CONTROLE ÓTIMO PARA PROBLEMAS LQ A TEMPO CONTÍNUO COM SALTOS MARKOVIANOS

Jack Baczynski

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Marcelo Dutra Fragoso, Ph. D.

Prof. Ernesto Prado Lopes, Ph. D.

Prof. Oswaldo L. V. Costa, Ph. D.

Prof. Carlos S. Kubrusly, Ph. D.

Prof. Augusto C. Gadelha Vieira, Ph. D.

A. Bhaya.

Prof. Amit Bhaya, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2000

BACZYNSKI, JACK

Controle Ótimo para Problemas LQ a Tempo Contínuo com Saltos Markovianos [Rio de Janeiro] 1999

VII, 133 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2000)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Controle Estocástico e Estabilidade.
2. Sistemas Lineares a Tempo Contínuo.
3. Semigrupo.
4. Cadeia de Markov.
5. Sistemas em Dimensão Infinita

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A meus pais Gina e Bronislaw

A minha esposa Sandra

Aos meus filhos Tathiana, Alexandre, Eduardo e Daniela

AGRADECIMENTOS:

Agradeço a minha mãe e ao meu pai, pela confiança que tiveram, em todos os momentos, no resultado final dessa jornada. Em especial, à minha mãe, pelo interesse e mesmo curiosidade manifestados.

Agradeço a minha esposa Sandra que valorizou meu trabalho e me ajudou; aos meus filhos pela importância que sempre deram a esta tarefa.

Agradeço aos orientadores, Professores Marcelo Fragoso e Ernesto Lopes pela dedicação de um tempo precioso. Em especial, ao Professor Marcelo, pela indicação do assunto e valiosas discussões.

Não posso deixar de agradecer ao Professor Carlos Kubrusly, sempre presente em momentos importantes da minha trajetória acadêmica.

Gostaria ainda de prestar meu reconhecimento à UFRJ, à COPPE Sistemas em particular, ao LNCC pelo apoio computacional e logístico em Petrópolis e ao suporte dado pelo CNPq.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTROLE ÓTIMO PARA PROBLEMAS LQ A TEMPO CONTÍNUO COM SALTOS MARKOVIANOS

Jack Baczynski

Junho/2000

Orientadores: Marcelo Dutra Fragoso
Ernesto Prado Lopes

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Resolvemos o problema de controle ótimo a tempo continuo e horizonte infinito para sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS) e critério de custo na forma integral quadrática. O que distingue este problema dos demais problemas encontrados na literatura sobre essa classe de assuntos é, essencialmente, o fato de adotarmos um conjunto infinito enumerável para a cadeia de saltos. Diferentemente do que ocorre no caso finito, um ponto peculiar neste cenário é que os conceitos de estabilidade na média quadrática e estabilidade estocástica não são mais equivalentes. A abordagem do caso infinito enumerável requer, além da teoria de operadores em espaços de Banach, a utilização de um ferramental elaborado, tal como a teoria de semigrupo e uma técnica de decomplexificação.

A solução para o problema recai, em parte, no estudo de um conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas (ICARE). Estabelecemos condições de existência e unicidade de solução positiva semidefinida para a ICARE, a partir dos conceitos estendidos de estabilizabilidade estocástica e detectabilidade estocástica. Estes conceitos são capturados no arcabouço da teoria de operadores em espaços de Banach e, paralelamente ao caso clássico LQ, têm correspondência com o espectro de um certo operador linear de dimensão infinita.

Beneficiamo-nos ainda das teorias acima, abordando a questão de estabilidade via o conjunto infinito enumerável de equações de Lyapounov para o MJLS.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OPTIMAL CONTROL FOR CONTINUOUS TIME LQ-PROBLEMS WITH INFINITE MARKOV JUMP PARAMETERS

Jack Baczynski

June/2000

Advisors: Marcelo Dutra Fragoso
Ernesto Prado Lopes

Department: Systems and Computing Engineering

The subject matter of the thesis is the optimal control problem for continuous-time linear systems subject to Markovian jumps in the parameters and the usual infinite time horizon quadratic cost.

What essentially distinguishes our problem from previous problems concerning this class of subjects, is the fact that the Markov chain takes values on a countably infinite set. Unlike the finite state case, a peculiar feature of this scenario is that mean square stability and stochastic stability are no longer equivalent concepts. To tackle our problem, we make use of powerful tools from semigroup theory in Banach space and a decomplexification technique.

The solution for the problem relies, in part, on the study of a countably infinite set of coupled algebraic Riccati equations (ICARE). Conditions for existence and uniqueness of a positive semidefinite solution of the ICARE are obtained via the extended concepts of stochastic stabilizability (SS) and stochastic detectability (SD). These concepts are couched into the theory of operators in Banach space and, parallel to the classical LQ case, bound up with the spectrum of a certain infinite dimensional linear operator.

We benefited from the above theories to pose the stability matter via the countably infinite set of Lyapunov equations associated to the MJLS.

Índice

Capítulo 1

Abreviaturas

Ao longo dos capítulos da tese, utilizamos as seguintes abreviaturas:

v.a.: variável aleatória.

MJLS: sistema linear com saltos markovianos (da abreviatura em inglês para Markov jump linear system).

LQ: problema de controle ótimo para a classe dos sistemas lineares com critério de custo integral quadrático (da abreviatura em inglês para linear/ quadratic).

JLQ: problema de controle ótimo para a classe dos MJLSs com critério de custo integral quadrático (da abreviatura em inglês para jump/ linear/ quadratic).

SS: estabilizabilidade estocástica (da abreviatura em inglês para stochastic stabilizability).

SD: detetabilidade estocástica: (da abreviatura em inglês para stochastic detectability).

MSS: estabilizabilidade na média quadrática (da abreviatura em inglês para mean square stabilizability).

ICARE: conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas associadas ao MJLS (da abreviatura em inglês para countably infinite coupled algebraic Riccati equation).

Capítulo 2

Introdução

A partir dos resultados de Wonham [69] e Sworder [62], há trinta anos, uma extensa teoria foi desenvolvida para sistemas lineares com saltos markovianos. Os resultados obtidos estabeleceram uma base sólida para estabilidade e controle ótimo (ver, p.ex., [5], [8], [9], [13], [18], [19], [24], [26], [29], [30], [32], [33]-[36], [41], [45]-[47], [50], [52]-[54], [57], [62], [63], [68], [69]). Diversos resultados também foram obtidos para o problema de filtragem (ver, p.ex., [6], [7], [10], [11], [16], [27], [37]), controle H_∞ [17], [20], [22], [40], [38], [60] e controle robusto [55]. Mais recentemente, foram obtidos resultados para o problema H_2 (ver, p.ex.,[23]), H_2/H_∞ [20], jogos dinâmicos [60], [3] e MJLSs com *delay* (ver, p.ex., [4]). Finalmente, é interessante salientar a conexão entre os LDVs (abreviatura em inglês para "linear dinamically varying systems") e os MJLSs, recentemente explorada por Bohacek et al [12]. Os controladores LDVs dizem respeito a certa técnica para se controlar sistemas não lineares com dinâmicas complicadas.

Além do interesse no desenvolvimento teórico da classe MJLS, demonstrado pelas inúmeras publicações sobre o tema, esses modelos vem despertando grande interesse pela sua potencialidade na modelagem de sistemas cujas estruturas estão sujeitas à variações aleatórias abruptas. Nesta categoria incluem-se os sistemas tolerantes a falhas (sistemas críticos de segurança) e sistemas complexos integrados, o que portanto, remete os MJLSs a inúmeras aplicações, tais como: processos químicos, usinas nucleares, energia elétrica [67], [51], robótica, sistemas fabris, técnicas para diagnóstico automático de eletrocardiogramas [66], estruturas flexíveis de larga escala para estações espaciais tais como estruturas de captação de energia solar e sistemas de antenas [64], sistemas de controle aéreo, em particular, interferências eletromagnéticas [43] e confiabilidade [56], rastreamento de alvos múltiplos, econometria [8], [25], etc.

Os MJLSs pertencem à categoria dos sistemas híbridos, no sentido de que o processo de estado $\{x\}$ toma valores em $\mathbb{C}^n$, um espaço de estado contínuo, enquanto que a cadeia de Markov $\{\theta\}$ toma valores num espaço de estado discreto, compondo assim um espaço de estado "híbrido" para o processo Markov $\{x, \theta\}$.

Apesar do conjunto considerável de trabalhos lidando com a classe MJLS, um número razoável de questões continua em aberto, como por exemplo a questão de estabilidade com probabilidade um *(almost sure)*, o problema de controle com observações parciais, controle ergódico, etc. Além disso, nada foi feito para a classe MJLSs a tempo contínuo onde a cadeia de Markov tem *espaço de estado infinito enumerável*. No caso a tempo discreto, [18] e [17] são as primeiras incursões nesse cenário.

Nesse trabalho, abordamos o problema de controle ótimo *a tempo contínuo* para a classe dos MJLSs onde a cadeia de Markov toma valores num *espaço de estado infinito enumerável*, ao invés de um conjunto finito como usualmente considerado na literatura. Sendo o primeiro trabalho nesse cenário, até onde temos conhecimento, tivemos que introduzir toda uma metodologia que vai do uso da teoria de operadores em *dimensão infinita*, onde a teoria de semigrupos teve um papel fundamental, até a solução de equações de Riccati em espaços de Banach, incluindo uma técnica de *decomplexificação*. No que diz respeito à características *estocásticas* do trabalho, questões delicadas surgem quando consideramos o espaço de estado da cadeia de Markov infinito enumerável, como por exemplo a questão de ordem na definição da matriz de transição. Além disso, foi desenvolvido todo um aparato sobre questões de estabilidade que acreditamos será básico para pesquisas futuras nesse contexto da cadeia de Markov.

A teoria de semigrupo foi crucial para estabelecermos equivalência entre a condição de estabilizabilidade estocástica (SS) (detetabilidade estocástica (SD)) e certa propriedade do espectro de um operador linear de dimensão infinita. A teoria de operadores foi essencial para equacionar todo o problema na estrutura de espaços de Banach de dimensão infinita e identificar convenientemente tais espaços, o que nos conduziu à solução ótima para o problema. Além disso, introduzimos uma adaptação natural do conceito de decomplexificação descrito na Seção 18 de [1], para funções não lineares complexas com dominio em $\mathbb{R}$. Isto foi necessário para estabelecermos uma versão do conceito de gradiente e daí, a aproximação linear para funcionais não necessariamente holomorfos, o que parece corresponder a uma noção inexplorada na literatura de controle. Com esta estrutura em mãos, pudemos especificar convenientemente o semigrupo do processo Markov $\{x, \theta\}$ aplicado a um certo funcional quadrático (não holomorfo) com domínio no espaço complexo $\mathbb{C}^n$ e assim preservar a definição do nosso problema no corpo dos complexos. Tal estrutura (complexa) não é introduzida meramente para fins de generalização do problema, mas por ser imprescindível à prova de necessidade do importante Lema 53, que conecta certa propriedade espectral de um operador em dimensão infinita com o conceito de estabilizabilidade (detectabilidade) estocástica. A estruturação do problema no corpo dos complexos condiz na verdade com o conhecido fato de que, ao lidarmos com teoria de operadores e análise espectral, é tacitamente mais conveniente definir os operadores em espaços complexos.

O caso infinito enumerável é, de fato, uma situação bem mais delicada que o caso finito e seus resultados não podem ser obtidos por simples extensão das técnicas próprias à especialização finita. As diferenças no tratamento dos dois casos (finito e infinito) talvez possam ser melhor traduzidas através de resultados que ilustram a sutileza entre os dois cenários. Por exemplo, estabilidade estocástica e estabilidade na média quadrática, são equivalentes quando consideramos um conjunto finito para a cadeia de Markov do MJLS [30], o que não acontece no caso infinito (ver contra-exemplo da Seção 8.3). Não obstante, idéias inerentes ao caso de dimensão finita são usadas no nosso cenário. Por exemplo, paralelamente ao que ocorre no caso clássico LQ (vide, por exemplo, [68]), estabelecemos a solução ótima para o controle a partir da condição de existência e unicidade de soluções para um certo conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas (ICARE), assumindo-se certas condições estruturais tais como estabilizabilidade estocástica e detectabilidade estocástica. É importante também salientar que [18] serviu como um roteiro seguro para o nosso trabalho, no que concerne a estruturação dos resultados.

Um aspecto peculiar da estrutura de resultados que conseguimos aqui é que, mesmo especializando o nosso problema para a situação onde o espaço de estado da cadeia de Markov é finito, a tese ainda propicia uma contribuição importante: as condições do Teorema 61 são um relaxamento daquelas consideradas no Teorema 5 de [45], i.e., o Teorema 5 de [45] usa o conceito de observabilidade enquanto que nós usamos o conceito SD para assegurar os resultados de otimalidade. De fato, se considerarmos o caso de um único estado para a cadeia de Markov (caso sem saltos) o conceito SD se reduz ao conceito de detetabilidade no sentido usual (vide Seção 8.6) enquanto que o conceito de observabilidade usado no Teorema 5 de [45] (vide a Definição 3 de [45]) se reduz à observabilidade no sentido usual. Esta contribuição se deve, principalmente, ao fato de identificarmos, em nossa técnica, o operador em espaço de Banach de dimensão infinita e a propriedade espectral citados acima.

No caso limite, onde o nosso caso se reduz ao caso sem saltos (vide a Seção 8.6), os conceitos SS e SD resgatam os conceitos de estabilizabilidade e detectabilidade do caso clássico determinístico e a condição espectral acima se reduz à condição usual "autovalores da matriz do sistema determinístico com parte real negativa". Esta reconciliação não é obtida em [41] e [45]. Logo, o problema com saltos, juntamente com os conceitos estruturais SS e SD e os resultados obtidos, são uma generalização clara do importante caso clássico LQ.

A tese também contempla o estudo de um conjunto infinito enumerável de equações de Lyapunov associado ao MJLS e, com o suporte das teorias de operadores e de semigrupo, mostramos que a condição de existência e unicidade de soluções para o conjunto de equações acima equivale à estabilizabilidade estocástica do MJLS. Este resultado estende o resultado de [45] para o caso infinito enumerável e provê a contrapartida de [18] para o caso contínuo.

Um resumo do conteúdo da tese pode ser dado da seguinte maneira. No Capítulo 3 introduzimos notações e definições que usamos ao longo da tese, bem como algumas propriedades básicas. No Capítulo 4 descrevemos o modelo, o problema de controle e anunciamos os resultados intermediários principais obtidos ao curso dos demais capítulos. Alguns conceitos fundamentais, tais como o de decomplexificação, a aproximação linear para funções não holomorfas, aspectos da teoria de semigrupo e resultados para certa classe de equações diferenciais lineares em espaços de Banach são apresentados no Capítulo 5. No capítulo 6 introduzimos os objetos probabilísticos, os operadores e os espaços em dimensão infinita, seminais para o desenvolvimento do caso onde temos um conjunto infinito enumerável para a cadeia de Markov. Os desenvolvimentos e resultados centrais da tese são apresentados nos Capítulos 7 e 8 para o problema em horizonte finito e infinito, respectivamente, bem como no Capítulo 9, onde abordamos a questão de estabilidade via a equação de Lyapunov associada ao MJLS. O Apêndice é basicamente composto de provas que deslocamos do corpo central da tese com o fito de tornar a leitura mais fluida. Nele introduzimos também um exemplo que deixa claro que o conceito de decomplexificação aqui adotado se transporta, de fato, ao conceito de decomplexificação como definido em [1].

Capítulo 3

Preliminares

3.1 Introdução

Neste capítulo, introduzimos as notações e definições que usaremos ao longo da tese, bem como algumas propriedades básicas.

Com o intuito de facilitar a consulta, dividimos esse material em duas partes:

1. informações mais gerais ou freqüentes na literatura

2. definições e propriedades básicas dos espaços de Banach específicos deste trabalho.

3.2 Notação Geral e Definições

Como é usual, $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$) representa o espaço Euclideano n-dimensional no corpo dos números complexos (resp. reais) $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) e denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais $\{1, 2, ...\}$. Definimos $S = \mathbb{N}$ para designar, especificamente, o espaço de estado da cadeia de saltos markovianos (vide Capítulo 4).

Utilizamos a notação $^-$, $'$ e *, respectivamente, para a operação de conjugação, de transposição e de transposição conjugada de um vetor ou matriz e $\otimes$ para o produto de Kronecker. Eventualmente, utilizamos $\circ$ para designar composição de operadores.

De modo a evitar confusão notacional com os índices i e j que usualmente aparecem em somatórios, representaremos por ι o complexo imaginário puro. Para $z \in \mathbb{C}$, simbolizamos por z_{Re} (e às vezes $\mathrm{Re}(z)$) e z_{Im}, respectivamente, a parte real e imaginária de z e escrevemos $z = z_{\text{Re}} + \iota z_{\text{Im}}$. Denotamos $x_{\text{Re}} := (x_{1\,\text{Re}}, .., x_{n\,\text{Re}})'$ e $x_{\text{Im}} := (x_{1\,\text{Im}}, .., x_{n\,\text{Im}})'$ a parte real e imaginária de $x \in \mathbb{C}^n$ e escrevemos $x = x_{\text{Re}} + \iota x_{\text{Im}}$ (as notações $x_{j\,\text{Re}}$ e $x_{j\,\text{Im}}$ abreviam as notações mais precisas $(x_j)_{\text{Re}}$ e $(x_j)_{\text{Im}}$, $j = 1, .., n$).

Definimos $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ o espaço linear normado constituído por todas as matrizes complexas n por m e, por simplicidade, escrevemos $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ sempre que $n = m$.

Denotamos $L \geq 0$ e $L > 0$ para indicar que uma matriz auto-adjunta é, respectivamente, semidefinida positiva e definida positiva e escrevemos

$$\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+ = \{L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n); L = L^* \geq 0\}$$

Salvo indicação em contrário, $\|\cdot\|$ é usado tanto para representar a norma Euclideana em $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ e no espaço produto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^n$ como para representar a norma espectral induzida em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$. Denotamos por $\|\cdot\|_L$ a norma em $\mathbb{C}^n$ induzida pelo produto interno $\langle x, y\rangle_L = x^* L y$ sempre que $L = L^* \geq 0$. Indicamos ainda por $\|\cdot\|_Y$ uma norma genérica no espaço Y. Neste caso o texto deixará claro a que tipo de norma a notação se refere.

Nota 1 *Para todo $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$, existe um único $L^{1/2} \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que $(L^{1/2})^2 = L$. O valor absoluto de $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, denotado por $|L|$, é definido como $|L| = (L^* L)^{1/2}$. Verificamos que $\|L\| = \||L|\|$.*

Nota 2 *Todo elemento em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ tem uma decomposição auto-adjunta Cartesiana (vide, e.g., [59], pg 376) e todo elemento auto-adjunto em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ pode ser decomposto em parte positiva e parte negativa ([59], pg 464). Logo, para todo $L \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, existem X^+, X^-, Y^+, Y^- em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que*

$$L = \left(X^+ - X^-\right) + \iota\left(Y^+ - Y^-\right)$$

Além disso $X^+ \leqslant X^+ + X^- = (L + L^*)/2$ e portanto $\|X^+\| \leqslant \|L\|$. Da mesma forma, $\|X^-\| \leqslant \|L\|$, $\|Y^+\| \leqslant \|L\|$ e $\|Y^-\| \leqslant \|L\|$.

Nota 3 *Se $A \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ é real (no sentido de ter elementos reais), então, em geral, inexistem A_1, $A_2 \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ autoadjuntas e reais tais que $A = A_1 + \iota A_2$ ou $A = A_1 + A_2$*

(de fato, na primeira (resp. segunda) expressão, se A_1e A_2 são reais (resp. auto-adjuntas), então A é obrigatoriamente complexa (auto-adjunta)). Logo, a decomposição conforme a Nota 2 não seria válida caso enunciássemos o problema de controle do Capítulo 4 na versão real. Isso inviabilizaria a parte "somente se " da prova do importante Lema 53. Para contornar o problema, teríamos, por exemplo, que lançar mão de uma técnica de imersão, restringindo nossos resultados ao caso real e preservando as hipóteses de estabilidade e detetabilidade no campo complexo.

Denotamos por $\{\eta\}$ qualquer processo $\{\eta(t), 0 \leqslant t \leqslant T\}$, sempre que estiver claro se T é finito ou não e por $E[\cdot]$ a expectância matemática usual.

Ainda, para algum conjunto A, denotamos por $1_A\ \{.\}$ a medida de Dirac.

Para um espaço de dimensão finita Y, denotamos por $o(\|r\|)$ toda função f : $Y \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0} \frac{f(r)}{\|r\|_Y} = 0$, com r tendendo a zero por qualquer caminho em Y.

Denotemos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ por $\mathbb{E}$. Uma função $f : [0,\infty) \rightarrow \mathbb{E}$, é dita $o(\delta)$ se $\lim_{\delta\downarrow 0} \frac{|f(\delta)|}{\delta} = 0$. Uma notação similar, qual seja, $o^n(\delta)$ $(o^{nn}(\delta))$, representa uma função a valores num espaço de vetores (matrizes) se o limite acima vale para cada elemento do vetor (da matriz).

Finalmente suponha $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com derivadas parciais $\frac{\partial g(x)}{\partial x_i}$, $i = 1, .., n$. Denotamos o gradiente de g por $\nabla_x g(x) = (\frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g(x)}{\partial x_n})'$.

3.3 Espaços de Banach

Denotamos $\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $\mathcal{H}_\infty^{m,n}$) o espaço linear de todas as seqüências infinitas de matrizes complexas $H = (H_1, H_2, ...)$, $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|H_i\| < \infty$ (resp. $\sup\{\|H_i\|, \ i \in \mathcal{S}\} < \infty$) e escrevemos $\mathcal{H}_1^n$ e $\mathcal{H}_\infty^n$ sempre que $n = m$.

Para $H \in \mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $H \in \mathcal{H}_\infty^{m,n}$) definimos

$$\|H\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|H_i\| \quad (\text{resp. } \|H\|_\infty = \sup\{\|H_i\|, \ i \in \mathcal{S}\})$$

a norma em $\mathcal{H}_1^{m,n}$ (resp. $\mathcal{H}_\infty^{m,n}$).

Denotamos

$$\mathcal{H}_1^{n^+} = \{H \in \mathcal{H}_1^n, \ H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i \in \mathcal{S}\}$$

e

$$\mathcal{H}_\infty^{n^+} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^n, \ H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i \in \mathcal{S}\}$$

Para $H = (H_1, H_2, ...)$ e $L = (L_1, L_2, ...)$ em $\mathcal{H}_1^{n+}$ usamos a notação $H \leqslant L$ para indicar que $H_i \leqslant L_i$ para cada i em $\mathcal{S}$. Verificamos que

$$H \leqslant L \Rightarrow \|H\|_1 \leqslant \|L\|_1 \tag{3.1}$$

Ademais, usamos H^* para indicar que cada componente H_i^* de H^* é a adjunta de H_i, $i \in \mathcal{S}$ e denotamos

$$\mathcal{H}_\infty^{n^*} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^n,\ H_i^* = H_i,\ i \in \mathcal{S}\}$$

Estendemos a notação da ordenação parcial acima para os elementos $H \in \mathcal{H}_1^n$ tais que $H = H^*$.

Usamos $(l_1, \|\cdot\|_1)$, $(l_2, \|\cdot\|_2)$ e $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$, respectivamente, para os conjuntos constituídos por todas seqüências infinitas de números complexos $x = (x_1, x_2, ...)$ tais que $\sum_{i=1}^\infty |x_i| < \infty$, $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty$ e $\sup\{|x_i|,\ i = 1, 2, ...\} < \infty$, equipados com a norma usual $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|$, $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2$e $\|x\|_\infty = \sup\{|x_i|,\ i = 1, 2, ...\}$ e, no caso de $(l_2, \|\cdot\|_2)$, equipado com o produto interno usual $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Nota 4 *É fácil verificar que* $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ *e* $(l_1, \|\cdot\|_1)$ *são uniformemente homeomorfos. Similarmente, este é o caso de* $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ *e* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. *Uma vez que* $(l_1, \|\cdot\|_1)$ *e* $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *são espaços de Banach, temos então que* $(\mathcal{H}_1^{m,n}, \|\cdot\|_1)$ *e* $(\mathcal{H}_\infty^{m,n}, \|\cdot\|_\infty)$ *também o são.*

Nota 5 *Consideremos* $Q = (Q_1, Q_{2,...}) \in \mathcal{H}_1^n$ *arbitrário. Da Nota 2, temos que*

$$Q_i = \left(X_i^+ - X_i^-\right) \ + \iota\left(Y_i^+ - Y_i^-\right)$$

onde X_i^+,X_i^- ,Y_i^+ *e* Y_i^- *pertencem a* $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$. *Vamos agora definir* $X^+ = (X_1^+, X_2^+, ...)$, $X^- = (X_1^-, X_2^-, ...)$, $Y^+ = (Y_1^+, Y_2^+, ...)$ *e* $Y^- = (Y_1^-, Y_2^-, ...)$. *Da Nota 2 e tendo em vista que* $Q \in \mathcal{H}_1^n$, *vem que* X^+, X^-, Y^+ *e* Y^- *pertencem a* $\mathcal{H}_1^n$. *Logo,* $Q \in \mathcal{H}_1^n$ *sempre pode ser decomposta em*

$$Q = \left(X^+ - X^-\right) \ + \iota\left(Y^+ - Y^-\right)$$

com X^+, X^-, Y^+ *e* Y^- *em* $\mathcal{H}_1^{n^+}$.

Denotamos

$$\check{\mathcal{H}}_\infty^{n^+} = \{H \in \mathcal{H}_\infty^{n^+}, H_i > \alpha_H I \text{ para algum } \alpha_H > 0, i \in \mathcal{S}\}$$

e dizemos que cada elemento de $\breve{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$ é estritamente positivo.

Denotamos $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ o espaço constituído por todas as matrizes complexas de dimensão infinita do tipo

$$\mathcal{C} = diag\,(C_i) \equiv \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & 0 & \\ & & \cdot & \\ & 0 & \cdot & \\ & & & \cdot \end{bmatrix}$$

onde $C_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$, $i \in \mathcal{S}$ e $\sup_{i\in\mathcal{S}} \|C_i\| < \infty$. Para $\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ definimos

$$\|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_\infty} = \sup_{i\in\mathcal{S}} \|C_i\|$$

a norma em $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$. Escrevemos $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$ sempre que $n = m$ e denotamos

$$\mathcal{W}_{\infty}^{n+} = \{\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n},\, C_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, i \in \mathcal{S}\}$$

a classe dos elementos semidefinidos positivos de $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$.

Para $\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$, dizemos que

$$\mathcal{C}^* = diag(C_i^*) \in \mathcal{W}_{\infty}^{n,m} \tag{3.2}$$

e denotamos $\mathcal{W}_{\infty}^{n^*} = \{\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n}\colon\ \mathcal{C}^* = \mathcal{C}\}$ a classe dos elementos auto-adjuntos de $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$.

Para $\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n*} \supset \mathcal{W}_{\infty}^{n+}$, dizemos que $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$ se $B_i \leqslant C_i$, $i \in \mathcal{S}$.

Nota 6 *Claramente,* $(\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}_\infty})$ *e* $(\mathcal{H}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\infty})$ *são uniformemente homeomorfos. Uma vez que* $(\mathcal{H}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\infty})$ *é um espaço de Banach,* $(\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}_\infty})$ *também o é.*

Para qualquer espaço de Banach complexo X, denotamos $Blt\,(X)$ o espaço de Banach constituído por todas transformações lineares limitadas definidas e a valores em X, equipadas com a norma induzida uniforme representada por $\|\cdot\|$ e, para $L \in Blt\,(X)$, denotamos $\sigma\,(L)$ o espectro de L.

Capítulo 4

Descrição do Problema

Fixamos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ munido de uma filtragem contínua a direita $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\colon\ t \in [s, T)\}$ para $s, T \in [0, \infty)$ arbitrários e consideramos a classe de sistemas dinâmicos modelados pelo seguinte tipo de equação diferencial estocástica:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t), \quad s < t < T \\ x(s) &= x_s, \quad \theta(s) = \theta_s \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{C}^n$ denota o vetor de estado e $u(t) \in \mathbb{C}^m$ o controle adaptado à σ-álgebra $\mathcal{F}_t$, $t \in [s, T)$. Os parâmetros do sistema são funções de um processo de Markov homogêneo $\{\theta(t), t \in [s, T]\}$ com trajetórias contínuas à direita e um espaço de estado infinito enumerável que, por conveniência, designamos por $\mathcal{S} = \{1, 2, ...\}$. Assumimos que ao processo de saltos markovianos $\{\theta\}$, corresponde uma função matriz de probabilidade de transição estacionária standard (vide [48, pg 138]) $\{P_\tau(i,j)\}_{i,j\in\mathcal{S}}$ no sentido de que, para $0 \leqslant \tau \leqslant T - t$,

$$P_\tau(i,j) = \mathcal{P}\{\theta(t+\tau) = j|\ \theta(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_{ij}\tau + o_{ij}(\tau) & i \neq j \\ 1 + \lambda_{ii}\tau + o_{ii}(\tau) & i = j \end{cases} \tag{4.2}$$

onde definimos $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{i,j\in\mathcal{S}}$ a matriz infinitesimal de $\{\theta\}$ com $\lambda_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$. O processo de Markov $\{\theta\}$ é conservativo no sentido de que

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} = -\lambda_{ii}, \quad i \in \mathcal{S} \tag{4.3}$$

e assumimos que os coeficientes $-\lambda_{ii}$ têm limite superior uniforme na variável i, digamos c (ou equivalentemente, que a condição standard $\lim_{\tau\to 0} P_\tau\ (i,i) = 1$ vale uniformemente para todo $i \in \mathcal{S}$; vide [48]). Assumimos também que $\{A_{(.)}, B_{(.)}\}$ são tais que, para cada $j \in \mathcal{S}$ e cada $\theta(t) = j$, $A_{\theta(t)} = A_j$ e $B_{\theta(t)} = B_j$, com A_j, B_j sendo, respectivamente, matrizes constantes em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ e $\mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$. Além disso, supomos que os parâmetros sejam limitados em norma, no sentido de que $A = (A_1, A_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$ e $B = (B_1, B_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{m,n}$. Consideramos x_s uma v.a. de segunda ordem, dependente ou não da v.a. θ_s, e denotamos $\vartheta_s{=}\vartheta_s(x_s, \theta_s)$ a distribuição conjunta da condição inicial (x_s, θ_s). Adicionalmente, assumimos as v.as. $\theta(t+\tau)$ condicionalmente independentes de x_s, dado $\theta(t)$, para $s \leqslant t < T$, $0 < \tau \leqslant T - t$ (esta estrutura para a condição inicial é natural, sendo solicitada em determinada prova; mais ainda, ela propicia a geração do "span" correspondente a certo espaço de Banach, o que não ocorre caso tomemos a hipótese usual de independência de $\theta\,(t)$, $t \geq s$, com relação a x_s.).

Denotaremos o sistema (4.1)-(4.2) por (A, B, Λ).

Consideramos o problema de observações perfeitas, no sentido de que o controlador tem acesso ao processo de estado $\{x\}$ e à cadeia de Markov $\{\theta\}$ até o instante presente t. Nesse sentido, denotamos $\mathcal{F}_t$ a σ- álgebra gerada pelo processo observado $\{(x(r), \theta(r)),\ s \leqslant r \leqslant t\}$.

Inicialmente, estudamos o problema de controle ótimo em horizonte finito, definido a seguir.

Assumimos que a classe das políticas admissíveis de controle $\mathcal{U}^{s,T}$ ($\mathcal{U}^{0,T} \equiv \mathcal{U}^T$) é constituída das funções Borel mensuráveis $u : \{[s,T], \mathbb{C}^n, \mathcal{S}\} \to \mathbb{C}^m$ tais que:

C1. Para alguma constante k que pode depender de u,

(a) $\|u(t,z,i) - u(t,y,i)\| \leqslant k\,\|z - y\|$, z , $y \in \mathbb{C}^n$, $t \in [s,T]$ e $i \in \mathcal{S}$ (Condição Lipschitz).

(b) $\|u(t,y,i)\| \leqslant k(1 + \|y\|)$, $y \in \mathbb{C}^n$, $t \in [s,T]$ e $i \in \mathcal{S}$ (Condição de crescimento).

Para um instante inicial $0 \leqslant s < T$, uma condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e para cada política $u \in \mathcal{U}^{s,T}$, definimos o funcional de custo

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) \\ &= E[\int_s^T \left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(r)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(r)\right\|^2 dr + x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)] \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $x(t)$ satisfaz (4.1), $\mathcal{R}, \mathcal{Q} \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ e $\mathcal{R} > 0$.

O problema consiste em achar $\hat{u}^T \in \mathcal{U}^{s,T}$ que minimiza $\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u)$.

O fito maior deste trabalho é o problema de controle ótimo em horizonte infinito assim estruturado:

Tomamos a versão do problema de controle ótimo em horizonte finito com $t \geq 0$ e $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}^{0,\infty}$ e a condição adicional

C2. O modelo (4.1) com $t > 0$ é estável no critério da média quadrática (MSS), i.e., $E[\|x(t)\|^2] \to 0$ quando $t \to \infty$, para qualquer distribuição ϑ_0.

Para cada política $u \in \mathcal{U}$, definimos o funcional de custo

$$\mathcal{J}(\vartheta_0, u) := E[\int_0^\infty \left(\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2\right) dt] \tag{4.5}$$

onde $x(t)$ satisfaz (4.1) com $t > 0$.

O objetivo principal deste trabalho é determinar uma política ótima de controle $\hat{u}$, na classe $\mathcal{U}$, que minimiza o custo acima, i.e., tal que

$$\mathcal{J}(\vartheta_0, \hat{u}) := \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(\vartheta_0, u), \tag{4.6}$$

É importante talvez mencionar que para atingirmos o nosso objetivo os seguintes resultados intermediários são estabelecidos.

(a) Certa versão do gradiente e a forma da aproximação linear para funções não necessariamente holomorfas (Seção 5.2).

(b) Um contraexemplo: falha da equivalência entre os conceitos de estabilizabilidade estocástica e estabilizabilidade na média quadrática quando passamos ao caso de espaço de estado infinito enumerável (Seção 8.3).

(c) As definições de estabilizabilidade estocástica e detetabilidade estocástica (Seção 8.2) como condições estruturais do problema.

(d) Certo operador linear em dimensão infinita e a equivalência de determinada propriedade espectral com as condições SS e SD (Seção 8.4).

(e) Uma condição suficiente de otimalidade: existência e unicidade de soluções para a ICARE (Seção 8.5).

(f) A forma fechada da solução ótima de controle para o problema em horizonte finito (Capítulo 7).

Independentemente do objetivo principal citado acima, um resultado importante conseguido, ainda dentro do contexto dos problemas de controle e estabilidade, diz respeito à

(g) Equação de Lyapunov associada ao MJLS e a equivalência com o conceito de estabilizabilidade estocástica (Capítulo 9).

Nota 7 *Uma vez que $\{x(t), \theta(t)\}$ é um processo Markov, (4.1) e (4.4) estabelecem um "problema Markov" e portanto políticas de controle da forma $u(t) = u(t, x(t), \theta(t))$ bastam, vis-à-vis a classe mais estendida das políticas de controle da forma $u(t) = u(t, x(s), \theta(s), s \leqslant t)$. Notamos que a condição "Markov" do problema depende da expressão do custo. Mais explicitamente, de que a expressão de custo tenha a propriedade de ser "gerada recursivamente para trás". A forma (4.4) é um exemplo padrão na classe de funcionais de custo que exibem esta propriedade (este tema é bem ilustrado em [65] para o caso discreto).*

Nota 8 *Por questões de simplificação, assumimos que as matrizes $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ são independentes de $\{\theta\}$. No entanto, todos os desenvolvimentos e resultados se reestabelecem, verbatim, no caso de considerarmos $\mathcal{Q}_{\theta(t)}$ e $\mathcal{R}_{\theta(t)}$ limitados em norma.*

Nota 9 *Por solução de (4.1) queremos dizer um processo $\{x\}$ cujas funções amostra $x(\cdot, \omega)$, $\omega \in \Omega$, são absolutamente contínuas e satisfazem*

$$x(t, \omega) = x_{s,\omega} + \int_s^t A_{\theta(r,\omega)} x(r, \omega) dr + \int_s^t B_{\theta(r,\omega)} u(r, \omega) dr$$

com probabilidade um.

