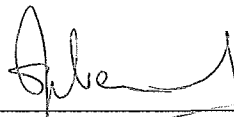


UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR EM DOIS NÍVEIS

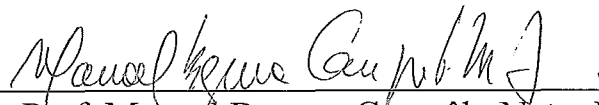
Adriana Bandeira Moraes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E
COMPUTAÇÃO

Aprovada por:



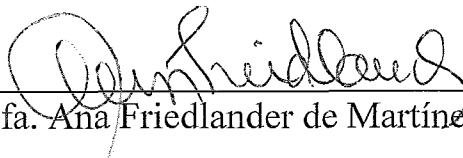
Prof. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc



Prof. Manoel Bezerra Campêlo Neto, D.Sc



Prof. Maria Helena Cautiero Jardim, D.Sc.



Prof. Ana Friedlander de Martínez Perez, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRAZIL

SETEMBRO DE 2001

BANDEIRA MORAES, ADRIANA

Um Estudo Comparativo entre Algoritmos de
Programação Linear em Dois Níveis [Rio de
Janeiro] 2001

VIII, 90 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2001)

Tese – Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

- 1 . Programação Linear em Dois Níveis
- 2 . Problemas de Complementaridade Linear
Generalizada.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*À minha querida mãe,
Carmem Bandeira*

Agradecimentos

Agradeço aos meus queridos pais, que sempre me motivaram para chegar até o fim deste trabalho.

Aos meus orientadores e amigos, Susana Scheimberg e Manoel Campêlo, pela compreensão e carinho.

À todos os meus amigos, principalmente, Márcio Martins pelos “tradicional almoços de quarta”.

À todos da COPPE/UFRJ e CAPES.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc)

UM ESTUDO COMPARATIVO ENTRE ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR EM DOIS NÍVEIS

Adriana Bandeira Moraes

Setembro/2001

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler.

Manoel Bezerra Campêlo Neto

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

A Programação Linear de Dois Níveis é o principal assunto deste trabalho. Na primeira parte são apresentadas características e propriedades deste problema e um algoritmo para encontrar uma solução global. Este algoritmo utiliza pontos de equilíbrio e um procedimento chamado de *outer approximation adaptado*. Este procedimento foi substituído por um algoritmo que resolve um problema de programação não-linear, oriundo de um Problema de Complementaridade Linear Generalizado. São realizados experimentos computacionais e comparações entre os algoritmos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science(M.Sc)

A COMPARATIVE STUDY OF ALGORITHMS
FOR BILEVEL LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Adriana Bandeira Moraes

September/2001

Advisor: Susana Scheimberg de Makler.

Manoel Bezerra Campêlo Neto

Department: Computing Systems Engineering

This work is in the context of linear bilevel problems. Properties and characterizations of this kind of problems are presented. And an algorithm to find a global solution is considered. This method combines equilibrium points with an adapted outer approximation procedure. A modified algorithm is introduced by replacing the last procedure by a nonlinear algorithm related to a Generalized Linear Complementary Problem. Computational results and comparison between the methods are presented.

Índice

Introdução	1
1 Programação de Dois Níveis	3
1.1 Introdução	3
1.2 Problema Estático de Stackelberg	5
1.3 Programação Linear de Dois Níveis	11
1.3.1 Relações entre PLDN e PR	16
1.4 Propriedades do PLDN	24
2 Estudo do PLDN	30
2.1 Otimalidade Global do PLDN	30
2.1.1 Problemas Associados ao PLDN	31
2.1.2 Propriedades	33
2.1.3 Relações entre (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$	37
2.2 Otimalidade Local do PLDN	42
2.2.1 O Ponto de Equilíbrio	42
2.2.2 O Algoritmo de Ponto de Equilíbrio	47

3	Estudo do PLDNP	51
3.1	Introdução	51
3.2	Análise Global e Local do PLDNP	54
3.2.1	Otimalidade Global	54
3.2.2	Otimalidade Local	56
3.3	Algoritmo Global	58
4	O PLDNP e o PCLG	65
4.1	O Problema de Complementaridade Linear Generalizado	66
4.2	Reformulação da Região Viável do PLDNP	68
4.3	Modificações no Algoritmo Global	71
4.4	Implementações	77
	Conclusões	82
	Referências Bibliográficas	84

Introdução

A formulação de dois níveis corresponde a um modelo de otimização matemática, que envolve dois problemas, dispostos numa estrutura hierárquica. É adequado para descrever problemas onde as decisões do segundo nível (seguidor) dependem das ações do primeiro nível (líder). Este trabalho trata do caso linear deste problema.

Inicialmente, apresentamos o problema de programação de dois níveis e algumas de suas propriedades. Depois estudamos mais especificamente o problema sem restrição no primeiro nível. A partir daí, entraremos no nosso principal assunto, que é otimização global. Um algoritmo global é apresentado, propostas de modificações são sugeridas e experimentos computacionais são realizados.

O capítulo 1 apresenta definições, notações e propriedades da programação de dois níveis. Em especial, o caso linear é tratado no capítulo 2. Também é apresentado neste capítulo a idéia de ponto de equilíbrio e sua relação com as soluções locais do nosso problema. Um algoritmo que encontra um ponto de equilíbrio e faz parte do algoritmo global também aparece neste capítulo.

O capítulo 3 trata do problema sem restrições no primeiro nível (PLDNP) e caracteriza os casos de inviabilidade, ilimitação e existência de solução global. As soluções locais deste problema são caracterizadas através do conceito de equilíbrio. É apresentado o algoritmo global, proposto em Campêlo [19, capítulo 4], que combina os algoritmos de ponto de equilíbrio e de *outer approximation adaptado*.

Por fim, no capítulo 4 é dada nossa efetiva contribuição, onde analisaremos algumas modificações no algoritmo global. Para isso, é considerado o Problema de Complementaridade Linear Generalizada (PCLG), que permite descrever a região viável do PLDNP. O algoritmo de *outer approximation adaptado* é substituído, por um procedimento para encontrar pontos estacionários de um problema de programação não-linear relacionado ao PCLG, sugerido em Fernandes *et. al* [28]. Experimentos computacionais com os algoritmos são realizados e comparados.

Capítulo 1

Programação de Dois Níveis

Neste capítulo é apresentado o principal objeto de nosso estudo, o problema de programação linear de dois níveis. Uma abordagem geral da programação em dois níveis é apresentada na seção 1.1, sendo na seção 1.2 estudada sua relação com a teoria dos jogos de Stackelberg. Finalmente na seção 1.3 é introduzida a formulação geral do problema linear de dois níveis e na seção 1.4 são ilustradas suas principais características.

1.1 Introdução

Nesta seção é dada uma visão global da programação em dois níveis, que é um caso particular da programação multi-nível. O problema de dois níveis corresponde a um

problema de otimização hierárquica, onde as ações do segundo nível (seguidor) dependem das decisões do primeiro (líder).

Seja o problema de dois níveis (PDN) definido por:

$$\begin{aligned}
 \text{(PDN)} \quad & \max_{x,y} f_1(x,y) \\
 \text{s. a:} \quad & g_1(x,y) \leq 0, \text{ y resolve} \\
 & \max_y f_2(x,y) \\
 \text{s. a:} \quad & g_2(x,y) \leq 0 \\
 & (x,y) \in X \times Y
 \end{aligned}$$

onde $x \in X \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$, $f_1, f_2: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g_2: \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^q$.

Neste problema tem-se que x , $f_1(x,y)$ e $g_1(x,y)$ são, respectivamente, a variável, função objetivo e restrição do líder. De maneira análoga, y , $f_2(x,y)$ e $g_2(x,y)$ são a variável, função objetivo e restrição do seguidor, respectivamente.

A formulação original do problema de dois níveis foi feita por Bracken e McGill [12] em 1973. O termo programação em dois níveis foi utilizado pela primeira vez por Candler e Norton [20] em 1977. Nas décadas de 80 e 90, vários autores contribuíram com o estudo deste problema como Bard [4], Candler [19], Benson [9], Savard [50], McCormick [45], Önal [47], White e Anandalingam [55], Dantas [26], Amouzegar e Moshirvaziri [1], Campêlo [13], entre outros. Revisões bibliográficas sobre o tema encontram-se em Vicente e Calamai [52] e Wen e Hsu [54].

O PDN é um modelo matemático inspirado no jogo líder/seguidor que usa a estratégia sugerida por Stackelberg em 1952.

1.2 Problema Estático de Stackelberg

Nesta seção é apresentada a relação existente entre a programação em dois níveis e a teoria dos jogos de Stackelberg. Neste jogo, o controle das variáveis de decisão é dividido entre dois jogadores, o líder e o seguidor. Cada jogador procura maximizar sua função objetivo e as decisões são tomadas seqüencialmente sem que haja cooperação entre as partes. Considera-se que os jogadores conhecem as funções e estratégias um do outro. O jogo inicia-se com o líder escolhendo um vetor $x \in X$ na tentativa de maximizar sua função objetivo. A estratégia escolhida pelo líder afeta tanto a função objetivo do seguidor como seu espaço de decisão. O seguidor observa a escolha do líder e reage selecionando um vetor $y \in Y$, o qual maximiza sua função objetivo. Fazendo isso o seguidor, conseqüentemente, afeta o líder.

O problema de Stackelberg — Problema Estático de Stackelberg (PES) — é formulado como um problema de otimização de dois níveis, onde as decisões tomadas pelo líder e seguidor, correspondem aos problemas do primeiro e segundo nível, respectivamente.

A formulação do PES é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{(PES)} \quad & \max_{x \in X} f_1(x, y) \\ & \text{s.a: } g_1(x, y) \leq 0, \text{ y resolve} \\ & \max_{y \in Y} f_2(x, y) \\ & \text{s.a: } g_2(x, y) \leq 0 \\ & (x, y) \in X \times Y \end{aligned}$$

Observe que apesar de parecerem iguais, o PES e o PDN diferenciam-se na maneira como a função objetivo do líder f_1 é maximizada. No PES esta função é maximizada apenas em x , ou seja, as decisões do seguidor que possibilitam a satisfação das restrições do líder, são indiferentes para este. Isto não acontece no PDN, pois f_1 é maximizada tanto em x quanto em y .

Ressalta-se que esta formulação do problema de Stackelberg pode não estar bem definida. Isto pode acontecer quando o problema do seguidor tem mais de uma solução, como ilustrado nos seguintes exemplos:

Exemplo 1:

$$(PES1) \max_{x \in \mathbb{R}} f_1(x, y) = -2x - y_1$$

$$\text{s.a: } x \geq 0, y = (y_1, y_2) \text{ resolve}$$

$$P(x) \left\{ \begin{array}{l} \max_{y \in \mathbb{R}^2} f_2(x, y) = -2y_1 + 2y_2 \\ \text{s.a: } x - y_1 + y_2 \leq 2 \\ \quad \quad y_1 + y_2 \leq 4 \\ \quad \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right.$$

A região viável do seguidor é não vazia para todo $x \in [0, 6)$. O seguidor tem infinitas soluções quando x pertence a este intervalo. A seguir apresentaremos graficamente as regiões viáveis de $P(x)$ e o correspondente conjunto de soluções.

$$0 \leq x \leq 2$$

$$2 \leq x \leq 6$$

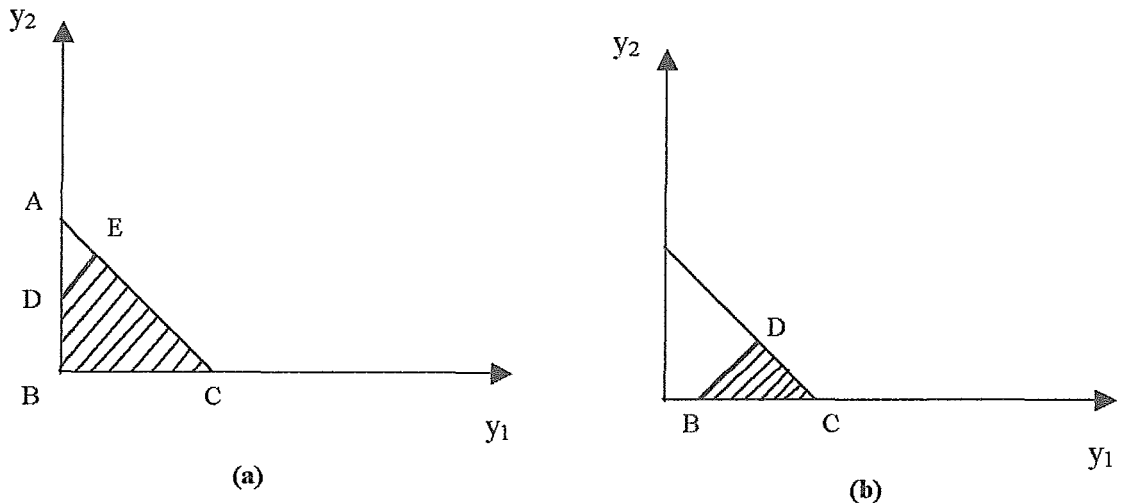


Figura 1

A região viável de $P(x)$ é representado na **figura 1** pelo politopo BCED em (a), para $0 \leq x \leq 2$, e pelo triângulo BCD em (b), para $2 \leq x \leq 6$. As soluções ótimas do problema do segundo nível encontram-se sobre o segmento de reta em negrito - $y_1 + y_2 = 2 - x$, para ambos os gráficos. Isto é, as soluções de $P(x)$ são dadas por:

- $\{y = (y_1, y_2) : 0 \leq y_1 \leq 1 + 0.5x, y_2 = 2 - x + y_1\}$, se $0 \leq x \leq 2$;
- $\{y = (y_1, y_2) : x - 2 \leq y_1 \leq 1 + 0.5x, y_2 = 2 - x + y_1\}$, se $2 \leq x \leq 6$;
- \emptyset , se $x > 6$.

Dado que o seguidor tem infinitas soluções, ele pode escolher como resposta qualquer uma delas. Dependendo desta eleição, o ponto solução ou valor ótimo do líder podem mudar. Ilustra-se esta situação através da análise de duas possíveis estratégias.

1. O seguidor escolhe aquela que anula uma das variáveis.

A solução dada por $P(x)$ é

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = \begin{cases} (0, 2 - x), & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ (-2 + x, 0), & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

A função objetivo do líder resulta em

$$f_1(x, y(x)) = \begin{cases} -2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -3x + 2, & \text{se } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

e a solução do líder é $x^* = 0$ e $f_1(x^*, y(x^*)) = 0$

2. O seguidor fornece como resposta aquela que pertence à reta $y_1 + y_2 = 4$

Neste caso a solução $y(x)$ seleccionada é

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = (1 + 0.5x, 3 - 0.5x)$$

resultando em

$$f_1(x, y(x)) = -2.5x - 1$$

Neste caso, a solução do líder é $x^* = 0$ e $f_1(x^*, y(x^*)) = -1$.

Portanto, para $x^* = 0$, a solução ótima pode tanto ser $f_1(x^*, y(x^*)) = 0$ quanto $f_1(x^*, y(x^*)) = -1$, dependendo se $y(0) = (0, 0)$ ou $y(0) = (1, 3)$.

Exemplo 2: (Adaptado de Bard e Falk [5])

$$(PES2) \max_{x \in \mathbb{R}^2} f_1(x, y) = -(2y_1 + 3y_2)x_1 - (4y_1 + y_2)x_2$$

$$\text{s.a: } x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y = (y_1, y_2) \text{ resolve}$$

$$P(x) = \begin{cases} \max_{y \in \mathbb{R}^2} f_2(x, y) = (x_1 + 3x_2)y_1^2 + (4x_1 + 2x_2)y_2 \\ \text{s.a: } y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

As soluções de $P(x)$, para se satisfazer as restrições do líder, são dadas pelo conjunto

$$y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = \begin{cases} (1,0), & \text{se } x_1 < 0.25 \\ (1,0) \text{ ou } (0,1), & \text{se } x_1 = 0.25 \\ (0,1), & \text{se } x_1 > 0.25 \end{cases}$$

onde $0 \leq x_1 \leq 1$.

A função objetivo é dada pelo conjunto

$$f_1(x, y(x)) = \begin{cases} -2x_1 - 4x_2, & \text{se } x_1 < 0.25 \\ \left. \begin{array}{l} -3.5 \\ -1.5 \end{array} \right\}, & \text{se } x_1 = 0.25 \\ -3x_1 - x_2, & \text{se } x_1 > 0.25 \end{cases}$$

onde $0 \leq x_1 \leq 1$.

A resolução gráfica deste problema é dada por

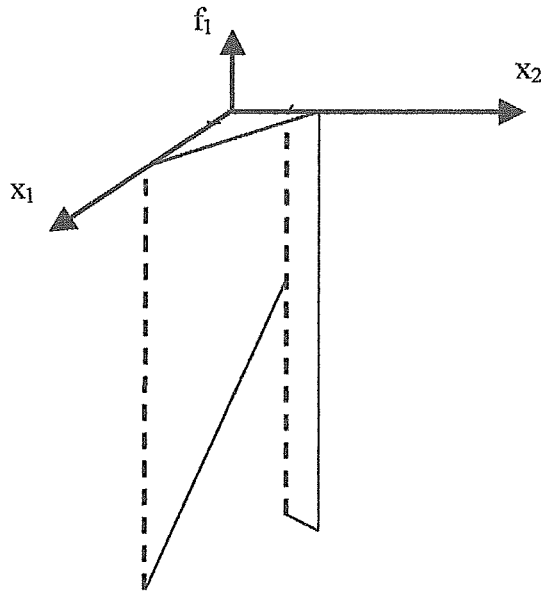


Figura 2

Tem-se então que a melhor estratégia para o líder seria $x^* = (0.25, 0.75)$, desde que o seguidor optasse por $y^* = (0, 1)$, gerando $f_1(x^*, y^*) = -1.5$. Entretanto, observe que

o seguidor poderia escolher igualmente $\hat{y} = (1,0)$, resultando em $f_1(x^*, \hat{y}) = -3.5$. Neste caso, $\bar{x} = (1,0)$ seria melhor dado que a resposta do seguidor que é $\bar{y} = (0,1)$, gerando $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = -3$.

