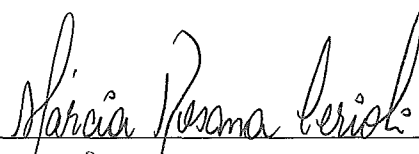


GRAFOS DE INTERSEÇÃO EM ARESTAS DE  
CAMINHOS EM UMA ÁRVORE

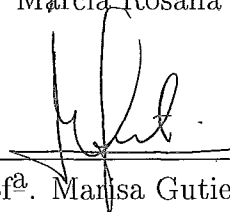
Priscila Cardoso Petito

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS - GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



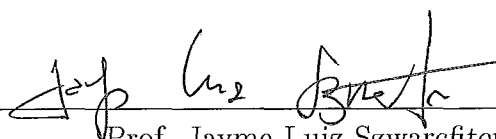
Prof<sup>a</sup>. Marcia Rosana Cerioli, D.Sc.



Prof<sup>a</sup>. Marisa Gutierrez, D.Sc.



Prof. João Meidanis, Ph.D.



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2002

PETITO, PRISCILA CARDOSO

Grafos de Interseção em Arestas de Caminhos em uma Árvore [Rio de Janeiro] 2002

VII, 104 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2002)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Teoria dos grafos

2 - Grafos de Interseção

3 - Grafos UE

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*À Deus  
que me guiou  
aos meus filhos, João Antônio e Bernardo  
ao primeiro pela paciência e  
compreensão pelas constantes  
ausências da mamãe  
e ao segundo pelo estímulo  
para a defesa desta tese.*

*Eu amo vocês.  
Aos meus pais,  
à minha irmã Patrícia,  
ao meu marido Alexandre  
e à todos que me ajudaram  
a chegar até aqui.*

*Em especial,  
à Márcia Cerioli  
pela paciência, apoio  
e competência.*

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc)

Grafos de Interseção em Arestas de  
Caminhos em uma Árvore

Priscila Cardoso Petito

Outubro/2002

Orientadora : Márcia Rosana Cerioli

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

O grafo de interseção de uma família de conjuntos é o grafo obtido associando-se a cada conjunto um vértice e, tal que dois vértices são adjacentes se e somente se os conjuntos correspondentes têm interseção não vazia.

Examinamos neste trabalho a classe dos grafos  $UE$ , que são os grafos de interseção de famílias de caminhos em uma árvore, onde os caminhos são considerados como conjuntos de arestas. Se a família de caminhos satisfaz a propriedade Helly, temos a classe  $UEH$ . Quando a árvore é direcionada ou direcionada e enraizada, temos respectivamente as classes  $DE$  e  $RDE$ .

Se os caminhos são considerados como conjuntos de vértices, temos as classes  $UV$ ,  $DV$  e  $RDV$ , definidas de maneira análoga às classes  $DE$  e  $RDE$ .

Neste trabalho consideramos propriedades estruturais dos grafos  $UE$  e dos grafos  $UEH$ , incluindo métodos de decomposição destes grafos que conduzem à caracterizações. No caso dos grafos  $UEH$  esta caracterização conduz à um algoritmo polinomial de reconhecimento. Já o problema do reconhecimento dos grafos  $UE$  é NP-Completo.

Consideramos também as relações de inclusão entre as classes  $UE$  e  $UEH$  e as classes  $UV$ ,  $DV$ ,  $RDV$ ,  $DE$ ,  $RDE$ , *Cordal*, *Perfeito* e *Clique-Helly*.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

Edge Intersection Graphs of Paths in a Tree

Priscila Cardoso Petito

October/2002

Advisor : Márcia Rosana Cerioli

Department : Computing and Systems Engineering

The intersection graph of a family of sets is obtained by associating a vertex with each set of the family and two vertices are adjacent if and only if the corresponding sets have a non empty intersection.

In this work we examine the  $UE$  graphs, which are the intersection graphs of a family of paths in a tree, where these paths are given by its sets of edges. When the family of paths satisfies the Helly property we obtain the  $UEH$  graphs. When the tree is directed or rooted directed the corresponding graphs are called  $DE$  or  $RDE$ , respectively.

When the paths are given by its sets of vertices we obtain the  $UV$ ,  $DV$  and  $RDV$  graphs, defined in an analogous way as the  $UE$ ,  $DE$  and  $RDE$  graphs.

In this work we consider structural properties of both the  $UE$  and  $UEH$  graphs, including decomposition methods of these graphs that leads to characterizations. In the  $UEH$  case, the characterization leads to an efficient recognition algorithm. However, the recognition problem for  $UE$  graphs is NP-Complete.

We also consider the inclusion relations among  $UE$  and  $UEH$  and the classes  $UV$ ,  $DV$ ,  $RDV$ ,  $DE$ ,  $RDE$ , *Chordal*, *Perfect* and *Clique-Helly*.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1	Grafos . . . . .	4
2.2	Grafos de Interseção . . . . .	8
2.2.1	Grafos de Interseção em Vértices . . . . .	9
2.3	Propriedade Helly . . . . .	11
2.4	Número Helly Forte . . . . .	14
<b>3</b>	<b>A classe UE e subclasses</b>	<b>17</b>
3.1	A Classe UE . . . . .	18
3.1.1	Os Grafos UE Próprios . . . . .	19
3.1.2	As Subclasses DE e RDE . . . . .	20
3.2	Variantes da Interseção em Arestas . . . . .	22
3.3	Ciclos nos Grafos UE . . . . .	24
3.4	A Subclasse UEH . . . . .	27
3.5	Cliques de um Grafo UE . . . . .	29
3.6	Teorema da Árvore Característica para UEH . . . . .	37
3.7	As Subclasses UE Local e UEH Local . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Decomposição em Grafos Ramo</b>	<b>42</b>
4.1	Grafo Ramo e a Caracterização de $UE \cap UV$ . . . . .	42
4.2	Problema do Reconhecimento dos grafos UE . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Decomposição por Cliques</b>	<b>55</b>
5.1	Definição e Resultados Gerais . . . . .	55
5.1.1	Complexidade da Decomposição por Cliques . . . . .	60

5.2	Caracterização de UEH pela Decomposição por Cliques . . . . .	61
5.3	Caracterização de $UE \cap \text{CORDAL}$ pela Decomposição por Cliques . .	70
5.4	Grafos UEH e $UE \cap \text{CORDAL}$ indecomponíveis . . . . .	79
5.5	Problema do Reconhecimento dos grafos UEH . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Interseções entre Classes</b>	<b>84</b>
6.1	As Classes DE e DV . . . . .	85
6.2	As Classes RDE e RDV . . . . .	85
6.3	As Classes UE, UV e CORDAL . . . . .	87
6.4	Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos para a classe UE . . . . .	92
6.5	As Classes DE, DV, UEH, PERFEITO e CORDAL . . . . .	94
6.6	As Classes UEH e CLIQUE-HELLY . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>101</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>103</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Seja  $\mathcal{P}$  uma família de caminhos em uma árvore  $T$ . O *grafo de interseção em arestas* de  $\mathcal{P}$  é o grafo com conjunto de vértices igual a  $\mathcal{P}$  e tal que existe uma aresta entre dois vértices se e somente se os caminhos correspondentes têm aresta em comum. Na figura 1.1 temos uma família de caminhos em uma árvore e seu grafo de interseção em arestas.

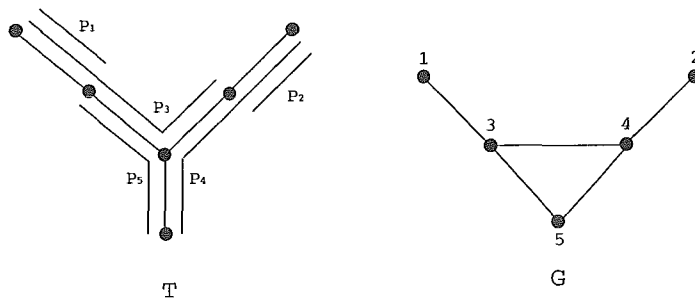


Figura 1.1: Exemplo de um grafo  $UE$ .

Se existe uma família de caminhos  $\mathcal{P}$  em uma árvore  $T$  tal que  $G$  é o grafo de interseção em arestas de  $\mathcal{P}$ , dizemos que  $G$  é um *grafo UE*. Um grafo que não é  $UE$  é dado na figura 1.2. O capítulo 3 contém resultados sobre a estrutura dos ciclos em um grafo  $UE$  que justificam este fato de maneira imediata.

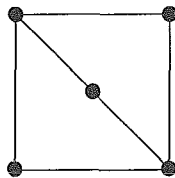


Figura 1.2: Exemplo de um grafo que não é  $UE$ .

Os grafos  $UE$  modelam conflitos de mensagens em redes de computadores cuja



estrutura é dada por uma árvore  $T$ . Os vértices de  $T$  são as máquinas e os caminhos de  $\mathcal{P}$  são rotas de mensagens. Dizemos que mensagens são *conflitantes* quando usam um mesmo *link* e, neste caso, os caminhos que representam as rotas destas mensagens têm uma aresta em comum. O grafo de interseção em arestas de  $\mathcal{P}$  é um grafo que modela esta situação de conflito.

A classe dos grafos  $UE$  têm se mostrado de difícil tratamento. De fato, seu reconhecimento é NP-Completo e ainda não se conhece uma caracterização adequada dos grafos nesta classe. De interesse particular são os grafos  $UEH$ , que são os grafos de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore onde esta família satisfaz a propriedade Helly em arestas. Sua relevância se deve ao fato de que esta classe tem propriedades particulares e resultados próprios, conduzindo à caracterizações que fornecem um algoritmo polinomial para o seu reconhecimento. Outra classe é obtida pela restrição dos grafos  $UE$  aos grafos cordais. Embora seu reconhecimento também seja NP-Completo, existe um resultado de caracterização para grafos nesta classe. Outras subclasses relevantes da classe  $UE$  são as classes  $DE$  e  $RDE$ , obtidas ao considerarmos famílias de caminhos em uma árvore direcionada ou direcionada e enraizada, respectivamente.

Este trabalho apresenta em linguagem uniforme os resultados da literatura referentes às propriedades estruturais e ao problema do reconhecimento dos grafos  $UE$  e algumas de suas subclasses. São analisadas também as relações de inclusão entre as classes  $UE$  e subclasses com as classes dos grafos de caminho, cordais, perfeitos e clique-Helly.

Nosso trabalho está organizado em sete capítulos.

O capítulo 1 é esta introdução.

O capítulo 2 contém definições da teoria dos grafos utilizadas nos capítulos seguintes e necessárias para o entendimento do texto. Em particular são enfocados os conceitos de grafos de interseção, propriedade Helly e número Helly forte.

O capítulo 3 é destinado ao estudo estrutural dos grafos  $UE$  e  $UEH$ . Inicia com as definições e exemplos das classes  $UE$ ,  $DE$  e  $RDE$ . Segue mostrando que algumas variações na definição da classe  $UE$  não produzem novas classes de grafos. Na seção seguinte analisamos a estrutura dos ciclos nos grafos  $UE$ . Em seguida

apresentamos a classe  $UEH$ , incluindo propriedades e resultados para esta classe. Seguimos apresentando a análise estrutural das cliques de um grafo  $UE$  que conduz ao resultado de que o número de cliques de um grafo  $UE$  é polinomial. Ainda neste capítulo definimos as classes  $UE\ Local$  e  $UEH\ Local$ , que desempenham um papel fundamental no estudo dos grafos  $UE$ .

Os capítulos 4 e 5 são destinados à métodos de decomposição de grafos  $UE$ .

O capítulo 4 contém resultados sobre a decomposição de um grafo  $UE$  em grafos ramo, que conduzem à uma caracterização dos grafos  $UE$  que são  $UV$ . Como consequência desta caracterização, temos que o problema do reconhecimento de grafos  $UE$  é NP-Completo.

O capítulo 5 contém resultados sobre a decomposição por separadores clique. São apresentados resultados desta decomposição para grafos em geral e específicos para os grafos  $UEH$  e para os  $UE$  que são cordais. Estes resultados conduzem à teoremas de caracterização para estas classes. Encerramos o capítulo apresentando um algoritmo polinomial, baseado nesta decomposição, que resolve o problema de reconhecimento de grafos  $UEH$ .

O capítulo 6 contém uma coletânea de resultados sobre as relações de inclusão entre as classes de grafos de interseção de caminhos em uma árvore, seja esta interseção em vértices ou em arestas, e as classes dos grafos cordais, perfeitos e clique-Helly.

Finalmente, no capítulo 7 apresentamos uma breve relação dos problemas de otimização já resolvidos para a classe dos grafos  $UE$  e dos  $UEH$  e concluimos com perspectivas de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições básicas de teoria dos grafos que são aqui utilizadas. As notações e definições são extraídas principalmente de [11] e [16].

A seguir, definimos grafos de interseção, propriedade Helly, número Helly forte e apresentamos algumas classes de grafos que estão diretamente relacionadas com os grafos de interseção em arestas de caminhos em uma árvore, que são o nosso principal tema de estudo

### 2.1 Grafos

Um *grafo* é um par ordenado  $G = (V, E)$  onde  $V$  é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e  $E$  é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos chamados *arestas*. Se  $G$  é um grafo,  $V(G)$  e  $E(G)$  denotarão seu conjunto de vértices e arestas, respectivamente. Se  $|V(G)| = 1$ ,  $G$  é chamado *trivial*. Um vértice  $u$  é *adjacente* a um vértice  $v$  em  $G$  se  $(u, v)$  é uma aresta de  $G$ . Neste caso também dizemos que  $u$  e  $v$  são *vizinhos* em  $G$ .

O conjunto dos vértices adjacentes a  $u$  é denotado por  $Adj(u)$  e chamado de vizinhança de  $u$ . Um vértice  $u$  é *isolado* quando  $Adj(u) = \emptyset$  e é *universal* quando  $Adj(u) = V(G) - u$ . Uma aresta  $e = (u, v)$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$ , que são os *extremos* de  $e$ . O *grau* de  $v$ , denotado por  $d(v)$ , é o número de vizinhos de  $v$ , isto é,  $d(v) = |Adj(v)|$ . Dois vértices  $u$  e  $v$  são *gêmeos* quando  $Adj(u) = Adj(v) - \{u\} + \{v\}$ .

Dois grafos  $G$  e  $H$  são *isomorfos* se existe um bijeção  $\phi$  de  $V(G)$  em  $V(H)$  tal que a aresta  $(u, v) \in E(G)$  se e somente se  $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$ . A função  $\phi$  é um

isomorfismo de  $G$  em  $H$ .

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de um grafo  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Se  $G$  é um grafo e  $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$ , então o *subgrafo induzido* por  $X$  é o subgrafo  $H$  de  $G$ , tal que  $V(H) = X$  e  $E(H)$  é o conjunto das arestas de  $G$  que têm ambos extremos em  $X$ . Se  $\emptyset \neq X \subseteq E(G)$  então o *subgrafo induzido* por  $X$  é o subgrafo  $H$  tal que  $E(H) = X$  e  $V(H)$  é o conjunto dos vértices de  $G$  que são extremos de alguma aresta em  $X$ . Em ambos os casos, o subgrafo induzido por  $X$  é denotado por  $G[X]$ .

Um *caminho*  $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  é uma sequência não vazia de vértices distintos de  $G$  tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , existe a aresta  $(v_{i-1}, v_i)$  em  $G$ . Dizemos então que  $P$  é um *caminho entre*  $v_0$  e  $v_k$  e que  $P$  *passa* por seus vértices e pelas arestas consecutivas que têm ambos os extremos em  $P$ . O inteiro  $k$  é o *comprimento* de  $P$ . Quando for mais conveniente, um caminho  $P$  pode ser expresso pela sequência  $(e_1, \dots, e_k)$  das arestas por onde ele passa. Em qualquer caso,  $v_0$  e  $v_k$  são os *extremos* de  $P$ . Dois caminhos  $P_1$  e  $P_2$  *compartilham* uma aresta  $e$  se  $P_1$  e  $P_2$  passam por  $e$ . Dizemos que  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  é um *ciclo* se, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , existe a aresta  $(v_{i-1}, v_i)$  e os vértices  $v_0$  e  $v_k$  coincidem. Um ciclo é dito ser *par* ou *ímpar* quando o seu *comprimento*  $k$  é par ou ímpar, respectivamente. A *distância*  $d(u, v)$  entre dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  é o comprimento de um menor caminho entre  $u$  e  $v$  em  $G$ .

Dados dois caminhos  $P$  e  $Q$  definimos como  $P \oplus Q$  a diferença simétrica em arestas entre  $P$  e  $Q$ , isto é,  $P \oplus Q$  é a união das arestas destes caminhos, menos as arestas que estão em ambos, como mostra a figura 2.1.



Figura 2.1: Construção de  $P \oplus Q$ .

Um grafo é *conexo* se entre qualquer par de vértices distintos de  $G$  existe um caminho. Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ . Dizemos que  $H$  é uma *componente biconexa* de  $G$  se  $H$  é uma componente conexa

em  $G - v$  e em  $G - e$ , para todo vértice  $v$  e toda aresta  $e$  de  $G$ . Um grafo  $G$  é *desconexo* se não for conexo. No presente texto estaremos nos referindo apenas a grafos conexos, a não ser que seja dito o contrário.

Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos. Um subgrafo conexo de uma árvore é chamado de *subárvore*. Um vértice de grau um em uma árvore é chamado de *folha*. Chamamos de *árvore de grau  $i$*  uma árvore tal que o grau máximo de seus vértices é menor ou igual a  $i$ . Uma aresta de uma árvore  $T$  é uma *aresta-folha* se um dos seus extremos tem grau um em  $T$ .

Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices adjacentes de um grafo  $G$ . A operação de *identificação* de  $u$  e  $v$ , ou *contração* da aresta  $(u, v)$ , consiste em retirar de  $G$  a aresta  $(u, v)$  e substituir os vértices  $u$  e  $v$  por um novo vértice  $x$  de forma que  $Adj(x) = Adj(u) \cup Adj(v) - \{u, v\}$ .

Um grafo  $G$  é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de  $G$  são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com  $n$  vértices e tal grafo é denotado por  $K_n$ .

Um conjunto de subgrafos completos de um grafo  $G$  é uma *cobertura de arestas* de  $G$  quando cada aresta de  $G$  está em, pelo menos, um dos completos deste conjunto.

Um grafo  $G$  é *bipartido* se  $V(G)$  pode ser particionado em dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , isto é,  $X \cup Y = V(G)$  e  $X \cap Y = \emptyset$ , tais que cada aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  outro em  $Y$ . Uma tal partição  $(X, Y)$  é chamada uma *bipartição* do grafo. Os grafos bipartidos são caracterizados no seguinte teorema clássico.

**Teorema 2.1** *Um grafo é bipartido se e somente se não possui um ciclo ímpar.*

Se  $G$  é um grafo, o *complemento* de  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , é o grafo cujo conjunto de vértices é  $V(G)$  tal que dados dois vértices distintos  $u$  e  $v$ , existe uma aresta  $(u, v)$  em  $\overline{G}$  se e somente se  $(u, v) \notin E(G)$ .

Um conjunto de vértices  $X \subseteq V(G)$  é uma *clique* se  $G[X]$  é um completo maximal e é um *conjunto independente* se  $\overline{G}[X]$  é um completo. Uma clique  $X$  de um grafo  $G$  é uma *clique máxima* se qualquer outra clique de  $G$  tem número de vértices menor ou igual ao de  $X$ .

Uma  *$k$ -estrela* é uma árvore com  $k + 1$  vértices onde um vértice é universal. Tal

vértice é chamado *central*. Uma *garra* é uma 3-estrela. As arestas de uma garra, ou de uma estrela, em geral, são chamadas *braços*.

Se  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$  é um ciclo em  $G$  e  $e = (u, v) \in E(G)$ , então  $e$  é uma *corda* em  $C$  se  $u$  e  $v$  são vértices de  $C$ ,  $e \neq (v_{i-1}, v_i)$  e  $e \neq (v_0, v_k)$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Um ciclo sem cordas de comprimento  $k$  é denotado por  $C_k$ . Um grafo  $G$  é *cordal* se para todo ciclo  $C$  em  $G$  com pelo menos quatro vértices, existe uma corda em  $C$ .

Uma *coloração* de  $V(G)$  é uma partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes. O *número cromático* de  $G$  é a cardinalidade de uma menor tal partição. Um grafo  $G$  é *perfeito* quando todo subgrafo induzido de  $G$  possui uma coloração e uma clique de mesma cardinalidade. Neste caso, a coloração é mínima e a clique é máxima. É um fato conhecido que todo grafo cordal é perfeito [11].

Se relaxarmos a definição de grafo permitindo a existência de arestas repetidas temos a definição de *multigrafo*. Mais formalmente, um multigrafo é um par ordenado  $G = (V, E)$  onde  $V$  é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e  $E$  é um multiconjunto de pares não ordenados de vértices distintos chamados *arestas*. Utilizamos a nomenclatura usual para grafos também para multigrafos.

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* é um par ordenado  $D = (V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito e não vazio de vértices e  $E$  é um conjunto de pares ordenados de vértices distintos, chamados *arestas* ou *arcos*.

Um arco  $a = (u, v)$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$ , que são os extremos de  $a$ . Além disso, dizemos que a aresta  $a$  *sai* de  $u$  e *entra* em  $v$ . O *grau de entrada* de  $v$  é o número de arestas que entram em  $v$  enquanto que o *grau de saída* de  $v$  é o número de arestas que saem de  $v$ . Se o grau de entrada de  $v$  é nulo, dizemos que  $v$  é uma *fonte* enquanto que se o grau de saída de  $v$  é nulo,  $v$  é chamado *sumidouro*.

Seja  $D$  um digrafo. Se forem desconsideradas as direções das arestas de  $D$ , obtém-se um grafo, chamado *grafo subjacente* a  $D$ . Um digrafo  $D$  é uma *árvore direcionada* quando o seu grafo subjacente é uma árvore.

Uma *árvore enraizada* é uma árvore direcionada que possui uma única fonte, chamada de *raiz*, e todos os outros vértices têm grau de entrada igual a um.

## 2.2 Grafos de Interseção

Uma *família*  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  é uma coleção cujos elementos são conjuntos não necessariamente distintos e não vazios. O *tamanho* de  $\mathcal{F}$  é  $n$ . Uma família  $\mathcal{F}$  é *própria* se, para todo par de elementos  $F_i$  e  $F_j$  de  $\mathcal{F}$ , com  $i \neq j$ , um não é subconjunto do outro.

Uma família  $\mathcal{F}$  é uma *representação de interseção de um grafo*  $G$  ou, simplesmente, uma *representação* de  $G$ , se  $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$  e, para todo par de vértices distintos  $x$  e  $y$  em  $V(G)$ ,  $F_x \cap F_y \neq \emptyset$  se e somente se  $x$  e  $y$  são adjacentes em  $G$ . Neste caso,  $G$  é o *grafo de interseção* da família  $\mathcal{F}$ , denotado por  $\Omega(\mathcal{F})$ .

O problema de caracterizar os grafos de interseção de famílias de conjuntos tendo alguma topologia específica é interessante do ponto de vista teórico e, freqüentemente, tem aplicações no mundo real. Por exemplo, um *grafo de intervalo* é um grafo de interseção de uma família de intervalos da reta real.

Em alguns casos a topologia é dada considerando-se que os elementos da família são todos os subgrafos, de um determinado tipo, de um grafo. Por exemplo, um grafo é *grafo linha* se existe um grafo  $H$  tal que  $G = \Omega(E(H))$ , o que é denotado por  $G = L(H)$ . Ou seja,  $V(G) = E(H)$  e existe uma aresta  $(u, v)$  em  $G$  se e somente se  $u \neq v$  e as arestas correspondentes a  $u$  e  $v$  em  $H$  têm um vértice comum. Na figura 2.2, temos um grafo  $G$  e um grafo  $H$  tal que  $G = L(H)$ .

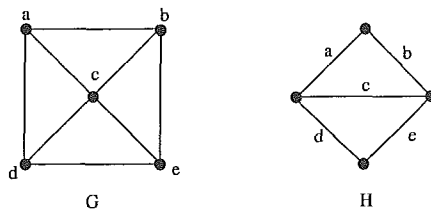


Figura 2.2: Exemplo de um grafo linha  $G$ .

Um resultado de Krausz [2] apresenta uma caracterização dos grafos linha.

**Teorema 2.2** *Um grafo  $G$  é grafo linha se e somente se existe uma família  $\mathcal{K}$  de completos em  $G$  tal que:*

1. *todo vértice de  $G$  está exatamente em dois completos de  $\mathcal{K}$  e*
2. *toda aresta de  $G$  está exatamente em um completo de  $\mathcal{K}$ .*

Seja  $\mathcal{C}(H)$  a família de todas as cliques de um grafo  $H$ . Um grafo  $G$  é *clique* se existe um grafo  $H$  tal que  $G = \Omega(\mathcal{C}(H))$ , o que é denotado por  $G = K(H)$ .

Em certas situações, a família considerada não necessita conter todos os subgrafos de um determinado tipo mas o grafo de onde estes subgrafos são tomados deve satisfazer à um determinado padrão. Neste caso, uma *representação* de  $G$  é dada pelo par  $(\mathcal{F}, H)$  onde os elementos da família  $\mathcal{F}$  são subgrafos de  $H$ , que é chamado grafo *base* da representação. Por exemplo, os grafos de interseção de famílias de subárvores de uma árvore são chamados de *grafos de subárvore*. Gavril, Walter e Buneman mostraram, independentemente, que um grafo é cordal se e somente se é grafo de subárvore [2]. A figura 2.3 mostra um grafo  $G$  e uma família  $\mathcal{P}$  de subárvores da árvore  $T$  tal que  $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$ .

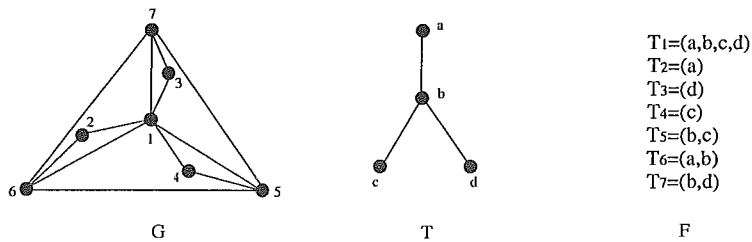


Figura 2.3: Exemplo de um grafo cordal e uma representação de  $G$ .

Outro exemplo são os grafos de intervalo, que podem ser considerados como os grafos de interseção de caminhos de um caminho.

Os grafos de interseção são bastante conhecidos e muito estudados. Um trabalho dedicado às classes de grafos de interseção é [2], onde pode ser encontrada uma vasta coletânea de resultados.

### 2.2.1 Grafos de Interseção em Vértices

Um grafo  $G$  é *UV* (*undirected vertex path graph*) se é o grafo de interseção de uma família de caminhos em uma árvore. Grafos *UV* são assim denominados para explicitar que a interseção dos caminhos é não vazia somente quando os caminhos contém pelo menos um vértice em comum e tanto a árvore quanto os caminhos são não direcionados.

A figura 2.4 mostra um grafo  $G$ , uma árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$ , de forma que o grafo de interseção de  $\mathcal{P}$  é  $G$ . Dado um grafo  $G$  que é *UV*, uma



árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$ , o par  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação UV* de  $G$  se  $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$ .

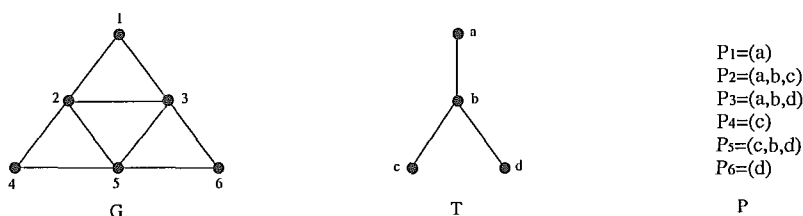


Figura 2.4: Exemplo de um grafo  $UV$  e uma representação  $UV$  de  $G$ .

Os grafos  $UV$ , também encontrados na literatura de teoria dos grafos como grafos  $VPT$ , foram caracterizados em [10] onde é fornecido um algoritmo eficiente de reconhecimento para esta classe.

Como os grafos cordais são os grafos de interseção de famílias de subárvores de uma árvore, no caso em que as subárvores consideradas são caminhos, temos a classe dos grafos  $UV$ . Assim, todo grafo  $UV$  é um grafo cordal.

Um grafo  $G$  é grafo  $RDV$  (*rooted directed vertex path graph*) se é o grafo de interseção de uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada. A figura 2.5 mostra um grafo  $G$  e uma família de caminhos direcionados  $\mathcal{P}$  em  $T$ , de modo que  $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$ . Dado um grafo  $G$  que é  $RDV$ , uma árvore enraizada  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$ , o par  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação RDV* de  $G$  se  $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$ .

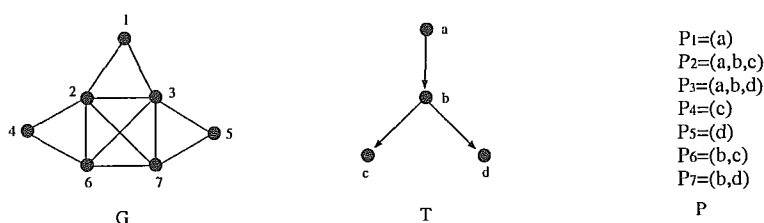


Figura 2.5: Exemplo de um grafo  $RDV$  e uma representação  $RDV$  de  $G$ .

Se desconsiderarmos as direções das arestas de  $T$  e dos caminhos em  $\mathcal{P}$ , uma representação  $RDV$  de um grafo se transforma em uma representação  $UV$  do mesmo grafo. Assim, todo grafo  $RDV$  é um grafo  $UV$ .

Gavril definiu os grafos  $RDV$  e apresentou um algoritmo polinomial para o seu reconhecimento em [9].

Como os grafos de intervalo são grafos de interseção de uma família de caminhos de um caminho e direcionar as arestas de um caminho de forma que todos seus subcaminhos também sejam direcionados é fácil, podemos concluir que todo grafo de intervalo é um grafo *RDV*.

Um grafo é grafo *DV* (*directed vertex path graph*) quando é o grafo de interseção de caminhos em uma árvore direcionada. A figura 2.6 mostra um grafo  $G$  e uma família de caminhos  $\mathcal{P}$  em uma árvore direcionada  $T$ , de forma que  $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$ . Dado um grafo  $G$  que é *DV*, uma árvore direcionada  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$ , o par  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação DV* de  $G$  se  $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$ .

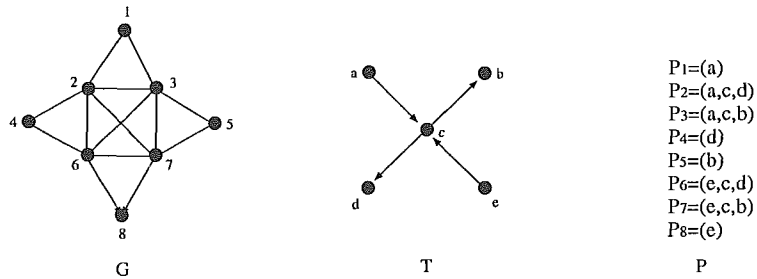


Figura 2.6: Exemplo de um grafo *DV* e uma representação *DV* de  $G$ .

Como toda representação *RDV* é uma representação *DV*, temos que todo grafo *RDV* é um grafo *DV*.

A figura 2.7 ilustra o seguinte teorema, que resume os resultados desta seção e mostra que todas as inclusões são próprias.

**Teorema 2.3** *Intervalo*  $\subset$  *RDV*  $\subset$  *DV*  $\subset$  *UV*  $\subset$  *Cordal*.

Um trabalho relevante sobre classes de grafos de caminho é [7], onde foram introduzidas as terminologias *UV*, *DV* e *RDV* e feitas diversas considerações a respeito destas classes e de outras classes tratadas neste texto.

## 2.3 Propriedade Helly

Dada uma família  $\mathcal{F}$ , dizemos que  $\mathcal{F}$  *satisfaz a propriedade Helly* se para toda subfamília  $\mathcal{F}' = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} \subseteq \mathcal{F}$  tal que, para todos  $1 \leq i < j \leq k$ ,  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$  temos  $\bigcap_{F_i \in \mathcal{F}'} F_i \neq \emptyset$ .

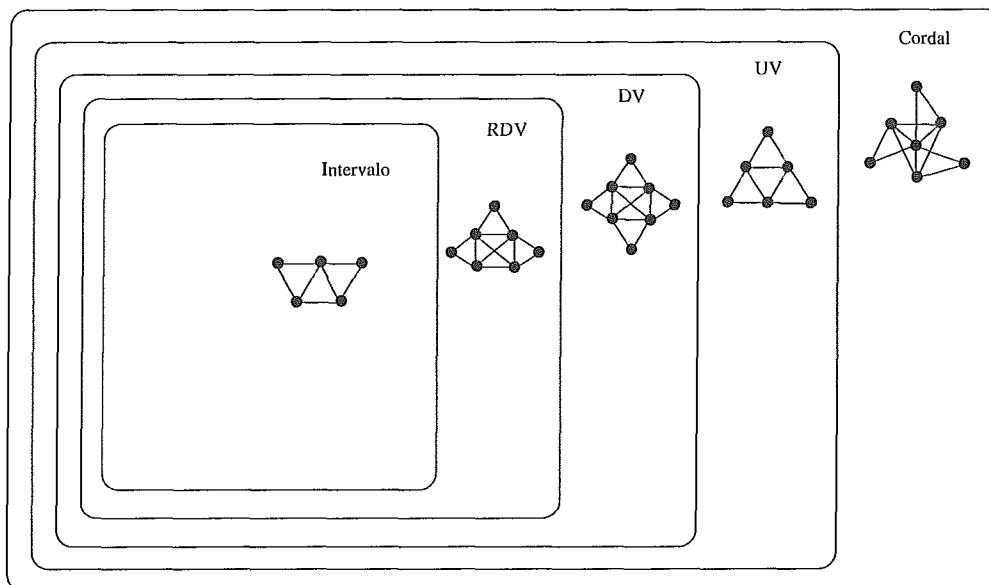


Figura 2.7: Diagrama das classes de grafos de caminho.

Por exemplo, seja  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ , onde  $F_1 = \{a, b, c\}$ ,  $F_2 = \{a, b\}$ ,  $F_3 = \{a, c, d\}$ ,  $F_4 = \{d\}$ . A família  $\mathcal{F}$  satisfaz a Propriedade Helly já que, para toda subfamília cujos elementos se interceptam dois a dois, tem-se que a interseção desta é não vazia.

Como um caminho pode ser definido tanto pelo conjunto de vértices quanto pelo de arestas nas quais ele passa, podemos considerar, em famílias de caminhos, a propriedade Helly em vértices ou em arestas. No primeiro caso, a interseção entre caminhos é constituída dos vértices pelos quais estes caminhos passam simultaneamente. No outro caso, a interseção é determinada pelo conjunto de arestas comuns aos caminhos.

