para o problema *Mestre*, e *ii*– cortes de Gomory Benders decompostos. Os cortes de Gomory para o problema *Mestre* são restrições de Gomory calculadas a partir deste problema e incluídas no problema *Mestre* da próxima iteração do processo de decomposição de Benders.

Por outro lado, os cortes de Gomory Benders decompostos consistem em cortes de Gomory “liftados” para o próprio problema de planejamento da expansão de redes de transmissão. Vimos que para considerá-los no modelo de decomposição de Benders é necessário uma nova decomposição destas restrições, daí o nome de cortes de Gomory Benders decompostos. A aplicação de tais cortes não foi realizada pois existem ainda muitas implicações teóricas que ainda precisam serem estudadas, como por exemplo, o efeito do aumento das variáveis Duais do problema *Escravo* da decomposição de Benders.

Com relação ao problema de planejamento da expansão de redes de transmissão mostramos, através de aplicações, que o valor numérico da constante disjuntiva tem influência significativa para a convergência do modelo de decomposição de Benders. Valores numéricos grandes para este parâmetro “degradam” as informações dos cortes de Benders dificultando ou mesmo, impedindo, a convergência para a solução ótima. Um importante avanço teórico que possibilitou a aplicação do modelo linear (0 – 1) disjuntivo a sistemas reais, foi a derivação de um valor “mínimo” para a constante disjuntiva. A utilização destes valores permitiu, conforme reportado, um grande avanço na aplicação prática deste modelo a problemas testes com sistemas reais.

Contudo, com relação aos resultados apresentados a utilização dos cortes de Benders calculados para relaxações do problema *Escravo* em conjunto com os cortes de

Benders tradicionais foi o desenvolvimento deste tese que teve a maior contribuição para redução do tempo de processamento. A explicação para isto é uma melhoria da representação da função que descreve o problema de segundo estágio no problema *Mestre*. Esta melhor representação para o problema do segundo estágio resultou, conforme ilustrado nos casos exemplos apresentados, em uma substancial redução tanto do número de iterações para convergência como também no tempo de processamento gasto no processo de decomposição de Benders.

Apresentamos a aplicação da metaheurística GRASP ao problema de planejamento da expansão de sistemas de transmissão. Note que muitas vezes o número de candidatos de um caso de planejamento da expansão impede a aplicação com sucesso de técnicas de decomposição. Daí a aplicabilidade de técnicas heurísticas, como o GRASP, que são capazes de prover “boas” soluções que podem ser utilizadas para, por exemplo, limitar o conjunto de circuitos candidatos para uma busca, nesta região reduzida, por melhores soluções por métodos de decomposição. Ilustramos um exemplo da aplicação conjunta de técnicas heurísticas com modelos de decomposição com o sistema equivalente da região sudeste brasileira. Muitas outras possibilidades de utilização conjunta podem ser pensadas, como por exemplo a utilização do resultado de técnicas heurísticas como limite superior para o valor da solução ótima, ordenações para “branching” no método “Branch-and-Bound” etc.

Com relação a trabalhos futuros, um grande leque de novas linhas de investigação estão sendo abertas. Vamos discutir, a seguir, os três principais pontos.

O primeiro ponto que deve ser investigado no futuro são os cortes de Gomory Benders decompostos. O completo desenvolvimento de tais restrições permitirá, não somente a utilização de cortes de Gomory para o problema completo no esquema de decomposição de Benders. mas também a utilização de quaisquer outros cortes globalmente válidos calculados, iterativamente, durante o processo de decomposição. Desta forma, pode-se aumentar o potencial de convergência dos modelos de decomposição de Benders. Outro ponto correlato é o desenvolvimento de critérios teóricos para que seja possível identificar cortes potencialmente bons. Assim, seria possível considerar somente um conjunto (ou pool) de cortes, limitando o crescimento do problema *Mestre*.

Um outro ponto muito interessante relacionado à teoria de decomposição de

Benders, é a pesquisa e implementação de, por exemplo, um algoritmo de “Branch-and-Cut” especializado para decomposição de Benders. Lembre que o processo de decomposição de Benders resolve uma seqüência de problemas de programação linear inteira mista (o problema *Mestre*), no qual o problema da iteração $k + 1$ difere do da iteração k por apenas um pequeno número de restrições. Este algoritmo de “Branch-and-Cut” especializado deveria, por exemplo, armazenar toda a árvore de busca já explorada quando da solução do problema *Mestre* da k -ésima iteração e, face a inclusão de novas restrições, saber recuperar as informações de maneira inteligente, economizando tempo de processamento.

Quanto ao problema de planejamento da expansão da transmissão de redes conforme descrito nesta tese, um tópico que não foi investigado, mas que pode trazer resultados interessantes é o cálculo de cortes focados nas restrições que modelam a segunda lei de Kirchoff. Nesta tese utilizamos três diferentes cortes de Benders, o tradicional que é calculado a partir do Dual do problema *Escravo* (que utiliza o modelo linear disjuntivo) e outros dois obtidos a partir de relaxações deste problema (utilizando o modelo de transportes e o modelo Híbrido). Contudo, estes cortes são calculados utilizando formulações dão “mais ênfase” a primeira lei de Kirchoff e o que se observou nas aplicações realizadas, é que o processo de decomposição “fecha” rapidamente o modelo de transportes, e tem muito mais dificuldade quando são consideradas as restrições da segunda lei de Kirchoff. O diagnóstico desta dificuldade é que as informações contidas nos cortes de Benders para este grupo de restrições são pobres resultando nesta dificuldade de convergência. Esta característica poderia ser melhorada (e muito) com a consideração de cortes, calculados durante o processo de decomposição, que focassem, exclusivamente, para este grupo de restrições.

Ainda com relação ao problema de planejamento da expansão do sistema de transmissão mas lembrando que o problema tratado nesta tese corresponde somente a uma pequena parte do problema completo, cabe acrescentar que aplicações naturais para o modelo de decomposição de Benders proposto nesta tese são os problemas de expansão de redes multi-estágio, no qual são considerados vários anos (ou períodos) no horizonte de planejamento, o problema de expansão considerando critérios de contingências na malha de transmissão, e, finalmente, o problema de expansão da rede de transmissão sob considerações de incertezas.