Como a formulação do PES não está bem definida, pode-se contornar o problema considerando duas possíveis abordagens.

A primeira assume que o seguidor coopera com o líder na maximização de $f_1(x, y)$.

Redefine-se, neste caso, o problema como:

$$\begin{aligned}
 \text{(PCC)} \quad & \max_{x \in X} \left\{ \max_{y \in Y} f_1(x, y) \right\} \\
 \text{s.a:} \quad & g_1(x, y) \leq 0, \text{ y resolve} \\
 & \max_{y \in Y} f_2(x, y) \\
 \text{s.a:} \quad & g_2(x, y) \leq 0
 \end{aligned}$$

Observe-se que este problema PCC é equivalente ao PDN.

A segunda abordagem considera uma estratégia conservadora, onde assume-se que o seguidor reage com o pior cenário para o líder. Neste caso, redefine-se o problema PES como:

$$\begin{aligned}
 \text{(PSC)} \quad & \max_{x \in X} \left\{ \min_{y \in Y} f_1(x, y) \right\} \\
 \text{s.a:} \quad & g_1(x, y) \leq 0, \text{ y resolve} \\
 & \max_{y \in Y} f_2(x, y) \\
 \text{s.a:} \quad & g_2(x, y) \leq 0
 \end{aligned}$$

Quando a solução ótima do problema do seguidor é única para cada x , o problema de Stackelberg pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
(\text{PES}) \quad & \max_{x \in X} f_1(x, y(x)) \\
\text{s.a:} \quad & g_1(x, y(x)) \leq 0 \\
& f_2(x, y(x)) = \max_{y \in Y} f_2(x, y) \\
& \text{s.a: } g_2(x, y) \leq 0
\end{aligned}$$

onde $y(x)$ define a solução do problema do segundo nível, $P(x)$. Neste caso, os três problemas PES, PDN e PSC são equivalentes.

1.3 Programação Linear de Dois Níveis

Como já dito na introdução deste capítulo, a Programação Linear de Dois Níveis é o principal assunto deste trabalho. Nesta seção é apresentada sua notação e algumas de suas características básicas.

No problema linear de dois níveis considera-se que todas as funções e restrições do modelo PDN são lineares, ou seja, $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$ são lineares.

Sua formulação geral é dada por:

$$(\text{PLDN}) \quad \max_{x, y} f_1(x, y) = c_1^t x + c_2^t y \quad (1.1)$$

$$\text{s.a: } A_1 x + B_1 y \leq b_1 \quad (1.2)$$

$$x \geq 0, y \text{ resolve} \quad (1.3)$$

$$\max_y f_2(x, y) = d^t y \quad (1.4)$$

$$\text{s.a: } A_2 x + B_2 y \leq b_2 \quad (1.5)$$

$$y \geq 0 \quad (1.6)$$

onde $x, c_1 \in \mathfrak{R}^{n_1}$, $y, c_2, d \in \mathfrak{R}^{n_2}$, $b_1 \in \mathfrak{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathfrak{R}^{m_2}$, $A_1 \in \mathfrak{R}^{m_1 \times n_1}$, $B_1 \in \mathfrak{R}^{m_1 \times n_2}$,

$A_2 \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n_1}$, $B_2 \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n_2}$.

O termo referente à variável x na função objetivo do seguidor em (1.4) foi ignorado, como em Bialas e Karwan [10], Ben-Ayed e Blair [8], Gendreau et al. [33], Amouzegar e Moshirvaziri [1] e Campêlo [13], por ser um termo constante.

Um dos primeiros autores a apresentar uma formulação formal para o problema linear de dois níveis foi Candler e Norton [20] que, posteriormente, foi melhorada por Fortuny-Amat e McCarl [29]. Entre os vários autores que tem estudado o PLDN podemos citar Bialas e Karwan [10], Savard [50], Önal [47], White e Anandalingam [55], Gendreau et al. [33], Amouzegar e Moshirvaziri [1], Campêlo [13], Campêlo e Scheimberg [15].

Uma dificuldade do problema PLDN é a sua não-convexidade, dado que a região viável pode ser um conjunto não-convexo. Devido a esta não-convexidade, o PLDN pode ter ótimos locais, como é ilustrado no exemplo 3. Uma técnica proposta em Vicente e Calamai [53] permite gerar exemplos de problemas de dois níveis lineares com um número exponencial de mínimos locais.

Pode-se verificar também que o PLDN é NP-difícil, conforme demonstra Jeroslow [36] e Ben-Ayed e Blair [8] entre outros. Aliás, Vicente *et al.* [51] demonstram que a verificação de otimalidade local de um problema PLDN também é NP-difícil.

A seguir definimos um problema convexo associado ao PLDN, o problema relaxado, ao qual nos referiremos com freqüência.

O problema relaxado do PLDN é dado por:

$$\begin{aligned}
 (\text{PR}) \quad & \max_{x,y} f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y \\
 \text{s.a:} \quad & A_1 x + B_1 y \leq b_1, \\
 & A_2 x + B_2 y \leq b_2 \\
 & x \geq 0, y \geq 0
 \end{aligned}$$

Para o PLDN são estabelecidas as seguintes definições e notações:

- Conjunto viável relaxado:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} : A_1 x + B_1 y \leq b_1, A_2 x + B_2 y \leq b_2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- Conjunto solução do PR:

$$\Omega_* = \arg \max \{c_1^t x + c_2^t y : (x,y) \in \Omega\}$$

- Conjunto viável do segundo nível em x:

$$\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n_2} : B_2 y \leq b_2 - A_2 x, y \geq 0\}$$

- Conjunto solução do segundo nível em $x \geq 0$ (ou Conjunto reação do seguidor):

$$\Psi(x) = \arg \max \{d^t y : y \in \Omega(x)\}$$

- Conjunto viável da restrição implícita do primeiro nível em $x \geq 0$:

$$\Psi = \{(x,y) : y \in \Psi(x)\}$$

- Conjunto viável do PLDN (ou conjunto de reações racionais ou região induzida):

$$\Phi = \{(x,y) \in \Omega : y \in \Psi(x)\} = \Omega \cap \Psi$$

- Conjunto solução do PLDN:

$$\Phi_* = \arg \max \{c_1^t x + c_2^t y : (x,y) \in \Phi\}$$

Uma importante particularidade do conjunto Φ_* é que ele pode ser não-convexo.

Observe-se que $y \in \Psi(x)$ é a restrição implícita do PLDN. Com efeito, $y \in \Psi(x)$

equivale a dizer que y resolve o problema do seguidor. Esta restrição implícita é a diferença que existe entre um problema de programação linear clássico e o problema linear de dois níveis. No próximo exemplo 3, ilustram-se as características já citadas de um PLDN: não convexidade da região viável Φ , existência de soluções locais e não-convexidade do conjunto de soluções ótimas Φ_* .

Exemplo 3:

Considere-se o seguinte problema P1, que é a adaptação de um problema que aparece em Bialas e Karwan [10].

$$(P1) \max_{x, y_1, y_2} f_1(x, y_1, y_2) = -y_2$$

$$\text{s.a: } x \geq 0, y \text{ resolve}$$

$$\max_{y_1, y_2} f_2(x, y_1, y_2) = y_2$$

$$\text{s.a: } x + y_1 + y_2 \leq 3$$

$$x + y_1 - y_2 \geq 1$$

$$-x + y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x - y_1 + y_2 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0, 0 \leq y_2 \leq 0.5$$

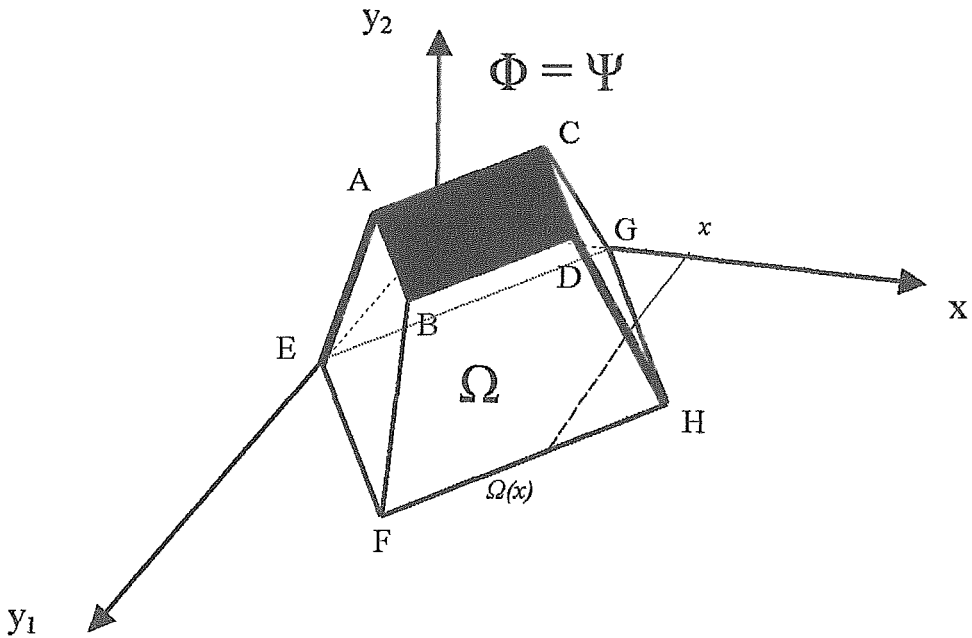


Figura 3

Os segmentos de retas AE e DH em negrito e o retângulo preto ABDC na figura 3 representam o conjunto viável de P1,

$$\Phi = \{(x, 1, x) : 0 \leq x \leq 0.5\} \cup \{(x, y_1, 0.5) : 0.5 \leq x \leq 1, 1.5 - x \leq y_1 \leq 0.5 + x\} \cup \\ \{(x, y_1, 0.5) : 1 \leq x \leq 1.5, -0.5 + x \leq y_1 \leq 2.5 - x\} \cup \{(x, 1, 2 - x) : 1.5 \leq x \leq 2\}$$

que é não-convexo. Esta não-convexidade proporciona o aparecimento de soluções locais. Com efeito, tem-se um conjunto de soluções locais que corresponde ao retângulo de vértices ABCD, eliminando os vértices A e D. O conjunto de soluções globais também é não convexo, $\Phi_* = \{E, H\}$, onde $E = (0, 1, 0)$ e $H = (2, 1, 0)$.

Outras situações envolvendo as regiões viáveis do PLDN e PR são estudadas na próxima subseção.

1.3.1 Relações entre PLDN e PR

Os problemas PLDN e PR podem ser reescritos de uma maneira mais simplificada:

$$\begin{array}{ll} \text{(PLDN)} & \max_{x,y} f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y \\ & \text{s.a: } (x,y) \in \Phi = \Omega \cap \Psi \\ \text{(PR)} & \max_{x,y} f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y \\ & \text{s.a: } (x,y) \in \Omega \end{array}$$

As relações existentes entre os problemas PLDN e PR é o principal assunto desta subseção.

Lembremos, inicialmente, que a notação $V(P)$ correspondente ao valor ótimo do problema (P) pode ser estendida, definindo-se $V(P) = -\infty$ quando o problema (P) é inconsistente e $V(P) = +\infty$ se o problema (P) é ilimitado.

O primeiro resultado, já conhecido, é consequência imediata do fato de $\Phi \subseteq \Omega$.

Proposição 1.3.1.1: *Dados os problemas PLDN e PR tem-se:*

- (a) *Se PLDN e PR têm soluções ótimas, então o valor ótimo do problema relaxado, é um limitante superior do valor ótimo do problema linear de dois níveis, isto é, $V(\text{PLDN}) \leq V(\text{PR})$.*
- (b) *Se PLDN é ilimitado, então PR também é ilimitado.*
- (c) *Se PR é inconsistente, então PLDN também é inconsistente.*

A caracterização da igualdade dos valores ótimos de ambos os problemas aparece na próxima propriedade:

Teorema 1.3.1.1: *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $-\infty < V(\text{PLDN}) = V(\text{PR}) < +\infty$

(ii) $\Phi_* \cap \Omega_* \neq \emptyset$

(iii) $\emptyset \neq \Phi_* \subseteq \Omega_*$

Prova:

(i) \Rightarrow (ii)

Por hipótese, $-\infty < V(\text{PLDN}) = V(\text{PR}) < +\infty$, o que significa que existe um ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi_* \subseteq \Phi$ tal que

$$f_1(\bar{x}, \bar{y}) = V(\text{PLDN}) = V(\text{PR}) \quad (1.7)$$

Sabendo que $\Phi \subseteq \Omega$, deduz-se que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi \subseteq \Omega$. Logo, por (1.7) conclui-se que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_*$ e, por conseguinte, que $\Phi_* \cap \Omega_* \neq \emptyset$.

(ii) \Rightarrow (iii)

Considere $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi_* \cap \Omega_*$. Então $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi_*$, ou seja, $\Phi_* \neq \emptyset$. Falta provar que $\Phi_* \subseteq \Omega_*$.

Seja $(x, y) \in \Phi_*$. Então $f_1(x, y) = f_1(\bar{x}, \bar{y}) = V(\text{PR})$. Como $\Phi_* \subseteq \Phi \subseteq \Omega$, resulta que (x, y) é ótimo para o problema PR. Logo $(x, y) \in \Omega_*$, isto é, $\Phi_* \subseteq \Omega_*$.

(iii) \Rightarrow (i)

Por hipótese, $\emptyset \neq \Phi_* \subseteq \Omega_*$. Então existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi_* \subseteq \Omega_*$. Dado que $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Phi_*$, tem-se que $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = V(\text{PLDN})$. Como $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_*$, deve ser $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = V(\text{PR})$ e, portanto, resulta $V(\text{PLDN}) = V(\text{PR})$.

□

É interessante ressaltar que todas as relações acima também são válidas para o problema de dois níveis não necessariamente linear.

Existe outra relação entre PLDN e PR que deve ser observada. Com efeito, da definição de conjunto viável do PLDN, resulta que Φ está contido no conjunto viável da restrição implícita, $\Phi \subseteq \Psi$. A igualdade acontece, por exemplo, quando o PLDN não tem restrições lineares no primeiro nível, o que é ilustrado no exemplo P2.

A seguir consideram-se e ilustram-se possíveis relações entre o PLDN e o PR:

(1) O problema relaxado é ilimitado e o de dois níveis tem solução.

Exemplo 4:

$$\begin{aligned}
 \text{(P2)} \quad & \max_{x,y} f_1(x,y) = 3y \\
 \text{s. a:} \quad & x \geq 0, y \text{ resolve} \\
 & \max_y f_2(x,y) = -4y \\
 \text{s. a:} \quad & x + y \geq 2 \\
 & y \geq 1
 \end{aligned}$$

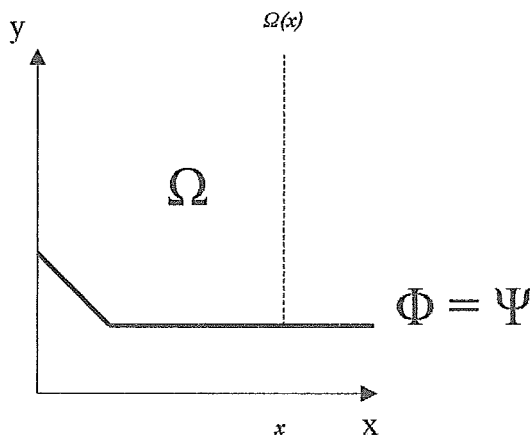


Figura 4

Para este problema resulta:

- Conjunto viável relaxado:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 2, y \geq 1, x \geq 0\}$$

- Conjunto viável do segundo nível para cada $x \geq 0$:

$$\Omega(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 2 - x, y \geq 1\}$$

isto é,

$$\Omega(x) = \begin{cases} [2 - x, \infty), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ [1, \infty), & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Conjunto solução do segundo nível:

Para cada $x \geq 0$ deve-se ter $\Psi(x) = \arg \max \{-4y : y \in \Omega(x)\}$, logo

$$\Psi(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

- Conjunto viável da restrição implícita do primeiro nível:

Como para $x \geq 0$, $\Psi = \{(x,y) : y \in \Psi(x)\}$, conclui-se que

$$\Psi = \{(x, 2 - x), \text{ se } 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1), \text{ se } x \geq 1\}$$

- Conjunto viável do PLDN:

Sabendo que $\Phi = \{(x,y) \in \Omega : y \in \Psi(x)\}$, tem-se

$$\Phi = \{(x, 2 - x), \text{ se } 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(x,1), \text{ se } x \geq 1\}$$

Observe que este conjunto é não vazio, não convexo e está contido no conjunto viável relaxado, $\Phi \subset \Omega$, sendo Φ representado na **figura 4** pelas linhas em negrito.

- Conjunto solução do PLDN :

Como $\Phi_* = \arg \max \{3y : (x,y) \in \Phi\}$, obtém-se que $\Phi_* = \{(0,2)\}$.

O problema relaxado associado ao P2 é:

$$(PR2) \max_{x,y} f_1(x,y) = 3y$$

$$\text{s.a: } (x,y) \in \Omega$$

sendo sua solução dada por

$$\Omega_* = \arg \max \{3y : (x,y) \in \Omega\}$$

Como, a função do líder $f_1(x,y) = 3y$ é ilimitada superiormente sobre Ω , resulta $\Omega_* = \emptyset$. Isto é, $\Phi_* \neq \emptyset$ e $\Omega_* = \emptyset$.

(2) o problema relaxado tem solução, o de dois níveis é inviável, mas o problema do seguidor tem solução.

Esta situação aparece quando se substitui a função objetivo do líder no exemplo P2 por $f_1(x,y) = -4x - y$ e acrescenta-se a restrição linear $-x + y \geq 3$ no primeiro nível. Na **figura 5**, observa-se que apesar do problema relaxado e do segundo nível terem soluções, $\Omega_* = \{(0,3)\}$, $\Psi \neq \emptyset$, o conjunto solução do PLDN é vazio, $\Phi_* = \emptyset$.