A condição Lipschitz garante unicidade de soluções para (4.1). O conceito de unicidade é dado em termos de trajetórias i.e., se $\{x\}$ e $\{y\}$ são soluções para (4.1), então suas funções amostra são as mesmas com probabilidade um.

A condição de crescimento linearmente limitado garante que a solução de (4.1) não explode em tempo finito [31]. Esta condição elimina funções impulsionais da classe $\mathcal{U}^{s,T}$, que produziriam trajetórias de $\{x\}$ descontínuas [45].

Nota 10 (extensão da classe $\mathcal{U}$) *Uma restrição de cunho prático que impomos na Seção 4 é que as políticas de controle sejam tais a preservar a estabilidade do sistema, no sentido de que $E[\|x(t)\|^2] \to 0$ quando $t \to \infty$. Isto é bastante natural, tendo em vista que não desejamos que o estado tome valores muito grandes à medida que atuamos no índice de custo. Não obstante, examinamos a extensão da classe $\mathcal{U}$ considerando o relaxamento da Condição C2. Neste novo cenário, $u \in \mathcal{U}$ poderia ser tal que* (**i**) *$E[\|x(t)\|^2] \to \infty$ quando $t \to \infty$,* (**ii**) *$E[\|x(t)\|^2] \to cte \in (-\infty, +\infty)$ quando $t \to \infty$ e* (**iii**) *$E[\|x(t)\|^2]$ é limitada mas não exibe limite quando $t \to \infty$.*

O caso (i) é inócuo, visto que a detetabilidade de $(\bar{Q}^{1/2}, A, \Lambda)$, $\bar{Q}^{1/2} = (Q^{1/2}, Q^{1/2}, ...)$ (que é uma condição estrutural a ser assumida adiante), impõe que se $E[\|x(t)\|^2] \to \infty$ quando $t \to \infty$ então $\mathcal{J}(u) = \infty$, de modo que o caso não propicia nenhum interesse. Entretanto, (ii) e (iii) podem estar vinculados a um custo finito e nada nos diz, de antemão, que algum controle associado a estes casos não poderia ser ótimo.

No caso (iii), vale notar que uma característica atrativa da solução ótima de controle do caso clássico LQ ou LQG é que ela é ótima também na classe de controles onde incluímos as políticas variáveis no tempo. Agora, é claro que se uma política de controle é variável ao longo de todo intervalo $[0, \infty)$, dificilmente estará incluída na classe de controles tais que $E[\|x(t)\|^2]$ convirja para algum valor real quando $t \to \infty$. Conseqüentemente tal política se enquadra no caso (iii), salvo se corresponder ao caso (i).

Nesse sentido, seria interessante assegurar que a política ótima de controle na classe $\mathcal{U}$ preserva a otimalidade na classe das políticas onde os casos (ii) e (iii) se incluem, i.e., na versão da classe $\mathcal{U}$ definida na Seção 4 onde descartamos a Condição C2. Isso, de fato, pode ser implementado simplesmente estendendo-se a Proposição 58.

Capítulo 5

Conceitos Fundamentais

5.1 Introdução

Introduzimos, na primeira parte deste capítulo (Seção 5.2), uma adaptação natural do conceito de decomplexificação descrito na Seção 18 de [1], para funções complexas não lineares com imagem em $\mathbb{R}$. Estabelecemos daí, uma versão do conceito do gradiente e subseqüentemente a aproximação linear para funções não necessariamente holomorfas. Isto permitirá enunciar o problema de controle considerando o corpo dos números complexos, tendo em vista que agora, certos desenvolvimentos relativos ao semigrupo associado ao processo de Markov $\{x, \theta\}$, aplicado a certo funcional quadrático (não holomorfo) com domínio em $\mathbb{C}^n$ (vide Seção 7.2), se tornam bem definidos.

Quanto a segunda parte deste capítulo, definimos, na Seção 5.3.1, alguns conceitos básicos da teoria de semigrupo. Na Seção 5.3.2 nós relacionamos certas propriedades espectrais de geradores infinitesimais à propriedades de convergência dos respectivos semigrupos. Na Seção 5.3.3 abordamos a questão de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais lineares em espaços de Banach de dimensão infinita governadas por uma certa classe de operadores infinitesimais. A solução é expressa em termos do semigrupo associado à equação, para todo valor inicial do espaço de Banach considerado.

5.2 Aproximação Linear via Decomplexificação

Apresentamos, nesta Seção, os conceitos de decomplexificação de espaços e operadores e a expressão para a aproximação linear de funções complexas não necessariamente holomorfas, cujas decomplexificações sejam diferenciáveis.

5.2.1 Decomplexificação de Espaços e Operadores

Definimos a operação de decomplexificação de $x \in \mathbb{C}^n$ por

$$\mathbb{C}^n \ni x \mapsto {}^{\mathrm{R}}x = (x_{\mathrm{Re}}\ x_{\mathrm{Im}})' \in \mathbb{R}^{2n} \tag{5.1}$$

Podemos verificar as seguintes propriedades:

1. ${}^{\mathrm{R}}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$,

2. ${}^{\mathrm{R}}(x+y) = {}^{\mathrm{R}}x + {}^{\mathrm{R}}y$, ${}^{\mathrm{R}}(cx) = c^{\mathrm{R}}(x)$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ e c um número real e

3. $\|x\| = \left\|{}^{\mathrm{R}}x\right\|$, $x \in \mathbb{C}^n$

Por decomplexificação de um operador genérico $g : [0,\infty) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ entendemos o operador ${}^{\mathrm{R}}g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ que coincide com g pontualmente, ou seja,

$${}^{\mathrm{R}}g\left(t, {}^{\mathrm{R}}x\right) = g\left(t, x\right), \quad t \in [0,\infty), x \in \mathbb{C}^n \tag{5.2}$$

Podemos constatar que a decomplexificação acima é uma adaptação natural do conceito descrito em [1], para funções não lineares.

Nota 11 *Notamos que a decomplexificação de $\mathbb{C}^n$ é o espaço linear real que coincide com $\mathbb{C}^n$ como um grupo e no qual a multiplicação por números reais é definida da mesma forma que em $\mathbb{C}^n$, enquanto que a multiplicação por números complexos simplesmente não é definida (em outras palavras, decomplexificar $\mathbb{C}^n$ significa esquecer a estrutura de módulo $\mathbb{C}^n$ e preservar a estrutura de módulo $\mathbb{R}^n$).*

Nota 12 *Arnold [1, pg 120] considera a imagem de g em $\mathbb{C}^r$. A versão de (5.2) para este caso é*

$${}^{\mathrm{R}}g\left(t, {}^{\mathrm{R}}x\right) = {}^{\mathrm{R}}(g\left(t,x\right)), \ \ t \in [0,\infty), x \in \mathbb{C}^n \tag{5.3}$$

Para confirmarmos que (5.3) representa de fato a decomplexificação de g como definida em [1], reproduzimos, na Seção 11.1 do Apêndice, a resposta do Problema 1 de [1, pg. 120].

Nota 13 *Tendo em vista que* ${}^{\mathrm{R}}\mathbb{R}$ *simplesmente não é definido, nosso caso, embora mais simples, não é um caso particular de [1].*

5.2.2 Aproximação Linear

Quando se trata de variáveis complexas, a diferenciação (por exemplo, a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_i} g$, x_i uma variável complexa) é uma operação bem definida para funções holomorfas apenas. De fato, o conceito de aproximação linear ou expansão de Taylor que encontramos usualmente na literatura se restringe a esta classe de funções e não cobrem o caso das funções não holomorfas do qual fazem parte, por exemplo, as formas quadráticas $x^* S x$, $x \in \mathbb{C}^n$, importantes no contexto dos problemas de controle linear.

Com base no conceito de decomplexificação definido na Seção 5.2.1, desenvolvemos nessa seção a expressão para a aproximação linear de funções complexas g com decomplexificações ${}^{\mathrm{R}}g$ diferenciáveis. Abrimos mão portanto da condição mais restritiva de que g seja holomorfa.

Lema 14 *Seja a decomplexificação* ${}^{\mathrm{R}}g : [0,\infty) \times \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$, *associada a* $g : [0,\infty) \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$, *(Fréchet)-diferenciável. Então, para todo* $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{C}^n$, *a aproximação linear de* g *no ponto* (t,x) *é dada por*

$$g(t+s, x+w) = g(t,x) + \frac{\partial}{\partial t} g(t,x)s + \nabla_{{}^{\mathrm{R}}x} {}^{\mathrm{R}}g(t, {}^{\mathrm{R}}x)' \, {}^{\mathrm{R}}w + o(\|(s,w)\|) \tag{5.4}$$

Prova. Consideramos uma versão simplificada da proposição, assumindo a decomplexificação ${}^{\mathrm{R}}g : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}$, de $g : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$, (Fréchet)-diferenciável e provando que, para cada $x \in \mathbb{C}^n$, g admite a aproximação linear

$$g(x+w) = g(x) + \nabla_{{}^{\mathrm{R}}x} {}^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x)' \, {}^{\mathrm{R}}w + o(\|w\|) \tag{5.5}$$

A proposição é daí obtida via um procedimento standard.

Sabemos que se ${}^{\mathrm{R}}g$ é diferenciável, ela exibe a aproximação linear

$${}^{\mathrm{R}}g(v+r) = {}^{\mathrm{R}}g(v) + \nabla_v {}^{\mathrm{R}}g(v)' r + o(\|r\|), \quad v, r \in \mathbb{R}^{2n} \tag{5.6}$$

Agora, definindo x e w em $\mathbb{C}^n$ tais que $v = {}^{\mathrm{R}}x$ e $r = {}^{\mathrm{R}}w$, temos

$${}^{\mathrm{R}}g(v+r) = {}^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x + {}^{\mathrm{R}}w) = {}^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}(x+w)) = g(x+w)$$

e ${}^{\mathrm{R}}g(v) ={}^{\mathrm{R}} g({}^{\mathrm{R}}x) = g(x)$. Vamos agora definir $l(w) = o(\|r\|)$ e supor que $l(w)$ possa ser escrito como $o(\|w\|)$. Então, substituindo as expressões acima em (5.6), obtemos (5.5). De fato, $l(w)$ é uma função $o(\|w\|)$: como $\|r\| = \|w\|$ temos $\frac{l(w)}{\|w\|} = \frac{o(\|r\|)}{\|r\|}$ e, *ipso facto,*

$$\lim_{w\to 0} \frac{l\,(w)}{\|w\|} = \lim_{w\to 0} \frac{o\,(\|r\|)}{\|r\|} = \lim_{\|w\|\to 0} \frac{o\,(\|r\|)}{\|r\|} = \lim_{\|r\|\to 0} \frac{o\,(\|r\|)}{\|r\|} = 0$$

■

Nota 15 *Trivialmente, da definição da decomplexificação de $x \in \mathbb{C}^n$,*

$$\nabla_{{}^{\mathrm{R}}x}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'{}^{\mathrm{R}}w = \nabla_{x_{\mathrm{Re}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'w_{\mathrm{Re}} + \nabla_{x_{\mathrm{Im}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'w_{\mathrm{Im}}$$

Lema 16 *Seja g a função (não holomorfa) dada por*

$$[0,T] \times \mathbb{C}^n \ni (t,x) \to g(t,x) = x^* S_m(t) x \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

onde $S_m(t) = S_m(t)^* \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ é diferenciável para todo $t \in [0,T]$. Então, $\frac{\partial}{\partial t} g(t,x) = x^* \dot{S}_m(t) x$ e a função diferenciável ${}^{\mathrm{R}}g$ é tal que

$$\nabla_{{}^{\mathrm{R}}x}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_{\mathrm{Re}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x) \\ \nabla_{x_{\mathrm{Im}}}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} (S_m(t)x)_{\mathrm{Re}} \\ (S_m(t)x)_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

ou ainda

$$\nabla_{{}^{\mathrm{R}}x}{}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)'\,{}^{\mathrm{R}}w = w^* S_m(t) x + x^* S_m(t) w \tag{5.9}$$

Prova. Vide Seção 11.2 do Apêndice. ■

Nota 17 *No caso onde $S_m(t)$ é uma matriz real simétrica, $x = x_{\mathrm{Re}} + \iota 0$ e $w = w_{\mathrm{Re}} + \iota 0$, o lado direito de (5.9) se escreve $w' S_m(t) x + x' S_m(t) w = 2(S_m(t)x)'w$. Logo (5.4) se reconcilia com a aproximação linear da função real $x' S_m(t) x$.*

5.3 Conceitos da Teoria de Semigrupo

5.3.1 Semigrupo de Transformações Lineares Limitadas

Definição 18 (semigrupo) *(vide, por exemplo, [61, pg 1]) Seja Y um espaço de Banach. A família $T(t)$, $0 \le t < \infty$, de transformações lineares limitadas, definidas e a valores em Y e parametrizadas por t, é dita um semigrupo de transformações lineares limitadas em Y, se*

1. $T(0) = I$, *onde* I *é o operador identidade em* Y

2. $T(t+s) = T(t)T(s)$ *para todo* t, $s \geq 0$ *(propriedade de semigrupo)*

Definição 19 (semigrupo fortemente contínuo) *(vide, por exemplo, [61, pg 4]) Um semigrupo* $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, *de transformações lineares limitadas definidas e a valores em* Y *é um semigrupo fortemente contínuo ou simplesmente um semigrupo* C_0 *se*

$$\lim_{h \downarrow 0} T(h)y = y \quad \text{para todo } y \text{ em } Y,$$

onde o limite é tomado na norma de Y.

Definição 20 (semigrupo uniformemente contínuo) *(vide, por exemplo, [61, pg 1]) Um semigrupo* $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, *de transformações lineares limitadas definidas e a valores em* Y *é um semigrupo uniformemente contínuo se*

$$\lim_{h \downarrow 0} T(h) = I,$$

onde o limite é tomado na norma de $Blt(Y)$ *(ver Seção 3.3).*

Claramente, um semigrupo uniformemente contínuo é um caso particular de um semigrupo fortemente contínuo.

Definição 21 (gerador infinitesimal) *(vide, por exemplo, [61, pg 1]) O operador linear* $\mathcal{A}$ *definido por*

$$Y \ni \mathcal{A}y = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)y - y}{h} = \left. \frac{d^{+}T(t)y}{dt} \right|_{t=0} \qquad \text{para } y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$$

com domínio $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ *dado por*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \{y \in Y \ : \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)y - y}{h} \text{ existe}\} \tag{5.10}$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$.

Teorema 22 *(vide, por exemplo, [61, theo. 1.1.2]) Um operador linear* $\mathcal{A}$ *é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo* $T(t)$ *se e somente se* $\mathcal{A}$ *é um operador linear limitado. Mais ainda,* $T(t)$ *pode ser expresso por*

$$T(t) = e^{\mathcal{A}t} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{A}t)^i}{i!}, t \geq 0 \tag{5.11}$$

e $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = Y$.

Teorema 23 *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 em um espaço de Banach Y e $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então, para todo $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ e $t \geq 0$ temos $T(t)y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ e*

$$\frac{dT(t)y}{dt} = \mathcal{A}T(t)y = T(t)\mathcal{A}y$$

(onde somente consideramos a derivada à direita se $t = 0$). Mais ainda

$$\int_0^t T(s)yds \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \quad e \quad \int_0^t \|T(s)y\|_Y ds < \infty$$

Prova. Vide o Teorema 1.2.4b/c de [61]. Ademais, $T(s)y$ e portanto $\|T(s)y\|_Y$ são contínuos em s e $[0,t]$ é compacto. Logo, a segunda expressão acima vale. ∎

Teorema 24 *(vide, por exemplo, o Corolário 1.2.5 de [61]) As seguintes condições são necessárias para que um operador linear $\mathcal{A}$ seja um gerador infinitesimal de um semigrupo C_0:*

c1 *$\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, o domínio de $\mathcal{A}$, é denso em Y.*

c2 *$\mathcal{A}$ é um operador linear fechado.*

Definição 25 (semigrupo diferenciável) *(vide, por exemplo, [61, pg 51]) Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 em um espaço de Banach Y. O semigrupo $T(t)$ é dito diferenciável para $t > t_0$ se, para todo $y \in Y$, $t \mapsto T(t)y$ é diferenciável em $t > t_0$. O semigrupo $T(t)$ é dito diferenciável se ele é diferenciável em $t > t_0 = 0$.*

Tentemos mostrar a significância da definição acima. Se, para $y \in Y$, $y \notin \mathfrak{D}(\mathcal{A})$, $t \mapsto T(t)$ é diferenciável em $t_1 > 0$, então ela é diferenciável em $t + t_1$, para todo $t > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^+T(t+t_1)y}{dt} \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{T(t+t_1+h)y - T(t+t_1)y}{h} = \lim_{h\downarrow 0} T(t)\frac{T(t_1+h)y - T(t_1)y}{h} \\
&= T(t)\lim_{h\downarrow 0}\frac{T(t_1+h)y - T(t_1)y}{h} = T(t)\frac{d^+T(t_1)y}{dt}
\end{aligned}$$

Podemos estender o resultado acima para o caso da derivada à esquerda com base na mesma argumentação da prova do Teorema 23. Por outro lado, $t \mapsto T(t)y$ pode ser diferenciável em t_1, e não o ser para algum $0 < t < t_1$, tendo em vista que a inversa de

$T(t)$, em geral, não existe para todo t. Dessa forma, um semigrupo C_0 $T(t)$ pode de fato ser diferenciável em $t > t_0$ (conforme a definição acima) e não ser diferenciável para algum $t \leq t_0$. Agora, se para todo $y \in Y$, $t \mapsto T(t)y$ é diferenciável em $t = 0$ ou equivalentemente, se $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = Y$ (vide (5.10)), então, como vimos acima, $t \mapsto T(t)y$ é diferenciável para todo $y \in Y$ e $t \geq 0$, de modo que $T(t)$ é diferenciável. É importante notar que diferenciabilidade não implica em $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = Y$, posto que diferenciabilidade não requer diferenciabilidade de $T(t)y$ em $t = 0$ (Como $T(t)$ é um semigrupo C_0, $T(t)y$ é claramente diferenciável em $t = 0$ para todo $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$. No entanto, $T(t)$ pode não ser diferenciável para algum $y \in Y$ fora de $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$). Logo, $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = Y$ é uma condição mais forte que implica diferenciabilidade do semigrupo $T(t)$. Se $t \mapsto T(t)y$ é diferenciável para todo $y \in Y$ e $t \geq 0$ então, por $\mathcal{A}$ ser fechado, temos que $\mathcal{A}$ é necessariamente limitado. Finalmente, notemos que um operador linear limitado gera um semigrupo diferenciável.

Até aqui lidamos com semigrupos cujo domínio paramétrico corresponde ao eixo real não negativo. Introduzimos agora a classe dos semigrupos analíticos cujos domínios paramétricos são regiões do plano complexo que incluem o eixo real não negativo. De fato, nos restringiremos a um caso especial onde tais domínios são ângulos contendo o eixo real não negativo, como definido abaixo.

Definição 26 (semigrupo analítico) *(vide, por exemplo, [61, pg 60]) Definamos* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ *e seja* $T(z)$, $z \in \Delta$, *um operador linear limitado. A família* $T(z)$, $z \in \Delta$, *é um semigrupo analítico em* Δ *se*

1. $z \mapsto T(z)$ *é análitica em* Δ.

2. $T(0) = I$ *e* $\lim_{z\to 0,\ z\in\Delta} T(z)y = y$ *para todo* $y \in Y$.

3. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *para todo* $z_1, z_2 \in \Delta$.

Nosso principal interesse é reconhecer se um semigrupo C_0 $T(t)$, $t \geq 0$, pode ser estendido para um semigrupo analítico em algum setor Δ contendo o eixo real não negativo. Sendo este o caso denominaremos $T(t)$ *semigrupo análitico.*

A propriedade de analiticidade de um semigrupo C_0 $T(t)$ é importante no sentido de permitir que relacionemos propriedades do espectro do gerador infinitesimal de

$T(t)$ com propriedades de convergência deste semigrupo, como veremos na Seção 5.3.2.

Nesse ponto, convém lembrar que todo semigrupo uniformemente contínuo é um semigrupo analítico (que pode ser estendido a todo plano complexo) e que todo semigrupo analítico é diferenciável.

5.3.2 Convergência e Propriedades Espectrais

No caso de um espaço de Banach de dimensão finita sabemos que, se o espectro (pontual) de um operador linear A estiver contido à esquerda do eixo imaginário, então $\|T(t)\| = \|e^{At}\|$ decai exponencialmente e certas propriedades de convergência são obtidas. Como de se esperar, este não é necessariamente o caso de espaços de Banach de dimensão infinita (veja um contraexemplo em [61, pg 117]).

O objetivo, nesta seção é obter decaimento exponencial, quando $t \longrightarrow \infty$, da norma de um semigrupo C_0 $T(t) : Y \longrightarrow Y$, onde Y é um espaço de Banach de dimensão infinita. Fazemos isso de duas formas independentes. Na primeira, assumimos uma condição de convergência, qual seja, a de que $\int_0^\infty \|T(t)y\|\, dt < \infty$ para todo $y \in Y$ (i.e., $T(t)y \in L_1(\mathbb{R}^+ : Y)$). Na segunda, assumimos uma condição similar àquela do caso de dimensão finita mencionado acima, qual seja, a de que

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$$

sendo $\mathcal{A}$ o gerador infinitesimal de $T(t)$. Para que esta condição seja de fato eficaz no caso de dimensão infinita, como é no caso de dimensão finita, devemos suplementá-la com outra premissa importante, e. g., a de que o semigrupo $T(t)$ gerado por $\mathcal{A}$ seja analítico.

O lema que se segue é, até certo ponto, uma combinação de resultados de [61] e propicia a equivalência entre a propriedade espectral a que nos referimos acima, convergência e decaimento exponencial em espaços de Banach de dimensão infinita.

Lema 27 *Seja $\mathcal{A} : \mathfrak{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow Y$ o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0 $T(t) : Y \longrightarrow Y$, onde Y é um espaço de Banach, $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$ é o dominio de $\mathcal{A}$ e, para $p \in \mathbb{N}$ arbitrário, consideremos as seguintes afirmativas:*

1. $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$

2. Existem constantes $M \geq 1$ e $\omega > 0$ tais que $\|T(t)\| \leqslant M \exp(-\omega t)$, $t \geq 0$.

3. $\int_0^\infty \|T(t)y\|^p \, dt < \infty$, para todo $y \in Y$.

4. $\int_0^\infty \|T(t)\|^p \, dt < \infty$.

Então 2, 3 e 4 são afirmativas equivalentes e implicam em 1. Caso $T(t)$ seja um semigrupo analítico, todas afirmativas são equivalentes.

Corolário 28 *Supondo a Afirmativa 2 do Lema 27 verdadeira, então $\beta = \frac{M^p}{p\omega}$ (resp. $\beta \|y\|^p$) é uma cota superior para a expressão da Afirmativa 4 (resp. Afirmativa 3).*

5.3.3 Existência, Unicidade e a Caracterização de Solução para o Problema do Valor Inicial em Espaço de Banach

Evidenciamos, nesta seção, a questão de existência e unicidade de solução para o problema do valor inicial em espaço de Banach, bem como a definição do que se entende por solução, contra a qual a condição de existência e unicidade será verificada.

Consideramos inicialmente o problema de achar uma solução para a equação diferencial homogênea

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t), & t > 0 \\ y(0) = y \end{cases} \tag{5.12}$$

com condição inicial $y \in Y$, onde Y é um espaço de Banach e $\mathcal{A}$ é um operador linear (não necessariamente limitado) definido em seu domínio $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset Y$ e a valores em Y. Por solução, definimos a classe das funções contínuas (em $t \geq 0$) e continuamente diferenciáveis (em $t > 0$), a valores em $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) \subset Y$ e satisfazendo (5.12).

Se $\mathcal{A}$ é o operador infinitesimal de um semigrupo C_0 $T(t)$, então (5.12) é satisfeita por uma única função a valores em $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, contínua e continuamente diferenciável, dada por

$$t \to y(t) = T(t)y, \quad t \geq 0 \tag{5.13}$$

para todo valor inicial $y \in \mathfrak{D}(\mathcal{A})$ (vide o Teorema 1.2.4(c) ou a 1^a parte da prova do Teorema 4.1.3 de [61]). Se, por outro lado, $y \in Y$ não pertence a $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, (5.12) não tem, em geral, uma solução, visto que (5.13) pode não ser diferenciável. Nesse caso dizemos que (5.13) é uma solução suave de (5.12) (vide [61, pg 105 and 106]). Vale mencionar que, se uma solução rigorosa existe para (5.12), para todo $y \in Y$, então ela é da forma (5.13) (vide Corolário 2.2 de [61]). No entanto, a existência e unicidade, em geral, não podem ser garantidas para todo $y \in Y$.

Mas se $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável, então (5.12) é de fato satisfeita por uma única função a valores em $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, contínua e continuamente diferenciável, dada por (5.13), para todo valor inicial $y \in Y$ (para verificarmos isso, referimo-nos ao Teorema 4.1.4 de [61] e sua prova esclarecedora).

Estaremos, de fato, interessados num certo operador linear limitado $\mathcal{A} : Y \to Y$, o gerador infinitesimal de um caso especial na classe dos semigrupos diferenciáveis, qual seja, um semigrupo uniformemente contínuo (vide a Seção 5.3.1). Nesse cenário, temos em mãos a propriedade de existência e unicidade de solução *para todo* $y \in Y$ bem como a caracterização de solução por (5.13).

Nota 29 *O lado direito de (5.12) não é bem definido em* $t = 0$ *sempre que o valor inicial* $y \in Y$ *não pertencer a* $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$. *Logo, (5.12) deve ser definido, de fato, para* $t > 0$ *ao invés de* $t \geq 0$. *No caso especial onde* $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = Y$ *tal preocupação é desnecessária (considerando em* $t = 0$ *apenas a derivada à direita). Entretanto, por questões de uniformidade, seguiremos definindo (5.12) para* $t > 0$.

Apresentaremos a seguir duas proposições a serem usadas na Seção 8.

Proposição 30 *Seja* Y *um espaço de Banach e consideremos a equação diferencial homogênea*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t), & t > 0 \\ y(0) = y \end{cases} \tag{5.14}$$

com valor inicial arbitrário $y \in Y$, *onde* $\mathcal{A}: Y \to Y$ *é um operador linear limitado. Então (5.14) é satisfeita por uma única função a valores em* Y, *contínua para* $t \geq 0$ *e continuamente diferenciável para* $t > 0$, *dada por*

$$t \to y(t) = T(t)y \in Y, \quad t \geq 0$$

onde $T(t) : Y \to Y$, $t \geq 0$, *é o semigrupo* C_0 *(de fato um semigrupo uniformemente contínuo) de transformações lineares limitadas geradas por* $\mathcal{A}$, *seu operador infinitesimal.*

Prova. Segue de um resultado fundamental em teoria de semigrupo (vide, por exemplo, [61]). ∎

Proposição 31 *Seja Y um espaço de Banach e, para $T > 0$ finito, consideremos a equação diferencial não homogênea*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + f(t), & 0 < t < T \\ y(0) = y \end{cases} \tag{5.15}$$

com valor inicial arbitrário $y \in Y$, onde $\mathcal{A}$ é um operador linear limitado definido em Y e a valores em Y e $f \in L_1([0,T],Y)$. Então, para todo $y \in Y$, o problema do valor inicial (5.15) tem uma solução, no máximo. Se, para um certo $y \in Y$, (5.15) tem solução, ela é dada por

$$y(t) = T(t)y + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \qquad t \in [0,T]$$

onde $T(t)$ é o semigrupo uniformemente contínuo como definido na proposição acima. Ademais, se $f \in L_1([0,T],Y)$ é continuamente diferenciável, então (5.15) tem, para todo $y \in Y$, uma única solução contínua e continuamente diferenciável em $[0,T]$.

Prova. Vide Corolário 4.2.2 e 4.2.5 de [61]. ∎

Capítulo 6

Aspectos Próprios do Cenário Infinito Enumerável

6.1 Introdução

Este capítulo diz respeito, fundamentalmente, à questões decorrentes do fato de estarmos lidando com um conjunto infinito enumerável para o espaço de estado da cadeia de saltos definida no Capítulo 4. A partir das definições do Capítulo 3, introduzimos, nas três primeiras seções deste capítulo os objetos probabilísticos, operadores e espaços em dimensão infinita, seminais para a solução do caso infinito enumerável.

6.2 Uma Estatística do Processo de Markov $\{x, \theta\}$

As quantidades $E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}]$, $i \in \mathcal{S}$, são fundamentais (e suficientes) para o tratamento adequado da questão de estabilidade (MSS e SS) nesse trabalho. A inclusão da medida de Dirac na estatística de segunda ordem acima resgata a markovianização do processo ($\{x\} \rightsquigarrow \{x, \theta\}$) e nos leva a um certo operador ($\mathcal{D}$) em espaço de Banach de dimensão infinita, central para a solução do problema em horizonte infinito.

Consideramos uma distribuição arbitrária para a condição inicial (x_0, θ_0) do sistema dinâmico homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_{\theta(t)} x(t), & t > 0 \\ x(0) = x_0, \ \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{6.1}$$

com $F=(F_1,F_2,...)\in\mathcal{H}^n_\infty$ e definimos

$$Q(t)=(Q_1(t),\ Q_2(t),...)\in\mathcal{H}_1^{n^+},\ t\geq 0 \tag{6.2}$$

$$\text{onde}\qquad Q_i(t)=E[x(t)x(t)^*1_{\{\theta(t)=i\}}]\in\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+,\quad i\in\mathcal{S} \tag{6.3}$$

Ademais, para todo $H=(H_1,H_2,...)\in\mathcal{H}^n_1$, definimos o operador $\mathcal{D}$ tal que

$$\mathcal{D}(H)=(\mathcal{D}_1(H),\mathcal{D}_2(H),...) \tag{6.4}$$

$$\text{onde}\qquad \mathcal{D}_i(H)=F_iH_i+H_iF_i^*+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ji}H_j,\quad i\in\mathcal{S} \tag{6.5}$$

Proposição 32 $\mathcal{D}\in Blt\,(\mathcal{H}^n_1)$.

Prova. Para todo $H\in\mathcal{H}^n_1$, o operador $\mathcal{D}_i(H)$, $i\in\mathcal{S}$, encontra-se bem definido em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$. De fato, para $N_1<N_2$ e i arbitrário,

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{j=1}^{N_2}\lambda_{ji}H_j-\sum_{j=1}^{N_1}\lambda_{ji}H_j\right\|=\left\|\sum_{j=N_1+1}^{N_2}\lambda_{ji}H_j\right\|\\&\leqslant\sum_{j=N_1+1}^{N_2}|\lambda_{ji}|\,\|H_j\|\leqslant c\sum_{j=N_1+1}^{N_2}\|H_j\|\to 0 \text{ quando } N_1,N_2\ \to\infty.\end{aligned}$$

Logo, $\{\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ji}H_j\}_{N=1,2,...}$ é uma seqüência de Cauchy e conseqüentemente converge no espaço completo $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$. Também, $\mathcal{D}$ é claramente linear. Logo, resta provar que ele é limitado. De (6.4), temos, para todo $H\in\mathcal{H}^n_1$, que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}(H)\|_1&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\|(\mathcal{D}(H))_i\|=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\|\mathcal{D}_i(H)\|\\&\leqslant\lim_{N\to\infty}\lim_{M\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(2\,\|H_i\|\,\|F\|_\infty+\sum_{j=1}^{M}|\lambda_{ji}|\,\|H_j\|\right)\\&=\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left(2\,\|H_i\|\,\|F\|_\infty+\sum_{j=1}^{M}|\lambda_{ji}|\,\|H_j\|\right)\\&=2\,\|F\|_\infty\,\|H\|_1+\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|\lambda_{ji}|\,\|H_j\|\end{aligned}\tag{6.6}$$

Mas, para M fixo,

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|\lambda_{ji}|\,\|H_j\| = \sum_{j=1}^{M}\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|\lambda_{ji}|\,\|H_j\|$$
$$=\sum_{j=1}^{M}\left(\|H_j\|\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}|\lambda_{ji}|\right)=\sum_{j=1}^{M}\|H_j\|\left(|\lambda_{jj}|+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}|\lambda_{ji}|\right)$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{M}\|H_j\|\left(|\lambda_{jj}|+|\lambda_{jj}|\right)=2\sum_{j=1}^{M}\|H_j\|\,|\lambda_{jj}|\leqslant 2c\sum_{j=1}^{M}\|H_j\|$$

Substituindo a equação acima em (6.6) e definindo $C_0{=}2(\|F\|_\infty + c)$, temos então que

$$\|\mathcal{D}(H)\|_1 \leqslant 2\,\|F\|_\infty\,\|H\|_1 + 2c\lim_{M\to\infty}\sum_{j=1}^{M}\|H_j\| = C_0\,\|H\|_1\,.$$

Logo, $\mathcal{D}$ toma valores em $\mathcal{H}_1^n$ e é limitado. ■

Proposição 33 *Para $F \in \mathcal{H}_\infty^n$ arbitrário, considere $x(t)$ dado por (6.1). Então $Q(t)$, $t \geq 0$, como definido em (6.2) e (6.3), pertence a $\mathcal{H}_1^{n+}$ e satisfaz a equação diferencial linear em espaço de Banach*

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \mathcal{D}(Q(t)) & ,\ t > 0 \\ Q(0) = Q^0 \in \mathcal{H}_1^{n+}, & Q_i^0 = E[x_0x_0^*1_{\{\theta_0=i\}}],\ \ i \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{6.7}$$

ou equivalentemente, o seguinte conjunto infinito enumerável de equações diferenciais de Riccati interconectadas

$$\begin{cases} \dot{Q}_i(t) = \mathcal{D}_i(Q(t)) & ,\ t > 0 \\ Q_i(0) = Q_i^0 = E[x_0x_0^*1_{\{\theta_0=i\}}], & i \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{6.8}$$

onde $\mathcal{D}$ é dado por (6.4) e (6.5).

Prova. Temos, de (6.1)-(6.3), que

$$\|Q(t)\|_1$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\|Q_i(t)\| = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|E[x(t)x(t)^*1_{\{\theta(t)=i\}}]\right\|$$
$$\leq\sum_{i=1}^{\infty}E[\|x(t)x(t)^*\|\,1_{\{\theta(t)=i\}}] = E[\sum_{i=1}^{\infty}\|x(t)x(t)^*\|\,1_{\{\theta(t)=i\}}]$$
$$=E[\|x(t)x(t)^*\|]\leq E[\|x(t)\|^2]<\infty \tag{6.9}$$

e que $Q_i(t) \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$, $i \in \mathcal{S}$. Logo $Q(t) \in \mathcal{H}_1^{n+}$, $t \geq 0$. Considerando agora (6.1) e tendo em vista que as trajetórias de $\{x\}$ são absolutamente contínuas, temos a seguinte aproximação linear:

$$x(t+\delta) = x(t) + F_{\theta(t)}x(t)\delta + o^n(\delta), \quad t, \delta \geq 0 \tag{6.10}$$

onde $o^n(\delta)$ é um processo estocástico a valores em $\mathbb{C}^n$, tal que, com probabilidade 1, as afirmações constantes da Seção 3, referentes à funções o^n, valem.