Um resultado de Gavril [10], que aqui apresentamos como lema, diz respeito à famílias de caminhos em uma árvore e à propriedade Helly em vértices.

**Lema 2.4** *Uma família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly em vértices.*

*Prova:* Sejam  $\mathcal{P}$  uma família de caminhos em uma árvore  $T$  e  $\mathcal{P}' = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  uma subfamília de  $\mathcal{P}$ . Vamos provar, por indução em  $n$ , que se  $P_i \cap P_j \neq \emptyset$  para  $1 \leq i < j \leq n$ , então  $\bigcap_{P_i \in \mathcal{P}'} P_i \neq \emptyset$ .

Se  $n \leq 2$  e os elementos de  $\mathcal{P}'$  se interceptam, claramente a interseção de todos os caminhos de  $\mathcal{P}'$  é não vazia.

Seja  $\mathcal{P}'$  uma subfamília de  $\mathcal{P}$  com  $n > 2$  elementos tal que  $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ , para  $1 \leq i < j \leq n$ .

Pela hipótese de indução,

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} P_i \neq \emptyset, \bigcap_{i=2}^n P_i \neq \emptyset \text{ e } P_{n-1} \cap P_n \neq \emptyset.$$

Além disso, os três caminhos acima descritos se interceptam dois a dois e têm interseção não vazia, pois, caso contrário, haveria um ciclo em  $T$ .

Como esta interseção está contida na interseção de  $\mathcal{P}'$ , temos que  $\bigcap_{P_i \in \mathcal{P}'} P_i \neq \emptyset$ .

Portanto,  $\mathcal{P}$  satisfaz a propriedade Helly. ■

Também pode-se mostrar, usando um argumento similar, que famílias de subárvores de uma árvore satisfazem a propriedade Helly em vértices. Note que se considerarmos a interseção em arestas de caminhos em uma árvore, então a família de caminhos pode não satisfazer a propriedade Helly. Na figura 1.1 temos uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em uma árvore  $T$  onde  $\mathcal{P}$  não satisfaz a propriedade Helly.

Observamos que a família das cliques de um grafo não necessariamente satisfaz a propriedade Helly. Assim é natural considerar a classe *Clique-Helly*, que é a classe dos grafos cuja família de cliques satisfaz a propriedade Helly. Na figura 2.8 tem um exemplo de grafo que é clique-Helly e outro que não é clique-Helly. Maiores detalhes e bibliografia sobre esta classe podem ser obtidos em [2].

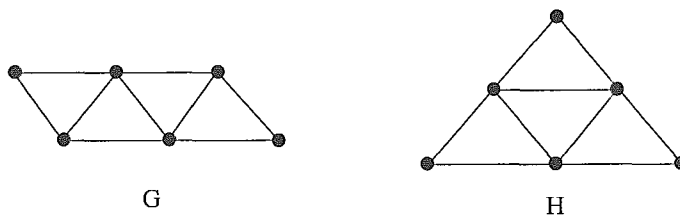


Figura 2.8: Um grafo  $G$  que é Clique-Helly e um grafo  $H$  que não é.

## 2.4 Número Helly Forte

Uma família  $\mathcal{F}$  tem *número Helly*  $h$  se  $h$  é o menor número tal que para toda subfamília  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  com  $\bigcap_{F_i \in \mathcal{F}'} F_i = \emptyset$ , tem-se que existem  $h$  elementos de  $\mathcal{F}'$  cuja interseção é vazia.

Uma família  $\mathcal{F}$  é dita ter *número Helly forte*  $s$  se  $s$  é o menor número tal que para toda subfamília  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$  existem  $s$  elementos de  $\mathcal{F}'$  cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{F}'$ .

Por exemplo, a família  $\mathcal{F} = \{F_1 = \{a, b, d\}, F_2 = \{a, c, d\}, F_3 = \{b, c, d\}, F_4 = \{a\}\}$  tem número Helly forte três e número Helly 2, pois para qualquer subfamília  $\mathcal{F}'$  de  $\mathcal{F}$  existem três elementos de  $\mathcal{F}'$  cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{F}'$ . Além disso, se tomarmos uma subfamília  $\mathcal{F}'$  cuja interseção é vazia, então existem dois elementos de  $\mathcal{F}'$  cuja interseção é vazia.

A pergunta natural a ser feita é sobre as relações entre estes parâmetros e entre eles e a propriedade Helly. Alguns resultados são imediatos. Por exemplo, como a noção de número Helly forte generaliza a de número Helly temos que o número Helly de qualquer família é menor ou igual do que seu número Helly forte.

Outro resultado a ser observado é que se uma família satisfaz a propriedade Helly, então ela tem número Helly no máximo 2. De fato, em caso contrário, existiria uma subfamília que tem interseção vazia e não possui dois elementos cuja interseção seja vazia. Mas isto significa que os elementos da subfamília se interceptam dois a dois e, como a propriedade Helly é satisfeita, a interseção da subfamília é não vazia, uma contradição. Este é o caso, por exemplo, de uma família de subárvores de uma árvore que, desta forma, tem número Helly no máximo 2. Observe ainda que se todas as subfamílias de uma família têm número Helly no máximo 2, então a família satisfaz a propriedade Helly. De fato, em caso contrário, existiria uma subfamília com interseção vazia, cujos elementos se interceptam dois a dois, uma contradição pois, como a subfamília tem número Helly no máximo 2, deveriam existir dois elementos desta cuja interseção fosse vazia.

Os próximos teoremas fornecem cotas superiores para o número Helly forte de famílias de subgrafos em uma árvore.

**Teorema 2.5 (Golumbic e Jamison [6])** *Uma família de subárvores de uma árvore com  $k$  folhas tem número Helly forte no máximo  $k$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{T}$  uma subfamília de uma família de subárvores de uma árvore  $T$  com  $k$  folhas. Queremos mostrar que existem  $k$  subárvores de  $\mathcal{T}$  cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{T}$ .

Seja  $U = \bigcap_{T_i \in \mathcal{T}} T_i$ . Se  $U = \emptyset$ , como subárvores de uma árvore têm número Helly no máximo 2, existem duas subárvores em  $\mathcal{T}$  cuja interseção é vazia. Como o número de folhas de uma árvore é maior ou igual a dois, temos que  $2 \leq k$  e o resultado é verdadeiro.

Suponha, agora, que  $U \neq \emptyset$ . Como  $U$  é subárvore de  $T$ , o número de folhas de  $U$  é menor ou igual ao número de folhas de  $T$ . Para cada folha  $u$  de  $U$ , considere o conjunto  $N(u)$  dos vizinhos de  $u$  em  $T$  que não pertencem à  $U$ .

Observe que se  $u$  e  $v$  são folhas distintas de  $U$ , então  $N(u) \cap N(v) = \emptyset$  pois  $T$  é árvore. E que a soma do número de elementos de todos os conjuntos  $N(u)$ , onde  $u$  é folha de  $U$ , é menor ou igual ao número de folhas de  $T$ . Além disso, para cada aresta  $e$  incidente à uma folha  $u$  de  $U$  e à  $N(u)$ , existe uma subárvore  $T_e$  de  $\mathcal{T}$  que não contém  $e$ , pois, em caso contrário,  $e$  estaria em  $U$ . Considere agora a subfamília formada por todas estas subárvores  $T_e$ . Esta subfamília tem, no máximo,  $k$  subárvores e sua interseção é igual à  $U$ . De fato, como cada  $T_e$  pertence à  $\mathcal{T}$ , temos que  $U$  é subárvore de  $\bigcap T_e$ . Por outro lado, como para cada aresta  $e$  incidente à algum vértice de  $U$  e à  $N(u)$ , existe ao menos uma árvore  $T_e$  que não contém  $e$  e como  $\bigcap T_e$  é subárvore de  $T$ , temos que  $U = \bigcap T_e$ . ■

**Corolário 2.6 (Golumbic e Jamison [6])** *Uma família de intervalos na reta tem número Helly forte no máximo 2.*

*Prova:* Uma família de intervalos na reta pode ser vista como uma família de subcaminhos de um caminho, que é uma árvore com duas folhas. Pelo teorema 2.5, esta família tem número Helly forte no máximo 2. ■

**Teorema 2.7 (Golumbic e Jamison [6])** *Uma família de caminhos em uma árvore tem número Helly forte no máximo 3.*

*Prova:* Seja  $\mathcal{P}$  uma subfamília de uma família de caminhos em uma árvore  $T$ . Queremos mostrar que existem três caminhos em  $\mathcal{P}$  cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{P}$ .

Seja  $P$  um caminho de  $\mathcal{P}$ . Observe que a interseção de  $\mathcal{P}$  está contida em  $P$ . Defina, para cada caminho  $Q_i$  de  $\mathcal{P}$ ,  $Q'_i = Q_i \cap P$  e considere  $\mathcal{P}'$  a família formada por todos os caminhos  $Q'$ . Observe que a interseção de  $\mathcal{P}'$  é igual à interseção de  $\mathcal{P}$ .

Temos agora uma família  $\mathcal{P}'$  de subcaminhos de um caminho que, pelo corolário 2.6, tem número Helly forte no máximo 2. Portanto, existem dois caminhos  $Q'_i$  e  $Q'_j$  de  $\mathcal{P}'$  cuja interseção é igual à interseção de todos os elementos de  $\mathcal{P}'$ . Logo,  $Q'_i \cap Q'_j = \bigcap_{P_i \in \mathcal{P}} P_i$ . Como  $Q'_i \cap Q'_j = P \cap Q_i \cap Q_j$ , temos que,  $P \cap Q_i \cap Q_j = \bigcap_{P_i \in \mathcal{P}} P_i$ . Portanto,  $\mathcal{P}$  tem número Helly forte menor ou igual a três. ■

Observamos que existe uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em uma árvore tal que não se pode obter a interseção de toda a família tomando-se apenas dois caminhos de  $\mathcal{P}$ . De fato, considerando a família  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$  da figura 2.9, temos que a interseção de quaisquer dois caminhos em  $\mathcal{P}$  é diferente da interseção de  $\mathcal{P}$ .

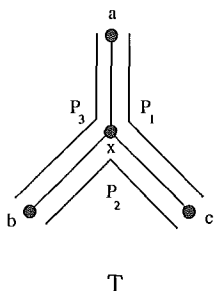


Figura 2.9: Família de caminhos com número Helly forte 3.

# Capítulo 3

## A classe $UE$ e subclasses

Como já observamos no capítulo anterior, um caminho é definido tanto pelo seu conjunto de vértices quanto pelo conjunto das arestas por onde ele passa. Assim, dado um grafo  $H$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $H$ , a interseção dos caminhos de  $\mathcal{P}$  pode ser considerada de duas maneiras. No primeiro caso, isto é, quando a interseção é determinada pelo conjunto de vértices comuns aos caminhos, dizemos que os caminhos se *interseptam em vértices* e denotamos o grafo de interseção de  $\mathcal{P}$  por  $\Omega_v(\mathcal{P}, H)$ . Enquanto que quando a interseção dos caminhos é dada pelo conjunto das arestas comuns aos caminhos, dizemos que os caminhos se *interseptam em arestas* e denotamos o grafo de interseção de  $\mathcal{P}$  por  $\Omega_e(\mathcal{P}, H)$ .

Neste capítulo consideramos a classe dos grafos  $UE$ , que são os grafos de interseção em arestas de caminhos em uma árvore, ou seja, os grafos  $G$  para os quais existem uma árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$  tais que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ . Apresentamos alguns resultados estruturais e algumas de suas subclasses.

Na primeira seção, apresentamos a classe dos grafos  $UE$  e algumas de suas subclasses formando uma hierarquia. Na seção 3.2 mostramos que algumas variações naturais na definição dos grafos  $UE$  não produzem classes especiais de grafos. Na seção seguinte, analisamos a representação dos ciclos sem cordas e apresentamos, baseados nesta análise, alguns subgrafos proibidos para a classe  $UE$ . Na seção 3.4 apresentamos a classe dos grafos  $UEH$ , que são os grafos de interseção em arestas de caminhos em árvores, onde a família de caminhos satisfaz a propriedade Helly em arestas. Esta subclasse é tratada com destaque por possuir propriedades particulares e resultados próprios. Na seção seguinte, classificamos as cliques dos grafos



$UE$  e  $UEH$  e mostramos que a família de cliques de um grafo  $UE$  tem número Helly forte no máximo quatro e tamanho polinomial. Na seção 3.6 apresentamos um teorema de caracterização dos grafos  $UEH$  utilizando a noção de árvore característica. Encerramos o capítulo definindo as classes  $UE$  Local e  $UEH$  Local, que são subclasses obtidas quando o grafo base da representação é uma estrela. Estas classes desempenham um papel fundamental no estudo dos grafos  $UE$  e têm uma caracterização em termos de grafos linha de multigrafos.

### 3.1 A Classe $UE$

Um grafo  $G$  é  $UE$  (*undirected edge path graph*) se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore.

A figura 3.1 mostra um grafo  $G$ , uma árvore  $T$  e uma família de caminhos  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$  em  $T$ , de forma que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ . Se  $\mathcal{P}$  é uma família de caminhos de uma árvore  $T$  e  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$  dizemos que  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação  $UE$*  de  $G$  e que  $T$  é uma *árvore de representação  $UE$*  de  $G$ .

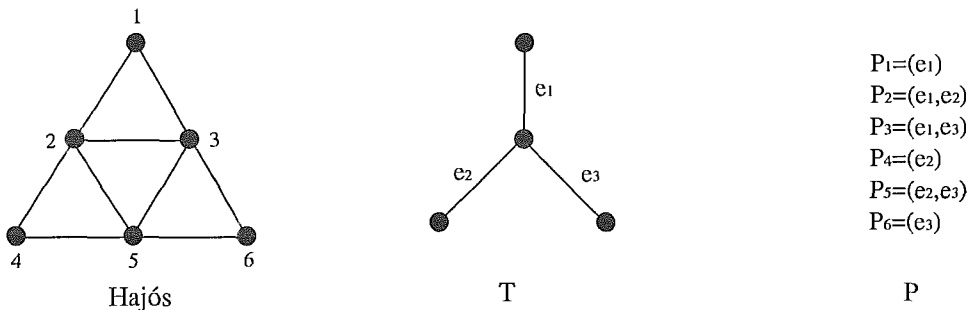


Figura 3.1: Grafo de Hajós e uma representação  $UE$  deste grafo.

Observamos que a classe de grafos  $UE$  é *hereditária*, ou seja, se um grafo  $G$  é  $UE$  então todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$  também é  $UE$ . De fato, se  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$  basta tomarmos para a representação  $UE$  de  $H$ , os caminhos de  $\mathcal{P}$  que correspondem à vértices de  $H$  e a mesma árvore  $T$ .

Os grafos  $UE$  foram introduzidos por Syslo [14], em 1978, onde foram denominados de grafos *ciclo fundamental*. Seu estudo foi motivado pelo problema de acrescentar o maior conjunto possível de arestas à uma árvore geradora de um grafo de modo que os ciclos formados não tenham interseção. Para cada aresta acrescentada à árvore considere o caminho em  $T$  entre seus extremos. O grafo de interseção

em arestas desta família de caminhos é um grafo  $UE$  e resolver o problema proposto é determinar um conjunto independente máximo neste grafo. Os ciclos formados a partir de uma árvore geradora de um grafo pelo acréscimo de uma aresta são chamados *ciclos fundamentais*, daí o nome da classe proposto por Syslo. Ainda em [14], Syslo conjecturou que  $UE \cap Cordal = UE \cap UV$ . Uma prova para esta conjectura foi apresentada por ele em 1985 [15]. Neste artigo, os grafos ciclo fundamental foram denominados de grafos  $EPT$ , denominação proposta por Golubic e Jamison [6, 5] e também utilizada por Tarjan [17], em 1985.

Golubic e Jamison [6] apresentaram vários resultados a respeito da classe  $UE$ . Estes resultados são referentes às cliques, à estrutura dos grafos, ao comportamento da classe para alguns problemas em grafos e a relação com a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos. Os mesmos autores, em [5], provaram que o problema do reconhecimento de grafos  $UE$  é NP-Completo. Tarjan considerou a decomposição por cliques destes grafos em [17].

Finalmente, em 1986, Monma e Wei [7] publicaram o trabalho mais completo, até então, sobre as classes de grafos de interseção de caminhos em uma árvore onde uniformizaram a terminologia sobre estas classes e introduziram a nomenclatura  $UE$ . Além disso, caracterizaram os grafos  $UE \cap Cordal$  e as subclasses  $DE$ ,  $RDE$  e  $UEH$ , apresentaram uma série de resultados sobre estas classes, além de tratar das classes de grafos de interseção em vértices de caminhos em árvores.

### 3.1.1 Os Grafos UE Próprios

No estudo de grafos de interseção é natural considerar as classes definidas por famílias próprias e por famílias que satisfazem a propriedade Helly. Na seção 3.4 trataremos do caso da propriedade Helly. Nesta seção estudaremos o caso das famílias próprias.

Diferente do que acontece com as classes dos grafos de intervalo, a restrição à famílias próprias não leva à uma subclasse própria da classe dos grafos  $UE$ , como mostra o lema a seguir.

**Lema 3.1** *Todo grafo  $UE$  é grafo de interseção em arestas de uma família própria de caminhos em uma árvore.*

*Prova:* Seja  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$  um grafo *UE*. Se  $\mathcal{P}$  é uma família própria, nada há a fazer. Suponha, então que existem caminhos  $P$  e  $Q$  de  $\mathcal{P}$  tais que  $P \subset Q$ . Seja  $x$  um extremo de  $P$ . Acrescente a  $T$  um novo vértice  $y$  e a aresta  $(x, y)$  obtendo  $T'$ . Acrescente a  $P$  a aresta  $(x, y)$  obtendo o caminho  $P'$ . Observe que  $P'$  não está contido em  $Q$  e que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}', T')$ , onde  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{P\} \cup \{P'\}$ . Claramente este processo pode ser repetido até uma família própria ser obtida. ■

### 3.1.2 As Subclasses *DE* e *RDE*

Um grafo é *DE* (*directed edge path graph*) se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos direcionados em uma árvore direcionada.

A figura 3.2 mostra um grafo  $G$ , uma família de caminhos direcionados  $\mathcal{P}$  e uma árvore direcionada  $T$ , de modo que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ . Dado um grafo  $G$  que é *DE*, uma árvore direcionada  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$ , o par  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação DE* de  $G$  se  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ .



Figura 3.2: Grafo  $G$  e uma representação *DE* correspondente.

Observe que se desconsiderarmos as direções das arestas de  $T$  e dos caminhos em  $\mathcal{P}$ , uma representação *DE* de um grafo  $G$  transforma-se em uma representação *UE* de  $G$ . Logo,  $DE \subseteq UE$ .

Um grafo é *RDE* (*rooted directed edge path graph*) se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada.

Por exemplo, o grafo  $G$  da figura 3.3 é *RDE* já que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ , onde  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ . Seja  $G$  um grafo *RDE*,  $T$  uma árvore enraizada e  $\mathcal{P}$  uma família de caminhos em  $T$ . Se  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$  dizemos que  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação RDE* de  $G$ .

Como uma representação *RDE* de um determinado grafo  $G$  também é uma representação *DE* do mesmo grafo, podemos concluir que  $RDE \subseteq DE$ .

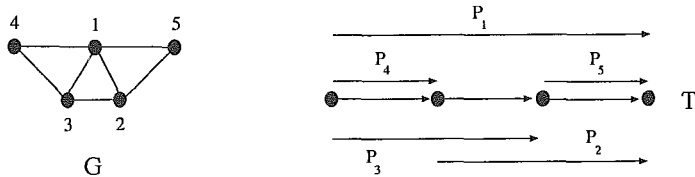


Figura 3.3: Grafo  $G$  e uma representação  $RDE$  correspondente.

Exemplos de grafos  $RDE$  e, conseqüentemente,  $DE$  e  $UE$  são as árvores, como mostra o lema seguinte.

**Lema 3.2** *Toda árvore é RDE.*

*Prova:* A prova é por indução no número de vértices do grafo.

Se  $G$  é uma árvore com apenas um ou dois vértices, é fácil ver que existe uma árvore enraizada  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos direcionados em  $T$  tal que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ .

Seja  $G$  uma árvore com  $n$  vértices e  $x$  uma folha de  $G$ . Pela hipótese de indução, para  $G \setminus \{x\}$  existe uma árvore enraizada  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos direcionados em  $T$  tais que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ .

Como  $x$  é folha, existe um único vértice  $y$  de  $G$  adjacente a  $x$ . O vértice  $y$  corresponde a um caminho  $P_y$  de  $\mathcal{P}$ . Acrescente à árvore  $T$  um novo vértice  $w$  adjacente ao último vértice  $u$  de  $P_y$ , obtendo uma árvore  $T'$ . Acrescente a  $P_y$  a nova aresta direcionada  $(u, w)$ , obtendo o caminho direcionado  $P'_y$ . O caminho  $P_x$  é formado apenas pela aresta  $(u, w)$ . A nova família  $\mathcal{P}'$  é composta por todos os caminhos de  $\mathcal{P}$  que não foram modificados,  $P'_y$  e  $P_x$ . Assim,  $G = \Omega_e(\mathcal{P}', T')$ . ■

O seguinte teorema resume os resultados desta seção. As figuras 2.7 e 6.10 em conjunto com resultados do capítulo 6 mostram que as inclusões são próprias.

**Teorema 3.3** *Intervalo  $\subset RDV = RDE \subset DE \subset UE$ . Além disso, toda árvore é um grafo RDE.*

## 3.2 Variantes da Interseção em Arestas

Se considerarmos a interseção em vértices de subárvores de uma árvore, temos exatamente a classe dos grafos cordais. Uma questão natural é a análise da interseção em arestas de subárvores de uma árvore. Outro caso a analisar é o da interseção de uma família de caminhos em um grafo qualquer, seja esta em arestas ou em vértices. As proposições 3.4 e 3.6 mostram que, nos casos citados, nenhuma nova classe é criada e os grafos em questão são todos os grafos.

**Proposição 3.4 (Golumbic e Jamison [6])** *Todo grafo é grafo de interseção em arestas de caminhos em um grafo.*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo. Queremos mostrar que existem  $\mathcal{P}$  e  $H$  tais que  $H$  é um grafo e  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{|V(G)|}\}$  é uma família de caminhos em  $H$ , de modo que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, H)$ .

Contruímos  $H$  como segue:

À cada aresta  $e$  de  $G$  correspondem dois vértices adjacentes em  $H$  e a cada vértice  $v$  de  $G$  correspondem  $d(v) + 1$  vértices em  $H$ , formando um conjunto independente  $S_v$ .

As outras arestas de  $H$  são dadas simultaneamente com a construção da família de caminhos  $\mathcal{P}$ . Para cada  $v$  de  $G$ , o caminho  $P_v$  passa alternadamente por cada vértice de  $S_v$  e pelos dois vértices adjacentes que correspondem à cada uma das arestas incidentes a  $v$  em  $G$ .

Na figura 3.4 temos o grafo  $H$  construído da maneira descrita, a partir do grafo  $G$ . O caminho  $P_3$ , por exemplo, passa por cada vértice de  $S_3$  e pelas arestas  $a'$ ,  $c'$  e  $e'$ , já que as arestas incidentes ao vértice 3 em  $G$  são  $a$ ,  $c$  e  $e$ . A construção de  $P_3$  define as arestas de  $H$  entre os vértices de  $S_3$  e os extremos das arestas de  $a'$ ,  $c'$  e  $e'$ .

Por construção,  $|\mathcal{P}| = |V(G)|$ . Falta mostrar que existe uma aresta  $(v, w)$  em  $G$  se e somente se  $P_v$  e  $P_w$  passam por uma mesma aresta em  $H$ .

Seja  $e = (v, w)$  uma aresta de  $G$ . Em  $H$ , existe uma aresta  $e'$  correspondente à  $e$ . Além disso,  $P_v$  e  $P_w$ , por construção, passam por  $e'$ , já que a aresta  $(v, w)$  é incidente a  $v$  e a  $w$ . Por outro lado, se  $P_v$  e  $P_w$  passam por uma mesma aresta, esta não tem

nenhum de seus extremos em  $S_v$  ou em  $S_w$ , logo, é uma aresta  $e'$  correspondente à uma aresta  $e$  de  $G$ . Por construção,  $e$  é incidente a  $v$  e a  $w$ , conseqüentemente, existe a aresta  $(v, w)$  em  $G$ . Portanto,  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, H)$ . ■

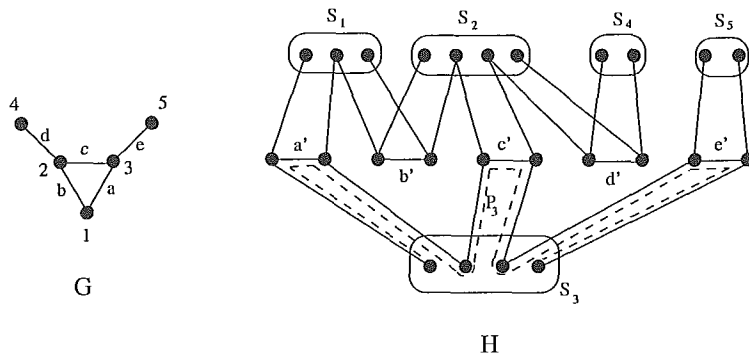


Figura 3.4: Grafo  $G$  e grafo  $H$  obtido pela construção descrita na proposição 3.4.

Observe que considerando interseção em vértices de famílias de caminhos, a construção descrita na proposição 3.4 fornece, dado um grafo  $G$ , um grafo  $H$  tal que  $G = \Omega_v(\mathcal{P}, H)$ . Sendo assim, temos:

**Corolário 3.5** *Todo grafo é grafo de interseção em vértices de caminhos em um grafo.*

**Proposição 3.6 (Golumbic e Jamison [6])** *Todo grafo é grafo de interseção em arestas de subárvores de uma árvore.*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo. Queremos mostrar que existe uma família de subárvores  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_{|V(G)|}\}$  de uma árvore  $T$ , tal que  $G = \Omega_e(\mathcal{T}, T)$ .

Seja  $T$  a estrela cujas arestas estão em correspondência com as arestas de  $G$ . Cada  $T_i$  será formada pelas arestas de  $T$  correspondentes às de  $G$  incidentes ao vértice  $i$ . Na figura 3.5 temos um exemplo desta construção.

Por construção, o número de subárvores de  $\mathcal{T}$  é igual ao número de vértices de  $G$ . Além disso, uma aresta  $e$  de  $T$  está em duas subárvores  $T_v$  e  $T_w$  se e somente se a aresta de  $G$  correspondente à  $e$  tem  $v$  e  $w$  como extremos, ou seja, quando existe a aresta  $(v, w)$  em  $G$ . Portanto,  $G = \Omega_e(\mathcal{T}, T)$ . ■

Observe que na prova acima  $\mathcal{T}$  é uma família de subestrelas de uma estrela, assim temos:

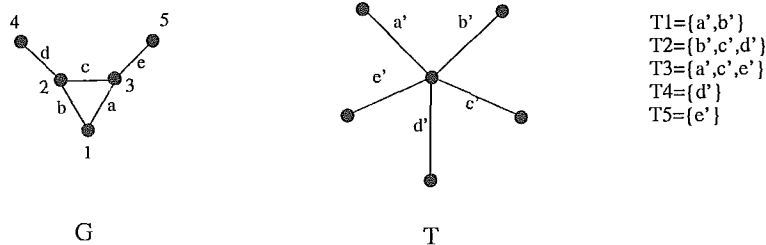


Figura 3.5: Grafo  $G$  e representação  $(\mathcal{T}, T)$  onde  $T$  é uma estrela.

**Corolário 3.7** *Todo grafo é grafo de interseção em arestas de subestrelas de uma estrela.*

### 3.3 Ciclos nos Grafos UE

Nesta seção descrevemos como os ciclos sem cordas de um grafo  $UE$  são representados, investigamos a adjacência de um vértice a um ciclo sem cordas e, através destes resultados, fornecemos exemplos de grafos que não são  $UE$ .

A figura 3.6 mostra uma representação  $UE$  de um ciclo sem cordas com  $n$  vértices.

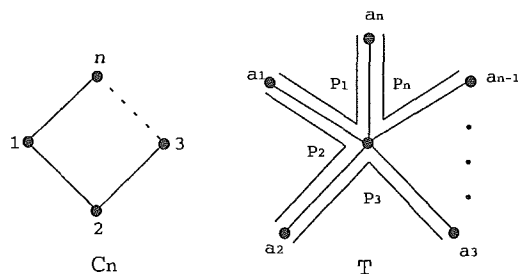


Figura 3.6: Representação  $UE$  de um  $C_n$ .

O teorema seguinte mostra que a representação  $UE$  de um ciclo sem cordas com  $n$  vértices, onde  $n \geq 4$ , mostrada na figura 3.6 é, essencialmente, única.

**Teorema 3.8 (Golumbic e Jamison [6])** *Seja  $G$  um grafo  $UE$ . Se  $G$  contém um ciclo  $C_n$  sem cordas, com  $n \geq 4$ , então toda árvore de representação  $UE$  de  $G$  contém uma estrela de centro  $v$  e arestas  $(v, a_i)$ , com  $1 \leq i \leq n$ , onde cada caminho  $P_i$  correspondente à um vértice  $v_i$  de  $C_n$  contém as arestas  $(v, a_{i-1})$  e  $(v, a_i)$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo  $UE$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de  $G$ . Seja  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ ,  $n \geq 4$ , um ciclo sem cordas em  $G$  e  $\mathcal{P}' = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  a subfamília de  $\mathcal{P}$  formada pelos caminhos correspondentes aos vértices de  $C$ .

Sejam  $v_i$  e  $v_j$  vértices não consecutivos em  $C$ . Mostraremos que  $P_i$  e  $P_j$  compartilham um vértice. Suponha, por absurdo que  $P_i$  e  $P_j$  não têm um vértice em comum. Então, na árvore  $T$ , existe pelo menos uma aresta  $e$  que pertence a todo caminho entre um vértice de  $P_i$  e um de  $P_j$  e, além disso,  $e$  não pertence a  $P_i$  e nem a  $P_j$ . Em  $C$ , um caminho entre  $v_i$  e  $v_j$  corresponde à uma sequência de caminhos em  $\mathcal{P}'$  de modo que, nesta sequência, cada caminho intercepta o seu antecessor e o seu sucessor. Assim, existirá um caminho  $P_k$  nesta sequência contendo a aresta  $e$ , já que a união destes caminhos contém todas as arestas do caminho entre  $P_i$  e  $P_j$ , inclusive  $e$ . Mas existem dois caminhos em  $C$  entre  $v_i$  e  $v_j$ . O raciocínio anterior aplicado ao segundo caminho implica que existe um caminho  $P_l$ , com  $l \neq k$ , de modo que  $e$  pertence a  $P_l$ . Mas isso significa que  $v_k$  e  $v_l$  são adjacentes e há uma corda no ciclo, uma contradição.

Temos então, que a subfamília  $\mathcal{P}'$  satisfaz à propriedade de que os seus elementos compartilham, dois a dois, um vértice. Além disso, pelo lema 2.4, uma família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly em vértices. Então, existe um vértice  $v$  que pertence a todos os caminhos de  $\mathcal{P}'$ .

Agora, escolhendo vértices  $a_i$  tais que  $(v, a_i) \in P_i \cap P_{i+1}$ , obtemos uma estrela com  $n$  vértices em  $T$ , como mostra a figura 3.6. ■

Usando o teorema anterior, podemos obter exemplos de grafos que não são  $UE$  devido à impossibilidade de descrevermos um de seus ciclos sem cordas em uma representação  $UE$ . Um exemplo disto é o grafo  $P$ , complemento do caminho com seis vértices, mostrado na figura 3.7.

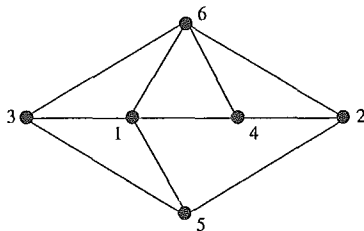


Figura 3.7: Grafo  $P$ , complemento do caminho  $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ .

Os vértices 2, 6, 3 e 5 formam um ciclo sem cordas e, pelo teorema 3.8, na árvore de representação  $UE$  de  $P$ , deve existir uma estrela com centro  $v$  e arestas  $e_1, e_2, e_3$  e  $e_4$  de modo que os caminhos correspondentes aos vértices do ciclo estão definidos



da seguinte forma:  $P_2 \supseteq (e_1, e_2)$ ,  $P_6 \supseteq (e_2, e_3)$ ,  $P_3 \supseteq (e_3, e_4)$  e  $P_5 \supseteq (e_1, e_4)$ .

O vértice 1 é adjacente aos vértices 3, 5 e 6 do ciclo. Logo,  $P_1$  deve conter as arestas  $e_3$  e  $e_4$ . Como o vértice 4 é adjacente a 1 e a 2, o caminho  $P_4$  deve conter as arestas  $e_1$  ou  $e_2$  e deve conter  $e_3$  ou  $e_4$ . Mas, para qualquer escolha, adjacências seriam acrescentadas no grafo. Logo, o grafo  $P$  não é  $UE$ .

Segue imediatamente do último teorema, o seguinte corolário.

**Corolário 3.9 (Golumbic e Jamison [6])** *Se  $G$  é um grafo  $UE$ , então, para todo ciclo  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  sem cordas, com  $n \geq 4$ , e para todo vértice  $w \notin C$ , exatamente uma das seguintes afirmações acontece:*

1.  $Adj(w) \cap C = \emptyset$ ;
2.  $Adj(w) \cap C = \{v_i\}$ , para algum  $i$ ;
3.  $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}\}$ , para algum  $i$ ;
4.  $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$ , para algum  $i$ ;
5.  $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}\}$ , para algum  $i$  e algum  $j$ , com  $j \neq i$  e  $j \neq i+1$ .

*Prova:* Seja  $G$  um grafo e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de  $G$ . Suponha que exista um ciclo sem cordas  $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$  em  $G$ . Pelo teorema 3.8, em  $T$  existe uma estrela  $S$  com centro  $v$  e arestas  $e_1, e_2, \dots, e_n$  onde cada caminho  $P_i$  correspondente à um vértice de  $C$  contém as arestas  $(v, a_{i-1})$  e  $(v, a_i)$ .

Seja  $w$  um vértice de  $G$  que não está em  $C$ . Em  $T$ , ou  $P_w$  não contém qualquer aresta da estrela em  $T$ , ou contém apenas uma aresta de  $S$ , ou duas arestas de  $S$  e, neste caso, pode conter duas arestas que estão em um caminho correspondente à um vértice de  $C$  ou não existem caminhos correspondente à vértices de  $C$  passando por estas arestas. E esta distribuição de casos culmina, justamente, nos casos explicitados no enunciado. ■

O corolário acima fornece uma maneira de identificar grafos que não são  $UE$ . Na figura 3.8 temos exemplos desta situação.

Observe que o grafo  $P$  da figura 3.7 satisfaz a condição dada no corolário 3.9. Logo, esta não é suficiente para que um grafo seja  $UE$ .