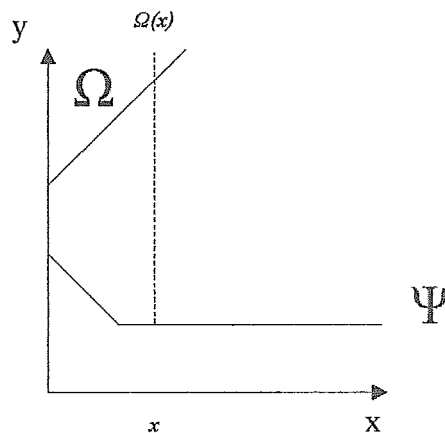


Figura 5

(3) O problema relaxado é ilimitado, o de dois níveis não tem solução, embora o problema do seguidor tenha.

Para ilustrar este caso, basta mudar a função objetivo da situação anterior para $f_1(x,y) = 4x + y$. Logo, o problema do seguidor continua tendo solução, $\Psi \neq \emptyset$, e o conjunto solução do PLDN continua sendo vazio, $\Phi_* = \emptyset$, entretanto agora o problema relaxado é ilimitado, $\Omega_* = \emptyset$.

(4) O problema relaxado e de dois níveis têm solução, mas não são iguais.

Para este caso, que é o mais interessante, considere que existe uma restrição linear no primeiro nível de P2, $y \leq 4$. Como pode ser visto na **figura 6**, esta nova restrição limita superiormente a região viável do problema relaxado. O valor ótimo é alcançado em qualquer ponto do segmento $\{(x,4) : x \geq 0\}$. No entanto, a solução ótima do PLDN ocorre no ponto $(0,2)$. Logo, o PLDN e o problema relaxado têm conjunto de soluções ótimas distintos.

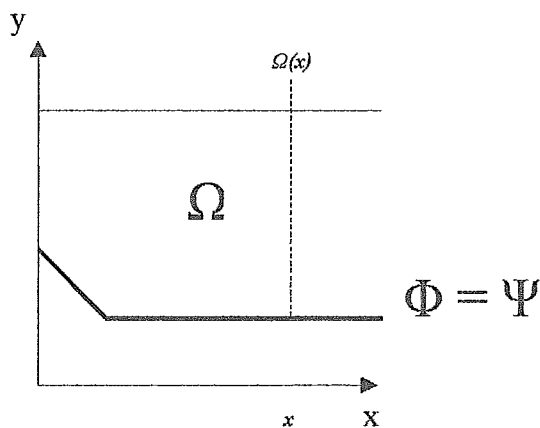


Figura 6

(5) Os dois problemas têm soluções iguais, mas $\Phi_* \subset \Omega_*$.

Esta situação aparece se a função objetivo do líder em P2 for $f_1(x,y) = -3x$. Neste caso, o conjunto solução do PLDN, $\Phi_* = \{(0,2)\}$, está contido no conjunto solução do problema relaxado, $\Omega_* = \{(0,y) : y \geq 2\}$.

(6) Os dois problemas tem o mesmo conjunto de soluções não-vazio.

Para exemplificar este caso, considere que a função objetivo do líder em P2 seja igual a da situação (2), isto é, $f_1(x,y) = -4x - y$, e que seja acrescentada a restrição $-x + y \geq 1$ no primeiro nível. A solução deste exemplo para o PLDN e o problema relaxado é o ponto $(0,2)$. Logo, $\Omega_* = \Phi_* \neq \emptyset$, como pode ser observado na **figura 7**.

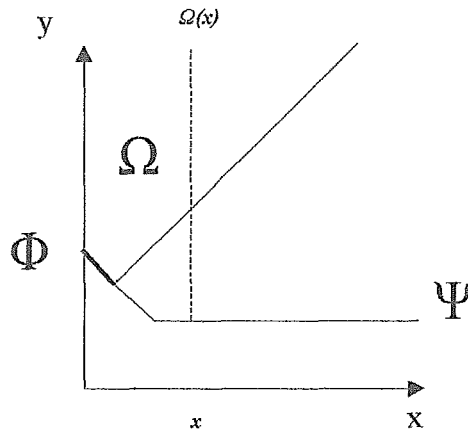


Figura 7

(7) Os dois problemas são inconsistentes, embora o seguidor tenha solução.

Esta situação aparece no seguinte exemplo:

Exemplo 5:

$$(P3) \max_{x,y} f_1(x,y) = -4x + y$$

$$\text{s.a: } -x + y \geq 3$$

$$x \geq 0, y \text{ resolve}$$

$$\max_y f_2(x,y) = 3y$$

$$\text{s.a: } x + y \leq 2$$

$$y \geq 0$$

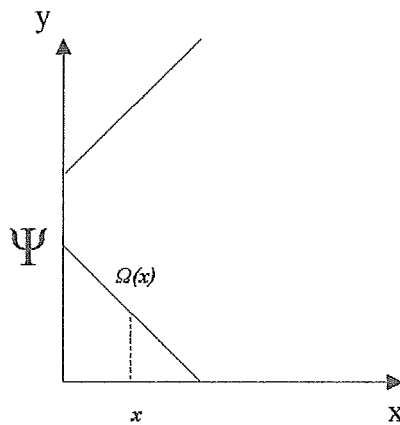


Figura 8

Observe na figura acima, que este problema tem o conjunto viável do problema relaxado e do PLDN vazios, $\Omega = \emptyset$ e $\Phi = \emptyset$. Entretanto, o conjunto viável da restrição implícita do segundo nível é $\Psi = \{(x, 2-x) : \text{se } 0 \leq x \leq 2\} \neq \emptyset$.

(8) Ambos os problemas são ilimitados, isto é $V(\text{PLDN}) = V(\text{PR}) = +\infty$.

Considere para esta situação que a função objetivo do líder em P2 é $f_1(x,y) = 3x$. Obtém-se então que tanto o PLDN quanto o problema relaxado são ilimitados, isto é, $\Omega_* = \Phi_* = \emptyset$.

(9) Todos os problemas são inconsistentes.

Este último caso é ilustrado modificando-se a primeira restrição do seguidor em P2 para $x + y \leq 0.5$. A representação gráfica deste problema é a seguinte:

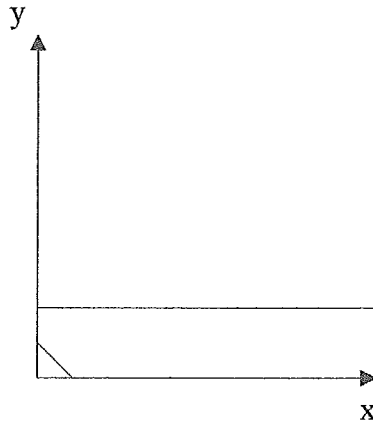


Figura 9

Neste caso resulta $\Omega = \Psi = \Phi = \emptyset$.

Consideraremos, neste trabalho, que o problema PLDN é trivial quando $\Phi = \Omega$, pois, neste caso, o problema PLDN coincide com o problema relaxado correspondente a um problema de programação linear. Portanto, assumiremos que o PLDN é não trivial.

1.4 Propriedades do PLDN

Nesta seção serão apresentadas as principais características do PLDN.

A primeira propriedade relaciona o conjunto Φ às faces do poliedro Ω . Antes, lembremos que uma face de um conjunto convexo Ω é um subconjunto convexo Ω' de Ω , tal que se $x, y \in \Omega$ e $(1 - \beta)x + \beta y \in \Omega'$ para algum $\beta \in (0,1)$, então $x, y \in \Omega'$.

Rockafellar [49, pág 162]

Propriedade 1 : *O conjunto viável do PLDN Φ é a união de faces do conjunto viável relaxado Ω .*

Esta resultado aparece em Gallo e Ülkcütü [32] e Benson [9] no caso em que não existem restrições no primeiro nível ou estas só dependem da variável x . Para o caso mais geral, Campêlo [13, teorema 1.2.1] prova que esta propriedade ainda continua sendo válida.

Observemos que, embora o conjunto viável do PLDN seja uma união de faces, não significa que ele seja convexo, como foi visto no exemplo P1.

Como consequência da propriedade acima, tem-se que todo vértice de Φ é vértice de Ω . Com efeito, um vértice de um conjunto é uma face dele.

Uma importante propriedade da programação linear clássica, e que também é válida para o problema linear de dois níveis é a seguinte:

Propriedade 2 : *Se o problema PLDN tem solução, então pelo menos uma delas é atingida em um vértice do conjunto viável relaxado Ω , que também é um vértice de Φ .*

Este resultado foi primeiramente estabelecido por Candler e Townsley [21] para problemas lineares de dois níveis sem restrições no líder, assumindo que a reação do seguidor é única para cada x fixo do líder. Depois, Savard [50] e Campêlo [13, Corolário 1.2.2] provaram que este resultado continua sendo válido para o PLDN.

A seguir considera-se um conceito mais fraco que o de convexidade, o de conexidade, que é verificado nos problemas de dois níveis sem restrições lineares no primeiro nível.

Definição 1.4.1: Um conjunto F é conexo, quando este não pode ser escrito como a união de dois conjuntos abertos $F' \neq \emptyset$ e $F'' \neq \emptyset$, onde

$$F' \cap \bar{F}'' = \emptyset \quad e \quad \bar{F}' \cap F'' = \emptyset$$

e \bar{F} indica o fecho de F .

Ref: Benson[9]

Uma idéia geométrica de conexidade é que se o conjunto F é conexo, então sempre existe um "caminho contínuo" em F entre qualquer par de pontos pertencentes a este conjunto.

Um problema linear de dois níveis pode não ser conexo quando tem restrições lineares no primeiro nível, como visto no exemplo P4. A seguir mostra-se quando é possível garantir a conexidade da região viável.

Propriedade 3: Se em um problema de programação linear de dois níveis as restrições lineares do líder não dependem das variáveis associadas ao problema do seguidor, então o conjunto viável Φ do PLDN é conexo.

Ref: Benson[9]

Esta propriedade é ilustrada pelos exemplos P4 e P5.

$$(P4) \max_{x,y} f_1(x,y) = 3y$$

$$\text{s.a: } x - y \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 5, y \text{ resolve}$$

$$\max_y f_2(x,y) = -4y$$

$$\text{s.a: } x + y \geq 3$$

$$2x - y \leq 4$$

$$y \geq 0$$

$$(P5) \max_{x,y} f_1(x,y) = 3y$$

$$\text{s.a: } 0 \leq x \leq 5, y \text{ resolve}$$

$$\max_y f_2(x,y) = -4y$$

$$\text{s.a: } x + y \geq 3$$

$$2x - y \leq 4$$

$$x - y \leq 0$$

$$y \geq 0$$

Tem-se a representação gráfica de P4 e P5 na **figura 10** e **figura 11**, respectivamente.

Observe que, enquanto na **figura 11** pode-se formar uma linha contínua de pontos de Φ entre qualquer par de pontos de Φ , na **figura 10** isto não acontece, já que Φ é formado pelos segmentos em negrito, que são separados. Portanto, em P4, Φ é não conexo e, em P5, Φ é conexo.

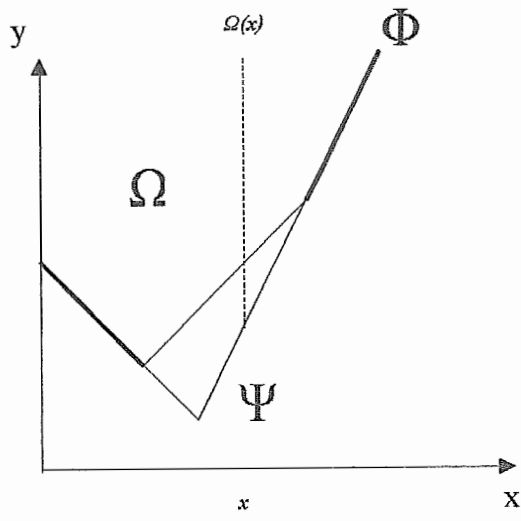


Figura 10

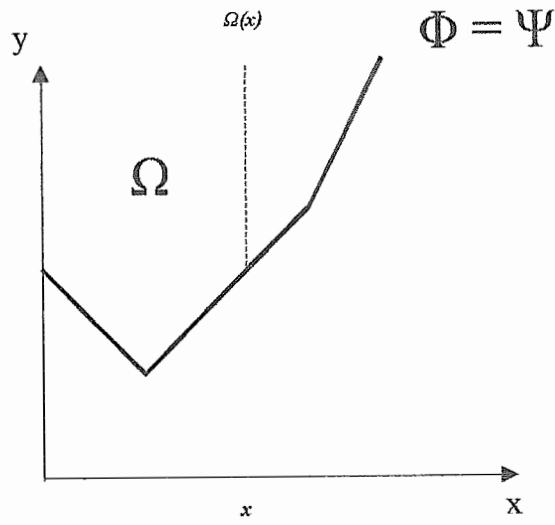


Figura 11

As duas últimas propriedades desta seção tratam das modificações que podem ocorrer no conjunto viável do PLDN, quando algumas restrições lineares do líder passam a ser consideradas no seguidor.

Propriedade 4 : *Sejam φ e φ' dois conjuntos definidos como:*

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) : A_1x + B_1y \leq b_1, \quad A_3x + B_3y \leq b_3, \quad x \geq 0, \\ y \in \arg \max \{ d'y : A_2x + B_2y \leq b_2, \quad y \geq 0 \} \end{array} \right\}$$

$$\varphi' = \left\{ \begin{array}{l} (x, y) : A_1x + B_1y \leq b_1, \quad x \geq 0 \\ y \in \arg \max \{ d'y : A_2x + B_2y \leq b_2, \quad A_3x + B_3y \leq b_3, \quad y \geq 0 \} \end{array} \right\}$$

então $\varphi \subseteq \varphi'$, sendo que $\varphi = \varphi'$ se $B_3 = 0$.

Ref: Savard [50] e Campêlo [13, teorema 1.2.6]

Como consequência imediata desta propriedade tem-se o seguinte resultado considerado em Campêlo [13, corolário 1.2.4].

Propriedade 5 : *Se as restrições lineares do primeiro nível no PLDN só envolvem a variável x , então o PLDN é equivalente a um problema linear de dois níveis sem restrições lineares no líder, obtido pela transferência destas restrições para o seguidor.*

Capítulo 2

Estudo do PLDN

A teoria relacionada ao Problema Linear de Dois Níveis é abordada neste capítulo. Na seção 2.1 são estabelecidas as principais condições de otimalidade global e na seção 2.2 de otimalidade local. Nesta última seção é introduzido o conceito de ponto de equilíbrio e seu algoritmo que, posteriormente, será considerado no algoritmo global.

2.1 Otimalidade Global do PLDN

Nesta seção são caracterizadas as situações de existência e inexistência de soluções globais de um PLDN, por meio de dois problemas auxiliares. Estes problemas são introduzidos na subseção 2.1.1, sendo que na subseção 2.1.2 são estudadas condições de otimalidade global de um PLDN. Por último, em 2.1.3, ilustram-se possíveis relações entre os problemas auxiliares.

2.1.1 Problemas Associados ao PLDN

Comentou-se anteriormente que o PLDN é um problema difícil de ser resolvido, já que seu conjunto viável pode ser não-convexo, proporcionando assim o aparecimento de diversos ótimos locais. Na tentativa de encontrar métodos e algoritmos que resolvem este tipo de problema, diversos modelos matemáticos alternativos ao PLDN são propostos na literatura como em Bard [3], Bialas e Karwan [10], Júdice e Faustino [37], Önal [47], White e Anandalingam [55], Amouzegar e Moshirvaziri [1], Campêlo [13] e Campêlo e Scheimberg [15].

Nesta subsecção serão apresentados o problema auxiliar (\tilde{P}) , seu problema penalizado $\tilde{P}(M)$, a conexão entre estes dois problemas e sua relação com o PLDN.

O problema auxiliar (\tilde{P}) obtém-se a partir do PLDN, substituindo o problema do seguidor por suas condições de otimalidade de Karush Kuhn-Tucker (KKT):

$$(\tilde{P}) \quad \max_{x,y, w^P, w^D, u} f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y \quad (2.1)$$

$$\text{s.a:} \quad A_1 x + B_1 y \leq b_1 \quad (2.2)$$

$$A_2 x + B_2 y + w^P = b_2 \quad (2.3)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, w^P \geq 0 \quad (2.4)$$

$$B_2^t u - w^D = d \quad (2.5)$$

$$w^D \geq 0, u \geq 0 \quad (2.6)$$

$$u^t w^P = y^t w^D = 0 \quad (2.7)$$

onde $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ é a variável dual, $w^P \in \mathbb{R}^{m_2}$ e $w^D \in \mathbb{R}^{n_2}$ são as variáveis de folgas primais e duais respectivamente. Este problema é globalmente equivalente ao PLDN segundo Audet *et al.* [2, proposição 3.3], no sentido de que as condições de KKT são

necessárias e suficientes para o problema do seguidor, ou seja, um ponto (x,y) é solução global do PLDN, se e somente se, (x,y, w^P, w^D, u) é solução global de (\tilde{P}) para algum (w^P, w^D, u) e o problema PLDN é inviável (ou ilimitado), se e somente se (\tilde{P}) , é inviável (ou ilimitado).

Infelizmente, devido às restrições não lineares (2.7) a região viável do problema auxiliar torna-se não-convexa e, conseqüentemente, continua a dificuldade de se encontrar ótimos globais para o PLDN. Uma maneira de abordar este problema é introduzir essas restrições na função objetivo do líder na forma de penalidade, transferindo assim a dificuldade da não convexidade da região viável de (\tilde{P}) para a função objetivo do líder. Esta idéia já foi utilizada antes por Bard [3], Júdice e Faustino [37], Önal [47], White e Anandalingam [55], Campêlo [15] e Campêlo e Scheimberg [15].