Mais explicitamente, (6.1) $\Rightarrow \int_t^{t+\delta} \dot{x}(s)ds = \int_t^{t+\delta} F_{\theta(s)}x(s)ds \Rightarrow x(t+\delta) - x(t) = \int_t^{t+\delta} F_{\theta(s)}x(s)ds \Rightarrow$ (6.10). Nestas expressões as integrais são de Riemann, a segunda implicação vem do teorema fundamental do cálculo e a última implicação se justifica pelo decaimento quadrático da integral quando $\delta \to 0$ (o Lema 66 do Apêndice provê uma prova mais detalhada, enfocando a natureza da equação diferencial (6.1)). Agora,

$$\begin{aligned} &E[\{F_{\theta(t)}x(t)x(t)^*F^*_{\theta(t)}\delta^2 + \left(x(t) + F_{\theta(t)}x(t)\delta\right) o^n(\delta)^* \\ &+ o^n\left(\delta\right)\left(x(t) + F_{\theta(t)}x(t)\delta + o^n(\delta)\right)^*\}1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}] \end{aligned}$$

é uma função $o^{nn}(\delta)$. Definindo

$$z = z(x(t), \theta(t), \delta) = x(t)x(t)^* + x(t)x(t)^*F^*_{\theta(t)}\delta + F_{\theta(t)}x(t)x(t)^*\delta$$

podemos escrever, para $j \in \mathcal{S}$ fixo e arbitrário, que

$$Q_j(t+\delta) = E[x(t+\delta)x(t+\delta)^*1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}] = E[z\ 1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}] + o^{nn}(\delta). \tag{6.11}$$

No desenvolvimento da expressão abaixo, definimos $C_i(t) = Q_i(t)F_i^* + F_iQ_i(t)$, usamos Fubini ($2^a$ igualdade), o fato de que $f(x)1_{\{x=i\}} = f(i)1_{\{x=i\}}$ para qualquer variável x e funcional f (6^a igualdade) e a expressão (4.2) para a matriz de probabilidade de transição (9^aigualdade), onde simplificamos a notação com $o_i(\cdot) \equiv o_{ij}(\cdot)$, $i \in \mathcal{S}$.

$$\begin{aligned} &E[z1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}] \\ &= E[z1_{\{\theta(t+\delta)=j\}} \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} 1_{\{\theta(t)=i\}}] \end{aligned}$$

$$= \lim_{M\to\infty} E[\sum_{i=1}^{M} z1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}1_{\{\theta(t)=i\}}]$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} EE_{x(t),\theta(t)}[z1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}1_{\{\theta(t)=i\}}]$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} E[z1_{\{\theta(t)=i\}}E_{x(t),\theta(t)}[1_{\{\theta(t+\delta)=j\}}]]$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} E[\{x(t)x(t)^* + x(t)x(t)^*F_{\theta(t)}^*\delta$$
$$+ F_{\theta(t)}x(t)x(t)^*\delta\}1_{\{\theta(t)=i\}}P_\delta(\theta(t),j)]$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} E[\{x(t)x(t)^* + x(t)x(t)^*F_i^*\delta + F_ix(t)x(t)^*\delta\}1_{\{\theta(t)=i\}}P_\delta(i,j)]$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} P_\delta(i,j)\{E[x(t)x(t)^*1_{\{\theta(t)=i\}}]$$

$$+ E[x(t)x(t)^*1_{\{\theta(t)=i\}}]F_i^*\delta + F_iE[x(t)x(t)^*1_{\{\theta(t)=i\}}]\delta\}$$
$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} P_\delta(i,j)\{Q_i(t) + Q_i(t)F_i^*\delta + F_iQ_i(t)\delta\}$$
$$= (1 + \lambda_{jj}\delta + o_j(\delta))\,(Q_j(t) + \mathcal{C}_j(t)\delta)$$
$$+ \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1,i\neq j}^{M} (\lambda_{ij}\delta + o_i(\delta))(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)$$
$$= Q_j(t) + \mathcal{C}_j(t)\delta + \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M}(\lambda_{ij}\delta + o_i(\delta))(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta) \tag{6.12}$$

Logo, de (6.11) e (6.12) vem que

$$Q_j(t+\delta) - Q_j(t) = o^{nn}(\delta) + \mathcal{C}_j(t)\delta + \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M}(\lambda_{ij}\delta + o_i(\delta))(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)$$

Dividindo por δ e passando ao limite, temos

$$\frac{d^+Q_j(t)}{dt} = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{Q_j(t+\delta) - Q_j(t)}{\delta}$$
$$= \mathcal{C}_j(t) + \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M}(\lambda_{ij} + \frac{o_i(\delta)}{\delta})(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)$$
$$= \mathcal{C}_j(t) + \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} \lambda_{ij}Q_i(t) + \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M}\{\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)\} \tag{6.13}$$

Agora, para $o_i(\delta)$ dado por (4.2), temos que $|o_i(\delta)| \leqslant 1$, $\delta \in (0, \frac{1}{c})$, $i \in \mathcal{S}$, onde c é um limite superior de $-\lambda_{ii}$. Logo $\{\sum_{i=1}^{M} (\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta))\}_{M\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy para todo $\delta \in (0, \frac{1}{c})$ (vide Lema 67 do Apêndice). Como $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ é completo, a seqüência acima converge. Ademais, definindo $f(\delta) = \sup_{i\in\mathcal{S}} |o_i(\delta)|$ e sabendo que $\|\mathcal{C}_i(t)\| \leqslant 2\|Q_i(t)\| . \|F\|_\infty$ e $Q(t) \in \mathcal{H}_1^n$, vem que

$$\begin{aligned}
&\left\| \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} \{\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)\} \right\| \\
&= \lim_{M\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{M} \{\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)\} \right\| \\
&\leqslant \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} \{2c\delta \|F\|_\infty \|Q_i(t)\| + \frac{f(\delta)}{\delta}(\|Q_i(t)\| + 2\delta\|F\|_\infty \|Q_i(t)\|)\} \\
&= \{2c\|F\|_\infty \delta + \frac{f(\delta)}{\delta} + 2\|F\|_\infty f(\delta)\} \|Q(t)\|_1 \\
&= \{2c\|F\|_\infty \delta + \frac{o(\delta)}{\delta} + 2\|F\|_\infty o(1)\} \|Q(t)\|_1 \to 0 \text{ as } \delta \to 0,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $f(\delta)$ é uma função $o(\delta)$. Logo, (6.13) se expressa por

$$\frac{d^+Q_j(t)}{dt} = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{Q_j(t+\delta) - Q_j(t)}{\delta} = \mathcal{C}_j(t) + \lim_{M\to\infty} \sum_{i=1}^{M} \lambda_{ij} Q_i(t) = \mathcal{D}_j(Q(t))$$

para $t > 0$ e $j \in \mathcal{S}$, ou equivalentemente,

$$\frac{d^+Q(t)}{dt} = \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{Q(t+\delta) - Q(t)}{\delta} = \mathcal{D}(Q(t)), \quad t > 0 \tag{6.14}$$

A equivalência acima é justificada com base no mesmo tipo de argumento constante da Nota 38 adiante.

Agora, como $\mathcal{D}$ é uma transformação linear limitada, ela é o gerador infinitesimal de um semigrupo C_0. Nesse caso, uma vez que $Q(t)$ satisfaz (6.14), $Q(t)$ satisfaz a versão dessa equação onde tomamos a derivada à esquerda, i.e., $\frac{d^-}{dt}$ (vide prova do Teorema 1.2.4 de [61]). Conseqüentemente, $Q(t)$, dada por (6.2) e (6.3), satisfaz

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \lim_{\delta\to 0} \frac{Q(t+\delta) - Q(t)}{\delta} = \mathcal{D}(Q(t)), \quad t > 0$$

com condição inicial $Q(0) = Q^0 = (Q_1^0, Q_2^0, ...) \in \mathcal{H}_1^{n^+}$, $Q_i^0 = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}]$, $i \in \mathcal{S}$.

■

6.3 Propriedades do Espaço $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$

Prosseguimos, nesta seção, com um resultado auxiliar referente ao espaço $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ definido na Seção 3. O espaço $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ suporta as soluções de uma certa equação diferencial em dimensão infinita que aparece na prova da Proposição 39.

Proposição 34 *Para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{W}_{\infty}^{q,m}$ e $\mathcal{B} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n,q}$ temos que a multiplicação matricial $\mathcal{AB} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n,m}$ e $\|\mathcal{AB}\|_{\mathcal{W}_{\infty}} \leqslant \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{W}_{\infty}} \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$.*

Prova. Cada entrada de A_iB_i é bem definida, $\mathcal{AB} = diag(A_iB_i)$ e $\|\mathcal{AB}\|_{\mathcal{W}_{\infty}} = \|diag\,(A_iB_i)\|_{\mathcal{W}_{\infty}} \leqslant \sup_{i\in\mathcal{S}} \|A_i\| \sup_{i\in\mathcal{S}} \|B_i\| = \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{W}_{\infty}} \|\mathcal{B}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$. ■

Podemos visualizar $\mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ como uma classe de operadores definidos em $\mathcal{W}_{\infty}^{m,q}$ e a valores em $\mathcal{W}_{\infty}^{q,n}$ tais que $\mathcal{C}(W) = \mathcal{C}W$, $W \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,q}$. Temos então a seguinte

Proposição 35 *$\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,n}$ implica em $\mathcal{C} \in Blt\,(\mathcal{W}_{\infty}^{m,q}, \mathcal{W}_{\infty}^{q,n})$ e $\|\mathcal{C}\| \leqslant \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$, onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida de $Blt\,(\mathcal{W}_{\infty}^{m,q}, \mathcal{W}_{\infty}^{q,n})$. Se $n = m = q$, então $\|\mathcal{C}\| = \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$.*

Prova. $\mathcal{C}$ é linear e, pela Proposição 34, $\mathcal{C}W \in \mathcal{W}_{\infty}^{q,n}$ e $\|\mathcal{C}W\|_{\mathcal{W}_{\infty}} \leqslant \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_{\infty}} \|W\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$ para todo $W \in \mathcal{W}_{\infty}^{m,q}$. Mas $\|\mathcal{C}\|$ é a menor constante que valida a desigualdade acima. Agora, para $n = m = q$, $\|\mathcal{C}\| = \sup_{W\in\mathcal{W}_{\infty}^{n}} \left\{ \frac{\|\mathcal{C}W\|_{\mathcal{W}_{\infty}}}{\|W\|_{\mathcal{W}_{\infty}}} \right\} \geq \frac{\|\mathcal{C}\bar{I}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}}{\|\bar{I}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}} = \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$ onde $\bar{I} = diag\,(I) \in \mathcal{W}_{\infty}^{n}$, I o operador identidade em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$. ■

Nota 36 *É interessante observar que $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$ pode também ser visualizado como uma classe de operadores definida no espaço de Hilbert $(l_2, \|\cdot\|_2)$. Nesse caso, $\mathcal{C} \in \mathcal{W}_{\infty}^{n}$ implica em $\mathcal{C} \in Blt\,(l_2)$ e $\|\mathcal{C}\| \leqslant \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_{\infty}}$. Além disso, $\mathcal{C}^*$ definido em (3.2) coincide com o operador adjunto de $\mathcal{C} = diag(C_i) \in Blt(l_2)$. Supondo ainda que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ pertençam a $\mathcal{W}_{\infty}^{n+}$, temos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, vistos como operadores em $Blt\,(l_2)$, são semidefinidos positivos e $\mathcal{B} \leqslant \mathcal{C}$ se e somente se $B_i \leqslant C_i$, $i \in \mathcal{S}$. A justificativa para estas afirmações encontra-se na Seção 11.5 do Apêndice.*

6.4 A Equação Diferencial de Riccati em Espaço de Banach

Para $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$ arbitrário, definimos os operadores lineares $\mathcal{E}(H) = (\mathcal{E}_1(H), \mathcal{E}_2(H), ...)$ e $\mathcal{G}(H) = (\mathcal{G}_1(H), \mathcal{G}_2(H), ...)$, bem como o operador não linear

$\mathcal{T}(H) = (\mathcal{T}_1(H), \mathcal{T}_2(H), ...)$ tais que, para cada $i \in \mathcal{S}$,

$$\mathcal{E}_i(H) = \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j, \tag{6.15}$$

$$\mathcal{G}_i(H) = \mathcal{R}^{-1} B_i^* H_i \tag{6.16}$$

e

$$\mathcal{T}_i(H) = \mathcal{Q} + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i \mathcal{R}^{-1} B_i^* H_i + \lambda_{ii} H_i + \mathcal{E}_i(H) \tag{6.17}$$

Proposição 37 *O operador $\mathcal{E}$ mapeia $\mathcal{H}_\infty^n$, $\mathcal{H}_\infty^{n*}$ e $\mathcal{H}_\infty^{n+}$ em $\mathcal{H}_\infty^n$, $\mathcal{H}_\infty^{n*}$ e $\mathcal{H}_\infty^{n+}$ respectivamente, $\mathcal{T}$ mapeia $\mathcal{H}_\infty^n$ e $\mathcal{H}_\infty^{n*}$ em $\mathcal{H}_\infty^n$ e $\mathcal{H}_\infty^{n*}$ respectivamente e $\mathcal{G}$ mapeia $\mathcal{H}_\infty^n$ em $\mathcal{H}_\infty^{n,m}$.*

Prova. Como $\{\theta\}$ é conservativo, temos, para $H \in \mathcal{H}_\infty^n$ e $M_2 > M_1$, que $\left\| \sum_{j=M_1, j\neq i}^{M_2} \lambda_{ij} H_j \right\| \leq \|H\|_\infty \sum_{j=M_1, j\neq i}^{M_2} |\lambda_{ij}| \to 0$ quando M_1,$M_2 \to \infty$. Logo, $\{\sum_{j=1, j\neq i}^{M} \lambda_{ij} H_j\}_{M\in\mathbb{N}}$ é Cauchy e portanto converge quando $M \to \infty$ no espaço completo $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$. Ou seja, $\mathcal{E}_i(\cdot)$ é bem definido para todo $i \in \mathcal{S}$. Agora,

$$\|\mathcal{E}_i(H)\| = \left\| \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j \right\| \leq \|H\|_\infty \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} |\lambda_{ij}| = \|H\|_\infty |\lambda_{ii}| \leq \|H\|_\infty c$$

Logo, $\|\mathcal{E}_i(H)\|$ é uniformemente limitado em i, i.e., $\mathcal{E}(H) \in \mathcal{H}_\infty^n$. Como A, B e H também pertencem a $\mathcal{H}_\infty^n$, segue-se, tomando a norma em ambos lados de (6.17), que $\mathcal{T}(H) \in \mathcal{H}_\infty^n$. Ademais, é imediato verificar que $\mathcal{E}_i(H)^* = \mathcal{E}_i(H)$ e $\mathcal{T}_i(H)^* = \mathcal{T}_i(H)$ se $H = H^*$e, uma vez que $\lambda_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, $\mathcal{E}(H) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ se $H \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. Finalmente, de (6.16), $\|\mathcal{G}_i(H)\| \leq \|R^{-1}\| \|B_i\| \|H_i\| \leq \|R^{-1}\| \|B\|_\infty \|H\|_\infty$, $i \in \mathcal{S}$, de modo que $\mathcal{G}(H) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$. ■

Fixamos arbitrariamente $0 \leqslant s < T < \infty$ e $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e definimos, a partir dos operadores $\mathcal{T}$, $\mathcal{E}$ and $\mathcal{G}$, a equação diferencial de Riccati em espaço de Banach

$$\begin{cases} \dot{S}^T(t) + \mathcal{T}(S^T(t)) = 0, & t \in (s,T) \\ S^T(T) = L \end{cases} \tag{6.18}$$

onde

$$S^T(t) = (S_1^T(t), S_2^T(t), ...) \tag{6.19}$$

Equivalentemente, a equação (6.18) pode ser escrita como o seguinte conjunto de equações diferenciais de Riccati interconectadas:

$$\begin{cases} \dot{S}_i^T(t) + \mathcal{T}_i(S^T(t)) = 0, & t \in (s,T) \\ S_i^T(T) = L_i, & i \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{6.20}$$

Nota 38 *Embora à primeira vista possa aparentar que a equivalência acima seja uma tautologia, ela depende da coincidência da norma induzida por* $\{\mathcal{H}_{\infty}^{n}, \|\cdot\|_{\infty}\}$ *no subespaço linear* $\{(0, ..., 0, H, 0, 0, ...), H \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)\}$ *com a norma usual* $\|\cdot\|$ *de* $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ *((6.18)* $\Rightarrow$ *(6.20)) e do fato de que* $(\dot{S}_1^T(t), \dot{S}_2^T(t), ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$ *((6.20)* $\Rightarrow$ *(6.18)) (para mais informações sobre o assunto, vide [58]). Para ver que* $(\dot{S}_1^T(t), \dot{S}_2^T(t), ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$*, notemos que, para* $S^T(t) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$*, temos, da Proposição 37 e da definição de* $\mathcal{T}$*, que* $\mathcal{T}(S^T(t) = (\mathcal{T}_1(S^T(t)), \mathcal{T}_2(S^T(t)), ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$*. Isto e (6.20) propiciam* $(\dot{S}_1^T(t), \dot{S}_2^T(t), ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n}$*.*

Mostramos, na proposição abaixo, que a solução para a equação diferencial de Riccati dada por (6.18) existe e é unica. A prova segue um curso paralelo ao desenvolvido por Wonham [68], devidamente estendido ao caso de espaços de Banach de dimensão infinita, mais explicitamente, o espaço $\mathcal{W}_{\infty}^{n}$ definido na Seção 3. Apesar disso, alguns recursos tiveram que ser criados, em conjunção à utilização de resultados da teoria de semigrupo e sistemas de evolução, face às características próprias das equações de Riccati envolvidas.

Proposição 39 *Dados* $0 \leqslant s < T < \infty$*, seja a equação de Riccati dada por (6.18) com condição terminal arbitrária* $L \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$*. Então existe uma função* $S^T(\cdot) : [s, T] \to \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$*, contínua e continuamente diferenciável, que satisfaz (6.18). Ademais, esta solução é única (na classe de soluções que exibem tais propriedades).*

Prova. Vide Seção 11.6 do Apêndice. ∎

Capítulo 7

O Problema em Horizonte Finito

7.1 Introdução

Obtemos a solução do caso em horizonte finito via caracterização do processo de Markov $\{x, \theta\}$ por seu gerador infinitesimal.

Um ponto peculiar, advindo do fato de estarmos lidando com um espaço de estado infinito enumerável, é que a operação de diferenciação, que aparece no desenvolvimento de uma expressão para o gerador infinitesimal, deve ser aplicada a certas decomplexificações ${}^{\mathrm{R}}g$ ao invés das funções originais associadas g (vide Proposição 41).

Obtemos a solução ótima para o problema em horizonte finito a partir da solução de um conjunto infinito enumerável de equações diferenciais de Riccati interconectadas ou seja, a partir da solução de uma equação diferencial de Riccati em espaço de Banach de dimensão infinita.

7.2 Caracterização via Semigrupo do Processo de Markov $\{x, \theta\}$

Da dinâmica (4.1) e demais informações constantes da Seção 4, temos que $\{x(t), \theta(t)\}_{t\in[s,T]}$ é um processo de Markov evoluindo em ($\mathbb{C}^n$,$\mathcal{S}$) com trajetórias contínuas à direita. A partir desse fato e tendo em mente um argumento de ([2, pg. 37]), temos que $\{x(t), \theta(t)\}_{t\in[s,T]}$ exibe uma probabilidade de transição estocasticamente contínua, sendo portanto caracterizada de forma única por seu gerador infinitesimal, como se segue.

Definimos $\mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $\mathcal{X} = ([s,T] \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{S})$, como sendo o espaço de Banach de todas as funções g mensuráveis limitadas, definidas em $\mathcal{X}$ e a valores nos reais, equipado com a norma $\|g\| := \sup\{|g(z)| : z \in \mathcal{X}\}$. O semigrupo de operadores lineares $T(h) : \mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R}) \to \mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, $h \in [0, T-t]$ que caracteriza o processo $\{x(t), \theta(t)\}_{t \in [s,T]}$, é dado por

$$(T(h)g)(t, x(t), \theta(t)) := E_{x(t),\theta(t)}[g(t+h, x(t+h), \theta(t+h))] \tag{7.1}$$

para todo $(t, x(t), \theta(t)) \in \mathcal{X}$.

Denominamos gerador infinitesimal de uma família de probabilidades de transição de um processo Markov $\{x(t), \theta(t)\}_{t \in [s,T]}$, o operador $\mathcal{L} : \mathfrak{D}(\mathcal{L}) \mapsto \mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$, tal que

$$\begin{aligned} &(\mathcal{L}g)(t, x(t), \theta(t)) \\ &= (\lim_{h \downarrow 0} \frac{(T(h)g)(t, x(t), \theta(t)) - (T(0)g)(t, x(t), \theta(t))}{h}) \end{aligned} \tag{7.2}$$

para todo $(t, x(t), \theta(t)) \in \mathcal{X}$ e $g \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$, onde $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ é o conjunto de funções $g \in \mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ para o qual o limite acima existe. Por sua vez, a fórmula de Dynkin se escreve (vide [44])

$$\begin{aligned} &g(s, x(s), \theta(s)) - E_{x(s),\theta(s)}[g(t, x(t), \theta(t)] \\ &= E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^t -(\mathcal{L}g)(r, x(r), \theta(r))dr] \end{aligned} \tag{7.3}$$

para todo $g \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$ (a integral e expectâncias acima são finitas, tendo em vista que todos termos de (7.3) são mensuráveis e limitados).

Com base no conceito de decomplexificação na Seção 3, obtemos abaixo uma expressão específica para o gerador infinitesimal do processo de Markov $\{x(t), \theta(t)\}_{t \in [s,T]}$. Para tal , iniciemos com a seguinte

Proposição 40 *Seja g:$\mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ limitada e contínua. Então*

$$\lim_{h \downarrow 0} (T(h)g)(t, x(t), \theta(t)) = g(t, x(t), \theta(t)) \tag{7.4}$$

Prova. Vide [42], mutatis mutandis. ■

Definimos $C_b^{1,\mathrm{R}}(\mathcal{X})$ como sendo o conjunto de todas as funções $g \in \mathbb{B}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ tais que, para cada $i \in \mathcal{S}$, a decomplexificação ${}^{\mathrm{R}}g$ seja (Fréchet)-continuamente diferenciável nas variáveis $t \in (s,T)$ e ${}^{\mathrm{R}}x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Proposição 41 *Consideremos o sistema (4.1) com* $u \in \mathcal{U}^{s,T}$ *e seja* $g \in C_b^{1,\mathrm{R}}(\mathcal{X})$. *Então* $g \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$ *e o operador infinitesimal (7.2) se lê como*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) &= \frac{\partial}{\partial t} g(t, x(t), \theta(t)) \\ &+ \nabla_{R_x}{}^{\mathrm{R}} g(t,{}^{\mathrm{R}} x(t), \theta(t))' \, {}^{\mathrm{R}}(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t)) \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} g(t, x(t), j) \lambda_{\theta(t)j}\end{aligned} \tag{7.5}$$

para todo $(t, x(t), \theta(t)) \in ((s,T) \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{S})$.

Prova. Vide Seção 11.7 do Apêndice. ■

Nota 42 $\mathfrak{D}(\mathcal{L})$ *corresponde, de fato, ao conjunto* $C_b^{1,\mathrm{R}}(\mathcal{X})$ *(veja [1, pg. 38]).*

Seja $\mathcal{X}_o = ((s,T) \times X_o \times \mathcal{S})$, onde X_o é um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{C}^n$, tomado arbitrariamente. Definimos $C^{1,\mathrm{R}}(\mathcal{X}_o)$ como sendo o conjunto de todas as funções g mensuráveis, a valores nos reais, definidas em $\bar{\mathcal{X}}_o$ (o fecho de $\mathcal{X}_o$) e tais que, para cada $i \in \mathcal{S}$, a decomplexificação ${}^{\mathrm{R}}g$ seja (Fréchet)-continuamente diferenciável nas variáveis $t \in (s,T)$ e ${}^{\mathrm{R}}x \in {}^{\mathrm{R}}X_o$. Nesse caso, *mutatis mutandis* o Lema 5.1, Capítulo V de [31], temos que a integral e expectâncias nas equações acima são finitas, de modo que a fórmula de Dynkin (7.3) pode ser aplicada. Seja então a

Proposição 43 *Consideremos* $g \in C^{1,\mathrm{R}}(\mathcal{X}_o)$ *tal que*

$$g(t, x, i) = x^* S_i^T(t) x \tag{7.6}$$

onde $t \mapsto S^T(t) = (S_1^T(t), S_2^T(t) \ldots) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *satisfaz a equação diferencial de Riccati em espaço de Banach (6.18) com condição terminal* $S^T(T) = L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. *Então, considerando o sistema (4.1) com* $u \in \mathcal{U}^{s,T}$, *o operador infinitesimal* $\mathcal{L}^u$ *é dado por*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) &= x(t)^* \{ \dot{S}_{\theta(t)}^T(t) + A_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}^T(t) + S_{\theta(t)}^T(t) A_{\theta(t)} \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\theta(t)j} S_j^T(t) \} x(t) + u(t)^* B_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}^T(t) x(t) + x(t)^* S_{\theta(t)}^T(t) B_{\theta(t)} u(t)\end{aligned} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}&= x(t)^* \{ -\mathcal{Q} + S_{\theta(t)}^T(t) B_{\theta(t)} \mathcal{R}^{-1} B_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}^T(t) \} x(t) \\ &+ u(t)^* B_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}^T(t) x(t) + x(t)^* S_{\theta(t)}^T(t) B_{\theta(t)} u(t)\end{aligned} \tag{7.8}$$

para todo $(t, x(t), \theta(t)) \in ((s,T) \times X_o \times \mathcal{S})$. *Mais ainda, a fórmula de Dynkin (7.3) se escreve*

$$
\begin{aligned}
& x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s) - E_{x(s),\theta(s)}[x(t)^* S^T_{\theta(t)}(t)x(t)] \\
& = E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^t x(r)^* \mathcal{Q} x(r) - x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} \mathcal{R}^{-1} B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) \\
& - u(r)^* B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) - x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} u(r) dr]
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Prova. Vide Seção 11.8 do Apêndice. ∎

Proposição 44 *O resultado acima vale igualmente se considerarmos g definido em todo o domínio $\mathcal{X}$.*

Prova. Temos que g satisfaz trivialmente a condição de crescimento polinomial, qual seja, $\|g(t,x,i)\| \leqslant c_1(1 + \|x\|^k)$ para todo $(t,x,i) \in \mathcal{X}$ e certas constantes c_1 e k. Notemos igualmente que g, com $S^T(t)$ dado conforme (6.18), é contínua em $\bar{\mathcal{X}}_o$. Estes fatos, bem como o Lema 71 do Apêndice, atendem as condições dadas no Teorema 5.1, Capítulo V de [31], de modo que, paralelamente à prova deste teorema, (7.3) pode ser aplicada (i.e., a integral e expectâncias existem). Logo, a proposição segue. ∎

7.3 Custo de uma Política Admissível e a Solução Ótima

Derivamos a expressão de custo para uma política arbitrária $u \in \mathcal{U}^{s,T}$ e a solução ótima.

Proposição 45 *Para $u \in \mathcal{U}^{s,T}$ arbitrário, o custo definido em (4.4) se expressa por*

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) \\
& = E[x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s) + \int_s^T \left\| B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r)x(r) + \mathcal{R}u(r) \right\|^2_{\mathcal{R}^{-1}} dr]
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

onde $S^T(r) \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$ é solução (única) de (6.18).

Prova. De (4.4) temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) &= E[E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^T (x(r)^* \mathcal{Q} x(r) + u(r)^* \mathcal{R} u(r)) dr] \\
&\quad + E_{x(s),\theta(s)}[x(T)^* L_{\theta(T)} x(T)]]
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Agora, considerando a Proposição 43 e o Corolário 44 e tomando $t = T$ na fórmula de Dynkin (7.9), obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) \\
&= E[E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^T (x(r)^* \mathcal{Q} x(r) + u(r)^* \mathcal{R} u(r))dr] \\
&+ x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s) + E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^T (-x(r)^* \mathcal{Q} x(r) \\
&+ x(r)^* S^T_{\theta(r)}(t) B_{\theta(r)} \mathcal{R}^{-1} B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) \\
&+ u(r)^* B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) + x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} u(r))dr]] \\
&= E[x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s) + E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^T (u(r)^* \mathcal{R} u(r) \\
&+ x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} \mathcal{R}^{-1} B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) \\
&+ u(r)^* B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) + x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} u(r))dr]].
\end{aligned} \tag{7.12}
$$

Tendo em vista que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^*$, o integrando na expressão acima se escreve

$$
\begin{aligned}
&u(r)^* \mathcal{R}^* \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} u(r) + x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} \mathcal{R}^{-1} B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) \\
&+ (\mathcal{R} u(r))^* \mathcal{R}^{-1} B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(t)}(r) x(r) + x(r)^* S^T_{\theta(r)}(r) B_{\theta(r)} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{R} u(r)
\end{aligned}
$$

Definindo $y = B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r)$ e $w = \mathcal{R} u(r)$, a expressão acima resulta em

$$
\begin{aligned}
&w^* \mathcal{R}^{-1} w + y^* \mathcal{R}^{-1} y + w^* \mathcal{R}^{-1} y + y^* \mathcal{R}^{-1} w \\
&= (y+w)^* \mathcal{R}^{-1} (y+w) = \|y+w\|^2_{\mathcal{R}^{-1}} \\
&= \left\| B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) + \mathcal{R} u(r) \right\|^2_{\mathcal{R}^{-1}}.
\end{aligned}
$$

Procedendo à substituição em (7.12) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) \\
&= E[x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s) + E_{x(s),\theta(s)}[\int_s^T \left\| B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) + \mathcal{R} u(r) \right\|^2_{\mathcal{R}^{-1}} dr]] \\
&= E[x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s) + \int_s^T \left\| B^*_{\theta(r)} S^T_{\theta(r)}(r) x(r) + \mathcal{R} u(r) \right\|^2_{\mathcal{R}^{-1}} dr]
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

■

Nota 46 *Ao invés da Proposição 44, poderíamos usar somente a Proposição 43 na dedução de (7.12), tendo em vista que o processo $\{x\}$ satisfaz a equação diferencial (4.1) com $u \in \mathcal{U}^{s,T}$ e que, para cada $k > 0$, $E[\|x(r)\|^k]$ é uniformemente limitada em $s \leqslant r \leqslant T$ (mutatis mutandi [31, pg 156]).*

Proposição 47 *O controle ótimo na classe admissível* $\mathcal{U}^{s,T}$ *é dado por*

$$\hat{u}^T(t) = -G^T_{\theta(t)}(t)x(t) \tag{7.14}$$

onde $G^T(t) = (G^T_1(t), G^T_2(t), ...) = \mathcal{G}(S^T(t)) \in \mathcal{H}^{n,m}_\infty$ $(G^T_i(t) = \mathcal{R}^{-1}B^*_i S^T_i(t))$ *com* $S^T(t) \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$ *(unicamente) satisfazendo (6.18). Mais ainda, o custo mínimo se lê:*

$$\mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, \hat{u}^T) = \min_{u \in \mathcal{U}^{s,T}} \mathcal{J}_{[s,T],L}(\vartheta_s, u) = E[x(s)^* S^T_{\theta(s)}(s)x(s)] \tag{7.15}$$

Prova. O segundo termo de (7.13) é não negativo para todo $u \in \mathcal{U}^{s,T}$ e zero para $\hat{u}$. ■

Capítulo 8

O Problema em Horizonte Infinito

8.1 Introdução

Paralelamente ao que ocorre no caso clássico LQ, a questão de existência e unicidade de soluções para um certo conjunto infinito enumerável de equações de Riccati algébricas interconectadas (ICARE) está estreitamente ligada à solução de otimalidade para o problema em horizonte infinito, como sintetizado no Teorema 61 da Seção 8.6.

A condição de existência e unicidade de soluções para a ICARE é uma condição suficiente à otimalidade. Ela ocorre sempre que certas premissas estruturais para o problema, quais sejam, estabilizabilidade estocástica e detetabilidde estocástica (Seção 8.2), forem assumidas.

A Seção 8.5 organiza as idéias que conectam os conceitos SS e SD, à questão de existência e unicidade de soluções para a ICARE e à solução de otimalidade.

Um recurso fundamental (Seção 8.4) para os desenvolvimentos das Seções 8.5 e 8.6 é o resultado que associa, via teoria de semigrupo, os conceitos SS e SD a uma certa propriedade espectral do operador $\mathcal{D}$, um operador linear em espaço de Banach de dimensão infinita.

Na Seção 8.3, através do contraexemplo, mostramos que o conceito de estabilizabilidade na média quadrática (MSS) não é mais equivalente ao conceito SS, à luz de um conjunto infinito enumerável para o MJLS. Assim, diferentemente do caso de um conjunto finito para a cadeia de Markov, os desenvolvimentos e resultados encontrados neste trabalho podem não se reestabelecer, caso adotemos o conceito

MSS ao invés da condição SS.

8.2 Estabilizabilidade Estocástica (SS) e Detetabilidade Estocástica (SD)

Quando lidamos com o caso de horizonte infinito, quer na abordagem do problema de controle ótimo estocástico definido no Capítulo 4, quer no estudo de estabilidade em termos das equações de Lyapunov (Capítulo 9), dois conceitos estruturais são básicos, quais sejam, os de *estabilizabilidade estocástica* e *detetabilidade estocástica*:

Definição 48 (Estabilizabilidade estocástica) *Dizemos que o sistema* (A, B, Λ) *é estocasticamente estabilizável (SS) se existe* $G \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,m}$ *tal que, para qualquer distribuição inicial conjunta* ϑ_0*,*

$$\int_0^{\infty} E[\|x(t)\|^2]dt < \infty \tag{8.1}$$

onde $x(t)$ *é dado por (4.1) com* $t > 0$ *e* $u(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$*, i.e.,*

$$\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t), \quad t > 0 \tag{8.2}$$

com $F_{\theta(t)} = A_{\theta(t)} - B_{\theta(t)}G_{\theta(t)}$*. Nesse caso dizemos que (8.2) é estocasticamente estável e* G *estabiliza* (A, B, Λ)*.*

Definição 49 (Detetabilidade estocástica) *Considere* $C = (C_1, C_2, ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n,r}$*. Dizemos que o sistema* (C, A, Λ) *é estocasticamente detetável (SD) se existe* $K \in \mathcal{H}_{\infty}^{r,n}$ *tal que, para qualquer distribuição inicial conjunta* ϑ_0*,*

$$\int_0^{\infty} E[\|x(t)\|^2]dt < \infty \tag{8.3}$$

onde $x(t)$ *é dado por*

$$\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t), \quad t > 0 \tag{8.4}$$

com $F_{\theta(t)} = A_{\theta(t)} - K_{\theta(t)}C_{\theta(t)}$*.*

Nota 50 *O sistema* (C, A, Λ) *se refere a*

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = A_{\theta(t)}r(t), \quad t > 0 \\ y(t) = C_{\theta(t)}r(t) \\ r(0) = x_0, \theta(0) = \theta_0 \end{cases} \tag{8.5}$$

e $x(t)$*, dado por (8.4), designa o erro de uma estimativa linear de* $r(t)$ *com base em* K*. Dizemos então que essa estimativa deteta* $r(\cdot)$ *no sentido de (8.3) e que* K *torna* (C, A, Λ) *detetável.*

8.3 SS versus MSS: Um Contraexemplo

Podemos identificar duas versões importantes do conceito de estabilidade no cenário de sistemas dinâmicos, quais sejam, a de estabilidade estocástica definida na seção precedente e a de estabilidade na média quadrática, no sentido de que $\lim_{t\to\infty} E[\|x(t)\|^2] = 0$ para qualquer distribuição conjunta da condição inicial (x_0, θ_0).

Foi demonstrado em [30], que estas versões são equivalentes no caso de espaços de estado finitos para a cadeia de Markov associada ao MJLS. Nesta seção, mostramos que tais versões não são mais equivalentes quando consideramos um conjunto infinito enumerável para a cadeia de saltos [36]. Para isto, procedemos à construção de um contraexemplo: uma versão escalar, em horizonte infinito, da equação diferencial incerta (4.1) com $u \equiv 0$, onde denotamos $-b_{\theta(t)} = A_{\theta(t)}$ e assumimos $\{\theta\}$ um processo de Poisson com parâmetro λ. Obtemos então a dinâmica

$$\dot{x}(t) = -b_{\theta(t)}x(t), \quad t \geq 0 \tag{8.6}$$

onde a matriz infinitesimal de $\{\theta\}$ é dada por $\Lambda = [\lambda_{ij}]$, com $-\lambda_{ii} = \lambda_{i\,i+1} = \lambda > 0$ e $\lambda_{ij} = 0$ para $i, j \in \mathcal{S}$, $j \neq i$, $j \neq i+1$. Especificamos ainda os parâmetros do modelo da seguinte forma:

$$b_i = \frac{\lambda}{2} \ln\left(\frac{i+1}{i}\right), \, i \in \mathcal{S} \tag{8.7}$$

ou seja, b_i, $i \in \mathcal{S}$, são números positivos tais que $\{b_i\} \downarrow 0$ quando $i \to \infty$, numa velocidade adequada. Nesse contexto, as trajetórias do processo de estado $\{x\}$ são decrescentes e se constituem de partes conectadas da solução de (8.6), dadas por

$$x(t) = a_n \exp(-b_{n+\theta_0-1}(t - \tau_{n-1})) \text{ a.s.}, \; \tau_{n-1} \leqslant t < \tau_n \;\; , \quad n \in \mathbb{N} \tag{8.8}$$

onde $a_1 = x_0$ e $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 ...$ é a seqüência de pontos de salto. Em (8.8) usamos o fato de que, estando no estado i, o processo, via um único salto, pode apenas atingir o estado $i+1$. Uma conseqüência da continuidade de (8.8) em todo ponto de salto é que

$$\lim_{t\uparrow\tau_n} x(t) = x(\tau_n) = a_n \exp(-b_{n+\theta_0-1}(\tau_n - \tau_{n-1})) = a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{8.9}$$

Calculando-se consecutivamente a_2, a_3,..., obtemos facilmente

$$a_n = x_0 \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n-1} b_{i+\theta_0-1}(\tau_i - \tau_{i-1})\right\}, \quad n = 2, 3, ... \tag{8.10}$$

Constatamos que a seqüência de pontos de salto $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \tau_2 ...$ é infinita (de fato, cada entrada infinitesimal $-\lambda_{ii} = \lambda$, $i \in \mathcal{S}$, é positiva, o que evita que o processo tenha estados absorventes). Por outro lado, $-\lambda_{ii}$ exibem trivialmente cota superior uniforme. Logo [48], [14], para qualquer intervalo $[0, d]$, $d < \infty$, quase todas trajetórias de $\{\theta\}$ têm apenas um número finito de pontos de salto τ_n. Conseqüentemente, com probabilidade um, inexistem seqüências de pontos de salto convergindo para algum instante finito τ' e então

$$\lim_{n \to \infty} \tau_n = \infty \quad \text{a.s.} \tag{8.11}$$

Dessa forma (8.8) representa de fato a trajetória do processo de estado $\{x\}$ para todo $t \geq 0$ (os resultados acima são realmente um caso especial do Lema 80).