Bibliografia

- [1] E. Balas. “An additive algorithm for solving linear programs with zer-one variables”. *Operations Research*, 13, pp. 517–546, 1965.
- [2] E. Balas, S. Ceria, and G. Cornuéjols. Mixed 0-1 programming by lift-and-project in a brach-and-cut framework. To appear in *Manegement Science*, 1995.
- [3] E. Balas, S. Ceria, G. Cornuéjols, and N. Natraj. Gomory cuts revisited. To appear in *Operations Research Letters*, 1995.
- [4] C. J. Baldwin, C. A. De Salvo, C. H. Hoffman, and W. S. Ku. “A model for transmission planning bylogic”. *AIEEE Transactions PAS*, 79, pp. 1638–1645, Feb 1960.
- [5] G. Bayona and I. J. Péres-Arriaga. “A heuristic model for long term transmission expansion planning”. *IEEE/PES Winter Meeting*, paper 94 WM 226-1, Jan/Feb 1994. New York, NY - US.
- [6] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali. *Linear Programming and Network Flows*. John Wiley & Sons, New York, NY, 2nd ed. edition, 1990.
- [7] J. F. Benders. “Partitioning methods for solving mixed variables programming problems”. *Numerische Mathematik*, 4, pp. 238–252, 1962.
- [8] R. J. Bennon and J. A. Juves. Use of sensitivity analysis in automated transmission planning. In *Proc. of the 1981 PICA Conference*, Philadelphia, PA, USA, May 1981.
- [9] S. Binato, W. J. Hery, D. M. Loewenstern, and M. G. C. Resende. A GRASP for Job Shop Scheduling. In *Proceedings of the Third Metaheuristic International Conference*, pp. 57–61, Angra dos Reis, RJ, Brazil, Jul 1999.

- [10] S. Binato and G. C. Oliveira. A heuristic approach to cope with multi-year transmission expansion planning. In *Proc. of the Stockholm Power Tech Conference*, Stockholm, Sweden, 1995. paper SPT S01-03-277.
- [11] S. Binato and G. C. Oliveira. A reactive GRASP for transmission network expansion planning. In *Proceedings of the Third Metaheuristic International Conference*, pp. 51–55, Angra dos Reis, RJ, Brazil, Jul 1999.
- [12] S. Binato, G. C. Oliveira, and J. L. Araújo. *A Greedy Adaptive Search Procedure for transmission expansion planning*. Technical report, Cepel internal report, 1998. to be published. Copies: `silvio@fund.cepel.br`.
- [13] S. Binato, G. C. Oliveira, and J. L. Araújo. A Greedy Adaptive Search Procedure for transmission expansion planning. to be published at IEEE Transaction on Power Systems. Copies: `silvio@fund.cepel.br`, 1998.
- [14] S. Binato and S. P. Roméro. Power transmission network expansion planning by a hybrid Genetic Algorithm. In *Proc. of the IX Latin-IberoAmerican Congress on Operations Research (IX CLAIO)*, Buenos Aires - Arg., Jul/Aug 1998.
- [15] J. L. Bresina. Heuristic-biased stochastic sampling. In *Proceedings of the AAAI-96*, pp. 271–278, 1996.
- [16] S. Ceria, G. Cornuéjols, and M. Dawande. Combining and strengthening gomory cuts. to be published in the IPCO IV Proceedings, 1995.
- [17] CPLEX Optimization, Inc. *Using the CPLEX Callable Library*, version 3.0 edition, 1989–1994.
- [18] C. DeChamps, J. Vankelecom, and E. Jamouille. “TRANEX - An interactive computer program for transmission expansion”. *IEEE Summer Power Meeting*, paper A79 476-3, Jul/Aug 1979.
- [19] J. C. Dodu, A. Merlin, and J. M. David. On the search of optimal switching configurations in power systems transmission studies. In *Proceedings of the Seventh Power System Computation Conference (7th PSCC)*, Lausanne, Jul 1981.

- [20] Y. P. Dusonchet and A. H. El-Abiad. "Transmission planning using discrete dynamic optimization". *IEEE Transactions on PAS*, Vol.PAS-92, pp. 1358–1371, Jul/Aug 1973.
- [21] T. A. Feo and M. G. C. Resende. "A probabilistic heuristic for a computationally difficult set covering problem". *Operations Research Letters*, 8, pp. 67–71, 1989.
- [22] T. A. Feo and M. G. C. Resende. "Greedy randomized adaptive search procedures". *Journal of Global Optimization*, 6, pp. 109–133, 1995.
- [23] R. Fischl and W. R. Puntel. "Computer aided design of electric power transmission network". *IEEE Winter Power Meeting*, paper C72-168-8, Jan/Feb 1973.
- [24] R. A. Galego, A. Monticelli, and R. Romero. Tabu Search algorithm applied to transmission network expansion planning. to be published.
- [25] R. A. Galego, A. Monticelli, and R. Romero. "Comparative studies on non-convex optimization methods for transmission network expansion planning". *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol.13, 1998.
- [26] R.A. Galego, A. Monticelli, and R. Romero. Transmission system expansion planning by extended Genetic Algorithm. to be published.
- [27] R. A. Gallego, A. B. Alves, A. Monticelli, and R. Romero. "Parallel Simulated Annealing applied to long term transmission expansion planning". *IEEE/PES Winter Meeting*, paper 96 WM 241-0PWRS, Jan 1996. Baltimore MD - US.
- [28] R. A. Gallego, A. Monticelli, and R. Romero. Comparative studies on non-convex optimization methods for transmission network expansion planning. In *Proc. of the Power Industry Computer Applications*, pp. 24–30, 1997.
- [29] L. L. Garver. "Transmission network estimation using linear programming". *IEEE Transactions on PAS*, Vol.PAS-89(No.7), pp. 1688–1687, Sep/Oct 1970.
- [30] A. M. Geoffrion. "Generalized Benders decomposition". *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4), 1972.

- [31] A. M. Geoffrion and G. W. Graves. “Multicommodity distribution system design by Benders decomposition”. *Management Science*, 20(5), pp. 822–844, Jan. 1971.
- [32] F. Glover. “Tabu Search - Part I”. *ORSA Journal on Computing*, 1, pp. 90–206, 1989.
- [33] R. E. Gomory. “Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs”. *Bulletin of American Mathematical Society*, 64, pp. 275–278, 1958.
- [34] R. E. Gomory. *An algorithm for the mixed integer problem*. Technical report, The Rand Corporation, 1960.
- [35] R. E. Gomory. An algorithms for integer solutions to inner programs. In R. Graves and P. Wolfe, editors, *Recent Advance in Mathematical Programming*, pp. 269–302. McGraw-Hill, 1963.
- [36] C. C. Gonzaga. *Estudos de algoritmos de busca em grafos e sua aplicação a problemas de planejamento*. Tese de doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, 1973.
- [37] M. Goossens, S. Rahtz, and F. Mittelbach. *The L^AT_EXgraphics companion: illustrating documents with T_EX and PostScript*. Addison-Wesley, 1997.
- [38] S. Granville and M. V. F. Pereira. *Analisis of the linearized power flow model in Benders decomposition*. Technical Report SOL 85-04, System Optimization Lab, Dept. of Operations Research, Stanford University, 1985.
- [39] S. Granville, M. V. F. Pereira, G. B. Dantzig, B. Avi-Itzhak, M. Avriel, A. Monticelli, and L. M. G. V. Pinto. *Mathematical decomposition techniques for power system expansion planning - analysis of the linearized power flow model using the Benders decomposition technique*. Technical Report RP 2473-6, EPRI, 1988.
- [40] S. Granville, M. V. F. Pereira, G. B. Dantzig, B. Avi-Itzhak, M. Avriel, A. Monticelli, and L. M. G. V. Pinto. *Mathematical decomposition techniques for power system expansion planning - decomposition methods and uses*. Technical Report RP 2473-6, EPRI, 1988.