A formulação para o segundo problema auxiliar, chamado de problema penalizado $\tilde{P}(M)$, é dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(M) \quad & \max_{x,y,w^P,w^D,u} \quad c_1^t x + c_2^t y - M(u^t w^P + y^t w^D) \\ \text{s.a:} \quad & A_1 x + B_1 y \leq b_1 \\ & A_2 x + B_2 y + w^P = b_2 \\ & x \geq 0, y \geq 0, w^P \geq 0 \\ & B_2^t u - w^D = d \\ & w^D \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

Este é um problema de penalidade exata, onde $M \geq 0$ é o parâmetro de penalidade.

2.1.2 Propriedades

Esta subseção começa apresentando formulações compactas para os problemas auxiliares dados na subseção anterior e os principais resultados sobre inviabilidade, ilimitação e existência de soluções globais associadas aos problemas PLDN, (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$.

A notação a ser utilizada em nosso estudo é a seguinte:

$$P = [A_2 \ B_2 \ I_{m_2}] \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n}, \quad D = [0 \ -I_{n_2} \ B_2^t] \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n}$$

$$c^t = (c_1^t, c_2^t, 0) \in \mathfrak{R}^n, \quad z^t = (x^t, y^t, (w^P)^t) \in \mathfrak{R}^n \text{ e } s^t = (0, (w^D)^t, u^t) \in \mathfrak{R}^n$$

onde P e D são matrizes em blocos; c^t , z^t e s^t são vetores definidos em blocos; I_k é uma matriz identidade de ordem k ; 0 é uma matriz nula de dimensão apropriada e $n = n_1 + n_2 + m_2$.

Sejam também:

$$\tilde{Z} = \{z \in \mathfrak{R}_+^n : A_1 x + B_1 y \leq b_1, Pz = b_2\} \quad \text{e} \quad S = \{s \in \mathfrak{R}_+^n : Ds = d\}$$

onde \tilde{Z} é o conjunto viável relaxado do PLDN com a introdução das variáveis de folgas w^P e S é o conjunto associado ao problema dual do seguidor imerso em \mathfrak{R}^n .

Sendo assim, pode-se escrever os problemas auxiliares (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ de maneira compacta como:

$$\begin{aligned} (\tilde{P}) \quad \max F(z, s) &= c^t z & \tilde{P}(M) \quad \max F_M(z, s) &= c^t z - M s^t z \\ \text{s.a: } z &\in \tilde{Z}, s \in S & \text{s.a: } z &\in \tilde{Z}, s \in S \\ & & s^t z &= 0 \end{aligned}$$

A primeira relação entre os problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ é a seguinte:

Lema 2.1.2.1: *Se o problema (\tilde{P}) é viável e o problema penalizado $\tilde{P}(M_0)$ tem solução para algum $M_0 \geq 0$, então existe $M^* \geq M_0$ tal que:*

(a) *Existe um vértice $(z^*, s^*) \in \tilde{Z} \times S$, que satisfaz a relação de complementaridade e cujos valores ótimos dos problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ são iguais, para todo $M \geq M^*$, isto é:*

$$(s^*)' z^* = 0 \text{ e } V[(\tilde{P})] = V[\tilde{P}(M)] = F(z^*, s^*) \quad \forall M \geq M^*$$

(b) *Os problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ têm o mesmo conjunto (não vazio) de soluções globais para todo $M > M^*$.*

Observe que a condição de que existe algum $M \geq 0$, tal que $\tilde{P}(M_0)$ tem solução, é mais fraca que do que pedir a existência de solução do problema relaxado, que corresponde à hipótese com $M = 0$.

Esta última propriedade é uma generalização imediata de Campêlo [13, lema 3.2.1], e tem como conseqüência o seguinte resultado em termos do problema de dois níveis:

Teorema 2.1.2.1: *Assuma que o problema PLDN é viável e o problema $\tilde{P}(M_0)$ tem solução para algum $M_0 \geq 0$. Então $z^* \in \tilde{Z}$ é uma solução global do problema PLDN se, e somente se, existe um ponto $s^* \in S$ tal que (z^*, s^*) é solução global de $\tilde{P}(M)$ para todo $M > M^*$, para algum $M^* \geq M_0$.*

Ref: Campêlo [13, teorema 3.4.1]

Este teorema é ilustrado pelo próximo exemplo:

Exemplo 6:

$$(P6) \quad \max_{x,y} f_1(x,y) = x$$

$$\text{s.a: } 0 \leq x \leq 4, y \text{ resolve}$$

$$\max_y f_2(x,y) = -y$$

$$\text{s.a: } 2x + y \geq 3$$

$$x - y \leq 0$$

$$y \geq 2$$

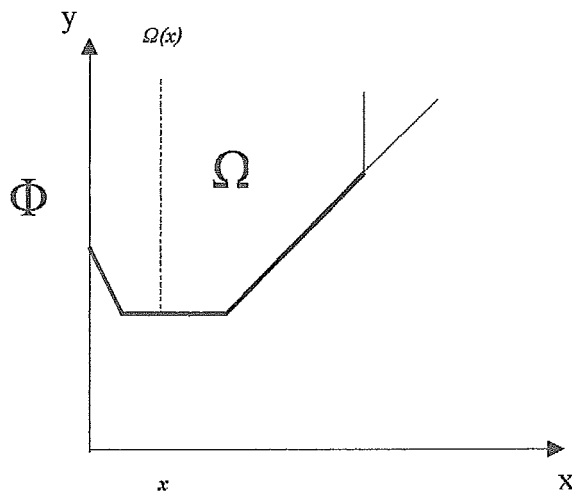


Figura 12

Os problemas auxiliares de P6 são:

$$\begin{aligned}
(\tilde{P}) \quad & \max_{x, y, w_1^P, w_2^P, w_3^P, u} f_1(x, y) = x \\
\text{s.a:} \quad & x \leq 4 \\
& -2x - y + w_1^P = -3 \\
& x - y + w_2^P = 0 \\
& -y + w_3^P = -2 \\
& x, y, w_1^P, w_2^P, w_3^P \geq 0 \\
& u_1 + u_2 + u_3 + w_1^D = 1 \\
& u_1, u_2, u_3, w_1^D \geq 0 \\
& u_1 w_1^P = u_2 w_2^P = u_3 w_3^P = y w_1^D = 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(M) \quad & \max_{x, y, w_1^P, w_2^P, w_3^P, u} x - M(u_1 w_1^P + u_2 w_2^P + u_3 w_3^P + y w_1^D) \\
\text{s.a:} \quad & x \leq 4 \\
& -2x - y + w_1^P = -3 \\
& x - y + w_2^P = 0 \\
& -y + w_3^P = -2 \\
& x, y, w_1^P, w_2^P, w_3^P \geq 0 \\
& u_1 + u_2 + u_3 + w_1^D = 1 \\
& u_1, u_2, u_3, w_1^D \geq 0
\end{aligned}$$

Neste caso, tem-se que $z = (x, y, w_1^P, w_2^P, w_3^P)^t$, $s = (0, w_1^D, u_1, u_2, u_3)^t$,

$$\tilde{Z} = \{z \geq 0 : x \leq 4, -2x - y + w_1^P = -3, x - y + w_2^P = 0, -y + w_3^P = -2\}$$

e

$$S = \{s \geq 0 : u_1 + u_2 + u_3 + w_1^D = 1\}$$

O problema P6 representado pela **figura 12** tem como solução o ponto $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}_1^P, \bar{w}_2^P, \bar{w}_3^P)^t = (4, 4, 9, 0, 2)^t$. As soluções globais de (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ são os pontos $\bar{z} = (4, 4, 9, 0, 2)^t$ e $\bar{s} = (0, 0, 0, 1, 0)^t$, para todo $M \geq 0$, com $F_M(\bar{z}, \bar{s}) = F(\bar{z}, \bar{s}) = 4 = f_1(\bar{x}, \bar{y})$.

Observe que se em P6 eliminarmos a restrição linear do líder e substituirmos sua função objetivo por $f_1(x, y) = -x + y$, o PR não tem solução mas $\tilde{P}(M)$ tem solução para $M > 0$.

2.1.3 Relações entre (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$

Primeiramente, lembremos que na última subseção, ilustrou-se o caso em que (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ tem o mesmo conjunto (não vazio) de soluções globais para todo $M \geq 0$. Podem ainda acontecer as seguintes situações:

1. (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ são ilimitados para todo $M \geq 0$.
2. (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ são inviáveis para todo $M \geq 0$.
3. (\tilde{P}) é inviável e $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.
4. (\tilde{P}) é inviável e $\tilde{P}(M)$ tem solução para todo $M \geq 0$.
5. (\tilde{P}) tem solução e $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

Como exemplo da situação 1, considere o problema P6 substituindo a restrição $x \leq 4$ por $x \geq 4$, tem-se :

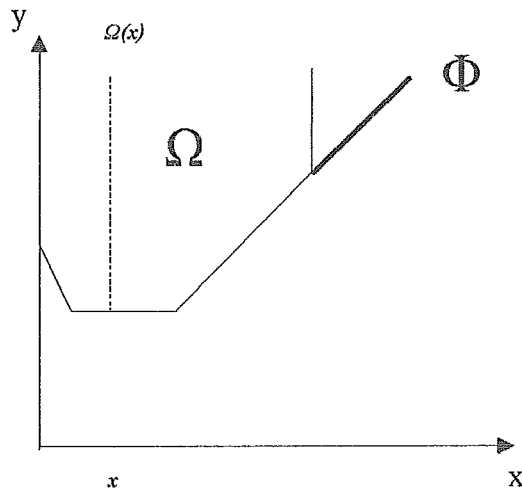


Figura 13

sendo

$$\tilde{Z} = \{z \geq 0 : x \geq 4, -2x - y + w_1^P = -3, x - y + w_2^P = 0, -y + w_3^P = -2\}$$

sendo que o conjunto S é o mesmo da situação anterior, já que não houve mudanças nas restrições do problema do segundo nível.

Os pontos $\bar{s} = (0,0,0,1,0)^t$ e $z(\alpha) = (4 + \alpha, 4 + \alpha, 9 + 3\alpha, 0, 2 + \alpha)^t$, para todo $\alpha \geq 0$ são também viáveis para (\tilde{P}) , pois $s^t z(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \geq 0$. Por outro lado, como $F_M(z(\alpha), \bar{s}) = 4 + \alpha$ para todo $M \geq 0, \alpha \geq 0$, resulta que $F_M(z(\alpha), \bar{s}) \rightarrow +\infty$, quando $\alpha \rightarrow \infty$. Conclui-se, então, que (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ são ilimitados.

Para ilustrar a situação 2, troca-se a restrição $x \leq 4$ de P6 por $-x + y \leq -4$, isto é:

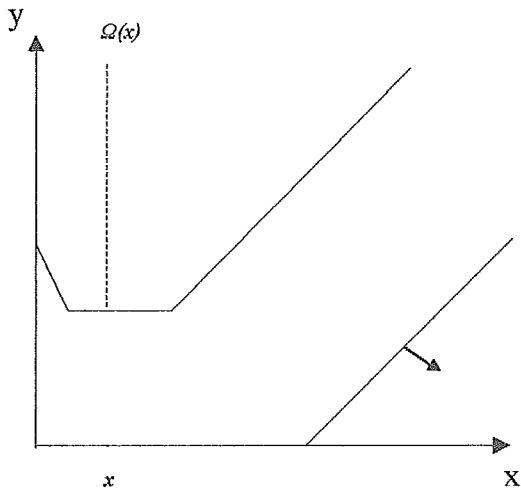


Figura 14

sendo

$$\tilde{Z} = \{z \geq 0 : -x + y \leq -4, -2x - y + w_1^P = -3, x - y + w_2^P = 0, -y + w_3^P = -2\}$$

Como $\tilde{Z} = \emptyset$, resulta que (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ são inviáveis.

Exemplifica-se a situação 3, mudando a restrição do líder em P6, $x \leq 4$, por $-x + y \geq 4$, ou seja:

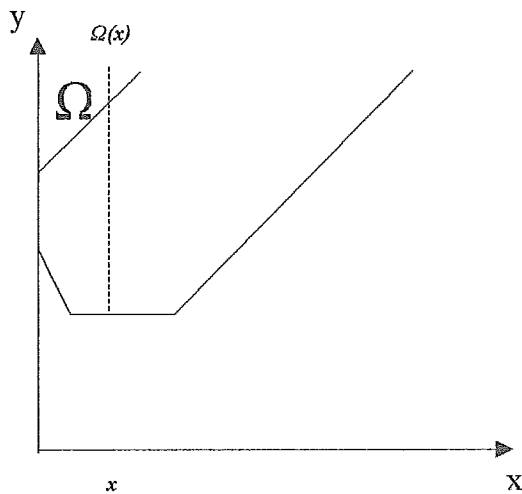


Figura 15

sendo

$$\tilde{Z} = \{z \geq 0 : -x + y \geq 4, -2x - y + w_1^P = -3, x - y + w_2^P = 0, -y + w_3^P = -2\}$$

Observe na **figura 15** que $\Omega \neq \emptyset$ e $\Phi = \emptyset$. Além disso, não é possível encontrar um ponto (x, y) que satisfaça as restrições do primeiro e segundo nível simultaneamente, já que $\Phi = \Omega \cap \Psi = \emptyset$. Conclui-se então que (\tilde{P}) é inviável. Entretanto, para o problema penalizado $\tilde{P}(M)$, obtém-se os pontos viáveis $\bar{s} = (0,0,0,1,0)^t \in S$ e $z(\alpha) = (\alpha, 4 + \alpha, 1 + 3\alpha, 4, 2 + \alpha)^t \in \tilde{Z}$ para todo $\alpha \geq 0$. Considerando-se que para cada $M \geq 0$, $F_M(z(\alpha), \bar{s}) = \alpha - 4M \rightarrow +\infty$, quando $\alpha \rightarrow +\infty$, resulta que $\tilde{P}(M)$ é ilimitado.

Consegue-se a situação 4, modificando a função objetivo do problema anterior por $f_1(x, y) = -y$. Sendo assim, \tilde{Z} e S continuam os mesmos, ou seja, (\tilde{P}) continua inviável. Entretanto, o problema $\tilde{P}(M)$ tem como solução os pontos $\bar{z} = (0,4,1,4,2)^t$ e $\bar{s} = (0,0,1,0,0)^t$, sendo $F_M(\bar{z}, \bar{s}) = -4 - M$, para todo $M \geq 0$.

Por fim, a situação 5 acontece, por exemplo, se no problema P6 substitui-se a restrição $x \leq 4$ por $-x + y \geq 2.5$. Logo:

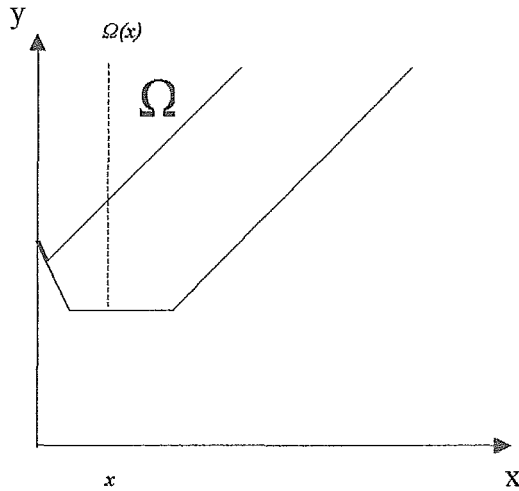


Figura 16

sendo

$$\tilde{Z} = \{z \geq 0 : -x + y \geq 2.5, -2x - y + w_1^P = -3, x - y + w_2^P = 0, -y + w_3^P = -2\}$$

Observe que o problema $\tilde{P}(M)$ continua ilimitado para todo $M \geq 0$, pois \tilde{Z} contém o conjunto viável de $\tilde{P}(M)$ da situação (c), cuja solução era ilimitada. Entretanto, o problema (\tilde{P}) não é mais inviável como pode ser visto na **figura 16**, onde a área em negrito representa sua região viável Φ . Além disso, o problema (\tilde{P}) tem solução (\bar{z}, \bar{s}) , sendo $\bar{z} = (1/6, 8/3, 0, 5/2, 2/3)^t$ e $\bar{s} = (0, 0, 1, 0, 0)^t$.

Em todas estas situações, pode-se substituir (\tilde{P}) por PLDN, já que estes problemas são globalmente equivalentes.

2.2 Otimalidade Local do PLDN

Nesta seção são estabelecidas as principais condições de otimalidade local de um PLDN. Para este fim, é introduzido na subseção 2.2.1 o conceito de ponto de equilíbrio e algumas de suas características. A segunda e última parte é a subseção 2.2.2, onde é apresentado o algoritmo de ponto de equilíbrio.

2.2.1 O ponto de equilíbrio

A relação existente entre as soluções locais de PLDN e (\tilde{P}) é estudada nesta subseção, que é iniciada estabelecendo a seguinte relação de otimalidade local de um PLDN:

Teorema 2.2.1.1: *Um ponto \bar{z} é uma solução local (estrita) do problema PLDN se, e somente se, \bar{z} é viável para o PLDN e (\bar{z}, s) é uma solução local (estrita) do problema (\tilde{P}) para todo vértice s de S tal que $s^1 z = 0$.*

Ref: Campêlo [13, teorema 3.4.3]

Segue-se, agora, a definição de ponto de equilíbrio e ponto de equilíbrio estrito do problema penalizado do PLDN:

Definição 2.2.1.1: *Um ponto $(\bar{z}, \bar{s}) \in \tilde{Z} \times S$ é um ponto de equilíbrio do problema penalizado $\tilde{P}(M)$ se existe $\bar{M} \geq 0$ tal que, para cada $M \geq \bar{M}$, verifica-se*

$$\max_{s \in S} F_M(\bar{z}, s) = F_M(\bar{z}, \bar{s}) = \max_{z \in \tilde{Z}} F_M(z, \bar{s}) \quad (2.8)$$

onde $F_M(z, s) = c^1 z - M s^1 z$.