Mostraremos agora que o sistema (8.6) não é estocasticamente estável. Para tal, tomemos qualquer v.a. x_0 de segunda ordem com $E[x_0^2] \neq 0$ e $\theta_0 = \ell \in \mathcal{S}$ determinística.

Tendo em vista (8.11), (8.9) e o fato de que (8.8) é uma função decrescente, podemos escrever

$$\int_0^\infty x(t)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n^-} x(t)^2 dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^2 (\tau_n - \tau_{n-1}) \quad \text{a.s.} \tag{8.12}$$

Tirando a expectância em (8.12), usando Fubini e a desigualdade de Jensen e tendo em mente (8.7), (8.10) e o fato de que os tempos de visitação $\tau_n - \tau_{n-1}$ são v.as. independentes e identicamente distribuídas com média $E[\tau_n - \tau_{n-1}] = 1/\lambda$ e função de densidade $\lambda e^{-\lambda s}$, $s \geq 0$, podemos desenvolver a seguinte expressão:

$$\int_0^\infty E[x(t)^2] dt \geq \sum_{n=1}^{\infty} E[\left(x_0 \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{n} b_{i+\theta_0-1}(\tau_i - \tau_{i-1}) \right\} \right)^2 (\tau_n - \tau_{n-1})]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E[x_0^2 \exp\left\{ -2\sum_{i=1}^{n-1} b_{i+\theta_0-1}(\tau_i - \tau_{i-1}) \right\}$$

$$. \exp\{-2b_{n+\theta_0-1}(\tau_n - \tau_{n-1})\} (\tau_n - \tau_{n-1})]$$

$$= E[x_0^2] \sum_{n=1}^{\infty} (E[\exp\left\{ -2\sum_{i=1}^{n-1} b_{i+\theta_0-1}(\tau_i - \tau_{i-1}) \right\}]$$

$$.E[\exp\{-2b_{n+\theta_0-1}(\tau_n - \tau_{n-1}) + \ln(\tau_n - \tau_{n-1})\}])$$

$$\geq E[x_0^2]\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\left\{-2\sum_{i=1}^{n-1}b_{i+\theta_0-1}E[\tau_i-\tau_{i-1}]\right\}$$

$$.\exp\{-2b_{n+\theta_0-1}E[\tau_n-\tau_{n-1}]+E[\ln(\tau_n-\tau_{n-1})]\})$$

$$=E[x_0^2]\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\{-2\sum_{i=1}^{n}b_{i+\theta_0-1}E[\tau_i-\tau_{i-1}]\}\exp\{E[\ln(\tau_n-\tau_{n-1})]\})$$

$$=E[x_0^2]\sum_{n=1}^{\infty}(\exp\{-\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda}{2}\ln(\frac{i+\theta_0}{i+\theta_0-1})\}\exp\{E[\ln(\tau_n-\tau_{n-1})]\})$$

$$=E[x_0^2]\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\theta_0}{n+\theta_0}\exp\{\int_0^{\infty}(\ln s)\lambda e^{-\lambda s}ds\})=E[x_0^2]d_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_0}{n+\theta_0}=\infty \tag{8.13}$$

onde $d_1=\exp\{\int_0^{\infty}(\ln s)\lambda e^{-\lambda s}ds\}$ é finita e positiva, e não depende de n.

Seguimos mostrando que o sistema é estável pelo critério da média quadrática. Por (8.9), (8.10) e (8.7) e uma vez que os tempos de visitação $\tau_n-\tau_{n-1}$ são conforme descrito acima, temos que

$$E_{x_0,\theta_0}[x(\tau_n)^2]=E_{x_0,\theta_0}[a_{n+1}^2]=x_0^2E_{x_0,\theta_0}[\exp\left\{-2\sum_{i=1}^{n}b_{i+\theta_0-1}(\tau_i-\tau_{i-1})\right\}]$$

$$=x_0^2\prod_{i=1}^{n}E_{\theta_0}[\exp\{-2b_{i+\theta_0-1}(\tau_i-\tau_{i-1})\}]=x_0^2\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty}\exp(-2b_{i+\theta_0-1}s).\lambda\exp(-\lambda s)ds$$

$$=x_0^2\prod_{i=1}^{n}\left\{\left.\frac{-\exp(-(2b_{i+\theta_0-1}+\lambda)s)}{1+\frac{2b_{i+\theta_0-1}}{\lambda}}\right|_0^{\infty}\right\}=x_0^2\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2b_{i+\theta_0-1}}{\lambda}\right)\right)^{-1}$$

$$=x_0^2\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1+\ln(\tfrac{i+\theta_0}{i+\theta_0-1})\right)\right)^{-1}$$

Agora,

$$\sum_{i=1}^{n}\ln(\tfrac{i+\theta_0}{i+\theta_0-1})=(\ln(n+\theta_0)-\ln\theta_0)\to\infty \text{ quando } n\to\infty$$

Logo, usando o Lema 72 do Apêndice, vem que

$$E_{x_0,\theta_0}[x(\tau_n)^2]\to 0 \text{ as } n\to\infty \tag{8.14}$$

Tendo em vista que quase todas as trajetórias de $\{x\}$ são decrescentes e, em vista de (8.11), temos que

$$\lim_{t\to\infty}x(t)^2=\lim_{\tau_n\to\infty}x(\tau_n)^2=\lim_{n\to\infty}x(\tau_n)^2 \text{ a.s.} \tag{8.15}$$

Logo, invocando o teorema da convergência monótona de Lebesgue, temos, para qualquer distribuição conjunta de (x_0, θ_0), que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} E[x(t)^2] &= E[\lim_{t\to\infty} x(t)^2] = \lim_{n\to\infty} E[x(\tau_n)^2] \\ &= \lim_{n\to\infty} EE_{x_0,\theta_0}[x(\tau_n)^2] = E[\lim_{n\to\infty} E_{x_0,\theta_0}[x(\tau_n)^2] = 0\end{aligned}$$

A expressão acima, juntamente com (8.13), nos diz que o sistema (8.6) é estável na média quadrática, embora não seja estocasticamente estável.

Nota 51 *Suponha que o processo $\{x\}$ se adeque ao fato de que, para quase todas as funções amostra (i.e., para todo $\omega \in \Omega$ salvo um conjunto de medida nula), existe $\Delta = \Delta(\omega) > 0$ suficientemente pequeno tal que*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\tau_n(\omega) - \tau_{n-1}(\omega)\} \geq \Delta(\omega)$$

Neste caso, podemos mostrar que o sistema (8.6) é estável pela média quadrática diretamente via análise das funções amostra do processo. Nessa abordagem, dispensamos o uso das distribuições dos tempos de visitação $\{\tau_n - \tau_{n-1}\}$. Como $-\lambda_{ii}$, $i \in \mathcal{S}$, exibem limite superior uniforme, quase todas as funções amostra de $\{\theta\}$ têm apenas um número finito de pontos de salto $\tau_n(\omega)$ em cada intervalo finito de $[0, \infty)$. Este fato elimina seqüências de pontos de salto $\{\tau_n\}$ convergindo para instantes finitos à medida que $n \to \infty$. No entanto, não elimina eventuais subseqüências $\{\tau_{n_j} - \tau_{n_j-1}\}$ convergindo para zero quando $n_j \to \infty$, para n_j convenientemente espaçados (e.g., $n_{j+1} \geq n_j + 2$). Nestes casos, um valor mínimo para os tempos de visitação, mesmo dependente de ω, poderia não existir. Entretanto, o fato de que apenas um número finito de pontos de salto pode ocorrer num intervalo finito arbitrário de $[0, \infty)$ nos permite dizer que, mesmo no caso geral (onde um mínimo para o tempo de visitação não necessariamente existe), podemos sempre encontrar algum $\Delta = \Delta(\omega) > 0$, suficientemente pequeno, tal que a trajetória fictícia $t \longmapsto x_{\Delta(\omega)}(t, \omega)$, com $\tau_n(\omega) - \tau_{n-1}(\omega) \geq \Delta(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e decaimento exponencial de acordo com os coeficientes correspondentes dados por (8.7), majora $x(t, \omega)$. A constatação disso vem do fato de que o decréscimo de $x(t, \omega)$, que assumimos ser menor que aquele de $x_{\Delta(\omega)}(t, \omega)$ em algum intervalo arbitrário $\tau_n(\omega) - \tau_{n-1}(\omega) < \Delta(\omega)$, é plenamente compensado pelo decréscimo de $x_{\Delta(\omega)}(t, \omega)$, em algum intervalo próximo, de modo que, quase certamente $x(t, \omega) \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo, o sistema (8.6) é estável pela média quadrática.

Comparando ao *caso discreto em horizonte infinito* [18], temos, no nosso cenário, uma situação bem mais elaborada para a construção de um contraexemplo. De fato, embora possamos "conduzir " as funções amostra através de uma seqüência predeterminada de estados, como ocorre em [18], os intervalos de visitação aos estados, que constituem uma parte fundamental da estrutura das cadeias de Markov a tempo contínuo, permanecem aleatórios e, conseqüentemente, afetam o comportamento de convergência do processo de estado $\{x\}$. Por exemplo, o requisito de mantermos uma cota superior uniforme para $-\lambda_{ii}$ desempenha um papel importante, tendo em vista que isto evita, com probabilidade um, trajetórias exibindo seqüências de pontos de salto convergindo em tempo finito (um caso bem conhecido onde as entradas $-\lambda_{ii}$ não são uniformemente limitadas corresponde aos processos de Yule-Fury, de modo que a situação não uniformemente limitada não é incomum). De fato, se considerarmos processos de nascimento puro e relaxarmos a condição de existencia de uma cota superior uniforme para $-\lambda_{ii}$, as trajetórias de $\{x\}$ não convirgirão a zero quando $t \to \infty$ com probabilidade positiva (lembramos que o valor do estado cresce com o tempo e os parâmetros na dinâmica são tais que $b_n \downarrow 0$ quando $n \to \infty$ e, portanto, a convergência da trajetória para zero falhará sempre que ocorrer uma seqüência de pontos de salto convergindo em tempo finito). Conseqüentemente o sistema não será estável na média quadrática.

Vale finalmente citar que a positividade das entradas $-\lambda_{ii}$ elimina a existência de estados absorventes. Esta é uma exigência na construção de contraexemplos desse tipo, visto que a existência de estados absorventes ocasiona um processo de estado $\{x\}$ tal que, com probabilidade um, $\int_0^\infty \|x(t,\omega)\|^2 dt < \infty$, o que impõe estabilidade estocástica ao sistema como estruturado no início desta seção.

8.4 Um Lema Fundamental

A seguinte equivalência é bem conhecida quando lidamos com o caso clássico determinístico em dimensão finita $\dot{x}(t) = Ax(t)$: *a parte real dos autovalores da matriz A é negativa se e somente se $\int_0^\infty \|x(t)\|^2]dt < \infty$ para toda condição inicial $x(0) \in \mathbb{C}^n$.* O operador de dimensão infinita $\mathcal{D}$, definido por (6.4)-(6.5), desempenha o mesmo papel da matriz A para o caso do sistema com saltos. Ou seja, termos o espectro de $\mathcal{D}$ à esquerda do eixo imaginário equivale a termos $\int_0^\infty E[\|x(t)\|^2]dt < \infty$, para qualquer distribição conjunta ϑ_0 da condição inicial $(x(0),\theta(0))$, onde $\{x\}$ é dado por (6.1). Este é o teor do lema de equivalência que segue. Ele estabelece a conexão entre os conceitos SS e SD com o espectro de $\mathcal{D}$.

Seja, primeiramente, a seguinte proposição auxiliar.

Proposição 52 *Seja $F = (F_1, F_2, ...)$, tomando-se, no caso SS (resp. SD), $F_i = A_i - B_iG_i$ (resp. $F_i = A_i - K_iC_i$), $i \in \mathcal{S}$. Então $F \in \mathcal{H}_\infty^n$.*

Prova. Para todo $i \in \mathcal{S}$, $\|F_i\| \leq \|A_i\| + \|B_i\| \, \|G_i\| \leqslant d < \infty$, onde $d = \|A\|_\infty + \|B\|_\infty \|G\|_\infty$ independe de i. A prova é análoga para $F_i = A_i - K_iC_i$. ∎

Enunciemos o lema de equivalência.

Lema 53 *Seja o operador $\mathcal{D}$ dado por (6.4)-(6.5) e $G = (G_1, G_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$, $C = (C_1, C_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,r}$ e $K = (K_1, K_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{r,n}$. Então*

E1. O sistema (A, B, Λ) é SS com G estabilizante se e somente se

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \tag{8.16}$$

onde $F_i = A_i - B_iG_i$, $i \in \mathcal{S}$.

E2. O sistema (C, A, Λ) é SD, com K tornando (C, A, Λ) detetável se e somente se

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \tag{8.17}$$

onde $F_i = A_i - K_iC_i$, $i \in \mathcal{S}$.

Prova. Desenvolvemos as provas para os caso $E1$ e $E2$ simultaneamente, supondo $\mathcal{D}$ construído indistintamente com $F_i = A_i - B_iG_i$ ou $F_i = A_i - K_iC_i$.

$\Leftarrow$ *Suficiência:*

Como o operador linear $\mathcal{D}$ é limitado, valem a implicação *1* $\Longrightarrow$ *3* do Lema 27 e a Proposição 30 (com Q, $\mathcal{H}_1^n$ e $\mathcal{D}$ no lugar de y, Y e $\mathcal{A}$, respectivamente) e daí, para todo $Q^0 \in \mathcal{H}_1^n$, que

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \Rightarrow \int_0^\infty \left\|T(t)Q^0\right\|_1 dt < \infty \tag{8.18}$$

onde $T(t)Q^0$, $t \geq 0$, é a única função contínua e continuamente diferenciável, a valores em $\mathcal{H}_1^n$, satisfazendo

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \mathcal{D}Q(t), & t > 0 \\ Q(0) = Q^0 \end{cases} \tag{8.19}$$

e $T(t)$ é o semigrupo uniformemente contínuo gerado por $\mathcal{D}$ (Vale observar que, para usar a Proposição 30, é suficiente que $T(t)$ seja um semigrupo diferenciável. De modo análogo, é suficiente que $T(t)$ seja analítico para que possamos utilizar a implicação *1* $\Longrightarrow$ *3*).

En particular, (8.18) vale para Q^0 dado por (6.8), mais especificamente (denotando Q^{0^+} ao invés de Q^0) para

$$Q^{0^+} = (Q_1^{0^+}, Q_2^{0^+}, ...) \in \mathcal{H}_1^{n^+} \subset \mathcal{H}_1^n, \;\; Q_i^{0^+} = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}], \, i \in \mathcal{S}$$

para toda distribuição da condição inicial (x_0, θ_0). Em tal caso temos da Proposição 33 que a solução para (8.19) é dada por (6.2) e (6.3), mais especificamente (denotando $Q^+(\cdot)$ ao invés de $Q(\cdot)$) por

$$Q^+(t) = (Q_1^+(t), Q_2^+(t), ...), \; t \geq 0, \; Q_i^+(t) = E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}], \, i \in \mathcal{S}$$

onde $x(t)$ é dado por (6.1). Em decorrência do fato de que $Q^+(t)$ é contínua e continuamente diferenciável e que soluções para (8.19) desse feitio são únicas, obtemos que

$$Q^+(t) = T(t)Q^{0^+} \in \mathcal{H}_1^n, \;\; t \geq 0 \tag{8.20}$$

Agora,

$$\begin{aligned} E[\|x(t)\|^2] &= E[tr(x(t)x(t)^*)] = tr(\sum_{i=1}^{\infty} E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}]) \\ &= tr(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i^+(t)) \leqslant n \left\| \sum_{i=1}^{\infty} Q_i^+(t) \right\| \leqslant n \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i^+(t)\| = n \left\|Q^+(t)\right\|_1 \end{aligned} \tag{8.21}$$

Logo, tendo em vista (8.20), (8.18) se expressa por

$$\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0 \Rightarrow \int_0^{\infty} E[\|x(t)\|^2]dt < \infty \tag{8.22}$$

para toda condição inicial (x_0, θ_0). Invocando as Definições 48 e 49, obtemos o resultado desejado.

$\Rightarrow$ *Necessidade:*

Por hipótese (A, B, Λ) é SS (resp. (C, A, Λ) é SD). Logo, da Definição 48 (resp. 49) e da Proposição 52, existe $F^S \in \mathcal{H}_\infty^n$ (resp. $F^D \in \mathcal{H}_\infty^n$), que denotaremos indistintamente por F, tal que, para toda distribuição da condição inicial (x_0, θ_0),

$$\int_0^\infty E[\|x(t)\|^2]dt < \infty \tag{8.23}$$

onde $x(t)$ é dado por (6.1). Consideremos agora $Q^+(t)$ como definido em (6.2) e (6.3), ou seja

$$Q^+(t) = (Q_1^+(t),\ Q_2^+(t), ...) \quad ,t \geq 0 \tag{8.24}$$

onde

$$Q_i^+(t) = E[x(t)x(t)^* 1_{\{\theta(t)=i\}}] \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+, \quad i = 1, 2, ... \tag{8.25}$$

De (6.9), $\|Q^+(t)\|_1 \leqslant E[\|x(t)\|^2]$. *Ipso facto*, (8.23) se põe como

$$\int_0^\infty \left\|Q^+(t)\right\|_1 dt < \infty \tag{8.26}$$

para toda distribuição da condição inicial (x_0, θ_0). Agora, da Proposição 33, $Q^+(t)$, dada por (8.24) e (8.25) satisfaz a equação diferencial em espaço de Banach

$$\dot{Q}(t) = \mathcal{D}Q(t), \quad t > 0 \tag{8.27}$$

com condição inicial especializada para

$$Q(0) = Q^{0^+} = (Q_1^{0^+}, Q_2^{0^+}, ...), \ \ Q_i^{0^+} = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0=i\}}], \ \ i \in \mathcal{S} \tag{8.28}$$

Como o operador linear $\mathcal{D}$ é limitado (seria suficiente se $\mathcal{D}$ fosse o gerador infinitesimal de um semigrupo diferenciável), temos, da Proposição 30, que (8.27) inicializada por Q^{0^+} é unicamente satisfeita por $t \to Q(t) = T(t)Q^{0^+}$, $t \geq 0$, onde $T(t)$ é o semigrupo uniformemente contínuo gerado por $\mathcal{D}$. Como soluções contínuas e continuamente diferenciáveis para (8.27) são únicas e uma vez que $Q^+(t)$ é contínua e continuamente diferenciável, segue-se que

$$Q^+(t) = T(t)Q^{0^+} \tag{8.29}$$

Substituindo (8.29) em (8.26) obtemos

$$\int_0^\infty \left\|T(t)Q^{0^+}\right\|_1 dt < \infty \tag{8.30}$$

para toda distribuição da condição inicial (x_0, θ_0).

De forma a simplificar a notação, designemos $Q^{0+} = (Q_1^{0+}, Q_2^{0+}, ...)$ um elemento arbitrário de $\mathcal{H}_1^{n+}$. Para este elemento, sempre existem v.as. x_0 and θ_0 tais que $Q_i^{0+} = E[x_0 x_0^* 1_{\{\theta_0 = i\}}]$, $i \in \mathcal{S}$. Logo, (8.30) vale para qualquer condição inicial $Q^{0+} \in \mathcal{H}_1^{n+}$. Por sua vez, para todo $Q^0 \in \mathcal{H}_1^n$, existem X^+, X^-, Y^+ e Y^- em $\mathcal{H}_1^{n+}$ tais que $Q^0 = (X^+ - X^-) + \iota(Y^+ - Y^-)$ (vide Nota 5). Logo,

$$\int_0^\infty \left\|T(t)Q^0\right\|_1 dt = \int_0^\infty \left\|T(t)\{(X^+ - X^-) + \iota(Y^+ - Y^-)\}\right\|_1 dt$$
$$\leqslant \int_0^\infty \left\|T(t)X^+\right\|_1 dt + \int_0^\infty \left\|T(t)X^-\right\|_1 dt$$
$$+ \int_0^\infty \left\|T(t)Y^+\right\|_1 dt + \int_0^\infty \left\|T(t)Y^-\right\|_1 dt < \infty$$

para todo $Q^0 \in \mathcal{H}_1^n$. A implicação *3* $\Longrightarrow$ *1* do Lema 27 e o fato de que $T(t)$ é o semigrupo C_0 gerado por $\mathcal{D}$ conduzem ao resultado final desejado. ■

8.5 A ICARE e suas Propriedades

Paralelamente ao caso clássico LQ, é de se esperar que o custo mínimo para o problema de controle em horizonte infinito independa do instante de inicialização s, uma vez preservada a mesma condição inicial $(x(s), \theta(s))$. Isso sugere que achemos um problema "casado" em horizonte finito, no sentido dele simular a versão em horizonte infinito, ou seja, um problema para o qual a expressão a direita de (7.15) independa de T e portanto do tempo de inicialização s, uma vez preservada a mesma condição inicial $(x(s), \theta(s))$. Tal problema casado tem por solução a função constante $[0, T] \ni t \mapsto S^T(t) = S$ que satisfaz (6.18) com condição terminal $S^T(T) = S$ ou, equivalentemente (vide Proposição 54), a solução S para a ICARE $\mathcal{T}(S) = 0$.

Pode-se assim supor que a solução ótima para o problema em horizonte infinito esteja intimamente ligada à solução da ICARE (vide Definição 55) ou mais precisamente, à questões de existência e unicidade de solução para a ICARE. De fato, a Proposição 58, per si, propicia o resultado de otimalidade para a versão do caso infinito da Seção 4 onde uma condição mais restritiva, que é a da existência a priori de uma solução estabilizante para a ICARE, é assumida. Com base nas premissas suaves SS e SD, as Proposições 56 e 57 asseguram, por sua vez, a existência de uma solução estabilizante. Finalmente, Proposição 60 fornece um resultado importante de convergência à solução ótima, embora prescindível na obtenção desta solução.

Proposição 54 $[0, T] \ni t \mapsto S^T(t) = S \in \mathcal{H}^n_\infty$ *satisfaz*

$$\begin{cases} \dot{S}^T(t) + \mathcal{T}(S^T(t)) = 0, & t \in (0, T) \\ S^T(T) = S \end{cases} \tag{8.31}$$

se e somente se S *satisfaz* $\mathcal{T}(S) = 0$.

Prova. $\mathcal{T}(S) = 0 \Rightarrow \mathcal{T}(S^T(t)) = 0, \quad t \in (0, T)$. Agora, $\dot{S}^T(t) = 0$ implica em $\dot{S}^T(t) + \mathcal{T}(S^T(t)) = 0$ e claramente $S^T(T) = S$. Vice versa, para algum t, $\dot{S}^T(t) = 0$, de modo que $\mathcal{T}(S^T(t)) = 0$. Mas $S^T(t) = S$. ■

Definição 55 *Dizemos que* $S = (S_1, S_2, ...)$ *é uma solução semidefinida positiva para a ICARE se* S *pertence a* $\mathcal{H}^{n+}_\infty$ *e satisfaz a ICARE*

$$\mathcal{T}(S) = 0 \tag{8.32}$$

Além disso, dizemos que S *é uma solução estabilizante para a ICARE se ela é uma solução semidefinida positiva e* $G = (G_1, G_2, ...) = \mathcal{G}(S)$ *estabiliza* (A, B, Λ).

A Proposição 56 que segue provê condições suficientes de existência de uma solução para (8.32).

Proposição 56 *Seja* (A, B, Λ) *SS. Então, para* $L = 0 \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$*, o valor* $S_i^T(0)$ *da (única) solução* $S^T(t) \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$*,* $t \in [0, T]$*, para (6.18), converge para algum* $S_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ *quando* $T \to \infty$*, para cada* $i \in \mathbb{S}$*. Além disso,* $S = (S_1, S_2, ...)$ *pertence a* $\mathcal{H}^{n+}_\infty$ *e satisfaz a ICARE (8.32).*

Prova. Da Proposição 39, a solução (6.18) de fato existe e é única para $T \in (0, \infty)$ e $L = 0 \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$. Consideremos então o problema de controle em horizonte finito conforme a Seção 7, com $s = 0$ e condição inicial $x(0) = x$ e $\theta(0) = i$, x e i valores determinísticos e arbitrários em $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{S}$ respectivamente, horizontes $T_1, T_2 \in (0, \infty)$, $T_1 < T_2$ e custo terminal $S^{T_1}(T_1) = S^{T_2}(T_2) = L = 0$. Nesse caso, aplicando a definição (4.4) em (7.15), vem que

$$\begin{aligned}
&x^* S_i^{T_2}(0)x \\
&= \min_{u\in\mathcal{U}^{T_2}} E[\int_0^{T_2} \left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2 dt] \\
&\geq \min_{u\in\mathcal{U}^{T_2}} E[\int_0^{T_1} \left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2 dt] \\
&+ \min_{u\in\mathcal{U}^{T_2}} E[\int_{T_1}^{T_2} \left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2 dt] \\
&\geq \min_{u\in\mathcal{U}^{T_1}} E[\int_0^{T_1} \left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2 dt] = x^* S_i^{T_1}(0)x
\end{aligned} \tag{8.33}$$

e, uma vez que a expressão acima é válida para todo $x \in \mathbb{C}^n$,

$$0 \leqslant S_i^{T_1}(0) \leqslant S_i^{T_2}(0) \tag{8.34}$$

para todo $T_1, T_2 \in (0,\infty)$, $T_1 < T_2$, e $i \in \mathcal{S}$. Vamos assumir que

$$S_i^T(0) \leqslant dI \tag{8.35}$$

para todo $T \in (0,\infty)$ e $i \in \mathcal{S}$, para alguma constante d independente de i e T. Essa expressão e (8.34) nos permite aplicar o Lema 73 do Apêndice, o que prova as duas primeiras afirmativas da proposição.

Mostremos agora que S satisfaz $\mathcal{T}(S) = 0$. Tendo em vista a Proposição 39 e o Lema 75 e fixando arbitrariamente $a > 0$ e $T \in (a,\infty)$, sejam $S^T(t)$, $t \in [0,T]$, e $S^{T,-a}(t)$, $\quad t \in [-a, T-a]$, respectivamente, as soluções de

$$\begin{cases} \dot{S}^T(t) + \mathcal{T}(S^T(t)) = 0, & t \in (0,T) \\ S^T(T) = 0 \end{cases} \tag{8.36}$$

e de

$$\begin{cases} \dot{S}^{T,-a}(t) + \mathcal{T}(S^{T,-a}(t)) = 0, & t \in (-a, T-a) \\ S^{T,-a}(T-a) = 0 \end{cases} \tag{8.37}$$

Como $S_i^T(0) \to S_i$ quando $T \to \infty$, vem que $S_i^{T-a}(0) \to S_i$ quando $T \to \infty$. Renomeando T por $T-a$ em (8.36), temos claramente que

$$S_i^{T,-a}(t) = S_i^{T-a}(t), t \in [0, T-a] \tag{8.38}$$

de modo que $S_i^{T,-a}(0) \to S_i$ quando $T \to \infty$. Agora, do Lema 75, vem que

$$S_i^T(a) = S_i^{T,-a}(0), i \in \mathcal{S} \tag{8.39}$$

Logo

$$\lim_{T\to\infty} S_i^T(a) = S_i \quad ,i \in \mathcal{S} \tag{8.40}$$

Rescrevendo (8.34) e (8.35) como $0 \leqslant S_i^{T_1-a}(0) \leqslant S_i^{T_2-a}(0)$ e $S_i^{T-a}(0) \leqslant dI$, respectivamente e considerando (8.38) e (8.39), vem que

$$0 \leqslant S_i^{T_1}(a) \leqslant S_i^{T_2}(a) \quad \text{e} \quad S_i^T(a) \leqslant dI$$

para todo $T, T_1, T_2 \in (a, \infty)$, $T_1 < T_2$, e $i \in \mathcal{S}$.

Estas duas expressões em conjunção à (8.40), o fato de que $S = (S_1, S_2, ...)$ $\in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ e a hipótese temporária (8.35), propiciam, via o Lema 74 do Apêndice, que

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}(S^T(a)) = \mathcal{T}(S) \tag{8.41}$$

Para $(0,T) \ni t \mapsto S_i^T(t)$, definamos o operador diferencial D dado por $S_i^T(\cdot) \mapsto DS_i^T(\cdot) = \dot{S}_i^T(\cdot)$. De (8.40) e como $a > 0$ é arbitrário, temos que $\lim_{T\to\infty} S_i^T(t) = S_i$, $t \in (0,T)$. Logo, da continuidade de D e tomando S_i como uma função constante de t, obtemos

$$\lim_{T\to\infty} \dot{S}_i^T(t) = \lim_{T\to\infty} DS_i^T(t) = D(S_i) = 0, \quad i \in \mathcal{S}$$

Arbitrando $t = a$ na expressão acima e em (8.36), obtemos

$$\lim_{T\to\infty} \dot{S}^T(a) = 0 \tag{8.42}$$

e

$$\dot{S}^T(a) + \mathcal{T}(S^T(a)) = 0 \tag{8.43}$$

Passando ao limite a expressão acima e usando (8.41) e (8.42), vem que

$$0 = \lim_{T\to\infty} \dot{S}^T(a) + \lim_{T\to\infty} \mathcal{T}(S^T(a)) = \mathcal{T}(S). \tag{8.44}$$

Mostremos finalmente que $S_i^T(0) \leqslant dI$, $i \in \mathcal{S}$, $T \in (0, \infty)$. Isso é conseqüência da hipótese de que (A, B, Λ) é SS. De fato, a Definição 48 nos diz que, nesse caso, existe $G \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ que estabiliza (A, B, Λ). Definamos então a política de controle estabilizante $\overline{u}(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$, $t \geq 0$. Nesse contexto, a dinâmica (4.1) com $t \geq 0$ se escreve $\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t)$, $t > 0$, com $F_{\theta(t)} = A_{\theta(t)} - B_{\theta(t)}G_{\theta(t)}$. Em particular, estaremos interessados na condição inicial $x(0) = x$ e $\theta(0) = i$, com x e i valores determinísticos e arbitrários em $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{S}$ respectivamente.

Do Lema 53, vem que $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ onde $\mathcal{D}$ é dado por (6.4) e (6.5). Lembrando que $\mathcal{D}$ gera um semigrupo uniformemente contínuo, digamos $T(t)$, podemos recorrer à equivalência entre as afirmativas *1*, *2* e *3* do Lema 27, assim como ao Corolário 28, obtendo

$$\int_0^\infty \left\|T(t)Q^0\right\|_1 dt \leqslant \beta \left\|Q^0\right\|_1 < \infty \tag{8.45}$$

para alguma constante $\beta \in (0, \infty)$ e para todo $Q^0 \in \mathcal{H}_1^n$. Agora, da teoria de semigrupo,

$$Q(t) = T(t)Q^0 \quad , \; t \geq 0$$

é a solução para a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{Q}(t) = \mathcal{D}(Q(t)), & t > 0 \\ Q(0) = Q^0 = (Q_1^0, Q_2^0, ...) \in \mathcal{H}_1^n \end{cases}$$

solução esta que se expressa também por (6.2) e (6.3) sempre que a condição inicial seja da forma

$$Q_i^0 = E[x(0)x(0)^* 1_{\{\theta(0)=i\}}] = xx^* 1_{\{\theta(0)=i\}}, \; i \in \mathcal{S}. \tag{8.46}$$

(vide Proposição 33). Logo, (8.45) se escreve como

$$\int_0^\infty \|Q(t)\|_1 dt \leqslant \beta \left\|Q^0\right\|_1 < \infty \tag{8.47}$$

para todo Q^0 satisfazendo (8.46). Agora, de (8.21) e (6.9), vem que $E[\|x(t)\|^2] \leqslant n\|Q(t)\|_1$e $\|Q^0\|_1 \leqslant E[\|x(0)\|^2] = \|x\|^2$. Logo, (8.47) resulta em

$$\int_0^\infty E[\|x(t)\|^2] dt \leqslant n\beta \|x\|^2 < \infty \tag{8.48}$$

Usando Fubini, a desigualdade de Schwarz e denotando $d = (\|\mathcal{Q}\| + \|\mathcal{R}\| \, \|G\|_\infty^2) n\beta$, a expressão para o custo da política $\overline{u}$ pode ser majorada conforme segue.

$$\begin{aligned}
&E[\int_0^\infty x(t)^* \mathcal{Q} x(t) + \overline{u}(t)^* \mathcal{R} \overline{u}(t) dt] \\
&\leqslant E[\int_0^\infty (\|\mathcal{Q}\| + \|\mathcal{R}\| \, \|G\|_\infty^2) \|x(t)\|^2 dt] \\
&\leqslant (\|\mathcal{Q}\| + \|\mathcal{R}\| \, \|G\|_\infty^2) n\beta \|x\|^2 \leqslant d \|x\|^2 = x^* d I x
\end{aligned}$$

Voltando ao problema de controle em horizonte finito (vide (8.33)), vem que

$$\begin{aligned} x^* S_i^T(0)x &= \min_{u \in \mathcal{U}^T} E[\int_0^T x(t)^* \mathcal{Q} x(t) + u(t)^* \mathcal{R} u(t) dt] \\ &\leqslant E[\int_0^\infty x(t)^* \mathcal{Q} x(t) + \overline{u}(t)^* \mathcal{R} \overline{u}(t) dt] \leqslant x^* dI x \end{aligned}$$

Como $T \in (0, \infty)$, $i \in \mathcal{S}$ e $x \in \mathbb{C}^n$ são arbitrários, obtemos que $S_i^T(0) \leqslant dI$ para todo T e i. ■

A proposição que se segue provê condições suficientes para que uma solução para a ICARE seja estabilizante.

Proposição 57 *Seja $(\bar{\mathcal{Q}}^{1/2}, A, \Lambda)$ SD e S uma solução semidefinida positiva para a ICARE (8.32), onde $\bar{\mathcal{Q}}^{1/2} = (\mathcal{Q}^{1/2}, \mathcal{Q}^{1/2}, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. Então S é uma solução estabilizante para (8.32).*

Prova. Consideramos a estatística $Q(t)$, $t \geq 0$, dada por (6.2) e (6.3) onde, ao invés de F, tomamos $\bar{F} = (\bar{F}_1, \bar{F}_2, ...)$, $\bar{F}_i = A_i - B_i G_i$. Consideramos ainda $x(t)$ conforme (4.1) com $t \geq 0$, $u(t) = -G_{\theta(t)} x(t)$, $G = (G_1, G_2, ...) = \mathcal{G}(S) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$, bem como uma distribuição arbitrária da condição inicial (x_0, θ_0). Definimos também o operador $\hat{\mathcal{D}}$ conforme (6.4) e (6.5), onde, ao invés de F, tomamos $\hat{F} = (\hat{F}_1, \hat{F}_2, ...)$, $\hat{F}_i = A_i - K_i \mathcal{Q}^{1/2}$, com $K = (K_1, K_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{r,n}$ tal que $\sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\hat{\mathcal{D}})\} < 0$ (tal K existe, em vista da hipótese SD da proposição). Definamos ainda o operador $\bar{\mathcal{D}}$ considerando $\bar{F}$ ao invés de F.