- [41] G. A. Grätzer. *Math in L^AT_EX: an introduction to L^AT_EX and AMS-L^AT_EX*. Birkhäuser, 1995.
- [42] H. Greenberg. *Integer Programming*. Academic Press, New York, NY, 1975.
- [43] J. Holland. *Adaptation in Natural and Artificial System*. University of Michigan Press, 1975.
- [44] IEEE-PES 1991 Winter Meeting. *A new decomposition based method for optimal expansion planning of large transmission networks*, 1991.
- [45] J. C. Kaltenbatch, J. Peshon, and E. H. Gehrig. “A mathematical optimization technique for the expansion of electrical power transmission systems”. *IEEE Transactions on PAS*, Vol.PAS-89(No.1), pp. 113–119, Jan 1970.
- [46] S. Kirkpatrick. “Optimization by simulating annealing: quantitative studies”. *Journal of Statistical Physics*, 34, pp. 975–986, 1984.
- [47] L. Lamport. *L^AT_EX: A document preparation system*. Addison-Wesley, 1997.
- [48] A. H. Land and A. G. Doig. “An automatic method for solving discrete programming problems”. *Econometrica*, 28, pp. 497–520, 1960.
- [49] L. L. Lasdon. *Optimization theory for large systems*. The Macmillan Company, 1970.
- [50] S. T. Y. Lee, K. L. Hicks, and E. Hnylicza. Transmission expansion by Branch-and-Bound integer programmin with optimal cost-capacity curves. In *IEEE PES Winter Meeting*, New York, NY, USA, 1974.
- [51] M. Minoux. *Mathematical Programming: Theory amd Algorithms*. John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [52] A. Monticelli, A. Santos Jr., M. V. F. Pereira, S. H. F. Cunha, and J. G. Praça B. Park. “Interactive transmission network planning using a least-effort criterion”. *IEEE Transactions on PAS*, Vol.PAS-101(No.10), pp. 3919–3925, Oct 1982.
- [53] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York, NY, 1988.

- [54] G. C. Oliveira, A. P. Costa, and S. Binato. "Large scale transmission network planning using optimization and heuristic techniques". *IEEE Transaction on Power Systems*, Vol.10(No.4), pp. 1828–1834, Nov 1995.
- [55] J. M. A. Ortiz. *Metodologia de expansão automática da transmissão utilizando um algoritmo de Busca Tabu*. Tese de mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, dezembro 1997.
- [56] M. Padberg and G. Rinaldi. "A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems". *SIAM Review*, 33, pp. 60–100, 1991.
- [57] M. V. F. Pereira. *Application of sensitivity analysis on generation-transmission system expansion planning*. PhD thesis, COPPE - Federal University of Rio de Janeiro, 1985. in portuguese.
- [58] M. V. F. Pereira, L. M. G. V. Pinto, G. C. Oliveira, and S. H. F. Cunha. *Composite generation-transmission expansion planning*. Technical Report EPRI Report RP 2473-9, EPRI, 1987.
- [59] M. V. F. Pereira, L. M. V. G. Pinto, S. H. F. Cunha, and G. C. Oliveira. "A decomposition approach to automated generation-transmission expansion planning". *IEEE Transactions on PAS*, Vol.PAS-104(No.11), Nov 1985.
- [60] L. M. V. Pinto and A. Nunes. A model for optimal transmission expansion planning. In *Proc. of the PSCC Conference*, pp. 13–23, Graz, Austria, Oct 1990.
- [61] M. Prais and C. C. Ribeiro. *An application to a matrix decomposition problem in TDMA traffic assignment*. Technical report, Department of Computer Science, Catholic University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ 22453-900 Brazil, Jan 1998.
- [62] R. Romero. *Planejamento da expansão de sistemas de transmissão por decomposição de Benders hierarquizada*. Tese de mestrado, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, dezembro 1989.

- [63] R. Romero. *Planejamento da expansão de sistemas de transmissão por decomposição de Benders hierarquizada*. Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil, agosto 1993.
- [64] R. Romero, R. A. Gallego, and A. Monticelli. Transmission system expansion planning by Simmulated Annealing. In *Proc. of the Power Industry Computer Applications*, Salt Lake City - US, May 1995.
- [65] R. Romero and A. Monticelli. “A hierarchical decomposition approach for transmission expansion planning”. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol.9(No.1), pp. 373–380, Feb 1994.
- [66] R. Romero and A. Monticelli. “A zero-one implicit enumeration method for optimizing investments in transmission expansion planning”. *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol.9(No.3), Aug 1994.
- [67] H. M. Salkin and M. Kamlesh. *Foundations of Integer Programming*. North-Holland, New York, NY, 1989.
- [68] A. Sharifnia and M. H. Aashtiani. “Transmission network planning: a method for synthesis of minimum cost secure networks”. *IEEE Transactions on PAS*, PAS-104(8), Aug 1985.
- [69] E. L. Silva, J. M. Areiza, G. C. Oliveira, and S. Binato. Transmission network expansion planning under a Tabu Search approach. paper submitted to IEEE Meeting, 1998.
- [70] B. Stott and J. L. Marinho. “Linear programming for power system network security applications”. *IEEE Transactions on PAS*, Vol. PAS-99, May/Jun 1979.
- [71] H. Taha. *Integer Programming*. Academic Press, New York, NY, 1975.
- [72] P. Tsamasphyrou, A. Renaud, and P. Carpentier. Transmission network planning: an efficient Benders decomposition scheme. In *Proceedings of the 13th Power System Computing Conference*, pp. 487–494, Jun/Jul 1999.
- [73] R. Villasana. *Transmission network planning using linear and linear mixed integer programming*. PhD thesis, Ressenlaer Polytechnic Institute, 1984.