Ref: Campêlo [13, definição 3.4.1]

Definição 2.2.1.2: Um ponto $(\bar{z}, \bar{s}) \in \tilde{Z} \times S$ é um ponto de equilíbrio estrito do problema penalizado $\tilde{P}(M)$ se é um ponto de equilíbrio e existe $M \geq \bar{M}$ tal que

$$\{\bar{s}\} = \arg \max_{s \in S} F_M(\bar{z}, s) \quad e \quad \{\bar{z}\} = \arg \max_{z \in \tilde{Z}} F_M(z, \bar{s})$$

onde \bar{M} é dada pela definição 2.2.1.1.

Esta última definição é uma generalização daquela que aparece em Campêlo [13, definição 3.3.3].

A igualdade (2.8) deve ser satisfeita para todo $M \geq \bar{M}$, o que significa que este equilíbrio tem de ser satisfeito por uma família de problemas bilineares paramétricos $\tilde{P}(M)$. Esta idéia de equilíbrio estende aquela usada pelo algoritmo *mountain climbing* de Konno [42] para um problema bilinear.

Uma importante propriedade do ponto de vista teórico e computacional de $\tilde{P}(M)$ é dada abaixo.

Lema 2.2.1.1: Se (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio do problema penalizado $\tilde{P}(M)$, então:

$$\min_{s \in S} \bar{z}'s = \bar{s}'\bar{z} = \min_{z \in \tilde{Z}} \bar{s}'z \quad (2.9)$$

Este resultado que aparece em Campêlo [13, lema 3.4.1] não garante que o ponto (\bar{z}, \bar{s}) seja um ponto viável do problema (\tilde{P}) , isto é, poderia ser $\bar{s}'\bar{z} \neq 0$, como ilustrado no seguinte exemplo.

Exemplo 7:

$$(P7) \quad \max_{x,y} f_1(x,y) = -x$$

$$\text{s.a: } x + y \geq 3$$

$$x \geq 0, y \text{ resolve}$$

$$\max_y f_2(x,y) = -y$$

$$\text{s.a: } x - y \leq 0$$

$$2x + y \geq 2$$

$$y \geq 0$$

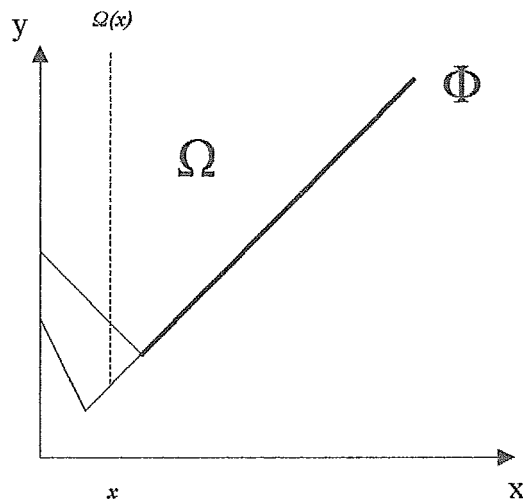


Figura 17

Neste exemplo tem-se que $z = (x, y, w_1^P, w_2^P)^t$, $s = (0, w_1^D, u_1, u_2)^t$,

$$\tilde{Z} = \{z^t \geq 0 : x + y \geq 3, x - y + w_1^P = 0, -2x - y + w_2^P = -2\},$$

$$S = \{s^t \geq 0 : u_1 + u_2 + w_1^D = 1\}$$

e

$$F_M(z,s) = -x - M(w_1^P u_1 + w_2^P u_2 + w_1^D y), \quad \forall (z,s) \in \tilde{Z} \times S$$

Considere, então, os pontos $\bar{z} = (0,3,3,1)^t \in \tilde{Z}$ e $\bar{s} = (0,0,0,1)^t \in S$, tal que

$$F_M(\bar{z}, \bar{s}) = -M \text{ para cada } M \in \mathfrak{R}$$

Como:

$$F_M(\bar{z}, s) = -M(3u_1 + u_2 + 3w_1^D) = -M - 2M(u_1 + w_1^D) \leq -M, \forall s \in S,$$

$$F_M(z, \bar{s}) = -x - Mw_2^P \leq -M, \forall z \in \tilde{Z},$$

dado que $x + y \geq 3$ e $-2x - y + w_2^P = -2$, deve ser $w_2^P \geq 1$.

Conclui-se, então, que (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio estrito de $\tilde{P}(M)$, mas não é um ponto viável do problema (\tilde{P}) , já que $\bar{z}^t \bar{s} = 1$.

Na seção 3.2.2 veremos que quando o PLDN não tem restrições no primeiro nível, um ponto de equilíbrio é um ponto viável de (\tilde{P}) e, portanto, do PLDN.

A seguinte equivalência entre mínimo local de (\tilde{P}) e ponto de equilíbrio é estabelecida sob a hipótese de viabilidade para (\tilde{P}) .

Teorema 2.2.1.2: *Seja (\bar{z}, \bar{s}) um ponto viável do problema (\tilde{P}) . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *O ponto (\bar{z}, \bar{s}) é uma solução local (estrita) de (\tilde{P}) ;*
- (ii) *O ponto (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio (estrito) do problema penalizado $\tilde{P}(M)$.*

Este resultado é consequência das proposições dadas em Campêlo [13, teoremas 3.4.4 e 3.3.5]. Observe que se um ponto de equilíbrio (estrito) verifica a restrição complementar de (\tilde{P}) , então este ponto é uma solução local (estrita) de (\tilde{P}) . Estas idéias justamente originam o algoritmo global considerado no capítulo 3.

Dos teoremas considerados nesta seção, concluímos a seguinte relação entre os mínimos locais do PLDN e os pontos de equilíbrio.

Teorema 2.2.1.3: *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) \bar{z} é uma solução local do PLDN;
- (ii) \bar{z} é viável para o PLDN e (\bar{z}, s) um ponto de equilíbrio do problema penalizado $\tilde{P}(M)$, para todo vértice $s \in S$, tal que $s'\bar{z} = 0$.

Uma extensão de Campêlo [13, corolário 3.3.2] para o PLDN, que é uma consequência do resultado acima é:

Corolário 2.2.1.1: *Seja (\bar{z}, \bar{s}) um ponto de equilíbrio do problema penalizado $\tilde{P}(M)$, tal que $\bar{s}'\bar{z} = 0$. Se \bar{s} é um vértice de S tal que para todo vértice $s \in S$ adjacente a \bar{s} verifica-se $\bar{z}'s > 0$, então \bar{z} é uma solução local do problema PLDN.*

Por fim, adaptando a propriedade de Campêlo [13, teorema 3.3.6] para o PLDN, obtém-se uma caracterização das suas soluções locais estritas:

Teorema 2.2.1.4: *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) \bar{z} é uma solução local estrita do PLDN, sendo \bar{s} a solução dual correspondente do seguidor;
- (ii) \bar{z} é viável para o PLDN e (\bar{z}, \bar{s}) é uma solução local estrita de (\tilde{P}) ;
- (iii) (\bar{z}, \bar{s}) é viável para (\tilde{P}) e é um ponto de equilíbrio estrito de $\tilde{P}(M)$.

2.2.2 O Algoritmo de Ponto de Equilíbrio

Neste subsecção introduziremos o algoritmo desenvolvido por Campêlo e Scheimberg [15], para encontrar um ponto de equilíbrio do problema penalizado $\tilde{P}(M)$ ou concluir que $\tilde{P}(M)$ é ilimitado. Este algoritmo termina em um número finito de iterações.

A seguir lembramos as funções envolvidas na noção de ponto de equilíbrio e fazemos algumas considerações em relação a elas.

Seja $(\hat{z}, \hat{s}) \in \tilde{Z} \times S$ tem-se os seguintes problemas, para todo $M \geq 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(M; \hat{s}) \quad \max F_M(z, \hat{s}) &= c^t z - M \hat{s}^t z \\ \text{s.a: } z &\in \tilde{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(M; \hat{z}) \quad \max F_M(\hat{z}, s) &= c^t \hat{z} - M \hat{z}^t s \\ \text{s.a: } s &\in S \end{aligned}$$

O ponto solução de $\tilde{P}(M; \hat{z})$ independe do parâmetro M , pois o termo $c^t \hat{z}$ é uma constante. Sendo assim, este problema pode ser resolvido pelo método simplex clássico. Além disso, $\tilde{P}(M; \hat{z})$ não pode ser ilimitado, já que $c^t \hat{z} - M \hat{z}^t s \leq c^t \hat{z}, \forall s \in S$; pois $\bar{z}^t s \geq 0$ para todo $s \in S$. Portanto $\tilde{P}(M; \hat{z})$ sempre tem solução.

No problema $\tilde{P}(M; \hat{s})$ pode-se considerar o valor de M implicitamente como um valor dominante, tal como no método simplex Big- M (ver Bazaraa *et al.* [38, seção 4.3]). Observe que diferentemente de $\tilde{P}(M; \hat{z})$, o problema $\tilde{P}(M; \hat{s})$ pode ser ilimitado. Neste caso, $\tilde{P}(M)$ é também ilimitado, pois $V(\tilde{P}(M; \hat{s})) \leq V(\tilde{P}(M)), \forall M \geq 0$.

A seguir é dado o algoritmo para encontrar um ponto de equilíbrio de $\tilde{P}(M)$, a partir de um ponto $s^\circ \in S$, dado em Campêlo [13, seção 4.1]. Um algoritmo parecido com este pode ser feito partindo-se do ponto $z^\circ \in Z$.

ALGORITMO DE PONTO DE EQUILÍBRIO

PASSO 1: Sejam $Z \times S \neq \emptyset$ e $s^\circ \in S$. Faça $i = 0$.

PASSO 2: Resolva $\tilde{P}(M:s^i)$ pelo método simplex *Big-M*. Encontre uma solução z^i ou verifique que o problema $\tilde{P}(M:s^i)$ é ilimitado, concluindo que $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$.

PASSO 3: Resolva $\tilde{P}(M:z^i)$, obtendo uma solução s^{i+1} . Se $F_M(z^i, s^i) = F_M(z^i, s^{i+1})$, PARE, pois (z^i, s^i) é um ponto de equilíbrio de $\tilde{P}(M)$.

PASSO 4: Resolva $\tilde{P}(M:s^{i+1})$ pelo método simplex *Big-M*. Se o problema $\tilde{P}(M:s^{i+1})$ for ilimitado, conclua que $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$. Senão, encontre uma solução z^{i+1} . Se $F_M(z^i, s^{i+1}) = F_M(z^{i+1}, s^{i+1})$, PARE, (z^i, s^{i+1}) é um ponto de equilíbrio de $\tilde{P}(M)$. Senão, faça $i = i+1$ e volte ao PASSO 2.

Por exemplo, suponha que se deseje encontrar um ponto de equilíbrio do exemplo 7.

Então:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(M:\hat{s}) \quad \max F_M(z, \hat{s}) &= -x - M(w_1^P \hat{u}_1 + w_2^P \hat{u}_2 + \hat{w}_1^D y) \\ \text{s.a : } z &\in \tilde{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(M; \hat{Z}) \quad \max F_M(\hat{Z}, s) &= -\hat{x} - M(\hat{w}_1^P u_1 + \hat{w}_2^P u_2 + w_1^D \hat{y}) \\ \text{s.a : } s &\in S \end{aligned}$$

e o algoritmo que encontra um ponto de equilíbrio do problema relaxado $\tilde{P}(M)$ de P7, considerando como ponto de partida $s^0 = (0, w_1^D, u_1, u_2)^t = (0, 1, 0, 0)^t$, é o seguinte:

PASSO 1: Seja $\tilde{Z} \times S \neq \emptyset$, $s^0 = (0, 1, 0, 0)^t$ e $i = 0$.

PASSO 2: Resolvendo o problema $\max\{-x - My \mid (x, y, w_1^P, w_2^P)^t \in \tilde{Z}\}$ pelo método simplex *Big-M*, obtém-se como solução $z^0 = (1.5, 1.5, 0, 2.5)^t$, para todo $M > 1$.

PASSO 3: Resolvendo o problema equivalente a $\left\{ \max -1.5 - M(1.5 w_1^D + 2.5 u_2) \mid (0, w_1^D, u_1, u_2)^t \in S \right\}$, $\min\{s^t z^0 : s \in S\} = \min\{1.5 w_1^D + 2.5 u_2 \mid (0, w_1^D, u_1, u_2)^t \in S\}$, encontra-se a solução $s^1 = (0, 0, 1, 0)^t$. Conclui-se, então, que $F_M(z^0, s^0) \neq F_M(z^0, s^1)$, pois $F_M(z^0, s^0) = -1.5 - 1.5M$ e $F_M(z^0, s^1) = -1.5$.

PASSO 4: Calcula-se a solução de $\max\{-x - M w_1^P \mid (x, y, w_1^P, w_2^P)^t \in \tilde{Z}\}$, obtendo-se $z^1 = (1.5, 1.5, 0, 2.5)^t$, para todo $M > 0.5$, como solução de $\tilde{P}(M; s^1)$. Deduz-se que (z^0, s^1) é um ponto de equilíbrio de $\tilde{P}(M)$, já que $F_M(z^0, s^1) = F_M(z^1, s^1) = -1.5$.

Neste caso o ponto (z^0, s^1) é viável para (\tilde{P}) . Entretanto, se tivéssemos escolhido como ponto inicial $s^0 = (0, 0, 0, 1)^t$, teríamos chegado ao ponto de equilíbrio (z^0, s^0) , com $z^0 = (0, 3, 3, 1)^t$ que, como já considerado no exemplo 7, não é viável para o problema (\tilde{P}) .

Observe que os problemas $\tilde{P}(M:s^i)$ e $\tilde{P}(M:z^i)$ não podem ser inviáveis, uma vez que $Z \times S \neq \emptyset$. Esta possibilidade será considerada no algoritmo global da seção 3.3, do qual este algoritmo faz parte.

A convergência do algoritmo de ponto de equilíbrio é garantida pelos seguintes resultados:

Proposição 2.2.2.1: *O algoritmo de ponto de equilíbrio pára em um número finito de iterações.*

Ref: Campêlo [13, proposição 4.1.3]

Proposição 2.2.2.2: *O algoritmo de ponto de equilíbrio encontra um ponto de equilíbrio de $\tilde{P}(M)$ ou verifica que o problema penalizado é ilimitado para todo $M \geq 0$.*

Ref: Campêlo [13, proposição 4.1.4]

Lembremos que se $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$, pode acontecer do PLDN (ou (\tilde{P})) não ser ilimitado, como se viu na seção 2.1.

Quando o PLDN não tem restrições lineares no primeiro nível, resulta que se $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$, então o PLDN (ou (\tilde{P})) também é ilimitado, conforme a seção 3.2.1.

Capítulo 3

Estudo do PLDNP

Neste capítulo é examinado o problema linear de dois níveis sem restrições lineares no líder (PLDNP) e as suas propriedades específicas. Na seção 3.1 formula-se o problema do PLDNP e seus dois problemas auxiliares associados, (P) e P(M). Uma caracterização dos casos de inviabilidade, ilimitação e existência de solução global e local para o PLDNP é considerada na seção 3.2. Analisa-se também as propriedades de equilíbrio que são válidas para o PLDNP. Finalmente na última seção 3.3 considera-se um algoritmo que encontra uma ϵ -solução global do PLDNP.

3.1 Introdução

A partir deste capítulo concentraremos a nossa atenção no problema linear de dois níveis sem restrições explícitas no líder, PLDNP, que corresponde ao problema PLDN sem (1.2):

$$(PLDNP) \quad \max_{x,y} f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y$$

s.a: $x \geq 0$, onde y resolve

$$\max_y f_2(x,y) = d^t y$$

s.a: $A_2 x + B_2 y \leq b_2$

$$y \geq 0$$

onde $x, c_1 \in \mathfrak{R}^{n_1}$, $y, c_2, d \in \mathfrak{R}^{n_2}$, $b_2 \in \mathfrak{R}^{m_2}$, $A_2 \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n_1}$ e $B_2 \in \mathfrak{R}^{m_2 \times n_2}$.

Neste caso, tem-se que o conjunto viável do PLDNP, Φ , coincide com $\Psi = \{(x,y) : y \in \Psi(x)\}$ para $x \geq 0$, que corresponde à viabilidade da restrição implícita dada pelo seguidor. Este tipo de problema de dois níveis tem sido amplamente estudado na literatura, como mostram as revisões bibliográficas de Wen e Hsu [54] e Vicente e Calamai [52].

Seguindo o raciocínio aplicado no PLDN, é possível analisar especificamente o problema PLDNP através do exame de dois problemas matemáticos relacionados. Eles foram apresentados na subseção 2.1.1 para os problemas com restrições lineares no primeiro nível e serão reapresentaremos nesta subseção, para o caso em que não existam restrições no primeiro nível, devido a sua importância no nosso desenvolvimento.

Os problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ reduzem-se a:

$$(P) \quad \max_{x,y,w^p,w^d,u} f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y \quad (3.1)$$

$$\text{s.a:} \quad A_2 x + B_2 y + w^p = b_2 \quad (3.2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, w^p \geq 0 \quad (3.3)$$

$$B_2^t u - w^d = d \quad (3.4)$$

$$u \geq 0, w^d \geq 0 \quad (3.5)$$

$$u^t w^p = y^t w^d = 0 \quad (3.6)$$

$$P(M) \quad \max_{x,y,w^p,w^d,u} c_1^t x + c_2^t y - M(u^t w^p + y^t w^d) \quad (3.7)$$

$$\text{s.a:} \quad A_2 x + B_2 y + w^p = b_2 \quad (3.8)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, w^p \geq 0 \quad (3.9)$$

$$B_2^t u - w^d = d \quad (3.10)$$

$$u \geq 0, w^d \geq 0 \quad (3.11)$$

Na notação simplificada, os problemas auxiliares associados ao PLDNP correspondem a:

$$(P) \quad \max F(z,s) = c^t z$$

$$\text{s.a:} \quad z \in Z, s \in S$$

$$s^t z = 0$$

$$P(M) \quad \max F_M(z,s) = c^t z - M s^t z$$

$$\text{s.a:} \quad z \in Z, s \in S$$

onde $Z = \{z \in \mathbb{R}_+^n : Pz = b_2\}$ e $S = \{s \in \mathbb{R}_+^n : Ds = d\}$.