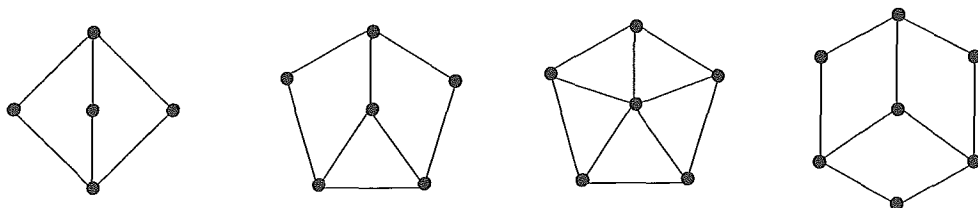


Figura 3.8: Grafos que não são  $UE$ .

**Teorema 3.10 (Golumbic e Jamison [6])** *Se  $G$  é um grafo  $UE$ , então seu complemento  $\overline{G}$  não contém um caminho sem cordas de comprimento  $k$ , com  $k \geq 6$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo  $UE$ . Se  $G$  tiver um caminho com pelo menos 6 vértices em seu complemento,  $G$  terá como subgrafo induzido grafo  $P$  da figura 3.7. Como  $P$  não é grafo  $UE$  e a classe dos grafos  $UE$  é hereditária, temos uma contradição. ■

Este teorema implica, diretamente, na propriedade a seguir.

**Corolário 3.11 (Golumbic e Jamison [6])** *Se  $G$  é um grafo  $UE$ , então  $G$  não contém o complemento de um ciclo com  $n$  vértices, para  $n \geq 7$ .*

Na figura 3.9 temos uma representação  $UE$  do grafo  $\overline{C_6}$ , mostrando que o valor de  $n$  dado no corolário 3.11 é o melhor possível.

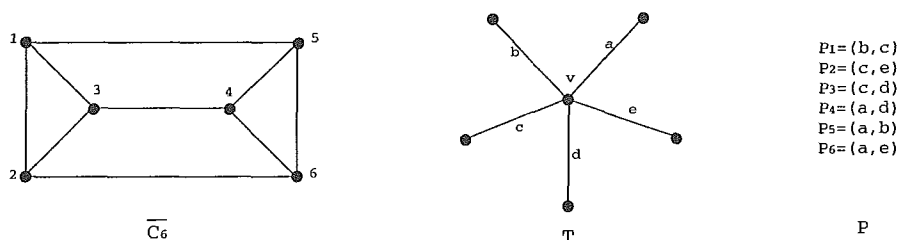


Figura 3.9: Representação  $UE$  de  $\overline{C_6}$ .

### 3.4 A Subclasse UEH

Um grafo  $G$  é *UE Helly*, ou simplesmente  $UEH$ , se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore, satisfazendo a propriedade Helly em arestas.

Na figura 3.10, por exemplo,  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação  $UEH$  do grafo  $G$ . Se  $\mathcal{P}$  é uma família de caminhos em uma árvore  $T$ , satisfazendo a propriedade Helly

em arestas, e  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ , dizemos que  $(\mathcal{P}, T)$  é uma *representação UEH* de  $G$ . Na figura 3.9 temos uma representação *UEH* do grafo  $\overline{C_6}$ .

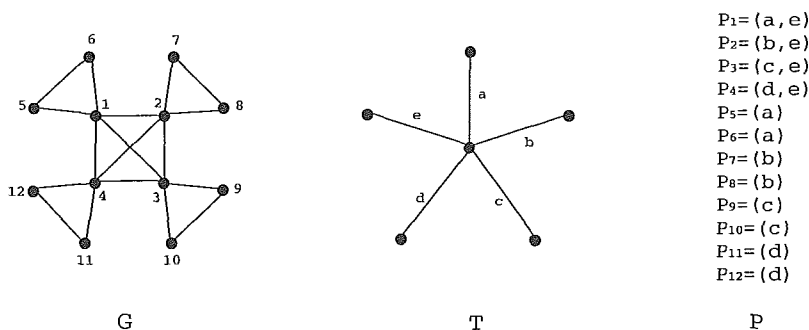


Figura 3.10: Grafo  $G$  e uma representação *UEH* correspondente.

Obviamente, todo grafo *UEH* é *UE*, mas a recíproca não é verdadeira. O grafo de Hajós, ilustrado na figura 3.11, é *UE* mas não é *UEH*. De fato, na figura 3.1 temos uma representação *UE* do grafo de Hajós. Observe que naquela representação  $P_2, P_3$  e  $P_5$  se interseptam em arestas dois a dois mas não possuem uma aresta em comum. Vamos agora mostrar que este grafo não pode ser representado por uma família de caminhos em uma árvore, satisfazendo a propriedade Helly em arestas.

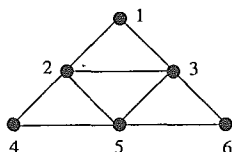


Figura 3.11: Hajós: exemplo de grafo *UE* que não é *UEH*.

Suponha que exista  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação *UEH* do grafo de Hajós, onde  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ . Observe que para a propriedade Helly ser satisfeita deve existir uma aresta  $(a, b)$  em  $T$  que pertence aos caminhos  $P_1, P_2$ , e  $P_3$ . Da mesma forma deve existir uma aresta  $(c, d)$  pertencente a  $P_2, P_3$  e  $P_5$  e uma outra  $(e, f)$  pertencente aos caminhos  $P_3, P_5$  e  $P_6$ . Como  $P_5$  passa pelas arestas  $(c, d)$  e  $(e, f)$  e não passa por  $(a, b)$ , pois  $P_5$  não tem aresta em comum com  $P_1$ , o único caminho de  $c$  a  $f$  em  $T$  não passa por  $(a, b)$ . Além disso, como  $P_2$  não tem aresta em comum com  $P_6$ , a aresta  $(e, f)$  não está no único caminho em  $T$  entre  $c$  e  $b$ . Logo, a aresta  $(c, d)$  tem que estar no caminho entre  $a$  e  $f$  em  $T$ , como mostra a figura 3.12.

Temos, então, um problema para determinar o caminho  $P_4$ , pois se este caminho

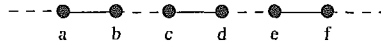


Figura 3.12: Posição das arestas  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  e  $(e, f)$  em  $T$ .

passar por qualquer aresta do caminho de  $a$  a  $f$  em  $T$ , obrigatoriamente, deverá passar por alguma aresta de  $P_3$ , mas os vértices 3 e 4 de  $G$  não são adjacentes. Logo só resta  $P_4$  estar na subárvore de  $T$  que contém o vértice  $a$  e todos os outros vértices  $v$  tais que exista um caminho entre  $a$  e  $v$  em  $T$  sem passar por  $b$  mas, neste caso,  $P_4$  não teria qualquer aresta em comum com  $P_5$ , ou na subárvore de  $T$  que contém o vértice  $f$  e todos os outros vértices  $u$  tais que exista um caminho entre  $f$  e  $u$  em  $T$  sem passar por  $e$  e o  $P_4$  não poderia passar por qualquer aresta de  $P_2$ . Como, em ambos casos, adjacências seriam perdidas, não é possível determinar o caminho  $P_4$ .

Pelo lema 2.4, a propriedade Helly em vértices é verdadeira para qualquer família de caminhos em uma árvore. Deste modo, uma definição análoga a  $UEH$  para grafos  $UV$  não determina uma nova classe de grafos, isto é,  $UV = UVH$ .

É importante ressaltar que todo grafo  $DE$  é um grafo  $UEH$  e a recíproca não é verdadeira pois o  $C_5$ , por exemplo é um grafo  $UEH$  que não é  $DE$ . A prova desta inclusão está no capítulo 6 que destinamos à análise das interseções entre as classes de grafos estudadas.

### 3.5 Cliques de um Grafo UE

Nesta seção são caracterizadas as cliques de um grafo  $UE$ . Tal caracterização implica no fato do número de cliques de um grafo  $UE$  ser polinomial.

Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de um grafo  $G$ . Seja  $e$  uma aresta de  $T$ , denotamos por  $P[e]$  a subfamília de  $\mathcal{P}$  formada pelos caminhos que passam por  $e$ . Seja  $k$  uma garra em  $T$ , denotamos por  $P[k]$  a subfamília de  $\mathcal{P}$  formada pelos caminhos que passam por exatamente duas arestas de  $k$ . Claramente, o conjunto de vértices de  $G$  correspondente a  $P[e]$  e a  $P[k]$  induz um completo em  $G$ . Uma clique de  $G$  correspondente à uma família  $P[e]$  é chamada de *clique aresta* e uma clique correspondente à uma família  $P[k]$ , que não é correspondente à uma  $P[e]$ , é chamada de *clique garra*. Observe que todos os caminhos de  $P[k]$  passam pelo centro da garra  $k$ . Chamamos de *conjunto de testemunhas* de  $k$  a um conjunto de

três caminhos de  $\mathcal{P}$  que estão em  $P[k]$  e não têm uma aresta em comum.

Por exemplo, na figura 3.13, a clique  $\{2, 3, 6\}$  de  $G$  é uma clique aresta já que corresponde à  $P[c]$ . A clique  $\{2, 5, 6\}$  é uma clique garra pois corresponde à  $P[k]$  onde  $k$  é a garra formada pelas arestas  $a, b$  e  $c$ . Observe que  $P[a]$  não corresponde à uma clique de  $G$  já que o completo formado pelos vértices correspondentes aos caminhos que passam por  $a$  está contido na clique  $\{2, 5, 6\}$ .

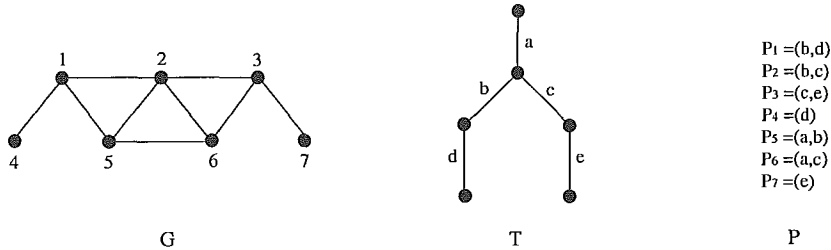


Figura 3.13: Exemplo de um grafo  $G$  e uma representação  $UE$  deste.

Observe que uma clique de  $G$  pode ser clique aresta ou clique garra dependendo da representação  $UE$  que está sendo considerada. Por exemplo, na figura 3.14, temos duas representações  $UE$  do grafo  $G$ . Se considerarmos a representação em  $T_1$ , então as cliques de  $G$  são cliques aresta. Se a representação for na árvore  $T_2$ , ambas são cliques garra.

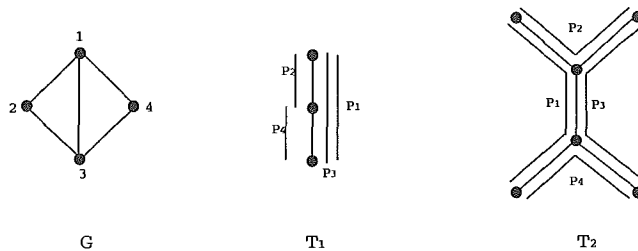


Figura 3.14: Grafo  $G$  e duas representações  $UE$  deste.

**Teorema 3.12 (Golumbic e Jamison [6])** *Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de um grafo  $G$ . Toda clique de  $G$  é clique aresta ou clique garra em  $(\mathcal{P}, T)$ .*

*Prova:* Seja  $C$  uma clique de  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ . Temos que  $C$  corresponde à uma subfamília  $\mathcal{P}'$  de  $\mathcal{P}$  cujos caminhos se interceptam em arestas dois a dois. Como os elementos de  $\mathcal{P}'$  são caminhos em uma árvore, pelo lema 2.4,  $\mathcal{P}'$  satisfaz a propriedade Helly em vértices e, ainda, pelo teorema 2.7,  $\mathcal{P}'$  tem número Helly forte no

máximo 3. Assim sendo, a interseção em vértices dos elementos de  $\mathcal{P}'$  é não vazia e basta tomarmos a interseção de três determinados caminhos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  para obter a interseção de  $\mathcal{P}'$ .

Seja  $Q = \bigcap_{P \in \mathcal{P}'} P = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ . Claramente,  $Q$  é um caminho em  $T$ . Temos, então, dois casos a analisar:  $Q$  contém uma aresta de  $T$  ou  $Q$  consiste de um único vértice de  $T$ .

Se  $Q$  passa por uma aresta  $e$ , então como  $C$  é clique,  $P[e] = \mathcal{P}'$  e  $C$  é clique aresta.

Se  $Q = \{v\}$  como  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  têm, dois a dois, uma aresta em comum, existe uma garra  $k$  em  $T$  formada pelas arestas  $(v, a)$ ,  $(v, b)$  e  $(v, c)$ , que são respectivamente arestas em  $P_1 \cap P_2$ ,  $P_2 \cap P_3$  e  $P_1 \cap P_3$ . Qualquer outro caminho de  $\mathcal{P}'$  intersepta em arestas  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  e passa por  $v$ . Logo, estes caminhos contém, cada um, duas das três arestas da garra  $k$  e  $\mathcal{P}' \subseteq P[k]$ . Portanto,  $C$  é clique garra, sendo  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  suas testemunhas. ■

Observe que se  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação  $UEH$  de um grafo  $G$ , onde  $T$  tem o menor número possível de arestas, então não existem cliques de  $G$  que são cliques garra em  $(\mathcal{P}, T)$ , já que os caminhos de  $\mathcal{P}$  satisfazem a propriedade Helly em arestas. Analogamente, se existe uma representação  $UE$  de  $G$  em que todas as cliques de  $G$  são cliques aresta,  $G$  é  $UEH$ .

Com a caracterização das cliques de um grafo  $UE$ , podemos avaliar o número de cliques de um grafo nesta classe e na classe  $UEH$ .

**Teorema 3.13** (Monma e Wei [7]) *Seja  $G = (V, E)$  um grafo  $UE$ . O número de cliques aresta de  $G$  é menor ou igual a  $2|V| - 3$  e o número de cliques garra é menor ou igual a  $\frac{|V|(|V|-1)}{2}$ .*

*Prova:* Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de um grafo  $G = (V, E)$  onde  $T$  tem o menor número possível de arestas.

O número de cliques aresta de  $G$  é menor ou igual ao número de arestas de  $T$ . Logo, basta provar que o número de arestas de  $T$  é menor ou igual a  $2|V| - 3$ , ou ainda, que o número de vértices de  $T$  é menor ou igual a  $2|V| - 2$ .

Sejam  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t_3$  o número de vértices de grau 1, grau 2 e grau maior ou igual a 3 de  $T$ , respectivamente.

Observe que, cada vértice de grau 1 em  $T$ , deve ser extremo de, pelo menos, dois caminhos de  $\mathcal{P}$  pois, em caso contrário, esta aresta poderia ser contraída, contradizendo a hipótese de que  $T$  tem o menor número de arestas possível. Pelo mesmo motivo, cada vértice de grau 2 em  $T$  é extremo de, pelo menos, dois caminhos de  $\mathcal{P}$ , cada um passando por apenas uma das arestas a ele incidentes. Logo,  $2t_1 + 2t_2$  é menor ou igual ao número de extremos de caminhos de  $\mathcal{P}$ , mas este valor é exatamente igual a duas vezes o número de caminhos de  $\mathcal{P}$ . Portanto,  $t_1 + t_2 \leq |V|$ .

Vamos provar, por indução em  $t_3$ , que  $t_3 \leq t_1 - 2$ .

Se  $t_3 = 0$ , como para toda árvore  $t_1 \geq 2$ , a desigualdade é verificada.

Suponha, agora, que  $t_3 > 0$ . Seja  $v$  um vértice de  $T$  tal que  $d(v) \geq 3$ . Considere as  $d(v)$  subárvores  $T_1, T_2, \dots, T_{d(v)}$  de  $T$ , onde cada  $T_i$  é induzida por  $v$ , seu vizinho  $u_i$  e por todos os vértices de  $T$  cujo único caminho a  $v$  passa por  $u_i$ . Sejam  $t_1^{(i)}$  e  $t_3^{(i)}$  o número de vértices de grau 1 e de grau maior ou igual a 3 em  $T_i$ , com  $1 \leq i \leq d(v)$ .

Observe que  $\sum_{i=1}^{d(v)} t_3^{(i)} = t_3 - 1$ , já que  $v$  é o único vértice de  $T$  com grau maior ou igual a 3 que tem esta característica modificada com a subdivisão de  $T$  em subárvores. Além disso,  $\sum_{i=1}^{d(v)} t_1^{(i)} = t_1 + d(v)$ , pois o vértice  $v$  tem grau 1 em toda subárvore  $T_i$ .

Pela hipótese de indução,  $t_3^{(i)} \leq t_1^{(i)} - 2$ ,  $1 \leq i \leq d(v)$ . Somando termo a termo estas desigualdades, temos que:

$$\sum_{i=1}^{d(v)} t_3^{(i)} \leq \sum_{i=1}^{d(v)} (t_1^{(i)} - 2).$$

Ou ainda,

$$\sum_{i=1}^{d(v)} t_3^{(i)} \leq \sum_{i=1}^{d(v)} t_1^{(i)} - 2d(v).$$

E então,  $t_3 - 1 \leq t_1 + d(v) - 2d(v) = t_1 - d(v)$ .

Como  $d(v) \geq 3$ , segue que  $t_3 \leq t_1 - 2$ .

Como  $t_1 + t_2 \leq |V|$  e  $t_3 \leq t_1 - 2$ , temos que  $t_1 + t_2 + t_3 \leq |V| + t_1 - 2$ .

Como o número de caminhos em  $\mathcal{P}$  é maior ou igual a duas vezes o valor de  $t_1$ ,

temos que  $t_1 \leq |V|$  e, conseqüentemente,  $t_1 + t_2 + t_3 \leq 2|V| - 2$ .

Assim, o número de vértices de  $T$  é menor ou igual a  $2|V| - 2$ . Vamos agora provar que o número de cliques garra de  $G$  em  $(\mathcal{P}, T)$  é menor ou igual a  $\frac{|V|(|V|-1)}{2}$ .

Observe que cada par de caminhos  $P_i$  e  $P_j$  de  $\mathcal{P}$  só pode fazer parte do conjunto de testemunhas de, no máximo, duas garras cujos centros devem ser vértices diferentes de  $T$ . Além disso, para cada par de cliques garra  $k_1$  e  $k_2$  que tem  $P_i$  e  $P_j$  entre suas testemunhas, existe um par de caminhos que não pode fazer parte de um mesmo conjunto de testemunhas, a saber, o terceiro caminho do conjunto de testemunhas de  $k_1$  e o terceiro de  $k_2$ .

Logo, o número de cliques garra de  $G$  é menor ou igual a  $\binom{|V|}{2} = \frac{|V|(|V|-1)}{2}$ . ■

O teorema anterior nos fornece uma cota superior para o número de cliques de um grafo  $UE$  em função do seu número de vértices, entretanto não é conhecido um exemplo de um grafo  $UE$  onde esta cota é atingida. A dificuldade em fornecer tal exemplo se deve ao fato de que ao analisarmos o número de cliques garra estamos considerando que para cada clique garra de  $G$  existem dois caminhos em  $\mathcal{P}$  que não estão no mesmo conjunto de testemunhas. Mas não é verdade que para cada par de caminhos de  $\mathcal{P}$  existe uma clique garra diferente em  $G$ . Além disso, contando o número de arestas de  $T$ , para estabelecer uma cota superior para o número de cliques aresta, estamos considerando também as arestas que compõem as garras.

Como conseqüência do teorema 3.13 temos que o número de cliques de um grafo  $UE$  é polinomial. Logo, um grafo  $UEH$  também tem um número polinomial de cliques. Porém, para esta classe de grafos, Monma e Wei [7] obtiveram uma cota superior melhor para o número de cliques do grafo.

**Teorema 3.14 (Monma e Wei [7])** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo  $UEH$ . O número de cliques de  $G$  é menor ou igual a  $\frac{3|V|-4}{2}$ .*

*Prova:* Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UEH$  de um grafo  $G = (V, E)$  onde  $T$  tem o menor número possível de arestas.

Como  $G$  tem somente cliques aresta, basta provar que o número de arestas de  $T$  é menor ou igual a  $\frac{3|V|-4}{2}$  ou que o número de vértices de  $T$  é menor ou igual a  $\frac{3|V|-2}{2}$ .



Sejam  $t_1, t_2, t_3$  e  $t_4$  o número de vértices de grau 1, grau 2, grau 3 e grau maior ou igual a 4 de  $T$ , respectivamente.

Usando o mesmo argumento do teorema anterior, conclui-se que cada vértice de grau 1 de  $T$  é extremo de, pelo menos, dois caminhos em  $\mathcal{P}$  e cada vértice de grau 2 é também extremo de, pelo menos, dois caminhos de  $\mathcal{P}$ . Vamos provar que cada vértice de grau 3 também tem esta propriedade.

Seja  $v$  um vértice de grau 3 em  $T$ . As três arestas incidentes a  $v$  correspondem à cliques em  $G$ , já que  $T$  tem o menor número possível de arestas. Logo, existe um caminho em cada clique que não está nas outras duas ao mesmo tempo e, como a subfamília formada por tais caminhos satisfaz a propriedade Helly em arestas,  $v$  é extremo de, pelo menos, dois caminhos.

Portanto,  $2t_1 + 2t_2 + 2t_3$  é menor ou igual ao número de extremos de caminhos de  $\mathcal{P}$  e, então,  $t_1 + t_2 + t_3 \leq |V|$ .

Vamos provar, por indução em  $t_4$ , que  $t_4 \leq \frac{t_1 - 2}{2}$ .

Se  $t_4 = 0$ , como  $t_1 \geq 2$  em qualquer árvore, a desigualdade é verificada.

Suponha que  $t_4 > 0$ . Seja  $v$  um vértice de  $T$  tal que  $d(v) \geq 4$ . Considere as  $d(v)$  subárvores  $T_1, T_2, \dots, T_{d(v)}$  de  $T$ , onde cada  $T_i$  é induzida por  $v$ , seu vizinho  $u_i$  e pelos vértices de  $T$  cujo único caminho até  $v$  passa por  $u_i$ . Sejam  $t_1^{(i)}$  e  $t_4^{(i)}$  o número de vértices de grau 1 e grau maior ou igual a 4 em  $T_i$ ,  $1 \leq i \leq d(v)$ .

Pela hipótese de indução,  $t_4^{(i)} \leq \frac{t_1^{(i)} - 2}{2}$ ,  $1 \leq i \leq d(v)$ . Somando termo a termo estas desigualdades, temos:

$$\sum_{i=1}^{d(v)} t_4^{(i)} \leq \sum_{i=1}^{d(v)} \left( \frac{t_1^{(i)} - 2}{2} \right).$$

Ou ainda,

$$\sum_{i=1}^{d(v)} t_4^{(i)} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d(v)} t_1^{(i)} - d(v).$$

Além disso, observe que  $\sum_{i=1}^{d(v)} t_4^{(i)} = t_4 - 1$ , já que  $v$  é o único vértice de  $T$  com grau maior ou igual a 3 que tem esta característica modificada com a subdivisão de  $T$  em subárvores, e  $\sum_{i=1}^{d(v)} t_1^{(i)} = t_1 + d(v)$  pois  $v$  tem grau 1 em cada  $T_i$ .

Logo,

$$t_4 - 1 \leq \frac{1}{2}(t_1 + d(v)) - d(v).$$

Ou seja,

$$t_4 \leq \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}d(v) + 1.$$

Como  $d(v) \geq 4$ , temos que:

$$t_4 \leq \frac{t_1}{2} - 1 = \frac{t_1 - 2}{2}.$$

Logo,  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \leq |V| + \frac{t_1}{2} - 1$ .

Como duas vezes o valor de  $t_1$  é menor ou igual ao número de extremos de caminhos em  $\mathcal{P}$ , temos que  $t_1 \leq |V|$ . Portanto,  $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \leq \frac{3}{2}|V| - 1$ . ■

A cota superior para o número de cliques de um grafo  $UEH$  apresentada no teorema 3.14 é atingida pelos grafos da família mostrada na figura 3.15. Uma família de grafos  $UEH$  com número ímpar de vértices atingindo esta cota superior pode ser obtida adaptando-se a construção feita para grafos com número par de vértices.

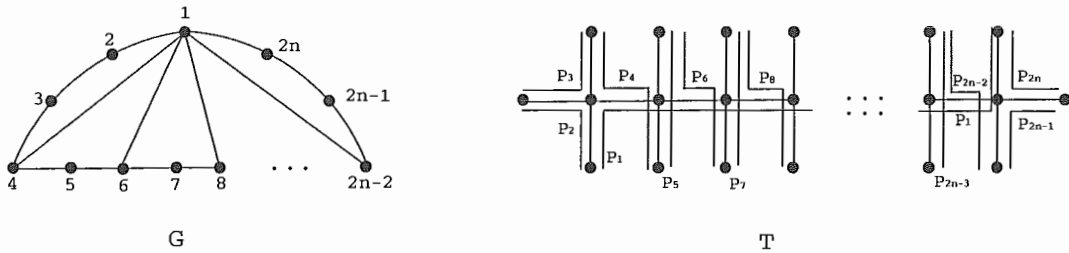


Figura 3.15: Família de grafos  $UEH$  onde  $|\mathcal{C}| = \frac{3|V|-4}{2}$ .

**Teorema 3.15** *A família de cliques de um grafo  $UE$  tem número Helly forte no máximo 4.*

*Prova:* Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de um grafo  $G$  e  $\mathcal{C}$  a família de cliques de  $G$ .

Construa uma nova representação  $(\mathcal{P}', T')$  de  $G$  do seguinte modo. A cada aresta  $(a, b)$  de  $T$  correspondente à uma clique de  $G$  acrescente dois novos vértice  $q$  e  $p$  como mostra a figura 3.16. Para cada caminho  $P$  de  $\mathcal{P}$ , troque cada aresta  $(a, b)$  modificada por  $(a, q, b)$  e acrescente este caminho a  $\mathcal{P}'$ . Observe que  $(\mathcal{P}', T')$  também

é uma representação  $UE$  de  $G$  de forma que para cada clique de  $G$  existe uma garra correspondente em  $T'$ . Dada uma clique  $C$  de  $G$ , o *centro de  $C$*  é centro da garra de  $T'$  correspondente à  $C$ .



Figura 3.16: Aresta e a garra correspondente.

A prova é feita por indução no tamanho de  $\mathcal{C}$ .

Se  $|\mathcal{C}| \leq 4$ , podemos afirmar que existem no máximo quatro cliques cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{C}$ .

Se  $|\mathcal{C}| = 5$  e  $G$  contém uma família de quatro cliques que têm interseção vazia, podemos concluir que a interseção de  $\mathcal{C}$  é vazia e existem no máximo quatro cliques de  $\mathcal{C}$  cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{C}$ .

Vamos supor, agora, que toda subfamília de  $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$  com quatro cliques tem interseção não vazia. Temos dois casos a analisar: existem três cliques diferentes de  $\mathcal{C}$  com o mesmo centro ou no máximo duas cliques de  $\mathcal{C}$  têm o mesmo centro.

No primeiro caso, sejam  $C_1, C_2$  e  $C_3$  cliques de  $\mathcal{C}$  com mesmo centro  $q$ . Todo caminho  $P$  correspondente a um vértice em  $C_1 \cap C_2 \cap C_3$  passa pelo vértice  $q$  e por duas arestas  $(a, q)$  e  $(b, q)$  incidentes à  $q$ . Como  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$  tal caminho e tais arestas existem. Conseqüentemente, todo caminho correspondente a um vértice em  $C_1 \cap C_2$  passa pelas arestas  $(a, q)$  e  $(b, q)$  de  $T'$  e então, tal vértice está em  $C_3$ . Assim,  $C_1 \cap C_2 \subseteq C_1 \cap C_2 \cap C_3$ . Como  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$ , temos que  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = C_1 \cap C_2$  e, portanto  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 = C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap C_5$ .

No caso em que no máximo duas cliques de  $\mathcal{C}$  têm o mesmo centro, sejam  $C_1, C_2$  e  $C_3$  cliques de  $G$  com centros  $q_1, q_2$  e  $q_3$  em  $T'$ , onde  $q_1, q_2$  e  $q_3$  são diferentes.

Como  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \neq \emptyset$ , existe um caminho  $Q$  em  $\mathcal{P}'$  correspondente à um vértice em  $C_1 \cap C_2 \cap C_3$  passando por  $q_1, q_2$  e  $q_3$  e por duas arestas de cada uma das garras correspondentes às cliques  $C_1, C_2$  e  $C_3$ . Sem perda de generalidade, suponha que  $q_3$  está entre  $q_1$  e  $q_2$  em  $Q$ . Observe que todo caminho correspondente à um vértice em  $C_1 \cap C_2$  passa pelas arestas da garra correspondente à  $C_3$  pelas quais  $Q$

passa, já que este é o único caminho em  $T'$  entre  $q_1$  e  $q_2$ . Logo,  $C_1 \cap C_2 \subseteq C_1 \cap C_2 \cap C_3$  e, conseqüentemente,  $C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 = C_1 \cap C_2 \cap C_4 \cap C_5$ .

Seja  $\mathcal{C}' = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  uma subfamília de  $\mathcal{C}$ , com  $k > 5$ .

Pela hipótese de indução, existem cliques  $C_i, C_j, C_l$  e  $C_m$  em  $\mathcal{C}' \setminus C_k$  tais que  $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_k = C_i \cap C_j \cap C_l \cap C_m \cap C_k$ . Além disso, existem quatro dentre as cliques  $C_i, C_j, C_l, C_m$  e  $C_k$  cuja interseção é igual à interseção destas cliques, já que a família formada por elas tem tamanho cinco.

Portanto,  $\mathcal{C}$  tem número Helly forte no máximo quatro. ■

### 3.6 Teorema da Árvore Característica para UEH

Nesta seção apresentamos uma caracterização dos grafos  $UEH$ , dada por Monma e Wei [7] que traz conseqüências estruturais muito importantes para estas classes.

Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Denotamos por  $\mathcal{C}$  o conjunto de todas as cliques de  $G$  e por  $C_v$  o conjunto das cliques de  $G$  que contém um determinado vértice  $v$  de  $G$ . Lembramos que em um grafo  $UEH$ , toda clique de  $\mathcal{C}$  é clique aresta.

Seja  $G$  um grafo e  $T$  uma árvore. Se  $E(T) = \mathcal{C}$  e  $T[C_v]$  é um caminho em  $T$ ,  $\forall v \in V(G)$ , dizemos que  $T$  é uma *árvore característica* de  $G$ .

A figura 3.10 mostra um exemplo de um grafo  $UEH$  e de uma árvore característica deste grafo. Uma árvore característica do mesmo grafo não isomorfa àquela é dada na figura 3.17.

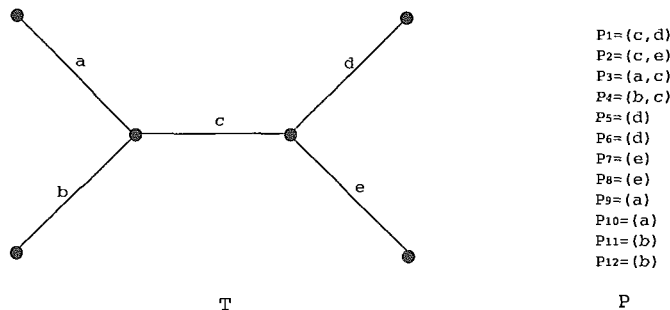


Figura 3.17: Árvore característica para o grafo da figura 3.10.

Árvores características desempenham um papel fundamental para os grafos  $UEH$ .

**Teorema 3.16 (Monma e Wei [7])** *Um grafo  $G$  é UEH se e somente se existe uma árvore característica de  $G$ .*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação UEH de um grafo  $G$  onde  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$  e  $T$  tem o menor número possível de arestas. Assim, para toda aresta  $e$  de  $T$ ,  $P[e]$  é uma clique de  $G$  e portanto, existe uma bijeção entre  $\mathcal{C}$  e  $E(T)$ .

Resta apenas mostrar que  $T[C_v]$ , para cada  $v \in V(G)$ , é um caminho. Como  $T[C_v]$  é formado pelas arestas de  $T$  correspondentes às cliques de  $G$  que contêm o vértice  $v$  e  $P_v$ , o caminho em  $\mathcal{P}$  correspondente ao vértice  $v$ , passa por estas arestas, então temos que  $T[C_v] \subseteq P_v$ . Por outro lado, as arestas de  $P_v$  correspondem às cliques de  $G$  que contêm  $v$ . Logo, tais arestas estão em  $T[C_v]$  e então  $P_v \subseteq T[C_v]$ . Portanto,  $P_v = T[C_v]$  e, conseqüentemente,  $T[C_v]$  é um caminho.

( $\impliedby$ ) Seja  $T$  uma árvore com conjunto de arestas  $\mathcal{C}$ , tal que para todo vértice  $v$  de  $G$ ,  $T[C_v]$  é um caminho em  $T$ .

Considere  $\mathcal{P} = \{P_v = T[C_v] : v \in V(G)\}$ . Vamos mostrar que  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação UEH de  $G$ .

Os caminhos  $P_v$  e  $P_w$  correspondentes aos vértices  $v$  e  $w$  de  $G$  compartilham uma aresta se e somente se  $v$  e  $w$  estão em uma mesma clique de  $G$  mas, neste caso,  $v$  e  $w$  são adjacentes em  $G$ . Assim, a árvore  $T$  e a família  $\mathcal{P}$  formam uma representação UE de  $G$ . Falta provar que a família  $\mathcal{P}$  satisfaz a propriedade Helly em arestas.

Seja  $\mathcal{P}'$  uma subfamília de  $\mathcal{P}$  tal que os caminhos de  $\mathcal{P}'$  se interceptam em arestas dois a dois. Em  $G$ , os vértices correspondentes a tais caminhos formam um completo que está contido em alguma clique do grafo. Além disso, existe uma aresta  $e$  da árvore  $T$  que é correspondente à tal clique, por hipótese. Mas, então,  $e$  pertence a todo  $P_v$ , tal que  $P_v \in \mathcal{P}'$ . Logo,  $\mathcal{P}'$  satisfaz a propriedade Helly em arestas e  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação UEH de  $G$ . ■

Teoremas que caracterizam os grafos pertencentes às classes  $DE$  e  $RDE$  com base num conceito de árvore característica também foram provados em [7].

Outro conceito análogo é o de árvore característica tendo  $\mathcal{C}$  como conjunto de vértices. Esta noção foi usada para caracterizar grafos  $DV$  em [7] e por Gavril em [9, 10, 8] para grafos  $RDV$ ,  $UV$  e *Cordais*.

### 3.7 As Subclasses UE Local e UEH Local

Um grafo  $G$  é *UE Local* se  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ , onde  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação *UE* de  $G$  e  $T$  é uma estrela. Analogamente, um grafo  $G$  é *UEH Local* se  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ , onde  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação *UEH* de  $G$  e  $T$  é uma estrela.