A idéia da prova é a seguinte: devemos provar que $\int_0^\infty E[\ \|x(t)\|^2\ ]dt < \infty$, para qualquer condição inicial (x_0, θ_0); isto é o mesmo que provar que $\int_0^\infty \|Q(t)\|_1 \, dt < \infty$ para qualquer condição inicial $Q^0 \in \mathcal{H}_1^{n+}$, onde $Q(t)$, dado por (6.2) e (6.3), também satisfaz a equação diferencial $\dot{Q}(t) = \bar{\mathcal{D}}(Q(t))$; a partir desse ponto, o trabalho se reduz à obtenção de uma dominância adequada para $\|Q(t)\|_1$.

Da Proposição 33 podemos escrever

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i(t) &= \bar{\mathcal{D}}_i(Q(t)) = \bar{F}_i Q_i(t) + Q_i(t) \bar{F}_i^* + \sum_{j=1}^\infty \lambda_{ji} Q_j(t) \\ &= \hat{F}_i Q_i(t) + Q_i(t) \hat{F}_i^* + \sum_{j=1}^\infty \lambda_{ji} Q_j(t) + \Delta_i Q_i(t) + Q_i(t) \Delta_i^* \\ &= \hat{\mathcal{D}}_i(Q(t)) + \Delta_i Q_i(t) + Q_i(t) \Delta_i^* \end{aligned} \tag{8.49}$$

onde

$$\Delta_i = K_i Q^{1/2} - B_i G_i \tag{8.50}$$

Agora, para $\varepsilon > 0$ arbitrário, $0 \leqslant \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i\right) Q_i(t) \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i\right)^*$, de modo que

$$\Delta_i Q_i(t) + Q_i(t)\Delta_i^* \leqslant \varepsilon^2 Q_i(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_i Q_i(t)\Delta_i^*$$

Logo, de (8.49), vem que

$$\dot{Q}_i(t) \leqslant \hat{\mathcal{D}}_i(Q(t)) + \varepsilon^2 Q_i(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_i Q_i(t)\Delta_i^* \tag{8.51}$$

Definimos agora os operadores

$$\tilde{\mathcal{D}}(H) = (\tilde{\mathcal{D}}_1(H), \tilde{\mathcal{D}}_2(H), ...),$$

$$\Gamma(H) = (\Gamma_1(H), \Gamma_2(H), ...) \quad \text{e}$$

$$\mathcal{V}(H) = (\mathcal{V}_1(H), \mathcal{V}_2(H), ...)$$

em $Blt\left(\mathcal{H}_1^n\right)$ tais que, para todo $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_1^n$,

$$\tilde{\mathcal{D}}_i(H) = \hat{\mathcal{D}}_i(H) + \varepsilon^2 H_i, \tag{8.52}$$

$$\Gamma_i(H) = \Delta_i H_i \Delta_i^* \quad \text{e} \tag{8.53}$$

$$\mathcal{V}_i(H) = \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i\right) H_i \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i^*\right), \tag{8.54}$$

$i \in \mathcal{S}$. De (8.52), temos que

$$\tilde{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}} + \varepsilon^2 I \tag{8.55}$$

onde definimos I como sendo o operador identidade associado a $\mathcal{H}_1^n$. Podemos reescrever (8.51) como

$$\dot{Q}_i(t) \leqslant \tilde{\mathcal{D}}_i(Q(t)) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Gamma_i(Q(t)) \tag{8.56}$$

De modo a usar um teorema de comparação, consideramos a equação diferencial não homogênea

$$\begin{cases} \dot{R}_i(t) = \tilde{\mathcal{D}}_i(R(t)) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Gamma_i(Q(t)) \\ R_i(0) = Q_i(0), \ \ i \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{8.57}$$

ou, equivalentemente, a equação diferencial em espaço de Banach de dimensão infinita

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = \tilde{\mathcal{D}}(R(t)) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Gamma\left(Q(t)\right) \\ R(0) = Q(0) \in \mathcal{H}_1^{n+} \end{cases} \tag{8.58}$$

onde $R(t) = (R_1(t),\, R_2(t), ...)$. Para cada T finito, $Q(\cdot)$ pertence a $L_1([0,T],\, \mathcal{H}_1^n)$ e é continuamente diferenciável. Conseqüentemente, este é o caso de $\frac{1}{\varepsilon^2}\Gamma\left(Q(\cdot)\right)$ (basta notar que $\int_0^T \left\|\frac{1}{\varepsilon^2}\Gamma(Q(t))\right\|_1 dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\Gamma\right\| \int_0^T \left\|(Q(t))\right\|_1 dt < \infty$, onde $\left\|\Gamma\right\|$ é a norma induzida de $Blt\left(\mathcal{H}_1^n\right)$).

Logo, pela Proposição 31, a solução única $R(t) \in \mathcal{H}_1^n$ de (8.58) é dada por

$$R(t) = T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\left(Q(0)\right) + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)(\Gamma(Q(s)))ds, \;\; t \in [0,T]. \tag{8.59}$$

para todo $Q(0) \in \mathcal{H}^{n^+}$, onde $T_{\tilde{\mathcal{D}}}$ é o semigrupo uniformemente contínuo gerado por $\tilde{\mathcal{D}}$. Definimos agora

$$U_i(t) = R_i(t) - Q_i(t), \quad i \in \mathcal{S} \tag{8.60}$$

Logo $U(t) = (U_1(t),\, U_2(t), ...)$ pertence a $\mathcal{H}_1^n$ e satisfaz a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{U}_i(t) = \tilde{\mathcal{D}}_i(U(t)) + \mathcal{V}_i(Q(t)) \\ U_i(0) = 0, \qquad\quad i \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{8.61}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \dot{U}_i(t) &= \dot{R}_i(t) - \dot{Q}_i(t) = \tilde{\mathcal{D}}_i(R(t)) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_i Q_i(t)\Delta_i^* \; - \bar{\mathcal{D}}_i(Q(t)) \\ &= \hat{\mathcal{D}}_i(R(t)) + \varepsilon^2 R_i(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_i Q_i(t)\Delta_i^* - \bar{\mathcal{D}}_i(Q(t)) \\ &= \hat{\mathcal{D}}_i(R(t)) + \varepsilon^2 R_i(t) + \frac{1}{\varepsilon^2}\Delta_i Q_i(t)\Delta_i^* \; - \left(\hat{\mathcal{D}}_i(Q(t)) + \Delta_i Q_i(t) + Q_i(t)\Delta_i^*\right) \\ &= \hat{\mathcal{D}}_i(R(t)) - \hat{\mathcal{D}}_i(Q(t)) + \varepsilon^2 R_i(t) \; + \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i\right) Q_i(t) \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i^*\right) - \varepsilon^2 Q_i(t) \\ &= \tilde{\mathcal{D}}_i(U(t)) + \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i\right) Q_i(t) \left(\varepsilon I - \frac{1}{\varepsilon}\Delta_i^*\right) = \tilde{\mathcal{D}}_i(U(t)) + \mathcal{V}_i(Q(t)) \end{aligned}$$

Podemos expressar (8.61) como a equação diferencial em espaço de Banach

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = \tilde{\mathcal{D}}(U(t)) + \mathcal{V}\left(Q(t)\right) \\ U(0) = 0 \end{cases} \tag{8.62}$$

Agora, $Q(\cdot)$ e conseqüentemente $\mathcal{V}(Q(\cdot))$ pertencem a $L_1([0,T],\ \mathcal{H}_1^n)$. Logo, da Proposição 31, $U(t) \in \mathcal{H}_1^n$, como definido em (8.60), é a única solução para (8.62), dada por

$$U(t) = \int_0^t T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)\left(\mathcal{V}(Q(s))\right) ds, \ \ t \in [0,T].$$

Como $Q(s)$ e conseqüentemente $\mathcal{V}(Q(s))$ pertencem a $\mathcal{H}_1^{n^+}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$ é uma transformação linear limitada, segue-se que $T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)\mathcal{V}(Q(s)) = (\exp((t-s))\tilde{\mathcal{D}})\mathcal{V}(Q(s))$ pertence a $\mathcal{H}_1^{n^+}$. Logo, $U(t) \in \mathcal{H}_1^{n^+}$. Isto e (8.60) estabelecem o resultado de comparação, qual seja,

$$0 \leqslant Q(t) \leqslant R(t) \in \mathcal{H}_1^{n^+}, t \in [0,T]$$

para $Q(0) \in \mathcal{H}_1^{n^+}$ arbitrário e cada T finito. Ademais, usando (8.59) e (3.1), obtemos

$$\|Q(t)\|_1 \leqslant \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\left(Q(0)\right)\|_1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)(\Gamma(Q(s)))\|_1 \, ds$$

Integrando esta expressão no intervalo $[0,T]$, vem que

$$\int_0^T \|Q(t)\|_1 \, dt \leqslant \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\left(Q(0)\right)\|_1 \, dt + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \int_0^t \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)(\Gamma(Q(s)))\|_1 \, dsdt \tag{8.63}$$

Quanto ao último termo de (8.63) definamos $l = t - s$ e

$$T_{\tilde{\mathcal{D}}}^E(r) = \begin{cases} T_{\tilde{\mathcal{D}}}(r) & \text{if } r \geq 0 \\ 0 & \text{if } r < 0 \end{cases}$$

Daí, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_0^t \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)(\Gamma(Q(s)))\|_1 \, ds \ dt \\
&= \int_0^T \int_0^T \left\|T_{\tilde{\mathcal{D}}}^E(t-s)(\Gamma(Q(s)))\right\|_1 dt \ ds \\
&\leqslant \int_0^T \|\Gamma(Q(s))\|_1 \int_s^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t-s)\| \, dt \ ds = \int_0^T \|\Gamma(Q(s))\|_1 \int_0^{T-s} \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(l)\| \, dlds \\
&\leqslant \int_0^T \|\Gamma(Q(s))\|_1 \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(l)\| \, dl \ ds = \int_0^T \|\Gamma(Q(s))\|_1 \, ds \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(l)\| \, dl
\end{aligned} \tag{8.64}$$

Logo

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|Q(t)\|_1 \, dt \\
&\leqslant \|Q(0)\|_1 \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\| \, dt + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \|\Gamma(Q(s))\|_1 \, ds \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(l)\| \, dl \\
&= \{\|(Q(0))\|_1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \|\Gamma(Q(s))\|_1 \, ds\} \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(s)\| \, ds
\end{aligned} \tag{8.65}$$

O objetivo, nesse ponto, é obter uma dominância superior para $\|(\Gamma(Q(s)))\|_1$. Considerando (8.50), (8.53) e definindo $c = \max\{\|K\|_\infty^2, \|B\|_\infty^2\}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma_i(Q(s))\| = \left\|\left(K_i\mathcal{Q}^{1/2} - B_iG_i\right) Q_i(s) \left(K_i\mathcal{Q}^{1/2} - B_iG_i\right)^*\right\| \\
&\leqslant \|K_i\|^2 \left\|\mathcal{Q}^{1/2}Q_i(s)\mathcal{Q}^{1/2}\right\| + \|B_i\|^2 \|G_iQ_i(s)G_i^*\| \\
&+ 2\|K_i\| \|B_i\| \left\|\mathcal{Q}^{1/2}Q_i(s)G_i^*\right\| \\
&\leqslant c(\left\|\mathcal{Q}^{1/2}Q_i(s)\mathcal{Q}^{1/2}\right\| + \|G_iQ_i(s)G_i^*\| + 2\left\|\mathcal{Q}^{1/2}Q_i(s)G_i^*\right\|)
\end{aligned}$$

De (6.3) podemos escrever que

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{Q}^{1/2}Q_i(s)\mathcal{Q}^{1/2}\right\| = \left\|\mathcal{Q}^{1/2}E[x(s)x(s)^*1_{\{\theta(s)=i\}}]\mathcal{Q}^{1/2}\right\| \\
&\leqslant E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)\left(\mathcal{Q}^{1/2}x(s)\right)^* 1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|] \leqslant E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|^2],
\end{aligned} \tag{8.66}$$

$$\|G_iQ_i(s)G_i^*\| \leqslant E[\left\|G_ix(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|^2]$$

e, lembrando que $2ab \leqslant a^2 + b^2$ para quaisquer números reais a,b,

$$\begin{aligned}
&2\left\|\mathcal{Q}^{1/2}Q_i(s)G_i^*\right\| \leqslant 2E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)\left(G_ix(s)\right)^* 1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|] \\
&= 2E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\left(G_ix(s)\right)^* 1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|] \\
&\leqslant 2E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\right\| \left\|\left(G_ix(s)\right) 1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|] \\
&\leqslant E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|^2] + E[\left\|\left(G_ix(s)\right) 1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|^2]
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
&\|\Gamma(Q(s))\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \|\Gamma_i(Q(s))\| \\
&\leqslant 2cE[\sum_{i=1}^{\infty}\{\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|^2 + \left\|G_ix(s)1_{\{\theta(s)=i\}}\right\|^2\}] \\
&= 2cE[\sum_{i=1}^{\infty}\{\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)\right\|^2 1_{\{\theta(s)=i\}} + \left\|G_{\theta(s)}x(s)\right\|^2 1_{\{\theta(s)=i\}}\}] \\
&= 2cE[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)\right\|^2 + \left\|G_{\theta(s)}x(s)\right\|^2]
\end{aligned} \tag{8.67}$$

e (8.65) pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|Q(t)\|_1 dt \leqslant \{\|Q(0)\|_1 + \frac{2c}{\varepsilon^2}\int_0^T E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(s)\right\|^2 \\
+ \left\|G_{\theta(s)}x(s)\right\|^2]ds\} \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\| dt
\end{aligned} \tag{8.68}$$

A partir desse ponto usaremos as duas hipóteses da proposição para obter uma cota adequada para a primeira integral à direita de (8.68). Então, vamos considerar primeiramente o problema de controle ótimo em horizonte finito dado na Seção 7, tomando a condição terminal casada $S^T(T) = L = S$ tal que $\mathcal{T}(S) = 0$. Nesse caso, a solução para a equação de Riccati (6.18) é $S^T(t) = S$, $t \in [0,T]$ (veja a Proposição 54). Logo, da Proposição 47 com $s = 0$, o controle ótimo pode ser expresso como $\hat{u}^T(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$, com $G = (G_1, G_2, ...) = \mathcal{G}(S^T(t)) = \mathcal{G}(S) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ (onde G independe do tempo t e do horizonte T). Ademais, de (4.4) e (7.15) e, como normas são equivalentes quando se trata de espaços de dimensão finita (o que significa que existe $m_{\mathcal{R}} > 0$ suficientemente pequeno tal que $m_{\mathcal{R}} \|v\| \leqslant \|v\|_{\mathcal{R}}$ para todo $v \in \mathbb{C}^n$), podemos desenvolver a seguinte expressão.

$$
\begin{aligned}
&E[x(0)^* S_{\theta(0)} x(0)] \\
&= E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}\hat{u}^T(t)\right\|^2)dt + x(T)^* S_{\theta(T)} x(T)] \\
&= E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|G_{\theta(t)}x(t)\right\|_{\mathcal{R}}^2)dt + \|x(T)\|_{S_{\theta(T)}}^2] \\
&\geq E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + m_{\mathcal{R}}\left\|G_{\theta(t)}x(t)\right\|^2)dt + \|x(T)\|_{S_{\theta(T)}}^2] \\
&\geq E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + m_{\mathcal{R}}\left\|G_{\theta(t)}x(t)\right\|^2)dt] \\
&= \int_0^T E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + m_{\mathcal{R}}\left\|G_{\theta(t)}x(t)\right\|^2]dt
\end{aligned}
\tag{8.69}
$$

Uma vez que $S_{\theta(0)}$ independe de T e $x(0)$ é uma v.a. de segunda ordem,

$$
0 \leqslant E[x(0)^* S_{\theta(0)} x(0)] \leqslant E[\left\|S_{\theta(0)}\right\| \|x(0)\|^2] \leqslant \|S\|_\infty E[\|x(0)\|^2]
\tag{8.70}
$$

O termo acima é finito e representa um limite uniforme em T para a expressão à direita de (8.69). Claramente, $\|S\|_\infty E[\|x(0)\|^2]$ domina $\int_0^T E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2]dt$ e $\frac{\|S\|_\infty E[\|x(0)\|^2]}{m_{\mathcal{R}}}$ domina $\int_0^T E[\left\|G_{\theta(t)}x(t)\right\|^2]dt$. Conseqüentemente, podemos dizer que existe

$$
d_1(E[\|x(0)\|]) = \|S\|_\infty E[\|x(0)\|^2](1 + \frac{1}{m_{\mathcal{R}}})
$$

que independe de T, para o qual

$$
\int_0^T E[\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|G_{\theta(t)}x(t)\right\|^2]dt \leqslant d_1(E[\|x(0)\|]) < \infty
$$

Logo, de (8.68) obtemos

$$\int_0^T \|Q(t)\|_1\, dt \leqslant \{\|(Q(0))\|_1 + \frac{2c}{\varepsilon^2} d_1(E[\|x(0)\|])\} \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\|\, dt \tag{8.71}$$

para todo $T \in (0, \infty)$. Passando ao limite, segue então que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \|Q(t)\|_1\, dt$$
$$\leqslant \{\|(Q(0))\|_1 + \frac{2c}{\varepsilon^2} d_1(E[\|x(0)\|])\} \lim_{T\to\infty} \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\|\, dt \tag{8.72}$$

Agora, da hipótese SD, $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\hat{\mathcal{D}})\} < 0$. Logo, pela continuidade dos autovalores de $\tilde{\mathcal{D}}$ na variável ε (de (8.55), $\sigma(\tilde{\mathcal{D}}) = \sigma(\hat{\mathcal{D}}) + \varepsilon^2$), podemos sempre achar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\tilde{\mathcal{D}})\} < 0$. Por outro lado, o operador linear $\tilde{\mathcal{D}} : \mathcal{H}_1^n \to \mathcal{H}_1^n$ é limitado e, como tal, o semigrupo $T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)$ gerado por $\tilde{\mathcal{D}}$ é uniformemente contínuo e, com mais razão, um semigrupo analítico. Tomando $\tilde{\mathcal{D}}$ com ε apropriado, usamos a implicação (*1*$\Rightarrow$*4*) do Lema 27 para obter

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \|T_{\tilde{\mathcal{D}}}(t)\|\, dt < \infty$$

A expressão acima e (8.72) nos dizem que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \|Q(t)\|_1\, dt < \infty \tag{8.73}$$

para todo $Q(0) \in \mathcal{H}_1^{n+}$. Por fim, usando (8.21), temos que $E[\|x(t)\|^2] \leqslant n\,\|Q(t)\|_1$. Considerando (8.73), obtemos então

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T E[\|x(t)\|^2] dt < \infty$$

para toda distribuição da condição inicial (x_0, θ_0). Logo, $G = \mathcal{G}(S)$ estabiliza (A, B, Λ). ■

Demonstramos, na proposição que se segue, a unicidade das soluções estabilizantes para a ICARE (8.32), bem como a otimalidade desta solução.

Proposição 58 *Seja* $S = (S_1, S_2, ...)$ *uma solução estabilizante para a ICARE (8.32). Então* S *é a única solução estabilizante para (8.32) e, para qualquer distribuição da condição inicial* $(x(0), \theta(0))$,

$$\inf_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{J}(\vartheta_0, u) = \mathcal{J}(\vartheta_0, \hat{u})$$

$$:= E[\int_0^\infty (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}\hat{u}(t)\right\|^2)dt] = E[x(0)^* S_{\theta(0)} x(0)] \tag{8.74}$$

onde $\hat{u}(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$, $G = (G_1, G_2, ...) = \mathcal{G}(S) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ *e* $x(t)$ *é dado por (4.1) com* $t \geq 0$ *e equipado com* $\hat{u}$.

Prova. Como $\hat{u}$ estabiliza (A, B, Λ), $\hat{u}$ pertence a $\mathcal{U}$ e $\mathcal{J}(\vartheta_0, \hat{u}) \leq E[\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt]$ $< \infty$ para qualquer distribuição ϑ_0, ou seja, $\breve{\mathcal{U}} = \{u \in \mathcal{U} : \mathcal{J}(\vartheta_0, u)$ é finito para toda distribuição $\vartheta_0\}$ é não vazio. Tomemos portanto uma política de controle arbitrária $u \in \breve{\mathcal{U}}$. Considerando o caso de horizonte finito, definimos, para T arbitrário, a condição terminal casada $S^T(T) = L = S$ bem como a política de controle u^T tal que $[0, T] \ni t \mapsto u^T(t) = u(t) \in \mathbb{C}^m$. Claramente, $x^T(t) = x(t)$ para $t \in [0, T]$, onde $x^T(t)$ satisfaz a dinâmica (4.1) com u^T e $s = 0$ e $x(t)$ satisfaz (4.1) com u e $t \geq 0$. A mesma condição inicial $(x(0), \theta(0))$ serve a ambos os casos. Agora, porque $S^T(T) = L = S$, a solução da equação de Riccati (6.18) é dada por $S^T(t) = S$, $t \in [0, T]$ (veja a Proposição 54), e conseqüentemente $S^T_{\theta(0)}(0) = S_{\theta(0)}$. Logo, da definição de custo (4.4) e da Proposição 45, temos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{[0,T],S}(\vartheta_0, u^T) \\
&= E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] + E[x(T)^* S_{\theta(T)} x(T)] \\
&= E[x(0)^* S_{\theta(0)} x(0)] + E[\int_0^T \left\|B^*_{\theta(r)} S_{\theta(r)} x(r) + \mathcal{R}u(r)\right\|^2_{\mathcal{R}^{-1}} dr]
\end{aligned} \tag{8.75}$$

Como $u \in \mathcal{U}$, temos da Condição *C2* da Seção 4, que

$$0 \leq E[x(T)^* S_{\theta(T)} x(T)] \leq \|S\|_\infty E[\|x(T)\|^2] \to 0 \text{ quando } T \to \infty$$

Logo, passando (8.75) ao limite e por inspeção de (4.5), obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(\vartheta_0, u) = \lim_{T\to\infty} \mathcal{J}_{[0,T],S}(\vartheta_0, u^T) \\
&= E[\int_0^\infty (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] \\
&= E[x(0)^* S_{\theta(0)} x(0)] + E[\int_0^\infty \left\|B^*_{\theta(r)} S_{\theta(r)} x(r) + \mathcal{R}u(r)\right\|^2_{\mathcal{R}^{-1}} dr]
\end{aligned} \tag{8.76}$$

para $u \in \breve{\mathcal{U}}$ arbitrário e condição inicial ϑ_0. Logo, lembrando que uma solução estabilizante S para a ICARE (8.32) pertence a $\breve{\mathcal{U}}$, o mínimo de (8.76) em $u \in \mathcal{U}$ é conseguido com $\hat{u}$, quando então o segundo termo à direita de (8.76) torna-se zero (lembremos, de (6.16), que $\hat{u}(t) = \mathcal{R}^{-1}B^*_{\theta(t)}S_{\theta(t)}x(t))$. *Ipso facto*, obtemos (8.74).

Por fim, vamos supor que exista uma solução estabilizante $V \neq S$ para a ICARE. Como no caso da solução estabilizante S, concluímos que $E[x(0)^*V_{\theta(0)}x(0)]$ é o mínimo de $\mathcal{J}(\vartheta_0, u)$ em $u \in \mathcal{U}$. Mas o mínimo independe claramente de S e V. Logo,

$$E[x(0)^*S_{\theta(0)}x(0)] = E[x(0)^*V_{\theta(0)}x(0)]$$

para qualquer distribuição da condição inicial $(x(0), \theta(0))$. Especializando $x(0) = x$ e $\theta(0) = i$, com x e i determinísticos e arbitrários em $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{S}$ respectivamente, temos, da equação acima, que $x^*S_ix = x^*V_ix$. Sendo S_i e V_i hermitianas para todo $i \in \mathcal{S}$, resulta que $S = V$. ■

Nota 59 *Vale mencionar que o resultado da Proposição 58 poderia ser conseguido a partir de uma hipótese mais relaxada, qual seja, a de S ser uma solução "fracamente" estabilizante para a ICARE, no sentido de termos $E[\|x(t)\|^2] \to 0$ quando $t \to \infty$ ao invés de (8.1). Neste caso, entretanto, deveríamos introduzir a condição adicional de que $\mathcal{U}$ é não vazio.*

Proposição 60 *Seja (A, B, Λ) SS e $(\bar{\mathcal{Q}}^{1/2}, A, \Lambda)$ SD. Então, dada uma condição terminal $L \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$ arbitrária, o valor $\tilde{S}^T_i(0)$ da solução única $\tilde{S}^T(t) \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$, $t \in [0,T]$, para a equação diferencial (6.18), converge para $S_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ quando $T \to \infty$, para cada $i \in \mathcal{S}$. Também, $S = (S_1, S_2, ...)$ é a solução estabilizante para a ICARE (8.32).*

Prova. A idéia da prova é resgatar um resultado essencial da Proposição 56, qual seja, a de que $\lim_{T\to\infty} S^T_i(0) = S_i$, $i \in \mathcal{S}$, onde $S = (S_1, S_2, ...)$ é uma solução semidefinida positiva para a ICARE (8.32) e $S^T(t)$, $t \in [0,T]$, satisfaz (6.18) com condição terminal nula.

Vamos considerar o problema de controle em horizonte finito da Seção 7 com condição terminal $L \in \mathcal{H}^{n+}_\infty$ arbitrária e especializar a condição inicial $x(0) = x$ e $\theta(0) = i$, x e i determinísticos e arbitrários em $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{S}$ respectivamente. Neste caso temos que

$$
\begin{aligned}
& x^*\tilde{S}_i^T(0)x \\
& = \min_{u\in\mathcal{U}^T} E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] + x(T)^* L_{\theta(T)}x(T)] \\
& \geq \min_{u\in\mathcal{U}^T} E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] = x^* S_i^T(0)x
\end{aligned}
\tag{8.77}
$$

onde $S_i^T(0)$, $i \in \mathcal{S}$, é como definido na Proposição 56. No desenvolvimento da expressão acima, recorremos, nessa ordem, à Proposição 47 conjugadamente à definição (4.4) com $s = 0$ e à última igualdade de (8.33). Tomando o limite em ambos lados de (8.77), resulta

$$
\liminf_{T\to\infty} x^*\tilde{S}_i^T(0)x \geq \liminf_{T\to\infty} x^* S_i^T(0)x = \lim_{T\to\infty} x^* S_i^T(0)x = x^* S_i x
\tag{8.78}
$$

Na expressão acima constatamos, a partir das Proposições 56, 57 e 58, que $\lim_{T\to\infty}$ $x^* S_i^T(0)x$ existe e é tal que $S = (S_1, S_2, ...)$ é a única solução estabilizante para a ICARE (8.32).

Selecionemos agora a política $u(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$, $t \geq 0$, onde $G = (G_1,\, G_2, ...)$ $= \mathcal{G}(S) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$. Por hipótese, $\tilde{S}^T(T) = L$, $x^*\tilde{S}_i^T(0)x$ é o custo mínimo para o problema de controle em horizonte finito definido acima (veja Proposição 47 com $s = 0$). Logo, considerando a restrição de $u(t)$ no intervalo $[0, T]$ (que designa uma política admissível em $\mathcal{U}^T$) e usando a definição (4.4), obtemos

$$
\begin{aligned}
& x^*\tilde{S}_i^T(0)x \\
& \leqslant E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt + x(T)^* L_{\theta(T)}x(T)] \\
& \leqslant E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] + \|L\|_\infty E[\|x(T)\|^2]
\end{aligned}
\tag{8.79}
$$

Agora, tendo em vista o problema de controle em horizonte infinito e sendo $S = (S_1, S_2, ...)$ estabilizante, temos que o limite da integral em (8.79) existe e que $E[\|x(T)\|^2] \to 0$ quando $T \to \infty$. Logo, passando (8.79) ao limite temos que

$$
\begin{aligned}
\liminf_{T\to\infty} x^*\tilde{S}_i^T(0)x & \leqslant \lim_{T\to\infty} E[\int_0^T (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] \\
& = E[\int_0^\infty (\left\|\mathcal{Q}^{1/2}x(t)\right\|^2 + \left\|\mathcal{R}^{1/2}u(t)\right\|^2)dt] = x^* S_i x
\end{aligned}
\tag{8.80}
$$

onde a última igualdade se deve à Proposição 58. As expressões (8.78) e (8.80) nos dizem que $\lim_{T\to\infty} x^*\tilde{S}_i^T(0)x = x^*S_ix$. Como x e i são arbitrários e S_i é hermitiana, $\lim_{T\to\infty} \tilde{S}_i^T(0) = S_i$, para todo $i \in \mathcal{S}$ e $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. ∎

8.6 A Solução Ótima para o Problema de Controle

O teorema que segue sintetiza os resultados das seções anteriores e transfere a estrutura clássica do problema LQ, juntamente com sua forma fechada de solução, para a classe mais geral dos problemas JLQ com conjunto infinito enumerável para a cadeia de Markov associada ao MJLS.

Teorema 61 *Seja (A, B, Λ) SS. Então, para $L = 0 \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, o valor $S_i^T(0)$ da solução única $S^T(t) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, $t \in [0, T]$, para a equação diferencial (6.18), converge para algum $S_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ quando $T \to \infty$, para cada $i \in \mathcal{S}$. Ademais, $S = (S_1, S_2, ...)$ pertence a $\mathcal{H}_\infty^{n+}$ e satisfaz a ICARE (8.32). Suponha ainda que $(\bar{Q}^{1/2}, A, \Lambda)$ seja SD. Então S é estabilizante e a única solução semidefinida positiva para (8.32). Também, para uma condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ arbitrária, o valor $\tilde{S}_i^T(0)$ da solução única $\tilde{S}^T(t) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, $t \in [0, T]$, para (6.18), converge para S_i quando $T \to \infty$, para cada $i \in \mathcal{S}$. Ademais, a politica ótima de controle $\hat{u}$ é dada por $\hat{u}(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$ com $G = (G_1, G_2, ...) = \mathcal{G}(S) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ e produz o custo $\mathcal{J}(\vartheta_0, \hat{u}) = \inf_{u\in\mathcal{U}} \mathcal{J}(\vartheta_0, u) = E[x(0)^*S_{\theta(0)}x(0)]$.*

Prova. *A primeira afirmação do teorema corresponde à Proposição 56. A Proposição 57 afirma que S é estabilizante e a Proposição 58 nos diz que S é a única solução estabilizante para a ICARE (8.32). Uma vez que toda solução semidefinida positiva para a ICARE é estabilizante (Veja a Proposição 57), S é a única solução semidefinida positiva para a ICARE. Os resultados de otimalidade são o conteúdo direto da Proposição 58 e o resultado de convergência para uma condição terminal $L \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ arbitrária vem da Proposição 60 e da propriedade de unicidade de soluções semidefinidas positivas para a ICARE.* ∎

Se especializarmos o nosso caso para o caso sem saltos, as definições de SS e SD da Seção 8 resgatam as definições de estabilizabilidade e detetabilidade do caso linear/ quadratico/ determinístico clássico. De fato, a definição de estabilizabilidade estocástica, devidamente especializada para o caso de um único estado e com $x_0 \in \mathbb{C}^n$ determinístico, lê-se como $\int_0^\infty \|x(t)\|^2 dt < \infty$ onde $\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t)$ com $F_{\theta(t)} = F = A - BG \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ para algum $G \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ e $x_0 \in \mathbb{C}^n$ arbitrário. Uma vez que F independe de $\{\theta\}$ e de modo a permanecermos no contexto da teoria de operadores, visualizemos F como o gerador infinitesimal do semigrupo $T_F(t)$. Nesse caso $x(t) = T_F(t)x_0$. Logo, podemos escrever $\int_0^\infty \|T_F(t)x_0\|^2 dt < \infty$. Utilizando a implicação *3*$\Rightarrow$*1* do Lema 27 com $p = 2$, temos que a expressão acima é o mesmo que dizer que todo autovalor de F tem parte real negativa, i.e., (A, B) é estabilizável no sentido usual. O caso da detetabilidade estocástica segue um procedimento análogo.

Nota 62 *Vimos acima que, quando especializamos o problema com saltos para o caso de um único estado (i.e., fixando a cardinalidade do espaço de estado da cadeia de Markov $\{\theta\}$ em um elemento), o conceito de estabilidade estocástica equivale a termos todo autovalor de F com parte real negativa. Por outro lado, tal especialização implica $\Lambda = \lambda_{11} = 0$, de modo que $\mathcal{D} : \mathbb{M}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ é dado por $\mathcal{D}(H) = FH + HF^*$. Logo, pelo Lema 53, estabilidade estocástica é também equivalente a termos os autovalores de $\mathcal{D}$ (o espectro de $\mathcal{D}$) com partes reais negativas. Isso nos dá portanto uma prova indireta do fato de que todo autovalor de F tem parte real negativa se e somente se este é o caso do operador $H \mapsto FH + HF^*$. Mais ainda, da condição de Lyapunov para estabilidade no caso clássico determinístico (sob o ponto de vista de operadores), é sabido que todo autovalor de F tem parte real negativa se e somente se este é o caso de $H \mapsto F^*H + HF$. Isso estende a equivalência acima para os operadores F, $H \mapsto FH + HF^*$ e $H \mapsto F^*H + HF$.*

Capítulo 9

A Equação de Lyapunov

9.1 Introdução

Ji et al (vide o teorema 1 em [45]) estabeleceram o seguinte resultado de estabilidade para o caso de modelos MJLS a tempo contínuo e dotados de um conjunto de cardinalidade finita para o espaço de estado da cadeia de Markov: *um MJLS é estocasticamente estabilizável se e somente se a equação de Lyapunov associada tem uma única solução positiva definida.* Nosso objetivo, neste capítulo, é estender esse resultado para o caso infinito enumerável [35].

Mostraremos, no teorema único deste capítulo, que (A, B, Λ) é estocasticamente estabilizável se e somente se o sistema infinito enumerável de equações de Lyapunov associado, dado por (9.1), tem uma única solução em $\breve{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$, i.e., uma solução estritamente positiva uniformemente limitada na norma.

9.2 Estabilizabilidade Estocástica e a Equação de Lyapunov Associada ao MJLS

Um exame sucinto da prova do teorema 1 de [45] mostra que um aspecto fundamental na parte de "suficiência" da prova é o uso explícito do fato da cadeia de Markov tomar valores num conjunto finito. Tendo em vista não ser possível adequar a técnica usada em [45] ao nosso caso, contornamos o problema fazendo uso da teoria de operadores e, adicionalmente, do resultado de equivalência do Lema 53.

Na parte de "necessidade" da prova do único teorema do capítulo, aproveitamos a técnica de prova dada em [45]. No entanto, alguns aspectos vêm à tona quando passamos à estrutura infinita enumerável e provocam algumas diferenças significativas com relação a prova em [45]. Uma delas é que a operação de diferenciação passa a enfocar certas decomplexificações ${}^{\mathbb{R}}g$ ao invés das funções originais associadas g. Adicionalmente, nos beneficiamos significativamente do Lema 53, citado acima, no sentido de estender rigorosamente um certo resultado auxiliar próprio ao caso de dimensão finita.

Teorema 63 *Seja $G = (G_1, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$. Então*

(a) O sistema (A, B, Λ) é SS com G estabilizante se, para algum $V \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$, existe $S \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$ satisfazendo o conjunto infinito enumerável de equações de Lyapunov interconectadas dado por

$$F_i^* S_i + S_i F_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} S_j = -V_i, \quad i \in \mathcal{S} \tag{9.1}$$

onde $F_i = A_i - B_i G_i$, $i \in \mathcal{S}$.

(b) O sistema (A, B, Λ) é SS com G estabilizante somente se, para todo $V \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$, existe $S \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$ satisfazendo o conjunto infinito enumerável de equações de Lyapunov interconectadas dado por (9.1), onde $F_i = A_i - B_i G_i$, $i \in \mathcal{S}$. Mais ainda S é a única solução para (9.1).