É interessante observar que o conjunto S está associado ao problema dual e, portanto não se modifica em relação ao PLDN. Ademais, $\tilde{Z} \subseteq Z$, pois o conjunto \tilde{Z} inclui as restrições lineares do líder.

Ressalta-se que a utilização do problema (P) no lugar do PLDNP aparece em Bard [4], Önal [47], White e Anandalingam [55] e Amouzegar e Moshirvaziri [1], entre

outros. Além disso, como já visto na subseção 2.1.1 para o PLDN, uma solução global do PLDNP está ligada a uma solução global do problema (P), e vice-versa. Mais ainda, esta correspondência também se verifica para os casos de inviabilidade e ilimitação.

Deve-se destacar que o PLDNP é um problema conexo. Esta particularidade corresponde a propriedade 3 da seção 1.4, já que o PLDNP não possui restrições lineares no líder. Entretanto, o PLDNP continua sendo um problema não-convexo e, portanto, pode ter soluções locais. Neste caso, Campêlo e Scheimberg [17] mostram que uma solução local de (P) pode não estar associada a uma solução local do PLDNP, quer dizer, estes problemas são globalmente equivalentes, mas não localmente.

Diferentemente do problema geral PLDN, é possível caracterizar a inviabilidade e ilimitação do problema PLDNP, a partir das relações existentes entre os problemas auxiliares (P) e P(M), estabelecidos na próxima seção.

3.2 Análise Global e Local do PLDNP

Nesta seção são estudadas as situações de existência ou inexistência de solução global e local para o PLDNP. A parte global é considerada na subseção 3.2.1 e local nas subseções 3.2.2 e 3.2.3.

3.2.1 Otimalidade Global

Nesta primeira subseção apresentamos as relações teóricas entre as soluções globais dos problemas (P), P(M) e PLDNP. Para este problema de dois níveis, são válidos os seguintes teoremas:

Teorema 3.2.1.1: *Exatamente um dos seguinte casos acontece:*

- (i) *os problemas (P) e $P(M)$ são inviáveis para todo $M \geq 0$;*
- (ii) *os problemas (P) e $P(M)$ são ilimitados para todo $M \geq 0$;*
- (iii) *os problemas (P) e $P(M)$ têm o mesmo conjunto (não vazio) de soluções globais para todo $M > M^*$, para algum $M^* \geq 0$.*

Ref: Campêlo [13, teorema 3.2.1]

Teorema 3.2.1.2: *Os problemas PLDNP e $P(M)$ são ambos inviáveis ou ilimitados para todo $M \geq 0$, ou então eles têm solução para algum $M_0 \geq 0$. Neste último caso, z^* é uma solução global de PLDNP se, e somente se, existe s^* tal que (z^*, s^*) é solução global de $P(M)$ para todo $M > M^*$, para algum $M^* \geq M_0$.*

Ref: Campêlo [13, teorema 3.2.2]

Observe-se que nos casos de problemas com restrições lineares no primeiro nível, estes teoremas não são garantidos como pode ser visto na subseção 2.1.2, onde são dadas outras 3 possibilidades quanto aos casos de ilimitação, inviabilidade e existência de soluções globais para os problemas (\tilde{P}) , $\tilde{P}(M)$ e PLDN. Na verdade, como já comentado, todos os resultados obtidos para (P), $P(M)$ e PLDNP são válidos também para (\tilde{P}) , $\tilde{P}(M)$ e PLDN, quando as restrições lineares do líder não envolvem a variável do seguidor y .

Devemos notar, que o problema penalizado $P(M)$ costuma ser estudado sob hipóteses que garantem a existência de solução para todo $M \geq 0$. Uma delas, é supor explícita ou implicitamente que as restrições (3.8)-(3.9) formam um conjunto não-vazio e compacto.

Esta hipótese aparece em Bard [3, 4], Önal [47], Gendreau *et al.* [33] e Amouzegar e Moshirvaziri [1]. Estas mesmas condições são assumidas para as restrições (3.10)-(3.11) por White e Anandalingam [55]. Ressaltemos ainda que a hipótese de compacidade que aparece em Bard [4] foi relaxada em Campêlo *et al.* [14], onde se provou que é suficiente considerar que a função objetivo do líder em (P) é limitada superiormente sobre as restrições (3.8)-(3.9).

Nossa abordagem consegue identificar as situações de inviabilidade, ilimitação ou existência de solução global para o PLDNP, sem fazer suposições iniciais sobre sua região viável.

3.2.2 Otimalidade Local

Esta subseção apresenta as principais condições de otimalidade local dos problemas (P), P(M) e PLDNP.

Na verdade, toda a teoria abordada na subseção 3.2.2 é válida para esta subseção, considerando-se Z , (P), P(M) e PLDNP no lugar de \tilde{Z} , (\tilde{P}) , $\tilde{P}(M)$ e PLDN, respectivamente. Entretanto, algumas propriedades podem ser simplificadas e outras acrescentadas, especificamente para este caso.

Lembremos que a complementaridade do ponto de equilíbrio de $\tilde{P}(M)$ não é garantida para o caso geral, entretanto é válida para o PLDNP. Com efeito, tem-se o seguinte resultado:

Proposição 3.2.2.1: *Se (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio do problema penalizado $P(M)$, então $\bar{s}'\bar{z} = 0$.*

Ref: Campêlo [13, proposição 3.3.1]

Para o problema (P) é válida a equivalência do teorema 2.2.1.2, mas sem hipóteses adicionais:

Teorema 3.2.2.1: *Dado o problema (P), as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *o ponto (\bar{z}, \bar{s}) é uma solução local (estrита) de (P);*
- (ii) *o ponto (\bar{z}, \bar{s}) é um ponto de equilíbrio (estrito) do problema penalizado $P(M)$.*

A próxima condição de otimalidade local é mais fraca que a do corolário 2.2.1.1, mas computacionalmente mais difícil de ser verificada.

Teorema 3.2.2.2: *Seja (\bar{z}, \bar{s}) um ponto que equilíbrio do problema penalizado $P(M)$.*

Se existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\bar{s} \in \bigcap_z \left\{ S(z) : z \in Z \cap B_\varepsilon(\bar{z}), S(z) \neq \emptyset \right\} \quad (3.12)$$

onde $S(z) = \{s \in S : z's = 0\}$ e $B_\varepsilon(\bar{z}) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - \bar{z}\|_\infty \leq \varepsilon\}$. Então \bar{z} é uma solução local do problema PLDNP.

Ref: Campêlo [13, teorema 3.3.4].

Realmente, este resultado é mais fraco que o do corolário 3.2.2.1, já que estabelece que todo ponto viável do PLDNP pertencente a alguma vizinhança de \bar{z} seja complementar a \bar{s} .

3.3 Algoritmo Global

Nesta seção é apresentado o algoritmo iterativo proposto por Campêlo [13, seção 4.3] que encontra uma ε -solução global do PLDNP. Este algoritmo termina em um número finito de passos e encontra uma ε -solução global do PLDNP ou verifica que o problema é inviável ou ilimitado.

A inviabilidade de um problema, se houver, é detectada no início do algoritmo, nos passos 1 ou 2. Se o problema for viável (isto é, tem soluções viáveis), então no passo 3 da iteração inicial $t = 0$ encontra-se um ponto de equilíbrio (z^0, s^0) do problema penalizado $P(M)$, que fornece um limite inferior $c^t z^0$ para o PLDNP ou chega-se à conclusão de que o PLDNP é ilimitado. Ressalta-se que uma solução viável do PLDNP conseguida na primeira iteração é uma solução local de (P) , conforme o teorema 2.2.1.2.

Na iteração $t = 1$ adiciona-se um corte que é substituído nas iterações seguintes. O objetivo da introdução de uma restrição no primeiro nível é encontrar uma solução viável do PLDNP melhor que a obtida na iteração anterior. Este tipo de corte é feito por Önal [47] e Amouzegar e Moshirvaziri [1]. Agora devem ser considerados os problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$. Estes problemas são obtidos de (P) e $P(M)$, com o acréscimo da restrição linear $c^t z \geq L + \varepsilon$ no primeiro nível, onde $\varepsilon > 0$ e $L = c^t z^{t-1}$. Logo, nestes problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$ tem-se que

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= Z \cap \{z \in \mathfrak{R}^n : c^t z \geq L + \varepsilon\} \\ &= \{z \in \mathfrak{R}^n : c^t z \geq L + \varepsilon, Pz = b_2, z \geq 0\}\end{aligned}$$

Se após o corte é encontrado um ponto de equilíbrio que satisfaz a relação de complementaridade, então este ponto é viável para o problema PLDNP, e é um ótimo

local dos problemas (\tilde{P}) e $\tilde{P}(M)$, segundo o teorema 2.2.1.2. Deve-se, portanto, atualizar o corte, já que foi encontrada uma solução local melhor que a anterior. Entretanto, como já dito anteriormente, um ponto de equilíbrio do problema $\tilde{P}(M)$ pode não satisfazer as condições de complementaridade e, por conseguinte, pode não ser um ponto viável para o problema (\tilde{P}) . Sendo assim, uma forma de encontrar um ponto viável para (\tilde{P}) é resolver o seguinte problema bilinear:

$$\begin{aligned} (\text{Pc}) \quad & \min s^t z \\ & \text{s.a: } (z, s) \in \tilde{Z} \times S \end{aligned}$$

Evidentemente, o problema Pc não pode ser ilimitado, pois $s^t z \geq 0$ para todo $(z, s) \in \tilde{Z} \times S$. Observe que se Pc é inviável ou seu valor ótimo é não nulo, então (\tilde{P}) também é inviável. Ademais, qualquer outra solução ótima de Pc é viável para (\tilde{P}) .

Sabe-se que o conjunto viável do PLDNP é conexo. Logo, se existe um ponto viável em \tilde{Z} , pelo menos uma delas está sobre o corte $c^t z = L$. Por isso, é introduzido o problema Pc' que encontra uma solução viável para Pc.

$$\begin{aligned} (\text{Pc}') \quad & \min s^t z \\ & \text{s.a: } P'z = b' \\ & Ds = d \\ & z, s \geq 0 \end{aligned}$$

onde $P' = \begin{bmatrix} P \\ c^t \end{bmatrix}$ e $b' = \begin{bmatrix} b_2 \\ L + \varepsilon \end{bmatrix}$.

Utilizando uma adaptação da notação simplificada para Pc', tem-se

$$(Pc') \quad \min s^t z$$

$$\text{s.a: } z \in Z', s \in S$$

onde $z \in Z' = \{z \geq 0 : P'z = b'\}$.

Para resolver este problema é utilizado o método *outer approximation*, visto em Horst e Tuy [35, proposição IX.1]. Na verdade, não é necessário encontrar uma solução ótima para o problema Pc' , bastando encontrar uma solução $(\hat{z}, \hat{s}) \in \tilde{Z} \times S$ tal que $\hat{s}^t \hat{z} < \bar{s}^t \bar{z}$, de maneira que o algoritmo de equilíbrio possa ser reiniciado. Por isso, uma modificação deste método mais conveniente para a resolução do problema Pc , e denominado de *outer approximation adaptado*, é dado em Campêlo [13, páginas 117-122], onde é encontrado um ponto (\hat{z}, \hat{s}) tal que $\hat{s}^t \hat{z} < \bar{s}^t \bar{z}$. Neste caso, pode-se reiniciar o algoritmo a partir de \hat{s} (ou \hat{z}). Caso não seja possível encontrar este ponto, retorna-se $(\hat{s}, \hat{z}) = (\bar{s}, \bar{z})$ como o ponto solução do problema Pc' .

ALGORITMO GLOBAL

PASSO 1: Faça $t = 0$. Se $S = \emptyset$, vá para o PASSO 6. Senão, encontre $\hat{s} \in S$ e considere $\tilde{Z} = Z$.

PASSO 2: Se $\tilde{Z} = \emptyset$, vá para o PASSO 6.

PASSO 3: Aplique o algoritmo de ponto de equilíbrio a partir de \hat{s} . Se $\tilde{P}(M)$ é ilimitado para todo $M \geq 0$, PARE, pois PLDNP é ilimitado. Senão, encontre o ponto de equilíbrio (\bar{z}, \bar{s}) de $\tilde{P}(M)$.

PASSO 4: Se $\bar{s}^t \bar{z} = 0$, então (\bar{z}, \bar{s}) é solução viável de PLDNP e também solução local de (\tilde{P}) . Faça $(z^*, s^*) = (\bar{z}, \bar{s})$ e $L = c^t z^*$. Aplique um corte linear, definindo $\tilde{Z} = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^n: c^t z \geq L + \varepsilon\}$, com $\varepsilon > 0$; faça $\hat{s} = \bar{s}$ e $t = t + 1$. Volte para o PASSO 2.

PASSO 5: Se $\bar{s}^t \bar{z} > 0$, então aplique o algoritmo *outer approximation adaptado*, obtendo (\hat{z}, \hat{s}) . Se $\hat{s}^t \hat{z} \geq \bar{s}^t \bar{z}$, vá para o PASSO 6. Senão, volte ao PASSO 3.

PASSO 6: PARE. Se $t = 0$, então o PLDNP é inviável. Senão, (x^*, y^*) é uma ε -solução global de PLDNP.

Um exemplo passo-a-passo deste algoritmo é dado pelo seguinte problema:

Exemplo 8:

$$\begin{aligned}
 \text{(P8)} \quad & \max_{x,y} f_1(x,y) = x + 2y \\
 \text{s.a:} \quad & x \geq 0, \text{ onde } y \text{ resolve} \\
 & \max_y f_2(x,y) = -y \\
 \text{s.a:} \quad & -x - y \leq -2 \\
 & x - y \leq 0 \\
 & 0 \leq y \leq 4
 \end{aligned}$$

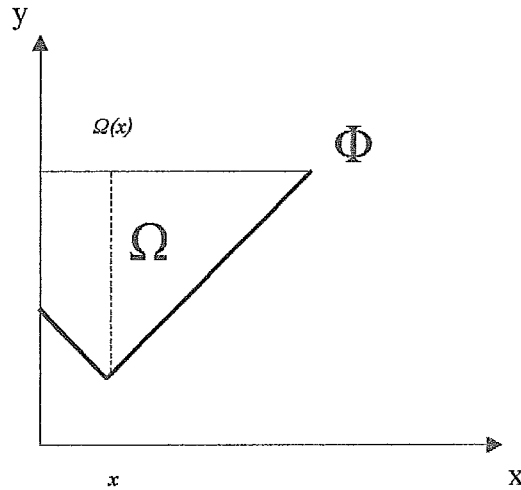


Figura 18

Tem-se, neste exemplo, que $z = (x, y, w_1^p, w_2^p, w_3^p)^t$, $s = (0, w_1^d, u_1, u_2, u_3)^t$,

$$Z = \{z \geq 0: -x - y + w_1^p = -2, x - y + w_2^p = 0, y + w_3^p = 4\}$$

e

$$S = \{s \geq 0: u_1 + u_2 - u_3 + w_1^d = 1\}$$

Considerando $\varepsilon = 0.13$, aplica-se o algoritmo global da seguinte forma:

PASSO 1: Faz-se $t = 0$. Sendo $S \neq \emptyset$, encontra-se $\hat{s} = (0, 1, 0, 0, 0)^t \in S$ e considera-se $\tilde{Z} = Z$.

PASSO 2: $Z \neq \emptyset$.

PASSO 3: Aplicando o algoritmo de ponto de equilíbrio a partir de \hat{s} , encontra-se $\bar{z} = (0, 2, 0, 2, 2)^t$ e $\bar{s} = (0, 0, 1, 0, 0)^t$.

PASSO 4: Como $\bar{z}^t \bar{s} = (0,2,0,2,2)(0,0,1,0,0)^t = 0$, então (\bar{z}, \bar{s}) é uma solução viável do PLDNP e local (estrita) de (P). Considera-se, então, $(z^*, s^*) = (\bar{z}, \bar{s})$ e $L = \bar{x} + 2\bar{y} = 4$. Define-se

$$\tilde{Z} = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^5: x + 2y \geq 4.13\},$$

$\hat{s} = \bar{s} = (0,0,1,0,0)^t$, $t = 1$ e volta-se ao PASSO 2.

PASSO 2: $\tilde{Z} \neq \emptyset$.

PASSO 3: Aplicando, novamente, o algoritmo de ponto de equilíbrio a partir de \hat{s} , encontra-se $\bar{z} = (0,2.065,0.065,2.065,1.935)^t$ e $\bar{s} = (0,0,1,0,0)^t$.

PASSO 5: Aplica-se o algoritmo *outer approximation adaptado*, já que obteve-se $\bar{z}^t \bar{s} = 0.065 > 0$. Consegue-se, então, aproximadamente, $\hat{z} = \frac{1}{3}(4.13, 4.13, 2.26, 7.87)^t$ e $\hat{s} = (0,0,0,1,0)^t$. Sendo, $\bar{z}^t \bar{s} > \hat{z}^t \hat{s} = 0$, volta-se ao PASSO 3.

PASSO 3: O algoritmo de ponto de equilíbrio encontra os pontos $\bar{z} = (4,4,6,0,0)^t$ e $\bar{s} = (0,0,0,1,0)^t$.

PASSO 4: Obtém-se $\bar{z}^t \bar{s} = 0$. Logo, (\bar{z}, \bar{s}) é uma solução viável do PLDNP e local de (\tilde{P}) . Faz-se $(z^*, s^*) = (\bar{z}, \bar{s})$ e $L = 12$. Define-se

$$\tilde{Z} = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^5: x + 2y \geq 12.13\},$$

$\hat{s} = (0,0,0,1,0)^t$, $t = 2$ e volta-se ao PASSO 2.

PASSO 2: Desta vez, $\tilde{Z} = \emptyset$ e vai-se para o PASSO 6.

PASSO 6: O algoritmo termina retornando $(x^*, y^*) = (4, 4)$ como uma ε -solução global do PLDNP.