Os ciclos são exemplos de grafos *UEH Local* e uma representação *UEH* onde o grafo base é uma estrela é dada na figura 3.6. Um exemplo de grafo *UE Local* que não é *UEH* é o grafo de Hajós. Na figura 3.1,  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação *UE* deste grafo onde  $T$  é uma estrela.

Observe que se  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação *UE* de um grafo  $G$  onde  $T$  é uma estrela, então o centro da estrela está em todos os caminhos de  $\mathcal{P}$ . Além disso, podemos assumir que todo caminho passa por duas arestas de  $T$  pois, em caso contrário, basta criar uma nova aresta na estrela para um caminho que passa apenas por uma aresta e fazer com este caminho passe pela nova aresta também. O processo pode ser repetido até que não existam mais caminhos com apenas uma aresta.

As classes *UE Local* e *UEH Local* foram caracterizadas em termos de grafos linha de multigrafos por Golumbic e Jamison, em 1985 [6] e por Monma e Wei, em 1986 [7], respectivamente. As provas aqui apresentadas são de Monma e Wei [7].

**Teorema 3.17 (Golumbic e Jamison [6])** *Um grafo  $G$  é UE Local se e somente se  $G$  é grafo linha de um multigrafo.*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $G$  um grafo *UE* e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação *UE* de  $G$ , onde  $T$  é uma estrela. Seja  $v$  o centro de  $T$ .

Seja  $H$  o multigrafo definido da seguinte forma. O conjunto de vértices de  $H$  é o conjunto de arestas de  $T$  e existe uma aresta entre dois vértices de  $H$  para cada caminho em  $\mathcal{P}$  que contém as duas arestas correspondentes em  $T$ . A figura 3.18 ilustra esta construção. Arestas múltiplas em  $H$  correspondem à caminhos idênticos em  $\mathcal{P}$ .

Observe que a cada vértice de  $G$  corresponde uma aresta de  $H$ . De fato, um vértice de  $G$  corresponde à um caminho em  $\mathcal{P}$  que, em  $H$ , corresponde à aresta que liga os vértices de  $H$  correspondentes às arestas deste caminho.

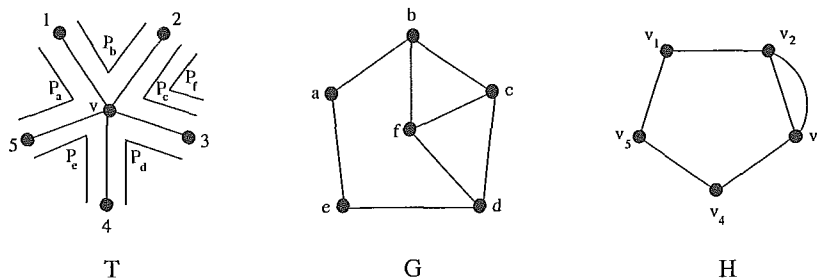


Figura 3.18: Uma representação  $UE$  para  $G$  e o multigrafo  $H$  tal que  $L(H) = G$ .

É fácil ver que dois vértices de  $G$  são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes a eles em  $H$  têm um extremo comum. De fato, dois vértices de  $G$  são adjacentes se e somente se os caminhos a eles correspondentes em  $\mathcal{P}$  têm uma aresta em comum. Em  $H$ , esta aresta comum é um vértice que é extremo das arestas correspondentes aos caminhos considerados. Assim, temos que  $G = L(H)$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $H$  um multigrafo tal que  $G = L(H)$ . Vamos construir uma estrela  $T$  e um conjunto  $\mathcal{P}$  de caminhos de  $T$  tal que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ .

Seja  $\{v_1, \dots, v_m\}$  o conjunto dos vértices de  $H$ . A estrela  $T$  tem centro  $v$  e  $V(T) = \{v, 1, \dots, m\}$ .

Os elementos de  $\mathcal{P}$  são dados do seguinte modo: para cada aresta  $e_i = (v_j, v_k)$  de  $H$  (que corresponde a um vértice de  $G$ ), considere o caminho em  $T$  formado pelas arestas  $(v, j)$  e  $(v, k)$ .

Assim sendo, se dois vértices são adjacentes em  $G$ , então as arestas correspondentes a eles em  $H$  têm um extremo comum. Logo, em  $\mathcal{P}$ , os caminhos que correspondem a tais vértices, compartilham a aresta formada por  $v$  e por este extremo. Reciprocamente, se dois caminhos compartilham uma aresta  $(v, i)$  em  $T$ , as arestas correspondentes em  $H$  têm  $v_i$  como extremo comum. Logo, os vértices a elas correspondentes em  $G$  são adjacentes. Portanto,  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ . ■

**Teorema 3.18 (Monma e Wei [7])** *Um grafo  $G$  é  $UEH$  Local se e somente se  $G$  é grafo linha de um multigrafo sem triângulos.*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $G$  um grafo  $UEH$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UEH$  de  $G$  onde  $T$  é uma estrela. Pelo teorema 3.17,  $G$  é grafo linha de um multigrafo. Seja  $H$  o multigrafo obtido pela construção descrita na prova do teorema e suponha que  $H$  tem

um triângulo, digamos de vértices  $a$ ,  $b$  e  $c$ . As arestas do triângulo correspondem à caminhos de  $\mathcal{P}$  que se interseptam em arestas dois a dois e os vértices correspondem às arestas de  $T$  que estão nestes caminhos. Assim, a estrela  $T$  contém as arestas  $a$ ,  $b$  e  $c$  e  $\mathcal{P}$  contém os caminhos cujas arestas são:  $(a, b)$ ,  $(a, c)$  e  $(b, c)$ . Mas, então, a subfamília de  $\mathcal{P}$  formada por estes três caminhos não satisfaz a propriedade Helly em arestas, uma contradição. Portanto,  $H$  não tem triângulos.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  o grafo linha de um multigrafo  $H$  sem triângulos. Pelo teorema 3.17,  $G$  é um grafo  $UE$ . Seja  $(\mathcal{P}, T)$  a representação  $UE$  de  $G$  dada na prova do teorema. Vamos provar que  $\mathcal{P}$  satisfaz a propriedade Helly em arestas.

Seja  $\mathcal{P}'$  uma subfamília de  $\mathcal{P}$  cujos caminhos se interseptam dois a dois.

Se todos os caminhos de  $\mathcal{P}'$  forem iguais, o resultado é imediato. Em outro caso, sejam  $P_i = ((v, x), (v, y))$  e  $P_j = ((v, x), (v, z))$  dois caminhos distintos de  $\mathcal{P}'$ . Observe que qualquer outro caminho de  $\mathcal{P}'$  intersepta  $P_i$  e  $P_j$ . Mas, isso só pode acontecer se estes caminhos passarem pela aresta  $(v, x)$  pois, em caso contrário, um triângulo será formado em  $H$ . Logo,  $\mathcal{P}'$  satisfaz a propriedade Helly em arestas. ■



# Capítulo 4

## Decomposição em Grafos Ramo

Neste capítulo, tratamos do conceito de grafo ramo de um grafo  $G$  em relação à uma clique  $C$ , que é uma construção feita por Golubic e Jamison [5] para analisar propriedades de um grafo  $UV$  que é  $UE$  e apresentamos os resultados obtidos por estes autores a partir desta construção.

Na primeira seção caracterizamos os grafos  $UV$  que são  $UE$  baseados nas propriedades verificadas no grafo ramo de  $G$  em relação às cliques deste e apresentamos a relação entre os grafos que admitem uma representação  $UE$  e uma  $UV$  onde o grafo base é uma árvore de grau três.

Na seção 4.2 mostramos que o problema do reconhecimento de grafos  $UE$  é NP-Completo, consequência imediata da caracterização dos grafos simultaneamente  $UE$  e  $UV$ .

### 4.1 Grafo Ramo e a Caracterização de $UE \cap UV$

Seja  $G$  um grafo e  $C$  uma clique de  $G$ . O *grafo ramo* de  $G$  em relação à  $C$ , denotado por  $B = B(G \setminus C)$ , tem como conjunto de vértices todos os vértices de  $G$  que não estão em  $C$  mas são adjacentes a algum vértice de  $C$ , isto é,  $V(B) = \bigcup_{v \in C} \{Adj(v) \setminus C\}$  e existe uma aresta entre os vértices  $v$  e  $w$  de  $B(G \setminus C)$  se e somente se, em  $G$ , as três condições seguintes são satisfeitas:

1.  $u$  e  $v$  não são adjacentes
2.  $u$  e  $v$  têm um vizinho comum  $w$  em  $C$  e

3. os conjuntos  $Adj(u) \cap C$  e  $Adj(v) \cap C$  são incomparáveis, isto é, existem  $x, y \in C$  tais que  $x$  é adjacente a  $u$  mas não a  $v$  e  $y$  é adjacente a  $v$  mas não a  $u$ .

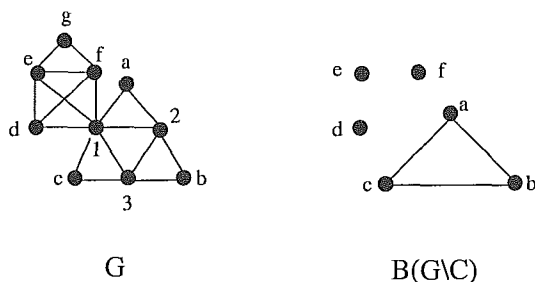


Figura 4.1: Grafo  $G$  e grafo ramo de  $G$  em relação à clique  $C = \{1, 2, 3\}$ .

No exemplo dado na figura 4.1, observe que os vértices  $d, e$  e  $f$  formam um completo em  $G$  e todos têm um vizinho em  $C$ , então, em  $B(G \setminus C)$ , formam um conjunto independente. Além disso, a vizinhança destes vértices em  $C$  ou está contida ou não intersepta a vizinhança de  $a, b$  e  $c$ , que, por sua vez, formam um completo em  $B(G \setminus C)$ , já que são atendidas as três condições necessárias para a existência das arestas entre dois deles. E, ainda, o vértice  $g$  não pertence ao grafo ramo em relação à  $C$  já que não tem vizinho em  $C$ .

Golumbic e Jamison, em [5], provaram o teorema que caracteriza o grafo ramo de um grafo  $UE$  em relação à uma clique deste.

Considere que toda clique  $C$  de  $G$  corresponde à uma garra em  $T$ . No caso em que  $C$  é clique aresta acrescenta um novo vértice  $v$  adjacente aos extremos da aresta  $(a, b)$  e um outro vértice  $u$  adjacente a  $v$  em  $T$  e, para cada caminho de  $\mathcal{P}$  que passa por  $(a, b)$ , construa um novo caminho passando por  $(a, v)$  e  $(v, b)$ . Assim sendo, uma clique  $C$  de  $G$  é formada pelos vértices que correspondem à caminhos de  $\mathcal{P}$  que passam por duas arestas da garra correspondente à  $C$  em  $T$ .

Um ramo contendo uma aresta  $e_i = (v, v_i)$  de uma árvore  $T$ , denotado por  $T_i$ , é a subárvore de  $T$  induzida por  $e_i$  e por todas as arestas que estão em algum caminho em  $T$  entre uma folha e  $v$ , passando por  $e_i$ , como mostra a figura 4.2. Definimos ramo contendo um vértice  $v_i$  de  $T$  como sendo o ramo de  $T$  contendo a aresta  $e_i = (v, v_i)$  menos o vértice  $v$ . Um exemplo é dado na figura 4.3.

**Teorema 4.1 (Golumbic e Jamison [5])** *Seja  $G$  um grafo  $UE$ . Se  $C$  é uma*

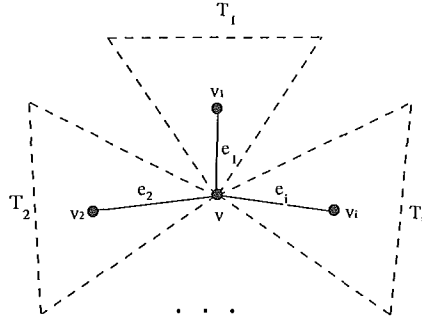


Figura 4.2: Árvore  $T$  e os ramos de  $T$  contendo as arestas  $e_1, e_2, \dots, e_i$ .

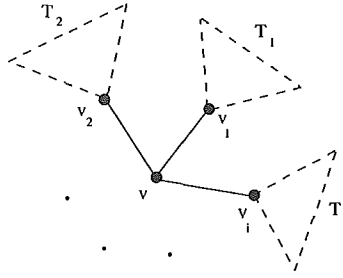


Figura 4.3: Ramos  $T_i$  de  $T$  contendo os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_i$ .

clique de  $G$ , então o grafo ramo em relação à  $C$   $B = B(G \setminus C)$  pode ser 3-colorido tal que, para todo  $v \in C$ , o subconjunto  $V(B) \cap \text{Adj}(v)$  está 2-colorido.

*Prova:* Seja  $G$  um grafo com representação  $UE$   $(\mathcal{P}, T)$  onde toda clique de  $G$  tem uma garra correspondente em  $T$  e  $C$  uma clique de  $G$  onde a garra  $k$  de  $T$  correspondente à  $C$  tem centro  $q$  e arestas  $e_1, e_2$  e  $e_3$ . Sejam  $T_1, T_2$  e  $T_3$  os ramos de  $T$  contendo as arestas  $e_1, e_2$  e  $e_3$ , respectivamente.

Colorimos o grafo ramo  $B$  como segue.

Para cada vértice  $v \in V(B)$ , como  $v$  não está em  $C$ , então  $P_v$  contém, no máximo, uma aresta  $e_i, i \in \{1, 2, 3\}$ , mas intercepta em arestas algum caminho  $Q$  correspondente à um vértice de  $C$ . Então,  $P_v$  está contido em apenas um dos  $T_i$ 's. Basta colorir  $v$  com o índice do ramo  $T_i$  onde se encontra  $P_v$  e têm-se uma 3-coloração para  $B$ . Temos que mostrar, ainda, que esta é uma coloração própria de  $B$ , ou seja, vértices adjacentes em  $B$  não têm a mesma cor.

Sejam  $v, w \in V(B)$  com a mesma cor, digamos 1, e suponha que exista a aresta  $(v, w)$  em  $B$ . Pela definição de grafo ramo, existe um vértice  $u$  em  $C$  adjacente a  $v$  e a  $w$ , um vértice  $x$  em  $C$  adjacente a  $v$  e não a  $w$  e um outro vértice  $y$  de  $C$  adjacente a  $w$  e não a  $v$ . E, ainda,  $P_u \cap P_v$  e  $P_u \cap P_w$  estão em  $T_1$  e não têm aresta em comum,

pois, em caso contrário,  $v$  e  $w$  seriam adjacentes em  $G$ . Então, uma das interseções, suponhamos que seja  $P_u \cap P_v$ , fica no único caminho em  $T$  entre  $q$  e  $P_u \cap P_w$ , como mostrado na figura 4.4.

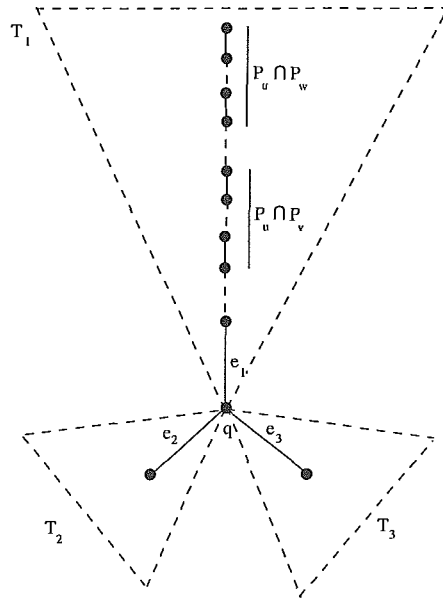


Figura 4.4: As interseções  $P_u \cap P_v$  e  $P_u \cap P_w$  na árvore  $T$ .

Mas então,  $P_y$ , que intersepta em arestas  $P_w$  e contém  $q$  pois  $y$  está em  $C$ , intersepta  $P_v$ , uma contradição já que  $v$  e  $y$  não são adjacentes em  $G$ . Logo,  $v$  e  $w$  não podem ser adjacentes em  $B$  e a 3-coloração de  $B$  é própria.

Falta mostrar, ainda, que  $\forall v \in C$ , o subconjunto  $V(B) \cap Adj(v)$  está 2-colorido.

Seja  $v \in C$ . Então,  $P_v$  contém exatamente duas arestas da garra  $k$  de  $T$  correspondente à  $C$ , digamos  $e_i$  e  $e_j$ . Sendo assim, os caminhos que não estão em  $C$  e são vizinhos de  $v$  em  $G$  estão nos ramos  $T_i$  ou  $T_j$ , ramos de  $T$  contendo as arestas  $e_i$  e  $e_j$ , respectivamente. Portanto, os vértices correspondentes à estes caminhos recebem apenas as cores  $i$  e  $j$ . Assim, concluímos que  $V(B) \cap Adj(v)$  está 2-colorido. ■

Agora vamos apresentar um lema provado por Golubic e Jamison [5], que faz uma análise sobre os grafos simultaneamente  $UE$  e  $UV$ , em um caso especial.

**Teorema 4.2 (Golubic e Jamison [5])** *Um grafo  $G$  tem uma árvore de representação  $UV$  de grau três se e somente se  $G$  têm uma árvore de representação  $UE$  de grau três.*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $G = \Omega_v(\mathcal{P}, T)$  um grafo  $UV$  tal que  $T$  é uma árvore de grau três. O objetivo é apresentar uma árvore  $T^*$  e uma família de caminhos  $\mathcal{P}^*$  em  $T^*$  tal que  $T^*$  tenha grau três e  $G = \Omega_e(\mathcal{P}^*, T^*)$ .

Observe que, ao considerarmos a interseção de  $\mathcal{P}$  em arestas, o problema consiste em termos dois caminhos com um vértice em comum mas sem uma aresta em comum, como mostra a figura 4.5, e, assim, a adjacência entre os vértices de  $G$  correspondentes a tais caminhos seria perdida.

Sejam  $P$  e  $Q$  caminhos em  $T$  tais que  $P \cap Q = \{r\}$ . Certamente,  $r$  é extremo de, pelo menos, um dos dois caminhos, digamos  $P$ , pois  $d(r) \leq 3$  e  $P$  e  $Q$  não compartilham aresta.

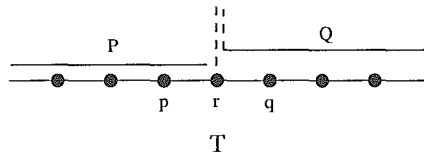


Figura 4.5: Caminhos  $P$  e  $Q$  em  $T$  tais que  $P \cap Q = \{r\}$ .

A estratégia é criar em  $T$  um novo vértice  $r_{PQ}$  adjacente a  $r$  e a  $q$  e substituir nos caminhos de  $\mathcal{P}$  a aresta  $(r, q)$  pelas arestas  $(r, r_{PQ})$  e  $(r_{PQ}, q)$ . Além disso, deve-se adicionar ao caminho  $P$  a aresta  $(r, r_{PQ})$ , como mostrado na figura 4.6.

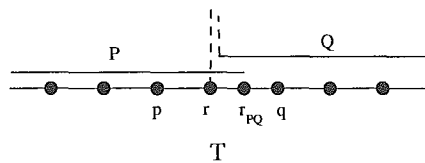


Figura 4.6: Modificação da árvore  $T$  e dos caminhos de  $\mathcal{P}$ .

Este processo faz com que  $P$  e  $Q$  passem a se interceptar em arestas e não modifica as adjacências entre os outros vértices de  $G$ . O procedimento é repetido para cada par de vértices nestas condições até que não existam mais. Então teremos a família de caminhos  $\mathcal{P}^*$  e a árvore  $T^*$  tais que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}^*, T^*)$  e  $T^*$  continua com grau três.

( $\impliedby$ ) Seja  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$  um grafo  $UE$ . Agora queremos encontrar uma família  $\mathcal{P}^*$  e uma árvore  $T^*$  tal que  $G = \Omega_v(\mathcal{P}^*, T^*)$ .

Neste caso, se dois caminhos de  $\mathcal{P}$  tiverem apenas um vértice em comum, os vértices a eles correspondentes em  $G$  não são adjacentes. Mas, ao considerarmos a interseção em vértices, passa a existir uma aresta entre os vértices correspondentes a tais caminhos.

Sejam  $P$  e  $Q$  caminhos de  $\mathcal{P}$  tais que  $r$  é o único vértice em  $P \cap Q$ . O vértice  $r$  é extremo de, pelo menos, um destes caminhos, digamos  $P$ .

Criamos, agora, um novo vértice  $r_{PQ}$  adjacente a  $p$  e a  $r$  de modo que, em todo caminho contendo a aresta  $(p, r)$ , esta seja substituída pela aresta  $(p, r_{PQ})$ , como mostra a figura 4.7.

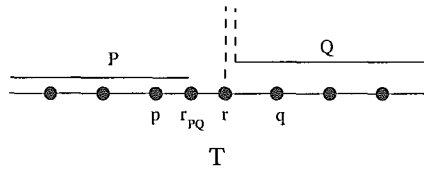


Figura 4.7: Modificação da árvore  $T$  e dos caminhos de  $\mathcal{P}$ .

Desta forma,  $P$  e  $Q$  deixam de compartilhar um vértice e as adjacências entre outros vértices de  $G$  não são modificadas.

Sucessivamente, o processo pode ser repetido para outros caminhos com os quais ocorra a mesma situação, até que estes não existam mais. E teremos  $\mathcal{P}^*$  e  $T^*$  como gostaríamos. ■

Observe que este tipo de estratégia de mudança na estrutura da árvore  $T$  usada na demonstração do teorema 4.2 não pode ser feita para qualquer árvore. Se a árvore tiver grau maior do que três, o vértice de interseção dos caminhos não é necessariamente extremo de um deles e, neste caso, não podem ser feitas as mudanças na árvore e nos caminhos.

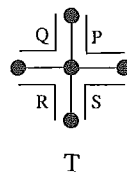


Figura 4.8: Representação  $UE$  de  $C_4$

A figura 4.8, é um exemplo de uma árvore  $T$  e uma família de caminhos em  $T$  que são uma representação  $UE$  de  $C_4$ , mas o grafo de interseção por vértices da

mesma família é  $K_4$  e como  $C_4$  não é  $UV$ , não é possível modificar a árvore e os caminhos de modo a obter  $C_4$ .

Vamos mostrar agora uma propriedade relativa à representação dos grafos  $UV$  cujo grafo ramo em relação à qualquer uma de suas cliques é 3-colorível. Este resultado é fundamental para a caracterização dos grafos  $UV$  que são  $UE$ .

**Teorema 4.3 (Golumbic e Jamison [5])** *Se  $G$  é um grafo  $UV$  tal que, para toda clique  $C$  de  $G$ , o grafo ramo  $B(G \setminus C)$  é 3-colorível, então  $G$  tem uma representação  $UV$  em uma árvore de grau três.*

*Prova:* Seja  $G = \Omega_v(\mathcal{P}, T)$  um grafo  $UV$  tal que, para toda clique  $C$  de  $G$ ,  $B(G \setminus C)$  é 3-colorível.

Denotamos por  $\mathcal{P}[v]$  a subfamília de  $\mathcal{P}$  formada pelos caminhos que contém o vértice  $v$  de  $T$ .

Se  $T$  não tem vértices de grau maior do que três, nada há a fazer,  $T$  já é árvore de grau três. Suponha, então, que  $T$  possui vértice de grau maior do que três.

Como uma família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly em vértices, pelo lema 2.4, um completo em  $G$ , que é correspondente à uma família de caminhos de  $\mathcal{P}$  que se interseptom dois a dois, corresponde à uma família  $\mathcal{P}[v]$  de todos os caminhos de  $\mathcal{P}$  que contém o vértice  $v$  de  $T$ .

Seja  $p \in V(T)$ , tal que  $d(p) > 3$ . Temos, então, dois casos a analisar,  $\mathcal{P}[p]$  corresponde à uma clique ou à um completo não maximal.

Suponha que os caminhos de  $\mathcal{P}[p]$  sejam correspondentes à um completo que não é maximal em  $G$ . Então, existe um vértice  $q$  de  $T$  tal que  $\mathcal{P}[p] \subseteq \mathcal{P}[q]$ , o que significa que todo caminho que passa por  $p$ , passa também pelo único caminho entre  $p$  e  $q$  em  $T$ . Seja  $r$  o vértice deste caminho adjacente à  $p$ . Os vizinhos de  $p$  então são  $r, p_1, p_2, \dots, p_{d(p)-1}$  tais que qualquer caminho de  $\mathcal{P}$  que passa por  $p$ , passa pela aresta  $(p, r)$ , como mostra a figura 4.9.

Substitua as arestas  $(p, p_1), (p, p_2), \dots, (p, p_{d(p)-1})$  por uma árvore binária enraizada em  $p$  com folhas  $p_1, p_2, \dots, p_{d(p)-1}$ , como mostrado na figura 4.10 e, em todo caminho de  $\mathcal{P}[p]$  que passa pela aresta  $(p, p_i)$ , substitua-a pelo único caminho entre  $p$  e  $p_i$  na árvore binária.

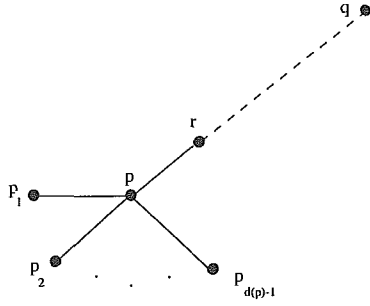


Figura 4.9: Estrutura da árvore  $T$  para o caso em que  $\mathcal{P}[p]$  corresponde a um completo não maximal em  $G$ .

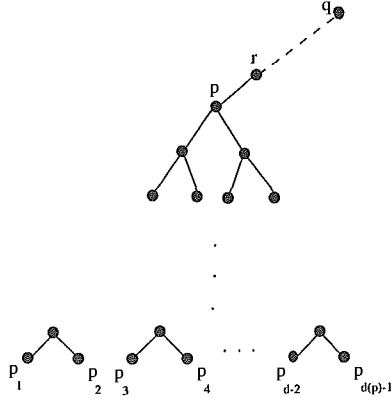


Figura 4.10: Substituição na árvore  $T$  das arestas  $(p, p_1), (p, p_2), \dots, (p, p_{d(p)-1})$  por uma árvore binária enraizada em  $p$ .

O grafo de interseção não é modificado porque cada caminho passa somente por uma aresta  $(p, p_i)$ . Além disso, o grau dos vértices inseridos em  $T$  é três e o grau dos outros vértices de  $T$  não é modificado. Este processo pode prosseguir para outro vértice  $v$  cujo grau seja maior que três e  $\mathcal{P}[v]$  não seja maximal, até que não existam mais vértices em  $T$  com grau maior do que três.

Agora, iremos analisar o caso em que  $\mathcal{P}[p]$  corresponde à uma clique em  $G$ . Observe que não poderá ser utilizada a mesma modificação na árvore  $T$ , já que algum caminho  $Q$  em  $\mathcal{P}$  poderia passar por duas arestas cujos caminhos correspondentes estariam no mesmo ramo de  $T$  contendo  $p$ , como mostra a figura 4.11.

Se, para este tipo de caminho, fosse utilizada uma estratégia de não considerar as arestas repetidas, adjacências poderiam ser perdidas no grafo  $G$ , já que o caminho  $Q$  deixaria de passar pelo vértice  $p$ .

Assim, uma outra modificação será feita na árvore  $T$ , baseada na 3-coloração do grafo ramo. Sejam 1, 2 e 3 as cores usadas para colorir o grafo  $B(G \setminus C)$ , onde  $C$  é



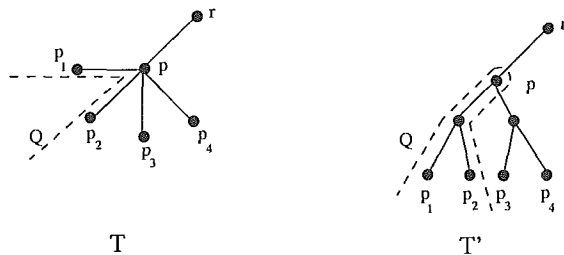


Figura 4.11: Árvore  $T$  e a árvore modificada pelo processo descrito para um completo não maximal.

a clique de  $G$  formada pelos vértices correspondentes aos caminhos de  $\mathcal{P}[p]$ . Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_{d(p)}$  os vizinhos de  $p$  e  $T_i$  o ramo de  $T$  contendo  $p_i$ .

Ramos  $T_i$  e  $T_j$  contendo os vértices  $p_i$  e  $p_j$  são ditos *ligados* quando existe algum caminho  $Q$  de  $\mathcal{P}$  que contém  $p_i$  e  $p_j$ , mas, neste caso,  $Q$  deve passar por  $p$  e, então,  $Q$  está na clique  $C$ .

**Fato 4.4** *Existe uma 3-coloração dos ramos contendo os vértices adjacentes a  $p$  tais que ramos ligados têm cores diferentes.*

De fato, seja  $T_i$  o ramo de  $T$  contendo o vértice  $i$ . Chamaremos de *chefe* de  $T_i$  um caminho  $P_i$  contido em  $T_i$  que tem  $p_i$  como extremo. A pergunta óbvia a ser feita é se o chefe de um  $T_i$  sempre existe. Certamente, para todo  $T_i$ , podemos admitir que existe um caminho que está contido nele. Em caso contrário, todo o ramo  $T_i$  pode ser retirado de  $T$  sem que adjacências sejam perdidas, já que todo caminho com alguma aresta em  $T_i$  passa por  $p$ . O outro problema a ser resolvido é se algum destes caminhos contidos em  $T_i$  tem extremo em  $p_i$ . Se não houver caminho com tais características, basta contrair a aresta  $(p, p_i)$  e repetir o processo até que algum caminho tenha extremo no novo  $p_i$ . Com este processo, o grau de  $p$  pode ter sido aumentado. Neste caso, um novo  $T_j$  é criado para cada novo vizinho  $p_j$  de  $p$  e isto segue para cada ramo  $T_i$ . Se houver mais de um candidato a chefe, a escolha pode ser feita de modo arbitrário, porque o que nos interessa é a cor do chefe em  $B(G \setminus C)$ .

Determinado um chefe para cada  $T_i$ , a princípio será atribuída à  $T_i$  a cor do vértice correspondente ao seu chefe em  $B(G \setminus C)$ . Isto determina uma 3-coloração inicial nos ramos de  $T$ . Falta arrumarmos esta coloração para que ramos ligados tenham cores diferentes.

Sejam  $T_i$  e  $T_j$  ramos ligados e com a mesma cor, digamos 1. Isto significa que  $P_i$  e  $P_j$ , chefes de  $T_i$  e  $T_j$  respetivamente, têm a mesma cor. Mas  $P_i$  e  $P_j$ , pela escolha do caminho para ser o chefe, estão contidos em  $T_i$  e  $T_j$ , respetivamente. Logo,  $P_i$  e  $P_j$  não se interseptam. Além disso, estes caminhos não estão em  $C$ . Como  $T_i$  e  $T_j$  são ligados, então existe um caminho  $Q$  de  $C$  que intersepta  $P_i$  e  $P_j$ , já que estes contém  $p_i$  e  $p_j$ . Os vértices  $i$  e  $j$  de  $B(G \setminus C)$  correspondentes aos caminhos  $P_i$  e  $P_j$  não são adjacentes, já que têm cores diferentes no grafo ramo. Portanto, as vizinhanças de  $i$  e  $j$  em  $C$  são comparáveis. Suponha então, sem perda de generalidade, que  $Adj(i) \cap C \subseteq Adj(j) \cap C$ .

Observe que o ramo  $T_i$  só pode estar ligado a  $T_j$  pois, em caso contrário, existe um outro ramo  $T_k$  ligado a a  $T_i$ . Conseqüentemente, existe um caminho  $Q'$  de  $C$  contendo  $p_k$  e  $p_i$ . Mas, como a vizinhança de  $i$  em  $C$  está contida na do vértice  $j$ , então  $Q'$  contém  $p_j$ . Neste caso,  $Q'$  contém um  $K_{1,3}$ , o que é um absurdo já que  $Q'$  é um caminho.

Como  $T_i$  só está ligado a  $T_j$ , ainda restam as cores 2 e 3 que podem ser escolhidas por  $T_i$ . Basta trocar a cor de  $T_i$  para uma das duas cores restantes. Isto justifica a escolha arbitrária de qual dos caminhos com extremo em  $p_i$  será o chefe.

Este processo pode ser feito sucessivamente até que se tenha a 3-coloração desejada para os ramos.

Pelo fato 4.4, os ramos podem ser coloridos com as cores 1, 2 e 3. Adicione três novos vértices 1, 2 e 3 à árvore  $T$ , adjacentes a  $p$  e independentes entre si e acrescente três árvores binárias enraizadas nos vértices 1, 2 e 3. A árvore binária enraizada no vértice 1 terá como folhas todos os  $p_i$ 's tais que  $T_i$  seja colorido com a cor 1, o mesmo deve acontecer para as outras duas árvores binárias, como mostra a figura 4.12. Cada aresta  $(p, p_i)$  de  $T$  é substituída pelo caminho de  $p$  a  $p_i$  na nova árvore modificada.

É fácil ver que o grafo de interseção não será modificado já que os caminhos que contém  $p$  e contém  $p_i$  e  $p_j$  fazem com que os ramos  $T_i$  e  $T_j$  sejam ligados e, conseqüentemente, tenham cores diferentes. O que implica no fato de  $p_i$  e  $p_j$  estarem em árvores binárias diferentes. O processo é repetido para outro vértice que esteja nas mesmas condições do vértice  $p$ , até que não existam mais vértices em  $T$

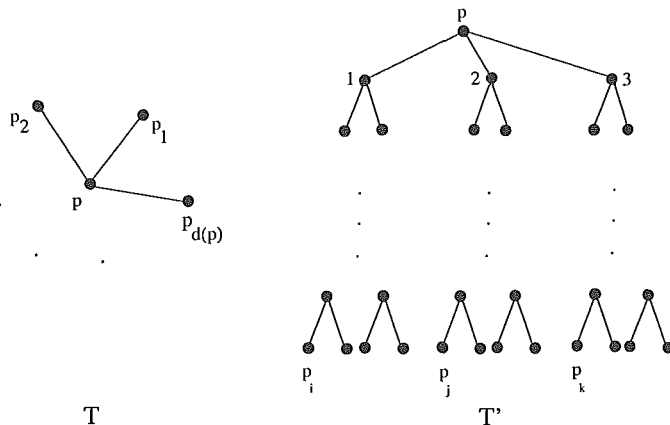


Figura 4.12: Árvore  $T$  e a árvore modificada pelo processo descrito para uma clique, onde  $T_i$  é colorido com a cor 1,  $T_j$  é colorido com a 2 e  $T_k$  com a 3.

com grau maior do que três. ■

Como consequência imediata dos teoremas 4.1, 4.2 e 4.3 apresentamos a caracterização dos grafos simultaneamente  $UE$  e  $UV$  baseada em uma 3-coloração do grafo ramo em relação à uma clique.