APÊNDICE A

CONGRUÊNCIA

Com o objetivo de facilitar a compreensão será apresentada nesta seção noções e propriedades envolvendo a operação de congruência.

Definição A.1 Diz-se que um dado número x é congruente com um número y , módulo K se existe um número inteiro I tal que $x - y = IK$. A operação de congruência é escrita da seguinte forma: $x \equiv y \pmod{K}$.

Exemplos:

$$2 \equiv 7 \pmod{5};$$

$$3 \equiv -1 \pmod{2}.$$

Observe que $x \equiv y \pmod{1}$ se, e somente se, $x - y$ é um número inteiro. Assim, $x \equiv 0 \pmod{1}$ significa que x é um número inteiro.

A seguir são apresentadas algumas propriedades da operação de congruência. A provas destas propriedades são triviais e não serão discutidas neste trabalho.

1. $x \equiv x \pmod{K}$.
2. Se $x \equiv y \pmod{K}$ e $y \equiv z \pmod{K}$, então $x \equiv z \pmod{K}$.
3. Se $x \equiv y \pmod{K}$, então $y \equiv x \pmod{K}$.
4. Se $x \equiv y \pmod{K}$ e z é um número inteiro qualquer, então $xz \equiv yz \pmod{K}$.
5. Se $x \equiv y \pmod{K}$ e $x' \equiv y' \pmod{K}$, então $x + x' \equiv y + y' \pmod{K}$. Além disso, se x e y' são números inteiros, então $xx' \equiv yy' \pmod{K}$.

APÊNDICE B

CAMINHO MÍNIMO EM UM GRAFO

B.1 Introdução

Nesta seção vamos ilustrar um algoritmo para encontrar o caminho mínimo em um grafo qualquer quando os custos para utilização dos caminhos são todos não negativos. O algoritmo apresentado nesta seção é conhecido como algoritmo de Dijkstra.

Este problema pode ser pensado como um problema de fluxo em redes se nós configuramos uma rede e queremos enviar uma unidade de fluxo do nó 1 para o nó m minimizando o custo do transporte. A formulação matemática deste problema pode ser colocada da seguinte forma: Seja um grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ onde \mathcal{V} é o conjunto de nós ($|\mathcal{V}| = n$) e \mathcal{A} é o conjunto de arcos ($|\mathcal{A}| = m$),

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}, \text{ sujeito a:} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{k=1}^m x_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1; \\ 0 & \text{se } i \neq 1 \text{ ou } m; \\ -1 & \text{se } i = m. \end{cases} \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

onde a restrição $x_{ij} \in \{0, 1\}$ indica se o arco ij está no caminho mínimo ou não e $c_{ij} \geq 0$ é o custo para utilizar o arco ij .

Note que a matriz de restrições do problema do caminho mínimo é uma matriz unimodular, o que garante que a solução da relaxação contínua deste problema é

uma solução inteira. Logo, este problema poderia ser resolvido por um método do tipo Simplex que é eficiente. Contudo, existem métodos ainda mais eficientes para solucionar este problema, como o algoritmo de Dijkstra, apresentado a seguir.

B.2 O Algoritmo de Dijkstra

Considere que $c_{ij} \geq 0$. O algoritmo de Dijkstra produz não somente o caminho mínimo do nó 1 para o nó m , mas também o caminho mínimo de 1 para todo e qualquer nó do grafo.

```
procedure Dijkstra
- Inicialização:
-  $w'_1 = 0$  e  $\mathcal{X} = 1$ ;
- Passo principal:
- Repita
-  $\bar{\mathcal{X}} = \mathcal{V} - \mathcal{X}$ ;
-  $(p, q) = \arg \left( \min_{(i,j) \in (\mathcal{X}, \bar{\mathcal{X}})} w'_i + c_{ij} \right)$ ;
-  $w'_q = w'_p + c_{pq}$ ;
-  $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cup q$ ;
- até que  $\mathcal{X} = \mathcal{V}$ ;
end Dijkstra;
```

Figura B.1: Algoritmo de Dijkstra para obter o caminho mínimo em um grafo.

No final do algoritmo descrito acima, está disponível, em $w'_i, i = 1, \dots, m$ os caminhos mínimos a partir do nó 1.

APÊNDICE C

DADOS DOS SISTEMAS DE TRANSMISSÃO UTILIZADOS

C.1 Sistema Equivalente da Região Sul Brasileira

O sistema equivalente da região Sul brasileira foi, inicialmente, utilizado em [52]. Posteriormente, vários trabalhos utilizaram este sistema teste para ilustrar resultados, veja por exemplo [12, 58, 40, 39, 27, 28, 25, 26, 24, 38, 55, 57, 64, 65, 66, 63, 69].

Tabela C.1: Sistema equiv. da região sul brasileira.
Dados das barras.

Barra	Ger.Atual (MW)	Lim.Ger. (MW)	Carga (MW)
1			
2			443.1
4			300.7
5			238.
7			
8			72.2
9			
12			512.
13			185.8
14	944.	1257.	
16	1366.	2000.	
17	1000.	1050.	
18			
19	773.	1670.	
20			1091.
21			
22			81.9

Tabela C.1: continuação.

Barra	Ger.Atual (MW)	Lim.Ger. (MW)	Carga (MW)
23			458.1
24			478.2
26			231.9
27	54.	220.	
32	450.	500.	
33			229.1
34	221.	748.	
35			216.
36			90.1
37	212.	300.	
38			216.
39	221.	600.	
40			262.1
42			1608.
43			
44			79.1
45			86.7
46	599.	700.	
3			
6			
10			
11			
15			
25			
28	730.	800.	
29			
30			
31	310.	700.	
41			

Tabela C.2: Sistema equiv. da região sul brasileira.
Dados dos circuitos existentes.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
18-20	19.97	200.
27-38	20.80	200.
27-38	20.80	200.
35-38	19.80	200.
37-42	21.05	200.
39-42	20.30	200.

Tabela C.2: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
39-42	20.30	200.
39-42	20.30	200.
44-45	18.64	200.
9-14	17.56	220.
9-14	17.56	220.
13-18	18.05	220.
14-26	16.14	220.
24-34	16.47	220.
8-13	13.48	240.
14-18	15.14	240.
14-18	15.14	240.
24-33	14.48	240.
1-7	6.16	270.
1-2	10.65	270.
1-2	10.65	270.
4-9	9.24	270.
5-9	11.73	270.
5-8	11.32	270.
7-8	10.23	270.
4-5	5.66	270.
4-5	5.66	270.
2-5	3.24	270.
2-5	3.24	270.
12-14	7.40	270.
12-14	7.40	270.
13-20	10.73	270.
14-22	8.40	270.
22-26	7.90	270.
20-23	9.32	270.
20-23	9.32	270.
23-24	7.74	270.
23-24	7.74	270.
26-27	8.32	270.
26-27	8.32	270.
33-34	12.65	270.
27-36	9.15	270.
36-37	10.57	270.
34-35	4.91	270.
34-35	4.91	270.
37-39	2.83	270.
37-40	12.81	270.
40-42	9.32	270.