Ressalta-se, que a primeira fase do método simplex pode ser utilizada para verificar se $S = \emptyset$ ou $\tilde{Z} = \emptyset$, podendo também ser usado para encontrar o ponto inicial $\hat{s} \in S$. O valor de ε pode ser constante ou variar no decorrer do algoritmo.

Observe que o ponto de equilíbrio obtido na iteração inicial ($t = 0$), satisfaz a restrição de complementaridade. Isto acontece porque nesta iteração está se considerando $\tilde{Z} = Z$, sendo portanto garantido que $\bar{s}^t \bar{z} = 0$.

Capítulo 4

O PLDNP e o PCLG

A efetiva contribuição deste trabalho é apresentada neste capítulo. Ela é originada do artigo de Fernandes *et al.* [28], como pode ser observado na seção 4.1, onde é apresentado o Problema de Complementaridade Linear Generalizado (PCLG). Na seção 4.2, reformulamos o problema PLDNP, substituindo o problema do seguidor por um PCLG. Esta nova versão é usada para tentar encontrar soluções viáveis do PLDNP a partir de um ponto de equilíbrio. Com isso, são sugeridas na seção 4.3 modificações no algoritmo global do capítulo anterior. As implementações e resultados computacionais de alguns destes algoritmos também são apresentados nesta seção.

4.1 O Problema de Complementaridade Linear

Generalizado

A abordagem feita em Fernandes *et al.* [28] para o Problema de Complementaridade Linear Generalizado (PCLG) é apresentada nesta seção.

O problema PCLG consiste em encontrar vetores $z \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^k$ tais que:

$$q + Mz + Ny \geq 0 \quad (4.1)$$

$$p + Rz + Sy \geq 0 \quad (4.2)$$

$$z \geq 0, y \geq 0, z^t(q + Mz + Ny) = 0 \quad (4.3)$$

onde $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $q \in \mathbb{R}^n$ e $p \in \mathbb{R}^m$.

Este problema tem sido estudado por alguns autores para resolver certos problemas de otimização. Por exemplo, na programação bilinear podemos citar os trabalhos de Fernandes *et al.* [28] e Júdice e Faustino [37]; e na programação quadrática côncava, Júdice e Faustino [37], entre outros.

O PCLG é uma generalização do Problema de Complementaridade Linear (PCL)

$$w = q + Mz, \quad z \geq 0, w \geq 0, z^t w = 0 \quad (4.4)$$

que corresponde ao problema PCLG quando a variável y e as restrições (4.2) não existem (todos os coeficientes de y são nulos, assim como os dados de (4.2)).

Se a matriz M é semidefinida-positiva (SDP), isto é, se M satisfaz $x^t M x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então o PCL pode ser resolvido em tempo polinomial (ver Kojima *et al.* [41]). Entretanto, como demonstrado em Júdice e Vicente [40], o mesmo não acontece com o PCLG. Mesmo quando a matriz M é SDP o problema é NP-difícil. Por outro

lado, Júdice e Vicente [40] provam que se M é SDP e $R = 0$ na restrição (4.2), então o PCLG pode ser resolvido em tempo polinomial.

Diversos autores têm estudado o PCL, por exemplo Kojima *et al.* [41], Potra e Sheng [48], Monteiro e Wright [46], Ye e Anstreicher [57], Wright [56], Mansagarian [43], Gonzaga [34].

O problema PCLG, com $R = 0$, é considerado em Fernandes *et al.* [28]. Neste caso, pode-se reescrever o PCLG como:

$$w = q + Mz + Ny \quad (4.5)$$

$$v = p + Sy \quad (4.6)$$

$$z \geq 0, y \geq 0, w \geq 0, v \geq 0 \quad (4.7)$$

$$z^t w = 0 \quad (4.8)$$

onde w e v correspondem às variáveis de folga das restrições (4.1)-(4.2). Associado a este problema, tem-se o seguinte programa não linear:

$$(PNL) \quad \min f(z, y, w, v) = \|w - q - Mz - Ny\|^2 + \|v - p - Sy\|^2 + \left(\sum_{i=1}^n (z_i w_i)^g \right)^h \quad (4.9)$$

$$\text{s.a. } z, w, y, v \geq 0$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana, $g \geq 1$ e $h \geq 1$ são números reais tais que $g > 1$ se $h = 1$.

Pode-se agora estabelecer a seguinte relação entre estes dois últimos problemas, sob a condição da matriz M verificar a condição de ser linha (ou coluna) suficiente (RS), isto é,

$$x_i(M^t x)_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x_i(M^t x)_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

e sendo K o conjunto definido por (4.5)-(4.7).

Teorema 4.1.1: Se $K \neq \emptyset$ e M é uma matriz RS , então qualquer ponto estacionário de PNL (4.9) é uma solução do PCLG (4.5)-(4.8).

Ref: Fernandes et al. [28].

4.2 Reformulação da Região Viável do PLDNP

Nesta seção são apresentadas as relações existentes entre as soluções do PCLG e soluções viáveis do PLDNP, com o objetivo de propor modificações no algoritmo global do capítulo anterior.

Ressalte-se que modelos de complementaridade linear como o PCLG, já foram anteriormente propostos para solucionar o PLDNP. Um dos primeiros algoritmos baseados neste tipo de formulação, o (PCP), foi estudado em Bialas *et al.* [11, 10], sob a hipótese do PLDNP não ser ilimitado. Posteriormente, Ben-Ayed e Blair [8] mostraram que o (PCP) pode não encontrar uma solução global do PLDNP. Uma modificação deste algoritmo foi feita por Júdice e Faustino [39].

Seja L' um limite inferior para o valor ótimo do PLDNP, por exemplo, $L' = c_1^t x' + c_2^t y'$, onde (x', y') é uma solução viável do PLDNP. Então, o PLDNP é equivalente ao seguinte problema, onde se acrescenta uma restrição no primeiro nível.

$$(PLDN') \quad \max_{x,y} \quad f_1(x,y) = c_1^t x + c_2^t y$$

$$\text{s. a:} \quad c_1^t x + c_2^t y \geq L'$$

$$x \geq 0, y \text{ resolve}$$

$$\max_y \quad f_2(x,y) = d^t y$$

$$\text{s. a:} \quad A_2 x + B_2 y \leq b_2$$

$$y \geq 0$$

Novamente substituindo o problema do segundo nível por suas condições de (KKT), tem-se que uma solução viável de PLDN' (que também é uma solução viável do PLDNP) é obtida resolvendo o problema:

$$w^P = b_2 - A_2x - B_2y \quad (4.11)$$

$$w^D = -d + B_2^t u \quad (4.12)$$

$$v = -L' + c_1^t x + c_2^t y \quad (4.13)$$

$$u^t w^P = y^t w^D = 0 \quad (4.14)$$

$$x, y, w^P, w^D, u, v \geq 0 \quad (4.15)$$

Uma representação matricial deste problema pode ser feita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} w^P \\ w^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -B_2 \\ B_2^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_2 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$v = -L' + \begin{bmatrix} 0 & c_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} + c_1^t x$$

$$\begin{bmatrix} u^t & y^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^P \\ w^D \end{bmatrix} = 0$$

$$x, y, w^P, w^D, u, v \geq 0$$

Mais ainda, as condições (4.11)-(4.15) correspondem ao seguinte PCLG:

$$w = q + Mz + Ny \quad (4.16)$$

$$v = p + Rz + Sy \quad (4.17)$$

$$z \geq 0, y \geq 0, w \geq 0, v \geq 0 \quad (4.18)$$

$$z^t w = 0 \quad (4.19)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -B_2 \\ B_2^t & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times n}, \quad N = \begin{bmatrix} -A_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times k}, \quad q = \begin{bmatrix} b_2 \\ -d \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n,$$

$$R = [0 \quad c_2^t] \in \mathfrak{R}^{1 \times n}, \quad S = c_1^t \in \mathfrak{R}^{1 \times k}, \quad p = -L' \in \mathfrak{R}, \quad z = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n,$$

$$w = \begin{bmatrix} w^p \\ w^d \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n, \quad v \in \mathfrak{R}$$

e $n = m_2 + n_2$, $k = n_1$.

Seguindo desenvolvimento análogo ao aplicado na seção anterior, define-se agora K como o conjunto que consiste das restrições (4.16)-(4.18) e o programa não linear como:

$$\begin{aligned} \text{(PNL)} \quad \min f(z, y, w, v) &= \|w - q - Mz - Ny\|^2 + \|v - p - Rz - Sy\|^2 + \left(\sum_{i=1}^n (z_i w_i)^g \right)^h \quad (4.20) \\ \text{s.a: } z, w, y, v &\geq 0 \end{aligned}$$

onde, novamente, $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana e $g, h \geq 1$ são números reais tais que $g > 1$ se $h = 1$.

A partir do teorema 4.1.1 temos então o seguinte resultado:

Teorema 4.2.1: *Se $K \neq \emptyset$ e $\bar{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ é uma matriz RS, então qualquer ponto estacionário do PNL (4.20) é uma solução viável do PLDNP, satisfazendo o corte (4.16)-(4.19).*

Prova:

Note que o PLDN' é equivalente ao PCLG definido por:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ R & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{N} = \begin{bmatrix} N \\ S \end{bmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}, \quad \bar{R} = 0, \quad \bar{S} = 0,$$

$$\bar{p} = 0, \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ \ell \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

onde $\ell \geq 0$, definido no lugar de M , N , q , R , S , p e z , respectivamente. Então o resultado segue diretamente da aplicação do teorema 4.11 a este PCLG.

□

Uma versão particular do teorema acima é obtido quando $c_2 = 0$.

Corolário 4.2.1: *Se $K \neq \emptyset$ e $c_2^t = 0$, então qualquer ponto estacionário do PNL (4.20) é uma solução viável do PLDNP, satisfazendo o corte (4.16)-(4.19).*

Prova:

Se $c_2 = 0$, então $R = 0$. E dado que M é RS , o resultado segue pelo teorema 4.1.1.

□

Ressalta-se que neste caso, a solução do PLDNP é igual a do relaxado.

A partir daqui notaremos o PCLG (4.16)-(4.19) e o PNL (4.20) simplesmente por PCLG e PNL, respectivamente.

4.3 Modificações no Algoritmo global

Nesta seção são propostos algoritmos que tentam encontrar uma solução global do PLDNP, encontrando pontos estacionários do problema PNL.

Lembremos que no método global, considerado no capítulo 3, podem-se identificar duas etapas: na primeira, procura-se um ponto de equilíbrio que seja mínimo local de

(\tilde{P}). Quando isso não acontece, inicia-se a segunda etapa, que procura encontrar um ponto viável melhorando o valor da função objetivo de pelo menos $\varepsilon > 0$, com relação ao melhor limite conhecido, ou conclua que tal ponto não existe. Esta etapa corresponde ao PASSO 5 e é implementada através do procedimento *outer approximation adaptado*, que é computacionalmente dispendioso, como se observa nos testes de Campêlo [13, seção 4.4].

Analisamos, aqui, a substituição do *outer approximation adaptado*, por um algoritmo que resolva o PCLG, para $L' = L + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ e L é o valor da melhor solução viável já encontrada.

Na verdade, vamos usar algoritmos que encontrem pontos estacionários do PNL. Claro que esta estratégia pode falhar quando a matriz \overline{M} não é RS. Neste caso, o ponto estacionário pode não satisfazer as condições de complementaridade, mesmo que o PLDN' seja viável.

Consideramos, então, primeiramente a seguinte redefinição do PASSO 5 do algoritmo global:

PASSO 5 MODIFICADO

PASSO 5.A: Encontre um ponto estacionário do PNL, obtendo $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}^P)^t$ e $\hat{s} = (0, \hat{w}^D, \hat{u})^t$.

PASSO 5.B: Se $f = 0$, então (\hat{z}, \hat{s}) é solução viável de PLDNP. Faça $(z^*, s^*) = (\hat{z}, \hat{s})$ e $L = c^t z^*$. Atualize o corte linear $\tilde{Z} = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^n : c^t z \geq L + \varepsilon\}$, onde $\varepsilon > 0$. Volte para o PASSO 2.

PASSO 5.C: Senão o algoritmo termina e obtém como melhor ponto (z^*, s^*) .

Um exemplo onde a modificação acima consegue substituir eficientemente o *outer approximation adaptado*, já que encontra um ponto (\bar{z}, \bar{s}) que satisfaz o termo de complementaridade $\bar{z}^t \bar{s} = 0$, é o seguinte:

Exemplo 9:

$$(P9) \quad \max_{x,y} f_1(x,y) = -x + 2y$$

s. a: $x \geq 0$, onde y resolve

$$\max_y f_2(x,y) = -y$$

s. a: $-x - y \leq 0$

$$0 \leq y \leq 2$$

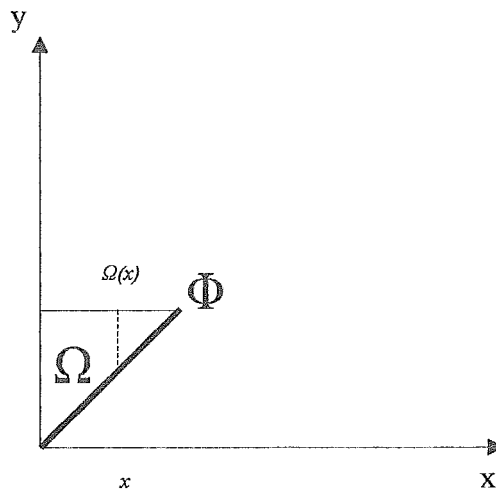


Figura 19

O primeiro ponto de equilíbrio encontrado é $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{w}_1^P, \bar{w}_2^P)^t = (0, 0, 0, 2)^t$ e $\bar{s} = (0, \bar{w}_1^D, \bar{u}_1, \bar{u}_2)^t = (0, 1, 0, 0)^t$. Introdz-se, então, um corte em P9, sendo $\varepsilon = 0.13$.

Neste caso, o PLDN' é

$$\max_{x,y} f_1(x,y) = -x + 2y$$

$$\text{s.a: } -x + 2y \geq 0.13$$

$$x \geq 0, \text{ onde } y \text{ resolve}$$

$$\max_y f_2(x,y) = -y$$

$$\text{s.a: } -x - y \leq 0$$

$$0 \leq y \leq 2$$

O ponto de equilíbrio encontrado após este corte é $\bar{z} = (0,0.065,0.065,1.935)^t$ e

$\bar{s} = (0,1,0,0)^t$. Como $\bar{z}^t \bar{s} > 0$, resolve-se o PNL, para encontrar uma solução do

PCLG:

$$\begin{bmatrix} w_1^P \\ w_2^P \\ w_1^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x$$

$$v = -0.13 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ y \end{bmatrix} - x$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^P \\ w_2^P \\ w_1^D \end{bmatrix} = 0$$

$$x, y, w_1^P, w_2^P, w_1^D, u_1, u_2, v \geq 0$$

Um ponto estacionário do PCLG é dado, aproximadamente, pelos pontos $\bar{z} = (0.454,0.454,0,0.1546)^t$ e $\bar{s} = (0,0,1,0)^t$. Como $\bar{z}^t \bar{s} = 0$, então é possível reiniciar o algoritmo de ponto de equilíbrio no PASSO 2, a partir de \bar{s} .

O principal problema deste algoritmo modificado, como já foi dito, é que o ponto estacionário encontrado pode não ser viável para o PLDNP, mesmo que PLDN' seja viável. Neste caso, o algoritmo termina no PASSO 5.C, embora a solução corrente não

seja ε -ótima. Como alternativas, foram experimentadas duas outras possibilidades de substituição do PASSO 5 do algoritmo global.

POSSIBILIDADE 1

PASSO 5.A: Encontre um ponto estacionário do PNL, obtendo $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}^P)^t$ e $\hat{s} = (0, \hat{w}^D, \hat{u})^t$.

PASSO 5.B: Se $f = 0$, então (\hat{z}, \hat{s}) é solução viável de PLDNP. Faça $(z^*, s^*) = (\hat{z}, \hat{s})$ e $L = c^t z^*$. Atualize o corte linear $\tilde{Z} = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^n : c^t z \geq L + \varepsilon\}$, onde $\varepsilon > 0$. Volte para o PASSO 2.

PASSO 5.C: Caso contrário, se $\hat{s}^t \hat{z} < \bar{s}^t \bar{z}$ volte ao PASSO 3. Senão o algoritmo termina e obtém como melhor ponto (z^*, s^*) .

POSSIBILIDADE 2

PASSO 5.A: Encontre um ponto estacionário do PNL, obtendo $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{w}^P)^t$ e $\hat{s} = (0, \hat{w}^D, \hat{u})^t$.

PASSO 5.B: Se $f = 0$, então (\hat{z}, \hat{s}) é solução viável de PLDNP. Faça $(z^*, s^*) = (\hat{z}, \hat{s})$ e $L = c^t z^*$. Atualize o corte linear $\tilde{Z} = Z \cap \{z \in \mathbb{R}^n : c^t z \geq L + \varepsilon\}$, onde $\varepsilon > 0$. Se $\tilde{Z} \neq \emptyset$, volte ao PASSO 5.A, senão vai para o PASSO 6.

PASSO 5.C: Se $\hat{s}^t \hat{z} < \bar{s}^t \bar{z}$ volte ao PASSO 3. Senão o algoritmo termina e obtém como melhor ponto (z^*, s^*) .

Em ambas as possibilidades, redefinimos o passo 5.C, descrito na modificação sugerida originalmente. Ao se encontrar um par (\hat{z}, \hat{s}) tal que $\hat{s}^t \hat{z} < \bar{s}^t \bar{z}$, volta-se a executar o procedimento de equilíbrio, na tentativa de encontrar um novo ponto viável, que ainda possa existir.

A diferença entre as duas possibilidades encontra-se no passo 5.B, após se encontrar o ponto viável. Enquanto na possibilidade 1 reaplica-se o algoritmo de equilíbrio, na possibilidade 2 privilegia-se uma nova execução do algoritmo para PNL.