**Teorema 4.5 (Golumbic e Jamison [5])** *Seja  $G$  um grafo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $G$  é  $UV$  e  $UE$ ;
2.  $G$  é  $UV$  e, para toda clique  $C$  de  $G$ , o grafo ramo  $B(G \setminus C)$  é 3-colorível;
3.  $G$  tem uma representação  $UV$  cujo grafo base é uma árvore de grau três;
4.  $G$  tem uma representação  $UE$  cujo grafo base é uma árvore de grau três.

## 4.2 Problema do Reconhecimento dos grafos $UE$

Na presente seção, consideramos o problema de reconhecer se um grafo  $G$  dado pertence à classe de grafos  $UE$ . A versão decisão do problema é:

**Problema:** RECONHECIMENTO DE GRAFOS  $UE$

*Instância:* Um grafo  $G = (V, E)$ .

*Questão:* O grafo  $G$  é  $UE$ ?

Com base na teoria dos grafos ramo e nos resultados obtidos para a classe  $UE$ , podemos enunciar o teorema que trata justamente de uma adaptação do problema do RECONHECIMENTO DE GRAFOS  $UE$ , no caso em que o grafo dado for um grafo  $UV$ .

**Teorema 4.6 (Golumbic e Jamison [5])** *Decidir se um grafo  $UV$  dado é um grafo  $UE$  é um problema NP-Completo.*

*Prova:* Mostraremos que tal problema é equivalente ao problema de decidir se um grafo é 3-colorível, que é NP-Completo. Para tal, vamos provar que um grafo  $UV$  é  $UE$  se e somente se um grafo  $H$  arbitrário é 3-colorível.

Seja  $H$  um grafo. Vamos assumir que todo vértice de  $H$  tem grau maior ou igual a três, já que vértices com grau menor ou igual a dois podem ser adicionados ou retirados de  $H$  sem que isto afete a 3-coloração.

Seja  $V(H) = \{1, 2, \dots, n\}$ . Vamos construir uma árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  de caminhos em  $T$  da forma descrita a seguir. À cada vértice  $i$  de  $H$ , correspondem dois vértices  $p_i$  e  $q_i$  adjacentes em  $T$ . Além destes, adicione um vértice  $r$  adjacente à todos os  $q_i$ 's. Para cada aresta  $(i, j)$  de  $H$  construímos em  $T$  um caminho  $P_{(i,j)}$  de  $q_i$  até  $q_j$  passando por  $r$  e, para cada vértice de  $H$ , é construído um caminho  $Q_i$  formado pela aresta  $(p_i, q_i)$  de  $T$ . A família  $\mathcal{P}$  é formada pela união de todos os caminhos  $P_{(i,j)}$  e  $Q_i$ . Um exemplo da construção de  $T$  e  $\mathcal{P}$  é dado na figura 4.13.

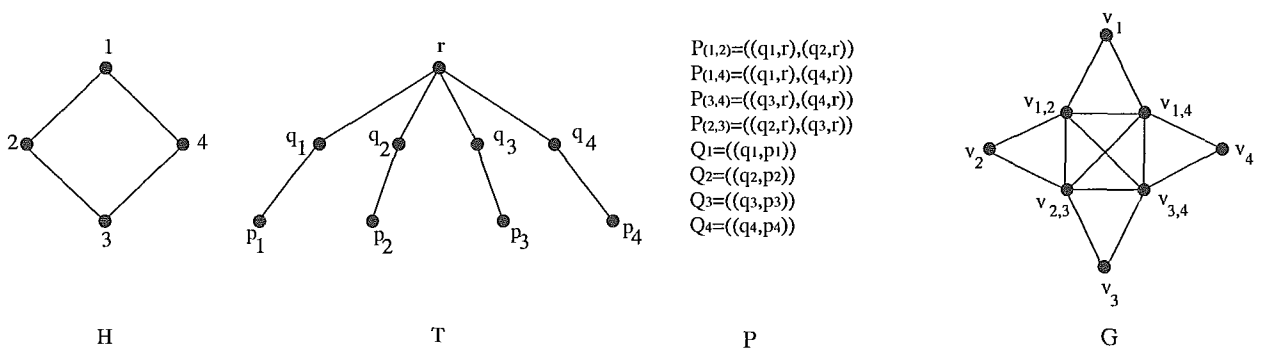


Figura 4.13: Exemplo da construção da árvore  $T$  e da família  $\mathcal{P}$  a partir do grafo  $H$ .

Observe que todos os caminhos  $P_{(i,j)}$  compartilham o vértice  $r$  em  $T$ .

Seja  $G = \Omega_v(\mathcal{P}, T)$ . Seja  $C$  a clique em  $G$  formada pelos vértices correspondentes aos caminhos  $P_{(i,j)}$ . Vamos provar que  $H$  é isomorfo ao grafo ramo de  $G$  em relação

à  $C$ . Existe um vértice em  $B(G \setminus C)$  se e somente se existe um caminho em  $\mathcal{P}$  correspondente à este vértice que não passa por  $r$ . Então, este caminho é um  $Q_i$ . Mas existe um caminho  $Q_i$  em  $\mathcal{P}$  se e somente se existe o vértice  $i$  em  $H$  correspondente a  $Q_i$ . Além disso, existe uma aresta  $(i, j)$  em  $H$  se e somente se existe um caminho  $P_{(i,j)}$  em  $\mathcal{P}$  e isto ocorre quando os vértices correspondentes a  $Q_i$  e  $Q_j$  em  $G$  têm um vértice em comum em  $C$ . Isto equivale a dizer que, em  $B(G \setminus C)$ , existe uma aresta entre os vértices  $i$  e  $j$ . Portanto,  $H$  é isomorfo a  $B(G \setminus C)$ .

Observe que os grafos ramo de  $G$  em relação às outras cliques, uma para cada  $i$ , são conjuntos independentes já que são formados por vértices correspondentes à caminhos do tipo  $P_{(i,k)}$ ,  $k = 1, \dots, n$  e  $k \neq i$ . Além disso, todos estes vértices têm  $i$  como o único vizinho na clique considerada. Logo, entre os vértices do grafo ramo não há aresta.

Pelo teorema 4.5,  $H$  é 3-colorível se e somente se  $G$  é  $UE$ . ■

Imediatamente do teorema anterior segue um importante corolário sobre o problema do RECONHECIMENTO DE GRAFOS  $UE$ .

**Corolário 4.7 (Golumbic e Jamison [5])** *O problema do RECONHECIMENTO DE GRAFOS  $UE$  é NP-Completo.*

Isto se deve ao fato de que se o problema do RECONHECIMENTO DE GRAFOS  $UE$  admitisse um algoritmo polinomial, o problema de decidir se um grafo  $UV$  é  $UE$  poderia ser resolvido utilizando o mesmo algoritmo. Porém, pelo teorema 4.6, este problema é NP-Completo.

# Capítulo 5

## Decomposição por Cliques

Neste capítulo estudamos uma decomposição especial de grafos chamada *decomposição por cliques* e sua aplicação a grafos nas classes  $UEH$  e  $UE \cap Cordal$ . Esta decomposição foi introduzida por Tarjan [17] e adaptada por Monma e Wei [7] para auxiliar na caracterização das classes  $UEH$ ,  $UE \cap Cordal$ ,  $UV$  e subclasses destas.

Na seção 5.1 são apresentados resultados da decomposição para grafos quaisquer e é analisada a complexidade da decomposição por cliques.

Nas seções 5.2 e 5.3 apresentamos definições específicas e teoremas de caracterização para as classes  $UEH$  e  $UE \cap Cordal$  baseados na decomposição por cliques.

Na seção 5.4 caracterizamos os grafos  $UEH$  e  $UE \cap Cordal$  que não admitem tal decomposição.

Na última seção tratamos o problema do reconhecimento para a classe  $UEH$ , onde é fornecido um algoritmo polinomial para resolvê-lo, baseado na decomposição por cliques para estes grafos.

### 5.1 Definição e Resultados Gerais

Uma clique  $C$  de um grafo  $G = (V, E)$  é um *separador clique* se  $G[V \setminus C]$  é desconexo. Desta forma, o conjunto de vértices de  $G$  fica particionado em  $C, V_1, V_2, \dots, V_s$ , com  $s \geq 2$ , de maneira que  $1 \leq i < j \leq s$ , para quaisquer  $i$  e  $j$ , tem-se que  $G[V_i]$  é conexo e vértices em  $V_i$  não são adjacentes a vértices de  $V_j$ . É dito também que  $C$  *separa*  $G$  em  $G[V_i \cup C]$ ,  $1 \leq i \leq s$  e que  $G$  é *particionado* por  $G$ . Um grafo que não possui um separador clique é chamado de *átomo* ou grafo indecomponível.

Considerando o grafo  $G$  da figura 5.1 com separador clique  $C = \{1, 2, 3, 4\}$  temos que os grafos  $G_1, G_2$  e  $G_5$  são átomos enquanto que  $G_3$  e  $G_4$  não são.

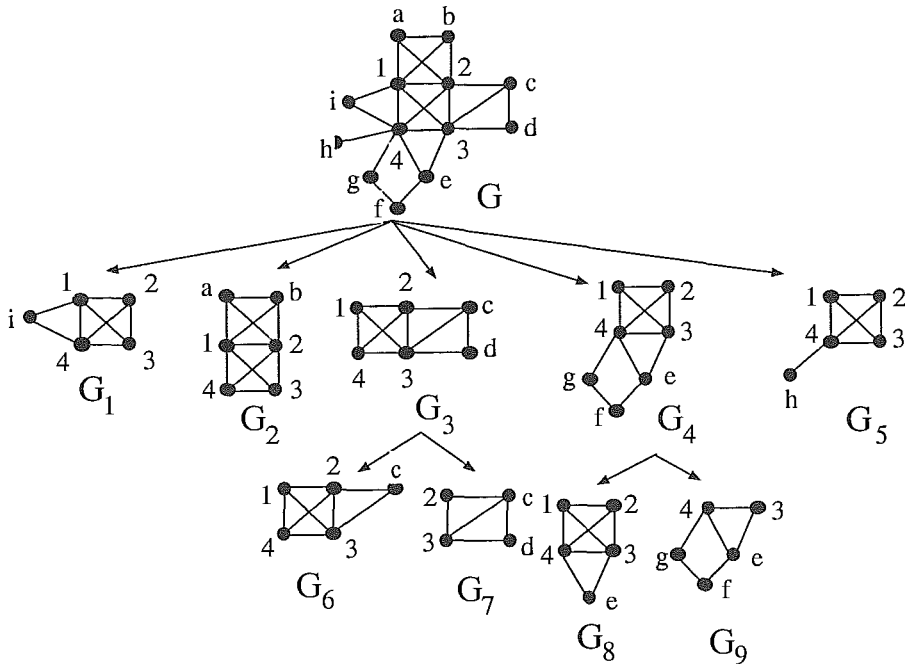


Figura 5.1: Decomposição por cliques de um grafo  $G$ .

Aplicando recursivamente o processo de particionar um grafo por um separador clique aos grafos obtidos até que todos os grafos considerados sejam átomos, temos uma *decomposição por cliques* de  $G$ . Tal decomposição pode ser representada por uma *árvore clique*, que é uma árvore enraizada onde cada nó interno representa um separador clique e cada folha é um átomo. O grafo original pode ser obtido pela composição dos subgrafos, a partir das folhas da árvore clique. A figura 5.1 ilustra como uma árvore clique pode ser construída.

Na literatura de Teoria dos Grafos, separadores clique são também conhecidos como *cortes clique*.

A noção de decomposição por cliques foi introduzida por Monma e Wei [7] e utilizada para caracterizar várias classes de grafos de caminho. No presente texto, abordamos apenas os resultados referentes às classes  $UEH$  e  $UE \cap Cordal$ . Uma caracterização por separadores clique de uma classe de grafos pode conduzir à um algoritmo polinomial de reconhecimento para esta classe. Como veremos, este é o caso dos grafos  $UEH$ .

Esta idéia de decomposição já havia sido utilizada por Tarjan [17], mas este

considerava conjuntos completos, ou seja, não necessariamente maximais, como separadores.

Em tudo o que segue,  $G$  é um grafo e  $C$  é um separador clique de  $G$  tal que  $C$  separa  $G$  em  $G_i = G[V_i \cup C]$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

Os seguintes fatos decorrem diretamente da definição.

**Lema 5.1 (Monma e Wei [7])** *O conjunto das cliques de  $G$  é a união dos conjuntos das cliques dos  $G_i$ 's,  $1 \leq i \leq s$ . Além disso,  $C$  é uma clique de cada  $G_i$  e qualquer outra clique de  $G$  está em exatamente um dos  $G_i$ 's.*

**Lema 5.2 (Monma e Wei [7])** *Se uma clique  $C'$  não é um separador clique de  $G$ , então  $C'$  não é um separador clique de nenhum  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Além disso,  $C$  não é um separador clique de nenhum  $G_i$ .*

As cliques de  $G$  que interseptom  $C$  e são diferentes de  $C$  são chamadas de *cliques relevantes*. No decorrer deste capítulo estaremos considerando apenas as cliques relevantes. Se  $C_i$  é uma clique diferente de  $C$ , chamamos de *vizinhança de  $C_i$  no separador clique  $C$*  e denotamos por  $\mathbb{C}_i$  o conjunto  $C_i \cap C$ . Observe que, neste caso,  $\mathbb{C}_i \neq \emptyset$ , para todo  $i$ .

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são *disjuntos* quando para toda clique  $C_1$  de  $G_1$  e toda clique  $C_2$  de  $G_2$ ,  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$ .

Um grafo  $G_1$  *domina* um grafo  $G_2$ , o que denotamos por  $G_1 \geq G_2$ , se eles não são disjuntos e para cada clique  $C_1$  de  $G_1$ , ou  $\mathbb{C}_1 \supseteq \mathbb{C}_2$ , para toda clique  $C_2$  de  $G_2$ , ou  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$ , para toda clique  $C_2$  de  $G_2$ . Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são *equivalentes* quando  $G_1 \geq G_2$  e  $G_2 \geq G_1$ . Se  $G_1 \geq G_2$  mas  $G_2$  não domina  $G_1$ , escrevemos  $G_1 > G_2$ .

Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são *antipodais* se eles não são disjuntos e nenhum domina o outro. Duas cliques  $C_1$  e  $C_2$  são *antipodais* quando  $\mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{C}_2$  são incomparáveis e têm, pelo menos, um elemento em comum.

Por exemplo, na figura 5.1, os subgrafos  $G_1$  e  $G_2$  são antipodais, já que estes só possuem uma clique relevante cada um, que não são disjuntas em relação à  $C$  e uma não contém a vizinhança da outra no separador clique. Os subgrafos  $G_1$  e  $G_3$



não são antipodais pois são disjuntos. Já  $G_1$  e  $G_5$  apesar de não serem disjuntos também não são antipodais pois  $G_1$  domina  $G_5$ .

O grafo dos antipodais, em relação à um separador clique  $C$ , tem um vértice  $v_i$  para cada  $G_i = G[V_i \cup C]$ ,  $1 \leq i \leq s$  e  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes se e somente se  $G_i$  e  $G_j$  são antipodais. Em relação ao grafo  $G$  e ao separador clique  $C$  da figura 5.1 o grafo  $A$  dos antipodais tem  $V(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e  $E(A) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$ .

Grafos antipodais podem ser reconhecidos de acordo com as interseções de suas cliques, como mostra o lema a seguir.

**Lema 5.3 (Monma e Wei [7])** *Dois grafos  $G_1$  e  $G_2$  são antipodais se e somente se existem cliques  $C_1, C'_1$  em  $G_1$  e cliques  $C_2, C'_2$  em  $G_2$ , não necessariamente distintas, tais que uma das condições abaixo é verdadeira:*

1.  $C_1$  e  $C_2$  são antipodais;
2.  $C_1 \supset C_2$  e  $C'_1 \subset C'_2$ ;
3. (a)  $C_1 \supset C_2$  e  $C_1 \cap C'_2 = \emptyset$  ou (b)  $C_2 \supset C_1$  e  $C_2 \cap C'_1 = \emptyset$ ;
4.  $C_1 = C_2$ ,  $C_1 \cap C'_2 = \emptyset$ , e  $C'_1 \cap C_2 = \emptyset$ ;

*Prova:* ( $\Leftarrow$ ) Um exame dos casos mostra que cada uma das quatro condições implica que  $G_1$  e  $G_2$  são antipodais.

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $G_1$  e  $G_2$  são grafos antipodais.

Se existem cliques antipodais  $C_1$  em  $G_1$  e  $C_2$  em  $G_2$ , temos o caso (1).

Se não existir um tal par de cliques antipodais mas existirem cliques  $C_1$  de  $G_1$  e  $C_2$  de  $G_2$  tais que  $C_1 \supset C_2$ , como  $G_1$  não domina  $G_2$ , existe  $C'_2$  em  $G_2$  tal que ou  $C_1 \subset C'_2$  ou  $C_1 \cap C'_2 = \emptyset$  que são os casos (2), com  $C'_1 = C_1$  e (3a). Se, analogamente, existirem  $C_1$  e  $C_2$  com  $C_2 \supset C_1$ , como  $G_2$  não domina  $G_1$ , existe  $C'_1$  em  $G_1$  tal que ou  $C_2 \subset C'_1$  ou  $C_2 \cap C'_1 = \emptyset$ , o que são os casos (2), com  $C_2 = C'_2$  e (3b).

Por outro lado, se não existir um par de cliques antipodais e nem um par de cliques tal que uma contém propriamente a vizinhança no separador clique da outra, como  $G_1$  e  $G_2$  são não disjuntos, existe uma clique  $C_1$  de  $G_1$  e uma  $C_2$  de  $G_2$  tais que

$\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2$ . Como  $G_1$  não domina  $G_2$ , existe  $\mathbb{C}'_2$  em  $G_2$  tal que  $\mathbb{C}'_2 \not\subseteq \mathbb{C}_1$  e, portanto,  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$ . Além disso, como  $G_2$  não domina  $G_1$ , existe  $\mathbb{C}'_1$  em  $G_1$  tal que  $\mathbb{C}'_1 \not\subseteq \mathbb{C}_2$  e, portanto,  $\mathbb{C}'_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$ , que é o caso (4). ■

Os resultados seguintes estabelecem uma relação de ordem entre os subgrafos dois a dois não antipodais.

**Lema 5.4** *A relação de dominação é transitiva.*

*Prova:* Sejam  $G_1, G_2$  e  $G_3$  subgrafos tais que  $G_1 \geq G_2$  e  $G_2 \geq G_3$ . Por definição,  $G_1$  e  $G_2$  são não disjuntos e, como  $G_1 \geq G_2$ , deve existir uma clique  $\mathbb{C}_1^*$  em  $G_1$  tal que  $\mathbb{C}_1^* \supseteq \mathbb{C}_i, \forall \mathbb{C}_i$  em  $G_2$ . Analogamente, existe uma clique  $\mathbb{C}_2^*$  em  $G_2$  tal que  $\mathbb{C}_2^* \supseteq \mathbb{C}_j, \forall \mathbb{C}_j$  em  $G_3$ . Vamos, agora, analisar a relação entre as cliques de  $G_1$  e as de  $G_3$ .

Seja  $\mathbb{C}_1$  uma clique de  $G_1$ . Se  $\mathbb{C}_1 \supseteq \mathbb{C}_i, \forall \mathbb{C}_i$  em  $G_2$ , então  $\mathbb{C}_1 \supseteq \mathbb{C}_2^*$  inclusive. Mas  $\mathbb{C}_2^* \supseteq \mathbb{C}_j, \forall \mathbb{C}_j$  em  $G_3$  e, conseqüentemente,  $\mathbb{C}_1 \supseteq \mathbb{C}_j, \forall \mathbb{C}_j$  em  $G_3$ . Em outro caso,  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_i = \emptyset, \forall \mathbb{C}_i$  em  $G_2$ , mas então  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2^* = \emptyset$ , como  $\mathbb{C}_2^* \supseteq \mathbb{C}_j, \forall \mathbb{C}_j$  em  $G_3$ , temos que  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_j = \emptyset, \forall \mathbb{C}_j$  em  $G_3$ .

Logo,  $G_1$  e  $G_3$  são não disjuntos e  $G_1 \geq G_3$ . Portanto, a relação de dominação é transitiva. ■

**Lema 5.5 (Monma e Wei [7])** *Uma família de subgrafos dois a dois não antipodais de  $G$  pode ser ordenada de forma que se  $G_i > G_j$ , então  $i < j$ .*

*Prova:* Seja  $\mathcal{S}$  uma coleção de subgrafos dois a dois não antipodais de  $G$ , ou seja, os grafos de  $\mathcal{S}$ , dois a dois, são disjuntos, um domina o outro ou são equivalentes.

Seja  $\mathcal{S}'$  uma subfamília maximal de  $\mathcal{S}$  formada pelos subgrafos que não são equivalentes a nenhum outro subgrafo e não são disjuntos de todos os outros subgrafos de  $\mathcal{S}'$ . O objetivo é provar que existe uma ordenação para  $\mathcal{S}'$  satisfazendo a condição do enunciado e, a partir desta, construir uma tal ordenação para  $\mathcal{S}$ .

A ordenação dos elementos de  $\mathcal{S}'$  é feita da seguinte forma, inicie a ordenação com um subgrafo qualquer. A partir deste, cada  $G_i$  é inserido na ordenação testando

se  $G_i$  domina algum outro subgrafo já inserido na ordenação. Se a resposta for sim,  $G_i$  é inserido na posição imediatamente anterior ao primeiro subgrafo da ordenação que ele domina. Se a resposta for não, então se algum  $G_j$  domina  $G_i$ ,  $G_i$  deve ser inserido imediatamente depois do último subgrafo que o domina na ordenação. Caso contrário,  $G_i$  é inserido no final da ordenação.

Para provar que a condição do enunciado é mantida a cada passo vamos mostrar que em nenhum momento acontecerá o impasse do tipo  $G_i$  é dominado por  $G_k$ ,  $G_i$  domina  $G_j$  e  $G_j$  está antes de  $G_k$  na ordenação. Suponha, por absurdo, que isto acontece para algum  $G_i$ . Assim,  $G_k > G_i$  e  $G_i > G_j$  e, pelo lema 5.4,  $G_k > G_j$ . Mas  $G_j$  está antes de  $G_k$  na ordenação, o que é uma contradição.

Para ordenar a família  $\mathcal{S}$  a partir da ordenação de  $\mathcal{S}'$  basta inserir na ordenação os subgrafos equivalentes a algum subgrafo  $G_i$  em  $\mathcal{S}'$  e os subgrafos disjuntos de todos os grafos em  $\mathcal{S}'$ . No primeiro caso, o subgrafo é inserido imediatamente após  $G_i$ . Os subgrafos disjuntos de todos os outros podem ser inseridos, em qualquer ordem, no final da ordenação.

Observe que as inserções na ordenação em nada afetam a propriedade de que se  $G_i > G_j$ , então  $i < j$  e, portanto, a família  $\mathcal{S}$  admite uma ordenação satisfazendo a condição do enunciado. ■

O conjunto dos subgrafos vizinhos de um vértice  $v$  de  $C$  é o conjunto dos  $G_i$ 's tais que  $V_i$  contém algum vizinho de  $v$  em  $G$ .

### 5.1.1 Complexidade da Decomposição por Cliques

A família de cliques de um grafo  $G = (V, E)$  pode ser gerada em tempo  $O(|V(G)||E(G)||\mathcal{C}|)$ , pelo algoritmo de [3], onde cada clique é gerada em tempo  $O(|V(G)||E(G)|)$ .

Observe também que, pelos lemas 5.1 e 5.2, se uma clique  $C$  é um separador clique de um grafo  $G$ ,  $C$  não precisa mais ser considerada como separador para nenhum  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , e cada uma das cliques restantes de  $\mathcal{C}$  faz parte da família de cliques de exatamente um dos  $G_i$ 's. Isto significa que cada clique precisa ser considerada uma única vez como separador. Para cada clique, as componentes conexas de  $G \setminus C$  podem ser geradas em  $O(|V(G)| + |E(G)|)$  [16].

Logo, concluímos que decompor um grafo  $G = (V, E)$  por separadores clique pode ser feito em tempo  $O(|V(G)||E(G)||\mathcal{C}| + (|V(G)| + |E(G)|)|\mathcal{C}|)$ . No caso dos grafos  $UE$ , a complexidade é polinomial pois um grafo  $UE$  tem um número polinomial de cliques.

## 5.2 Caracterização de UEH pela Decomposição por Cliques

Nesta seção, enunciamos e provamos o teorema de caracterização para grafos  $UEH$  que contém um separador clique.

Seja  $G$  um grafo  $UEH$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UEH$  de  $G$ .

Uma aresta de  $T$  é uma *aresta clique* quando corresponde a uma clique aresta de  $G$ , ou seja, uma aresta clique é uma aresta de  $T$  que está em todos os caminhos que representam vértices de  $C$ , onde  $C$  é uma clique aresta. Se  $T$  for uma árvore característica de  $G$ , existe uma correspondência entre as arestas clique de  $T$  e as cliques aresta de  $G$ .

Sejam  $C, C'$  e  $C''$  cliques aresta de  $G$ . Definimos  $P(C', C'')$  como o único caminho (conjunto de arestas) entre as arestas da árvore  $T$  correspondentes às cliques aresta  $C'$  e  $C''$ , incluindo estas arestas. Dizemos ainda que  $C'$  e  $C''$  estão do mesmo lado de  $C$  quando  $C \notin P(C', C'')$ .

Seja  $C$  um separador clique para  $G$ , ou seja,  $C$  separa  $G$  em  $G_i = [V_i \cup C]$ ,  $1 \leq i \leq s$ .

**Teorema 5.6 (Teorema do Separador para UEH)** [Monma e Wei [7]]  $G$  é  $UEH$  se e somente se cada  $G_i$  é  $UEH$ ,  $1 \leq i \leq s$ , e o grafo dos antipodais pode ser 2-colorido.

*Prova:* ( $\implies$ ) Sejam  $G$  um grafo  $UEH$  com separador clique  $C$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UEH$  de  $G$ , onde  $T$  é uma árvore característica de  $G$ .

Primeiramente vamos mostrar que cada  $G_i$  é  $UEH$  e tem uma árvore característica  $T_i$  tendo  $C$  como aresta-folha.

Seja  $P(V_i)$  o subgrafo de  $T$  induzido pelo conjunto de todas as arestas de  $T$  que

fazem parte de algum caminho em  $\mathcal{P}$  que representa um vértice de  $V_i$ . Obviamente,  $P(V_i)$  é conexo já que, por definição,  $G[V_i]$  é conexo.

Seja  $v_0$  o vértice de  $P(V_i)$  mais próximo da aresta clique  $C$  em  $T$ . Construa cada  $T_i$  acrescentando a  $P(V_i)$  uma aresta  $(v_0, u)$ , onde  $u$  é um vértice novo. Esta aresta é correspondente à clique  $C$  em  $T_i$ . Observe que, desta forma, há uma correspondência entre as arestas de  $T_i$  e as cliques de  $G_i$ .

Agora vamos definir os caminhos de  $\mathcal{P}_i$ . Os caminhos de  $\mathcal{P}$  que representam os vértices de  $V_i$  não são modificados em  $\mathcal{P}_i$ . Os caminhos que representam vértices da clique  $C$  serão modificados adicionando-se às arestas de  $P(V_i)$  que estão em tal caminho, a aresta  $(v_0, u)$  correspondente à  $C$ . Desta forma,  $(\mathcal{P}_i, T_i)$  é uma representação  $UEH$  para  $G_i$ , onde  $T_i$  é árvore característica de  $G_i$ , tendo  $C$  como aresta-folha. Um exemplo da construção de  $T_i$  e  $\mathcal{P}_i$  a partir de  $T$  e  $\mathcal{P}$  é mostrado na figura 5.2, onde é dada uma árvore característica do grafo  $G_5$  a partir da árvore característica do grafo  $G$  da figura 5.1.

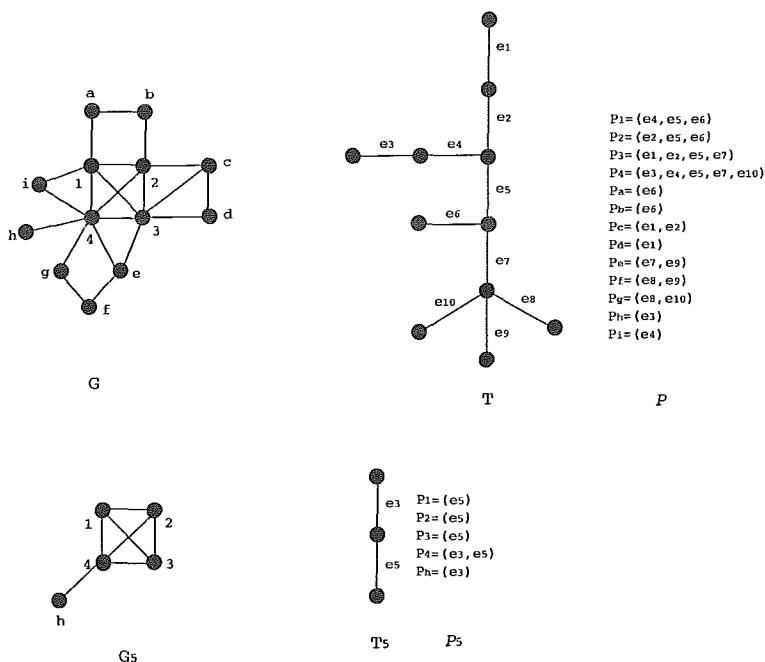


Figura 5.2: Construção de uma árvore característica de  $G_5$ .

Falta provar que os  $G_i$ 's podem ser 2-coloridos tais que pares de grafos antipodais não têm a mesma cor. Para isso observamos que:

**Fato 5.7** *As cliques de um mesmo  $G_i$  correspondem à arestas do mesmo lado de  $C$  em  $T$ .*

*Prova:* Suponha, por absurdo, que existam arestas clique  $C'$  e  $C''$  de  $G_i$  em lados diferentes de  $C$  tais que  $C'$  e  $C''$  são as arestas de  $G_i$  mais próximas de  $C$  com tais características.

Como  $C'$  é uma clique, existe um vértice  $x$  do grafo  $G$  tal que  $x \in C' \setminus C$  e, por motivo análogo, existe um vértice  $y$  de  $V(G)$  tal que  $y \in C'' \setminus C$ . Mas, então, em  $G \setminus C$ ,  $x$  e  $y$  estão em componentes conexas distintas, o que é uma contradição, pois estão em  $V_i$  e, por definição,  $G[V_i]$  é conexo. Portanto,  $C'$  e  $C''$  devem estar do mesmo lado de  $C$ . ■

Assim, o conjunto dos  $G_i$ 's pode ser particionado em dois conjuntos, de acordo com o lado de  $C$  em  $T$  em que se encontram suas arestas clique. E podemos atribuir uma cor a cada conjunto de  $G_i$ 's assim definido.

Temos, agora, que provar que  $G_i$ 's cujas arestas clique estão de um mesmo lado de  $C$  em  $T$  não são antipodais.

Suponha, por absurdo, que existam  $G_1$  e  $G_2$  grafos antipodais tais que as suas arestas clique estão do mesmo lado de  $C$  em  $T$ . Existem quatro casos a serem analisados, de acordo com o lema 5.3.

Antes de analisarmos os casos, provaremos alguns fatos a fim de facilitar as demonstrações.

**Fato 5.8** *Cada  $G_i$  não contém pares de cliques antipodais.*

*Prova:* Suponha, por absurdo, que  $C_1$  e  $C_2$  são cliques antipodais em  $G_i = \Omega_e(\mathcal{P}_i, T_i)$ . Logo, existem  $x, y$  e  $z$  em  $C$  tais que  $x \in C_1 \setminus C_2$ ,  $y \in C_2 \setminus C_1$  e  $z \in C_1 \cap C_2$ . Seja  $P_z$  o caminho em  $\mathcal{P}_i$  correspondente a  $z$ .  $P_z$  deve conter as arestas clique  $C$ ,  $C_1$  e  $C_2$ , onde  $C_2$  está entre  $C$  e  $C_1$  ou  $C_1$  está entre  $C$  e  $C_2$ , já que  $C$  é uma folha em  $T_i$ . Mas, no primeiro caso,  $P_x$  deve conter o único caminho em  $T_i$  entre as arestas clique  $C_1$  e  $C$  e, então, contém a aresta clique  $C_2$ , o que contradiz o fato de  $x$  não pertencer a  $C_2$ . Em outro caso,  $P_y$  contém o único caminho em  $T_i$  entre as arestas clique  $C_2$  e  $C$  mas, desta forma, contém a aresta clique  $C_1$ , o que é uma contradição análoga à anterior. ■

**Fato 5.9** Se  $C_1$  e  $C_2$  são cliques não disjuntas em relação à  $C$  e do mesmo lado de  $C$ , então

1.  $C_1 \in P(C, C_2)$  ou  $C_2 \in P(C, C_1)$ ;
2. Se  $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_2$ , então  $C_2 \in P(C, C_1)$ ;
3. Se  $C_2 \in P(C, C_1)$ , então  $\mathbb{C}_1 \subseteq \mathbb{C}_2$ .

*Prova:* Para a prova dos itens vamos considerar  $C_1$  e  $C_2$  cliques não disjuntas em relação à  $C$ , isto é,  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 \neq \emptyset$  e do mesmo lado de  $C$ .

(1) É fácil ver que, como existe um vértice  $v$  de  $C$  tal que  $v \in C_1 \cap C_2$  temos que, em  $P_v$ , ou a aresta clique  $C_1$  está entre as arestas clique  $C$  e  $C_2$  ou a aresta clique  $C_2$  está entre as arestas clique  $C$  e  $C_1$ , o que é o mesmo que dizer que  $C_1 \in P(C, C_2)$  ou  $C_2 \in P(C, C_1)$ .

(2) Suponha, agora, que  $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_2$ . Observe que a aresta clique  $C_2$  está, obrigatoriamente, entre as arestas clique  $C$  e  $C_1$ , já que todo vértice de  $C$  que está em  $C_1$  tem seu caminho correspondente em  $T$  passando necessariamente por  $C_2$ , o que significa que  $C_2 \in P(C, C_1)$ .

(3) Suponha, além das hipóteses do fato 5.8, que  $C_2$  está em  $P(C, C_1)$ . A vizinhança de  $C_1$  em  $C$ , ou seja, os vértices de  $C$  que estão em  $C_1$ , deverá estar contida na vizinhança de  $C_2$  em  $C$ , ou estas vizinhanças são iguais. Portanto,  $\mathbb{C}_1 \subseteq \mathbb{C}_2$ . ■

**Fato 5.10** Se uma aresta clique  $C_k$  está no único caminho em  $T$  entre duas arestas clique de um mesmo  $G_i$ , então  $C_k$  está em  $G_i$ .