Tabela C.2: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
38-42	9.07	270.
38-42	9.07	270.
38-42	9.07	270.
42-44	12.06	270.
32-43	3.09	1400.
19-21	2.78	1500.
19-32	1.95	1800.
46-19	2.22	1800.
46-16	2.03	1800.
16-17	0.78	2000.
17-19	0.61	2000.
18-19	1.25	600.
20-21	1.25	600.
42-43	1.25	600.

Tabela C.3: Sistema equiv. da região sul brasileira.
Dados dos circuitos candidatos.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
40-45	22.05	180.	14.00	3
18-20	19.97	200.	12.73	3
27-38	20.80	200.	13.24	3
35-38	19.80	200.	12.63	3
37-42	21.05	200.	13.39	3
39-42	20.30	200.	12.94	3
44-45	18.64	200.	11.93	3
9-14	17.56	220.	11.27	3
13-18	18.05	220.	11.57	3
14-26	16.14	220.	10.41	3
24-34	16.47	220.	10.61	3
8-13	13.48	240.	8.795	3
14-18	15.14	240.	9.805	3
24-33	14.48	240.	9.400	3
4-11	22.46	240.	14.25	3
1-7	6.16	270.	4.350	3
1-2	10.65	270.	7.075	3
4-9	9.24	270.	6.215	3
5-9	11.73	270.	7.730	3
5-8	11.32	270.	7.480	3
7-8	10.23	270.	6.825	3

Tabela C.3: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
4-5	5.66	270.	4.045	3
2-5	3.24	270.	2.580	3
12-14	7.40	270.	5.105	3
13-20	10.73	270.	7.125	3
14-22	8.40	270.	5.710	3
22-26	7.90	270.	5.410	3
20-23	9.32	270.	6.270	3
23-24	7.74	270.	5.310	3
26-27	8.32	270.	5.660	3
33-34	12.65	270.	8.290	3
27-36	9.15	270.	6.165	3
36-37	10.57	270.	7.025	3
34-35	4.91	270.	3.590	3
37-39	2.83	270.	2.330	3
37-40	12.81	270.	8.390	3
40-42	9.32	270.	6.270	3
38-42	9.07	270.	6.115	3
42-44	12.06	270.	7.935	3
2-4	8.82	270.	5.965	3
14-15	3.74	270.	2.885	3
5-11	9.15	270.	6.165	3
27-29	9.98	270.	6.670	3
26-29	5.41	270.	3.895	3
28-43	4.06	1200.	46.700	3
28-41	3.39	1300.	39.290	3
16-32	3.11	1400.	36.220	3
32-43	3.09	1400.	35.960	3
19-25	3.25	1400.	37.750	3
25-32	3.19	1400.	37.110	3
32-41	3.09	1400.	35.960	3
19-21	2.78	1500.	32.630	3
31-41	2.78	1500.	32.630	3
17-32	2.32	1700.	27.520	3
19-32	1.95	1800.	23.430	3
46-19	2.22	1800.	26.370	3
46-16	2.03	1800.	24.320	3
46-3	2.03	1800.	24.320	3
16-28	2.22	1800.	26.370	3
16-17	0.78	2000.	10.510	3
17-19	0.61	2000.	8.715	3
46-10	0.81	2000.	10.890	3
46-6	1.28	2000.	16.010	3

Tabela C.3: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
21-25	1.74	2000.	21.120	3
31-32	0.46	2000.	7.050	3
28-31	0.53	2000.	7.820	3
28-30	0.58	2000.	8.330	3
41-43	1.39	2000.	17.290	3
18-19	1.25	600.	8.160	3
20-21	1.25	600.	8.160	3
42-43	1.25	600.	8.160	3
15-16	1.25	600.	8.160	3
46-11	1.25	600.	8.160	3
24-25	1.25	600.	8.160	3
29-30	1.25	600.	8.160	3
40-41	1.25	600.	8.160	3
2-3	1.25	600.	8.160	3
5-6	1.25	600.	8.160	3
9-10	1.25	600.	8.160	3

C.2 Sistema Equivalente da Região Sudeste Brasileiro

O sistema equivalente da região Sudeste brasileiro não foi tão estudado como o sistema equivalente do Sul brasileiro mas já conta também com inúmeros trabalhos, veja por exemplo: [10, 13, 54, 69, 14]. Este sistema foi proposto pela Eletrobrás em 1987 para estudos de expansão da região Sudeste brasileira para os anos de 1995, 2000 e 2005. Os dados de geração e carga utilizados correspondem ao ano de 2000 e estão ilustrados na tabela a seguir.

Tabela C.4: Sistema equiv. da região sudeste brasileira.
Dados das barras.

Barra	Nome	Ger. Atual (MW)	Lim. Ger. (MW)	Carga (MW)
12	itaipu	750	0.0	0.0
21	ivaipora	750	1740.0	0.0
27	itaipu	500	3390.0	958.0
33	rosana	440	272.0	0.0
37	assis	230	0.0	62.0
38	xavantes	230	352.0	95.0

Tabela C.4: continuação.

Barra	Nome	Ger.Atual (MW)	Lim.Ger. (MW)	Carga (MW)
39	jurumirim	230	185.0	203.0
40	l.n.garcez	230	60.0	178.0
41	botucatu	230	120.0	633.0
43	p.primaver	500	0.0	0.0
53	itabera	750	0.0	0.0
54	itabera	500	0.0	0.0
60	botucatu	500	0.0	0.0
200	sao paulo	500	936.0	9580.0
201	p.primaver	440	1531.0	499.0
202	taquarucu	440	425.0	45.0
203	jupia	440	4982.0	718.0
204	capivara	440	544.0	147.0
205	assis	440	0.0	134.0
206	a.vermelha	440	1174.0	592.0
207	a.vermelha	500	0.0	0.0
208	bauru	440	234.0	391.0
209	s.simao	500	1429.0	0.0
210	botucatu	440	0.0	0.0
211	itumbiara	500	2953.0	0.0
212	marimbondo	500	1266.0	0.0
213	marimbondo	345	0.0	0.0
214	p.colombia	345	279.0	216.0
215	araraquara	500	0.0	0.0
216	araraquara	440	0.0	828.0
217	campinas	500	0.0	0.0
218	campinas	345	0.0	669.0
219	v.grande	345	323.0	0.0
220	emborcacao	500	1937.0	372.0
221	pocos	345	0.0	542.0
222	pocos	500	0.0	0.0
223	taubate	440	0.0	1007.0
224	estreito	345	939.0	0.0
225	mascarenha	345	407.0	401.0
226	jaguara	500	0.0	0.0
227	jaguara	345	531.0	398.0
228	c.paulista	500	0.0	8.0
229	pimenta	345	0.0	151.0
230	itutinga	345	0.0	0.0
231	b.h.	500	0.0	470.0
232	angra	500	2182.0	67.0
233	taubate	500	0.0	0.0
234	adriano	500	1257.0	7423.0

Tabela C.4: continuação.