Experimentos computacionais com os algoritmos que incorporam estas duas alternativas também mostraram que o ponto estacionário encontrado pode não ser viável para o PLDNP, fazendo com que o algoritmo termine antes de encontrar uma ε -solução global. Mais ainda, a modificação do PASSO 5.C pode fazer o algoritmo global ciclar. De fato, o novo ponto de equilíbrio encontrado pode também não ser viável, de modo que o corte não seria atualizado e o PNL a resolver seria o mesmo. Neste caso, finalizamos o algoritmo.

Na verdade estas duas possibilidades não se mostraram mais promissoras que a modificação original. Por isso, apenas esta será analisada mais detalhadamente na próxima seção.

4.4 Implementações

Nesta seção o algoritmo global do capítulo 3 é comparado com algoritmo modificado, obtido com a substituição do *outer approximation adaptado* por um procedimento que encontra pontos estacionários de PNL. Especificamente, o novo algoritmo substitui o PASSO 5 (ver seção 3.3) pelo PASSO 5 MODIFICADO (ver seção 4.3).

Ressalta-se que todos os algoritmos apresentados na seção 4.3 foram implementados em C e executados em um microcomputador Pentium II/350 MHz.

O algoritmo global do capítulo 3 é o mesmo implementado por Campêlo [13], inclusive foi utilizado o mesmo código-fonte. O autor considerou um tempo limite de 900 segundos para resolver o problema.

Entre os diversos algoritmos que encontram pontos estacionários de funções diferenciáveis podemos citar os de Conn *et al.* [25], Conn *et al.* [24], Friedlander *et al.* [31], entre outros.

O algoritmo utilizado neste trabalho para encontrar os pontos estacionários do PNL encontra-se em Birgin *et al.* [44]. É um algoritmo de gradientes projetados que resolve problemas da forma:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s. a:} & x \in C \end{array}$$

onde $C \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e convexo e $f(x)$ tem derivadas parciais contínuas num conjunto aberto que contém C . Na verdade, em [44] são apresentados dois algoritmos, o SPG1 e uma modificação, o SPG2. No artigo é provado que estes dois algoritmos são bem definidos e que realmente convergem para um ponto estacionário de

$f(x)$. Uma das grandes vantagens destes algoritmos é sua fácil implementação e boa performance, quando comparados a outros algoritmos existentes, como o LANCELOT.

Em nossos testes usamos o SPG1. Os parâmetros utilizados foram os mesmos de Birgin *et. al* [44, pág 10].

O ponto inicial considerado foi $(z, y, w, v) = (0, 0, 0, 0)$. Na definição de PLN, utilizou-se $\varepsilon = 0.13$, isto é, 10 vezes maior que aquele utilizado em Campêlo [13]. Assim como em [44], consideramos um máximo de 50000 iterações. Excedido este limite, considera-se que não foi possível resolver o problema.

As comparações foram feitas utilizando todos os problemas descritos em Campêlo e Scheimberg [15], que, aliás, são oriundos do gerador de problemas de Vicente e Calamai [53].

As duas tabelas abaixo apresentam os resultados computacionais obtidos para 60 problemas. Na descrição das colunas, usamos n_1 e n_2 como o número de variáveis do líder e seguidor respectivamente, m como o número de restrições do segundo nível e $n_{12} = n_1 + n_2$ como o total de variáveis do PLDNP. Chamou-se de PCLG a coluna relativa aos tempos (em segundos) gastos pelo algoritmo que incorpora o SPG1. A coluna OUTER descreve os tempos (em segundos) do algoritmo original.

Para cada número de variáveis, têm-se três problemas, que apresentam número de restrições diferentes. Por exemplo, para $n_{12} = 50$ e $n_2 = 12$, tem-se um problema com $m=15$, outro com $m=17$ e outro com $m=19$.

As entradas das tabelas marcadas com (-) correspondem a problemas em que se excedeu o número de iterações (para PCLG) ou o limite de tempo (para OUTER). Os

valores marcados com (*) identificam casos onde o algoritmo parou antes de obter uma solução ótima.

n_{12}	n_2	m	PCLG	OUTER
50	12	15	14.10	0.06
		17	61.95*	0.11
		19	-	0.49
50	38	15	-	1.92
		17	149.34*	9.39
		19	23.28	6.86
60	15	18	-	0.33
		20	167.14*	0.39
		22	-	0.82
60	45	18	204.16	4.72
		20	141.92*	24.94
		22	-	68.93
70	17	20	-	0.11
		22	-	0.39
		24	-	1.31
70	53	20	-	<0.01
		22	115.46*	7.20
		24	-	86.34
80	20	23	154.56	0.11
		25	256.56*	0.61
		27	-	2.42
80	60	23	38.72	23.35
		25	254.52*	15.05
		27	-	46.19
90	22	25	40.76	0.66
		27	197.40*	2.31
		29	141.16*	4.18
90	68	25	316.21	47.67
		27	42.90*	11.26
		29	124.24	94.96

Tabela 4.1: Resultados computacionais para problemas esparsos.

n_{12}	n_2	m	PCLG	OUTER
50	12	15	<0.01	<0.01
		17	-	0.6
		19	-	0.11
50	38	15	-	2.74
		17	-	2.42
		19	-	4.17
60	15	18	<0.01	<0.01
		20	<0.01	<0.01
		22	<0.01	<0.01
60	45	18	-	0.11
		20	-	263.42
		22	-	340.98
70	17	20	0.17	<0.01
		22	0.05	<0.01
		24	<0.01	0.060
70	53	20	-	0.77
		22	95.51	-
		24	-	-
80	20	23	<0.01	<0.01
		25	0.05	<0.01
		27	-	0.99
80	60	23	-	0.65
		25	512.62*	57.29
		27	-	38.89
90	22	25	<0.01	<0.01
		27	170.38	23.78
		29	<0.01	<0.01
90	68	25	-	48.72
		27	171.91*	67.12
		29	-	-

Tabela 4.2: Resultados computacionais para problemas densos.

Na tabela 4.1, relativa a 30 problemas esparsos, observa-se que o algoritmo modificado encontrou o ótimo global para 8 instâncias, parou com uma solução viável não ótima em 10 casos e excedeu o limite de iterações nos 12 problemas restantes. Em todos os casos demandou tempo superior ao gasto pelo algoritmo original, que obteve a solução global de todos os problemas.

Na tabela 4.2, referente a 30 problemas densos, tem-se que o algoritmo modificado resolveu exatamente 12 instâncias, parou com uma solução viável não ótima em 3 casos e excedeu o número de iterações 15 vezes. Nos problemas onde o ótimo global foi encontrado, o tempo computacional gasto foi compatível com o algoritmo original. Note-se ainda que este último algoritmo também não conseguiu resolver 3 dos problemas dentro de 900s.

Conclusões

O principal objetivo deste trabalho foi introduzir uma modificação no algoritmo global apresentado por Campêlo [13] para resolver o PLDNP. Substitui-se o método de *outer approximation adaptado* por um algoritmo que encontra um ponto estacionário de um problema não linear, PNL, associado a um problema de complementaridade linear generalizada, PCLG.

Aplicou-se o método modificado de maneira heurística, pois em geral não é verificada a condição dada em Fernandes *et al* [28] o qual garante que todo ponto estacionário do PNL resolve o PCLG, isto é, é um ponto viável do problema de dois níveis.

A partir da análise dos casos em que a condição RS é verificada para o PLDNP chega-se aos seguintes resultados:

1. Quando a função objetivo do líder não depende da variável do seguidor, verifica-se a condição RS. Entretanto, nesta situação o problema PLDNP se reduz a um problema linear, que corresponde ao problema relaxado.
2. Para todo PLDNP, a projeção do conjunto viável do problema sobre o espaço das variáveis do líder é sempre um conjunto convexo.

Observou-se que nos casos em que o algoritmo modificado funciona satisfatoriamente, os tempos obtidos são da mesma ordem que a do algoritmo original.

Através dos experimentos computacionais pode-se em princípio inferir a importância da condição RS.

Referências Bibliográficas

- [1] AMOUZEGAR,M., MOSHIRVAZIRI.,K., "A penalty method for linear bilevel programming problems", In: A.Migdalas, P.Pardalos & P.Värbrand, (eds), *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*, Nonconvex Optimization and its Applications, v.20, pp.251-271, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [2] AUDET, C., HANSEN, P., JAUMARD,B., SAVARD,G., "Links between linear bilevel and mixed 0-1 programming problems", *Journal of Optimization: Theory and Applications*, v.93, n.2, pp.273-300, 1997.
- [3] BARD, J., "An efficient point algorithm for a linear two-stage optimization problem", *Operations Research Society of America*, v.31, n.4, pp.670-684, 1983.
- [4] BARD, J., "An investigation of the linear three level programming problem", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v.14, pp.711-717, 1984.
- [5] BARD, J., FALK, J., "An explicit solution to the multi-level programming problem", *Computers and Operations Research*, v. 9, pp.77-100, 1982.
- [6] BARD, J., MOORE, J., "A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v. 11, pp.281-292, 1990.
- [7] BAZARAA,M.S, SHERALI,C.M., "Nonlinear Programming _ Theory and Algorithms". John Wiley & Sons, Inc., 1979.

- [8] BEN-AYED, O., BLAIR,C., "Computational difficulties of bilevel linear programming", *Operations Research*, v.38, pp.556-560, 1990.
- [9] BENSON, H., "On the structure and properties of a linear multilevel programming problem", *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.60, pp.353-373, 1989.
- [10] BIALAS, W, F., KARWAN, M, H., "Two linear programming", *Management Science*, v.30, pp.1004-1020, 1984.
- [11] BIALAS, W., KARWAN, M., SHAW, J., "A parametric complementarity pivot approach for two-level linear programming", Technical Report 80-2. State University of New York at Buffalo Operations Research Program, 1980.
- [12] BRACKEN J., MCGILL, J., "Mathematical programs with optimization problems in the constraints", *Operations Research*, v.21, pp.37-44, 1973.
- [13] CAMPÊLO NETO, M.B., *Programação Linear em Dois Níveis: uma abordagem teórica e computacional*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [14] CAMPÊLO, M., DANTAS,S., SCHEIMBERG,S., *A note on a penalty function approach for solving bilevel linear programs*. Technical Report ES-467/98, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 1998.
- [15] CAMPÊLO,M., SCHEIMBERG,S., "Theoretical and computational results for a linear bilevel problem", In: N. Hadjisavvas & P. Pardalos, (eds), *Advances in Convex Analysis and Global Optimization*, Nonconvex Optimization and its Applications, v.54, pp.269-281, Kluwer, 2001.

- [16] CAMPÊLO,M., SCHEIMBERG,S., *An analysis of the bilevel linear problem by a penalty approach*, Technical Report ES-479/98, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 1998.
- [17] CAMPÊLO,M., SCHEIMBERG,S., *Characterizing local and global solutions of a linear bilevel problem*, Technical Report ES-515/99, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 1999.
- [18] CAMPÊLO,M., SCHEIMBERG., "A note on a modified simplex approach for solving bilevel linear programming problems", *European Journal of Operational Research*, v.126, pp.454-458, 2000.
- [19] CANDLER, W., "A linear bilevel programming algorithm: a comment", *Computers Operations Research*, v.15, n.3, pp.297-298, 1988.
- [20] CANDLER, W., NORTON, R., "Multilevel programming", Technical Report 20, World Bank Development Research Center, Washington D.C, 1977.
- [21] CANDLER,W., TOWNSLEY,R., "A linear two-level programming problem", *Computers and Operations Research*, v.9, pp.59-76, 1982.
- [22] CHARNES, A., COOPER, W. W., THOMPSON, G.L., "Some properties of redundante constraints and extraneous variables in direct and dual linear programming problems", *Operational Research*, v.10, n.5, pp.711-723, 1962.
- [23] COLEMAN, T.F., LI,Y., "On the convergence of interior-reflective Newton methods for nonlinear minimization subject to bounds", *Mathematical Programming*, v.67, pp.189-224, 1994.

- [24] CONN, A.R., GOULD,N.I.M., TOINT, P.L., "LANCELOT: a Fortran package for large-scale nonlinear optimization (Release A)", Springer Series in Computational Mathematics 17, Springer-Verlag, New York, Berlin and Heidelberg, 1992.
- [25] CONN,A.R., GOULD,N.I.M., TOINT,L., "Global convergence of a class of trust region algorithms for optimization with simple bounds", *Siam Journal on Numerical Analysis*, v.25, n.2, pp.433-460, April.1988.
- [26] DANTAS, SIMONE., *Problemas de Programação de Dois Níveis: um estudo dos casos Linear, Linear-quadrático e Quadrático*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995.
- [27] DEMPE, S., "A Simple algorithm for the Linear Bilevel Programming Problem", *Optimization*, v.18, pp.373-385, 1987.
- [28] FERNANDES,L., FRIEDLANDER,A., GUEDES,M., JÚDICE,J., "Solution of a general linear complementarity problem using smooth optimization and its application to bilinear programming and LCP", *Applied Mathematics and Optimization*, v.43, pp.1-19, 2001.
- [29] FORTUNY-AMAT, J., McCARL, B., "A representation and economic interpretation of a two-level programming problem", *Journal of the Operational Research Society*, v.32, pp.783-79, 1983.
- [30] FRIEDLANDER,A., MARTINEZ,J., SANTOS,S., "Solution of linear complementarity problems using minimization with simple bounds", *Journal of Global Optimization*, v.6, pp.1-15, 1995.

- [31] FRIEDLANDER,A., MARTÍNEZ,J.M., SANTOS,S.A., "A new trust region algorithm for bound constrained minimization", *Applied Mathematics and Optimization*, v.30, pp.235-255, 1994.
- [32] GALLO,G., ÜLKÜCÜ,A, "Bilinear programming: an exact algorithm", *Mathematical Programming*, v.12, pp.173-194, 1977.
- [33] GENDREAU,M., MARCOTTE,P., SAVARD,G., "A hybrid tabu-ascent algorithm for the linear bilevel programming problem", *Journal of Global Optimization*, v.9, pp.1-14, 1996.
- [34] GONZAGA, C, C., "The largest step path-following algorithm for monotone linear complementarity problems", *Mathematical Programming*, v.76, pp.299-308, 1997.
- [35] HORST,R., TUY,H., "Global optimization: deterministic approaches", Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [36] JEROSLOW, R., "The polynomial hierarchy and a simple model for competitive analysis", *Mathematical Programming*, v.32, pp.146-164, 1985.
- [37] JÚDICE, J., FAUSTINO, A., "A sequential LCP algorithm for bilinear and concave quadratic programming", *Annals of Operations Research*, v.34, pp.89-106, 1992.
- [38] JÚDICE, J., MITRA,G., "Reformulation of mathematical programming problem as linear complementarity problems and investigation of their solution methods", *Journal of Optimization : Theory and Applications*, v.57(1), pp.123-149, 1988.
- [39] JÚDICE,J., FAUSTINO,A., "A sequential LCP method for bilevel linear programming", *Annals of Operations Research*, v.34, pp.89-106, 1992.

- [40] JÚDICE,J., VICENTE,L., "On the solution and complexity of a generalized linear complementarity problem". *Journal of Global Optimization*, v.4, pp.415-424, 1994.
- [41] KOJIMA,M., MIZUNO,S., YOSHISE,A., "An $O(\sqrt{nL})$ iteration potential reduction algorithm for linear complementarity problems", v.50, pp.331-342, 1991.
- [42] KONNO, H., "A cutting plane algorithm for solving bilinear programs", *Mathematical Programming*, v.11, pp.14-27, 1976.
- [43] MANSAGARIAN,O.L., "The linear complementarity problem as a separable bilinear program". *Journal of Global Optimization*, v.12, pp.1-7, 1995.
- [44] BIRGIN, E.G., MARTÍNEZ, J.M., RAYDAN., M., "Nonmonotone spectral projected gradient methods on convex sets", *Siam Journal on Optimization*, v. 10, n. 4, pp.1196-1211, 2000.
- [45] McCORMICK,G.P, DeSILVA, A.H., "Implicitly defined optimization problems", *Annals of Operations Research*, v.34, pp.107-124, 1992.
- [46] MONTEIRO,R.D.C., WRIGHT,S.J., "Superlinear primal-dual affine scaling algorithms for LCP", v.69, pp.311-333, 1995.
- [47] ÖNAL,H., "A modified simplex approach for solving bilevel linear programming problems", *European Journal of Operational Research*, v.67, pp.126-135, 1993.
- [48] POTRA,F.A.,SHENG,R., "Predictor-corrector algorithm for solving $P_*(k)$ -matrix LCP from arbitrary positive starting points". *Mathematical Programming*, v.76, pp.223-244, 1996.

- [49] ROCKAFELLAR, R. "Convex Analysis". Princeton University Press. Nova Jersey. 2a. edição, 1972.
- [50] SAVARD,G., Contributions à la programmation mathématique à deux niveaux. PhD thésis, Université de Montreal, École Polytechnique, 1989.
- [51] VICENTE, L., SAVARD, G., JÚDICE, J., "Descent approach for quadratic bilevel programming", *Journal of Optimization Theory and Applications*, v.81, pp.379-399, 1994.
- [52] VICENTE,L.,CALAMAI, P., "Bilevel and multilevel programming: a bibliography review". *Journal of Global Optimization*, v.5, pp.291-306, 1994.
- [53] VICENTE,L.,CALAMAI, P., "Generating linear and linear-quadratic bilevel programming problems", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, v.14, pp.770-782, 1994.
- [54] WEN, U-P, HSU,S-T., "Linear bi-level programming problems _ A review", *Journals Operations Research Society*, v.42, n.2, pp.125-133, 1991.
- [55] WHITE,D., ANANDALINGAM,G., "A penalty function approach for solving bi-level linear programs", *Journal of Global Optimization*, v.3, pp.397-419, 1993.
- [56] WRIGHT,S.J., "An infeasible-interior-point algorithm for linear complementarity problems". *Mathematical Programming*, v.67, pp.29-51, 1994.
- [57] YE,Y., ANSTREICHER,K., "On quadratic and $O(\sqrt{n}L)$ convergence of a predictor-corrector algorithm for LCP". *Mathematical Programming*, v.62, pp.537-551, 1993.