Prova. $\Leftarrow$ (parte (a)):

Definimos, primeiramente, a função de Lyapunov $\phi_S : \mathcal{H}_1^{n+} \to \mathbb{R}$, $S \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, tal que

$$\phi_S(H) = \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_i H_i)$$

onde temos que $0 < \phi_S(H) \leqslant n \|S\|_\infty \|H\|_1 < \infty$ para S e H não nulos. Tomamos, a seguir, a função continuamente diferenciável $t \mapsto Q(t) \in \mathcal{H}_1^{n+}$dada por (6.7) e inicializada por $Q^{0+} \in \mathcal{H}_1^{n+}$ arbitrário, bem como $S \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$ satisfazendo (9.1), equipada com $V \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$ igualmente arbitrário. Com tais elementos em mãos, seja a seguinte expressão para a derivada de $\phi_S(Q(t)$:

$$\frac{d}{dt}\phi_S(Q(t)) = \frac{d}{dt}\lim_{M\to\infty}\sum_{i=1}^{M} tr(S_iQ_i(t)) = \lim_{M\to\infty}\sum_{i=1}^{M} tr(S_i\dot{Q}_i(t))$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_i\mathcal{D}_i(Q(t))) = \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_i\{F_iQ_i(t) + Q_i(t)F_i^* + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ji}Q_j(t)\})$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_i\{F_iQ_i(t) + Q_i(t)F_i^*\}) + tr\sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_{ji}S_iQ_j(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_i\{F_iQ_i(t) + Q_i(t)F_i^*\}) + tr\sum_{i,j=1}^{\infty}\lambda_{ij}S_jQ_i(t)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} tr(\{S_iF_i + F_i^*S_i + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}S_j\}Q_i(t)) = -\sum_{i=1}^{\infty} tr(V_iQ_i(t))$$
$$= -\phi_V(Q(t)) \tag{9.2}$$

No desenvolvimento acima, lançamos mão, seqüencialmente, dos seguintes fatos: $\sum_{i=1}^{M} tr(S_iQ_i(t))$ converge uniformemente para $\phi_S(Q(t))$ em qualquer intervalo finito e não vazio de alguma classe de intervalos (arbitrariamente pequenos) cuja união reproduza a semireta não negativa, o operador diferencial $\frac{d}{dt}$ é linear, a equação (6.8), a equação (6.4), o fato de que $tr(AB) = tr(BA)$ para A, $B \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, continuidade e linearidade do operador traço e finalmente (9.1). Ainda para justificar (9.2), temos que

$$\frac{d}{dt}tr(S_iQ_i(t)) = \sum_{l=1}^{n}\frac{d}{dt}(S_iQ_i(t))_{ll} = \sum_{l=1}^{n}(\frac{d}{dt}S_iQ_i(t))_{ll} = tr(S_i\dot{Q}_i(t))$$

onde usamos o fato de que a norma usual em $\mathbb{C}$ coincide com a norma induzida por $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ no subespaço linear $\{[a_{ij}]_{i,j=1,..,n} : a_{i_0j_0} = y \in \mathbb{C},\ a_{ij} = 0,\ i \neq i_0,\ j \neq j_0\}$, i_0,j_0 $\in \{1,..,n\}$ arbitrários. Para vermos que $Q(t) \in \mathcal{H}_1^{n+}$, consideramos a Proposição 33 e o fato de que, para qualquer $Q^{0+} \in \mathcal{H}_1^{n+}$, podemos sempre achar v.as. x_0 e θ_0 tais que $Q_i^{0+} = E[x_0x_0^*1_{\{\theta_0=i\}}]$, $i \in \mathcal{S}$.

Vamos agora supor que existe uma constante positiva ρ, que pode depender de S e V, tal que

$$\phi_V(Q(t)) > \rho\phi_S(Q(t)),\ t \geq 0 \tag{9.3}$$

Logo, definindo $\psi(t) = \phi_S(Q(t))$ e usando (9.2), temos que $\psi(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\psi(t) < -\rho\psi(t), & t \geq 0 \\ \psi(0) = \psi^0 = \phi_S(Q^{0+}), & Q^{0+} \in \mathcal{H}_1^{n+} \end{cases}$$

Com vistas num teorema de comparação, definimos a equação diferencial escalar

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\zeta(t) = -\rho\zeta(t),\ t \geq 0 \\ \zeta(0) = \psi^0 \end{cases}$$

satisfeita que é por $\zeta(t) = \psi^0 e^{-\rho t}$, $t \geq 0$. Agora, $\psi(t)$ e $\zeta(t)$ são funções a valores nos reais, contínuas e continuamente diferenciáveis (lembremos que $Q(t)$ é contínua e continuamente diferenciável) e $\psi(0) = \zeta(0)$. Logo , podemos lançar mão do Lema 79 do Apêndice, que nos diz que

$$0 \leqslant \psi(t) < \zeta(t) = \psi^0 e^{-\rho t},\ t \geq 0$$

onde $\psi^0 \geq 0$.

Posto que $S \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$, existe $\alpha > 0$ tal que $S_i > \alpha I$ para todo $i \in \mathcal{S}$. Como também $Q_i(t) \geq 0$, temos que $tr(S_iQ_i(t)) \geq tr(\alpha I Q_i(t))$. Logo,

$$\psi^0 e^{-\rho t} > \psi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_iQ_i(t)) \geq \sum_{i=1}^{\infty} tr(\alpha I Q_i(t))$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} tr(Q_i(t)) \geq \alpha \sum_{i=1}^{\infty} \|Q_i(t)\| = \alpha \|Q(t)\|_1$$

onde usamos o fato de que $tr(A) \geq \|A\|$ para toda matriz A semidefinida positiva. Integrando a expressão acima e considerando a Proposição 30 (com Q, $\mathcal{H}_1^n$ e $\mathcal{D}$ nos papéis de y, Y and $\mathcal{A}$, respectivamente) temos, para todo $Q^{0+} \in \mathcal{H}_1^{n+}$, que,

$$\int_0^\infty \left\|T(t)Q^{0+}\right\|_1 dt < \frac{\phi_S(Q^{0+})}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\rho t} dt = \frac{\phi_S(Q^{0+})}{\alpha\rho} < \infty$$

Por sua vez, da Nota 5, existe X^+, X^-, Y^+ e Y^- em $\mathcal{H}_1^{n+}$ tal que $Q^0 = (X^+ - X^-)$ $+\iota\,(Y^+ - Y^-)$, qualquer que seja $Q^0 \in \mathcal{H}_1^n$. Logo

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_0^\infty \|T(t)Q^0\|_1 dt = \int_0^\infty \|T(t)\{(X^+ - X^-) + \iota\,(Y^+ - Y^-)\}\|_1 dt \\ &\leqslant \textstyle\int_0^\infty \|T(t)X^+\|_1 dt + \int_0^\infty \|T(t)X^-\|_1 dt \\ &+ \textstyle\int_0^\infty \|T(t)Y^+\|_1 dt + \int_0^\infty \|T(t)Y^-\|_1 dt < \infty \end{aligned}$$

Daí, usando a implicação (*3* $\Rightarrow$ *1*) do Lema (27) vem que

$$\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$$

Mas, pelo Lema 53, isso significa dizer que (A, B, Λ) é estocasticamente estabilizável com $G = (G_1, G_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ estabilizante.

Para concluir esta parte da prova, mostremos que (9.3) de fato vale. Temos que S é uniformemente limitada em norma e $S_i \geq 0$, $i \in \mathcal{S}$, o que impõe $S_i < \beta I$ para alguma constante finita e positiva β. Por sua vez $V \in \check{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$, de modo que existe $\eta > 0$ tal que $V_i > \eta I$. Conseqüentemente, $V_i > \frac{\eta}{\beta} S_i$, $i \in \mathcal{S}$. Agora, como $Q_i(t) \geq 0$ temos, definindo $\rho = \frac{\eta}{\beta}$, que $tr(V_i Q_i(t)) > \rho tr(S_i Q_i(t))$, o que implica

$$\sum_{i=1}^{\infty} tr(V_i Q_i(t)) > \rho \sum_{i=1}^{\infty} tr(S_i Q_i(t))$$

e daí(9.3).

$\Rightarrow$ (parte (b)):

Seja a política estabilizante de controle $u(t) = -G_{\theta(t)}x(t)$, $t \geq 0$. Desse modo o sistema (A, B, Λ) da Seção 4 se lê

$$\dot{x}(t) = F_{\theta(t)}x(t), t \geq 0, \qquad F_{\theta(t)} = A_{\theta(t)} - B_{\theta(t)}G_{\theta(t)} \tag{9.4}$$

Tomamos um caso particular da condição inicial, dada por $x(0) = x$ e $\theta(0) = i$, onde x e i são valores determinísticos e arbitrários tomados em $\mathbb{C}^n$ e $\mathcal{S}$ respectivamente.

Para $V \in \check{\mathcal{H}}_{\infty}^{n+}$ arbitrário e $0 \leqslant t < T < \infty$, consideremos a expressão

$$\begin{aligned}
&E_{x(t),\theta(t)} \int_t^T x(\tau)^* V_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \\
&= E_{x(t),\theta(t)} [\int_t^T (M(\tau, t, \theta(t), \zeta)x(t))^* V_{\theta(\tau)} M(\tau, t, \theta(t), \zeta)x(t) d\tau] \\
&= x(t)^* S_{\theta(t)}(T - t)x(t)
\end{aligned} \tag{9.5}$$

onde $S_{\theta(t)}(T-t)$ é bem definido em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ e expresso por

$$S_{\theta(t)}(T - t) = E_{\theta(t)}[\int_t^T M(\tau, t, \theta(t), \zeta)^* V_{\theta(\tau)} M(\tau, t, \theta(t), \zeta) d\tau]$$

e onde $M(\cdot) \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ é determinado no Lema 80. Observamos que o lado esquerdo de (9.5) não se altera se deslocarmos t e T de um mesmo valor e preservarmos os mesmos valores para as v.as. de condicionamento da expectância. Nesse sentido, $S_{\theta(t)}(\cdot)$, de fato, depende apenas de $T - t$.

Como $V_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$, resulta claramente de (9.5) que $S_i(T-t) \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ e que

$$0 \leqslant S_i(T_1 - t) \leqslant S_i(T_2 - t) \tag{9.6}$$

para todo $T_1, T_2 \in (t, \infty)$, $T_1 < T_2$ e $i \in \mathcal{S}$. Vamos agora supor que exista a seguinte cota uniforme na ordenação parcial das matrizes semidefinidas positivas:

$$S_i(T-t) \leqslant dI,\ i \in \mathcal{S},\ T \in (t, \infty) \tag{9.7}$$

onde d é alguma constante independente de i e T. Logo, de (9.6) e (9.7) e de um resultado clássico de monotonicidade de matrizes semidefinidas positivas, existe $S_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que

$$lim_{T\to\infty} S_i(T-t) = S_i. \tag{9.8}$$

Fixemos arbitrariamente i. Tendo em vista (9.7) e (3.1), obtemos $\|S_i(T-t)\| \leqslant d$ para todo $T \in (t, \infty)$ e daí$\|S_i\| \leqslant d$. Consequentemente $S \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. Mostremos agora que, de fato, $S \in \check{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$. Tendo em vista que $V_i \geq \alpha I$, $i \in \mathcal{S}$, para algum $\alpha > 0$, que as trajetórias de $\{x\}$ são contínuas à direita e ainda, da propriedade de monotonicidade, que $S_i \geq S_i(T-t)$, obtemos, para algum T fixo, que

$$\begin{aligned}
&x^* S_i x \geq x^* S_i(T-t)x = E_{x(t)=x,\theta(t)=i} \int_t^T x(\tau)^* V_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \\
&\geq E_{x(t)=x,\theta(t)=i} \int_t^{t+\delta} x(\tau)^* V_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \geq E_{x(t)=x,\theta(t)=i} \int_t^{t+\delta} x(\tau)^* \alpha I x(\tau) d\tau \\
&= x^* \alpha \delta I x + o(\delta) \geq x^* \alpha \delta I x - \gamma\delta = x^*(\alpha - \gamma)\delta I x
\end{aligned}$$

onde tomamos $0 < \gamma < \alpha$ e $\delta = \delta(\gamma)$ suficientemente pequeno de modo a obter a última desigualdade. Visto que x é arbitrário, existe então $\eta = (\alpha - \gamma)\delta > 0$ para o qual $S_i \geq \eta I$, $i \in \mathcal{S}$.

Definindo agora $g^T(t, x, i) = x^* S_i(T-t)x$ e usando (9.5), obtemos a seguinte representação para

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \{E_{x(t),\theta(t)}[g^T(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g^T(t, x(t), \theta(t))]\}: \tag{9.9}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \{E_{x(t),\theta(t)}[g^T(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g^T(t, x(t), \theta(t))]\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \{E_{x(t),\theta(t)}[x(t+h)^* S_{\theta(t+h)}(T-(t+h))x(t+h) - x(t)^* S_{\theta(t)}(T-t)x(t)]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[E_{x(t+h),\theta(t+h)}[\int_{t+h}^{T} x^*(\tau)V_{\theta(\tau)}x(\tau)d\tau] \\
&- E_{x(t),\theta(t)}[\int_{t}^{T} x^*(\tau)V_{\theta(\tau)}x(\tau)d\tau]]\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[\int_{t+h}^{T} x^*(\tau)V_{\theta(\tau)}x(\tau)d\tau - \int_{t}^{T} x^*(\tau)V_{\theta(\tau)}x(\tau)d\tau]\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[-\int_{t}^{t+h} x^*(\tau)V_{\theta(\tau)}x(\tau)d\tau]\} \\
&= -\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[x^*(t)V_{\theta(t)}x(t)h + o(h)]\} \\
&= -x^*(t)V_{\theta(t)}x(t)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, de (9.7) e de (3.1), vem que $S(T-t) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$. Também, de (9.5), $t \mapsto S_i(T-t)$, $i \in \mathcal{S}$, é diferenciável. Conseqüentemente, por (9.4) e via aplicação direta de (7.7), obtemos uma outra representação para 9.9:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[g^T(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g^T(t, x(t), \theta(t))]\} \\
&= x(t)^*\{\dot{S}_{\theta(t)}(T-t) + F_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}(T-t) + S_{\theta(t)}(T-t)F_{\theta(t)} + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{\theta(t)j}S_j(T-t)\}x(t)
\end{aligned} \tag{9.10}
$$

Das representações acima temos que

$$
\begin{aligned}
-x^*(t)V_{\theta(t)}x(t) &= x(t)^*\{\dot{S}_{\theta(t)}(T-t) + F_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}(T-t) \\
&\quad + S_{\theta(t)}(T-t)F_{\theta(t)} + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{\theta(t)j}S_j(T-t)\}x(t)
\end{aligned} \tag{9.11}
$$

Como (9.11) é válida para todo $x(t)$, resulta que

$$
-V_{\theta(t)} = \dot{S}_{\theta(t)}^T(t) + F_{\theta(t)}^* S_{\theta(t)}(T-t) + S_{\theta(t)}(T-t)F_{\theta(t)} + \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{\theta(t)j}S_j(T-t)
$$

Agora, tendo em vista que $S_i(T-t)$ converge para S_i para todo t, temos que $S_i(T-t)$ é invariável no tempo quando $T \to \infty$. Logo, tomando o limite quando $T \to \infty$ na expressão acima e denotando i ao invés de $\theta(t)$, podemos dizer que, para $V \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$ arbitrário, existe um único $S \in \breve{\mathcal{H}}_\infty^{n+}$ dado por (9.5) e (9.8), que satisfaz (9.1).

Para finalizar, mostremos que (9.7) vale. Uma vez que $G \in \mathcal{H}_\infty^{n,m}$ é estabilizante temos, do Lema 53, que $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{D})\} < 0$ com $\mathcal{D}$ dado por (6.4) e (6.5). Agora, $\mathcal{D}$ gera um semigrupo uniformemente contínuo, digamos $T(t)$, de modo que podemos assumir como equivalentes as Afirmativas *1*, *2* e *3* do Lema 27 bem como aplicar o Corolário 28, obtendo, para alguma constante finita β, que

$$\int_0^\infty \left\|T(t)Q^0\right\|_1 dt \leqslant \beta \left\|Q^0\right\|_1$$

para todo $Q^0 \in \mathcal{H}_1^n$ e, em particular, para $Q^{0+} = (Q_1^{0+}, Q_2^{0+}, \ldots) \in \mathcal{H}_1^{n+}$, $Q_j^{0+} = E[x(0)x(0)^* 1_{\{\theta(0)=j\}}]$. Ainda, da Proposição 30 (com $Q(t)$, $\mathcal{H}_1^n$ e $\mathcal{D}$ no papel de $y(t)$, Y e $\mathcal{A}$, respectivamente), da Proposição 33 e como $Q(t)$, dado por (6.2) e (6.3), é contínua e continuamente diferenciável, podemos escrever que

$$\int_0^\infty \left\|Q(t)\right\|_1 dt \leqslant \beta \left\|Q^{0+}\right\|_1 \tag{9.12}$$

onde $Q(t)$ se expressa por (6.2) e (6.3). Por outro lado, com n designando a dimensão de $x(t)$ e usando (6.9) e (8.21), segue-se que $\left\|Q^{0+}\right\|_1 \leqslant E[\left\|x(0)\right\|^2] = \left\|x\right\|^2$ (que independe portanto de i) e $E[\left\|x(t)\right\|^2] \leqslant n \left\|Q(t)\right\|_1$. Conseqüentemente, definindo $d_1 = n\beta$, que independe de x e i, podemos reescrever (9.12) como

$$\int_0^\infty E_{x(0)=x,\theta(0)=i}[\left\|x(t)\right\|^2]dt \leqslant d_1 \left\|x\right\|^2 \tag{9.13}$$

onde usamos o fato de que $E_{x(0)=x,\theta(0)=i}[\left\|x(t)\right\|^2] = E[\left\|x(t)\right\|^2]$ para o caso da condição inicial $(x(0), \theta(0))$ determinística. Logo, de (9.5), usando Fubini e definindo $d = \left\|V\right\|_\infty d_1$, temos

$$\begin{aligned}
& x^* S_i(T-t)x = E_{x(0)=x,\theta(0)=i} \int_t^T x(\tau)^* V_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \\
& = E_{x(0)=x,\theta(0)=i} \int_0^{T-t} x(\tau)^* V_{\theta(\tau)} x(\tau) d\tau \leq \left\|V\right\|_\infty E_{x(0)=x,\theta(0)=i} \int_0^{T-t} \left\|x(\tau)\right\|^2 d\tau \\
& \leq \left\|V\right\|_\infty E_{x(0)=x,\theta(0)=i} \int_0^\infty \left\|x(\tau)\right\|^2 d\tau \leq d \left\|x\right\|^2 = x^* dIx
\end{aligned}$$

Como x é arbitrário, obtemos (9.7). ■

Capítulo 10

Conclusões

Estendemos alguns resultados disponíveis na literatura, relativos à problemas JLQ com espaço de estado finito, para o caso infinito enumerável. Além disso, relaxamos a condição estrutural de observabilidade (no sentido probabilístico) encontrada em [45] para a condição SD (ver Definição 49). Este último resultado permanece como contribuição, mesmo especializando o nosso problema ao caso de espaço de estado finito.

A especialização ao caso de um único estado para a cadeia de Markov associada ao MJLS (caso sem saltos) resgata o problema deterministico LQ: o controle ótimo nos dois casos coincidem, as condições SS e SD (ver Definições 48 e 49) se reconciliam com o conceito usual de estabilizabilidade e detetabilidade e a propriedade espectral do operador $\mathcal{D}$, dada no Lema 53, reduz-se à condição usual "autovalores da matriz do sistema determinístico com parte real negativa". Assim, transferimos a estrutura clássica do problema LQ, juntamente com sua forma fechada de solução, para a classe mais geral dos problemas JLQ com conjunto infinito enumerável para a cadeia de saltos markovianos.

O Lema 53 mostra a equivalência entre a condição SS ou SD e determinada propriedade do espectro do operador $\mathcal{D}$, o operador linear em espaço de Banach de dimensão infinita dado por (6.4) e (6.5). Este lema de equivalência, em conjunção com a análise de existência e unicidade de soluções para a ICARE são os elementos centrais na obtenção do resultado de otimalidade dado no Teorema 61. A teoria de semigrupo, de sistema de evolução e a teoria de operadores em espaços de dimensão infinita forjaram, por sua vez, o arcabouço para a obtenção da maior parte dos lemas e proposições apresentados neste trabalho.

Definimos o problema no corpo dos complexos (o que é mais usual no contexto da teoria de operadores), ao invés dos números reais (mais usual no contexto dos problemas de controle) para viabilizar certas técnicas de prova. Isso nos levou a desenvolver certa versão do gradiente e a forma da aproximação linear para funções não necessariamente holomorfas (vide Lemas 14 e 16 e a adaptação da técnica de decomplexificação descrita em [1], dada em (5.2)). Embora pertinentes a um tema básico, estas noções parecem inexploradas, ao menos na literatura de controle.

Analisando a questão de estabilidade à luz do conjunto infinito enumerável de equações de Lyapunov interconectadas associadas ao MJLS, dadas por (9.1), obtemos o seguinte resultado: existe solução para este conjunto de equações se e somente se o sistema é estocasticamente estabilizável.

Finalmente, através de um contraexemplo, mostramos que os importantes conceitos de estabilidade estocástica e estabilidade na média quadrática não são mais equivalentes quando consideramos, ao invés de um conjunto finito, um conjunto infinito enumerável para a cadeia de saltos markovianos, o que dá uma indicação das diferenças entre os dois casos.

Capítulo 11

Apêndice

11.1 Adendo à Nota 12

O problema consiste em obter a decomplexificação ${}^{\mathrm{R}}A : {}^{\mathrm{R}}\mathbb{C}^n \longrightarrow {}^{\mathrm{R}}\mathbb{C}^r$ do operador linear $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^r$, sendo $A = \alpha + \iota\beta$ e α e β matrizes com elementos reais.

Logo, para $x = x_{\mathrm{Re}} + \iota x_{\mathrm{Im}} \in \mathbb{C}^n$ tomado arbitrariamente , temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}^r \ni g\,(x) &= Ax = (\alpha + \iota\beta)(x_{\mathrm{Re}} + \iota x_{\mathrm{Im}}) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{Re}} \\ x_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix} + \iota \begin{pmatrix} \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{Re}} \\ x_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

cuja decomplexificação é dada por

$$
\mathbb{R}^{2r} \ni {}^{\mathrm{R}}(g\,(x)) = {}^{\mathrm{R}}(Ax) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\mathrm{Re}} \\ x_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} {}^{\mathrm{R}}x
$$

Por (5.3), obtemos

$$
{}^{\mathrm{R}}A\left({}^{\mathrm{R}}x\right) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} {}^{\mathrm{R}}x.
$$

Logo, ${}^{\mathrm{R}}A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, ou seja, a resposta em [1].

11.2 Prova do Lema 16

Vemos facilmente que o funcional ${}^{\mathrm{R}}g$ é diferenciável nas variáveis reais t, x_{Re} e x_{Im}. Daí, a obtenção da derivada de g na variável t é imediata e a primeira igualdade de (5.8) é conseqüência direta da definição do elemento ${}^{\mathrm{R}}x \in \mathbb{R}^{2n}$ de acordo com (5.1). Para o caso da segunda igualdade de (5.8), tomemos t fixo e simplifiquemos a notação escrevendo, respectivamente, S, $g(x)$ e ${}^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x)$ ao invés de $S_m(t)$, $g(t,x)$ e ${}^{\mathrm{R}}g(t,{}^{\mathrm{R}}x)$. Logo, de (5.2) e (5.7), vem que

$$\mathbb{R} \ni {}^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x) = g(x) = x^*Sx = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\bar{x}_i x_j$$

onde $x_l{=}x_{l\,\mathrm{Re}}{+}\iota x_{l\,\mathrm{Im}}$, $l{=}1,..,n$. Logo, podemos visualizar o somatório acima como uma função das variáveis reais $x_{l\,\mathrm{Re}}$ e $x_{l\,\mathrm{Im}}$. Notemos que, embora o somatório seja um número real, cada um de seus termos pode ser complexo. Agora, com o fito de calcular as l-ésimas derivadas parciais $\frac{\partial^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{l\,\mathrm{Re}}}$ e $\frac{\partial^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{l\,\mathrm{Im}}}$ e lembrando que $S = S^*$, reescrevamos ${}^{\mathrm{R}}g$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
{}^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x) &= \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}\bar{x}_i x_j \\
&= \Big(\sum_{i=1,i\neq l}^{n} s_{il}\bar{x}_i x_l\Big) + \Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}\bar{x}_l x_j\Big) + s_{ll}\bar{x}_l x_l + \textit{termos sem o índice } l \\
&= \overline{\Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}\bar{x}_l x_j\Big)} + \Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}\bar{x}_l x_j\Big) + s_{ll}\bar{x}_l x_l + \textit{termos sem o índice } l
\end{aligned}$$

Logo, tendo-se em mente que $\frac{\partial\, \overline{f(x_0)}}{\partial x_{\mathrm{Re(Im)}}} = \overline{\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_{\mathrm{Re(Im)}}}}$, obtemos

$$\frac{\partial^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{l\,\mathrm{Re(Im)}}} = \overline{\Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_{l\,\mathrm{Re(Im)}}}\Big)} + \Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_{l\,\mathrm{Re(Im)}}}\Big) + s_{ll}\frac{\partial \bar{x}_l x_l}{\partial x_{l\,\mathrm{Re(Im)}}}$$

Ademais, uma vez que $\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_{l\,\mathrm{Re}}} = 1$, $\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial x_{l\,\mathrm{Im}}} = -\iota$ e

$$\frac{\partial}{\partial x_{l\,\mathrm{Re(Im)}}} s_{ll}\bar{x}_l x_l = s_{ll}\frac{\partial}{\partial x_{l\,\mathrm{Re(Im)}}}\left(x_{l\,\mathrm{Re}}^2 + x_{l\,\mathrm{Im}}^2\right) = 2s_{ll}x_{l\,\mathrm{Re(Im)}} = 2\left(s_{ll}x_l\right)_{\mathrm{Re(Im)}}$$

segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{\mathrm{R}}g({}^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{l\,\mathrm{Re}}} &= \overline{\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j} + \Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j\Big) + 2\left(s_{ll}x_l\right)_{\mathrm{Re}} \\
&= 2\Big\{\Big(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j\Big)_{\mathrm{Re}} + \left(s_{ll}x_l\right)_{\mathrm{Re}}\Big\} = 2\Big(\sum_{j=1}^{n} s_{lj}x_j\Big)_{\mathrm{Re}} \\
&= 2\{(l - \textit{ésima linha de } S)x\}_{\mathrm{Re}}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^{\mathrm{R}} g(^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{l\,\mathrm{Im}}} &= \overline{(-\iota)\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j} + (-\iota)\,(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j) + 2\,(s_{ll}x_l)_{\mathrm{Im}} \\
&= 2\{((-\iota)\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j)_{\mathrm{Re}} + (s_{ll}x_l)_{\mathrm{Im}}\} \\
&= 2\{(\sum_{j=1,j\neq l}^{n} s_{lj}x_j)_{\mathrm{Im}} + (s_{ll}x_l)_{\mathrm{Im}}\} = 2(\sum_{j=1}^{n} s_{lj}x_j)_{\mathrm{Im}} \\
&= 2\{(l - \textit{ésima linha de } S)x\}_{\mathrm{Im}}
\end{aligned}
$$

Logo, podemos expressar o gradiente associado às variáveis x_{Re} and x_{Im} por

$$
\begin{aligned}
\nabla_{x_{\mathrm{Re(Im)}}}{}^{\mathrm{R}}g(^{\mathrm{R}}x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^{\mathrm{R}} g(^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{1\,\mathrm{Re(Im)}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial^{\mathrm{R}} g(^{\mathrm{R}}x)}{\partial x_{n\,\mathrm{Re(Im)}}} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \{(1^a \textit{ linha de } S)x\}_{\mathrm{Re(Im)}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \{(n - \textit{ésima linha de } S)x\}_{\mathrm{Re(Im)}} \end{pmatrix} \\
&= 2 \begin{pmatrix} (1^a \textit{ linha de } S)x \\ \vdots \\ \vdots \\ (n - \textit{ésima linha de } S)x \end{pmatrix}_{\mathrm{Re(Im)}} = 2\,(Sx)_{\mathrm{Re(Im)}}
\end{aligned}
$$

o que nos leva à segunda igualdade de (5.8).

Finalmente, definindo $v = Sx$, a expressão acima propicia o seguinte resultado:

$$
\begin{aligned}
\nabla_{^{\mathrm{R}}x}{}^{\mathrm{R}}g(^{\mathrm{R}}x)'\,^{\mathrm{R}}w &= \begin{pmatrix} \nabla_{x_{\mathrm{Re}}}{}^{\mathrm{R}}g(^{\mathrm{R}}x) \\ \nabla_{x_{\mathrm{Im}}}{}^{\mathrm{R}}g(^{\mathrm{R}}x) \end{pmatrix}'\,^{\mathrm{R}}w = 2\begin{pmatrix} (Sx)_{\mathrm{Re}} \\ (Sx)_{\mathrm{Im}} \end{pmatrix}'\,^{\mathrm{R}}w \\
&= 2((Sx)'_{\mathrm{Re}}\,w_{\mathrm{Re}} + (Sx)'_{\mathrm{Im}}\,w_{\mathrm{Im}}) = 2\{v'_{\mathrm{Re}}w_{\mathrm{Re}} + v'_{\mathrm{Im}}w_{\mathrm{Im}}\} \\
&= 2\{\frac{(v+\bar{v})'}{2}\frac{(w+\bar{w})}{2} + (-\iota)\,\frac{(v-\bar{v})'}{2}\,(-\iota)\,\frac{(w-\bar{w})}{2}\} \\
&= v'\bar{w} + \bar{v}'w = (v'\bar{w})' + \bar{v}'w = w^*v + v^*w = w^*Sx + x^*Sw
\end{aligned}
$$

do que obtemos (5.9).

11.3 Prova do Lema 27

Consideremos, inicialmente, os seguintes resultados auxiliares.

Proposição 64 *Seja $S(t)$ um semigrupo C_0 em um espaço de Banach Y. Então, para $\omega \in \mathbb{R}$ arbitrário, $T(t) = \exp(-\omega t)S(t)$ é também um semigrupo C_0 e $\mathcal{A}_s$ é o gerador infinitesimal de $S(t)$ se e somente se $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s - \omega I$ é o gerador infinitesimal de $T(t)$. Ademais, $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_s)$.*

Prova. A prova (1^{a} parte) é uma extensão direta de um argumento de [61, pg 20] para $\omega \geq 0$, ao caso onde $\omega \in \mathbb{R}$. Para vermos que $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_s)$, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{T(t)y - y}{t} &= \frac{\exp(-\omega t)S(t)y - S(t)y + S(t)y - y}{t} \\ &= \frac{(\exp(-\omega t) - 1)S(t)y}{t} + \frac{S(t)y - y}{t} \end{aligned} \tag{11.1}$$

Agora,

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{(\exp(-\omega t) - 1)S(t)y}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{(\exp(-\omega t) - 1)}{t} \lim_{t\downarrow 0} S(t)y = -\omega \lim_{t\downarrow 0} S(t)y$$

de modo que o limite existe para todo $y \in Y$. Logo, de (11.1) e tendo-se em conta as definições de $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_s)$ e $\mathfrak{D}(\mathcal{A})$, obtemos que estes domínios são os mesmos. ■

Proposição 65 *Seja $T(t)$ um semigrupo C_0 em um espaço de Banach Y, satisfazendo $\|T(t)\| \leqslant M$, $t \geq 0$, para algum $M \geq 1$ e seja $\mathcal{A}$ seu gerador infinitesimal. Então o conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ é tal que*

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \tag{11.2}$$

Prova. Do Teorema 5.2, item ii, parte "somente se " da prova em [61, pg 19], $\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\}$. Analogamente à parte da Nota 5.4, Capítulo 1, de [61], podemos dizer que, se $\lambda > 0$ está no conjunto resolvente de $\mathcal{A}$, então todo complexo λ satisfazendo $\operatorname{Re}\lambda > 0$ também pertence a esse conjunto. Logo, a expressão acima pode ser estendida para (11.2). ■

Procedamos agora à prova do Lema 27.

(*2* $\Rightarrow$ *4*) é facilmente provada uma vez que, da Afirmação *2*,

$$\int_0^\infty \|T(t)\|^p \, dt \leqslant \int_0^\infty M^p \exp(-p\omega t) dt = \frac{M^p}{p\omega} < \infty$$

Este resultado e o fato de que, para todo $y \in Y$,

$$\int_0^\infty \|T(t)y\|^p \, dt \leqslant \|y\|^p \int_0^\infty \|T(t)\|^p \, dt \leqslant \|y\|^p \frac{M^p}{p\omega} < \infty$$

propiciam a prova do Corolário 28.

(*4* $\Rightarrow$ *3*) é imediata e (*3* $\Rightarrow$ *2*) é obtida no teorema 4.4.1 de [61, pg 116,].

Agora, para (*2* $\Rightarrow$ *1*), definamos $S(t) = \exp(\omega t)T(t)$, $t \geq 0$ que, da Proposição 64, é também um semigrupo C_0. Logo

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|\exp(\omega t)T(t)\| = \exp(\omega t)\,\|T(t)\| \\ &\leqslant \exp(\omega t)M\exp(-\omega t) = M \end{aligned}$$

onde a desigualdade, por hipótese, é válida. Denominando $\mathcal{A}_s$ o gerador infinitesimal de $S(t)$ e em vista da Proposição 65, temos que

$$\rho(\mathcal{A}_s) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \tag{11.3}$$

Uma vez que $T(t) = \exp(-\omega t)S(t)$, temos, pela Proposição 64, que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s - \omega I$ e $\mathfrak{D}(\mathcal{A}) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_s)$. Agora, da definição do conjunto resolvente e denotando por $\mathfrak{P}$ certas propriedades fixas e bem definidas, podemos dizer que

$$\rho(\mathcal{A}_s) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A}_s \text{ satisfaz } \mathfrak{P}\} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{A}) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A} \text{ satisfaz } \mathfrak{P}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda + \omega)\, I - \mathcal{A}_s \text{ satisfaz } \mathfrak{P}\} \end{aligned}$$

o que significa dizer que $\rho(\mathcal{A}) = \rho(\mathcal{A}_s) - \omega$. Logo, de (11.3), $\rho(\mathcal{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -\omega\}$ que é o mesmo que dizer que $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} \leqslant -\omega$. Como por hipótese $-\omega < 0$, então $\sup\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$.

Finalmente, se $T(t)$ é um semigrupo analítico, a implicação de decaimento exponencial (*1* $\Rightarrow$ *2*) pode ser obtida via o teorema 4.4.3 de [61, pg 118].

11.4 Suporte à Prova da Proposição 33

Lema 66 *A equação diferencial estocástica (6.1) pode ser expressa sob a forma da aproximação linear dada por (6.10).*

Prova. Escrevamos (6.1) como $\dot{x}_i(t,\omega) = \left(F_{\theta(t,\omega)}\, x(t,\omega)\right)_i$ ou na forma integral de Riemann $\int_t^{t+\delta} \dot{x}_i(s,\omega)\, ds = \int_t^{t+\delta} \left(F_{\theta(s,\omega)}\, x(s,\omega)\right)_i ds$, $i = 1, .., n$, $\omega \in \Omega - \mathcal{N}$,

$\mathcal{P}(\mathcal{N}) = 0$, $\delta > 0$ arbitrário. Do teorema fundamental do cálculo,

$$x_i(t+\delta,\omega) = x_i(t,\omega) + \left(F_{\theta(t,\omega)}x(t,\omega)\right)_i \delta$$
$$+ \int_t^{t+\delta} (\left(F_{\theta(s,\omega)}x(s,\omega)\right)_i - \left(F_{\theta(t,\omega)}x(t,\omega)\right)_i)ds \tag{11.4}$$

onde para todo t e i, a integral acima é um processo $o^1(\delta)$ com probabilidade um. De fato, uma vez que $s \to \left(F_{\theta(s,\omega)}x(s,\omega)\right)_i$ é limitada em qualquer intervalo fechado e tem trajetórias contínuas à direita, existem $a > 0$ e $0 < M < \infty$, tais que $\left|(\left(F_{\theta(s,\omega)}\ x(s,\omega)\right)_i - \left(F_{\theta(t,\omega)}x(t,\omega)\right)_i)\right| \leq M.(s-t)$, $s \in [t, t+ a]$ (simplificamos a notação com a em vez de $a_{t,i,\omega}$ e M em vez de $M_{t,i,\omega}$). Logo,

$$\lim_{a\downarrow 0} \frac{1}{a}\left|\int_t^{t+a} (\left(F_{\theta(s,\omega)}x(s,\omega)\right)_i - \left(F_{\theta(t,\omega)}x(t,\omega)\right)_i)ds\right|$$
$$\leq \lim_{a\downarrow 0} \frac{1}{a}\int_t^{t+a} M.(s-t)ds = \lim_{a\downarrow 0}\frac{1}{2}Ma = 0$$

Da Seção 3 e de (11.4), $x(t+\delta) = x(t) + F_{\theta(t)}\ x(t)\delta + o^n(\delta)$ com probabilidade um.