Barra	Nome	Ger.Atual (MW)	Lim.Ger. (MW)	Carga (MW)
235	barb-jfora	345	278.0	1107.0
236	gafanhoto	345	0.0	151.0
237	adriano	345	231.0	0.0
238	campos	345	409.0	287.0
239	vitoria	345	143.0	1156.0
240	mesquita	500	88.0	829.0
241	furnas	345	1116.0	0.0
242	n.ponte	500	766.0	0.0
243	b.h.	345	97.0	0.0
244	jequitinho	500	317.0	0.0
245	vitoria	500	0.0	0.0
246	itumbiara	345	549.0	882.0
247	bandeirant	345	0.0	807.0
248	bandeirant	500	0.0	0.0
249	brasilgia	345	118.0	994.0
250	brasilgia	500	0.0	0.0
251	a.tocantis	500	2798.0	0.0
252	t. sul	345	0.0	633.0
253	doce	500	499.0	0.0
254	conchal	440	0.0	647.0
255	rib.preto	440	188.0	848.0
256	sta.barb.	440	0.0	1712.0
257	t.sul	500	0.0	0.0
259	r.preto	500	0.0	0.0
260	sao paulo	440	0.0	0.0
261	sao paulo	750	0.0	0.0
262	sao paulo	345	0.0	0.0
263	sao paulo	230	0.0	0.0
267	t.marias	345	954.0	1159.0
272	t.oeste	345	0.0	0.0
273	t.oeste	500	0.0	0.0

Tabela C.5: Sistema equiv. da região sudeste brasileira.
dados dos circuitos existentes.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
12-21	0.91	2200.0
12-21	0.91	2200.0
12-21	0.91	2200.0
12-27	0.34	1650.0

Tabela C.5: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
12-27	0.34	1650.0
12-27	0.34	1650.0
12-27	0.34	1650.0
21-53	0.78	2200.0
21-53	0.78	2200.0
21-53	0.78	2200.0
37-40	4.92	200.0
37-40	4.92	200.0
37-205	6.67	150.0
37-205	6.67	150.0
38-39	5.30	200.0
38-39	5.30	200.0
38-40	3.37	200.0
38-41	13.20	200.0
39-41	8.48	200.0
200-217	1.47	1200.0
200-228	2.47	1200.0
200-233	1.41	1200.0
200-260	0.02	9999.0
200-261	0.02	9999.0
200-262	0.02	9999.0
200-263	0.02	9999.0
201-33	0.34	1100.0
201-202	1.85	1100.0
201-202	1.85	1100.0
202-203	3.70	1100.0
202-204	1.34	1100.0
202-205	3.07	1100.0
203-206	2.45	1100.0
203-208	5.12	1100.0
203-208	5.12	1100.0
203-208	5.12	1100.0
203-208	5.12	1100.0
203-216	6.21	1100.0
203-216	6.21	1100.0
204-205	1.78	1100.0
205-208	2.30	1100.0
205-210	3.53	1100.0
205-210	3.53	1100.0
206-216	5.46	1100.0
206-255	5.32	1100.0
207-206	1.33	750.0

Tabela C.5: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
207-209	1.47	1200.0
207-212	2.10	1200.0
208-216	1.75	1100.0
209-211	2.47	1200.0
209-226	5.21	1200.0
210-256	1.71	1100.0
210-256	1.71	1100.0
211-220	2.16	1200.0
211-246	2.14	560.0
212-213	2.14	560.0
212-215	3.10	1200.0
212-215	3.10	1200.0
213-214	2.45	600.0
214-219	1.38	600.0
214-246	6.27	600.0
215-217	2.58	1200.0
215-222	2.64	1200.0
216-254	2.69	1100.0
216-256	2.42	1100.0
217-218	2.14	560.0
217-228	3.27	1200.0
218-221	3.95	600.0
219-224	3.51	600.0
219-227	2.76	600.0
220-242	1.32	1200.0
220-273	2.98	1200.0
221-222	2.14	560.0
221-224	6.18	600.0
221-224	6.18	600.0
221-241	4.23	600.0
221-241	4.23	600.0
222-228	2.86	1200.0
224-225	1.03	600.0
224-227	0.75	600.0
224-241	4.14	600.0
225-241	3.29	600.0
226-227	2.25	400.0
226-227	2.25	400.0
226-227	2.25	400.0
226-231	4.87	1200.0
226-242	1.47	1200.0
226-257	6.26	1200.0

Tabela C.5: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
227-229	5.70	600.0
227-229	5.70	600.0
228-232	1.51	1200.0
228-233	1.21	1200.0
228-234	2.55	1350.0
228-234	2.55	1350.0
229-235	7.24	600.0
229-236	3.29	600.0
229-241	2.00	600.0
229-243	6.74	600.0
230-237	6.21	600.0
230-237	6.21	600.0
230-241	6.24	600.0
230-241	6.24	600.0
231-240	2.52	1200.0
231-243	2.25	400.0
231-243	2.25	400.0
231-243	2.25	400.0
231-273	3.03	1200.0
232-234	1.72	1200.0
232-234	1.72	1200.0
232-234	1.72	1200.0
233-223	1.11	900.0
234-237	2.14	560.0
234-237	2.14	560.0
235-252	2.17	600.0
236-243	3.80	600.0
237-238	8.65	600.0
237-238	8.65	600.0
238-239	7.43	600.0
238-239	7.43	600.0
240-257	2.24	1200.0
242-273	2.69	1200.0
243-252	3.95	600.0
243-267	6.81	600.0
245-239	2.14	560.0
246-247	6.05	600.0
246-247	6.05	600.0
247-249	5.62	600.0
247-249	5.62	600.0
249-250	2.14	560.0
249-250	2.14	560.0