*Prova:* Sejam  $C'_i$  e  $C''_i$  duas cliques de um mesmo  $G_i$ . Seja  $C_k$  uma clique  $G$  tal que  $C_k \in P(C'_i, C''_i)$ . Além disso, sejam  $v' \in C'_i$  e  $v'' \in C''_i$ , vértices de  $V_i$ . Em  $G[V_i]$  existe um caminho  $Q$  conectando  $v'$  e  $v''$ , já que  $G[V_i]$  é conexo. Mas, em  $T$ ,  $Q$  é correspondente à uma família de caminhos de modo que cada caminho intersepta o seu antecessor e o seu sucessor e o primeiro intersepta  $P_{v'}$  e o último intersepta  $P_{v''}$ . Então, algum desses caminhos, obrigatoriamente, passa pela aresta clique  $C_k$ .

Logo,  $C_k$  contém algum vértice de  $V_i$ , mas, neste caso,  $C_k$  deve estar em  $G_i$ , já que a retirada de  $C$  do grafo  $G$  não desconecta  $C_k$  e  $V_i$ . ■

Passemos, agora, para a análise dos casos.

(1)  $\mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{C}_2$  são antipodais.

Seja  $v$  um vértice de  $G$  tal que  $v \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2$ . Observe que  $C$  é uma aresta-folha em  $P_v$ . Além disso, a aresta clique  $C_1$  está no único caminho em  $T$  entre as arestas clique  $C$  e  $C_2$  ou  $C_2$  está no único caminho entre  $C$  e  $C_1$  em  $T$ . No primeiro caso, todo vértice de  $C$  que está em  $C_2$  têm o seu caminho correspondente em  $T$  passando pela aresta clique  $C_2$ . Mas isto significa que  $\mathbb{C}_2 \subseteq \mathbb{C}_1$ , o que é uma contradição. Analogamente, no segundo caso, conclui-se que  $\mathbb{C}_1 \subseteq \mathbb{C}_2$ , que também é uma contradição.

(2)  $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$  e  $\mathbb{C}'_1 \subset \mathbb{C}'_2$

Pelo segundo ítem do fato 5.9,  $C'_2 \in P(C, C'_1)$  e  $C_1 \in P(C, C_2)$ .

Observe que  $P(C_2, C'_2) = P(C, C_2) \oplus P(C, C'_2)$ , ou seja, o conjunto de arestas em  $T$  entre  $C_2$  e  $C'_2$  é igual ao conjunto de arestas entre  $C$  e  $C_2$  unido com o conjunto de arestas entre  $C$  e  $C'_2$ , menos as arestas que estiverem nestes dois conjuntos simultaneamente. Além disso,  $C_1$  não pode estar em  $P(C_2, C'_2)$  pois, pelo fato 5.10,  $C_1$  estaria em  $G_2$ . Mas  $C_1$  está em  $P(C, C_2)$ , logo,  $C_1$  deve estar, necessariamente, em  $P(C, C'_2)$ .

Desta forma,  $C'_2 \in P(C_1, C'_1)$ , então, pelo fato 5.10,  $C'_2$  está em  $G_1$ , o que é uma contradição.

(3a)  $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$  e  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$ ;

Pelo fato 5.9, ítem 3, como  $C_1$  e  $C'_2$  são disjuntos em relação a  $C$ , então  $C_1 \notin P(C, C'_2)$  e  $C'_2 \notin P(C, C_1)$ . Além disso,  $C_1 \in P(C, C_2)$ , pelo segundo ítem do fato 5.9. Então,  $C_1 \in P(C_2, C'_2)$ . Assim sendo,  $C_1 \in G_2$ , pelo fato 5.10, o que é uma contradição.

(3b)  $\mathbb{C}_2 \supset \mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{C}_2 \cap \mathbb{C}'_1 = \emptyset$ ;

A prova deste caso é análoga à do caso (3a).

(4)  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2$ ,  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$  e  $\mathbb{C}'_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$ ;



Pelo terceiro ítem do fato 5.9, como  $C_1$  e  $C'_2$  são disjuntos em relação a  $C$ ,  $C_1 \notin P(C, C'_2)$  e  $C'_2 \notin P(C, C_1)$ .

Analogamente, podemos concluir que  $C_2 \notin P(C, C'_1)$  e  $C'_1 \notin P(C, C_2)$ .

Como  $C_1$  e  $C_2$  são cliques não disjuntas em relação à  $C$ , pelo primeiro ítem do fato 5.9, ou  $C_1 \in P(C, C_2)$  ou  $C_2 \in P(C, C_1)$ . No primeiro caso, temos claramente uma contradição porque  $C_1$  estaria em  $P(C_2, C'_2)$ , já que  $C_1 \notin P(C, C'_2)$ . Logo,  $C_2 \in P(C, C_1)$ .

Entretanto,  $C_2 \notin P(C, C'_1)$ , por observação anterior. Sendo assim,  $C_2 \in P(C_1, C'_1)$ , o que é uma contradição.

No segundo caso, como  $C_2 \notin P(C_1, C'_1)$ , pelo fato 5.10, então  $C_2 \in P(C, C'_1)$ , o que é uma contradição pois, por observação anterior,  $C_2 \notin P(C, C'_1)$ .

Como foram analisados todos os casos possíveis, podemos concluir que não existem  $G_1$  e  $G_2$  antipodais do mesmo lado de  $C$ . Portanto, a coloração dos  $G_i$ 's definida anteriormente não atribui a mesma cor a grafos antipodais.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo e  $C$  um separador clique de  $G$  tal que cada  $G_i = G[V_i \cup C]$  é  $UEH$ ,  $1 \leq i \leq s$ , e o grafo dos antipodais pode ser 2-colorido.

A idéia da prova é construir uma árvore característica de  $G$  a partir das árvores características dos  $G_i$ 's, usando a partição dos  $G_i$ 's em dois conjuntos, definida pela 2-coloração destes.

Pelo lema 5.2,  $C$  não é um separador de nenhum dos  $G_i$ 's. Assim,  $C$  deve ser aresta-folha em cada árvore característica  $T_i$  de  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Caso contrário, existem  $C_1$  e  $C_2$  arestas clique adjacentes a  $C$  em  $T$  por extremos diferentes. Como  $C_1$  e  $C_2$  são cliques de  $G$ , existem  $u \in C_1 \setminus C$  e  $v \in C_2 \setminus C$ . A retirada de  $C$  iria separar  $u$  e  $v$  em componentes conexas distintas de  $G \setminus C$ , pois qualquer caminho em  $T$  entre  $P_u$  e  $P_v$  passa pela aresta clique  $C$ , ou seja, qualquer caminho em  $G$  entre  $u$  e  $v$  passa por algum vértice da clique  $C$ . Logo,  $C$  é um separador clique de  $G_i$ , o que é uma contradição.

Pelo lema 5.5, existe uma ordenação  $G_1, G_2, \dots, G_t$  dos  $G_i$ 's de uma mesma cor tal que se  $G_i > G_j$  então  $i < j$ .

Vamos construir recursivamente uma árvore característica  $UEH$  para  $G[V_1 \cup V_2 \cup$

$\dots \cup V_i \cup C]$ , onde  $C$  é uma aresta-folha para cada  $i$ , e os  $G_i = G[V_i \cup C]$  têm a mesma cor,  $1 \leq i \leq t$ . Esta construção para o grafo  $G$  da figura 5.1 pode ser a partir das árvores dadas na figura 5.3.

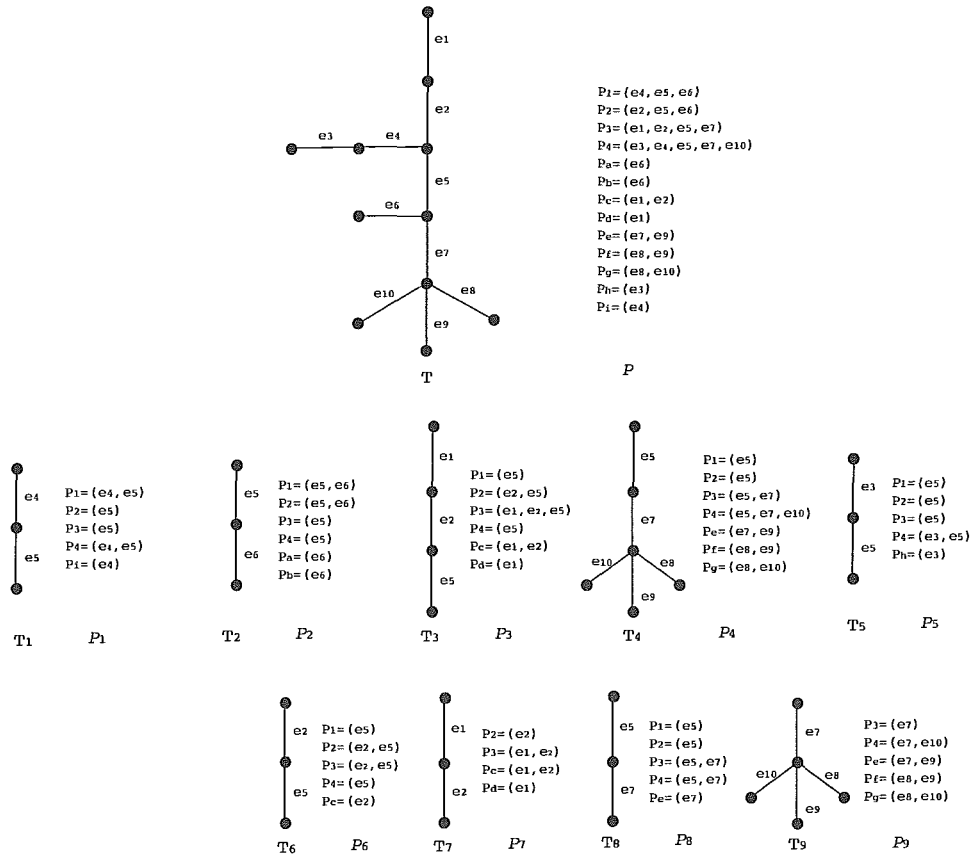


Figura 5.3: Árvores características para os grafos da figura 5.1.

Temos que  $G_1 = G[V_1 \cup C]$  tem uma árvore característica onde  $C$  é uma aresta-folha. Suponha que  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  tem uma árvore característica  $T^{(i-1)}$  onde  $C$  é uma aresta-folha.

Como observado anteriormente,  $G_i = G[V_i \cup C]$  tem uma árvore característica  $T_i$  onde  $C$  é uma aresta-folha. Dois casos devem ser analisados.

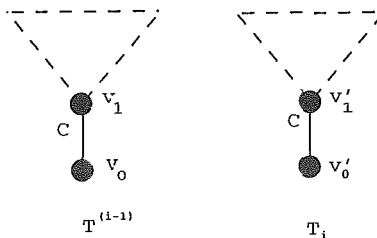


Figura 5.4: Árvores características para  $G[V_1 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  e para  $G_i$ , respectivamente.

*Caso 1:*  $\mathbb{G}_i$  não está contido em nenhum  $\mathbb{G}_j$ , para  $1 \leq j \leq i - 1$ ;

*Caso 2:* Existe algum  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , para o qual  $\mathbb{G}_j \supset \mathbb{G}_i$ .

No caso 1,  $\mathbb{G}_i$  deve ser disjunto de qualquer outro  $\mathbb{G}_j$ ,  $i \neq j$ , pois, em caso contrário,  $G_i$  e  $G_j$  seriam antipodais. Observe que  $\mathbb{G}_i$  não pode conter nenhum  $\mathbb{G}_j$  já que  $G_i$  está depois de  $G_j$  na ordenação. Então basta fazer uma operação com as arestas correspondentes a  $C$  em  $T_i$  e  $T^{(i-1)}$ , como mostra a figura 5.4, identificando  $v_0$  com  $v'_0$  e  $v_1$  com  $v'_1$  para formar  $T^{(i)}$ . Pelo lema 5.1, as arestas de  $T^{(i)}$  correspondem exatamente às arestas de  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \cup C]$ . Seja  $v \in V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i$ , ou existia um caminho  $P_v$  em  $T^{(i-1)}$  correspondente a  $v$  ou em  $T_i$ , que continua sendo o mesmo em  $T^{(i)}$ . Agora, seja  $v \in C$ ,  $v$  pode ser adjacente somente a vértices de  $C$  e, então,  $P_v$  é formado apenas pela aresta correspondente a  $C$  em  $T^{(i)}$ , ou ainda,  $v$  pode ser adjacente a vértices de  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1}$  ou de  $V_i$ , mas nunca a vértices nos dois conjuntos, pois neste caso haveriam  $G_i$ 's antipodais com a mesma cor. No primeiro caso, existe um caminho  $P_v$  em  $T^{(i-1)}$  correspondente a  $v$  e uma única clique em  $T_i$  contendo  $v$ , a clique  $C$ . Logo, em  $T^{(i)}$ , as cliques que contém  $v$  continuam formando um caminho. No outro caso, quando  $v$  é adjacente somente a vértices de  $V_i$ , existe um caminho correspondente a  $v$  em  $T_i$  e, em  $T^{(i-1)}$ , apenas a clique  $C$  contém  $v$ . Assim, as cliques que contém  $v$  continuam formando um caminho em  $T^{(i)}$ .

No caso 2, seja  $A = \{C_1, \dots, C_k\}$  o conjunto de todas as cliques de  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  tal que cada clique está em algum  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , e a sua vizinhança em  $C$  contém a vizinhança em  $C$  de toda clique de  $G_i$ .

Obviamente, a clique  $C$  está no conjunto  $A$ . Observe que, todo vértice  $v$  de  $C$  que é vizinho de alguém em  $V_i$ , e algum vértice nestas condições necessariamente existe, deve estar em toda clique de  $A$ , pela construção de  $A$ . E aí,  $P_v = A$  em  $T^{(i-1)}$ . Logo, as arestas correspondentes às cliques em  $A$  formam um caminho em  $T^{(i-1)}$ .

Vamos construir uma nova árvore  $T^{(i)}$  a partir de  $T^{(i-1)}$  e de  $T_i$ , mostradas na figura 5.4, como segue.

Sejam as arestas  $C = (v_0, v_1)$  e  $C^* = (u_0, u_1)$  os extremos do caminho  $A$  em  $T^{(i-1)}$  e  $C = (w_0, w_1)$  a aresta-folha correspondente à clique  $C$  em  $T_i$ , como mostra a figura 5.5.

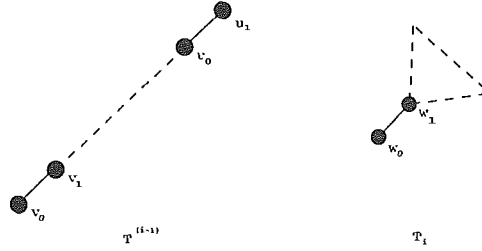


Figura 5.5: Árvores características para  $G[C \cup V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}]$  e para  $G_i$  descritas no caso 2.

Construímos  $T^{(i)}$  identificando  $u_0$  com  $w_0$  e  $u_1$  com  $w_1$  a fim de unir as árvores  $T^{(i-1)}$  e  $T_i$ , como mostra a figura 5.6.

Qualquer vértice do grafo que não está em  $C$  tem um caminho correspondente em  $T^{(i-1)}$  ou em  $T_i$  e, conseqüentemente, o mesmo caminho corresponde à este vértice em  $T^{(i)}$ , conforme o caso anterior.

Analisaremos, agora, os vértices de  $C$ . Um vértice de  $C$  pode estar somente em  $C$ , pode estar em  $G_i$  ou estar somente em  $G_{V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1}}$ . No último caso, não há problema já que  $v$  já tem um caminho  $P_v$  correspondente em  $T^{(i-1)}$ , que será o mesmo caminho em  $T^{(i)}$ . Se o vértice  $v$  está somente em  $C$ ,  $P_v$  é formado apenas pela aresta  $(v_0, v_1)$  que é a correspondente a  $C$  em  $T^{(i)}$ . O único caso restante é quando o vértice  $v$  é vizinho de alguém em  $V_i$ . Neste caso, conforme verificado anteriormente,  $v$  deve estar em toda clique de  $A$ , basta, então, unir o caminho correspondente a  $v$  em  $T_i$  com as arestas do caminho  $A$ , tendo, assim, formado um novo caminho  $P_v$  em  $T^{(i)}$  correspondente ao vértice  $v$ .

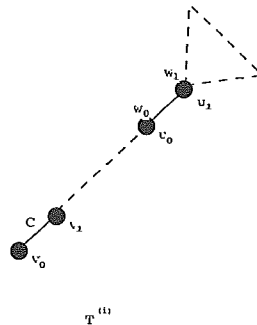


Figura 5.6:  $T^{(i)}$  construída pelo processo descrito para o caso 2.

Cada aresta da árvore  $T^{(i)}$  é uma aresta clique de  $T^{(i-1)}$  ou de  $T_i$  e, portanto, corresponde à uma clique de  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \cup C]$ . Por outro lado, cada clique deste grafo corresponde à uma aresta em  $T^{(i-1)}$  ou em  $T_i$ . Como arestas não são excluídas

no processo, existe uma aresta em  $T^{(i)}$  correspondente à cada clique. Portanto,  $T^{(i)}$  é uma árvore característica  $UEH$  para o grafo  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_t \cup C]$ . Então, para cada cor, podemos construir uma árvore característica  $UEH$  onde  $C$  é uma aresta-folha.

Para construir uma árvore característica do grafo  $G$ , basta identificar as arestas  $C_1 = (v_0, v_1)$  e  $C_2 = (v'_0, v'_1)$  correspondentes a  $C$  na árvore característica dos  $G_i$ 's coloridos por uma cor e para os  $G_i$ 's coloridos pela outra, respectivamente, sempre identificando um vértice de grau um com o vértice extremo da outra aresta cujo grau é maior do que um, como mostra a figura 5.7.

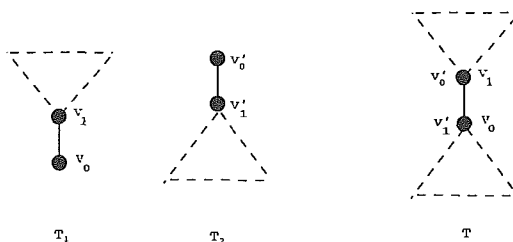


Figura 5.7: Árvore característica  $T$  construída a partir das árvores características  $T_1$  e  $T_2$  de cada cor.

Portanto,  $G$  é  $UEH$ . ■

### 5.3 Caracterização de $UE \cap \text{CORDAL}$ pela Decomposição por Cliques

Nesta seção, enunciamos e provamos o teorema de caracterização para grafos  $UE \cap \text{Cordial}$  que contém um separador clique.

Seja  $G$  um grafo  $UE$  que é cordal e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de  $G$ .

Como feito na seção 4.1, vamos considerar que todas as cliques de um grafo  $UE$  têm uma garra correspondente em  $T$ . Quando  $C$  for uma clique garra, iremos nos referir à garra correspondente à  $C$  na árvore  $T$  como *garra*  $C$ .

Sejam  $C'$  e  $C''$  cliques aresta de  $G$ . Definimos  $P(C', C'')$  como o único caminho (conjunto de arestas) entre as arestas da árvore  $T$  correspondentes às cliques aresta  $C'$  e  $C''$ , incluindo estas arestas. Ou ainda, como sendo o único caminho em  $T$  entre os centros das garras  $C'$  e  $C''$ , se estas forem cliques garra.

Uma *garra-extremo* é uma garra que possui dois braços de grau um.

Um caminho  $P$  *atravessa uma garra*  $C'$  se  $P$  contém dois braços de  $C$ .

Uma clique  $C'$  de  $G$ , com  $C' \neq C$ , *está associada* à um braço  $A$  de  $C$ , onde  $C$  é um separador clique de  $G$ , quando  $A$  está no único caminho em  $T$  entre o centro da garra  $C'$  e o da garra  $C$ .

**Teorema 5.11 (Teorema do Separador para  $UE \cap \text{Cordial}$ )** [Monma e Wei [7]]  $G$  é um grafo  $UE$  e cordal se e somente se cada  $G_i$  é  $UE$  e cordal e o grafo dos antipodais é 3-colorível de forma que, para cada  $v \in C$ , o conjunto dos subgrafos vizinhos de  $v$  está 2-colorido.

*Prova:* ( $\implies$ ) Sejam  $G$  um grafo  $UE$  e cordal com separador clique  $C$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de  $G$ .

Primeiramente vamos mostrar que cada  $G_i$  é  $UE$  e cordal com uma representação  $UE$  onde  $C$  é uma garra-extremo.

Seja  $P(V_i)$  o subgrafo de  $T$  induzido pelas arestas que estão em algum caminho que representa um vértice de  $V_i$ . Como  $G[V_i]$  é conexo,  $P(V_i)$  é conexo.

Seja  $v_0$  o vértice de  $P(V_i)$  mais próximo à garra  $C$ . Construa cada  $T_i$  acrescentando a  $P(V_i)$  uma nova garra  $C'$ , correspondente à clique  $C$ , onde um dos braços tem  $v_0$  como extremo e de modo que entre as arestas de  $C$  e de  $C'$  haja uma correspondência, como mostra a figura 5.8.

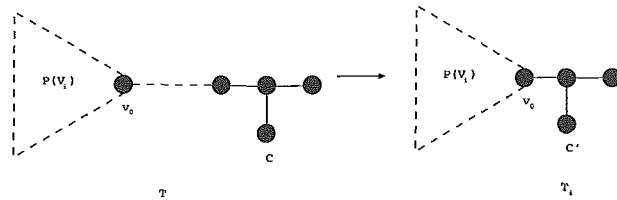


Figura 5.8: Construção de  $T_i$  a partir de  $T$ .

Os caminhos que representam vértices em  $V_i$  continuam sendo os mesmos e os que representam vértices de  $C$  passam pelos braços que correspondem aos braços de  $C$  por onde passam em  $T$  e passam pelas arestas de  $P(V_i)$  por onde passam em  $T$ . Assim sendo,  $(T_i, \mathcal{P}_i)$  é uma representação  $UE$  de  $G_i$  com  $C$  como garra-extremo. E ainda, como  $UE$  e *Cordial* são classes hereditárias, cada  $G_i$  é  $UE$  e cordal.

Vamos mostrar que os  $G_i$ 's podem ser 3-coloridos de maneira que pares de grafos antipodais não têm a mesma cor e que o conjunto de subgrafos vizinhos de  $v$ , para todo  $v \in C$ , está 2-colorido. Para isso observamos o seguinte:

**Fato 5.12** *Cliques de um mesmo  $G_i$  estão associadas ao mesmo braço da garra  $C$  em  $T$ .*

*Prova:* É fácil ver que se existissem cliques  $C_i$  e  $C'_i$  de um mesmo  $G_i$  associadas a braços diferentes de  $C$ , a retirada de  $C$  desconectaria  $C_i$  e  $C'_i$ , contradizendo o fato de  $G[V_i]$  ser conexo. ■

Pelo fato 5.12, podemos associar os  $G_i$ 's aos braços da garra  $C$  de acordo com o braço ao qual suas cliques estão associadas. Assim, o conjunto dos  $G_i$ 's pode ser particionado em três subconjuntos. Vamos atribuir a mesma cor aos  $G_i$ 's em uma mesma parte. E temos, então, uma 3-coloração para os  $G_i$ 's. Falta provar que esta coloração não atribui a mesma cor a grafos antipodais.

Vamos mostrar, então, que os  $G_i$ 's associados a um mesmo braço da garra  $C$  não são antipodais.

Suponha, por absurdo, que existem  $G_1$  e  $G_2$  grafos antipodais associados ao mesmo braço  $A$  da garra  $C$ . Analisaremos as quatro situações possíveis para  $G_1$  e  $G_2$  antipodais. Para facilitar a análise estabelecemos alguns fatos:

**Fato 5.13** *Cada  $G_i$  não contém pares de cliques antipodais.*

*Prova:* Sejam  $C_1$  e  $C_2$  cliques de  $G_i$  tais que  $C_1$  e  $C_2$  são antipodais. Então existem  $x, y, z$  em  $C$  tais que  $x \in C_1 \setminus C_2$ ,  $y \in C_2 \setminus C_1$  e  $z \in C_1 \cap C_2$ .

$P_z$  deve passar por duas arestas de  $C$ , de  $C_1$  e de  $C_2$ .

Mas, então, ou  $C_1$  está entre  $C$  e  $C_2$  ou  $C_2$  está entre  $C$  e  $C_1$ , em  $P_z$ . No primeiro caso,  $P_y$ , obrigatoriamente, deverá passar por duas arestas da garra  $C_1$  em  $T$ , o que é uma contradição. No outro caso, é obtida uma contradição análoga, já que  $x$  estaria em  $C_2$ . Portanto, não podem existir cliques antipodais em um mesmo  $G_i$ . ■

**Fato 5.14** *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  cliques garra associadas ao mesmo braço de  $C$  em  $T$ . Se  $C_1$  e  $C_2$  são não disjuntas em relação a  $C$  então*

1.  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$  ou  $P(C, C_1)$  atravessa  $C_2$ ;
2. Se  $C_1 \supset C_2$ , então  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$ ;
3. Se  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$ , então  $C_1 \supseteq C_2$ .

*Prova:* Sejam  $C_1$  e  $C_2$  cliques garra não disjuntas em relação a  $C$  associadas a um mesmo braço de  $C$  em  $T$ .

(1) Como existe algum vértice  $v$  de  $C$  tal que  $P_v$  passa por  $C, C_1$  e  $C_2$ , com  $P_v \in \mathcal{P}_i$ , ou as duas arestas da garra  $C_1$  ficam entre as de  $C$  e as de  $C_2$  em  $P_v$  ou as duas arestas da garra  $C_2$  ficam entre as de  $C$  e as de  $C_1$  em  $P_v$  em  $T_i$ , já que  $C$  é uma garra-extremo. Mas isto é o mesmo que dizer que  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$  ou  $P(C, C_1)$  atravessa  $C_2$ .

(2) Suponha que  $C_1 \supset C_2$ . Assim, todo caminho  $P_v$  em  $\mathcal{P}_i$  correspondente a um vértice  $v$  de  $C_2$  obrigatoriamente passa por duas arestas de  $C_1$ . Mas, então,  $C_1$  é atravessada por  $P(C, C_2)$ .

(3) Suponha, agora, que  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$ . Então, todo vértice  $v$  de  $C$  que está em  $C_2$  tem seu caminho correspondente  $P_v$  em  $\mathcal{P}_i$  passando por duas arestas de  $C_1$  logo,  $v \in C_1$ . Assim,  $C_1 \supseteq C_2$ . ■

**Fato 5.15** *Sejam  $C_i$  e  $C'_i$  duas cliques de  $G_i$ . Então, toda clique atravessada por  $P(C_i, C'_i)$  está em  $G_i$ .*

*Prova:* Sejam  $C_i$  e  $C'_i$  duas cliques de  $G_i$ . Seja  $C_k$  uma clique de  $G$  tal que  $P(C_i, C'_i)$  atravessa  $C_k$ .

Observe que, em  $G[V_i]$  existe um caminho entre vértices da clique  $C_i$  e vértices de  $C'_i$ . Mas, em  $T_i$ , isto significa que existe uma seqüência de caminhos conectando a garra  $C_i$  e a garra  $C'_i$ . Além disso,  $P(C_i, C'_i)$  está contida nesta seqüência de caminhos. Então, algum caminho da seqüência, obrigatoriamente, atravessa a garra  $C_k$ . Logo,  $C_k$  está em  $G[V_i]$  e, portanto,  $C_k$  está em  $G_i$ . ■

Vamos, agora, analisar os casos.



(1)  $\mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{C}_2$  são antipodais.

Sejam  $u$  e  $v$  vértices de  $G$  tais que  $u \in \mathbb{C}_1 \setminus \mathbb{C}_2$  e  $v \in \mathbb{C}_2 \setminus \mathbb{C}_1$ . Como  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 \neq \emptyset$ , existe um vértice  $w \in C$  em tal conjunto. Logo, na árvore  $T$ ,  $P_w$  contém dois braços de  $C$ , dois de  $C_1$  e dois de  $C_2$ . Suponha, sem perda de generalidade, que os braços de  $C_1$  ficam entre os de  $C_2$  e os de  $C$  neste caminho.

Observe que  $P_v$  passa por duas arestas de  $C_2$  e duas de  $C$  e, conseqüentemente, passa por duas da garra  $C_1$ . Desta forma,  $v \in C_1$ , o que é uma contradição.

(2)  $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$  e  $\mathbb{C}'_1 \subset \mathbb{C}'_2$ .

Pelo segundo item do fato 5.14,  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$  e  $P(C, C'_1)$  atravessa  $C'_2$ .

Observe que  $C'_2 \in P(C, C'_2)$  e  $C'_2$  não pertence a  $P(C_1, C'_1)$ , pelo fato 5.15. Então,  $C'_2 \in P(C, C_1)$ .

Neste caso,  $C_1$  é atravessado por  $P(C_2, C'_2)$  e então  $C_1 \in G_2$ , o que é uma contradição.

(3a)  $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$  e  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$ ;

Como  $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$ , então  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$ .

Observe que  $C_1$  não pertence a  $P(C_2, C'_2)$ , pelo fato 5.15. Logo,  $C_1$  pertence à  $P(C, C'_2)$ , pois pertence a  $P(C, C_2)$ . Mas isto contradiz o fato de que  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$ .

(3b)  $\mathbb{C}_2 \supset \mathbb{C}_1$  e  $\mathbb{C}_2 \cap \mathbb{C}'_1 = \emptyset$ ;

A análise deste caso é análoga à do caso (3a).

(4)  $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2$ ,  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$  e  $\mathbb{C}'_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$ ;

Como  $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$ , então  $P(C, C'_2)$  não atravessa  $C_1$  e  $P(C, C_1)$  não atravessa  $C'_2$ . Analogamente,  $P(C, C'_1)$  não atravessa  $C_2$  e  $P(C, C_2)$  não atravessa  $C'_1$ .

Além disso, pelo primeiro item do fato 5.14,  $P(C, C_1)$  atravessa  $C_2$  ou  $P(C, C_2)$  atravessa  $C_1$ . No primeiro caso, como  $C_2$  não é atravessada por  $P(C, C'_1)$ , temos que  $C_2 \in P(C_1, C'_1)$  e, conseqüentemente,  $C_2 \in G_1$ , o que é uma contradição. No outro caso, como  $C_1 \notin P(C_2, C'_2)$ , então  $P(C, C'_2)$  atravessa  $C_1$ . Entretanto, por observação anterior,  $C_1$  não é atravessada por  $P(C, C'_2)$ .

Como todos os casos possíveis foram analisados, podemos concluir que a 3-coloração descrita para os  $G_i$ 's não atribui a mesma cor a grafos antipodais. Falta

ainda provar que, para cada vértice  $v \in C$ , o conjunto de subgrafos vizinhos de  $v$  está 2-colorido.

Observe que, para cada  $v \in C$ ,  $P_v$  em  $T$  é um caminho que passa por dois braços da garra  $C$ , no máximo, então os  $G_i$ 's que são subgrafos vizinhos do vértice  $v$  estão coloridos com duas cores, no máximo.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo e  $C$  um separador clique de  $G$  tal que cada  $G_i = G[V_i \cup C]$  é  $UE$  e cordal,  $1 \leq i \leq s$ , e o grafo dos antipodais pode ser 3-colorido de forma que, para cada  $v \in C$ , os subgrafos vizinhos de  $v$  estão 2-coloridos.

Pelo lema 5.1,  $C$  não é separador de nenhum  $G_i$ , logo, deve ser uma garra-extremo em qualquer árvore da representação de  $G_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . E, ainda, pelo lema 5.5, existe uma ordenação  $G_1, G_2, \dots, G_t$  dos  $G_i$ 's associados a uma mesma cor tal que se  $G_i > G_j$  então  $i < j$ .

A partir de tal ordenação, vamos construir recursivamente uma árvore de representação  $UE$  dos grafos associados a uma mesma cor, já que satisfazem as hipóteses do lema 5.5.

Como cada  $G_i$  é  $UE$ ,  $G_1$  tem uma árvore de representação  $UE$ , onde  $C$  é uma garra-extremo. Suponha que  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  tem uma árvore de representação  $T^{(i-1)}$ , onde  $C$  é garra-extremo. Além disso,  $G_i$  é  $UE$  e *Cordal* e tem uma árvore de representação  $T_i$  com  $C$  como garra-extremo.

Devemos analisar duas situações:

*Caso 1:*  $\mathbb{G}_i$  não está contido em nenhum  $\mathbb{G}_j$ , para  $1 \leq j \leq i - 1$ ;

*Caso 2:* Existe algum  $G_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ , para o qual  $\mathbb{G}_i \subset \mathbb{G}_j$ .

No primeiro caso, como os subgrafos são dois a dois antipodais,  $\mathbb{G}_i$  é disjunto de qualquer outro  $\mathbb{G}_j$ ,  $1 \leq j \leq i - 1$ . Logo, basta identificar as garras correspondentes a  $C$ , identificando as arestas da garra associadas à mesma cor em  $T_i$  e em  $T^{(i-1)}$ , como mostra a figura 5.9.

Observe que vértices que não estavam em  $C$ , não têm seus caminhos modificados. Seja  $v \in C$ . Como não existem grafos antipodais dentre os grafos associados a uma mesma cor, o vértice  $v$  ou está somente em  $C$  ou está em  $C$  e em  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  ou está em  $C$  e em  $G_i$ . Em qualquer um dos casos, basta considerar  $P_v$

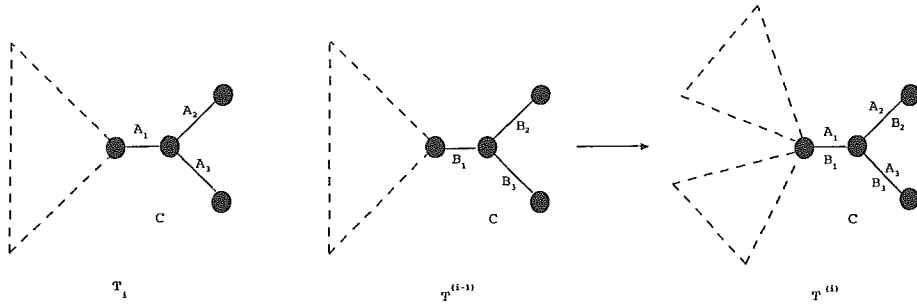


Figura 5.9: Construção de  $T^{(i)}$  a partir de  $T_i$  e  $T^{(i-1)}$ .

como sendo a união dos caminhos correspondentes a  $v$  em  $T^{(i-1)}$  e em  $T_i$ .

No segundo caso, seja  $v$  um vértice de  $C$  que está em  $\mathbb{G}_i$ . Em  $T^{(i-1)}$ ,  $P_v$  deve ser um caminho que atravessa todas as garras correspondentes às clique que dominam as cliques de  $G_i$ . Seja  $A$  a interseção de  $P_v$  com as arestas destas cliques garra. Obviamente,  $A$  é um caminho e  $C$  está em  $A$ . Sejam  $C$  e  $C'$  cliques correspondentes às garras cujas arestas estão nos extremos de  $A$ .

Observe que podem acontecer dois casos: todo caminho correspondente à um vértice de  $C$  que está em  $\mathbb{G}_i$  passa pelas mesmas arestas de  $A$  em  $T^{(i-1)}$  ou existe algum vértice  $w \in C$  para o qual isto não acontece.