■

Lema 67 *Para $j \in \mathcal{S}$ fixo e arbitrário, seja a seqüência $\{\sum_{i=1}^M (\lambda_{ij}\delta \mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t)$ $+\mathcal{C}_i(t)\delta))\}_{M\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$, onde as parcelas são definidas de acordo com a prova da Proposição 33 e onde denotamos $o_i(\cdot) \equiv o_{ij}(\cdot)$, $i \in \mathcal{S}$. Então, esta seqüência é Cauchy para $\delta \in (0, \frac{1}{c})$.*

Prova. Temos que $|o_i(\delta)| \leqslant 1$ para $\delta \in (0, \frac{1}{c})$, $i \in \mathcal{S}$ e $o_i(\delta)$ satisfazendo (4.2). Logo, para N, $M \in \mathbb{N}$, $M < N$,

$$\left\| \sum_{i=1}^N \{\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)\}\right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^M \{\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)\}\right\|$$
$$= \left\| \sum_{i=M+1}^N \{\lambda_{ij}\delta\mathcal{C}_i(t) + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(Q_i(t) + \mathcal{C}_i(t)\delta)\}\right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=M+1}^N \{2c\delta \left\|F\right\|_\infty \left\|Q_i(t)\right\| + \frac{o_i(\delta)}{\delta}(\left\|Q_i(t)\right\| + 2\delta\left\|F\right\|_\infty \left\|Q_i(t)\right\|)\}$$
$$\leqslant \{2c\delta\left\|F\right\|_\infty + \frac{1}{\delta}(1 + 2\delta\left\|F\right\|_\infty)\} \sum_{i=M+1}^N \left\|Q_i(t)\right\| \to 0 \text{ quando } N, M \to \infty$$

■

11.5 Adendo à Nota 36

Claramente, para todo x em l_2, $\mathcal{C}x$ é uma seqüência bem definida de números complexos e $\mathcal{C}$ é linear. Agora, para qualquer $x = (x_1' \; x_2' \; ...)' \in l_2$, $x_i \in \mathbb{C}^n$, temos que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{C}x\| &= \left\|(diag\,(C_i))\,(x_1' \; x_2' \; ...)'\right\| = \left\|\left((C_1x_1)' \; (C_2x_2)' \; ...\right)'\right\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|C_ix_i\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_\infty}^2 \|x_i\|^2\right)^{1/2} = \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_\infty} \|x\|\end{aligned}$$

Ou seja, $\mathcal{C}$ é limitado, toma valores em l_2 e $\|\mathcal{C}\| \leq \|\mathcal{C}\|_{\mathcal{W}_\infty}$.

Agora, para todo $x = (x_1, x_2, ...)$ e $y = (y_1, y_2, ...)$ em l_2, x_i,$y_i \in \mathbb{C}^n$, temos que $\langle \mathcal{C}x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle C_ix_i, y_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x_i, C_i^* y_i\rangle = \langle x, \mathcal{C}^* y\rangle$ onde definimos $\mathcal{C}^* = diag(C_i^*)$ como em (3.2).

Também, para $\mathcal{B} \in \mathcal{W}_\infty^{n+}$e $x \in l_2$, temos que $\langle x, \mathcal{B}x\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* (B_ix_i)$. Como $B_i \geq 0$, $i \in \mathcal{S}$, vem que $\langle x, \mathcal{B}x\rangle \geq 0$, i.e., $\mathcal{B} \geq 0$.

Finalmente, mostremos que $B_i \leq C_i \Leftrightarrow \mathcal{B} \leq \mathcal{C}$.

$\Rightarrow$: Claramente $B_i \leq C_i \Rightarrow C_i - B_i \geq 0$, $i \in \mathcal{S}$, de modo que, usando o resultado acima, $\mathcal{C} - \mathcal{B} \geq 0$, i.e., $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$.

$\Leftarrow$: Por contradição, suponha que exista $x_r^o \in \mathbb{C}^n$ tal que $x_r^{o^*} B_r x_r^o > x_r^{o^*} C_r x_r^o$. Então, para $l_2 \ni x^o = (0' ... 0' \; x_r^o \; 0' ... 0')$, temos que $\langle x^o, \mathcal{B}x^o\rangle > \langle x^o, \mathcal{C}x^o\rangle$.

11.6 Prova da Proposição 39

A equação diferencial (6.18) se expressa como

$$\dot{S}_i^T(t) + A_i^* S_i^T(t) + S_i^T(t)A_i + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{ij} S_j^T(t) + \mathcal{Q} - S_i^T(t)B_i\mathcal{R}^{-1}B_i^* S_i^T(t) = 0, \tag{11.5}$$

$t \in (s, T)$ e $i \in \mathcal{S}$, com condição terminal

$$S_i^T(T) = L_i \geq 0 \tag{11.6}$$

uniformemente limitada na norma na variável i.

Reagrupando as matrizes $S_i^T(t)$, definimos a matriz quadrada de dimensão infinita $\mathfrak{S}(t) = diag(S_i^T(t))$, $t \in [s, T]$ e os seguintes elementos em $\mathcal{W}_\infty^{\cdot}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= diag(A_i^T) \in \mathcal{W}_\infty^n,\ \mathcal{B} = diag(B_i^T) \in \mathcal{W}_\infty^{m,n},\ \mathfrak{R}^{-1} = diag(\mathcal{R}^{-1}) \in \mathcal{W}_\infty^{n+}, \\ \mathfrak{Q} &= diag(\mathcal{Q}) \in \mathcal{W}_\infty^{m+} \text{e } \mathcal{L} = diag(L_i) \in \mathcal{W}_\infty^{n+}\end{aligned}$$

Para $H \in \mathcal{H}_\infty^n$, sejam ainda os operadores lineares limitados $\mathfrak{D} : \mathcal{H}_\infty^n \to \mathcal{W}_\infty^n$ tal que $\mathfrak{D}(H) = diag(H_i)$ e $\chi : \mathcal{H}_\infty^n \to \mathcal{H}_\infty^n$ tal que $\chi = (\Lambda - diag\lambda_{ii}) \otimes I_n$ (i.e., $\chi(H) = (\chi_1(H)'\ \chi_2(H)'\ ...)'$ com $\chi_i(H) = \sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} H_j$). Definamos ainda $\Pi \in Blt(\mathcal{W}_\infty^n)$ tal que $\Pi = \mathfrak{D} \circ \chi \circ \mathfrak{D}^{-1}$. No que se segue, baseamo-nos no fato de que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc são bem definidos como operadores em $Blt(\mathcal{W}_\infty^{\cdot}, \mathcal{W}_\infty^{\cdot})$ (vide Proposição 35). Logo, de (11.5) e (11.6), temos que

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{S}}^T(t) + \Psi(\mathfrak{S}(\mathrm{t})) = 0, & t \in (s,T) \\ \mathfrak{S}(T) = \mathcal{L} \end{cases} \tag{11.7}$$

onde

$$\Psi(\mathfrak{S}) = \overline{\mathcal{A}}^* \mathfrak{S} + \mathfrak{S}\overline{\mathcal{A}} + \Pi(\mathfrak{S}) + \mathfrak{Q} - \mathfrak{S}\mathcal{B}\mathfrak{R}^{-1}\mathcal{B}^*\mathfrak{S} \tag{11.8}$$

e $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \frac{1}{2} diag(\lambda_{ii} I_n)$. Agora, com

$$\mathcal{K}(t) = \mathfrak{R}^{-1}\mathcal{B}^*\mathfrak{S}(t) \tag{11.9}$$

temos que (11.7) equivale à

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{S}}(t) + (\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t))^*\mathfrak{S}(t) + \mathfrak{S}(t)(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t)) + \Pi(\mathfrak{S}(t)) \\ +\mathfrak{Q} + \mathcal{K}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(t) = 0, \quad t \in (s,T) \\ \mathfrak{S}(T) = \mathcal{L} \end{cases} \tag{11.10}$$

Como no Teorema 2.1 de [68] para o caso de dimensão finita, consideramos $\mathcal{K}(t)$ agora um operador linear e limitado *arbitrário*, definido e a valores no espaço de Banach $\mathcal{W}_\infty^{n,m}$, sendo a função $t \mapsto \mathcal{K}(t)$ contínua e continuamente diferenciável em todo intervalo (s,T), na topologia desses operadores. Portanto, seja $\varphi_\mathcal{K}(t) : \mathcal{W}_\infty^n \to \mathcal{W}_\infty^n$ tal que, para todo $W \in \mathcal{W}_\infty^n$,

$$\varphi_\mathcal{K}(t)(W) = (\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t))^*W + W(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t)) + \Pi(W), \tag{11.11}$$

Então, de (11.10), temos que

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{S}}(t) + \varphi_\mathcal{K}(t)(\mathfrak{S}(t)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(t) = 0, \ t \in (s,T) \\ \mathfrak{S}(T) = \mathcal{L} \end{cases} \tag{11.12}$$

Como $\mathcal{K}(t)$ é arbitrário (i.e., independe de $\mathfrak{S}(\cdot)$), (11.12) é linear em $\mathfrak{S}(t)$. Também, $\mathfrak{Q} + \mathcal{K}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(t) \in L_1([s,T], \mathcal{W}_\infty^n)$ é continuamente diferenciável em (s,T), $\varphi_\mathcal{K}$ é uma família de operadores lineares *limitados* e a função $t \mapsto \varphi_{\mathcal{K}}(t)$ é contínua (e continuamente diferenciável) na topologia desses operadores $((Blt(\mathcal{W}_{\infty}^n), \|\cdot\|))$. Então, a equação de evolução (11.12) admite uma única solução contínua e continuamente diferenciável, a valores em $\mathcal{W}_{\infty}^n$, para todo valor inicial $\mathcal{L} \in \mathfrak{D}(\varphi_{\mathcal{K}}(s)) = \mathcal{W}_{\infty}^n$, onde $\mathfrak{D}(\varphi_{\mathcal{K}}(s))$ é o domínio de $\varphi_{\mathcal{K}}(s)$ (vide [61]).

Seja $\bar{\mathfrak{S}}(t)$ a solução para (11.12) e consideremos a versão de (11.10) com $\Pi(\bar{\mathfrak{S}}(t))$ ao invés de $\Pi(\mathfrak{S}(t))$, i.e.,

$$\begin{cases} \dot{\mathfrak{S}}(t) + \phi_{\mathcal{K}}(t)(\mathfrak{S}(t)) + \Pi(\bar{\mathfrak{S}}(t)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(t) = 0 \\ \mathfrak{S}(T) = \mathcal{L}, \qquad t \in (s,T) \end{cases} \tag{11.13}$$

onde $\phi_{\mathcal{K}}(t) : \mathcal{W}_{\infty}^n \to \mathcal{W}_{\infty}^n$ é tal que, para todo $W \in \mathcal{W}_{\infty}^n$,

$$\phi_{\mathcal{K}}(t)(W) = (\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t))^*W + W(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t)), \tag{11.14}$$

Como antes, $\Pi(\bar{\mathfrak{S}}(t)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(t) \in L_1([s,T], \mathcal{W}_{\infty}^n)$ é continuamente diferenciável em (s,T) e $\phi_{\mathcal{K}}$ é uma família de operadores lineares limitados, sendo $t \mapsto \varphi_{\mathcal{K}}(t)$ contínua (e continuamente diferenciável). Então, a equação de evolução (11.13) admite uma única solução contínua e continuamente diferenciável, a valores em $\mathcal{W}_{\infty}^n$, para todo valor inicial $\mathcal{L} \in \mathfrak{D}(\phi_{\mathcal{K}}(s)) = \mathcal{W}_{\infty}^n$ [61], sendo expressa por

$$\begin{aligned} \breve{\mathfrak{S}}(t) &= U(t,T)^*\mathcal{L}U(t,T) + \int_t^T U(t,r)^*\{\Pi(\bar{\mathfrak{S}}(r)) + \mathfrak{Q} \\ &\quad + \mathcal{K}(r)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(r)\}U(t,r)dr \end{aligned} \tag{11.15}$$

onde $U(t,l) : \mathcal{W}_{\infty}^n \to \mathcal{W}_{\infty}^n$, $0 \leqslant l \leqslant t \leqslant T$ é o *sistema de evolução* determinado pelos operadores lineares e limitados $\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t)$: a família de operadores lineares limitados tal que$\|U(l,t)\| \leqslant$ *cte*, $U(l,t) = U(t,l)^{-1}$e $(t,l) \mapsto U(t,l)$ é contínua e diferenciável na topologia dos operadores, com $\frac{dU(t,l)}{dt} = (\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(t))U(t,l)$ e $\frac{dU(t,l)}{dl}$ $= -U(t,l)(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}(l))$, $0 \leqslant l \leqslant t \leqslant T$ (vide [61]).

Agora, o termo à esquerda de (11.13) equivale ao termo à esquerda de (11.12) para $\mathfrak{S}(t) = \bar{\mathfrak{S}}(t)$. Como $\bar{\mathfrak{S}}(t)$ é solução de (11.12), também é solução de (11.13), i.e., $\breve{\mathfrak{S}}(t) = \bar{\mathfrak{S}}(t)$ em (11.15). Ou seja, a única solução $\mathfrak{S}(t)$ para (11.12), continuamente diferenciável e a valores em $\mathcal{W}_{\infty}^n$ (simplificamos a notação usando $\mathfrak{S}(t)$ ao invés de $\bar{\mathfrak{S}}(t)$), satisfaz

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(t) &= U(t,T)^*\mathcal{L}U(t,T) + \int_t^T U(t,r)^*\{\Pi(\mathfrak{S}(r)) + \mathfrak{Q} \\ &\quad + \mathcal{K}(r)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(r)\}U(t,r)dr \equiv \mathfrak{J}(\mathcal{K}(\cdot), \mathfrak{S}(\cdot), t). \end{aligned} \tag{11.16}$$

Como (11.16) tem uma única solução contínua a valores em $\mathcal{W}_\infty^n$, (11.12) e (11.16) são equivalentes no sentido de que um mesmo conjunto de soluções (o conjunto unitário $\{\mathfrak{S}(t)\}$) satisfaz ambas equações. A unicidade de soluções contínuas para a equação de Volterra (11.16), a valores no espaço de Banach $\mathcal{W}_\infty^n$, pode ser confirmada, por exemplo, via Teorema III.1.8 de [49], tendo-se em vista que (*i*) $U(t,T)^*\mathcal{L}U(t,T)$ é contínua e (*ii*) definindo $f(r,\mathfrak{S}) = U(t,r)^*\{\ \Pi(\mathfrak{S}(r)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}(r)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}(r)\ \}U(t,r)$, usando a Proposição 35 e o fato de que o sistema de evolução U é limitado, obtemos $\|f(r,\mathfrak{S}_1) - f(r,\mathfrak{S}_2)\|_{\mathcal{W}_\infty} = \|f(r,\mathfrak{S}_1) - f(r,\mathfrak{S}_2)\| = \|U(t,r)^*\Pi(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2)U(t,r)\| \leqslant 2\|U(t,r)\|\|\Pi(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2)\| = 2\|U(t,r)\|\|\Pi(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2)\|_{\mathcal{W}_\infty} \leqslant 2cte\|\Pi(\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2)\|_{\mathcal{W}_\infty} \leqslant cte_1\|\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_2\|_{\mathcal{W}_\infty}$ para todo $r \in [t,T]$ e $\|\mathfrak{S}_1\|_{\mathcal{W}_\infty}, \|\mathfrak{S}_2\|_{\mathcal{W}_\infty} \leqslant cte_2$, onde $cte_1 = 2cte\|\Pi\|$.

De fato, a solução $\mathfrak{S}(t)$ para (11.16) toma valores em $\mathcal{W}_\infty^{n+}$. Justificamos esta afirmação lembrando que $\mathfrak{S}(t)$ pode ser obtida através do método iterativo de Picard: $\mathfrak{S}_1(t) \equiv 0$, $\mathfrak{S}_2(t) = \mathfrak{J}(\mathcal{K}(\cdot), \mathfrak{S}_1(\cdot), t)$,..., $\mathfrak{S}_v(t) = \mathfrak{J}(\mathcal{K}(\cdot), \mathfrak{S}_{v-1}(t), t)$..., $t \in [s,T]$ e $\mathfrak{S}(t) = \lim_{v\to\infty}\mathfrak{S}_v(t)$. Mas $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ e $\mathcal{L} \geq 0$ e o operador Π é positivo no sentido de que $\Pi(\mathcal{C}) \geq 0$ se $\mathcal{C} \geq 0$. Logo, $\mathfrak{S}_v(t) \geq 0$ para todo v e t e portanto $\lim_{v\to\infty} \mathfrak{S}_v(t) \geq 0$.

Para resolver o sistema de equações lineares (11.9) e (11.16), consideramos as seqüências $\{\mathfrak{S}_v(t)\}_{v\in\mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{K}_v(t)\}_{v\in\mathbb{N}}$ assim construídas: $\mathcal{K}_1(\cdot)$ arbitrária e a solução única $\mathfrak{S}_1(\cdot)$ para (11.16) com $\mathcal{K}_1(\cdot)$, i.e., $\mathfrak{S}_1(t) = \mathfrak{J}(\mathcal{K}_1(\cdot), \mathfrak{S}_1(\cdot), t)$, ..., $\mathcal{K}_v(t) = \mathfrak{R}^{-1}\mathcal{B}^*\mathfrak{S}_{v-1}(t)$ e a solução única $\mathfrak{S}_v(\cdot)$ para (11.16) com $\mathcal{K}_v(\cdot)$, i.e.,

$$\mathfrak{S}_v(t) = \mathfrak{J}(\mathcal{K}_v(\cdot), \mathfrak{S}_v(\cdot), t), \tag{11.17}$$

$$\mathcal{K}_{v+1}(t) = \mathfrak{R}^{-1}\mathcal{B}^*\mathfrak{S}_v(t), \tag{11.18}$$

etc. Temos que $\mathfrak{S}_v(t)$ e $\mathcal{K}_v(t)$ são funções bem definidas em $\mathcal{W}_\infty^{n+}$ e $\mathcal{W}_\infty^{n,m}$, respectivamente, limitadas em $[0,T]$ e continuamente diferenciáveis.

Agora, paralelamente ao desenvolvimento do Teorema 2.1 de [68], um ponto essencial é explorarmos a seguinte propriedade do mínimo: tomando a ordenação parcial dos elementos de $\mathcal{W}_\infty^{n*}$ definida na Seção 3.3, temos que o lado esquerdo de (11.10), visto como uma função de $\mathcal{K}(t)$, tem (11.9) como ponto de mínimo. Isto provem da seguinte identidade: $(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}_0)^*\mathfrak{S} + \mathfrak{S}(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}_0) + \mathcal{K}_0^*\mathfrak{R}\mathcal{K}_0 = (\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K})^*\mathfrak{S}(t) + \mathfrak{S}(\overline{\mathcal{A}} - \mathcal{B}\mathcal{K}) + \mathcal{K}^*\mathfrak{R}\mathcal{K} + (\mathcal{K} - \mathcal{K}_0)^*\mathfrak{R}(\mathcal{K} - \mathcal{K}_0)$, onde $\mathcal{K}_0 = \mathfrak{R}^{-1}\mathcal{B}^*\mathfrak{S}$.

Tendo em vista (11.17) e a equivalência entre (11.12) e (11.16), temos que

$$\dot{\mathfrak{S}}_v(t) + \varphi_{\mathcal{K}_v}(t)(\mathfrak{S}_v(t)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}_v(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}_v(t) = 0 \tag{11.19}$$

e $\dot{\mathfrak{S}}_{v+1}(t) + \varphi_{\mathcal{K}_{v+1}}(t)(\mathfrak{S}_{v+1}(t)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}_{v+1}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}_{v+1}(t) = 0$. Mas, face à propriedade do mínimo descrita acima, (11.18) minimiza o lado esquerdo de (11.19). Logo

$$\dot{\mathfrak{S}}_v(t) + \varphi_{\mathcal{K}_{v+1}}(t)(\mathfrak{S}_v(t)) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}_{v+1}(t)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}_{v+1}(t) \leqslant 0$$

Tendo em vista as duas expressões acima, podemos aplicar um teorema de comparação (vide, por exemplo, a prova da Proposição 57), obtendo $\mathcal{Z}(t) \geq 0$, onde definimos $\mathcal{Z}(t) = \mathfrak{S}_v(t) - \mathfrak{S}_{v+1}(t)$. Ou seja, $\{\mathfrak{S}_v(t)\}_{v\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência monotônica não crescente de elementos semidefinidos positivos. Conseqüentemente, a partir de um resultado clássico sobre monotonicidade de matrizes semidefinidas positivas, existe o limite

$$\mathfrak{S}(t) = \lim_{v\to\infty} \mathfrak{S}_v(t) \tag{11.20}$$

a valores em $\mathcal{W}_\infty^{n+}$. Seja $T_{\overline{\mathcal{A}}}(t) : \mathcal{W}_\infty^n \to \mathcal{W}_\infty^n$, o semigrupo determinado pelo operador linear limitado $\overline{\mathcal{A}}$. Logo, denominando $l = T - t$ e $T(t) = T_{\overline{\mathcal{A}}}(t)^{-1}$, (11.17) equivale a

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_v(t) \;&=\; T(l)^*\mathcal{L}T(l) + \int_t^T T(r-t)^*\{\Pi(\mathfrak{S}_v(r)) - \mathcal{K}_v(r)^*\mathcal{B}^*\mathfrak{S}_v(r)\\ &\quad -\mathfrak{S}_v(r)\mathcal{B}\mathcal{K}_v(r) + \mathfrak{Q} + \mathcal{K}_v(r)^*\mathfrak{R}\mathcal{K}_v(r)\}T(r-t)dr\end{aligned} \tag{11.21}$$

Como $\|\mathfrak{S}_v(r)\|_{\mathcal{W}_\infty} \leqslant \|\mathfrak{S}_1(r)\|_{\mathcal{W}_\infty} \leqslant \sup\{\|\mathfrak{S}_1(l)\|_{\mathcal{W}_\infty} : l \in [s,T]\} = cte$ para todo $v \in \mathbb{N}$ (notemos que $\mathfrak{S}_1$ é contínua em $[s,T]$), temos, de (11.18), que a seqüência $\{\|\mathcal{K}_v(r)\|_{\mathcal{W}_\infty}\}_{v\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada. Aplicando o teorema da convergência dominada à integral em (11.21), concluímos que (11.21) vale com $\mathfrak{S}_v(\cdot)$ e $\mathcal{K}_v(\cdot)$ substituídos por $\mathfrak{S}(\cdot)$ dado por (11.20) e $\mathcal{K}(\cdot)$ dado por

$$\mathcal{K}(t) = \lim_{v\to\infty} \mathcal{K}_v(t) = \mathfrak{R}^{-1}\mathcal{B}^*\mathfrak{S}(t) \tag{11.22}$$

A equação (11.21) com $\mathfrak{S}_v(\cdot)$ e $\mathcal{K}_v(\cdot)$ e a equação (11.22) equivalem a (11.10) e (11.9), i.e., a (11.7); assim, estabelecemos existência de uma solução contínua e continuamente diferenciável para (6.18), a valores em $\mathcal{W}_\infty^{n+}$. Embora (11.21) exiba solução única para cada v, não podemos afirmar que tal propriedade se repassa ao caso limite. Para que asseguremos unicidade em (11.21) com $\mathfrak{S}(\cdot)$ e $\mathcal{K}(\cdot)$, basta observarmos que a expressão $t-$homogenea $\Psi(\mathfrak{S})$, dada por (11.8), e que aparece em (11.7), satisfaz uma condição Lipschitz em $\mathfrak{S}$ para $\|\mathfrak{S}\|_{\mathcal{W}_\infty} \leqslant cte.$

11.7 Prova da Proposição 41

De (7.2), temos que

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{L}g)\,(t, x(t), \theta(t)) \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\{\frac{E_{x(t),\theta(t)}[g(t+h, x(t+h), \theta(t+h))] - g(t, x(t), \theta(t))}{h}\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[g(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g(t, x(t), \theta(t+h)) \\
&+ g(t, x(t), \theta(t+h))] - g(t, x(t), \theta(t))\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[g(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g(t, x(t), \theta(t+h))]\} \\
&+ \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[g(t, x(t), \theta(t+h))] - g(t, x(t), \theta(t))\}
\end{aligned}
\tag{11.23}
$$

Logo, de (4.2) e supondo, no instante t, $\theta(t) = i$, o último termo de (11.23) se expressa por

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),i}[g(t, x(t), \theta(t+h))] - g(t, x(t), i)\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{\sum_{j=1}^{\infty}(P_h(i,j)g(t, x(t), j)) - g(t, x(t), i)\} \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty}((\lambda_{ij}h + o_j\,(h))g(t, x(t), j)) \\
&+ (1 + \lambda_{ii}h + o_i\,(h))g(t, x(t), i) - g(t, x(t), i)\} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_{ij}g(t, x(t), j)) + \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{\infty}(o_j\,(h)\,g(t, x(t), j))
\end{aligned}
\tag{11.24}
$$

onde simplificamos a notação escrevendo o_j ao invés de o_{ij}. Agora, tendo em vista a propriedade conservativa do processo, podemos resgatar o segundo termo da expressão acima em termos de expectâncias, como se segue:

$$\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{\infty} o_j\,(h)\, g(t, x(t), j)$$
$$= \frac{1}{h}\{(\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} (P_h(i,j) - \lambda_{ij}h) g(t, x(t), j)) + (P_h(i,i) - (1+\lambda_{ii}h)) g(t, x(t), i)\}$$
$$= \frac{1}{h}\{(\sum_{j=1}^{\infty} P_h(i,j) g(t, x(t), j)) - (\sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} h g(t, x(t), j)) - (1+\lambda_{ii}h) g(t, x(t), i)\}$$
$$= \frac{1}{h}\{E_{x(t),i}[g(t, x(t), \theta(t+h))] - E^{\lambda h}_{x(t),i}[g(t, x(t), \theta(t+h))]\}$$

onde $E^{\lambda h}_{x(t),i}$ é a média tendo em vista a medida de probabilidade modificada

$$P_h^{\lambda}(i,j) = \mathcal{P}^{\lambda}\{\theta(t+h) = j \,|\, \theta(t) = i\} = \lambda_{ij} h$$

e

$$P_h^{\lambda}(i,i) = \mathcal{P}^{\lambda}\{\theta(t+h) = i \,|\, \theta(t) = i\} = (1 + \lambda_{ii} h)$$

para i, $j \in \mathcal{S}$, $i \neq j$. Logo, é fato que o limite acima existe e é finito para $h > 0$ (lembramos que g é limitada em j). Agora, tomando b como uma cota para g e tendo em vista a estrutura conservativa do processo de Markov, onde $\sum_{j=1}^{\infty} |o_j\,(h)|$ é uma função $o\,(h)$, vem que

$$\frac{1}{h}\left|\sum_{j=1}^{\infty} o_j\,(h)\, g(t, x(t), j)\right| \leqslant \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{\infty} |o_j\,(h)|\, |g(t, x(t), j)| \leqslant \frac{b}{h}\sum_{j=1}^{\infty} |o_j\,(h)| \to 0 \text{ as } h \downarrow 0,$$

ou seja, o segundo termo de (11.24) desaparece. Portanto, tendo em mente (11.23), o operador infinitesimal é agora expresso por

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}g)\,(t, x(t), \theta(t)) &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\{E_{x(t),\theta(t)}[g(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) \\ &- g(t, x(t), \theta(t+h))]\} + \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda_{\theta(t)j}\, g(t, x(t), j))\end{aligned} \tag{11.25}$$

Obtemos o limite em (11.25), a partir de procedimentos clássicos onde, ao invés de utilizarmos as derivadas parciais usuais, usamos aquelas associadas às decomplexificações (Fréchet)-continuamente diferenciáveis ${}^{\mathrm{R}}g$, para cada $j \in \mathcal{S}$. Assim, do Lema 14, resulta

$$\begin{aligned}g(t+h, z, j) - g(t, x, j) &= \frac{\partial}{\partial t} g(t, x, j) h \\ &+ \nabla_{\mathrm{R}_x}{}^{\mathrm{R}}g(t, {}^{\mathrm{R}}x, j)'\, {}^{\mathrm{R}}(z - x) + o\,(\|h, z - x\|)\,,\end{aligned}$$

$x,\ z \in \mathbb{C}^n$. Ou ainda, com $z = x(t+h)$, $x = x(t)$ e $j = \theta(t+h)$,

$$
\begin{aligned}
&g(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g(t, x(t), \theta(t+h)) = \frac{\partial}{\partial t} g(t, x(t), \theta(t+h))h \\
&+ \nabla_{\mathrm{R}_x}{}^{\mathrm{R}} g(t, {}^{\mathrm{R}} x(t), \theta(t+h))' \, {}^{\mathrm{R}}(x(t+h) - x(t)) + o\left(\|h, x(t+h) - x(t)\|\right),
\end{aligned} \tag{11.26}
$$

equação esta satisfeita quase certamente para qualquer trajetória de $\{x, \theta\}$. Dividindo por $h > 0$ e uma vez que

$$
\lim_{h\downarrow 0}\{\frac{{}^{\mathrm{R}}(x(t+h) - x(t))}{h}\} ={}^{\mathrm{R}} \{\lim_{h\downarrow 0} \frac{(x(t+h) - x(t))}{h}\}
$$

obtemos ainda que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\{E_{x(t),\theta(t)}[\frac{g(t+h, x(t+h), \theta(t+h)) - g(t, x(t), \theta(t+h))}{h}]\} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} g(t, x(t), \theta(t)) + \nabla_{\mathrm{R}_x}{}^{\mathrm{R}} g(t, {}^{\mathrm{R}} x(t), \theta(t))' \lim_{h\downarrow 0}\{E_{x(t),\theta(t)}[\frac{{}^{\mathrm{R}}(x(t+h) - x(t))}{h}]\} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} g(t, x(t), \theta(t)) + \nabla_{\mathrm{R}_x}{}^{\mathrm{R}} g(t, {}^{\mathrm{R}} x(t), \theta(t))' \, {}^{\mathrm{R}}\dot{x}(t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} g(t, x(t), \theta(t)) + \nabla_{\mathrm{R}_x}{}^{\mathrm{R}} g(t, {}^{\mathrm{R}} x(t), \theta(t))' \, {}^{\mathrm{R}}(A_{\theta(t)} x(t) + B_{\theta(t)} u(t))
\end{aligned} \tag{11.27}
$$

Da substituição da expressão acima em (11.25), obtemos (7.5).

Por fim, o fato de que $g \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$ segue analogamente à [28, pg 159].

Nota 68 *A propriedade conservativa do processo de Markov $\{\theta\}$ é essencial para permitir que $\sum_{j=1}^{\infty} |o_j(h)|$ seja uma função $o(h)$, daíresultando o desaparecimento do segundo termo de (11.24). De fato, no caso de um processo $\{\theta\}$ não conservativo,*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{\infty} o_j(h) &= \frac{1}{h}\{P_h(i,i) - (1 + \lambda_{ii}h) + \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} (P_h(i,j) - \lambda_{ij}h)\} \\
&= -\lambda_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} = \Delta > 0
\end{aligned}
$$

para qualquer $h > 0$, onde Δ independe de h, de modo que $\frac{1}{h}\sum_{j=1}^{\infty} o_j(h)$ converge para $\Delta > 0$ quando h tende a zero. Conseqüentemente, $\sum_{j=1}^{\infty} |o_j(h)|$ não é uma função $o(h)$ e portanto o segundo termo de (11.24), em geral, não desaparece (por exemplo, no caso simples onde $g(t, x(t), j) = g(t, x(t))$, o segundo termo de (11.24) se lê como $g(t, x(t))\Delta$).

11.8 Prova de Proposição 43

De (7.6) e usando o Lema 16 com $x = x(t)$, $w = A_{\theta(t)}x(t) + B_{\theta(t)}u(t)$ e $S_m(t) = S^T_{\theta(t)}(t)$, obtemos, por substituição direta em (7.5), que

$$(\mathcal{L}^u g)(t, x(t), \theta(t)) = x(t)^* \{\dot{S}^T_{\theta(t)}(t) + A^*_{\theta(t)} S^T_{\theta(t)}(t) + S^T_{\theta(t)}(t) A_{\theta(t)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\theta(t)j} S^T_j(t)\} x(t) + u(t)^* B^*_{\theta(t)} S^T_{\theta(t)}(t) x(t) + x(t)^* S^T_{\theta(t)}(t) B_{\theta(t)} u(t) \tag{11.28}$$

Além disso, de (6.20) e (6.17), temos que

$$\dot{S}^T_{\theta(t)}(t) = -\mathcal{Q} - A^*_{\theta(t)} S^T_{\theta(t)}(t) - S^T_{\theta(t)}(t) A_{\theta(t)} + S^T_{\theta(t)}(t) B^{-1}_{\theta(t)} \mathcal{R} B^*_{\theta(t)} S^T_{\theta(t)}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\theta(t)j} S^T_j(t)$$

Logo, substituindo em (11.28), obtemos (7.8).

De acordo com o Lema 5.2, Capítulo V, de [31], todos termos na formula de Dynkin existem se g é dado por (7.6) com domínio em $\mathcal{X}_o$. Logo, a substituição da expressão do operador infinitesimal (11.28) em (7.3) resulta em (7.9).

11.9 Suporte à Prova da Proposição 44

Lema 69 *Para $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R} \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ e $T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ tomados arbitrariamente, existe $d_1 \geq 0$ tal que, para todo $(x, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$,*

$$d_1(x^* \mathcal{Q} x + u^* \mathcal{R} u) \geq u^* T x + x^* T^* u$$

Prova. O ponto a ser observado na prova é estarmos lidando com espaços complexos ao invés de reais. Tomemos $(x_0, u_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, $\|(x_0, u_0)\| = 1$, e $d_{x_0,u_0} \in \mathbb{R}$ tais que

$$d_{x_0,u_0}(x_0^* \mathcal{Q} x_0 + u_0^* \mathcal{R} u_0) = u_0^* T x_0 + x_0^* T^* u_0 \tag{11.29}$$

Logo, para todo k **real** positivo,

$$d_{x_0,u_0}((kx_0)^* \mathcal{Q}(kx_0) + (ku_0)^* \mathcal{R}(ku_0)) = k^2 d_{x_0,u_0}(x_0^* \mathcal{Q} x_0 + u_0^* \mathcal{R} u_0)$$
$$= k^2(u_0^* T x_0 + x_0^* T^* u) = (ku_0)^* T(kx_0) + (kx_0)^* T^*(ku_0)$$

i.e., (11.29) é verdadeira no conjunto

$$D_{x_0,u_0} = \{(x, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \ (x, u) = k(x_0, u_0), k \geq 0\}$$

Agora, $(x_0, u_0) \mapsto d_{x_0,u_0}$ é contínua no conjunto compacto

$$\mathcal{B}_s = \{(x_0, u_0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m : \|(x_0, u_0)\| = 1\}$$

de modo que d_{x_0,u_0} tem limite superior uniforme em $\mathcal{B}_s$, digamos d_1. Lembrando que (11.29) vale para qualquer par $(x, u) \in D_{x_0,u_0}$, segue-se então que

$$d_1(x^*\mathcal{Q}x + u^*\mathcal{R}u) \geq u^*Tx + x^*T^*u \tag{11.30}$$

em $D = \{(x,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m\text{:} \quad (x,u) = k\,(x_0, u_0),\ k \geq 0,\ \|(x_0, u_0)\| = 1\}$. Agora, para $(x,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ arbitrário , existe sempre $(x_0, u_0) = \frac{(x,u)}{\|(x,u)\|}$ em $\mathcal{B}_s$ e conseqüentemente um número real k $(= \|(x,u)\|)$ tal que $(x,u) = k\,(x_0, u_0)$. Ou seja, a possibilidade de movimentação de (x_0, u_0) na bola complexa $\mathcal{B}_s$ compensa o fato de que $k_1\,(x_0, u_0)$, k_1 **real**, não produz o *span* do subespaço complexo unidimensional. Logo $D = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$. Por fim, tomando $u = 0$ em (11.30), notamos que d_1 não pode ser negativo. ■

Lema 70 $H \in \mathcal{H}_\infty^{n+} \Rightarrow H_i \leqslant H_0$ *para algum* $H_0 \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$.