Tabela C.5: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)
249-250	2.14	560.0
250-251	2.36	1300.0
250-251	2.36	1300.0
255-256	4.08	1100.0
257-252	2.25	400.0
257-252	2.25	400.0
260-208	3.98	1100.0
260-208	3.98	1100.0
260-208	3.98	1100.0
260-208	3.98	1100.0
260-216	4.92	1100.0
260-223	2.44	1100.0
260-223	2.44	1100.0
260-254	2.69	1100.0
260-256	2.52	1100.0
261-53	0.92	2200.0
261-53	0.92	2200.0
261-53	0.92	2200.0
262-218	2.82	600.0
262-221	6.58	600.0
262-221	6.58	600.0
262-221	6.58	600.0
262-221	6.58	600.0
263-41	19.20	200.0
267-272	4.93	600.0
272-273	2.25	400.0
272-273	2.25	400.0

Tabela C.6: Sistema equiv. da região sudeste brasileira.
Dados dos circuitos candidatos.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
12-21	0.91	2200.0	85.9	3
12-27	0.34	1650.0	11.7	3
21-53	0.78	2200.0	73.7	3
27-200	4.37	1200.0	67.6	3
37-40	4.92	200.0	4.1	3
37-205	6.67	150.0	3.6	3
38-39	5.30	200.0	4.4	3
38-40	3.37	200.0	2.8	3
38-41	13.20	200.0	11.0	3

Tabela C.6: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
39-41	8.48	200.0	7.0	3
53-54	0.34	1650.0	11.7	3
54-60	0.72	1200.0	25.8	3
200-60	1.11	1200.0	39.5	3
200-217	1.47	1200.0	17.6	3
200-228	2.47	1200.0	29.6	3
200-233	1.41	1200.0	16.8	3
200-260	0.02	9999.0	51.0	3
200-261	0.02	9999.0	51.0	3
200-262	0.02	9999.0	51.0	3
200-263	0.02	9999.0	51.0	3
201-33	0.34	1100.0	3.6	3
201-43	1.33	750.0	6.1	3
201-202	1.85	1100.0	19.6	3
201-203	5.34	1100.0	56.8	3
202-203	3.70	1100.0	39.3	3
202-204	1.34	1100.0	14.3	3
202-205	3.07	1100.0	32.7	3
203-206	2.45	1100.0	26.1	3
203-208	5.12	1100.0	54.5	3
203-216	6.21	1100.0	66.1	3
204-205	1.78	1100.0	18.9	3
205-208	2.30	1100.0	24.5	3
205-210	3.53	1100.0	37.5	3
206-216	5.46	1100.0	58.1	3
206-255	5.32	1100.0	56.6	3
207-206	1.33	750.0	6.1	3
207-209	1.47	1200.0	17.6	3
207-212	2.10	1200.0	25.1	3
208-216	1.75	1100.0	18.6	3
209-211	2.47	1200.0	29.6	3
209-212	3.15	1200.0	37.6	3
209-226	5.21	1200.0	62.3	3
210-41	6.67	150.0	3.6	3
210-60	1.33	750.0	6.1	3
210-256	1.71	1100.0	18.2	3
211-212	3.22	1200.0	38.5	3
211-220	2.16	1200.0	25.8	3
211-246	2.14	560.0	5.0	3
211-248	2.76	1200.0	33.0	3
211-250	4.79	1200.0	57.3	3
212-213	2.14	560.0	5.0	3

Tabela C.6: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
212-215	3.10	1200.0	37.1	3
212-226	2.70	1200.0	32.2	3
213-214	2.45	600.0	9.7	3
214-219	1.38	600.0	5.5	3
214-246	6.27	600.0	24.9	3
215-217	2.58	1200.0	30.8	3
215-222	2.64	1200.0	31.5	3
215-226	3.30	1200.0	39.4	3
216-215	1.33	750.0	6.1	3
216-254	2.69	1100.0	28.6	3
216-255	2.69	1100.0	28.6	3
216-256	2.42	1100.0	25.7	3
217-218	2.14	560.0	5.0	3
217-222	2.25	1200.0	26.9	3
217-228	3.27	1200.0	39.0	3
218-221	3.95	600.0	15.7	3
219-224	3.51	600.0	14.0	3
219-227	2.76	600.0	11.0	3
220-242	1.32	1200.0	17.4	3
220-250	4.49	1200.0	53.7	3
220-273	2.98	1200.0	39.4	3
221-222	2.14	560.0	5.0	3
221-224	6.18	600.0	24.6	3
221-241	4.23	600.0	16.8	3
222-226	3.75	1200.0	44.8	3
222-228	2.86	1200.0	34.2	3
224-225	1.03	600.0	4.1	3
224-227	0.75	600.0	3.0	3
224-241	4.14	600.0	16.4	3
225-241	3.29	600.0	13.1	3
226-227	2.25	400.0	4.6	3
226-231	4.87	1200.0	64.4	3
226-242	1.47	1200.0	19.4	3
226-257	6.26	1200.0	82.9	3
226-259	2.25	1200.0	26.9	3
227-229	5.70	600.0	22.7	3
228-232	1.51	1200.0	18.1	3
228-233	1.21	1200.0	14.5	3
228-234	2.55	1350.0	30.4	3
229-235	7.24	600.0	28.8	3
229-236	3.29	600.0	13.1	3
229-241	2.00	600.0	8.0	3

Tabela C.6: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
229-243	6.74	600.0	26.8	3
230-237	6.21	600.0	24.7	3
230-241	6.24	600.0	24.8	3
231-240	2.52	1200.0	33.3	3
231-243	2.25	400.0	4.6	3
231-250	9.36	1200.0	111.9	3
231-257	1.68	1200.0	22.2	3
231-273	3.03	1200.0	40.1	3
232-234	1.72	1200.0	20.6	3
233-223	1.11	900.0	6.4	3
234-237	2.14	560.0	5.0	3
234-257	70.18	1200.0	12.6	3
235-237	3.62	600.0	12.9	3
235-238	6.74	600.0	24.1	3
235-252	2.17	600.0	7.7	3
236-243	3.80	600.0	15.1	3
237-238	8.65	600.0	30.9	3
238-239	7.43	600.0	26.5	3
240-244	7.49	1200.0	89.5	3
240-245	3.75	1200.0	44.8	3
240-253	2.45	1200.0	32.4	3
240-257	2.24	1200.0	29.6	3
242-273	2.69	1200.0	41.6	3
243-252	3.95	600.0	14.1	3
243-267	6.81	600.0	27.1	3
244-245	7.49	1200.0	89.5	3
245-239	2.14	560.0	5.0	3
245-253	1.50	1200.0	17.9	3
246-247	6.05	600.0	21.6	3
246-249	10.52	600.0	37.5	3
247-249	5.62	600.0	20.1	3
248-247	2.14	560.0	5.0	3
248-250	1.87	1200.0	22.4	3
248-251	7.71	1200.0	92.2	3
249-250	2.14	560.0	5.0	3
250-251	2.36	1300.0	56.7	3
255-256	4.08	1100.0	43.4	3
255-259	1.33	750.0	6.1	3
257-252	2.25	400.0	4.6	3
260-208	3.98	1100.0	42.3	3
260-216	4.92	1100.0	52.3	3
260-223	2.44	1100.0	25.9	3