Se o segundo caso acontece, vamos modificar os caminhos em  $T^{(i-1)}$  a fim de obtermos  $P_w = A$  para todo vértice  $w \in C$  que está em  $\mathbb{G}_i$ , com o mostra a figura 5.10.

Seja  $w \in C$  um vértice em  $\mathbb{G}_i$  tal que, em  $T^{(i-1)}$ ,  $P_w \neq A$ . Como  $P_w$  deve atravessar todas as garras atravessadas por  $A$  e  $P_w \neq A$  então  $P_w$  e  $A$  podem diferir apenas nas arestas de  $C$  e  $C'$  por onde passam. Em  $C$  basta fazer com que  $P_w$  passe pelas mesmas arestas de  $A$ , já que  $C$  é garra-extremo e esta mudança não interfere nas adjacências. Em  $C'$ , sejam  $e_1$  e  $e_2$  as arestas por onde passa  $P_w$  e  $e_1$  e  $e_3$  as de  $A$ . Modificamos  $P_w$  fazendo-o passar por  $e_1$  e  $e_3$ . Vamos provar que tal mudança não altera adjacências, ou seja, não existe um vértice  $z$  em  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  adjacente à  $w$  e não à  $v$ . Seja  $z$  um vértice nestas condições. Seja  $C''$  uma clique de  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$  contendo  $z$ .  $C''$  têm um vértice de  $C$  em comum com alguma clique de  $G_i$ , então deve dominar toda clique de  $G_i$ . Mas  $v \notin C''$  e  $v$  é um vértice de  $C$  que está em  $\mathbb{G}_i$ . Logo  $C''$  não pode dominar toda clique de  $G_i$  já que não domina, em particular, as cliques de  $G_i$  às quais  $v$  pertence.

Feitas tais modificações, podemos afirmar que  $P_w = A$  em  $T^{(i-1)}$  para todo

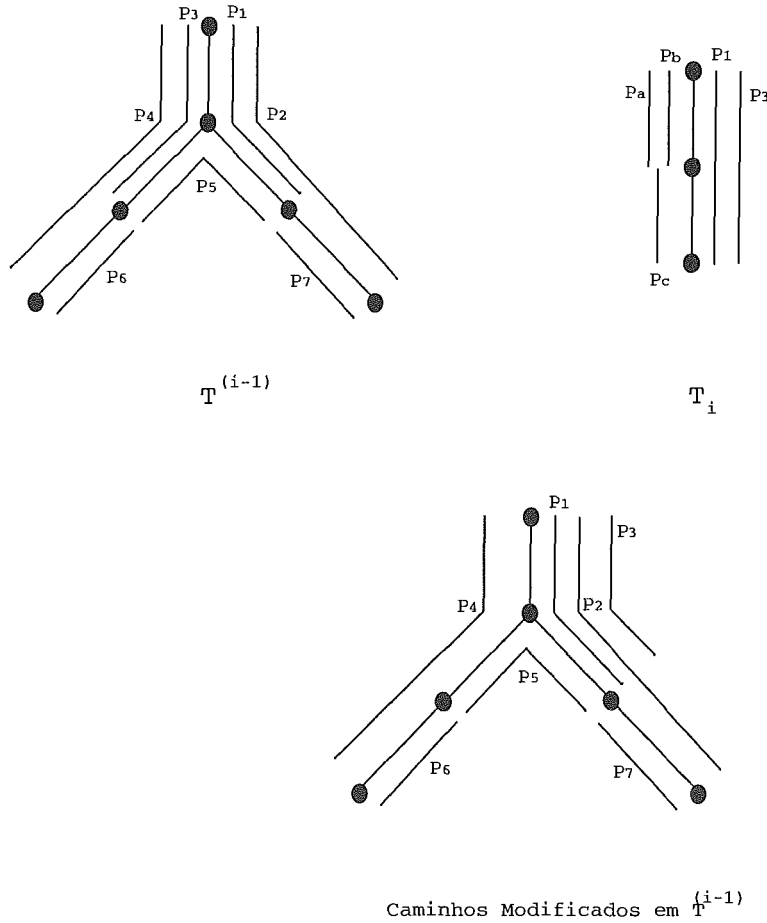


Figura 5.10: Exemplo de caso onde é necessária a modificação nos caminhos de  $T^{(i-1)}$ .

vértice  $w$  de  $C$  que está em  $\mathbb{G}_i$ .

Basta, então, identificar a garra correspondente à  $C$  em  $T_i$  com  $C'$ , como mostrado na figura 5.11.

Qualquer vértice de  $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i]$  não têm seu caminho correspondente em  $T_i$  ou em  $T^{(i-1)}$  modificado.

Se  $v \in C$ ,  $v$  pode estar somente em  $C$ , somente em  $\mathbb{G}_i$  ou somente em  $\mathbb{G}_{V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1}}$ . Se o vértice está só em  $C$ ,  $P_v$  permanece o mesmo, usando duas arestas de  $C$ . Se está em  $\mathbb{G}_{V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1}}$  somente, o seu caminho correspondente continua sendo o mesmo. Agora, se  $v \in \mathbb{G}_i$ , vimos que  $P_v = A$  em  $T^{(i-1)}$ . Basta, então, unir o caminho correspondente a  $v$  em  $T_i$  com o caminho  $A$  para obter o caminho  $P_v$  na árvore  $T^{(i)}$ .

Seja  $\mathcal{P}_i$  a família formada pela união dos caminhos descritos anteriormente em

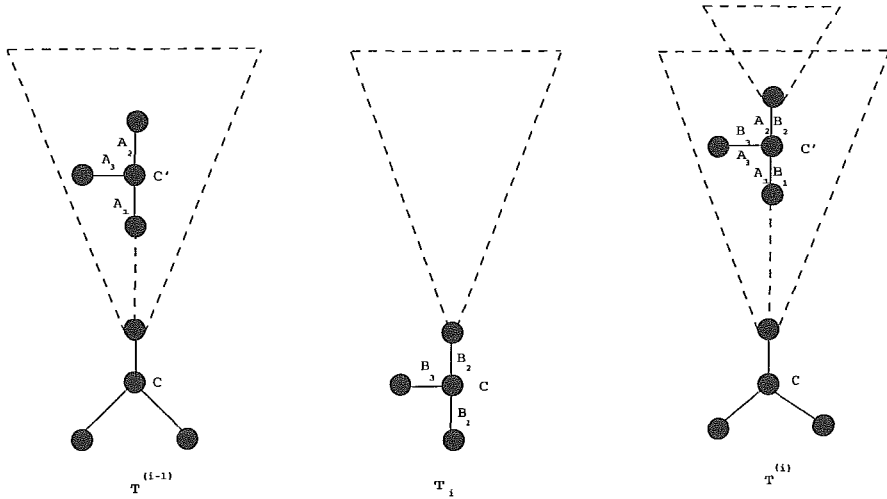


Figura 5.11: Construção de  $T^{(i)}$  a partir de  $T_i$  e  $T^{(i-1)}$  para o segundo caso.

$T_i$ . Desta forma,  $(T^{(i)}, \mathcal{P}_i)$ , é uma representação  $UE$  para os subgrafos associados a uma mesma cor.

Para obter a árvore de representação  $UE$  para o grafo  $G$ , basta identificar as garras-extremo correspondentes a  $C$  em cada árvore de modo que árvores correspondentes à uma mesma cor fiquem associadas ao mesmo braço, como mostra a figura 5.12.

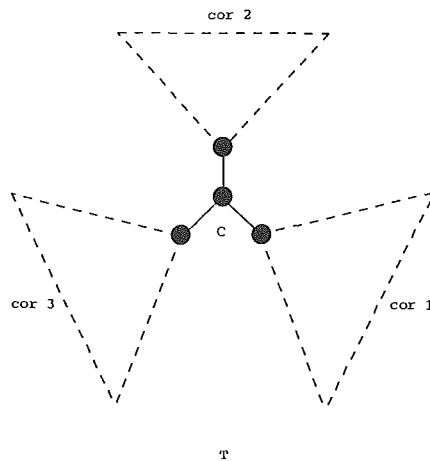


Figura 5.12: Construção da árvore  $T$ .

Construímos a família de caminhos  $\mathcal{P}$  da seguinte forma: os vértices que estão em  $C$  permanecem com os mesmos caminhos correspondentes e os vértices de  $C$  têm como caminho correspondente em  $T$  a união dos caminhos que a este correspondem em, no máximo, duas subárvores associadas a uma cor, já que o conjunto de subgrafos vizinhos de tal vértice é 2-colorível.

Sendo assim,  $(\mathcal{P}, T)$  é uma representação  $UE$  do grafo  $G$ . Portanto,  $G$  é  $UE$ . ■

## 5.4 Grafos $UEH$ e $UE \cap \text{CORDAL}$ indecomponíveis

Nesta seção apresentamos as provas de Monma e Wei [7] que analisam os grafos  $UE$  e  $UEH$  que não podem ser decompostos por separadores clique, isto é, que são indecomponíveis ou átomos. Em seguida, fazemos a análise do problema de reconhecimento para estas classes de grafos.

**Teorema 5.16 (Golumbic e Jamison [6])** *Todo átomo  $UE$  é um grafo  $UE$  Local.*

*Prova:* Seja  $G$  um átomo  $UE$  e  $(\mathcal{P}, T)$  representação  $UE$  de  $G$ , onde  $T$  tem um número mínimo de arestas. Suponha, por absurdo, que  $G$  não é  $UE$  Local, ou seja, que  $G$  não possui uma representação  $UE$  onde o grafo base é uma estrela. Como  $T$  não é uma estrela,  $T$  contém um caminho com quatro vértices, digamos  $a, b, c$  e  $d$ .

Cada aresta  $e$  de  $T$  corresponde a um completo  $C_e$  em  $G$ . Além disso, como  $T$  é mínima, existem caminhos  $P_v$  e  $P_u$  em  $\mathcal{P}$  tais que  $v \in C_{ab} \setminus C_{bc}$  e  $u \in C_{cd} \setminus C_{bc}$ .

Se  $C_{bc}$  for uma clique, a retirada de  $(b, c)$  desconecta  $T$  com  $(a, b)$  e  $(c, d)$  em componentes conexas distintas. Logo, a retirada de  $C_{bc}$  desconecta  $v$  e  $u$  em  $G$ , o que contradiz o fato de  $G$  ser átomo. Assim,  $C_{bc}$  é um completo contido em uma clique  $C$  de  $G$ . Observe que  $C$  é clique garra já que, se fosse clique aresta, existiria a árvore  $T'$  obtida de  $T$  pela contração da aresta correspondente à  $C_{bc}$ . A garra de  $C$  é formada pelas arestas  $(b, c)$ ,  $(c, d)$  e, sem perda de generalidade, por uma outra aresta  $(c, e)$ , como mostra a figura 5.13.

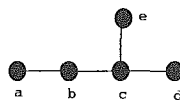


Figura 5.13: Estrutura em  $T$  da garra de  $C$ .

Observe que o vértice  $v$  não está em  $C'$ . Além disso, existe um caminho  $P_w$  em  $\mathcal{P}$  tal que  $w$  não está em  $C$  mas  $P_w$  está na subárvore  $T^*$  de  $T$  que contém os vértices  $c$  e todos os vértices cujo único caminho até o vértice  $a$ , obrigatoriamente, passa

por  $b$ , como mostra a figura 5.14. De fato, em caso contrário, em  $T^*$  só existiriam caminhos correspondentes às vértices da clique garra  $C$ , todas as outras arestas de  $T^*$  poderiam ser retiradas de  $T$  e destes caminhos, só permanecendo a aresta  $(b, c)$ , sendo que os caminhos que contém as arestas  $(c, d)$  e  $(c, e)$  são substituídos em  $\mathcal{P}$  pela aresta  $(b, c)$ , o que contradiz a minimalidade de  $T$ . Assim, a retirada de  $C$  desconecta  $v$  e  $w$  em  $G$ , e  $G$  não é átomo. O que é uma contradição. Portanto,  $G$  tem uma representação  $UE$  cujo grafo base é uma estrela. ■

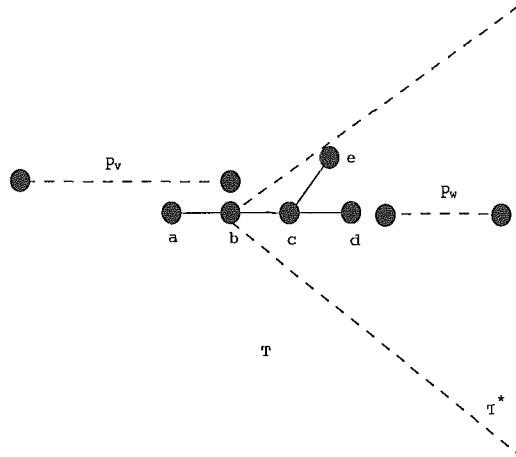


Figura 5.14: Estrutura dos caminhos  $P_v$  e  $P_w$  em  $T$ .

Observe que a recíproca do teorema anterior não é verdadeira dado que, por exemplo, o grafo de Hajós é  $UE$  Local e não é átomo.

**Teorema 5.17 (Monma e Wei [7])** *Todo átomo  $UEH$  é um grafo  $UEH$  Local.*

*Prova:* Seja  $G$  um átomo  $UEH$  e  $T$  uma árvore característica de  $G$ . Se  $T$  tiver um caminho com quatro vértices,  $a, b, c$  e  $d$ , como toda aresta de  $T$  corresponde a uma clique, a retirada da aresta  $(b, c)$  desconecta a árvore e a retirada da clique a ela correspondente em  $G$  desconecta  $G$ , contradizendo o fato de  $G$  ser átomo.

Portanto, toda árvore característica de  $G$  é uma estrela e, conseqüentemente,  $G$  é  $UEH$  Local. ■

A recíproca deste teorema também não é verdadeira visto que o grafo da figura 1.1 é  $UEH$  Local mas não é átomo.

Analisamos agora a complexidade de reconhecer se um dado átomo é grafo  $UE$ .

**Corolário 5.18** (Monma e Wei [7]) *Átomos  $UE$  podem ser reconhecidos eficientemente.*

*Prova:* Seja  $G$  um átomo. Testar se  $G$  é grafo  $UE$  equivale a testar se  $G$  é grafo linha de um multigrafo. Para tal, basta testar se o grafo  $G'$ , obtido de  $G$  pela remoção dos vértices que são gêmeos de algum vértice de  $G$ , é grafo linha de um grafo. O que pode ser feito em tempo linear [13]. ■

Para reconhecer átomos  $UEH$  precisamos ainda do seguinte resultado:

**Lema 5.19** *Se  $G$  é um átomo, então  $G$  é  $UEH$  se e somente se cada vértice de  $G$  está em no máximo duas cliques de  $G$ .*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $G$  um átomo  $UEH$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UEH$  de  $G$  onde  $T$  é árvore característica.

Pelo teorema 5.17,  $T$  é uma estrela. Neste caso, cada caminho de  $\mathcal{P}$  passa por duas arestas de  $T$ , no máximo. Isto equivale a dizer que cada vértice de  $G$  está, no máximo, em duas cliques.

( $\impliedby$ ) Seja  $G$  um átomo onde cada vértice está em duas cliques no máximo. Podemos construir uma estrela  $T$  onde cada braço corresponde a uma clique e  $P_v$ , para cada  $v \in V(G)$ , é constituído das arestas correspondentes às cliques de  $G$  que contém  $v$ . Claramente,  $T$  é uma árvore característica de  $G$  e, pelo teorema 3.16,  $G$  é  $UEH$ . ■

**Corolário 5.20** *Átomos  $UEH$  podem ser reconhecidos eficientemente.*

*Prova:* Seja  $G$  um átomo. Reconhecer se  $G$  é grafo  $UEH$  é o mesmo que saber se, em  $G$ , todo vértice está contido no máximo em duas cliques. Isto pode ser feito em tempo polinomial, já que podemos gerar todas as cliques do  $G$  até a cota polinomial dada no teorema 3.14 verificando se cada vértice de  $G$  está no máximo em duas cliques. ■



## 5.5 Problema do Reconhecimento dos grafos UEH

Nesta seção, vamos considerar o problema de, dado um grafo  $G = (V, E)$ , reconhecer se este grafo pertence à classe de grafos  $UEH$ . A versão decisão deste problema é :

**Problema:** RECONHECIMENTO DE GRAFOS  $UEH$

*Instância:* Um grafo  $G = (V, E)$ .

*Questão:* O grafo  $G$  é  $UEH$ ?

Baseado no teorema 5.6 e na decomposição por cliques, temos um algoritmo polinomial para resolver este problema.

**Algoritmo 5.21** *RECONHECIMENTO DE GRAFOS UEH*

*Entrada:* Um grafo  $G = (V, E)$ .

*Saída:*  $G$  é  $UEH$  ou  $G$  não é  $UEH$ .

Passo 1: Obter uma decomposição por cliques para  $G$ ;

Passo 2: Verificar se as folhas da decomposição são grafos  $UEH$ ;

Passo 3: Verificar, em cada separação obtida na decomposição por cliques, se o teorema 5.6 é satisfeito.

**Teorema 5.22** *O algoritmo 5.21 tem complexidade de tempo polinomial.*

*Prova:* Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Denotamos por  $n$  o número de vértices,  $m$  o número de arestas e  $q$  o tamanho da família de cliques de  $G$ .

Como visto na subseção 5.1.1, o passo 1 pode ser feito em  $O(nmq + (n + m)q)$ .

O passo 2, pelo corolário 5.19, pode ser feito em  $O(nq)$ .

Por último, verificar o teorema 5.6 é satisfeito em cada separação obtida é testar  $q$  vezes se o grafo dos antipodais obtido naquele passo da decomposição é 2-colorível que pode ser feito em  $O(m+n)$ . Logo, o passo 3 pode ser executado em  $O(q(m+n))$ .

Com a análise dos três passos do algoritmo, podemos concluir que o problema do reconhecimento para grafos  $UEH$  é polinomial, visto que para esta classe  $q \leq \frac{3n-4}{2}$ , pelo teorema 3.14.

Uma tentativa natural seria adaptar o algoritmo descrito para a classe  $UEH$  e encontrar um algoritmo análogo para o reconhecimento dos grafos na classe  $UE$ . A complexidade dos passos 1 e 2 do algoritmo não se altera, já que a análise foi feita para grafos  $UE$  em geral. Já o passo 3, verificar o Teorema do Separador para  $UE \cap Cordal$ , não pode ser analisado de forma semelhante pelo fato de que, neste processo, deve-se decidir se o grafo dos antipodais, para cada separador clique, é um grafo 3-colorível, o que é um problema NP-Completo [11]. Portanto, uma aplicação direta do Teorema do Separador para  $UE \cap Cordal$  não fornece um algoritmo polinomial para resolver o problema do reconhecimento para esta classe, o que não é uma surpresa já que o problema do reconhecimento de grafos  $UE$  é NP-Completo, como vimos no corolário 4.7.

# Capítulo 6

## Interseções entre Classes

Neste capítulo, apresentamos resultados referentes à relações de inclusão entre as classes de grafos de caminho,  $UE$  e subclasses, grafos perfeitos e clique-Helly. Os resultados foram separados por seções de acordo com as classes envolvidas.

Nas seções 6.1, 6.2 e 6.5 reproduzimos os resultados de Monma e Wei [7] sobre as classes  $DE$ ,  $DV$ ,  $RDE$ ,  $RDV$ ,  $UEH$ , *Perfeito* e *Cordal*. Na primeira seção provamos que a classe  $DV$  está contida na classe  $DE$ . Na seção seguinte provamos a igualdade entre as classes  $RDE$  e  $RDV$ . E, na seção 6.5, mostramos que os grafos  $DE$  são exatamente os grafos  $UEH$  que são perfeitos e os grafos  $DV$  são os grafos  $UEH$  que são cordais.

Na seção 6.3 apresentamos o resultado de Sysło [15] sobre a interseção das classes  $UE$ ,  $UV$  e *Cordal*. Devido à sua complexidade, este resultado recebeu destaque especial em um dos trabalhos do autor. O teorema de Sysło afirma que os grafos simultaneamente  $UE$  que são cordais são exatamente os grafos  $UE$  que são  $UV$ .

Na seção 6.4, apresentamos os resultados de Golumbic e Jamison [6] sobre a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos para a classe dos grafos  $UE$ . Estes resultados são utilizados na análise dos grafos  $UE$  que são perfeitos e para provar os resultados da seção seguinte sobre grafos  $UEH$  que são perfeitos.

Na seção 6.6 estabelecemos a relação entre as classes  $UEH$  e clique-Helly, respondendo com isto à questão natural sobre a presença da propriedade Helly na definição destas classes.

No final do capítulo apresentamos um diagrama que ilustra os resultados aqui apresentados.

## 6.1 As Classes DE e DV

É natural perguntarmos sobre as relações entre os grafos de interseção em vértices e em arestas de caminhos em uma árvore. Monma e Wei [7], após introduzirem as classes  $DV$  e  $DE$ , provaram o seguinte resultado.

**Teorema 6.1** (Monma e Wei [7]) *Todo grafo  $DV$  é um grafo  $DE$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $DV$  de  $G$ . Uma árvore  $T'$  é construída pela substituição de cada vértice  $v$  de  $T$  por uma nova aresta direcionada  $(v, v')$ . Toda aresta que entra em  $v$  em  $T$  não é modificada em  $T'$  e as que saem de  $v$  em  $T$  passam a sair de  $v'$  em  $T'$ . Uma nova família  $\mathcal{P}'$  é construída de maneira análoga. Falta mostrarmos que  $\Omega_v(\mathcal{P}, T) = \Omega_e(\mathcal{P}', T')$ . Sejam  $P_u$  e  $P_w$  caminhos de  $\mathcal{P}$  com um vértice  $v$  em comum. Por construção, em  $\mathcal{P}'$  existem caminhos  $P'_u$  e  $P'_w$  passando pela aresta  $(v, v')$  de  $T'$ . Por outro lado, se existem caminhos  $P'_u$  e  $P'_w$  em  $T'$  passando por uma mesma aresta, ou  $P_u$  e  $P_w$  têm uma aresta em comum ou as arestas em comum são provenientes do processo de transformação aplicado à árvore  $T$ . No primeiro caso, se os caminhos têm uma aresta em comum, então eles também têm um vértice em comum. No outro caso, possuem uma aresta do tipo  $(v, v')$  e os caminhos  $P_u$  e  $P_w$  passam pelo vértice  $v$  de  $T$ . Logo, caminhos em  $\mathcal{P}$  compartilham um vértice se e somente se os caminhos a eles correspondentes em  $\mathcal{P}'$  compartilham uma aresta.

Portanto,  $G = \Omega_e(\mathcal{P}', T')$  e  $DV \subseteq DE$ . ■

Observe que a inclusão é própria. De fato,  $C_4$  é um grafo  $DE$ , como mostra a figura 3.2, e não é  $DV$ , já que não é cordal e todo grafo  $DV$  é cordal (teorema 2.3).

## 6.2 As Classes RDE e RDV

Uma inclusão não própria é obtida se analisarmos grafos de interseção de caminhos em árvores enraizadas. O teorema a seguir foi provado por Monma e Wei [7], onde a classe  $RDE$  foi definida.

**Teorema 6.2** (Monma e Wei [7])  *$G$  é um grafo  $RDV$  se e somente se é  $RDE$ .*

*Prova:* ( $\implies$ ) A construção definida na prova do teorema 6.1 preserva a raiz de uma árvore enraizada. Assim, ela pode ser também usada para transformar uma representação  $RDV$  em uma representação  $RDE$  de um mesmo grafo.

( $\impliedby$ ) Seja  $G$  um grafo tal que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ , onde  $T$  é uma árvore enraizada e  $\mathcal{P}$  é uma família de caminhos direcionados em  $T$ .

Uma nova árvore  $T'$  é construída pela associação de um vértice a cada aresta de  $T$  e tal que dados dois vértices  $v$  e  $w$ , existe uma aresta direcionada  $(v, w)$  se e somente se a aresta correspondente à  $v$  aponta para a aresta correspondente à  $w$  em  $T$ , como mostra a figura 6.1. Uma nova família  $\mathcal{P}'$  de caminhos é construída associando a cada caminho  $P$  em  $\mathcal{P}$  o caminho  $P'$  formado pelos vértices de  $T'$  que correspondem às arestas de  $P$ . Falta provar que  $\Omega_e(\mathcal{P}, T) = \Omega_v(\mathcal{P}', T')$ .

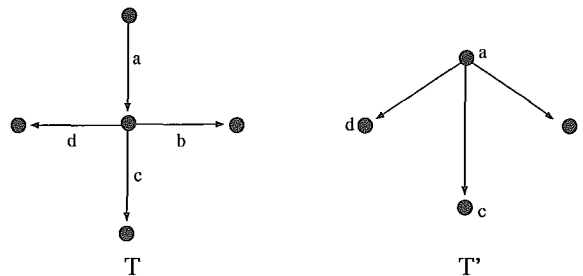


Figura 6.1: Exemplo da transformação feita na árvore  $T$ .

Sejam  $P$  e  $Q$  caminhos em que têm uma aresta de  $T$  em comum. Em  $T'$  tal aresta corresponde a um vértice e os caminhos  $P'$  e  $Q'$  que estão em correspondência com os caminhos  $P$  e  $Q$  contêm este vértice. Logo,  $P'$  e  $Q'$  têm um vértice em comum e se intersectam em vértices. Por outro lado, se  $P'$  e  $Q'$  são caminhos de  $\mathcal{P}'$  que se intersectam em vértices, podemos concluir, analogamente, que  $P$  e  $Q$  se intersectam em arestas.

Portanto,  $RDV = RDE$ . ■

Observe que a transformação descrita na prova da volta do teorema 6.2 não pode ser aplicada em árvores não enraizadas, pois o processo poderia gerar grafos  $T'$  que não são árvores, como mostra a figura 6.2.

Observe também que quando a árvore e os caminhos não são direcionados, as transformações descritas nas seções 6.1 e 6.2 também não podem ser aplicadas. Pois, neste caso não podemos garantir que os caminhos em  $\mathcal{P}$  que passam por um

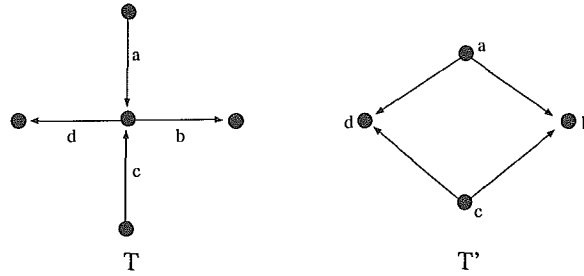


Figura 6.2: Aplicação da transformação em árvore não enraizada.

vértice  $v$  têm seus caminhos correspondentes em  $T'$  passando pela aresta  $(v, v')$ , como mostrado na figura 6.3.

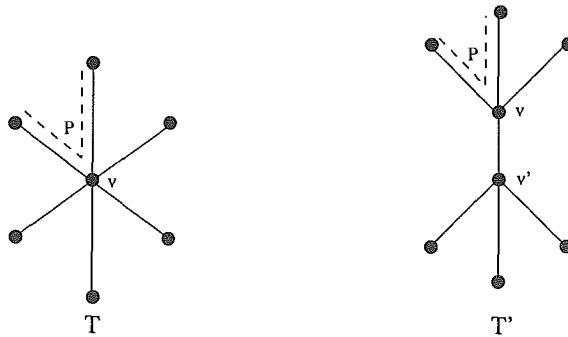


Figura 6.3: Transformação do vértice  $v$  na aresta  $(v, v')$ .

### 6.3 As Classes UE, UV e CORDAL

No mesmo artigo em que introduziu a classe dos grafos  $UE$  [14], em 1978, Sysło conjecturou que todo grafo  $UE$  e cordal também é grafo  $UV$ . Em 1985, ele finalmente provou esta conjectura [15], usando os resultados estruturais obtidos por Golubic e Jamison [5], em particular a caracterização dos grafos que são simultaneamente  $UE$  e  $UV$ .

**Teorema 6.3 (Sysło [15])** *Todo grafo que é  $UE$  e cordal também é  $UV$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo  $UE$  e cordal e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UE$  de  $G$  onde vértices extremos de dois caminhos de  $\mathcal{P}$  não coincidem e estes extremos têm grau dois em  $T$ . É fácil ver que sempre haverá uma árvore  $T$  e uma família  $\mathcal{P}$  tal que  $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$  satisfazendo tais restrições.

Se  $T$  têm grau três, então pelo teorema 4.2,  $G$  é grafo  $UV$ .

Caso contrário, existe um vértice  $w$  de  $T$  tal que  $d(w) > 3$ . Sejam  $T_w$  a estrela de  $T$  com centro em  $w$  e  $\mathcal{P}_w$  a subfamília de  $\mathcal{P}$  formada pelos caminhos que passam por  $w$ . Note que cada caminho de  $\mathcal{P}_w$  contém, exatamente, duas arestas de  $T_w$  já que contém  $w$ , e conseqüentemente, passam por uma aresta  $(w, a_i)$ . Como os extremos de um tal caminho, segundo restrição inicial, têm que ter grau dois em  $T$ ,  $w$  não é extremo de nenhum caminho. Logo, cada caminho deve passar também por uma outra aresta  $(w, a_j)$  de  $T_w$ .

Observe que  $G_w = \Omega_e(\mathcal{P}_w, T_w)$  é um subgrafo induzido de  $G$  já que  $\mathcal{P}_w \subseteq \mathcal{P}$  e, se dois caminhos de  $\mathcal{P}_w$  têm uma aresta em comum, como ambos contém o vértice  $w$ , pelo menos uma aresta desta interseção está em  $T_w$ . Além disso,  $G_w$  é um grafo  $UE$  Local e, pelo teorema 3.17, é o grafo linha de um multigrafo  $F_w$ . Note também que como  $G_w$  é subgrafo induzido de um grafo cordal,  $G_w$  também é cordal. Precisamos, agora, de uma caracterização para grafos linha cordais.

**Fato 6.4** *O grafo linha  $L(H)$  de um multigrafo  $H$  é cordal se e somente se  $H$  não contém ciclos  $C_n, n \geq 4$ , como subgrafos.*

*Prova:* Se  $H$  contém um  $C_n, n \geq 4$  como subgrafo, então, em  $L(H)$ , as arestas de  $C_n$  formam um ciclo induzido de mesmo tamanho. Logo,  $L(H)$  não é cordal. Por outro lado, um  $C_n$  com mais do que três vértices em  $L(H)$  corresponde a um ciclo com  $n$  vértices em  $H$ .

Imediatamente, temos:

**Corolário 6.5** *O grafo linha  $L(H)$  de um multigrafo  $H$  é cordal se e somente se toda componente biconexa de  $H$  é uma aresta ou um triângulo, possivelmente com arestas múltiplas.*

*Prova:* Como  $H$  não pode conter ciclos com mais do que três vértices, as componentes biconexas de  $H$  só podem ser arestas ou triângulos, possivelmente com arestas múltiplas.

Sabemos como é a estrutura de  $F_w$ . As arestas de  $F_w$  estão em correspondência com os vértices de  $G_w$  e como os vértices de  $G_w$  são caminhos de  $\mathcal{P}_w$ , as arestas de  $F_w$  estão em correspondência com os caminhos de  $\mathcal{P}_w$ . Além disso, dois caminhos

de  $\mathcal{P}_w$  têm uma aresta em comum se e somente se as arestas correspondentes a eles em  $F_w$  têm um vértice em comum. Vamos mostrar que as arestas de  $T_w$  estão em correspondência com os vértices de  $F_w$ .

**Fato 6.6** *Existe uma correspondência entre os vértices de  $F_w$  e as arestas de  $T_w$ .*

*Prova:* Para a demonstração deste fato, consideramos que em  $\mathcal{P}_w$  não existem elementos repetidos, isso em nada irá influenciar os vértices de  $F_w$  e nem as arestas de  $T_w$ , apenas não haverão arestas múltiplas em  $F_w$ . Temos, agora, que  $G_w$  é grafo linha de um grafo  $F_w$ . E, pelo teorema 2.2, existe uma família de completos de  $G_w$  que cobre as arestas de  $G_w$  exatamente uma vez e os vértices exatamente duas vezes. Além disso,  $F_w$  é o grafo de interseção desta família.

Seja  $\mathcal{K}$  a família dos completos  $K_i$  em  $G_w$  formados pelos vértices correspondentes aos caminhos de  $\mathcal{P}_w$  (vértices de  $G_w$ ) que contém a aresta  $(w, a_i)$ . Os vértices de  $G_w$  estão em exatamente dois destes completos pois são caminhos de  $\mathcal{P}_w$  e, por observação anterior, usam exatamente duas arestas  $(w, a_i)$  e  $(w, a_j)$  de  $T_w$ . Sendo assim, estão apenas em  $K_i$  e  $K_j$ . Cada aresta de  $G_w$  está na interseção de dois caminhos de  $\mathcal{P}_w$ , e esta interseção é exatamente uma aresta de  $T_w$ , já que não estamos considerando caminhos iguais em  $\mathcal{P}_w$ . Logo, esta aresta de  $G_w$  está somente no completo  $K_i$  formado pelos vértices correspondentes aos caminhos que contém a aresta  $(w, a_i)$  de  $T_w$ . Portanto,  $\mathcal{K}$  cobre os vértices de  $G_w$  duas vezes e cada aresta uma única vez. Assim,  $F_w = \Omega(\mathcal{K})$ . Então, os vértices de  $F_w$  são exatamente os elementos da família  $\mathcal{K}$  que são completos formados pelos vértices correspondentes aos caminhos que passam por uma aresta de  $T_w$ , desta forma, há uma correspondência entre os completos de  $\mathcal{K}$  e os vértices de  $F_w$ . Além disso, existe uma aresta entre dois vértices de  $F_w$  se e somente se os completos correspondentes a eles em  $G_w$  se interseccionam, ou seja, existe um caminho  $P_i$  que passa pelas arestas correspondentes a estes completos em  $T_w$ . Portanto, há uma correspondência entre os vértices de  $F_w$  e as arestas de  $T_w$ .

Um exemplo de  $T_w$ ,  $G_w$  e de uma família  $\mathcal{K}$  em  $G_w$  é dado na figura 6.4.



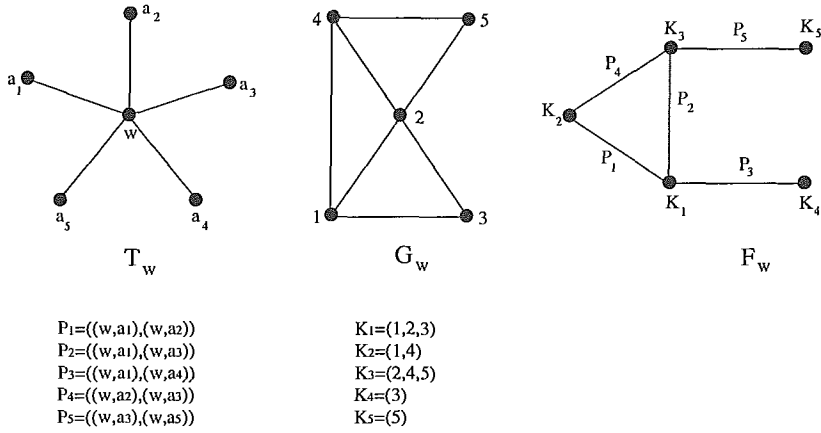


Figura 6.4: A subárvore  $T_w$  e os caminhos da família  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ , o grafo  $G_w$ , a família de completos e  $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\}$  e o grafo  $F_w = \Omega(\mathcal{K})$ .