Prova. Por contradição, supomos que existe alguma seqüencia $\{H_{i_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, crescente e não limitada, tomando-se a ordenação parcial das matrizes auto-adjuntas. Então, para $H_0^1 \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ com $\|H_0^1\| \geq \|H\|_\infty$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H_{i_{j_0}} > H_0^1$, o que nos leva a $\left\|H_{i_{j_0}}\right\| > \|H_0^1\| \geq \|H\|_\infty \geq \left\|H_{i_{j_0}}\right\|$. ■

Lema 71 *Seja* $\{x\}$ *dado por (4.1) com* $u \in \mathcal{U}^{s,T}$. *Então, para* $g(t,x,i) = x^*S_i^T(t)x$ *definida em* $\mathcal{X}$ *, existe uma função a valores nos reais e definida em* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$*, que denotaremos por* $M^u(x) \equiv M(x, u(t,x,i))$*, onde*

$$E_{s,x,i}[\int_s^t \mid M(x(r), u(r))dr \mid] < \infty, \tag{11.31}$$

e tal que

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t,x,i) + (\mathcal{L}^u g)\,(t,x,i) + M(x,u) \geq 0$$

para todo $(t,x,i) \in ((s,T) \times \mathbb{C}^n \times \mathcal{S})$.

Prova. Definimos $M(x,u) = c_1(x^*\mathcal{Q}x + u^*\mathcal{R}u)$ onde c_1 é alguma constante que independe de t, x, i. Logo, $M(x,u)$ é trivialmente uniformemente limitada em t e satisfaz uma condição de crescimento polinomial em x and u para cada i. Ademais, $u^{s,T}$ pertence a $\mathcal{U}^{s,T}$ e $A_{\theta(t)}$ é uniformemente limitada em t, de modo que o Teorema $V.4.2$ e portanto a condição $VI.3.5b$ em [31] é satisfeita. Logo, analogamente à [31, pg160], obtemos (11.31). Agora, a partir de (6.17) e (6.20) e usando (7.8), obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}g(t,x,i) + (\mathcal{L}^{u}g)(t,x,i) + M^{u}(x) \\
&= x^{*}\dot{S}_{i}^{T}(t)x + x^{*}\{-\mathcal{Q} + S_{i}^{T}(t)B_{i}\mathcal{R}^{-1}B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t)\}x + u^{*}B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t)x \\
&+ x^{*}S_{i}^{T}(t)B_{i}u + c_{1}(x^{*}\mathcal{Q}x + u^{*}\mathcal{R}u) \\
\\
&= x^{*}\{-\mathcal{Q} + 2S_{i}^{T}(t)B_{i}\mathcal{R}^{-1}B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t) - \mathcal{Q} - A_{i}^{*}S_{i}^{T}(t) - S_{i}^{T}(t)A_{i} \\
&- \lambda_{ii}S_{i}^{T}(t) - \sum_{j=1,j\neq i}^{\infty}\lambda_{ij}S_{j}^{T}(t)\}x - u^{*}(-B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t))x - x^{*}(-B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t))^{*}u \\
&+ c_{1}(x^{*}\mathcal{Q}x + u^{*}\mathcal{R}u) \\
&\geq x^{*}\{(c_{11}-2)\mathcal{Q} - (\Phi^{T} + c\gamma_{0}^{T})\}x + (c_{12} - d_{2})(x^{*}\mathcal{Q}x + u^{*}\mathcal{R}u) \qquad (11.32)
\end{aligned}
$$

onde $c_1 = c_{11} + c_{12}$. A matriz não negativa $c\gamma_0^T$ (onde c é uma cota superior para $-\lambda_{ii}$, $i \in \mathcal{S}$). $d_2(x^*\mathcal{Q}x + u^*\mathcal{R}u)$ e a matriz auto-adjunta Φ^T, respectivamente, são limites superiores uniformes em t e i, para

$$
\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty}\lambda_{ij}S_{j}^{T}(t),\quad A_{i}^{*}S_{i}^{T}(t) + S_{i}^{T}(t)A_{i}\quad \text{e}\quad u^{*}(-B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t))x + x^{*}(-B_{i}^{*}S_{i}^{T}(t))^{*}u
$$

Obtemos o resultado desejado tomando c_{11} e c_{12} em (11.32) suficientemente grande. Os limites uniformes acima são obtidos como se segue. Com relação a $c\gamma_0^T$, temos que, para cada i, $S_i^T(t)$ é contínua no compacto $[0,T]$, portanto exibe limite superior uniforme, digamos $\gamma_i^T = \sup_{t\in[0,T]} S_i^T(t) \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$. Mostremos agora que $\sup\{\left\|\gamma_i^T\right\| : i \in \mathcal{S}\} < \infty$. Por contradição, suponhamos que exista uma seqüencia $\{\left\|\gamma_{i_j}^T\right\|\}_{j\in\mathbb{N}} \to \infty$ quando $j \to \infty$. Logo, este é o caso de $\{\left\|S_{i_j}^T(t_j)\right\|\}_{j\in\mathbb{N}}$ e conseqüentemente de $\{\left\|S^T(t_j)\right\|_\infty\}_{j\in\mathbb{N}}$, para $t_j \in [0,T]$, $j \in \mathbb{N}$. No entanto, isso contradiz o fato de que $S^T(t)$ é uniformemente limitada na norma na variável t (lembremos que $S^T(t)$ é a solução contínua a valores em $\mathcal{H}_\infty^n$ satisfazendo (6.18) no conjunto compacto $[0,T]$). Agora, claramente $\gamma^T \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, o que, pelo Lema 70, significa $\gamma_i^T \leqslant \gamma_0^T$ para algum $\gamma_0^T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$. Concluímos portanto que $S_i^T(t) \leqslant \gamma_0^T$

para todo i e t, logo

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij} S_j^T(t) \leqslant (\sum_{j=1,j\neq i}^{\infty} \lambda_{ij})\gamma_0^T \leqslant c\gamma_0^T$$

No que se refere ao limite uniforme $d_2(x^*\mathcal{Q}x + u^*\mathcal{R}u)$, definamos $T = -B_i^* S_i^T(t)$. O Lema 69 nos dá, neste caso, um limite uniforme onde a constante $d_1 = d_1(t,i)$ de fato depende de t e i. Agora, $d_1(t,i)$ (resp. $A_i^* S_i^T(t) + S_i^T(t) A_i$ para o caso do último limite uniforme a ser provado) é, por sua vez, uniformemente limitado em t and i, digamos por d_2 (resp. Φ^T). Isto vem do fato de que B_i (resp. A_i), $i \in \mathcal{S}$, são uniformemente limitados em norma e de que existe S_0^T tal que $S_0^T \geq S_i^T(t)$ para todo $t \in \{0,T]$ e $i \in \mathcal{S}$. ■

11.10 Suporte à Equação (8.14)

Lema 72 *Suponha que $\beta_n \downarrow 0$ quando $n \to \infty$. Então $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\beta_n) = \infty$ sempre que $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$.*

Prova. Do teorema do valor médio do cálculo diferencial, existe $\rho_n \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\ln(1+\beta_n) = \frac{\ln(1+\beta_n) - \ln(1)}{\beta_n}\beta_n = \frac{d}{d\beta}\ln(1+\beta)\bigg|_{\rho_n\beta_n} \beta_n = \frac{\beta_n}{1+\rho_n\beta_n}$$

Tomemos agora $c > 0$. Uma vez que $\beta_n \downarrow 0$, existe $n_0 < \infty$ tal que $\beta_n \leqslant c$, $n \geq n_0$. Logo,

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \ln(1+\beta_n) = \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{\beta_n}{1+\rho_n\beta_n} \geq \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{\beta_n}{1+c} = \infty$$

o que significa $\prod_{i=n_0}^{\infty}(1+\beta_n) = \infty$. ■

11.11 Suporte à Prova da Proposição 56

Lema 73 *Tomemos arbitrariamente $i \in \mathcal{S}$ e $H_i^T \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ com $T \in (0,\infty)$ e suponhamos que $H_i^{T_1} \leqslant H_i^{T_2} \leqslant dI$ para todo $T_1 < T_2$ e alguma constante $0 < d < \infty$ que independa de i, T_1 e T_2. Então, as seguintes afirmativas são verdadeiras.*

1. *Existe $H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ tal que $H_i^T \to H_i$ quando $T \to \infty$, $i \in \mathcal{S}$.*

2. *$H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_{\infty}^{n+}$*

Prova. A Afirmativa *1* vem de um resultado clássico sobre monotonicidade de matrizes semidefinidas positivas . Agora, $\|H_i^T\| \leqslant d$ para todo T finito. Logo, $\|H_i\| \leqslant d$ para todo $i \in \mathcal{S}$, o que prova a Afirmação *2*. ∎

Lema 74 *Seja $H^T \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$, $T \in (0,\infty)$ e vamos assumir que*

1. $H_i^T \to H_i \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)^+$ *quando* $T \to \infty$, $i \in \mathcal{S}$,
2. $H = (H_1, H_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^{n+}$ *e*
3. $H_i^{T_1} \leqslant H_i^{T_2} \leqslant dI$, $T_1, T_2 \in (0,\infty)$, $T_1 < T_2$, $i \in \mathcal{S}$, *para alguma constante* $0 < d < \infty$ *que independa de* i, T_1 *e* T_2.

Então, para $\mathcal{T}$ dado por (6.17), temos que

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_i(H^T) = \mathcal{T}_i(H), \quad i \in \mathcal{S} \tag{11.33}$$

e

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}(H^T) = \mathcal{T}(H) \tag{11.34}$$

Prova. De (6.17), obtemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_i(H^T) \\
&= \lim_{T\to\infty} \{\mathcal{Q} + A_i^* H_i^T + H_i^T A_i - H_i^T B_i \mathcal{R}^{-1} B_i^* H_i^T + \lambda_{ii} H_i^T + \mathcal{E}_i(H^T)\} \\
&= \mathcal{Q} + A_i^* \lim_{T\to\infty} H_i^T + (\lim_{T\to\infty} H_i^T) A_i - (\lim_{T\to\infty} H_i^T) B_i \mathcal{R}^{-1} B_i^* (\lim_{T\to\infty} H_i^T) \\
&+ \lambda_{ii} \lim_{T\to\infty} H_i^T + \lim_{T\to\infty} \mathcal{E}_i(H^T) \\
&= \mathcal{Q} + A_i^* H_i + H_i A_i - H_i B_i \mathcal{R}^{-1} B_i^* H_i + \lambda_{ii} H_i + \lim_{T\to\infty} \mathcal{E}_i(H^T)
\end{aligned} \tag{11.35}$$

Vamos assumir, momentaneamente, que

$$\lim_{T\to\infty} \mathcal{E}_i(H^T) = \mathcal{E}_i(H) \tag{11.36}$$

Daí, a obtenção de (11.33) é imediata a partir (11.35). Provemos então que (11.36) é de fato verdadeira. Para isto, mostraremos, num primeiro passo que, para $x \in \mathbb{C}^n$ arbitrário, $\lim_{T\to\infty} x^* \mathcal{E}_i(H^T) x = x^* \mathcal{E}_i(H) x$. Da Condição *3* temos que

$$0 \leqslant \lambda_{ij} x^* H_j^{T_1} x \leqslant \lambda_{ij} x^* H_j^{T_2} x \leqslant \lambda_{ij} x^* dI x$$

para todo T_1, T_2 positivo, $T_1 < T_2$, $i,j \in \mathcal{S}$. Podemos então escrever que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* H_j^{T_1} x \leqslant \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* H_j^{T_2} x \\ &\leqslant \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* dIx = d\,\|x\|^2\,|\lambda_{ii}| \end{aligned}$$

Logo, pela monotonicidade da função limitada $g(M,T) = \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* H_j^T x$ em M e T e considerando ainda as Condições *1* e *2*, resulta que

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} x^* \mathcal{E}_i(H^T)x \\ =\ & \lim_{T\to\infty} x^*(\lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} H_j^T)x = \lim_{T\to\infty}\lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* H_j^T x = \\ =\ & \lim_{M\to\infty}\lim_{T\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* H_j^T x = \lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} x^* H_j x \\ =\ & x^*(\lim_{M\to\infty} \sum_{j=1,j\neq i}^{M} \lambda_{ij} H_j)x = x^* \mathcal{E}_i(H)x \end{aligned}$$

Tendo em vista que a expressão acima vale para todo $x \in \mathbb{C}^n$ e que $\mathcal{E}_i(H)$ é auto-adjunto, obtemos (11.36) e, conseqüentemente, (11.33). Agora, de (11.33) e da Proposição 37, vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\infty^n \ni \mathcal{T}(H) &= (\lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_1(H^T), \lim_{T\to\infty} \mathcal{T}_2(H^T), ...) \\ &= \lim_{T\to\infty} (\mathcal{T}_1(H^T), \mathcal{T}_2(H^T), ...) = \lim_{T\to\infty} \mathcal{T}(H^T) \end{aligned}$$

e justificamos a segunda equação acima, lembrando que a norma usual em $\mathbb{M}(\mathbb{C}^n)$ coincide com a norma induzida por $\mathcal{H}_\infty^n$ no subespaço linear $\{(0,..,0,H,0,..),\ H \in \mathbb{M}(\mathbb{C}^n)\}$. ■

Lema 75 *Suponha T finito, $\Delta \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{K}$ um operador definido em um espaço de Banach X, a valores em X. Consideremos a equação diferencial em espaço de Banach*

$$\begin{cases} \dot{V}(t) + \mathcal{K}(V(t)) = 0, & t \in (-\Delta, T-\Delta) \\ V(T-\Delta) = 0 \end{cases} \tag{11.37}$$

e ainda $S^T(\cdot) \equiv S^{T,0}(\cdot)$ e $S^{T,-\Delta}(\cdot)$ funções tais que

$$S^{T,-\Delta}(t) = S^T(t+\Delta), \quad t \in [-\Delta, T-\Delta] \tag{11.38}$$

Então, $S^{T,-\Delta}(\cdot)$ é uma solução de (11.37) se e somente se $S^T(\cdot)$ for uma solução de (11.37) com $\Delta = 0$. Se uma solução para um sistema for única, então esse será o caso do outro sistema, e ambas soluções satisfarão (11.38).

Prova. A proposição é intuitiva uma vez que se trata de um deslocamento de T. Considerando a parte "somente se" da prova, seja $S^{T,-\Delta}(\cdot)$ tal que

$$\begin{cases} \dot{S}^{T,-\Delta}(t) + \mathcal{K}(S^{T,-\Delta}(t)) = 0, & t \in (-\Delta, T-\Delta) \\ S^{T,-\Delta}(T-\Delta) = 0 \end{cases} \tag{11.39}$$

Agora, de (11.38) temos que $\dot{S}^{T,-\Delta}(t) = \dot{S}^T(t+\Delta)$ e

$$S^{T,-\Delta}(T-\Delta) = S^T(T) = 0 \tag{11.40}$$

de modo que a substituição em (11.39) resulta em

$$\dot{S}^T(t+\Delta) + \mathcal{K}(S^T(t+\Delta)) = 0, \quad t \in (-\Delta, T-\Delta)$$

ou seja, $\dot{S}^T(t) + \mathcal{K}(S^T(t)) = 0$, $t \in (0,T)$. Disto e de (11.40) resulta que $S^T(\cdot)$ satisfaz (11.37) com $\Delta = 0$. A parte "se" da prova se dá via um procedimento análogo, enquanto que a propriedade de unicidade é facilmente provada por contradição. ∎

Nota 76 *O lema se mantem para qualquer condição terminal $V(T-\Delta) = L \in X$.*

Nota 77 *Fixe $T_0 > 0$. Então, a função $[0, T_0] \ni T \mapsto S^T(0)$ satisfaz a* **equação diferencial para frente**

$$\begin{cases} \frac{d}{dT} S^T(0) - \mathcal{K}(S^T(0)) = 0, & T \in (0, T_0) \\ \\ S^0(0) = L \end{cases}$$

se e somente se, para cada T, $S^T(0)$ é solução da **equação diferencial para trás** *(11.37), com $\Delta = 0$ e $V(T) = L$, em $t = 0$. De fato, para a parte "se",*

$$S^T(t+a) = S^{T,a}(t) = S^{T-a}(t), \quad t \in (0, T-a), \ a \geq 0$$

e $S^T(T) = S^0(0) = L$. Logo, (11.37) com $\Delta = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} S^{T-t}(0) + \mathcal{K}(S^{T-t}(0)) = 0, & t \in (0,T) \\ \\ S^0(0) = L \end{cases}$$

e o resultado desejado segue definindo $s = T - t$ e redenominando s por T e T por T_0. A parte "somente se " pode ser demonstrada via procedimento análogo.

11.12 Suporte à Prova do Teorema 63, parte a

Lema 78 *Sejam g e h funções definidas em $[0,a]$, $a > 0$, a valores nos reais, diferenciáveis pela direita na origem e tais que $\dot{g}(0) < \dot{h}(0)$ e $h(0) = g(0)$. Então, existe $\delta > 0$ tal que $g(s) < h(s)$, $0 < s \leqslant \delta$.*

Prova. Definindo

$$\bar{g}(s) = \frac{g(s) - g(0)}{s} \quad \text{e} \quad \bar{h}(s) = \frac{h(s) - h(0)}{s}, \quad s \in (0, a]$$

vem que $\dot{g}(0) = \lim_{s \downarrow 0} \bar{g}(s)$ e $\dot{h}(0) = \lim_{s \downarrow 0} \bar{h}(s)$. Conseqüentemente, para todo ε existe $\delta(\varepsilon)$ tal que $|\bar{g}(s) - \dot{g}(0)| \leqslant \varepsilon$ e $\left|\bar{h}(s) - \dot{h}(0)\right| \leqslant \varepsilon$, $0 < s \leqslant \delta(\varepsilon)$. Agora, porque $\dot{g}(0) < \dot{h}(0)$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\dot{h}(0) - \dot{g}(0) \geq \varepsilon_1$. Logo, tomando $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{3}$,

$$\bar{g}(s) \leqslant \dot{g}(0) + \frac{\varepsilon_1}{3} \quad \text{e} \quad \bar{h}(s) \geq \dot{h}(0) - \frac{\varepsilon_1}{3} \geq \dot{g}(0) + \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1}{3} > \dot{g}(0) + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

o que implica em $\bar{h}(s) > \bar{g}(s)$ ou ainda em $h(s) > g(s)$, $0 < s \leqslant \delta(\frac{\varepsilon_1}{3})$. ∎

Lema 79 *Sejam g e h funções definidas em $[0, \infty)$ e a valores nos reais, com $h(0) = g(0)$. Suponha h contínua e continuamente diferenciável, satisfazendo a equação diferencial $\dot{h}(t) = a(h(t))$, $t \geq 0$, para alguma função escalar a. Vamos ainda assumir g contínua e continuamente diferenciável, satisfazendo a desigualdade $\dot{g}(t) < a(g(t))$, $t \geq 0$. Então, $g(t) < h(t)$, $t \geq 0$.*

Prova. Como $h(0) = g(0)$, temos que $\dot{g}(0) < a(g(0)) = a(h(0)) = \dot{h}(0)$. Logo, podemos aplicar o Lema 78, afirmando que existe $\delta_1 > 0$ tal que $g(t) < h(t)$, $0 < t \leqslant \delta_1$. Agora, da continuidade de g e h, existe $\delta_2 > \delta_1$ tal que

$$g(t) < h(t), \;\; \delta_1 < t < \delta_2 \tag{11.41}$$

Vamos mostrar, por contradição que, de fato, $\delta_2 = \infty$. Suponha que exista δ_2 finito para o qual

$$g(\delta_2) = h(\delta_2) \tag{11.42}$$

(tendo em vista a continuidade de g e h, esta afirmação é suficiente, em detrimento à $g(\delta_2) \geq h(\delta_2)$). Nesse caso

$$\dot{g}(\delta_2) < a(g(\delta_2)) = a(h(\delta_2)) = \dot{h}(\delta_2) \tag{11.43}$$

Por outro lado, temos, de (11.41) e (11.42) que

$$\frac{g(\delta_2) - g(\delta_2 - s)}{s} > \frac{h(\delta_2) - h(\delta_2 - s)}{s}, \quad 0 < s < \delta_2 - \delta_1$$

Passando esta expressão ao limite quando $s \downarrow 0$ e lembrando que g e h são diferenciáveis em $t = \delta_2$, segue que $\dot{g}(\delta_2) > \dot{h}(\delta_2)$, o que contradiz (11.43). ■

11.13 Trajetórias do Processo de Estado $\{x\}$

Lema 80 *Para $t \geq 0$ (não necessariamente um ponto de salto) e $F = (F_1, F_2, ...) \in \mathcal{H}_\infty^n$ arbitrários, consideremos o sistema homogêneo*

$$\dot{x}(\tau) = F_{\theta(\tau)}x(\tau), \tau \geq t$$

com condição inicial $(x(t),\theta(t))$, onde $\{\theta\}$ é a cadeia de Markov definida na Seção 4. Definamos ainda $\tau_0 = t$ e a v.a. $\zeta = (\theta(\tau_{n-1})\ , ...,\ \theta(\tau_1)\ , \tau_{n-1}, ..., \tau_1)$. Então, para todo $\tau \geq t$, a trajetória do processo de estado $\{x\}$ com instantes de salto $\tau_1 < \tau_2 ... < \tau_N$ é dada por

$$x(\tau) = M(\tau, t, \theta(t), \zeta)x(t), \quad \tau_{n-1} \leqslant \tau < \tau_n, \quad a.s. \tag{11.44}$$

para $n = 1, 2, ...N$, onde

$$M(\tau, t, \theta(t), \zeta) \begin{cases} = \exp(F_{\theta(t)}(\tau - t)), \ n = 1 \\ = \exp(F_{\theta(\tau_{n-1})}(\tau - \tau_{n-1})) \exp(F_{\theta(\tau_{n-2})}(\tau_{n-1} - \tau_{n-2}))... \\ \quad ... \exp(F_{\theta(\tau_1)}(\tau_2 - \tau_1)) \exp(F_{\theta(t)}(\tau_1 - t)), \ n = 2, ...N \end{cases} \tag{11.45}$$

e N é finito com $\tau_N = \infty$ ou infinito com $\lim_{N\to\infty} \tau_N = \infty$.

Prova. As trajetórias do processo de estado $\{x\}$ são partes conectadas da solução de

$$\dot{x}(\tau) = F_{\theta(\tau_{n-1})}x(\tau), \quad \tau_{n-1} \leqslant \tau < \tau_n$$

com condição inicial $(x(\tau_{n-1}), \theta(\tau_{n-1}))$, dadas portanto por

$$x(\tau) = \exp(F_{\theta(\tau_{n-1})}(\tau - \tau_{n-1}))x(\tau_{n-1}) \ \text{ a.s.}, \ \tau_{n-1} \leqslant \tau < \tau_n \tag{11.46}$$

Uma conseqüencia da continuidade de (11.46) em cada instante de salto é que

$$x(\tau_n) = \lim_{\tau \uparrow \tau_n} x(\tau) = \exp(F_{\theta(\tau_{n-1})}(\tau_n - \tau_{n-1}))x(\tau_{n-1}) \tag{11.47}$$

Logo, da substituição da expressão acima em (11.46), resulta, com probabilidade um, que

$$x(\tau) = \exp(F_{\theta(\tau_{n-1})}(\tau - \tau_{n-1}))\exp(F_{\theta(\tau_{n-2})}(\tau_{n-1} - \tau_{n-2}))x(\tau_{n-2}), \quad \tau_{n-1} \leqslant \tau < \tau_n$$

e substituições consecutivas conduzem à (11.44), com $M(\tau, \zeta, \theta(t), t)$ e ζ expressos conforme o lema. Em (11.44), N é finito sempre que um estado absorvente seja visitado (o que pode ocorrer sempre que tenhamos algum λ_{ii} nulo). Neste caso $\tau_N = \infty$. De outro modo, N é infinito. Entretanto, uma vez que $-\lambda_{ii}$, $i \in \mathcal{S}$, exibem limite superior uniforme, quase todas trajetórias de $\{\theta\}$ têm no máximo uma quantidade finita de pontos de salto τ_n em qualquer intervalo $[0, d]$, $d < \infty$. Conseqüentemente, com probabilidade um, inexistem seqüencias de pontos de salto convergindo para algum instante finito τ', de modo que $\lim_{N\to\infty} \tau_N = \infty$ a.s. sempre que $N = \infty$. Logo, (11.44) representa a trajetória do processo de estado $\{x\}$ para todo $\tau \geq t$, quer N seja finito ou não. ∎

Bibliografia

[1] Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations.* Cambridge, Massachusetts, the MIT Press, 1978.

[2] Arnold, L., *Stochastic Differential Equations Theory and Applications.* New York, John Wiley and Sons, 1974.

[3] **Baczynski, J.**, Fragoso, M.D., Lopes,E.P. "On a discrete time linear jump stochastic dynamic game". In: *Proceedings of the 3rd Portuguese Conference on Automatic Control (IFAC/NMO)*, pp. 617-620, Coimbra, Portugal, Sept. 1998. A ser publicado (Submetido para *Int. J. of Syst. Science*)

[4] Benjelloun, K., Boukas, E. K., "Mean square stochastic stability of linear time-delay system with Markovian jumping parameters", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 43, n. 10, pp. 1456-1460, 1998.

[5] Bernard, F., Dufour, F., Bertrand, P. "On the JLQ problem with uncertainty", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 98, n. 46, pp. 869-872, 1997.

[6] Björk, T. "Finite optimal filters for a class of nonlinear diffusions with jumping parameters", *Stochastics,* v. 4, n. 2, pp. 167-183, 1980/1981.

[7] Björk, T. "Finite dimensional optimal filters for a class of Itô-processes with jumping parameters", *Stocahstics,* v. 6, n. 2, pp. 121-138, 1981/1982.

[8] Blair, W.P. Jr., Sworder, D.D. "Continuous-time regulation of a class of econometric models", *IEEE Trans. Systems Man Cyber.*, v. 5, pp. 341-346, 1975.

[9] Blair,W.P. Jr., Sworder, D.D. "Feedback control of a class of linear discrete systems with jump parameters and quadratic cost criteria", *Int. J. Control,* v. 21, 833-844, 1975.

[10] Blom, H.A.P. "Continuous-discrete filtering for the systems with Markovian switching coefficients and simultaneous jump". In: *Proc. 21th Asilomar Conf. Signals Syst. Comp.*, pp. 244-248, Pacific Grove, 1987.

[11] Blom, H.A.P., Bar-Shalom,Y. "The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients", *IEEE Trans. Automat. Control,* v. 33 , pp. 780-783, 1988.

[12] Bohacek S., Jonckheere E., *Linear dynamically varying systems versus jump linear systems.* Preprint. In: *University of Southern California,* 1998.

[13] Boukas, El-Kebir, Shi, P. "Stochastic stability and guaranteed cost control of discrete-time uncertain systems with Markovian jumping parameters", *Internat. J. Robust Nonlinear Control,* v. 8, pp. 1155-1167, 1998.

[14] Chung, K.L., *Markov Chains with Stationary Probabilities.* Springer-Verlag, 1967.

[15] Coddington, E. A., Levinson N., *Theory of Ordinary Differential Equations.* New Delhi, Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., 1977.

[16] Costa, O.L.V. "Linear Minimum Mean Square Error Estimation for Discrete-Time Markovian Jump Linear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* v. 39, n. 8, August 1994.

[17] Costa, O.L.V., do Val, J.B.R. "Full information H^∞ -Control for Discrete-Time Infinite Markov Jump Parameter Systems", *J. Math. Analysis and Appl.*, v. 202, pp. 578-603, 1996.

[18] Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. "Discrete-time LQ-optimal control problems for infinite Markov jump parameter systems", *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, v. 40, n. 12, pp. 2076-2088, Dec. 1995.

[19] Costa, O.L.V., Fragoso, M.D. "Stability results for discrete-time linear systems with Markovian jumping parameters", *J. Math. Anal. Appl.,* v. 179, pp. 154-178, 1993.

[20] Costa, O.L.V., Marques, R.P. "Mixed H_2/H^∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 43, pp. 95-100, 1998.

[21] Curtain, R. "A semigroup approach to the LQG problem for infinite-dimensional systems", *IEEE Trans. Circuits Systems*, v. 25, pp. 713-720, 1978.

[22] de Souza, C.E., Fragoso, M.D. "H^∞ control for linear systems with Markovian jumping parameters", *Control–Theory and Advanced Technology* v. 9, pp. 457-466, 1993.

[23] Do Val, J.B.R., Costa, O.L.V., Geromel, J.C., "A convex programming approach to H_2-control of discrete-time Markovian jump linear systems", *Intern. Journ. of Control,* v. 66, pp. 557-579, 1997.

[24] Do Val, J.B.R., Costa, O.L.V., Geromel, J.C., "Uncoupled Riccati Iteration for the quadratic control problem of discrete-time Markov jump linear systems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* v. 43, pp. 1727-1733, 1998.

[25] Do Val, J.B.R., Bazar, T. "Receding horizon control of jump linear systems and a macroeconomic policy problem", *J. Econom. Dynam. Contr.*, v. 23, n. 8, pp. 1099-1131, 1999.

[26] Dufour, F., Elliot, R.J., "Adaptive control of linear systems with Markov perturbations", *IEEE Trans. Automat. Control,* v. 43, pp. 351-372, 1998.

[27] Dufour, F., Bertrand, P. "The filtering problem for continuous-time linear systems with Markovian switching coefficients", *Systems & Control Letts.*, v. 23, pp. 453-461, 1994.

[28] Dynkin, E.B., *Markov Processes.* v. 1, Academic Press Inc., Publishers, 1965.

[29] Elliot, R.J., Sworder, D.D. "Control of a hybrid conditionally linear Gaussian process", *J. Optim. Theory Applications,* v. 74, pp. 75-85, 1992.

[30] Feng, X., Loparo, K.A., Ji ,Y., Chizeck, H.J., "Stochastic stability properties of jump linear systems", *IEEE Trans. Automat. Control,* v. 37, pp. 1884-1892, 1992.

[31] Fleming W. H., Rishel R. V., *Deterministic and Stochastic Optimal Control.* New York, Springer-Verlag, 1975.

[32] Florentin, J., J. "Optimal control of continuous-time, Markov, stochastic systems", *J. Electron Contr.*, v. 10, pp. 473, 1961.

[33] Fragoso, M.D. "On a partially observable LQG problem for systems with Markovian jumping parameters", *Systems & Control Letts.*, v. 10, pp. 349-356, 1988.

[34] Fragoso, M.D., **Baczynski, J.** "Optimal Control for continuous time LQ-problems with infinite Markov jump parameters via semigroup". In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision & Control*, pp. 4131-4136, Phoenix, Arizona, USA, Dec. 1999. A ser publicado (Submetido e aceito para revisão, 31 pgs., para *SIAM J. Control & Optimization).*

[35] Fragoso, M.D., **Baczynski, J.**, *Lyapunov coupled equations for continuous-time infinite Markov jump linear systems.* In: R&D Report n. 39/00, National Laboratory for Scientific Computing - LNCC/CNPq. A ser publicado (Submetido para *IMA J. of Control and Information*).

[36] Fragoso, M.D., **Baczynski, J.**, *Stochastic versus Mean Square Stability in Continuous Time Linear Infinite Markov Jump Parameter Systems.* In: R&D Report n. 38/00, National Laboratory for Scientific Computing - LNCC/CNPq. A ser publicado (Submetido para *Applied Math. Letts.*)

[37] Fragoso, M.D., Costa, O.L.V., **Baczynski, J.**, *The minimum linear mean square filter for a class of hybrid systems.* In: R&D Report n. 40/00, National Laboratory for Scientific Computing - LNCC/CNPq. A ser publicado (Submetido ao 39^{th} IEEE CDC-2000).

[38] Fragoso, M.D., Nascimento, E.C.S., **Baczynski, J.**, H_∞ *Control for Continuous Time Linear Systems with Infinite Markov Jump Parameters via Semigroup.* In: R&D Report n. 41/00, National Laboratory for Scientific Computing - LNCC/CNPq. A ser publicado (Submetido ao 39^{th} IEEE CDC-2000).

[39] Fragoso, M.D. "A small random perturbation analysis of a partially observable LQG problem for systems with Markovian jumping parameters", *IMA Journal of Mathematical Control & Information,* v. 7, pp. 293–305, 1990.

[40] Fragoso, M.D., do Val, J.B.R., Pinto Jr., D.L., "Jump linear H^∞ control: The discrete-time case", *Control-Theory and Adv. Tech.,* v. 10, pp. 1459-1474, 1995.

[41] Fragoso, M. D., Hemerly, E. M. "Optimal control for a class of noisy linear systems with Markovian jumping parameters and quadratic cost", *Int. J. Systems Sci.*, v. 22, pp. 2553-2561, 1991.

[42] Gihman, I. I., Skorohod, A. V., *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, 1972.

[43] Gray, W.S., Gonzalez, O. "Modelling electromagnetic disturbances in closed-loop computer controlled flight systems" In: *IEEE 37th Conf. on Dec. and Contr.*, pp. 359-364, Philadelphia, Pennsylvania, June 1998.

[44] Itô, K., McKean Jr., H.P., *Diffusion Processes and their Sample Paths.* Springer Verlag, 1974.

[45] Ji, Y., Chizeck, J. H. "Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jumping linear quadratic control", *IEEE Trans. Automat. Control*, v. 35, pp. 777-788, 1990.

[46] Ji, Y., Chizeck,J. H. "Jump linear quadratic Gaussian control: steady-state solution and testable conditions", *Control-Theory and Adv. Tech.,* v. 6, pp. 289-319, 1990.

[47] Ji, Y., Chizek, H. J., Feng, X., Loparo, K.A. "Stability and control of discrete-time jump linear systems", *Control-Theory and Adv. Tech.*, v. 7, pp. 247-270, 1991.

[48] Karlin, S., Taylor, H. M., *A Second Course in Stochastic Process.* Academic Press, 1981.

[49] Krall, M. A., *Applied Analysis.* D. Reidel Publishing Company, 1986.

[50] Krasovski. N. N., Lidskii E. A. "Analytical design of controllers in sytems with radom attributes I, II, III", *Automation Remote Control*, v. 22, pp. 1021-1025, pp. 1141-1146, pp. 1289-1294, 1961.

[51] Malhame R., Chong C.Y. "Electric load model synthesis by diffusion approximation in a high order hybrid state stochastic systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 30, pp. 854-860, 1985.

[52] Mariton, M. "Almost sure and moments stability of jump linear systems", *Systems & Control Letts.*, v. 11, pp. 393-397, 1988.

[53] Mariton, M., *Jump Linear Systems in Automatic Control*, New York, Marcel Dekker, 1990.

[54] Mariton, M., Bertrand, P. "Output feedback for a class of linear systems with stochastic jump parameters", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, v. 30, pp. 898-903, 1985.

[55] Mariton, M., Bertrand, P. "Robust jump linear quadratic control: A mode stabilizing solution", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-30, pp. 1145-1147,1985.

[56] Mariton, M., Bertrand, P. "Reliable flight control systems: Components placement and feedback synthesis. In: *Proc. 10th IFAC World Congress*, Munich, (1987), 150-154.

[57] Morozan, T. "Optimal stationary control for dynamic systems with Markov perturbations", *Stochastic Anal. Appl.*, v. 1, pp. 219-225, 1983.

[58] Nachbin, L., *Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial.* Washington, D.C., The General Secretariat of the Organization of American States, 1976.

[59] Naylor, A. W., Sell, G. R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science.* Springer-Verlag, 1983.

[60] Pan Z., Bazar, T. "H^{∞}-control of Markovian jump systems and solutions to associated piecewise-deterministtic differential games". In: *New Trends*

in Dynamic Games and Applications, v. 3, *Ann. Internat. Soc. Dyn.Games,* Birkhauser, pp. 61-94,1995.

[61] Pazy, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag New York, 1983.

[62] Sworder, D.D. "Feedback control for a class of linear systems with jump parameters", *IEEE Trans. Automat. Control,* AC-14, pp. 9-14, 1969.

[63] Sworder, D. D., Robinson, V. G. "Feedback regulators for jump parameter systems with control and state dependent transition rates", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, AC-18, pp. 355-360, 1973.

[64] Sworder, D.D., Rogers, R.O. "An LQ solution to a control problem associated with a solar thermal central receiver", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* AC-28, n. 10, pp. 971-978, 1983.

[65] Whittle, P., *Optimization Over Time,* v. I, John Wiley & Sons, 1982.

[66] Willsky, A. S. "A survey for design methods for failure detection in dynamic systems", *Automatica*, v. 12, n. 6, pp. 601-612, 1976.

[67] Willsky, A. S., Levy, B. C., *Stochastic Stability Research for Complex Power Systems.* In: Rep. ET-76-C-01-2295, DOE Contract, LIDS, MIT, 1979.

[68] Wonham, W. M. "On a matrix Riccati equation of stochastic control", *SIAM J. Control*, v. 6, n. 4, pp. 681-697, 1968.

[69] Wonham, W.M. "Random differential equations in control theory". In: *Probabilistic Methods in Applied Mathematics*, v. 2, A. T. Barucha Reid Ed., New York, Academic Press, 1971.