Tabela C.6: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)	Lim. Adições
260-254	2.69	1100.0	28.6	3
260-256	2.52	1100.0	26.8	3
261-53	0.92	2200.0	86.8	3
262-218	2.82	600.0	11.2	3
262-221	6.58	600.0	23.5	3
263-41	19.20	200.0	16.0	3
267-272	4.93	600.0	17.6	3
272-273	2.25	400.0	4.6	3

Tabela C.7: Sistema equiv. da região sudeste brasileira.
Conjunto reduzido de circuitos candidatos.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)
207-206	1.33	750.0	6.1
207-209	1.47	1200.0	17.6
210-41	6.67	150.0	3.6
210-41	6.67	150.0	3.6
211-246	2.14	560.0	5.0
216-215	1.33	750.0	6.1
220-242	1.32	1200.0	17.4
220-242	1.32	1200.0	17.4
220-250	4.49	1200.0	53.7
221-224	6.18	600.0	24.6
224-227	0.75	600.0	3.0
224-227	0.75	600.0	3.0
226-227	2.25	400.0	4.6
226-242	1.47	1200.0	19.4
226-242	1.47	1200.0	19.4
226-259	2.25	1200.0	26.9
234-237	2.14	560.0	5.0
244-245	7.49	1200.0	89.5
245-239	2.14	560.0	5.0
245-253	1.50	1200.0	17.9
249-250	2.14	560.0	5.0
250-251	2.36	1300.0	56.7
255-259	1.33	750.0	6.1
255-259	1.33	750.0	6.1
204-205	1.78	1100.0	18.9
209-211	2.47	1200.0	29.6
214-219	1.38	600.0	5.5

Tabela C.7: continuação.

Circuito	Reatância (% base 100MVA)	Lim. Transmissão (MW)	Custo (10 ³ US\$)
214-246	6.27	600.0	24.9
248-247	2.14	560.0	5.0
248-247	2.14	560.0	5.0
248-250	1.87	1200.0	22.4
37-205	6.67	150.0	3.6
38-40	3.37	200.0	2.8
39-41	8.48	200.0	7.0

APÊNDICE D

RESTRIÇÕES ESPECIAIS

Nesta seção vamos apresentar todas as restrições especiais utilizadas nos casos exemplos.

A notação utilizada para representar estas restrições é a seguinte: $x_{2-3:1}$ representa o primeiro circuito candidato conectando as barras 2 e 3; $x_{2-3:2}$ o segundo etc.

D.0.1 Caso Equivalente da Região Sul Brasileira

- Restrições para garantir que se a barra 3, que está isolada da rede inicial e é uma barra de passagem (sem carga ou geração), for conectada ao sistema interligado esta conexão considera o caminho, da barra 2 para a barra 46:

$$x_{2-3:1} - x_{3-46:1} \leq 0.0$$

$$x_{3-46:1} - x_{2-3:1} \leq 0.0.$$

- Idem ao caso anterior mas para a barra 6 e caminho conectando as barras 5 e 46:

$$x_{5-6:1} - x_{6-46:1} \leq 0.0$$

$$x_{6-46:1} - x_{5-6:1} \leq 0.0.$$

- Idem ao caso anterior mas para a barra 10 e caminho conectando as barras 9 e 46:

$$x_{9-10:1} - x_{10-46:1} \leq 0.0$$

$$x_{10-46:1} - x_{9-10:1} \leq 0.0$$

- Idem ao caso anterior mas para a barra 29 e caminho conectando as barras 28 e 30:

$$x_{29-30:1} - x_{28-30:1} \leq 0.0$$

$$x_{28-30:1} - x_{29-30:1} \leq 0.0$$

- Idem ao caso anterior mas para a barra 15 e caminho conectando as barras 14 e 16:

$$x_{15-14:1} - x_{16-15:1} \leq 0.0$$

$$x_{16-15:1} - x_{15-14:1} \leq 0.0$$

- Idem ao caso anterior mas para a barra 15 e caminho conectando as barras 14 e 16:

- Restrição para garantir que se a conexão da barra 11 for realizada o será por um caminho passando por esta barra:

$$x_{11-46:1} - x_{4-11:1} - x_{5-11:1} \leq 0.0$$

$$x_{4-11:1} + x_{5-11:1} - x_{11-46:1} \leq 0.0$$

- Idem o caso anterior para a barra 25:

$$x_{24-25:1} - x_{21-25:1} - x_{19-25:1} - x_{25-32:1} \leq 0.0$$

$$x_{21-25:1} - x_{24-25:1} - x_{19-25:1} - x_{25-32:1} \leq 1.0$$

$$x_{19-25:1} - x_{21-25:1} - x_{24-25:1} - x_{25-32:1} \leq 1.0$$

$$x_{25-32:1} - x_{21-25:1} - x_{19-25:1} - x_{24-25:1} \leq 1.0$$

- Idem o caso anterior para a barra 41:

$$x_{40-41:1} - x_{41-43:1} - x_{28-41:1} - x_{31-41:1} - x_{32-41:1} \leq 0.0$$

$$x_{41-43:1} - x_{40-41:1} - x_{28-41:1} - x_{31-41:1} - x_{32-41:1} \leq 0.0$$

$$x_{28-41:1} - x_{41-43:1} - x_{40-41:1} - x_{31-41:1} - x_{32-41:1} \leq 0.0$$

$$x_{31-41:1} - x_{41-43:1} - x_{28-41:1} - x_{40-41:1} - x_{32-41:1} \leq 0.0$$

$$x_{32-41:1} - x_{41-43:1} - x_{28-41:1} - x_{31-41:1} - x_{40-41:1} \leq 0.0$$

- Idem o caso anterior para a barra 29:

$$x_{29-30:1} - x_{26-29:1} - x_{27-29:1} \leq 0.0$$

$$x_{26-29:1} - x_{29-30:1} - x_{27-29:1} \leq 0.0$$

$$x_{27-29:1} - x_{26-29:1} - x_{29-30:1} \leq 0.0$$

D.0.2 Caso Equivalente da Região Sudeste Brasileira

Nenhuma restrição especial foi considerada neste caso.