Observe que as arestas  $(w, a_i)$  de  $T_w$  correspondem exatamente aos vértices  $K_i$  de  $F_w$ . ■

Assim,  $(\mathcal{P}_w, F_w)$  é candidato à uma representação  $UV$  de  $G_w$  a partir da representação  $UE$ , mas  $F_w$  não é uma árvore. Entretanto, conhecemos a estrutura de  $F_w$  e sabemos que só tem arestas e  $C_3$  como componentes biconexas. Então, seja  $F'_w$  o grafo (árvore) obtido de  $F_w$  transformando cada triângulo em uma 3-estrela, onde cada aresta  $e$  do triângulo é representada por um caminho de duas arestas  $e'$  da 3-estrela, como mostra a figura 6.5. Um exemplo da modificação do  $F_w$  e da família de caminhos é dado na figura 6.6.

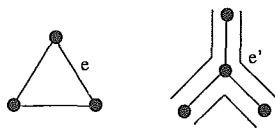


Figura 6.5: Transformação do triângulo em 3-estrela

Observe que o grafo  $UV$   $G'_w = \Omega_v(\mathcal{P}_w^*, F'_w)$ , onde  $\mathcal{P}_w^*$  é a família formada pelas arestas novas de  $F'_w$  acrescentadas pela modificação nos triângulos e pelas arestas originais de  $F_w$  que não pertencem à triângulos, é isomorfo a  $G_w$  pois os vértices de  $G_w$  correspondem a caminhos de  $\mathcal{P}_w$  que, por sua vez, correspondem às arestas de  $F_w$  e, em  $T_w$ , dois caminhos de  $\mathcal{P}_w$  têm uma aresta em comum se e somente se as arestas de  $F'_w$  a eles correspondentes têm um vértice em comum.

Esta transformação de  $T_w$  em  $F'_w$  pode ser aplicada à outra subárvore  $T_v$  de  $T$  para a qual  $d(v) \geq 4$  até que não existam mais vértices em tais condições.

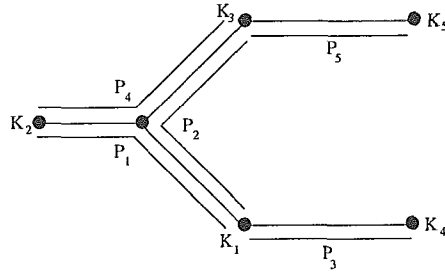


Figura 6.6:  $F'_w$  e  $\mathcal{P}^*$  para o exemplo da figura 6.4.

Seja  $e = (u, v)$  uma aresta de  $T$ . Se  $e$  não está em nenhum  $T_w$  tal que  $d(w) \geq 4$ , nada é modificado em  $T$ . Se  $e$  está em duas estrelas,  $T_u$  e  $T_v$ , os vértices correspondentes a  $e$  em  $F'_u$  e  $F'_v$  são identificados. E se  $e$  está apenas em uma estrela, digamos  $T_u$ , o vértice  $v$  é identificado com o vértice de  $F'_u$  correspondente à aresta  $e$ . Seja, então,  $T^*$  a árvore obtida de  $T$  pela inserção de  $F'_w$  no lugar de  $T_w$ , para todo  $w$  tal que  $d(w) \geq 4$ . Observe que, em  $T^*$ , todo caminho  $P_v \in \mathcal{P}$  é transformado em um novo caminho  $P'_v \in \mathcal{P}^*$ , segundo modificações na árvore  $T$ . Mas  $P_v$  e  $P_u$  em  $T$  se interceptam em arestas se e somente se  $P'_v$  e  $P'_u$  em  $T^*$  se interceptam em vértices.

Como estamos supondo que, na árvore  $T$  original, os extremos de dois caminhos não coincidem e têm grau dois, não irá acontecer o caso em que dois caminhos tenham como interseção apenas um vértice de grau menor ou igual a três, assim, não é necessário fazer ajustes na árvore e nos caminhos além dos descritos anteriormente.

Finalmente, temos que  $(\mathcal{P}^*, T^*)$  é uma representação  $UV$  de  $G$ . ■

Como a classe dos grafos  $UV$  está contida na classe dos grafos cordais, todo grafo  $UE$  e  $UV$  é também um grafo cordal, então temos a seguinte igualdade entre as interseções destas classes:

$$UE \cap UV = UE \cap \text{CORDAL}.$$

## 6.4 Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos para a classe UE

A Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos (CFGP) pode ser enunciada do seguinte modo: *Um grafo  $G$  é perfeito se e somente se  $G$  não contém, como subgrafo induzido, um  $C_n$  e nem um  $\overline{C_n}$  para  $n$  ímpar e  $n \geq 5$ .*

Como um  $C_n$ ,  $n$  ímpar, não é um grafo perfeito porque têm número cromático igual a três e o tamanho da maior clique é 2, um lado da CFGP (Se  $G$  é perfeito então não contém um ciclo ímpar de tamanho maior ou igual a cinco e nem o complemento de um) é válido para qualquer grafo porque um grafo perfeito jamais poderá conter, como subgrafo induzido, um  $C_n$ , para  $n$  ímpar. Além disso, Berge conjecturou, em 1961, e Lovász [12] provou, em 1972, o Teorema dos Grafos Perfeitos.

**Teorema 6.7 (Teorema dos Grafos Perfeitos [Golumbic [11])** ] *O complemento de um grafo perfeito é perfeito.*

Assim, um grafo  $G$  é perfeito se e somente se  $\overline{G}$  é perfeito. Desta afirmação segue a outra condição necessária para um grafo  $G$  ser perfeito, o seu complemento também não pode conter um ciclo ímpar de tamanho maior ou igual a cinco e, portanto,  $G$  não contém o complemento de tais grafos como subgrafo induzido.

Dizer que a CFGP vale para uma classe de grafos é o mesmo que dizer que se um grafo  $G$ , pertencente à esta classe, não contém um  $C_n$ , para  $n \geq 5$  e  $n$  ímpar, nem o complemento de um, como subgrafo induzido, então  $G$  é perfeito.

A CFGP é válida para várias classes de grafos. Mais informações podem ser obtidas em [11]. Nesta seção, mostramos que a CFGP vale para os grafos UE. A demonstração apresentada neste texto é de Golumbic e Jamison [6] e utiliza que a CFGP vale para a classe de grafos sem  $K_{1,3}$  e o seguinte resultado sobre grafos minimalmente imperfeitos.

Um grafo  $G$  é *minimalmente imperfeito* se  $G$  não é perfeito mas todo subgrafo induzido de  $G$  é perfeito.

**Teorema 6.8 (Tucker [18] e Chvátal [1])** *Se  $G$  é minimalmente imperfeito, então, para todo vértice  $v$ , o subgrafo obtido de  $G$  pela remoção de  $v$  e de todos*

os seus vizinhos é conexo.

**Teorema 6.9 (Golumbic e Jamison [6])** *A CFGP vale para os grafos  $UE$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo  $UE$ . Queremos mostrar que, se  $G$  não tem, como subgrafo induzido, um  $C_n$ , com  $n \geq 5$  e  $n$  ímpar, e nem o complemento de um, então  $G$  é perfeito. Mas isto equivale a provar que se  $G$  não é perfeito, então  $G$  contém como subgrafo induzido um  $C_n$ , com  $n \geq 5$  e  $n$  ímpar, ou o complemento de um.

Então, seja  $G$  um grafo  $UE$  tal que  $G$  não seja perfeito. E seja  $H$ , subgrafo induzido de  $G$ , minimalmente imperfeito. Mostraremos que  $H$  é um grafo sem  $K_{1,3}$ , classe onde já se sabe que vale a CFGP.

Suponha que  $H$  tenha um  $K_{1,3}$  induzido, com vértice central  $v$  e folhas  $x$ ,  $y$  e  $z$  e seja  $\mathcal{P}$  uma família de caminhos em uma árvore  $T$ , tal que  $H = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ . Em  $T$ ,  $P_v$  deve ter aresta em comum com  $P_x$ ,  $P_y$  e  $P_z$ . Sejam  $I_{xv} = P_x \cap P_v$ ,  $I_{yv} = P_y \cap P_v$  e  $I_{zv} = P_z \cap P_v$ , em  $T$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $I_{yv}$  está entre  $I_{xv}$  e  $I_{zv}$  em  $P_v$ .

Observe que qualquer caminho em  $H$  de  $x$  a  $z$ , que é uma seqüência de caminhos de  $\mathcal{P}$  em  $T$ , deverá conter um vértice  $u$  tal que  $P_u \cap I_{yv} \neq \emptyset$ , chamaremos tal interseção em  $T$  de  $I_{uyv}$ . Logo,  $H - Adj(y)$  é um grafo desconexo, já que não haverá qualquer caminho entre  $x$  e  $z$  em  $H$ . Mas isto contradiz o teorema 6.8. Logo,  $H$  não tem um  $K_{1,3}$  como subgrafo induzido. Sendo assim, como a CFGP vale para grafos sem  $K_{1,3}$ ,  $H$  deve ter como subgrafo induzido um  $C_n$ , com  $n \geq 5$  e  $n$  ímpar, ou o complemento de um e, conseqüentemente, o grafo  $G$  terá, como subgrafo induzido, um  $C_n$ , para  $n \geq 5$  e  $n$  ímpar, ou o complemento de um. ■

Com este último teorema, temos, diretamente, o seguinte:

**Corolário 6.10 (Golumbic e Jamison [6])** *Um grafo  $UE$  é perfeito se e somente se ele não tem ciclos ímpares induzidos com mais do que três vértices.*

Pelo corolário 3.11, concluimos que um grafo  $UE$  não pode conter o complemento de um  $C_n$ , para  $n \geq 7$ . Além disso, o complemento de um  $C_5$  é o próprio grafo. Logo, basta, para um grafo  $UE$ , não ter  $C_n$ , com  $n \geq 5$  e  $n$  ímpar, para que este seja perfeito.

## 6.5 As Classes DE, DV, UEH, PERFEITO e CORDAL

Analisando a estrutura dos grafos *UEH*, após definir tal classe e provar os teoremas do separador, Monma e Wei [7] concluíram, a partir destes, as relações entre as classes *UEH*, *DE*, *DV*, *PERFEITO* e *CORDAL*. Reproduzimos, nesta seção, os resultados obtidos embora as demonstrações não sejam as do trabalho original de Monma e Wei.

**Teorema 6.11 (Monma e Wei [7])** *Um grafo é DE se e somente se é simultaneamente, UEH e perfeito.*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação *DE* de um grafo  $G$ . Sejam  $\mathcal{P}^*$  obtida a partir da família  $\mathcal{P}$  e  $T^*$  a partir de  $T$  desconsiderando o direcionamento das arestas. Observe que  $(\mathcal{P}^*, T^*)$  é uma representação *UE* de  $G$ .

Vamos mostrar que  $\mathcal{P}^*$  satisfaz a propriedade Helly em arestas.

Suponha que  $\mathcal{P}^*$  não satisfaz a propriedade Helly em arestas. Seja  $\mathcal{P}'$  uma subfamília de  $\mathcal{P}^*$  cujos caminhos se interseptom dois a dois mas a interseção de  $\mathcal{P}'$  é vazia.

Como  $\mathcal{P}'$  é uma família de caminhos em uma árvore, pelo teorema 2.7,  $\mathcal{P}'$  tem número Helly forte no máximo três e existem três caminhos  $P$ ,  $Q$  e  $R$  cuja interseção é igual à interseção de  $\mathcal{P}'$ .

Por hipótese,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  não podem ter uma aresta em comum, já que  $\mathcal{P}'$  não satisfaz a propriedade Helly em arestas. Mas, pelo lema 2.4,  $P$ ,  $Q$  e  $R$  devem ter um vértice  $q$  em comum. Além disso, estes caminhos se interseptom dois a dois, então, só podem passar em uma garra de  $T^*$ .

Mas, para qualquer direcionamento dado às arestas da garra, não se pode obter caminhos direcionados usando, cada um, duas das arestas, sem que todos usem uma mesma aresta. Porém, esta estrutura foi obtida a partir de uma representação *DE* de  $G$ , o que é uma contradição. Portanto,  $\mathcal{P}^*$  satisfaz a propriedade Helly e, conseqüentemente,  $G$  é *UEH*.

Pelo corolário 6.10,  $G$  é perfeito se e somente se não tem ciclos ímpares induzidos de tamanho maior ou igual a cinco. Suponha que  $G$  tenha um  $C_n$  induzido,  $n \geq 5$  e

$n$  ímpar. Como, pelo teorema 3.8, a representação de ciclos em grafos  $UE$  têm uma estrutura definida, deve existir em  $T^*$  uma estrela com um número ímpar de braços e caminhos em  $\mathcal{P}^*$  usando dois braços consecutivos.

Mas, para qualquer direcionamento atribuído às arestas da estrela, sempre existirá um vértice no ciclo que não pode ser representado por um caminho nesta estrutura. Logo,  $G$  não pode conter como subgrafos induzidos ciclos ímpares maiores ou iguais a cinco e, conseqüentemente,  $G$  é Perfeito.

( $\Leftarrow$ ) Seja  $G$  um grafo  $UEH$  e perfeito.

Suponha que  $G$  não seja  $DE$ . Vamos provar, inicialmente, que se os átomos de  $G$  forem  $DE$ ,  $G$  é  $DE$ . Para tal, basta construirmos uma árvore característica direcionada  $DE$  para  $G$  a partir das árvores dos átomos, de modo similar ao que foi feito na demonstração do teorema 5.6, sendo que, quando identificamos as arestas correspondentes ao Separador Clique  $C(w_0, w_1)$  em  $T_i$  e  $(u_0, u_1)$  em  $T^{i-1}$ , se a aresta direcionada em  $T_i$  correspondente a  $C$  for  $(w_0, w_1)$ , identificamos  $w_0$  com  $u_0$  e  $w_1$  com  $u_1$ . Se a aresta direcionada for  $(w_1, w_0)$ , a direção de todas as arestas de  $T_i$  é invertida e identificamos  $w_1$  com  $u_0$  e  $w_0$  com  $u_1$ . A operação para a construção dos caminhos é a mesma feita na demonstração do teorema 5.6.

Então, se tivermos uma representação  $DE$  para os átomos, o método acima descrito fornece uma representação  $DE$  para  $G$ . Como  $G$  não é  $DE$ , pelo menos um dos átomos de  $G$ , digamos  $G'$ , não é  $DE$ . Observe que, pelo teorema 5.17,  $G'$  é grafo linha de um multigrafo  $H$  sem triângulos.

**Fato 6.12** *Se  $H$  é um multigrafo bipartido sem triângulos, então  $G' = L(H)$  é  $DE$ .*

*Prova:* Seja  $H = (V, E)$  um multigrafo bipartido sem triângulos e  $G' = L(H)$ . Pelo teorema 3.18,  $G'$  tem uma representação  $(\mathcal{P}, T)$   $UEH$  tal que  $T$  é uma estrela. Existe uma correspondência entre os vértices de  $H$  e as arestas de  $T$ , pelo fato 6.6. Então podemos particionar as arestas de  $T$  em dois subconjuntos e não existem caminhos em  $\mathcal{P}$  usando duas arestas de um mesmo subconjunto, pois isto significa que existe uma aresta entre dois vértices de uma parte da bipartição de  $V$ . Logo, podemos direcionar as arestas de  $T$  em um mesmo subconjunto de modo que todas apontem para o centro de  $T$  e as do outro subconjunto devem partir do centro de

$T$ . Assim, todos os caminhos de  $\mathcal{P}$  são direcionados da mesma forma. Os caminhos direcionados e a árvore direcionada  $T$  constituem uma representação  $DE$  de  $G'$ . Portanto,  $G'$  é  $DE$ .

Continuando a demonstração do teorema, como  $G'$  não é  $DE$  mas é  $UEH$ ,  $H$  é um multigrafo sem triângulos e não é bipartido. Pelo teorema 2.1,  $H$  tem um ciclo ímpar maior ou igual a cinco, conseqüentemente, o grafo linha de  $H$  também tem. Assim,  $G'$  tem um ciclo ímpar com cinco ou mais vértices. Mas, durante todo o processo de decomposição por cliques, todos os subgrafos obtidos são subgrafos induzidos, logo, em  $G$  existe um ciclo ímpar de tamanho maior ou igual a cinco, o que contradiz o fato de  $G$  ser perfeito. Portanto,  $G$  é  $DE$ . ■

**Teorema 6.13 (Monma e Wei [7])** *Um grafo é  $DV$  se e somente se é simultaneamente,  $UEH$  e cordal.*

*Prova:* ( $\implies$ ) Seja  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $DV$  de um grafo  $G$ . Pelos teoremas 6.1 e 6.11,  $G$  é  $DE$  e, conseqüentemente,  $UEH$ . Na seção 2.2.1, vimos que se  $G$  é  $DV$ , então  $G$  é cordal.

Logo,  $DV \subset UEH \cap Cordal$ .

( $\impliedby$ ) Seja  $G$  um grafo simultaneamente  $UEH$  e cordal.

Pelo teorema 6.11 e pelo fato mostrado na seção 2.2.1 de todo grafo cordal ser perfeito,  $G$  é  $DE$  e cada subgrafo obtido na decomposição por cliques de  $G$  também é.

Usando o mesmo raciocínio da prova do teorema 6.11, podemos concluir que, para cada átomo  $G_i$ , existe uma estrela direcionada  $T_i$  e uma família de caminhos direcionados  $\mathcal{P}_i$  tal que  $G_i = \Omega_e(\mathcal{P}_i, T_i)$ . Podemos particionar as arestas de  $T_i$  em dois subconjuntos, o das arestas que apontam para o centro de  $T_i$  e o das arestas que partem deste.

Vamos construir uma representação  $(\mathcal{P}_i^*, T_i^*)$   $DV$  para os átomos como segue. Para cada aresta direcionada de  $T_i$  que é usada por algum caminho de  $\mathcal{P}_i$  é construído um vértice em  $T_i^*$ . Além disso, existe uma aresta direcionada  $(u, v)$  em  $T_i^*$  se algum caminho de  $\mathcal{P}_i$  passa pelas arestas de  $T_i$  correspondentes a  $u$  e a  $v$ . É construído

um caminho  $P^*$  em  $\mathcal{P}_i^*$  para cada caminho  $P$  de  $\mathcal{P}_i$  formado pelos vértices de  $T_i^*$  correspondentes às arestas pelas quais  $P$  passa em  $T_i$ . A construção descrita é exemplificada na figura 6.7.

Observe que  $P^*$  é um caminho.

Claramente, dois caminhos  $P$  e  $Q$  em  $\mathcal{P}_i$  têm uma aresta em comum em  $T_i$  se e somente se  $P^*$  e  $Q^*$  têm um vértice em comum em  $T_i^*$ . Um exemplo do processo descrito para construir  $T_i^*$  e  $\mathcal{P}_i^*$  é dado na figura 6.7.

Falta provarmos que o grafo  $T_i^*$  é uma árvore.

Suponha que  $T_i^*$  seja desconexo. Então existem vértices  $v$  e  $w$  em  $T_i^*$  entre os quais não há caminho. Isto significa, por construção, que existem caminhos  $P^*$  e  $Q^*$  em  $\mathcal{P}_i^*$  tais que  $P^*$  contém  $v$  e  $Q^*$  contém  $w$  e não existe caminho entre os vértices de  $P^*$  e os de  $Q^*$ . Neste caso, não existe caminho entre os vértices correspondentes à tais caminhos em  $G_i$ . Logo,  $G_i$  é desconexo, o que não acontece.

Suponha, agora, que existe um subgrafo induzido  $T'$  de  $T_i^*$  cujo subgrafo subjacente induzido é um ciclo. Como, por construção,  $T_i^*$  é bipartido, este ciclo é par. As arestas de  $T'$  são correspondentes à caminhos em  $\mathcal{P}_i^*$  e, por conseguinte, correspondem à vértices em  $G_i$ . Mas, então, há um ciclo par induzido por tais vértices em  $G_i$ . O que é uma contradição já que, por ser cordal,  $G_i$  não tem ciclos com quatro ou mais vértices.

Como  $T_i^*$  é conexo e o grafo subjacente para  $T_i^*$  é acíclico,  $T_i^*$  é uma árvore direcionada.

Assim,  $(\mathcal{P}_i^*, T_i^*)$  é uma representação  $DV$  de  $G_i$ .

Este processo pode ser feito para qualquer subgrafo obtido na decomposição por cliques e cada um destes subgrafos é cordal e  $UEH$ . Portanto, é possível obter uma representação  $DV$  de  $G$ . Daí,  $DV \supset UEH \cap Cordal$ , o que completa a prova. ■

## 6.6 As Classes $UEH$ e $CLIQUE\text{-}HELLY$

Como a propriedade Helly está diretamente envolvida na definição das classes  $UEH$  e  $Clique\text{-}Helly$ , é natural indagar se existe alguma relação entre estas classes.



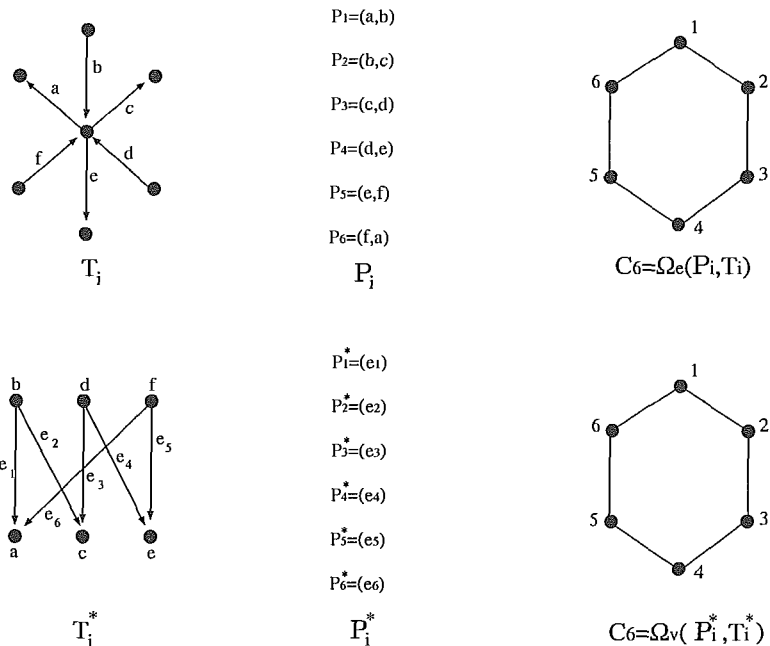


Figura 6.7: Exemplo da construção de  $T_i^*$  e  $\mathcal{P}_i^*$  descrita na prova do teorema 6.13 a partir da representação  $DE$  de um  $C_6$ .

Nesta seção, provamos que a classe  $UEH$  está contida na classe  $Clique\text{-}Helly$ .

**Teorema 6.14** *Todo grafo  $UEH$  é  $Clique\text{-}Helly$ .*

*Prova:* Seja  $G$  um grafo  $UEH$  e  $(\mathcal{P}, T)$  uma representação  $UEH$  de  $G$ , onde  $T$  é uma árvore característica de  $G$ .

Vamos mostrar que a família  $\mathcal{C}$  das cliques de  $G$  satisfaz a propriedade Helly.

Seja  $\mathcal{C}'$  uma subfamília de  $\mathcal{C}$  cujos elementos se interseptom dois a dois.

Suponha que existe um caminho  $Q$  em  $T$ , não necessariamente em  $\mathcal{P}$ , que contém todas as arestas clique de  $\mathcal{C}'$ . Como as cliques de  $\mathcal{C}'$  se interseptom duas a duas, existe um caminho  $P_v$  em  $\mathcal{P}$  que passa pelas arestas que são a primeira e a última aresta clique de  $Q$ . Logo,  $v$  está em todas as cliques de  $\mathcal{C}'$  e a interseção de  $\mathcal{C}'$  é não vazia. Assim,  $\mathcal{C}$  satisfaz a propriedade Helly é satisfeita.

Se não existe um tal caminho  $Q$  em  $T$ , então existe uma estrela em  $T$  com, pelo menos, três braços e com uma aresta clique de  $\mathcal{C}'$  em cada subárvore de  $T$  induzida pelo centro da estrela, um vizinho deste vértice e todos os vértices de  $T$  cujo caminho até o centro passa por este vizinho, como mostra a figura 6.8.

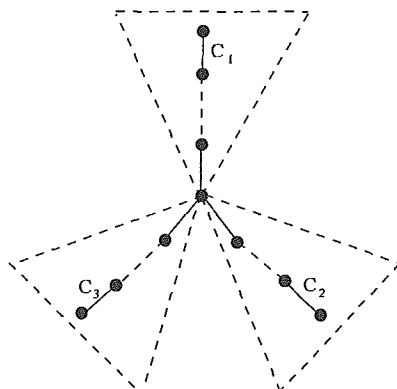


Figura 6.8: Estrutura da árvore  $T$  e das arestas clique de  $\mathcal{C}'$ .

Mas, como as cliques se interceptam duas a duas, existe um caminho  $P_{12}$  que passa pelas arestas clique  $C_1$  e  $C_2$ , um caminho  $P_{23}$  que passa por  $C_2$  e  $C_3$  e  $P_{13}$  passando por  $C_1$  e  $C_3$ . A subfamília de  $\mathcal{P}$  formada por  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  e  $P_{13}$  não satisfaz a propriedade Helly em arestas, o que é uma contradição.

Portanto,  $G$  é clique-Helly. ■

A recíproca do teorema 6.14 não é verdadeira. O grafo da figura 6.9, por exemplo, é clique-Helly mas não é  $UEH$ , como visto na seção 3.3.

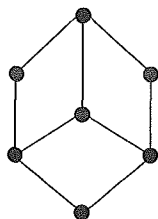


Figura 6.9: Exemplo de um grafo clique-Helly que não é  $UEH$ .

Observe também que o teorema não pode ser estendido para a classe  $UE$ . O grafo de Hajós (figura 3.1), por exemplo, é  $UE$  mas a família de cliques não satisfaz a propriedade Helly.

O diagrama 6.10 ilustra os resultados provados neste capítulo sobre as relações de inclusão entre as classes de grafos aqui mencionadas.

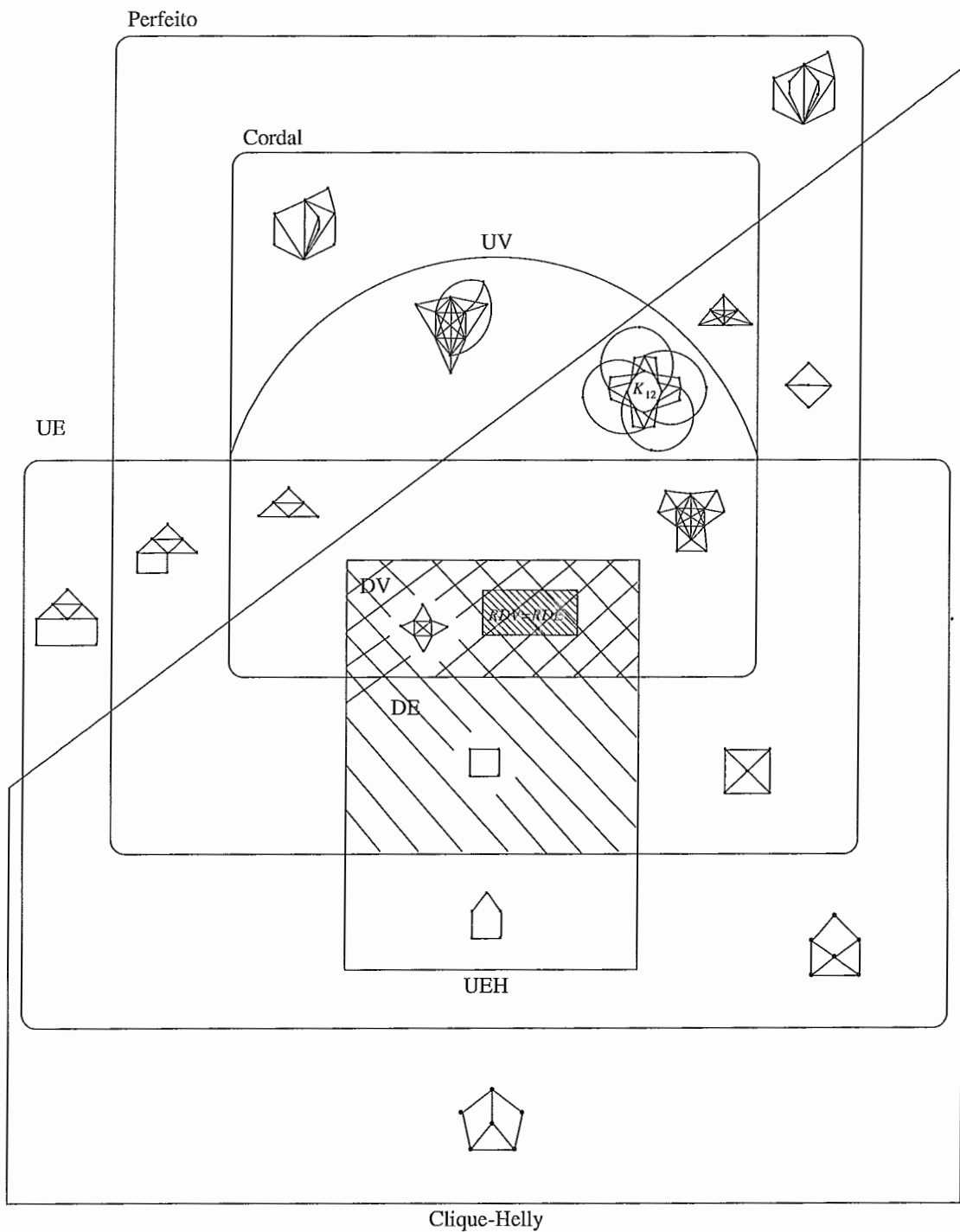


Figura 6.10: Diagrama das classes de grafos.

# Capítulo 7

## Considerações Finais

Neste trabalho foram abordados resultados da literatura referentes às classes de grafos  $UE$  e  $UEH$ , com ênfase em resultados estruturais, no problema do reconhecimento e relações de inclusão destas com outras classes. Em particular, provamos que todo grafo  $UEH$  é clique-Helly.

Outros resultados da literatura referentes a grafos  $UE$  e  $UEH$  dizem respeito à problemas clássicos de otimização.

O problema CLIQUE MÁXIMA para grafos  $UE$  foi provado ser polinomial por Golumbic e Jamison [6], como consequência da análise estrutural e suas cliques.

Tarjan, em seu trabalho sobre decomposição por separadores clique [17], aplica esta decomposição aos grafos  $UE$  e apresenta um algoritmo polinomial para resolver o problema CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO nesta classe.

Como consequência imediata da solução dos problemas CLIQUE MÁXIMA e CONJUNTO INDEPENDENTE MÁXIMO para  $UE$ , estes problemas são polinomiais para a classe  $UEH$ .

No trabalho mais completo sobre as classes de grafos de interseção de caminhos em uma árvore [7], Monma e Wei deixaram em aberto os problemas COBERTURA DE ARESTAS POR CLIQUES e COLORAÇÃO DE VÉRTICES para grafos  $UEH$ . Golumbic e Jamison já haviam provado [6] que estes problemas restritos à classe  $UE$  são NP-Completos. A prova de que COLORAÇÃO DE VÉRTICES é NP-Completo também para grafos  $UEH$  foi apresentada em [4].

Outra questão deixada em aberto por Monma e Wei em [7], e que até hoje assim permanece, é estender o teorema do separador para grafos  $UE$  em geral. Uma

possível aplicação deste resultado e dos teoremas de decomposição por cliques para grafos  $UEH$  e  $UE \cap Cordal$  é a determinação da família de subgrafos proibidos para estas classes.

Entre os problemas aqui tratados podemos citar o de melhorar a complexidade do algoritmo de reconhecimento de grafos  $UEH$  e a determinação de uma cota menor para o número de cliques de grafos  $UE$ .

As classes  $UE$  e  $UEH$  são ainda pouco estudadas e os demais problemas de otimização estão em aberto para estas classes. Esperamos que o leitor, após o estudo deste texto, sintá-se motivado a prosseguir na investigação de resultados ainda não estabelecidos para estas classes de grafos.

# Referências Bibliográficas

- [1] V. Chvátal. Star cutsets and perfect graphs. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 39:189–199, 1985.
- [2] T.A. McKee e F.R. McMorris. *Topics in Intersection Graph Theory*, volume 1 of *Monographs on Discrete Mathematics and Applications*. SIAM, Philadelphia, 1999.
- [3] S. Tsukiyama e M. Ide e M. Ariyoshi e I. Shirawaka. A new algorithm for generating all the maximal independent sets. *SIAM Journal of Computing*, 6:505–517, 1977.
- [4] M.R. Cerioli e P.C. Petito. O problema da coloração de vértices em grafos UEH. In *XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, page 98. SBMAC, 2002.
- [5] M.C. Golumbic e R.E. Jamison. Edge and vertex intersection of paths in a tree. *Discrete Mathematics*, 55:151–159, 1985.
- [6] M.C. Golumbic e R.E. Jamison. The edge intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 38:8–22, 1985.
- [7] C.L. Monma e V.K. Wei. Intersection graphs of paths in a tree. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 41:141–181, 1986.
- [8] F. Gavril. The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, 16:47–56, 1974.
- [9] F. Gavril. A recognition algorithm for the intersection graphs of directed paths in directed trees. *Discrete Mathematics*, 13:237–249, 1975.

- [10] F. Gavril. A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees. *Discrete Mathematics*, 23:211–217, 1978.
- [11] M.C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [12] L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discrete Mathematics*, 2:253–267, 1972.
- [13] N.D. Roussopoulos. A  $\max \{m, n\}$  algorithm for determining the graph  $h$  from its line graph  $g$ . *Information Processing Letters*, 2:108–112, 1973.
- [14] M.M. Sysło. On characterizations of cycle graphs and on other families of intersection graphs. Technical Report N-40, Institute of Computer Science, University of Wrocław - Poland, 1978.
- [15] M.M. Sysło. Triangulated edge intersection graphs of paths in a tree. *Discrete Mathematics*, 55:217–220, 1985.
- [16] J.L. Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, Rio de Janeiro, 1986.
- [17] R.E. Tarjan. Decomposition by clique separators. *Discrete Mathematics*, 55:221–232, 1985.
- [18] A. Tucker. The validity of the perfect graph conjecture for  $k_4$ -free graphs. *Discrete Mathematics*, 21:149–157, 1984.